NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

EEC

PAPER 7

MODULES XXV-XXVIII

ELECTIVE ECONOMICS HONOURS

প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোনো বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এ-ক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণ ক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে—যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃতি পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ-কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন; যখনই কোনো শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনো শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এর পর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হতে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপিকা (ড.) মণিমালা দাস
উপাচার্য

দ্বিতীয় পুনর্মুদ্রণ : ডিসেম্বর, 2008

ভারত সরকারের দূরশিক্ষা পর্ষদের বিধি অনুযায়ী এবং অর্থানুকুল্যে মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Council, Government of India.

পরিচিতি

বিষয় : ঐচ্ছিক অর্থনীতি (সপ্তম পত্র) সাম্মানিক স্তর

পাঠক্রম : EEC 07 পর্যায় : 25

	রচনা	সম্পাদনা
একক ১	ড. সুব্রত গুপ্ত	
একক ২	ঐ	
একক ৩	ঐ	
একক ৪	ঐ	

পাঠক্রম : EEC 07 পর্যায় : 26

	রচনা	সম্পাদনা
একক ১	ড. সুব্রত গুপ্ত	

পাঠক্রম : EEC 07 পর্যায় : 27

	রচনা	সম্পাদনা
একক ১	অধ্যাপিকা অরুন্ধতী দত্ত	অধ্যাপক অমিতাভ সেন
একক ২	ঐ	ঐ
একক ৩	ঐ	ঐ

পাঠক্রম : EEC 07 পর্যায় : 28

	রচনা	সম্পাদনা
একক ১	অধ্যাপিকা অরুন্ধতী দত্ত	অধ্যাপক অমিতাভ সেন
একক ২	ঐ	ঐ
একক ৩	ঐ	ঐ

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EEC-07

অর্থনীতির ঐচ্ছিক পাঠক্রম

(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়
25

পর্যায়
26

একক ১ ☐ উন্নয়ন অর্থনীতি

গঠন

১.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে আপনি বুঝতে পারবেন সমৃদ্ধি (growth) এবং উন্নয়ন (development)-এর মধ্যে পার্থক্য কি। পাশাপাশি, আপনার জানা হয়ে যাবে উন্নয়নের সংজ্ঞা এবং তা পরিমাপ করার সূচক কি। মানবসম্পদের উন্নয়ন বলতে ঠিক কী বোঝায়, সেটাও বুঝিয়ে দেওয়া হবে এখানে।

১.১ প্রস্তাবনা

উন্নয়ন অর্থনীতি সম্পর্কে আলোচনা করতে গেলে আমাদের প্রথমেই জানতে হবে সমৃদ্ধি (Growth) এবং উন্নয়নের (Development) মধ্যে মূল পার্থক্য কোথায়। এরপর আমাদের জানতে হবে উন্নয়ন বলতে কী বোঝায়। জনপ্রতি আয় কত তার সাহায্যে কি উন্নয়নের সঠিক ব্যাখ্যা করা সম্ভব? আমরা দেখব যে মাথাপিছু আয় উন্নয়নের ব্যাখ্যা করার জন্য যথেষ্ট নয়। মানবিক সম্পদও উন্নয়নের ব্যাখ্যার জন্য বিবেচ্য বিষয়।

উন্নয়নের লক্ষণগুলি বিবেচনা করার পর আমাদের পাঠ্যবস্তুর পরবর্তী ধাপ হবে দ্বি-স্তর বিশিষ্ট অর্থনীতি বলতে কি বোঝায় তা ব্যাখ্যা করা। উন্নয়নশীল দেশগুলিতে অর্থনৈতিক ব্যবস্থায় দুটি স্তর দেখা যায়, এবং একে বলা হয় দ্বি-স্তর বিশিষ্ট অর্থনৈতিক ব্যবস্থা (Economic Dualism)। এই দ্বি-স্তর বিশিষ্ট অর্থনৈতিক ব্যবস্থার পরিপ্রেক্ষিতে অধ্যাপক লুইস (Lewis) একটি মডেল তৈরি করেছেন। লুইসের পর হ্যারিস এবং টোডারো (Haris-Todaro) শ্রমিকরা কেন গ্রাম ছেড়ে শহরে চলে আসতে চায় তবে কারণ বিশ্লেষণ করে একটি মডেল তৈরি করেছেন। আমরা এই দুটি মডেল আলোচনা করব। হ্যারিস-টোডারো মডেলের আগে টোডারো একা একটি মডেল তৈরি করেছিলেন। আমরা সেটাও আলোচনা করব। উন্নয়নশীল দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়ন প্রক্রিয়ায় একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হল উৎপাদন পদ্ধতির নির্বাচন। উৎপাদন পদ্ধতি মূলধন নিবিড় হবে নাকি শ্রম নিবিড় হবে এটা নিয়ে বিতর্কের পরিবেশ আছে। আমরা দুটি দিকই আলোচনা করব। এ বিষয়ে মরিস ডব্ (Maurice Dobb) এবং অমর্ত্য সেন একটি মডেল তৈরি করেছেন। এই মডেলটির প্রয়োগ কতটা যুক্তিযুক্ত সেটাও আমরা দেখব।

অর্থনৈতিক উন্নয়নের পথে এগোবার জন্য স্বল্পোন্নত দেশগুলির অর্থ বিনিয়োগের পরিমাণ বাড়ানো দরকার। এখন দেখতে হবে, বিনিয়োগের লক্ষণ কি হবে। বিনিয়োগের লক্ষণ সম্পর্কেও বিভিন্ন মডেল আছে। আমরা এক্ষেত্রে তিনটি মডেল আলোচনা করব। এগুলি হল : (1) মূলধন উৎপাদন অনুপাত (Capital Output Ratio), (2) সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনের লক্ষণ (Social Marginal Productivity Criterion) এবং (3) গ্যালেনসন ও লিবেনস্টিন (Galenson-Leibenstein) প্রদত্ত বিনিয়োগ নীতি।

স্বল্পোন্নত দেশে বিনিয়োগ ঠিকভাবে হলে সমৃদ্ধির সম্ভাবনা উন্মুক্ত হয়। আমাদের সেক্ষেত্রে বিবেচনা করতে হবে সমৃদ্ধির কোন্ স্তরে দেশটি পৌঁছচ্ছে। কার্ল মার্ক্স (Karl Marx) অর্থনৈতিক উন্নয়নের স্তর নিয়ে প্রথম আলোচনা করেছিলেন। কার্ল মার্ক্সের ব্যাখ্যার বাইরে এ বিষয়ে অন্য ব্যাখ্যাও আছে। আমরা অর্থনৈতিক উন্নয়নের স্তর আলোচনায় অধ্যাপক রসটো (Rostow) প্রদত্ত ব্যাখ্যাটিও আলোচনা করব।

এবার আসুন, আমরা ধাপে ধাপে এই বিষয়গুলি আলোচনা করি।

সমৃদ্ধি ও উন্নয়ন (Growth and Development) : অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি (Economic Growth) ও অর্থনৈতিক উন্নয়ন (Economic Development) সমার্থক নয়। কোন দেশের আর্থিক সমৃদ্ধি হতে পারে, সেই সঙ্গে তার সার্বিক উন্নয়ন হতেও পারে, না-ও হতে পারে। একটি দেশের জাতীয় আয় বেড়ে যাওয়াই অর্থনৈতিক উন্নয়ন নয়, যদিও জাতীয় আয় বেড়ে যাওয়া অর্থাৎ অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি হওয়া অর্থনৈতিক উন্নয়নের একটি অঙ্গ। অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির সূচক হল কোন দেশের জাতীয় উৎপাদন

(National Output) এবং জাতীয় আয় (National Income) বৃদ্ধির হার—বিশেষ করে প্রকৃত জাতীয় আয় (Real National Income) বৃদ্ধির হার এবং সেই সঙ্গে মাথাপিছু প্রকৃত আয় বৃদ্ধির হার (Rate of increase in per capita real income)। এই দৃষ্টিভঙ্গী থেকে বিচার করলে অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি অর্থনৈতিক উন্নয়নের একটি প্রয়োজনীয় শর্ত (necessary condition) ; কিন্তু এটাই যথেষ্ট শর্ত (sufficient condition) নয়।

১.২ অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি

অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির প্রধান লক্ষণ হল জাতীয় আয় এবং সেই সঙ্গে মাথাপিছু প্রকৃত আয়ের (Per capita real income) বৃদ্ধি। অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে উৎপাদন সম্ভাবনার (Potentialities of production) সদ্ব্যবহার করা সম্ভব হয়। দেশের জাতীয় আয় বাড়লে যাতে জাতীয় আয় বৃদ্ধির হার অক্ষুণ্ণ থাকে সেজন্য উৎপাদনের কলা-কৌশলের উন্নয়ন করা, দেশের শ্রমিকদের কারিগরি দক্ষতা বাড়ানো, জাতীয় সঞ্চয় ও বিনিয়োগ বাড়ানো, দেশের রপ্তানি বাণিজ্য সম্প্রসারণ করা এবং দেশের মূলধন সৃষ্টির হার (rate of domesitc capital formation) বাড়ানো ও সেই সঙ্গে সামাজিক মূলধন সৃষ্টি করা (social capital formation) এবং অর্থনৈতিক পরিকাঠামো উন্নত করা অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির অঙ্গ। হ্যারডের (Harrod) মতে অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির হারকে সর্বাধিক করার উপায় হল, মূলধন-উৎপাদন অনুপাত (capital-output ratio) নিম্ন পর্যায়ে স্থির রেখে সঞ্চয়-আয় অনুপাত (saving-income ratio) যতটা সম্ভব বাড়ানো। যদি জাতীয় আয়ের একটি বড় অংশ সঞ্চয় ও বিনিয়োগ করা সম্ভব হয় এবং একটি নির্দিষ্ট মূলধনের অনুপাতে উৎপাদনী শক্তি বাড়ানো যায় (অথবা বিকল্পভাবে, নির্দিষ্ট পরিমাণ মূলধনের সাহায্যেই বাড়তি উৎপাদন অর্জন করা যায়) তবে সমৃদ্ধির হার (Growth rate) বাড়ে।

দেশে সঞ্চয় ও বিনিয়োগ কম হলে, মূলধনের উৎপাদনী শক্তি কম হলে এবং জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার খুব বেশি হলে দেশের সমৃদ্ধির হার কম হয়। অনেক সময় প্রাকৃতিক এবং খনিজ সম্পদের প্রাচুর্য (যেমন কুয়েত, আরব আমিরশাহী, প্রভৃতি দেশের তেলসম্পদ) সমৃদ্ধির হার বাড়িয়ে দিতে পারে। অধ্যাপক হ্যারড (Harrod) সঞ্চয়-আয় অনুপাত এবং মূলধন-উৎপাদন অনুপাতের ভিত্তিতে সমৃদ্ধির হারকে (Rate of Growth) এভাবে ব্যাখ্যা করেছেন :

$G = \frac{S}{C}$ এখানে G হল সমৃদ্ধির হার (rate of growth)।

G-কে এভাবেও প্রকাশ করা যায়, $G = \frac{\Delta y}{y}$; এখানে y হল জাতীয় আয় ; S হল সঞ্চয়-আয় অনুপাত (saving-income ratio) অথবা $\frac{s}{y}$ ।

এখানে একটি নির্দিষ্ট সময়ে সঞ্চয়-আয় অনুপাত বিবেচনা করা হয়েছে, অর্থাৎ $S = \frac{s_t}{y_t}$

এই সঞ্চয়-আয় অনুপাত বিনিয়োগ-আয় অনুপাতেরও $\left(\frac{I_t}{y_t}\right)$ সমান। কারণ, ভারসাম্য পর্যায়ের জাতীয় আয়ে সঞ্চয় = বিনিয়োগ। অপরদিকে 'C' হল প্রান্তিক মূলধন উৎপাদন অনুপাত (Marginal Capital–Output Ratio), অর্থাৎ, $C = \frac{I_t}{\Delta y_t}$.

হ্যারডের মডেল অনুযায়ী যদি সঞ্চয়-আয় অনুপাত বা বিনিয়োগ-আয় অনুপাত বেশি হয় এবং প্রান্তিক মূলধন-উৎপাদন অনুপাত কম হয়, অথবা নিচু পর্যায়ে স্থির থাকে তবে সমৃদ্ধির হারও বেশি হয়।

১.৩ অর্থনৈতিক উন্নয়ন (Economic Development)

অর্থনৈতিক উন্নয়ন (Economic Development) হল অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির অতিরিক্ত আরও কিছু অর্জনযোগ্য উপাদান।

অর্থনৈতিক উন্নয়ন অর্জন করতে হলে সমৃদ্ধি ছাড়া আরও কয়েকটি জিনিস অর্জন করা দরকার ; যেমন, অর্থনৈতিক স্থিতিশীলতা (Stability), আয়ের ন্যায়সঙ্গত বন্টন (Equitable Distribution of Income), অর্থনৈতিক পরিকাঠামোর উন্নয়ন ও প্রতিষ্ঠাগত উন্নয়ন, সামাজিক ন্যায় (Social Justice), জনসাধারণের ব্যাপক কল্যাণ (Mass Welfare), অর্থনৈতিক স্বয়ম্ভরতা (Self-reliance), সমৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে নৈতিক ও মানবিক মূল্যবোধের উন্নয়ন (Ethical and Human orientation of growth), এবং জনসাধারণের নাগরিক জীবনের প্রয়োজনীয় স্বাচ্ছন্দ্যের নিরাপত্তা, পুষ্টি, শিক্ষা, স্বাস্থ্য প্রভৃতি। সুতরাং অর্থনৈতিক উন্নয়ন হল অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির অতিরিক্ত আরও কিছু পরিবর্তন (growth plus change)। অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি অর্জিত হবার সঙ্গে সঙ্গে অর্থনৈতিক জীবনে স্থিতিশীলতা এসেছে কিনা, আয়ের সুষম ও ন্যায়সঙ্গত বন্টনের মাধ্যমে দারিদ্র্য দূর হচ্ছে কিনা, সামাজিক ন্যায় প্রতিষ্ঠিত হচ্ছে কিনা, অর্থাৎ সমাজের সব শ্রেণীর লোকের কাছে সমৃদ্ধির সুফল পৌঁছে যাচ্ছে কিনা, খাদ্য সরবরাহে ও জীবনযাত্রার প্রয়োজনীয় দ্রব্যাদির উৎপাদন ও সরবরাহে দেশ স্বয়ম্ভরতা অর্জন করতে পারল কিনা এবং দেশের জনসাধারণের জীবনযাত্রার মান উন্নত হল কিনা—সবই অর্থনৈতিক উন্নয়নের লক্ষণ হিসাবে বিবেচ্য।

অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির মূল কথা হল, অধিকতর উৎপাদন। অপরদিকে অর্থনৈতিক উন্নয়নের মূল কথা হল শুধু অধিকতর উৎপাদনই নয়, কিরূপ কারিগরি ও প্রতিষ্ঠানগত পরিবর্তনের (technical and institutional changes) দ্বারা অধিক উৎপাদন করা সম্ভব হয় তাও দেখতে হবে। বর্তমানে অর্থনৈতিক উন্নয়নের একটি বিশেষ দিক হল মানব উন্নয়ন (Human Development)। রাষ্ট্রসংঘের উন্নয়ন কর্মসূচী (United Nations

Development Programme) অনুযায়ী 1990 সাল থেকে প্রতি বছর একটি মানবিক উন্নয়ন প্রতিবেদন (Human Development Report) বেরোচ্ছে এবং বিভিন্ন দেশের উন্নয়নের মাত্রা বিচার করার জন্য একটি মানব উন্নয়ন সূচক (Human Development Index) তৈরি হয়েছে। জনসাধারণের প্রত্যাশিত আয়ু, স্বাস্থ্য, পুষ্টি, শিক্ষা, সক্ষমতা (capability), উৎপাদিত পণ্যের ওপর অর্জিত স্বত্ত্বাধিকার (entitlement) এবং সবরকমের সামাজিক সুরক্ষার (Social safety net) ভিত্তিতে এই সূচক তৈরি হয়েছে। মাহবুব-উল-হক (Mahbub-ul-Haq) এবং অমর্ত্য সেন অর্থনৈতিক উন্নয়নের মাপকাঠি হিসাবে মানবিক উন্নয়ন সূচকের ওপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করেছেন।

অর্থনৈতিক উন্নয়নের লক্ষণগুলি হল—(1) মাথাপিছু প্রকৃত জাতীয় আয়ের বৃদ্ধি, (2) জমি ও অন্যান্য প্রাকৃতিক সম্পদের সদ্ব্যবহার, (3) উন্নত ধরনের জীবনযাত্রার মান ও উন্নত অর্থনৈতিক পরিকাঠামো (Infrastructure), (4) দারিদ্র্যের বিলুপ্তি—অর্থাৎ জীবনযাত্রার ন্যূনতম প্রয়োজনগুলি (minimum needs), যেমন—স্বাস্থ্য, পুষ্টি, বাসস্থান ও শিক্ষা মেটানো, (5) দেশের সঞ্চয়, বিনিয়োগ ও মূলধন-সৃষ্টির হার বৃদ্ধি, (6) খাদ্যের ক্ষেত্রে স্বয়ম্ভরতা অর্জন, (7) কর্মসংস্থানের সম্প্রসারণ, (8) বৈদেশিক বাণিজ্যের বিশেষ করে রপ্তানি বাণিজ্যের উন্নতি, (9) উন্নত ধরনের কলা-কৌশল, (10) শ্রমিকদের কারিগরি দক্ষতা বৃদ্ধি, (11) দেশের ব্যাঙ্কিং ব্যবস্থা, পরিবহন ব্যবস্থা ও যোগাযোগ ব্যবস্থার উন্নয়ন এবং (12) আয়ের সুষম বণ্টন প্রভৃতি।

১.৩.১ অর্থনৈতিক উন্নয়নের উপাদান

অর্থনৈতিক উন্নয়নের উপাদানগুলি হল—প্রাকৃতিক সম্পদ, শ্রম বা জনসংখ্যা, মূলধন, প্রযুক্তি বা কলাকৌশল, অর্থনৈতিক পরিকাঠামোর উন্নয়ন এবং প্রতিষ্ঠাগত উন্নয়ন প্রভৃতি। প্রাকৃতিক সম্পদের সদ্ব্যবহার অর্থনৈতিক উন্নয়নের একটি অন্যতম উপাদান। কেননা এর মাধ্যমে উন্নয়ন প্রক্রিয়া কার্যকর হয়। কৃষির উন্নয়ন, জমির সদ্ব্যবহার, নতুন জমিতে কর্ষণ এবং জমিতে একাধিক চাষ-ব্যবস্থার প্রয়োগ ও একর-প্রতি উৎপাদন বৃদ্ধির ওপর নির্ভরশীল। ভূমি সংস্কারও এক্ষেত্রে খুবই গুরুত্বপূর্ণ। শুধু জমি নয়, অন্যান্য প্রাকৃতিক সম্পদও উন্নয়ন প্রক্রিয়ায় গুরুত্বপূর্ণ হতে পারে। প্রাকৃতিক গ্যাস ও নিউজপ্রিন্টের উৎপাদন প্রাকৃতিক সম্পদের ওপর নির্ভরশীল। অর্থনৈতিক উন্নয়নের আরেকটি উপাদান হল শ্রম সরবরাহ। সেই সঙ্গে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হারও বিবেচ্য। জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার খুব বেশি হলে উন্নয়ন প্রচেষ্টা ব্যাহত হয়, দেশে বেকার সমস্যার সৃষ্টি হয় এবং খাদ্যসামগ্রীর জন্য চাহিদা বেড়ে যায়। স্বল্পোন্নত দেশের পক্ষে বেকার সমস্যার সমাধান করা এবং খাদ্যশস্য উৎপাদনে স্বয়ম্ভরতা অর্জন করা খুবই কঠিন। অপরদিকে দেশে যদি উন্নয়নের জন্য প্রয়োজনীয় শ্রম-সরবরাহ না থাকে এবং শ্রমিকদের কর্মকুশলতা ও প্রয়োজনীয় কারিগরি দক্ষতা না থাকে তবে উন্নয়ন প্রচেষ্টা ব্যাহত হয়। সেজন্য কাম্য জনসংখ্যা হল অর্থনৈতিক উন্নয়নের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ উপাদান।

অর্থনৈতিক উন্নয়নের অন্যতম প্রধান উপাদান হল মূলধন। মূলধন বৃদ্ধি বা মূলধন সৃষ্টি হল উন্নয়নের একটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য। মূলধন সৃষ্টি নির্ভর করে সঞ্চয়ের ওপর। সঞ্চয়ের সৃষ্টি, সঞ্চয়ের সংহতিকরণ এবং সঞ্চয়ের বিনিয়োগের ওপর। সঞ্চয় তিনপ্রকার হতে পারে—ব্যক্তিগত সঞ্চয়, যৌথ মূলধনী সঞ্চয় এবং সরকারি সঞ্চয়। সঞ্চয় নির্ভর করে জনসাধারণের ও ব্যবসায়ী সংস্থাগুলির সঞ্চয়ের ইচ্ছা ও ক্ষমতার ওপর। এক্ষেত্রে দেশের অর্থনৈতিক পরিকাঠামো ও ব্যাঙ্কিং ব্যবস্থা গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে।

উন্নত ধরনের কলাকৌশল বা উন্নত প্রযুক্তি হল অর্থনৈতিক উন্নয়নের আরেকটি উপাদান। স্বল্পোন্নত দেশে উন্নত প্রযুক্তির অভাব থাকায় বিদেশ থেকে উন্নত প্রযুক্তি আমদানি করতে হয়।

অর্থনৈতিক উন্নয়ন দেশের অর্থনৈতিক পরিকাঠামোর (infrastructure) ওপরও নির্ভরশীল। এক্ষেত্রে পরিবহন ও যোগাযোগ ব্যবস্থার উন্নয়ন খুবই গুরুত্বপূর্ণ। সেই সঙ্গে দেশের ব্যাঙ্কিং ব্যবস্থারও উন্নয়ন প্রয়োজন। অর্থনৈতিক পরিবেশও বিনিয়োগের পক্ষে অনুকূল থাকা প্রয়োজন। মানবিক মূলধনে উপযুক্ত বিনিয়োগ, শিক্ষার সম্প্রসারণ, জনসাধারণের স্বাস্থ্য ও পুষ্টি প্রভৃতিও উন্নয়নের উপাদান হিসাবে বিবেচিত হয়।

অর্থনৈতিক উন্নয়নে পরিবেশ (environment) সংরক্ষণ খুব জরুরী। পরিবেশ দূষণের (pollution) বিরুদ্ধে ব্যবস্থা না নিলে উন্নয়নের প্রচেষ্টা ব্যাহত হয়।

১.৪ মাথাপিছু আয় কি অর্থনৈতিক উন্নয়ন পরিমাপ করার সূচক? (Is per Capita income an index of development?

মোট জাতীয় উৎপাদনকে দেশের জনসমষ্টি দিয়ে ভাগ করলে মাথাপিছু আয় বের করা যায়। মাথাপিছু আয়ের মাধ্যমে ধনী দেশ ও গরিব দেশের মধ্যে উন্নয়নের পার্থক্য (development gap) বিচার করা হয়। উন্নয়নের অভাব বলতে যদি কোনো দেশের দারিদ্র্য বোঝায় তবে মাথাপিছু আয় উন্নয়নের সূচক হিসাবে ব্যবহৃত হতে পারে। তবে মাথাপিছু আয়ের বৃদ্ধি অর্থনৈতিক উন্নয়নের একমাত্র নির্দেশক নয়। জনসংখ্যা কমে গেলে অথচ মোট জাতীয় আয় স্থির থাকলে এবং জাতীয় আয় না বাড়লেও মাথাপিছু আয় বাড়তে পারে। জাতীয় আয় বৃদ্ধির অনুপাত জনসংখ্যা কম থাকলে (যেমন, কুয়েত এবং সংযুক্ত আরব আমিরশাহী প্রভৃতি দেশে) মাথাপিছু আয় বাড়তে পারে। আবার মাথাপিছু আয় বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে যদি জিনিসপত্রের দাম বেড়ে যায়, অথচ আয়ের সমবণ্টন না হওয়ায় দরিদ্রদের আর্থিক অবস্থার অবনতি হয়, তবে তাদের মাথাপিছু প্রকৃত আয় (Per capita real income) কমে যায়। সেক্ষেত্রে অর্থনৈতিক উন্নয়ন হয়েছে বলা যায় না। মাথাপিছু প্রকৃত আয় অর্থনৈতিক উন্নয়নের অন্যতম নির্দেশক, কিন্তু একমাত্র নির্দেশক নয়। জাতীয় আয় বৃদ্ধি ও মাথাপিছু প্রকৃত আয় বৃদ্ধি, অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির প্রধান বৈশিষ্ট্য সন্দেহ নেই। কিন্তু অর্থনৈতিক উন্নয়নের জন্য জাতীয় আয় ও মাথাপিছু প্রকৃত আয় বৃদ্ধির সঙ্গে তার সুষম বন্টনের দিকটিও গুরুত্বপূর্ণ। এজন্য বলা যায় যে মাথাপিছু আয়ের বৃদ্ধি অর্থনৈতিক উন্নয়নের একটি প্রয়োজনীয় শর্ত হলেও এটা যথেষ্ট নয়।

যাঁরা মাথাপিছু আয়ের বৃদ্ধিকে অর্থনৈতিক উন্নয়নের মাপকাঠি হিসাবে বিবেচনা করতে চান, তাঁদের যুক্তি হল, মাথাপিছু প্রকৃত আয় বাড়লে জনসাধারণের জীবনযাত্রার মান উন্নত হয় এবং তাদের শিক্ষা, স্বাস্থ্য, আবাসন প্রভৃতি ক্ষেত্রেও উন্নতি হয়। সামাজিক সুরক্ষাও সেক্ষেত্রে সুনিশ্চিত হয়। এই যুক্তিটি তখনই গ্রহণযোগ্য যখন মাথাপিছু প্রকৃত আয় বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে বর্ধিত আয়ের সমবন্টন হয়। আবার এমনও হতে পারে, বর্ধিত জনসংখ্যার জন্য কোনো দেশে মাথাপিছু আয় কম, অথচ সেই দেশটি উন্নয়নের পথে অনেকটাই এগিয়ে গেছে। সুতরাং মাথাপিছু আয় সব সময়ে উন্নয়নের পরিমাপক হতে পারে না। একই সঙ্গে জনসংখ্যা বৃদ্ধি ও জাতীয় আয় বৃদ্ধি পেলে মাথাপিছু আয় স্থির থাকতে পারে। তবে দুটি দেশের মধ্যে উন্নয়নের মাত্রা তুলনা করার ক্ষেত্রে মাথাপিছু আয় একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা গ্রহণ করে।

অধ্যাপক সিয়ার্স (Seers) মনে করেন মাথাপিছু প্রকৃত আয় নয়,—উন্নয়নের মূল কথা হল, দারিদ্র্যের, মানুষের মৌল প্রয়োজনগুলি মেটাবার সামর্থ্য অর্জন এবং আত্মমর্যাদা বজায় রেখে জীবনধারণ করার ক্ষমতা।

১.৫ মানব সম্পদের উন্নয়ন (Development of Human Resources)

অর্থনৈতিক উন্নয়নের একটি বিশেষ দিক হল মানব সম্পদের উন্নয়ন। জীবনধারণের জন্য একান্ত প্রয়োজনীয় দ্রব্যের বন্টন আরও ব্যাপক করা,—যেমন খাদ্য, আশ্রয়, স্বাস্থ্য এবং সব ধরনের সামাজিক সুরক্ষার ব্যবস্থা করা উন্নয়নের একটি গুরুত্বপূর্ণ দিক।

মানব সম্পদ হল দেশের মোট জনসমষ্টি। জনসমষ্টির বৃদ্ধি হওয়া (Growth of population) দেশের পক্ষে দায় (liability) হিসাবে বিবেচিত না হয়ে সম্পদ (asset) হিসাবেও বিবেচিত হতে পারে যদি সেই জনসমষ্টিকে উন্নয়নের কাজে ঠিকভাবে ব্যবহার করা যায়। এক্ষেত্রে প্রয়োজন হল, মানব সম্পদের যথাযথ উন্নয়ন এবং সেটা হতে পারে যদি জনসাধারণের জীবনযাত্রার মান উন্নত হয়, এবং অধিকতর আয় উপার্জন করে মৌলিক প্রয়োজনগুলি মেটাবার মতো সক্ষমতা (Capacity) জনসাধারণ অর্জন করে। দেশের কর্মক্ষম মানুষের জন্য কাজের সংস্থান হওয়া, শিক্ষার মান উন্নত হওয়া এবং কারিগরী দক্ষতার সম্প্রসারণ হওয়া,, এগুলি হল মানব সম্পদ যথাযথ ব্যবহারের বিভিন্ন দিক। এগুলি অর্জিত হলে শুধু যে ব্যক্তির বস্তুগত কল্যাণই (material welfare) বাড়ে তা নয়, জাতীয় পর্যায়েও দেশের মর্যাদা বাড়ে।

রাষ্ট্রসংঘের উন্নয়ন কর্মসূচী (United Nations Development Programme) অনুযায়ী 1990 সাল থেকে প্রতিবছর যে মানব উন্নয়ন প্রতিবেদন (Human Development Report) বেরোয় তাতে বিভিন্ন দেশের উন্নয়নের মাত্রা তুলনা করার জন্য একটি মানব উন্নয়ন সূচক (Human Development Index)

তৈরি করা হয়। জনসাধারণের প্রত্যাশিত আয়ু, স্বাস্থ্য, পুষ্টি, শিক্ষা, সক্ষমতা (capability), মাথাপিছু আয়, উৎপাদিত দ্রব্যের ওপর স্বত্বাধিকার (entitlement) এবং সবরকম সামাজিক সুরক্ষার (social safety net) ভিত্তিতে এই সূচক তৈরি করা হয়। মাহবুব-উল হকের (Mahbub-ul Haq) প্রচেষ্টা এবং অমর্ত্য সেনের প্রেরণা মানব উন্নয়ন সূচক তৈরি করার পেছনে কাজ করেছে।

মানব উন্নয়ন সূচক (HDI) তৈরি করার জন্য তিন ধরনের তথ্যের প্রয়োজন,—প্রথম, জন্মকালে প্রত্যাশিত গড়পড়তা আয়ু ; দ্বিতীয়, শিক্ষার মান যা মাপা হয় সাক্ষরতার হার ও স্কুলে ভর্তির হারের সাহায্যে, এবং তৃতীয়, মাথাপিছু জাতীয় আয় এবং আভ্যন্তরীণ জাতীয় উৎপাদন (GDP)। এই তিন ধরনের তথ্যের সমন্বয় ঘটিয়ে মানব উন্নয়ন সূচক পাওয়া যায়। এই সূচকের সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান 0(zero) সূচকের মান 0.8-এর ঊর্ধ্বে উঠলে কোনো দেশের মানব উন্নয়ন সূচক উত্তম অথবা প্রথম শ্রেণীভুক্ত হিসাবে বিবেচিত হয়। যদি এই সূচক 0.5 থেকে 0.8-এর ভিতর থাকে, তবে মানব উন্নয়ন সূচক মধ্যম অথবা দ্বিতীয় শ্রেণীভুক্ত হিসাবে বিবেচিত হয়। আবার যদি এই সূচক 0.5-এর নীচে থাকে তবে সংশ্লিষ্ট দেশের মানব উন্নয়ন অধম অথবা তৃতীয় শ্রেণীভুক্ত। 2000 সালে মানব উন্নয়ন সূচক ভারতের ক্ষেত্রে হল 0.569, অর্থাৎ ভারতের মানব উন্নয়ন মধ্যমস্থানীয়। 1999 সালের সূচকেও ভারত তৃতীয় শ্রেণীভুক্ত ছিল। উন্নয়নের মাত্রার ভিত্তিতে ভারতের ক্রম-অবস্থান হল 128 ; বিশ্বের বিভিন্ন দেশের মধ্যে মানব উন্নয়ন সূচকে এখন শীর্ষস্থানে আছে কানাডা।

মানবসম্পদ উন্নয়ন স্ত্রীলোক ও শিশুদের জীবনধারণের উন্নয়নের ওপর ভিত্তিশীল। এ বিষয়ে অমর্ত্য সেনের চিন্তাধারা অর্থনৈতিক উন্নয়নের নূতন ধারার সৃষ্টি করেছে। অমর্ত্য সেন তাঁর একটি নিবন্ধে [যার বিষয় হল, "Development : Which way now?" (1983)] অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রতি দৃষ্টিভঙ্গী আমূল পাল্টে দিয়েছেন। 1990 সালে মানব উন্নয়ন প্রতিবেদনে বলা হয়েছিল, "জনসাধারণই হল একটি জাতির প্রকৃত সম্পদ" (People are the real wealth of a nation.") এবং উন্নয়নের মূল উদ্দেশ্য হল জনসাধারণের জন্য এমন একটি পরিবেশ সৃষ্টি করা যাতে তারা দীর্ঘ, স্বাস্থ্যসমৃদ্ধ, সৃজনশীল জীবনযাপন করতে সমর্থ হয়। মানব উন্নয়নই হচ্ছে লক্ষ্য—অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি সেই লক্ষ্যে পৌঁছোবার একটি উপায় (Human development is the end,—economic growth a means".)। এই প্রতিবেদনে যে কথাগুলি বলা হয়েছে সেগুলি অমর্ত্য সেনের বক্তব্যের পুনরুক্তি ছাড়া কিছুই নয়। অমর্ত্য সেন সমাজের অবহেলিত অংশের জন্য সামাজিক সুরক্ষা, গরিব জনসাধারণের সক্ষমতা অর্জন, উৎপাদিত দ্রব্যের ওপর জনসাধারণের স্বত্বাধিকার অর্জন, শিক্ষার সম্প্রসারণ, আয়ের বৈষম্য দূরীকরণ এবং সামাজিক সুযোগের সমবণ্টন প্রভৃতিকেই মানবসম্পদ উন্নয়নের মাপকাঠি হিসাবে বিবেচনা করেছেন। উন্নয়ন হল এক ধরনের স্বাধীনতা,—এই স্বাধীনতা হল দ্রব্য নির্বাচনের, দ্রব্যভোগের এবং সামাজিক সুযোগ ভোগ করার স্বাধীনতা। অমর্ত্য সেন তাঁর সর্বশেষ বই "Development As Freedom" (1999) বইয়ে এই স্বাধীনতার ওপর জোর দিয়েছেন।

এই স্বাধীনতার স্বার্থে দুর্নীতি প্রতিরোধ করা খুবই জরুরী। কেননা উন্নয়নের সুফল সমানভাবে ও ন্যায়সঙ্গতভাবে বণ্টন করার পথে দুর্নীতিই একটি বড় বাধা। স্বচ্ছ প্রশাসনের ক্ষেত্রেও দুর্নীতি অন্যতম বাধা এবং তাতে মানবাধিকার ক্ষুণ্ণ হয়। ক্ষুধা ও অপুষ্টি থেকে মুক্তি পাবার স্বাধীনতার মধ্যে নিহিত রয়েছে মানবসম্পদ উন্নয়নের সার্থকতা।

এখন প্রশ্ন উঠতে পারে, জনসংখ্যা বৃদ্ধি কি মানবসম্পদ উন্নয়নের পরিপন্থী নয়? যে দেশ খাদ্যাভাবে এবং বেকার সমস্যায় জর্জরিত সেদেশের পক্ষে অতিরিক্ত জনসংখ্যা বৃদ্ধি উন্নয়নের পরিপন্থী হতে পারে। কিন্তু যদি বর্ধিত জনসমষ্টির জন্য খাদ্যের যোগান দেওয়া সম্ভব হয় এবং দারিদ্র্য দূরীকরণ ও কর্মসংস্থানের ব্যবস্থা করা সম্ভব হয় তাহলে জনসংখ্যা বৃদ্ধি মানবসম্পদ উন্নয়নের ক্ষেত্রে সমস্যার সৃষ্টি নাও করতে পারে। সমস্যা হল, মানুষ যাতে খাদ্যের অভাব, অপুষ্টি এবং বেকারত্বের সমস্যায় জর্জরিত না থাকে তার ব্যবস্থা করা। জনসংখ্যা বৃদ্ধি প্রতিরোধ করা নিশ্চয়ই দরকার। কিন্তু সেটা সম্ভব হয় শিক্ষার সম্প্রসারণের মাধ্যমে। শিক্ষার সম্প্রসারণ অর্থনৈতিক উন্নয়নেরই একটি অঙ্গ।

১.৬ সারাংশ

1. **অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি ও অর্থনৈতিক উন্নয়নের মধ্যে পার্থক্য**

অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি ও অর্থনৈতিক উন্নয়ন এক জিনিস নয়। তবে অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি অর্থনৈতিক উন্নয়নের একটি প্রয়োজনীয় শর্ত। অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির সূচক হল কোনো দেশের জাতীয় উৎপাদন অথবা জাতীয় আয় বৃদ্ধির হার। বিশেষ করে প্রকৃত জাতীয় আয় এবং সেই সঙ্গে মাথাপিছু প্রকৃত জাতীয় আয় বৃদ্ধির হারও এক্ষেত্রে বিবেচ্য। অপরদিকে অর্থনৈতিক উন্নয়ন অর্জন করতে হলে জাতীয় আয় বৃদ্ধি অথবা মাথাপিছু আয়ের বৃদ্ধি ছাড়া আরও কয়েকটি জিনিস অর্জন করা দরকার। যেমন, অর্থনৈতিক স্থিতিশীলতা, আয়ের ন্যায়সঙ্গত বণ্টন, সামাজিক ন্যায়, জনসাধারণকে ব্যাপক কল্যাণ, দারিদ্র্য দূরীকরণ, পুষ্টি, স্বাস্থ্য, শিক্ষা, অর্থনৈতিক স্বয়ম্ভরতা, জনসাধারণের নাগরিক জীবনের স্বাচ্ছন্দ্যের নিরাপত্তা এবং সমৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে মানবিক ও নৈতিক মূল্যবোধের উন্নয়ন সুতরাং অর্থনৈতিক উন্নয়ন হল অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির অতিরিক্ত আরও কিছু পরিবর্তন (growth plus changes)।

হ্যারডের মতে যদি সঞ্চয়-আয় অনুপাত বা বিনিয়োগ আয় অনুপাত বেশি হয় এবং প্রান্তিক মূলধন-উৎপাদন অনুপাত কম ও স্থিতিশীল থাকে, তবে সমৃদ্ধির হারও বেশি হয়।

অর্থনৈতিক উন্নয়নের উপাদানগুলি হল, প্রাকৃতিক সম্পদের সদ্ব্যবহার, বিশেষ করে জমির সদ্ব্যবহার ও ভূমিসংস্কার, দেশের জনসমষ্টির যথাযথ ব্যবহার ও কাম্য জনসংখ্যা, মূলধন সৃষ্টি, উন্নত ধরনের কলাকৌশল প্রয়োগের মাধ্যমে উৎপাদন, অর্থনৈতিক পরিকাঠামোর উন্নয়ন এবং উন্নত পরিবেশ বজায় রাখা ও দূষণ

প্রতিরোধ। মানবিক মূলধনের উপযুক্ত বিনিয়োগ, শিক্ষার সম্প্রসারণ, জনসাধারণের স্বাস্থ্য ও পুষ্টি প্রভৃতিও উন্নয়নের উপাদান হিসাবে বিবেচিত হয়।

2. অর্থনৈতিক উন্নয়নের সূচক হিসাবে মাথাপিছু আয়

মাথাপিছু আয়ের বৃদ্ধি অর্থনৈতিক উন্নয়নের সূচক হিসাবে সবসময় বিবেচিত হতে পারে না। তবে মাথাপিছু প্রকৃত আয়ের বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে যদি বর্ধিত আয়ের সমবণ্টন হয় তবে সেটা অর্থনৈতিক উন্নয়নের অন্যতম সূচক হিসাবে বিবেচিত হয়। অনেক সময় জনসংখ্যা বেড়ে গেলে অথচ জাতীয় আয় স্থির থাকলে মাথাপিছু আয় কমে যায়। আবার এমনও হতে পারে, জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার এবং জাতীয় উৎপাদন আয় স্থির আছে। মাথাপিছু আয়কে ভিত্তি করে বিভিন্ন দেশের উন্নয়নের মাত্রার পরিমাপ করা হলেও অর্থনৈতিক উন্নয়নের সবকিছু মাথাপিছু আয় দিয়ে ব্যাখ্যা করা যায় না।

3. মানব সম্পদের উন্নয়ন

রাষ্ট্রসংঘের উন্নয়ন কর্মসূচী অনুযায়ী প্রতিবছর (1990 সাল থেকে) একটি মানবিক উন্নয়ন প্রতিবেদন বেরোয় এবং বিভিন্ন দেশের উন্নয়নের স্তর বিবেচনার জন্য একটি মানবিক উন্নয়ন সূচী তৈরি করা হয়। জনসাধারণের প্রত্যাশিত আয়ু, স্বাস্থ্য, পুষ্টি, পণ্য অর্জন ও ভোগের সক্ষমতা, উৎপাদিত পণ্যের ওপর স্বত্বাধিকার এবং সবরকম সামাজিক সুরক্ষার ভিত্তিতে এই সূচক তৈরি করা হয়। 1990 সালের মানবিক উন্নয়ন প্রতিবেদন অনুযায়ী জনসাধারণ হল একটি জাতির প্রকৃত সম্পদ। জনসাধারণের শিক্ষা, স্বাস্থ্য, আশ্রয়, পুষ্টি, সক্ষমতা প্রভৃতি সামাজিক সুরক্ষা সুনিশ্চিত করার জন্য মানবিক সম্পদ বিনিয়োগ অর্থনৈতিক উন্নয়নের পথ সুগম করে। আয়ের বৈষম্য ও দারিদ্র্য দূরীকরণ এবং সামাজিক সুযোগের সমবণ্টনও অর্থনৈতিক উন্নয়নের মাপকাঠি।

১.৭ অনুশীলনী

1. **নিচের প্রশ্নগুলির সংক্ষিপ্ত উত্তর দিন।**
   - (i) অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি বলতে কী বোঝায়?
   - (ii) মাথাপিছু আয় বলতে কী বোঝায়?
   - (iii) সঞ্চয়-আয় অনুপাত বাড়লেই কি সমৃদ্ধির হার বাড়ে?
   - (iv) অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি ও অর্থনৈতিক উন্নয়ন কি সমার্থক?
   - (v) মাথাপিছু আয় কি অর্থনৈতিক উন্নয়নের একমাত্র সূচক?
   - (vi) মানবিক উন্নয়ন সূচক কী?
   - (vii) অর্থনৈতিক উন্নয়নের কি কি লক্ষণ?
   - (viii) অর্থনৈতিক উন্নয়নের উপাদানগুলি কি কি?

2. শূন্যস্থান পূরণ করুন :

(i) অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি ও অর্থনৈতিক উন্নয়ন ________ নয়।

(ii) সঞ্চয়-আয় অনুপাত ________ এবং প্রান্তিক মূলধন উৎপাদন অনুপাত ________ থাকলে সমৃদ্ধির ________ হার।

(iii) মানবিক উন্নয়ন প্রতিবেদন অনুযায়ী জনসাধারণ হল একটি জাতির ________ ________ ।

(iv) মাথাপিছু আয় অর্থনৈতিক উন্নয়নের একমাত্র ________ নয়।

(v) মূলধন সৃষ্টি অর্থনৈতিক উন্নয়নের অন্যতম ________ ।

(vi) মানবসম্পদের উন্নয়ন অর্থনৈতিক উন্নয়নের একটি গুরুত্বপূর্ণ ________ ।

(vii) অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির সূচক হল জাতীয় উৎপাদনের ________ ।

(viii) অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি অর্থনৈতিক উন্নয়নের একটি প্রয়োজনীয় শর্ত, কিন্তু এটাই ________ শর্ত নয়।

❑ প্রশ্নমালা

1. অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি এবং অর্থনৈতিক উন্নয়নের মধ্যে পার্থক্য নির্দেশ করুন।
2. অর্থনৈতিক উন্নয়নের বিভিন্ন লক্ষণ ও উপাদান সম্পর্কে আলোচনা করুন।
3. মাথাপিছু আয় কি অর্থনৈতিক উন্নয়নের নির্দেশক?
4. অর্থনৈতিক উন্নয়নে মানবসম্পদ উন্নয়নের ভূমিকা আলোচনা করুন।
5. অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি বলতে কি বোঝায়?
6. "অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি ও অর্থনৈতিক উন্নয়ন সমার্থক নয়"।—উক্তিটির বিশদ ব্যাখ্যা করুন।
7. অর্থনৈতিক উন্নয়ন বলতে কী বোঝায়?
8. অর্থনৈতিক উন্নয়নের উপাদানগুলি কি কি?

১.৮ গ্রন্থপঞ্জী

1. Todaro M. P.—*Economics for a Developing Economy* (Longman, London and New York 1982)
2. Thirlwall A. P.—*Growth and Development with Special Reference to Developing Economics* (ELBS/MacMillan 1983.)
3. Sen Amartya—*Development : Which Way Now*? Economic Journal, Vol. 93, 1983.
4. Gouvlet D.—*The Cruel Choice ; A New Concept on the Theory of Development* (New York : Atheneum 1971)
5. Gupta Subrata and Sujit Ghosh—*A Tract On Economic Development : Process and Perspectives* (Charu Publishing Company, Kolkata, 1992)

একক ২ ☐ দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনৈতিক ব্যবস্থা—লুইস মডেল এবং হ্যারিস-টোডারো মডেল (Dualism—Economic Dualism—Lewis Model and Harris-Todaro Model)

গঠন

২.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে স্বল্পোন্নত দেশগুলির দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট ব্যবস্থা বা Dualism সম্বন্ধে একটি ধারণা গড়ে নিতে পারবেন। বিখ্যাত অর্থনীতিবিদ লুইস-এর পুঁজি পুনর্বিনিয়োগের তত্ত্ব, শ্রমিকদের গ্রাম থেকে শহরে স্থানান্তর সম্পর্কে টোডারো এবং হ্যারিস-টোডারোর তত্ত্ব সম্পর্কেও আপনি বুঝতে পারবেন। পরিণামে অসংগঠিত ও সংগঠিত ক্ষেত্রের পার্থক্যও আপনার কাছে স্পষ্ট হয়ে যাবে।

২.১ প্রস্তাবনা

স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট ব্যবস্থা (Dualism in Less developed countries)

স্বল্পোন্নত দেশগুলির অন্যতম বৈশিষ্ট্য হল দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনৈতিক ব্যবস্থা, স্বল্পোন্নত দেশগুলির অর্থনৈতিক ব্যবস্থায় সামাজিক দ্বি-ক্ষেত্র (Social Dualism), অর্থনৈতিক দ্বি-ক্ষেত্র (Economic Dualism)

ভৌগোলিক বা আঞ্চলিক ক্ষেত্র (Spatial Dualism), কলাকৌশলের ক্ষেত্রে দ্বি-ক্ষেত্র (Technological Dualism) এবং আর্থিক দ্বি-ক্ষেত্র (Financial Dualism) পরিলক্ষিত হয়।

(ক) **সামাজিক দ্বিক্ষেত্র (Social Dualism)** : স্বল্পোন্নত দেশে সমাজের সর্বত্র অর্থনৈতিক উন্নয়নের স্তর একপ্রকার থাকে না। নাগরিক জীবনে যে স্বাচ্ছন্দ্য ও জীবনযাত্রার মান পরিলক্ষিত হয়, গ্রামীণ জীবনে সেটা পরিলক্ষিত হয় না। এক্ষেত্রে সামাজিক স্তরে বিশেষ পার্থক্য দেখা যায়। সামাজিক রীতিনীতির পার্থক্য, সামাজিক প্রথার পার্থক্য এবং জীবনযাত্রার ক্ষেত্রে দৃষ্টিভঙ্গীর পার্থক্য যখন সমাজে দেখা যায় তখন আমরা সামাজিক দ্বিক্ষেত্র (Social Dualism) দেখতে পাই। শিক্ষার ক্ষেত্রে সামাজিক দ্বিক্ষেত্র বিশেষভাবে পরিলক্ষিত হয়। ধনী ও গরিবের মধ্যে উচ্চশিক্ষার সুযোগ গ্রহণ করার ক্ষেত্রেও পার্থক্য দেখা যায়।

(খ) **অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্র (Economic Dualism) :** স্বল্পোন্নত দেশের অর্থব্যবস্থায় একটি হল চিরাচরিত উৎপাদন ক্ষেত্র (Traditional Sector) এবং অপরটি হল আধুনিক ক্ষেত্র (Modern Sector)। এই দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনৈতিক ব্যবস্থায় (Economic Dualism) একটি ক্ষেত্র হল এমন অর্থব্যবস্থা যেখানে শ্রমিকরা ন্যূনতম মজুরি পেয়ে অথবা ন্যূনতম আয়ে কোনরকমে জীবনধারণ করে (Subsistence Wage Sector) ; এই ক্ষেত্রকে বলা হয় জীবনধারণের জন্য ন্যূনতম মজুরির ক্ষেত্র (Subsistence Sector)। আরেকটি ক্ষেত্র হল, যেখানে জমির মালিক ও মূলধনের মালিক ন্যূনতম মজুরি দিয়ে শ্রমিকদের মাধ্যমে কাজ করিয়ে মুনাফা অর্জন করে ; এই ক্ষেত্রকে বলা হয় পুঁজিবাদী ক্ষেত্র (Capitalist Sector)।

(গ) **কলাকৌশলগত দ্বিক্ষেত্র (Technological Dualism) :** এই দুটি ক্ষেত্রের মধ্যে, অর্থাৎ চিরাচরিত উৎপাদন ক্ষেত্র এবং আধুনিক ক্ষেত্রে কলাকৌশলগত পার্থক্য থাকলে আমরা কলাকৌশলগত দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থব্যবস্থা (Technological Dualism) দেখতে পাই। আধুনিক কলাকৌশল ও যন্ত্রপাতি আধুনিক ক্ষেত্রে প্রযুক্ত হয় এবং কোন কোন শিল্পে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়। অপরদিকে চিরাচরিত উৎপাদন ক্ষেত্রে আধুনিক কলাকৌশল প্রযুক্ত হয় না।

(ঘ) **আঞ্চলিক দ্বিক্ষেত্র (Spatial Dualism) :** কোনো অর্থব্যবস্থায় দুটি অঞ্চলে এমন বৈষম্য থাকতে পারে যে একটি অঞ্চলে হয়তো মাথাপিছু আয় বেশি, শিল্পোন্নয়নের মাত্রা অনেক বেশি এবং ব্যবসা-বাণিজ্যের পরিমাণ বেশি ; আবার অপর একটি অঞ্চলে হয়ত মাথাপিছু আয় কম, শিল্পোন্নয়নের মাত্রা কম এবং ব্যবসা-বাণিজ্যের পরিমাণ কম,—সেক্ষেত্রে আমরা আঞ্চলিক ও ভৌগোলিক পার্থক্য দেখতে পাই। এটাও একটি দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থব্যবস্থা—এটাকে বলা যেতে পারে **আঞ্চলিক দ্বিক্ষেত্র** (Spatial Dualism) ; এক্ষেত্রে একটি হচ্ছে অনগ্রসর ক্ষেত্র এবং অপরটি হচ্ছে উন্নত ক্ষেত্র। অধ্যাপক মিরড্যাল (Myrdal) এই আঞ্চলিক দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতির বৈশিষ্ট্য আলোচনা করেছেন। তাঁর মতে উন্নত অঞ্চলের বিস্তৃতি-প্রভাব অপেক্ষাকৃত অনগ্রসর অঞ্চলে বিস্তৃত হলে এবং আন্তঃআঞ্চলিক কারিগরি জ্ঞান ও কলাকৌশলের স্থানান্তর হলে এই পার্থক্য ক্রমশ কমে আসতে পারে।

(ঙ) আর্থিক দ্বিক্ষেত্র (Financial Dualism) : একটি স্বল্পোন্নত দেশে বড় বড় শহরে (যেমন—ভারতবর্ষে, মুম্বাই, দিল্লী, কলকাতা, চেন্নাই প্রভৃতি) অর্থের বাজার (Money Market) উন্নত হতে পারে। আবার অর্ধ-শহর ও গ্রামাঞ্চলে অর্থের বাজার অনগ্রসর হতে পারে। মূলধন বাজারের (Capital Market) ক্ষেত্রেও তাই প্রযোজ্য। ব্যাঙ্কিং ব্যবস্থা শহর অঞ্চলে যতটা উন্নত, গ্রামাঞ্চলে ততটা উন্নত নয়। অর্থনীতিতে এই দ্বিক্ষেত্র ব্যবস্থা থাকায় উন্নয়নের হার সর্বত্র সমান হারে অর্জিত হয় না।

২.২ অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রের স্বরূপ (Nature of Economic Dualism)

যদিও অধিকাংশ স্বল্পোন্নত দেশ অর্থনৈতিক উন্নয়নের উত্তরণ স্তরে (Take-off stage) এখনও পৌঁছতে পারেনি তবুও এই দেশগুলিতে কোনো কোনো ক্ষেত্রে অনেকটা শিল্পোন্নয়ন হয়েছে এবং আধুনিক উৎপাদন পদ্ধতি প্রবর্তিত হয়েছে। অনেক স্বল্পোন্নত দেশেই কোনো কোনো ক্ষেত্রে অর্থব্যবস্থা অনেক উন্নত। একদিকে উৎপাদন ক্ষেত্রে আধুনিকতার ছোঁয়া, অপরদিকে একটি অনগ্রসর অর্থব্যবস্থা,—এই ধরনের অর্থনীতিতে দুটি ক্ষেত্র দেখা যায় বলেই এটাকে বলা হয় অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্র (Economic Dualism)। গ্রামাঞ্চলে কৃষিক্ষেত্রে দেখা যায় যে কৃষক এবং কৃষি-শ্রমিকরা কোনো রকমে খেয়ে পরে বেঁচে থাকে এবং ভরণপোষণের জন্য যতটা আয়ের প্রয়োজন ঠিক ততটাই তারা মজুরি হিসাবে অর্জন করে। এটাকে বলা হয় ভরণপোষণভিত্তিক মজুরির ক্ষেত্র (Subsistence Sector)। আবার এমনও দেখা যায় জমির মালিক জমি থেকে যথেষ্ট উদ্বৃত্ত (Surplus) পেয়ে থাকে—অর্থাৎ, সে উৎপাদিত দ্রব্য বাজারে বিক্রি করতে পারে এবং বিপণনযোগ্য উদ্বৃত্ত উৎপাদনের জন্য মজুরির ভিত্তিতে শ্রমিক নিয়োগ করে থাকে। এই ধরনের ক্ষেত্রকে বলা হয় পুঁজিবাদী ক্ষেত্র (Capitalist Sector)। যখন ভরণপোষণের জন্য প্রয়োজনীয় উৎপাদনের জন্য বিভিন্ন সম্পদ নিয়োজিত না রেখে বিক্রয়যোগ্য উৎপাদনে সেই সম্পদ নিয়োগ করা হয়, তখন দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতি উন্নয়নের দিকে অগ্রসর হয়।

নিছক ভরণপোষণের জন্য উৎপাদন প্রক্রিয়া চলতে থাকলে কোনো অর্থনৈতিক ব্যবস্থার তিনটি বৈশিষ্ট্য বিশেষভাবে প্রতিভাত হয়, যথা (1) উৎপাদনের বিশেষীকরণের (Specialisation) অভাব, (2) বিক্রয়যোগ্য উদ্বৃত্ত উৎপাদনের অভাব এবং (3) অগতিশীল প্রযুক্তি। এই তিনটি বৈশিষ্ট্য পরস্পরের সঙ্গে সম্পর্কিত। বাজারের বিস্তৃতির অভাব এবং বিক্রয়যোগ্য উদ্বৃত্তের অভাব থেকেই ভরণপোষণ ভিত্তিক উৎপাদনের ক্ষেত্র গড়ে উঠে।

বোয়েকে (Boeke) মনে করেন, সামাজিক চেতনার স্তর, সংগঠনের রূপ এবং উৎপাদন পদ্ধতির সাহায্যে একটি সমাজের অর্থনৈতিক চেহারার পরিচয় পাওয়া যায়। সামাজিক ব্যবস্থায় দ্বিক্ষেত্র, আঞ্চলিক ভিত্তিতে অথবা ভৌগোলিক ভিত্তিতে দ্বিক্ষেত্র এবং প্রযুক্তি প্রয়োগের ক্ষেত্রে অথবা কলাকৌশলের ক্ষেত্রে দ্বিক্ষেত্র—এগুলি সবই দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনৈতিক ব্যবস্থার অঙ্গ।

দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতিকে বোয়েকে (Boeke) "পূর্বদেশীয়" (Eastern) হিসাবে অভিহিত করেছেন। এর একটি কারণ হয়তো এই যে বোয়েকে ইন্দোনেশিয়ার অর্থনীতিকে ভিত্তি করে এক্ষেত্রে তাঁর নিজস্ব যুক্তি দাঁড় করিয়েছিলেন। তাঁর মতে দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতি হল অসংহতির (disintegration) একটি রূপ যা এসেছিল প্রাক্-পুঁজিবাদী দেশগুলিতে পুঁজিবাদ দেখা যাবার সঙ্গে সঙ্গে।[1]

দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতির কয়েকটি বৈশিষ্ট্য আছে: একটি বৈশিষ্ট্য হল, এই জাতীয় অর্থনীতির 'সীমিত প্রয়োজন' (limited needs); পশ্চিমী পুঁজিবাদী দেশগুলিতে দেখা যায় 'সীমাহীন প্রয়োজন' (unlimited needs)। প্রাক্-পুঁজিবাদী অর্থনীতিতে উন্নত পশ্চিমী দেশগুলি থেকে পুঁজিবাদের আমদানি হয় এবং সেটা অর্থনৈতিক জীবনে অনুপ্রবেশ করে। এই দেশগুলিতে গ্রামাঞ্চলে ব্যবসা-বাণিজ্যের সম্প্রসারণ দেখা যায় না। অর্থনৈতিক সংগঠনও খুব দুর্বল। আবার শহর অঞ্চলে ব্যবসা-বাণিজ্য ও বাজারের সম্প্রসারণ দেখা যায়। অর্থনৈতিক সংগঠনও যথেষ্ট মজবুত থাকে।

দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতিতে দু'ধরনের নীতিগত সিদ্ধান্ত বিবেচনা করা যেতে পারে। প্রথমত, সমগ্র দেশের ক্ষেত্রে একই নীতি প্রয়োগ করা সম্ভব হয় না। বিভিন্ন ক্ষেত্রে অগ্রাধিকারভিত্তিক নীতি প্রণয়ন করার প্রয়োজন হয়। দ্বিতীয়ত, একটি ক্ষেত্রের পক্ষে প্রযোজ্য নীতি অন্য একটি ক্ষেত্রের পক্ষে প্রতিকূল হতে পারে। উদাহরণ হিসাবে বলা যায়, উন্নত শহর অঞ্চলে মূলধন-নিবিড় শিল্পস্থাপন দেশের শিল্পোন্নয়নের পক্ষে সহায়ক হতে পারে। কিন্তু উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তিসম্পন্ন গ্রামাঞ্চলে মূলধন-নিবিড় শিল্প স্থাপন বেকার সমস্যার তীব্রতা বাড়িয়ে দিতে পারে এবং গ্রামীণ অর্থনীতির পক্ষে সঙ্কটের সৃষ্টি করতে পারে। গ্রামাঞ্চলে ও শহরাঞ্চলে শ্রমিকদের কারিগরি দক্ষতার রূপও ভিন্ন। আবার শহরাঞ্চলে যেখানে শিক্ষিত মধ্যবিত্ত শ্রেণীর মধ্যে বেকার সমস্যার সংকট বেশি তীব্র, গ্রামাঞ্চলে সেক্ষেত্রে দেখা যায় কর্মহীন কৃষিশ্রমিকের সংখ্যাধিক্য ও প্রচ্ছন্ন বেকার সমস্যা। এ ছাড়াও একদিকে ক্ষুদ্র ও গ্রামীণ শিল্প অপরদিকে বৃহৎ শিল্প ও মূলধনী শিল্প অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রের আরেকটি রূপ। দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতিতে যখন গ্রামাঞ্চলে কৃষকরা খাদ্যশস্য (নিজেদের ভোগের জন্য) উৎপাদন কমিয়ে অথবা না কমিয়ে নগদ শস্যের (Cash Crop) উৎপাদন বাড়াতে সক্ষম হয় তখন কৃষির বাণিজ্যিক সম্প্রসারণ হয়। অপেক্ষাকৃত উন্নতক্ষেত্রে, অর্থাৎ, শহর অঞ্চলে শিল্প-বাণিজ্যের সম্প্রসারণের জন্য বৈদেশিক সাহায্য ও বিনিয়োগের প্রয়োজন হয়। বিনিময়-অর্থনীতি (Exchange Economy) বৈদেশিক মূলধনের ওপর নির্ভরশীল। দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতিতে আয় উপার্জনের আশায় গ্রামাঞ্চলের উদ্বৃত্ত শ্রমিক শহরাঞ্চলে চলে আসতে চায়। গ্রাম থেকে শহরে শ্রমিকদের স্থানান্তর (migration) দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতির একটি বৈশিষ্ট্য।

---

1. বোয়েকে তাঁর "Economic and Economic Policy of Dual Societies" (1953) বইয়ে বলেছেন "Dualism is a form of disintegration, (which) came into existence with the appearance of capitalism in pre-capitalistic countries'.

বোয়েকে (Boeke) মনে করেন, প্রাক্-পুঁজিবাদী কৃষিসমাজে পশ্চিমী পুঁজিবাদের অনুপ্রবেশ হলে একটি সামাজিক সংঘাতের সৃষ্টি হয়। পশ্চিমী পুঁজিবাদ ছাড়াও সমাজতন্ত্র অথবা সাম্যবাদের আমদানি থেকেও চিরাচরিত অনগ্রসর দেশের জীবনযাত্রায় সংঘাতের সৃষ্টি হতে পারে। অধ্যাপক হিগিন্‌স (Higgins) মনে করেন, বোয়েকের এই মতবাদ পশ্চিমী প্রভাবে যা একটি অনুন্নত দেশেরও উন্নতি হতে পারে এবং তার ফলে পুঁজিবাদী ক্ষেত্র (Capitalist Sector) ও ন্যূনতম মজুরিভিত্তিক ভরণপোষণের ক্ষেত্রের (Subsistence Sector) মধ্যে পার্থক্য অনেক কমিয়ে আনতে পারে, সেই ঘটনার সঙ্গে খাপ খায় না।[2] কিন্তু বোয়েকে মনে করেন পশ্চিমী দেশগুলির কলাকৌশল পূর্বদেশীয় অনগ্রসর দেশগুলিতে ঠিকভাবে কার্যকর হয় না। কিন্তু অপেক্ষাকৃত অনগ্রসর ক্ষেত্রকে কী পদ্ধতিতে উন্নতক্ষেত্রের পর্যায়ে তুলে আনা যায় সে বিষয়ে বোয়েকে নির্দিষ্ট কোনও নীতি অনুসরণ করার কথা বলেননি। যদিও তিনি মনে করেন যে অনগ্রসর দেশগুলির জন্য আলাদা একটি উন্নয়ন তত্ত্ব থাকা দরকার।

আর্থার লুইস (Arthur Lewis) অনগ্রসর দেশে শ্রমের সীমাহীন যোগানের পরিপ্রেক্ষিতে অর্থনৈতিক উন্নয়নের যে মডেল তৈরি করেছেন তাতে দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতির অস্তিত্ব স্বীকৃত হয়েছে। টোডারো (Todaro) এবং হ্যারিস ও টোডারো (Harris-Todaro) শ্রমিকদের গ্রাম থেকে শহরে কাজের আশায় ও অতিরিক্ত আয়ের প্রত্যাশায় চলে আসা সম্পর্কে যে মডেল তৈরি করেছেন তাতেও দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনৈতিক ব্যবস্থার গুরুত্ব স্বীকৃত হয়েছে।

অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রের সঙ্গে কলাকৌশলগত দ্বিক্ষেত্র এবং সামাজিক দ্বিক্ষেত্র অবিচ্ছেদ্যভাবে জড়িত। সামাজিক দ্বিক্ষেত্রের ওপর অর্থনৈতিক পরিবর্তন এবং উন্নয়নের প্রয়াস গভীর প্রভাব বিস্তার করে। অপরদিকে অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রচেষ্টায় চিরাচরিত উৎপাদন পদ্ধতির পরিবর্তে আধুনিক উৎপাদন পদ্ধতি ও প্রযুক্তি কলাকৌশলগত দ্বিক্ষেত্রকে গুরুত্বপূর্ণ করে তোলে।

২.৩ লুইস মডেল (Lewis Model)

উন্নয়নশীল দেশগুলিতে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির অস্তিত্ব মেনে নিয়ে কিভাবে অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রচেষ্টা চালানো সম্ভব সে সম্পর্কে অধ্যাপক আর্থার লুইসের "Economic Development with Unlimited Supply of Labour"[3] নামক বিখ্যাত প্রবন্ধে আলোচনা করা হয়েছে।

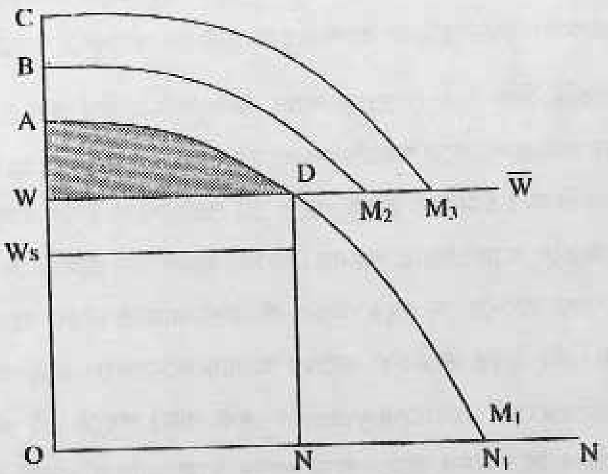
---

2. Higgins B. "The Dualistic Theory of Underdeveloped Areas". *Economic Development and Cultural Change* ; January,. 1956. Also See, Higgings—"Economic Development", Indian Edition, 1966.

3. Manchester School, 1954. Reprinted in Agarwala and Singh (ed) "*Economics of Underdevelopment.*" (O.U.P.)

লুইসের মতে, অনগ্রসর দেশগুলিতে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি পরিলক্ষিত হয়—অর্থাৎ, কর্মনিয়োগের অনুপাতে শ্রমিক সরবরাহ বেশি। অনেক সময় শ্রমিকরা খামারের কাজে নিযুক্ত থাকলেও তাদের প্রান্তিক উৎপাদনী শক্তি শূন্য থাকে,—অর্থাৎ খামার থেকে অতিরিক্ত শ্রমশক্তি তুলে নিলেও কৃষি-উৎপাদন কমে না। এক্ষেত্রে ছদ্মবেশী বেকারত্ব (Disguised Unemployment) পরিলক্ষিত হয়। লুইসের মতে গ্রামীণ অর্থনীতি হল দুটি ক্ষেত্রবিশিষ্ট অর্থনীতি (Dual Economy)—একটি ক্ষেত্র হল এমন অর্থব্যবস্থা যেখানে শ্রমিকরা ন্যূনতম মজুরি পেয়ে কোন রকমে জীবনধারণ করে, এটাকে বলা হয় Subsistence Sector অর্থাৎ জীবনধারণের জন্য ন্যূনতম মজুরির ক্ষেত্র। আরেকটি ক্ষেত্র হল, যেখানে জমির মালিক ও মূলধনের মালিক নিজের জমিতে মূলধন বিনিয়োগ করে এবং ন্যূনতম মজুরি দিয়ে শ্রমিকদের মাধ্যমে কাজ করিয়ে মুনাফা অর্জন করে। এই স্তরকে বলা হয় পুঁজিবাদী ক্ষেত্র বা Capitalist Sector।

লুইসের মতে অনগ্রসর দেশগুলিতে একটি স্থির মজুরি হারে (constant wage rate) যত খুশী শ্রমিক নিয়োগ করা যেতে পারে। অর্থাৎ স্থির মজুরিতে শ্রমের সরবরাহ হল অসীম। তবে এই স্থির মজুরি জীবনধারণের জন্য প্রয়োজনীয় ন্যূনতম মজুরি (wage in the subsistence sector) থেকে একটু বেশি থাকে, যাতে শ্রমিকের স্থানান্তরের প্রকৃত খরচ (real cost of transfer of labour) মজুরির অন্তর্ভুক্ত থাকে। মূলধনের মালিক বা



চিত্র—2.1

পুঁজিপতি সেই মাত্রা পর্যন্ত শ্রমিক নিয়োগ করবে যেখানে স্থির মজুরি হার শ্রমিকের প্রান্তিক উৎপাদনী শক্তির সমান হয়। এক্ষেত্রে যতটা শ্রমের নিয়োগ হবে তাতেই মালিকের মুনাফা সর্বাধিক হবে। ওপরের 2.1 চিত্রে এটা দেখানো হয়েছে। এই চিত্রে অনুভূমিক অক্ষটি হল শ্রম সরবরাহ, উল্লম্ব অক্ষ হল মজুরি হার এবং এতে উৎপাদন বোঝাচ্ছে। OWs হল জীবনধারণের জন্য সর্বনিম্ন মজুরি। OW হল স্থির মজুরি হার ;

এই OW মজুরি হার OWs অপেক্ষা বেশি। OW মজুরি হার D বিন্দুতে শ্রমিকের প্রান্তিক উৎপাদনী শক্তির সমান। M_1 রেখা হল প্রান্তিক উৎপাদন রেখা। ON_1 হল শ্রমিকদের উৎপাদনমূলক নিয়োগ। এক্ষেত্রে যখন OW হল মজুরি হার এবং ON_1 হল শ্রমিকদের উৎপাদনমূলক নিয়োগ তখন মুনাফাও সর্বাধিক হচ্ছে। এক্ষেত্রে মোট উৎপাদন হল $OADN_1$; তার মধ্যে $OWDN_1$ পরিমাণ মোট মজুরি প্রদান করার জন্য ব্যয়িত হচ্ছে এবং WAD হল মালিকের মোট উদ্বৃত্ত।

অর্থাৎ, $WAD = OADN_1 - OWDN_1$

লুইসের মতে যদি পুঁজিপতি বা মূলধনের মালিক এই WAD উদ্বৃত্ত পুনর্বিনিয়োগ করে তবে দেশের সামগ্রিক উৎপাদন বাড়বে এবং অর্থনৈতিক উন্নয়নের হারও বাড়বে।

তবে এই উদ্বৃত্ত পুনর্বিনিয়োগ হবে কিনা তা অনেকগুলি উপাদানের ওপর নির্ভরশীল। পুনর্বিনিয়োগের ক্ষেত্রে লাভের আশা এবং উৎপাদন বাড়াবার জন্য প্রয়োজনীয় উপাদানের সরবরাহ এবং শ্রমিকদের কারিগরি দক্ষতা বিনিয়োগের পক্ষে অনুকূল হলেই পুঁজিপতিদের উদ্বৃত্তের পুনর্বিনিয়োগ হতে পারে এবং মূলধন গঠনের কাজ চলতে পারে।

লুইসের তত্ত্বে স্থির মজুরি হারের যুক্তিটি সর্বদা গ্রহণযোগ্য নয়। পুঁজিপতি বা মূলধনের মালিক যে তার উদ্বৃত্ত পুনর্বিনিয়োগ করবে তার কোন নিশ্চয়তা নেই। তাছাড়া যে উদ্বৃত্ত শ্রমিক কৃষিক্ষেত্রে পরিলক্ষিত হয় তার সবটাই যে শহর অঞ্চলে কর্মসংস্থানের আশায় চলে আসবে তারও নিশ্চয়তা নেই।

লুইস মডেলের একটি দিক হল, যেহেতু শহর অঞ্চলে মজুরির হার বেশি (লুইসের মতে প্রায় 30 শতাংশ বেশি) সেজন্য গ্রামাঞ্চল থেকে শহরাঞ্চলে শ্রমের আগমন (rural-urban migration) হতে পারে। প্রকৃতপক্ষে শহরাঞ্চলে মজুরি হার গ্রামাঞ্চলের অনুপাতে 30 শতাংশেরও বেশি হতে পারে ; কিন্তু এজন্যই যে শ্রমিকরা গ্রাম ছেড়ে শহরে চলে আসতে চায়, তা নয়। আসল কারণ হল, গ্রামাঞ্চলে বেকার সমস্যা খুবই তীব্র। যে হারে গ্রামীণ শ্রমিক সংখ্যা বাড়ছে সে হারে অধিক পরিমাণ জমিতে চাষও হচ্ছে না অথবা একই জমিতে চাষও সেভাবে বাড়ছে না। এই উদ্বৃত্ত শ্রমিকরা কাজের আশায় শহরাঞ্চলে চলে আসতে চায়। তাছাড়া গ্রামে ঋতুগত বেকার অবস্থা (seasonal unemployment) দেখা যায়। শহরে এই ধরনের বেকারত্বের তীব্রতা আপেক্ষিকভাবে কম। এটাও শ্রমিকদের গ্রাম ছেড়ে শহরে চলে আসার একটি কারণ। এক্ষেত্রে ভারতের অর্থনৈতিক অবস্থায় লুইস মডেলের কিছুটা প্রাসঙ্গিকতা আছে। ভারতের গ্রামাঞ্চলে বর্তমানে মজুরি হার স্থির না থাকলেও একটি সর্বনিম্ন মজুরি হার আছে, শহরাঞ্চলেও মজুরি হার যথেষ্ট বেশি। এজন্য গ্রামের শ্রমিকদের কাছে শহরে চলে আসার একটি আকর্ষণ আছে। তাছাড়া ভারতের ক্ষেত্রে গ্রামীণ ছদ্মবেশী বেকারত্ব শহরের খোলা বেকারত্বে (Open unemployment) পরিণত হয়। কারণ শহরাঞ্চলে শ্রমিকের সংখ্যা বেড়ে গেলে সবার জন্য কর্মসংস্থানের ব্যবস্থা করা সম্ভব হয় না।

২.৪ শ্রমিকদের গ্রাম থেকে শহরে স্থানান্তর সম্পর্কে (ক) টোডারো মডেল এবং (খ) হ্যারিস-টোডারো মডেল [(a) Todaro Model and (b) Harris-Todaro Model regarding Rural-Urban Migration।]

লুইসের মডেল এবং স্বল্পোন্নত দেশগুলির দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতির বৈশিষ্ট্য আলোচনাকালে আমরা দেখেছি যে জীবিকা অর্জনের জন্য চিরাচরিত কৃষিক্ষেত্র থেকে আধুনিক ক্ষেত্রে শ্রমিকদের স্থানান্তর হয়ে থাকে। অর্থনৈতিক উন্নয়নের সঙ্গে সঙ্গে আমরা দেখতে পাই দেশের শিল্পায়ন, নগরায়ণ (urbanisation), বাণিজ্যিকীকরণ ও আধুনিকীকরণ। সেই সঙ্গে পরিবহন ব্যবস্থার উন্নয়ন ও উৎপাদন-কৌশলেরও উন্নয়ন হয়ে থাকে। এই পরিপ্রেক্ষিতে কেন শ্রমিকরা গ্রাম থেকে শহরে চলে আসতে চায় সে সম্পর্কে মাইকেল টোডারো একটি মডেল তৈরি করেছেন।[4]

(ক) টোডারো মডেল **(Todaro Model) :** টোডারোর মতে শহর এবং গ্রামের মধ্যে শ্রমিকদের প্রত্যাশিত আয়ের (expected earnings) যে পার্থক্য থাকে (প্রকৃত পার্থক্য নয়)—সেটাই গ্রামের শ্রমিকদের শহরে চলে আসতে উদ্বুদ্ধ করে। গ্রাম থেকে শহরে শ্রমের বাজারের সুযোগ-সুবিধা অনেক বেশি, এজন্য এই স্থানান্তর থেকে শ্রমিকদের প্রত্যাশিত লাভ সর্বাধিক করার প্রেরণাই শ্রমিকদের এই স্থানান্তরের পেছনে বড় কারণ।

এক্ষেত্রে প্রত্যাশিত লাভ পরিমাপ করার উপায় হল—(1) গ্রামীণ চাকুরি এবং শহরাঞ্চলের চাকুরির মধ্যে প্রকৃত আয়ের পার্থক্য এবং (2) শহরাঞ্চলে চাকুরি পাবার সম্ভাবনা। একটি নির্দিষ্ট সময়ের ভিত্তিতে গ্রামাঞ্চলে চাকুরি থেকে গড় প্রকৃত আয় এবং শহরাঞ্চলের চাকুরি থেকে প্রত্যাশিত আয়ের মধ্যে তুলনা ক'রে শ্রমিক যদি দেখে যে গ্রাম থেকে শহরে চলে যাওয়া তার পক্ষে লাভজনক তবে সে গ্রাম থেকে শহরে চলে আসতে চায়। টোডারো মডেলটিকে এভাবে ব্যাখ্যা করা যায় :—

$$S = f(d) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $$d = w\rho - r \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

যেখানে $$\rho = \frac{\alpha N}{W-N} = \frac{\alpha N}{U} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

অথবা $$d = \frac{W\alpha N}{U} - r \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

4. Todaro M. P.—"*A Model of Labour Migration and. Urban Unemployment in Less Developed Countries*", American Economic Review, Vol. 59, No. 1 (1969). pp 138-48. Also see, Todaro—"*Economics of a Developing World*". (Longman, London, 1982)

[এক্ষেত্রে S হল শহরাঞ্চলে শ্রমিক সরবরাহ। d হল শহর এবং গ্রামের মধ্যে প্রত্যাশিত মজুরি-পার্থক্য। w হল শহরে প্রকৃত মজুরি। p হল শহর অঞ্চলে চাকুরি পাবার সম্ভাবনা। r হল গড় গ্রামীণ মজুরি। α হল শহর অঞ্চলে নতুন চাকুরি সৃষ্টির হার। N হল শহরাঞ্চলে কর্মসংস্থানের মাত্রা। W হল শহর অঞ্চলের মোট মজুর এবং U হল শহর অঞ্চলে বেকারত্বের মাত্রা।]

তাহলে দেখা যাচ্ছে, শহরাঞ্চলে শ্রমিক সরবরাহ (S) শহর এবং গ্রামের মধ্যে প্রত্যাশিত মজুরি-পার্থক্যের (d) ওপর নির্ভরশীল। শহর এবং গ্রামের মধ্যে প্রত্যাশিত মজুরি পার্থক্য শহর অঞ্চলে প্রকৃত মজুরি হার (w) এবং সেই সঙ্গে শহরে চাকুরি পাবার সম্ভাবনার (p) সঙ্গে গ্রামাঞ্চলে গড় মজুরি হারের পার্থক্যের সমান। শহর অঞ্চলে চাকুরি পাবার সম্ভাবনা (p) নির্ভর করে, শহরাঞ্চলে নতুন চাকুরি সৃষ্টির হার (α) ও শহর অঞ্চলে কর্ম-সংস্থানের মাত্রার (N) সঙ্গে শহর অঞ্চলে মোট মজুরী এবং শহর অঞ্চলে বেকারত্বের মাত্রার মধ্যে যে যে পার্থক্য তার অনুপাতের ওপর।

যদি গ্রাম ও শহর অঞ্চলের মধ্যে প্রত্যাশিত মজুরি-পার্থক্য না থাকে তবে গ্রাম থেকে শহরে শ্রমিকদের স্থানান্তর হবে না। শহরাঞ্চলে মজুরি বেড়ে গেলে অথচ সেই সঙ্গে গ্রামে শ্রমিকদের মজুরি না বাড়লে গ্রাম থেকে শ্রমিকরা শহরে চলে আসতে চাইবে এবং তাতে শহরাঞ্চলে বেকার সমস্যা বেড়ে যাবে।

টোডারো মডেলের চারটি মূল বৈশিষ্ট্য হল : (1) শ্রমিকরা যে গ্রাম থেকে শহরে চলে আসতে চায় তার পিছনে আপেক্ষিক সুবিধা ও ব্যয়ের (relative benefits and costs) বিবেচনা যুক্তিসঙ্গতভাবে কাজ করে। এই স্থানান্তরের আসল কারণ হল আর্থিক, যদিও শহর অঞ্চলের জীবনযাত্রার সঙ্গে নিজেকে জড়িয়ে ফেলার একটি মনস্তাত্ত্বিক কারণও শ্রমিককে প্রভাবিত করতে পারে।

(2) গ্রাম থেকে শহরে চলে আসার যে আকাঙ্খা শ্রমিকের মধ্যে দেখা যায় তার মূল কারণ হল, শহর অঞ্চলে মজুরি-প্রাপ্তি এবং গ্রামাঞ্চলে মজুরি-প্রাপ্তির মধ্যে প্রত্যাশিত পার্থক্য প্রকৃত পার্থক্য নয়। এক্ষেত্রে শহরে এবং গ্রামে প্রকৃত মজুরি-পার্থক্য (real wage differential) কত এবং শহরে চলে এলেই চাকুরি পাবার সম্ভাবনা কত এই বিবেচনাগুলিই প্রত্যাশিত মজুরি পার্থক্যের পিছনে কাজ করে।

(3) শহর অঞ্চলে চাকুরি পাবার সম্ভাবনা এবং শহর অঞ্চলে বেকারত্বের হারের মধ্যে একটি বিপরীতমুখী সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয়। শহর অঞ্চলে মজুরি-হার বাড়লেই গ্রামের শ্রমিকরা (নিজেদের স্বল্প গড় মজুরি থাকার দরুন) শহরে এসে ভীড় করে এবং তাতে শহরাঞ্চলে বেকারত্বের হার বেড়ে যায়।

(4) শহর অঞ্চলে চাকুরি সৃষ্টির হারের চেয়ে গ্রাম থেকে শহরে শ্রমিকদের স্থানান্তরের হার বেশি হওয়াই স্বাভাবিক। গ্রামে এবং শহরে চাকুরি সৃষ্টির ক্ষেত্রে যদি ভারসাম্যের অভাব থাকে এবং শহরে যদি প্রত্যাশিত মজুরি হার বেশি থাকে তবে শহরাঞ্চলে বেকার সমস্যার সৃষ্টি হবেই।

শহর অঞ্চলে উৎপাদন বাড়িয়ে এবং বিভিন্ন কর্মসংস্থান প্রকল্প চালু করেও সমস্যার সমাধান হবে না যতক্ষ পর্যন্ত গড় গ্রামীণ মজুরি থেকে শহর অঞ্চলের মজুরির হার অনেক বেশি থাকে। কারণ, এক্ষেত্রে গ্রাম থেকে শহরে আরও বেশি করে শ্রমিকের স্থানান্তর হবে। এই সমস্যার সমাধানের জন্য বিবেচ্য বিষয়গুলি হল, (ক) জনসংখ্যা বৃদ্ধি প্রতিরোধ করা এবং (খ) গ্রামাঞ্চলের জীবনযাত্রা যাতে আরও উন্নত হয়, গ্রামাঞ্চলেই যাতে আরও কাজের সুযোগ সৃষ্টি হয়, গ্রামীণ শিল্পগুলি যাতে উন্নত হয় এবং নাগরিক জীবনের সুখ-স্বাচ্ছন্দ্য যাতে গ্রামবাসীদের মধ্যেও বিস্তৃত করা যায় তার ব্যবস্থা করা। সেক্ষেত্রে গ্রাম থেকে শহরে শ্রমিকদের চলে আসার চাপ কমবে।

(খ) হ্যারিস-টোডারো মডেল **(Harris-Todaro Model) :** টোডারো মডেলের কাঠামো বজায় রেখেই এই মডেলটি একটু পরিবর্ধিত হয়েছে হ্যারিস-টোডারো মডেলে (Harris-Todaro Model)।[5] হ্যারিস-টোডারো মডেলে ধরা হয়েছে—শহর অঞ্চলের নির্দিষ্ট মজুরি (W) গ্রামাঞ্চলে নির্দিষ্ট মজুরির (W_r) চেয়ে বেশি হওয়া, গ্রামাঞ্চলের মজুরি হার এবং গ্রামীণ শ্রমিকের প্রান্তিক উৎপাদনের সমতা (গ্রামাঞ্চলে শ্রমিকদের প্রান্তিক উৎপাদন খুবই কম) শহরাঞ্চলে বাহ্যিক কারণ দ্বারা কর্ম-নিয়োগের মাত্রা প্রভাবিত হওয়া এবং প্রত্যাশিত আয় (exogenously determined urban unemployment, *Lm*) গ্রাম-শহর শ্রমিক স্থানান্তরকে প্রভাবিত করে। এক্ষেত্রে L হল অর্থনীতির মোট শ্রমিক সমষ্টি, L_A হল গ্রামীণ বেকারত্ব এবং U^u হল শহরাঞ্চলের সামগ্রিক বেকারত্ব।

এক্ষেত্রে $U^u = (L - L_A) - Lm$

এবং $L = L_A + Lm + U^u \quad \ldots \quad (5)$

আবার $W > W_A = \frac{d_y}{dL_A} \quad \ldots \quad (6)$

সমীকরণ (6) দেখাচ্ছে যে, গ্রামীণ মজুরি (W_A) প্রান্তিক উৎপাদনের সমান (Y হল মোট উৎপাদন), এবং এই মজুরি হার শহরাঞ্চলের মজুরি হার (W) অপেক্ষা কম। শহর অঞ্চলে শ্রমিক সরবরাহ (S^u) গ্রামীণ মজুরি (W_A) অপেক্ষা শহর অঞ্চলের প্রত্যাশিত উদ্বৃত্ত আয়ের (Y^u) ওপর ক্রমবর্ধমান হারে নির্ভরশীল। সুতরাং যতক্ষণ পর্যন্ত শহর অঞ্চলে মজুরি হার গ্রামীণ মজুরি হারের চেয়ে বেশি থাকবে এবং শহর অঞ্চলে চাকুরি পাবার সম্ভাবনা বেশি থাকবে ততক্ষণ পর্যন্ত গ্রাম থেকে শহরে শ্রমিক স্থানান্তর

5. Harris J and M. Todaro (1970) : "*Migration, Unemployment and Development : A Two Sector Analysis*" American Economic Review 40, 126-142.

চলতে থাকবে। এক্ষেত্রে শহর অঞ্চলে চাকুরি পাবার সম্ভাবনা (P) এবং শহর অঞ্চলে কর্মনিয়োগের হার সমার্থক। অর্থাৎ,

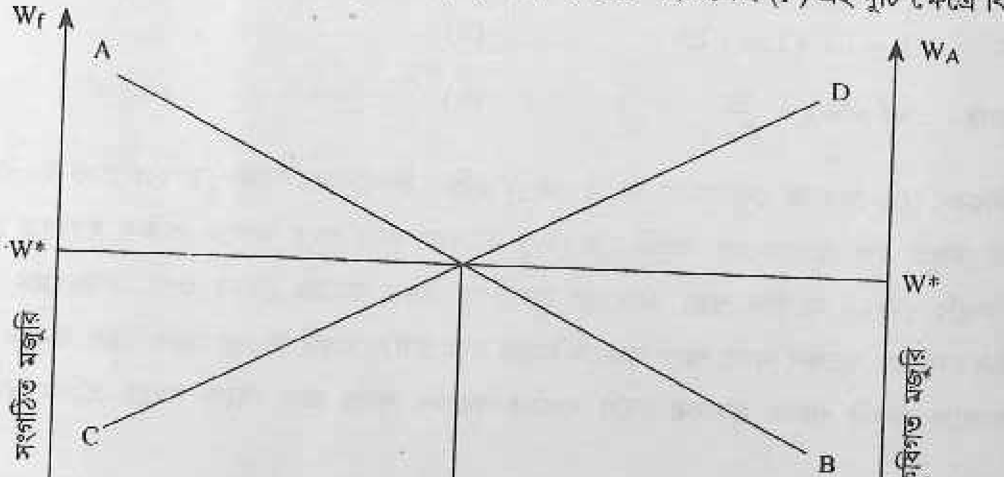
$$P = \frac{Lm}{(L - L_A)}$$; এক্ষেত্রে $\frac{Lm}{L - L_A}$ হল শহর অঞ্চলে কর্মনিয়োগের হার।

যতক্ষণ পর্যন্ত $W \frac{Lm}{(L - L_A)}$ অর্থাৎ শহর অঞ্চলে কর্মনিয়োগের হার এবং গ্রামীণ মজুরি হার W_A থেকে বেশি, অর্থাৎ যতক্ষণ পর্যন্ত $W \frac{Lm}{(L - L_A)} > W_A$ ততক্ষণ পর্যন্ত গ্রাম থেকে শহরে স্থানান্তর চলবে।

ভারসাম্য পর্যায়ে $W \frac{Lm}{(L - L_A)} = W_A$

স্বল্পোন্নত দেশগুলির ক্ষেত্রে হ্যারিস-টোডারো মডেলের গুরুত্ব অপরিসীম। গ্রামাঞ্চলে কৃষির ওপর জনসমষ্টির অতিরিক্ত চাপের দরুন উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির সৃষ্টি এবং শহর অঞ্চলে অতিরিক্ত আয়ের প্রত্যাশাই প্রধানত গ্রাম থেকে শহরে শ্রমিকদের স্থানান্তরের জন্য দায়ী। এই ব্যবস্থায় শহর অঞ্চলে বেকার সমস্যার তীব্রতা বাড়ে। এর প্রতিকারকল্পে গ্রামীণ অর্থনীতিতে অধিক মাত্রায় কর্মনিয়োগের সৃষ্টি, মজুরি হার বৃদ্ধি এবং গ্রামের উদ্বৃত্ত শ্রম-শক্তিকে গ্রামীণ শিল্পের সম্প্রসারণকল্পে যাতে যথাযথভাবে ব্যবহার করা যায় সেজন্য প্রশিক্ষণের ব্যবস্থা প্রভৃতির ওপর গুরুত্ব আরোপ করা উচিত।

নিম্নের 2.2 চিত্রে হ্যারিস-টোডারো মডেলটি বোঝানো হয়েছে। অনুভূমিক অক্ষটি অর্থব্যবস্থায় পুরো শ্রমশক্তি বোঝাচ্ছে। এক্ষেত্রে শ্রমশক্তি কৃষিক্ষেত্র (A) এবং সংগঠিত শহর ক্ষেত্র (F) এই দুটি ক্ষেত্রে বিভক্ত।

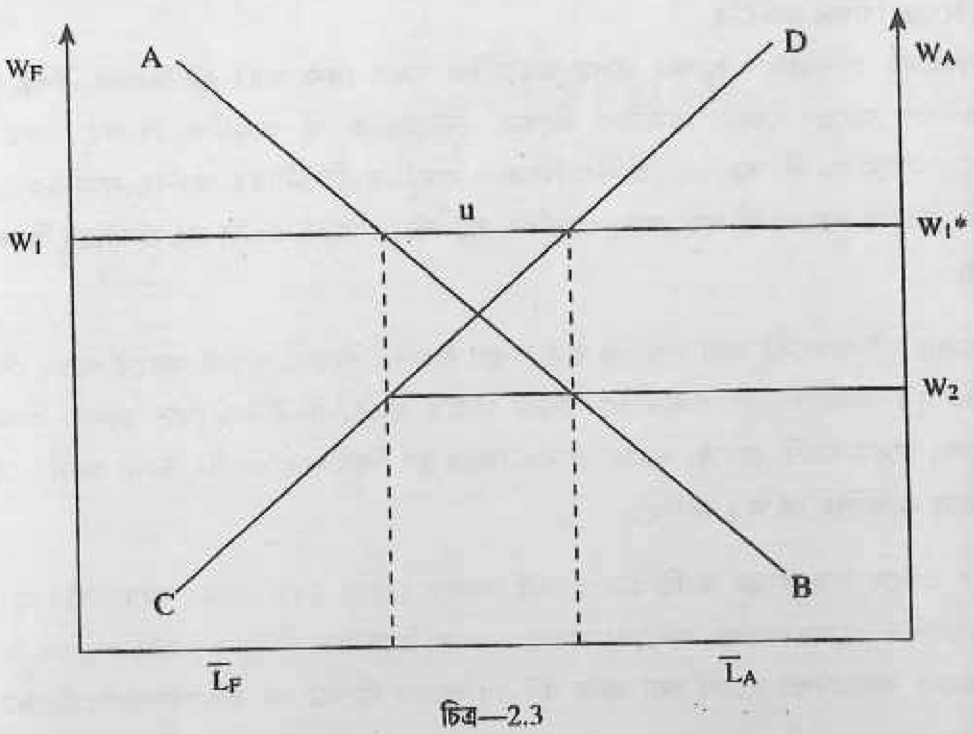


চিত্র—2.2

চিত্রটির বাঁদিকের অক্ষে শহরক্ষেত্রে বিভিন্ন সংগঠিত মজুরি বোঝাচ্ছে এবং ডানদিকের অক্ষ কৃষিগত মজুরি বোঝাচ্ছে। AB রেখাকে শহরের সংগঠিত ক্ষেত্রে (urban formal sector) শ্রমের জন্য চাহিদারেখা হিসাবে বিবেচনা করা যেতে পারে। এই রেখা নিম্নাভিমুখী, কারণ মজুরি কমিয়ে দিলে অধিক সংখ্যক শ্রমিক নিয়োগ করা সম্ভব হয়। অনুরূপভাবে এই রেখা কৃষিক্ষেত্রে নিযুক্ত শ্রমের পরিমাণ বোঝাচ্ছে।

এক্ষেত্রেও দেখা যাচ্ছে অপেক্ষাকৃত কম মজুরিতে অধিক সংখ্যক কৃষিশ্রমিক নিয়োগ করা সম্ভব। এই অর্থব্যবস্থায় ভারসাম্য আসবে যখন AB এবং CD রেখা পরস্পরকে ছেদ করবে। একটি ক্ষেত্র থেকে অপর একটি ক্ষেত্রে শ্রমিকদের অনবরত চলে আসা বন্ধ করা যায় যখন সংগঠিত শহর ক্ষেত্রের মজুরি এবং কৃষিক্ষেত্রের মজুরি সমান হয়। AB রেখা এবং CD রেখার ছেদবিন্দু থেকে আমরা ভারসাম্য পর্যায় মজুরি এবং আন্তঃক্ষেত্র শ্রমবণ্টন দেখতে পাই। W* মজুরি হারে সংগঠিত শহর ক্ষেত্রে নিযুক্ত শ্রমের পরিমাণ L^*_b দ্বারা এবং কৃষিক্ষেত্রে নিযুক্ত শ্রমের পরিমাণ L^*_A দ্বারা দেখানো হয়েছে।

কিন্তু যদি সংগঠিত শহরের ক্ষেত্রে শ্রমিকদের মজুরি একটি নির্দিষ্ট হারে বেঁধে দেওয়া হয় এবং যদি সেই মজুরি হার ভারসাম্য পর্যায়ের মজুরি হারের চেয়ে বেশি হয়, তবে তার প্রভাব কি হবে? এই প্রশ্নের উত্তর দেওয়া হয়েছে নিম্নের 2.3 চিত্রে।



চিত্র—2.3

এই চিত্রে দেখা যাচ্ছে সংগঠিত শহর ক্ষেত্রে শ্রমিকদের মজুরি হার W_1-এ বেঁধে দেওয়া হয়েছে। এই মজুরি হারে সংগঠিত শহর ক্ষেত্রে নিযুক্ত শ্রমের পরিমাণ হল $\overline{L}_F$ তাহলে অবশিষ্ট শ্রমিকদের অবস্থা কী দাঁড়াবে?

এই চিত্রে দেখানো হয়েছে কৃষিক্ষেত্রে মজুরি হার W_2 পর্যন্ত কমে যাবে, এই মজুরি হারে কৃষিক্ষেত্রে নিযুক্ত শ্রমের পরিমাণ হবে L_A। এক্ষেত্রে মজুরি হারে ভারসাম্য নির্ধারিত হচ্ছে না। যদি শ্রমিক নিযুক্তির জন্য দেশে এই দুটি মাত্র ক্ষেত্র থাকে তবে অল্পমজুরির ক্ষেত্র থেকে (এক্ষেত্রে কৃষিক্ষেত্র) বেশি মজুরির ক্ষেত্রে শ্রমিকদের স্থানান্তর বাড়বে। কিন্তু যেহেতু সংগঠিত শহর ক্ষেত্রে মজুরি হার বেশি সেজন্য সেক্ষেত্রে শ্রমের জন্য চাহিদা বেশি থাকবে না। এজন্য ওপরের চিত্র অনুযায়ী দেশে U পরিমাণ কর্মহীন বা বেকার শ্রমশক্তির সৃষ্টি হবে। এভাবে বেকার হওয়া শ্রমিকরা শহর অঞ্চলেই অসংগঠিত ক্ষেত্রে (Informal Sector) নিজেদের নিয়োগ করতে পারে,—তবে সেক্ষেত্রে মজুরি হার কম থাকবে। তাহলে গ্রামাঞ্চল থেকে শহরাঞ্চলে শ্রমিকের চলে আসা অব্যাহত থাকলে ভারসাম্য কিভাবে অর্জিত হবে। এক্ষেত্রে শ্রমের স্থানান্তর থেকে প্রত্যাশিত আয় এবং কৃষিক্ষেত্র প্রাপ্ত প্রকৃত আয়ের মধ্যে তুলনা করতে হবে। যদি দেখা যায় যে উভয় ক্ষেত্রে মজুরি হার সমান পর্যায়ে এসেছে তবে ভারসাম্য অর্জিত হবে এবং শ্রম স্থানান্তর বন্ধ হবে।

২.৫ সারাংশ

1. **দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট** অর্থনীতি

স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনৈতিক ব্যবস্থা দেখা যায়। এই দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতির বিভিন্ন রূপ আছে: যেমন, সামাজিক দ্বিক্ষেত্র, ভৌগোলিক বা আঞ্চলিক দ্বিক্ষেত্র, কলাকৌশলগত দ্বিক্ষেত্র, অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্র এবং আর্থিক দ্বিক্ষেত্র। সামাজিক রীতিনীতির পার্থক্য, সামাজিক স্তরবিন্যাস, গ্রামীণ জীবন ও শহরের জীবনের মধ্যে সামাজিক দৃষ্টিভঙ্গীর পার্থক্য, এগুলি হল **সামাজিক দ্বিক্ষেত্রের** মূল বৈশিষ্ট্য।

আবার দুটি অঞ্চলের মধ্যে মাথাপিছু আয় অথবা ব্যবসা-বাণিজ্যের পার্থক্য থাকতে পারে। ভৌগোলিক কারণেও দুটি অঞ্চলের মধ্যে অর্থনৈতিক পার্থক্য থাকতে পারে। একটি বড় দেশে কোনও অঞ্চলে হয়ত শিল্পক্ষেত্রে যথেষ্ট উন্নতি হয়েছে। আবার কোনও ক্ষেত্রে হয় শিল্পক্ষেত্রে মোটেই উন্নতি হয়নি। এই ধরনের দ্বিক্ষেত্রকে **আঞ্চলিক দ্বিক্ষেত্র** বলা হয়।

যে অঞ্চলে শিল্পক্ষেত্রের উন্নতি হয়েছে সেই অঞ্চলে হয়তো উন্নত ধরনের কলাকৌশল বা উৎপাদন পদ্ধতি প্রবর্তিত হয়েছে। আবার অনগ্রসর অঞ্চলে হয়তো চিরাচরিত উৎপাদন পদ্ধতি প্রবর্তিত আছে এবং উন্নতধরনের কলাকৌশল প্রয়োগ করা যাচ্ছে না। এই ধরনের দ্বিক্ষেত্র হল **কলাকৌশলগত দ্বিক্ষেত্র**।

অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্র কৃষি, শিল্প সামাজিক ব্যবস্থা সবক্ষেত্রেই পরিলক্ষিত হতে পারে। গ্রামাঞ্চলে কৃষি উৎপাদনের ক্ষেত্রে দুধরনের ব্যবস্থা দেখা যায়। ছোট জাতের মালিক এবং প্রান্তিক কৃষকরা অনেক সময়েই যা

উৎপাদন করে তার সবটাই নিজেদের ভোগে ব্যবহার করে, এবং শুধু জীবনধারণের জন্য যতটা প্রয়োজন ততটাই অথবা তার চেয়েও কম উৎপাদন হয় বলে বিক্রয়যোগ্য উদ্বৃত্ত থাকে না। আবার বড় বড় জোতদাররা নিজেদের জমিতে মজুরিভিত্তিক কৃষি শ্রমিক নিয়োগ করে ফসল উৎপাদন করে এবং উদ্বৃত্ত ফসল বাজারে বিক্রি করে মুনাফা অর্জন করে। একমাত্র দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট কৃষি উৎপাদন ব্যবস্থা দেখা যায়—একটি হল জীবনধারণভিত্তিক কৃষি উৎপাদন এবং অপরটি হল পুঁজিবাদী কৃষি উৎপাদন। কৃষির ন্যায় শিল্পক্ষেত্রেও দু'ধরনের উৎপাদন ব্যবস্থা থাকতে পারে,—যেমন, ক্ষুদ্র শিল্প ও বৃহৎ শিল্প, অথবা ভোগ-সামগ্রী শিল্প ও মূলধনী শিল্প। বোয়েকে অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রের বিভিন্ন দিক আলোচনা করেছেন।

অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রের সঙ্গে আরকেটি দ্বিক্ষেত্র দেখা যায় এবং সেটি হল আর্থিক দ্বিক্ষেত্র। শহর অঞ্চলে ব্যাঙ্কিং ব্যবস্থা ও অর্থনৈতিক পরিকাঠামো অনেক উন্নত, গ্রামাঞ্চলে ব্যাঙ্কিং ব্যবস্থা ও অর্থনৈতিক পরিকাঠামো অনগ্রসর।

2. অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রের স্বরূপ

অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রে দেখা যায়, কোনো অর্থব্যবস্থায় একদিকে হয়তো শিল্পোন্নয়নের প্রয়াস চলছে, অপরদিকে হয়তো চিরাচরিত উৎপাদন পদ্ধতির ভিত্তিতে কৃষি উৎপাদন চলছে। কৃষিক্ষেত্রে জীবনধারণের জন্য কৃষকরা যখন উৎপাদন কাজে নিযুক্ত থাকে এবং যখন সেই উৎপাদন থেকে বিপণনযোগ্য উদ্বৃত্ত থাকে না, তখন তাকে বলা হয় ভরণপোষণভিত্তিক আবাদ। অপরদিকে পুঁজিবাদী আবাদ দেখা যায় যখন বড় বড় জোতদাররা কৃষি-উৎপাদন থেকে উদ্বৃত্ত আহরণ করে বাজারে বিক্রি করে এবং তা থেকে মুনাফা অর্জন করে। দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতিতে দেখা যায় সীমিত প্রয়োজন,—পশ্চিমী দেশগুলির মতো সীমাহীন প্রয়োজন নয়। তবে অপেক্ষাকৃত অগ্রসর দেশগুলিতে যে অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্র দেখা যায়, যেখানে পশ্চিমী পুঁজিবাদের আমদানিও পরিলক্ষিত হয়। এই দেশগুলিতে অপেক্ষাকৃত উন্নত ক্ষেত্রে শিল্প-বাণিজ্য সম্প্রসারণের জন্য বৈদেশিক সাহায্য ও বিনিয়োগের প্রয়োজন হয়।

দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতিতে গ্রামাঞ্চলে প্রচ্ছন্ন বেকারত্ব দেখা যায় এবং এটা হয় উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি থাকায়। তাছাড়া অধিকতর আয়ের প্রত্যাশা এবং কর্মসংস্থানের আশায় গ্রাম থেকে শহরে শ্রমিকের স্থানান্তরও পরিলক্ষিত হয়। অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রের সঙ্গে উৎপাদনের কলাকৌশল জড়িত। অপেক্ষাকৃত উন্নত ক্ষেত্রে আধুনিক উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়। আবার অনগ্রসর ক্ষেত্রে চিরাচরিত উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়। আঞ্চলিক অর্থনৈতিক বৈষম্য এই দ্বিক্ষেত্রের অন্যতম অঙ্গ। আর্থিক ক্ষেত্রে যে দ্বিক্ষেত্র পরিলক্ষিত হয় সটাও অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রেরই একটি রূপ। সামাজিক ক্ষেত্রে শিক্ষা, সামাজিক রীতিনীতি ও চেতনা এবং অর্থনৈতিক পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে সামাজিক অবস্থার পরিবর্তন—এগুলিও অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত।

3. লুইস মডেল

আর্থার লুইস অনগ্রসর দেশে উদ্বৃত্ত শ্রমের পরিপ্রেক্ষিতে যে উন্নয়ন তত্ত্ব আলোচনা করেছেন তাতে গ্রামীণ অর্থনীতিতে দুটি ক্ষেত্র ধরা হয়েছে—একটি হল জীবনধারণের জন্য ন্যূনতম মজুরির ক্ষেত্র (Subsistence sector) অথবা ভরণপোষণভিত্তিক প্রয়োজনীয় উৎপাদনের ক্ষেত্র, এবং অপরটি হল পুঁজিবাদী ক্ষেত্র। লুইসের মতে স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে শ্রমের যোগান অসীম ; এই দেশগুলিতে একটি স্থির মজুরি হার থাকে এবং এই মজুরি হারে যত খুশী শ্রমিক নিয়োগ করা যেতে পারে। তবে এই মজুরি জীবনধারণের জন্য প্রয়োজনীয় ন্যূনতম মজুরি (wage in the subsistence sector) থেকে একটু বেশি থাকে, যাতে শ্রমিকের স্থানান্তরের প্রকৃত খরচ (real cost of transfer) মজুরির অন্তর্ভুক্ত থাকে। মূলধনের মালিক সেই মাত্রা পর্যন্ত শ্রমিক নিয়োগ করবে যেখানে স্থির মজুরি হার প্রান্তিক উৎপাদনী শক্তির চেয়ে কম। এক্ষেত্রে যতটা শ্রম নিয়োগ হবে, তাতেই মালিকের মুনাফা সর্বাধিক হবে। লুইসের মতে যদি পুঁজিপতি এই উদ্বৃত্ত মুনাফা পুনর্বিনিয়োগ করে তবে দেশের সামগ্রিক উৎপাদন বাড়বে। শহরাঞ্চলে এই বিনিয়োগ হলে শিল্পক্ষেত্রে উৎপাদন বাড়বে এবং কর্মসংস্থানের আশায় গ্রাম থেকে শহরে শ্রমিকদের স্থানান্তর হবে।

4. টোডারো এবং হ্যারিস-টোডারো মডেল

শহরে এবং গ্রামের মধ্যে শ্রমিকদের প্রত্যাশিত আয়ের পার্থক্য গ্রামের শ্রমিকদের শহরে চলে আসতে অনুপ্রাণিত করে। টোডারো মডেলে এই শ্রমিক স্থানান্তরের কারণ বিশ্লেষিত হয়েছে। শ্রমিকরা যে গ্রাম থেকে শহরে চলে আসতে চায় তার পেছনে আপেক্ষিক সুবিধা ও ব্যয়ের বিবেচনা কাজ করে। শহর অঞ্চলে কর্মসংস্থানের সম্ভাবনা এবং শহর অঞ্চলে কর্মসংস্থান সৃষ্টির হার অপেক্ষা গ্রাম থেকে কর্মপ্রার্থীদের স্থানান্তরের হার বেশি হওয়া স্বাভাবিক। যতক্ষণ পর্যন্ত শহর অঞ্চলের মজুরি হার গ্রামাঞ্চলের মজুরি হার অপেক্ষা বেশি থাকে ততক্ষণ পর্যন্ত সমস্যার সমাধান হবে না। শ্রমিক স্থানান্তরের এই সমস্যার সমাধানের অন্যতম উপায় হল জনসংখ্যা বৃদ্ধি প্রতিরোধ করা, শহরে মজুরি হার এবং একই কাজের জন্য গ্রামে মজুরি হারের পার্থক্য যতটা সম্ভব কমিয়ে আনা।

হ্যারিস-টোডারো মডেলে ধরা হয়েছে যে শহর অঞ্চলে নির্দিষ্ট মজুরি গ্রামাঞ্চলে নির্দিষ্ট মজুরি অপেক্ষা বেশি হওয়া শ্রমিক স্থানান্তরকে প্রভাবিত করে। তাছাড়া আরও যেসব কারণে শ্রমিক স্থানান্তর প্রভাবিত হয় সেগুলি হল গ্রামাঞ্চলের মজুরি হার এবং গ্রামীণ শ্রমিকের প্রান্তিক উৎপাদনের সমতা (গ্রামাঞ্চলে শ্রমিকদের প্রান্তিক উৎপাদন খুবই কম), শহরাঞ্চলে ব্যাহিক কারণ দ্বারা কর্মনিয়োগের মাত্রা প্রভাবিত হওয়া এবং প্রত্যাশিত আয়। গ্রাম থেকে শহরে শ্রমিকদের স্থানান্তর শহরাঞ্চলে বেকার সমস্যার সৃষ্টি করে। শহরের সংগঠিত ক্ষেত্রে বেকারত্বের তীব্রতা বেড়ে গেলে উদ্বৃত্ত শ্রমিকরা অসংগঠিত ক্ষেত্রে কর্মপ্রার্থী হয়। তবে সেক্ষেত্রেও মজুরির হার কম থাকে। শ্রমের স্থানান্তর থেকে প্রত্যাশিত আয় কৃষিক্ষেত্রে প্রাপ্ত প্রকৃত আয়ের হার যদি একই পর্যায় থাকে তবে শ্রমিক স্থানান্তর বিশেষ হবে না।

২.৬ অনুশীলনী

1. নিচের প্রশ্নগুলির সংক্ষিপ্ত উত্তর দিন।
   (i) দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনৈতিক ব্যবস্থা বলতে কী বোঝায়?
   (ii) সামাজিক দ্বিক্ষেত্র কী?
   (iii) অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্র কাকে বলে?
   (iv) ভৌগোলিক দ্বিক্ষেত্র এবং আর্থিক দ্বিক্ষেত্রের মধ্যে পার্থক্য কী?
   (v) কলাকৌশলগত দ্বিক্ষেত্র বলতে কী বোঝায়?
   (vi) আর্থিক দ্বিক্ষেত্র বলতে কী বোঝায়?
   (vii) অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রের স্বরূপ ব্যাখ্যা করুন।
   (viii) লুইস মডেলে কোন্ ধরনের দ্বিক্ষেত্র আলোচিত হয়েছে?
   (ix) টোডারো মডেলের বৈশিষ্ট্য কি কি?
   (x) হ্যারিস-টোডারো মডেল অনুযায়ী গ্রাম থেকে শহরে শ্রমের স্থানান্তর কখন বন্ধ হতে পারে?

2. শূন্যস্থান পূরণ করুন :
   (i) দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট অর্থনীতিতে একদিকে থাকে একটি ________ ক্ষেত্র, অপরদিকে থাকে একটি ________ ক্ষেত্র।
   (ii) লুইস মডেলে একটি স্থির মজুরিতে শ্রমের সরবরাহ ________ ধরে নেওয়া হয়েছে।
   (iii) লুইস মডেল অনুযায়ী যেহেতু শহর অঞ্চলে মজুরি হার বেশি, সেজন্য গ্রামাঞ্চল থেকে শহরাঞ্চলের শ্রমের ________ হতে পারে।
   (iv) লুইসের তত্ত্বে মজুরি হার ________ ধরে নেওয়া হয়েছে। এই মজুরি হার ন্যূনতম মজুরি হার অপেক্ষা একটু ________।
   (v) টোডারো মডেলের মূল কথা হল গ্রামাঞ্চল থেকে শহরাঞ্চলের শ্রমের ________।
   (vi) যদি গ্রাম ও শহর অঞ্চলের মধ্যে প্রত্যাশিত মজুরি-পার্থক্য না থাকে তবে গ্রাম থেকে শহরে শ্রমের ________ হবে না।
   (vii) হ্যারিস-টোডারো মডেলে শ্রমের স্থানান্তরের কারণ হল শহর অঞ্চলের নির্দিষ্ট মজুরি গ্রামাঞ্চলের নির্দিষ্ট মজুরি অপেক্ষা ________ হওয়া।
   (viii) শহর অঞ্চলের প্রত্যাশিত আয় গ্রাম থেকে শহরে শ্রমের ________ অন্যতম কারণ।

❑ প্রশ্নমালা

1. স্বল্পোন্নত অর্থনীতিতে কোন্ কোন্ ধরনের দ্বিক্ষেত্র দেখা যায়? অর্থনৈতিক দ্বিক্ষেত্রের স্বরূপ ব্যাখ্যা করুন।
2. দ্বৈত অর্থনীতি বলতে কি বোঝায়? দ্বৈত অর্থনীতির বিভিন্ন রূপ ব্যাখ্যা করুন।
3. উদ্বৃত্ত শ্রম-সম্পন্ন অর্থনৈতিক ব্যবস্থায় মূলধন গঠন সম্পর্কে লুইসের মডেলটি আলোচনা করুন।

4. স্বল্পোন্নত দেশে শ্রমিকরা গ্রাম ছেড়ে শহরে চলে আসতে চায় কেন? গ্রাম থেকে শহরে শ্রমের স্থানান্তর সম্পর্কে টোডারো মডেলটি ব্যাখ্যা করুন।
5. "হ্যারিস-টোডারো মডেল, টোডারোর পূর্ববর্তী মডেলেরই একটি বর্ধিত রূপ"—উক্তিটি ব্যাখ্যা করুন।
6. হ্যারিস-টোডারো মডেলের মুল প্রতিপাদ্য বিষয় কি? কোন্ কোন্ অবস্থায় গ্রাম থেকে শহরে শ্রমের স্থানান্তর হতে পারে? কিভাবে এই শ্রমের স্থানান্তর বন্ধ করা যায়?
7. শ্রমের সীমাহীন যোগানের পরিপ্রেক্ষিতে লুইসের উন্নয়ন তত্ত্বটি আলোচনা করুন। ভারতের ক্ষেত্রে এই তত্ত্বটির প্রাসঙ্গিকতা আছে কি?
8. হ্যারিস-টোডারো তত্ত্বে শ্রমের স্থানান্তর সম্পর্কে যে ব্যাখ্যা প্রদান করা হয়েছে তা আলোচনা করুন।

২.৭ গ্রন্থপঞ্জী

1. Higgins, B.—*Economic Development—Principles, Problems and Policies* (Indian Edition, Central Book Depot, Allahabd, 1963).
2. Boeke, J. H.—*Economics and Economic Policy of Dual Societies.* (New York, 1953).
3. Lewis W. A. : '*Economic Development with Unlimited Supply of Labour,*—Manchester School, 1954. (Reprinted in Agarwala and Singh : (Ed.) Economics of Underdevelopment. O.U.P., New York 1963).
4. Todaro M : '*A Model of Labour Migration and Urban Unemployment in Less Developed Countries* : American Economic Review, March 1969.
5. Harris J. and Todaro M. : '*Migration, Unemployment and Development : A Two-Sector Analysis*'. American Economic Review, March, 1970.

একক ৩ ❑ গুরুত্বপূর্ণ উন্নয়ন পদ্ধতির মানোন্নয়ন

গঠন

৩.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি আপনাকে বুঝিয়ে দেবে শ্রম-নিবিড় ও মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি কাকে বলে এবং দুটি ব্যবস্থার সুবিধা ও অসুবিধা। কোন দেশে কি ধরনের প্রয়োগ-কৌশল নির্বাচন করা জরুরি (Choice of Technique), সে সম্পর্কেও যুক্তি দিয়ে বুঝিয়ে দেওয়া হয়েছে এই এককে। এ প্রসঙ্গে অধ্যাপক অমর্ত্য সেনের তত্ত্বটি উল্লেখযোগ্য। বিনিয়োগের পরিমাণ ও হার নির্ধারণের বিভিন্ন লক্ষণও আলোচিত হয়েছে এখানে। গ্যালেনসন ও লিবেনস্টিন-এর প্রান্তিক মাথাপিছু পুনর্বিনিয়োগের সহগ সর্বাধিক স্তরে পৌঁছে দেওয়ার লক্ষণগুলি জানা যাবে এই একক থেকে।

৩.১ প্রস্তাবনা

উন্নয়নশীল দেশগুলি কিভাবে উন্নয়নের পথে এগোবে অর্থাৎ উন্নয়নের জন্য কি পদ্ধতি নির্বাচন করবে সে বিষয়ে বিতর্কের অবকাশ আছে। স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে মূলধনের অভাব এবং শ্রমশক্তির উদ্বৃত্ত দেখা যায়। প্রশ্ন হল, এক্ষেত্রে কি মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি (Capital-Intensive Production Technique) অনুসৃত হবেও অথবা বিকল্পভাবে, শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি (Labour-Intensive Production Technique) অনুসরণ করে কি উন্নয়নের পথে এগোতে হবে? আমরা প্রথমে শ্রম-নিবিড় এবং মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির নির্বাচন নিয়ে বিভিন্ন যুক্তি বিচার করব।

৩.২ শ্রম-নিবিড় বনাম মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি (Labour-Intensive versus Capital-Intensive Methods of Production)

কোন উন্নতিকামী দেশের পক্ষে একটি প্রধান সমস্যা হল, উন্নয়নের পদ্ধতি মনোনয়ন করা (choice of technique)—অর্থাৎ কি পদ্ধতিতে উৎপাদন বাড়ানো হবে তা স্থির করা। উন্নতিকামী দেশের পক্ষে দুটি উৎপাদন পদ্ধতি খোলা আছে—একটি হল শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি (Labour-Intensive method of production) এবং অপরটির হল মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি (Capital-intensive method of production)।

শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির অর্থ হল মূলধনের পরিমাণ বেশি না বাড়িয়ে মূলধনের অনুপাতে অধিক সংখ্যক শ্রমিক নিয়োগ করে উৎপাদন বাড়ানোর প্রচেষ্টা। অপরদিকে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির অর্থ হল, শ্রমের অনুপাতে অধিক মাত্রায় বেশি মূলধন বিনিয়োগ করে বা প্রয়োগ করে উৎপাদন বাড়ানোর প্রচেষ্টা।

শ্রম-নিবিড় উৎপাদন-পদ্ধতির পক্ষে যুক্তি—উন্নতিকামী দেশে, বিশেষ করে ভারতের মতো দেশে যেখানে জনসংখ্যার চাপ বেশি এবং বেকার সমস্যার তীব্রতা খুব বেশি অধিক সংখ্যক শ্রমিক নিয়োগ করে যন্ত্রপাতির প্রবর্তন সীমিত রাখা উচিত। কারণ প্রথমত, অধিক যন্ত্রপাতির প্রবর্তনে শিল্পক্ষেত্রে শ্রমিক ছাঁটাইয়ের সম্ভাবনা থাকে। তার ফলে বেকার সমস্যার তীব্রতা আরও বেড়ে যাবে।

দ্বিতীয়ত, অনগ্রসর বা উন্নতিকামী দেশের পক্ষে অধিক পরিমাণ মূলধন বিনিয়োগ করা সম্ভব নয়। মূলধনের স্বল্পতা থাকায় মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হলে বিদেশ থেকে মূলধন আমদানি করতে হবে—তার ফলে দেশের বহির্বাণিজ্যের লেনদেনের ওপর (balance of payments) চাপ পড়বে

এবং বৈদেশিক বিনিময় মুদ্রার সংকট বাড়বে। সেজন্য মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির পরিবর্তে শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির প্রয়োগ এক্ষেত্রে বেশি কাম্য। তাছাড়া শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির প্রয়োগ করা হলে মুদ্রাস্ফীতির সম্ভাবনা অপেক্ষাকৃত কম থাকে।

তৃতীয়ত, অনগ্রসর দেশগুলিতে উন্নত ধরনের প্রযুক্তিবিদ্যার প্রয়োগ এখনও হয়নি। সুতরাং সেক্ষেত্রে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি ব্যয়বহুল হবে। বরং শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির প্রয়োগ করলে এক্ষেত্রে উৎপাদন খরচ অনেক কম হবে।

চতুর্থত, শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতিতে শ্রমিকদের মজুরি বাড়ে এবং তার ফলে তাদের জীবনযাত্রার মান উন্নত হয়।

সর্বশেষে শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতিতে অধিক পরিমাণে মজুরি দ্রব্য (wage goods) অর্থাৎ, মজুরির ভিত্তিতে শ্রমিক নিয়োগ করে দ্রব্যের উৎপাদন, মুদ্রাস্ফীতির প্রতিষেধক হিসাব বিবেচিত হয়। কারণ, মজুরী দ্রব্যের উৎপাদন ব্যয় কম থাকে এবং এজন্য এই দ্রব্যগুলির দামও অপেক্ষাকৃত কম থাকে। উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তিসম্পন্ন গরিব দেশে অধিক পরিমাণে মজুরি দ্রব্য উৎপাদন আর্থিক স্থিতিশীলতা বজায় রাখার সহায়ক হয় বলে মনে করা হয়। দেশের কুটির ও ক্ষুদ্রশিল্পগুলিকে টিকিয়ে রাখার জন্যও শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি কার্যকর হয়।

শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির বিপক্ষে যুক্তি : শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির বিপক্ষে প্রধান যুক্তি হল এই পদ্ধতিতে দেশের উন্নয়ন হার (growth-rate) দ্রুত বাড়ানো সম্ভব নয়। অধিকতর মূলধন বিনিয়োগের মাধ্যমে উৎপাদন বৃদ্ধি দ্রুত হয়, এবং মেসিনের সাহায্যে উৎপাদন করলে উৎপাদিত সামগ্রীর উৎকর্ষ বেশি হয়। উৎপাদনের পরিমাণ এবং উৎপাদন বৃদ্ধির হার সর্বাধিক করার জন্য মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির প্রয়োগ অধিকতর কাম্য। শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতিতে উন্নত প্রযুক্তিবিদ্যার প্রয়োগ সম্ভব নয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় কমপিউটারের মাধ্যমে উৎপাদন পদ্ধতির উন্নয়ন এবং শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি পরস্পরবিরোধী। কারণ, কমপিউটার প্রবর্তিত হলে উৎপাদন ক্ষেত্রে উদ্বৃত্ত শ্রমিকের সংখ্যা বেড়ে যাবে।

শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির বিপক্ষে আরেকটি যুক্তি হল স্বল্পোন্নত দেশে শ্রমিকদের কারিগরি দক্ষতা কম থাকে। এর ফলে ক্রেতাদের চাহিদা ও রুচি অনুযায়ী উৎকৃষ্ট দ্রব্য তৈরি করা এবং উৎপাদনে বৈচিত্র্য আনা সব সময় সম্ভব হয় না। তাছাড়া এমন অনেক দ্রব্য আছে যেগুলি উৎপাদন করার জন্য আধুনিক যন্ত্রপাতির প্রয়োজন। প্রতিযোগিতামূলক বাজারে অভ্যন্তরীণ ও বৈদেশিক উভয় ধরনের বাজারেই মূলধনী দ্রব্য উৎপাদন করা একান্ত প্রয়োজনীয়। শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির মাধ্যমে মূলধনী দ্রব্য উৎপাদন করা সম্ভব হয় না।

মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির পক্ষে যুক্তি : উৎপাদনের পরিমাণ এবং উৎপাদন বৃদ্ধির হার সর্বাধিক করার জন্য মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির প্রয়োগ অপরিহার্য। যন্ত্রপাতির প্রবর্তনের মাধ্যমে উৎপাদিত

সামগ্রীর উৎকর্ষ বাড়ানো এবং উৎপাদন পদ্ধতি নিখুঁত করা সম্ভব হয়। তাছাড়া উন্নত ধরনের প্রযুক্তিবিদ্যার প্রয়োগও মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির মাধ্যমেই সম্ভব। উদাহরণ হিসাবে কমপিউটারের প্রবর্তনের মাধ্যমে উৎপাদন পদ্ধতি উন্নত করার কথা বলা যেতে পারে।

মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির পক্ষে সবচেয়ে বড় যুক্তি হল, স্বল্পোন্নত দেশকে যদি শিল্পোন্নত দেশে পরিণত করতে হয় তবে দেশে মৌলিক ও গুরুভার শিল্পগুলিতে উৎপাদন ক্ষমতা এবং উৎপাদন উভয়ই দ্রুত বাড়ানো দরকার এবং এজন্য আধুনিক যন্ত্রপাতি ব্যবহার করা দরকার ও প্রয়োজনীয় ক্ষেত্রে বিদেশী প্রযুক্তির সাহায্য গ্রহণ করা দরকার। মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করেই এটা করা যেতে পারে।

মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করা হলে প্রাথমিকভাবে মূলধন-ব্যয় বেড়ে গেলেও চূড়ান্ত পর্যায়ে উৎপাদন বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে ইউনিট পিছু উৎপাদন ব্যয় কমে আসে। তাছাড়া স্থায়ী ভোগ-সামগ্রী (durable consumer goods) উৎপাদনের জন্যও আধুনিক যন্ত্রপাতির প্রয়োজন ; মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগের মাধ্যমেই এটা সম্ভব হয়। ইস্পাত উৎপাদন, মোটর গাড়ি উৎপাদন, রেলওয়ে ওয়াগন উৎপাদন, এবং উন্নত ধরনের যন্ত্রপাতি ও মূলধনী দ্রব্য উৎপাদনের জন্য কখনই শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগের ওপর নির্ভর করা যায় না—এক্ষেত্রে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতিই প্রয়োগ করতে হয় এবং তার ফলেই দেশে উন্নয়ন হার বাড়তে পারে ও কর্মসংস্থানের সম্প্রসারণও হতে পারে।

মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির বিপক্ষে যুক্তি : মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির বিপক্ষে প্রধান যুক্তি হল, দেশে অতিরিক্ত শ্রমিক সরবরাহ থাকলে অধিক অনুপাতে যন্ত্রপাতি প্রবর্তন বেকার সমস্যার তীব্রতা বাড়িয়ে দেয়। কারণ, তাতে শ্রমিক ছাঁটাইয়েরও সম্ভাবনা থাকে—তাছাড়া শ্রমিকদের কর্মনিযুক্তির সম্ভাবনাও কমে যায়।

দ্বিতীয়ত, মূলধন নিবিড় উৎপাদন-পদ্ধতির প্রয়োগ খুবই ব্যয়সাধ্য। অনগ্রসর দেশে মূলধনের স্বল্পতা থাকায় মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির প্রয়োগের জন্য দেশকে প্রচুর মূল্য দিতে হয়। কৃষি ও শিল্পক্ষেত্রে অধিক পরিমাণ মূলধন বিনিয়োগ করার জন্য বিদেশ থেকে সাহায্য গ্রহণ করতে হয় এবং তার ফলে বৈদেশিক বাণিজ্যে লেনদেনের ওপর চাপের সৃষ্টি হয় ও বৈদেশিক বিনিময় মুদ্রার সংকট বাড়ে।

তৃতীয়ত, অনগ্রসর দেশে তাড়াহুড়ো করে উন্নত ধরনের প্রযুক্তিবিদ্যার প্রয়োগ সম্ভব নয়। মূলধন-নিবিড় উৎপাদন-পদ্ধতির সঙ্গে সঙ্গে প্রযুক্তিবিদ্যারও পরিবর্তন হয়। অনগ্রসর দেশের শ্রমিকদের পক্ষে উন্নত ধরনের প্রযুক্তিবিদ্যার সঙ্গে খাপ খাইয়ে নিতে সময় লাগে ; কারণ, তারা যথেষ্ট কর্মনিপুণ (skilled) নয়।

চতুর্থত, মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগে মুদ্রাস্ফীতির সম্ভাবনা থাকে। অধিক মূলধন বিনিয়োগের সঙ্গে সঙ্গে দেশে মুদ্রা সরবরাহ এবং জনসাধারণের ক্রয়শক্তি উভয়ই বাড়ে। অথচ মূলধন বিনিয়োগের সঙ্গে

সঙ্গে উৎপাদন বাড়ে না। মূলধন-বিনিয়োগ এবং উৎপাদন বৃদ্ধির মধ্যে সময়ের ব্যবধান (gestation lag) থাকে তার ফলে মুদ্রাস্ফীতির সৃষ্টি হয়। সর্বক্ষেত্রে স্বল্পোন্নত দেশে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগের ক্ষেত্রে শ্রমিকদের উপযুক্ত কারিগরি দক্ষতার অভাব সমস্যার সৃষ্টি করে।

৩.৩ প্রয়োগ-কৌশল নির্বাচন (Choice of Technique)

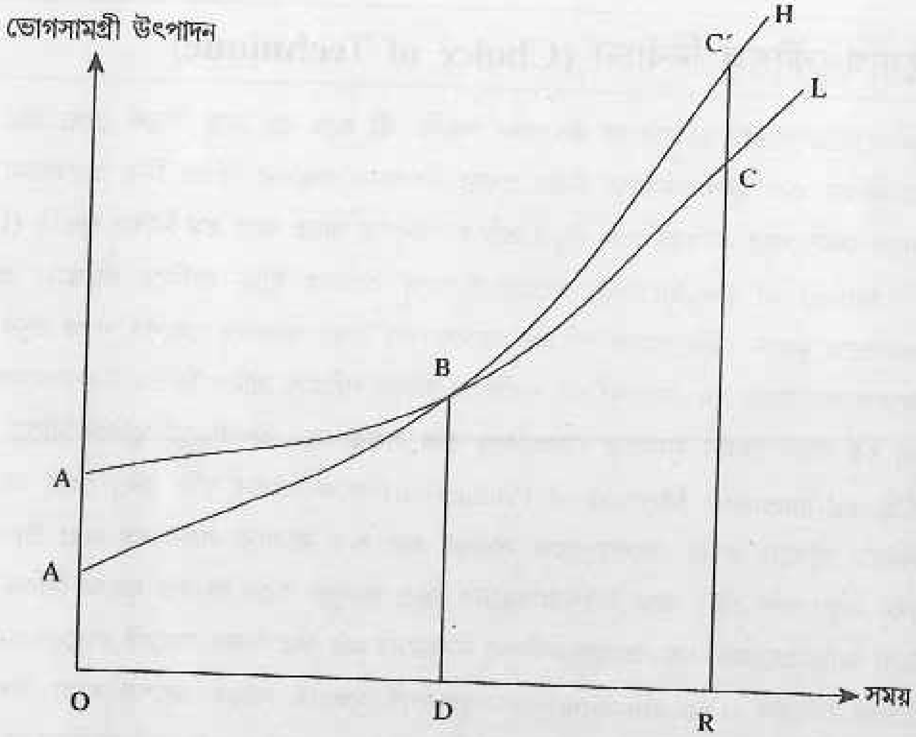
উৎপাদন ক্ষেত্রে প্রয়োগ-কৌশল বা উৎপাদন পদ্ধতি কী হবে তা নিয়ে বিতর্ক দেখা যায়। আমরা এক্ষেত্রে শ্রম-নিবিড় এবং মূলধন-নিবিড়, উভয় প্রকার উৎপাদন পদ্ধতির বিভিন্ন দিক আলোচনা করেছি। স্বল্পোন্নত দেশে জনসংখ্যার আধিক্য এবং উদ্বৃত্ত শ্রমিক সরবরাহ থাকে বলে শ্রম-নিবিড় পদ্ধতি (Labour-intensive Method of Production) প্রয়োগের পক্ষে অনেকে যুক্তি দেখিয়ে থাকেন। শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতিতে মূলধন বিনিয়োগের পরিমাণ অপেক্ষাকৃত কম। স্বল্পোন্নত দেশের পক্ষে প্রচুর পরিমাণ মূলধন বিনিয়োগ করা সম্ভব নয়। তাছাড়া এই পদ্ধতিতে অধিক পরিমাণ শ্রমিক বিভিন্ন উৎপাদনমূলক কাজে নিয়োগ করা হয় বলে বেকার সমস্যার মোকাবিলা করা সম্ভব হয়। অপরদিকে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির (Capital-intensive Method of Production) পক্ষে প্রধান যুক্তি হল, বেশি করে মূলধন বিনিয়োগ করতে পারলে একটি দেশের পক্ষে সমৃদ্ধির হার দ্রুত বাড়ানো সম্ভব হয় এবং উন্নত ধরনের দ্রব্য উৎপাদন করা সম্ভব হয়। তাছাড়া শিল্পোন্নয়নের ভিত মজবুত করার জন্যও মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করার প্রয়োজন হয়। প্রয়োগ-কৌশল নির্বাচনের এই বিতর্ক সব সময়েই চলছে। তবে বর্তমান বিশ্বে বাণিজ্যের বিশ্বায়ন (Globalisation) খুব গুরুত্বপূর্ণ হওয়ায় বিভিন্ন দেশের মধ্যে শিল্প-বাণিজ্যে প্রতিযোগিতাও বেড়ে গেছে। এই প্রতিযোগিতায় টিকে থাকতে হলে এবং প্রতিযোগিতামূলক দক্ষতা বাড়াতে গেলে কোনো দেশের উদ্বৃত্ত শ্রম-শক্তি এবং বিনিয়োগযোগ্য মূলধনের দুষ্প্রাপ্যতার সমস্যাটিও উপেক্ষা করা যায় না।

অমর্ত্য সেন উন্নয়নশীল দেশে প্রয়োগ-কৌশলের নির্বাচন কিভাবে করা যেতে পারে সে সম্পর্কে একটি মডেল তৈরি করেছেন। এই প্রসঙ্গে আমরা এটা আলোচনা করতে পারি।

৩.৪ প্রয়োগ-কৌশল সম্পর্কে অমর্ত্য সেনের বিশ্লেষণ (Sen Criterion of the Choice of Technique)

অমর্ত্য সেন বিনিয়োগের বণ্টন ও পরিমাণ নির্ধারণে সময়ের উপাদানের (time element) উপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করেছেন। অমর্ত্য সেন ছাড়াও অধ্যাপক মরিস ডব (Maurice Dobb) প্রয়োগ-কৌশলের

নির্বাচন নিয়ে একই ধরনের আলোচনা করেছেন। যদি বিনিয়োগ থেকে ফলপ্রাপ্তি দশ বছরের কম সময়ের ভিতর অর্জন করতে হয়, তবে সংশ্লিষ্ট দেশের পক্ষে শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করা সমর্থনযোগ্য। অপরদিকে যদি বিনিয়োগ থেকে ফলপ্রাপ্তির জন্য দশ বছরেরও অধিককাল পর্যন্ত অপেক্ষা করা সম্ভব হয় তবে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করা সমর্থনযোগ্য।



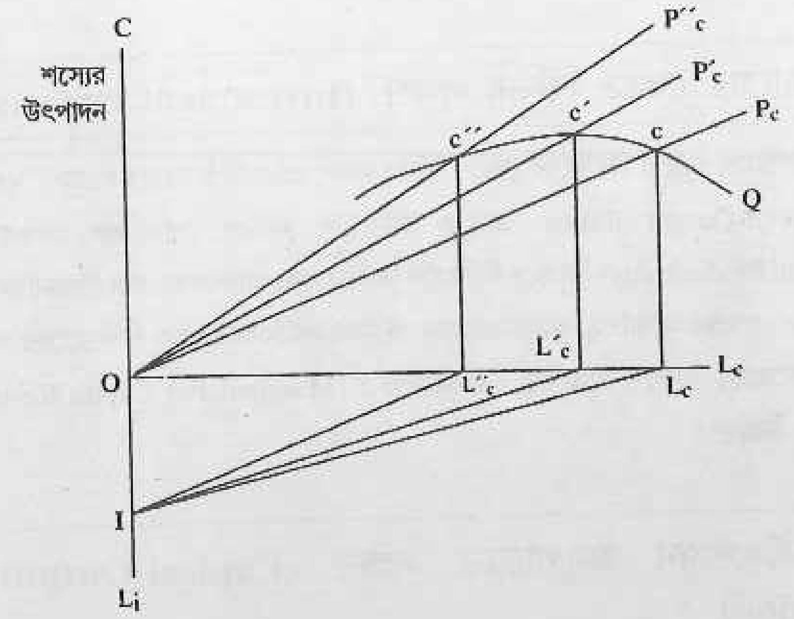
চিত্র—3.1

এইসময় সীমা অনমনীয় নয়, এর এদিক-ওদিক হতে পারে। 3.1 চিত্রে এটা বোঝানো হয়েছে। এই চিত্রে অনুভূমিক অক্ষে সময় এবং উল্লম্ব অক্ষে ভোগ-সামগ্রীর উৎপাদন ধরে নেওয়া হয়েছে।

এই চিত্রে H এবং L দুটি পদ্ধতির মাধ্যমে সময়ের ব্যবধানে প্রকৃত ভোগের প্রবাহ বোঝাচ্ছে। AL হল শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি এবং A´H হল মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি। মূলধন-নিবিড় পদ্ধতি (A´H) থেকে স্বল্পকালে কম পরিমাণে উৎপাদন পদ্ধতি (AL) থেকে উন্নয়ন হার বেশি থাকে। এই চিত্রে D বিন্দুতে পৌঁছানোর আগে পর্যন্ত AL পদ্ধতিতে A´H পদ্ধতি অপেক্ষা বেশি উৎপাদন হচ্ছে। এর ফলে A´H পদ্ধতি, অর্থাৎ মূলধন-নিবিড় পদ্ধতি অনুসরণ করার, ফলে উৎপাদনের মোট ফাঁক হচ্ছে ABA´। এরপর R বিন্দুতে মূলধন-নিবিড় পদ্ধতি এই উৎপাদনের ফাঁক দূর করে দিচ্ছে CBC´ এলাকাক্ষেত্র দ্বারা। অর্থাৎ, স্বল্পকালে শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগের ফলে উৎপাদনের যে লাভ হচ্ছে এবং মূলধন-নিবিড় পদ্ধতির ক্ষেত্রে

উৎপাদনের যে ক্ষতি হচ্ছে, দীর্ঘকালে মূলধন-নিবিড় পদ্ধতিতে উৎপাদন যা বেড়ে যায় তাতে এই ক্ষতি দূর হয়ে যায়। এই চিত্র অনুযায়ী OR হল উৎপাদন পুনরুদ্ধারের সময় (Period of Recovery), কারণ এই সময়ের মধ্যে সামগ্রিক ভোগের স্তর একই থাকে। যদি পুনরুদ্ধারের সময় অনেক দীর্ঘ হয় তবে গোড়ায় মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির প্রয়োগের ফলে আমরা যে উৎপাদন-হ্রাস দেখতে পাই, সেই ক্ষতি D বিন্দুর পর চট করে পূরণ করা যায় না। সেক্ষেত্রে আমাদের শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতিই গ্রহণ করা উচিত। আবার পুনরুদ্ধারের সময় যদি কম হয়, অর্থাৎ, A´H পদ্ধতি থেকে উৎপাদনের যে প্রারম্ভিক ক্ষতি হয় সেটা পুনরুদ্ধার করতে যদি বেশি সময় না লাগে তবে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করা উচিত।

অমর্ত্য সেন নিম্নের 3.2 রেখাচিত্রের সাহায্যে প্রয়োগ-কৌশলের সমস্যার বিস্তৃত ব্যাখ্যা করেছেন।



চিত্র—3.2

এই চিত্রে মূলধন-নিবিড়তার তিনটি মাত্রা দেখানো হয়েছে। OLcI হল প্রথম মাত্রা, OL´cI হল দ্বিতীয় মাত্রা এবং OL´´cI হল তৃতীয় মাত্রা। প্রথম মাত্রায় শস্যের উৎপাদন হল CLc ; দ্বিতীয় মাত্রায় শস্যের উৎপাদন হল C´L´c এবং তৃতীয় মাত্রায় শস্যের উৎপাদন হল C´´L´´c। Q হল উৎপাদন রেখা (output curve) এবং এই উৎপাদন রেখা শস্য উৎপাদন এবং শস্য উৎপাদনের ক্ষেত্রে কর্মনিয়োগের মধ্যে সম্পর্ক বোঝাচ্ছে। মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির প্রথম মাত্রায় কর্মনিয়োগের পরিমাণ হল OLc ; দ্বিতীয় মাত্রায় কর্ম-নিয়োগের পরিমাণ হল OL´c এবং তৃতীয় মাত্রায় কর্মনিয়োগের পরিমাণ হল OL´´c।

প্রয়োগ-কৌশল নির্বাচনের ক্ষেত্রে অমর্ত্য সেনের মতে পুনরুদ্ধারের সময় (period of recovery) এবং পরিকল্পনার সময়—এই দুটির তুলনা করতে হবে। কোন অর্থনীতিকে যদি দ্রুত সমৃদ্ধি অর্জন করতে হয়, তবে একটি নির্দিষ্ট সময়ের পরিপ্রেক্ষিতে সমৃদ্ধির সর্বাধিক হার অর্জন করতে হবে। সেক্ষেত্রে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি অনুসৃত হলে সাময়িকভাবে বর্তমানে ভোগ-সামগ্রীর উৎপাদন কম হলেও চূড়ান্ত পর্যায়ের ভোগ-সামগ্রীর উৎপাদন বাড়বে এবং বর্তমানের ঘাটতি দূর করবে। সুতরাং প্রয়োগকৌশল নির্বাচনের সঙ্গে পুনরুদ্ধারের সময় ও পরিকল্পনার সময় জড়িত। প্রকৃত সমস্যা হল, সঠিক প্রয়োগকৌশল (appropriate technology) নির্বাচন করা। কোনো দেশের পক্ষে সঠিক প্রয়োগকৌশল কি হবে অর্থাৎ কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে শ্রম-নিবিড় পদ্ধতি এবং কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে মূলধন-নিবিড় পদ্ধতি গৃহীত হবে, সেটা সেই দেশের অর্থনৈতিক কাঠামো ও অবস্থার ওপর নির্ভর করে।

৩.৫ বিনিয়োগের ক্ষেত্রে বিভিন্ন লক্ষণ (Investment criteria)

বিনিয়োগের পরিমাণ ও হার নির্ধারণের ক্ষেত্রে বিভিন্ন লক্ষণ আলোচিত হয়েছে। যেমন, মূলধন-উৎপাদন অনুপাতের (Capital-Output Ratio) ভিত্তিতে বিনিয়োগ নির্ধারণ, সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনের (Social Marginal Productivity) ভিত্তিতে বিনিয়োগ নির্ধারণ এবং গ্যালেনসন এবং লিবেনষ্টিন (Galenson and Leibenstein) প্রান্তিক মাথাপিছু পুনর্বিনিয়োগের পরিমাণ সর্বাধিক করাকে বিনিয়োগের অন্যতম লক্ষণ হিসাবে বিবেচনা করেছেন। প্রান্তিক মাথাপিছু পুনর্বিনিয়োগের (Marginal Per Capita Re-investment) ভিত্তিতে বিনিয়োগ নির্ধারণ।

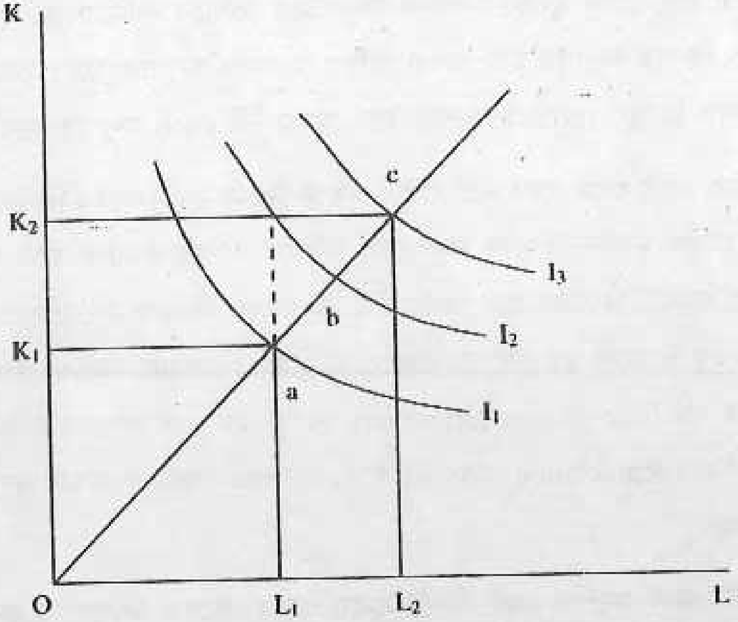
৩.৬ মূলধন-উৎপাদন অনুপাতের লক্ষণ (Capital-Output Ratio Criterion)

হ্যারড (Harrod) প্রদত্ত সমৃদ্ধি মডেল অনুযায়ী সমৃদ্ধির হার সঞ্চয়-আয় অনুপাত (S) এবং মূলধন-উৎপাদন অনুপাতের (C) সঙ্গে জড়িত। এই মডেল অনুযায়ী $G = \frac{S}{C}$; এক্ষেত্রে G হল সমৃদ্ধির হার, S হল সঞ্চয়-আয় অনুপাত এবং C হল মূলধন-উৎপাদন অনুপাত। বিনিয়োগ কতটা করা উচিত সেটা নির্ধারণ করার ক্ষেত্রে অনেক সময়েই মূলধন-উৎপাদন অনুপাত বিবেচনা করা হয়। মূলধন-উৎপাদন অনুপাত কম হলে মূলধনের উৎপাদনী শক্তি বেশি হয় এবং মূলধন-বিনিয়োগের ওপর প্রতিদানের হার (rate of return) বেশি হয়। মূলধন উৎপাদন অনুপাত হল বর্ধিত আয়-বিনিয়োগ অনুপাতের $\left(\frac{dY}{I}\right)$ বিপরীত, অর্থাৎ মূলধন-উৎপাদন অনুপাত $\left(\frac{I}{dY}\right)$ হল বিনিয়োগ এবং বর্ধিত আয় বা উৎপাদনের অনুপাত। অর্থাৎ

আয়-বিনিয়োগের অনুপাতকে সর্বাধিক করতে পারলেই মূলধন-উৎপাদন অনুপাত সর্বনিম্ন করা সম্ভব হয়। পোলক (Polok) এবং বুকানন (Buchanon) এভাবে এটা ব্যাখ্যা করেছেন।

সর্বনিম্ন $\frac{I}{dy}$ অথবা $\frac{I_t}{y_{t+1} - y_t} = \frac{dK_{t+1}}{y_{t+1} - y_t}$ অর্থাৎ, $\frac{dy}{I}$ করাই বিনিয়োগের ভিত্তি হওয়া উচিত।

এক্ষেত্রে I হল বিনিয়োগ, y হল আয় বা উৎপাদন এবং K হল মূলধন।



চিত্র—3.3

3.3 চিত্রে বর্ধিত মূলধন-উৎপাদন অনুপাত এবং গড় মূলধন-উৎপাদন দেখানো হয়েছে।

3.3 চিত্রে I_1, I_2, I_3 হল কয়েকটি সম উৎপাদন রেখা (isoquants) ; উল্লম্ব অক্ষে মূলধন (K) এবং অনুভূমিক অক্ষে শ্রম (L) ধরা হয়েছে। I_1 সম-উৎপাদন রেখায় a হল ভারসাম্য বিন্দু এবং এক্ষেত্রে মূলধন হল OK_1 এবং শ্রম হল OL_1 ; যদি মূলধনের পরিমাণ OK_1 থেকে OK_2 পর্যন্ত বাড়ানো হয় অথচ শ্রমের পরিমাণ অপরিবর্তিত রাখা হয়, তবে উৎপাদন ab পরিমাণ বাড়বে।

এক্ষেত্রে, $\frac{K_1K_2}{ab}$ হল প্রান্তিক বা বর্ধিত মূলধন-উৎপাদন অনুপাত (incremental capital-output ratio)। যদি শ্রমের পরিমাণ OL_1 থেকে OL_2 পর্যন্ত বাড়ানো হয়, অথচ মূলধনের পরিমাণ স্থির রাখা হয়, তবে উৎপাদন ac পরিমাণ বাড়ছে। এক্ষেত্রে মূলধন-উৎপাদন অনুপাত (Capital output ratio) হল, $\frac{K_1K_2}{ac}$; এক্ষেত্রে গড় মূলধন-উৎপাদন অনুপাত (average capital-output ratio) হল $\frac{OK_1}{Oa}$ ।

মূলধন-উৎপাদন অনুপাতের ভিত্তিতে বিনিয়োগ নির্ধারণ করার ক্ষেত্রে দুটি শর্ত পূরণ হওয়া দরকার। একটি হল, এই অনুপাতের স্থিতিশীল (stable) হওয়া দরকার এবং অপরটি হল, এই অনুপাত যতটা সম্ভব কম (low) হওয়া দরকার।

মূলধন-উৎপাদন অনুপাত গড় অনুপাত (average ratio) এবং প্রান্তিক অনুপাত (marginal ratio) হতে পারে। এক্ষেত্রে প্রশ্ন হল, কোন্ মূলধন-উৎপাদন অনুপাতের ভিত্তিতে বিনিয়োগের সম্পদ বণ্টন করতে হবে? এই অনুপাত কি গড় অনুপাত হবে অথবা প্রান্তিক বা বর্ধিত অনুপাত হবে? তাছাড়া, আরও একটি প্রশ্ন হল, এই অনুপাত কি স্থূল (gross) অনুপাত হবে, অথবা নীট (net) অনুপাত হবে?

এমন হতে পারে, একই প্রকল্প হয়ত নীট প্রান্তিক মূলধন-উৎপাদন অনুপাতের ভিত্তিতে গ্রহণযোগ্য হতে পারে, আবার স্থূল প্রান্তিক মূলধন-উৎপাদন অনুপাতের ভিত্তিতে গ্রহণযোগ্য না-ও হতে পারে। সুতরাং স্থূল অনুপাতের ভিত্তিতে প্রকল্পটি বিবেচিত হবে অথবা নীট অনুপাতের ভিত্তিতে বিবেচিত হবে,—সেটা নির্ভর করে দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নের স্তর এবং অর্থনীতিতে কাঠামোগত রূপান্তরের হারের ওপর। যদি অর্থনীতির কাঠামোয় রূপান্তরের হার (rate of transformation) খুব উঁচু হয় তবে আন্তঃক্ষেত্র মূলধনের আনাগোনা বেশি হবে এবং অবচয়ের (depreciation) হারও উঁচু হবে ; সেক্ষেত্রে মূলধন-উৎপাদনে অনুপাতের স্থূল হিসাব অধিকতর কার্যকর হবে।

আবার মূলধন-উৎপাদন অনুপাত একটি নির্দিষ্ট সময়ে হিসাব করলেও উৎপাদনের প্রবাহ বহু বছর ধরে চলতে থাকে। উৎপাদন বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে উপাদানের ব্যবহারও চলতে থাকবে। বর্তমানে যে মূলধন বিনিয়োগ করা হবে তার সুফল পাওয়া যেতে পারে ভবিষ্যতে। সুতরাং বর্ধিত মূলধনের সঙ্গে উৎপাদনের অনুপাত এক্ষেত্রে প্রকল্পটির যথার্থতা সম্পর্কে সঠিক তথ্য না-ও দিতে পারে। স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে মূলধন-উৎপাদন অনুপাত অর্থনৈতিক উন্নয়নের পদ্ধতি হিসাবে সব সময় গ্রহণযোগ্য নয়। দেশের বিভিন্ন ক্ষেত্রের উৎপাদন লক্ষ্য অনুযায়ী মূলধনের সামগ্রিক প্রয়োজনের ভিত্তিতে গড় মূলধন-উৎপাদন অনুপাত নির্ধারণ করা হয়। সমগ্র দেশের পক্ষে মূলধন-উৎপাদন স্থির থাকলেও দেশের বিভিন্ন ক্ষেত্রে ক্ষেত্রভিত্তিক মূলধন-উৎপাদন ভিন্ন হতে পারে।

কৃষি-উৎপাদন কোনো স্বল্পোন্নত দেশেই স্থির থাকে না ; স্বল্পোন্নত দেশের মোট অভ্যন্তরীণ উৎপাদনের একটি উল্লেখযোগ্য অংশ (অনেক দেশে বৃহৎ অংশ) আসে কৃষিক্ষেত্র থেকে। দেশে সময়মত উপযুক্ত পরিমাণ বৃষ্টিপাতের অনিশ্চয়তা থাকলে কৃষিক্ষেত্রের উৎপাদনেও অনিশ্চয়তা থাকে। এজন্য দেখা যায়, স্বল্পোন্নত দেশে মূলধন উৎপাদন অনুপাত স্থিতিশীল থাকে না। তাছাড়া স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে মূলধন-উৎপাদনের অনুপাতও

অপেক্ষাকৃত বেশি থাকে। বিগত একশত বছরেরও অধিককাল ব্রিটেনে মূলধন-উৎপাদন অনুপাত মোটামুটিভাবে স্থিতিশীল ছিল। 1870 সালে এই অনুপাত ছিল 3.7; 1890 সালে তা কমে দাঁড়ায় 3.3 এবং 1912 সালে আবার বেড়ে দাঁড়ায় 3.9। দ্বিতীয় মহাযুদ্ধের পর এটা দাঁড়ায় 3.6। অনুরূপভাবে জার্মানীতেও এটা 3.5 থেকে 3.6 এর মধ্যে ছিল। অপরদিকে ভারতে বর্ধিত মূলধন-উৎপাদন অনুপাত (Incremental Capital-Output Ratio) তৃতীয় পাঁচসালা পরিকল্পনায় ছিল 4.58; 1973-74 সালে 5.86 এবং 1980-81 থেকে 1983-84 সালে ছিল 4.45; অষ্টম পাঁচসালা পরিকল্পনায় বর্ধিত মূলধন-উৎপাদন অনুপাত হয়েছিল 4.24 এবং নবম পাঁচসালা পরিকল্পনায় এটা ধরা হয়েছে 4.08। শুধু ভারতবর্ষই নয়, অন্যান্য উন্নতিকামী দেশগুলিতেও মূলধন-উৎপাদন অনুপাত যথেষ্ট বেশি এবং পরিবর্তনশীল। এজন্য স্বল্পোন্নত দেশগুলির ক্ষেত্রে মূলধন-উৎপাদন অনুপাত পরিকল্পনার অন্যতম পদ্ধতি হিসাবে সর্বদা গ্রহণযোগ্য নয়।

যদি মূলধন-উৎপাদন অনুপাত স্থির থাকে এবং যদি এই অনুপাত কম থাকে তবেই পরিকল্পনার অন্যতম পদ্ধতি এবং বিনিয়োগের ভিত্তি হিসাবে মূলধন-উৎপাদন অনুপাত গ্রহণযোগ্য হতে পারে।

৩.৭ সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনের লক্ষণ (Social Marginal Productivity Criterion)

সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনের লক্ষণ অনুযায়ী কোন প্রকল্প নির্বাচনের ক্ষেত্রে তার ব্যক্তিগত বা বেসরকারী লাভের সম্ভাবনা অথবা ব্যক্তির প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা বিবেচ্য নয়,—যে জিনিসটি এক্ষেত্রে বিবেচনা করতে হবে তা হল, প্রকল্পটির সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা। এই যুক্তিটির অবতারণা করেছেন কান (Kahn) এবং চেনেরি (Chenery)। এই তত্ত্ব অনুযায়ী যে মূলধন বিনিয়োগ করা হচ্ছে তার অনুপাতে সমাজের কাছে উৎপাদনের বার্ষিক মূল্য কত এবং তার সামাজিক ব্যয়ভার কত এই দুটির পার্থক্য বিবেচনা করতে হবে। অর্থাৎ,

$$\mathrm{SMP} = \frac{V - C}{K}$$

এক্ষেত্রে K হল মূলধন বিনিয়োগের পরিমাণ, V হল সমাজের কাছে উৎপাদনের মূল্য এবং C হল বিনিয়োগের সামাজিক ব্যয়ভার। ব্যক্তিগত ক্ষেত্রে ব্যয়ভার উপাদানগুলির বাজার-দামের ওপর (যেমন—মজুরি হার, সুদের হার প্রভৃতি) নির্ভরশীল। কিন্তু সামাজিক ব্যয়ভার বলতে সমাজের পক্ষে উপাদানগুলির সুযোগ- ব্যয় বা বিকল্প ব্যয় (opportunity cost to society) কত তা বিবেচনা করতে হবে। এই সামাজিক সুযোগ-ব্যয় অনেক সময় 'ছায়া মূল্য' (Shadow price) হিসাবে অভিহিত হয়। এই ছায়া মূল্য উপাদানের বাজার-দাম থেকে আলাদা, তবে এই মূল্যে উপাদানের প্রান্তিক উৎপাদনীশক্তি প্রতিফলিত হয়।

কোন বিনিয়োগের সামাজিক প্রভাব কী হবে তা সঠিকভাবে বিবেচনা করতে হলে প্রথমে প্রতি ইউনিট বিনিয়োগের জন্য ব্যক্তিগত পর্যায়ে কতটা প্রতিদান পাওয়া যায় তা বিবেচনা করতে হবে। এই বিবেচনার সঙ্গে সঙ্গে প্রথমত, বাণিজ্য শুল্ক (Tariffs) ও কর (Taxes) বাবদ কত প্রদান করতে হল এবং ভরতুকি বাবদ (Subsidies) কত পাওয়া গেল তা বাদ দিতে হবে। এক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট দ্রব্য আমদানি করার খরচের সঙ্গে অভ্যন্তরীণ উৎপাদনের সামাজিক মূল্যের সমতা ধরে নিতে হবে। দ্বিতীয়ত, উৎপাদনের বাহ্যিক অর্থনৈতিক সুবিধা (external economies), অর্থাৎ অন্য উৎপাদকের কাছে দ্রব্যসামগ্রী ও সেবাস্রোতের বিক্রয়-মূল্যের ওপরেও বাড়তি মূল্য বা সুবিধা কী হতে পারে তা বিবেচনা করতে হবে। তৃতীয়ত, যদি বিনিয়োগের মাধ্যমে অব্যবহৃত সম্পদগুলির ব্যবহার করা সম্ভব হয়, তবে এই সম্পদগুলি ব্যবহারের সামাজিক ব্যয়ভার বিবেচনা করতে হবে,—এগুলির জন্য কত খাজনা দেওয়া হল অথবা এজন্য কত মজুরি দেওয়া হল তা বিবেচনা করতে হবে না। এই বিবেচনাগুলি গৃহীত হলে সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনশীলতার লক্ষণটি এভাবে বিবৃত করা যেতে পারে—

$$SMP = \frac{V'}{K} - \frac{C'}{K} + \frac{Br}{K}$$

এক্ষেত্রে K হল মূলধন বিনিয়োগ বৃদ্ধি, V´ হল সমাজের কাছে অভ্যন্তরীণ উৎপাদনের বাৎসরিক মূল্য, C´ হল উপাদানগুলির সামাজিক ব্যয়ভার, Br হল বৈদেশিক লেনদেন ব্যালান্সের প্রভাব। চেনেরি (Chenery) মনে করেন যে, বৈদেশিক লেনদেন ব্যালান্সের (Balance of Payments) ওপর কোনও প্রকল্পের সম্ভাব্য প্রভাব সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা হিসাবের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত করা উচিত।

চেনেরির মতে সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনশীলতার ভিত্তিতে বিভিন্ন প্রকল্পের ক্রমিক মান বা গ্রহণযোগ্যতা বিবেচনা করার ক্ষেত্রে যে প্রকল্পটির সর্বোচ্চ প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা থাকবে সেটিই বিনিয়োগের জন্য গৃহীত হওয়া উচিত। প্রকৃতপক্ষে বিনিয়োগের জন্য বরাদ্দ অর্থ এমনভাবে বণ্টিত হওয়া উচিত যাতে বিভিন্ন প্রকল্পের প্রান্তিক উৎপাদনীশক্তি সমান হয়।

চেনেরি (Chenery) প্রদত্ত তত্ত্বটির সমালোচনায় বলা যেতে পারে যে স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে বাজারের মূল্যস্তরে সামাজিক ব্যয় এবং সামাজিক সুবিধার প্রতিফলন ঘটে না। এক্ষেত্রে উপাদানগুলির 'ছায়া-মূল্য' (Shadow Prices) ব্যবহার করতে হয়।

দ্বিতীয়ত, যদি শ্রমের বা অন্য কোন উপাদানের সামাজিক সুযোগ-ব্যয় শূন্য থাকে তবে সামাজিক উৎপাদনশীলতার লক্ষণটি মূলধন প্রতিদানের লক্ষণের (capital turnover criterion) অনুরূপ হয়।

তৃতীয়ত, সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনশীলতার লক্ষণটি স্থিতিশীল বিশ্লেষণের ওপর ভিত্তিশীল। বিনিয়োগের প্রভাবে আয়ের গঠন, বণ্টন ও প্রবাহের ওপর যে দীর্ঘকালীন পরিবর্তন হয়, এই তত্ত্বে তা বিবেচিত হয়নি।

চতুর্থত, এই তত্ত্বে অর্থনীতির কাঠামোগত পারস্পরিক নির্ভরশীলতা এবং বাহ্যিক অর্থনৈতিক সুবিধার স্বরূপ ও মূল্য বিবেচিত হয়নি।

পঞ্চমত, এই তত্ত্ব স্বল্পোন্নত দেশগুলির লক্ষ্য হিসাবে বর্তমান সামাজিক কল্যাণ সর্বাধিক করার ওপর গুরুত্ব আরোপ করে,—ভবিষ্যতে সামাজিক কল্যাণ কতটা হবে বা হওয়া উচিত সেই সম্পর্কে এই তত্ত্বে কিছু বলা হয়নি। বর্তমানে অনেকে মনে করেন যে স্বল্পোন্নত দেশগুলির উচিত এমনভাবে সমৃদ্ধির হার বাড়ানো যাতে ভবিষ্যৎ কল্যাণ সর্বাধিক হয়।

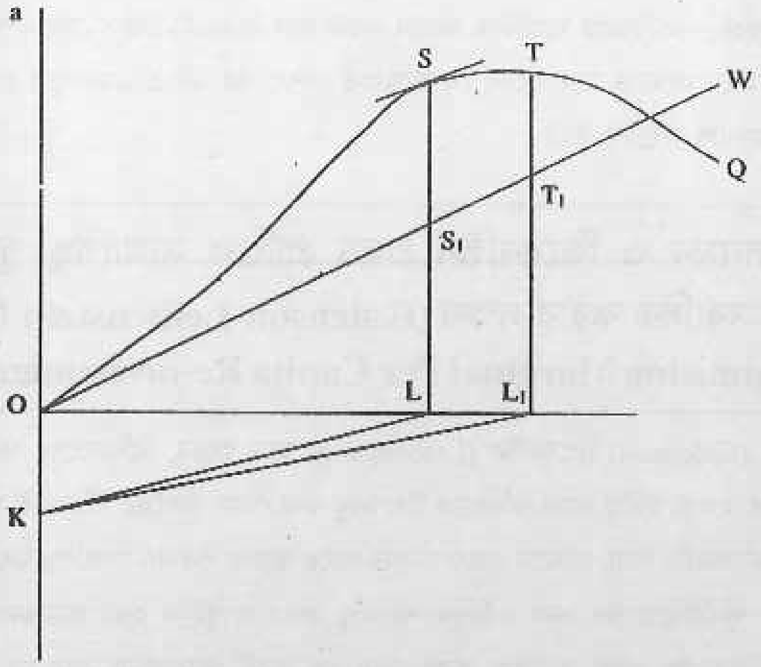
৩.৮ গ্যালেনসন ও লিবেনস্টিন প্রদত্ত প্রান্তিক মাথাপিছু পুনর্বিনিয়োগের সহগ সর্বাধিক করার লক্ষণ (Galenson-Leibenstein Criterion of Maximising Marginal Per Capita Re-investment Quotient.)

গ্যালেনসন (Galenson) লিবেনস্টিন (Leibenstein) মনে করেন, বিনিয়োগের জন্য নির্ধারিত সম্পদ এমনভাবে বন্টিত হওয়া উচিত যাতে ভবিষ্যতে উৎপাদন এবং ভোগ উভয়ের পরিমাণই সর্বাধিক হয়। এজন্য প্রয়োজন হল, জনসমষ্টির যারা বর্তমানে কাজে নিযুক্ত আছে তাদের বর্তমান মাথাপিছু উৎপাদন সর্বাধিক করা যাতে ভবিষ্যতে পুনর্বিনিয়োগের জন্য সর্বাধিক পরিমাণ সঞ্চয় সংগৃহীত হয়। গ্যালেনসন এবং লিবেনস্টিন মাথাপিছু পুনর্বিনিয়োগের সহগ সর্বাধিক করার জন্য যে তত্ত্বটি আলোচনা করেছেন তাতে উৎপাদনের প্রয়োগ-কৌশল কী হওয়া উচিত সে সম্পর্কেও কিছু বক্তব্য আছে। তাঁদের মতে উৎপাদন পদ্ধতি মূলধন-নিবিড় হওয়া উচিত।

গ্যালেনসন ও লিবেনস্টিনের মতে মূলধনের প্রতি ইউনিটের বর্তমান বিনিয়োগের ক্ষেত্রে পুনর্বিনিয়োগের হার (rate of reinvestment) নিম্নোক্ত সমীকরণের সাহায্যে বোঝানো যেতে পারে, $r = \frac{P - cw}{K}$ ।

এক্ষেত্রে r হল পুনর্বিনিয়োগের হার, P হল মেশিনপ্রতি নীট উৎপাদন, c হল মেসিন-প্রতি শ্রমিকের সংখ্যা, K হল মেসিনপ্রতি ব্যয় এবং w হল প্রকৃত মজুরি হার। যদি মজুরিপ্রাপ্ত অর্থ পুরোটাই ভোগের জন্য ব্যয়িত হয় এবং মুনাফার সবটাই যদি পুনর্বিনিয়োগ করা হয়, তবে পুনর্বিনিয়োগের হার সমৃদ্ধির হারের সমার্থক হয়।

মেশিন-প্রতি নীট উৎপাদন থেকে শ্রমিকদের মোট মজুরি দিয়ে যে উদ্বৃত্ত থাকে তার সঙ্গে মেশিন-প্রতি ব্যয়ের যে অনুপাত তার উপরই পুনর্বিনিয়োগের হার নির্ভরশীল। মূলধন-নিবিড় প্রকল্পে যদি উদ্বৃত্তের সৃষ্টি বেশি হয়, তবে সেই উদ্বৃত্ত পুনর্বিনিয়োগের হার বাড়িয়ে দেয়। মূলধন-নিবিড় প্রকল্পের প্রান্তিক মাথাপিছু পুনর্বিনিয়োগের সহগ (marginal per capita reinvestment quotient) শ্রম-নিবিড় প্রকল্পের অনুরূপ অনুপাত অপেক্ষা বেশি থাকে। এজন্য বিনিয়োগের হার বাড়ালে ভবিষ্যতে পুনর্বিনিয়োগের হার বেড়ে যেতে পারে এবং ভবিষ্যতে ভোগ ও কর্মসংস্থানের পরিমাণ বেড়ে যেতে পারে। 3.4 চিত্রের সাহায্যে এটা বোঝানো হয়েছে।



চিত্র—3.4

3.4 চিত্রে উল্লম্ব অক্ষের ঊর্ধ্ব অংশ (Oa) উৎপাদন এবং নিম্ন অংশ (OK) মূলধন পরিমাপ করছে। অনুভূমিক অক্ষে শ্রমের পরিমাণ করা হয়েছে। OQ হল উৎপাদন রেখা (output curve) এবং OW রেখা হল মজুরি রেখা। এই মজুরি রেখা দেখাচ্ছে যে নিযুক্ত শ্রমের যোগান বেড়ে যাবার সঙ্গে সঙ্গে মজুরিও সমান হারে বাড়ছে। যখন মূলধনের পরিমাণ হল OK এবং কর্মে নিযুক্ত শ্রমের যোগান হল OL_1, তখন উৎপাদন সর্বাধিক হয়েছে। তবে এক্ষেত্রে ভোগের ওপর উৎপাদনে উদ্বৃত্তের পরিমাণ হয়েছে TT_1, কারণ এক্ষেত্রে মজুরি পুরোটাই ভোগের কাজে ব্যবহৃত হয়ে গেছে। কিন্তু একই পরিমাণ মূলধন (OK) এবং আরও কম পরিমাণ শ্রমে (OL), অর্থাৎ, অধিকতর মূলধন-শ্রম অনুপাতে (higher capital-labour ratio) অথবা অধিকতর

মূলধন-নিবিড় উৎপাদনে, উদ্বৃত্তের পরিমাণ (SS_1) সর্বাধিক হয়েছে, যদিও এক্ষেত্রে উৎপাদনের পরিমাণ সর্বাধিক নয়। এক্ষেত্রে এটাই প্রতিভাত হয় যে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করা হলে ভোগের ওপর উৎপাদনের উদ্বৃত্ত সর্বাধিক হতে পারে এবং তার ফলে পুনর্বিনিয়োগও সর্বাধিক হতে পারে এবং তাতে দীর্ঘকালীন সমৃদ্ধির হার সর্বাধিক হতে পারে।

সুতরাং দেশের অর্থনীতি যদি ভবিষ্যতে সর্বাধিক উৎপাদন ও সর্বাধিক কল্যাণের অনুকূলে বর্তমান ভোগ ও কর্মসংস্থানের নীতি পরিত্যাগ করে তবে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি গ্রহণ করতে হবে। গ্যালেনসন ও লিবেনষ্টিনের মতে ভবিষ্যতে মাথাপিছু উৎপাদনের সম্ভাবনাকে সর্বাধিক করাই বিনিয়োগ নীতির উদ্দেশ্যে হওয়া উচিত এবং এই উদ্দেশ্য পূরণের জন্য প্রান্তিক মাথাপিছু পুনর্বিনিয়োগের সহগ (marginal per capita rei. estment quotient) সর্বাধিক করার ওপর গুরুত্ব আরোপ করা উচিত। এই তত্ত্ব অনুযায়ী যদি মুনাফার অধিকাংশ পরিমাণ পুনর্বিনিয়োগের জন্য সঞ্চিত হয়, তখন মজুরির সবটা ভোগের জন্য ব্যয় করা হলেও এবং মূলধনের স্বল্পতা থাকা সত্ত্বেও ভবিষ্যতের সর্বাধিক কল্যাণের জন্য মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি অনুসরণ করা উচিত।

অমর্ত্য সেন এই তত্ত্বটির সমালোচনা করে বলেছেন যে মুনাফার পরিমাণ এবং উদ্বৃত্তের পরিমাণ সর্বাধিক হওয়ার অর্থ এই নয় যে পুরোটাই পুনর্বিনিয়োগ করা হবে। জনসাধারণের ভোগের প্রবণতা বেড়ে গেলে বিনিয়োগযোগ্য উদ্বৃত্তের পরিমাণও কমে যাবে। তাছাড়া স্বল্পোন্নত দেশে যখন উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির জন্য বেকার সমস্যা তীব্র রূপ ধারণ করে, তখন বেকার সমস্যার আশু সমাধানের জন্য শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি গ্রহণ করা ছাড়া গত্যন্তর থাকে না। সমাজের কাছে বর্তমান আর ভবিষ্যতের আয় থেকে বেশি বিবেচ্য হতে পারে।

গ্যালেনসন ও লিবেনষ্টিনের তত্ত্বে বিদেশী দ্রব্য, বিশেষ করে যন্ত্রপাতি ক্রয় করা ও মূলধন গ্রহণ করার ফলে বৈদেশিক লেনদেন ব্যালান্সের ওপর কী প্রতিক্রিয়া হবে তা বিবেচিত হয়নি।

৩.৯ সারাংশ

1. উৎপাদন পদ্ধতির নির্বাচন

উৎপাদন পদ্ধতির দুটি রূপ বিবেচনা করা যেতে পারে। একটি হল শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি যেখানে মূলধনের অনুপাতে শ্রমের নিয়োগ অনেক বেশি, এবং অপরটি হল মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি যেখানে শ্রমের অনুপাতে মূলধনের প্রয়োগ অনেক বেশি।

জনসংখ্যার চাপ বেশি থাকলে এবং বেকার সমস্যার তীব্রতা থাকলে শ্রম-নিবিড় উৎপাদন প্রয়োগ করা বাঞ্ছনীয়। উন্নতিকামী দেশগুলিতে শ্রমিক সরবরাহ প্রচুর অথচ মূলধনের সরবরাহ স্বল্প। মূলধনের স্বল্পতা হেতু মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করা খুব কঠিন ও ব্যয়সাধ্য ; সেক্ষেত্রে বিদেশ থেকে মূলধন আমদানি করতে হয় এবং দেশের বহির্বাণিজ্যের লেনদেনের ওপর চাপ পড়ে। তাছাড়া শ্রমনিবিড় উৎপাদন পদ্ধতিতে বিনিয়োগ ব্যয় কম থাকে এবং কর্মসংস্থান সম্প্রসারণের সম্ভাবনা বেশি থাকে।

অপরদিকে বলা যায়, দ্রুত উন্নয়ন হার বাড়াবার জন্য শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি অপেক্ষা মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি অধিকতর কার্যকরী হয়। উন্নত ধরনের প্রযুক্তিবিদ্যার প্রয়োগ করে দ্রুত উৎপাদন বাড়ানো মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির প্রয়োগের মাধ্যমেই সম্ভব হয়। তবে অনগ্রসর দেশে মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির প্রয়োগ করার বিপক্ষে যুক্তি হল, এই পদ্ধতির প্রয়োগ ব্যয়সাধ্য,—দেশের আমদানি ব্যয় এর ফলে বেড়ে যায় এবং দেশের শ্রমিকদের ব্যয় এর ফলে বেড়ে যায় এবং দেশের শ্রমিকদের নতুন প্রযুক্তি গ্রহণ করার মতো দক্ষতা ও প্রস্তুতি না-ও থাকতে পারে।

2. প্রয়োগ-কৌশল নিয়ে অমর্ত্য সেনের বিশ্লেষণ

উৎপাদন ক্ষেত্রে প্রয়োগ-কৌশলের নির্বাচন কিরূপ হবে সে বিষয়ে আলোচনা প্রসঙ্গে অমর্ত্য সেন বিনিয়োগের বণ্টন ও পরিমাণ নির্ধারণে সময়ের উপাদানের ওপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করেছেন, যদি বিনিয়োগ থেকে ফলপ্রাপ্তি দশ বছরের কম সময়ের ভিতর অর্জন করতে হয়, তবে সংশ্লিষ্ট দেশের পক্ষে শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করা সমর্থনযোগ্য। অপরদিকে যদি বিনিয়োগ থেকে ফলপ্রাপ্তির জন্য দশ বছরেরও অধিককাল পর্যন্ত অপেক্ষা করা সম্ভব হয় তবে মূলধন নিবিড় পদ্ধতি প্রয়োগ করা সমর্থনযোগ্য। মূলধন-নিবিড় পদ্ধতি থেকে স্বল্পকালে কম পরিমাণ উৎপাদন পাওয়া যায়। অপরদিকে শ্রম-নিবিড় পদ্ধতি থেকে স্বল্পকালে বেশি উৎপাদন পাওয়া যায়। তবে স্বল্পকালে মূলধন-নিবিড় পদ্ধতির প্রয়োগের ফলে উৎপাদনের যে ক্ষতি হয় সেটা যদি দীর্ঘকালে পুরণ করা যায় তবে সেই সময়কে পুনরুদ্ধারের সময় বলা যেতে পারে এবং সেভাবে উৎপাদনের প্রয়োগ-কৌশল তৈরি করা যেতে পারে। যদি পুনরুদ্ধারের সময়টি খুব দীর্ঘ হয় তবে উৎপাদন বাড়ানোর তাগিদে শ্রম-নিবিড় পদ্ধতি প্রয়োগ করা উচিত। অমর্ত্য সেন যে দশ বছরের সময়-সীমার কথা বলেছেন, তার এদিক-ওদিক হতে পারে।

3. বিনিয়োগের লক্ষণ হিসাবে মূলধন-উৎপাদন অনুপাত

বিনিয়োগের পরিমাণ ও হার নির্ধারণে মূলধন-উৎপাদন অনুপাতের লক্ষণ (Capital-Output Ratio Criterion) একটি গুরুত্বপূর্ণ ভিত্তি। যদি মূলধন উৎপাদন অনুপাত স্বল্প এবং স্থিতিশীল থাকে ও সেই সঙ্গে সঞ্চয় হার বৃদ্ধি পায় তবে দেশে সমৃদ্ধির হার (Growth rate) বাড়ে। আবার স্বল্পোন্নত দেশে কৃষি-উৎপাদন স্থির না থাকলে মূলধন উৎপাদন অনুপাতও স্থির থাকে না। তাছাড়া, মূলধন বিনিয়োগ ব্যয়সাধ্য হওয়ায় স্বল্পোন্নত দেশে মূলধন-উৎপাদন অনুপাত বেশি থাকে এবং পরিবর্তনশীল থাকে।

বিনিয়োগের এই লক্ষণ অনুযায়ী প্রতি-ইউনিট মূলধন বিনিয়োগ থেকে কতটা উৎপাদন পাওয়া যাবে এটাই বিবেচ্য। যদি একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ উৎপাদনের জন্য আনুপাতিকভাবে বেশি মূলধনের প্রয়োজন হয়, তবে বুঝতে হবে উৎপাদন-অনুপাত (Productivity Ratio) এক্ষেত্রে কম। যদি মূলধন-উৎপাদন অনুপাত কম এবং স্থিতিশীল থাকে তবে বিনিয়োগের পরিমাণ বাড়াবার অবস্থা অনুকূল হয়।

4. **সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনের লক্ষণ :**

এই উৎপাদনের লক্ষণ অনুযায়ী কোনো প্রকল্প গ্রহণযোগ্য কিনা এবং তাতে বিনিয়োগ করা উচিত কিনা তা নির্ভর করে প্রকল্পটির সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনশীলতার ওপর। কান (Kahn) এবং চেনেরি (Chenery) এই তত্ত্বের প্রবক্তা, প্রত্যেকটি প্রকল্প বিবেচনা করার ক্ষেত্রে প্রথমে প্রতি-ইউনিট বিনিয়োগের জন্য সর্বোচ্চ কতটা প্রতিদান পাওয়া যায় তা বিবেচনা করতে হবে এবং সেই সঙ্গে বাণিজ্য শুল্ক ও অন্যান্য কর বাবদ কত প্রদান করতে হল তা বিবেচনা করতে হবে এবং ভরতুকি কত পাওয়া গেল তা বাদ দিতে হবে। তাছাড়া প্রকল্পটির রূপায়ণে কতটা বাহ্যিক সুবিধা পাওয়া যাবে এবং কতটা অব্যবহৃত সম্পদের সদ্ব্যবহার করা যাবে তা বিবেচনা করতে ও সেই সঙ্গে সামাজিক ব্যয়ভার (Social cost) কত হতে পারে তাও বিবেচনা করতে হবে। এই বিবেচনাগুলির ওপর ভিত্তি করেই প্রকল্পকে সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা হিসাব করতে হবে।

5. **গ্যালেনসন-লিবেনস্টিন প্রদত্ত প্রান্তিক মাথাপিছু পুনর্বিনিয়োগের সহগ সর্বাধিক করার লক্ষণ :**

প্রান্তিক মাথাপিছু পুনর্বিনিয়োগের সহগ হল বিনিয়োগের আরেকটি লক্ষণ এবং এটার প্রবক্তা হলেন গ্যালেনসন (Galenson) ও লিবেনস্টিন (Leibenstein)। তাঁদের যুক্তি অনুযায়ী বিনিয়োগের জন্য নির্ধারিত সম্পদ এমনভাবে বণ্টিত হওয়া উচিত যাতে ভবিষ্যতে উৎপাদন ও ভোগ উভয়েরই পরিমাণ সর্বাধিক হয়। এজন্য প্রয়োজন হল, জনসমষ্টির যারা বর্তমানে কাজে নিযুক্ত আছে তাদের বর্তমান মাথাপিছু উৎপাদন সর্বাধিক করা যাতে ভবিষ্যতে মাথাপিছু সর্বাধিক পুনর্বিনিয়োগের জন্য সর্বাধিক পরিমাণ সঞ্চয় সংগৃহীত হয়। এই তত্ত্ব অনুযায়ী উৎপাদন-পদ্ধতি হওয়া উচিত মূলধন-নিবিড়। মূলধন-নিবিড় প্রকল্পের মাথাপিছু পুনর্বিনিয়োগের সহগ শ্রম-নিবিড় প্রকল্পের অনুরূপ সহগ অপেক্ষা বেশি থাকে।

৩.১০ অনুশীলনী

1. **নিচের প্রশ্নগুলির সংক্ষিপ্ত উত্তর দিন :**

(i) শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি কাকে বলে?

(ii) মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি বলতে কী বোঝায়?

(iii) স্বল্পোন্নত দেশে শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করার পক্ষে যুক্তি কী?

(iv) মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি কোন্ অবস্থায় সমর্থনযোগ্য হতে পারে?

(v) শ্রম-নিবিড় পদ্ধতির বিপক্ষে কি কি যুক্তি দেখানো হয়ে থাকে?

(vi) মূলধন-নিবিড় পদ্ধতির বিপক্ষে যুক্তি কী?

(vii) অমর্ত্য সেন সময়ের ভিত্তিতে কিভাবে প্রয়োগ-কৌশল নির্বাচন করার কথা বলেছেন?

(viii) মাথাপিছু প্রান্তিক পুনর্বিনিয়োগ সহগকে সর্বাধিক করার কথা কারা বলেছেন?

(ix) সামাজিক-প্রান্তিক উৎপাদন লক্ষণকে বিনিয়োগের ভিত্তি করার কথা কারা বলেছেন?

(x) স্বল্পোন্নত দেশে মূলধন-উৎপাদন অনুপাত স্থিতিশীল থাকে না কেন?

2. শূন্যস্থান পূরণ করুন :

(i) স্বল্পোন্নত দেশে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি থাকায় ________ উৎপাদন পদ্ধতির প্রয়োগ বাঞ্ছনীয়।

(ii) মূলধনের দুষ্প্রাপ্যতা ________ উৎপাদন পদ্ধতির প্রয়োগের ক্ষেত্রে অসুবিধার সৃষ্টি করে।

(iii) ভারতের অষ্টম পাঁচসালা পরিকল্পনায় মূলধন-উৎপাদন অনুপাত ছিল ________।

(iv) শ্রমনিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি অনুসৃত হলে কর্মসংস্থানের ________ বাড়ে।

(v) গ্যালেনসন-লিবেনষ্টিনের মতে বিনিয়োগের লক্ষণ হওয়া উচিত মাথাপিছু প্রান্তিক পুনর্বিনিয়োগের সহগ ________ করা।

(vi) বিনিয়োগের ক্ষেত্রে সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনশীলতার লক্ষণটি প্রথম আলোচনা করেন ________ এবং ________।

(vii) অমর্ত্য সেনের মতে যদি বিনিয়োগের ফলপ্রাপ্তির জন্য দশবছরেরও অধিককাল অপেক্ষা করা সম্ভব হয় তবে ________ উৎপাদন পদ্ধতি প্রয়োগ করা উচিত।

(viii) যদি দ্রুত উৎপাদন বাড়ানোই বিনিয়োগের উদ্দেশ্য হয় তবে ________ উৎপাদন পদ্ধতির ওপর আপেক্ষিক গুরুত্ব ________ দেওয়া উচিত।

(ix) স্বল্পোন্নত দেশে মূলধন-উৎপাদন অনুপাত সাধারণত ________ থাকে।

(x) স্বল্পোন্নত দেশে মূলধন-উৎপাদন অনুপাতের স্থিতিশীলতা দেখা ________।

❑ প্রশ্নমালা

1. শ্রম-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতি ও মূলধন-নিবিড় উৎপাদন পদ্ধতির পক্ষে ও বিপক্ষে আপেক্ষিক যুক্তিগুলি আলোচনা করুন।

2. প্রয়োগ-কৌশল সম্পর্কিত সমস্যাটি আলোচনা করুন।

3. অমর্ত্য সেন প্রয়োগ-কৌশল সম্পর্কে যে মডেল তৈরি করেছেন তা সংক্ষেপে আলোচনা করুন।

4. মূলধন-উৎপাদন অনুপাত বলতে কি বোঝায়? বিনিয়োগের নীতি হিসাবে এই অনুপাত কতটা গ্রহণযোগ্য?

5. সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদন কিভাবে বিনিয়োগকে প্রভাবিত করতে পারে? এই প্রসঙ্গে কান ও চেনেরি প্রদত্ত সামাজিক প্রান্তিক উৎপাদনের লক্ষণ আলোচনা করুন।

6. গ্যালেনসন ও লিবেনষ্টিন প্রদত্ত প্রান্তিক মাথাপিছু পুনর্বিনিয়োগের সহন সর্বাধিক করার লক্ষণ আলোচনা করুন।

৩.১১ গ্রন্থপঞ্জী

1. Sen Amartya : *Choice of Techniques* (Oxford, Blackwell, 3rd Edition, 1968).
2. Agarwala and Singh (ed.) : *Acelerating Investment in Developing Countries* (Oxford : 1969).
3. Meier G. M. : *Leading Issues in Economic Development* (New York 1976, 3rd Edition).
4. Thirlwall A.P. : *Growth and Development with Special Reference to Developing Economics* (ELBS/Macmillan, 1983).
5. Gupta Subrata and Ghosh Sujit Kr. : *A Tract On Economic Development : Process and Perspectives* (Charu Publishing Company, Calcutta 1992).

একক ৪ ☐ অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তর

গঠন

৪.০ উদ্দেশ্য

অর্থনৈতিক উন্নয়ন বা সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তর সম্পর্কে রসটোর যুগান্তকারী তত্ত্ব এখানে আলোচিত হয়েছে। চিরাচরিত সমাজ এবং তার স্বয়ংচালিত উন্নয়নে উত্তরণ পর্বে পৌঁছানো কেমন করে সম্ভব হয়, সেটাই এই একক পড়ে জানতে পারবেন। এ প্রসঙ্গে ভারতের উন্নয়নের স্তর সম্পর্কে রসটোর মতামতও জানানো হয়েছে। পাশাপাশি আলোচিত হয়েছে সমৃদ্ধির স্তর সম্পর্কে মার্ক্সীয় তত্ত্ব।

৪.১ প্রস্তাবনা

অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তরের সাধারণ দিক (General issues of about stages of growth)

ইতিহাসের ঘটনাবলীর পরিপ্রেক্ষিতে অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির ধারা সম্পর্কে কার্ল মার্ক্স ব্যাখ্যা প্রদান করেছিলেন। আধুনিককালে অধ্যাপক রসটো (Rostow) অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তর সম্পর্কে ব্যাখ্যা প্রদান করেছেন। রসটো তাঁর ব্যাখ্যাকে "Non-Communist Manifesto" হিসাবে অভিহিত করেছেন। অর্থাৎ মার্ক্স যেমন সামন্ততন্ত্র (Feudalism), বুর্জোয়া ধনতন্ত্র (Bourgeosie Capitalism), সমাজতন্ত্র (Socialism) এবং সাম্যবাদ (Communism) প্রভৃতি পর্যায়ের উল্লেখ করেছিলেন, রসটো সেগুলির উল্লেখ করেননি। রসটোর মতে অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তর হল—(1) চিরাচরিত সমাজ (The Traditional Society), (2) প্রাক্-উত্তরণ পর্বের শর্তগুলির উদ্ভব (The Emergence of the Pre-Conditions for Take-Off), (3) স্বয়ং-চালিত সমৃদ্ধির উত্তরণ পর্ব (The Take-Off into Self-sustaining Growth), (4) প্রযুক্তিগত পূর্ণতার পথে যাত্রা (The Drive to Maturity) এবং (5) উঁচু পর্যায়ের জনসাধারণের ভোগের যুগ (The Age of High Mass Consumption).

অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তর এবং অর্থনৈতিক উন্নয়নের বিভিন্ন স্তর একই অর্থে ব্যবহৃত হয়। কেননা অর্থনৈতিক উন্নয়ন অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির একটি অঙ্গ যদিও উন্নয়নের অর্থ আরও ব্যাপক। অর্থনৈতিক উন্নয়নের স্বরূপ সম্পর্কে আলোচনায় আমরা দেখেছি যে উন্নয়ন হল অর্থনৈতিক সমৃদ্ধিসহ অতিরিক্ত আরও পরিবর্তন (Growth plus changes)। কলিন ক্লার্ক, রসটো এবং কার্ল মার্ক্স—এঁরা সবাই উন্নয়নের দৃষ্টিভঙ্গী থেকেই অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির স্তর নিয়ে আলোচনা করেন। সমৃদ্ধি ও উন্নয়নের বিভিন্ন স্তরের তাৎপর্য একই ধরনের। সমৃদ্ধির হার বাড়তে থাকলে তার প্রভাবে উন্নয়নের হারও বাড়তে থাকে এবং উন্নয়নের বিভিন্ন স্তরে সেটা প্রভাবিত হয়। সেজন্য সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তর এবং উন্নয়নের বিভিন্ন স্তর এক্ষেত্রে সমার্থক।

অর্থনৈতিক উন্নয়নের বিভিন্ন স্তর দেশের অর্থনৈতিক কাঠামোর ক্ষেত্রগত পরিবর্তনের (sectoral changes) মাধ্যমেও ব্যাখ্যা করা যায় বলে কলিন ক্লার্ক (Colin Clark) মনে করেন।[1] কলিন ক্লার্কের মতে সমৃদ্ধির প্রথম স্তরে কৃষিক্ষেত্র হল আয়ের প্রধান উৎস এবং দেশের প্রধান উপজীবিকা। অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রাথমিক পর্যায়ে প্রধান উপজীবিকা হল প্রাথমিক উপজীবিকা (Primary Occupation)। দেশ আরও যত অর্থনৈতিক উন্নয়নের পথে এগিয়ে যায়, শিল্পক্ষেত্রের আপেক্ষিক গুরুত্ব তত বাড়ে। সেক্ষেত্রে মাধ্যমিক উপজীবিকার (Secondary Occupation) গুরুত্ব আপেক্ষিকভাবে বাড়ে। অর্থনীতির সমৃদ্ধি যত বাড়ে তত মাধ্যমিক উপজীবিকার তুলনায় পরিষেবা ক্ষেত্রের অথবা তৃতীয় গুরুত্ব (Tertiary Sector) বাড়তে থাকে এবং পরিষেবামূলক উপজীবিকার (Ocoupation related to the services sector) গুরুত্ব বাড়তে থাকে।

1. Colin Clark : *"The Conditions of Economic Progress"* (1940), MacMillan.

কলিন ক্লার্কের এই ব্যাখ্যা কোনো কোনো দেশের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হলেও সব দেশের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়। উদাহরণ হিসাবে বলা যেতে পারে অস্ট্রেলিয়া, নিউজিল্যান্ড, ডেনমার্ক প্রভৃতি দেশের অর্থনীতি খুবই উন্নত—অথচ এই দেশগুলিতে এখনও কৃষি হল জাতীয় আয়ের একটি গুরুত্বপূর্ণ উৎস এবং উপজীবিকা। কলিন ক্লার্ক সাধারণভাবে অর্থনৈতিক উন্নয়নে উপজীবিকা বণ্টনের ব্যাখ্যা করেছেন—তিনি সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তর নিয়ে বিস্তৃত বিশ্লেষণ করেননি। সমৃদ্ধির স্তর নিয়ে বিস্তৃত বিশ্লেষণ করেছেন রসটো।[2]

৪.২ অর্থনৈতিক উন্নয়নের বিভিন্ন স্তর সম্পর্কে রসটোর মতবাদ (Rostow's Doctrine regarding the stages of Economic Development

৪.২.১ চিরাচরিত সমাজ এবং প্রাক্-উত্তরণ পর্বের শর্তগুলির উদ্ভব (The Traditional Society and Pre-conditions for Take-Off)

চিরাচরিত সমাজ বা অর্থব্যবস্থা বলতে আমরা বুঝি এমন একটি অর্থনৈতিক কাঠামো যেখানে উৎপাদন বাড়াবার সুযোগ বা সম্ভাবনা খুবই সীমিত। উৎপাদন পদ্ধতিও খুবই পুরানো এবং আধুনিকতার ছোঁয়ার বাইরে। বলা হয়, এই ধরনের ব্যবস্থাই প্রাক্-নিউটন যুগের কলা-কৌশলের ওপর উৎপাদন পদ্ধতি ভিত্তিশীল। এক্ষেত্রে নিউটন (Newton) হলেন পরিবর্তনের প্রতীক। সমাজের অর্থনৈতিক কাঠামো এক্ষেত্রে অত্যন্ত অনগ্রসর ; উন্নয়নের কোন প্রচেষ্টাও এক্ষেত্রে পরিলক্ষিত হয় না।

তবে অপেক্ষাকৃত উন্নত দেশগুলির প্রভাবে এবং কোন কোন উৎপাদকের নিজস্ব উদ্যোগে এই সমাজে অর্থনৈতিক রূপান্তরের (Transition) সূচনা হতে পারে। ক্রমশ উৎপাদন পদ্ধতির পরিবর্তন হতে পারে (যেমন বিংশ শতাব্দীর প্রথম অর্ধে ভারতের ক্ষেত্রে হয়েছিল)। পরিবহন ব্যবস্থার সম্প্রসারণ ও উন্নয়ন, অভ্যন্তরীণ ও বৈদেশিক বাণিজ্যের সম্প্রসারণ, উৎপাদনের বৈচিত্র্যে অর্থনৈতিক পরিকাঠামোর উন্নয়ন, ভোগের ধারার পরিবর্তন, আর্থিক লেনদেন বৃদ্ধি প্রভৃতির মাধ্যমে এই অর্থনৈতিক রূপান্তরের সঙ্গে সঙ্গে প্রাক্-উত্তরণ পর্বের শর্তগুলির উদ্ভব (Emergence of the Pre-conditions for Take-Off) হয়। এই শর্তগুলির সৃষ্টি হওয়ার অর্থ হল, দেশের অর্থনৈতিক ব্যবস্থার উন্নয়ন যাতে হয় সেজন্য প্রস্তুতি চলছে। রসটো 1956 সালে যখন অর্থনৈতিক উন্নয়নের বিভিন্ন স্তর নিয়ে আলোচনা করেছিলেন তখন তাঁর মতে ভারতবর্ষে প্রাক্-উত্তরণ পর্বের শর্তগুলির উদ্ভব হয়েছিল।

---

2. Rostow. W. W.
 (i) *"The Stages of Economic Growth"*, Cambridge, New York (1960).
 (ii) *"The Take-Off into Self-sustained Growth,"* Economic Journal, March 1956.

৪.২.২ স্বয়ংচালিত উন্নয়নে উত্তরণ পর্ব (Take-Off into Self-sustaining Growth)

উত্তরণ পর্ব হল এমন একটি সময় যখন বিনিয়োগের হার এমনভাবে বেড়েছে যে মাথাপিছু প্রকৃত উৎপাদন (real output per capita) বেড়ে যাচ্ছে, বিনিয়োগ বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে উৎপাদন পদ্ধতির মৌলিক পরিবর্তন হচ্ছে, এবং সেই সঙ্গে আয়ের প্রবাহ বিনিয়োগের নূতন হার বজায় রাখতে ও ক্রমবর্ধমান মাথাপিছু প্রকৃত উৎপাদন বৃদ্ধি বজায় রাখার সাহায্য করছে ("Take-Off is the interval during which the rate of investment increased in such a way that real output per capita rises and the initial increase carries with it radical changes in production techniques and the disposition of income flows which perpetuate the new scale of investment and hence the rising trend in per capita output.")।

যে কোন উন্নয়নশীল অর্থনীতির উত্তরণ-পর্বের নিম্নলিখিত শর্তগুলি পূরণ হওয়া দরকার।

(1) নীট জাতীয় আয়ের অন্তত পাঁচ শতাংশ থেকে দশ শতাংশ পর্যন্ত উৎপাদনাত্মক বিনিয়োগের হার বাড়ানো থাকে।

(2) একটি অথবা একাধিক এমন অগ্রণী নির্মাণ শিল্পের উন্নয়ন দরকার যেগুলির উন্নয়ন হার খুবই উঁচু।

(3) এমন একটি রাজনৈতিক, সামাজিক এবং প্রতিষ্ঠানগত কাঠামোর দ্রুত সম্প্রসারণ দরকার যাতে আধুনিক ক্ষেত্রের সম্প্রসারণের প্রেরণার এবং উত্তরণ-পর্বের মধ্যে যেসব বাহ্যিক ব্যয়-সংকোচজনিত সুবিধার সম্ভাবনা (Potential external economy effects of the Take-off) আছে সেগুলির পূর্ণ ব্যবহার করা সম্ভব হয় এবং অর্থনৈতিক সমৃদ্ধিকে ক্রমবর্ধমান রূপ দেওয়া যায়।

অগ্রণী নির্মাণ শিল্পের ক্ষেত্রগুলিতে (leading substantial manufacturing sectors) বিনিয়োগ যথাযথভাবে না বাড়াতে পারলে স্ব-নির্ভরশীল উন্নয়নে উত্তরণ পর্ব অর্জন করা সম্ভব হয় না। সেই সঙ্গে প্রয়োজন হল অভ্যন্তরীণ সঞ্চয় বৃদ্ধি এবং সঞ্চয়ের সংহতিকরণ (mobilisation of savings)। সঞ্চয়ের বিনিয়োগ বাড়াতে পারলেই মূলধন সৃষ্টির হার বাড়ে এবং অর্থনীতির উত্তরণ পর্বের জন্য মূলধন সৃষ্টির হার বাড়ানো খুবই জরুরী। এজন্য অনুকূল প্রতিষ্ঠানগত ও সামাজিক পরিবেশ সৃষ্টি করা দরকার।

কোনও অর্থনীতির উত্তরণ পর্বের প্রারম্ভে একটি বড় ধরনের অনুপ্রেরণা থাকা দরকার—এই অনুপ্রেরণা আসতে পারে পরিবহন ব্যবস্থার উন্নতির মাধ্যমে, প্রযুক্তিবিদ্যার সম্প্রসারণের মাধ্যমে, কতিপয় বাহ্যিক সুবিধার (external economics) মাধ্যমে এবং এমনকি রাজনৈতিক প্রেরণার মাধ্যমে। এই অনুপ্রেরণার প্রভাবে শিল্পক্ষেত্রে উৎপাদন বাড়তে পারে এবং পরিষেবা ক্ষেত্রের সম্প্রসারণ হতে পারে। অনেক সময় আন্তর্জাতিক পরিবেশ উত্তরণ পর্বে সাহায্য করতে পারে। ঊনবিংশ শতাব্দীর ষাটের দশকে ব্রিটেনে এবং ফ্রান্সে সুইডিশ কাঠের বাজার উন্মুক্ত হয়েছিল। ঊনবিংশ শতাব্দীর চল্লিশের দশক থেকে মার্কিন যুক্তরাষ্ট্র এবং

নব্বইয়ের দশক থেকে কানাডা নিজেদের উৎপাদিত পণ্য বিদেশে বেশি করে রপ্তানি করার ক্ষেত্রে সফল হয়েছিল। ব্রিটেনে সবচেয়ে আগে উত্তরণ পর্ব শুরু হয়েছিল এবং এর পেছনে প্রধান কারণ ছিল শিল্পবিপ্লব এবং বিদেশে ব্রিটিশ পণ্যের রপ্তানি সম্প্রসারণ। অর্থনৈতিক সাম্রাজ্যবাদ এক্ষেত্রে ব্রিটেনকে সাহায্য করেছিল। ব্রিটেনে 1815 সাল থেকে 1850 সালের মধ্যে দ্রুত শিল্পোন্নয়ন হয়েছিল। অনুরূপভাবে 1869 সাল থেকে 1893 সালের মধ্যে মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রে, 1900 সাল থেকে 1920 সালের মধ্যে জাপানে এবং 1928 সাল থেকে 1940 সালের মধ্যে রাশিয়ায় দ্রুত শিল্পোন্নয়ন হয়েছিল। কিন্তু রসটো বিভিন্ন দেশের উত্তরণ পর্বের যে বছরগুলি নির্দেশিত করেছেন, সেগুলি আরও আগেকার সময়ের। কারণ, তাঁর মতে ব্রিটেনে অষ্টাদশ শতাব্দীর শেষের দিকেই (1783 সালের পর) বিনিয়োগ হার যথেষ্ট বেড়ে গিয়েছিল এবং শিল্প-প্রযুক্তির ক্ষেত্রে রূপান্তর পরিলক্ষিত হয়েছিল। মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রেও 1815 সাল থেকে 1850 সালের মধ্যে বস্ত্রশিল্পের যথেষ্ট উন্নতি হয়েছিল। তাছাড়া 1843 থেকে 1870 সালের মধ্যে রেলওয়ে সম্প্রসারণ, রাস্তা নির্মাণ, গুরুভার শিল্প এবং রপ্তানি সম্প্রসারণের মাধ্যমে মার্কিন যুক্তরাষ্ট্র সমৃদ্ধির পথে অনেকটা এগিয়ে গিয়েছিল। রসটোর মতে জাপানেও 1885 থেকে 1905 সালের মধ্যে অর্থনীতির উত্তরণ দেখা গিয়েছিল।

উত্তরণ পর্ব অর্জিত হবার সঙ্গে সঙ্গে দেশের স্বয়ংচালিত উন্নয়নের পথ সুগম হয়। মাথাপিছু মূলধন ও প্রকৃত জাতীয় আয় বাড়তে আরম্ভ করলে দেশের প্রধান প্রধান শিল্পগুলিতে বিনিয়োগ বাড়ে। মাথাপিছু প্রকৃত আয় বেড়ে যাবার সঙ্গে সঙ্গে জনসাধারণের ক্রয়শক্তি বেড়ে যায় ও ভোগ-সামগ্রীর জন্য চাহিদা বাড়ে। তাতে ভোগ-সামগ্রীর শিল্পগুলিও সম্প্রসারিত হয়। একদিকে মূলধন-সামগ্রী শিল্প এবং অপরদিকে ভোগ-সামগ্রী শিল্প উভয় ধরনের শিল্পের উন্নয়নের মাধ্যমেই স্বনির্ভরশীল উন্নয়ন সম্ভব হয়। সেই সঙ্গে কৃষি-ব্যবস্থারও উন্নয়ন দরকার। কৃষি ও শিল্প উভয়ের সুষম উন্নয়ন অর্জিত হলেই উত্তরণ-পর্ব সফল হয়।

৪.২.৩ প্রযুক্তিগত পূর্ণতার পথে যাত্রা (Drive to Maturity)

রসটোর মতে স্বয়ংচালিত উন্নয়নের পর আসে অর্থনৈতিক পরিপূর্ণতার পথে পদক্ষেপ, অর্থাৎ উন্নত ধরনের অর্থনৈতিক ব্যবস্থার দিকে পদক্ষেপ। উত্তরণ-পর্বের পরেও অর্থনৈতিক উন্নয়নের পরিপূর্ণতা অর্জনের জন্য ত্রিশ অথবা চল্লিশ বছর সময়ও লাগতে পারে। এই পর্যায়ে উন্নত ধরনের কলাকৌশল ও প্রযুক্তির মাধ্যমে উৎপাদন ব্যবস্থা পরিচালিত হয়। ত্রিশের দশকে জাপান এবং পূর্বতন সোভিয়েত ইউনিয়ন অর্থনৈতিক উন্নয়নের এই স্তরে উন্নীত হয়েছিল।

৪.২.৪ উঁচু পর্যায়ে জনসাধারণের ভোগের স্তর (Stage of Large Scale Mass Consumption)

অর্থনৈতিক উন্নয়নের পরিপূর্ণতা অর্জিত হবার পর জনসাধারণের পক্ষেও উঁচু পর্যায়ে অথবা বেশি করে ভোগ-সামগ্রী ক্রয় করা সম্ভব হয় ; সেই সঙ্গে আধুনিক কলাকৌশলজাত উন্নত ধরনের ভোগ-সামগ্রীর এবং

মূলধন-সামগ্রীর বাজার দেশে-বিদেশে বৃহদায়তনে সম্প্রসারিত হয়। বর্তমানে মার্কিন যুক্তরাষ্ট্র, ব্রিটেন, জার্মানি, রাশিয়া, জাপান, ফ্রান্স, কানাডা ও ইটালি (Group of Eight) অর্থনৈতিক উন্নয়নের এই পর্যায়ে অধিষ্ঠিত। এই দেশগুলি ছাড়াও সুইডেন, অস্ট্রেলিয়া, ডেনমার্ক, নেদারল্যাণ্ডস্ প্রভৃতি দেশেও উঁচু পর্যায়ে জনসাধারণের ভোগের যুগ পরিলক্ষিত হয়।

৪.২.৫ কয়েকটি দেশের উন্নয়ন স্তর সম্পর্কে রসটো প্রদত্ত তথ্য (Rostow's data about the Stages of Economic Development of Different Countries) :

ব্রিটেন—উত্তরণ পর্ব 1783—1870 (শিল্পবিপ্লবের সময়)
অর্থনৈতিক উন্নয়ন বা প্রযুক্তিগত পূর্ণতার পথে যাত্রা 1830—1870
(প্রথম পর্ব) ; 1870—1913 (দ্বিতীয় পর্ব)
উঁচু পর্যায়ে জনসাধারণের ভোগ—1920 সাল থেকে।

মার্কিন যুক্তরাষ্ট্র—উত্তরণ-পর্ব 1843—1870
প্রযুক্তিগত পরিপূর্ণতার পথে যাত্রা 1870—1910
উঁচু পর্যায়ে জনসাধারণের ভোগ—1910 সাল থেকে।

ফ্রান্স—উত্তরণ পর্ব 1830—1870
প্রযুক্তিগত পূর্ণতার পথে যাত্রা 1870—1910
উঁচু পর্যায়ে জনসাধারণের ভোগ—1920 সাল থেকে।

জার্মানি—উত্তরণ পর্ব 1840—1870
প্রযুক্তিগত পূর্ণতার পথে যাত্রা 1870—1913
উঁচু পর্যায়ে জনসাধারণের ভোগ—1925 থেকে।

জাপান—উত্তরণ পর্ব 1885—1905
প্রযুক্তিগত পূর্ণতার পথে যাত্রা 1905—1941
উঁচু পর্যায়ে জনসাধারণের ভোগ—1955 সাল থেকে।

ভারতের অর্থনৈতিক উন্নয়নের স্তর—রসটোর মতে পঞ্চাশের দশকে ভারতের উত্তরণ পর্ব শুরু হয়নি, যদিও তখন উত্তরণ-পর্বের পূর্ব শর্তগুলির উদ্ভব হয়েছিল এবং সেগুলি কার্যকর হতে আরম্ভ করেছিল। ভারতের উত্তরণ পর্ব দেরীতে শুরু হবার কারণ হিসাবে বলা হয় যদিও ব্রিটিশ শাসনে ভারতের আভ্যন্তরীণ প্রশাসনিক ব্যবস্থা এবং বহির্বাণিজ্যের অবস্থা উন্নত হয়েছিল, তবুও দেশের স্বয়ং-প্রোথিত উন্নয়নের জন্য তখন কোন কার্যকর ব্যবস্থা গৃহীত হয়নি। তাছাড়া ভারতের বিস্তীর্ণ গ্রামাঞ্চলে সামাজিক কাঠামো এবং ভূমি-মালিকানা ও রাজস্ব ব্যবস্থা দেশের কৃষির উন্নয়নের পথে অন্যতম প্রধান প্রতিবন্ধক ছিল। দেশের শিল্পগুলিও উন্নয়নের পথে তখন এগোতে পারেনি।

তবে বিকল্প মত হল, ভারতে উত্তরণ পর্ব 1952 সাল থেকে ১৯৬৩ সালের মধ্যে হয়েছিল। 1963 সাল থেকে ভারতে প্রযুক্তিগত পরিপূর্ণতার পথে যাত্রা (Drive of Maturity) আরম্ভ হয়েছে, যদিও এখন পর্যন্ত পরিপূর্ণতা অর্জিত হয়নি। যাট এবং সত্তরের দশকে সেই যাত্রা ততটা উল্লেখযোগ্য ছিল না। কিন্তু আশি ও নব্বুইয়ের দশকে ভারত প্রযুক্তিগত পরিপূর্ণতার পথে যথেষ্টই এগিয়েছে। কিন্তু এখনও ভারতের বহুসংখ্যক মানুষ দারিদ্র্যসীমার নীচে থাকায় উঁচু পর্যায়ে জনসাধারণের ভোগ (High Mass Consumption) এখনও পরিলক্ষিত হয়নি। তাছাড়া ভারতকে এখনও বিদেশী প্রযুক্তির ওপর নির্ভর করতে হয় ; স্বয়ংচালিত উন্নয়ন এখনও অর্জিত হয়নি।

৪.২.৬ স্বয়ংচালিত উন্নয়ন (Self-sustaining Development)

স্বয়ংচালিত বা স্বয়ংপ্রোষিত উন্নয়ন অর্জিত হতে পারে কোনো দেশে অর্থনৈতিক উন্নয়নের উত্তরণ-পর্বের (Takeoff) পর। রসটোর মতে উন্নয়ন স্বয়ংচালিত তখনই হতে পারে যখন বিনিয়োগের বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে মাথাপিছু প্রকৃত উৎপাদন (Per-capita real output) বেড়ে যায় এবং উৎপাদন পদ্ধতির মৌলিক পরিবর্তন হয় এবং সেই সঙ্গে আয়ের প্রবাহ বিনিয়োগের নূতন হার বজায় রাখতে ও ক্রমবর্ধমান মাথাপিছু প্রকৃত উৎপাদন বৃদ্ধি বজায় রাখতে সাহায্য করে।

স্বয়ংচালিত উন্নয়নের জন্য বিশেষ প্রয়োজন হল—(1) একটি **সম্প্রসারণশীল বাজার** (Expanding market), (2) **ক্রমবর্ধমান মূলধন সঞ্চয়** (Capital accumulation) এবং (3) **নূতন উদ্ভাবন ও কলাকৌশলগত উন্নয়ন** (Innovation and technological progress)। উন্নয়ন যাতে স্বয়ংচালিত হতে পারে সেজন্য নীট জাতীয় আয়ের অন্তত পাঁচ শতাংশ থেকে দশ শতাংশ পর্যন্ত বিনিয়োগের হার বাড়ানো দরকার। তাছাড়া একটি অথবা একাধিক এমন অগ্রণী নির্মাণ শিল্পের উন্নয়ন দরকার যেগুলির উন্নয়ন হার খুবই উঁচু। শুধু বিনিয়োগের বৃদ্ধিই নয়, বিনিয়োগ বৃদ্ধির ফলে যে উৎপাদন বৃদ্ধি হবে (কৃষিক্ষেত্রেই হোক অথবা শিল্পক্ষেত্রেই হোক), সেটাও যাতে স্বয়ংচালিত বৃদ্ধি হয় সেজন্য একটি সম্প্রসারণশীল বাজার দরকার। দেশে উৎপাদিত দ্রব্যের জন্য আভ্যন্তরীণ বাজার এবং বহির্বিশ্বের বাজার উভয়ই যদি সম্প্রসারণশীল হয়, এবং দেশের ভিতর ও বাইরে যদি উৎপাদিত দ্রব্যাদির জন্য চাহিদা বাড়তে থাকে তবে স্বয়ংচালিত বা স্বয়ংপ্রোষিত উন্নয়ন পরিলক্ষিত হয়। উৎপাদন বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে শিল্পক্ষেত্রে যে বাহ্যিক সুবিধাগুলি (external economies) পাওয়া যায়, সেগুলিও স্বয়ংচালিত উন্নয়নকে এগিয়ে দেয়। রসটোর মতে স্বয়ংচালিত উৎপাদনে উৎপাদন পদ্ধতির মৌলিক পরিবর্তন হয়। নূতন উদ্ভাবন ও প্রযুক্তির উন্নয়ন বা কলা-কৌশলগত উন্নয়ন স্বয়ংচালিত উন্নয়নের অপরিহার্য শর্ত। নতুন প্রযুক্তি, গবেষণা ও উন্নয়ন প্রচেষ্টার (New technology, research and development) মাধ্যমে উন্নয়ন স্বয়ংচালিত হয়ে থাকে।

স্বয়ংচালিত উন্নয়নের জন্য আরেকটি প্রয়োজনীয় শর্ত হল মূলধন সঞ্চয় (Capital accumulation) ও উঁচু মূলধন সৃষ্টির হার (high rate of capital formation)। এজন্য সঞ্চয় বৃদ্ধির হার ও সঞ্চয়ের

সংহতিকরণ (mobilisation) ও বিনিয়োগ বাড়ানো দরকার। অগ্রণী নির্মাণ শিল্পের ক্ষেত্রগুলিতে (leading substantial manufacturing sector) বিনিয়োগ যথাযথভাবে না বাড়াতে পারলে স্বয়ং-চালিত উন্নয়নের গতি শ্লথ হয়ে যেতে পারে। এজন্য প্রয়োজন হল সঞ্চয় সৃষ্টির হার বাড়ানো এবং বর্ধিত সঞ্চয় ঠিকভাবে বিনিয়োগ করা।

এটা ঠিক, উত্তরণপর্ব অর্জিত হবার সঙ্গে সঙ্গে দেশে স্বয়ংচালিত উন্নয়নের পথ সুগম হয়। স্বয়ংচালিত উন্নয়নের সঙ্গে সঙ্গে প্রযুক্তিগত পূর্ণতার পথে যাত্রা শুরু হয়। মাথাপিছু মূলধন ও প্রকৃত জাতীয় আয় বাড়তে আরম্ভ করলে দেশের প্রধান প্রধান শিল্পগুলির বিনিয়োগ বাড়ে। মাথাপিছু প্রকৃত আয় বেড়ে যাবার সঙ্গে সঙ্গে জনসাধারণের ক্রয়শক্তি বেড়ে যায় ও ভোগসামগ্রীর জন্য চাহিদা বাড়ে। তাতে ভোগ-শিল্পগুলিও সম্প্রসারিত হয়। একদিকে মূলধন-সামগ্রী শিল্প এবং অপরদিকে ভোগ-সামগ্রী শিল্প, উভয় ধরনের শিল্পের উন্নয়নের মাধ্যমেই স্বয়ংচালিত উন্নয়ন সম্ভব হয়। স্বয়ংচালিত উন্নয়ন শিল্পক্ষেত্রে উন্নয়নের সঙ্গেই জড়িত নয়,—কৃষিক্ষেত্রে উন্নয়নেরও এক্ষেত্রে একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা আছে। কৃষিক্ষেত্রে উৎপাদন ও আয় বাড়লে কৃষিজীবীদের ক্রয়শক্তি ও ভোগ-সামগ্রীর জন্য চাহিদা বাড়ে। তাতে গ্রামাঞ্চলে ভোগ-সামগ্রীর বাজার সম্প্রসারিত হয়। তাছাড়া কৃষিক্ষেত্রে উৎপাদন বাড়লে কৃষির ওপর ভিত্তিশীল শিল্পগুলিতে (agro-based industries) কাঁচামালের যোগানও বেড়ে যায় এবং সেটা এই শিল্পগুলির উৎপাদন বৃদ্ধির পক্ষে সহায়ক হয়।

খাদ্যশস্যের ক্ষেত্রে স্বয়ংসম্পূর্ণতা (self-sufficiency) অর্জন করতে পারলে দেশে স্বয়ংচালিত উন্নয়ন অর্জন করার পক্ষে সেটা সহায়ক হয়। কারণ, সেক্ষেত্রে খাদ্যশস্য আমদানি করতে হয় না বলে যে বৈদেশিক মুদ্রা বেঁচে যায়, সেটা শিল্পোন্নয়নের জন্য প্রয়োজনীয় মূলধন-সামগ্রীর আমদানি খাতে ব্যয় করা সম্ভব হয়।

স্বয়ংচালিত উন্নয়নের ক্ষেত্রে আরও একটি বিবেচ্য বিষয় হল রপ্তানি বৃদ্ধি। রপ্তানি বৃদ্ধি হল সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি (engine of growth)। রপ্তানি-চালিত সমৃদ্ধি (export-led growth) এবং সমৃদ্ধিচালিত রপ্তানি (growth-led exports), উভয়ই স্বয়ংচালিত উন্নয়নের অন্যতম বৈশিষ্ট্য।

৪.২.৭ রসটোর বিশ্লেষণের সমালোচনা (A Critique of Rostow's Analysis)

রসটো অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তরের যে ব্যাখ্যা দিয়েছেন তার সমালোচনা করেছেন কুজনেৎস (Kuznets)[3], কেয়ার্ণক্রশ (Cairncross)[4] এবং হ্যাবাক্কুক (Habakkuk) ও ফিলিশ ডিন (Phyllis Deane)।[5]

কুজনেৎসের মতে অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির কোনো স্তরকে বিশেষভাবে চিহ্নিত করতে হলে কয়েকটি সাধারণ মাপকাঠি থাকা দরকার এবং সেগুলি সবদেশের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য হওয়া উচিত। তাছাড়া বিশেষ কোনও স্তরের

3. Kuznets, "*Notes on The Take Off*", in Meier. Leading Issues in Economics Development. New York, 1964.

4. Cairncross, A.K. "*The Stages of Economic Growth*"—*Economic History Review*. Reprinted in Meier ; Leading Issues in Economic Development (1964).

5. Habakkuk and Phyllis Deane—"*Take Off in Britain*", in "*Economics of Take Off into Sustained Economic Growth*"—Rostow (Ed) MacMillan, 1963.

সঙ্গে পূর্ববর্তী স্তরের বিশ্লেষণভিত্তিক যোগসূত্র থাকা দরকার। এই যুক্তির ভিত্তিতে কুজনেৎস মনে করেন যে রসটো কোনো দেশের উত্তরণ পর্ব বিশ্লেষণ করার ক্ষেত্রে সেই দেশের পূর্ববর্তী স্তরের সঙ্গে উত্তরণ পর্ব কতটা যুক্ত, তা পরিষ্কারভাবে ব্যাখ্যা করেননি। এমনও হতে পারে যে উত্তরণ পর্বের আগেই কোনো দেশে কৃষি-বিপ্লব হতে পারে, কৃষিজাত পণ্যের বাজার সম্প্রসারিত হতে পারে এবং আধুনিক ক্ষেত্রে (Modern sector) ঋণ সরবরাহ বাড়তে পারে। সেজন্য উত্তরণ পর্ব তাড়াতাড়ি আসতে পারে। শিল্পদ্রব্য উৎপাদন এবং কৃষিউৎপাদনের মধ্যে যে যোগসূত্র আছে সেটাও অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির একটি গুরুত্বপূর্ণ উপাদান।

কুজনেৎসের মতে 'স্বনির্ভরশীল' উন্নয়ন কথাটি সম্পর্কে এই প্রশ্ন উঠতে পারে যে কোনো উন্নয়ন স্বয়ংপ্রোষিত বা স্বনির্ভরশীল (self-sustaining) অথবা স্বয়ংসীমিত (self-limiting) নয়। উপযুক্ত তথ্য সংগ্রহ না করে কোনো দেশের অর্থনীতিকে স্বনির্ভরশীল বলা যায় কিনা যে বিষয়ে কুজনেৎস প্রশ্ন তুলেছেন।

কেয়ার্নক্রশের মতে প্রাক্-উত্তরণ পর্বের শক্তিগুলির উদ্ভব এবং উত্তরণ-পর্বে ক্রিয়াশীল শক্তিগুলির মধ্যে সবসময় পার্থক্য নির্দেশ করা সম্ভব নয়। তাঁর মতে, অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির এভাবে স্তর-বিন্যাস করা সবসময় অর্থবহ নয়। কারণ, সমৃদ্ধি একটি চলমান ব্যবস্থা—সমৃদ্ধির পিছনে ক্রিয়াশীল শক্তিগুলি একটি বিশেষ স্তরে আবদ্ধ নয়। তাছাড়া অগ্রণী শিল্পগুলিই যে শুধু উত্তরণ পর্বের জন্য দায়ী তা নয়, সমৃদ্ধির পিছনে বিভিন্ন শিল্প ও কৃষির অবদান থাকে। শুধু অগ্রণী শিল্পগুলিই (Leading industries) যথেষ্ট নয়। হ্যাবাকুকের মতে রসটোর তত্ত্বটি অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তরের বৈশিষ্ট্য আলোচনা করলেও বিভিন্ন স্তরকে এমনভাবে সংগ্রথিত করতে পারেনি যাতে একটি গতিশীল উৎপাদন তত্ত্ব আমরা পেতে পারি। প্রাক্-উত্তরণ পর্বের শর্তগুলির ক্ষেত্রে একটি অসুবিধার প্রতি রসটো দৃষ্টি আকর্ষণ করেন। ইংলণ্ডে শিল্পবিপ্লব যদি উত্তরণ-পর্বের পরিচায়ক হয়,—তবে সেদেশে কৃষি বিপ্লব এবং পরিবহন ব্যবস্থার বিপুল পরিবর্তন কিন্তু শিল্পবিপ্লবের আগে অর্থাৎ, উত্তরণ পর্বের আগে দেখা যায়নি। বরং শিল্পবিপ্লব চলাকালীন সময়েই কৃষিবিপ্লব হয়েছিল এবং পরিবহন ব্যবস্থার গুরুত্বপূর্ণ পরিবর্তন হয়েছিল। তাহলে প্রাক্-উত্তরণ পর্বের শর্তগুলি কিভাবে পালিত হয়েছিল!

রসটোর তত্ত্বের বিরুদ্ধে যুক্তি অনেক আছে। তবুও কোনও দেশের অনগ্রসরতার মাত্রা বিবেচনা করার ক্ষেত্রে রসটোর তত্ত্বটি সাধারণভাবে ব্যবহার করা হয়।

৪.৩ সমৃদ্ধির স্তর সম্পর্কে মার্ক্সীয় তত্ত্ব (Marxian Theory of the Stages of Growth)

মার্ক্স সমৃদ্ধির স্তর আলোচনা করার ক্ষেত্রে সামন্ততন্ত্র (Feudalism), বুর্জোয়া ধনতন্ত্র (Bourgeosie Capitalism), সর্বহারার একনায়কতন্ত্র (Dictatorship of the Proletariat) সমাজতন্ত্র (Socialism) এবং সাম্যবাদ (Communism) প্রভৃতি স্তরের কথা উল্লেখ করেছেন। ধনতান্ত্রিক উৎপাদন ব্যবস্থার সারবস্তু হল স্বল্প

মজুরির বিনিময়ে সম্পদহীন শ্রমিকদের দিয়ে কাজ করানো এবং তাদের শোষণ করে উদ্বৃত্ত আহরণ (extraction of surplus) করা। মার্ক্সের মতে উৎপাদনের একটি-ই প্রধান উপাদান এবং সেটি হল 'শ্রম' (Labour)- উৎপাদনের কাজে নিযুক্ত শ্রমিকের শ্রম সময়কে দুটি ভাগে ভাগ করা যায়—একটি হল সমাজের জন্য প্রয়োজনীয় পরিশ্রমের সময় (socially necessary labour time) এবং অপরটি হল মজুরিবিহীন অতিরিক্ত পরিশ্রমের সময় (surplus labour time)। শ্রমিক কর্তৃক উৎপাদিত দ্রব্য মালিক যে দামে বিক্রি করে তার ভিত্তিতে শ্রমিক মজুরি পায় না। যতটা মজুরি শ্রমিককে দেওয়া হয় সেটি হল সমাজের জন্য প্রয়োজনীয় পরিশ্রমের সময়ের দাম এবং যতটা মজুরি থেকে শ্রমিককে বঞ্চিত করা হয় সেটি হল অতিরিক্ত পরিশ্রমের দাম, যতটা ন্যায্য মজুরি থেকে শ্রমিক বঞ্চিত হয় ততটাই হল মালিকের উদ্বৃত্ত মূল্য (surplus value)। সামন্তপ্রভুরা যদি সেই আহরিত উদ্বৃত্ত (extracted surplus) শিল্পক্ষেত্রে বিনিয়োগ করে তবে বুর্জোয়া ধনতন্ত্রের (Bourgeosie Capitalism) সৃষ্টি হয়। মালিক কর্তৃক শ্রমিকের শোষণ থেকে যে মুনাফার সৃষ্টি হয়, তা থেকেই হয় মূলধনের সঞ্চয় (accumulation of capital)। উৎপাদনের কাজে দুই ধরনের মূলধন ব্যবহৃত হয়। একটি হল স্থির মূলধন (Constant capital) যার মধ্যে কারখানার মূল্য (value of the plant) এবং ব্যবহৃত কাঁচামালের মূল্য ধরা হয় এবং অপরটি হল পরিবর্তনশীল মূলধন (Variable capital) যার মধ্যে ধরা হয় যতটা শ্রম-সময় ব্যয় করা হয়েছে তার মূল্য। কিন্তু উৎপাদনের তিনটি উপাদান কোনো সময়ে বিবেচিত হয়, সেগুলি হল স্থির মূলধন (C), পরিবর্তনশীল মূলধন (V) এবং উদ্বৃত্ত মূল্য (S)।

মূলধনের জৈব গঠন $\frac{C}{C + V}$ কে মার্ক্স Organic composition of capital হিসাবে অভিহিত করেছেন। তাছাড়া $\frac{S}{C + V}$ হল মোট বিনিয়োগকৃত মূলধনের ওপর মুনাফার হার। উদ্বৃত্ত মূল্য বেড়ে যাবার সঙ্গে সঙ্গে মূলধনের সঞ্চয় ও বিনিয়োগ বাড়ে। তখন অতিরিক্ত শ্রম-শক্তির প্রয়োজন হয় এবং সেই শ্রমশক্তি আসে দেশে যদি অতিরিক্ত শ্রমশক্তি (Labour Power) তা থেকে, যদি অতিরিক্ত মূলধন বিনিয়োগ অথবা পুনর্বিনিয়োগ করার সময় উপযুক্ত শ্রমশক্তির মজুত (Reserve army of labour) না থাকে তবে মুনাফাবৃদ্ধির হার কমতে থাকে (Declining rate of profit)।

শ্রমিক শোষণের ফলে শ্রেণী-সংঘাতের (Class struggle) সৃষ্টি হয়। পুঁজিপতিদের মুনাফার হার কমতে আরম্ভ করলে তা প্রতিরোধ করার জন্য মালিকরা শ্রমিক শোষণের মাত্রা আরও বাড়িয়ে দেয়। শ্রেণী-সংগ্রামের মাধ্যমেই সর্বহারার দল (Proletariat) ঐক্যবদ্ধ হয়ে পুঁজিপতিদের বিরুদ্ধে সংগ্রামে লিপ্ত হয় তার ফলে হয় একটি বিপ্লব (Revolution)।

মার্ক্সের মতে বিপ্লবের পরিসমাপ্তি ঘটে সর্বহারা কর্তৃক ক্ষমতা দখলের মধ্যে এবং এইভাবে সর্বহারার একনায়কতন্ত্র (Dictatorship of the Proletariat) প্রতিষ্ঠিত হয় ও সমাজতন্ত্রের ভিত্তি স্থাপিত হয়। মার্ক্সের মতে একমাত্র সমৃদ্ধির স্তরগুলি হল সামন্ততন্ত্র (Feudalism), ধনতন্ত্র (Capitalism) এবং সমাজতন্ত্র (Socialism)। সমাজতন্ত্র পূর্ণতার পথে অগ্রসর হলে শেষ পর্যন্ত সাম্যবাদ (Communisim) প্রতিষ্ঠিত হয়।

মন্তব্য : মার্ক্স অর্থনৈতিক উন্নয়নের যে তত্ত্ব দিয়েছেন তাকে পুঁজিবাদী উন্নয়নের তত্ত্ব (Theory of Capitalist Development) হিসাবে অভিহিত করা যেতে পারে। এক্ষেত্রে তিনি ইতিহাসের বস্তুতান্ত্রিক ব্যাখ্যা (Materialistic interpretation of History) দিয়েছেন। মার্ক্স বিশ্বাস করতেন যে মানব ইতিহাস এবং আর্থ-সামাজিক বিকাশের পিছনে কিছু নিয়ে আছে। সব পরিবর্তনের মূল কারণ খুঁজতে হবে উৎপাদন এবং বিনিময়ের বস্তুগত পদ্ধতির (material mode of production and exchange) মধ্যে। সামাজিক বিকাশের সাধারণ নিয়ম সম্পর্কে মার্ক্সীয় ব্যাখ্যা উৎপাদনের সামাজিক পদ্ধতির (social mode of production) সঙ্গে জড়িত। মার্ক্সের বস্তুতান্ত্রিক ব্যাখ্যার সঙ্গে শ্রেণীসংগ্রাম (class struggle) সম্পর্কিত ব্যাখ্যা গভীরভাবে জড়িত।

মার্ক্সের মতবাদ শুধু বস্তুগতই (materialistic) নয়, দ্বন্দ্বমূলকও (dialectical) বটে। সব বস্তুর মধ্যে অন্তর্নিহিত দ্বন্দ্ব এবং সামঞ্জস্যই (contradictions) সব দ্রব্যের পরিবর্তনের মূল কারণ। দ্বন্দ্বশীল শক্তির দুটি দিক আছে,—একটি হচ্ছে বাদ (Thesis) এবং অপরটি হচ্ছে প্রতিবাদ (Anti-thesis)। এই দুই-এর সংঘাত থেকে যে উন্নততর অবস্থার সৃষ্টি হয় তা হচ্ছে পরিমাণ (Synthesis)।

দ্বন্দ্ববাদের ষোলটি সূত্রের মধ্যে অন্যতম সূত্র হচ্ছে অস্বীকৃতিজনিত নিয়ম বা প্রতিরোধের প্রতিষেধ নিয়ম। পুঁজিবাদের পতন এই নিয়মের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যায়। এক্ষেত্রে মার্ক্সের ব্যাখ্যা হল, "একজন পুঁজিপতি কয়েকজন পুঁজিপতিকে ধ্বংস করে। এভাবে কয়েকজন মুষ্টিমেয় পুঁজিপতি অসংখ্য পুঁজিপতিকে সর্বস্বান্ত করে পুঁজির কেন্দ্রীয়করণের (concentration of capital) পরিমাণ কেবল বাড়িয়ে দেয়। সঙ্গে সঙ্গে শ্রমের সমষ্টিগত প্রয়োগ, সচেতনভাবে বৈজ্ঞানিক যন্ত্র-কৌশলের বিনিয়োগ, সঠিকভাবে ভূমিকর্ষণের ফলে শ্রমের হাতিয়ারগুলি, সম্মিলিতভাবে ব্যবহারের চূড়ান্ত উৎকর্ষ লাভ করে, যৌথ সামাজিক শ্রমের উৎপাদনের উপাদান বা হতিয়ারের উপযোগের ফলে সমস্ত উৎপাদনের উপাদানে মিতব্যয়িতা আসে।.......উৎপাদনের উপকরণের কেন্দ্রীকরণ অবশেষে এমন এক পর্যায়ে পৌঁছে যায়, যেখানে সে এর নিজের পুঁজিবাদী কাঠামোরই প্রতিবন্ধক হয়ে দাঁড়ায়। ফলে এই কাঠামো ভেঙ্গে পড়ে। পু .বাদী ব্যক্তিগত সম্পদের কাঠামোই প্রতিবন্ধক হয়ে দাঁড়ায়। ফলে এই কাঠামো ভেঙে পড়ে। পুঁজিবাদী ব্যক্তিগত সম্পদের মরণ-ঘণ্টা বেজে ওঠে এবং দখলকারীরা বেদখলে পরিণত হয়ে যায়।"[6]

রসটো কোনো অর্থনীতির শিল্পোন্নয়নের ধারাকে ভিত্তি করে অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির স্তর ব্যাখ্যা করেছেন। মার্ক্স সেভাবে সমৃদ্ধির স্তর ব্যাখ্যা করেননি। মার্ক্সীয় তত্ত্বের একটি দার্শনিক ভিত্তি আছে।

6. Karl Marx ; The Capital Vol. I. এক্ষেত্রে রাহুল সংকৃত্যায়নের 'ভাবগত বস্তুবাদ' বইটির 116 পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য। (চিরায়ত প্রকাশনী, 1978)।

৪.৪ সারাংশ

1. কলিন ক্লার্কের অভিমত

কলিন ক্লার্ক ক্ষেত্রগত পরিবর্তন (sectoral changes) এবং উপজীবিকার ধারা পরিবর্তনের (changes in the occupational pattern) মাধ্যমে সমৃদ্ধির স্তর ব্যাখ্যা করেছেন। তাঁর মতে সমৃদ্ধির প্রাথমিক স্তরে প্রাথমিক উপজীবিকা (primary occupation) বা কৃষির সঙ্গে জড়িত উপজীবিকা গুরুত্ব অর্জন করে। সমৃদ্ধির হার বাড়তে থাকলে শিল্পক্ষেত্রের উন্নতি ঘটে এবং মাধ্যমিক উপজীবিকা (secondary occupation) গুরুত্ব অর্জন করে। সমৃদ্ধির উন্নত স্তরে পরিষেবামূলক উপজীবিকা বা তৃতীয়ক্ষেত্রের (tertiary sector) গুরুত্ব বেড়ে যায়।

2. রসটো বর্ণিত সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তর

রসটোর মতে অর্থনৈতিক উন্নয়নের পথে বিভিন্ন স্তরগুলি হল, (ক) চিরাচরিত সমাজ (Traditional Society), (খ) প্রাক্-উত্তরণ পর্বের শর্তগুলির উদ্ভব (Emergency of the pre-conditions for Take-off) (গ) স্বয়ংচালিত উন্নয়নের উত্তরন পর্ব (Take off into self-sustaining Growth) (ঘ) প্রযুক্তিগত পূর্ণতার পথে যাত্রা (Drive to Maturity) এবং (ঙ) উঁচু পর্যায়ে জনসাধারণের ভোগের স্তর (Stage of large scale mass consumption).

উত্তরণ পর্বের পর স্বয়ংচালিত উন্নয়ন অর্জিত হতে পারে,—এই অবস্থায় উন্নীত হতে হলে বিশেষ প্রয়োজন হল (ক) একটি সম্প্রসারণশীল বাজার (খ) ক্রমবর্ধমান মূলধন সঞ্চয় এবং (গ) নূতন উদ্ভাবন ও কলা-কৌশলগত উন্নয়ন, স্বয়ংচালিত উন্নয়নের ক্ষেত্রে রপ্তানি বৃদ্ধি বিশেষভাবে বিবেচ্য, খাদ্যশস্যের ক্ষেত্রে স্বয়ংসম্পূর্ণতা অর্জন করতে পারলে দেশে স্বয়ংচালিত উন্নয়নের পক্ষে সেটা সহায়ক হয়।

রসটো তাঁর তত্ত্বটিকে "Non-Communist Manifesto" হিসাবে অভিহিত করেছেন। রসটো এবং মার্ক্স দুজনেই অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির স্তর ব্যাখ্যা করেছেন ; কিন্তু দুজনের দৃষ্টিভঙ্গী সম্পূর্ণ আলাদা।

3. অর্থনৈতিক উন্নয়নের স্তর সম্পর্কে মা-র্ক্সীয় তত্ত্ব

মার্ক্স অর্থনৈতিক উন্নয়নের ধারা আলোচনা করার ক্ষেত্রে সামন্ততন্ত্র (Feudalism), বুর্জোয়া ধনতন্ত্র (Bourgeosie Capitalism), সমাজতন্ত্র (Socialism) এবং সাম্যবাদ (Communism) প্রভৃতি পর্যায়ের উল্লেখ করেছেন। মার্ক্সের মতে সামন্ততন্ত্র সামন্তপ্রভুরা কৃষকদের শোষণ করে জমি থেকে উদ্বৃত্ত মূল্য আহরণ করে। সামন্তপ্রভুরা সেই আহরিত উদ্বৃত্ত (extracted surplus) শিল্পক্ষেত্রে বিনিয়োগ করলে বুর্জোয়া ধনতন্ত্রের উদ্ভব হয়। বুর্জোয় ধনতন্ত্রেও শ্রমিকদের উৎপাদনী শক্তি অনুযায়ী ন্যায্য মজুরি দেওয়া হয় না। তার ফলে শ্রমিক শোষণ চলতে থাকে। তার ফলে সৃষ্ট হয় একটি শ্রেণীসংগ্রাম (class struggle)। শ্রমিক শ্রেণী

বা সর্বহারার দল (Proletariat) নিজেদের ঐক্যবদ্ধ করে পুঁজিবাদীদের বিরুদ্ধে সংগ্রামে লিপ্ত হয় এবং তার ফলে হয় একটি বিপ্লব (Revolution)। এই বিপ্লবে সর্বহারার একনায়কতন্ত্র (Dictatorship of the Proletariat) প্রতিষ্ঠিত হয় ও সমাজতন্ত্রের (Socialism) ভিত্তি স্থাপিত হয়। সমাজতন্ত্র পূর্ণতার দিকে অগ্রসর হলে শেষ পর্যন্ত সাম্যবাদ (Communism) প্রতিষ্ঠিত হয়।

৪.৫ অনুশীলনী

1. নিচের প্রশ্নগুলির সংক্ষিপ্ত উত্তর দিন :

(i) প্রাথমিক উপজীবিকা কাকে বলে?

(ii) মাধ্যমিক উপজীবিকা কাকে বলে?

(iii) তৃতীয় ক্ষেত্র বলতে কী বোঝায়?

(iv) রসটো বর্ণিত সমৃদ্ধির স্তরগুলি উল্লেখ করুন।

(v) উত্তরণ পর্ব বলতে কী বোঝায়?

(vi) স্বয়ংচালিত উন্নয়ন বলতে কী বোঝায়?

(vii) সমৃদ্ধির স্তর বোঝাবার জন্য মার্ক্স বর্ণিত বিভিন্ন স্তরের উল্লেখ করুন।

(viii) মার্ক্সীয় মতবাদ উদ্বৃত্ত মুল্য বলতে কী বোঝায়?

(ix) মার্ক্সীয় মতবাদ অর্থনৈতিক উন্নয়নের চূড়ান্ত স্তর কি?

(x) স্বয়ংচালিত উন্নয়নের জন্য প্রয়োজনীয় শর্তগুলি উল্লেখ করুন।

2. শূন্যস্থান পূরণ করুন :

(i) কৃষির সঙ্গে জড়িত ক্ষেত্রকে বলা হয় ______ ক্ষেত্র।

(ii) অর্থনৈতিক উন্নয়নে শিল্পক্ষেত্রের আপেক্ষিক গুরুত্ব বাড়লে ______ উপজীবিকার গুরুত্ব বাড়ে।

(iii) অর্থনীতির সমৃদ্ধি যত বাড়ে তত ______ ক্ষেত্রের গুরুত্ব বাড়ে।

(iv) রসটো তাঁর তত্ত্বটিকে ______ ______ হিসাবে অভিহিত করেছেন।

(v) রসটোর মতে ব্রিটেনের উত্তরণ পর্ব হয়েছিল ______ ______ সালে।

(vi) কোনো দেশে স্বয়ংচালিত উন্নয়ন হতে পারে উত্তরণ পর্বের ______।

(vii) মার্ক্সের তত্ত্বে উৎপাদনের প্রধান উপকরণ হল ______।

(viii) মার্ক্সীয় তত্ত্বে সমাজতন্ত্র পূর্ণতার পথ অগ্রসর হলে শেষ পর্যন্ত ______ প্রতিষ্ঠিত হয়।

(ix) মার্ক্স অর্থনৈতিক উন্নয়নের যে তত্ত্ব দিয়েছেন তাকে ______ উন্নয়নের তত্ত্ব বলা হয়।

(x) মার্ক্সের মতবাদ শুধু বস্তুগতই নয়, ______ বটে।

❑ প্রশ্নমালা

1. অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির বিভিন্ন স্তর সম্পর্কে রসটোর মতবাদ আলোচনা করুন।
2. রসটোর মতে অর্থনৈতিক উন্নয়নের উত্তরণ পর্ব কাকে বলে? উত্তরণ পর্বের বৈশিষ্ট্য আলোচনা করুন।
3. স্বয়ংচালিত উন্নয়ন বলতে কী বোঝায়? স্বয়ংচালিত উন্নয়নের প্রয়োজনীয় শর্তগুলি আলোচনা করুন।
4. রসটোর তত্ত্বটি কিভাবে সমালোচিত হয়েছে?
5. অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি সম্পর্কে মার্ক্সীয় তত্ত্বটি সংক্ষেপে আলোচনা করুন।
6. অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি সম্পর্কে মার্ক্স-প্রদত্ত তত্ত্বটির দার্শনিক ভিত্তি কী?
7. অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির স্তর বিশ্লেষণে রসটো এবং মার্ক্সের মধ্যে মৌলিক পার্থক্যগুলি উল্লেখ করুন।

৪.৬ গ্রন্থপঞ্জী

1. Rostow W.W. : "*The Stages of Economic Growth*" (Cambridge, New York 1960).
2. Rostow W.W : '*The Take-off into Self-sustained Growth*', Economic Journal, March 1956. Reprinted in "*Economics of Underdevelopment*"—Agarwala and Sing (ed). (O.U.P. New York, 1963)
3. Colin Clark : "*The Conditions of Economic Progress*" (MacMillan, 1957 3rd edition 1957).
4. Kuznets Simon : "Economic Growth and Structure" (London, Heinemann 1965).
5. Bhattacharya, Debesh : Political Economy of Development (Academic Publishers, Calcutta, 1990).

ই. ই. সি—৭

পর্যায়-২৬

অর্থনীতির ঐচ্ছিক পাঠক্রম

(স্নাতক পাঠক্রম)

একক ১ ☐ অর্থনৈতিক উন্নয়নের পন্থা

গঠন

১.০ উদ্দেশ্য

স্বল্পোন্নত দেশের উন্নয়নের বিভিন্ন পন্থা আলোচনার ক্ষেত্রে প্রথম যে সমস্যাটি বিবেচনা করা দরকার, তা হল কীভাবে উন্নয়নের সূত্রপাত করা যায়। এই প্রসঙ্গে উন্নয়ন সূত্রপাতের সমস্যা (The Problem of getting started) আলোচনা করা যেতে পারে। উন্নয়ন সূত্রপাতের সমস্যার প্রথম ধাপ হল, দারিদ্র্যের দুষ্টচক্র (vicious circle of poverty) থেকে মুক্তিলাভের প্রচেষ্টা। দেশে আয় কম, সেজন্য সঞ্চয়ও কম,—আবার সঞ্চয় কম বলে বিনিয়োগ কম, বিনিয়োগ কম হওয়ায় আয় কম—এভাবে স্বল্প আয়হেতু দারিদ্র্যের যে দুষ্টচক্র (Vicious circle of poverty) তৈরি হয়,—তা থেকে বেরিয়ে আসাটাই বড় সমস্যা। নেলসন (Nelson) স্বল্পোন্নত দেশগুলির নিম্নস্তরের ভারসাম্যের ফাঁদ (Low level equilibrium trap in less developed countries) সম্পর্কে যে মডেল তৈরি করেছেন তার প্রতিরোধকল্পে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার কমানো ও দেশের মোট উৎপাদন ও আয় বাড়ানোর উপর গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছে। লিবেনস্টিনের (Libenstein) মতে, দারিদ্র্যের দুষ্টচক্র থেকে বেরিয়ে এসে উন্নয়নের সূত্রপাত করতে গেলে প্রথম প্রয়োজন হল, আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলিকে (income-raising forces) আয় সংকোচনকারী শক্তিগুলির (income-depressing forces) সর্বোচ্চ সীমার উপরে রাখা। এজন্য তাঁর গুরুত্বপূর্ণ সর্বনিম্ন

প্রচেষ্টা (critical minimum effort) তত্ত্ব অনুযায়ী সেই পরিমাণ বিনিয়োগ দরকার যার ফলে মাথাপিছু আয় এমন একটি স্তরে পৌঁছে যাবে যার পরে আয় সংকোচনকারী শক্তিগুলি আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলি অপেক্ষা বেশি ক্ষমতাশালী হবে না। এই অবস্থায় পৌঁছানোর জন্য বৈদেশিক সাহায্য প্রয়োজন। বৈদেশিক বিনিয়োগ, বৈদেশিক ঋণ, বিদেশ থেকে উন্নত প্রযুক্তির স্থানান্তর একটি স্বল্পোন্নত দেশকে উন্নয়ন প্রচেষ্টার সূত্রপাত করতে সাহায্য করতে পারে বলে লিবেনষ্টিন মনে করেন।

উন্নয়ন প্রচেষ্টার সূত্রপাত সমস্যাটির ক্ষেত্রে রোজেনষ্টিন-রোডানের (Rosenstein-Rodan) জোরে ধাক্কা দেওয়ার তত্ত্বটি (Theory of Big Push) বিশেষভাবে প্রণিধানযোগ্য। রোজেনষ্টিন-রোডান মনে করেন যে স্বল্পোন্নত দেশকে উন্নয়নের পথে এগিয়ে যেতে হলে শিল্পোন্নয়নের উপর সর্বাধিক গুরুত্ব আরোপ করতে হবে এবং শিল্পক্ষেত্রে যতটা সম্ভব বিনিয়োগ বাড়াতে হবে। এক্ষেত্রে সমস্যা হল শিল্পক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় বিনিয়োগ বাড়াবার জন্য আর্থিক সম্পদ সংগ্রহ করা। এজন্য বৈদেশিক সাহায্যের উপরও নির্ভর করতে হতে পারে। জোরে ধাক্কা দেওয়ার নীতিটি শিল্পক্ষেত্রে বিনিয়োগের উপর বেশি গুরুত্ব আরোপ করেছে। কৃষি-প্রধান স্বল্পোন্নত দেশে উন্নয়নের সূত্রপাত করার ক্ষেত্রে কৃষিক্ষেত্রে বিনিয়োগ বৃদ্ধিও যথেষ্ট গুরুত্বপূর্ণ। কৃষি-উৎপাদন বাড়লে শিল্প-উৎপাদন বৃদ্ধির পথ সহজ হয়। কারণ সেক্ষেত্রে বহু শিল্পের প্রয়োজনীয় কাঁচামালের যোগান বেড়ে যায়। তাছাড়া, খাদ্যশস্যের উৎপাদন না বাড়াতে পারলে স্বল্পোন্নত দেশের উন্নয়নের সূত্রপাত করা খুবই কঠিন হয়ে পড়ে। তবুও এক্ষেত্রে অর্থনৈতিক উন্নয়নের সূত্রপাত করার জন্য জোরে ধাক্কা দেওয়ার (Big Push) নীতিটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

১.১ উন্নয়নের জন্য জোর ধাক্কা দেওয়ার তত্ত্ব (The Theory of the 'Big Push')

শিল্পোন্নয়নের সুযোগ থেকে বঞ্চিত দেশগুলিতে অথবা শিল্পোন্নয়নের ক্ষেত্রে অনেক পিছিয়ে আছে এমন দেশগুলিতে আন্তর্জাতিক অর্থনৈতিক কাঠামোর পরিবর্তন দরকার বলে পি. এন. রোজেনষ্টিন-রোডান (P.N. Rosenstein-Rodan) তাঁর জোর ধাক্কা দেওয়ার তত্ত্বে মন্তব্য করেছেন। শিল্পোন্নয়নের ক্ষেত্রে (উদাহরণস্বরূপ পূর্ব ইউরোপের দেশগুলির ক্ষেত্রে) প্রথম প্রয়োজন হল কৃষকদের উপযুক্ত কারিগরি দক্ষতা বাড়িয়ে পুরো সময়ের জন্য অথবা আংশিক সময়ের জন্য—শিল্পকর্মীতে পরিণত করা। এজন্য কৃষকদের এবং শ্রমিকদের উৎপাদনী শক্তি বাড়াবার জন্য প্রশিক্ষণ খাতে প্রচুর অর্থ বিনিয়োগ করা দরকার। শিল্পোন্নয়নের জন্য এবং সেই সঙ্গে পরিবহন ব্যবস্থা ও আবাসন ব্যবস্থার উন্নয়নের জন্য প্রচুর অর্থ বিনিয়োগের ব্যবস্থা করা উন্নয়ন প্রচেষ্টাকে জোরে ধাক্কা দেওয়ার তত্ত্বের পক্ষে একটি অন্যতম প্রধান যুক্তি। বিভিন্ন শিল্পের পরিপূরকতা

(complementarities) বৃহদায়তন শিল্পোন্নয়নের প্রয়াসের পক্ষে খুব অনুকূল, এবং এই পরিপূরকতাকে কাজে লাগানোর জন্য বিনিয়োগের ক্ষেত্রে ঝুঁকির পরিমাণ কিছু হ্রাস পায় এবং বৃহদায়তন উৎপাদনের বাহ্যিক সুবিধা (external economies) অর্জন করার সম্ভাবনা থাকে, তাছাড়া একটি শিল্পে বেশি বিনিয়োগ হলে অন্যান্য সহায়ক শিল্পেরও উন্নতি হয়। বৃহদায়তন শিল্পের বাহ্যিক সুবিধাগুলি (external economies) অর্থনৈতিক উন্নয়নের পক্ষে সহায়ক এবং এই বাহ্যিক সুবিধাগুলি পেতে গেলে বিনিয়োগের ক্ষেত্রে একটি জোরে ধাক্কা দেওয়ার প্রয়োজন বলে রোজেনস্টিন-রোডান মনে করেন। এই বিনিয়োগ কর্মসূচী সফল করার জন্য একটি ন্যূনতম পর্যায়ে সম্পদ আহরিত হওয়া দরকার। প্রয়োজনীয় সম্পদ সংগৃহীত হলে এবং বিনিয়োগের পরিমাণ বাড়ানো হলে উৎপাদন অপেক্ষকের অবিভাজ্যতার (indivisibilities) সদ্ব্যবহার করার কাজ সহজ হয়। উৎপাদনের উপাদানগুলির অভিভাজ্যতার সদ্ব্যবহার হলে ক্রমবর্ধমান উৎপাদনের নিয়ম (Law of Increasing Returns) কার্যকর হয়। অর্থনৈতিক সমৃদ্ধির পরিপ্রেক্ষিতে এটা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এই প্রসঙ্গে সামাজিক মূলধন সম্পর্কিত ধারণাটি বোঝা দরকার। সামাজিক মূলধন বলতে বোঝায় সেই মূলধন যা রাষ্ট্রীয় বা সামাজিক মালিকানাধীন এবং যা থেকে সঞ্চয় ও আর্থিক সম্পদের বা সমাজের আয়ের সৃষ্টি হয়, উৎপাদকের স্থাবর বা স্থির এবং অস্থাবর মূলধনও সামাজিক মূলধনের পর্যায়ে আসতে পারে। সামাজিক স্থির মূলধনে (Social overhead capital) আমরা চার প্রকার অবিভাজ্যতা দেখতে পাই ; যথা—(১) সময়ের দিক দিয়ে অবিভাজ্যতা, প্রত্যক্ষভাবে উৎপাদনশীল বিনিয়োগের আগেই দেশে সামাজিক স্থির মূলধন থাকে ; (২) সামাজিক স্থির মূলধনের ক্ষেত্রে সরঞ্জামের স্থায়িত্ব (durability) খুব বেশি,—স্থায়িত্বের মাত্রা কম হলে তার কারিগরি দক্ষতা কম হতে পারে অথবা মোটেই না থাকতে পারে ; (৩) সামাজিক স্থির মূলধনের ক্ষেত্রে বিনিয়োগ এবং তার ফল প্রাপ্তির মধ্যে সময়ের ব্যবধানও (gestation periods) বেশি থাকে ; এবং (৪) একটি ন্যূনতম সামাজিক স্থির মূলধন শিল্পের টিকে থাকার একটি শর্ত। সামাজিক স্থির মূলধন আমদানি করা যায় না বলে এবং স্থির মূলধনের অবিভাজ্যতাগুলির জন্যই বেশি পরিমাণ অর্থ বিনিয়োগের প্রয়োজন খুব বেশি। স্বল্পোন্নত দেশগুলির পক্ষে বেশি মাত্রায় বিনিয়োগ করা সবসময় সম্ভব হয় না বটে,—কিন্তু দ্রুত অর্থনৈতিক উন্নয়নের স্বার্থে এটার প্রয়োজন খুবই বেশি। স্বল্পোন্নত দেশগুলির ছোট বাজারে বিনিয়োগের পরিমাণ আপেক্ষিকভাবে কম হয়। যদি সব বিনিয়োগ প্রকল্প স্বাধীন হত এবং তাদের সংখ্যাও যদি বেশি হত, তাহলে প্রতিটি বিনিয়োগেরই ঝুঁকি কমে যেত। বিনিয়োগের ঝুঁকি কম হলে বিনিয়োগকারীর পক্ষে সহজে ঋণ পাওয়া সম্ভব এবং সেক্ষেত্রে অভ্যন্তরীণ ব্যয় সংকোচের (internal economies) সুবিধাগুলি ভোগ করাও সম্ভব। কিন্তু বাস্তবে দেখা যায় বিভিন্ন বিনিয়োগ প্রকল্প বহু ক্ষেত্রেই স্বাধীন নয়। কোনো দ্রব্যের বাজারে কতটা বিক্রি হবে সে ব্যাপারে অনিশ্চয়তা থাকায় বিনিয়োগ প্রকল্পগুলি ঝুঁকিবহুল হয় এবং বিনিয়োগ বাড়াবার আগ্রহও তাতে কমে যায়। বেশি পরিমাণ বিনিয়োগের জন্য বেশি পরিমাণ অভ্যন্তরীণ সঞ্চয়ের (domestic savings) প্রয়োজন। কিন্তু স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে সঞ্চয়ের হার ও পরিমাণ অপেক্ষাকৃত কম।

সঞ্চয়ের যোগানের ক্ষেত্রে শূন্য অথবা স্বল্প মূল্য স্থিতিস্থাপকতা (Zero or low price elasticity of saving) রএবং সঞ্চয়ের ক্ষেত্রে বেশি আয়-স্থিতিস্থাপকতা (high income elasticity of saving) হল আরেকটি অবিভাজ্যতা।

এই অবিভাজ্যতা উৎপাদনের উপকরণের ক্ষেত্রে অবিভাজ্যতা এবং এগুলি থেকে সৃষ্ট বাহ্যিক সুবিধা (external economies) ও সেই সঙ্গে শ্রমিকদের কারিগরি প্রশিক্ষণ দেওয়ার বাহ্যিক সুবিধা,—এই উপাদান হল স্বল্পোন্নত দেশের সমৃদ্ধি মডেলের (Growth models) বৈশিষ্ট্য।

অধ্যাপক হাওয়ার্ড এস. এলিস (Howard S. Ellis) মনে করেন যে বিনিয়োগের ক্ষেত্রে জোর ধাক্কা দেওয়ার তত্ত্বটি কৃষি বা প্রাথমিক উৎপাদনের জন্য বিনিয়োগের তুলনায় শিল্পক্ষেত্রে বিনিয়োগকে উৎকৃষ্টতর মনে করে ; কিন্তু কোনো কোনো ক্ষেত্রে কৃষি বা প্রাথমিক উৎপাদনক্ষেত্রে বিনিয়োগ ও উন্নয়নের পন্থা হিসাবে বিবেচিত হতে পারে। অধ্যাপক জেকব ভাইনার (Jacob Viner) মনে করেন উন্নয়নশীল দেশে বৈদেশিক বাণিজ্য অভ্যন্তরীণ বিনিয়োগ ছাড়াই বিশ্বের বাজারে অনেক অর্থনৈতিক সুবিধা অর্জনের ক্ষেত্রে সহায়ক হয়। বিনিয়োগে জোর ধাক্কা দেওয়ার তত্ত্বটির একটি সীমাবদ্ধতা হল এই যে এই তত্ত্বটি বিনিয়োগের ক্ষেত্রে জোর ধাক্কা দেওয়ার কথা বলে—অথচ উন্নয়নশীল দেশের অর্থনৈতিক পরিকাঠামোয় বিনিয়োগের ক্ষেত্রে জোর ধাক্কা দেওয়া সম্ভব কিনা অথবা বিনিয়োগের পরিমাণ বাড়াবার জন্য উপযুক্ত মূলধন সহজলভ্য কিনা সেই সমস্যাটির উপর বিশেষ আলোকপাত করেনি। তাছাড়া বিনিয়োগ বৃদ্ধির জন্য দেশে অর্থনৈতিক স্থিতিশীলতা আছে কিনা, উৎপাদনের উপকরণগুলির দক্ষতা আছে কিনা, দেশে বিনিয়োগের পক্ষে অনুকূল অর্থনৈতিক পরিকাঠামো আছে কিনা এবং দেশের সরকারি নীতি—বিশেষ করে সরকারের শিল্পনীতি, বাণিজ্যনীতি ও আয়-ব্যয় নীতি বিনিয়োগের পক্ষে অনুকূল কিনা সেগুলিও বিশেষভাবে বিবেচ্য।

১.২ সুষম সমৃদ্ধি এবং অসম বা বিষম সমৃদ্ধি (Balanced growth and unbalanced growth)

সুষম সমৃদ্ধির বিভিন্ন ব্যাখ্যা আছে। যদি দেশে মূলধনের যোগান (capital stock) নির্দিষ্ট থাকে, তবে কোনো অনুপাতে মূলধনের যোগানে বাড়ালে সমান অনুপাতে উৎপাদন বাড়ছে কিনা, আবার একটি পর্যায়ে উৎপাদন যে হারে বাড়ল পরবর্তী পর্যায়ে মূলধনের যোগান সেই অনুপাতে বাড়ল কিনা তার ভিত্তিতে সুষম উন্নয়নের ব্যাখ্যা করা যেতে পারে। আবার অর্থনীতির বিভিন্ন ক্ষেত্রের উন্নয়ন হার যদি পরস্পরের সঙ্গে সামঞ্জস্য বজায় রাখতে পারে অথবা পরস্পরের সঙ্গে সংযুক্ত শিল্পগুলির উন্নয়ন যদি সমানভাবে হয়, তবে তাকেও সুষম উন্নয়ন বলা যেতে পারে।

১.২.১ সুষম উন্নয়নের পক্ষে যুক্তি (Arguments in favour of Balanced Growth)

দারিদ্র্যের দুষ্টচক্র থেকে যাতে অনুন্নত অর্থনীতি বেরিয়ে আসতে পারে সেজন্য পরস্পরের সঙ্গে সংযুক্ত শিল্পগুলির সুষম উন্নয়নের উপর র‍্যাগনার নুর্কসি (Ragnar Nurkse) গুরুত্ব আরোপ করেছিলেন। পরস্পর নির্ভরশীল শিল্পগুলির যুগপৎ উন্নয়নে বিভিন্ন শিল্প পরস্পরের জন্য বাজারের সম্প্রসারণ করতে পারে। স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে বিনিয়োগ কম হবার কারণ হল বাজারের সীমিত আয়তন। সীমিত বাজারের বেড়াজাল থেকে বেরিয়ে আসার উপায় হিসাবে নুর্কসি পরস্পর নির্ভরশীল শিল্পগুলির সুষম উন্নয়নের উপর গুরুত্ব আরোপ করেছেন। সুষম উন্নয়নের পক্ষে আরেকটি যুক্তি হল, বিভিন্ন পরস্পর সংযুক্ত শিল্পের যুগপৎ উন্নয়ন হলে শিল্পগুলির পক্ষে নতুন উৎপাদনীশক্তি সৃষ্টি করা এবং তার ব্যবহার করা সম্ভব হয়। একটি শিল্পের উন্নয়ন হলে তার সঙ্গে সংশ্লিষ্ট অন্যান্য শিল্পের যুগপৎ উন্নয়ন হল প্রথম শিল্পটির উন্নয়নের প্রসারণ প্রভাব (Spread Effect)। সুষম উন্নয়নে শিল্পোন্নয়নের প্রসারণভাব অধিকতর পরিলক্ষিত হয়।

অধ্যাপক লুইস মনে করেন, উন্নয়নশীল দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নের জন্য সুষম উন্নয়ন পদ্ধতি খুবই প্রয়োজনীয়। এক্ষেত্রে শিল্প ও কৃষির যুগপৎ উন্নয়ন সুষম উন্নয়নের একটি অঙ্গ। অবশ্য সুষম উন্নয়ন বলতে সবক্ষেত্রেই যে সমান হারে উন্নয়ন হবে তা নয়। সীমিত বৈদেশিক মুদ্রা-ভাণ্ডার, শ্রমশক্তির কর্মকুশলতা, প্রাকৃতিক সম্পদের ব্যবহার, বিভিন্ন উৎপাদিত দ্রব্যের জন্য ক্রেতাদের আয় স্থিতিস্থাপকতা, রপ্তানি সম্প্রসারণের সম্ভাব্যতা, রপ্তানি-চালিত উন্নয়ন প্রভৃতি সবগুলি বিবেচ্য বিষয়ের মধ্যে সামঞ্জস্য বজায় রেখেই সুষম উন্নয়নের কর্মসূচী তৈরি করা দরকার। প্রাথমিক, মাধ্যমিক এবং সেবাক্ষেত্রের উন্নয়ন পরস্পরের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। এজন্যই সবগুলি ক্ষেত্রের সুষম উন্নয়ন প্রয়োজন। অর্থনৈতিক পরিকল্পনা, বিশেষ করে বিনিয়োগ পরিকল্পনার মাধ্যমে তা অর্জন করা সম্ভব।

১.২.২ সুষম সমৃদ্ধির বিভিন্ন ভাষ্য (Different Versions of Balanced Growth)

সুষম সমৃদ্ধির প্রথম ভাষ্য হল, বাজারের ক্ষুদ্র গণ্ডী দূর করার অন্যতম উপায় হিসাবে বিভিন্ন পরস্পর-সংযুক্ত ভোগসামগ্রী শিল্পগুলির যুগপৎ উন্নয়ন। এই ভাষ্যটি র‍্যাগনার নুর্কসির যুক্তির অনুরূপ। এক্ষেত্রে বিভিন্ন কলকারখানা স্থাপন ও তাদের নৈপুণ্য বৃদ্ধি, উৎপাদন ব্যয় ও উৎপাদিত পণ্যের মূল্য এবং উৎপাদিত পণ্যের জন্য চাহিদার মূল্য স্থিতিস্থাপকতাও গুরুত্বপূর্ণ। এই ভাষ্যের একটি অন্তর্নিহিত ধারণা হল, দেশে যথেষ্ট পরিমাণ সামাজিক স্থির মূলধন (Social Overhead Capital) আছে যার সাহায্যে ভোগসামগ্রী শিল্পগুলির প্রয়োজন মেটানো সম্ভব। যদি সামাজিক স্থির মূলধনের যথাযথ সদ্ব্যবহার হয় তবে পরস্পর সম্পর্কযুক্ত ভোগসামগ্রী শিল্পগুলির যুগপৎ উন্নয়ন সম্ভব হয়। আবার প্রয়োজনীয় ক্ষেত্রে সামাজিক স্থির মূলধন বাড়াবার জন্য বিনিয়োগের প্রয়োজন হয়।

সুষম সমৃদ্ধির দ্বিতীয় ভাষ্য হল, একদিকে দেশের ভোগসামগ্রী শিল্প এবং অপরদিকে সামাজিক স্থির মূলধনের মধ্যে সামঞ্জস্য বজায় রাখা। এক্ষেত্রে একটি সমস্যা হল, স্বল্পোন্নত দেশ প্রয়োজন হলে বা ইচ্ছা করলেই সামাজিক স্থির মূলধন বাড়াতে বা উন্নত করতে পারে না। তাছাড়া সামাজিক স্থির মূলধন বাড়াবার ক্ষেত্রে যথেষ্ট সময় লাগে। কিন্তু ভোগসামগ্রী শিল্পগুলির উন্নয়ন এই সময় ব্যবধানের (gestation lag) জন্য অপেক্ষা করে থাকতে পারে না।

সুষম সমৃদ্ধির তৃতীয় ভাষ্য হল, ভোগসামগ্রী শিল্প, মূলধন সামগ্রী শিল্প এবং সামাজিক স্থির মূলধন অনুভূমিক এবং উল্লম্ব ভারসাম্যের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত ; রোজেনষ্টিন-রোডান (Rosenstein-Rodan) জোরে ধাক্কা তত্ত্বের (Big Push Theory) অনুরূপ। এই তত্ত্ব অনুযায়ী দারিদ্র্যের কবল থেকে বেরিয়ে আসার জন্য কৃষি, ভোগসামগ্রী শিল্প, মূলধন-সামগ্রী শিল্প, সামাজিক স্থির মূলধন সর্বত্রই বিনিয়োগের পরিমাণ বাড়াতে হবে। সুষম উন্নয়নের তৃতীয় ভাষ্যটি ভোগসামগ্রী শিল্প, মূলধন-সামগ্রী শিল্প এবং সুসংহত উন্নয়নের উপর গুরুত্ব আরোপ করে। তবে এই ভাষ্য অনুযায়ী সুষম উন্নয়ন অর্জন করা যথেষ্ট ব্যয়-সাপেক্ষ। সীমিত সম্পদের সুষম সমৃদ্ধির তৃতীয় ভাষ্যের দুটি প্রধান বৈশিষ্ট্য হল, (১) উৎপাদনের বাহ্যিক ব্যয়-সংকোচনের সুবিধা থাকে। (২) স্বল্পোন্নত দেশগুলির অর্থনৈতিক কাঠামোকে জোরদার করার জন্য একটি সর্বাত্মক উৎপাদনসূচী (comprehensive programming) প্রয়োজন হয়।

১.৩ অসম সমৃদ্ধি বা বিষম সমৃদ্ধি সম্পর্কে সিঙ্গার-হার্শর্চম্যান ভাষ্য (Singer-Hirschman Versions of Unbalanced Growth)

হ্যান্স সিঙ্গার (Hans Singer) মনে করেন স্বল্পোন্নত দেশগুলির পক্ষে ভোগসামগ্রী শিল্প ও মূলধন-সামগ্রী শিল্প অথবা কৃষি, সবগুলি ক্ষেত্রে একই সঙ্গে বিনিয়োগ বাড়াবার মতো আর্থিক সম্পদের প্রাচুর্য নেই। এর ফলে একই সঙ্গে যুগপৎ সব শিল্পে বিনিয়োগ বাড়াতে পারলে তবে যে প্রসারণ প্রভাব তৈরি হতে পারে সেটা অর্জন করার মতো পুরো সুযোগ স্বল্পোন্নত দেশ পায় না। সেজন্য সিঙ্গারের মতে প্রত্যক্ষ উৎপাদনশীল ক্রিয়াকলাপ (Direct Productive Activities or DPA) এবং সামাজিক স্থির মূলধনের (SOC) সঙ্গে কৃষিক্ষেত্রের কাম্য উন্নয়ন দরকার। যদিও স্বল্পোন্নত দেশের প্রায় অর্ধাংশ শ্রমশক্তি কৃষিক্ষেত্রে নিযুক্ত, তবুও জনপ্রতি উৎপাদন অকৃষি ক্ষেত্রের তুলনায় কৃষিক্ষেত্রে খুব কম। উন্নত দেশগুলিতে সাধারণত গড়ে ১৫ শতাংশ লোক কৃষিক্ষেত্রে নিযুক্ত থাকে বলে কৃষি ও অকৃষিক্ষেত্রের মধ্যে জনপ্রতি উৎপাদনের ব্যবধান অনেক কম। এজন্য সিঙ্গার মনে করেন, স্বল্পোন্নত দেশগুলির আর্থিক সম্পদের পরিমাণ যেহেতু সীমিত সেজন্য সেই সম্পদ এমন কতিপয় ক্ষেত্রে বেশি বিনিয়োগ করা দরকার যেগুলিতে দ্রুত উন্নয়ন একান্ত কাম্য। এই ধরনের বিনিয়োগের মাধ্যমে সমৃদ্ধি অর্জন

করাকে অসম বিনিয়োগ (Unbalanced investment) বলা যেতে পারে ; অগ্রাধিকারের (priority) ভিত্তিতে এই ধরনের বিনিয়োগ করা দরকার।

হার্শম্যানের (Hirschman) মতে সমৃদ্ধিতে ইচ্ছাপূর্বক অসম (deliberate unbalancing of growth) করা স্বল্পোন্নত দেশের পক্ষে প্রয়োজন হয়।

সুষম সমৃদ্ধির পথে কয়েকটি বাধা থাকে :

প্রথমত, যতক্ষণ পর্যন্ত বাজারের আয়তন বড় না হচ্ছে ততক্ষণ পর্যন্ত বিনিয়োগের বাঞ্ছনীয় সম্প্রসারণ করা সম্ভব হয় না। অবশ্য বাজারের সম্প্রসারণের অভাব এক্ষেত্রে একমাত্র প্রতিবন্ধক নয়। সুষম উন্নয়ন ছাড়াও অন্যান্য উপায়ে যেমন আমদানি নিয়ন্ত্রণ, বাণিজ্যের সম্প্রসারণ, পরিবহন ব্যবস্থার উন্নয়ন, রপ্তানি বৃদ্ধি, প্রভৃতির মাধ্যমে বাজারের সম্প্রসারণ করা সম্ভব।

দ্বিতীয়ত, বাজারের সম্প্রসারণ চাহিদার উপর গুরুত্ব আরোপ করে—যোগানের দিকটি এক্ষেত্রে সেভাবে বিবেচিত হয়নি। যোগানের অস্থিতিস্থাপকতা সুষম সমৃদ্ধির পথে প্রতিবন্ধক হতে পারে।

তৃতীয়ত, সুষম সমৃদ্ধির জন্য অর্থনৈতিক পরিকল্পনা দরকার। সুসংহত অর্থনৈতিক পরিকল্পনার কর্মসূচী হিসাবেই সুষম সমৃদ্ধি অর্জন করা সম্ভব।

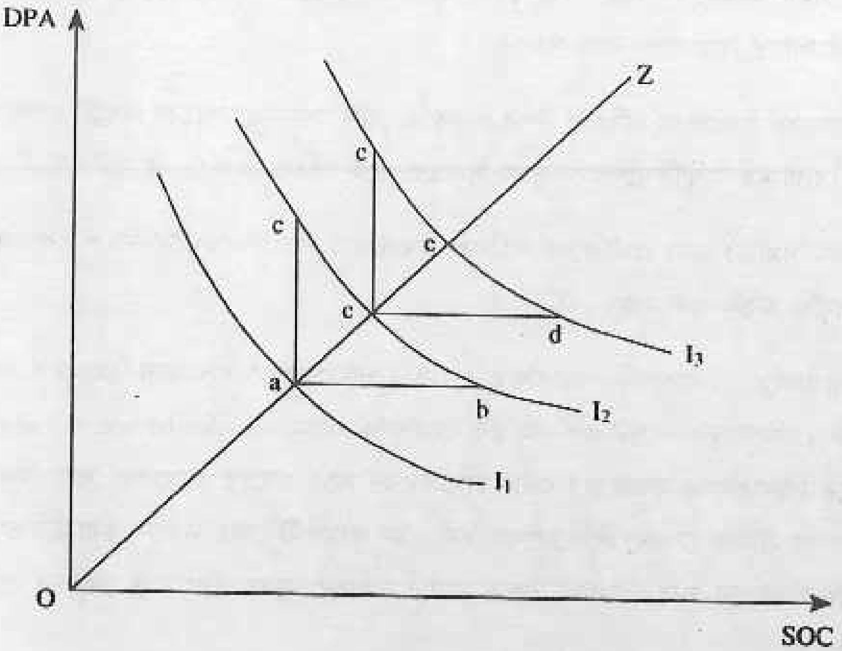
সুষম সমৃদ্ধির ক্ষেত্রে যে বাধাগুলি পরিলক্ষিত হয় তার পরিপ্রেক্ষিতে হার্শম্যান উন্নয়নের একটি বিকল্প পন্থা গ্রহণের যুক্তি দেখিয়েছেন—সেটা হল সমৃদ্ধির ইচ্ছাপূর্বক অসমতার (deliberate unbalancing of growth) ভিত্তিতে বিনিয়োগের সম্প্রসারণ করা। হার্শম্যানের মতে যেহেতু স্বল্পোন্নত দেশগুলির বিনিয়োগ সম্পদের পরিমাণ খুব সীমিত সেজন্য বিনিয়োগের জন্য এমন কয়েকটি ক্ষেত্র নির্বাচন করা উচিত সেগুলিতে বিনিয়োগের পরিমাণ বাড়লে দ্রুত উৎপাদন বেড়ে যাবার সম্ভাবনা আছে এবং দ্রুত সমৃদ্ধির পথে এগিয়ে যাবার সম্ভাবনা আছে।

হার্শম্যানের মতে যে শিল্পগুলি বিনিয়োগের জন্য নির্বাচিত হবে সেগুলি এমন হওয়া চাই যেন তাদের প্রসারণ প্রভাব (Spread effect) থাকে। এই প্রসারণ প্রভাব থেকে সংযোগ প্রভাব (Linkage effect) পরিলক্ষিত হয়। সংযুক্তি প্রভাবের ক্ষেত্রে অগ্রবর্তী যোগসূত্র বা অগ্রবর্তী সংযোগ প্রভাব (Forward linkage) এবং পশ্চাদবর্তী যোগসূত্র বা পশ্চাদবর্তী সংযোগ প্রভাব (Backward linkage) উভয়ই থাকতে পারে। অগ্রবর্তী যোগসূত্রের থেকে অগ্রণী শিল্পগুলি উৎপাদনের পরবর্তী পর্যায়গুলিতেও বিনিয়োগে উৎসাহিত হয়। অপরদিকে পশ্চাদগামী যোগসূত্রের ক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি, একটি শিল্প যেমন A, অপর কতিপয় শিল্প যেমন B, C, D-র সঙ্গে পশ্চাদবর্তী শিল্প হিসাবে এভাবে যুক্ত থাকতে পারে যে, B, C, D প্রভৃতি শিল্প যেসব

উপাদান সরবরাহ করবে সেগুলির সাহায্যেই A শিল্পটির পক্ষে উৎপাদন বাড়ানো সম্ভব। হার্শম্যানের মতে যে শিল্পগুলির অগ্রবর্তী যোগসূত্র (Forward linkage) এবং পশ্চাদবর্তী যোগসূত্র (Backward linkage), উভয় প্রভাবই যথেষ্ট জোরদার সেই শিল্পগুলিই বিনিয়োগ বৃদ্ধির মাধ্যমে সমৃদ্ধির গতি দ্রুত বাড়াতে পারে। তাঁর মতে এভাবে স্বেচ্ছাপূর্বক অসম সমৃদ্ধির মাধ্যমেই চূড়ান্ত পর্যায়ে সুষম সমৃদ্ধি অর্জন করা সম্ভব। হার্শম্যানের এই যুক্তিটি পরের ৯.১ নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।

এই চিত্রে উল্লম্ব অক্ষে প্রত্যক্ষ উৎপাদনমূলক ক্রিয়াকলাপ (DPA) এবং অনুভূমিক অক্ষে সামাজিক স্থির মূলধন (SOC) বোঝানো হচ্ছে।

I_1, I_2, I_3 প্রভৃতি হচ্ছে সম উৎপাদন রেখা।



চিত্র—৯.১

OZ হল সুষম সমৃদ্ধি রেখা (Balanced Growth Path)। গোড়ায় আমরা অসম সমৃদ্ধির সূচনা দেখতে পাই যদি সামাজিক স্থির মূলধনের (SOC) প্রাচুর্য এবং প্রত্যক্ষ উৎপাদনমূলক ক্রিয়াকলাপের (DPA) স্বল্পতা থাকে, তবে a b c d e হল অসম উন্নয়নের পথ। উন্নয়ন যত সুষম হবে তত সামাজিক স্থির মূলধনের প্রাচুর্য ও প্রত্যক্ষ উৎপাদনমূলক ক্রিয়াকলাপের স্বল্পতা দূর হয়ে যাবে এবং সামাজিক স্থির মূলধনের অগ্রবর্তী ও পশ্চাদবর্তী সংযুক্তির প্রভাবে সমৃদ্ধির গতিপথ a বিন্দু থেকে c বিন্দু এবং c বিন্দু থেকে e বিন্দু এভাবে এগিয়ে যাবে। দেখা যাচ্ছে, অসম ভারসাম্যহীনতা থেকে সুষম ভারসাম্যের অবস্থার দিকে সমৃদ্ধির হার এগিয়ে যাচ্ছে।

স্বল্পোন্নত দেশগুলির জন্য হার্শম্যান এই ধরনের উন্নয়ন পন্থা অনুসরণ করার উপর গুরুত্ব আরোপ করেছেন। কারণ, স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে অনেক সময় বিশেষ একটি ক্ষেত্র জরুরি ভিত্তিতে অগ্রাধিকার পায় এবং সেজন্য সেক্ষেত্রে সুষম উন্নয়ন হবে এই আশা নিয়ে উৎপাদন প্রচেষ্টা চালানো সম্ভব নয়।

উদাহরণস্বরূপ বলা যেতে পারে, ভারতের প্রথম পাঁচসালা পরিকল্পনায় খাদ্য ও কৃষি উৎপাদন বৃদ্ধির উপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছিল,—প্রথম পরিকল্পনায় দ্রুত শিল্পোন্নয়নের উপর গুরুত্ব দেওয়া হয়নি। তখন বলা হয়েছিল, প্রথম পাঁচসালা পরিকল্পনায় কৃষি-উৎপাদন বাড়লে শিল্পক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় কাঁচামালের উৎপাদন বাড়বে এবং তার ভিত্তিতে দ্বিতীয় পাঁচসালা পরিকল্পনায় শিল্পোৎপাদন বৃদ্ধির উপর গুরুত্ব আরোপ করা হবে। দ্বিতীয় পাঁচসালা পরিকল্পনায় গুরুভার ও মূলধন শিল্পের উপর গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছিল। আবার তৃতীয় পাঁচসালা পরিকল্পনায় কৃষি ও শিল্পে সুষম উন্নয়নের উপর গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছিল। এক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে, প্রথম ও দ্বিতীয় পাঁচসালা পরিকল্পনায় অনুসৃত হয়েছিল স্বেচ্ছাকৃত অসম সমৃদ্ধি অর্জন করার নীতি এবং তৃতীয় পাঁচসালা পরিকল্পনার উদ্দেশ্য ছিল সুষম সমৃদ্ধি অর্জন করা।

অসম সমৃদ্ধি সাধারণত অগ্রাধিকারভিত্তিক (priority based) হয়ে থাকে ; সবক্ষেত্রেই যে উৎপাদনের সংহতি বা ভারসাম্য বজায় থাকবে তা নয়।

১.৪ সারাংশ

১। উন্নয়নের জন্য জোর ধাক্কা দেওয়ার তত্ত্ব (Theory of Big Push)

শিল্পোন্নয়নের ক্ষেত্রে পিছিয়ে আছে এমন দেশগুলিতে বেশি পরিমাণে বিনিয়োগ করে জোর ধাক্কা দেওয়ার তত্ত্বটির প্রবক্তা হলেন রোজেনষ্টিন-রোডান (Rosenstein-Rodan)। তাঁর মতে শিল্পোন্নয়নের ক্ষেত্রে স্বল্পোন্নত দেশগুলির প্রথম প্রয়োজন হল কৃষকদের উপযুক্ত কারিগরি দক্ষতা বাড়িয়ে পুরো সময়ের জন্য অথবা আংশিক সময়ের জন্য শিল্প-কর্মীতে পরিণত করা। এজন্য কৃষকদের ও শ্রমিকদের উৎপাদনী শক্তি বাড়াবার জন্য প্রশিক্ষণ দেওয়া দরকার। শিল্পোন্নয়ন এবং সেই সঙ্গে পরিবহণ ব্যবস্থা ও আবাসন ব্যবস্থার উন্নয়নের জন্য প্রচুর অর্থ বিনিয়োগ করা দরকার এবং সেটাই হচ্ছে বিনিয়োগে জোর ধাক্কা দেওয়ার তত্ত্বের মূল কথা। বিনিয়োগের ক্ষেত্রে জোর ধাক্কা দিলে বৃহদায়তনে উৎপাদন সম্ভব হবে এবং বৃহদায়তন উৎপাদনের সব সুবিধা, অভ্যন্তরীণ ও বাহ্যিক ভোগ করা সম্ভব হবে। সামাজিক স্থির মূলধনের অবিভাজ্যতাগুলির (indivisibilities) ঠিকমতো ব্যবহার করতে পারলে দেশের উন্নয়ন হার বাড়তে পারে

এবং সেটা সম্ভব হতে পারে যদি বেশি করে মূলধন বিনিয়োগ করা সম্ভব হয় বা বিনিয়োগের ক্ষেত্রে জোর ধাক্কা দেওয়া যায়।

২। সুষম সমৃদ্ধি (Balanced Growth)

মূলধনের যোগান যদি নির্দিষ্ট থাকে, তবে কোনো অনুপাতে মূলধনের যোগান বাড়লে সমান অনুপাতে উৎপাদন বাড়ছে কিনা, আবার একটি পর্যায়ে উৎপাদন যে হারে বাড়ল পরবর্তী পর্যায়ে মূলধনের যোগান সেই হারে বাড়ল কিনা তার ভিত্তিতে সুষম সমৃদ্ধির ব্যাখ্যা দেওয়া যেতে পারে। আবার অর্থনীতির বিভিন্ন ক্ষেত্রের যদি সুসমঞ্জস উন্নয়ন হয় এবং পরস্পরের সঙ্গে সংযুক্ত শিল্পগুলির উন্নয়ন যদি সমানভাবে হয় তবে তাকেও সুষম উন্নয়ন বলা যেতে পারে।

সুষম সমৃদ্ধির প্রবক্তাদের মতে সুষম উন্নয়ন স্বল্পোন্নত দেশকে দারিদ্র্যের দুষ্টচক্র থেকে বেরিয়ে আসতে সাহায্য করে। পরস্পর নির্ভরশীল শিল্পগুলির উন্নয়নে বিভিন্ন শিল্প পরস্পরের জন্য বাজারের সম্প্রসারণ করতে পারে। সুষম সমৃদ্ধির তিনটি ভাষ্য আছে—যথা, (১) বাজারের ক্ষুদ্র গণ্ডী দূর করার অন্যতম উপায় হ্ল বিভিন্ন পরস্পর-সংযুক্ত ভোগ-সামগ্রী শিল্পগুলির যুগপৎ উন্নয়ন। (২) একদিকে দেশের ভোগসামগ্রী শিল্প এবং অপরদিকে সামাজিক স্থির মূলধনের মধ্যে সামঞ্জস্য বজায় রাখা ; এবং (৩) ভোগসামগ্রী শিল্প, মূলধন-সামগ্রী শিল্প এবং সামাজিক স্থির মূলধন অনুভূমিক এবং উল্লম্ব ভারসাম্যের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। এই তত্ত্ব অনুযায়ী দারিদ্র্যের কবল থেকে বেরিয়ে আসতে হলে কৃষি, ভোগসামগ্রী শিল্প, মূলধন-সামগ্রী শিল্প, সামাজিক স্থির মূলধন সর্বত্রই বিনিয়োগ বাড়াতে হবে।

৩। অসম সমৃদ্ধি (Unbalanced Growth)

হ্যান্স সিঙ্গারের (Hans Singer) মতে স্বল্পোন্নত দেশগুলির ভোগসামগ্রী ও মূলধন-সামগ্রী শিল্প অথবা কৃষি সবগুলি ক্ষেত্রে একই সঙ্গে বিনিয়োগ বাড়াবার মতো আর্থিক সম্পদের প্রাচুর্য নেই। তাঁর মতে প্রত্যক্ষ উৎপাদনশীল ক্রিয়াকলাপ এবং সামাজিক স্থির মূলধনের সঙ্গে কৃষিক্ষেত্রের কাম্য উন্নয়ন দরকার। এজন্য এক্ষেত্রে অগ্রাধিকারের (priority) ভিত্তিতে বিনিয়োগ হওয়া দরকার। এভাবে এই ধরনের উন্নয়ন প্রচেষ্টাকে অসম উন্নয়ন-প্রচেষ্টা বলা হয়। হার্শম্যানের (Hirschman) মতে, সমৃদ্ধিকে ইচ্ছাপূর্বক অসম (deliberate unbalancing of growth) করা স্বল্পোন্নত দেশের পক্ষে প্রয়োজন হয়। হার্শম্যানের মতে যে শিল্পগুলি বিনিয়োগের জন্য নির্বাচিত হবে সেগুলির অগ্রবর্তী যোগসূত্র (Forward Linkage) এবং পশ্চাৎবর্তী যোগসূত্র (Backward Linkage) থাকতে পারে। যে শিল্পগুলির ক্ষেত্রে উভয় প্রকার যোগসূত্রই যথেষ্ট জোরদার, সেই শিল্পগুলিই বিনিয়োগ বৃদ্ধির মাধ্যমে সমৃদ্ধির গতি দ্রুত বাড়াতে পারে।

১.৫ অনুশীলনী

- নীচের প্রশ্নগুলির সংক্ষিপ্ত উত্তর দিন।

(১) উন্নয়নের সূত্রপাত কীভাবে হতে পারে?

(২) জোর ধাক্কা দেওয়ার তত্ত্বটি কে চালু করেছিলেন?

(৩) সামাজিক স্থির মূলধনের অবিভাজ্যতা কী কী?

(৪) প্রসারণ প্রভাব কাকে বলে?

(৫) অগ্রবর্তী সংযোগ প্রভাব এবং পশ্চাদবর্তী সংযোগ প্রভাব বলতে কী বোঝায়?

(৬) ইচ্ছাপূর্বক অসমতার ভিত্তিতে সম্প্রসারণ তত্ত্বটির প্রবক্তা কে?

(৭) সুষম সমৃদ্ধির অর্থ কী?

(৮) সুষম সমৃদ্ধির যেকোন একটি ভাষ্য সম্পর্কে একটি টীকা লিখুন।

(৯) অসম সমৃদ্ধি কথাটির অর্থ কী?

(১০) জোর ধাক্কা দেওয়ার তত্ত্বটির তাৎপর্য কী?

(১১) সামাজিক মূলধন কাকে বলে?

- শূন্যস্থান পূরণ করুন।

(১) সামাজিক মূলধনের ________ ধরনের অবিভাজ্যতা দেখা যায়।

(২) স্বল্পোন্নত দেশগুলির ছোট বাজারে বিনিয়োগের পরিমাণ আপেক্ষিকভাবে ________ হয়।

(৩) একটি শিল্পের উন্নয়নের ফলে অন্যান্য শিল্পের যুগপৎ উন্নয়ন হলে তাকে বলা হয় ________ ________ ।

(৪) সংযোগ প্রভাব ________ ধরনের হতে পারে; একটি হল ________ সংযোগ প্রভাব, অপরটি হল ________ প্রভাব,

(৫) উন্নয়নশীল দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নের জন্য ________ সমৃদ্ধি অপেক্ষা ________ সমৃদ্ধি বেশি কাম্য।

(৬) হার্শম্যানের মতে স্বল্পোন্নত দেশগুলির উচিত ইচ্ছাপূর্বক ________ সমৃদ্ধির নীতি অনুসরণ করা।

(৭) সুষম সমৃদ্ধি তত্ত্বের ________ ভাষ্য আছে।

(৮) বৃহদায়তন শিল্পোন্নয়নের পক্ষে বিভিন্ন শিল্পের পরিপূরকতা বিশেষ ________ হয়।

(৯) উৎপাদন অপেক্ষকের অবিভাজ্যতার সদ্ব্যবহারের জন্য বিনিয়োগের পরিমাণ ________ দরকার।

(১০) রোজেনষ্টিন-রোডান মনে করেন স্বল্পোন্নত দেশকে উন্নয়নের পথে এগিয়ে যেতে হলে বিনিয়োগের পরিমান ________ দরকার।

- **বড় প্রশ্ন**

(১) সুষম সমৃদ্ধি কথাটির অর্থ কী? সুষম সমৃদ্ধির বিভিন্ন ভাষ্য আলোচনা করুন।

(২) সুষম সমৃদ্ধির পথে কয়েকটি বাধার উল্লেখ করে সমৃদ্ধির ইচ্ছাপূর্বক অসমতার তাৎপর্য ব্যাখ্যা করুন।

(৩) অগ্রবর্তী যোগসূত্র এবং পশ্চাদকর্তা যোগসূত্রের সঙ্গে অসম সমৃদ্ধির সম্পর্ক ব্যাখ্যা করুন।

(৪) অসম সমৃদ্ধি সম্পর্কে সিঙ্গার হার্শ্চম্যান ভাষ্য ব্যাখ্যা করুন।

(৫) সুষম সমৃদ্ধি কাকে বলে? সুষম সমৃদ্ধি ও অসম সমৃদ্ধির মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা করুন।

(৬) সমৃদ্ধির ইচ্ছাপূর্বক অসমতা বজায় রাখা সম্পর্কে হার্শ্চম্যানের তত্ত্ব ব্যাখ্যা করুন।

(৭) কোনো উন্নয়নশীল দেশে সুষম সমৃদ্ধির নীতি গ্রহণের সীমাবদ্ধতাগুলি আলোচনা করুন।

১.৬ গ্রন্থপঞ্জী

1. Myint, H.: The Economics of The Developing Countries. (Indian Edition, B. I. Publications, New Delhi, 1981).
2. Thirlwall, A. P.: Growth and Development with Special Reference to Developing Economics (ELBS/MacMillan, 1983).
3. Meier, G. M: Leading Issues in Economic Development (New York, 1976).
4. Hirschman A. O.: The Strategy of Economic Development (New Haven, 1958).
5. Kindleberger C. P.: Economic Development (McGraw-Hill, New York, 1958).

Or

Higgins. B.: Economic Development-Principles, Problems and Policies (Indian Edition, Central Book Depot, Allahabad, 1963).

একক ২ □ জনসংখ্যা বৃদ্ধি এবং অর্থনৈতিক উন্নয়ন

গঠন

২.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে জানা যাবে উন্নয়নের অন্যতম উপাদান জনসংখ্যার বৃদ্ধি কেমন করে একটি দেশের সমস্ত সূচককে প্রভাবিত করে। জনবিস্ফোরণ কখন ঘটে এবং তার পরিণাম কী, জনবিন্যাসের রূপান্তরের তত্ত্ব, স্বল্পোন্নত দেশে নিম্নস্তরের ভারসাম্যের ফাঁদ এবং তার থেকে বেরিয়ে আসার উপায় সবই জানা যাবে এটি থেকে।

২.১ প্রস্তাবনা

অর্থনৈতিক উন্নয়নের অন্যতম উপাদান হল দেশের জনসংখ্যা বা মানব সম্পদ (Human Resources)। জনসংখ্যা বৃদ্ধি এবং বর্ধিত জনসংখ্যার উপযুক্ত ব্যবহার অর্থনৈতিক উন্নয়নের সঙ্গে বিশেষভাবে জড়িত। জন-সংখ্যা বৃদ্ধির ইতিবাচক প্রভাব (Positive Effects) থাকতে পারে এবং সেটা অর্থনৈতিক উন্নয়নের পক্ষে সহায়ক হতে পারে।

প্রথমত, যদি দেশে বর্ধিত জনসংখ্যা অনুপাতে জনসংখ্যা বহন করার ক্ষমতা (carrying capacity) বেশি থাকে, তবে সেই বর্ধিত জনসমষ্টিকে উপযুক্তভাবে কাজে লাগানোর সম্ভাবনা থাকে—সেক্ষেত্রে যদি সেই

বর্ধিত জনসমষ্টিকে দেশের উৎপাদন বৃদ্ধিতে অথবা উৎপাদনমূলক উপজীবিকায় যথাযথ ব্যবহার করা হয়, তবে সেটা অর্থনৈতিক উন্নয়নের পক্ষে সহায়ক হয়। যদি কোনও দেশে শ্রমের অভাব থাকে এবং দেশের জনসংখ্যা কাম্য জনসংখ্যা (optimum population) অপেক্ষা কম থাকে, তবে জনসংখ্যার বৃদ্ধি সেদেশে শ্রমের যোগান বাড়িয়ে দেয় এবং সেটা অর্থনৈতিক উন্নয়নের পক্ষে সহায়ক হয়।

দ্বিতীয়ত, জনসংখ্যার হার বৃদ্ধি পেলে ভোগ-সামগ্রীর জন্য জনসাধারণের চাহিদা বেড়ে যায় ; তাতে এই জিনিসগুলির উৎপাদন বেড়ে যাবার সম্ভাবনা থাকে। জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার কমে গেলে উন্নত দেশগুলিতে দীর্ঘমেয়াদী কর্মসংকোচন এবং বিনিয়োগের অভাব (Secular stagnation) পরিলক্ষিত হবার নজির আছে। উৎপাদন বৃদ্ধির জন্য শ্রমিক সরবরাহ নিয়মিত থাকা দরকার ; বিশেষ করে কর্মকুশল শ্রমিকের সরবরাহও থাকা দরকার। যদি দেশের মানব সম্পদকে আধুনিক প্রযুক্তির সঙ্গে পরিচিত করা সম্ভব হয় তবে সেটা অর্থনৈতিক উন্নয়নের উপর অনুকূল প্রভাব বিস্তার করে। দেশের শ্রমশক্তির উৎপাদনী শক্তি (Productivity of Labour) বেড়ে গেলে অর্থনৈতিক উন্নয়ন ত্বরান্বিত হয়।

কিন্তু উন্নয়নশীল দেশগুলিতে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার বেশি হলে তার কয়েকটি নেতিবাচক প্রভাবও (Negative Effects) পরিলক্ষিত হয়।

প্রথমত, উন্নয়নশীল দেশে যদি বেকার সমস্যা তীব্র থাকে এবং দেশটি যদি ইতিমধ্যেই শ্রম-উদ্বৃত্ত (Labour-Ssurplus) হয়ে থাকে, তবে জনসংখ্যা বৃদ্ধি দেশের বেকার সমস্যার তীব্রতা বাড়িয়ে দেয় এবং সেই সঙ্গে দারিদ্র্যের তীব্রতাও বাড়িয়ে দেয়। অধিকাংশ স্বল্পোন্নত দেশে আমরা প্রচ্ছন্ন বা ছদ্মবেশী বেকার অবস্থা Disguised Unemployment) দেখতে পাই। জনসংখ্যা বৃদ্ধির প্রভাবে এই দেশগুলিতে গ্রামাঞ্চলের উদ্বৃত্ত শ্রমিকরা কাজের আশায় শহরাঞ্চলে এসে ভীড় করে। গ্রামাঞ্চল থেকে শহরাঞ্চলে শ্রম নির্গমন (Rural-urban Migration) শহরাঞ্চলে চাপের সৃষ্টি করে ; তাতে নাগরিক জীবনের অনেক সমস্যার সৃষ্টি হয় এবং বেকার সমস্যার তীব্রতা বাড়ে। ভারতের মতো উন্নয়নশীল দেশে দেখা যায় যে জনসংখ্যা বৃদ্ধির সঙ্গে শহরাঞ্চলের অধিবাসীর অনুপাত গ্রামাঞ্চলের অধিবাসীর তুলনায় বেড়েছে। এটা থেকে ধারণা করা যায়, শিল্পের উন্নতি এবং নাগরিক জীবনযাত্রার উন্নতি বহুল পরিমাণে দেশের জনসংখ্যার উপর নির্ভরশীল।

দ্বিতীয়ত, জনসংখ্যা বৃদ্ধির ফলে খাদ্যসামগ্রীর জন্য সামগ্রিক চাহিদা বেড়ে যায়। উদ্বৃত্ত জনসমষ্টির জন্য খাদ্যের সংস্থান করতে হলে খাদ্যসামগ্রীর উৎপাদন সেই অনুপাতে বাড়ানো দরকার। স্বল্পোন্নত দেশের পক্ষে জনসংখ্যা বৃদ্ধির সঙ্গে খাদ্যশস্যের উৎপাদন সেই অনুপাতে বাড়ানো সবসময়ে সম্ভব হয় না। এজন্য বিদেশ থেকে খাদ্যশস্য আমদানি করতে হয়। দেশের দুর্লভ বৈদেশিক মুদ্রা খাদ্যশস্য আমদানির জন্য ব্যয় করতে হয়। খাদ্যশস্য আমদানি করতে না হলে এই বৈদেশিক মুদ্রা দেশের শিল্পোন্নয়ন ও অর্থনৈতিক পরিকাঠামোর

উন্নয়নে ব্যবহার করা যেত। তাছাড়া আমদানিকৃত খাদ্যের সুষ্ঠু বণ্টন ব্যবস্থা চালু রাখতে হলে সরকারকে অপেক্ষাকৃত কম দামে সাধারণ মানুষের কাছে খাদ্য পৌঁছে দিতে হয় এবং সেক্ষেত্রে ভরতুকি (subsidy) প্রদান করতে হয়। এই ভরতুকি প্রদান সরকারের বাজেটের উপর চাপ সৃষ্টি করে।

তৃতীয়ত, জনসংখ্যা বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে জাতীয় আয় না বাড়লে মাথাপিছু আয় কমে যায়। স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে জনসংখ্যা বৃদ্ধির চাপ শুধু যে খাদ্যাভাব বা বেকার সমস্যার সৃষ্টি করে তা-ই নয়। সাধারণ মানুষের জীবনযাত্রা জনসংখ্যা সমস্যার ফলে দারুণভাবে প্রভাবিত হয়। গরিব পরিবারগুলি বর্ধিত পরিবারের ভরণপোষণের খরচ নির্বাহ করতে পারে না বলে স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে শিশু শ্রমিকের প্রাবল্য, শিক্ষার অভাব, অপুষ্টি ও স্বাস্থ্যহীনতার সমস্যা বিশেষভাবে প্রকট হয়। এই সমস্যাগুলি পরোক্ষভাবে জনসংখ্যা সমস্যার সঙ্গে জড়িত। জনসংখ্যা বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে সামগ্রিকভাবে দেশের সঞ্চয় কমে যেতে পারে। একটি প্রশ্ন উঠতে পারে—জনসংখ্যা বৃদ্ধি কী দারিদ্র্যের জন্য দায়ী? অথবা দারিদ্র্য জনসংখ্যা বৃদ্ধির জন্য দায়ী? ঠিকভাবে বলতে গেলে উভয় প্রশ্নের উত্তরই ইতিবাচক হবে।

২.২ জনসংখ্যার উপর অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রভাব (Effects of Economic Development on Population)

উন্নয়নশীল দেশে অর্থনৈতিক উন্নয়নও বিভিন্নভাবে জনসংখ্যা বৃদ্ধিকে প্রভাবিত করে। স্বল্পোন্নত দেশগুলি যখন উন্নয়নের পথে অগ্রসর হতে থাকে, তখন জন-বিস্ফোরণ (Population Explosion) দেখা যায়। তবে এই জন-বিস্ফোরণ অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রথম পর্যায়ে পরিলক্ষিত হয়। প্রাথমিক পর্যায় অতিক্রান্ত হলে জীবনযাত্রার মান উন্নত হতে থাকে এবং তখন জীবনযাত্রার মানের উন্নতি হেতু জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার কমে যাবার সম্ভাবনা সৃষ্টি হয়। কারণ, শিক্ষার সম্প্রসারণ হেতু এবং সুখ-স্বাচ্ছন্দ্য পুরোপুরি ভোগ করার তাগিদে পরিবার পরিকল্পনার নীতি অনুসৃত হয় ও জন্মহার কমে যায়। কিন্তু অপরদিকে অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রভাবে খাদ্যশস্যের উৎপাদন বাড়ে, জনসাধারণের অপুষ্টি দুর হতে থাকে, স্বাস্থ্য ও চিকিৎসাশাস্ত্রেরও উন্নতি হয় এবং আধুনিক চিকিৎসা-প্রযুক্তির (Medical Technology) প্রভাবে মৃত্যুহারও কমে যায়। সেক্ষেত্রে জনসংখ্যা বাড়বে কিনা অথবা জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার স্থিতিশীল থাকবে কিনা সেটা নির্ভর করে জন্মহার ও মৃত্যুহারের মধ্যে ফাঁক (Gap) কতটা তার উপর।

অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রভাবে শ্রমিকদের কর্মকুশলতাও বাড়ে। তাছাড়া জনসংখ্যার উপজীবিকা ধারায় (Occupation Pattern) পরিবর্তন পরিলক্ষিত হয়। অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রভাবে প্রাথমিক উপজীবিকার (Primary Occupation) তুলনায় মাধ্যমিক উপজীবিকা (Secondary Occupation) এবং পরিষেবা

ক্ষেত্র বা তৃতীয় শ্রেণীর উপজীবিকার (Tertiary Occupation or Serivce Sector) গুরুত্ব আপেক্ষিকভাবে বাড়ে।

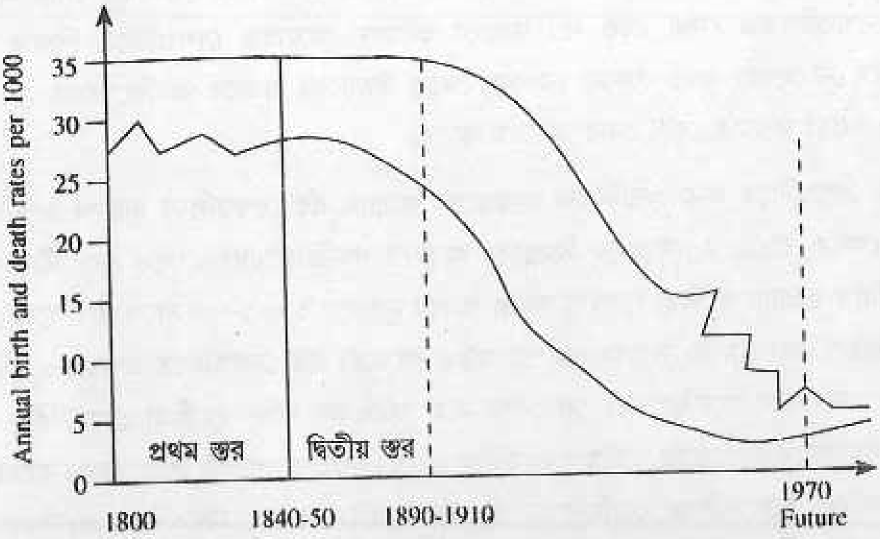
অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রক্রিয়ায় মানবসম্পদে বিনিয়োগ (Investment in human capital) খুব গুরুত্বপূর্ণ। যদি এই বিনিয়োগ উপযুক্ত পরিমাণে হয় ও সফল হয় তবে দেশের জনসমষ্টির শিক্ষার সম্প্রসারণ হয়। সাধারণ শিক্ষা ও কারিগরি শিক্ষার সম্প্রসারণের মাধ্যমে এবং জনসাধারণের সামাজিক নিরাপত্তা ও সামাজিক সুযোগ (social opportunities) সুনিশ্চিত করলে শ্রমিকদের মাথাপিছু উৎপাদনী শক্তি বাড়ে।

অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রভাবে সাধারণ মানুষের জীবনযাত্রার ধারা পরিবর্তিত হয়। জনসাধারণের মাথাপিছু প্রকৃত আয় (Per capita real income) বেড়ে গেলে এবং সেই বর্ধিত আয়ের ঠিকমতো বন্টন হলে জনসাধারণের জীবনযাত্রার মান উন্নত হয়। ক্ষুধা থেকে নিবৃত্তি, প্রয়োজনীয় ভোগসামগ্রী ক্রয় করার ক্ষমতা বৃদ্ধি এবং শিক্ষার সম্প্রসারণ মানবসম্পদ উন্নয়নের ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা গ্রহণ করে।

২.৩ জনসংখ্যাবিষয়ক রূপান্তরের তত্ত্ব (Theory of Demographic Transition)

জনসংখ্যাবিষয়ক রূপান্তরের তত্ত্ব বিভিন্ন দেশের জনসংখ্যা বৃদ্ধির ইতিহাসকে কেন্দ্র করে গড়ে উঠেছে। এই তত্ত্বে জনসংখ্যা বৃদ্ধির তিনটি স্তরের কথা বলা হয়েছে। বর্তমানকালের উন্নত দেশগুলি প্রায় সবাই এই তিনটি স্তর পেরিয়ে এসেছে বলে এই তত্ত্বে বলা হয়ে থাকে। অর্থনৈতিক উন্নয়ন অর্জিত হবার আগে অথবা আধুনিক জীবনযাত্রা শুরু হবার আগে বহু শতাব্দী ধরে এই দেশগুলির মোটামুটিভাবে একটি স্থিতিশীল জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার ছিল ; এবং তার কারণ ছিল, একদিকে উঁচু জন্মহার এবং অপরদিকে উঁচু মৃত্যুহার। একদিকে জন্মহার বেশি থাকায় এবং অপরদিকে অনুরূপভাবে মৃত্যুহার সমান বেশি থাকায় জনসংখ্যাবৃদ্ধির হার স্থিতিশীল ছিল। এটাকে জনসংখ্যাবিষয়ক রূপান্তরের প্রথম স্তর (Stage-I) বলা হয়। দ্বিতীয় স্তর (Stage-II) শুরু হয় যখন জীবনযাত্রা আধুনিক হতে থাকে এবং সেই সঙ্গে উন্নত ধরনের জনস্বাস্থ্য, ভাল খাবার, বর্ধিত আয় প্রভৃতির ফলে মৃত্যুহার অনেক কমে যেতে থাকে। এর ফলে জনসাধারণের প্রত্যাশিত আয়ু ৪০ বছর থেকে ৬০ বছর পর্যন্ত বেড়ে গিয়েছিল। অথচ মৃত্যুহার কমে যাবার সঙ্গে সঙ্গেই যে জন্মহার কমে গিয়েছিল তা নয়। এর পরিণতি হিসাবে উচ্চ জন্মহার এবং হ্রাসমান মৃত্যুহারের মধ্যে ফাঁক বেড়ে যেতে থাকে এবং জনসংখ্যাও বেড়ে গিয়েছিল। জনসংখ্যাবিষয়ক রূপান্তরের তৃতীয় স্তর আরম্ভ হয় যখন অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রভাবে এবং জীবনযাত্রার মানের উন্নতির প্রভাবে জন্মহারও কমে যেতে আরম্ভ করেছিল, মৃত্যুহারও কম ছিল। তৃতীয় স্তরে হ্রাসমান জন্মহার এবং হ্রাসমান মৃত্যুহার উভয়ের প্রভাবে প্রকৃতপক্ষে জনসংখ্যা

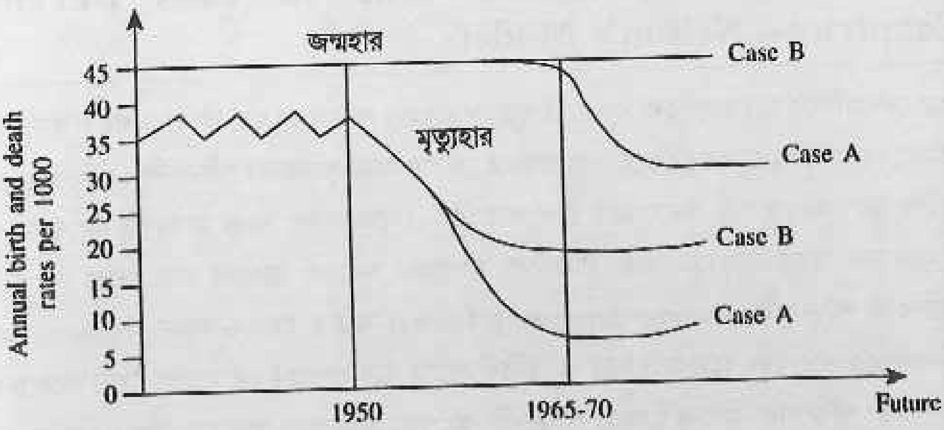
বৃদ্ধি খুবই কম ছিল এবং অনেকক্ষেত্রে জনসংখ্যা স্থিতিশীল ছিল। নীচের চিত্রে পশ্চিম ইউরোপে জনসংখ্যা বিষয়ক রূপান্তরের তিনটি স্তর দেখানো হয়েছে।



চিত্র—২.১

ঊনবিংশ শতাব্দীর প্রথম দিকে পশ্চিম ইউরোপে প্রতি হাজারে জন্মহার ছিল ৩৫ ; এর ফলে প্রতি হাজারে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার ছিল ৫-এর মতো, অথবা ১ শতাংশের অর্ধেক (অর্থাৎ $\frac{৫}{১০০০}$ = ০.০০৫) দ্বিতীয় স্তরে ঊনবিংশ শতাব্দীর প্রথম চল্লিশ বছর পেরিয়ে শিল্পবিপ্লবের প্রভাবে আধুনিক জীবনযাত্রা শুরু হবার সঙ্গে সঙ্গে মৃত্যুহার কমতে থাকে,—অথচ জন্মহার তখনও কমেনি। ঊনবিংশ শতাব্দীর শেষ দশক থেকে জন্মহারও কমতে থাকে, মৃত্যুহারও কমতে থাকে।

তৃতীয় বিশ্বের দেশগুলিতে জনসংখ্যাবিষয়ক রূপান্তর কীভাবে হয়েছে তা নীচের চিত্রে দেখানো হয়েছে।



চিত্র—২.২

শিল্পোন্নত হবার আগে পশ্চিম ইউরোপের দেশগুলিতে যা জন্মহার ছিল, বর্তমানকালের স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে জন্মহার তার চেয়েও বেশি। স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে জন্মহার বেশি হবার কারণ হল, এই দেশগুলিতে মেয়েদের খুবই অল্প বয়সে বিবাহ হয় ;—এত অল্প বয়সে মেয়েদের বিবাহ শিল্পোন্নত হবার আগে পশ্চিম ইউরোপের দেশগুলিতেও দেখা যেত না। তাছাড়া বর্তমানে স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে শিক্ষার সম্প্রসারণ আশানুরূপভাবে না হওয়া এবং কোনো কোনো ক্ষেত্রে উন্নয়নের প্রভাবে জনবিস্ফোরণ (Population Explosion) হওয়া জন্মহার বেশি হবার অন্যতম কারণ।

স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে জনসংখ্যাবিষয়ক রূপান্তরের ব্যাখ্যায় এই দেশগুলিকে দুভাগে ভাগ করা যেতে পারে। প্রথম ক্ষেত্রে (Case A) মৃত্যুহার নিয়ন্ত্রণের আধুনিক পদ্ধতি প্রয়োগের ফলে এবং জীবনযাত্রার মান অপেক্ষাকৃত উন্নত হওয়ায় ও স্বাস্থ্য সুরক্ষার ব্যবস্থা থাকায় মৃত্যুহার ১৯৬৫-৭০ সালে প্রতি হাজারে ১০-এর কম হয়ে গিয়েছিল এবং ১৯৭০ সালের পর তা আরও কমেছে। এই দেশগুলিতে জন্মহারও প্রতি হাজারে ২৫ থেকে ৩০ পর্যন্ত কমে গিয়েছিল। এই দেশগুলির মধ্যে তাইওয়ান, দক্ষিণ কোরিয়া, কোস্টারিকা, চিলি এবং শ্রীলঙ্কা জনসংখ্যাবিষয়ক রূপান্তরের তৃতীয় পর্যায়ে চলে গেছে। সত্তরের দশকের শেষে আরও কয়েকটি দেশে, যেমন চীন, কলম্বিয়া, ইন্দোনেশিয়া, ডোমিনিকান রিপাবলিক, থাইল্যাণ্ড এবং ফিলিপিন্স্ প্রভৃতিতে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার ক্রমেই হ্রাসমান হয়েছে।

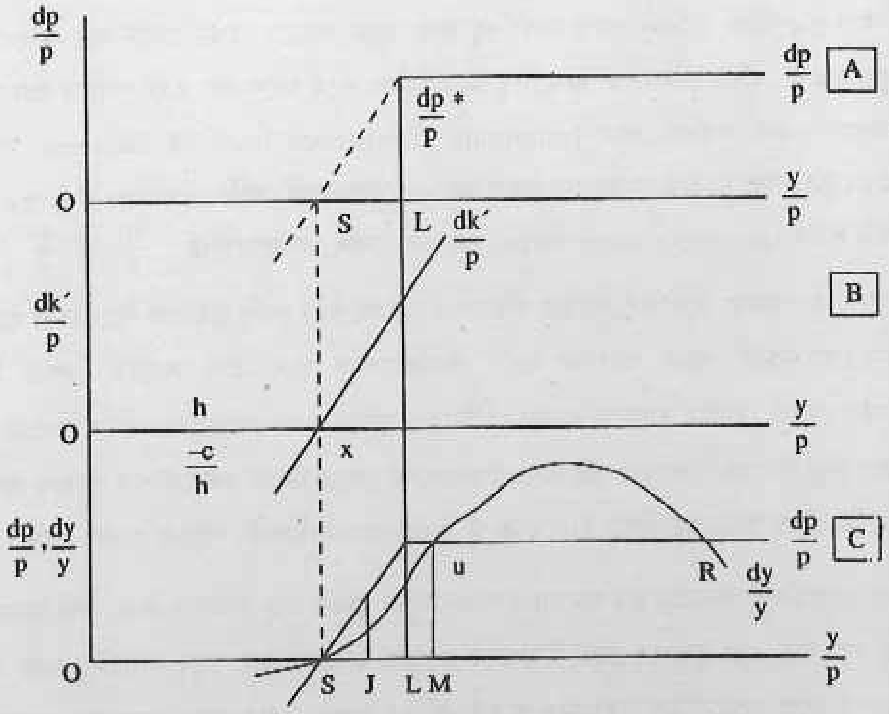
অপরদিকে দ্বিতীয় ক্ষেত্রে (Case B) তৃতীয় বিশ্বের অধিকাংশ দেশই অন্তর্ভুক্ত। ভারত দ্বিতীয় ক্ষেত্রের অন্তর্ভুক্ত। দক্ষিণ এশিয়া, দক্ষিণ-পূর্ব এশিয়া, মধ্যপ্রাচ্য এবং আফ্রিকার অনেক দেশ এখন জনসংখ্যাবিষয়ক রূপান্তরের দ্বিতীয় স্তরের অন্তর্ভুক্ত।

২.৪ স্বল্পোন্নত দেশগুলির নিম্নস্তরের ভারসাম্যের ফাঁদ—নেলসনের মডেল (Low Level Equilibium Trap in Less Developed Countries—Nelson's Model)

স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে যদি প্রাকৃতিক সম্পদের যথাযথ ব্যবহার করা সম্ভব হয়, বিনিয়োগের পরিমাণ বাড়ানো হয় এবং শ্রমিকদের কার্যক্ষমতা বাড়ে, তবে তার প্রভাবে দেশের আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলি (Income-raising forces) সক্রিয় হয়। আবার যদি জনসংখ্যার চাপ অত্যধিক বেড়ে যাবার দরুন মাথাপিছু উৎপাদন ও আয় কমে যায়, মূলধনের সঞ্চয় বাড়ানো এবং প্রাকৃতিক সম্পদের যথাযথ ব্যবহার করা সম্ভব না হয়, তবে আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলি (income-depressing forces) সক্রিয় হয়। নেলসন (Nelson) স্বল্পোন্নত দেশগুলির নিম্নস্তরের ভারসাম্য-বহনকারী আয় ও স্থিতিশীলতার ফাঁদ সম্পর্কে যে মডেল তৈরি করেছেন তাতে আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলি আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলি অপেক্ষা অধিকতর ক্ষমতাসম্পন্ন। নেলসনের মতে,

স্বল্পোন্নত দেশে (১) মাথাপিছু আয়ের সঙ্গে জনসংখ্যা বৃদ্ধির বিশেষ সম্পর্ক আছে, (২) অতিরিক্ত মাথাপিছু আয় মাথাপিছু বিনিয়োগের পরিমাণ বাড়ায় না, (৩) অনাবাদী চাষের জমির স্বল্পতা পরিলক্ষিত হয়, এবং (৪) উৎপাদন পদ্ধতিও খুব অনগ্রসর ও অদক্ষ। এগুলি হল আয়-সংকোচনকারী শক্তি। পরবর্তী চিত্রে নেলসনের মডেল দেখানো হয়েছে।

এই চিত্রটির তিনটি ভাগ আছে, প্রথম ভাগে (A) অনুভূমিক অক্ষে (horizontal axis) মাথাপিছু আয় ধরা হয়েছে এবং উল্লম্ব অক্ষে (vertical axis) জনসংখ্যা বৃদ্ধির শতকরা হার ধরা হয়েছে। S বিন্দুটি হল সর্বনিম্ন স্তরে জীবনধারণের (minimum subsistence level) মাথাপিছু আয়। S বিন্দুর উপর জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার যতক্ষণ পর্যন্ত সর্বোচ্চ হারে $\left(\frac{dp}{p}\right)^*$ না পৌঁছেছে ততক্ষণ পর্যন্ত বেড়ে যাচ্ছে। এখানে দেখা যাচ্ছে মাথাপিছু আয় বেড়ে যাবার সঙ্গে সঙ্গে জনসংখ্যাও বেড়ে যাচ্ছে। এখানে দেখা যাচ্ছে মাথাপিছু আয় বেড়ে যাবার সঙ্গে সঙ্গে জনসংখ্যাও বেড়ে যাচ্ছে। কিন্তু যখন মাথাপিছু আয় OL হয়েছে তখন জনসংখ্যা বৃদ্ধির সর্বোচ্চ হার অর্জিত হয়েছে। এক্ষেত্রে মৃত্যুহার কমে যাওয়া হল জনসংখ্যা বৃদ্ধির কারণ। S বিন্দুর বাঁদিকে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার নেতিবাচক, কারণ এক্ষেত্রে জন্মহার অপেক্ষা মৃত্যুহার বেশি। নেলসনের মডেলে জন্মহারের উপর মাথাপিছু আয়ের প্রতিক্রিয়া কী হবে তা বিবেচিত হয়নি।



চিত্র—১.৩

চিত্রটির দ্বিতীয় ভাগে (B) উল্লম্ব অক্ষে মাথাপিছু আয় থেকে বিভিন্ন পর্যায়ে যে সঞ্চয় সেই সঞ্চয়ের ভিত্তিতে মাথাপিছু বিনিয়োগের হার $\left(\frac{dk}{p}\right)$ ধরা হয়েছে। X বিন্দুটি হল এমন আয় যেখানে সঞ্চয় হল শূন্য (অর্থাৎ, সব আয়ই খরচ হয়ে যাচ্ছে)। আয় বেড়ে যাবার ফলে যে সঞ্চয় হয় এবং নতুন জমি যদি চাযের আওতায় আসে তবে এক্ষেত্রে মূলধন সৃষ্টি হয়। এক্ষেত্রে নূতন জমিতে চাযের দিকটি বিবেচনা না করে নূতন সঞ্চয় কতটা হচ্ছে তা বিবেচনা করা হয়েছে এবং তার ভিত্তিতেই বিনিয়োগ বাড়ছে বলে ধরা হয়েছে। X বিন্দু পর্যন্ত কোন বিনিয়োগ হচ্ছে না—এক্ষেত্রে মাথাপিছু আয় এত অল্প যে সঞ্চিত অর্থ ব্যয় করা হচ্ছে (dissaving) অথবা বিলগ্নীকরণ (disinvestment) করা হচ্ছে ; এটা h এবং X বিন্দুর মধ্যবর্তী অবস্থায় দেখানো হয়েছে। X বিন্দুর পর যে উর্ধ্বমুখী রেখাটি অঙ্কিত হয়েছে তাতে মাথাপিছু বিনিয়োগ বৃদ্ধির হার বোঝাচ্ছে।

চিত্রটির তৃতীয় ভাগে (C) উল্লম্ব অক্ষে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার $\left(\frac{dp}{p}\right)$ এবং আয় বৃদ্ধির হার $\left(\frac{dp}{y}\right)$ উভয়ই ধরা হয়েছে। এখানে S = X, এবং এটাই হল নিম্নস্তরের ভারসাম্যের ফাঁদ। এই ভাগে S বিন্দুতে জনসংখ্যা বৃদ্ধি রেখা (Population growth curve or $\frac{dp}{p}$ curve) এবং আয় বৃদ্ধির রেখা $\left(\text{Income growth curve or } \frac{dy}{y}\right)$ পরস্পরকে ছেদ করেছে। শূন্য উন্নয়ন থেকে যদি আরম্ভ করা হয়, তবে দেখা যায় S থেকে J বিন্দু পর্যন্ত মাথাপিছু আয় যখন বাড়ছে, তখন মোট আয় বৃদ্ধির হার থেকে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার বেশি। তার ফলে মাথাপিছু আয় আবার কমে যাবে এবং OS পর্যায়ে আসবে, এই আয় হল জীবনধারণের জন্য সর্বনিম্ন আয় (minimum subsistence level of income)। যতক্ষণ পর্যন্ত মাথাপিছু আয় OM পর্যন্ত না বাড়ছে ততক্ষণ পর্যন্ত আয়-সংকোচনকারী শক্তি (income-depressing force) আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তি (income-raising force) অপেক্ষা বেশি ক্ষমতাসম্পন্ন $\left(\frac{dp}{p} > \frac{dy}{y}\right)$।

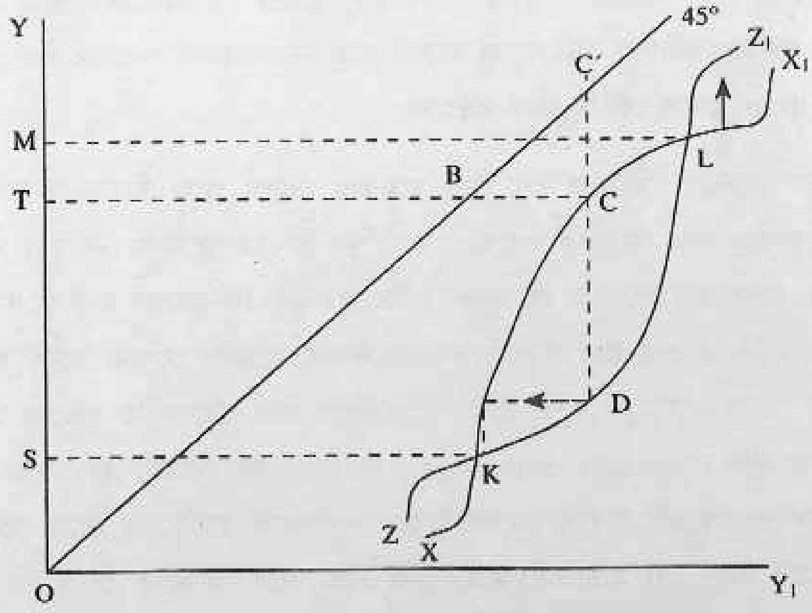
যদি দেশের অর্থব্যবস্থা মাথাপিছু আয়ের পরিমাণ OM অপেক্ষা বেশি বাড়াতে পারে তবে আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তি আয়-সংকোচনকারী শক্তি অপেক্ষা বেশি ক্ষমতাসম্পন্ন হবে এবং সংশ্লিষ্ট দেশটি নিম্নপর্যায়ের ভারসাম্যের ফাঁদ থেকে বেরিয়ে আসতে পারবে। বিনিয়োগ বৃদ্ধির ওপর আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলি নির্ভরশীল। শ্রমিকদের মাথাপিছু উৎপাদনী শক্তির বৃদ্ধি এবং উৎপাদনের ক্ষেত্রে উন্নত কলাকৌশল প্রয়োগ আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তি হিসাবে বিবেচিত হয়। এই চিত্রে U থেকে R পর্যন্ত আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তির প্রভাব বেশি।

স্বল্পোন্নত দেশগুলির অন্যতম বড় সমস্যা হল জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার প্রতিহত করা। যদি জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার প্রতিহত করা যায় এবং দেশের মোট উৎপাদন ও আয় বাড়ানো যায় তবে মাথাপিছু আয় বাড়বে এবং স্বল্পোন্নত দেশের পক্ষে অর্থনৈতিক উন্নয়নের পথেই এগিয়ে যাওয়া সম্ভব হবে। স্বল্পোন্নত দেশের আরেকটি বড় সমস্যা হল দারিদ্র্যের দুষ্টচক্র থেকে বেরিয়ে আসার পথ খোঁজা।

সর্বনিম্ন গুরুত্বপূর্ণ বিনিয়োগ প্রচেষ্টা সম্পর্কে লিবেনস্টিনের মডেল (Leibenstein's Model of Cirtical Minimum Effort) :

লিবেনষ্টিন তাঁর মডেলে দারিদ্র্যের দুষ্টচক্র থেকে উদ্ভূত অবস্থা এবং কিভাবে সর্বনিম্নস্তরে ভারসাম্যের ফাঁদ থেকে বেরিয়ে আসা যায় সে সম্পর্কে আলোচনা করেছেন। আয়-সংকোচনকারী শক্তি এবং আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তি কিভাবে একটি দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নের ভূমিকা গ্রহণ করে তা আলোচনা করেছেন। তাঁর মতে যদি আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলি (income depressing forces) আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তি (income raising forces) অপেক্ষা বেশি ক্ষমতাশালী হয় তবে স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে উন্নয়নের স্তর খুব নীচু থাকে।

লিবেনষ্টিনের মতে আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলির একটি সর্বোচ্চ সীমা থাকবে, কিন্তু আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলির সর্বোচ্চ সীমা থাকতেও পারে, না-ও থাকতে পারে। যদি আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলির সর্বোচ্চ সীমা থাকে, তবে সেই সীমা আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলির সর্বোচ্চ সীমার উপর থাকবে। এখন প্রশ্ন হল, কতটা সর্বনিম্ন বিনিয়োগ করলে আয়বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলিকে আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলির সর্বোচ্চ সীমার উপর রাখা যাবে। লিবেনষ্টিনের গুরুত্বপূর্ণ সর্বনিম্ন প্রচেষ্টা (critical minimum effort) তত্ত্ব অনুযায়ী সেই পরিমাণ বিনিয়োগের দরকার যার ফলে মাথাপিছু আয় এমন একটি স্তরে পৌঁছে যাবে যার পরে মাথাপিছু আয় আর বাড়লেও আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলি আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলি অপেক্ষা বেশি ক্ষমতাসম্পন্ন হবে না। লিবেনষ্টিনের এই তত্ত্বটি নিম্নের চিত্রে দেখানো হয়েছে।



চিত্র—২.৪

এই চিত্রের উল্লম্ব রেখায় (OY) মাথাপিছু আয় এবং প্রণোদিত আয়-হ্রাস (Per Capita income and induced income decline) দেখানো হয়েছে এবং অনুভূমিক রেখায় (OY_1) মাথাপিছু আয় এবং প্রণোদিত আয়-বৃদ্ধি (per capita income and induced income growth) দেখানো হয়েছে।

চিত্রে XX_1 রেখা আয়-বৃদ্ধিকারী প্রভাব এবং ZZ_1 রেখা আয়-সংকোচনকারী প্রভাব বোঝাচ্ছে। এই চিত্রে বিভিন্ন মাথাপিছু আয়ের ক্ষেত্রে XX_1 রেখা এবং ৪৫ ডিগ্রী রেখার মধ্যে অনুভূমিক দূরত্ব (horizontal distance) হল আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তির পরিমাপক। অপরদিকে ZZ_1 রেখা এবং ৪৫ ডিগ্রী রেখার মধ্যে উল্লম্ব দূরত্ব (vertical distance) হল বিভিন্ন মাথাপিছু আয়ের ক্ষেত্রে আয়-সংকোচনকারী শক্তির পরিমাপক। OT আয়ে BC (= CC') হল আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তি এবং C'D (এক্ষেত্রে CC' < C'D) হল আয়-সংকোচনকারী শক্তির পরিমাপক। K বিন্দুতে XX_1 রেখা এবং ZZ_1 রেখা পরস্পরকে ছেদ করেছে। এখানে K বিন্দু OS বা জীবনধারণের জন্য প্রয়োজনীয় আয়ের (subsistence income level) সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ। K বিন্দুর পর XX_1 রেখা ZZ_1 রেখার উপর আছে ; অর্থাৎ, K বিন্দুর পর আয়-বৃদ্ধিকারী প্রভাব আয়-সংকোচনকারী প্রভাব অপেক্ষা বেশি ক্ষমতাশালী। এই দুটি রেখা আবার L বিন্দুতে ছেদ করেছে। L বিন্দুতে মাথাপিছু আয়ের পরিমাণ হল OM এবং এক্ষেত্রে অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি উঁচু পর্যায়ে স্থায়ী হয়েছে। সুতরাং L বিন্দুতে পৌঁছতে গেলে K বিন্দু পৌঁছবার পর থেকে যথেষ্ট পরিমাণে বিনিয়োগ বাড়াতে হবে। K বিন্দুর পর বিনিয়োগ বাড়ার প্রচেষ্টা না থাকলে অর্থনৈতিক সমৃদ্ধি অর্জন করা সম্ভব হয় না। এজন্য প্রয়োজন হলে বৈদেশিক সাহায্যও গ্রহণ করা যেতে পারে। কারণ দেশের আভ্যন্তরীণ সঞ্চয় ও মূলধন সৃষ্টির হার খুব কম থাকলে এবং মূলধন উৎপাদন অনুপাত বেশি থাকলে বৈদেশিক বিনিয়োগের সাহায্য ছাড়া নিম্নস্তরের ভারসাম্যের ফাঁদ (Low Level Equilibrium Trap) থেকে বেরিয়ে আসা সম্ভব নয়।

লিবেনষ্টিনের মডেলের ভিত্তিতে বলা যায় স্বল্পোন্নত দেশের পক্ষে নিম্নস্তরের ভারসাম্যের ফাঁদ থেকে বেরিয়ে আসতে হলে বৈদেশিক সাহায্য ও বৈদেশিক বিনিয়োগের উপর নির্ভর না করা ছাড়া অন্য উপায় থাকে না। কারণ স্বল্প মূলধন ও স্বল্প মূলধন সৃষ্টির হার এবং বিনিয়োগের জন্য প্রয়োজনীয় মূলধনের অভাব, উপযুক্ত প্রযুক্তি ও শ্রমিকদের কারিগরি দক্ষতার অভাব, স্বল্পোন্নত দেশকে বিদেশী সাহায্যের উপর নির্ভরশীল করে তোলে। যেহেতু দেশের ভিতর বিনিয়োগের জন্য প্রয়োজনীয় সঞ্চয়ের অভাব, সেজন্য সঞ্চয় বিনিয়োগের ফাঁক (Saving investment gap) দূর করার জন্য বিদেশী বিনিয়োগের প্রয়োজন হয়। বিদেশী বিনিয়োগ বাড়লে তার প্রভাবে দেশের ভিতর উৎপাদন ও কর্মনিয়োগ বেড়ে যেতে পারে এবং তার ফলে জনপ্রতি আয় এবং প্রণোদিত আয়ের বৃদ্ধি হতে পারে। স্বল্পোন্নত দেশে বৈদেশিক বাণিজ্যে যে ভারসাম্যের অভাব পরিলক্ষিত হয় এবং যে বৈদেশিক মুদ্রাসংকট পরিলক্ষিত হয় তার মোকাবিলা করা এবং সেই সঙ্গে দেশের অর্থনৈতিক স্থিতিশীলতা বজায় রাখার সমস্যা সমাধান করা—উভয় উদ্দেশ্যেই অর্থনীতির কাঠামোগত সামঞ্জস্য (structural adjustment) অর্জন করা জরুরী প্রয়োজন হিসাবে বিবেচিত হয়। এজন্য স্বল্পোন্নত দেশগুলিকে আন্তর্জাতিক অর্থভাণ্ডার (International Monetary Fund)

এবং বিশ্বব্যাংকের (World Bank) সাহায্যের উপর নির্ভর করতে হয়। প্রতিযোগিতামূলক বিশ্ব-বাজারে টিকে থাকতে হলে স্বল্পোন্নত দেশকে বিনিয়োগ বাড়াতে হবে এবং উন্নতমানের রপ্তানি-দ্রব্য উৎপাদন করতে হবে। এজন্যও বিদেশ থেকে সাহায্যের প্রয়োজন হয়। বৈদেশিক বিনিয়োগ এবং বৈদেশিক সাহায্য স্বল্পোন্নত দেশকে শিল্পায়নের পথে নিয়ে যেতে পারে এবং নিম্নস্তরের ভারসাম্যের ফাঁদ থেকে স্বল্পোন্নত দেশকে বের করে আনতে পারে।

২.৫ সারাংশ

১। জনসংখ্যা ও অর্থনৈতিক উন্নয়নের উপর জনসংখ্যা বৃদ্ধির প্রভাব

অর্থনৈতিক উন্নয়নের উপর জনসংখ্যার প্রভাব ইতিবাচক (Positive) এবং নেতিবাচক (Negative) উভয়ই হতে পারে। যদি দেশে শ্রমের যোগান কম থাকে তবে জনসংখ্যা বৃদ্ধি শ্রমের যোগান বাড়িয়ে দেয় এবং সেটা অর্থনৈতিক উন্নয়নের পক্ষে সহায়ক হয়।

দ্বিতীয়ত, জনসংখ্যা বাড়লে ভোগসামগ্রীর জন্য চাহিদা বাড়ে এবং এই দ্রব্যগুলির উৎপাদন বেড়ে যাবার সম্ভাবনা থাকে। যদি দেশে বর্ধিত জনসংখ্যা অনুপাতে জনসংখ্যা বহন করার ক্ষমতা থাকে তবে সেই বর্ধিত জনসমষ্টিকে উপযুক্তভাবে কাজে লাগানোর সম্ভাবনা থাকে।

অপরদিকে জনসংখ্যাবৃদ্ধির নেতিবাচক দিকও আছে। দেশে যদি ইতিমধ্যেই উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি ও বেকার সমস্যা থাকে তবে জনসংখ্যা বৃদ্ধি বেকার সমস্যার তীব্রতা বাড়িয়ে দেয়। জনসংখ্যা বৃদ্ধির ফলে খাদ্যশস্যের জন্য চাহিদাও বাড়ে এবং যদি দেশে খাদ্যশস্যের উৎপাদন জনসংখ্যা বৃদ্ধির অনুপাতে না বাড়ে তবে দেশে খাদ্যসংকটের সৃষ্টি হয় এবং দুর্লভ বৈদেশিক মুদ্রার বিনিময়ে বিদেশ থেকে খাদ্যশস্য আমদানি করতে হয়। এক্ষেত্রে জনসংখ্যা বৃদ্ধি অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রতিবন্ধক হয়।

২। জনসংখ্যার উপর অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রভাব

স্বল্পোন্নত দেশগুলির উপর অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রভাবে প্রথম পর্যায়ে জনবিস্ফোরণ (Population Explosion) দেখা যায়। প্রথম পর্যায় অতিক্রান্ত হলে অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রভাবে জনসাধারণের জীবনযাত্রার মান উন্নত হয়। শিক্ষার সম্প্রসারণ ও জনস্বাস্থ্যের উন্নতির প্রভাবে একদিকে যেমন জন্মহার কমতে থাকে অপরদিকে সেই প্রকার মৃত্যুহারও কমতে থাকে। তবে অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রভাবে জনসংখ্যা কতটা বাড়বে সেটা নির্ভর করে জন্মহার ও মৃত্যুহারের হ্রাসের মধ্যে কতটা ফাঁক থাকে তার উপর। অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রভাবে উপজীবিকার বণ্টন প্রভাবিত হয়, এবং প্রাথমিক উপজীবিকার তুলনায় মাধ্যমিক উপজীবিকা এবং

বিশেষ করে পরিষেবামূলক উপজীবিকা বেশি গুরুত্ব অর্জন করে। অর্থনৈতিক উন্নয়নের ফলে মানবসম্পদে বিনিয়োগ বাড়ে এবং তাতে জনসাধারণের সামাজিক সুরক্ষা বাড়ে ও মাথাপিছু উৎপাদনী শক্তি বাড়ে।

৩। জনসংখ্যাবিষয়ক রূপান্তরের তত্ত্ব

জনসংখ্যাবিষয়ক রূপান্তরে (demographic transition) আমরা তিনটি স্তর দেখতে পাই। পশ্চিম ইউরোপে শিল্পবিপ্লবের আগে বেশ কয়েক শতাব্দী ধরে প্রথম স্তরটি পরিলক্ষিত হয়েছিল। এই স্তরে জন্মহার ও মৃত্যুহার উভয়ই খুব বেশি ছিল এবং এর ফলে জনসংখ্যা বৃদ্ধি খুব ধীর গতিতে এগিয়েছিল। অনেক সময় জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার প্রায় শূন্যের কাছাকাছি ছিল। শিল্পবিপ্লব ও আধুনিকতা শুরু হবার পর জনস্বাস্থ্যের মান উন্নত হয়েছিল ও জনসাধারণের আয়ও বেড়েছিল এর ফলে মৃত্যুহার কমে গিয়েছিল। তবে মৃত্যুহার যতটা কমেছিল সেই অনুপাতে জন্মহার ততটা কেমনি। এর ফলে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার বেশি ছিল। তৃতীয় স্তরে অর্থনৈতিক উন্নয়ন ও আধুনিক জীবনযাত্রার উন্নয়নের ফলে জন্মহার কমতে থাকে। ঊনবিংশ শতাব্দীর শেষের দিকে এটা দেখা যায়। ১৯৭০ সালের পর থেকে পশ্চিম ইউরোপের দেশগুলিতে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার কমতে থাকে। উন্নয়নশীল দেশগুলির ক্ষেত্রে দুটি ভাগ আছে। একটি ক্ষেত্রে ১৯৬০ সালের পর মৃত্যুহার ক্রমশ কমতে থাকে। তবে এই দেশগুলিতে জন্মহার কমতে থাকে ষাটের দশকের মাঝামাঝি থেকে। অপর একটি ক্ষেত্রে মৃত্যুহার কমতে থাকে ষাটের দশকের মাঝামাঝি থেকে। প্রথম ক্ষেত্রের অন্তর্ভুক্ত দেশগুলি তাইওয়ান, দক্ষিণ কোরিয়া, কষ্টারিকা, চিলি, শ্রীলঙ্কা প্রভৃতি। অধিকাংশ স্বল্পোন্নত দেশ ভারত সহ দ্বিতীয় ক্ষেত্রের অন্তর্ভুক্ত।

৪। নিম্নস্তরের ভারসাম্যের ফাঁদ—নেলসন মডেল

নেলসনের মতে স্বল্পোন্নত দেশগুলির নিম্নস্তরে ভারসাম্যের ফাঁদ পরিলক্ষিত হয়। নেলসনের মতে স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলি আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলি অপেক্ষা অধিকতর ক্ষমতাসম্পন্ন। স্বল্পোন্নত দেশে অতিরিক্ত মাথাপিছু আয় মাথাপিছু বিনিয়োগ বাড়ায় না। তাছাড়া এই দেশগুলিতে অনাবাদী চাষের জমি পরিলক্ষিত হয় এবং উৎপাদন পদ্ধতিও খুব অনগ্রসর থাকে। এই দেশগুলির প্রধান সমস্যা হল জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার প্রতিহত করা। যদি জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার প্রতিহত করা যায় এবং দেশের মোট উৎপাদন ও আয় বাড়ানো যায় তবে মাথাপিছু আয় বাড়বে এবং অর্থনৈতিক উন্নয়নের পক্ষে এগিয়ে যাওয়া স্বল্পোন্নত দেশের পক্ষে সম্ভব হবে।

৫। সর্বনিম্ন গুরুত্বপূর্ণ বিনিয়োগ প্রচেষ্টা সম্পর্কে লিবেনস্টিনের মডেল

লিবেনস্টিনের মডেলে দারিদ্র্যের দুষ্টচক্র থেকে উদ্ভূত অবস্থা এবং কিভাবে সর্বনিম্ন স্তরে ভারসাম্যের ফাঁদ থেকে বেরিয়ে আসা যায় তা আলোচিত হয়েছে। লিবেনস্টিনের মতে, আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলির একটি সর্বোচ্চ সীমা থাকবে এবং আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলির সর্বোচ্চ সীমা থাকতে পারে, আবার না-ও থাকতে

পারে। লিবেনস্টিনের গুরুত্বপূর্ণ সর্বনিম্ন প্রচেষ্টা মডেল অনুযায়ী সেই পরিমাণ বিনিয়োগ দরকার যার ফলে মাথাপিছু আয় এমন একটি স্তরে পৌঁছে যাবে যার পরে মাথাপিছু আয় আর বাড়লেও আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলি আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলি অপেক্ষা বেশি ক্ষমতাসম্পন্ন হবে না।

২.৬ অনুশীলনী

ক। নীচের প্রশ্নগুলির সংক্ষিপ্ত উত্তর দিন।

(১) অর্থনৈতিক উন্নয়নের উপর জনসংখ্যা বৃদ্ধির ইতিবাচক প্রভাব কী?

(২) অর্থনৈতিক উন্নয়নের উপর জনসংখ্যা বৃদ্ধির নেতিবাচক প্রভাবের উদাহরণ দিন।

(৩) অর্থনৈতিক উন্নয়ন জনসংখ্যা বৃদ্ধিকে কিভাবে প্রভাবিত করে?

(৪) পশ্চিম ইউরোপের দেশগুলিতে জনসংখ্যা বিষয়ক রূপান্তর কিভাবে হয়েছিল?

(৫) উন্নয়নশীল দেশগুলিতে জনসংখ্যা বিষয়ক রূপান্তর কিভাবে হচ্ছে?

(৬) নিম্নস্তরে ভারসাম্যের ফাঁদ বলতে কী বোঝায়?

(৭) আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলি কী কী?

(৮) গুরুত্বপূর্ণ সর্বনিম্ন প্রচেষ্টায় কী পরিমাণ বিনিয়োগ প্রয়োজন হয়?

(৯) নিম্নস্তরের ভারসাম্যের ফাঁদ থেকে বেরিয়ে আসতে হলে বৈদেশিক সাহায্য ও বৈদেশিক বিনিয়োগের উপর নির্ভর করা যায় কী?

(১০) নেলসনের মতে আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলি কখন সক্রিয় হয়?

খ। শূন্যস্থান পূরণ করুন।

(১) স্বল্পোন্নত দেশে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার প্রথম স্তরে ________ থাকে।

(২) স্বল্পোন্নত দেশে জন্মহার ________ থাকে, মৃত্যুহারও ________ থাকে।

(৩) অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রাথমিক স্তরে জন্মহার ________ থাকে।

(৪) অর্থনৈতিক উন্নয়নের ফলে জীবনযাত্রার মান উন্নত হলে জন্মহার ________ এবং মৃত্যুহার ________ ।

(৫) নেলসনের মতে অতিরিক্ত মাথাপিছু আয় মাথাপিছু বিনিয়োগ ________ ।

(৬) লিবেনস্টিনের মতে স্বল্পোন্নত দেশের পক্ষে নিম্নস্তরেরর ভারসাম্যের ফাঁদ থেকে বেরিয়ে আসতে হলে বৈদেশিক ________ প্রয়োজন।

(৭) স্বল্পোন্নত দেশের অন্যতম বড় সমস্যা হল জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার ________ করা।

(৮) জনসংখ্যা বিষয়ক রূপান্তরে ________ স্তর দেখা যায়।

(৯) জনসংখ্যা বৃদ্ধির নেতিবাচক প্রভাবে অর্থনৈতিক উন্নয়নের ক্ষেত্রে ________ সৃষ্টি হয়।

(১০) জনসংখ্যা বৃদ্ধির ইতিবাচক প্রভাব অর্থনৈতিক উন্নয়নের ক্ষেত্রে ________ হয়।

গ। বড় প্রশ্ন

(১) জনসংখ্যা বৃদ্ধি ও অর্থনৈতিক উন্নয়নের মধ্যে সম্পর্ক আলোচনা করুন।

(২) জনসংখ্যা বৃদ্ধি কী অর্থনৈতিক উন্নয়নের ক্ষেত্রে প্রতিবন্ধক হয়? যুক্তি দিয়ে আলোচনা করুন।

(৩) অর্থনৈতিক উন্নয়ন জনসংখ্যাকে কিভাবে প্রভাবিত করে?

(৪) জনসংখ্যা বিষয়ক রূপান্তরে তত্ত্বটি আলোচনা করুন।

(৫) নিম্নস্তরের ভারসাম্যের ফাঁদ সম্পর্কে নেলসন প্রদত্ত মডেলটি ব্যাখ্যা করুন।

(৬) সর্বনিম্ন গুরুত্বপূর্ণ বিনিয়োগ প্রচেষ্টা সম্পর্কে লিবেনষ্টিনের মডেল আলোচনা করুন।

(৭) নিম্নস্তরের ভারসাম্যের ফাঁদ থেকে বেরিয়ে আসা অথবা সর্বনিম্ন গুরুত্বপূর্ণ বিনিয়োগের প্রয়াস চালাবার ক্ষেত্রে বৈদেশিক সাহায্য বা বৈদেশিক বিনিয়োগের কোনো ভূমিকা আছে কী?

(৮) আয়-বৃদ্ধিকারী শক্তিগুলি এবং আয়-সংকোচনকারী শক্তিগুলি কিভাবে সর্বনিম্ন গুরুত্বপূর্ণ বিনিয়োগ প্রচেষ্টাকে প্রভাবিত করে? চিত্রের সাহায্যে এক্ষেত্রে লিবেনষ্টিন কর্তৃক প্রদত্ত মডেলটি আলোচনা করুন।

২.৭ গ্রন্থপঞ্জী

1. Todaro M. : Economics For A Developing Economy. (Longman—London and New York, 1982).
2. Thirlwall A.P. : Growth And Development With Special Reference to Developing Economics (ELBS/MacMillan, 1983).
3. Myint H. : The Economics of the Developing Countries. (Indian Edition, B. I. Publications, New Delhi, 1981).
4. Nelson R : "A Theory of the Low Level Equilibrium Trap in Underdeveloped Countries" : American Economic Review, December 1956.
5. Leibenstein H. : Economic Backwardness and Economic Growth. (New York : Wiley, 1957).

একক ৩ □ কর্মসংস্থান

গঠন

৩.০ উদ্দেশ্য

ক্ল্যাসিকাল অর্থনীতিবিদরা সমাজে পূর্ণ নিয়োগ বর্তমান আছে বলে ধরে নিলেও বাস্তবে সম্ভব হয় না। এই এককটি পড়লে বোঝা যাবে বেকারত্বের স্বরূপ কী? স্বল্পোন্নত দেশগুলির বৈশিষ্ট্যও প্রসঙ্গত আলোচিত হয়েছে। ছদ্মবেশী বেকারত্বের ধারণা ও পরিমাপ এই এককটি থেকেই করতে পারবেন। অমর্ত্য সেনের মডেলটি এক্ষেত্রে বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ।

৩.১ প্রস্তাবনা

ক্ল্যাসিক্যাল অর্থনীতিবিদরা সমাজে পূর্ণ নিয়োগ (Full Employment) বর্তমান আছে বলে ধরে নিতেন। জে. বি. সে (J.B.Say) এবং তাঁর অনুগামীদের মতে "যোগান তার নিজের চাহিদা সৃষ্টি করে" (Supply creates its own demand)—অর্থাৎ অর্থনীতিতে সামগ্রিক যোগান ও সামগ্রিক চাহিদার ভারসাম্য বজায় থাকে এবং পূর্ণ নিয়োগ (Full Employment) সর্বদা বজায় থাকে, কিন্তু কেইনসীয় অর্থনীতিতে পূর্ণনিয়োগের তত্ত্বটি গৃহীত হয়নি ; সঞ্চয় ও বিনিয়োগের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে দেশে আয় ও নিয়োগের পরিবর্তন হয়। পূর্ণনিয়োগ অবস্থা থেকে সরে যাবার কারণ অথবা বিকল্পভাবে বেকারত্বের কারণ হল, কার্যকর চাহিদার ঘাটতি (Deficiency in effective demand), উন্নত দেশগুলিতে যে বেকারত্ব দেখা যায়, স্বল্পোন্নত দেশগুলির বেকারত্বের স্বরূপ একটু আলাদা।

৩.২ স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে বেকারত্বের স্বরূপ (Nature of Unemployment in Less Developed Countries)

স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে বেকারত্বের সমস্যা খুবই প্রকট। 'বেকার' বলতে সাধারণ অর্থে আমরা বুঝি এমন লোক যার কোন কাজ নেই। অনেকে হয়ত ইচ্ছা করেই এমন কোন কাজ করে না যার মাধ্যমে অর্থোপার্জন হতে পারে, এই ধরনের বেকার অবস্থাকে স্বেচ্ছামূলক বেকারত্ব (Voluntary Unemployment) বলা হয়। প্রকৃত বেকার হচ্ছে এমন লোক যার কাজ করার প্রয়োজন এবং ইচ্ছা দুই-ই আছে, অথচ কোন কাজই সে পায় না। প্রচলিত মজুরি হারে কাজ করতে ইচ্ছুক অথচ কোন কাজই কেউ পায় না এই ধরনের বেকার অবস্থাকে অনিচ্ছাকৃত বেকার অবস্থা (Involuntary Unemployment) বলা হয়। অমর্ত্য সেনের মতে বেকারত্বের মূল্যায়ন করতে গেলে তিনটি দৃষ্টিভঙ্গী থেকে সমস্যাটি বিবেচনা করা যেতে পারে[১]—যথা, (১) আয়ভিত্তিক দৃষ্টিভঙ্গী (Income Approach) (২) বেকারত্বের স্বীকৃতিভিত্তিক দৃষ্টিভঙ্গী (Recognition Approach) এবং (৩) উৎপাদনভিত্তিক দৃষ্টিভঙ্গী (Production Approach).

কোনো কোনো স্বল্পোন্নত দেশে, যেমন ভারতে, সেন্সাস কমিশন বেকারত্বের গভীরতা বিচার করার জন্য আয়ভিত্তিক বিশ্লেষণ (Income Approach) এবং স্বীকৃতিভিত্তিক বিশ্লেষণ (Recognition Approach) অনুসরণ করে থাকেন। অমর্ত্য সেনের মতে এই বিশ্লেষণের মাধ্যমে বেকরত্বের গভীরতা

১। Amartya Sen—Employment, Technology and Development. (O.U.P. 1975)

ঠিকভাবে মূল্যায়িত হয় না। একজন লোক যদি সারাদিন পারিবারিক খামারে দু ঘণ্টা কাজ করে এবং তার বিনিময়ে পরিবারের আয়ের অংশগ্রহণ করে তবে আয়ভিত্তিক বিশ্লেষণ অনুযায়ী সে বেকার নয়। আবার কেউ হয়ত আদৌ পারিবারিক খামারে কাজ করে না, অথচ তার কাজ খুঁজে নেওয়ারও আগ্রহ নেই বা যে কাজ চায় না, তবে তাকেও বেকার বলা যায় না, আয়ের দিক থেকে বিবেচনা করলে যারা কাজ না করলে পারিবারিক আয়ের অংশ পায় না, তাদেরই কাজে নিযুক্ত বলে ধরে নেওয়া হয়। তার মানে এই নয় যে কাজ করছে বলে তারা আয়ের অংশ পাচ্ছে—প্রকৃত বিচার্য বিষয় হল, আয়ের যে অংশটি তারা পাচ্ছে সেটা কী তাদের কাজের অনুপাত পাচ্ছে? অথবা তারা কাজ করছে বলেই কী কাজের অনুপাতে আয়ের অংশ পাচ্ছে?

স্বীকৃতিভিত্তিক বিশ্লেষণ (Recognition Approach) অনুযায়ী কোন লোক হয়ত মনে করছে যে সে বেকার এবং কাজের জন্য যে চেষ্টা চালিয়ে যাচ্ছে (not working and seeking work), কাজের আশা থাকলেই সে কাজের জন্য চেষ্টা করবে। এমনও হতে পারে যে সেই লোক বুঝতে পারছে যে সে বেকার অথচ তার যোগ্যতা অনুযায়ী কাজ পাবার আশা নেই বলে কাজের চেষ্টা করছে না। এক্ষেত্রে তাকে বেকার বলেই ধরে নিতে হবে। কিন্তু ভারতের সেন্সার কমিশনের ব্যাখ্যায় যেহেতু সেই লোক কাজের জন্য চেষ্টা করছে না (যদিও সে কাজ করছে না) সেজন্য বেকারের তালিকায় তার নাম থাকবে না। অমর্ত্য সেন এই ধরনের বিশ্লেষণকে সংকীর্ণ বলে বিবেচনা করেছেন, তাঁর মধ্যে উৎপাদনভিত্তিক বিশ্লেষণের (Production Approach) মাধ্যমে বেকারত্বের গভীরতা বিচার করা উচিত। বিশেষ করে ছদ্মবেশী বেকারত্ব (Disguised Unemployment) উৎপাদনভিত্তিক বিশ্লেষণের উপর ভিত্তিশীল। কারণ, উৎপাদনের দিক থেকে বিচার করলে প্রচ্ছন্ন বেকারত্ব বা ছদ্মবেশী বেকারত্ব তখনই আছে বলে ধরে নিতে হবে যখন দেখা যায় মূলধনের পরিমাণ পরিবর্তন না করে কৃষিক্ষেত্র থেকে শ্রমশক্তি প্রত্যাহার করে নিলেও উৎপাদন কমে না।

৩.২.১ স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে বিভিন্ন ধরনের বেকারত্ব (Different Types of Unemployment in Less Developed Countries)

স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে বিভিন্ন ধরনের বেকারত্ব দেখা যায়—যেমন, সংগঠনজনিত বা পরিকাঠামোজনিত বেকারত্ব (Structural Unemployment), সংঘাতজনিত বেকারত্ব (Frictional Unemployment), সাময়িক বেকারত্ব (Casual Unemployment), মন্দা বা বাণিজ্যচক্রজনিত বেকারত্ব (Cyclical Unemployment), মরসুমী বা ঋতুগত বেকারত্ব (Seasonal Unemployment), খোলা বেকারত্ব (Open Unemployment) এবং ছদ্মবেশী বেকারত্ব (Disguised Unemployment)।

৩.২.২ সংগঠনজনিত বেকারত্ব (Structural Unemployment)

সংগঠনজনিত বেকারত্ব দুটি কারণে সৃষ্টি হতে পারে—(১) চাহিদার স্থায়ী পরিবর্তন (Permanent change in demand), এবং (২) শিল্পে প্রযুক্তিগত উন্নয়ন (technical progress)। চাহিদার পরিবর্তন হলে উৎপাদন কাঠামোরও পরিবর্তন হয়। তাঁতের কাপড়ের চাহিদার স্থলে যদি মিলের কাপড়ের চাহিদা বাড়ে, তবে তাঁতশিল্পের শ্রমিকরা বেকার হবে। আবার সাধারণ সূতীর শার্টের বদলে যদি টেরিলিন এবং নাইলন শার্টের জন্য স্থায়ী চাহিদার সৃষ্টি হয়, তবে প্রথম শ্রেণীর শিল্প বিশেষ ক্ষতিগ্রস্থ হবে এবং সেখানে বেকার অবস্থার সৃষ্টি হবে। বিদেশী প্রতিযোগিতার ফলে দেশের শিল্প-কাঠামোর পরিবর্তন হতে পারে অথবা বিদেশের চাহিদা কমে গেলে দেশের শিল্প ক্ষতিগ্রস্ত হতে পারে। বিভিন্ন শিল্পে আধুনিক যন্ত্রপাতি বেশি করে প্রবর্তন করলে অনেক শ্রমিক ছাঁটাই করার প্রয়োজন হয়। শিল্পের কলাকৌশলের উন্নয়নের ফলে শিল্প আধুনিকীকরণের অবশ্যম্ভাবী ফল হিসাবে বেকার-সমস্যার সৃষ্টি হয়। শ্রম-সঞ্চয়ী (labour-saving) এবং মূলধন-প্রধান (capital-intensive) উৎপাদন পদ্ধতি প্রচলনের ফলে অনেকে বেকার হয়ে যেতে পারে। এটাকে প্রযুক্তিগত পরিবর্তনের ফলে বেকার অবস্থা (Technological Unemployment) অথবা কাঠামো-জনিত বেকার অবস্থা (Structural Unemployment) বলা হয়। সংগঠনজনিত বেকারত্বের প্রতিকারকল্পে উৎপাদিত সামগ্রীর জন্য যাতে নূতন চাহিদার সৃষ্টি হয়, সেদিকে বিশেষ দৃষ্টি দেওয়া উচিত। যদি চাহিদা বাড়ে তবে উৎপাদনের পরিমাণও বাড়বে এবং তাতে নূতন লোকের কাজের ব্যবস্থা হতে পারে। বেকার-সমস্যা তীব্র হলে আধুনিক শিল্পব্যবস্থায় যতদূর সম্ভব শ্রম-প্রধান উৎপাদন-পদ্ধতি (labour-intensive method of production) অবলম্বন করা উচিত। কিন্তু এজন্য উন্নত ধরনের যন্ত্রপাতি ব্যবহারের প্রয়োজনীয়তা অস্বীকার করা যায় না। সেজন্য নূতন যন্ত্রপাতি প্রবর্তনের মাধ্যমে যে সকল শ্রমিক ছাঁটাই হয়, তারা যাতে নূতন শিল্প-প্রতিষ্ঠানে কাজ পায় সেই অবস্থার সৃষ্টি করতে হবে, এবং সে অবস্থার সৃষ্টি তখনই হবে যখন নূতন নূতন চাহিদার সৃষ্টি হবে এবং উৎপাদন-বৃদ্ধির জন্য সর্বাত্মক প্রচেষ্টা চালানো হবে। এভাবে যন্ত্রপাতিজনিত এবং কাঠামোজনিত বেকার-সমস্যার (Technological and Structural Unemployment) সমাধান করা যেতে পারে। বাজারে শ্রমের চাহিদা ও যোগানের সমতা আনার জন্য অধিক সংখ্যক কর্মবিনিময় সংস্থা (Employment Exchanges) স্থাপন করে তার মারফৎ বিভিন্ন শ্রমিক নিয়োগ করা যেতে পারে।

৩.২.৩ সংঘাতজনিত বেকারত্ব (Frictional Uuemployment)

সংঘাতজনিত বেকারত্বের সৃষ্টি অনেকগুলি কারণে হতে পারে। চাহিদার স্থায়িত্বের অভাব হলে, অথবা চাহিদার সাময়িক পরিবর্তনের জন্য শ্রমিকরা কিছু সময়ের জন্য বেকার হয়ে যেতে পারে। সিমেন্টের অভাব হলে রাজমিস্ত্রীরা বেকার হয়ে যেতে পারে। কাজের সংগঠনে ত্রুটি থাকলে অথবা যন্ত্রপাতি বিকল হলেও

শ্রমিকরা বেকার হয়ে যেতে পারে। কোন চুক্তির মেয়াদ শেষ হলে নূতন চুক্তি না হওয়া পর্যন্ত কন্ট্রাক্টাররা বেকার থাকতে পারে। অনেক সময় হয়ত শ্রমিকরা নিয়োগের সম্ভাবনা অথবা সুযোগ-সুবিধা সম্পর্কে অজ্ঞ থাকে, অথবা শ্রমিকদের গতিশীলতার অভাব থাকে (অর্থাৎ একস্থান ছেড়ে শ্রমিকরা অন্যত্র যেতে চায় না) তখনও বেকার অবস্থার সৃষ্টি হতে পারে। উল্লিখিত সবগুলি কারণেই যে বেকার অবস্থার সৃষ্টি হয়, তাকে সংঘাতজনিত বেকার অবস্থা (Frictional Unemployment) বলা হয়।

সংঘাতজনিত বেকার-অবস্থার প্রতিবিধান করার জন্য এমন ব্যবস্থা অবলম্বন করা উচিত যাতে শ্রমের গতিশীলতা বাড়ে। নিয়োগ সংস্থা বা কর্মবিনিময় সংস্থার (Employment Exchanges) মাধ্যমে শ্রমিকদের চাকুরির সুযোগ-সুবিধা ব্যবস্থা করে দিলে এবং শ্রমিকদের গতিশীলতা বাড়াবার জন্য কারিগরি শিক্ষাপ্রদানের ব্যবস্থা করলে এই বেকার অবস্থা প্রশমিত হয়।

৩.২.৪ সাময়িক বেকারত্ব (Casual Unemployment)

সাময়িকভাবে উৎপাদনের কাজ ব্যাহত হলে উৎপাদনের কাজে নিযুক্ত শ্রমিকরা সাময়িকভাবে বেকার হয়ে যেতে পারে। কৃষিক্ষেত্রে এমন অনেক কৃষিশ্রমিক আছে যাদের বাঁধাধরা কাজ নেই। যখন জমির মালিক তাদের কাজের জন্য ডেকে পাঠায় তখন তারা কাজ করতে যায়। আবার দুই-তিনদিন কাজ করার পর হয়ত তাদের আবার কয়েকদিন কাজের সুযোগ না-ও থাকতে পারে। রাজমিস্ত্রীদের ক্ষেত্রেও এ ধরনের অনিয়মিত কাজ দেখা যায়। এভাবে সাময়িক বেকারত্বের সৃষ্টি হয়।

যদি শ্রমিকদের জন্য সারা বছর ধরে কাজের ব্যবস্থা করা সম্ভব হয়, তবেই সাময়িক বেকারত্বের প্রতিবিধান করা যেতে পারে। অনেকক্ষেত্রে মরসুমী-বেকারত্বও সাময়িক বেকারত্ব হিসাবে বিবেচিত হয়।

৩.২.৫ বাণিজ্যচক্রজনিত বেকারত্ব বা উৎপাদনে মন্দাজনিত বেকারত্ব (Cyclical Unemployment)

আমরা দেখতে পাই, যখন মন্দার সৃষ্টি হয় তখন আয় এবং ক্রয়ক্ষমতার ঘাটতি থাকায় ক্রেতাদের কার্যকর চাহিদার ঘাটতি (deficiency in effective demand) দেখা যায়। কার্যকর চাহিদার ঘাটতি থাকায় উৎপাদনকারী কিংবা বিনিয়োগকারী উৎপাদন অথবা বিনিয়োগ বাড়াবার প্রেরণা পায় না। দেশের অর্থনৈতিক সম্পদ তখন অব্যবহৃত থেকে যায়। তখন জাতীয় আয় এবং নিয়োগ কমে যায়। কারণ ব্যবসায়ে লাভের আশা কম থাকায় বিনিয়োগকারীর কাছে মূলধনের প্রান্তিক দক্ষতা (Marginal Efficiency of Capital) কমে যায়, এবং আয়ের স্তর কম থাকায় ভোগ-ব্যয়ের পরিমাণ (consumption expenditures) কমে যায়। দেখা যাচ্ছে, বাণিজ্যচক্রজনিত বেকার অবস্থা (Cyclical Unemployment) হচ্ছে প্রকৃতপক্ষে কার্যকর চাহিদার ঘাটতিজনিত বেকার অবস্থা।

বিনিময়ের ঘাটতি অথবা অলাভজনক বিনিয়োগ থেকেই মন্দাজনিত বেকারত্বের সৃষ্টি হয় বলে এই বেকারত্বের প্রতিবিধানকল্পে সরকারি ও বেসরকারি ক্ষেত্রে বিনিয়োগ বাড়াবার প্রয়োজন হয়, কেন্দ্রীয় ব্যাঙ্কেও এমন একটি আর্থিক নীতি (Monetary Policy) এবং সরকারকেও এমন একটি আয়-ব্যয় নীতি অনুসরণ করতে হয় যাতে বিনিয়োগ বাড়ে।

৩.২.৬ মরসুমী বা ঋতুগত বেকারত্ব (Seasonal Unemployment)

অধিকাংশ অনগ্রসর দেশে কৃষকদের সারা বছর কাজ করতে হয় না। কৃষিক্ষেত্র থেকে কোন ফসল তোলার আগে কৃষিশ্রমিকদের বছরে প্রায় তিনমাস কোন কাজ থাকে না ; কারণ ঐ সময়ে কৃষি উৎপাদনের জন্য তাদের জমিতে কাজ করতে হয় না। এ ধরনের বেকারত্বকে মরসুমী বা ঋতুগত বেকারত্ব বলা হয়। শৈলাবাসগুলিতে শীতকালে পর্যটকদের ভীড় কম থাকে ; তখন ঐ অঞ্চলের বহু লোককে কর্মহীন হয়ে থাকতে হয়।

যারা বছরের একটি ঋতুতে কাজের মধ্যে সক্রিয়ভাবে যুক্ত না থেকেও পারিবারিক খামারের শ্রমিক হিসাবে যুক্ত, তারাও একধরনের প্রচ্ছন্ন বেকারত্বের পর্যায়ভুক্ত, ঋতুগত বেকারত্বের ফলেও উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির সৃষ্টি হয় এবং ছদ্মবেশী বেকারত্বের সঙ্গে এটা নিবিড়ভাবে সম্পর্কযুক্ত। গ্রামীণ কুটির শিল্প ও ক্ষুদ্রশিল্পগুলিতে এধরনের বেকারদের জন্য পরিপূরক কাজের (subsidiary occupation) ব্যবস্থা করতে পারলে উদ্বৃত্ত শ্রমের সদ্ব্যবহার করা সম্ভব হয়।

৩.২.৭ খোলা বেকারত্ব (Open Unemployment)

খোলা বেকারত্ব বিভিন্ন ধরনের হতে পারে। শিক্ষিত যুবকরা যখন নিজেদের শিক্ষার মান অনুযায়ী চাকরি পায় না তখন খোলা বেকারত্ব দেখা যায়। আবার যখন গ্রাম থেকে উদ্বৃত্ত শ্রমিকরা যখন আয় ও কাজের প্রত্যাশায় শহরে এসে ভীড় করে, অথচ শহরে কাজের সুযোগ তারা পায় না, তখনও খোলা বেকারত্ব দেখা যায়। আবার কোন শিল্পের জন্য যে ধরনের শ্রমিক প্রয়োজন, সেই ধরনের শ্রমিকের যোগান যদি উদ্বৃত্ত থাকে, তবে সেটাও খোলা বেকারত্ব। দেশের শিল্প-কাঠামোর জন্য যত সংখ্যক ইঞ্জিনিয়ার প্রয়োজন, তার চেয়ে যদি বেশি পরিমাণ ইঞ্জিনিয়ারের যোগান থাকে, তবে সেক্ষেত্রেও খোলা বেকারত্বের সৃষ্টি হয়। শিক্ষাব্যবস্থায় পরিকল্পনার অভাব খোলা বেকারত্বের জন্য অনেকটাই দায়ী। স্বনিয়োজিত কর্মসংস্থানের মাধ্যমে খোলা বেকারত্ব এবং ঋতুগত বেকারত্ব উভয়েরই প্রতিকার করা সম্ভব হয়। অবশ্য যদি স্বনিয়োজিত কর্মসংস্থানের জন্য সুযোগ ও প্রয়োজনীয় অর্থ সরবরাহ থাকে তবেই এটা সম্ভব।

৩.৩ ছদ্মবেশী বেকারত্ব (Disguised Unemployment)

স্বল্পোন্নত দেশে জনসংখ্যার চাপের পরিপ্রেক্ষিতে কৃষিক্ষেত্রে ছদ্মবেশী বেকারত্ব বা প্রচ্ছন্ন বেকারত্বের তত্ত্বটি প্রয়োগ করা হয়। এই ধারণাটির মূল কথা হল, স্বল্পোন্নত জনাকীর্ণ দেশগুলিতে কৃষিক্ষেত্রে অথবা জমির উপর

জনাধিক্যের চাপ বাড়লে শ্রমের প্রান্তিক উৎপাদনীশক্তি শূন্যে অথবা শূন্যের কাছাকাছি খুব নিম্ন পর্যায়ে নেমে আসে। সেক্ষেত্রে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তিকে কৃষিক্ষেত্র থেকে সরিয়ে অন্যত্র উৎপাদনমূলক কাজে লাগানো যায়। বিশেষ করে রাস্তা নির্মাণ, জলসেচের কাজ ও মূলধনী দ্রব্য নির্মাণের ক্ষেত্রে এই উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তিকে কাজে লাগানো যেতে পারে। যদি মূলধন কাঠামো অপরিবর্তিত থাকে এবং শ্রমিকদের কর্ম-নৈপুণ্য অপরিবর্তিত থাকে, তবে জমি থেকে কিছু শ্রমশক্তিকে সরিয়ে আনলেও যদি কৃষির উৎপাদন না কমে তবে বুঝতে হবে যে, শ্রমশক্তিকে সরিয়ে আনা হয়েছে সেটা ছিল উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি এবং উদ্বৃত্ত শ্রমিকরা এক্ষেত্রে প্রচ্ছন্নভাবে বেকার ছিল। সুতরাং বলা চলে কৃষিক্ষেত্রে যদি শ্রমিকের প্রান্তিক উৎপাদন শূন্য হয় তবে সেক্ষেত্রে উদ্বৃত্ত শ্রমিককে কৃষিক্ষেত্র থেকে সরিয়ে আনলেও কৃষি উৎপাদন কমবে না। কিন্তু যদি কৃষিক্ষেত্রে উদ্বৃত্ত শ্রমিকের প্রান্তিক উৎপাদনী শক্তি শূন্য না-ও হয় তবুও সেই শ্রমশক্তি জীবনধারণোপযোগী কৃষিক্ষেত্রে (subsistence agriculture) যা উৎপাদন করে তার চেয়ে বেশি ভোগ করে। অর্থাৎ, উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির ভোগ, [যা তার গড় উৎপাদনের (average product) সমান] প্রান্তিক উৎপাদনের চেয়ে বেশি। সুতরাং উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তিকে কৃষিক্ষেত্র থেকে সরিয়ে আনলে মাথাপিছু ভোগের পরিমাণ না কমিয়েও কিছু উদ্বৃত্ত খাদ্য পাওয়া যেতে পারে। যেসব শ্রমিকদের উৎপাদনমূলক কাজের জন্য কৃষিক্ষেত্র থেকে সরিয়ে নেওয়া হয়েছে তাদের খাওয়াবার জন্য সেই উদ্বৃত্ত খাদ্য ব্যবহার করা যেতে পারে। এজন্য ছদ্মবেশী বেকারত্বের মধ্যে সঞ্চয় লুকিয়ে আছে (concealed savings) এবং এই সঞ্চয়কে নিঃখরচায় (costless way) অর্থনৈতিক উন্নয়নের কাজে লাগানো যেতে পারে। ধারণাগত ব্যাখ্যার দিক দিয়ে ছদ্মবেশী বেকারত্বের ব্যাখ্যায় একটি দুর্বলতা আছে, এক ইউনিট শ্রমের শূন্য প্রান্তিক উৎপাদন (zero marginal product of a unit of labour) এবং একজন শ্রমিকের প্রান্তিক উৎপাদনের (marginal product of a worker) মধ্যে পার্থক্য বোঝানো সম্ভব হয় না। ধরা যাক, কোন পরিবারে মোট ৩০ ঘণ্টার কাজ হয়। ধরে নেওয়া যাক, ৩০ তম ঘণ্টার প্রান্তিক উৎপাদন শূন্য। পরিবারে যদি ছজন শ্রমিক থাকে তবে মোট উৎপাদনের ভিত্তিতে প্রত্যেককে ৫ ঘণ্টা করে কাজ করতে হয়। এখন উদ্বৃত্ত শ্রমিককে কৃষিক্ষেত্র থেকে সরিয়ে নিলেও পরিবারের অন্য শ্রমিকরা এক ঘণ্টা করে বেশি কাজ করলেই ৩০ ঘণ্টার কাজ হতে পারে। এজন্য কৃষি-উৎপাদন কমবে না। এক্ষেত্রে উৎপাদন পদ্ধতিরও পরিবর্তন হচ্ছে না। প্রত্যেক শ্রমিক এখন যা উৎপাদন করে তার জন্য ছয় ঘণ্টা কাজ করতে হয় ; অথচ যখন ছয়জন শ্রমিক কাজ করত তখন তাদের ৫ ঘণ্টা করে কাজ করতে হত। দেখা যাচ্ছে, শ্রমিকরা প্রত্যেকে যখন ৬ ঘণ্টা কাজ করতে পারে, তখন ছয়জন শ্রমিক রেখে প্রত্যেককে ৫ ঘণ্টা করে কাজ করতে দেওয়ার অর্থই হল একজন শ্রমিক সেক্ষেত্রে উদ্বৃত্ত ছিল।

অনেক সময় যুক্তি দেখানো হয় যে ছদ্মবেশী বেকারত্ব ব্যবহারের সামাজিক ব্যয় হল শূন্য। এক্ষেত্রে এই যুক্তি প্রতিষ্ঠিত করার ক্ষেত্রে অসুবিধার সৃষ্টি হয়। যারা প্রচ্ছন্নভাবে বেকার তাদের জমি থেকে সরিয়ে নেওয়ার পর অবশিষ্ট শ্রমিকদের কাজের ঘণ্টা বাড়িয়ে কৃষি-উৎপাদন অপরিবর্তিত রাখা হয় তাদের উদ্বৃত্ত খাদ্যের

বিনিময়ে উৎপাদিত ভোগ-সামগ্রী দিতে হয় এবং এজন্য অতিরিক্ত ভোগ-সামগ্রী উৎপাদন করার যে সম্পদের প্রয়োজন সেটাই হল কৃষি উৎপাদন অপরিবর্তিত রাখার সামাজিক ব্যয় (social cost)।

ছদ্মবেশী বেকারত্ব প্রকৃতই ব্যয়মুক্ত (costless) কিনা সে বিষয়ে প্রশ্ন তোলা যেতে পারে। ছদ্মবেশী বেকারত্ব দূর করার জন্য যে উদ্বৃত্ত শ্রমিকদের কৃষিক্ষেত্র থেকে সরানো হয়, তাদের শিল্প অথবা পরিষেবা ক্ষেত্রে কাজে নিযুক্ত করতে হলে অতিরিক্ত বিনিয়োগের মাধ্যমে কর্মসংস্থানের সৃষ্টি করতে হয়। তাছাড়া যার এজন্য গ্রাম থেকে শহরে চলে আসছে তাদের আবাসনের ব্যবস্থা ও উৎপাদন করার সরঞ্জামের ব্যবস্থা করতে হয়। তাছাড়া তাদের ক্ষেত্রে অতিরিক্ত ভোগের (extra consumption) সৃষ্টি হয় এবং তাদের মজুরি দিতে হয়, এর ফলে সমাজের মোট ভোগ ব্যয় বেড়ে যায়। যেসব দেশে খাদ্যের যোগান সীমিত, (যেমন ভারতে) সেসব দেশে এভাবে সৃষ্ট সামাজিক ব্যয় বিশেষভাবে অনুভূত হয়। প্রচ্ছন্নভাবে বেকার এই উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির জন্য অতিরিক্ত কর্মসংস্থানের ব্যবস্থা করা তখনই যুক্তিযুক্ত হয় যখন নূতন সৃষ্ট কাজের সুযোগে উৎপাদন বৃদ্ধির পরিমাণ যা হবে তার সাহায্যে এই অতিরিক্ত ভোগজনিত ব্যয় নির্বাহ করা সম্ভব হবে।

লুইসের তত্ত্ব অনুসরণ করে বলা যায় নির্মাণ শিল্পের ক্ষেত্রে (Manufacturing sectors) কৃষির ছদ্মবেশী বেকারত্ব সীমাহীন শ্রমের যোগান (unlimited supplies of labour) সৃষ্টি করে থাকে। লুইসের তত্ত্বে চিরাচরিত কৃষিক্ষেত্রে এবং হস্তজাত শিল্পে মজুরি হার স্থির (constant wage rate) থাকায় নির্মাণ শিল্পের উৎপাদকরা সেই স্থির মজুরির ভিত্তিতে উদ্বৃত্ত শ্রমিকদের নিয়োগ করে মুনাফা অর্জন করবে এবং এর ফলে অর্থনৈতিক উন্নয়নের গতি বাড়বে। এক্ষেত্রে ছদ্মবেশী বেকারত্ব পরোক্ষভাবে সঞ্চয় ও বিনিয়োগ বৃদ্ধিতে সাহায্য করে। এখন প্রশ্ন হল, স্থির মজুরি হারে সীমাহীন উদ্বৃত্ত শ্রমিক (ছদ্মবেশী বেকারত্ব দূর করার জন্য কৃষিক্ষেত্র থেকে নির্মাণ শিল্পে নিয়ে আসায়) নিয়োগ করলে শিল্পোৎপাদন ও উৎপাদকের মুনাফা কতটা বাড়বে তা নির্ভর করবে এই শ্রমিকদের উৎপাদনী শক্তি বাড়ানোর ক্ষেত্রে নির্মাণ শিল্পের সামর্থ্যের ওপর।

যদি নির্মান শিল্পের পক্ষে সব উদ্বৃত্ত শ্রমিকদের কাজে নিয়োগ করা সম্ভব না হয়, তবে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি গ্রাম থেকে শহরে চলে এসে খোলা বেকারত্বের (open unemployment) সমস্যায় ভুগবে। গ্রামাঞ্চলে যেটা ছিল প্রচ্ছন্ন বেকার সমস্যা শহরাঞ্চলে সেটা হবে খোলা বেকার সমস্যা। বহু স্বল্পোন্নত দেশে এভাবে গ্রাম থেকে শহরে উদ্বৃত্ত শ্রমিক চলে আসায় খোলা বেকার সমস্যার সৃষ্টি হয়েছে।

৩.৩.১ ছদ্মবেশী বেকারত্বের পরিমাপ (Measurement of Disguised Unemployment)

ছদ্মবেশী বেকারত্বের পরিমাপ দুভাবে করা যেতে পারে। এক্ষেত্রে প্রত্যক্ষ পন্থা (Direct Method) হল, উৎপাদন ক্ষেত্র থেকে শ্রমশক্তির কিছু অংশ তুলে নিয়ে উৎপাদনের ক্ষেত্রে তার প্রতিক্রিয়া লক্ষ্য করা। স্যুল্‌জ (Schultz) এই প্রত্যক্ষ পন্থার মাধ্যমে ছদ্মবেশী বেকারত্ব পরিমাপ করার চেষ্টা করেছেন।

স্যুল্জ ১৯১৮-১৯ সালে সংক্রামক ইনফ্লুয়েঞ্জা (ভারতীয়দের মতে কালাজ্বর) ব্যাধি ভারতের কৃষি উৎপাদনকে কিভাবে প্রভাবিত করেছিল তা পরীক্ষা করেন। তাঁর পরীক্ষায় দেখা যায় যে সংক্রামক ইনফ্লুয়েঞ্জায় বহু শ্রমিকের মৃত্যু অথবা কাজ থেকে বিদায়ের ফলে কৃষিক্ষেত্রে উৎপাদনের উপর নেতিবাচক প্রভাব (negative effects) পরিলক্ষিত হয়নি, অর্থাৎ তাতে ভারতের কৃষি-উৎপাদন কমেনি। আন্তঃরাজ্য তথ্যাদির ভিত্তিতে তিনি হিসাব করে দেখেন যে, শ্রমিকের সংখ্যার পরিপ্রেক্ষিতে উৎপাদনের স্থিতিস্থাপকতা (Elasticity of output with respect to the numbers of labourers) ছিল ০.৪। স্যুল্জের অবলম্বিত পদ্ধতি ত্রুটিহীন ছিল না। হারউইজ (Harwitz) মনে করেন, স্যুল্জের উচিত ছিল উৎপাদনের কোনও পরিবর্তন না হওয়াকে অকার্যকর প্রকল্প (null hypothesis) হিসাবে গ্রহণ করে পরীক্ষা করে দেখা যে এই প্রকল্প বর্জন করা যায় কিনা।[১] অমর্ত্য সেনের মতে এক্ষেত্রে আসল সমস্যা হল, (১) যেসব পরিবারে উৎপাদনের অন্যান্য সম্পদের অনুপাতে শ্রমের পরিমাণ বেশি, তাদের ক্ষেত্রে যদি শ্রমিকরা শ্রমের বাজারের মাধ্যমে অন্যত্র আকৃষ্ট হয়ে চলে যায় এবং তার ফলে যে শ্রম প্রত্যাহার হয়, এবং (২) উৎপাদনের অন্যান্য সম্পদের অনুপাতের সঙ্গে সম্পর্কহীন হয়ে সংক্রামক ব্যাধির ফলে যে শ্রম-প্রত্যাহার (withdrawal of labour) হয়,—এই দুয়ের ক্ষেত্রে বিশেষ পার্থক্য থাকা।[২] শেষোক্ত ক্ষেত্রে যে উৎপাদন কমে যায়, তাতে প্রথমোক্ত শ্রম-প্রত্যাহারের প্রভাব আছে বলে মনে করার কোন কারণ নেই, প্রত্যক্ষ পন্থায় ছদ্মবেশী বেকারত্বের পরিমাপ করা খুবই কঠিন।

শকুন্তলা মেহেরা পরোক্ষ পন্থার (indirect method) মাধ্যমে ছদ্মবেশী বা প্রচ্ছন্ন বেকারত্বের পরিমাপ করার চেষ্টা করেছেন। শকুন্তলা মেহেরা (Shakuntala Mehra) শ্রমের যোগান রেখাকে ভূমি অক্ষের (horizontal axis) সমান্তরাল ধরে নিয়ে অর্থাৎ, একটি নির্দিষ্ট মজুরিতে শ্রমের যোগান অসীম ধরে নিয়ে হিসাব করে দেখেছেন ভারতের কৃষিব্যবস্থা থেকে কত শ্রমিক প্রত্যাহার করে নিলে মোট উৎপাদন অপরিবর্তিত থাকবে। মেহেরার মডেলের ভিত্তি হল, পারিবারিক খামারে উৎপাদনমুখী কাজের স্বল্পতা পরিবারের সবাই ভাগ করে নেয় এবং তার ফলে মাথাপিছু কাজের পরিমাণ অল্প হয়। উৎপাদন সবগুলি উপাদানের উপর (শ্রম-সময় সমেত) নির্ভরশীল ধরে নিয়ে এবং অন্যান্য উপাদান স্থির আছে এই ধারণার ভিত্তিতে শ্রম প্রত্যাহারের কিরূপ প্রতিক্রিয়া হয় তাঁর হিসাব করেছেন। তাঁর হিসাবের ভিত্তি বছর হল ১৯৫৬-৫৭। মেহেরার হিসাব অনুযায়ী ভারতে প্রাথমিক পর্যায়ে ছদ্মবেশী বেকারত্বের সংশোধিত হিসাব ছিল ২৯.১ শতাংশ। গড় হিসাবে মোট কৃষিশ্রমিকের ১৭.১ শতাংশ ছদ্মবেশী বেকারত্বের আওতায় ছিল। অবশ্য বিভিন্ন রাজ্যে ছদ্মবেশী বেকারের

১। M. Harwitz—"The Significance of Epidemic", Journal of Political Economy, Vol. 73 (1965).

২। Amartya Sen—"Surplus Labour in India : A Critique of Schultz's Statistical Test : Economics Jounal, Vol. 77.

সংখ্যা আলাদা। উত্তরপ্রদেশ, উড়িষ্যা ও পশ্চিমবঙ্গে তুলনামূলকভাবে ছদ্মবেশী বেকারত্ব বেশি, অমর্ত্য সেন[৩] শকুন্তলা মেহেরার হিসাবের উপর কয়েকটি মন্তব্য করেছেন, সেগুলি হল :

(১) মেহেরার হিসাবে প্রচ্ছন্ন বেকারত্বের যা পরিমাপ হয়েছে সেটা বেকারত্বের চাপ সম্পর্কে জাতীয় নমুনা সমীক্ষা (NSS) এবং সেন্সাস পরিমাপ থেকে সম্পূর্ণ আলাদা ; ভারতে ১৭ শতাংশ ছদ্মবেশী বেকারত্ব প্রকৃতই একটি বেশি অনুপাত।

(২) যদি খামারগুলিকে সমবায়ের মাধ্যমে একত্রিত করা যেত, তাহলে যারা উৎপাদনকে প্রভাবিত না করেও অন্য কাজে চলে যেতে পারত তাদের সংখ্যা বেড়ে যেত। মেহেরার মডেলের ভিত্তিতে উদ্বৃত্ত শ্রমিকের পরিমাপ বড় বড় খামারে নিযুক্ত শ্রমিক পিছু উৎপাদন-কাজের নিবিড়তার (work intensity) উপর নির্ভরশীল। এই শ্রম-প্রচেষ্টার নিবিড়তা এবং বিভিন্ন রাজ্যে তার পার্থক্য সম্পর্কে সব তথ্য খামারের আকৃতির ভিত্তিতে সংগৃহীত হয়েছে। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে প্রত্যেক অঞ্চলে সর্ববৃহৎ আকৃতির খামারেই কাজের সর্বোচ্চ নিবিড়তা (highest work intensity) পরিলক্ষিত হয় না, যদি খামারের আকৃতি কত বড় তা বিবেচনা না করে সব ধরনের খামারে উৎপাদন প্রচেষ্টা সম্পর্কে সঠিক তথ্য সংগৃহীত হত, তবে মেহেরার হিসাবের আরও সংশোধন করার প্রয়োজন হত। অমর্ত্য সেনের মতে সেক্ষেত্রে হয়ত অসংশোধিত হিসাবেই বেকারত্বের পরিমাপ হত মোট গ্রামীণ শ্রমশক্তির ৩৩.৭ শতাংশ।

(৩) শকুন্তলা মেহেরার হিসাব খামারের আকৃতি-শ্রেণীর গড়ের (Size-class averages) উপর ভিত্তিশীল। যদি খামার ধরে ধরে হিসাব করা হত, তাহলে কাজের নিবিড়তার (intensity of work) পার্থক্য আরও বেশি ধরা পড়ত এবং ছদ্মবেশী বেকারত্বের পরিমাপ আরও বেশি হত।

(৪) এক্ষেত্রে আরও একটি জিনিস বিচার্য। যেহেতু ছোট ছোট খামারে মজুরিহীন পারিবারিক শ্রমের (unpaid family labour) অনুপাত বেশি থাকে, সেজন্য এটা খুব স্বাভাবিক যে কিছু লোক অন্যত্র কাজে নিযুক্ত থাকায় (যেমন পারিবারিক কাজকর্ম) খামারে পুরো সময়ের জন্য কাজ করতে অসমর্থ। আবার এমনও হতে পারে, ছোট খামারের কাজে নিযুক্ত শ্রমিক বড় খামারে সাময়িকভাবে কাজ করতে পারে। এক্ষেত্রে কোন শ্রমিক যদি নিজের ছোট খামারে কাজ করেও বড় খামারে সাময়িকভাবে বা আংশিকভাবে কাজ না করে তবে সে অংশত উদ্বৃত্ত শ্রমিক হিসাবে বিবেচিত হতে পারে। আবার বড় বড় খামারে আংশিক সময়ের জন্য যদি কোন শ্রমিক কাজ করে তবে মাথাপিছু কাজের নিবিড়তা কমে যাবে। শকুন্তলা মেহেরার মডেলে এই জিনিসটি ঠিকভাবে বিশ্লেষিত হয়নি।

৩। Amartya Sen—Employment, Technololgy and Development—(O.U.P) 1975, pages 129-131.

(৫) শ্রম-উপাদানের সময়-ধারার (time pattern of labour inputs) উপরেও অনেক কিছু নির্ভর করে। প্রতিবছর জনপ্রতি শ্রম-দিবসের হিসাব না করে প্রতি ঋতুতে জনপ্রতি শ্রম-দিবসের হিসাব করলে কাজের নিবিড়তা সম্পর্কে আরও ভালভাবে তথ্য সংগ্রহ করা সম্ভব হবে।

মন্তব্য—গ্রামীণ কাঠামোয় উৎপাদনমুখী কর্মসংস্থানের কতটা ব্যবস্থা করা দরকার, সে সম্পর্কে সিদ্ধান্ত নিতে হলে মেহেরার অসংশোধিত সর্বোচ্চ সংখ্যা (uncorrected maximum figures) ভিত্তি হিসাবে বিবেচিত হতে পারে। আবার উৎপাদনকে প্রভাবিত না করে (অর্থাৎ, উৎপাদন অপরিবর্তিত রেখে) কতটা শ্রমিক কৃষি অর্থনীতি থেকে সরিয়ে নেওয়া সম্ভব তার হিসাব করতে গেলে মেহেরার গড় সংখ্যাকেই ভিত্তি হিসাবে গ্রহণ করা উচিত।

৩.৩.২ ছদ্মবেশী বেকারত্ব সম্পর্কে অমর্ত্য সেনের মডেল (Amartya Sen's Model of Disguised Unemployment)

ছদ্মবেশী বেকারত্ব ব্যাখ্যা করার ক্ষেত্রে অমর্ত্য সেন শ্রমজনিত ব্যয় (Labour Cost) এবং জনসাধারণের মোট ভোগ-ব্যয় কিভাবে প্রভাবিত হয় তার ব্যাখ্যা করেছেন। প্রথমেই তিনি ব্যাখ্যা করেছেন কী অবস্থায় উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি (Surplus Labour) দেখা যায়। কৃষি অর্থনীতিতে শ্রমশক্তির যে অংশ অন্যত্র সরিয়ে নিলেও, অন্যান্য উপাদানের পরিমাণ অপরিবর্তিত থাকলে যদি উৎপাদনের পরিমাণ না কমে তবে শ্রমশক্তির সেই অংশকে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি বলা যায়।[৪] এই প্রসঙ্গে তিনি শ্রমজনিত ব্যয়ের তত্ত্বটি অবতারণা করেছেন। তাঁর মতে প্রকৃত শ্রম-ব্যয় (Real Labour Cost) বেড়ে গেলেই উৎপাদন কমে যেতে পারে। খামারে যদি শ্রমিকের সংখ্যা কমে যায় তবে প্রকৃত শ্রম-খরচ দুটো বিভিন্ন কারণে বাড়তে পারে। প্রথমত, কোনও কৃষক-পরিবার থেকে শ্রমিক অন্যত্র চলে গেলে পরিবারের কর্মরত সদস্যের সংখ্যা কমে যায় এবং খামারে একই পরিমাণ পারিবারিক শ্রম বজায় রাখতে হলে অন্যান্য কর্মরত সদস্যদের আরও বেশি সময় কাজ করতে হবে ; এর ফলে কর্মপ্রচেষ্টা প্রান্তিক উপযোগহীনতা (marginal disutility of effort) কমে যাবে।

দ্বিতীয়ত, এভাবে খামার-পরিবার থেকে শ্রমিকরা অন্যত্র চলে গেলে পরিবারের অবশিষ্ট সদস্যদের আয় বাড়বে, কারণ পরিবারের সম্পদ ভোগ করার জন্য তখন লোকের সংখ্যা কম থাকবে। এর ফলে অর্থ থেকে প্রাপ্ত প্রান্তিক উপযোগ (marginal utility from money) কমবে। উপরোক্ত উভয় প্রভাবে প্রকৃত শ্রম-ব্যয় বেড়ে যাবে এবং মোট উৎপাদন ও পারিবারিক শ্রমের ক্ষুদ্রতর পরিমানের নতুন ভারসাম্য তৈরি হবে।

৪। অমর্থা সেনের ভাষায় : "We define surplus labour as that part of the labour force in the [peasant economy that can be removed without reducing the total amout of output produced, even when the amount of other factors is not changed."—Amartya Sen : Peasants and Dualism With or Without Surplus Labours". The Journal of Political Economy, Cochbehar (1966).

সুতরাং অমর্ত্য সেনের মডেলে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির অবস্থান নির্ভর করে প্রান্তিক উপযোগ তালিকা এবং প্রান্তিক উপযোগহীনতা তালিকা দুটির অনুভূমিক অক্ষের উপর একটি সোজা সরলরেখা (flat) হিসাবে থাকার উপর। এক্ষেত্রে আয়ের বৃদ্ধি যেমন প্রান্তিক উপযোগ তালিকাকে অপরিবর্তিত রাখবে তেমনি ব্যক্তিগত কর্মপ্রচেষ্টার বৃদ্ধিও প্রান্তিক উপযোগহীনতা তালিকাকে অপরিবর্তিত রাখবে।

এক্ষেত্রে দুটি বিষয় বিশেষভাবে বিবেচ্য। প্রথমত, যদি দেশের কর ব্যবস্থা এমন থাকে যে কৃষক-পরিবার থেকে কিছু শ্রমিককে সরিয়ে নেবার পর সেই পরিবারের মাথাপিছু আয় যতটা বাড়ে, ততটা অতিরিক্ত কর প্রদান করতে হয়, তবে মাথাপিছু নীট আয় বাড়বে না এবং অর্থের পরিমাণ বেড়ে যাবার দরুন প্রান্তিক উপযোগ কমে যাবার যুক্তিটি টিকবে না।

দ্বিতীয়ত, আয় থেকে প্রাপ্ত উপযোগ এবং কাজ থেকে উপযোগহীনতার তালিকাটির স্থিরতা বোঝানোর জন্য যে সরল অনুভূমিক রেখা আঁকা হয় সে সম্পর্কেও বলা যায় যে এই দুটি তালিকা পরস্পরের উপর নির্ভরশীল নয়। তবে মাথাপিছু আয় এবং মাথাপিছু কর্মপ্রচেষ্টা উভয়ের পরিবর্তন হলে আমাদের দেখতে হবে ; সেই পরিবর্তনের প্রতিক্রিয়ায় প্রকৃত শ্রম ব্যয় (real labour cost) কিভাবে পরিবর্তন হচ্ছে।

অমর্ত্য সেনের মতে, শ্রমের শূন্য প্রান্তিক উৎপাদনীশক্তি উদ্বৃত্ত শ্রমের প্রয়োজনীয় শর্তও (necessary condition) নয় এবং যথেষ্ট শর্তও (sufficient condition) নয়। প্রান্তিক উৎপাদনী শক্তি শূন্য না হলেও উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি থাকতে পারে। ভারসাম্য পর্যায়ে শ্রমের প্রান্তিক উৎপাদন প্রকৃত শ্রম-ব্যয়ের সমান থাকবে। তাছাড়া প্রকৃত শ্রম-ব্যয় তালিকা অনুভূমিক (flat) রেখার দ্বারা চিহ্নিত হবে, প্রকৃত শ্রম-ব্যয় শূন্য হবার প্রয়োজন নেই।

অমর্ত্য সেন আরও বোঝাতে চেয়েছেন যে শ্রমের পরিবর্তনের ফলে উৎপাদন পরিবর্তিত হলে যেটা আমাদের বিবেচ্য বিষয় সেটা হল শ্রম-ঘণ্টার ইউনিট (units of labour hours) এবং জনসমষ্টির ইউনিটের (units of population) মধ্যে বিশেষ পার্থক্য। উদ্বৃত্ত শ্রমের ক্ষেত্রেও প্রান্তিক উৎপাদনী শক্তি ইতিবাচক (positive) থাকতে পারে,—অর্থাৎ, শ্রম-ঘণ্টার সহগ (coefficient of labour hours) ইতিবাচক হতে পারে যদি এমন হয় যে জনসমষ্টির সহগ (coefficient of population) হল শূন্য। আবার প্রান্তিক উৎপাদন শূন্য না হলে উৎপাদন দামের পরিবর্তনের দ্বারাও প্রভাবিত হতে পারে। কৃষি-খামার থেকে শ্রমশক্তির একটি অংশ অন্যত্র চলে গেলে কৃষকের উৎপাদিত পণ্যের দাম বাড়তে পারে এবং এই দামবৃদ্ধি উৎপাদন বৃদ্ধির সহায়ক হতে পারে। এখন প্রশ্ন হল, যদি জমিতে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি থেকে থাকে তবে তার পরিমাণ কত এবং শ্রমশক্তি জমি থেকে প্রত্যাহৃত হলে উৎপাদনের উপর তার কী প্রতিক্রিয়া হবে। যদি উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির আকৃতি বড় হয় তবে খামার থেকে সেই উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির প্রত্যাহারের উৎপাদন কমবে না। তবে প্রকৃত শ্রম-ব্যয় (real cost of labour), খামারে কর্মরত অবশিষ্ট শ্রমিকদের মাথাপিছু আয় বৃদ্ধি, উৎপাদিত দ্রব্যের দাম বৃদ্ধি এবং শ্রমিকদের কর্ম-প্রচেষ্টার উপযোগহীনতা প্রভৃতি উপাদানগুলি বিভিন্নভাবে উৎপাদনকে প্রভাবিত করে। পুঁজিবাদী খামারে (capitalist farm) মজুরির বিনিময়ে যতটা প্রয়োজন ঠিক ততটাই শ্রমশক্তি নিয়োগ করা হয় ; যেখানে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি কাজে নিযুক্ত হয় না, উদ্বৃত্ত শ্রমিকরা তখন গ্রাম ছেড়ে শহরে কাজের আশায় ও আয়ের প্রত্যাশায় ভীড় করে। উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির সমস্যা দেখা যায় কৃষকদের পরিবারভিত্তিক খামারে (peasant farm) অনেকক্ষেত্রে কিছু শ্রমিক বছরের কয়েকটি মাস উদ্বৃত্ত হিসাবে কাটাতে পারে। সেক্ষেত্রে যে মরসুমী বেকারত্ব (seasonal unemployment) দেখা যায় সেটাও ছদ্মবেশী বেকারত্বরই একটি অঙ্গ। গ্রামাঞ্চলে একই সঙ্গে উদ্বৃত্ত শ্রমের অবস্থিতি এবং ইতিবাচক মজুরির (positive wages) সহাবস্থান হতে পারে। তবে যদি মজুরি হার এবং প্রকৃত শ্রম-ব্যয়ের (real coast of labour) মধ্যে ফাঁক (gap) থাকে তবে কৃষক-খামারে এবং মজুরির ফাঁক (wage gap) কিছুটা সমস্যার সৃষ্টি করতে পারে। এই মজুরি ফাঁকের কোনো কোনো ব্যাখ্যা অনুযায়ী বাজারের অসম্পূর্ণতা থেকে এই ফাঁকের সৃষ্টি হয়। তবে শ্রম-বণ্টনের ক্ষেত্রে কৃষক-খামারের কয়েকটি' সুবিধা আছে। পরিবারের কতজন শ্রমিককে খামারে নিযুক্ত করা হবে, অথবা উদ্বৃত্ত শ্রমিককে খামার থেকে প্রত্যাহার করে নিলে অবশিষ্ট কর্মরত শ্রমিকদের শ্রম-ঘণ্টা কত হবে এসব ক্ষেত্রে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা কৃষক খামারের (peasant farm) পক্ষে সহজ নয়।

ছদ্মবেশী বেকারত্বের মধ্যে লুক্কায়িত সঞ্চয় (concealed savings) কতটা আছে, তারও একটি ব্যাখ্যা এক্ষেত্রে প্রাসঙ্গিক। কৃষক-খামার থেকে অতিরিক্ত শ্রম প্রত্যাহৃত হলে অবশিষ্ট কর্মরত শ্রমিকদের মাথাপিছু আয় কতটা বাড়ছে এবং সেই সঙ্গে তাদের মোট ভোগ-ব্যয় (total Consumption) কতটা বাড়ছে তার উপর নির্ভর করবে এই শ্রমিক প্রত্যাহারের ফলে সঞ্চয় কতটা বাড়বে।

৩.৪ সারাংশ

১। স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে বেকারত্বের স্বরূপ এবং বিভিন্ন ধরনের বেকারত্ব

স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে বেকার সমস্যা খুবই প্রকট। প্রকৃত বেকার হচ্ছে এমন লোক যার কাজ করার প্রয়োজন এবং ইচ্ছা দুই-ই আছে, অথচ কোন কাজই সে পায় না। প্রচলিত মজুরি হারে কাজ করতে ইচ্ছুক থাকলেও কেউ যদি কাজ না পায় তবে এই ধরনের বেকারত্বকে অনিচ্ছাকৃত বেকারত্ব বলা হয়।

অমর্ত্য সেন বেকারত্বের স্বরূপ ব্যাখ্যা করার জন্য তিনটি দৃষ্টিভঙ্গীর উল্লেখ করেছেন,—এগুলি হল আয়ভিত্তিক বিশ্লেষণ, স্বীকৃতিভিত্তিক বিশ্লেষণ এবং উৎপাদনভিত্তিক বিশ্লেষণ। এই তিনটি দৃষ্টিভঙ্গীর মধ্যে উৎপাদনভিত্তিক বিশ্লেষণ অনুযায়ী বেকারত্বের গভীরতার মূল্যায়ন বেশি গ্রহণযোগ্য। স্বল্পোন্নত

দেশগুলিতে বিভিন্ন ধরনের বেকারত্ব দেখা যায়, যেমন সংগঠনজনিত বেকারত্ব, সংঘাতজনিত বেকারত্ব, সাময়িক বেকারত্ব, উৎপাদনে মন্দাজনিত বেকারত্ব, মরসুমী বা ঋতুগত বেকারত্ব, খোলা বেকারত্ব এবং ছদ্মবেশী বেকারত্ব।

২। ছদ্মবেশী বেকারত্ব

স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে ছদ্মবেশী বেকারত্ব খুবই গুরুত্বপূর্ণ। কৃষিক্ষেত্রে জমির উপর কৃষি-শ্রমিকের মাত্রাতিরিক্ত চাপ থেকে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির সৃষ্টি হয়। এই উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তিই হল ছদ্মবেশী বেকারত্বের মূল কারণ। ছদ্মবেশী বেকারত্বের মূল কথা হল, স্বল্পোন্নত জনাকীর্ণ দেশগুলিতে কৃষিক্ষেত্র অথবা জমির উপর জনাধিক্যের চাপ বাড়লে শ্রমের প্রান্তিক উৎপাদনীশক্তি শূন্য অথবা শূন্যের কাছাকাছি খুব নিম্ন পর্যায়ে নেমে আসে। সেক্ষেত্রে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তিকে কৃষিক্ষেত্র থেকে সরিয়ে অন্যত্র উৎপাদনমূলক কাজে লাগানো যায়। যদি মূলধন কাঠামো অপরিবর্তিত থাকে এবং শ্রমিকদের কর্মনৈপুণ্যের কোনও পরিবর্তন না হয়, তবে জমি থেকে কিছু শ্রমশক্তিকে সরিয়ে আনলেও যদি কৃষির উৎপাদন না কমে তবে বুঝতে হবে যে শ্রমশক্তিকে সরিয়ে আনা হয়েছে সেটা ছিল উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি এবং উদ্বৃত্ত শ্রমিকরা এক্ষেত্রে প্রচ্ছন্নভাবে বেকার ছিল। ছদ্মবেশী বেকারত্বের মধ্যে কিছু সঞ্চয় লুকিয়ে আছে বলে মনে করা হয়। কারণ কৃষিক্ষেত্র থেকে উদ্বৃত্ত শ্রমিকদের সরিয়ে আনলে মাথাপিছু ভোগের পরিমাণ না কমিয়েও উদ্বৃত্ত খাদ্য পাওয়া যেতে পারে। আবার এমনও হতে পারে যে উদ্বৃত্ত শ্রমিকদের অন্যত্র সরিয়ে দেওয়ার পর অবশিষ্ট শ্রমিকদের মাথাপিছু আয় বেড়ে গেল। অনেক সময় যুক্তি দেখানো হয় যে ছদ্মবেশী বেকারত্ব ব্যবহারের সামাজিক ব্যয় হল শূন্য। ছদ্মবেশী বেকারত্ব প্রকৃতই ব্যয়মুক্ত (cost less) কিনা ‹ ı বিষয়ে প্রশ্ন উঠতে পারে। ছদ্মবেশী বেকারত্ব দূর করার জন্য যে উদ্বৃত্ত শ্রমিকদের কৃষিক্ষেত্র থেকে সরানো হয় তাদের শিল্প অথবা পরিষেবা ক্ষেত্রে কাজে নিযুক্ত করতে হলে অতিরিক্ত বিনিয়োগের মাধ্যমে কর্মসংস্থানের সৃষ্টি করতে হয়। এর ফলে সমাজের মোট ব্যয় বেড়ে যায়। যদি কৃষিক্ষেত্র থেকে আগত উদ্বৃত্ত শ্রমিকদের জন্য শিল্পক্ষেত্রে অথবা পরিষেবা ক্ষেত্রে ‹াজে সুযোগ তৈরি করা না যায় তবে খোলা বেকারত্ব বেড়ে যাবে।

ছদ্মবেশী বেরাকরত্ব দুভাবে পরিমাপ করা হয়ে থাকে। স্যুল্জ (Schultz) প্রত্যক্ষ পন্থায় ছদ্মবেশী বেকারত্ব পরিমাপ করার চেষ্টা করেছেন। আবার শকুন্তলা মেহেরা ভারতে পরোক্ষ পন্থায় ছদ্মবেশী বেকারত্ব পরিমাপ করার চেষ্টা করেছেন। উভয়েরই প্রচেষ্টা একেবারে ত্রুটিমুক্ত নয়।

৩। ছদ্মবেশী বেকারত্ব সম্পর্কে অমর্ত্য সেনের মডেল

ছদ্মবেশী বেকারত্বে যে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি পরিলক্ষিত হয় সে সম্পর্কে অমর্ত্য সেন প্রকৃত শ্রম-ব্যয়ের **(Real Labour Cost)** তত্ত্বটির অবতারণা করেছেন। তাঁর মতে প্রকৃত শ্রম-ব্যয় বেড়ে গেলেই উৎপাদন কমে যেতে পারে। খামারে যদি শ্রমিকের সংখ্যা কমে যায় তবে দুটো কারণে প্রকৃত শ্রম-ব্যয় বাড়তে পারে। প্রথমত, খামারে অবশিষ্ট কর্মরত শ্রমিকদের একই উৎপাদন বজায় রাখার জন্য অতিরিক্ত সময় কাজ করতে হবে

এবং এর ফলে কর্মপ্রচেষ্টার প্রান্তিক উপযোগহীনতা (marginal disutility of work) কমে যাবে। দ্বিতীয়ত, উদ্বৃত্ত শ্রমিকরা অন্যত্র চলে যাওয়ায় পরিবারের অবশিষ্ট সদস্যদের আয় বাড়বে এবং সেজন্য তাদের অর্থ থেকে প্রাপ্ত প্রান্তিক উপযোগ কমে যাবে। অমর্ত্য সেনের মডেলে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির অবস্থান নির্ভর করে প্রান্তিক উপযোগ তালিকা এবং প্রান্তিক উপযোগহীনতা তালিকা দুটির অনুভূমিক অক্ষের উপর একটি সোজা সরলরেখা (flat) হিসাবে থাকার উপর।

আবার উদ্বৃত্ত শ্রমিকদের কৃষিক্ষেত্র থেকে সরিয়ে দেবার পর পরিবারের অবশিষ্ট সদস্যদের যে মাথাপিছু আয় বাড়ে তা যদি অতিরিক্ত কর প্রদান করার জন্য ব্যবহৃত হয় এবং তবে নীট মাথাপিছু আয় মোটেই বাড়বে না। তাছাড়া আয় থেকে প্রাপ্ত উপযোগ এবং কাজ থেকে উপযোগহীনতার তালিকাটির স্থিরতা বোঝাবার জন্য যে সরল অনুভূমিক রেখা আঁকা হয় সে সম্পর্কেও বলা যায় যে—এই দুটি তালিকা পরস্পরের উপর নির্ভরশীল নয়।

অমর্ত্য সেন আরও বোঝাতে চেয়েছেন যে শ্রমের পরিবর্তনের ফলে উৎপাদন পরিবর্তিত হলে যেটা আমাদের বিবেচ্য বিষয় সেটা হল শ্রম-ঘণ্টার ইউনিট এবং জনসমষ্টির ইউনিটের মধ্যে বিশেষ পার্থক্য। এছাড়া, কৃষিখামার থেকে শ্রমশক্তির একটি অংশ অন্যত্র চলে গেলে; কৃষকের উৎপাদিত পণ্যের দাম বাড়তে পারে এবং এই দামবৃদ্ধি উৎপাদন বৃদ্ধির সহায়ক হতে পারে। পরিশেষে বলা যায়, ছদ্মবেশী বেকারত্বের পরিপ্রেক্ষিতে প্রকৃত শ্রম-ব্যয় বৃদ্ধি, খামারে কর্মরত অবশিষ্ট শ্রমিকদের মাথাপিছু আয় বৃদ্ধি, উৎপাদিত দ্রব্যের দাম বৃদ্ধি এবং শ্রমিকদের কর্মপ্রচেষ্টার উপযোগিতা প্রভৃতি উপাদানগুলি বিভিন্নভাবে উৎপাদনকে প্রভাবিত করে।

৩.৫ অনুশীলনী

ক। নীচের প্রশ্নগুলির সংক্ষিপ্ত উত্তর দিন।

(১) সংগঠনজনিত বেকারত্ব কী?

(২) মরসুমী বেকারত্ব কাকে বলে?

(৩) মন্দাজনিত বেকারত্ব কেন হয়?

(৪) ছদ্মবেশী বেকারত্ব কাকে বলে?

(৫) ছদ্মবেশী বেকারত্ব কী সবসময়ই ব্যয়মুক্ত?

(৬) ছদ্মবেশী বেকারত্বের মুল কারণ কী

(৭) ছদ্মবেশী বেকারত্বের মধ্যে সঞ্চয় লুকিয়ে থাকে বলে মনে করা হয় কেন?

(৮) খোলা বেকারত্ব কাকে বলে?

(৯) প্রত্যক্ষ পন্থায় ছদ্মবেশী বেকারত্বের পরিমাপ কিভাবে হয়?

(১০) পরোক্ষ পন্থায় ছদ্মবেশী বেকারত্বের পরিমাপ কিভাবে হয়?

(১১) বেকারত্বের বিশ্লেষণে তিনটি দৃষ্টিভঙ্গী কী কী?

খ। শূন্যস্থান পূরণ করুন।

(১) প্রকৃত বেকার হচ্ছে সেই লোক যার কাজ করার ________ এবং ________ দুই-ই আছে অথচ কোনও কাজই সে পায় না।

(২) চাহিদার স্থায়ী পরিবর্তন এবং শিল্পে প্রযুক্তিগত উন্নয়নের জন্য যদি বেকারত্বের সৃষ্টি হয়, তাকে বলা হয় ________ বেকারত্ব।

(৩) যদি বছরের কয়েক মাস কৃষিশ্রমিকের হাতে কোন কাজ না থাকে, তবে তাকে বলা হয় ________ বেকারত্ব।

(৪) ছদ্মবেশী বেকারত্বের মধ্যে সঞ্চয় লুকিয়ে থাকে তাকে ________ অর্থনৈতিক উন্নয়নের কাজে লাগানো যেতে পারে।

(৫) ছদ্মবেশী বেকারত্ব সব সময়েই যে ব্যয়মুক্ত হবে না যদি প্রকৃত ________ বিবেচনা করা হয়।

(৬) স্যুলজ্ ১৯১৮-১৯ সালের সংক্রামক ________ ব্যাধির ভিত্তিতে ছদ্মবেশী বেকারত্বের উৎপাদনভিত্তিক পরিমান করার চেষ্টা করেছিলেন।

(৭) অমর্ত্য সেনের মডেলে উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তির অবস্থান নির্ভর করে প্রান্তিক উপাদান তালিকা এবং উপযোগহীনতা তালিকা দুটির ________ আকৃতির উপর।

(৮) অমর্ত্য সেনের মতে শ্রমের শূন্য প্রান্তিক উৎপাদনীশক্তি উদ্বৃত্ত শ্রমের ________ শর্তও নয়, ________ শর্তও নয়।

(৯) কেইনসীয় তত্ত্বে কর্মনিয়োগের অভাব পরিলক্ষিত হয় ________ ________ ঘাটতির দরুন।

(১০) শিক্ষাব্যবস্থায় পরিকল্পনার অভাব ________ বেকারত্বের জন্য অনেকটা দায়ী।

গ। স্বড় প্রশ্ন

(১) বেকারত্ব বলতে কী বোঝায়?

(২) স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে বিভিন্ন ধরনের বেকারত্ব কী কী?

(৩) ছদ্মবেশী বেকারত্ব কাকে বলে? ছদ্মবেশী বেকারত্ব কি সর্বদাই ব্যয়মুক্ত?

(৪) ছদ্মবেশী বেকারত্বের মধ্যে সঞ্চয় কিভাবে লুকিয়ে থাকে? এই সঞ্চয় কী সব সময়েই পরিলক্ষিত হয়?

(৫) স্বল্পোন্নত দেশে ছদ্মবেশী বেকারত্বের স্বরূপ ব্যাখ্যা করুন।

(৬) অমর্ত্য সেন উদ্বৃত্ত শ্রমশক্তি এবং ছদ্মবেশী বেকারত্ব কিভাবে বিশ্লেষণ করেছেন?

(৭) ছদ্মবেশী বেকারত্বের পরিমাপ প্রত্যক্ষ পন্থায় কিভাবে হতে পারে?

(৮) পরোক্ষ পন্থায় ছদ্মবেশী বেকারত্বের পরিমাপ করার ক্ষেত্রে শকুন্তলা মেহেরার প্রচেষ্টার উপর মন্তব্য করুন।

(৯) ছদ্মবেশী বেকারত্বের সামাজিক ব্যয় কিভাবে বোঝানো যেতে পারে?

৩.৬ গ্রন্থপঞ্জী

1. Myint H. : The Economics of the Developing Countries. (Indian Edition, B. I. Publications, New Delhi, 1981).
2. Dutta Bhabatosh : Economics of Industrialisation (World Press, Calcutta, 1957).
3. Sen Amartya : "Peasants and Dualism With or Without Surplus Labour." The Jounral of political Economy (October, 1966).
4. Sen Amartya : Employment, Technology and Development (O.U.P 1975).
5. Nurkse Ragnar : Problems of Capital Formation in Underdeveloped Countries. (O.U.P. Second Edition, 1974).

একক ৪ ☐ আন্তর্জাতিক বাণিজ্য ও উন্নয়ন

গঠন

৪.০ উদ্দেশ্য

সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি হিসাবে বাণিজ্যের ভূমিকা সর্বজনবিদিত। কিভাবে তা সম্ভব হয়, সেটাই এই একক পাঠ করলে জানা যাবে। এ প্রসঙ্গে প্রেবিশ-সিঙ্গার মডেল এখানে আলোচিত হয়েছে। অবাধ বাণিজ্যের পক্ষে ও বিপক্ষে কী কী যুক্তি রয়েছে, সেটাও এখান থেকে অনুধাবন করতে পারবেন। বৈদেশিক সাহায্যের তিনটি ফাঁক সংক্রান্ত তত্ত্বও এই একক থেকে জানা যাবে। বৈদেশিক সাহায্যের বিভিন্ন রূপও এখানে আলোচিত হয়েছে।

৪.১ প্রস্তাবনা

সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি বা বিকাশের যন্ত্র হিসাবে আন্তর্জাতিক বাণিজ্য (International Trade as an Engine of Growth)

বর্তমানে পৃথিবীর কয়েকটি দেশ (যেমন জাপান, জার্মানি ও ইটালি) রপ্তানিচালিত সমৃদ্ধি অর্জন করায় কোন কোন অর্থবিজ্ঞানী বাণিজ্য বৃদ্ধির প্রচেষ্টাকে সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি হিসাবে গণ্য করে থাকেন। আন্তর্জাতিক বাণিজ্যের সম্প্রসারণের মাধ্যমেই ইংলন্ড, নেদারল্যান্ড, পর্তুগাল, ফ্রান্স, জার্মানি, স্পেন প্রভৃতি দেশে সমৃদ্ধির সূচনা হয়েছিল। এক্ষেত্রে একদিকে রপ্তানির সম্প্রসারণ এবং অপরদিকে আমদানির পরিবর্ততা উভয়ই দেশকে সমৃদ্ধির পথে এগিয়ে নিয়ে যেতে সাহায্য করে। যখন কোন দেশের রপ্তানি বাড়ে তখন ধরে নিতে হবে যে রপ্তানিযোগ্য সামগ্রী দেশের চাহিদা মিটিয়েও উদ্বৃত্ত সামগ্রী। শুধু তাই নয়, রপ্তানি থেকে যে বৈদেশিক মুদ্রা অর্জিত হয় তার সাহায্যেই প্রয়োজনীয় আমদানি ব্যয় মেটাবার চেষ্টা করা হয়। রপ্তানি বৃদ্ধির একটি বৈদেশিক বাণিজ্য গুণক (Foreign Trade Multiplier) প্রভাব আছে। তাতে রপ্তানি থেকে যে আয় হয় সেটা যদি দেশে আরও রপ্তানিযোগ্য সামগ্রীর উৎপাদনে এবং আমদানির পরিবর্ত সামগ্রীর (import substitutes) উৎপাদনে ব্যয়িত হয় তবে দেশের ভিতর উৎপাদন ও আয় বেশি অনুপাতে বাড়তে পারে। এক্ষেত্রে রপ্তানির যোগান প্রভাব (supply effects) এবং চাহিদা প্রভাব (demand effects) উভয়ই পরিলক্ষিত হয়।

বাণিজ্যের সম্প্রসারণ হলে আমদানির পরিবর্ততাও (import substitution) সম্প্রসারিত হয়। সমৃদ্ধির গতি বাড়াবার ক্ষেত্রে আমদানির বিকল্পীকরণ সহায়ক হতে পারে। রপ্তানিযোগ্য সামগ্রীর উৎপাদন বাড়াবার জন্য যে সব উপাদান বিদেশ থেকে আমদানি করতে হয় সেগুলির বিকল্প যদি দেশের ভিতরই উৎপাদন করা সম্ভব হয় তবে রপ্তানিযোগ্য দ্রব্যের উৎপাদন দ্রুত বাড়ানো সম্ভব হয়।

দেশের সমৃদ্ধির জন্য উৎপাদন বাড়ানো দরকার এবং এজন্য প্রয়োজনীয় আমদানি করতেই হয়। এমনকি রপ্তানিযোগ্য দ্রব্যের উৎপাদন বাড়াবার জন্যও প্রয়োজনীয় আমদানি চালিয়ে যেতে হয়। এই আমদানির জন্য প্রয়োজনীয় বৈদেশিক মুদ্রা আসতে পারে রপ্তানি বৃদ্ধি থেকে।

রপ্তানিযোগ্য সামগ্রীর উৎপাদন বেড়ে যাবার সঙ্গে সঙ্গে রপ্তানি বাজার সম্প্রসারিত হলেও রপ্তানি আয় বেড়ে গেলে তার একটি অগ্রবর্তী যোগসূত্র (forward linkage) এবং পশ্চাদবর্তী যোগসূত্রের (backward linkage) প্রভাবও পরিলক্ষিত হয়। তার ফলে দেশে সমৃদ্ধির হার বেড়ে যাবার ও অর্থনৈতিক উন্নয়নের হার ত্বরান্বিত হবার সম্ভাবনা থাকে। রপ্তানি বৃদ্ধির ফলে দেশের সামগ্রিক সঞ্চয় হারও প্রত্যক্ষভাবে বাড়তে পারে।

প্রেবিশ (Prebisch), সিঙ্গার (Singer) এবং মিরড্যাল (Myrdal) প্রমুখ অর্থবিজ্ঞানী মনে করেন যে, আন্তর্জাতিক বাণিজ্যে ধনী দেশগুলি লাভবান হয়, গরীব দেশগুলি লাভবান হয় না। ধনী দেশ থেকে গরীব দেশে মূলধনের আগমনের ফলে এবং গরীব দেশে ধনী দেশগুলির বিনিয়োগের ফলে গরীব দেশগুলির পক্ষে সুষম উন্নয়ন অর্জন করা সম্ভব হয় না, এবং তার ফলে গরীব দেশগুলি থেকে বিদেশী বিনিয়োগকারীর মুনাফা ও বিদেশী ঋণের উপর সুদ বাবদ বহু অভ্যন্তরীণ সম্পদ বিদেশে চলে যায়। অবশ্য এই যুক্তির বিরুদ্ধে বলা যায় যে, বৈদেশিক বিনিয়োগের ফলে স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে স্থানীয় শ্রমিকদের অতিরিক্ত কর্মসংস্থান হয়, তাদের আয় বাড়ে এবং বাণিজ্যক্ষেত্রে প্রযুক্তির ফাঁক (technology gap) অনেকটা কমে যায়। প্রেবিশ-সিঙ্গার যুক্তি (Prebisch-Singer Thesis) অনুযায়ী স্বল্পোন্নত দেশগুলি যেসব দ্রব্য রপ্তানি করে তার মধ্যে কৃষিজাত দ্রব্য ও চিরাচরিত রপ্তানি দ্রব্যই বেশি। অপরদিকে ধনী দেশগুলি তাদের যেসব দ্রব্য একান্ত প্রয়োজন সেগুলি আমদানি করলেও নিজেদের অভ্যন্তরীণ বাজার ঠিক রাখার জন্য সংরক্ষণের প্রাচীর দাঁড় করিয়ে রাখে। তাতে স্বল্পোন্নত দেশগুলির বাণিজ্য-শর্ত প্রতিকূল হয়। তবে বর্তমানে উন্নয়নশীল দেশগুলি চিরাচরিত রপ্তানির বাইরে অন্যান্য সামগ্রীর রপ্তানি (non-traditional exports) বাড়াবার উদ্যোগ নেওয়ায় অবস্থার কিছুটা পরিবর্তন হয়েছে। মূল সমস্যা হল, বিদেশে রপ্তানি বাজার সম্প্রসারিত করার জন্য বিদেশীদের চাহিদা অনুযায়ী উন্নতমানের রপ্তানি দ্রব্য উৎপাদন করা এবং নূতন ধরনের দ্রব্য উৎপাদন করে বাজার ও রপ্তানি বাণিজ্যে বৈচিত্র্য (diversification) এনে বিদেশে রপ্তানি বাজার সম্প্রসারিত করার চেষ্টা করা।

বাজার-অর্থনীতির পরিপ্রেক্ষিতে বিশ্ব-বাণিজ্যে বাণিজ্যিক প্রতিযোগিতা অনেক বেড়ে গেছে। এজন্য স্বল্পোন্নত দেশগুলিকে বর্তমানে নিজেদের বাণিজ্য বহির্বিশ্বমুখী (Globalised) করার চেষ্টা করতে হয়। এজন্য প্রয়োজন হল রপ্তানি বাণিজ্যে বৈচিত্র্য আনা, রপ্তানিযোগ্য দ্রব্যাদির গুণগত মান অক্ষুণ্ণ রেখে সেগুলির যোগান অক্ষুণ্ণ রাখা ;—তাতে দেশ সমৃদ্ধির পথে এগিয়ে যেতে পারে।

যদি আমরা উন্নত দেশগুলির অর্থনৈতিক উন্নয়ন এবং উন্নয়নশীল দেশগুলির রপ্তানি সম্প্রসারণের মধ্যে একটি স্থিতিশীল সম্পর্ক দেখতে পাই, তবে বাণিজ্য যে সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি (engine of growth), এই যুক্তিটির সারবত্তা দেখতে পাওয়া যায়। অধিকতর উন্নত দেশগুলির (more developed countries) এবং স্বল্পোন্নত দেশগুলির (less developed countries) মধ্যে যোগসূত্র হল স্বল্পোন্নত দেশগুলির (LDC) প্রাথমিক দ্রব্যাদির (primary commodities) জন্য অধিকতর উন্নত দেশগুলির (MDC) চাহিদা। যদি অধিকতর উন্নতি দেশগুলিতে স্বল্পোন্নত দেশগুলির প্রাথমিক দ্রব্যের জন্য এবং চিরাচরিত রপ্তানির বাইরে অন্যান্য দ্রব্যের জন্য চাহিদা বাড়ে, তবে সেটা স্বল্পোন্নত দেশকে উন্নয়নের পথে গিয়ে যেতে সাহায্য করে। এক্ষেত্রে দেখতে হবে বিদেশের চাহিদা অনুযায়ী স্বল্পোন্নত দেশ রপ্তানিযোগ্য সামগ্রীর যোগান দিতে পারছে কিনা এবং বিদেশের চাহিদা অনুযায়ী সেগুলির গুণগত মান রক্ষিত হচ্ছে কিনা। দেশের সমৃদ্ধির জন্য শিল্পায়ন খুব জরুরী ; শিল্পায়নের জন্য বিদেশ থেকে যন্ত্রপাতি আমদানি ও ক্ষেত্রবিশেষে কাঁচামাল আমদানির প্রয়োজন হয় ; তার সংস্থান হতে পারে রপ্তানি বৃদ্ধি থেকে। এক্ষেত্রে রপ্তানি বৃদ্ধিই হল সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি।

এক্ষেত্রে একটি জিনিস বিবেচনা করা যেতে পারে। স্বল্পোন্নত দেশগুলির ক্ষেত্রে দুটি বিশেষ পরিবর্তন ইদানীং পরিলক্ষিত হয়েছে। এই দেশগুলির রপ্তানি বাণিজ্যে প্রাথমিক দ্রব্যাদির (খাদ্য ও কাঁচামাল) অংশ ২০ শতাংশের কিছু বেশি সম্প্রতি কমে গেছে, এবং সে জায়গায় (১) জ্বালানির রপ্তানি ১৯৫৫ সালের ২৫ শতাংশ থেকে ১৯৭৮ সালে ৫৩ শতাংশ বেড়ে গেছে। তেল উৎপাদন ও রপ্তানিকারী দেশগুলি (Oil Producing and Exporting Countries) কর্তৃক তেলের দাম বাড়িয়ে দেওয়ায় এটা সম্ভব হয়েছে। (২) তাছাড়া শিল্পজাত দ্রব্যাদির রপ্তানিও বেড়ে গেছে[১]। উন্নয়নশীল দেশগুলি যতই শিল্পোন্নয়নের দিকে এগিয়ে যাচ্ছে, ততই তাদের মোট রপ্তানিতে শিল্পজাত দ্রব্যের অংশ বাড়ছে। দক্ষিণ কোরিয়া, তাইওয়ান, সিঙ্গাপুর এবং হংকং প্রভৃতি দেশের শিল্পজাত দ্রব্যের রপ্তানি অভূতপূর্ব বেড়েছে। একটি সমীক্ষায় দেখা গেছে ১৯৬০ থেকে ১৯৭৮ সালের মধ্যে এগারটি উন্নয়নশীল দেশ তাদের রপ্তানি-বাণিজ্যে শিল্পজাত সামগ্রীর অংশ ১৯৬০ সালে ১৫ শতাংশ থেকে ১৯৭৮ সালে ৪০ শতাংশ পর্যন্ত বাড়িয়েছে।

যখন আমরা বলি, রপ্তানি হল সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি, তখন আমরা ধরে নিই যে বৈদেশিক বাণিজ্যে উন্নত দেশগুলি থেকে উন্নয়নশীল দেশগুলিতে সমৃদ্ধির কারণগুলি সঞ্চারিত হয়। যদি অধিকতর উন্নত দেশগুলি উন্নয়নশীল দেশের দ্রব্যাদি আমদানি করে, তবেই উন্নয়নশীল দেশে সমৃদ্ধির হার বাড়তে পারে। আবার যদি

১। (a) Arthur Lewis : "The Slowing Down of the Engine of Growth". American Economic Review, 1980 (VII, 70 No. 4).
(b) James Reidel : "Trade as an Engine of Growth in Developing Countries Revisited." The Economic Journal, Vol. 94 (March 1984).

অধিকতর উন্নত দেশগুলিতে সমৃদ্ধির হার শ্লথ হয়ে পড়ে, তবে স্বল্পোন্নত দেশগুলিতেও সমৃদ্ধির হার শ্লথ হয়ে পড়ে। আর্থার লুইস সত্তরের দশকের মাঝামাঝি থেকে উন্নত দেশগুলির সমৃদ্ধির হারে দীর্ঘকালীন হ্রাস দেখতে পেয়েছেন বলে মনে করেন যে, উন্নয়নশীল দেশগুলি যদি রপ্তানি-বাণিজ্যের সম্প্রসারণের জন্য উন্নত দেশগুলির উপর নির্ভর করে থাকে তবে সমৃদ্ধির হার বিশেষ বাড়বে না। বরং বিকল্প পন্থা হল, উন্নয়নশীল দেশগুলির উচিত নিজেদের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্কের সম্প্রসারণ করা।

৪.১.১ রপ্তানি বৃদ্ধি ও অর্থনৈতিক উন্নয়ন (Export Promotion and Economic Development)

অনগ্রসর দেশে অর্থনৈতিক উন্নয়নের জন্য রপ্তানি বৃদ্ধি অপরিহার্য। শুধু আমদানিকারী দেশ হয়ে কোনও স্বল্পোন্নত দেশ অর্থনৈতিক উন্নয়নের পথে এগিয়ে যেতে পারে না। কারণ সেক্ষেত্রে আমদানিকারী দেশের পক্ষে বৈদেশিক মুদ্রা অর্জন করে আমদানির জন্য প্রদেয় টাকা মিটিয়ে দেওয়া সম্ভব হয় না বলে বিদেশ থেকে প্রয়োজনীয় আন্তর্জাতিক মুদ্রা ধার করতে হয়। রপ্তানির তুলনায় আমদানি বেশি হবার অর্থ হল বাণিজ্য ঘাটতি। এই বাণিজ্য ঘাটতি মেটাবার জন্য আমদানিকারী দেশকে বৈদেশিক মুদ্রা ধার করতে হয়। অপরদিকে সঞ্চিত ধার পরিশোধ করার জন্য এবং ধারের উপর সুদ প্রদান করার (debt-servicing) জন্য সংশ্লিষ্ট দেশকে আরও অতিরিক্ত বৈদেশিক মুদ্রা ধার করতে হয়। এজন্য বহু স্বল্পোন্নত দেশ বৈদেশিক ঋণের ফাঁদে (Foreign debt trap) জড়িয়ে গেছে। এই অবস্থা থেকে মুক্তি পাবার উপায় হল বেশি করে রপ্তানি করা এবং দেশে উৎপাদিত রপ্তানিযোগ্য দ্রব্যগুলির বাজার যাতে বিদেশে সম্প্রসারিত হয় তার চেষ্টা করা।

রপ্তানির পরিমাণ বাড়াতে পারলে (১) বৈদেশিক মুদ্রা অর্জনের পরিমাণ বাড়ে ; (২) অত্যাবশ্যক আমদানির জন্য প্রয়োজনীয় বৈদেশিক মুদ্রার সংস্থান করা সম্ভব হয় ; (৩) রপ্তানিযোগ্য সামগ্রীর উৎপাদন বাড়ে এবং রপ্তানিযোগ্য সামগ্রী উৎপাদনকারী শিল্পগুলিতে কার্যনিয়োগের সুযোগ বাড়ে ; (৪) জাতীয় আয় বাড়ে এবং রপ্তানি থেকে বর্ধিত জাতীয় আয় ঠিকভাবে ব্যয়িত হলে এবং সেই আয় ঠিকভাবে বিনিয়োগ করতে পারলে বৈদেশিক বাণিজ্য গুণক (Foreign Trade Mutliplier) কার্যকর হয়। এক্ষেত্রে রপ্তানির যোগান রপ্তানিযোগ্য সামগ্রীর উৎপাদনে অথবা আমদানির বিকল্প সামগ্রী উৎপাদনে প্রভাব (supply effect) এবং চাহিদা প্রভাব (demand effect) উভয়ই পরিলক্ষিত হয়।

রপ্তানি-আয় বৃদ্ধি এবং রপ্তানি-বাজারের সম্প্রসারণের ফলে একটি অগ্রবর্তী যোগসূত্র (forward linkage) এবং পশ্চাদবর্তী যোগসূত্রের (backward linkage) প্রভাব পরিলক্ষিত হয়। তার ফলে দেশের সমৃদ্ধির হার বেড়ে যাবার ও অর্থনৈতিক উন্নয়নের হার ত্বরান্বিত হবার সম্ভাবনা থাকে।

বর্তমানকালের উন্নত দেশগুলির অর্থনৈতিক উন্নয়নের প্রাথমিক স্তরে রপ্তানির একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা ছিল। বিভিন্ন দেশে শিল্প-বিপ্লবের পর বৈদেশিক বাণিজ্যের বিশেষ করে শিল্পোন্নত দেশগুলির রপ্তানি বাণিজ্যের

সম্প্রসারণ হতে আরম্ভ করে। শিল্পোন্নত দেশগুলি বিদেশী উপনিবেশগুলিতে ব্যবসায় বাণিজ্য করে প্রচুর মুনাফা অর্জন করতে থাকে। এভাবে রপ্তানি সম্প্রসারণের মাধ্যমে শিল্পোন্নত দেশগুলি সমৃদ্ধির হার বাড়াতে থাকে। এটাকে বলা যায় রপ্তানি-চালিত সমৃদ্ধি (export-led growth)। আবার কোনো কোনো দেশে (যেমন জাপান, দক্ষিণ কোরিয়া) শুধু যে রপ্তানি-চালিত সমৃদ্ধি হয়েছে তাই নয় সে দেশগুলিতে সমৃদ্ধি-চালিত রপ্তানিও (growth-led exports) হয়েছে। জাপান, মার্কিন যুক্তরাষ্ট্র, জার্মানি প্রভৃতি দেশে রপ্তানির মাধ্যমে উন্নয়ন ও উন্নয়নের মাধ্যমে রপ্তানি উভয়ই দেখা গেছে। অনেকের মতে উন্নয়নের জন্য প্রয়োজনীয় পরিমাণ রপ্তানির (export-adequate growth) গুরুত্ব খুবই বেশি।

বর্তমানে উন্নয়নশীল দেশগুলি রপ্তানি বাড়িয়ে উন্নয়নের হার বাড়াবার জন্য চেষ্টা করছে। বিশ্ব অর্থনীতিতে এখন বহু-পাক্ষিক বাণিজ্য (multi-lateral trade) বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ।

কোনো কোনো উন্নয়নশীল দেশ অবশ্য উন্নয়ন-ভিত্তিক রপ্তানি (growth-led exports) সম্প্রসারণের চেষ্টা চালাচ্ছে।

৪.১..২ আমদানির প্রতিস্থাপন বা পরিবর্ততা বনাম রপ্তানি উন্নয়ন (Import substitution vs. Export promotion)

রপ্তানি বাড়াবার ক্ষেত্রে উদ্যোগের অভাব (export pessimism) পরিলক্ষিত হলে আমদানির প্রতিস্থাপনের প্রতি স্বল্পোন্নত দেশগুলি আকৃষ্ট হয়।

আমদানি পরিবর্ততা একটি নির্দিষ্ট পর্যায় পর্যন্ত খুবই প্রয়োজনীয় সন্দেহ নেই। তবে আমদানি বিকল্পীকরণের মাধ্যমে দেশ থেকে বৈদেশিক মুদ্রার নির্গমন ঠেকানো যায় ; দেশে বৈদেশিক মুদ্রার আগমন তাতে বাড়ে না, কিন্তু রপ্তানি উন্নয়নের মাধ্যমে দেশে বৈদেশিক মুদ্রার আগমন বাড়ে। আমদানি পরিবর্ততার ফলে দেশের অভ্যন্তরীণ বাজারে শিল্পগুলির সম্প্রসারণ হয় ও শিল্পগুলিতে কর্মনিয়োগের সুবিধা বাড়ে। কিন্তু রপ্তানি সম্প্রসারণে একদিকে যেমন দেশীয় শিল্পগুলির বিদেশী বাজার সম্প্রসারিত হয়, অপরদিকে রপ্তানিযোগ্য দ্রব্যের উৎপাদন বেড়ে গেলে দেশের অভ্যন্তরে রপ্তানি শিল্পের উন্নতি হয় এবং কর্মনিয়োগের সম্প্রসারণ হয়। তাছাড়া রপ্তানি সম্প্রসারণের সঙ্গে সঙ্গে বৈদেশিক বাণিজ্য গুণকও (foreign trade multiplier) কার্যকর হয়। এজন্য চূড়ান্ত পর্যায়ে আমদানি পরিবর্ততার নীতি অপেক্ষা রপ্তানি সম্প্রসারণ নীতি দেশের উন্নয়নের ক্ষেত্রে বেশি ফলপ্রসূ হয়। তবে একটি স্তর পর্যন্ত আমদানির পরিবর্ততার এবং রপ্তানি সম্প্রসারণ পাশাপাশি চলতে পারে। রপ্তানির মাধ্যমে যে বৈদেশিক মুদ্রা অর্জিত হয় সেটা বৈদেশিক ঋণ পরিশোধ করা, বৈদেশিক ঋণের উপর সুদ প্রদান করা এবং প্রয়োজনীয় আমদানির জন্য ব্যয় করা সম্ভব হয়। রপ্তানির মাধ্যমে বৈদেশিক মুদ্রার আয় বাড়াবার জন্য স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে বিদেশের চাহিদা অনুযায়ী রপ্তানিযোগ্য সামগ্রীর যোগান অব্যাহত রাখতে

হয় এবং তাদের গুণগত মান বজায় রাখতে হয়। চিরাচরিত রপ্তানির উপর নির্ভর না করে স্বল্পোন্নত দেশগুলি যদি রপ্তানি বাণিজ্যে বৈচিত্র্য (diversification) আনতে পারে তবে রপ্তানি থেকে আয়ের সম্ভাবনা থেকে যায়। কারণ, চিরাচরিত রপ্তানি দ্রব্যগুলির প্রতিযোগী সামগ্রী (competing goods) বিদেশে তৈরি হতে পারে, সেজন্য বিশ্ব-বাণিজ্যে প্রতিযোগিতায় টিকে থাকার জন্য রপ্তানি বাণিজ্যে বৈচিত্র্য আনা দরকার।

৪.১.৩ আমদানির প্রতিস্থাপন অথবা পরিবর্ততা (Import Substitution)

বহু দেশে প্রথম মহাযুদ্ধের পর এবং দ্বিতীয় মহাযুদ্ধের পর আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদনের দিকে একটি ঝোঁক দেখা যায়। কারণ, এই দেশগুলি আগে নিজেদের প্রয়োজনীয় দ্রব্য উন্নত দেশগুলি থেকে আমদানি করত। কিন্তু এক্ষেত্রে অসুবিধা ছিল এই যে, উন্নত দেশে ব্যবসায়-বাণিজ্যে মন্দা দেখা দিলে ঐ দেশের উপর অর্থনৈতিকভাবে বা বাণিজ্যিকভাবে নির্ভরশীল দেশগুলিতেও সেই মন্দার প্রভাব দেখা যেত। কোনো দেশের পক্ষে প্রয়োজনীয় দ্রব্য কতটা আমদানি করা সম্ভব তা নির্ভর করে সেই দেশ রপ্তানি থেকে কতটা বৈদেশিক মুদ্রা অর্জন করে তার উপর। কারণ রপ্তানি থেকে যে বৈদেশিক মুদ্রা অর্জিত হয় সেই মুদ্রার সাহায্যেই রপ্তানিকারী দেশ তার প্রয়োজনীয় দ্রব্য আমদানি করতে পারে। উন্নত দেশগুলিতে মন্দা দেখা দিলে প্রাথমিক দ্রব্য উৎপাদনকারী দেশগুলি (primary producing countries) বিদেশে তাদের রপ্তানিকৃত সামগ্রীর জন্য ভাল মূল্য পায় না—এবং তাতে তাদের রপ্তানি আয় কমে যায়,—এই ঘটনাই অপেক্ষাকৃত অনগ্রসর দেশগুলিকে আমদানি নিয়ন্ত্রণ করতে এবং আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদন করতে প্রণোদিত করে।

৪.১.৪ আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদনের পক্ষে যুক্তি (Arguments for Import Substitution)

(১) আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদনের পক্ষে একটি যুক্তি হল, এই দ্রব্যগুলির জন্য একটি তৈরি বাজার দেশের মধ্যে পাওয়া যায়। কারণ এক্ষেত্রে যে দ্রব্যগুলির উৎপাদন হচ্ছে সেগুলির জন্য দেশের লোকের চাহিদা আছে বলেই আগে এগুলি আমদানি করতে হত। এজন্য অভ্যন্তরীণ উৎপাদকের পক্ষে আমদানি নিয়ন্ত্রণের ফলে একটি সুযোগ আসে আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদন করার।

(২) চূড়ান্ত ভোগ-সামগ্রীর ক্ষেত্রেই আমদানির বিকল্প দ্রব্যের উৎপাদন খুব সফল হয়। কারণ এক্ষেত্রে প্রযুক্তিবিদ্যা খুবই সাধারণ। ব্রাজিল, মেক্সিকো এবং ভারতবর্ষ যথেষ্ট আগে থেকেই সাধারণ ভোগ-সামগ্রীর ক্ষেত্রে (তেল, সাবান, শ্যাম্পু, সেন্ট, পাউডার, দাড়ি কামাবার পর ব্যবহারযোগ্য লোশন প্রভৃতি) আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদন করতে আরম্ভ করে। বর্তমানে আমাদের দেশে নিত্যব্যবহার্য ভোগ-সামগ্রীর ক্ষেত্রে (বিলাস-সামগ্রী সমেত) বিদেশের উপর নির্ভর করতে হয় না। তার ফলে রপ্তানি থেকে যে বৈদেশিক মুদ্রা অর্জিত হয়, তার সাশ্রয় হয় এবং সেই বৈদেশিক মুদ্রা আরও গুরুত্বপূর্ণ দ্রব্য আমদানির জন্য (যার বিকল্প দেশে তৈরি করা সম্ভব নয়) ব্যবহার করা সম্ভব হয়।

(৩) আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদনের আরও একটি সুবিধা হল, দেশের ভিতর শিল্প-উৎপাদনের বৃদ্ধি হয় এবং তার ফলে দেশে কর্মসংস্থানের সম্প্রসারণ ঘটে।

(৪) রপ্তানি-সামগ্রীর উৎপাদন বাড়াবার জন্য যেসব উপাদান বিদেশ থেকে আমদানি করতে হয় সেগুলির বিকল্প যদি এখন দেশের ভিতরেই উৎপাদন করা সম্ভব হয়, তবে রপ্তানি-সামগ্রীর উৎপাদন বেড়ে যাবার সম্ভাবনা থাকে।

(৫) বিদেশ থেকে প্রয়োজনীয় দ্রব্য আমদানি না করে দেশের ভিতর সেগুলির উৎপাদন বাড়াবার উপর গুরুত্ব আরোপ করলে বিদেশের উন্নত কলাকৌশলের বিকল্প হিসাবে উন্নত কলাকৌশল দেশের ভিতর প্রয়োগ করার ক্ষেত্রেও কারিগরি উন্নয়ন আরও দ্রুত অর্জন করার ক্ষেত্রে উৎসাহ বাড়বে।

৪.১.৫ আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদনের বিপক্ষে যুক্তি (Arguments against Import Substitution)

আমদানির বিকল্পীকরণের উপর বেশি গুরুত্ব আরোপ করার ক্ষেত্রে কয়েকটি সমস্যার সৃষ্টি হয়। আমদানির বিকল্পীকরণ একটি নির্দিষ্ট মাত্রা পর্যন্ত চলতে পারে। আমদানির বিকল্প সামগ্রীর জন্য দেশের ভিতর চাহিদা যে বরাবর একই প্রকার থাকবে তার কোনো নিশ্চয়তা নেই। তাছাড়া বিদেশে অনেক উন্নত ধরনের দ্রব্য উৎপাদিত হলে তার জন্য চাহিদা বাড়তে পারে। লোকের আয় বেড়ে গেলে উন্নত ধরনের বিদেশী সামগ্রী আমদানি করার প্রবণতা বেড়ে যেতে পারে। এজন্য আমদানি বিকল্পীকরণের বিরুদ্ধে কয়েকটি যুক্তিও দেখানো যেতে পারে।

(১) যেসব শিল্প-কারখানায় আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদিত হয়, সেগুলিতে যদি কখনও শ্রমিক অশান্তির জন্য ধর্মঘট হয় অথবা যদি সেগুলি বন্ধ হয়ে যায়, তবে সেইসব দ্রব্যের ক্রেতারা খুবই অসুবিধায় পড়বে। তখন ক্রেতাদের চাহিদা মেটাবার জন্য যতটা উৎপাদন প্রয়োজন ততটা করা যদি সম্ভব না হয় তবে দেশের ভিতর দ্রব্যগুলির অভাব হবে এবং দাম বেড়ে যাবে। এক্ষেত্রে যদি সস্তায় বিদেশ থেকে এইসব দ্রব্য আমদানি করা সম্ভব হয় তবে ক্রেতাদের দিক দিয়ে সুবিধা হয়।

(২) সব আমদানিই বিকল্প দ্রব্য উৎপাদনের জন্য যে টাকা বিনিয়োগ করা হয় তার কিছুটা যদি রপ্তানি-সামগ্রীর উৎপাদন বাড়াবার জন্য রাখা যায় এবং রপ্তানি-সামগ্রীর উৎপাদনে কাজে লাগে এই জাতীয় সরঞ্জাম, কাঁচামাল বা কোনো উপাদান আমদানির জন্য রাখা যায়, তবে দেশের আমদানি-রপ্তানি বাণিজ্যে সমতা আনার পক্ষে তা সহায়ক হয়।

(৩) আমদানির বিকল্প দ্রব্য (Import substitutes) বেশি রূপে উৎপাদন করার ক্ষেত্রেও বৈদেশিক মুদ্রার প্রয়োজন এবং এই বৈদেশিক মুদ্রা আসতে পারে রপ্তানি বৃদ্ধি থেকে। আমদানির বিকল্প দ্রব্য

উৎপাদনের পক্ষে নিশ্চয়ই যথেষ্ট যুক্তি আছে। কিন্তু এজন্য দেশের সব উৎপাদন প্রচেষ্টা শুধু আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদনের জন্য প্রযুক্ত হবে তা নয়। আসল প্রয়োজন হল দেশের লোকের বর্ধিত ক্রয়শক্তি অনুযায়ী উৎপাদিত দ্রব্যের সরবরাহ বজায় রাখা। এজন্য দেশের ভিতর উৎপাদন বাড়ানো দরকার।

(৪) প্রয়োজনীয় আমদানি নিয়ন্ত্রণ করে তার বিকল্প দ্রব্য উৎপাদন করার প্রচেষ্টা চালানো যথেষ্ট সময়সাপেক্ষ ব্যাপার। এজন্য প্রয়োজনীয় আমদানি বজায় রাখতেই হবে এবং সেই সঙ্গে আমদানির বিকল্প দ্রব্যের উৎপাদন বাড়ানোর চেষ্টা চালাতে হবে।

(৫) অনেকক্ষেত্রে দেখা যায় যে, আমদানি পরিবর্ততার উৎপাদন ব্যয় খুব বেশি এবং এজন্য সেই দ্রব্যগুলির দামও বেশি। অথচ এই দ্রব্যগুলি বিদেশ থেকে আমদানি করার ব্যয় অপেক্ষাকৃত কম। এক্ষেত্রে বেশি খরচ করে আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদনের চেষ্টা চালানো সবসময় যুক্তিযুক্ত নয়।

৪.২ অর্থনৈতিক উন্নয়ন প্রক্রিয়ায় অবাধ বাণিজ্য ও শিল্প-সংরক্ষণের আপেক্ষিক ভূমিকা (Relative Roles of Free Trade and Protection to Industries in the Process of Economic Development)

বিদেশ থেকে কোনো দ্রব্য আমদানি ও বিদেশে রপ্তানির ক্ষেত্রে যদি কোন প্রকার বাধানিষেধ না থাকে তবে তাকে অবাধ বাণিজ্য বা "Free Trade" বলা হয়। বর্তমানকালে বিশ্বের প্রায় সবদেশেই অল্প-বিস্তর বাজার-অর্থনীতি (Market Economy) চালু হয়েছে। বাজার-অর্থনীতির প্রবক্তাদের মতে অবাধ বাণিজ্য আন্তর্জাতিক বাণিজ্যে পারস্পরিক প্রতিযোগিতা ও উৎপাদনী দক্ষতা বাড়াবার ক্ষেত্রে সহায়ক। অপরদিকে দেশীয় শিল্পগুলিকে রক্ষা করার জন্য ও তাদের উৎপাদন বৃদ্ধিতে উৎসাহ দেওয়ার জন্য যদি বিদেশ থেকে কোনো দ্রব্যের আমদানির উপর শুল্ক ধার্য করা হয় অথবা কোটার (quota) ভিত্তিতে আমদানির পরিমাণ নিয়ন্ত্রিত করা হয় তবে তাকে শিল্প-সংরক্ষণ নীতি বলা হয়।

৪.২.১ অবাধ বাণিজ্যের পক্ষে ও বিপক্ষে যুক্তি (Arguments For and Against Free Trade)

বিদেশ থেকে প্রয়োজনীয় দ্রব্য আমদানি ও বিদেশে রপ্তানির ক্ষেত্রে যদি কোন প্রকার বাধানিষেধ না থাকে, তবে তাকে অবাধ বাণিজ্য বা "Free Trade" বলা হয়। এই ব্যবস্থায় বিদেশ থেকে আমদানিকৃত দ্রব্যগুলির উপর শুল্ক ধার্য করা হয় না। আন্তর্জাতিক বাণিজ্যে তুলনামূলক খরচের নিয়মটি অবাধ বাণিজ্য ব্যবস্থায় বিশেষ কার্যকর হয়।

প্রথমত, এটাই অবাধ বাণিজ্যের প্রধান সুবিধা। সুতরাং আঞ্চলিক শ্রমবিভাগ নীতির সব সুফল অবাধ বাণিজ্যে পাওয়া যেতে পারে। অবাধ বাণিজ্য চলতে থাকলে আন্তর্জাতিক বিশেষীকরণ (Internaitonal Specialisation) সুষ্ঠুভাবে সম্পাদিত হয়। এর ফলে যে দেশ যে জিনিস উৎপাদনে বিশেষ পারদর্শী সেই দেশ সেই জিনিস উৎপাদন করে। তাতে দেশের আর্থিক উন্নতি দেখা দেয় এবং জীবনযাত্রার মানও উন্নত হয়।

দ্বিতীয়ত, অবাধ বাণিজ্যের ফলে উৎপাদনের বিভিন্ন উপকরণগুলির প্রকৃত আয় বেড়ে যায়। বিশেষীকরণের (Specialisation) ফলে উপাদানগুলি উৎপাদনের পরিমাণ বাড়াতে পারে।

তৃতীয়ত, অবাধ বাণিজ্যের পক্ষে আরও একটি যুক্তি হচ্ছে এই যে তার ফলে জিনিসপত্রের দাম কমে যায় ; কারণ, অবাধ প্রতিযোগিতায় অল্প খরচে বিভিন্ন জিনিসের উৎপাদন খরচ কিছু কম হয়। তাছাড়া, উৎপাদনের উপকরণগুলির অবাধ বাণিজ্যের ফলে বিশিষ্টতা অর্জন করে বলে তাদের আয়ের পরিমাণ বেড়ে যায়।

কিন্তু অবাধ বাণিজ্যের বিপক্ষে প্রধান যুক্তি হচ্ছে এই যে অবাধ বাণিজ্যে বিদেশী দ্রব্যের সঙ্গে দেশীয় দ্রব্যের প্রতিযোগিতার সৃষ্টি হয়। এজন্য এই প্রতিযোগিতার ফলে দেশীয় ক্ষুদ্র শিল্পগুলি অনেক সময়েই বিপর্যয়ের সম্মুখীন হয়।

চতুর্থত, পৃথিবীর বিভিন্ন দেশে সমানভাবে অর্থনৈতিক উন্নয়ন হয়নি। অবাধ বাণিজ্যের ফলে উন্নত দেশগুলির সঙ্গে প্রতিযোগিতায় অনুন্নত দেশগুলি দাঁড়াতে পারে না। সুতরাং অবাধ বাণিজ্যের ফলে অনগ্রসর দেশগুলির স্বার্থ ক্ষুণ্ণ হয়।

পঞ্চমত, অবাধ বাণিজ্যে শিশু শিল্পগুলিকে (infant industries) সংরক্ষণ দেওয়া সম্ভব হয় না। অথচ শিল্পায়নের স্বার্থে এগুলিকে সংরক্ষণ দেওয়া উচিত।

৪.২.২ শিল্প-সংরক্ষণের পক্ষে যুক্তি (Arguments in Favour of Protection of Industries)

বিদেশী শিল্পের সঙ্গে প্রতিযোগিতার হাত থেকে দেশীয় শিল্পগুলিকে রক্ষা করার জন্য শিল্প-সংরক্ষণের পক্ষে যুক্তি দেখানো হয়ে থাকে। যখন দেশে বৈদেশিক বাণিজ্য স্বাধীনভাবে চলে তখন তাকে বলে অবাধ বাণিজ্য (Free Trade)। অবাধ বাণিজ্যের ক্ষেত্রে বিদেশী শিল্পজাত পণ্যের সঙ্গে দেশীয় শিল্পজাত পণ্যের প্রতিযোগিতার সৃষ্টি হয়। এজন্য এই প্রতিযোগিতার হাত থেকে দেশী শিল্পগুলিকে রক্ষা করার জন্য সরকারকে বিদেশী পণ্য আমদানির উপর শুল্ক ধার্য করে দেশীয় শিল্পগুলিকে সংরক্ষণ প্রদান করতে হয়। অনেক সময় বৈদেশিক ব্যবসায়ীদের ডাম্পিং (Damping) নীতি অর্থাৎ নিজের দেশের বাজারে চড়া দামে পণ্য বিক্রি করে

বিদেশের বাজারে কম দামে পণ্য বিক্রি করার নীতি প্রতিরোধ করার জন্যও আমদানি শুল্ক ধার্য করতে হয় এবং এজন্য দেশীয় শিল্পগুলিকে সংরক্ষণ প্রদান করতে হয়। শিল্প-সংরক্ষণের পক্ষে বিভিন্ন যুক্তি দেখানো যেতে পারে।

প্রথমত, শিশুশিল্প সংরক্ষণ যুক্তির (Infant industry argument protection) ভিত্তিতে অনেক সময় শিল্পগুলিকে সংরক্ষণ প্রদান করা হয়। এই যুক্তির অর্থ হচ্ছে এই যে অনেক শিল্প আছে যেগুলি প্রাথমিক অবস্থায় রাষ্ট্রীয় সাহায্য ব্যতীত উন্নত হতে পারে না। যদি এই শিল্পগুলি প্রাথমিক অবস্থায় সংরক্ষিত না হয় তবে এগুলি বিদেশী শিল্পগুলির সঙ্গে প্রতিযোগিতায় দাঁড়াতে পারে না। এজন্যই এই শিল্পগুলিকে শৈশব অবস্থায় লালন-পালন করা উচিত, কিশোর অবস্থায় সংরক্ষণ প্রদান করা উচিত এবং পরিণত বয়সে সংরক্ষণ থেকে মুক্ত করা উচিত ("Nurse the baby, protect the child and free the adults".)।

দ্বিতীয়ত, শিল্প-সংরক্ষণ নীতি চালু হলে আমদানির পরিমাণ কমে রপ্তানির পরিমাণ বেড়ে যাবার সম্ভাবনা থাকে। তাতে দেশের প্রচুর লাভ হয়। সংরক্ষণের পক্ষে বাণিজ্য উদ্বৃত্ত যুক্তি (Balance of Trade argument) তখনই খুব গুরুত্বপূর্ণ হয় যখন দেশে দীর্ঘদিন ধরে বাণিজ্য উদ্বৃত্ত প্রতিকূল (unfavourable) থাকে। দেশের টাকা দেশেই রেখে দেবার নীতিকে ("keeping money at home") ভিত্তি করেও বিভিন্ন শিল্পকে সংরক্ষণ প্রদান করা হয়। এই যুক্তি সর্বদাই যুক্তিসঙ্গত নয়। যেমন ধরা যাক, হয়ত এমন কতিপয় বিদেশী দ্রব্য আছে যেগুলির চাহিদা আমাদের খুব বেশি। এই দ্রব্যগুলির আমদানির উপর শুল্ক ধার্য করা হলে যে আমাদের আমদানির পরিমাণ কমে যাবে তা নয়; ববং আমাদের তখন বেশি দাম দিয়ে দ্রব্যগুলি কিনতে হবে। সংরক্ষণের পক্ষে আরও একটি যুক্তি হল, দেশীয় বাজার সৃষ্টি (Home market argument)। এই যুক্তি অনুযায়ী আমদানি নিয়ন্ত্রণ করে আমদানিযোগ্য দ্রব্যগুলি যাতে দেশেই উৎপাদিত হয়, সেই ব্যবস্থা করা উচিত। বিকাশমান দেশের পক্ষে এই যুক্তি বিশেষ বিবেচনা করা হয়।

তৃতীয়ত, অবাধ বাণিজ্য নীতি অবলম্বিত হলেই যে আঞ্চলিক শ্রমবিভাগের সব সুফল পাওয়া যায় তা নয়। অবাধ বাণিজ্যের ফলে সব দেশেই যে উৎপাদনের উপাদানগুলি সর্বাপেক্ষা উপযোগী ক্ষেত্রে নিয়োগ করতে পারবে অথবা সেগুলির প্রকৃত সদ্ব্যবহার করতে পারবে তা নয়।

চতুর্থত, জাতীয় স্বয়ংসম্পূর্ণতার (National Self-sufficiency) যুক্তি অনুযায়ী অনেক ক্ষেত্রে দেশীয় শিল্পগুলিকে সংরক্ষণ প্রদান করা হয়। কিন্তু এই নীতি হয়ত কতিপয় শিল্পের ক্ষেত্রে গৃহীত হতে পারে। কিন্তু সব শিল্পের ক্ষেত্রে এই যুক্তি প্রয়োগ করা যায় না। কারণ তাতে দেশকে আন্তর্জাতিক বাণিজ্যের বিভিন্ন সুবিধা থেকে বঞ্চিত হতে হয়।

পঞ্চমত, বিকাশমান দেশগুলিতে শিল্প-ব্যবস্থায় বৈচিত্র্য আনয়ন (Diversification of industries) করা উচিত,—এই যুক্তির ভিত্তিতে অনেক ক্ষেত্রে শিল্পগুলিকে সংরক্ষণ প্রদান করা হয়। এই নীতিও সামগ্রিকভাবে গ্রহণ করা সম্ভবপর হয় না। কারণ তাতে দেশকে আন্তর্জাতিক শ্রম বিভাগের সুবিধাগুলি থেকে বঞ্চিত হতে হয়।

ষষ্ঠত, প্রতিরক্ষামূলক শিল্পগুলিকে (Defence industry) সর্বদাই সংরক্ষণ প্রদান করা উচিত। বেকার সমস্যার সমাধানের (Employment argument) জন্যও দেশের বিভিন্ন শিল্পকে সরকারের সংরক্ষণ প্রদান করা উচিত। যদি সরকারের সাহায্যে কতিপয় শিল্প নিজের পায়ে নিজে দাঁড়াতে পারে, যদি এই শিল্পগুলিতে নূতন কর্মসংস্থান সৃষ্টি হবার সম্ভাবনা থাকে এবং দেশের বিরাট অর্থনৈতিক সমস্যার সমাধানের একটি পন্থা খুঁজে পাওয়া যায়, তবে সরকারের উচিত এই শিল্পগুলিকে সংরক্ষণ প্রদান করা।

সপ্তমত, অনুন্নত দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নে শিল্প-সংরক্ষণের একটি বিরাট অবদান আছে। শিল্প-সংরক্ষণ নীতি অনুসরণ করার অন্যতম উপায় হচ্ছে আমদানি শুল্ক ধার্য করা। আমদানি শুল্ক ধার্য করার ফলে সরকার যে অতিরিক্ত রাজস্ব পেয়ে থাকে তা দেশের উন্নয়ন কর্মসূচীর অর্থসংস্থানের কাজে ব্যবহৃত হতে পারে। অর্থনৈতিক উন্নয়নের অর্থসংস্থান করার উৎস হিসাবে শিল্প-সংরক্ষণ নীতিকে কাজে লাগানো যেতে পারে। দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নের জন্য প্রচুর বৈদেশিক মুদ্রা প্রয়োজন হয়। সেই বৈদেশিক মুদ্রার সংস্থান হতে পারে শিল্প-সংরক্ষণ নীতির মাধ্যমে। আরেকটি উপায়ে শিল্প-সংরক্ষণ নীতি দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নের পক্ষে সহায়ক হতে পারে। শিল্প সংরক্ষণ নীতির ফলে আমদানির বিকল্প দ্রব্যগুলির উৎপাদন বাড়ে এবং যে সকল শিল্প-সংরক্ষণ প্রাপ্ত হয় সেগুলির উৎপাদন বাড়ে এবং তার ফলে কর্মসংস্থানেরও সম্প্রসারণ হয়। দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নের পক্ষে এটা বিশেষ সহায়ক। শিল্প-সংরক্ষণের ফলে দেশের রপ্তানি শিল্পের যে উন্নতি হয় তা-ও দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নের পক্ষে সহায়ক হয়।

সবশেষে, শ্রমিকদের মজুরির হার উঁচুতে রাখার জন্যও অনেকে শিল্প-সংরক্ষণ সমর্থন করেন। তাঁদের মতে যদি অবাধ বাণিজ্য প্রচলিত থাকে তবে যে দেশে মজুরির হার কম সেই দেশে উৎপাদন খরচ কম হবে এবং সেই দেশ উঁচু মজুরি হার-সম্পন্ন দেশগুলিকে প্রতিযোগিতায় হারিয়ে দেবে। সুতরাং উঁচু মজুরি হার বজায় রাখার জন্য শিল্পগুলিকে সংরক্ষণ প্রদান করা উচিত। কিন্তু এই যুক্তিটি ঠিক নয়। কারণ, শুধু মজুরির হার কম হলেই উৎপাদন খরচ কম হয় না।

৪.২.৩ শিল্প-সংরক্ষণের বিপক্ষে যুক্তি (Arguments Against Protection of Industries)

শিল্প-সংরক্ষণের বিপক্ষেও কতিপয় যুক্তি আছে।

প্রথমত, শিল্প-সংরক্ষণের ফলে আন্তর্জাতিক শ্রমবিভাগ বাধাপ্রাপ্ত হয়। কারণ, বিভিন্ন দেশে উৎপাদনের বিভিন্ন উপকরণগুলিকে নিজের দক্ষতা অনুযায়ী উৎপাদনে নিয়োগ করা সব সময় সম্ভব হয় না।

দ্বিতীয়ত, শিল্প-সংরক্ষণের ফলে উৎপাদনের জন্য বিদেশ থেকে যেসব উপাদান আমদানি করা হয় অথবা ভোগের জন্য যেসব দ্রব্য আমদানি করা হয়, সেগুলির উপর বেশি করে আমদানি শুল্ক দিতে হয়। সেজন্য দ্রব্যপত্রের উৎপাদন খরচ এবং দাম বেড়ে যায়।

তৃতীয়ত, আমদানি শুল্ক যদি খুব বাড়িয়ে দেওয়া যায় তবে আমদানির পরিমাণ কমে যায় এবং তখন এই খাতে সরকারের আয় কমে যায়।

চতুর্থত, শিশুশিল্প সংরক্ষণের যুক্তিটি চিরকাল চলতে পারে না। অনেক ক্ষেত্রে দেখা গেছে যে কোন কোন শিল্প শৈশব অবস্থায় সমুদয় বিপদ কাটিয়েও সরকারের কাছ থেকে সংরক্ষণ দাবি করে। এর ফলে সাধারণ ক্রেতাদের খুব অসুবিধা হয়। কারণ, তাতে বেশি দাম দিয়ে প্রয়োজনীয় দ্রব্য কিনতে হয়।

পঞ্চমত, সরকার ক্রমাগত যদি একটি শিল্প-সংরক্ষণ নীতি অবলম্বন করতে থাকে তবে আন্তর্জাতিক ক্ষেত্রে অর্থনৈতিক সহযোগিতার ক্ষেত্র অনেক কমে যায়। তাছাড়া, বৈদেশিক প্রতিযোগিতা কমে যাওয়ায় ব্যবসায়ীরাও অনেক সময় উৎপাদনের উৎকর্ষ বাড়াবার দিকে মনোনিবেশ করে না।

সবশেষে, অনেক ক্ষেত্রে বৈদেশিক প্রতিযোগিতা বন্ধ হয়ে গেলে দেশীয় শিল্পগুলি একজোট হয়ে একচেটিয়া সংঘ (monopolistic combination) প্রতিষ্ঠা করে জিনিসপত্রের দাম বাড়িয়ে দেয়। তাতে সাধারণ ক্রেতাদের অসুবিধা হয়।

৪.৩ বৈদেশিক সাহায্যের ক্ষেত্রে তিন ফাঁকের মডেল ('Three Gap' Model related to Foreign Aid)

বৈদেশিক বিনিয়োগ বা বৈদেশিক সাহায্যের ক্ষেত্রে সাধারণত দ্বৈত ফাঁকের বিশ্লেষণ (Dual Gap Analysis) বহুল প্রচারিত। এই দুটি ফাঁকের একটি হল বিনিয়োগ-সঞ্চয় ফাঁক (Investment-Saving Gap), এবং অপরটি হল আমদানি-রপ্তানির ফাঁক (Import-Export Gap) অথবা বৈদেশিক বিনিময় মুদ্রার ফাঁক (Foreign Exchange Gap)। এই দুটি ফাঁক ছাড়া আরও একটি ফাঁকের উল্লেখ করা যেতে পারে,—সেটা হল প্রযুক্তির ফাঁক (Technology Gap)। এই তিনটি ফাঁকের বিশ্লেষণের মাধ্যমে বৈদেশিক সাহায্যের গুরুত্ব বোঝা যায়।

জাতীয় আয়ের হিসাবে বিনিয়োগ-সঞ্চয়ের ফাঁক চূড়ান্ত পর্যায়ে আমদানি-রপ্তানি ফাঁকের সমান হয়। এটা এভাবে দেখানো যেতে পারে,

আয় (Income) = ভোগ (Consumption) + বিনিয়োগ (Investment) + রপ্তানি (Exports) − আমদানি (Imports)

অথবা $Y = C + I + X - M$ ...... (১)

যেখানে Y হল আয়, C হল ভোগ, I হল বিনিয়োগ, X হল রপ্তানি এবং M হল আমদানি। যেহেতু সঞ্চয় (S) হল আয় থেকে ভোগব্যয় বাদ দিলে যা থাকে তার সমান ($S = Y - C = I$) সেজন্য সঞ্চয় ও বিনিয়োগ পরস্পরের সমান।

অথবা, সঞ্চয় (Savings) = বিনিয়োগ (Investment) + রপ্তানি (Exports) – আমদানি (Imports)

অথবা; $S = I + X - M$ ...... (২)

অথবা, বিনিয়োগ – সঞ্চয় = আমদানি – রপ্তানি

অথবা, $I - S = M - X$ ...... (৩)

যদি রপ্তানি অপেক্ষা আমদানির উদ্বৃত্তের অর্থসংস্থান বৈদেশিক ঋণের সাহায্যে করা হয়, তবে একটি দেশের পক্ষে উৎপাদন অপেক্ষাও বেশি ব্যয় করা অথবা সঞ্চয় অপেক্ষাও বেশি বিনিয়োগ করা সম্ভব হয়।

উপরে সমীকরণ (৩)-এর বাঁদিকে হল বিনিয়োগ-সঞ্চয় ফাঁক এবং ডানদিকে হল আমদানি-রপ্তানির ফাঁক। হ্যারডের উন্নয়ন মডেলে উন্নয়ন হার নির্ভর করে সঞ্চয়-আয় অনুপাত এবং প্রান্তিক মূলধন-উৎপাদন অনুপাতের উপর। অর্থাৎ, $G = \frac{S}{C}$; এখানে G হল উন্নয়ন অথবা সমৃদ্ধির হার, S হল সঞ্চয়-আয় অনুপাত, C হল প্রান্তিক মূলধন-উৎপাদন অনুপাত। এটাকে এভাবেও দেখানো যায়, $G = SP$; এক্ষেত্রে P হল উৎপাদন-অনুপাত (Productivity ratio) অথবা $P = \frac{I}{C}$। অনুরূপভাবে সমৃদ্ধির হার এবং বিনিয়োগ দ্রব্য আমদানির মধ্যে সম্পর্ক প্রান্তিক উৎপাদন-আমদানি অনুপাত (m) দ্বারা বোঝানো যেতে পারে। অর্থাৎ, $G = im'$; এখানে i হল আমদানি অনুপাত। যদি প্রান্তিক উৎপাদন অনুপাত (P) এবং প্রান্তিক উৎপাদন-আমদানি অনুপাত স্থির থাকে তবে সমৃদ্ধির হার বাড়াবার জন্য প্রয়োজন হল সঞ্চয়-অনুপাত (S) এবং আমদানি-অনুপাতের (i) বৃদ্ধি। ধরা যাক, r হল লক্ষমাত্রা অনুযায়ী সমৃদ্ধির হার (target rate of growth)। সমৃদ্ধির হারের এই লক্ষমাত্রা অর্জন করতে হলে প্রয়োজনীয় সঞ্চয়-অনুপাত (S^*) হবে। $S^* = \frac{r}{p}$ এবং প্রয়োজনীয় আমদানি অনুপাত (i^*) হবে $I^* = \frac{r}{m'}$।

যদি অভ্যন্তরীণ সঞ্চয় সমৃদ্ধির হারের লক্ষমাত্রা অর্জনের জন্য যতটা প্রয়োজন তার চেয়ে কম হয় তবে আমরা বিনিয়োগ-সঞ্চয় ফাঁক (Investment-Saving Gap) দেখতে পাই। অর্থাৎ,

$$I_t - S_t = S^*Y_t - SY_t = \left(\frac{r}{p}\right)Y_t - SY_t \quad ...... (৪)$$

অনুরূপভাবে যদি সমৃদ্ধির হারের লক্ষমাত্রা অর্জনের জন্য সর্বনিম্ন আমদানির প্রয়োজন রপ্তানি থেকে প্রাপ্ত আয় অপেক্ষা বেশি হয়, তবে আমরা আমদানি-রপ্তানি ফাঁক (import-export gap) দেখতে পাই, অর্থাৎ

$$M_t - X_t = i^*Y_t - iY_t = \left(\frac{r}{m'}\right) Y_t - iY_t \qquad \ldots\ldots (৫)$$

এক্ষেত্রে রপ্তানির ভিত্তিতে i হল আমদানি-উৎপাদন অনুপাত (ratio of inports to output permitted by exports)।

দেশের অভ্যন্তরে বিভিন্ন উন্নয়ন প্রকল্পের অর্থসংস্থানের জন্য যা সঞ্চয়ের প্রয়োজন তার সাহায্যে যদি বিনিয়োগের অর্থসংস্থান করা সম্ভব না হয় তবে সেই ফাঁক দূর করার জন্য বিদেশ থেকে সাহায্য গ্রহণ করার প্রয়োজন হয়। আবার রপ্তানি থেকে যা আয় হয় তার সাহায্যে যদি প্রয়োজনীয় আমদানির অর্থসংস্থান করা সম্ভব না হয় তবে আন্তর্জাতিক বাণিজ্যে বৈদেশিক লেনদেন ব্যালান্সে ঘাটতির সৃষ্টি হয় এবং এই আমদানি-রপ্তানির ফাঁক দূর করার জন্য বৈদেশিক ঋণের আশ্রয় গ্রহণ করা হয়। এক্ষেত্রে উল্লেখ করা যেতে পারে যে আন্তর্জাতিক অর্থভাণ্ডার (International Monetary Fund) বৈদেশিক মুদ্রার ফাঁক (Foreign Exchange Gap) দূর করার জন্য ঋণ দিয়ে থাকে। অপরদিকে দেশের অভ্যন্তরীণ সঞ্চয় কম থাকলে অথবা বিনিয়োগ-সঞ্চয় ফাঁক থাকলে উন্নয়ন প্রকল্পের বিনিয়োগের অর্থসংস্থানের জন্য বিশ্বব্যাংক সাহায্য করে থাকে।

এই দ্বৈত ফাঁকের বিশ্লেষণ (Dual Gap Model) ছাড়াও তৃতীয় একটি ফাঁকের উল্লেখ করা যেতে পারে—সেটা হল প্রযুক্তিগত ফাঁক (Technological Gap)। উন্নত দেশগুলি প্রযুক্তিবিদ্যায় উন্নত—স্বল্পোন্নত দেশগুলি আধুনিক প্রযুক্তি প্রয়োগে পিছিয়ে আছে। উন্নত দেশগুলি থেকে প্রযুক্তিগত সাহায্য নিয়ে স্বল্পোন্নত দেশগুলি আধুনিক প্রযুক্তি প্রয়োগ করতে পারে। এভাবে প্রযুক্তির স্থানান্তর (Transfer of Technology) বিদেশী সাহায্য গ্রহণের পক্ষে একটি গুরুত্বপূর্ণ যুক্তি।

প্রযুক্তির ফাঁক পূরণ করার জন্য বৈদেশিক প্রযুক্তি ধার করতে হয় এবং এজন্য প্রয়োজন হল প্রচুর পরিমাণ আমদানি। এই আমদানির প্রয়োজন মেটানোর জন্য বিদেশী সাহায্যের উপর নির্ভর করতে হয়। উন্নত ধরনের উৎপাদন-কৌশল প্রয়োগ করার মতো উদ্ভাবনী শক্তি উন্নত দেশে যতটা পরিলক্ষিত হয়, স্বল্পোন্নত দেশে সেটাই পরিলক্ষিত হয় না। বিদেশী প্রযুক্তির সাহায্যেই এই ফাঁক দূর করা সম্ভব হয়।

৪.৪ বৈদেশিক সাহায্যের বিভিন্ন রূপ (Different Types of Foreign Aid)

বৈদেশিক সাহায্য নানা রকমের হতে পারে। সাধারণত, বৈদেশিক বাণিজ্যে ঘাটতি হলে সেই ঘাটতি দূর করার জন্য বিদেশ থেকে সাহায্য নেওয়ার প্রয়োজন। এই সাহায্য দুইভাবে আসতে পারে, একটি হল ঋণ (Loan) এবং অপরটি হল অনুদান (Grants)।

বৈদেশিক ঋণ স্বল্পমেয়াদী, মধ্যমেয়াদী অথবা দীর্ঘমেয়াদী হতে পারে। যদি বৈদেশিক ঋণের উপর চড়া হারে সুদ ধার্য করা না হয় তবে তাকে নরম ঋণ (soft loan) বলা হয়। আর যদি সুদের হার খুব বেশি হয় তবে সেই বৈদেশিক ঋণকে কঠিন ঋণ (hard loan) বলা হয়। বৈদেশিক ঋণ অনেক ক্ষেত্রে শর্ত সাপেক্ষ (tied) থাকে। যেমন, কোনো দেশ ভারতকে এই শর্তে ঋণ দিল যে ভারত সেই দেশ থেকে কতিপয় দ্রব্য আমদানি করতে বাধ্য থাকবে। এই ধরনের ঋণকে বাঁধা ঋণও (tied loan) বলা হয়। কারণ এখানে ঋণ গ্রহণ করতে গিয়ে কতিপয় বাধ্যবাধকতার বাঁধায় থাকতে হয়।

আবার শর্তসাপেক্ষ ঋণ প্রকল্পভিত্তিকও হতে পারে। যেমন কোনো একটি বিশেষ প্রকল্পের জন্য ঋণ (project loan) পাওয়া যেতে পারে এবং এই ঋণের টাকা ব্যবহার করার জন্য একটি সময়সীমা থাকতে পারে। কোনো নির্দিষ্ট প্রকল্পের জন্য বিদেশ থেকে সাহায্য পাওয়া গেলে সেই টাকা শুধুমাত্র নির্দিষ্ট প্রকল্পটির জন্যই ব্যয় করা হয়। অন্য কোনো খাতে সেই সাহায্য বা ঋণের টাকা খরচ করা যায় না। উদাহরণস্বরূপ বলা যেতে পারে, কলকাতা মহানগরীর উন্নয়নের জন্য বিশ্ব ব্যাংক যে ঋণ দিয়েছে, তা শুধু এই মহানগরীর উন্নয়নের জন্যই খরচা করা হয়েছে এবং এই খাতে ঋণের টাকা কিভাবে সদ্ব্যবহার করা হচ্ছে তার একটি প্রতিবেদন সরকারকে বিশ্বব্যাংকের পাছে পাঠাতে হয়। অনেক সময় বিশ্বব্যাংকের প্রতিনিধিরা উন্নয়ন কাজের অগ্রগতি প্রত্যক্ষ করার জন্য এদেশে আসেন।

আন্তর্জাতিক অর্থভাণ্ডার যখন কোনো দেশকে বৈদেশিক মুদ্রা দিয়ে সাহায্য করে তখনও অনেক ক্ষেত্রে কিছু কিছু শর্ত থাকে—বিশেষ করে দেশের ভিতর কিভাবে আর্থিক শৃঙ্খলা বজায় রাখতে হবে সে সম্পর্কে আন্তর্জাতিক অর্থভাণ্ডার অনেক নির্দেশ পাঠায়।

বৈদেশিক সাহায্য অনেকক্ষেত্রে দ্বিপাক্ষিক (bilateral) এবং অনেকক্ষেত্রে বহুপাক্ষিক (multilateral) হতে পারে। দুইটি দেশের মধ্যে চুক্তির ফলে যদি একটি দেশ অপরদেশকে ঋণ দেয় অথবা বাণিজ্যিক সুবিধা প্রদান করে—তবে সেটা হল দ্বিপাক্ষিক সাহায্য। আবার বিভিন্ন দেশ একসঙ্গে একটি দেশকে সাহায্য দিতে অঙ্গীকারবদ্ধ হতে পারে,—অথবা বাণিজ্যিক চুক্তি করতে পারে। সেক্ষেত্রে সেই সাহায্য হল

বহুপাক্ষিক। বিশ্ব-ব্যাংকের উদ্যোগে ভারত আগে ভারত সাহায্য সংস্থা (Aid India Consortium) থেকে বহুপাক্ষিক সাহায্য পেয়েছে। আবার পূর্বতন সোভিয়েত যুক্তরাষ্ট্রের সঙ্গে ভারত দ্বিপাক্ষিক সাহায্যের চুক্তিতে আবদ্ধ ছিল। দুর্গাপুর, রাউরকেল্লা প্রভৃতি স্থানের ইস্পাত কারখানাগুলি যথাক্রমে ব্রিটেন, পূর্বতন সোভিয়েত ইউনিয়ন এবং পূর্বতন পশ্চিম জার্মানির সঙ্গে দ্বিপাক্ষিক সাহায্য চুক্তির ফলে স্থাপিত হয়েছিল।

৪.৪.১ আন্তর্জাতিক ক্ষেত্রে দীর্ঘমেয়াদী ও স্বল্পমেয়াদী সাহায্য অথবা ঋণের উৎস (Sources of long-term and short-term aid or loans in the international sphere)

আন্তর্জাতিক ক্ষেত্রে দীর্ঘমেয়াদী ও স্বল্পমেয়াদী সাহায্য অথবা ঋণের উৎস হচ্ছে :

(১) আন্তর্জাতিক সংস্থা, যেমন বৈদেশিক লেনদেন ব্যালান্সে ঘাটতি দূর করার জন্য আন্তর্জাতিক অর্থভাণ্ডার (International Monetary Fund) থেকে ঋণ, বিশ্বব্যাংক (World Bank or Internaitondl Bank for Reconstruction and Development), আন্তর্জাতিক অর্থ সরবরাহ কর্পোরেশন (International Finance Corporation) প্রভৃতি ;

(২) রাষ্ট্রসংঘের বিভিন্ন এজেন্সী ;

(৩) বিশ্বব্যাংক কর্তৃক গঠিত বিভিন্ন দেশের জন্য গঠিত সাহায্য সংস্থা, যেমন পূর্বতন ভারত সাহায্য সংস্থা (Aid India Consortium) ;

(৪) বিভিন্ন বৈদেশিক রাষ্ট্র ;

(৫) বৈদেশিক কোম্পানী (যেমন জার্মানির Demag and Krupp এবং জাপানের Mitsubisi) ;

(৬) বৈদেশিক বাণিজ্যিক ব্যাংক ;

(৭) বৈদেশিক সাহায্য প্রদানকারী সংস্থা (যেমন ফোর্ড ফাউন্ডেশন) ;

(৮) এশিয়ার রাষ্ট্রগুলির জন্য এশিয়ান ব্যাংক (Asian Bank) এবং

(৯) আন্তর্জাতিক উন্নয়ন সংস্থা (International Development Association)।

আন্তর্জাতিক অর্থভাণ্ডারের কোনো সদস্য রাষ্ট্র বৈদেশিক বিনিময় মুদ্রার স্বল্পকালীন বা সাময়িক প্রয়োজন মেটাবার জন্য আন্তর্জাতিক অর্থভাণ্ডার থেকে স্বল্পকালীন ঋণের সুবিধা গ্রহণ করতে পারে। কোনো দেশের যদি ঋণের কোটা (quota) সম্পূর্ণভাবে ব্যবহার করা হয়ে গিয়ে থাকে, তবে সে দেশ অন্য কোনো রাষ্ট্রের

'কোটা' থেকে সাময়িকভাবে বৈদেশিক বিনিময় মুদ্রা ধার করতে পারে ; আন্তর্জাতিক অর্থভান্ডার সদস্য রাষ্ট্রগুলিকে এই সুবিধা দিয়ে থাকে।

কোনো দেশে বৈদেশিক মূলধন নানাভাবে আসতে পারে। প্রত্যক্ষভাবে একটি বিদেশী কোম্পানি অথবা বিদেশী সরকার কোনো দেশে মূলধন বিনিয়োগ করতে পারে। অনগ্রসর দেশগুলির বহু বিনিয়োগের ক্ষেত্রে উন্নত দেশগুলি থেকে মূলধন গ্রহণ করা হয়ে থাকে। ভারতে ব্রিটেনের সহযোগিতায় দুর্গাপুর ইস্পাত কারখানা, পূর্বতন পশ্চিম জার্মানির সহযোগিতায় রাউরকেল্লা ইস্পাত কারখানা এবং পূর্বতন সোভিয়েত ইউনিয়নের সহযোগিতায় ভিলাই ও বোকারো ইস্পাত কারখানা স্থাপিত হয়েছে। বিদেশী সহযোগিতায় বেসরকারি ক্ষেত্রেও শিল্প-বিনিয়োগ হতে পারে। আবার একটি দেশের সরকার অপর দেশের সরকারের সঙ্গে সাহায্য প্রদান বা সাহায্য গ্রহণের চুক্তিতে আবদ্ধ হতে পারে। আন্তর্জাতিক সংস্থা অথবা এজেন্সিগুলি থেকে এবং আন্তর্জাতিক বাণিজ্যিক ব্যাংকগুলি থেকেও কোনো দেশ সাহায্য গ্রহণ করতে পারে।

কোনো দেশ যখন বৈদেশিক লেনদেন ব্যালান্সে ঘাটতির সম্মুখীন হয় তখন সে দেশের পক্ষে আমদানির সম্পূর্ণ মূল্য প্রদান করা, পূর্বতন বৈদেশিক ঋণের উপর সুদ প্রদান করা এবং মেয়াদ পূরণ হচ্ছে এ জাতীয় ঋণ পরিশোধ করাই সমস্যা হয়ে দাঁড়ায়। তখন সে দেশকে পুনরায় বিদেশ থেকে ঋণ অথবা সাহায্য গ্রহণ করে এই সমস্যাগুলির মোকাবিলা করতে হয়। অনেক সময় ঋণ পরিশোধের সময় পিছিয়ে দিয়েও উত্তমর্ণ দেশ অধমর্ণ দেশকে সাহায্য করতে পারে।

৪.৪.২ অর্থনৈতিক উন্নয়নে বৈদেশিক সাহায্যের ভূমিকা (Role of Foreign Aid in Economic Developemnt)

স্বল্পোন্নত দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নে বৈদেশিক সাহায্যের গুরুত্ব অপরিসীম। অর্থনৈতিক উন্নয়নের জন্য বৈদেশিক সাহায্য গ্রহণের পক্ষে নিম্নলিখিত যুক্তিগুলি দেওয়া হয়ে থাকে।

(১) অর্থনৈতিক উন্নয়নের জন্য যে বিপুল পরিমাণ আর্থিক সম্পদের প্রয়োজন হয়, তা যদি অভ্যন্তরীণ সম্পদের সাহায্যে মেটানো সম্ভব না হয় তবে অনগ্রসর দেশকে বৈদেশিক সাহায্যের উপর নির্ভর করতে হয়।

(২) দেশের রপ্তানি বাণিজ্যের পরিমাণ অপেক্ষা যদি আমদানি বাণিজ্যের পরিমাণ বেশি হয়, অর্থাৎ যদি বাণিজ্য ব্যালান্সে ঘাটতি থাকে তবে সে ঘাটতি পূরণ করার জন্য যে অতিরিক্ত বৈদেশিক বিনিময় মুদ্রার প্রয়োজন হয়, তা বৈদেশিক সাহায্য থেকে পাওয়া যায়। ভারতকে এজন্য বৈদেশিক সাহায্যের উপর যথেষ্ট নির্ভর করতে হয়েছে।

(৩) বৈদেশিক সাহায্য যে শুধু অর্থ হিসাবে গ্রহণ করা হয় তা নয়, অনেক সময় অনগ্রসর দেশে বিদেশী কারিগরদের সাহায্য পাওয়া যায় এবং তাদের নৈপুণ্যের সাহায্যে দেশের শ্রমিকদের কর্ম-নিপুণ করে তোলার

জন্য প্রশিক্ষণ প্রদান করা যায়। অনেক ক্ষেত্রে নতুন শিল্প-প্রতিষ্ঠান স্থাপন করবার জন্য ভারতকে বিদেশের উপর নির্ভর করতে হয়েছে। বৈদেশিক সাহায্যের ফলে উন্নত দেশ থেকে অনগ্রসর দেশে উন্নত প্রযুক্তিবিদ্যার স্থানান্তর (transfer of technology) হয়। দুর্গাপুর, ভিলাই, রাউরকেল্লা, বোকারো প্রভৃতি ইস্পাত কারখানা এবং হেভি ইঞ্জিনিয়ারিং কর্পোরেশন বিদেশের সাহায্যে স্থাপিত হয়েছে। বিদেশের সাহায্য ছাড়া এই ইস্পাত কারখানাগুলি স্থাপন করা ভারতের পক্ষে তখন অসম্ভব ছিল। দেশের শিল্পোৎপাদন বৃদ্ধি, কর্মসংস্থানের সম্প্রসারণ এবং শিল্পক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় যন্ত্রপাতি ও কাঁচামাল বিদেশ থেকে আমদানির ক্ষেত্রে বৈদেশিক সাহায্যের ভূমিকা খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

(৪) ভারতের মতো স্বল্পোন্নত দেশে অর্থনৈতিক পরিকল্পনার সাফল্যের জন্য বৈদেশিক সাহায্য অপরিহার্য। শুধু ভারত নয়, যেকোনো উন্নয়নশীল দেশের পক্ষেই বৈদেশিক সাহায্যের গুরুত্ব অনস্বীকার্য। উন্নতিকামী দেশগুলিতে অর্থনৈতিক উন্নয়নের অর্থসংস্থানের জন্য যে বিপুল পরিমাণ অর্থের প্রয়োজন, জনসাধারণের উপর কর ধার্য করে যে রাজস্ব পাওয়া যায় তা থেকে সেই অর্থ পাওয়া যায় না। নূতন মুদ্রা ছেপে বা বাজেট ঘাটতির অর্থসংস্থান করেও উন্নয়নের সম্পূর্ণ অর্থসংস্থান করা সম্ভব নয়, উচিতও নয়। কারণ, নূতন মুদ্রা ছেপে যদি দেশের উন্নয়নের অর্থসংস্থান করা হয় তবে তার একটি নিরাপদ সীমা (safe limit) থাকা দরকার। সেই সীমা পেরিয়ে গেলেই দেশে মুদ্রাস্ফীতির তীব্রতা বাড়বে।

(৫) শুধু অর্থসাহায্য নয়, বিদেশী কারিগরি সাহায্য এক্ষেত্রে আরও বেশি গুরুত্বপূর্ণ। যেকোনো উন্নতিকামী দেশেই আধুনিক প্রযুক্তির প্রয়োগ করতে হলে বিদেশের উপর নির্ভর করতে হয়। বেকার সমস্যার সমাধান করার জন্য নূতন শিল্প-কারখানা স্থাপন করতে গেলেও বিদেশী সাহায্যের প্রয়োজন হয়। দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নে এর গুরুত্ব খুবই বেশি।

৪.৪.৩ বৈদেশিক সাহায্যের ক্ষেত্রে সমস্যা (Problems related to Foreign Aid)

বৈদেশিক ঋণের ক্ষেত্রে প্রধান সমস্যা হল, সময়মত ঋণের উপর সুদ প্রদান করা ও ঋণ পরিশোধ করা। ঋণের উপর সুদ প্রদান করা অথবা ঋণ পরিশোধ করতে হয় বৈদেশিক বিনিময় মুদ্রায়। এই বৈদেশিক বিনিময় মুদ্রার উৎস হল দেশের রপ্তানি-আয়। যদি দেশের মোট আমদানির মূল্য রপ্তানি-আয়ের চেয়ে বেশি হয় তবে দেশকে প্রচণ্ড বৈদেশিক মুদ্রা সংকটের সম্মুখীন হতে হয়। কারণ, সেক্ষেত্রে রপ্তানি-আয় থেকে প্রাপ্ত বৈদেশিক মুদ্রায় আমদানির মূল্য পুরোপুরি পরিশোধ করা সম্ভব হয় না। অথচ পূর্বতন বৈদেশিক ঋণের উপর সুদ প্রদান করা ও ঋণ পরিশোধ করার একটি বাধ্যবাধকতা থাকে। সেজন্য তখন আবার নূতন করে বিদেশ থেকে ঋণ নিয়ে পুরাতন ঋণের উপর সুদ দেওয়া, ঋণ পরিশোধ করা অথবা আমদানির মূল্য পরিশোধ করা প্রভৃতির ব্যবস্থা করতে হয়। এভাবে উন্নতিকামী দেশগুলি (আমাদের দেশসহ) ঋণের ফাঁদে (debt trap) জড়িয়ে পড়ে।

তবে শিল্পোন্নয়নের জন্য বিদেশ থেকে উন্নত ধরনের প্রযুক্তির সাহায্য এবং কারিগরি সাহায্য নেওয়ার প্রয়োজন খুবই বেশি। প্রযুক্তির স্থানান্তর (Transfer of Technology) এক্ষেত্রে বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। অনেক ক্ষেত্রে বহুজাতিক শিল্প কোম্পানিগুলির মাধ্যমেও (Multinational Industrial Companies) বিদেশী প্রযুক্তির হস্তান্তর হয়ে থাকে।

প্রযুক্তির স্থানান্তরের ক্ষেত্রেও একটি সমস্যার সৃষ্টি হতে পারে ; সেটা হল, উন্নত ধরনের প্রযুক্তি আত্মস্থ করার ক্ষমতা বা দেশের শিল্পে তার যথাযথভাবে প্রয়োগ করার সামর্থ্য স্বল্পোন্নত দেশের না-ও থাকতে পারে। উন্নত ধরনের প্রযুক্তি প্রয়োগ করার আগে স্বল্পোন্নত দেশগুলিকে দক্ষ কর্মী তৈরি করতে হয়। আরেকটি সমস্যা হল, যে প্রকল্পের জন্য বিদেশী ঋণ দেওয়া হয়, সেই প্রকল্পে নির্দিষ্ট সময়সীমার মধ্যে ঋণের টাকা ব্যয় করতে না পারলে টাকাটা ঋণদাতার কাছে ফেরৎ চলে যায়। বিদেশ থেকে ঋণ গ্রহণ করতে হলে, ঋণের শর্ত অবশ্যই পালন করতে হয়, এর ফলে অনেক ক্ষেত্রে ঋণগ্রহণকারী দেশের অর্থনৈতিক সার্বভৌমত্ব ক্ষুণ্ণ হতে পারে।

৪.৪.৪ বৈদেশিক সাহায্য গ্রহণের কুফল (Demerits of Foreign Aid)

(১) কোনো কোনো ক্ষেত্রে বৈদেশিক সাহায্য গ্রহণ যে দেশের পক্ষে ক্ষতিকর হয় না তা নয়। অনেক ক্ষেত্রে এমন শর্তাধীনে বৈদেশিক সাহায্য গ্রহণ করা হয় যার ফলে দেশে টাকার মূল্য কমে যেতে পারে অথবা অর্থনৈতিক ক্ষেত্রে বিদেশী প্রভুত্বকে স্বীকার করে নেওয়া যেতে পারে।

(২) বিদেশ থেকে সাহায্য গ্রহণের সঙ্গে জড়িত আছে ঋণ পরিশোধের অথবা ঋণের উপর সুদ প্রদান করার সমস্যা। তাছাড়া বিদেশী সাহায্য ঠিকভাবে ব্যবহার না করতে পারলেও অনেক সমস্যার সৃষ্টি হয়। বিদেশ থেকে প্রকল্পভিত্তিক ঋণ গ্রহণ করা হলে ঋণের টাকা সংশ্লিষ্ট প্রকল্পের জন্যই খরচ করতে হয়।

(৩) বৈদেশিক সাহায্য গ্রহণ করলেই যে দেশের শ্রমিকদের নৈপুণ্য-সৃষ্টি (skill formation) হবে তা নয়। শ্রমিকদের নৈপুণ্য সৃষ্টি বাড়াবার ব্যবস্থা করা বিদেশী সাহায্য ছাড়াও সম্ভব। আবার অনেকক্ষেত্রে দেখা যায়, উপযুক্ত কর্মনিপুণ শ্রমিক বা কারিগরের অভাবে অনগ্রসর দেশে উন্নত ধরনের প্রযুক্তিবিদ্যার (যা বিদেশ থেকে সাহায্য বাবদ আসতে পারে) সদ্ব্যবহার করা সম্ভব হয় না।

(৪) বিদেশী ঋণ পরিশোধের সমস্যাটি খুব গুরুত্বপূর্ণ। অনেকক্ষেত্রে একটি বৈদেশিক ঋণ পরিশোধ করার জন্য আরেকটি বৈদেশিক ঋণ গ্রহণ করতে হয়। একটি দেশ যদি ক্রমাগত বৈদেশিক সাহায্যের উপর নির্ভরশীল থাকে, এবং দেশের অভ্যন্তরীণ সম্পদ আহরণ করার ক্ষেত্রে অথবা উন্নয়ন হার বাড়াবার ক্ষেত্রে ব্যর্থ হয়, তবে সেই দেশের অর্থনীতি চূড়ান্ত পর্যায়ে পঙ্গু হয়ে যায়। বিদেশ থেকে সংগৃহীত ঋণ ও অনুদান যদি ঠিকভাবে

বিনিয়োগ না করা হয় অথবা উৎপাদন বাড়াবার কাজে ঠিকভাবে ব্যবহার না করা হয়, তবে সেটি দেশে মুদ্রাস্ফীতি সৃষ্টি করতে পারে এবং অর্থনৈতিক স্থিতিশীলতা নষ্ট করতে পারে।

(৫) অনেক ক্ষেত্রে বিদেশী লগ্নীকারদের মূল লক্ষ্য থাকে শুধু নিজেদের লাভের মোট। অঙ্ক বৃদ্ধি করা, স্বল্পোন্নত দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়ন নয়। এজন্য অনেক ক্ষেত্রে স্বল্পোন্নত দেশের শ্রমিকদের কর্মনৈপুণ্য সৃষ্টির (skill formation) জন্য তাদের উপযুক্ত কারিগরি শিক্ষা প্রদানের অনিচ্ছা বা উৎসাহের অভাব বিদেশী লগ্নীকারকদের মধ্যে দেখা গেছে (যেমন ভারতে)। স্বল্পোন্নত দেশগুলির অধিবাসীদের একটি আশঙ্কা হল, বৈদেশিক সাহায্যের জাল যত বিস্তৃত হবে, অর্থনৈতিক সাম্রাজ্যবাদের পথও তত প্রশস্ত হবে।

৪.৪.৫ বাণিজ্য বনাম সাহায্য (Trade vs. Aid)

আধুনিক অর্থবিজ্ঞানীগণ 'বাণিজ্য ফাঁক' দূর করার জন্য রপ্তানি বৃদ্ধির উপর অধিকতর গুরুত্ব আরোপ করেন। এক্ষেত্রে বাণিজ্য বনাম সাহায্য (Trade vs. Aid) সম্পর্কে কয়েকটি যুক্তির অবতারণা করা যেতে পারে।

বৈদেশিক বাণিজ্যকে বলা হয় সমৃদ্ধির চালিকা-শক্তি (Engine of growth)। অপরদিকে বৈদেশিক সাহায্য হল বাহ্যিক উৎস থেকে সম্পদ আহরণের একটি পন্থা। যদি রপ্তানিযোগ্য সামগ্রীর উৎপাদন বাড়িয়ে অধিক পরিমাণ বৈদেশিক মুদ্রা অর্জন করা যায় তবে বৈদেশিক ঋণের উপর নির্ভরতা কমে যায়,—এবং পূর্বতন বৈদেশিক ঋণ পরিশোধ করা সহজ হয়। কিন্তু অনেকক্ষেত্রে রপ্তানিযোগ্য দ্রব্যের উৎপাদনও কাঁচামাল অথবা যন্ত্রপাতি আমদানির উপর নির্ভরশীল। রপ্তানির সহায়ক আমদানির জন্যও স্বল্পোন্নত দেশকে বৈদেশিক সাহায্যের উপর নির্ভর করতে হয়। আবার বিদেশ থেকে প্রযুক্তিবিদ্যার স্থানান্তর (transfer of technology) না হলে অথবা বিদেশ থেকে কারিগরি সাহায্য না পেলে অনেকক্ষেত্রে দেশের ভিতর উৎপাদন বাড়াবার লক্ষ্য পূরণ হয় না।

রপ্তানি বাণিজ্যের উন্নয়নের দিকে গুরুত্ব আরোপ না করে ক্রমাগত বৈদেশিক সাহায্য ও ঋণের উপর নির্ভর করলে চূড়ান্ত পর্যায়ে একটি অর্থনীতিকে ঋণের ফাঁকে (debt trap) জড়িয়ে পড়তে হয়। যদি রপ্তানি-আয় আশানুরূপ না বাড়ে এবং উপার্জিত রপ্তানি-আয়ের সবটাই যদি আমদানির জন্য ব্যয় করা হয় তবে উন্নয়নশীল দেশগুলিকে পুরাতন ঋণ পরিশোধ করা বা তার উপর সুদ দেওয়ার জন্য নূতন ঋণ গ্রহণ করতে হয়। এভাবেই ঋণ সংকটের সৃষ্টি হয়। রপ্তানি-চালিত উন্নয়ন (export-led growth) অর্জন করার জন্যও বৈদেশিক মূলধনের আগমন প্রয়োজন ; কারণ সরকারি ও বেসরকারি বাণিজ্যে নূতন মূলধন প্রবাহ দেশে নূতন উৎপাদনী শক্তি সৃষ্টির প্রয়াসের ক্ষেত্রে অর্থসংস্থান করতে পারে। এক্ষেত্রে আরেকটি জিনিস মনে রাখা দরকার, শুধু রপ্তানিচালিত উন্নয়ন

নীতিই বৈদেশিক মুদ্রা সংকট লাঘব করতে পারে না। রপ্তানি সামগ্রীর জন্য বিদেশে বাজার তৈরি করা এবং বিদেশীদের চাহিদার মান অনুযায়ী সেগুলির গুণগতমান উন্নত করাও খুবই জরুরী। বর্তমানে অনেকে উন্নয়ন-চালিত রপ্তানির (growth-led exports) কথা বলে থাকেন। অর্থাৎ এক্ষেত্রে দেশের উৎপাদন বৃদ্ধি ও অর্থনৈতিক উন্নয়নের অঙ্গ হিসাবে রপ্তানির পরিমাণ বাড়াবারও কর্মসূচী গৃহীত হয়। কিন্তু বৈদেশিক সাহায্য ও প্রযুক্তি ছাড়া স্বল্পোন্নত দেশে উন্নয়ন কতটা হবে সে বিষয়েও সন্দেহের অবকাশ আছে। বিশেষ করে উন্নয়ন-প্রচেষ্টার প্রাথমিক পর্যায়ে বৈদেশিক সাহায্যের গুরুত্ব অপরিসীম। আবার উন্নয়ন হার বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে রপ্তানি-দ্রব্যের উৎপাদন ও রপ্তানি-বাজারের সম্প্রসারণ হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে বৈদেশিক সাহায্যের উপরও নির্ভরতা কমে আসে। যদি বৈদেশিক সাহায্য বলতে আমরা সম্পদের স্বাধীন স্থানান্তর (free transfer of resources) ধরে নিই, তবে অধ্যাপক এইচ. জি. জনসনের (H.G. Johnson) মতে রপ্তানি হিসাবে প্রাপ্ত এক ইউনিট বৈদেশিক মুদ্রা সাহায্য হিসাবে প্রাপ্ত এক ইউনিট বৈদেশিক মুদ্রা অর্জন করার সঙ্গে আমদানির বিকল্পীকরণ (import substitution) বাবদ ব্যয়ের পরিমাণও ধরতে হবে। আমদানির পরিবর্ততার জন্য অতিরিক্ত ব্যয়ের সঙ্গে সঙ্গে রপ্তানির গুরুত্ব বাড়বে। অপরদিকে শর্তহীন বৈদেশিক সাহায্য পাওয়া গেলে সেটাকে উৎপাদন বৃদ্ধির কাজে সহজে ব্যবহার করা সম্ভব হয়।

পরিশেষে বলা যায় স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে রপ্তানি বৃদ্ধির প্রয়োজনীয়তা খুবই বেশি ; তবে এই দেশগুলিতে এখনও রপ্তানি আয় বৈদেশিক সাহায্যের বিকল্প হয়ে উঠতে পারেনি। একটি আরেকটির পরিপূরক হতে পারে।

৪.৫ সারাংশ

১। সমৃদ্ধির চালিকা শক্তি হিসাবে বাণিজ্য (Trade as an engine of Growth)

আন্তর্জাতিক বাণিজ্য সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি হিসাবে কাজ করে বলে অনেকে মনে করেন। রপ্তানির বৃদ্ধি এবং আমদানির পরিবর্ততা উভয়ই কোনো দেশকে সমৃদ্ধির পথে এগিয়ে যেতে সাহায্য করে। রপ্তানিযোগ্য দ্রব্যের উৎপাদন বাড়লে তার একটি অন্তর্বর্তী যোগসূত্র ও পশ্চাদবর্তী যোগসূত্রের প্রভাব পরিলক্ষিত হয়। বিদেশে এই দ্রব্যগুলির জন্য চাহিদা বাড়লে এবং এর ফলে এই দ্রব্যগুলির রপ্তানি বাড়লে বৈদেশিক-বাণিজ্যগুণক কার্যকর হয়। প্রেবিশ ও সিঙ্গারের যুক্তি অনুযায়ী স্বল্পোন্নত দেশগুলির রপ্তানির মধ্যে প্রাথমিক পণ্যের প্রাধান্য থাকায় এবং আমদানির ক্ষেত্রে ধনী দেশগুলির শিল্পজাত পণ্যের প্রাধান্য থাকায় স্বল্পোন্নত দেশগুলির বাণিজ্যশর্তের অবনতি ঘটে। এজন্য স্বল্পোন্নত দেশগুলির উচিত, চিরাচরিত রপ্তানির উপর নির্ভরশীল না থেকে রপ্তানি বাণিজ্যে বৈচিত্র্য আনা এবং বিদেশে রপ্তানি বাজার সম্প্রসারিত করার চেষ্টা করা। স্বল্পোন্নত দেশগুলির রপ্তানি বাণিজ্য

সম্প্রসারিত হলে যে বৈদেশিক মুদ্রা অর্জিত হয় তার সাহায্যে শিল্পায়নের জন্য প্রয়োজনীয় যন্ত্রপাতি ও কাঁচামাল আমদানি করা সম্ভব হয়। যদি উন্নত দেশগুলির অর্থনৈতিক উন্নয়ন এবং উন্নয়নশীল দেশগুলির রপ্তানি সম্প্রসারণের মধ্যে একটি স্থিতিশীল সম্পর্ক বজায় থাকে, তবে বাণিজ্য যে সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি, এই যুক্তিটির সারবত্তা দেখতে পাওয়া যায়। রপ্তানি যদি সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি হয় তবে বাণিজ্যে উন্নত দেশগুলি থেকে সমৃদ্ধির কারণগুলি উন্নয়নশীল দেশগুলিতে সঞ্চারিত হয়।

২। রপ্তানি বৃদ্ধি ও অর্থনৈতিক উন্নয়ন (Export Promotion and Economic Development)

অর্থনৈতিক উন্নয়নে রপ্তানি বৃদ্ধির গুরুত্ব অপরিসীম। রপ্তানি বৃদ্ধি থেকে যে আয় হয় তার সাহায্যে দেশের প্রয়োজনীয় আমদানির অর্থসংস্থান করা সম্ভব হয়। বাণিজ্য ঘাটতি উন্নয়নশীল দেশকে বিদেশী ঋণের উপর নির্ভরশীল করে রাখে ; এই অবস্থা থেকে মুক্তি পেতে হলে উন্নয়নশীল দেশগুলিকে রপ্তানি সম্প্রসারণের উপর বিশেষ নজর দিতে হয়। তাছাড়া, রপ্তানিযোগ্য দ্রব্যের উৎপাদন বাড়লে উৎপাদনকারী দেশগুলিতে কর্মনিয়োগের সুযোগ বাড়ে। রপ্তানি থেকে কোনো দেশের যা আয় হয় তার উপযুক্ত বিনিয়োগ হলে বৈদেশিক বাণিজ্য গুণক কার্যকর হয়। রপ্তানি সম্প্রসারণের মাধ্যমে সমৃদ্ধি অর্জন করার জন্য রপ্তানি বাণিজ্যে বৈচিত্র্য আনা দরকার এবং রপ্তানিযোগ্য দ্রব্যের গুণগত মান বজায় রেখে সেগুলির যোগান অব্যাহত রাখা দরকার। রপ্তানি থেকে যে বৈদেশিক মুদ্রা অর্জিত হয় তার সাহায্যে বিদেশী ঋণ পরিশোধ করা ও সেই ঋণের উপর সুদ প্রদান করা সম্ভব হয়।

৩। আমদানির পরিবর্ততা (Import Substitution)

আমদানি পরিবর্ততা বা আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদনের পক্ষে যুক্তি হল—(১) এর ফলে আমদানিজনিত বৈদেশিক মুদ্রার বহির্গমন এড়ানো সম্ভব হয় ; (২) আমদানির বিকল্প দ্রব্যের তৈরি বাজার দেশের মধ্যেই পাওয়া যায় ; (৩) দেশের ভিতর শিল্পোৎপাদন বাড়ে ; (৪) রপ্তানিদ্রব্যের জন্য প্রয়োজনীয় আমদানির বিকল্প দেশের ভিতর উৎপাদিত হলে রপ্তানি বেড়ে যাবার সম্ভাবনা থাকে ; (৫) দেশের ভিতর উৎপাদনের কলা-কৌশল উন্নত হবার সম্ভাবনা থাকে এবং কর্মনিয়োগের সম্ভাবনাও বাড়ে। আমদানির পরিবর্ততা একটি নির্দিষ্ট মাত্রা পর্যন্ত চালানো সম্ভব হয়। আমদানির বিকল্প দ্রব্য উৎপাদন করার জন্যও যন্ত্রপাতি বা কাঁচামাল আমদানি করার প্রয়োজন হতে পারে। তার জন্য প্রয়োজনীয় বৈদেশিক মুদ্রার সংস্থান করতে হলে রপ্তানির পরিমাণ বাড়ানো প্রয়োজন। অনেক ক্ষেত্রে আমদানির বিকল্প দ্রব্যের উৎপাদন ব্যয় বেশি হলে সেগুলির দামও বেশি হয়। অথচ এই দ্রব্যগুলি যদি বিদেশ থেকে অপেক্ষাকৃত কম দামে আমদানি করা হয় তবে জনসাধারণের বিশেষ সুবিধা হয়। আমদানির পরিবর্ততা যে, সব অবস্থায় সমর্থনযোগ্য তা নয়।

৪। অবাধ বাণিজ্য ও শিল্প-সংরক্ষণবাদ (Free Trade and Protectionism)

বাজার-অর্থনীতিতে বিদেশ থেকে প্রয়োজনীয় দ্রব্য আমদানি ও বিদেশে প্রয়োজনীয় দ্রব্য রপ্তানির ক্ষেত্রে বাধা-নিষেধ থাকে না ; পারস্পরিক চাহিদা ও যোগানের ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ায় এই বাণিজ্য চলতে থাকে। অবাধ বাণিজ্যের ফলে উৎপাদনের বিভিন্ন উপকরণগুলির প্রকৃত আয় বেড়ে যায় এবং আন্তর্জাতিক বিশেষীকরণ সুষ্ঠুভাবে সম্পাদিত হয়। কিন্তু অবাধ বাণিজ্যে বিদেশী দ্রব্যের সঙ্গে দেশীয় দ্রব্যের প্রতিযোগিতায় দেশীয় ক্ষুদ্রশিল্পগুলি বিপর্যয়ের সম্মুখীন হতে পারে। পৃথিবীর সব দেশ সমান উন্নত নয় বলে ধনী দেশগুলির সঙ্গে গরিব দেশগুলির অবাধ বাণিজ্যে গরিব দেশগুলির স্বার্থ ক্ষুণ্ণ হতে পারে।

বিদেশী শিল্পের সঙ্গে প্রতিযোগিতার হাত থেকে দেশীয় শিল্পগুলিকে রক্ষা করার জন্য শিল্প-সংরক্ষণের পক্ষে যুক্তি দেখানো হয়ে থাকে। শিল্প-সংরক্ষণের পক্ষে যুক্তিগুলি হল : শিশুশিল্প সংরক্ষণ যুক্তি, সংরক্ষণের পক্ষে বাণিজ্য উদ্বৃত্ত যুক্তি, দেশীয় বাজার সৃষ্টি করার যুক্তি, জাতীয় স্বয়ংসম্পূর্ণতা অর্জনের পক্ষে যুক্তি, দেশীয় শিল্পগুলির ক্ষেত্রে বৈচিত্র্য আনার পক্ষে যুক্তি এবং দেশের ভিতর শিল্পোৎপাদন বাড়িয়ে কর্মসংস্থান সম্প্রসারণের যুক্তি।

৫। তিন ফাঁকের মডেল ও বৈদেশিক সাহায্য (Three Gap Model and Foreign Aid)

বৈদেশিক সাহায্যের প্রয়োজন ও গুরুত্ব বোঝাবার জন্য সাধারণত দ্বৈত ফাঁকের বিশ্লেষণ (Dual Gap Analysis) করা হয়,—একটি হল বিনিয়োগ-সঞ্চয় ফাঁক (Investment-Savings Gap) এবং অপরটি হল আমদানি-রপ্তানি ফাক (Import-Export Gap)। এছাড়া তৃতীয় একটি ফাঁক হল, প্রযুক্তি বা কলাকৌশলের ফাঁক (Technology Gap)। স্বল্পোন্নত দেশে অর্থনৈতিক উন্নয়নের জন্য বিভিন্ন প্রকল্পে বিনিয়োগের ক্ষেত্রে যে সম্পদ ও মূলধন প্রয়োজন—দেশের অভ্যন্তরীণ সঞ্চয় যদি তার চেয়ে কম হয়, তবে আমরা বিনিয়োগ-সঞ্চয় ফাঁক দেখতে পাই ; এই ফাঁক ভরাট করা সম্ভব হয় বৈদেশিক ঋণের সাহায্যে। আবার দেশের বৈদেশিক বাণিজ্যে যদি রপ্তানি আয় অপেক্ষা আমদানি ব্যয় বেশি হয় তবে বাণিজ্য ঘাটতি দূর করার জন্যও বৈদেশিক সাহায্যের প্রয়োজন হয়। উন্নত দেশগুলি উন্নত প্রযুক্তি প্রয়োগের মাধ্যমে উৎপাদন ব্যবস্থা পরিচালনা করে। স্বল্পোন্নত দেশগুলি কলাকৌশলগত উদ্ভাবন ও প্রযুক্তির ক্ষেত্রে উন্নত দেশগুলির তুলনায় অনেক পিছিয়ে আছে। এই প্রযুক্তির ফাঁক বা কলাকৌশলের ফাঁক পূরণ করার উপায় হল উন্নত দেশগুলি থেকে উন্নয়নশীল দেশগুলিতে প্রযুক্তির স্থানান্তর (Transfer of Technology)। বৈদেশিক সাহায্যের মাধ্যমেই এই স্থানান্তর ঘটে।

৬। বৈদেশিক সাহায্য (Foreign Aid)

উন্নয়নশীল দেশগুলিতে বাণিজ্য ব্যালান্সে ঘাটতি এবং লেনদেন ব্যালান্সের চলতি অ্যাকাউন্টে ঘাটতি দূর করার জন্য বৈদেশিক মুদ্রার প্রয়োজন হয় এবং এজন্য বৈদেশিক ঋণের প্রয়োজন হয়। অপরদিকে স্বল্পোন্নত

দেশের অর্থনৈতিক উন্নয়নের স্বার্থে বৈদেশিক বিনিয়োগের প্রয়োজন হয়। বৈদেশিক সাহায্য শর্তসাপেক্ষ (tied) অথবা প্রকল্পভিত্তিক সাহায্য (project aid) হতে পারে,—আবার শর্তহীনও (untied) হতে পারে। বৈদেশিক সাহায্যের উৎসগুলি হল—(১) বৈদেশিক রাষ্ট্র, (২) বিশ্ব ব্যাংক, এশিয়ান ব্যাংক, আন্তর্জাতিক উন্নয়ন পরিষদ, আন্তর্জাতিক অর্থভাণ্ডার প্রভৃতি আন্তর্জাতিক সংস্থা, (৩) বৈদেশিক কোম্পানি বা বাণিজ্য সংস্থা, (৪) বৈদেশিক ব্যাংক প্রভৃতি। বৈদেশিক সাহায্যের উপর খুব বেশি নির্ভর করার একটি বিপদ আছে। তা হল, যদি দেশের বাণিজ্য ব্যালান্সে যথেষ্ট উদ্বৃত্ত না থাকে, তবে বৈদেশিক ঋণের উপর বাৎসরিক সুদ প্রদান করা অথবা ঋণ পরিশোধ করা খুব কঠিন হয়ে দাঁড়ায়। সেক্ষেত্রে একদিকে বাণিজ্য-ব্যালান্সের ঘাটতি দূর করা ও প্রয়োজনীয় আমদানির জন্য বৈদেশিক মুদ্রার সংস্থান করা এবং অপরদিকে বৈদেশিক ঋণ পরিশোধ করা,—এই দুইয়ের চাপে স্বল্পোন্নত দেশকে আরও বেশি করে ঋণ গ্রহণ করতে হয় এবং এভাবে দেশটি বৈদেশিক ঋণের ফাঁদে আটকে যায়।

এজন্য অর্থনীতিবিদরা মনে করেন, বৈদেশিক সাহায্যের (Aid) চেয়ে বাণিজ্যের (Trade) উপর, বিশেষ করে রপ্তানির উপর, বেশি নির্ভর করা স্বল্পোন্নত দেশের পক্ষে অধিকতর গ্রহণযোগ্য পন্থা। বাণিজ্য বনাম সাহায্য (Trade vs. Aid) সম্পর্কে বিভিন্ন যুক্তি প্রদান করা হয়ে থাকে। বৈদেশিক সাহায্যের অনেক সুফল আছে সন্দেহ নেই। বিদেশ থেকে প্রযুক্তিবিদ্যার স্থানান্তর (Transfer of technology) না হলে অথবা বিদেশ থেকে কারিগরি সাহায্য না পেলে অনেক ক্ষেত্রে দেশের ভিতর উৎপাদন বাড়াবার লক্ষ্য পূরণ হয় না। কিন্তু বৈদেশিক সাহায্যের উপর সীমাহীন নির্ভরতা দেশকে ঋণের ফাঁদে আটকে দিতে পারে। অপরদিকে বাণিজ্য হল সমৃদ্ধির চালিকা শক্তি (engine of growth)। রপ্তানি বাণিজ্যের উন্নয়ন হলে বৈদেশিক ঋণের উপর নির্ভর করার প্রয়োজন কমে যায়। একটি অপরের পরিপূরক।

৪.৬ অনুশীলনী

ক। নীচের প্রশ্নগুলির সংক্ষিপ্ত উত্তর দিন।

(১) আমদানি পরিবর্ততা বলতে কী বোঝায়?

(২) রপ্তানি বৃদ্ধি কিভাবে অর্থনৈতিক উন্নয়নের সহায়ক হয়?

(৩) রপ্তানি বাণিজ্য কখন সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি হতে পারে?

(৪) উন্নয়ন-চালিত রপ্তানি এবং রপ্তানিচালিত উন্নয়নের মধ্যে পার্থক্য কী?

(৫) বৈদেশিক সাহায্য কত প্রকার হতে পারে?

(৬) শর্তসাপেক্ষ বৈদেশিক ঋণ কাকে বলে?

(৭) নরম বৈদেশিক ঋণ ও কঠিন বৈদেশিক ঋণের মধ্যে পার্থক্য কী?

(৮) দ্বিপাক্ষিক ও বহুপাক্ষিক বৈদেশিক সাহায্যের উদাহরণ দিন।

(৯) বৈদেশিক সাহায্যের ক্ষেত্রে দ্বৈত ফাঁকের বিশ্লেষণ বলতে কী বোঝায়?

(১০) বৈদেশিক সাহায্যের ক্ষেত্রে তৃতীয় ফাঁকটি কী?

(১১) অবাধ বাণিজ্য কাকে বলে?

(১২) শিল্প-সংরক্ষণের অর্থ কী?

খ। শূন্যস্থান পূরণ করুন।

(১) সমৃদ্ধি যেমন রপ্তানি চালিত হতে পারে, তেমনি রপ্তানিও ________ হতে পারে।

(২) বৈদেশিক সাহায্য ________ এবং ________ হতে পারে।

(৩) বৈদেশিক ঋণের উপর সুদের হার ________ হল নরম ঋণ।

(৪) বৈদেশিক ঋণের ক্ষেত্রে দ্বৈত ফাঁক হল ________ ফাঁক এবং ________ ফাঁক।

(৫) বৈদেশিক সাহায্যের ক্ষেত্রে তৃতীয় ফাঁক হল ________ ফাঁক।

(৬) উন্নয়নশীল দেশে বাণিজ্য এবং ঋণ, পরস্পরের ________ নয়, পরস্পরের ________ ।

(৭) রপ্তানিবাজার সম্প্রসারিত হলে তার একটি ________ যোগসূত্রের প্রভাব থাকে।

(৮) বৈদেশিক বাণিজ্য বহুক্ষেত্রে সমৃদ্ধির ________ হিসাবে বিবেচিত হয়।

(৯) বৈদেশিক সাহায্যের ফলে উন্নত দেশ থেকে অনগ্রসর দেশে উন্নত ________ স্থানান্তর ঘটে।

(১০) আন্তর্জাতিক অর্থভাণ্ডার থেকে ঋণ পাওয়া যায় ________ ফাঁক দূর করার জন্য, আর বিশ্বব্যাংকের কাছ থেকে ঋণ পাওয়া যায় ________ ফাঁক দূর করার জন্য।

গ। বড় প্রশ্ন

(১) সমৃদ্ধির চালিকাশক্তি হিসাবে আন্তর্জাতিক বাণিজ্য কতটা কার্যকরী সে বিষয়ে আলোচনা করুন।

(২) অর্থনৈতিক উন্নয়নে রপ্তানির ভূমিকা আলোচনা করুন।

(৩) আমদানি পরিবর্ততার পক্ষে ও বিপক্ষে যুক্তিগুলি কী কী?

(৪) স্বল্পোন্নত দেশগুলিতে শিল্পায়নের বিকল্প পন্থারূপে রপ্তানি সম্প্রসারণ এবং আমদানির প্রতিস্থাপন (Substitution)—এই দুয়ের আপেক্ষিক সুবিধা ও অসুবিধাগুলি আলোচনা করুন।

(৫) "বিকাশের (Growth) যন্ত্র হল বাণিজ্য"—এই উক্তির ভিত্তি কী? এই উক্তিটি কতটা গ্রহণযোগ্য?

(৬) অবাধ বাণিজ্য ও শিল্পসংরক্ষণের পক্ষে ও বিপক্ষে আপেক্ষিক যুক্তিগুলি আলোচনা করুন।

(৭) বৈদেশিক সাহায্যের বিভিন্ন রূপগুলি কী? অর্থনৈতিক উন্নয়নে বৈদেশিক সাহায্যের ভূমিকা আলোচনা করুন।

(৮) বৈদেশিক ঋণ গ্রহণের ক্ষেত্রে তিন ফাঁক মডেল (Three Gap Model) ব্যাখ্যা করুন।

(৯) অর্থনৈতিক উন্নয়নের অর্থসংস্থানে বৈদেশিক সাহায্যের গুরুত্বের উপর একটি টীকা লিখুন। বৈদেশিক বাণিজ্য অথবা বৈদেশিক সাহায্য কোনটির উপর স্বল্পোন্নত দেশগুলির বেশি নির্ভর করা উচিত?

(১০) বৈদেশিক সাহায্যের কী কী উৎস আছে? বৈদেশিক সাহায্য গ্রহণের ক্ষেত্রে কী কী সমস্যা দেখা যায়? বৈদেশিক সাহায্যের কুফল সম্পর্কে একটি টীকা লিখুন।

৪.৭ গ্রন্থপঞ্জী

1. Thirlwall A.P. : Growth and Development with Special Reference to Developing Economics (ELBS/MacMillan, 1983).
2. Meier G.M. : Leading Issues in Economic Development (New York, 1976).
3. Gupta Subrata and Ghosh Sujit : A Tract On Economic Development Process and Perspectives (Charu Publishing Company, Calcutta 1992).
4. Myint H. : The Economics of the Developing Countries. (Indian Edition, B. I. Publications, 1980).
5. Lewis Arther : "The Slowing Down of the Engine of Growth." American Economic Review (vol. 70, No. 4, 1980)

   Also see games Reidel "Trade as an Engine of Growth in Developing Countries Revisited" The Economic Journal, Vol. 94 (March, 1984).

ই. ই. সি—৭

পর্যায়-২৭

অর্থনীতির ঐচ্ছিক পাঠক্রম

(স্নাতক পাঠক্রম)

একক ১ ❑ অন্তরকলজ, অবকল ও সমাকলের প্রয়োগ

গঠন

১.০ ভূমিকা

অর্থনীতিতে ভারসাম্য অবস্থা (equilibrium) বলতে মূলত এমন একটি অবস্থা বোঝায় যেখানে থাকলে অর্থনৈতিক চলরাশিগুলির কোনো পরিবর্তন হয়না। প্রতিটি ভারসাম্য অবস্থা আবার কতগুলি

প্যারামিটার (parameter) (পাদটীকা দ্রষ্টব্য) ও স্বাধীন চলরাশির (exogenous variable) উপর নির্ভরশীল। তাই এই প্যারামিটার ও স্বাধীন চলরাশিগুলির পরিবর্তন হলে ভারসাম্য অবস্থারও পরিবর্তন হয়। প্যারামিটার ও স্বাধীন চলরাশির ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য আমরা ভিন্ন ভিন্ন ভারসাম্য অবস্থা পাই। এইরকম বিভিন্ন ভারসাম্য অবস্থার অধীন চলরাশির ভারসাম্য মাত্র তুলনা করাই তুলনামূলক স্থিতিশীলতার (comparative statics) বিষয়।

এই ধরনের আলোচনা করার সময় আমরা ধরে নিই যে মডেলটির প্রাথমিকভাবে ভারসাম্য ছিল। এই ভারসাম্য অবস্থার সঙ্গে পরিবর্তন—পরবর্তী ভারসাম্য অবস্থার তুলনা করাই আমাদের মূল কাজ। তার জন্য অবশ্য পরিবর্তনের প্রক্রিয়া আমাদের জানবার দরকার নেই। এমনকি নূতন করে ভারসাম্য আসবে কিনা সে প্রশ্নও তোলা হয়না।

তুলনামূলক স্থিতির বিশ্লেষণ দুরকম হতে পারে—গুণগত বা মানগত।

যদি আমরা জানতে চাই যে বিনিয়োগ বাড়লে ভারসাম্য জাতীয় আয় বাড়ে না কমে তাহলে আমরা শুধু পরিবর্তনের দিকই নির্ণয় করছি। এই সকল ক্ষেত্রে বিশ্লেষণ গুণগত। কিন্তু এরপর যদি আমরা জানতে চাই যে বিনিয়োগের নির্দিষ্ট পরিমাণ পরিবর্তনের জন্য ভারসাম্য জাতীয় আয় ঠিক কতটা পরিবর্তিত হবে তাহলে সেক্ষেত্রে বিশ্লেষণ মানগত।

আসলে মূল সমস্যাটি হল পরিবর্তনের হার (rate of change) নির্ণয় করা। এই পরিবর্তনের হার বলতে বোঝায় যে কোনো প্যারামিটার বা স্বাধীন চলরাশির পরিবর্তন সাপেক্ষে অধীন চলরাশির পরিবর্তনের হার। অন্তরকলজেরও মূল বিষয়বস্তু হল পরিবর্তনের হার। তাই তুলনামূলক স্থিতির বিশ্লেষণে অন্তরকলজের গুরুত্ব অপরিসীম।

১.১ অন্তরকলজ ও পরিবর্তনের হার

ধরা যাক $y = f(x)$ একটি একমানবিশিষ্ট অপেক্ষক। এই অপেক্ষককে একটি স্বাধীন বা বহির্নির্নীত (exogenous)

* গাণিতিক অনুসন্ধানে যে রাশির মান পরিবর্তন হয়না তাই ধ্রুবক (constant)। প্রাথমিক শর্তাবলী বদলালেও যে রাশির মান বদল হয়না তা নির্দিষ্ট ধ্রুবক (fixed constant)। প্রদত্ত প্রাথমিক শর্তাবলীর ক্ষেত্রে অর্থাৎ বিচার্যক্ষেত্রে যার মান বদল হয়না কিন্তু প্রদত্ত প্রাথমিক শর্তাবলীর পরিবর্তন হলে যে রাশির মান বদলায় তা অনির্দিষ্ট ধ্রুবক বা প্যারামিটার (arbitrary constant বা parameter)। আমরা নির্দিষ্ট ধ্রুবক বোঝাতে ধ্রুবক কথাটি ব্যবহার করব। প্যারামিটারের সাহায্যে সাধারণীকরণ করা হয়। ফলে আলাদা আলাদাভাবে সমাধান না করে একটি সাধারণ সমাধান পাওয়া যায়।

চলরাশি x ও একটি অন্তর্নিণীত (exdogenous) বা অধীন চলরাশি y। এখন জানা আছে যে x এর কোনো পরিবর্তন হলে অপেক্ষকের মাধ্যমে y ও পরিবর্তিত হয়। যদি x এর প্রাথমিক মান x_0 ও y এর প্রাথমিক মান y_0 থাকে এবং পরে তা যথাক্রমে x_1, y_1 হয় তবে x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার হবে

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$ [এখানে $\Delta y = y$ এর পরিবর্তন, $\Delta x = x$ এর পরিবর্তন]

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ [যেহেতু $x_1 = x_0 + \Delta x$]

$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ এখানে x এর সাপেক্ষে y এর গড় পরিবর্তনের হার (average rate of change)।

উদাহরণ—১

ধরা যাক $f(x) = 5x^2 - 8$

তাহলে $f(x_0) = 5x_0^2 - 8$

এবং $f(x_0 + \Delta x) = 5(x_0 + \Delta x)^2 - 8$

অতএব $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5(x_0 + \Delta x)^2 - 8 - (5x_0^2 - 8)}{\Delta x}$$

$$= \frac{5x_0^2 + 10x_0\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 8 - 5x_0^2 + 8}{\Delta x}$$

$$= \frac{10x_0\Delta x + 5(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= 10x_0 + 5\Delta x$$

এবার x_0 ও Δx এর মান জানা থাকলে গড় পরিবর্তনের হার পাওয়া যাবে। যেমন $x_0 = 5$ এবং $\Delta x = 2$ ধরলে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ হবে 60। $\Delta x = -2$ ধরলে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ হবে 40।

অন্তরকলজ (derivative)

বহু ক্ষেত্রে আমরা x এর অতি সামান্য পরিবর্তনের কারণে y এর পরিবর্তন কত হবে তা জানতে আগ্রহী থাকি। এক্ষেত্রে ধরা হয় যে $\Delta x \longrightarrow 0$ অর্থাৎ Δx ক্রমশঃ ছোট হতে হতে শূন্যের দিকে এগোয় কিন্তু কখনো

শূন্যের সঙ্গে সমান হয়না। এখন যদি $\Delta x \longrightarrow 0$ হয় তাহলে উপরের উদাহরণে $5\Delta x$ অবলুপ্ত হয়ে গিয়ে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ এর মান হবে $10x_0$ । সাঙ্কেতিক দিক থেকে এটি দুইরকমভাবে লেখা হয়।

(ক) যখন $\Delta x \longrightarrow 0$ তখন $\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow 10x_0$

অথবা (খ) $\lim\limits_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \longrightarrow 0} (10x_0 + 5\Delta x) = 10x_0$ ।

lim বলতে এখানে সীমা (limit) বোঝানো হয়েছে। $\Delta x \longrightarrow 0$ হলে যদি $\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$ এর অস্তিত্ব থাকে তাহলে সেই সীমাটিকেই $y = f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকলজ বলা হয়। এক্ষেত্রে Δx যদি -2 থেকে শূন্যের দিকে এগোয় বা 2 থেকে শূন্যের দিকে এগোও, একই উত্তর আসবে।

১.২ অন্তরকলজ সম্পর্কে কয়েকটি বক্তব্য

(ক) অন্তরকলজ একটি নিনীত অপেক্ষক (derived function)। মূল অপেক্ষক $y = f(x)$টি হল আদি অপেক্ষক (Primitive function) । অন্তরকলজ তার থেকেই নিনীত আরেকটি অপেক্ষক। মূল অপেক্ষকটির মত অন্তরকলজটি ও স্বাধীন চলরাশির মানের উপর নির্ভরশীল অর্থাৎ x এর প্রতিটি মান এর জন্য অন্তরকলজ অপেক্ষকটির একটি করে নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে।

(খ) অন্তরকলজটি গড় পরিবর্তনের হার থেকে উদ্ভুত হয়েছে —অতএব ওই অন্তরকলজটিও কোনো না কোনো পরিবর্তনের হারকেই পরিমাপ করবে। এখন অন্তরকলজটিতে $\Delta x \longrightarrow 0$ অর্থাৎ x এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তন ঘটছে বলে ধরে নেওয়া হচ্ছে তাই যে পরিবর্তনের হার পাওয়া যাচ্ছে তাকে আমরা বলতে পারি তাৎক্ষণিক (instantaneous) পরিবর্তনের হার। এই হার x এর মান বৃদ্ধি পেলে বা হ্রাস পেলে একই থাকে।

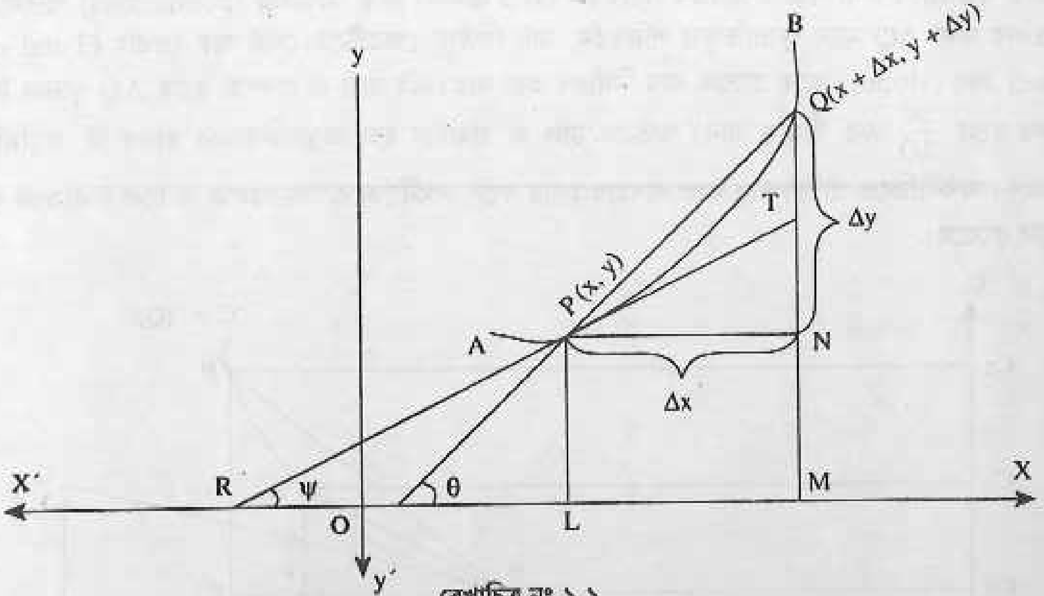
(গ) অন্তরকলজ অপেক্ষক দুইভাবে লেখা হয়ে থাকে। অঙ্কশাস্ত্রবিদ ল্যাগ্রাঞ্জ্ (Lagrange) আদি অপেক্ষক $y = f(x)$ এর অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকলে তাকে $f'(x)$ বা শুধু f' লিখেছেন। আরেকজন গণিতজ্ঞ লিব্নিজ (Leibniz) d/dx চিহ্নটি ব্যবহার করেছেন। প্রথম চিহ্নটি ব্যবহার করার সুবিধা এই যে, $f'(x)$ লিখলে f' বা অন্তরকলজটিও যে x এরই অপেক্ষক তা পরিষ্কার বোঝা যায়। দ্বিতীয় চিহ্নটির মাধ্যমে এটিকে পরিবর্তনের হার হিসাবে বোঝা যায়। গ্রীক অক্ষর Δ এর বদলে এখানে d ব্যবহার করা হচ্ছে। $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ এর সঙ্গে dy/dx এর প্রধান পার্থক্য এই যে দ্বিতীয়টি হল $\Delta x \longrightarrow 0$ হলে প্রথমটির সীমাস্থ মান। অতএব যদি $y = f(x)$ হয় তাহলে,

$$\frac{dy}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

উদাহরণ ১ এর $y = 5x^2 - 8$ অপেক্ষকটি থেকে আমরা পেয়েছিলাম যে $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 10x_0$ ।

এবার x_0 এর বদলে x বসিয়ে বলা যায় যে $\frac{dy}{dx} = 10x = f'(x)$। এবার x এর বিভিন্ন মানের জন্য অন্তরকলজটিরও বিভিন্ন মান পাওয়া যাবে। যদি $x = 2$ হয়, $f'(x) = 20$ হবে, আবার $x = 4$ হলে $f'(x) = 40$ হবে ইত্যাদি। $x = -2$ হলে $f'(2) = -20$ ।

১.৩ অন্তরকলজের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা



রেখাচিত্র নং ১.১

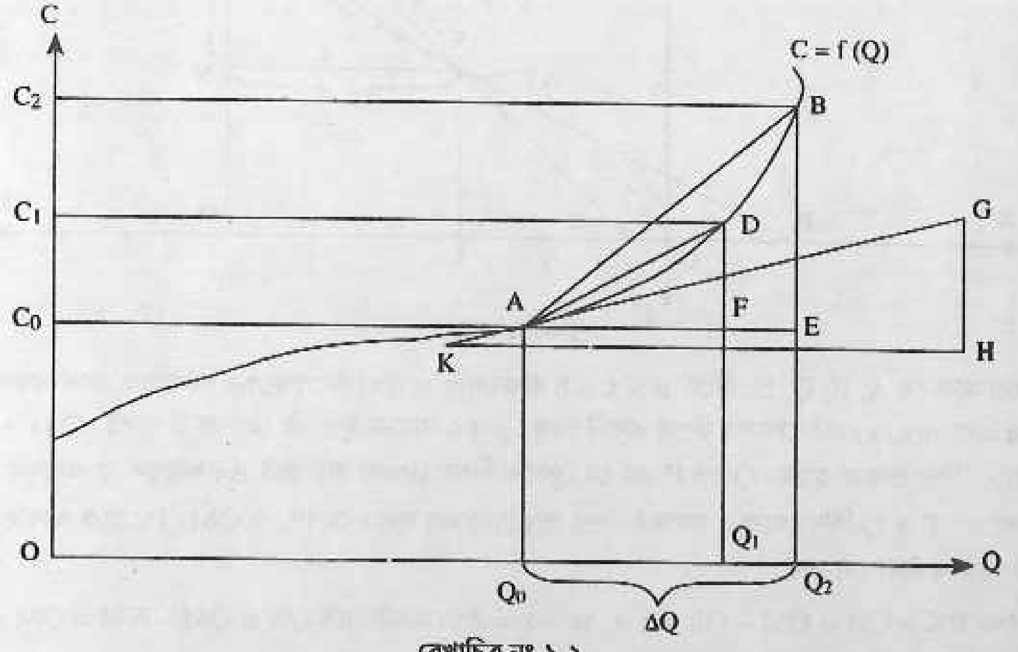
ধরা যাক যে A, P, Q, B, দিয়ে $a \le x \le b$ অঞ্চলে $y = f(x)$ অপেক্ষকের অবিচ্ছিন্ন লেখ অঙ্কন করা হয়েছে এবং $p(x, y)$ এই লেখের উপর একটি বিন্দু। p এর সামান্য দূরে ঐ লেখের উপরেই $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ বিন্দু নেওয়া হচ্ছে। Q কে P এর যে কোনো দিকে নেওয়া যায় তাই Δx ধনাত্মক বা ঋণাত্মক দুইই হতে পারে। P ও Q বিন্দু থেকে x অক্ষের উপর লম্ব টানা হল যথাক্রমে PL ও QM। P থেকে আবার QM এর উপর লম্ব টানা হল PN।

এখন $PN = LM = OM - OL = x + \Delta x - x = \Delta x$। একইভাবে $QN = QM - NM = QM - PL$ (যেহেতু $NM = PL$) $= y + \Delta y - y = \Delta y$।

PQ জ্যা x–অক্ষের সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করছে। সুতরাং PQ এর প্রবণতা $\tan\theta = \tan \angle QPN = \frac{QN}{PN} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ । এখন Q বিন্দুকে যদি লেখ বরাবর ক্রমশঃ P এর দিকে সরিয়ে নিয়ে আসা যায় তাহলে Δx ক্রমশঃ

ছোট হতে থাকবে এবং PQ এর সীমাস্থ অবস্থান TPR, P বিন্দুতে লেখের স্পর্শক হয়ে যাবে এবং এই স্পর্শকের প্রবণতা হবে $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ । তাই লেখের যে কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতার থেকে আমরা ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকের তাৎক্ষণিক পরিবর্তনের হার বুঝতে পারি।

এবার যদি অর্থনীতির একটি উদাহরণ নেওয়া হয় তাহলে বোধ হয় অন্তরকলজের ব্যবহারিক দিকটি আরেকটু পরিষ্কার হবে। অর্থনীতির তত্ত্ব থেকে জানা আছে যে কোনো প্রতিষ্ঠানের মোট ব্যয় (Total cost) উৎপাদনের পরিমাণের উপর নির্ভরশীল অর্থাৎ Q = উৎপাদন এবং C = মোট ব্যয় হলে C = f(Q)। উৎপাদনের এক একক বৃদ্ধি পেলে তার জন্য বাড়তি যে ব্যয় হয় তাকে বলা হয় প্রান্তিক ব্যয়। (Marginal Cost) । অতএব প্রান্তিক ব্যয় বা MC = $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$ । ΔQ হল অত্যন্ত ক্ষুদ্র পরিবর্তন। বিচ্ছিন্ন (discrete) একক সম্বলিত বস্তুগুলির জন্য সম্ভাব্য ক্ষুদ্রতম পরিবর্তন হল ১ একক। কিন্তু অবিচ্ছিন্ন (continuous) পরিমাপের বস্তুগুলির জন্য ΔQ মানে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তন। এই দ্বিতীয় ক্ষেত্রটিতে মোট ব্যয় রেখার (Total cost curve) ঢাল (slope) থেকে প্রান্তিক ব্যয় নির্ধারণ করা যায়। এই ঢাল বা প্রবণতা হচ্ছে ΔQ শূন্যের দিকে অগ্রসর হলে $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$ এর সীমাস্থ মান। অতএব ঢাল বা প্রবণতা হল অন্তরকলজের ধারণারই জ্যামিতিক প্রতিরূপ। অর্থনীতিতে প্রান্তিকতার বহুল ব্যবহার হবার ফলে অর্থনীতিতে অন্তরকলজ ও ঢাল উভয়েরই বহুল ব্যবহার রয়েছে।



রেখাচিত্র নং ১.২

উপরের (১.২) নং রেখাচিত্রে মোট ব্যয় রেখা C আঁকা হয়েছে। এটি আদিম অপেক্ষক C = f(Q) এর রেখাচিত্র। ধরা যাক প্রাথমিক উৎপাদন Q_0। Q_0 এর থেকে আমরা উৎপাদনের বৃদ্ধি পরিমাপ করছি। অতএব

প্রাসঙ্গিক বিন্দুটি হল A। যদি উৎপাদন Q_0 থেকে ΔQ বেড়ে Q_2 হয় তাহলে মোট ব্যয় C_0 থেকে ΔC বেড়ে C_2 হবে। অতএব $\frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{C_2 - C_0}{Q_2 - Q_0} = \frac{EB}{AE}$ । এখন $\frac{EB}{AE}$ হল AB সরলরেখার ঢাল। এই অনুপাতটি থেকে পরিবর্তনের গড় হার পাওয়া যায়।

এইবার ΔQ আরেকটু কমিয়ে দেওয়া যাক। ধরা যাক তার ফলে উৎপাদনের পরিমাণ Q_0 থেকে বেড়ে Q_2 না হয়ে Q_1 হচ্ছে। এখন তাহলে AB এর পরিবর্তে AD সরলরেখার ঢাল থেকে গড় পরিবর্তনের হার পরিমাপ করতে হবে।

এইভাবে ΔQ কে যদি ক্রমশঃ ছোট করে দেওয়া যায় তবে ক্রমশঃ আরও চেটাল সরলরেখা পাওয়া যাবে এবং $\Delta Q \longrightarrow 0$ হলে প্রাসঙ্গিক সরলরেখা হিসাবে মোট ব্যয় রেখার A বিন্দুর স্পর্শক KG কে পাব। KG এর ঢাল হল $\frac{HG}{KH}$ । $\frac{HG}{KH}$ A বিন্দুতে মোট ব্যয় রেখার ঢাল পরিমাপ করে। এই ঢাল আবার প্রাথমিক উৎপাদন Q_0 থেকে শুরু করলে এবং $\Delta Q \longrightarrow 0$ হলে $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$ এর সীমাস্থ মানও বটে। অতএব A বিন্দুতে $C = f(Q)$ লেখের ঢাল $f'(Q_0)$ অন্তরকলজটির নির্দিষ্ট মানেরই অনুরূপ।

এখন প্রাথমিক মান যদি Q_0 না হয়ে Q_2 হয় তাহলে A বিন্দুর বদলে B বিন্দুটি হবে প্রাসঙ্গিক। B বিন্দুতে লেখের ঢাল থেকে $f'(Q_2)$ অন্তরকলজটির মান পাওয়া যাবে। এইভাবে বিভিন্ন প্রাথমিক উৎপাদনের জন্য অন্তরকলজের বিভিন্ন মান পাওয়া যায়। তাই সাধারণত Q এর অপেক্ষক $f'(Q)$ অন্তরকলজটি Q এর সঙ্গে সঙ্গে পরিবর্তিত হয়।

১.4 অবিচ্ছিন্নতা বা সন্ততা (continuity) এবং অবকলণযোগ্যতা (differentiability)

যদি $q = g(v)$ এর $V \longrightarrow N$ হলে অঞ্চলেই সীমাস্থ মান থাকে এবং সেই সীমাস্থ মান $g(N)$ হয় তবে অপেক্ষকটিকে N বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বা সন্ততঃ বলা হয়। অতএব যে কোনো অপেক্ষকের অবিচ্ছিন্নতার জন্য তিনটি শর্ত পূরণ করা প্রয়োজন। এইগুলি হল—(ক) N বিন্দুকে অঞ্চলের মধ্যেই হতে হবে (খ) $V \longrightarrow N$ হলে অপেক্ষকের সীমাস্থ মানের অস্তিত্ব থাকতে হবে এবং (গ) এই সীমাস্থ মান ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মানের সমান হতে হবে অর্থাৎ সীমাস্থ মান হবে $g(N)$ এর সমান।

অবকলনযোগ্যতা : অবকলনযোগ্যতার ধারণা অপেক্ষাকৃত কঠিন। তাই উদাহরণের সাহায্যে একে বোঝানো হচ্ছে। আদিম অপেক্ষক $y = f(x)$. $q = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $V = \Delta x$ এর মান হলে যদি $x = x_0$ বিন্দুতে

অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$ এর অস্তিত্ব আছে। এক্ষেত্রে বলা হবে যে $y = f(x)$ অপেক্ষকটি $x = x_0$ বিন্দুতে অবকলনযোগ্য। $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করার এই পদ্ধতিটিকেই অবকলন বলা হয়। অবকলনযোগ্যতা নির্ধারণ করার জন্য একটি পরীক্ষা করা হয়। যে কোনো অপেক্ষক $y = f(x)$ তার অঞ্চলস্থ $x = x_0$ বিন্দুতে অবকলনযোগ্য হয় যদি সেই $x = x_0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি অবিচ্ছিন্ন হয় তবেই। অতএব অবকলনযোগ্যতার জন্য অবিচ্ছিন্নতা আবশ্যিক শর্ত। তার মানে অবকলনযোগ্যতা থাকলে অপেক্ষককে অবিচ্ছিন্ন হতেই হবে। এই অবিচ্ছিন্নতার শর্ত পূরণ হওয়া অবশ্য অবকলনযোগ্যতার জন্য যথেষ্ট নয়—অর্থাৎ অবিচ্ছিন্নতা থাকলেও অপেক্ষকের অবকলনযোগ্যতা নাও থাকতে পারে। যেমন $y = |x|$ এর অবিচ্ছিন্নতা রয়েছে কিন্তু $x = 0$ বিন্দুতে অবকলনযোগ্যতা নেই। হঠাৎ দিক পরিবর্তন করলে অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক অবকলনযোগ্যতা হারায়।

১.৫ অবকলনের নিয়মাবলী ও তার প্রয়োগ

১। **ধ্রুবক অপেক্ষক সূত্র (Constant function rule) :** $y = f(x) = k$ হলে এবং k নির্দিষ্ট ধ্রুবক হলে $\frac{dy}{dx} = 0$ কারণ $\frac{dy}{dx} = \frac{dk}{dx} = 0$ অথবা $f'(x) = 0$ ।

২। **ঘাত অপেক্ষক সূত্র (Power function rule) :** n যে কোনো মূলদ সংখ্যা হলে তার অন্তরকলজ nx^{x-1} ।

অর্থাৎ $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

বা $f'(x) = nx^{n-1}$

x চলরাশি এবং n ধ্রুবক হলেই এই নিয়মটি প্রয়োগ করা যাবে।

৩। **যোগফল ও অন্তরফল সূত্র (Sum and difference rule) :** দুটি অপেক্ষকের যোগফলের (বা বিয়োগফলের) অন্তরকলজ ঐ দুটি অপেক্ষকের অন্তরকলজ দুটির যোগফলের (বা বিয়োগফলের) সমান। তার মানে $\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)]$

$$= f'(x) \pm g'(x)$$

উদাহরণ : ধরা যাক $y = 9x^4$

তাহলে $\frac{dy}{dx} = 36x^3$ ।

কিন্তু এবার যদি $y = 9x^4$ কে ভেঙে $y = 5x^4 + 4x^4$ লেখা যায় তাহলে y কে দুটি অপেক্ষক $f(x) = 5x^4$ এবং $g(x) = 4x^4$ এর যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা হচ্ছে। তাহলে উপরের সূত্রানুসারে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^4 + 4x^4)$$

$$= \frac{d}{dx}(5x^4) + \frac{d}{dx}(4x^4)$$

$$= 20x^3 + 16x^3$$

$$= 36x^3$$

অতএব দুই ক্ষেত্রেই উত্তর একই পাওয়া যাচ্ছে। এই নিয়মটি দুই এর বেশি যে কোনো সংখ্যক অপেক্ষকের যোগফলের (বা বিয়োগফলের) ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

এবারে আবার অর্থনীতির একটি উদাহরণ নেওয়া যাক। এখানে গড় আয় থেকে প্রান্তিক আয় বের করতে চেষ্টা করা হবে।

একটি নির্দিষ্ট গড় আয় অপেক্ষক দেওয়া আছে গড় আয় (Average Revenue or AR) = 15 – Q, Q হল উৎপাদন।

এই গড় আয় অপেক্ষকটিকে Q দিয়ে গুণ করলে মোট আয় (Revenue or R) অপেক্ষকটি পাওয়া যায়।

$$R \equiv Ar.\ Q = (15 - Q)\ Q = 15Q - Q^2$$

R কে অবকলন করলে প্রান্তিক আয় (Marginal Revenue বা MR) পাওয়া যাবে।

$$MR = \frac{dR}{dQ} = 15 - 2Q$$

সাধারণভাবে গড় আয় অপেক্ষক $AR = f(Q)$ হলে

$$R \equiv Ar.\ Q = f(Q).Q$$

সেক্ষেত্রে $MR \equiv \frac{dR}{dQ} = f(Q).\ 1 + Q.\ f'(Q)$

$$= f(Q) + Q.\ f'(Q).\ 1$$

কিন্তু $f(Q) = AR$

অতএব $MR = AR + Q.\ f'(Q).\ 1$

অথবা $MR - AR = Q.\ f'(Q)$

Q উৎপাদন বলে সর্বদা অঋণাত্মক। $f'(Q)$ মানে হল গড় আয় রেখার ঢাল।

এখন $AR \equiv \frac{R}{Q} = \frac{P.Q}{Q} = P$ বা দাম।

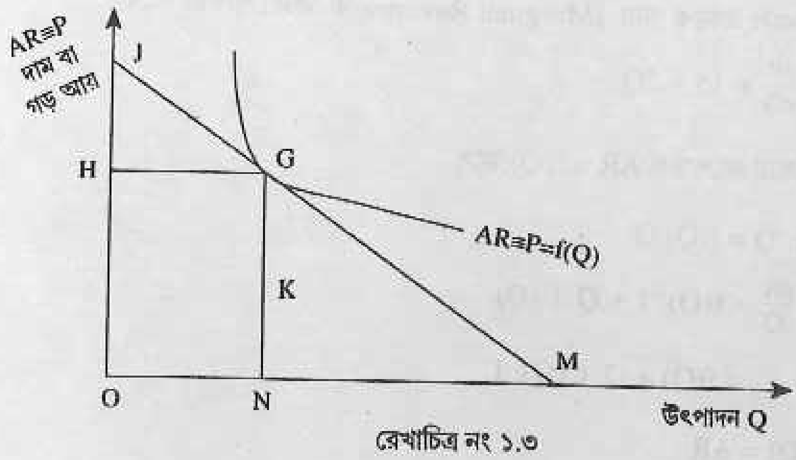
তাই গড় আয় রেখাটিকে দাম ও উৎপাদনের সম্পর্ক নির্দেশক একটি রেখাও বলা যায়—অর্থাৎ $P = f(Q)$। এই পরিপ্রেক্ষিতে গড় আয় রেখা হল প্রতিষ্ঠানের পণ্যের চাহিদা রেখার ঠিক বিপরীত।

এখন পূর্ণ প্রতিযোগিতামূলক বাজারে যে কোনো একটি প্রতিষ্ঠানের গড় আয় রেখা x বা উৎপাদন নির্দেশক অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল। এর অর্থ হল $f'(Q) = 0$। আগেই দেখা গেছে যে $MR - AR = Q.\ f'(Q)$ অতএব $f'(Q) = 0$ হলে $AR - MR = 0$ অর্থাৎ $AR = MR$। তাই এই ধরণের বাজারে উৎপাদন Q এর সমস্ত সম্ভাব্য মানের জন্যই গড় আয় ও প্রান্তিক আয় সমান। তার মানে ঐ একটি রেখাই গড় আয় ও প্রান্তিক আয় নির্দেশ করে।

কিন্তু অপূর্ণ প্রতিযোগিতামূলক বাজারে সাধারণত গড় আয়রেখা নিম্নাভিমুখী হয় অর্থাৎ $f'(Q) < 0$। এখন $MR - AR = Q.\ f'(Q)$। এখানে ধরা হবে যে $Q > 0$। অতএব $MR - AR < 0$। তাই Q এর সমস্ত ধনাত্মক মানের জন্য প্রান্তিক আয় রেখা সর্বদাই গড় আয় রেখার নীচে অবস্থান করবে।

এত গেল দুটি রেখার তুলনামূলক অবস্থানের কথা। কিন্তু এবার দেখতে হবে যে MR রেখা, AR রেখার ঠিক কতটা নীচে অবস্থান করবে। Q এর যে কোনো মানের জন্য AR রেখার থেকে MR রেখার দূরত্ব হবে $Q.\ f'(Q)$।

নীচের (১.৩) নং রেখাচিত্রে ব্যাপারটি পরিষ্কার করে বোঝানো হল।



রেখাচিত্র নং ১.৩

ধরা যাক Q এর মান N। এই Q এর জন্য $Q.f'(Q)$ এর মান হবে $N.f'(N)$। এবার এই রেখাচিত্র থেকে $N.f'(N)$ এর মান নির্ধারণ করতে হবে তবেই N এর জন্য MR এর মান পাওয়া যাবে।

N এর মান জানাই আছে। তাই এবার মূল সমস্যা হল $f'(N)$ এর মান নির্ধারণ। এর আগে দেখা গেছে যে গড় আয় রেখার ঢাল থেকে প্রান্তিক আয় পাওয়া যায়। অতএব $f'(N)$ হবে $Q = N$ বিন্দুতে অর্থাৎ G বিন্দুতে গড় আয় রেখার ঢাল। JM হল G বিন্দুতে গড় আয় রেখার স্পর্শক। এই স্পর্শকের ঢাল থেকেই G বিন্দুতে গড় আয় রেখার ঢাল পাওয়া যাবে। এখন এই ঢাল হল $\frac{OJ}{OM}$ । OJM ত্রিভুজ ও JHG ত্রিভুজ তুলনা করলে দেখা যাবে যে ত্রিভুজ দুটি ϕ সমানুপাতবিশিষ্ট। অতএব $\frac{OJ}{OM} = \frac{HJ}{HG}$ । HG আবার উৎপাদনের মান N এর সঙ্গে সমান।

অতএব $N.f'(N) = HG.\frac{HJ}{HG} = HJ$। এবার G থেকে HJ দূরত্বে GN এর উপর K বিন্দুটি নেওয়া যাক। এই K বিন্দুটি তাহলে MR রেখার উপর অবস্থান করবে। N পরিমাণ উৎপাদনের জন্য প্রান্তিক আয় হবে NK।

একই পদ্ধতিতে আমরা Q এর অন্যান্য মানের জন্য MR রেখার অন্যান্য বিন্দুগুলি নির্ধারণ করতে পারি। পদ্ধতিটি পরিষ্কার করে নীচে বোঝানো হল। AR রেখার উপর যে কোনো একটি বিন্দু G' বেছে নিতে হবে। তারপর সেই বিন্দুটিতে AR রেখার স্পর্শক টানতে হবে। এই স্পর্শকটি উল্লম্ব (vertical) অক্ষের (axis) j' বিন্দুতে যুক্ত হবে। G' বিন্দু থেকে উল্লম্ব অক্ষের দিকে অনুভূমিক (horijontal) রেখা টানা যাক। ধরা যাক ঐ রেখাটি উল্লম্ব অক্ষকে G' বিন্দুতে স্পর্শ করে। এবার ঐ রেখাটি উল্লম্ব অক্ষকে G' বিন্দুতে স্পর্শ করে। এবার $H'J'$ এর সঙ্গে সমান করে G' থেকে নীচের দিকে খাড়াভাবে $G'K'$ দূরত্ব মাপা হল। এই K' বিন্দুটি MR রেখার উপর অবস্থান করবে। এইভাবে রেখাচিত্রের সাহায্যে গড় আয় বা AR এর থেকে প্রান্তিক আয় বা MR বের করা যায়। অবশ্য স্পর্শক আঁকার ক্ষেত্রে প্রাসঙ্গিক উৎপাদনমানের অন্তরকলজটির মান সম্বন্ধে ধারণা থাকা প্রয়োজন হয়। সেক্ষেত্রে এই রৈখিক পদ্ধতিটির আলাদা অস্তিত্ব থাকা কঠিন হয়ে দাঁড়ায়।

এর একটি ব্যতিক্রম আছে। এই ব্যতিক্রমটি হল যেখানে গড় আয় রেখাটি সরলরেখা। সরলরেখা হলে তার যে কোনো বিন্দুতে সে নিজেই নিজের স্পর্শক। এরকম অবস্থায় উপরের পদ্ধতিটি সহজেই প্রয়োগ করা যাবে।

৪। **অন্তরকলজের ভাগফল সূত্র : দুটি অপেক্ষকের ভাগফল $f(x)/g(x)$ এর অন্তরকলজ হল**

$$\frac{df(x)}{dxg(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

এখানে $g^2(x) = [g(x)]^2$।

উদাহরণ : $\frac{d}{dx}\left(\frac{5x-4}{2x+3}\right) = \frac{5(2x+3) - 2(5x-4)}{(2x+3)^2}$

$$= \frac{10x + 15 - 10x + 8}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{23}{(2x+3)^2}$$

এই সূত্রটির অর্থনৈতিক প্রয়োগ এবার আলোচনা করা যাক। প্রান্তিক ব্যয় (Marginal Cost বা MC) ও গড় ব্যয় (Average Cost বা AC) অপেক্ষক দুটির সম্পর্ক নির্ধারণে এই সূত্রটি প্রয়োগ করা যাক।

ধরা যাক যে মোট ব্যয় (Total cost বা TC) অপেক্ষকটি হল $C = C(Q)$। এবার গড় ব্যয় বা AC পেতে হলে মোট ব্যয়কে উৎপাদনের পরিমাণ দিয়ে ভাগ করতে হবে। অতএব $AC = \frac{C(Q)}{Q}$। এবার AC কে দুটি অপেক্ষকের ভাগফল হিসাবে প্রকাশ করা যাচ্ছে। এখন Q এর পরিবর্তনের জন্য AC এর পরিবর্তন।

অর্থাৎ $\frac{d(AC)}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left[\frac{C(Q)}{Q}\right]$ $\left[\text{কারণ } AC = \frac{C(Q)}{Q}\right]$

$$\frac{d}{dQ}\left[\frac{C(Q)}{Q}\right] = \frac{C'(Q).Q - C(Q).1}{Q^2}$$

$$= C'(Q)\frac{Q}{Q^2} - \frac{C(Q).1}{Q^2}$$

$$= C'(Q).\frac{1}{Q} - \frac{C(Q)}{Q^2}$$

$$= \frac{1}{Q}\left[C'(Q) - \frac{C(Q)}{Q}\right]$$

এর থেকে বলা যায় যে $Q > 0$ এর ক্ষেত্রে

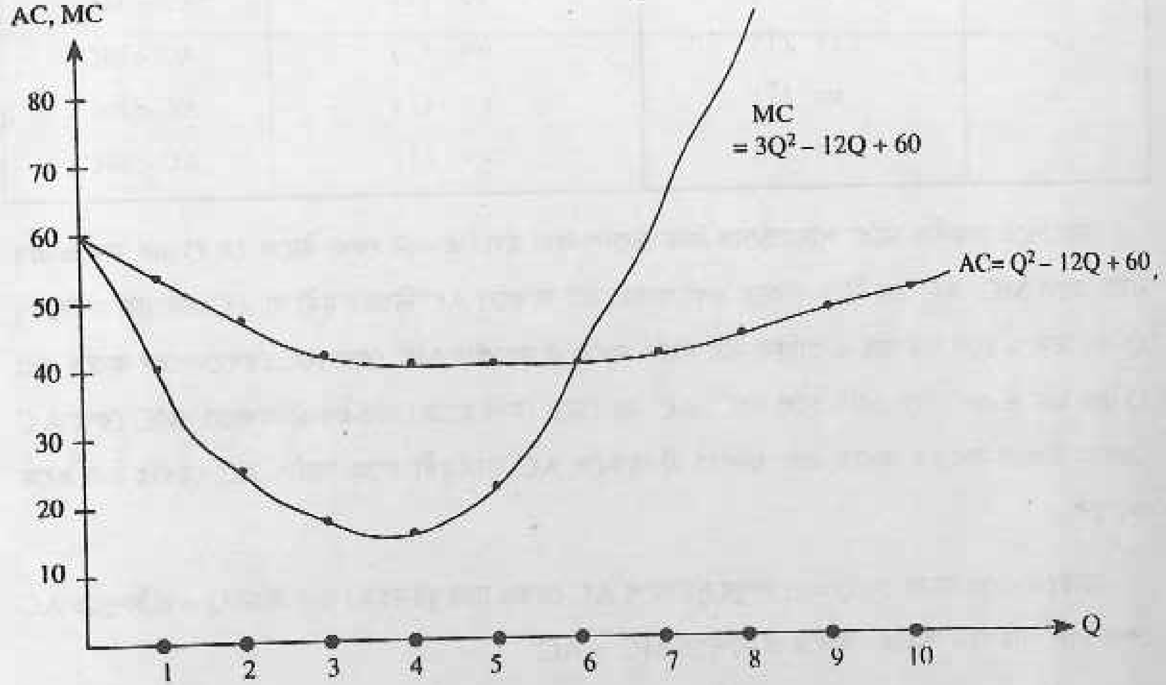
$$C'(Q) \gtreqless \frac{C(Q)}{Q}$$ হলে এবং হলেই

$$\frac{d}{dQ}\left[\frac{C(Q)}{Q}\right] \gtreqless 0$$ হবে।

আগেই জানা আছে যে অন্তরকলজ $C'(Q)$ এর মানে হল প্রান্তিক ব্যয়। আবার $\frac{C(Q)}{Q}$ হল গড় ব্যয়। অতএব প্রান্তিক ব্যয় রেখা গড় ব্যয় রেখার উপরে থাকলে, তাকে ছেদ করলে বা নীচে থাকলে এবং কেবলমাত্র এই শর্তগুলি পূরণ হলেই গড় ব্যয় রেখার ঢাল যথাক্রমে ধনাত্মক, শূণ্য বা ঋণাত্মক হবে।

নীচে একটি নির্দিষ্ট ব্যয় অপেক্ষক নিয়ে বিষয়টি বুঝিয়ে দেওয়া হল।

ধরা যাক ব্যয় অপেক্ষকটি $C = Q^3 - 12Q^2 + 60Q$



রেখাচিত্র নং ১.৪

গড় ব্যয় বা AC হল $\frac{C}{Q} = Q^2 - 12Q + 60$ এবং প্রান্তিক ব্যয় বা MC হল $\frac{dC}{Q} = 3Q^2 - 24Q + 60$

এবার Q এর বিভিন্ন মানের জন্য AC ও MCএর মান নির্ধারণ করে একটি সারণিতে দেওয়া হল [সারণি ১.১ দ্রষ্টব্য]

সারণি ১.১

Q এর মান	AC = ($Q^2 - 12Q + 60$) এর মান	MC (= $3Q^2 - 24Q + 60$) এর মান	MC ও AC এর পারস্পরিক সম্পর্ক
০	৬০	৬০	AC = MC
১	৪৯ (↓)	৩৯ (↓)	AC > MC
২	৪০ (↓)	২৪ (↓)	AC > MC
৩	৩৩ (↓)	১৫ (↓)	AC > MC
৪	২৮ (↓)	১২ (↓)	AC > MC
৫	২৫ (↓)	১৫ (↑)	AC > MC
৬	২৪ (↓)	২৪ (↑)	AC = MC
৭	২৫ (↑)	৩৯ (↑)	AC < MC
৮	২৮ (↑)	৬০ (↑)	AC < MC
৯	৩৩ (↑)	৮৭ (↑)	AC < MC
১০	৪০ (↑)	১২০ (↑)	AC < MC

সারণিতে বন্ধনীর মধ্যে পরিবর্তনের দিক নির্দেশ করা হল। এখানে দেখা যাচ্ছে যে Q এর মান ৬ এর নীচে হলে MC, AC এর নীচে থাকছে এবং ফলতঃ এই অঞ্চলে AC নিম্নাভিমুখী বা AC এর ঢাল ঋণাত্মক। Q এর মান ৬ হলে গড় ব্যয় ও প্রান্তিক ব্যয় সমান অর্থাৎ ঐ জায়গায় MC রেখা AC রেখাকে ছেদ করছে এবং Q এর মান ৬ এর চেয়ে বেশি হলে MC, AC এর চেয়ে বেশি হচ্ছে। অতএব ঐ অঞ্চলে MC রেখা AC রেখার উপরে অবস্থান করছে এবং ফলতঃ ঐ অঞ্চলে AC উর্ধ্বমুখী হচ্ছে অর্থাৎ AC রেখার ঢাল হচ্ছে ধনাত্মক।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে Q = 6 বিন্দুর দুইপাশে AC রেখার ঢাল দুইরকম। তার মানে Q = 6 বিন্দুতে AC রেখা ঢাল পরিবর্তন করছে। আবার ঐ বিন্দুতে MC = AC

অর্থাৎ $C'(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$

অতএব AC রেখার ঢাল

$$\frac{1}{Q}\left[C'/Q - \frac{C(Q)}{Q}\right] = 0 \text{ ।}$$

এই আলোচনার থেকে প্রান্তিক ও গড় ব্যয়ের চিরাচরিত সম্পর্ক সম্বন্ধে বলা যায় যে :—

(ক) $C'(Q) < \frac{C(Q)}{Q}$ হলে $\frac{d}{dQ}\left[\frac{C(Q)}{Q}\right] < 0$

অর্থাৎ প্রান্তিক ব্যয় < গড় ব্যয় হলে গড় ব্যয় রেখার ঢাল ঋণাত্মক।

(খ) $C'(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$ হলে $\frac{d}{dQ}\left[\frac{C(Q)}{Q}\right] = 0$

অর্থাৎ প্রান্তিক ব্যয় = গড় ব্যয় হলে গড় ব্যয় রেখার ঢাল হবে শূন্য।

(গ) $C'(Q) > \frac{C(Q)}{Q}$ হলে $\frac{d}{dQ}\left[\frac{C(Q)}{Q}\right] > 0$

অর্থাৎ প্রান্তিক ব্যয় > গড় ব্যয় হলে গড় ব্যয় রেখার ঢাল হবে ধনাত্মক।

প্রান্তিক ও গড়ের এই সম্পর্ক ব্যয় অপেক্ষকের পরিপ্রেক্ষিতে আলোচিত হল। কিন্তু $C(Q)$ অন্য যে কোনো অবকলণযোগ্য মোট অপেক্ষক এবং $\frac{C(Q)}{Q}$ ও $C'(Q)$ যথাক্রমে তার গড় ও প্রান্তিক অপেক্ষক হলে উপরের সমস্ত শর্তই বহাল থাকবে। তাই গড় ও প্রান্তিকের এই সম্পর্ক সাধারণভাবেই সত্য।

৫। ভিন্ন ভিন্ন চলরাশির অপেক্ষকের অবকলণের নিয়মাবলী:

(ক) **শৃঙ্খল সূত্র (Chanin rule) :** যদি $z = f(y)$ এবং $y = g(x)$ হয় তাহলে

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f'(y) \cdot g'(x)$$

এই সূত্রটি তিনটি বা তার বেশি অপেক্ষকের জন্যও প্রযোজ্য।

উদাহরণ ১ : ধরা যাক $z = 5y^2$ এবং $y = 3x + 6$।

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 10y \cdot 3 = 30y = 30(3x + 6) = 90x + 180।$$

সরাসরি y এর মান বসিয়ে অবকলণ করলে কী পাওয়া যায় তা দেখা যাক।

$$z = 5y^2 = 5(3x + 6)^2 = 5(9x^2 + 36x + 36)$$

অতএব $\frac{dz}{dx} = 5(18x + 36) = 90x + 180$

এবার স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে যে প্রথম পদ্ধতিটি অনেক সংক্ষিপ্ত তাই এসকল ক্ষেত্রে শৃঙ্খলসূত্র প্রয়োগ করাই বাঞ্ছনীয়।

উদাহরণ ২ : ধরা যাক $R = f(Q)$ একটি মোট আয় অপেক্ষক। আবার উৎপাদন Q হল শ্রম (L) এর উপর নির্ভরশীল অর্থাৎ $Q = g(L)$।

উপরের সূত্র অনুসারে $\frac{dR}{dL} = \frac{dR}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dL} = f'(Q).\ g'(L)$।

এখানে $\frac{dR}{dL}$ হল শ্রমের এক একক বৃদ্ধি পেলে মোট আয় কতটা বাড়ে তার পরিমাপ। তাই $\frac{dR}{dL}$ কে বলা হয় শ্রমের প্রান্তিক আয়গত উৎপাদন (marginal-revenue-product of labour বা MRP_L)। $\frac{dR}{dQ}$ হল প্রান্তিক আয় এবং $\frac{dQ}{dL}$ হল শ্রমের প্রান্তিক বাস্তব উৎপাদন (marginal physical product of labour)। তাই উপরের আঙ্কিক নিয়মটিকে অর্থনীতির ভাষায় লিখলে পাওয়া যাবে যে

শ্রমের আয়গত প্রান্তিক উৎপাদন (MRP_L) = প্রান্তিক আয় (MR) শ্রমের প্রান্তিক বাস্তব উৎপাদন (MPP_L)।

৬। বিপরীত-অপেক্ষক সূত্র (Inverse function rule) :

যদি $y = f(x)$ অপেক্ষকের চরিত্র এমন হয় যে x এর প্রতিটি ভিন্ন মানের জন্য y এর মান ভিন্ন হয় তাহলে f অপেক্ষকের একটি বিপরীত অপেক্ষক (Inverse function) থাকবে। এই বিপরীত অপেক্ষকটি হল $x = f^{-1}(y)$। এরকম ক্ষেত্রে শুধু যে x এর একটি নির্দিষ্ট মান y এর কেবলমাত্র একটি মানই দেবে তাই নয়, y এর নির্দিষ্ট মানও x এর কেবলমাত্র একটি মানই দেবে।

একদিষ্ট অপেক্ষক (monotonic function) গুলির ক্ষেত্রেই একমাত্র x এবং y এর এই একের সঙ্গে এক (one-to-one) সম্পর্ক বহাল থাকে। এখন দেখা যাক একদিষ্ট অপেক্ষক বলতে কী বোঝায়। যদি কোনো স্বাধীন চলরাশি x এর মান ক্রমাগত বাড়িয়ে গেলে f(x) এর মানও বেড়ে (বা কমে) যায় অর্থাৎ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ [বা $f(x_1) < f(x_2)$] তাহলে অপেক্ষকটি একদিষ্ট। প্রথম ক্ষেত্রে

[$f(x_1) > f(x_2)$] অপেক্ষকটিকে একদিষ্ট আরোহী বলা হয় এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে [$f(x_1) < f(x_2)$] অপেক্ষকটিকে একদিষ্ট অবরোহী বলা হয়।

এই দুটি ক্ষেত্রেই বিপরীত অপেক্ষক f^{-1} এর অস্তিত্ব থাকে। কোনো অপেক্ষককে একদিষ্টতা আছে কিনা তা বুঝবার একটি সহজ উপায় আছে। যদি অপেক্ষকটির অন্তরকলজের চিহ্ন x এর সমস্ত মানের জন্য একই থাকে অর্থাৎ সর্বদাই ধনাত্মক বা সর্বদাই ঋণাত্মক হয় (কিন্তু শূন্য নয়) তাহলে বলা হবে যে অপেক্ষকটি একদিষ্ট। জ্যামিতিকভাবে বলতে গেলে অপেক্ষকটি সমস্ত অঞ্চলেই হয় নিম্নাভিমুখী না হয়তো উর্ধ্বমুখী হয়। অপূর্ণ প্রতিযোগিতায় একটি প্রতিষ্ঠানের চাহিদা রেখা $Q = f(p)$ [Q = চাহিদা, P = দাম] সমস্ত অঞ্চলেই নিম্নাভিমুখী হয়—অতএব এটি একটি একদিষ্ট অপেক্ষকের উদাহরণ। এর বিপরীত অপেক্ষক $p = f^{-1}(Q)$ থেকে গড় আয় রেখা পাওয়া যায় কারণ দামই হল গড় আয়।

উদাহরণ : ধরা যাক $y = 7x + 49$(১) একটি অপেক্ষক। x এর মান নির্বিশেষে এক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ এর মান 7। অতএব x এর সমস্ত মানের জন্য $\frac{dy}{dx}$ ধনাত্মক এবং অপেক্ষকটি একদিষ্ট। সুতরাং এর বিপরীত অপেক্ষকের অস্তিত্ব আছে। এবার বিপরীত অপেক্ষকটি নির্ণয় করা যাক্।

$$y = 7x + 49$$

অথবা $y - 49 = 7x$

অথবা $\frac{y}{7} - 7 = x$

তাই $x = \frac{y}{7} - 7$(২) অপেক্ষকটি হল অপেক্ষক (১) এর বিপরীত অপেক্ষক। এই বিপরীত অপেক্ষক (২) এর অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{7}$। অর্থাৎ এটিও y এর মান নির্বিশেষে ধনাত্মক। সুতরাং এই অপেক্ষকটিও একদিষ্ট।

তাই সাধারণভাবে বলা যায় যে যদি কোনো মূল অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষকের অস্তিত্ব থাকে তাহলে মূল ও বিপরীত দুটি অপেক্ষকই একদিষ্ট হবে। f^{-1} যদি f এর বিপরীত অপেক্ষক হয় তবে f হবে f^{-1} এর বিপরীত। তার মানে f ও f^{-1} একে অন্যের বিপরীত।

উপরের উদাহরণের অন্তরকলজ দুটি বিশ্লেষণ করে বিপরীত অপেক্ষকের অন্তরকলজের যে সাধারণ সূত্র পাওয়া যায় তা হল $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$

তার মানে মূল ও বিপরীত অপেক্ষক দুটির অন্তরকলজ দুটির গুণফল হবে একক এবং ঐ দুটি অন্তরকলজের চিহ্ন এক হবে। অতএব মূল অপেক্ষকটিও একদিষ্ট আরোহী (অবরোহী) হবে।

১.৬ আংশিক অবকলন পদ্ধতি ও তার প্রয়োগ

এর আগের সমস্ত আলোচনায় যেসব অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয় করা হয়েছে যেগুলিতে একটি করে স্বাধীন চলরাশি ছিল। কিন্তু বস্তুর ক্ষেত্রে যে কোনো একটি অধীন চলরাশি একাধিক প্যারামিটার বা স্বাধীন চলরাশির উপর নির্ভরশীল হতে পারে। তাই এ সমস্ত অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয় করার পদ্ধতি জানা একান্ত প্রয়োজন।

ধরা যাক $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$। এখানে প্রতিটি $x_i = (i = 1, \ldots\ldots, n)$ গুলি প্রত্যেকটিই নিরপেক্ষ অর্থাৎ কেউ কারো উপর নির্ভরশীল নয়। তাই যে কোনো একটি x_i অন্য x_i গুলিকে কোনোভাবে প্রভাবিত না করেও নিজে পরিবর্তিত হতে পারে। ধরা যাক x_1 এ Δx_1 পরিবর্তন হল তার $x_2, \ldots, x_n$ অপরিবর্তিত থাকল। এর ফলে ধরা যাক y এ Δy পরিবর্তন হল।

অতএব $\dfrac{\Delta y}{\Delta x_1} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 \ldots x_n) - f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)}{\Delta x_1}$

এবার $\Delta x_1 \longrightarrow 0$ হলে $\dfrac{\Delta y}{\Delta x_1}$ এর সীমাস্থ মানকে বলা হবে x_1 এর সাপেক্ষে y এর আংশিক অন্তরকলজ। অন্যান্য সকল স্বাধীন চলরাশির প্রতিটির ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য ও একইভাবে আংশিক অন্তরকলজ বের করা সম্ভব। এই আংশিক অন্তরকলজ নির্ণয় করার প্রক্রিয়াকেই আংশিক অবকলন পদ্ধতি বলা হয়। আংশিক অন্তরকলজ বোঝাতে $\dfrac{dy}{dx}$ এর বদলে $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ লেখা হয়ে থাকে। এক্ষেত্রে $f'(x)$ এর বদলে $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots f_n$ ইত্যাদি ব্যবহার করা হয়। এগুলি যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ এর সাপেক্ষে y এর আংশিক অন্তরকলজ বোঝায়। তার মানে $\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = f_1$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = f_2, \ldots\ldots\ldots, \dfrac{\partial y}{\partial x_n} = f_n$ ইত্যাদি।

উদাহরণ : ধরা যাক $y = f(x_1, x_2)$

$$= 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$$

যখন f_1 বা $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$ নির্ণয় করা হবে তখন ধরে নিতে হবে যে x_2 একটি ধ্রুবক।

অতএব $f_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2$

আবার যখন f_2 বা $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ নির্ণয় করা হবে তখন ধরে নিতে হবে যে x_1 একটি ধ্রুবক।

অতএব $f_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1 + 8x_2$ ।

এখানে লক্ষণীয় যে আদিম অপেক্ষক f এর মত f_1 এবং f_2 দুটি আংশিক অন্তরকলজই x_1 এবং x_2 উভয়ের অপেক্ষক। তাই এগুলিকে আমরা দুটি নির্নীত অপেক্ষক (derived function) $f_1 = f_1(x_1, x_2)$ এবং $f_2 = f_2(x_1, x_2)$ এইভাবে লিখতে পারি।

উদাহরণ -১ : বাজার মডেল **(Market Model)**

যে বাজারটির তুলনামূলক স্থিতি এখানে আলোচনা করা হবে সেখানে পণ্য কেবলমাত্র একটিই । এই বাজারে তাই তখনই ভারসাম্য আসবে যখন সেই পণ্যটির চাহিদা ও যোগান সমান হবে। বাজারের যোগান ও চাহিদা দুটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

চাহিদার সমীকরণটি হল $Q = a - bP$। [Q = চাহিদার পরিমাণ, P = দাম এবং a ও b দুটি ধনাত্মক ধ্রুবক] অর্থাৎ $a, b > 0$

তার মানে দাম শূন্য হলেও চাহিদা ধনাত্মক।

যোগান রেখা হল $Q = -m + nP$। [এখানে Q = যোগানের পরিমাণ, P = দাম, m ও n ধনাত্মক ধ্রুবক অর্থাৎ $m, n > 0$] ।

এই সমীকরণটি দামের সঙ্গে যোগানের যে সম্পর্ক নির্দেশ করে তা হল যে দাম শূন্য হলেও যোগান ঋণাত্মক।

ভারসাম্য অবস্থায় চাহিদা ও যোগান সমান অর্থাৎ $a - bp = -m + np$

অথবা $a + m = np + bP$

অথবা $\frac{a + m}{n + b} = p$

P এর এই ভারসাম্য মানকেই $\overline{P}$ বলা হবে।

$Q = a - bP$

অথবা $Q = a - b\left(\frac{a+m}{n+b}\right)$

$$= \frac{an + ab - ba - bm}{n + b}$$

$$= \frac{an - bm}{n + b}$$

Q এর এই ভারসাম্য মানকেই $\overline{Q}$ বলা হবে। এই সমাধানগুলিকে রূপান্তরিত রূপ (reduced form) বলা হবে। এখানে মডেলের ভিতরকার চলরাশি Q এবং Pকে পরস্পর নির্ভরতাহীন প্যারামিটার a, b, m ও n এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হচ্ছে।

এবার যদি এই প্যারামিটারগুলির কোনোটিতে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তন হয় তাহলে $\overline{P}$ এ কী পরিবর্তন হবে তা বুঝবার জন্য প্রথম সমীকরণটিতে আংশিক অবকলন পদ্ধতি প্রয়োগ করে $\frac{\partial \overline{P}}{\partial a}$ ইত্যাদিগুলি নির্ণয় করতে হবে।

একইভাবে $\frac{\partial \overline{Q}}{\partial a}$ নির্ণয় করা সম্ভব। এখানে একটা বিষয় স্পষ্ট করে বলা আবশ্যক। $\frac{\partial Q}{\partial a}$ ও $\frac{\partial \overline{Q}}{\partial a}$ কিন্তু এক নয়। $\frac{\partial Q}{\partial a}$ তে আমরা শুধুমাত্র চাহিদারেখা ধরে a এর পরিবর্তনের জন্য Q এর পরিবর্তন কত হবে তা পরিমাপ করার চেষ্টা করি। এক্ষেত্রে যোগান রেখাকে ধরা হয়না। কিন্তু $\frac{\partial \overline{Q}}{\partial a}$ পরিমাপের ক্ষেত্রে আমরা Q এর ভারসাম্য মানের পরিবর্তনের কথা ভাবছি—অতএব চাহিদা ও যোগান উভয়ের ঘাত প্রতিঘাতকেই ধরা হচ্ছে।

এবার $\overline{P} = \frac{a+m}{b+n}$ সমীকরণটির বিভিন্ন আংশিক অন্তরকলজ নেওয়া যাক।

(ক) $\overline{P} = \frac{a}{b+n} + \frac{m}{b+n}$

অতএব $\frac{\partial \overline{P}}{\partial a} = \frac{1}{b+n}$

ভাগফলসূত্র প্রয়োগ করে এবার $\frac{\partial \overline{P}}{\partial b}$ বের করতে হবে।

$$\overline{P} = \frac{a+m}{b+n}$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial b} = \frac{\frac{\partial(a+m)}{\partial b}(b+n) - \frac{\partial(b+n)}{\partial b}(a+m)}{(b+n)^2}$$

$$= \frac{0.(b+n) - 1(a+m)}{(b+n)^2}$$

$$= -\frac{(a+m)}{(b+n)^2}$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial m} = \frac{1}{(b+n)} \quad \left(= \frac{\partial \overline{P}}{\partial a}\right)$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial n} = \frac{\frac{\partial(a+m)}{\partial n}(b+n) - \frac{\partial(b+n)}{\partial n}(a+m)}{(b+n)^2}$$

$$= \frac{0.(b+n) - 1(a+m)}{(b+n)^2}$$

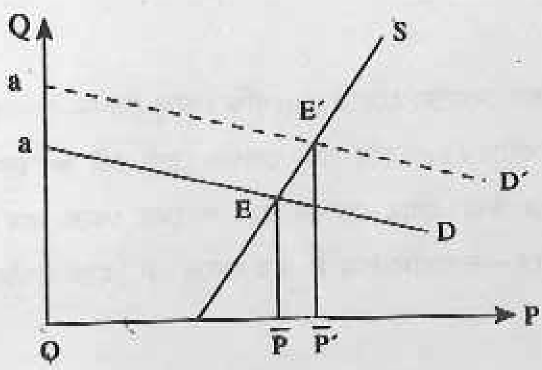
$$= -\frac{(a+m)}{(b+n)^2} \quad \left(= \frac{\partial \overline{P}}{\partial b}\right)$$

যেহেতু সমস্ত প্যারামিটার গুলিই ধনাত্মক, তাই

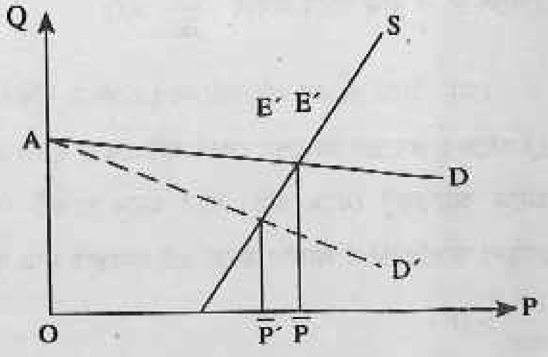
$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial a} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial m} = \frac{1}{(b+n)} > 0$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial b} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial n} = -\frac{(a+m)}{(b+n)^2} < 0$$

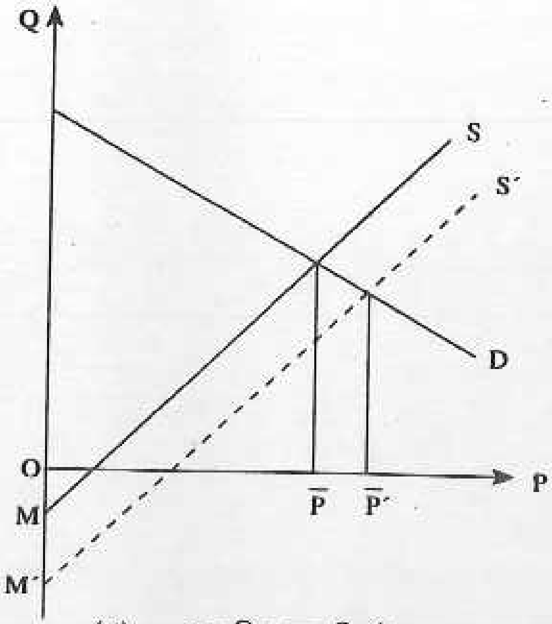
এবারে নীচের রেখাচিত্র নং (১.৫) এর মাধ্যমে এই অন্তরকলজগুলির অর্থ বিশ্লেষণ করার চেষ্টা করা যাক।



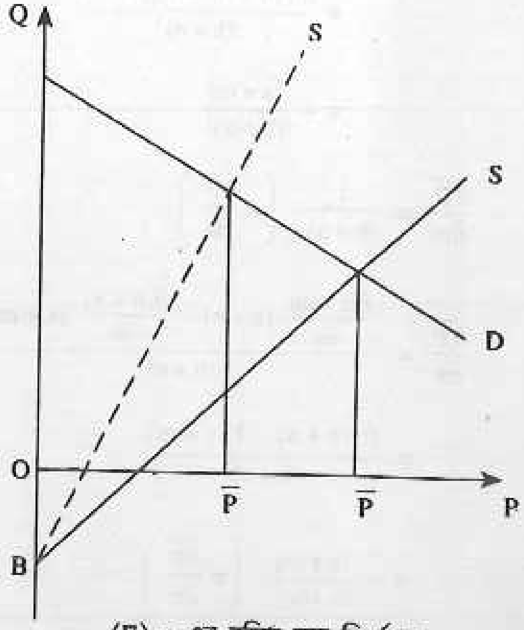
(ক) a এর বৃদ্ধির ফল নির্দেশক



(খ) b এর বৃদ্ধির ফল নির্দেশক



(গ) m এর বৃদ্ধির ফল নির্দেশক



(ঘ) n এর বৃদ্ধির ফল নির্দেশক

রেখাচিত্র ১.৫

এই রেখাচিত্রগুলিতে p কে অনুভূমিক এবং Q কে উল্লম্ব অক্ষে পরিমাপ করা হচ্ছে। (ক) চিত্রে a এর পরিবর্তন (এক্ষেত্রে বৃদ্ধি) হলে কী হবে তা দেখানো হল। a বৃদ্ধি পাওয়া মানে চাহিদা রেখার Q অক্ষের উপরকার রেখাংশটি (intercept) বাড়বে অর্থাৎ প্রতিটি P এর জন্যই এবার চাহিদা আগের থেকে বেশি হবে। তাই চাহিদা রেখা সমান্তরালভাবে উপরে উঠে যাবে। যোগানরেখায় যেহেতু কোনো পরিবর্তন হচ্ছেনা তাই ভারসাম্য বিন্দুটি E থেকে সরে E´ হবে অর্থাৎ $\overline{P}$ থেকে বেড়ে ভারসাম্য দাম হবে $\overline{P}'$। অতএব a বৃদ্ধি পেলে $\overline{P}$ ও বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ $\frac{\partial \overline{P}}{\partial a} > 0$।

(গ) চিত্রে m এর পরিবর্তনের (এক্ষেত্রে বৃদ্ধি) প্রভাব দেখানো হয়েছে। m বৃদ্ধি পেলে যোগান রেখার Q অক্ষের ঋণাত্মক অংশের রেখাংশটি বেড়ে Om এর বদলে Om´ হয়ে যায়। যোগান রেখা তাই ঋণাত্মক অক্ষে আরেকটু নেমে যায়। তার মানে প্রতিটি P এর জন্য এবার যোগান হবে আগের থেকে কম। চাহিদা অপরিবর্তিত থাকার ফলে এই অবস্থায় দাম বাড়বে—ভারসাম্য দাম $\overline{P}$ এর বদলে $\overline{P}'$ হবে অর্থাৎ $\frac{\partial \overline{P}}{\partial m} > 0$।

(খ) চিত্রে b এর পরিবর্তন (এক্ষেত্রে বৃদ্ধি) হলে কী হবে তা দেখানো হল। b বাড়লে চাহিদা রেখার ঢালের সংখ্যাসূচক পরম মান (numerical absolute value) আগের থেকে বেশি হবে অর্থাৎ চাহিদা রেখা আগের থেকে খাড়া হবে। তার মানে আগের মতই A বিন্দুতে শুরু হয়ে নতুন চাহিদা রেখা D′ এবার আগের চাহিদা রেখা D এর তলা দিয়ে অনুভূমিক অক্ষের দিকে যাবে। তাই প্রত্যেক P এর জন্য চাহিদা আগের থেকে কম হবে। যোগান অপরিবর্তিত থাকার ফলে এই পরিস্থিতিতে ভারসাম্য দাম আগের থেকে কমবে। আগের $\overline{P}$ এর বদলে এবার $\overline{P}'$ হবে ভারসাম্য দাম অর্থাৎ $\frac{\partial \overline{P}}{\partial b} < 0$ ।

এইরকমভাবে (ঘ) চিত্রে শুধু n এর পরিবর্তন (এক্ষেত্রে বৃদ্ধি) দেখা হবে। n বৃদ্ধি পেলে যোগান রেখার ঢাল বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ আগের মতই B বিন্দুতে শুরু হয়ে নতুন যোগান রেখা S′, আগের যোগানরেখা S এর উপর দিয়ে উঠে যাবে। তার মানে প্রত্যেক P এর জন্য এবার যোগান আগের থেকে বেশি হবে। এক্ষেত্রে চাহিদা অপরিবর্তিত থাকবে ফলে ভারসাম্য দাম কমে যাবে এবং $\overline{P}$ এর বদলে এবার $\overline{P}'$ হবে। তাই $\frac{\partial \overline{P}}{\partial n} < 0$ ।

এখন একটি প্রশ্ন স্বাভাবিকভাবেই উঠতে পারে যদি এত সহজ রেখাচিত্রের মাধ্যমে এই পরিবর্তনের দিক নির্ণয় করা সম্ভব হয় তাহলে আদৌ কেন অবকলন পদ্ধতির আশ্রয় নিতে হবে। আসলে অবকলণ পদ্ধতির বিশেষ দুটি সুবিধা থাকার ফলে তার দ্বারস্থ হবার প্রয়োজন হয়।

প্রথমত রেখাচিত্রের একটা আয়তন সংক্রান্ত সীমা আছে। কিন্তু অবকলন পদ্ধতির তা নেই। যদি অধীন চলরাশি ও প্যারামিটারগুলির সংখ্যা এমনও হয় যে রেখাচিত্রের মাধ্যমে তা প্রকাশ করা সম্ভব নয় তবুও সেখানে অবকলন পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়।

দ্বিতীয়ত, অবকলন পদ্ধতির মাধ্যমে যে ফলাফল আমরা পাই তার প্রয়োগ অনেক বেশি সর্বজনীন। উপরের বাজার মডেলের আংশিক অবকলন করে আমরা যে ফলাফলগুলি পেয়েছি তা a, b, m ও n এর মান নির্বিশেষে কেবলমাত্র তাদের চিহ্নের উপর আরোপিত বিধিনিষেধ মানলেই (অর্থাৎ $a, b, m, n > 0$ হলেই) বহাল থাকবে।

উদাহরণ -২ : জাতীয় আয় মডেল (National-Income-Model)

এখানে যে জাতীয়-আয় মডেলটি আলোচনা করা হবে তাতে তিনটি অধীন চলরাশি আছে। এইগুলি হল Y (জাতীয় আয়) C (ভোগ) এবং T (সংগৃহীত কর)। এই মডেলের সমীকরণগুলি নীচে দেওয়া হল।

(ক) $Y = C + I_0 + G_0$

(খ) $C = a + b(Y - T)$ $(a > 0 ; 0 < b < 1)$

(গ) $T = M + nY$ $(m > 0, 0 < n < 1)$

প্রথম সমীকরণটি জাতীয় আয়ের ভারসাম্য অবস্থা প্রকাশ করে। দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণ দুটি যথাক্রমে ভোগ ও কর সংগ্রহ কিভাবে নির্নীত হয় তা প্রকাশ করে। a ধনাত্মক কারণ যদি ব্যয়যোগ্য মোট আয় $(Y - T)$ শূন্যও হয় তবুও ভোগ বা C ধনাত্মক। এই কর আয় ছাড়া অন্য কিছুর উপর আরোপিত হয়েছে বলে ধরে নেওয়া হচ্ছে। n একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ, কারণ এটি আয়করের হার নির্দেশ করে। সেক্ষেত্রে n শূন্যের চেয়ে বড় হবে এবং 1 এর চেয়ে কম হবে।

স্বাধীন চলরাশি I_0 (বিনিয়োগ) এবং G_0 (সরকারি ব্যয়) উভয়ই অঋণাত্মক অর্থাৎ হয় শূন্য নয়তো ধনাত্মক। সমস্ত প্যারামিটার এবং স্বাধীন চলরাশিগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ তাই অন্যগুলির কোনো পরিবর্তন না করে যে কোনো একটিকে পরিবর্তন করা সম্ভব।

এবার প্রথমে সমীকরণগুলি সমাধান করে Y এর ভারসাম্য মান $\overline{Y}$ বের করা যাক। সমীকরণ (গ) থেকে T এর মান নিয়ে সেটি সমীকরণ (খ) তে প্রতিস্থাপন করলে

$$C = a + b(Y - m - nY)$$

C এর এই মান সমীকরণ (ক) তে প্রতিস্থাপন করলে (ক) হবে

$$Y = a + b(y - m - nY) + I_0 + G_0$$

$$= a + bY - bm - bnY + I_0 + G_0$$

অথবা $Y - bY + bnY = a - b_m + I_0 + G_0$

অথবা $Y(1 - b + bn) = a - bm + I_0 + G_0$

অথবা $Y = \frac{a - bm + I_0 + G_0}{1 - b + bn}$

এটিই হল Y এর ভারসাম্য মান $\overline{Y}$ ।

অর্থাৎ $\overline{Y} = \frac{a - bm + I_0 + G_0}{1 - b + bn}$ (ঘ) ।

সমীকরণ (ঘ) এর থেকে তুলনামুলক স্থিতির ক্ষেত্রে ছটি আংশিক অন্তরকলজ নির্ণয় করা যায়। এগুলি হল a, b, m, n, I_0 এবং G_0 এর সাপেক্ষে $\overline{Y}$ এর পরিবর্তন নির্দেশক। এর মধ্যে G_0 , I_0 এবং n এর সাপেক্ষে অন্তরকলজগুলি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ।

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b+b_n}$$

যেহেতু b ধনাত্মক ভগ্নাংশ অর্থাৎ $0 < b < 1$ তাই $(1-b) > 0$ । আবার $b > 0$, $n > 0$ তাই $b_n > 0$ অতএব $1 - b + b_n > 0$ ।

তাই $\dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0} = \dfrac{1}{1-b+b_n} > 0$ ।

এই আংশিক অন্তরকলজটি আসলে সরকারি ব্যয় গুণক (government-expenditure multiplier)। অতএব একথা বলা যায় যে সরকারি ব্যয় গুণক সাধারণতঃ ধনাত্মক। তার মানে সরকারি ব্যয় বৃদ্ধি (হ্রাস) পেলে ভারসাম্য জাতীয় আয় সর্বদাই বৃদ্ধি (হ্রাস) পাবে।

তাই $\dfrac{\partial \overline{y}}{\partial m} = \dfrac{-b}{1-b+b_n}$

আগেই জানা আছে যে এই ভগ্নাংশটির হর অর্থাৎ $(1 - b + b_n) > 0$। আবার $b > 0$,

তাই $-\dfrac{b}{1-b+b_n} < 0$ অর্থাৎ $\dfrac{\partial \overline{y}}{\partial m} < 0$ । এই আংশিক অন্তরকলজটি থেকে আয়কর ছাড়া অন্যান্য করের পরিবর্তন ঘটলে ভারসাম্য জাতীয় আয় কিভাবে পরিবর্তিত হয় তা নির্ণয় করা হয়। তাই এটিকে অন্যান্য করের গুণক বলা যায়। এই গুণকটি ঋণাত্মক হবার অর্থ আয়কর ছাড়া অন্যান্য কর বাড়লে (কমলে) জাতীয় আয় কমবে (বাড়বে)।

ভাগফল সূত্র ব্যবহার করে

তাই $\dfrac{\partial \overline{y}}{\partial n} = \dfrac{-b(a-b_m+I_0+G_0)}{(1-b+b_n)^2}$

$$= \frac{-b(1-b+b_n)\,\overline{Y}}{(1-b+b_n)^2} \qquad \left[\text{যেহেতু } \overline{y} = \frac{(a-b_m+I_0+G_0)}{1-b+b_n}\right]$$

$$= \frac{-b\overline{y}}{1-b+b_n}$$

এক্ষেত্রেও ভগ্নাংশটির হর ধনাত্মক অর্থাৎ $(1 - b + bn) > 0$। আবার $b, \overline{y}$ উভয়ই > 0। অতএব $\frac{-b\overline{y}}{1-b+bn} < 0$। এই আংশিক অন্তরকলজটির থেকে আয়কর হারের গুণকটি (income-tax rate multiplier) পাওয়া যায়। তার মানে $\frac{\partial \overline{y}}{\partial n}$ এর থেকে আয়করের হার n এর পরিবর্তনের জন্য ভারসাম্য জাতীয় আয়ের কী পরিবর্তন হবে তা বোঝা যায়। ভারসাম্য জাতীয় আয়ের সকল ধনাত্মক মানের জন্য এই অন্তরকলজটি ঋণাত্মক। তার মানে আয়করের হার n বাড়লে (কমলে) ভারসাম্য জাতীয় আয় কমবে (বাড়বে)।

১.৭ সাধারণ অপেক্ষক মডেলের তুলনামূলক স্থিতি বিশ্লেষণ (Comparative static Analysis of General Function Models)

যে সমস্ত মডেলগুলি রূপান্তরিতভাবে প্রকাশ করা সম্ভব সেসব ক্ষেত্রে আংশিক অবকলন পদ্ধতি প্রয়োগ করে তুলনামূলক স্থিতি বিশ্লেষণ করা হয়েছিল। এ সকল জায়গায় ধরে নেওয়া হয়েছিল যে প্যারামিটার / স্বাধীন চলরাশিগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ অর্থাৎ একের পরিবর্তন অন্যকে কোনোভাবে প্রভাবান্বিত করে না। এ সকল মডেলে আংশিক অবকলন পদ্ধতি প্রয়োগ করার তাই যথেষ্ট যৌক্তিকতা রয়েছে।

কিন্তু মডেলে সাধারণ অপেক্ষক (general function) ঢোকাবার ফলে যখন তাকে রূপান্তরিত রূপে প্রকাশ করা সম্ভব হয়না তখন তাহলে কী করা হবে? তখন মডেলের মূল সমীকরণগুলির থেকেই তুলনামূলক স্থিতি বিশ্লেষণ করতে হবে। উদাহরণস্বরূপ পূর্বে আলোচিত জাতীয় আয় মডেলটি ধরা যাক। এখানে দুটি অধীন চলরাশি —y (জাতীয় আয়) ও C (ভোগ)। মডেলটি হল $y = C + I_0 + G_0$

$C = C(y, T_0)$ (T_0 হল সংগৃহীত কর)

এই দুটি সমীকরণকে একত্রে একটি সমীকরণের মাধ্যমে লেখা যায়। সমীকরণটি হল

$Y = C(y, T_0) + I_0 + G_0$— এটি ভারসাম্য অবস্থা বোঝাচ্ছে। কিন্তু এই সমীকরণটিতে ভোগ অপেক্ষক (Consumption function) C এর নির্দিষ্ট রূপ না দেওয়া থাকাতে এটিকে সমাধান করে $\overline{y}$ এর ভারসাম্য মান $\overline{y}$ নির্ণয় করা সম্ভব হচ্ছে না।

এখানে ধরে নেওয়া হচ্ছে যে $\overline{y}$ এর অস্তিত্ব আছে। তাহলে কিছু সাধারণ শর্তসাপেক্ষে (শর্তগুলি এখানে আলোচ্য নয়) $\overline{y}$ কে স্বাধীন চলরাশি I_0, G_0 এবং T_0 এর অবকলনযোগ্য অপেক্ষক বলে ধরে নেওয়া যায় অর্থাৎ,

$\overline{y} = \overline{y}\ (I_0, G_0, T_0)$। অবশ্য এই অপেক্ষকটির নির্দিষ্ট রূপটিও নির্ণয় করা যাচ্ছে না। উপরন্তু ভারসাম্যমান $\overline{y}$ এর নিকটবর্তী অঞ্চলে নীচের অভেদ সমীকরণটি (identical equality) পাওয়া যাবে। সমীকরণটি হল $\overline{y} \equiv C(\overline{y}, T_0) - I_0 + G_0$। এটিকে আমরা ভারসাম্য অভেদ (equilibrium identity) বলার কারণ এখানে ভারসাম্য সমীকরণটিতে y এর পরিবর্তে y এর ভারসাম্য মান $\overline{y}$ প্রতিস্থাপন করা হয়েছে। এই অভেদটি থেকে প্রথমে মনে হতে পারে যে যেহেতু এখানে $\overline{y}$ আছে তাই পূর্বেকার মত আংশিক অবকলন করে তুলনামূলক স্থিতির প্রয়োজনীয় তথ্যগুলি পাওয়া যাবে। কিন্তু ব্যাপারটি অতটা সহজ নয়। আগে আমরা ধরে নিয়েছিলাম যে স্বাধীন চলরাশিগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ। এখানে কিন্তু সেই শর্তটি পূরণ হচ্ছে না। $\overline{y}$, T_0 এর অপেক্ষক, তাই ভোগ অপেক্ষক C এর স্বাধীন চলরাশিদুটি পরস্পর নিরপেক্ষ নয়। তাই T_0 সরাসরি C এর উপর প্রভাব বিস্তার করা ছাড়াও $\overline{y}$ এর মাধ্যমেও প্রভাব বিস্তার করতে পারে। তার মানে T_0 বদলালে তার দুরকম প্রভাব হবে—একটি প্রত্যক্ষ যেখানে T_0 এর পরিবর্তনের জন্য $\overline{y}$ বদলাবে এবং অন্যটি পরোক্ষ যেখানে T_0 বদলের ফলে $\overline{y}$ বদলাবে ও তার প্রভাব পড়বে C এর উপর। অতএব কেবলমাত্র আংশিক অবকলন করে $\frac{\partial y}{\partial T_0}$ দেখলে $\overline{y}$ এর উপর T_0 এর সমস্ত প্রভাব ঠিকমত বোঝা যাবেনা।

এইরকম অবস্থায় আংশিক অবকলন পদ্ধতির বদলে পূর্ণ অবকলন পদ্ধতি (total differentation) গ্রহণ করতে হবে। পূর্ণ-অবকলনের (total differential) ধারণার উপর ভিত্তি করে, পূর্ণ অবকলন পদ্ধতির মাধ্যমে আমরা পূর্ণ অন্তরকলজের ধারণা পাই। এই পূর্ণ অন্তরকলজটি একটি স্বাধীন চলরাশির পরিবর্তন সাপেক্ষে অপেক্ষকটির পরিবর্তনের হার নির্ণয় করে।

অবকল (differential) :

$Y = f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$ কে এতক্ষণ একটিই পদার্থ বলে ধরা হয়েছে। এবার এটিকে দুটি আলাদা সংখ্যা dy ও dx এর অনুপাত হিসাবে ধরা হবে।

১.৮ অবকল ও অন্তরকলজ এবং অবকলের অর্থনৈতিক প্রয়োগ

ধরা যাক $y = f(x)$। এবার x যদি Δx পরিমাণে পরিবর্তিত হয় তবে তার ফলস্বরূপ y ও Δy পরিমাণ পরিবর্তিত হবে। এখন আগেই দেখা গেছে যে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ থেকে x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার নির্ণয় করা যায়।

এখন যেহেতু $\Delta y \equiv \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x$ (১) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ জানা থাকলে এবং Δx জানলে Δy বের করা যাবে।

Δx এবং Δy উভয়ই ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র হলে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ পরিণত হবে $\frac{dy}{dx}$ এ। এবার x এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনকে যদি dx এবং y এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনকে যদি dy বলা হয় তাহলে উপরের ১ নং অভেদটি হয়ে যাবে

$$dy \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right) dx \qquad (২)$$

অথবা $dy \equiv f'(x)dx$ ।

dy এবং dx কে বলা হয় যথাক্রমে y এবং x এর অবকল। ২ নং অভেদটিকে dx দিয়ে ভাগ করলে পাওয়া যায় নিচের ২´ অভেদটি।

$$\frac{(dy)}{(dx)} \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad (২´)$$

অথবা $\frac{(dy)}{(dx)} \equiv f'(x)$ । অতএব অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx} \equiv f'(x)$ কে দুটি ভিন্ন অবকল dy ও dx এর অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যাবে।

উদাহরণ ১

ধরা যাক্ $y = 3x^2 + 7x - 5$ । এই অপেক্ষকটির অন্তরকলজ হল

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 7$$

অবকল $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$ ।

তার মানে $dy = (6x + 7)dx$ (৩)। —এবার dx এর মান জানা থাকলে সহজেই dy এর মান নির্ণয় করা যাবে। এখানে একটা কথা সর্বদাই মনে রাখা প্রয়োজন যে dx বা dy হল ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তন। তাই যদি x এর যথেষ্ট পরিমাণ পরিবর্তন হয় এবং সেই পরিবর্তনের মান উপরের সমীকরণটিতে প্রতিস্থাপিত হয় সেটি ফলস্বরূপ উদ্ভুত Δy এর সঠিক মান এর আসন্ন মানটি (approximate value) দেবে।

ধরা যাক x, 5 থেকে বেড়ে 5.01 হচ্ছে অর্থাৎ $dx = .01$।

তাহলে (৩) এর থেকে

$$\begin{aligned} dy &= (6.5 + 7)\,(.01) \\ &= (37)\,(.01) \\ &= 0.37 \end{aligned}$$

এবার দেখা যাক dy এর সঠিক মান কত?

$x = 5$ প্রতিস্থাপন করলে

$y = 3x^2 + 7x - 5$ হবে।

$y = 3(25) + 7(5) - 5$

$= 75 + 35 - 5 = 105$ ।

আবার মূল সমীকরণটি $x = 5.01$ প্রতিস্থাপন করলে $y = 3(5.01)^2 + 7(5.01) - 5$ হবে।

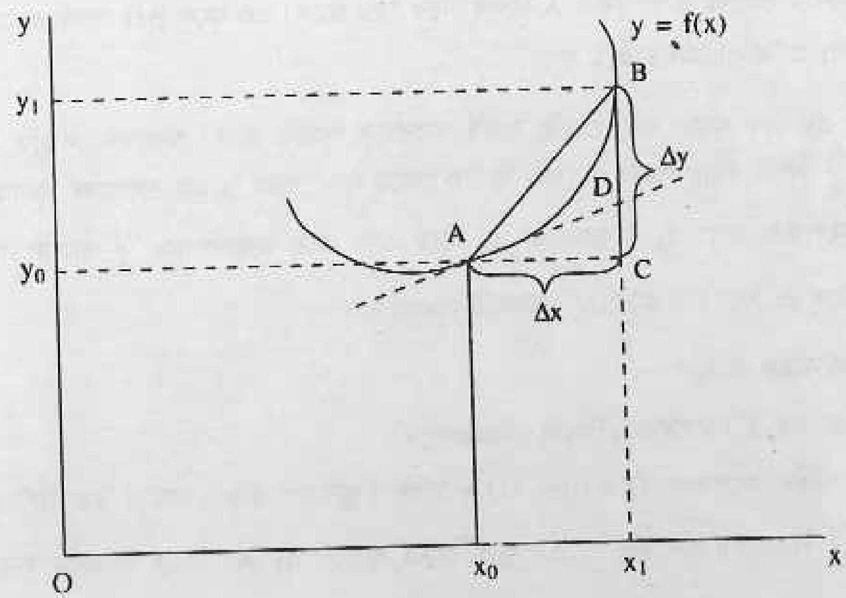
অথবা $y = 3\ (25.1001) + \ (35.07) - 5$

$= 75.\ 3003 + 35.07 - 5$

$= 105.3703$

অতএব Δy এর সঠিক মান হবে .3703। অবকল dy তাই y এর পরিবর্তনের যে আসন্ন মানটি দিচ্ছে তাতে :003 এর পরিমাণের একটি ত্রূটি থেকে যাচ্ছে।

নীচের রেখাচিত্র নং (১.৬) থেকে এই বিষয়টি পরিষ্কার বোঝা যাবে।



রেখাচিত্র নং ১.৬

ধরা যাক x, x_0 থেকে বেড়ে x_1 হচ্ছে। এখানে Δx সরলরেখা AC এর দৈর্ঘ্যের সমান। এই পরিমাণ Δx এর জন্য y, y_0 থেকে বেড়ে y_1। হচ্ছে। এবার দেখা যাক

$\Delta y \equiv \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x$ কত হয়।

$$\Delta y \equiv \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x$$

অথবা $\Delta y \equiv \left(\frac{CB}{AC}\right)AC = CB$। তাই আমরা যদি Δy পরিমাপ করার জন্য AB সরলরেখার ঢাল অর্থাৎ $\frac{CB}{AC}$ কে পরিবর্তনের হার ধরতাম তাহলে সঠিক উত্তরই পাওয়া যেত।

কিন্তু, আমরা যদি ২নং সমীকরণটির নির্দিষ্ট রূপ অর্থাৎ ৩নং সমীকরণটি ব্যবহার করি তাহলে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ এর বদলে অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$ টি পরিবর্তনের হার হিসাবে নেওয়া হয়। সেখানে সরলরেখা AB এর ঢালের পরিবর্তে A বিন্দুতে স্পর্শক অর্থাৎ সরলরেখা AD এর ঢাল দিয়ে আমরা পরিবর্তনের হার পরিমাপ করব।

সেক্ষেত্রে $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$

$$= \left(\frac{CD}{AC}\right)AC = CD।$$

অতএব সঠিক পরিবর্তনের সঙ্গে এর পার্থক্য (CB − CD) = BD। এখন Δx যত ছোট হবে B বিন্দু তত অপেক্ষকটির লেখের উপর দিয়ে A বিন্দুর দিকে সরে যাবে। এর ফলে BD সরলরেখার দৈর্ঘ্য ক্রমশঃ ছোট হবে এবং এটির পরিমাণও কমে যাবে।

অবকল dy বের করার এই পদ্ধতিটিকেই অবকলন পদ্ধতি বলে। অবকলন পদ্ধতি বলতে আবার অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করার পদ্ধতিও বুঝি। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সাধারণতঃ 'x এর সাপেক্ষে' অবকলন বলা হয়। $y = f(x)$ অপেক্ষক হলে dy অবকলকে dx দিয়ে ভাগ করে অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$ পাওয়া যায় এবং $\frac{dy}{dx}$ অন্তরকলজটিকে dx দিয়ে গুণ করে dy অবকলটি পাওয়া যায়।

অবকলের অর্থনৈতিক প্রয়োগ

অবকল ও বিন্দু স্থিতিস্থাপকতা (Point elasticity) :

ধরা যাক্ চাহিদা অপেক্ষক $Q = f(p)$, (Q = চাহিদার পরিমাপ ও p = দাম)। এর স্থিতিস্থাপকতা হল $\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)/\left(\frac{\Delta P}{P}\right)$। এবার যদি ধরি যে ΔP ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র তাহলে ΔP এবং ΔQ যথাক্রমে অবকল dP এবং dQ হয়ে যাবে। সেক্ষেত্রে স্থিতিস্থাপকতা হবে

$$E_d = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ/dP}{Q/P} \text{ ।}$$

কিন্তু, আমরা জানি যে dQ/dP হল চাহিদা অপেক্ষকের প্রান্তিক অপেক্ষক এবং Q/P হল তার গড় অপেক্ষক। অতএব বিন্দু স্থিতিস্থাপকতা হল প্রান্তিক অপেক্ষক ও গড় অপেক্ষকের অনুপাত।

শুধুমাত্র চাহিদা অপেক্ষকের ক্ষেত্রেই নয় সাধারণভাবে যে কোনো অপেক্ষকের জন্যই এই সম্পর্কটি বহাল থাকে। তাই $y = f(x)$ যে কোনো অপেক্ষক হলেই x এর সাপেক্ষে y এর বিন্দু স্থিতিস্থাপকতা।

$$E_{yx} = \frac{\text{প্রান্তিক অপেক্ষক}}{\text{গড় অপেক্ষক}} = \frac{dy/dx}{y/x} \text{ ।}$$

প্রচলিত রীতি অনুসারে অপেক্ষকের একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্থিতিস্থাপকতা পরিমাপ করার সময় স্থিতিস্থাপকতার পরম মানকেই মাপকাঠি বলে ধরা হয়।

চাহিদা অপেক্ষকের পরিপ্রেক্ষিতে বলতে গেলে

$|ED| > 1$ হলে চাহিদা স্থিতিস্থাপক,

$|ED| = 1$ হলে চাহিদা একক স্থিতিস্থাপক,

$|ED| < 1$ হলে চাহিদা অস্থিতিস্থাপক।

১.৯ পূর্ণ অবকল, পূর্ণ অন্তরকলজ ও তাদের প্রয়োগ (Total differential total derivative and their applications)

অবকলের ধারণাকে দুই বা তার অধিক স্বাধীন চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রেও প্রসারিত করা যায়। ধরা যাক সঞ্চয় (savings) অপেক্ষক।

$S = S(Y, i)$ [S = সঞ্চয়, y = জাতীয় আয় এবং i = সুদের হার।]

এখানে ধরে নেওয়া হচ্ছে যে অপেক্ষকটি অবিচ্ছিন্ন বা সন্তত এবং সমস্ত বিন্দুতেই তার আংশিক অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে —অর্থাৎ অপেক্ষকটি সর্বত্রই অবকলনযোগ্য। এই অপেক্ষকের আংশিক অন্তরকলজ $\frac{\partial S}{\partial y}$ (বা S_y) থেকে y বা জাতীয় আয়ের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য S বা সঞ্চয়ের পরিবর্তন কত হবে তা আমরা বুঝতে পারি। তার অর্থ S_y হল প্রান্তিক সঞ্চয় প্রবণতা (marginal propensity to save)। জাতীয় আয়ের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য সঞ্চয়ের যে পরিবর্তন হবে তা হল $\frac{\partial S}{\partial Y} \cdot dY$। একই

যুক্তিতে i বা সুদের হারের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য সঞ্চয়ের পরিবর্তন হবে $\frac{\partial S}{\partial i}di$ । S এর পূর্ণ পরিবর্তন (total change) dS হল এই দুটি পরিবর্তনের যোগফল।

অতএব $dS = \frac{\partial S}{\partial Y}dY + \frac{\partial S}{\partial i}di$

অথবা $dS = S_y dY + S_i d_i \begin{bmatrix} S_y = \frac{\partial S}{\partial Y} \\ S_i = \frac{\partial S}{\partial i} \end{bmatrix}$

dS কেই বলা হয় পূর্ণ অবকল (total differential)। এই পূর্ণ অবকল নির্ণয় করার পদ্ধতিকেই বলা হয় পূর্ণ অবকলন পদ্ধতি।

উপরের উদাহরণটিতে যদি y বদলায় কিন্তু i না বদলায় তাহলে di = 0। সেক্ষেত্রে $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial Y}\right)dY$

$$\text{অথবা } \left(\frac{\partial S}{\partial Y}\right) = \frac{\partial S}{\partial Y} \text{ । [i অপরিবর্তিত]}$$

অতএব যদি i না বদলায় প্রান্তিক অন্তরকলজ $\frac{\partial Y}{\partial S}$ কে দুটি পূর্ণ অবকল dS এবং dY এর অনুপাত হিসাবেও প্রকাশ করা যায়। একই ভাবে যদি Y অপরিবর্তিত থাকে এবং শুধু i পরিবর্তিত হয় তাহলে $\frac{\partial S}{\partial i}$ কে dS এবং dY এর অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যাবে।

সাধারণভাবে যদি কোনো অপেক্ষক f, n সংখ্যক স্বাধীন চলরাশির উপর নির্ভরশীল হয় অর্থাৎ

$$f = f(x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n) \text{ হয়}$$

$$\text{তাহলে } df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

$$\text{অথবা } df = fx_1dx_1 + fx_2dx_2 + \ldots\ldots + fx_ndx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} fx_idx_i$$

এখানেও যদি একটিই মাত্র স্বাধীন চলরাশির পরিবর্তন হয় এবং অন্যান্য স্বাধীন চলরাশিগুলি অপরিবর্তিত থাকে তাহলে ঐ একই সম্পর্ক বহাল থাকে। ধরা যাক শুধু x_1 বদলাচ্ছে এবং বাকী $x_2, \ldots, x_n$ সবই অপরিবর্তিত থাকছে। তাহলে

$$df = fx_1 dx_1$$

অথবা $df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dx_1$

অথবা $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ অর্থাৎ প্রান্তিক অন্তরকলজটি দুটি পূর্ণ অবকল df এবং dx_1 এর অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যাবে।

অবকলের নিয়মাবলী

সূত্র ১। $d(cu)^n = C_n u^{n-1} du$ [ঘাত-অপেক্ষক সূত্র]

২। $d(u \pm v) = du \pm dv$ [যোগফল-অন্তরফল সূত্র]

৩। $d(uv) = vdu + udv$ [গুণফল সূত্র]

৪। $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v_2}(vdu - udv)$ [ভাগফল সূত্র]

৫। $d(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw$

৬। $d(uvw) = vwdu + uwdv + uvdw$

পূর্ণ অন্তরকলজ (total derivative)

এবারে মূল সমস্যাটিতে ফিরে আসা যাক। সমস্যাটি ছিল যে যদি $C = C(\overline{Y}, T_0)$ হয় এবং T_0 ও $\overline{Y}$ পরস্পর নিরপেক্ষ না হয় তাহলে T_0 এর সাপেক্ষে C এর পরিবর্তনের হার পরিমাপ কী করে করা যাবে। এই সমস্যার উত্তর পাওয়া যাবে পূর্ণ অন্তরকলজের ধারণাটিতে। আংশিক অন্তরকলজের মত পূর্ণ-অন্তরকলজ নির্ণয় করার জন্য $\overline{Y}$ কে যে অপরিবর্তিত থাকতে হবে এমন কোনো পূর্বশর্ত প্রয়োজন নেই।

পূর্ণ অন্তরকলজ নির্ণয় করার পদ্ধতি

ধরা যাক $y = f(x, w)$ আবার $x = g(W)$

$dy = f_x d_x + f_w d_w$

$$\frac{dy}{dw} = f_x \frac{dx}{dw} + f_w$$

$$\left(\text{বা} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dw} + \frac{\partial y}{\partial w}\right)$$

$\frac{dy}{dw}$ হল W এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার। $\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dw}$ হল y এর উপর W এর পরোক্ষ প্রভাবের (অর্থাৎ x এর মাধ্যমে y এর উপর W এর যে প্রভাব) পরিমাপ। $\frac{\partial y}{\partial w}$ হল y এর উপর W এর প্রত্যক্ষ প্রভাব। অতএব $\left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dw} + \frac{\partial y}{\partial w}\right)$ হল y এর উপর w এর প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষ প্রভাবের যোগফল। এর থেকেই তাই আমরা w এর পরিবর্তন সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার মাপতে পারি। অতএব এটিই $\frac{dy}{dw}$ই হল পূর্ণ অন্তরকলজ। এই পদ্ধতিকে w এর সাপেক্ষে y এর পূর্ণ অবকলন পদ্ধতি বলা হয়।

এবারে একটি উদাহরণ নেওয়া যাক—

$$y = f(x, w) = 3x - w^2$$

এবং $x = g(w) = 2w^2 + w + 4$

$$\frac{dy}{dw} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dw} + \frac{\partial y}{\partial w}$$

এক্ষেত্রে $\frac{\partial y}{\partial x} = 3$, $\frac{dx}{dw} = 4w + 1$ এবং $\frac{\partial y}{\partial w} = -2w$

অতএব $\frac{dy}{dw} = 3(4w + 1) + (-2W)$

$$= 12w + 3 - 2w$$

$$= 10w + 3$$

এই অন্তরকলজটি কিন্তু অন্যভাবেও পাওয়া যাবে।

$y = 3x - w^2$ ....(১)

আবার $x = 2w^2 + w + 4$ ......(২)

x এর মান (১) এ প্রতিস্থাপন করলে

$$y = 3(2w^2 + w + 4) - w^2$$

$$= 6w^2 + 3w + 12 - w^2$$

$$= 5w^2 + 3w + 12$$

এবার y কে শুধুমাত্র w এর অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা হচ্ছে। তাই সাধারণভাবে অন্তরকলজ $\frac{dy}{dw}$ = $10w + 3$ ।

উদাহরণ ২ : ধরা যাক $Q = Q(K, L) = 25\,KL - K^2 - 2L^2$ ....(১)

একটি উৎপাদন অপেক্ষক। এখানে Q = উৎপাদনের পরিমাণ, K = মূলধন (Capital) ও L = শ্রম (labour)।

এখানে উপাদান K ও L দুটিই সময় t এর অপেক্ষক। নির্দিষ্ট অপেক্ষক দুটি হল

$K = g(t) = 0.3t$ ....(২)

এবং $L = h(t) = 0.2t$ ....(৩)

এবার যদি সময় t এর পরিবর্তনের জন্য উৎপাদন Q এর পরিবর্তনের হার দেখতে চাওয়া হয় তাহলে পূর্ণ অবকলনের পদ্ধতিটি প্রয়োগ করা যায়।

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{dL}{dt}$$

$$= (25L - 2K)(0.3) + (25K - 4L)(0.2)$$

$$= 7.5L - 0.6K + 5.0\,K - 0.8L$$

$$= 6.7L + 4.4K \quad ....(৪)$$

এবার (৪) এ K এবং L এর মান প্রতিস্থাপন করে

$$\frac{dQ}{dt} = (6.7)(0.2t) + (4.4)(0.3t)$$

$$= 1.34t + 1.32t$$

$$= 2.66t$$

পরোক্ষ অপেক্ষকের অন্তরকলজ (derivative of implicit functions)

পূর্ণ অবকলের সাহায্যে পরোক্ষ অপেক্ষকের অন্তরকলজ বের করা যায়।

$y = f(x) = 3x^4$ হল নির্দিষ্ট বা প্রত্যক্ষ অপেক্ষক কারণ y কে x এর নির্দিষ্ট অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা হয়েছে।

কিন্তু $y - 3x^4 = 0$ কে আমরা বলব পরোক্ষ অপেক্ষক কারণ এখানে একটি সমীকরণ দেওয়া আছে যার থেকে পরোক্ষভাবে $y = f(x)$ অপেক্ষকটির সম্বন্ধে ধারণা করতে হচ্ছে। কোনো কোনো ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট অপেক্ষকটি না দিয়ে $F(y, x) = 0$ সবসময় কোনো $y = f(x)$ অপেক্ষককে নাও নির্দেশ করতে পারে। যেমন $x^2 + y^2 = 0$ এই সমীকরণটি। এর একমাত্র সমাধান $x = 0, y = 0$। তাই কেবলমাত্র উৎস বিন্দুতেই (origin) এর অস্তিত্ব থাকবে। অতএব এটি কোনো অপেক্ষক নির্দেশ করেনা। এবার আরেকটি উদাহরণ নেওয়া যাক।

$F(y, x) = x^2 + y^2 - 9 = 0$। এটিও কোনো অপেক্ষক নির্দেশ করেনা কারণ x এর প্রতিটি মানের জন্য y এর কোনো নির্দিষ্ট একটিই মান পাওয়া যাচ্ছেনা। যেমন $x = 0$, হলে y হবে হয় $+3$ নয় -3। কিন্তু y কে হয় ধনাত্মক নয় ঋণাত্মক ধরে নিলে দুটি অপেক্ষক পাওয়া যাবে। সেগুলি হল যথাক্রমে $y = +\sqrt{9 - x^2}$ এবং $y = -\sqrt{9 - x^2}$।

যদি $F(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$ সমীকরণটি সমাধান করে y পাওয়া যায় তাহলে $y = f(x_1, \ldots, x_m)$ অপেক্ষকটি নির্দিষ্ট রূপে লেখা সম্ভব হয় এবং সাধারণ নিয়মেই অন্তরকলজ বের করা সম্ভব হয়। যেমন $F(y, x) = x^2 + y^2 - 9 = 0$ সমাধান করলে y^+ (y এর ধনাত্মক মান) $= +\sqrt{9 - x^2}$

এবং y^- (y এর ঋনাত্মক মান) $= -\sqrt{9 - x^2}$

$$\frac{dy^+}{dx} = \frac{d}{dx}(9-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(9-x^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x)$$

$$= \frac{-2x}{2(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-x}{(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-x}{y^+} = [y^+ \neq 0]$$

আবার $\frac{dy^-}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-(9-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$

$$= -\frac{1}{2}(9-x^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x)$$

$$= \frac{-2x}{(-2)(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{x}{(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{x}{y^-} = [y^- \neq 0]$$

কিন্তু যদি $F(y, x_1, \ldots, x_m) = 0$ কে y এর জন্য সমাধান করা না যায়? সেক্ষেত্রে যদি পরোক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব আছে বলে জানা থাকে তাহলে y এর জন্য সমাধান না করেই কিন্তু অন্তরকলজটি বের করা যাবে।

$F(y, x_1, \ldots, x_m) = 0$ হলে

$$F_y d_y + F_{x_1} d_{x_1} + F_{x_2} d_{x_2} + \ldots\ldots\ldots + F_{x_m} d_{x_m} + d_0 = 0 \text{ ।}$$

এবার যদি কেবলমাত্র y এবং x_1 কে পরিবর্তন করা হয় অর্থাৎ শুধু dy এবং d_{x_1} শূন্য না হয় ও বাকী d_{x_i} $(i = 2, \ldots\ldots, m)$ শূন্য হয় তাহলে

$F_y d_y + F_{x_1} d_{x_1} = 0$ হবে

অথবা $\frac{dy}{d_{x_1}} \equiv \frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{Fx_1}{d_{x_1}}$ [অন্যান্য চলরাশিগুলিকে ধ্রুবক ধরে]

এর থেকে পরোক্ষ অপেক্ষক সূত্রটি পাওয়া যায়। সূত্রটি হল যদি $F(y, x_1, \ldots\ldots x_m) = 0$ হয় এবং যদি একটি পরোক্ষ অপেক্ষক $y = f(x_1, \ldots\ldots x_m)$ এর অস্তিত্ব থাকে তাহলে

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{Fx_i}{F_y} \quad (i = 1, \ldots\ldots m)$$

উদাহরণ হিসাবে সমীকরণ $F(Q, K, L) = 0$ নেওয়া যাক। এটি পরোক্ষভাবে উৎপাদন অপেক্ষক $Q= f(K, L)$ কে নির্দেশ করে।

এবার মূলধন K, শ্রম L এর প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা (marginal productivity) পরিমাপ করার চেষ্টা করা যাক। পরোক্ষ অপেক্ষক সূত্রানুসারে,

মূলধনের বাস্তব প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা (marginal physical productivity of capital)

$$MPP_k \equiv \frac{\partial Q}{\partial k} = -\frac{F_k}{F_Q}$$

এবং শ্রমের বাস্তব প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা (marginal physical productivity of labour)

$$MPP_L \equiv \frac{\partial Q}{\partial L} = -\frac{F_L}{F_Q} \text{ ।}$$

F (Q, K, L) থেকে আরেকটি আংশিক অন্তরকলজ পাওয়া যায়। সেটি হল $-\frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{F_L}{F_K}$ ।

$\frac{\partial Q}{\partial L}$ এর অর্থ হল যদি Q অপরিবর্তিত রেখে L বদলানো হয় তাহলে K কতটা বদলাতে হবে। অর্থাৎ L এর নির্দিষ্ট পরিমাণ পরিবর্তনের সঙ্গে Q যাতে না বদলায় তার জন্য K কে কতটা বদল করতে হবে। তার মানে কতটা L এর বিকল্প হিসাবে কতটা K দিতে হবে যাতে উৎপাদনের কোনো পরিবর্তন না হয়। তাই $\frac{\partial Q}{\partial L}$ এর সংখ্যাগত মান হল দুটি উৎপাদকের মধ্যে প্রযুক্তিগত প্রান্তিক পরিবর্তনের হার (Marginal rate of technical substitution)।

সাধারণ অপেক্ষক মডেলের তুলনামূলক স্থিতি বিশ্লেষণ

এখানে আবার বাজার মডেল নিয়ে আলোচনা করা যাক। এখানেও ধরা হচ্ছে যে বাজারটিতে একটিমাত্র পণ্য কেনাবেচা করা হয়। এই পণ্যটির চাহিদা Q_d, দাম P এবং বহির্নিনীত (exogenous) চলরাশি Y_0 এর অপেক্ষক। যোগান Q_S হল কেবলমাত্র P এর অপেক্ষক।

মডেলটি এবার নীচে দেওয়া হল।

$$Q_d = Q_S$$

$$Q_d = D(P, Y_0) \left[\frac{\partial D}{\partial P} < 0, \frac{\partial y}{\partial y_0} > 0 \right]$$

$$Q_S = S(P) \left[\frac{\partial S}{\partial P} > 0 \right]$$

D এবং S দুটি অপেক্ষকেরই অবিচ্ছিন্ন অন্তরকলজ আছে বলে ধরে নেওয়া হচ্ছে অর্থাৎ অপেক্ষক দুটি মসৃণ (smooth)। যোগান অপেক্ষকটি আবার একদিষ্ট আরোহী।

সাধারণ চাহিদা রেখা আঁকার সময় P এবং Q নেওয়া হয়। আয় বদলালে তাই চাহিদা রেখা সরে যায় এবং ভারসাম্য অবস্থার পরিবর্তন ঘটে। এই মডেলে Y_0 একমাত্র প্যারামিটার তাই তুলনামূলক স্থিতিশীলতার বিশ্লেষণ মানে Y_0 এর পরিবর্তন কিভাবে ভারসাম্য অবস্থাকে প্রভাবান্বিত করে তারই আলোচনা।

ভারসাম্য মানে

$$Q_d = Q_S$$

অর্থাৎ $D(P_1 y_0) = S(P)$

অথবা $D(P_1 y_0) - S(P) = 0$ ।

এই সমীকরণটি থেকে ভারসাম্য দাম $\overline{P}$ এর কোনো একটি নির্দিষ্ট মান বের করা যায়না কিন্তু ধরা যায় যে $\overline{P}, y_0$ এরই অপেক্ষক। অর্থাৎ $\overline{P} = \overline{P}(y_0)$। $\overline{P} = \overline{P}(y_0)$ থেকে পরোক্ষ অপেক্ষক $F(\overline{P}, y_0) = 0$ পাওয়া যাবে। তারই ভিত্তিতে অন্তরকলজ $\dfrac{d\overline{P}}{dy_0}$ বিশ্লেষণ করা যাক। এখানে অবশ্য এটাও ধরে নেওয়া হচ্ছে যে $\dfrac{d\overline{P}}{dy_0}$ এর অস্তিত্ব আছে। এই পরিপ্রেক্ষিতে ধরে নেওয়া যায় যে $F(P, y_0)$ এর সন্ততঃ অন্তরকলজ আছে কারণ এর দুটি উপাদান $D(P, y_0)$ এবং $S(P)$ এরই সন্ততঃ অন্তরকলজ আছে।

দ্বিতীয়ত যেখানেই পরিমাপ করা হোক না কেন P এর সাপেক্ষে F এর অন্তরকলজ

$F_P = \dfrac{\partial D}{\partial P} - \dfrac{dS}{dP}$ ঋণাত্মক (তাই শূন্য নয়)। অতএব পরোক্ষ অপেক্ষক সূত্রটি এখানে প্রযোজ্য।

এই সূত্র অনুসারে ভারসাম্য সমীকরণটি এবার ভারসাম্য সমাধান এর নিকটবর্তী অঞ্চলে অভেদ সমীকরণ হিসাবে লেখা যায়। অর্থাৎ $D(\overline{P}, y_0) - S\left(\overline{P}\right) \equiv 0$ । এবার পরোক্ষ অপেক্ষক সূত্র প্রয়োগ করে তুলনামূলক স্থিতির অন্তরকলজ অর্থাৎ $\dfrac{d\overline{P}}{dy_0}$ বের করা যায়। এই অন্তরকলজটিকে সাধারণ অন্তরকলজের থেকে পার্থক্য করার জন্য আমরা বন্ধনীর মধ্যে লিখব।

$$\left(\frac{d\overline{P}}{dy_0}\right) = -\frac{\partial F/\partial y_0}{\partial F/\partial P}$$

$$= -\frac{\partial D/\partial y_0}{\partial D/\partial \overline{p} - \partial s/\partial \overline{p}} > 0$$

$\frac{\partial D}{\partial \overline{P}}$ হল $\overline{P}$ এ নির্নীত $\partial D/\partial P$ এর মান। একইভাবে $\frac{\partial S}{\partial \overline{P}}$ হল $\overline{P}$ এ নির্নীত $\partial S/\partial P$ এর মান। $\frac{\partial D}{\partial y_0}$ কেও ভারসাম্য বিন্দুতে নির্ণয় করা প্রয়োজন। আগেই জানা আছে যে $\frac{\partial D}{\partial y_0} > 0$, $\frac{\partial D}{\partial \overline{P}} < 0$ এবং $\frac{\partial S}{\partial \overline{P}} > 0$। অতএব উপরের সমীকরণটির ডানদিকের হর ঋণাত্মক ও লব ধনাত্মক। তাই ভগ্নাংশটির মান ঋণাত্মক এবং ভগ্নাংশটির ঋণাত্মক মান ধনাত্মক অর্থাৎ $\left(\frac{d\overline{P}}{dy_0}\right) > 0$। এখান থেকে নিশ্চিতভাবে বলা যায় যে আয়ের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র বৃদ্ধি (হ্রাস) হলে সর্বদাই ভারসাম্য দান বাড়বে (কমবে)।

১.১০ সমাকলন পদ্ধতি ও তার প্রয়োগ (Integration process and its applications)

তুলনামূলক স্থিতির বিশ্লেষণে দুটি ভারসাম্য অবস্থার তুলনা করা হয়েছিল। সেখানে ধরেই নেওয়া হয়েছিল যে অর্থনৈতিক চলরাশিগুলি একবার ভারসাম্য থেকে দূরে সরে গেলেও আবার ভারসাম্য অবস্থায় ফিরে আসে। দুটি ভারসাম্য অবস্থার মধ্যবর্তী সময়ে চলরাশিগুলির গতিপথ সম্পর্কে এখানে জানবার কোনো উপায় নেই। এবার যদি আমরা চলরাশিগুলি এক ভারসাম্য অবস্থা থেকে সরে যাবার পর যে গতিপথ নেয় তা জানতে পারি তাহলে সত্যি সেগুলি অন্য কোনো ভারসাম্য অবস্থার দিকে যাবে কিনা তা সঠিক বোঝা যাবে। তার জন্য আমাদের গতিবিজ্ঞানের (dynamics) আশ্রয় নিতে হবে।

গতিবিজ্ঞানভিত্তিক বিশ্লেষণে সবসময়ই চলরাশিগুলির সময়ভিত্তিক পরিবর্তন দেখা হয়। এটা দুইভাবে করা যায়—সময়কে বিচ্ছিন্ন (discrete) চলরাশি ধরে অথবা অবিচ্ছিন্ন (continuous) চলরাশি ধরে। প্রথম ক্ষেত্রে সময়ের ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুতে চলরাশির পরিমাপ করে পার্থক্য নির্ণয় করা হয়। যেমন—১৯৯৯ তে জাতীয় আয় এবং ২০০০ এ জাতীয় আয় দেখে জাতীয় আয় একবছরে কতটা বদলাচ্ছে তা বোঝার চেষ্টা করা। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট সময় ধরে চলরাশির কী পরিবর্তন হল তা দেখা হয়। যেমন একবছর ধরে জাতীয় আয় কতটা বদল হল। বিচ্ছিন্ন সময় বিন্দুগুলির মধ্যে পার্থক্য যদি ক্রমশঃ ছোটর থেকে ছোট হতে থাকে তবে একেবারে সীমায় আমরা অবিচ্ছিন্ন সময় পাব। তাই বিচ্ছিন্ন সময়ের ঘটনাগুলির সীমা হিসাবে অবিচ্ছিন্ন সময়ের ঘটনাগুলি পাওয়া যায়।

গতিশীল মডেলগুলির মূল আলোচ্য বিষয় হল, পরিবর্তনের রূপ জানা থাকলে যে কোনো চলরাশির সময়পথ (time path) নির্ণয় করা।

ধরা যাক জনসংখ্যা H, সময় t এর অপেক্ষক। জনসংখ্যার পরিবর্তনের হার $\frac{dH}{dt} = t^{-1/2}$। এবার জনসংখ্যার গতিপথ H(t) নির্ণয় করা যাক। আগে দেখা গেছে যে H = H(t) এর মত কোনো অপেক্ষক থাকলে তার থেকে কী করে অন্তরকলজ $\frac{dH}{dt}$ বের করে H এর পরিবর্তনের হার পাওয়া যায়। এবার আমাদের কাজটা কিন্তু ঠিক এর বিপরীত। এখানে নির্ণীত অপেক্ষক $\frac{dH}{dt}$ দেওয়া আছে এবং সেখান থেকে আদিম অপেক্ষক H = H(t) বের করতে হবে। এই পদ্ধতিকেই বলা হয় সমাকলন (integration)।

এখানে একটা সমস্যা আছে। সেটা হল যে $H(t) = 2t^{-1/2}$ $H(t) = 2t^{1/2} + C$ (C ধ্রুবক) হলে $\frac{dH}{dt} = t^{-1/2}$ হবে। তাই C এর মান সম্বন্ধে কোনো ধারণা না থাকলে নির্দিষ্ট আদিম অপেক্ষকটি নির্ধারণ করা মুস্কিল হচ্ছে। এবার যদি H এর প্রারম্ভিক মান (initial value) অর্থাৎ t = 0 হলে H এর মান জানি তাহলে এই সমস্যার কিছুটা সমাধান করা সম্ভব।

আমরা জানি যে $H(O) = 2(O)^{1/2} + C = C$।

তাই যদি H(O) = 100 হয় তার অর্থ C = 100। এক্ষেত্রে অপেক্ষকটি হবে

$$H(t) = 2t^{1/2} + 100।$$

তার মানে যে কোনো জ্ঞাত (known) H(O) এর জন্য $H(t) = 2t^{1/2} + H(O)$।

অনির্দিষ্ট সমাকল (indefinite integral)

যদি আদিম অপেক্ষক F(x) কে অবকলন করে অন্তরকলজ f(x) পাওয়া যায় তাহলে f(x) কে সমাকলন করে F(x) পাওয়া যায়।

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ হলে

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$\int f(x)dx$ কে বলা হয় f(x) এর অনির্দিষ্ট সমাকল কারণ এর কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যাগত মান নেই।

সমাকলনের নিয়মাবলী

(১) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \ (n \neq -1)$

(২) $\int e^x dx = e^x + C$

(৩) $\int \frac{1}{x} dx = l_u x + C \quad x > 0$

(৪) $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(৫) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

(৬) $\int f(x)\frac{du}{dx}dx = \int f(x)\,du = F(u) + C$

(৭) $\int vdu = uv - \int udv$

নির্দিষ্ট সমাকল (definite integral)

সন্ততঃ অপেক্ষক $f(x)$ এর অনির্দিষ্ট সমাকল $f(x)dx = F(x) + C$ এর জন্য যদি x এর সংজ্ঞার অঞ্চলে দুটি বিন্দু a এবং b $(a < b)$ নেওয়া হয় তাহলে সমাকলটির মান হবে যথাক্রমে $F(a) + C$ এবং $F(b) + C$। তাদের অন্তরফল (difference) হল $F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$ । এই অন্তরফলের সংখ্যাগত মান C এর মান নিরপেক্ষ। এটিকেই বলা হয় a থেকে b এর মধ্যে $f(x)$ এর নির্দিষ্ট সমাকল।

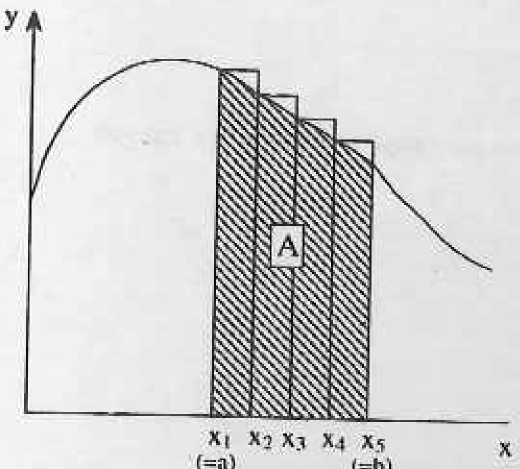
এই নির্দিষ্ট সমাকল বের করার জন্য সমাকলটিতে x এর উপরের ও নীচের মান দেওয়া হয়।

অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx$ এইভাবে লেখা হয়।

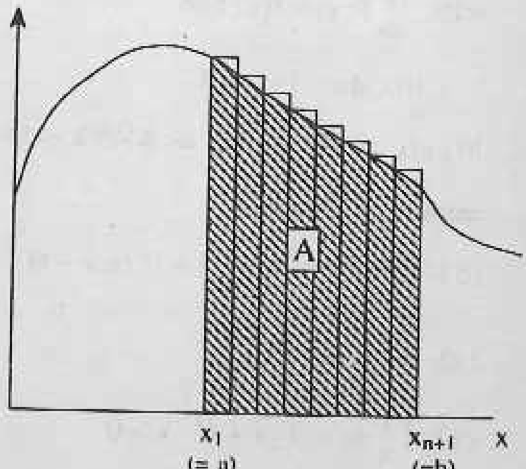
$$\int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} F(x) \\ +C \end{bmatrix}_a^b = F(b) - F(a)\ ।$$

নির্দিষ্ট সমাকলকে যে কোনো রেখার তলায় অবস্থিত ক্ষেত্রের আয়তন বলা যায়।

নীচের রেখাচিত্র নং (১.৭) এ $y = f(x)$ অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকটির ছবি আঁকা হচ্ছে।



(ক)



(খ)

রেখাচিত্র নং ১.৭

এখানে A [গাঢ় রং করা] অঞ্চলটির আয়তন জানতে চাওয়া হচ্ছে। এই A বা [a, b] অঞ্চলটিকে আরও ছোট ছোট n ভাগে বিভক্ত করা হচ্ছে। প্রতিটি বিভাগকে Δx_1, Δx_2 ইত্যাদি বলা যায় কারণ x_1 বিন্দু থেকে x যখন x_2 বিন্দুতে সরে যাচ্ছে তখন তার পরিবর্তন হল $\Delta x_1 = x_1 x_2$। এবার রেখাচিত্র ১.৭(ক) নিয়ে আলোচনা করা যাক। এই রেখাচিত্রে x = 4 ধরা হয়েছে। এবার ছোট ছোট এই বিভাগগুলিতে চারটি আয়তক্ষেত্র আঁকছি যেগুলির উচ্চতা হবে সেই বিভাগে অপেক্ষকটির সর্বোত্তম মান। প্রথম বিভাগটির উচ্চতা তাই $f(x_1)$ এবং প্রস্থ Δx_1। সাধারণভাবে i বিভাগের উচ্চতা হবে $f(x_i)$ এবং প্রস্থ হবে Δx_i। অতএব

সবকটি আয়তক্ষেত্রের সম্মিলিত আয়তন হবে $A^* = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$ [(ক) চিত্রে n = 4]

এখন A* কিন্তু A এর থেকে আলাদা কারণ Aতে আয়তক্ষেত্রগুলির সাদা অংশগুলি ধরা হয়নি। তাই A* থেকে যে পরিমাপ পাওয়া যাবে তা A এর আয়তন বাড়িয়ে দেখাবে। এবার যদি এই সাদা অংশগুলিকে ক্রমশঃ ছোট করে দেওয়া যায় তাহলে A* এর আসন্ন মান ক্রমশঃ A এর সত্যিকার মানের দিকে যাবে। এর জন্য বিভাগ সংখ্যা বাড়িয়ে দেওয়া হবে অর্থাৎ n বেড়ে যাবে। n যত বাড়বে Δx_i তত ছোট হয়ে যাবে। এর ফলে যে কোনো $f(x_i)$ এবং $f(x_{i+1})$ এর উচ্চতার পার্থক্য কমে যাবে ফলে সাদা বেরিয়ে থাকা অংশটিও ছোট হয়ে যাবে। তাই আমরা বলতে পারি যে $\lim\limits_{n\to\alpha} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\alpha} A^* = A$ এর আয়তন (area) হবে যদি এই সীমাস্থ মান এর অস্তিত্ব থাকে।

এবার Δx_i যদি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র হয়ে যায় তাকে dx_i বলা যায়। প্রতিটি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনকেই dx দিয়ে বোঝানো যায় বলে i লেখার আর দরকার হয়না। তাই Δx_i এর বদলে dx লেখা যায় এবং $f(x_i)$ এর বদলে f(x) লেখা যায়। কিন্তু Σ চিহ্নের কী হবে? Σ চিহ্ন দিয়ে সসীম (finite) সংখ্যার যোগফল নির্ণয় করা হয়। তাই যদি $n \to \alpha$ হয় তখন অসীম (infinite) সংখ্যার ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র আয়তক্ষেত্র যোগ করা হচ্ছে—সেক্ষেত্রে, Σ চিহ্ন আর প্রযোজ্য থাকছে না। Σ এর পরিবর্তে এবার $\int_a^b$ ব্যবহার করতে হবে।

অতএব $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\alpha} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = A$$ ।

নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি বৈশিষ্ট্য :

(১) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

(২) $$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

(৩) $$\int_a^d f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx \quad (a < b < c < d)$$

(৪) $$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

(৫) $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

(৬) $$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(৭) $$\int_a^b vdu = [uv]_a^b - \int_a^b udv$$

সমাকলের অর্থনৈতিক প্রয়োগ :

(১) প্রান্তিক অপেক্ষক থেকে মোট অপেক্ষক নির্ণয়—জানা আছে যে মোট অপেক্ষক দেওয়া থাকলে তাকে অবকলন করে প্রান্তিক অপেক্ষক পাওয়া যায়—যেমন মোট ব্যয় অপেক্ষক দেওয়া থাকলে অবকলন করে প্রান্তিক ব্যয় অপেক্ষক বের করা যায়। অবকলনের বিপরীত পদ্ধতি সমাকলন পদ্ধতি প্রয়োগ করে তাই প্রান্তিক অপেক্ষক থেকে মোট অপেক্ষক পাওয়া যায়। এবারে উদাহরণের সাহায্যে পদ্ধতিটির সঠিক প্রয়োগ আলোচনা করা যাক।

উদাহরণ ১ : ধরা যাক একটি প্রতিষ্ঠানের প্রান্তিক অপেক্ষক

$C'(Q) = 2e^{0.2Q}$ এবং তাদের স্থির ব্যয় $C_F = 90$

$C'(Q)$ কে Q এর সাপেক্ষে সমাকলন করে

$$\int 2e^{0.2Q}\, dQ = 2\,\frac{1}{0.2}e^{0.2Q} + C = 10e^{0.2Q} + C$$

$(10e^{0.2Q} + C)$ কে মোট ব্যয় অপেক্ষক বলে ধরা যায় কিন্তু C এর মান না জানা থাকলে উত্তরটি অনির্দিষ্ট অবস্থায় থেকে যাচ্ছে। এবারে যদি $Q = 0$ হয় অর্থাৎ একেবারে সূচনাতে অপেক্ষকটির মান হবে

$10e^{\circ} + C = 10 + C = 90$ (কারণ এক্ষেত্রে মোট ব্যয় = স্থির ব্যয়) ।

অতএব $C = 80$

তাই মোট ব্যয় অপেক্ষক

$C(Q) = 10e^{0.2Q} + 80$।

উদাহরণ ২ : ধরা যাক প্রান্তিক সঞ্চয় অপেক্ষক

$S'(Y) = 0.3 - 0.1\ Y^{-1/2}$ এবং $Y = 8$ । হলে মোট সঞ্চয় $S = 0$।

$$S(y) = \int S'(Y)dY$$

$$= \int\left((0.3 - 0.1Y^{-\frac{1}{2}})\right)dY$$

$$= \int(0.3)dY - \int(0.1)Y^{-\frac{1}{2}}dY$$

$$= .3Y - 0.1\int Y^{-\frac{1}{2}}dY$$

$$= (0.3)Y - (0.1)\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}Y^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= (0.3)Y - \frac{0.1}{0.5}Y^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= (0.3)Y - (0.2)Y^{\frac{1}{2}} + C$$

এবার C এর সঠিক মান নির্ণয় করা যাক।

$$Y = 81 \text{ হলে } S = 0$$

অর্থাৎ $(0.3).(81) - (0.2)(81)^{\frac{1}{2}} + C = 0$

অথবা $24.3 - 1.8 + C = 0$

অথবা $C = -22.5$

তাই সঞ্চয় অপেক্ষকটি হবে $S(Y) = (0.3)Y - (0.2)Y^{\frac{1}{2}} - 22.5$

বিনিয়োগ ও মূলধন তৈরি (Investment and Capital formation)

মূলধনের (capital) যে নির্দিষ্ট মজুতভাণ্ডার আছে তাতে কোনো মূলধন যোগ করাকেই বলা হয় মূলধন তৈরির প্রক্রিয়া। যেহেতু এই প্রক্রিয়া সময়ের পরিপ্রেক্ষিতে অবিচ্ছিন্ন, মূলধনের মজুত (stock) K কে সময় t এর সন্ততঃ অপেক্ষক K(t) হিসাবে ধরা যায়। অন্তরকলজ $\frac{dk}{dt}$ হবে সময়ের সঙ্গে K এর পরিবর্তনের হার অর্থাৎ মূলধন তৈরির হার। কিন্তু t সময়ে যে মূলধন তৈরি হবে তা হবে ঐ সময়ে নীট বিনিয়োগের (Net investment) হার I(t) এর সমান।

অতএব মূলধনের মজুত K এবং নীট বিনিয়োগ I এর সম্পর্ক দুটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

$$\frac{dk}{dt} \equiv I(t)$$

এবং $K(t) = \int I(t)dt = \int \frac{dk}{dt} dt = \int dk$

উপরের প্রথম সমীকরণটি অভেদ সমীকরণ—এটির মাধ্যমে নীট বিনিয়োগ I ও মূলধনের মজুত K এর বৃদ্ধির সমার্থতা (synonymity) প্রকাশ করছে। যেহেতু I(t), K(t) এর অন্তরকলজ তাই K(t) হবে I(t) এর সমাকল। এটিই দ্বিতীয় সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়েছে।

উদাহরণ ৩ : ধরা যাক $I(t) = 3t^{\frac{1}{2}}$ এবং $t = 0$ হলে মূলধন মজুত হল K(O)

$$K(t) = \int I(t)dt = \int 3t^{\frac{1}{2}}dt = 3\int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= 3.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{3t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2t^{\frac{3}{2}} + C$$

যদি $t = 0$ হয় তাহলে $k(0)$ হবে C এর সমান। তার মানে $k(t) = 2t^{\frac{3}{2}} + K(0)$।

যেহেতু $k(t) = I(t)dt$,

নির্দিষ্ট সমাকল $\int_a^b I(t)dt = k(b) - k(a)$ অর্থাৎ [a, b] বিস্তারে যে পরিমাণ মূলধন পুঞ্জীভূত হচ্ছে।

অতএব $k(b) - k(a)$ হবে $I(t)$ অপেক্ষকের তলায় [a , b] বিস্তারের মধ্যেকার আয়তন। $k(t)$ অপেক্ষকের রেখাচিত্রে এটি হবে $k(b)$ এবং $k(a)$ এর উচ্চতার অন্তরফল।

ডোমার মডেল (Domar Model)

জনসংখ্যা মডেল এবং মূলধন তৈরির মডেলে চলরাশির পরিবর্তনের হারের ভিত্তিতে তাদের গতিপথ বের করার চেষ্টা করা হয়েছিল। প্রফেসর ডোমারের বিখ্যাত ক্রমবৃদ্ধি (growth) মডেলে তিনি দেখাতে চেয়েছেন যে নির্দিষ্ট ভারসাম্য অবস্থা থাকার জন্য কী ধরনের গতিপথ হওয়া প্রয়োজন।

মডেলটির মূল কাঠামো :

ডোমারের মুখ্য প্রারম্ভিক সূত্রগুলি নীচে দেওয়া হল।

(১) বিনিয়োগের হার $I(t)$ এর যে কোনো পরিবর্তন একদিকে মোট চাহিদার পরিমাণ এবং অন্যদিকে অর্থনীতির উৎপাদন ক্ষমতা পরিবর্তন করবে।

(২) $I(t)$ এর চাহিদার উপর ফলাফল গুণকের মাধ্যমে কাজ করে তাই $I(t)$ বাড়লে সেই বৃদ্ধির কোনো গুণকে আয় $Y(t)$ বাড়বে। আমরা অর্থনীতির তত্ত্ব থেকে জানি যে গুণকটি হল $k = \frac{1}{s}$ [s প্রান্তিক সঞ্চয় প্রবণতা বা marginal propensity to save)। যদি ধরে নেওয়া যায় যে $I(t)$ একমাত্র স্বাধীন ব্যয় যা আয়কে প্রভাবিত করে তাহলে

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dI}{dt}\frac{1}{s} \qquad \text{.........(১)}$$

(৩) I(t) এর উৎপাদন ক্ষমতার উপর প্রভাব বোঝার জন্য আমরা অর্থনীতির সম্ভাব্য উৎপাদনের পরিবর্তন দেখি।

যদি ধরে নেওয়া হয় যে ক্ষমতা ও মূলধনের অনুপাত ধ্রুবক তাহলে

$$\frac{O}{K} = V \qquad \text{.........(২)}$$

(O—ক্ষমতা বা সম্ভাব্য বাৎসরিক উৎপাদন, V—ক্ষমতা ও মূলধনের অনুপাত)

তাহলে K(t) মূলধন মজুত হলে তার থেকে বাৎসরিক উৎপাদন (বা আয়) হবে O = VK। O = VK হল উৎপাদন অপেক্ষক [O—Output বা উৎপাদন]।

অতএব $dO = Vdk$

এবং $\frac{do}{dt} = v\frac{dk}{dt} = VI$ ....(৩)

ডোমারের মডেলে উৎপাদন ক্ষমতা পূর্ণমাত্রায় ব্যবহৃত হওয়াকেই ভারসাম্য অবস্থা বলে। তার মানে একবছরের সম্ভাব্য উৎপাদন এবং তার চাহিদা সমান হওয়া প্রয়োজন। অর্থাৎ ভারসাম্যের জন্য $y = 0$। যদি ভারসাম্য অবস্থার থেকে শুরু করা যায় তাহলে প্রয়োজন হল পরবর্তী পর্যায়ে দুটিরই একই হারে পরিবর্তন।

বা $\frac{dY}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$ ....(৪)

এখন প্রশ্ন হল I(t) এর কোন গতিপথ উপরের এই শর্ত সবসময় পূরণ করবে?

সমাধান

সমীকরণ (১) ও (৩) থেকে সমীকরণ (৪) এ প্রতিস্থাপন করে।

$$\frac{dI}{dt}\cdot\frac{I}{s} = \frac{dY}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = VI$$

অতএব $\frac{dI}{dt}\cdot\frac{1}{I} = v.s$ ....(৫)

সমীকরণ (৫) থেকে I এর পরিবর্তনের একটি নির্দিষ্ট ধরণ পাওয়া যায়। এবার এর থেকে I এর গতিপথ নির্ধারণ করতে হবে।

সমাকলন করে

$$\int \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}dt = \int vs\,dt$$

সমীকরণটির বাঁদিকের সমাকলন করলে

$$\int \frac{dI}{I} = \log|I| + C_1$$

সমীকরণটির ডানদিকের সমাকলন করলে

$$\int vsdt = vst + c_2 \text{ (কারণ vs ধ্রুবক)}$$

অতএব $\log|I| + c_1 = vst + c_2$

অথবা $\log|I| = vst + c_2 - c_1$

$$= vst + c \; (c_2 - c_1 = c)$$

অতএব $e^{\log|I|} = e^{(vst + c)} = e^{vst}\; e^{c} = Ae^{vst}$ (e^{c} = ধ্রুবক A) যদি ধরা হয় যে $|I|$ ধনাত্মক অর্থাৎ $|I|$ ধনাত্মক অর্থাৎ $|I| = I$ তাহলে উপরের ফলাফলটি হবে

$$I(t) = Ae^{vst}$$

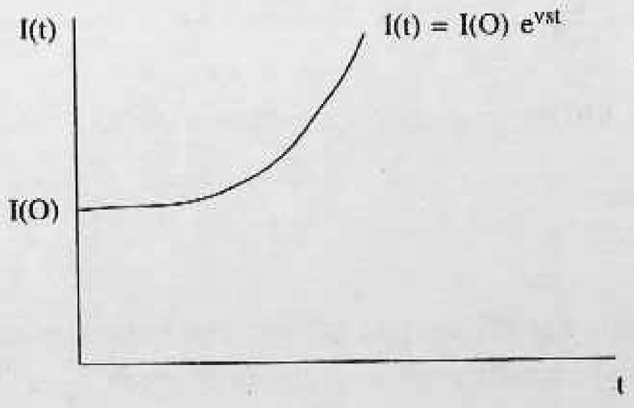
কিন্তু এখানে A অনির্দিষ্ট ধ্রুবক। A এর মান নির্ণয় করার জন্য $t = 0$ বসানো হচ্ছে।

তাহলে $I(0) = Ae^{0} = A$

তাই $I(t) = I(0)e^{vst}$ ....(৬)

সমীকরণ (৬) এর থেকেই I এর গতিপথ পাওয়া যাচ্ছে।

নীচের রেখাচিত্র নং (১.৮) এই গতিপথটি দেখানো হল।



রেখাচিত্র নং ১.৮

তার মানে উৎপাদন ক্ষমতা ও চাহিদার মধ্যে সামঞ্জস্য রাখার জন্য I(t) কে সূচকীয় হার (exponential rate) VS এ বৃদ্ধি পেতে হবে। তাই ক্ষমতা ও মূলধনের অনুপাত এবং প্রান্তিক সঞ্চয় প্রবণতা যত বড় হবে I(t) এর প্রয়োজনীয় বৃদ্ধির হার ও তত বড় হবে।

ক্ষুরের ধার (razor's edge)

এবার যে প্রশ্নটি সহজেই আসে তা হল যদি বিনিয়োগের বাস্তব হার r প্রয়োজনীয় হার VS এর থেকে আলাদা হয় তখন কী হবে? এক্ষেত্রে ডোমার সদ্ব্যবহারের সহগ (coefficient of utilisation) u এর অবতারণা করেছেন।

$$u = \lim_{t \to \alpha} \frac{Y(t)}{\theta(t)}$$ [u = 1 হলে উৎপাদন ক্ষমতার পূর্ণ সদ্ব্যবহার করা হচ্ছে বলে ধরা হবে।]

ডোমার দেখিয়েছেন যে $u = \frac{r}{vs}$ । অতএব r ⫻ vs হলে u ⫻ 1 হবে। তার অর্থ এই যে যদি বাস্তব ও প্রয়োজনীয় হারগুলির মধ্যে পার্থক্য থাকে ($r \neq vs$) তাহলে শেষে ($t \longrightarrow \alpha$ হলে) হয় ক্ষমতা অপ্রতুল ($u > 1$) হবে অথবা ক্ষমতা উদ্বৃত্ত ($u < 1$) হবে। $u > 1$ হবে না $u < 1$ হবে সেটা অবশ্য নির্ভর করবে $r > vs$ না $r < vs$ তার উপর।

কিন্তু আমরা এটাও দেখাতে পারি যে শুধু $t \longrightarrow \alpha$ হলেই যে ক্ষমতার এই অপ্রতুলতা বা উদ্বৃত্ত পাওয়া যাবে তাই নয়—যে কোনো t এর ক্ষেত্রেই এটা সত্যি।

ক্রমবৃদ্ধির হার (rate of growth) যদি r হয় তাহলে $I(t) = I(O)e^{rt}$

অতএব সমীকরণ (১) ও (৩) থেকে

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt} = \frac{r}{s}I(O)e^{rt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = VI(t) = VI(O)e^{rt}$$

$$\frac{dy/dt}{d\theta/dt} = \frac{\frac{r}{s}I(O)e^{rt}}{VI(O)e^{rt}} = \frac{r}{\sqrt{S}}$$

ক্রমবৃদ্ধির বাস্তব হার r হলে এটি হল I এর চাহিদার উপর প্রভাব ও ক্ষমতার উপর প্রভাব দুটির অনুপাত। যদি r (বাস্তব হার) প্রয়োজনীয় হারের (vs) থেকে বড় হয় তাহলে $\frac{dY}{dt} > \frac{d\theta}{dt}$ অর্থাৎ I এর চাহিদা

প্রভাব, ক্ষমতা প্রভাবের চেয়ে বড় হবে। তার মানে উৎপাদন ক্ষমতার বৃদ্ধি চাহিদার বৃদ্ধির চেয়ে ছোট হবে এবং ক্ষমতার অপ্রতুলতা দেখা দেবে। আবার যদি $r < \sqrt{s}$ হয় তখন I এর চাহিদা প্রভাব, ক্ষমতা প্রভাবের চেয়ে ছোট হবে $\left(\frac{dY}{dt} < \frac{d\theta}{dt}\right)$। সেক্ষেত্রে ঠিক একই যুক্তিতে ক্ষমতা উদ্বৃত্ত হবে।

এই মডেলে সবচেয়ে মজার কথা হল এই যে I যদি প্রয়োজনের চেয়ে বেশি বাড়ে ($r > \sqrt{s}$) তাহলে শেষ পর্যন্ত ক্ষমতার অপ্রতুলতা দেখা দেবে এবং যদি I প্রয়োজনের চেয়ে কম বাড়ে ($r < \sqrt{s}$) তাহলে শেষ পর্যন্ত ক্ষমতা উদ্বৃত্ত হবে। তার মানে $r \neq \sqrt{s}$ থেকে শুরু করলে সেই ব্যবধান, ক্রমাগত বেড়েই যাবে। এমন কোনো প্রক্রিয়াই নেই যার মাধ্যমে এটা ক্রমশঃ কমতে পারে।

তাহলে মুলকথাটা এই দাঁড়াচ্ছে যে স্বাধীন প্যারামিটার V এবং S দেওয়া থাকলে, ক্ষমতার অপ্রতুল বা উদ্বৃত্ত হওয়া দূর করার একমাত্র উপায় হল ভারসাম্য পথে অর্থাৎ যেখানে $r = \sqrt{s}$ সেই পথে এগিয়ে চলা। এই ক্ষুরধার সময়গত গতিপথ থেকে কোনো রকম বিচ্যুতি ঘটলেই আর ক্ষমতার পূর্ণ সদ্ব্যবহার করা সম্ভব হচ্ছে না।

১.১১ সারাংশ

- যে কোনো অপেক্ষক $y = f(x)$ এর অন্তরকলজ হল $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$। এই $\frac{dy}{dx}$ দিয়ে তাৎক্ষণিক পরিবর্তনের হার পরিমাপ করা হয়।
- যদি $x = x_0$ বিন্দুতে $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ এর অস্তিত্ব থাকে তবে ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য। অবকলনযোগ্যতার জন্য অবিচ্ছিন্নতা আবশ্যিক শর্ত।
- আদি অপেক্ষকটি যদি মোট অপেক্ষক হয় তাহলে তার অন্তরকলজ থেকে প্রান্তিক অপেক্ষক পাওয়া যায় —যথা মোট ব্যয় থেকে প্রান্তিক ব্যয়, মোট ভোগ থেকে প্রান্তিক ভোগ ইত্যাদি।
- একটি অপেক্ষকে একাধিক স্বাধীন নিরপেক্ষ চলরাশি থাকলে যদি কোনো একটির পরিবর্তনের ফলে অধীন চলরাশিটির পরিবর্তন পরিমাপ করতে হয় তাহলে আংশিক অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে হয়।
- অর্থনীতিতে তুলনামূলক স্থিতির বিশ্লেষণে অবকলন পদ্ধতি প্রয়োগ করে কিভাবে একটি স্বাধীন চলরাশির পরিবর্তনের ফলে অধীন চলরাশিটির ভারসাম্য মানের পরিবর্তন হচ্ছে তা পরিমাপ করা হয়। যেমন স্বাধীন বা বহির্নির্ণীত বিনিয়োগের পরিবর্তন হলে জাতীয় আয়ের ভারসাম্য মান কিভাবে বদলায়

তা নির্ধারণ করা। দামের পরিবর্তনের ফলে চাহিদা, যোগান বদল হয়ে বাজারে পণ্যের ভারসাম্য মান কতটা বদলাবে ইত্যাদি।

- যেসব মডেলগুলি রূপান্তরিত করে প্রকাশ করা যায় না অর্থাৎ নির্দিষ্ট অপেক্ষকের বদলে সাধারণ অপেক্ষক দেওয়া আছে অথবা যেখানে স্বাধীন চলরাশিগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ নয় সেখানে পূর্ণ অবকলন পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হয়।
- গতিশীল মডেলগুলির পরিবর্তনের রূপ অর্থাৎ অন্তরকলজ জানা থাকলে তার থেকে অধীন চলরাশিটির সময়ভিত্তিক গতিপথ বের করার জন্য সমাকলন পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়। যেমন জনসংখ্যার সময়গত পরিবর্তন $\frac{dH}{dt}$ দেওয়া থাকলে তার থেকে $H(t)$ অপেক্ষক নির্ণয়।
- যে কোনো অপেক্ষকের স্বাধীন চলরাশির দুটি বিন্দুর মধ্যে অপেক্ষকটির রেখাচিত্রের তলায় অবস্থিত ক্ষেত্রের আয়তন মাপা যায় ঐ দুটি বিন্দুর মধ্যেকার নির্দিষ্ট সমাকল দিয়ে।
- অর্থনীতিতে প্রান্তিক অপেক্ষক থেকে মোট অপেক্ষক নির্ণয় করার জন্য সমাকলন পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয় যেমন প্রান্তিক ব্যয় অপেক্ষক থেকে মোট ব্যয় অপেক্ষক নির্ণয় করা ইত্যাদি।

১.১২ অনুশীলনী

ছোট প্রশ্ন

১। অন্তরকলজ দিয়ে কী পরিমাপ করা হয়?

২। অবকল ও অন্তরকলজের মধ্যে পার্থক্য কী?

৩। কখন একটি অপেক্ষককে অবকলনযোগ্য বলা যায়?

৪। একটি অপেক্ষকে দুই বা তার বেশি স্বাধীন চলরাশি থাকলে কিভাবে পরিবর্তনের হার পরিমাপ করা হয়?

৫। সাধারণ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে কোন অবকলন পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়?

৬। কোনো অধীন চলরাশির পরিবর্তনের হার জানা থাকলে কোন পদ্ধতি প্রয়োগ করে তার সময়পথ নির্ণয় করা যায়?

বড় প্রশ্ন

১। অবকলন পদ্ধতি কাকে বলে? অর্থনীতির কোন ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়?

২। মোট অপেক্ষক থেকে কিভাবে অবকলন করে প্রান্তিক অপেক্ষক করা যায় উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

৩। আংশিক অবকলন পদ্ধতি কাকে বলে? অর্থনীতিতে কখন এই পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়?

৪। তুলনামূলক স্থিতি কিভাবে বিশ্লেষণ করা হয় তা যে কোনো একটি অর্থনৈতিক মডেলের সাহায্যে আলোচনা করুন।

৫। পূর্ণ অবকল কাকে বলে? পূর্ণ অবকলন পদ্ধতি প্রয়োগের ক্ষেত্রগুলি অর্থনীতির উদাহরণের সাহায্যে আলোচনা করুন।

৬। পরোক্ষ অপেক্ষক কাকে বলে ? পরোক্ষ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে কিভাবে অন্তরকলজ বের করা হয়?

৭। সমাকলন পদ্ধতি কাকে বলে? সমাকলন পদ্ধতির সাহায্যে কিভাবে প্রান্তিক অপেক্ষক থেকে মোট অপেক্ষক নির্ণয় করা যায় তা উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

৮। ডোমারের ক্রমবৃদ্ধির মডেলে কিভাবে ভারসাম্য রক্ষাকারী বিনিয়োগের গতিপথ বের করা যায় তা আলোচনা করুন।

৯। ডোমারের ভারসাম্য অবস্থাকে কেন ক্ষুরধার বলা হয়? এই প্রসঙ্গে ক্রমবৃদ্ধির বাস্তব হার ও প্রয়োজনীয় হারের প্রারম্ভিক পার্থক্য কিভাবে এই পার্থক্যকে বাড়িয়ে তোলে তা আলোচনা করুন।

১০। মোট ব্যয় অপেক্ষক $C = Q^3 - 6Q^2 + 14Q + 75$ । এর থেকে পরিবর্তনশীল ব্যয় অপেক্ষকটি নির্ণয় করুন এবং ঐ অপেক্ষকের অন্তরকলজটি বের করে তার অর্থনৈতিক অর্থ বিশ্লেষণ করুন।

১১। যদি গড় আয় $AR = 60 - 2Q$ হয় (Q—উৎপাদন) তাহলে প্রান্তিক আয় (MR) অপেক্ষকটি নির্ণয় করুন। AR এবং MR অপেক্ষকের ঢালের তুলনামূলক আলোচনা করুন।

১২। (ক) কোনো ক্রেতার X পণ্যের জন্য চাহিদারেখার সমীকরণ হল $P = 100 - \sqrt{Q}$, যেখানে P, X এর দাম এবং Q, X এর পরিমাণের সূচক। X এর দাম যখন 60 তখন তার চাহিদার বিন্দুস্থ দাম স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় করুন।

(খ) X এর বিক্রয় থেকে লব্ধ আয় সমীকরণ

$R = 100Q - Q^2$ [R : আয়ের সূচক

Q : X এর পরিমাণের সূচক]।

প্রান্তিক আয় যখন 20 তখন চাহিদার বিন্দুস্থ দাম স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় করুন।

১৩। ধরুন একটি বাজার মডেলে $Q = a - bp$ $(a, b > 0)$ চাহিদারেখা এবং $Q = -m + nP$ $(m, n > 0)$ যোগান রেখা। এই মডেলটিকে রূপান্তরিতভাবে লিখুন। a, b, m ও n প্রতিটির একক পরিবর্তনের ফলে Q এর ভারসাম্য মান কিভাবে পরিবর্তিত হবে তা আলোচনা করুন।

১৪। ধরুন যে $C = a + bY$ একটি ভোগ অপেক্ষক যেখানে $a > 0$ এবং $0 < b < 1$।

(ক) এর গড় ও প্রান্তিক অপেক্ষক দুটি বের করুন।

(খ) আয়গত স্থিতিস্থাপকতা E_{CY} নির্ণয় করুন। $Y > 0$ ধরলে এই স্থিতিস্থাপকতার চিহ্ন কী হবে?

(গ) Y এর সমস্ত ধনাত্মক মানের জন্য ভোগ অপেক্ষক স্থিতিস্থাপক হবে না অস্থিতিস্থাপক হবে তা বিশ্লেষণ করুন।

১৫। একটি কৃষি দ্রব্যের যোগান অপেক্ষক নীচে দেওয়া হল :

$$Q = a + bP^2 + R^{1/2} \quad (a < 0, b > 0)$$

এখানে Q = যোগানের পরিমাণ। P = দাম এবং R = বৃষ্টিপাত। যোগানের দাম স্থিতিস্থাপকতা E_{QP} নির্ণয় করুন।

১৬। নীচে একটি বাজার মডেল দেওয়া হল

$Q_d = Q_s$ (ভারসাম্য শর্ত)

$Q_d = D(P, Y_0)$ $(\partial D/\partial P < 0, \partial D/\partial Y_0 > 0)$ (ভারসাম্য শর্ত)

$Q_s = S(P, r_0)$ $(\partial S/\partial P > 0)$ এখানে r_0 হল বৃষ্টিপাত। অন্যান্য চিহ্নগুলি সাধারণভাবেই ব্যবহৃত হয়েছে।

$\partial S/\partial r_0$: এর কোনো নির্দিষ্ট চিহ্ন নেই। সমস্ত আংশিক অন্তরকলজগুলি অবিচ্ছিন্ন ধরে নিয়ে মডেলটির তুলনামূলক স্থিতি বিশ্লেষণ করুন।

১৭। ধরুন যে বিনিয়োগের হার $I(t) = 12t^{1/3}$ এবং মূলধনের প্রাথমিক মজুতের মান হল 25।

(ক) মূলধনের ভাণ্ডার K এর সময়পথটি নির্ণয় করুন।

(খ) [0, 1] এবং [1, 3] সময়অন্তরগুলির (time-intervals) মধ্যে মূলধন গঠন কতটা হবে তা নির্ণয় করুন।

১৮। একটি প্রতিষ্ঠানের প্রান্তিক ব্যয় অপেক্ষক যদি $m = \dfrac{a}{\sqrt{ax + b}}$ হয় এবং শূন্য উৎপাদনের ব্যয় যদি শূন্য হয় তাহলে প্রতিষ্ঠানটির মোট ব্যয় অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

১৯। প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা $C'(Y) = 0.7 + (0.1)\, Y^{-1/2}$ এবং যদি $Y = 12$, হলে $C = Y$ হয় তাহলে ভোগ অপেক্ষক $C(Y)$ বের করুন।

একক ২ ❑ ক্ল্যাসিক্যাল সর্বাপেক্ষা অনুকূল অবস্থা নির্ণায়ক পদ্ধতি

গঠন

২.০ প্রস্তাবনা

বাজার মডেল বা জাতীয় আয় মডেলগুলি আলোচনা করার সময় সেখানে কতগুলি বিপরীত শক্তির টানাপোড়েনে কিভাবে ভারসাম্য আসে তা দেখা গেছিল। সেক্ষেত্রে কোনো একটি বিশেষ গোষ্ঠী বা ব্যক্তি সচেতনভাবে ভারসাম্যের লক্ষ্যে পৌঁছবার চেষ্টা করেনা। যেমন ক্রেতা ও বিক্রেতার চাহিদা ও যোগানের সামঞ্জস্য হলে বাজার দামে ভারসাম্য আসে কিন্তু ক্রেতা বা বিক্রেতা কেউই এককভাবে এই দাম নির্ধারণের লক্ষ্যে সচেষ্ট হননা। কিন্তু অর্থনীতির কতগুলি ক্ষেত্রে একটি অর্থনৈতিক একক (economic unit) যেমন একজন ভোক্তা, একটি অর্থনীতি বা একটি প্রতিষ্ঠান উদ্দেশ্যমূলকভাবে একটি নির্দিষ্ট ভারসাম্য অবস্থার দিকে এগোবে। এই নির্দিষ্ট ভারসাম্য অবস্থাগুলিকে বলা হবে লক্ষ্য ভারসাম্য (goal equilibrium)। এসব ক্ষেত্রেই সর্বাধিক অনুকূল অবস্থা নির্ণায়ক পদ্ধতিগুলি ব্যবহৃত হয়।

২.১ সর্বাপেক্ষা অনুকূল মান (optimum value) ও প্রান্তবর্তী মান (extreme value)

বিভিন্ন বিকল্পের মধ্যে সাধারণভাবে লক্ষ্য হয় কোনো কিছুর চরম (maximum) মান বা অবম (minimum) মান নির্ধারণ। উদাহরণস্বরূপ ভোক্তার উপযোগের চরমমান, বা কোনো প্রতিষ্ঠানের নির্দিষ্ট উৎপাদনের জন্য ব্যয়ের অবম মান নির্ধারণের কথা বলা যায়। এই চরম বা অবম মান নির্ণায়ক পদ্ধতিকে অর্থনীতিতে সর্বাপেক্ষা অনুকূল (optimum) মান বের করার পদ্ধতি বলা হয়। চরম ও অবম মানকে একসঙ্গে প্রান্তবর্তী (extreme) মান বলা হয়।

এই অনুকূল মান নির্ণয় করার জন্য আমাদের একটি লক্ষ্য অপেক্ষক (objective function) বের করতে হয়। যে চলরাশিটির অনুকূল মান বের করতে হবে সেটি হবে ঐ অপেক্ষকের অধীন চলরাশি। স্বাধীন চলরাশির ভিন্ন ভিন্ন মান বাছাই করে অর্থনৈতিক এককটি অধীন চলরাশিটির ভিন্ন ভিন্ন মান পাবে এবং সর্বাপেক্ষা অনুকূল মানটি নির্ধারণ করতে পারবে। সেইজন্য স্বাধীন চলগুলিকে বাছাই চল (Choice variable) বলা হয়। তার মানে বাছাই চলগুলির সেই মানগুলি খুঁজে বের করতে হবে যার জন্য আকাঙ্ক্ষিত লক্ষ্য অপেক্ষকের প্রান্তবর্তী মানটি পাওয়া যায়।

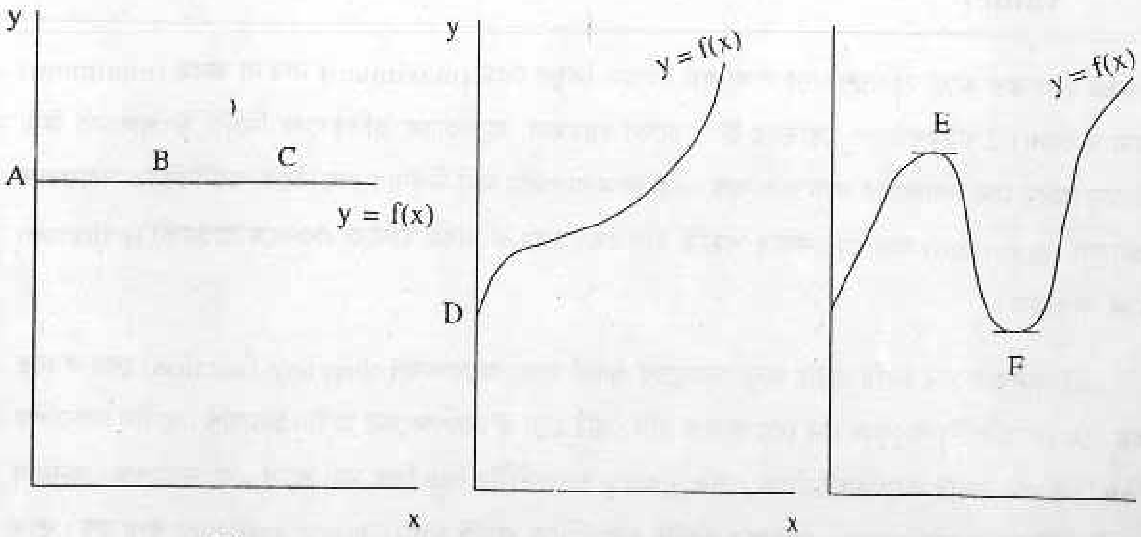
উদাহরণ—১

ধরা যাক একটি প্রতিষ্ঠান তার মুনাফা (π) সর্বাধিক করতে চাইছে। মুনাফা হল মোট আয় (R) এবং মোট ব্যয় (C) এর অন্তরফল। আগেই জানা গেছে যে R এবং C উভয়েই Q এর অপেক্ষক। অতএব π ও Q এর অপেক্ষক হবে। তার মানে $\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$। $\pi(Q)$ হল লক্ষ্য অপেক্ষক। এখানে বাছাই চল কেবলমাত্র Q। তার মানে এক্ষেত্রে সর্বাপেক্ষা অনুকূল অবস্থা নির্ণয় করা মানে Q এর সেই মানটি বাছাই করা যার জন্য $\pi(Q)$ সর্বাপেক্ষা অনুকূল অর্থাৎ চরম হবে। এর জন্য অবশ্য Q কে চরম বা অবম হওয়ার কোনো দরকার নেই। এবার আমরা লক্ষ্য অপেক্ষকের সাধারণরূপ অর্থাৎ $y = f(x)$ নিয়ে বাকী আলোচনা করব। এখানে ধরা হচ্ছে যে f সন্ততঃ এবং সমস্ত বিন্দুতেই এর অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে।

২.২ তুলনামূলক চরম ও অবম মান (relative maximum and minimum) : প্রথম অন্তরকলজ পরীক্ষা (first derivative test)

যেহেতু $y = f(x)$ সাধারণরূপে লেখা আছে এই অপেক্ষকটি রৈখিক (linear), অরৈখিক (non-linear),

একদিষ্ট না কখনো নিম্নমুখী আবার কখনো ঊর্ধ্বমুখী তা নিয়ে কোনো বিধিনিষেধ নেই। তাই নানাধরণের অপেক্ষকের থেকে আমরা নীচের (২.১) রেখাচিত্রে তিনটি নির্দিষ্ট রকমের অপেক্ষক বেছে নিচ্ছি।



রেখাচিত্র ২.১

তুলনামূলক বনাম পরম (absolute) প্রান্তবর্তী মান—যদি অপেক্ষকটি ধ্রুবক অপেক্ষক হয় [রেখাচিত্র (২.১ক) দ্রষ্টব্য] বাছাই চল x এর সমস্ত মানের জন্যই y এর মান একই হবে। সেক্ষেত্রে A, B, C যে কোনো বিন্দুকেই আমরা চরম মান বা অবম মান বলতে পারি। তাই এক্ষেত্রে x এর কোনো নির্দিষ্ট মান বাছাই করার প্রশ্ন থাকছে না। এসকল ক্ষেত্রে সর্বাপেক্ষা অনুকূল অবস্থা বের করার পরিপ্রেক্ষিতে অপেক্ষকটির অর্থনৈতিক সারমর্ম কিছুই থাকেনা।

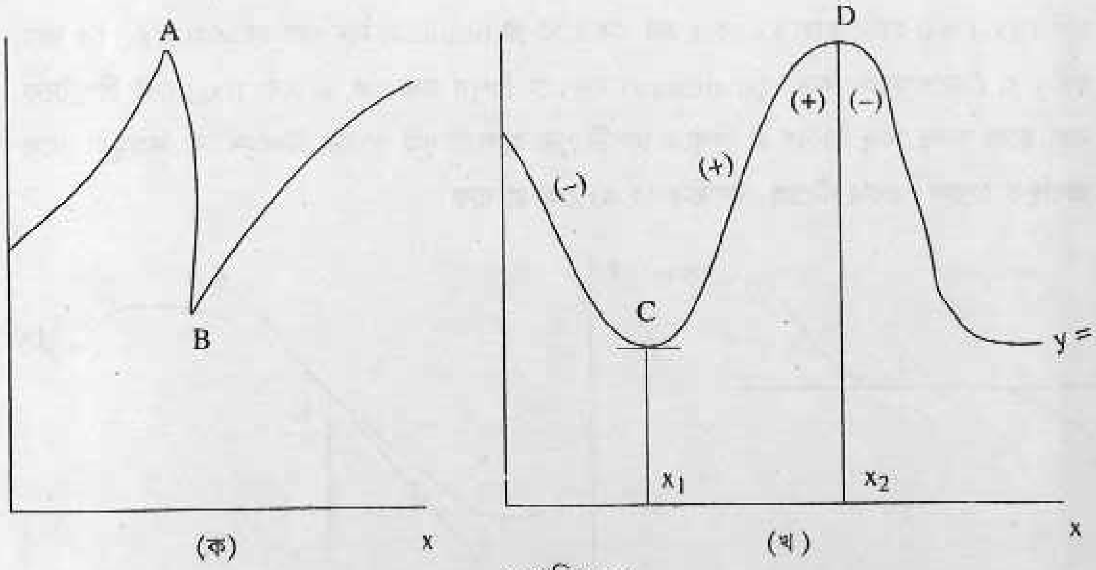
(২.১ খ) রেখাচিত্রে যদি অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যাকে (non-negative real number) x এর সংজ্ঞার অঞ্চল (domain) বলে ধরা হয় তাহলে এই একদিষ্ট আরোহী অপেক্ষকটির কোনো সসীম চরমমান (finite maximum) থাকবে না। অবশ্য D বিন্দুকে অবম মান বলে ধরা যায়। এক্ষেত্রে এটি অপেক্ষকটির পরম ক্ষুদ্রতম (absolute minimum or global minimum) মানও বটে।

(২.১ গ) রেখাচিত্রে E ও F হল তুলনামূলক প্রান্তবর্তীমান (relative or local extremum)। তার মানে এই বিন্দুগুলির একদম নিকটবর্তী অঞ্চলে (neighbourhood) এগুলি প্রান্তবর্তী। F তুলনামূলক অবমমান বলে কিন্তু কোনো নিশ্চয়তা নেই যে এটিই পরম ক্ষুদ্রতম মান। আবার E তুলনামূলক চরমমান বলেই কিন্তু একথা বলা যাবেনা যে এটিই পরম বৃহত্তম মান। যে কোনো অপেক্ষকে অনেকগুলি তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান থাকতে পারে যার কয়েকটি চরম ও বাকীগুলি অবম।

বেশির ভাগ অর্থনৈতিক সমস্যায় শেষ বিন্দু ছাড়া অন্যান্য প্রান্তবর্তী মান নিয়ে আলোচনা করা হয় কারণ বেশির ভাগ লক্ষ্য অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চলই থাকে অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা। ফলস্বরূপ, বাঁদিকের শেষ বিন্দুটিতে বাছাই চলের মান হয় শূন্য এবং সেজন্য ব্যবহারিক দিক থেকে এর কোনো গুরুত্ব থাকে না। সাধারণত অর্থনীতিতে আমরা যেসকল অপেক্ষক পাই তার রেখাচিত্র (২.১ গ) এর মত হয়। সেই কারণে E এবং F এর মতন তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান নির্ণয় করার পদ্ধতি নিয়ে পরবর্তী আলোচনাগুলি করা হবে। তার মানে অবশ্য এই নয় যে আমরা পরম বৃহত্তম বা পরম ক্ষুদ্রতম মান নিয়ে কোনো ভাবনাচিন্তা করবনা। যদি কোনো অপেক্ষকের সবকটি তুলনামূলক চরম (অবম) মান জানা যায় তবে তার মধ্যে বৃহত্তম (ক্ষুদ্রতম) মানটি নিলেই পরম বৃহত্তম (ক্ষুদ্রতম) মান পাওয়া যাবে।

প্রথম-অন্তরকলজ পরীক্ষা (first derivative test)

$y = f(x)$ অপেক্ষকের প্রান্তবর্তী মান বের করার ক্ষেত্রে তার প্রথম অন্তরকলজ $f'(x)$ এর বিরাট ভূমিকা রয়েছে। ধরা যাক $x = x_0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির একটি প্রান্তবর্তী মান পাওয়া যায়। তাহলে হয় (১) $f'(x) = 0$ অথবা (২) $f'(x)$ এর কোনো অস্তিত্ব নেই। এই সম্ভাবনাগুলি যথাক্রমে নীচের রেখাচিত্র (২.২খ) এবং (২.২ক) তে দেখানো হল।



রেখাচিত্র ২.২

রেখাচিত্র (২.২ক) তে A ও B বিন্দু y এর তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান কিন্তু ঐ দুটি বিন্দুর কোনোটিতেই অপেক্ষকের কোনো অন্তরকলজের অস্তিত্ব নেই। তবে এই আলোচনায় যেহেতু প্রথমেই ধরে নেওয়া হয়েছে যে $y = f(x)$ সন্ততঃ এবং তার সন্ততঃ অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে তাই এই ধরণের বিন্দুসম্পন্ন অপেক্ষকগুলি

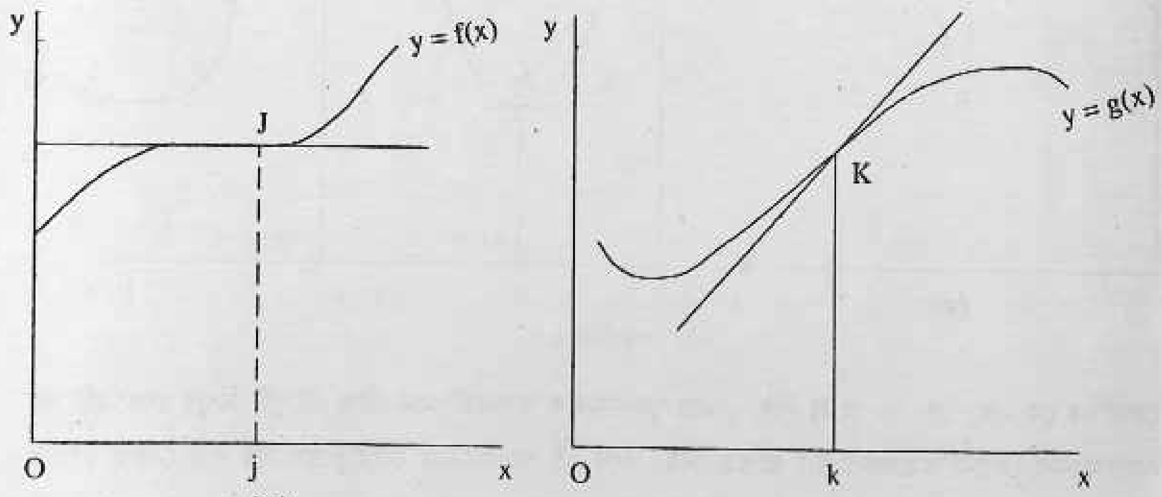
তার মধ্যে পড়বে না। মসৃন অপেক্ষকগুলির তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান হতে পারে একমাত্র সেইসব বিন্দুতে যেখানে অপেক্ষকটির প্রথম অন্তরকলজটি শূন্য। রেখাচিত্র (২.২ খ) তে যেমন C ও D দুটিই প্রান্তবর্তী মান এবং দু ক্ষেত্রেই অপেক্ষকের ঢাল শূন্য $[f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0]$। এখানে একটা কথা বলে রাখা ভালো যে তুলনামূলক প্রান্তিকতার জন্য শূন্য ঢাল প্রয়োজনীয় শর্ত কিন্তু শূন্য ঢাল থাকাটাই যথেষ্ট নয়। তার অর্থ তুলনামূলকভাবে প্রান্তবর্তী মান যেখানে হবে সেখানে অপেক্ষকের ঢাল শূন্য হবে কিন্তু অপেক্ষকের ঢাল শূণ্য হলেও সেখানে তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান নাও পাওয়া যেতে পারে। অতএব তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মানের জন্য প্রথম অন্তরকলজ পরীক্ষাকে এইভাবে লেখা যায় যদি $x = x_0$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকের প্রথম অন্তরকলজ $f'(x_0) = 0$ হয় তাহলে $f(x_0)$

(ক) তুলনামূলক চরমমান হবে যদি $f'(x)$, x_0 এর বাঁদিকে ধনাত্মক থেকে x_0 এর ডানদিকে ঋণাত্মকে পরিবর্তিত হয়।

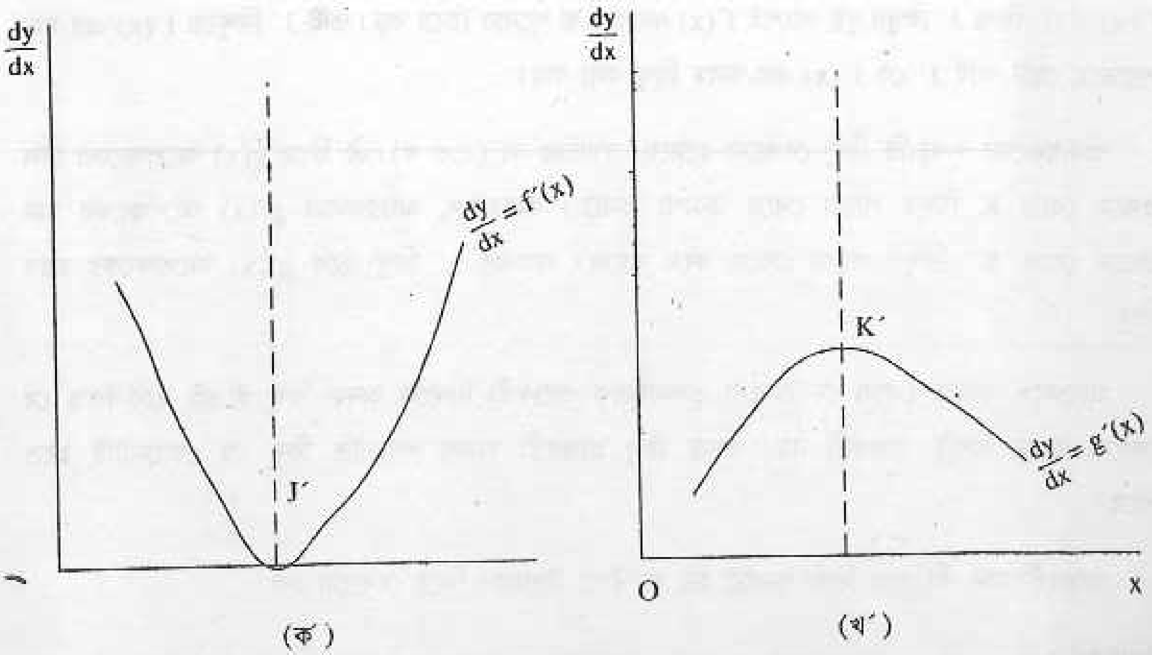
(খ) তুলনামূলক অবমমান যদি $f'(x)$, x_0 এর বাঁদিকে ঋণাত্মক থেকে x_0 এর বাঁদিকে ঋণাত্মক থেকে x_0 এর ডানদিকে ধনাত্মকে পরিবর্তিত হয়,

(গ) চরম বা অবমমান কিছুই হবেনা যদি x_0 এর দুই পাশেই $f'(x)$ এর চিহ্ন একই থাকে।

যদি $f'(x_0) = 0$ হয় তাহলে x_0 কে x এর একটি বিশিষ্ট (critical) মান বলা হয় এবং $f(x_0)$ কে বলা হয় y বা f অপেক্ষকের অনড় (stationary) মান। যে বিন্দুর অক্ষগুলি x_0 এবং $f(x_0)$ সেই বিন্দুটিকে বলা হচ্ছে অনড় বিন্দু কারণ ঐ বিন্দুতে ঢালটি শূন্য হলে বিন্দুটি কখনো উর্ধ্বমুখী বা নিম্নমুখী ঢালে অবস্থিত হবেনা। এবার নীচের রেখাচিত্র (২.৩) নেওয়া যাক।



(ক) (খ)



রেখাচিত্র ২.৩

রেখাচিত্র (২.২) এর মাধ্যমে পরীক্ষাটির বিভিন্ন সম্ভাবনা দেখানো হচ্ছে। পরীক্ষার প্রথম সম্ভাবনা (ক) থেকে যে অনড় বিন্দু পাওয়া যাবে তা (২.২ খ) তে দেখানো শীর্ষবিন্দু D এর মত হবে। দ্বিতীয় সম্ভাবনা (খ) থেকে পাওয়া অনড় বিন্দু হবে উপত্যকার নিম্নবিন্দু অর্থাৎ (২.২ ক) তে দেখানো C বিন্দুর মত। এর থেকে এটুকু বলা যায় যে যদি প্রয়োজনীয় শর্ত $f'(x) = 0$ পূরণ হয় তাহলে অন্তরকলজের চিহ্ন পরিবর্তনই হবে তুলনামূলক অবম মান বা চরম মানের জন্য যথেষ্ট। চিহ্নের দিক পরিবর্তনটি কোন দিকে হবে তার উপর নির্ভর করবে তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মানটি অবম হবে না চরম।

এবার তৃতীয় সম্ভাবনার (গ) কথা ধরা যাক। রেখাচিত্র (২.৩ ক) তে $f(x)$ অপেক্ষকের শূন্য ঢাল হবে J বিন্দুতে (যখন $x = j$)। যদিও $f'(j) = 0$ এবং তার ফলে $f(j)$ অনড় বিন্দু f এর অন্তরকলজ কিন্তু $x = j$ এর বাঁদিক থেকে ডানদিকে চিহ্ন পরিবর্তন করেনা। অতএব উপরের পরীক্ষা অনুযায়ী J বিন্দু চরম বা অবম কোনো মানই দিচ্ছে না। এই ধরণের বিন্দুকে পথচ্যুতি (inflexion) বিন্দু বলা যায় কারণ এখানে রেখাচিত্রে পথটি বাঁক নিয়েছে। এই পথচ্যুতির বিন্দুর মূল বৈশিষ্ট্য হল এই বিন্দুতে অন্তরকলজ অপেক্ষকটির (কিন্তু আদিম অপেক্ষকটির নয়) তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান হয়। যেহেতু এই প্রান্তবর্তী মান অবম বা চরম দুইই হতে পারে সেহেতু দুধরণের পথচ্যুতি বিন্দু পাওয়া যায়। রেখাচিত্র নং (২.৩ ক´) তে উল্লম্ব অক্ষে অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ অপেক্ষকটি আঁকা হয়েছে। এখান থেকে দেখা যাচ্ছে যে $x = j$ হলে অর্থাৎ j' বিন্দুতে

$f'(x) = 0$। কিন্তু J' বিন্দুর দুই পাশেই $f'(x)$ ধনাত্মক বা শূন্যের চেয়ে বড়। তাই J' বিন্দুতে $f'(x)$ এর মান সবচেয়ে ছোট তাই J' কে $f'(x)$ এর অবম বিন্দু বলা যায়।

অন্যরকমের পথচ্যুতি বিন্দু দেখানো হয়েছে রেখাচিত্র নং (২.৩ খ)। ঐ চিত্রে $g(x)$ অপেক্ষকের ঢাল প্রথমে বেড়ে K বিন্দুর পরের থেকে ক্রমশঃ কমছে। ফলস্বরূপ, অন্তরকলজ $g'(x)$ অপেক্ষকের মান প্রথমে বেড়ে K' বিন্দুর পরের থেকে কমে যাচ্ছে। অতএব k' বিন্দু হবে $g'(x)$ অপেক্ষকের চরম বিন্দু।

সংক্ষেপে বলতে গেলে যে কোনো তুলনামূলক প্রান্তবর্তী বিন্দুকে অনড় বিন্দু হতেই হবে কিন্তু যে কোনো অনড় বিন্দুই প্রান্তবর্তী নয়। অনড় বিন্দু প্রান্তবর্তী অথবা পথচ্যুতি বিন্দু যে কোনোটাই হতে পারে।

প্রান্তবর্তী মান কী করে নির্ণয় করতে হয় তা নীচে উদাহরণ দিয়ে দেখানো হল।

উদাহরণ ১

ধরা যাক $y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 8$ ....(১)

তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মানের জন্য আমাদের x এর সেই বিশিষ্ট মানটি বের করতে হবে যার জন্য $f'(x) = 0$। সমীকরণ ১ এর অবকলন করে

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$

$f'(x) = 0$ হলে $3x^2 - 24x + 36 = 0$

অথবা $3x(x - 6) - 6(x - 6) = 0$

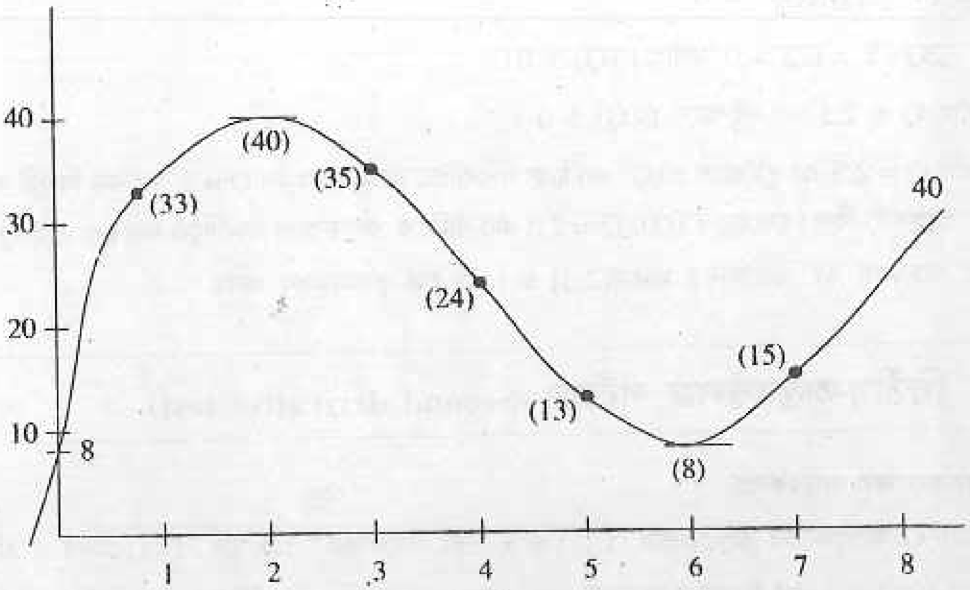
অথবা $(3x - 6)(x - 6) = 0$

তার মানে হয় $x = 6$, অথবা $3x = 6$ বা $x = 2$

তাহলে এক্ষেত্রে x এর দুটি বিশিষ্ট মান পাওয়া যাচ্ছে $x_1 = 2$ যাচ্ছে $x_2 = 6$

$$\left[\begin{array}{l} f'(2) = 0 \text{ এবং } f(2) = 40 \\ f'(6) = 0 \text{ এবং } f(6) = 8 \end{array}\right]$$

নীচের রেখাচিত্র নং (২.৪) এ সমীকরণ ১ এর রেখাচিত্র আঁকা হল। এর থেকে বিভিন্ন অঞ্চলে $f'(x)$ এর ধারণা সুস্পষ্ট হচ্ছে।



রেখাচিত্র ২.৪

$x = 2$ এর নিকটবর্তী অঞ্চলে, $x < 2$ হলে $f'(x) > 0$ এবং $x > 2$ হলে $f'(x) < 0$। অতএব $f'(x) = 40$ কে তুলনামূলক চরম মান বলা যায়। আবার $x = 6$ এর নিকটবর্তী অঞ্চলে $x < 6$ হলে $f'(x) < 0$ এবং $x > 6$ হলে $f'(x) > 0$ তাই $f(x) = 8$ কে অবম মান বলা যায়।

এবারে অর্থনীতির একটি উদাহরণ নিয়ে বিষয়টি আলোচনা করা যাক।

উদাহরণ—২ : ধরা যাক গড় ব্যয় অপেক্ষক $AC = Q^2 - 5Q + 8$ (Q = পণ্যের পরিমাণ)। এখানে $f'(Q) = 2Q - 5$ । এটি একটি রৈখিক অপেক্ষক। $f'(Q) = 0$ হলে $2Q = 5$ অথবা $Q = 2.5$ হবে। যেহেতু $f'(Q)$ রৈখিক অপেক্ষক, তাই Q এর একটিই মাত্র বিশিষ্ট মান পাওয়া যাবে। তার মানে $Q = 2.5$ একটিই সেই বিশিষ্ট মান।

এবার $Q = 2.5$ এর বাঁদিকে অর্থাৎ $Q = 2.4$ এবং

$Q = 2.5$ এর ডানদিকে অর্থাৎ $Q = 2.6$ এর জন্য

$f'(Q)$ এর মান বের করে দেখতে হবে তাদের চিহ্নগুলি কী।

$Q = 2.4$ হলে

$2Q - 5 = -0.2 < 0$ অর্থাৎ $f'(Q) < 0$

এবং $Q = 2.6$ হলে

$$2Q-5 = -0.2 < 0 \text{ অর্থাৎ } f'(Q) < 0$$

এবং Q 2.6 হলে

$$2Q-5 = 0.2 > 0 \text{ অর্থাৎ } f'(Q) > 0।$$

অর্থাৎ $Q = 2.5$ এর দুইপাশে $f'(Q) > 0$ ।

অর্থাৎ $Q = 2.5$ এর দুইপাশে $f'(Q)$ এর চিহ্ন পরিবর্তিত হচ্ছে। অতএব $Q = 2.5$ অনড় বিন্দুটি পথচ্যুতি বিন্দু নয়, প্রান্তবর্তী বিন্দু। যেহেতু $f'(Q)$, $Q = 2.5$ এর বাঁদিকে ঋণাত্মক ও ডানদিকে ধনাত্মক তাই $Q = 2.5$ বিন্দুটিতে গড় ব্যয় AC এর অনড় মান $f(2.5) = 1.75$ হল তুলনামূলক অবম।

২.৩ দ্বিতীয়-অন্তরকলজ পরীক্ষা (Second derivative test)

অন্তরকলজের অন্তরকলজ

$y = f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকলজ $f'(x)$ ও x এরই অপেক্ষক। তাই যদি $f'(x)$ মসৃণ ও অবিচ্ছিন্ন হয় তাহলে $f'(x)$ ও x এর সাপেক্ষে অবকলনযোগ্য হবে। এই অন্তরকলজদুটি $f(x)$ এর দ্বিতীয় অন্তরকলজ বলা হয় এবং $f''(x)$ লেখা হয়। আবার এই অন্তরকলজটির অর্থ হল $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ । একইভাবে $f(x)$ এর পরবর্তী অন্তরকলজগুলিকে $f'''(x)$, $f^4(x)$, $f^5(x)$,...., $f^{(n)}(x)$ অথবা $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, $\frac{d^5y}{dx^5}$, ..., $\frac{d^ny}{dx^n}$ ইত্যাদি লেখা হয়।

উদাহরণ-১

ধরা যাক $3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 12$ একটি অপেক্ষক। এর বিভিন্ন অন্তরকলজগুলি নির্ণয় করতে হবে।

$f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 12x - 7$

$f''(x) = 36x^2 - 30x + 12$

$f'''(x) = 72x - 30$

$f^{(4)}(x) = 72$

$f^{(5)}(x) = 0$

দ্বিতীয় অন্তরকলজের ব্যাখ্যা

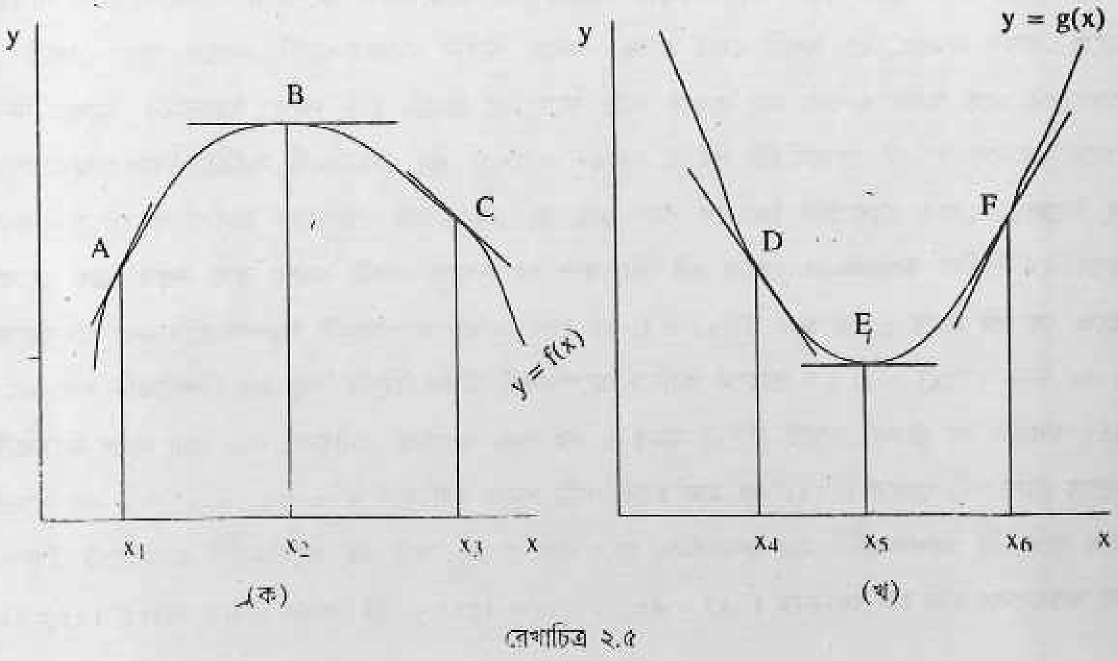
প্রথম অন্তরকলজের মাধ্যমে f অপেক্ষকের পরিবর্তনের হার পরিমাপ করা হয়। তাই দ্বিতীয় অন্তরকলজটি প্রথম অন্তরকলজের অন্তরকলজ বলে তার মাধ্যমে প্রথম অন্তরকলজের পরিবর্তনের হার পরিমাপ করা হয়।

তার মানে দ্বিতীয় অন্তরকলজ হল আদিম অপেক্ষক f(x) এর পরিবর্তনের হারের পরিবর্তনের হার। $x = x_0$ $x = x_0$ বিন্দু থেকে x এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র বৃদ্ধির ফলে যদি $f'(x_0) > 0$ [$f'(x_0) < 0$] হয় তাহলে অপেক্ষকের মান বাড়বে (কমবে)। যদি দ্বিতীয় অন্তরকলজ $f''(x_0) > 0$ [$f''(x_0) < 0$] হয় তাহলে অপেক্ষকের ঢাল বর্ধমান (হ্রাসমান) হবে। নীচের সারণি নং (২.১) এ প্রথম ও দ্বিতীয় অন্তরকলজের চিহ্ন এবং অপেক্ষকের চরিত্র বিবৃত করা হল।

সারণি ২.১

$f'(x_0)$ এর চিহ্ন	$f''(x_0)$ এর চিহ্ন	অপেক্ষকের ঢাল ও তার পরিবর্তনের চরিত্র
$f'(x_0) > 0$	$f''(x_0) > 0$	ঢাল ধনাত্মক ও বর্ধমান
$f'(x_0) > 0$	$f''(x_0) < 0$	ঢাল ধনাত্মক ও হ্রাসমান
$f'(x_0) < 0$	$f''(x_0) > 0$	ঢাল ঋণাত্মক কিন্তু বর্ধমান [যেমন (–11) থেকে (–10) হচ্ছে মানে x বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে ঋণাত্মক ঢালটি কম খাড়া হবে।]
$f'(x_0) < 0$	$f''(x_0) < 0$	ঢাল ঋণাত্মক ও হ্রাসমান [যেমন (–10) থেকে (–11) হচ্ছে মানে x বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে ঋণাত্মক ঢালটি কম খাড়া হবে।]

নীচের রেখাচিত্র নং (২.৫) এ বিষয়টি পরিষ্কার করে বোঝানো হল।



(ক) (খ)

রেখাচিত্র ২.৫

রেখাচিত্রে (ক ও খ মিলে) ৬ বিন্দু A, B, C, D, E, F নেওয়া হল। কোন কোন বিন্দুতে অন্তরকলজগুলির চিহ্নগুলি কী কী তা নীচে দেওয়া হল।

x এর মান	অন্তরকলজের চিহ্ন	রেখাচিত্রে প্রদর্শিত বিন্দু
$x = x_1$	$f'(x_1) > 0$, $f''(x_1) < 0$	A
$x = x_2$	$f'(x_2) = 0$, $f''(x_2) < 0$	B
$x = x_3$	$f'(x_3) < 0$, $f''(x_3) < 0$	C
$x = x_4$	$g'(x_4) < 0$, $g''(x_4) > 0$	D
$x = x_5$	$g'(x_5) = 0$, $g''(x_5) > 0$	E
$x = x_6$	$g'(x_6) > 0$, $g''(x_6) > 0$	F

এখান থেকে দেখা যাচ্ছে যে ঋণাত্মক দ্বিতীয় অন্তরকলজ থেকে একটি উল্টো u আকারের রেখা পাওয়া যাচ্ছে কারণ ক্রমশঃ এর ঢালটি ছোট হচ্ছে। আবার দ্বিতীয় অন্তরকলজটি ধনাত্মক হলে রেখাটি u আকারের হবে কারণ x এর মান বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে এর ঢালটি বৃদ্ধি পাবে। অনুভূমিক অক্ষের দিক থেকে দেখলে ক এর রেখাচিত্রটি সর্বত্রই অবতল এবং খ এর রেখাচিত্রটি সর্বত্রই উত্তল। অবতলতা বা উত্তলতা থেকে রেখাগুলি কিভাবে বাঁক নেয় তা বোঝা যায়। উপরের আলোচনা থেকে বোঝা যাচ্ছে যে দ্বিতীয় অন্তরকলজ থেকে এই বাঁকের চরিত্র সম্বন্ধে একটা ধারণা করা সম্ভব। এও বোঝা যাচ্ছে যে যদি সমস্ত x এর জন্য $f''(x) < 0$ হয় তবে আদিম অপেক্ষকটি অবতল হবে এবং যদি সমস্ত x এর জন্য $f''(x) > 0$ হয় তাহলে আদিম অপেক্ষকটি উত্তল হবে। কিন্তু এর বিপরীতটি সত্য নয়। $f(x)$ অবতল (বা উত্তল) হলেই $f''(x)$ সমস্ত x এর জন্য ঋণাত্মক (ধনাত্মক) নয়। তার কারণ কয়েকটি বিশেষ ব্যতিক্রমী ক্ষেত্রে $f''(x)$ এর মান হতে পারে শূন্য। ধরা যাক $y = f(x) = x^4$ । x এর বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে এই অপেক্ষকটির মান ক্রমবর্ধমান হারে বৃদ্ধি পাচ্ছে। তাই এই অপেক্ষকটি একেবারেই উত্তল। এর অন্তরকলজগুলি হল যথাক্রমে $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$ । তাই কেবল $x = 0$ হলে $f''(x) = 0$।

সকল $x \neq 0$ এর জন্য $f''(x) > 0$। সুতরাং কেবলমাত্র একটি অনড় বিন্দুতে $(x = 0)$ ছাড়া যথার্থ অবতল (বা উত্তল) অপেক্ষকের জন্য অন্যত্র $f''(x)$ এর যে কোনো একটি চিহ্নই, ঋণাত্মক (বা ধনাত্মক), থাকবে।

অন্যান্য অপেক্ষকের ক্ষেত্রে অবশ্য দ্বিতীয় অন্তরকলজটির ধনাত্মক বা ঋণাত্মক মান দুটোই হতে পারে। ঠিক কী হবে তা নির্ভর করবে x এর মানের উপর। উদাহরণস্বরূপ রেখাচিত্র (২.৩ ক) এবং (২.৩ খ) দ্রষ্টব্য যেখানে $f(x)$ এবং $g(x)$ দুটি অপেক্ষকেরই দ্বিতীয় অন্তরকলজ তাদের পথচ্যুতি বিন্দু যথাক্রমে J ও K তে চিহ্ন পরিবর্তন করছে। চিত্র (২.৩ ক´) তে দেখা যাচ্ছে যে $f'(x)$ এর ঢাল অর্থাৎ $f''(x)$, $x = j$ বিন্দুতে চিহ্ন পরিবর্তন করে ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক হচ্ছে। রেখাচিত্র (২.৩ খ´) তে আবার $g'(x)$ এর ঢাল অর্থাৎ $g''(x)$, $x = k$ বিন্দুতে চিহ্ন পরিবর্তন করে ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক হচ্ছে। তার মানে $f(x)$ রেখাটি j বিন্দুতে অবতল থেকে উত্তল হচ্ছে এবং $g(x)$ রেখাটি k বিন্দুতে উত্তল থেকে অবতল হচ্ছে। এবার প্রথম অন্তরকলজের মাধ্যমে ব্যাখ্যা না করে পথচ্যুতি বিন্দুকে দ্বিতীয় অন্তরকলজের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যাক। পথচ্যুতি বিন্দু হল এমনই একটি বিন্দু যেখানে অপেক্ষকের বাঁকের পরিবর্তন হয় অর্থাৎ তার দ্বিতীয় অন্তরকলজটি চিহ্ন পরিবর্তন করে।

তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মানের জন্য দ্বিতীয় অন্তরকলজ পরীক্ষা

যদি $x = x_0$ বিন্দুতে f অপেক্ষকের প্রথম অন্তরকলজ হয় $f'(x_0) = 0$ তাহলে সেই বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান অর্থাৎ $f(x_0)$ হবে (ক) তুলনামূলক চরম যদি দ্বিতীয় অন্তরকলজ

$$f''(x) < 0 \text{ হয়}$$

এবং (খ) তুলনামূলক অবম যদি দ্বিতীয় অন্তরকলজ

$$f''(x) > 0 \text{ হয়}$$

এখানে $f'(x_0) = 0$ হচ্ছে আবশ্যিক শর্ত (necessary condition)। এই শর্তটি পূরণ হলে দ্বিতীয় অন্তরকলজ ঋণাত্মক (ধনাত্মক) হবে তুলনামূলক চরম (অবম) মানের জন্য যথেষ্ট শর্ত (sufficient condition)। এই শর্ত দুটিকে যথাক্রমে প্রথম পর্যায় শর্ত (first-order-condition) এবং দ্বিতীয় পর্যায় শর্ত (second-order-condition) বলা হয়ে থাকে।

২.৪ অর্থনীতিতে পরীক্ষাগুলির প্রয়োগ

উদাহরণ-১ সর্বাধিক মুনাফার শর্ত (Profit-maximising condition)

অর্থনীতির তত্ত্ব থেকে জানা আছে যে মুনাফা সর্বাধিক করার আবশ্যিক শর্ত হল প্রান্তিক আয় (MR) = প্রান্তিক ব্যয় (MC)। তার অর্থ যে কোনো প্রতিষ্ঠানের উৎপাদনের যে মানের জন্য ঐ শর্তটি পূরণ হচ্ছে সেটিই হবে সর্বাধিক মুনাফার সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ উৎপাদন স্তর। এখানে ধরা যাক মোট আয় অপেক্ষক $(R = R/Q)$ এবং মোট ব্যয় অপেক্ষক $C = C(Q)$। তার মানে R ও C দুটি অপেক্ষকেই কেবলমাত্র একটি স্বাধীন চল থাকছে—তা হল Q বা উৎপাদন। অতএব মুনাফা অপেক্ষকটিও (এক্ষেত্রে এটিই লক্ষ্য অপেক্ষক) Q (বাছাই চল) এর অপেক্ষক হিসাবে লেখা যায়। তাই

$$\pi = \pi(Q) = R(Q) - C(Q) \qquad \text{.........} (২.১)$$

π সর্বাধিক হবার আবশ্যিক শর্ত হল

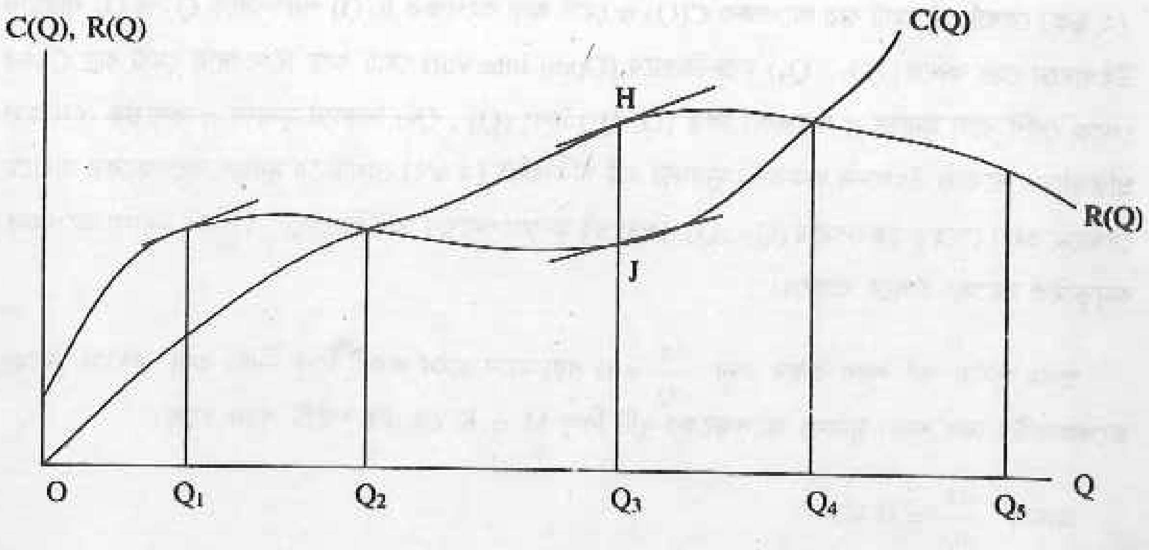
$$\frac{d\pi}{dQ} = 0$$

অর্থাৎ $\dfrac{d\pi}{dQ} = R'(Q) - C'(Q) = 0$

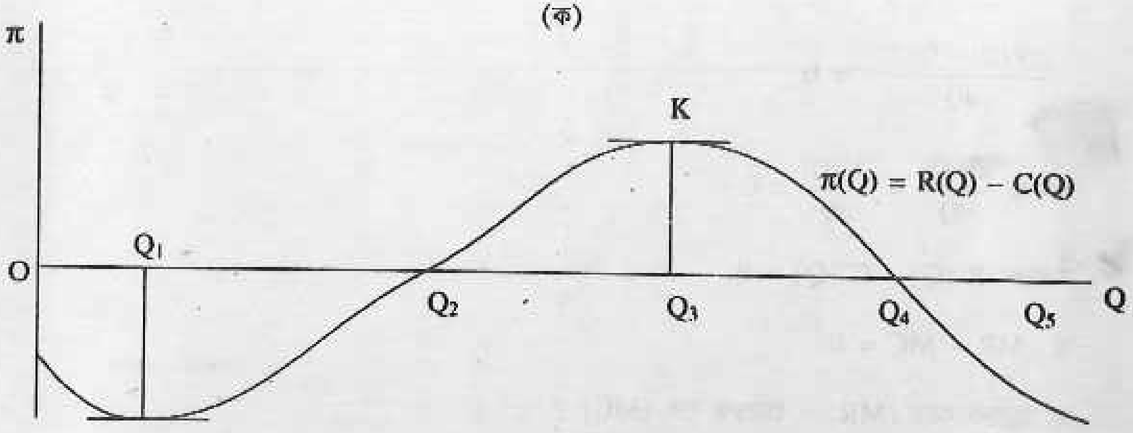
অথবা $R'(Q) - C'(Q) = 0$ .... (২.২)

অতএব সর্বাপেক্ষা অনুকূল উৎপাদন Q এর জন্য $R'(Q) - C'(Q) = 0$ হতে হবে অর্থাৎ $MR - MC = 0$ বা $MR = MC$ হতে হবে। কিন্তু প্রথম অন্তরকলজ শূন্য হলে এটি প্রান্তবর্তী মান হলেও চরম বা অবম যে কোনোটিই হতে পারে। তাই এরকম অবস্থায় দ্বিতীয় অন্তরকলজটি পরীক্ষা খুবই জরুরী। দ্বিতীয় অন্তরকলজটি ঋণাত্মক হলে তবেই মুনাফা সর্বাধিক হবে।

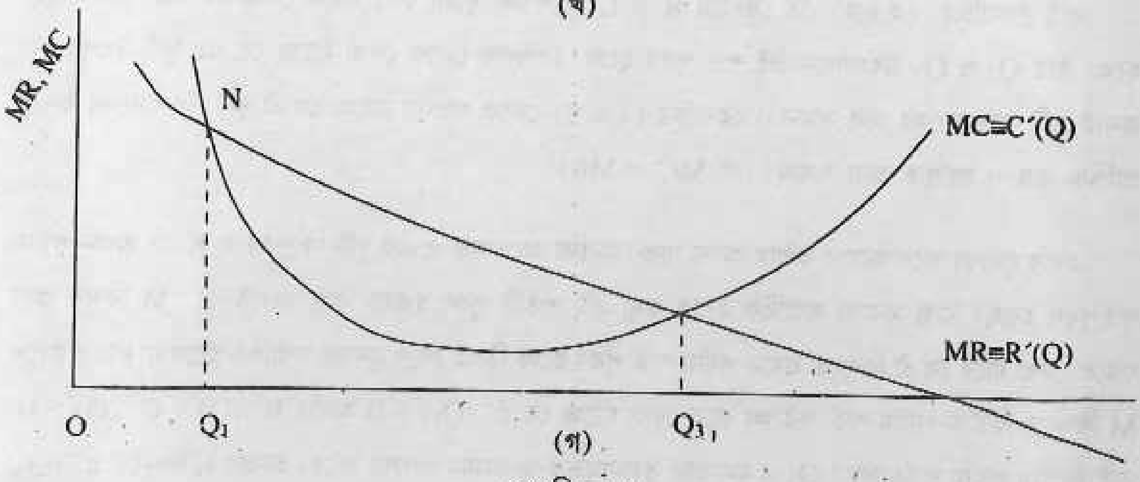
যদি $\overline{Q}$ এ $R'(\overline{Q}) = C'(\overline{Q})$ হয় তাহলে $R''(\overline{Q}) < C''(\overline{Q})$ হবে সর্বাধিক মুনাফার জন্য যথেষ্ট শর্ত। তার মানে যে উৎপাদন স্তরের জন্য প্রান্তিক আয় ও প্রান্তিক ব্যয় সমান। সেখানে যদি প্রান্তিক আয়ের পরিবর্তনের হার প্রান্তিক ব্যয়ের পরিবর্তনের হারের চেয়ে কম হয় তবে সেই উৎপাদনেই মুনাফা সর্বাধিক হবে। নীচের রেখাচিত্র নং (২.৬) এর মাধ্যমে বিষয়টি দেখানো হল।


C(Q), R(Q)
C(Q)
H
J
R(Q)
O
Q1
Q2
Q3
Q4
Q5
Q

(ক)


π
K
π(Q) = R(Q) − C(Q)
Q1
O
Q2
Q3
Q4
Q5
Q

(খ)


MR, MC
N
MC=C′(Q)
MR=R′(Q)
O
Q1
Q3

(গ)

রেখাচিত্র ২.৬

(২.৬ক) রেখাচিত্রে মোট ব্যয় অপেক্ষক $C(Q)$ ও মোট আয় অপেক্ষক $R(Q)$ পরস্পরকে Q_2 ও Q_4 পরিমাণ উৎপাদনে ছেদ করছে। (Q_2 , Q_4) মুক্ত-বিস্তারে (Open-interval) মোট আয় R সর্বদাই মোট ব্যয় C এর থেকে বেশি বলে মুনাফা π ধনাত্মক। কিন্তু (O, Q_2) এবং (Q_4 , Q_5) বিস্তারে মুনাফা π ঋণাত্মক (Q_5 হল প্রতিষ্ঠানের সর্বোচ্চ উৎপাদন ক্ষমতা)। মুনাফার এই গতিবিধিই (২.৬খ) রেখাচিত্রে মুনাফা অপেক্ষকের মাধ্যমে দেখানো হল। যেহেতু কেবলমাত্র (Q_2 , Q_4) বিস্তারেই মুনাফা ধনাত্মক তাই বিস্তারটুকুর জন্যই মুনাফা অপেক্ষক অনুভূমিক অক্ষের উপরে থাকবে।

প্রথম পর্যায় শর্ত পূরণ করার জন্য $\frac{d\pi}{dQ} = 0$ ধরা মানে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করা যেখানে মুনাফা অপেক্ষকটির ঢাল শূন্য। মুনাফা অপেক্ষকের দুটি বিন্দু M ও K তে এই শর্তটি পূরণ হচ্ছে।

আবার $\frac{d\pi}{dQ} = 0$ মানে

$$\frac{d(R(Q) - C(Q))}{dQ} = 0$$

অথবা $\frac{dR(Q)}{dQ} - \frac{dC(Q)}{dQ} = 0$

অর্থাৎ $R'(Q) - C'(Q) = 0$

বা $MR - MC = 0$

বা প্রান্তিক আয় (MR) = প্রান্তিক ব্যয় (MC)

তাই রেখাচিত্র (২.৬ক) তে যেখানে R ও C অপেক্ষক দুটির ঢাল সমান সেখানেই এই শর্তটি পূরণ হবে। তাই Q_1 ও Q_3 উৎপাদনে এই শর্ত পূরণ হচ্ছে। (স্পর্শক থেকে দেখা যাচ্ছে যে এই দুটি উৎপাদনের জন্যই দুটি অপেক্ষকের ঢাল সমান।) রেখাচিত্র (২.৬ গ) থেকে পাওয়া যাচ্ছে যে ঐ দুটি উৎপাদনের জন্যই প্রান্তিক ব্যয় ও প্রান্তিক আয় সমান। (বা MC = MR)।

এবার মুনাফা অপেক্ষকের কথায় আসা যাক। মুনাফা অপেক্ষক π এর দুটি বিন্দু M ও K তে প্রথম-পর্যায় শর্তপূরণ হচ্ছে। কিন্তু মুনাফা সর্বাধিক হবার জন্য এই শর্তটি পূরণ হওয়া কিন্তু যথেষ্ট নয়। M বিন্দুর কথা ধরলে দেখা যাবে যে ঐ বিন্দুতে প্রথম-পর্যায়-শর্ত পূরণ হচ্ছে ঠিকই কিন্তু মুনাফা সর্বাধিক হচ্ছে না। তার কারণ M বিন্দুতে দ্বিতীয়-পর্যায়-শর্ত পরীক্ষা করে দেখা যাচ্ছে যে $\pi''(Q_1) > 0$ অর্থাৎ $R''(Q) - C''(Q) > 0$; তাই দ্বিতীয়-পর্যায় শর্তানুসারে Q_1 এ মুনাফার তুলনামূলক অবমমান পাওয়া যাবে। আবার K বিন্দুতে $\pi''(Q_3)$

< 0 অর্থাৎ $R''(Q) - C''(Q) < 0$। তাই দ্বিতীয় পর্যায় শর্তানুসারে Q_3 তেই মুনাফা সর্বাধিক হবে। Q_3ই হল সর্বাপেক্ষা অনুকূল উৎপাদন। (২.৬ গ) রেখাচিত্রে দেখা যাচ্ছে যে L বিন্দুতে MR রেখার ঢাল ঋণাত্মক এবং MC রেখার ঢাল ধনাত্মক। তাই MR রেখার ঢাল $(R''(Q))$ নিঃসন্দেহে MC রেখার ঢালের $(C''(Q))$ চেয়ে ছোট। কিন্তু Q_1 উৎপাদনে এই শর্তটি পূরণ হচ্ছেনা কারণ MR ও MC দুটি রেখারই ঢাল ঋণাত্মক এবং MR রেখার ঢাল N বিন্দুতে সংখ্যাগতভাবে MC রেখার ঢালের থেকে ছোট। তার অর্থ হল $R''(Q) > C''(Q)$। তাই Q_1 এ মুনাফার তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান পেলেও তা চরম মান হচ্ছে না—অবম মান হচ্ছে।

একটি উদাহরণ নিলে বিষয়টি আরও পরিষ্কার হবে। ধরা যাক $R(Q) = 1000Q - 2Q^2$

ও $C(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$।

তাহলে $\pi(Q) = R(Q) - C(Q) = 1000Q - 2Q^2 - Q^3 + 59Q^2 - 1315Q - 2000$।

$$= -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$$ ।

এখানে $\frac{d\pi}{dQ} = 0$ হওয়ার অর্থ $-3Q^2 + 114Q - 315 = 0$

অথবা $-3Q^2 + 105Q + 9Q - 315 = 0$

অথবা $-3Q(Q - 35) + 9(Q - 35) = 0$

অথবা $(Q - 35)(9 - 3Q) = 0$

তার মানে হয় $Q - 35 = 0$ নয়তো $9 - 3Q = 0$

অর্থাৎ হয় $Q = 35$ নয়তো $Q = 3$

এবার দুটি মানের জন্যই দ্বিতীয়-পর্যায়-শর্ত দেখতে হবে।

$\pi''(Q) = \frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 114$

$Q = 35$ এর জন্য $\pi''(Q)$ এর মান হবে

$-210 + 114 = -106 < 0$।

$Q = 3$ এর জন্য $\pi''(Q)$ এর মান হবে

$-18 + 114 = 96 > 0$ ।

তাই $Q = 35$ এই সর্বাধিক মুনাফার জন্য দ্বিতীয় পর্যায় শর্তটি পূরণ হচ্ছে। অতএব $Q = 35$ই হল উৎপাদনের সর্বাপেক্ষা অনুকূল মান।

২.৫ সূচকীয় অপেক্ষকের (exponential function) প্রান্তবর্তী মান নির্ধারণ

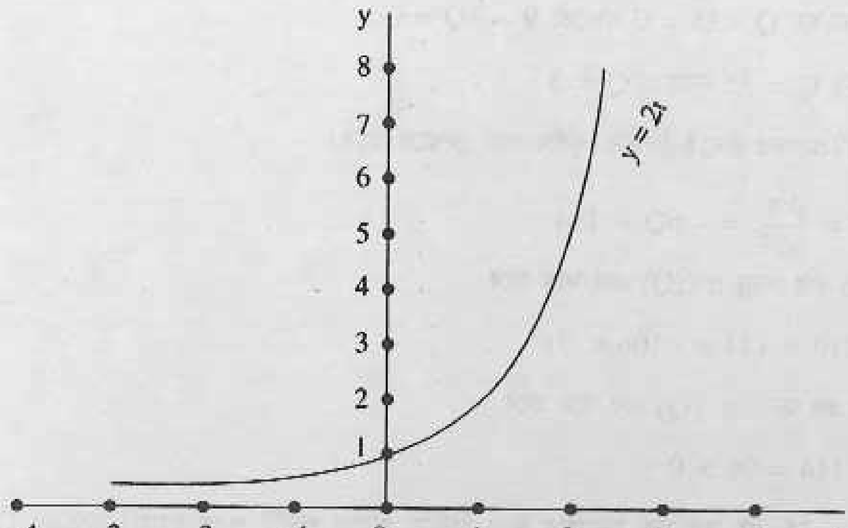
যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলরাশি সূচক হিসাবে থাকে তাকেই বলা হয় সূচকীয় অপেক্ষক।

সূচকীয় অপেক্ষকের সহজ রূপটি নীচে দেওয়া হল—

$$y = f(t) = b^t,\ b > 1 \qquad \ldots (২.৩)$$

y হল অধীন চলরাশি এবং t হল স্বাধীন চলরাশি। b হল সূচকটির নির্দিষ্ট ভিত্তি (base)। এই ধরনের অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল হবে সমস্ত বাস্তবসংখ্যার সেট্ (set)। অতএব t কে শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হতেই হবে তার কোনো মানে নেই। কিন্তু $b > 1$ হতে বাধ্য কেন? তার কারণ যেহেতু t যে কোনো বাস্তবসংখ্যা t কিন্তু $\frac{1}{2}$ হতেই পারে। সেক্ষেত্রে b যদি ঋণাত্মক হয় তাহলে b^t হবে কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গ অর্থাৎ অবাস্তব। তাই $b > 0$ হওয়া আবশ্যক। এবার দেখা যাক $0 < b < 1$ বা $b = 1$ হলে কী হয়। ধরা যাক $0 < b < 1$ এবং b এর নির্দিষ্ট মান $\frac{1}{4}$। তাহলে $b^t = \left(\frac{1}{4}\right)^t = 4^{-t}$। এইভাবে যে কোনো ভগ্নাংশ ভিত্তিক অপেক্ষককে পূর্ণসংখ্যা ভিত্তিক অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং $b > 1$ হলেও তার মধ্যে ঐ সকল অপেক্ষকগুলি-ও ধরা হয়ে যাচ্ছে। আর $b = 1$ হলে অপেক্ষকটি হবে $b^t = 1^t = 1$অর্থাৎ ধ্রুবক—তাই ওটিকে আর সূচকীয় অপেক্ষক বলা যাবেনা। সুতরাং $b > 1$ হওয়া আবশ্যিক।

$b = 2$ ধরে নিয়ে সমীকরণ (২.৩) এর রেখাচিত্র নীচে দেওয়া হল। (রেখাচিত্র নং ২.৭)।



রেখাচিত্র নং ২.৭

সূচকীয় অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য

(১) এটি সর্বত্র সন্ততঃ ও মসৃণ। অতএব সর্বত্রই এর অবকলনযোগ্যতা থাকবে।

(২) এটি একদিষ্ট আরোহী। y ক্রমবর্ধমান হারে বৃদ্ধি পায় তাই এর প্রথমও দ্বিতীয় দুটি অন্তরকলজই ধনাত্মক হওয়ার কথা।

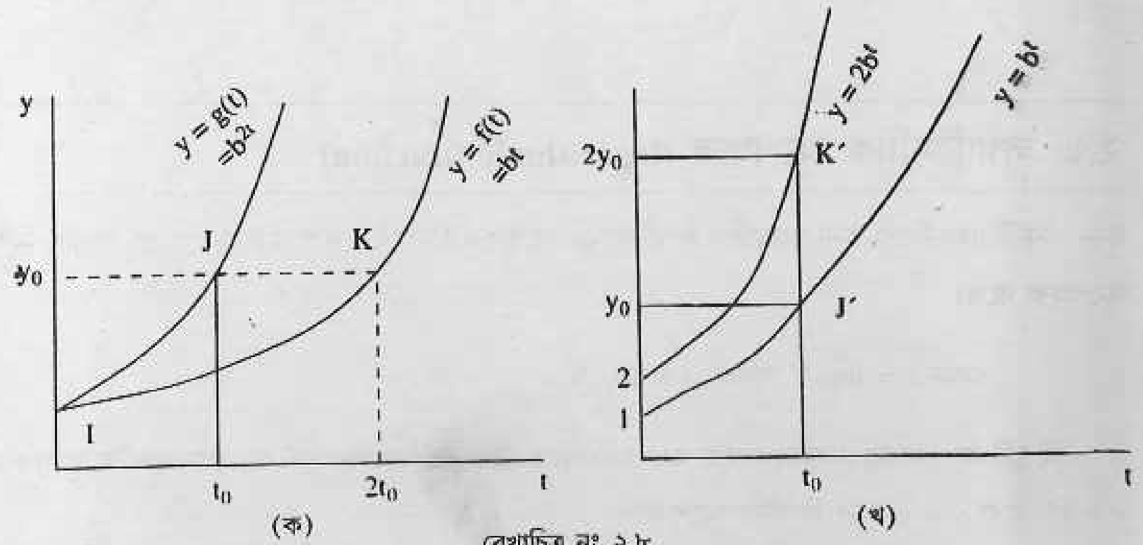
(৩) এর সংজ্ঞার অঞ্চলে ঋণাত্মক ও ধনাত্মক সংখ্যা দুইই আছে ঠিকই কিন্তু এর প্রসার (range) মুক্তবিস্তার (open internal) $(0, \alpha)$ এর মধ্যেই সীমাবদ্ধ। তাই স্বাধীন চলরাশি t এর চিহ্ন যাই হোক না কেন, অধীন চলরাশি y সবসময়ই ধনাত্মক।

এই অপেক্ষকের একদিষ্টতার কারণে ধরে নেওয়া যায় যে এর একটি বিপরীত অপেক্ষক আছে এবং সেটিও একদিষ্ট। এই বিপরীত অপেক্ষকটি লগারিদ্‌মিক (logarithmic) অপেক্ষক হয়।

একদিষ্টতার অর্থ হল যে y এর একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য t এর একটিই নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে। এছাড়া সূচকীয় অপেক্ষকটির প্রসার $(0, \alpha)$ হওয়ার কারণে যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যাকে $b > 1$ ভিত্তির অনন্য সূচক হিসাবে প্রকাশ করে যাওয়া উচিত। রেখাচিত্র (২.৭) এ $y = 2^t$ রেখা নিজের প্রসারের ভিতর y এর সমস্ত ধনাত্মক সংখ্যাকে আবৃত করে তাই y এর যে কোনো মানই 2 এর কোনো অনন্য সূচক হিসাবে প্রকাশ করা সম্ভব। অবশ্য যদি ভিত্তি 2 এর বদলে একের চেয়ে বড় অন্য কোনো বাস্তব সংখ্যাও হয় তাহলে প্রসার বদল হয় না। তার ফলে যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা y কে যে কোনো $b > 1$ ভিত্তির সূচক হিসাবে প্রকাশ করা সম্ভব।

সাধারণ সূচকীয় অপেক্ষক

y কে যেহেতু বিভিন্ন ভিত্তির সূচক হিসাবে প্রকাশ করা যায় তাই ভিত্তি পরিবর্তন করাও সম্ভব। ধরা যাক $y = 9^t$। এটিকে সহজেই $y = (3^2)^t = 3^{2t}$ লেখা যায়। অবশ্য ভিত্তি পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে সূচকেরও পরিবর্তন হবে। সূচক পরিবর্তন করা ছাড়াও b^t এর সঙ্গে সহগ যোগ করে পরিবর্তন করা যায়। এই দুটি পরিবর্তনের ফলে অপেক্ষকের কী পরিবর্তন হবে তা রেখাচিত্র (২.৮) এর মাধ্যমে নীচে প্রকাশ করা হল।



রেখাচিত্র নং ২.৮

রেখাচিত্র নং (২.৮ ক) তে দুটি রেখা আঁকা হয়েছে—একটি $y = f(t) = b^t$ এর জন্য এবং অন্যটি $y = g(t) = b^{2t}$ এর জন্য। যেহেতু দ্বিতীয় অপেক্ষকের সূচকটি প্রথম অপেক্ষকের সূচকের ঠিক দ্বিগুণ এবং উভয়েরই ভিত্তি সমান তাই g অপেক্ষকে $t = t_0$ আর f অপেক্ষকে $t = 2t_0$ হলে y এর একই মান পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $f(2t_0) = g(t_0) = b^{2t} = y_0$। রেখাচিত্র নং (২.৮ ক) তে y_0K দূরত্বের ঠিক অর্ধেক। একই কারণে y এর অন্যান্য মানের জন্যও g অপেক্ষকটি উল্লম্ব অক্ষ এবং f অপেক্ষকের ঠিক মধ্যবর্তী স্থানে থাকবে। তার মানে সূচকটি দ্বিগুণ করলে সূচকীয় রেখাটি উল্লম্ব অক্ষের দিকে অর্ধেকপথ সরে যাবে এবং সূচকটি অর্ধেক করলে রেখাটি উল্লম্ব অক্ষের থেকে তার দূরত্বের দ্বিগুণ দূরত্বে সরে যাবে। কিন্তু $f(0) = g(0) = b^0 = 1$। অতএব দুটি অপেক্ষকই উল্লম্ব অক্ষের উপর একই জায়গা থেকে শুরু হবে। যদি ভিত্তির সঙ্গে কোনো সহগ যোগ করা হয় তাহলেও রেখাটি সরে যাবে কিন্তু আগের মত অনুভূমিক ভাবে নয় উল্লম্বভাবে। রেখাচিত্র নং (২.৮ খ) তে $y = b^t$ নিচ দিয়ে যাচ্ছে এবং $y = 2b^t$ তার উপর দিয়ে যাচ্ছে কারণ প্রতিটি t এর জন্য $y = 2b^t$ হবে $y = b^t$ এর দ্বিগুণ। যেমন t_0 এর জন্য $y_0 = b^t$ হলে $2b^t = 2y_0$ হবে। তাই t_0J' আর $J'K'$ সমান হবে। তার অর্থ হল যে 2 সহগটি যোগ করার ফলে রেখাটি অনুভূমিক অক্ষের থেকে আগে যতটা দূরে ছিল এখন তার দ্বিগুণ উপরে উঠে যাচ্ছে। এখানে অবশ্য দুটি রেখা শুরুও হবে ভিন্ন জায়গা থেকে কারণ $t = 0$ হলে $y = b^0 = 1$ কিন্তু $y = 2b^0 = 2$। এবার তাহলে যে কোনো সূচকীয় অপেক্ষককে সাধারণ রূপে $y = Ab^{ct}$ (২.৪) লেখা যায়।

২.৬ লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক (logarithmic function)

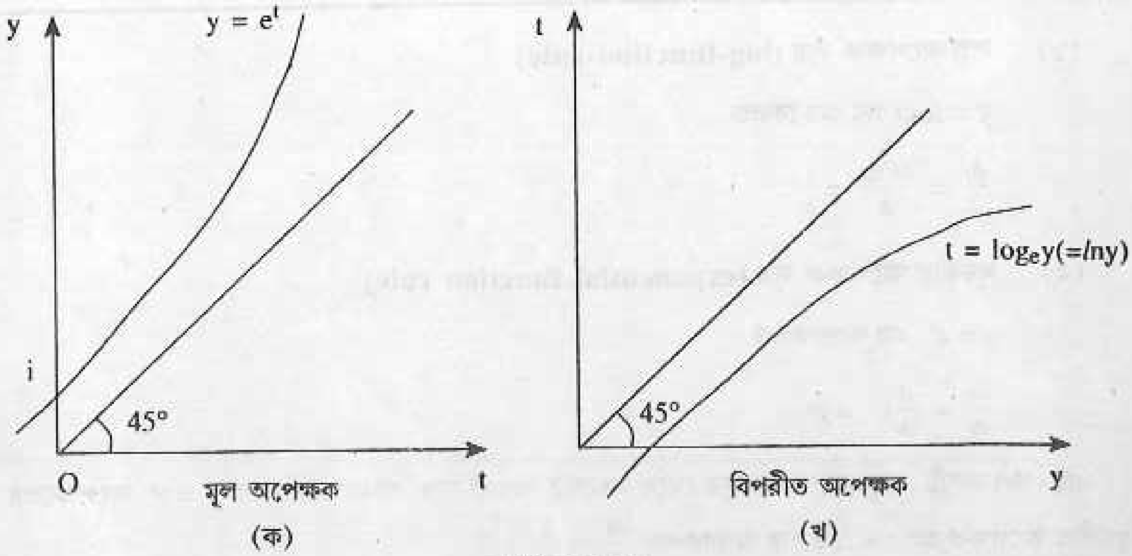
যখন একটি চলরাশিকে অন্য চলরাশির লগারিদ্‌মের অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা হয় তাকে লগারিদমিক অপেক্ষক বলে।

যেমন $t = \log_b Y$ অথবা $t = \log_e Y$।

এই দুটি অপেক্ষকের একমাত্র পার্থক্য তাদের ভিত্তিতে। উপরের অপেক্ষক দুটি যথাক্রমে সূচকীয় অপেক্ষক $y = b^t$ এবং $y = e^t$ এর বিপরীত অপেক্ষক।

রৈখিক রূপ

$y = e^t$ দেওয়া থাকলে তার অক্ষ দুটি অদলবদল করে লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক পাওয়া যায়। নীচের রেখাচিত্র নং (২.৯) এ এটি দেখানো হল।



রেখাচিত্র নং ২.৯

রেখাচিত্র নং (২.৯ ক) টি হল মূল অপেক্ষক এবং রেখাচিত্র নং (২.৯ খ)টি হল তার প্রতিবিম্ব। সূচকীয় অপেক্ষকের প্রসার ধনাত্মক তাই লগারিদ্‌মিক অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল ধনাত্মক। লগারিদ্‌মিক অপেক্ষকটিও একদিষ্ট আরোহী কিন্তু এর বৃদ্ধির হার ক্রমহ্রাসমান অর্থাৎ দ্বিতীয় অন্তরকলজ ঋণাত্মক।

ভিত্তি পরিবর্তন

যে কোনো সূচকীয় অপেক্ষক $y = Ab^{ct}$ কে সবসময়ই স্বাভাবিক সূচকীয় অপেক্ষক সহজেই $y = Ae^{rt}$ তে পরিবর্তিত করা যায়। এক্ষেত্রে মূল কাজটি হল b এবং c এর থেকে এমন একটি r বের করা যাতে $e^r = b^c$ হয়।

$e^r = b^c$

দুদিকের স্বাভাবিক লগারিদম্ নিলে

$\ln e^r = \ln b^c$

অথবা r lae = clnb

অথবা r = clnb (কারণ lae = 1)

অতএব $Ab^{ct} = Ae^{(club)t}$

২.৭ সূচকীয় ও লগারিদ্‌মিক অপেক্ষকের অন্তরকলজ ও তার প্রয়োগ (Derivatives of exponential and logarithmic functions and their applications)

(১) **লগ্‌-অপেক্ষক সূত্র (log-function-rule)**

$y = \log t$ এর অন্তরকলজ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\log t}{dt} = \frac{1}{t}$$

(২) **সূচকীয় অপেক্ষক সূত্র (exponential function rule)**

$y = e^t$ এর অন্তরকলজ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}e^t = e^t$$

এই ফলাফলটি লগ্‌ অপেক্ষক সূত্র থেকে সহজেই পাওয়া যায়। আমরা জানি যে $y = e^t$ অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক হল $t = \ln y$ যার অন্তরকলজ $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y}$।

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{dt/dy} = \frac{1}{1/y} = y = e^t.$$ ।

যে সব ক্ষেত্রে e^t এবং lat তে t চলের পরিবর্তে t এর কোনো অপেক্ষক f(t) ব্যবহৃত হয় সেসব ক্ষেত্রেও এই সূত্র দুটিকে প্রসারিত করা যায়।

$y = e^{f(t)}$ দেওয়া থাকলে, ধরা যাক $u = f(t)$। অতএব $y = e^u$ । তাহলে শৃঙ্খলসূত্র-অনুসারে

$$\frac{d}{dt}e^{f(t)} = \frac{d}{dt}e^u = \frac{d}{du}e^u\,\frac{du}{dt} = e^u\frac{du}{dt} = e^{f(t)}.f'(t)$$ ।

আবার যদি $y = \ln f(t)$ হয় ধরা যাক $v = f(t)$ অতএব $y = \ln v$ । এখানেও শৃঙ্খলসূত্র অনুসারে

$$\frac{d}{dt}\ln f(t) = \frac{d}{dt}(\ln v) = \frac{d}{dv}\ln V\,\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}f'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$ ।

অতএব সাধারণভাবে উপরের সূত্র দুটিকে লেখা যায়

$$\frac{d}{dt}e^{f(t)} = f'(t)e^{f(t)}$$ (অথবা $\frac{d}{dt}e^u = e^u\frac{du}{dt}$)

এবং $\frac{d}{dt}\ln f(t) = \frac{1}{f(t)}f'(t)$ [অথবা $\frac{d}{dt}\ln v = \frac{1}{v}\frac{dv}{dt}$]

এইসব অপেক্ষকের ক্ষেত্রেও উচ্চতর অন্তরকলজ বের করার জন্য বারবার অবকলন করতে হবে।

সূচকীয় ও লগারিদ্‌মিক অন্তরকলজের প্রয়োগ

(১) **ক্রমবৃদ্ধির হার নির্ধারণ** (Determination of the rate of growth) :

যখনি কোনো চলরাশি y সময় t এর অপেক্ষক হয় অর্থাৎ $y = f(t)$ হয় তার তাৎক্ষণিক (instantaneous) ক্রমবৃদ্ধির হার (rate of growth)।

$$r_y = \frac{dy/dt}{y} = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\text{প্রান্তিক অপেক্ষক}}{\text{মোট অপেক্ষক}}$$

কিন্তু এই অনুপাতটি $\ln f(t)$ এর অন্তরকলজ। অতএব এক্ষেত্রে এটিকে $\ln y$ এর অন্তরকলজও বলা যায়। তাই সময়ের কোনো অপেক্ষক $f(t)$ এর তাৎক্ষণিক ক্রমবৃদ্ধির হার নির্ণয় করার জন্য তার অবকলন করে $f(t)$ দিয়ে ভাগ না করে তার স্বাভাবিক লগ্ নিয়ে তার অবকলনও করা যায়। এই দ্বিতীয় পদ্ধতিটি অনেক অপেক্ষকের ক্ষেত্রেই সহজ হয়।

উদাহরণ ১

এখানে $V = Ae^{rt}$ এর ক্রমবৃদ্ধির হার নির্ণয় করা যাক। t হল সময় এবং A ধ্রুবক।

$$\begin{aligned} ln v = ln(Ae^{rt}) &= lnA + lne^{rt} \\ &= lnA + rtLne \\ &= lnA + rt \ (\text{যেহেতু } lne = 1) \end{aligned}$$

ক্রম বৃদ্ধির হার $r_v = \frac{d}{dt} ln v = 0 + \frac{d}{dt} rt = r$

উদাহরণ ২

দুটি অপেক্ষকের সংমিশ্রণের ক্রমবৃদ্ধির হার

ধরা যাক $y = uv$, এখানে $u = f(t)$ ও $v = g(t)$

$$ln y = ln u + ln v$$

$$r_y = \frac{d ln y}{dt} = \frac{d}{dt}(ln u + ln v)$$

$$= \frac{d}{dt} ln f(t) + \frac{d}{dt} ln g(t)$$

$$= \frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{g'(t)}{g(t)} = r_u + r_v$$

আবার যদি $y = \frac{u}{v}$ হয় এবং $u = f(t)$ ও $v = g(t)$ হয় তাহলে $ln y = ln u - ln v$

সেক্ষেত্রে $r_y = \frac{d}{dt} ln y = \frac{d}{dt} ln u - \frac{d}{dt} ln v$

$$= \frac{f'(t)}{f(t)} - \frac{g'(t)}{g(t)} = r_u - r_v \text{ ।}$$

অতএব যদি মূল অপেক্ষকটি দুটি অপেক্ষকের গুণফল (ভাগফল) হিসাবে প্রকাশ করা হয় তবে তার ক্রমবৃদ্ধির হার হবে ঐ দুটি অপেক্ষকের ক্রমবৃদ্ধির হারের যোগফল (বিয়োগফল)।

উদাহরণ ৩

বিন্দুস্থিতিস্থাপকতা নির্ধারণ (Determination of Point-Elasticity)

$y = f(t)$ অপেক্ষকে t সময় চল হলে $ln y$ এর অন্তরকলজ থেকে তাৎক্ষণিক ক্রমবৃদ্ধির হার পরিমাপ করা যায়। কিন্তু t যদি সময় চল না হয় তবে ঐ অন্তরকলজটিকে তাৎক্ষণিক আনুপাতিক পরিবর্তনের হার হিসাবে ব্যাখ্যা করা যায়। এবার তাই স্বাধীন চলটিকে t এর পরিবর্তে x ধরে $y = f(x)$ অপেক্ষক নেওয়া হল।

ধরা যাক $u \equiv ln y, v \equiv ln x$

অতএব পাওয়া যাচ্ছে যে

$u \equiv ln y, y = f(x)$, $x = e^{ln x} = e^v$ তাই $(\ln x)$ এর সাপেক্ষে $ln(y)$ এর অন্তরকলজ

$$\frac{d(ln y)}{d(ln x)} = \frac{du}{dv} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dv}$$

$$= \frac{d}{dy}(ln y)\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d}{dv}e^v\right)$$

$$= \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}e^v \left[\text{ কারণ } \frac{d}{dy}(ln y) = \frac{1}{y} \text{ এবং } \frac{d}{dv}e^v = e^v\right]$$

$$= \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}x \left[\text{যেহেতু } e^v = x\right]$$

$= \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$ —এটি কিন্তু অপেক্ষকটির বিন্দু স্থিতিস্থাপকতা তাই যে কোনো $y = f(x)$ অপেক্ষকের x এর সাপেক্ষে y এর স্থিতিস্থাপকতা—

$$E_{yx} = \frac{dy}{dx}\,\frac{x}{y} = \frac{d(lny)}{d(lnx)} \qquad \text{...............(২.৫)}$$

২.৮ একাধিক বাছাই চলের ক্ষেত্রে সর্বাপেক্ষা অনুকূল অবস্থা নির্ধারণ

এই আলোচনার প্রথমে সেইসব অপেক্ষকগুলি নিয়ে আলোচনা করা হবে যেগুলির বাছাই চল দুটি যেমন $Z = f(x, y)$। এখানে অবশ্য সবসময়ই ধরে নেওয়া হবে যে লক্ষ্য অপেক্ষকটির যে কোনো পর্যায়ের সসীম, অবিচ্ছিন্ন আংশিক অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে।

বহু চলের অপেক্ষাকগুলির ক্ষেত্রে দুধরনের প্রান্তবর্তী মান হয় পরম (absolute) বা তুলনামূলক (relative)। এখানে অবশ্য মূলতঃ তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান নিয়েই আলোচনা করা হবে। এর পরবর্তী আলোচনায় তাই শুধু প্রান্তবর্তী কথাটাই ব্যবহার করা হবে তাকেই তুলনামূলক প্রান্তবর্তী বলে ধরতে হবে।

দ্বিতীয় পর্যায়ের আংশিক অন্তরকলজ

একটি বাছাই চলের ক্ষেত্রে তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান নির্ধারণের ক্ষেত্রে প্রথম ও দ্বিতীয় অন্তরকলজের ভূমিকা আগেই আলোচনা করা হয়েছে। এক্ষেত্রে একাধিক বাছাই চল থাকার ফলে দ্বিতীয় পর্যায়ের আংশিক অন্তরকলজ দেখতে হবে। $Z = f(x, y)$ অপেক্ষকের দুটি প্রথম পর্যায়ের আংশিক অন্তরকলজ পাওয়া যাবে —সেগুলি হল $f_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ এবং $f_y = \frac{\partial z}{\partial y}$। যেহেতু f_x, x এর অপেক্ষক (এটি y এরও অপেক্ষক), y স্থির রেখে x এর পরিবর্তনের সঙ্গে f_x এর পরিবর্তনের হার নির্ণয় করার জন্য দ্বিতীয় পর্যায়ের অন্তরকলজ f_{xx} বা $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ব্যবহার করা যাবে।

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x)$$

অথবা $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

একইভাবে $f_{yy} \equiv \frac{\partial}{\partial y}(fy)$ অথবা $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ কিন্তু এক্ষেত্রে মনে রাখা প্রয়োজন যে f_x, y এর এবং f_y, x এরও অপেক্ষক। অতএব f_x কে y এর সাপেক্ষে এবং f_y কে x এর সাপেক্ষে আংশিক অবকলন করে আরও দুটি আংশিক অন্তরকলজ বের করা যায়।

$$f_{xy} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

এবং $$f_{yx} \equiv \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

এগুলিকে বলা হয় পারস্পরিক (cross) বা মিশ্রিত (mixed) আংশিক অন্তরকলজ বলা হয়। ইয়ং এর উপপাদ্য (Young's Theorem) অনুসারে যতক্ষণ পারস্পরিক আংশিক অন্তরকলজ দুটিই অবিচ্ছিন্ন ততক্ষণ এ দুটি অভিন্ন হবে।

একটি উদাহরণ নিলে বিষয়টি আরও পরিষ্কার হবে। ধরা যাক $Z = x^3 + 7xy - y^2$। এই অপেক্ষকের প্রথম অন্তরকলজ দুটি হল যথাক্রমে

$$f_x = 3x^2 + 7y$$

এবং $f_y = 7x - 2y$

এবং $f_{xx} = 6x,\ f_{yy} = -2,\ f_{yx} = 7,\ f_{xy} = 7$

অর্থাৎ $f_{yx} = f_{xy}$

দ্বিতীয় পর্যায়ের পূর্ণ অবকল (Second order total differential)

$Z = f(x, y)$ অপেক্ষকের পূর্ণ অবকল

dz (বা df) $= f_x d_x + f_y d_y$ ....(২.৬)

এবার দেখা যাক কী করে দ্বিতীয় পর্যায়ের আংশিক অন্তরকলজের ভিত্তিতে দ্বিতীয় পর্যায়ের পূর্ণ অবকল বের করা যায়।

$d^2z = d(dz)$ —এটি হল dz এর নিজস্ব পরিবর্তনের পরিমাপ। dz কে অবকলন করার জন্য dz কী কী চলের অপেক্ষক সেটা জানা প্রয়োজন। dz, f_x এবং f_y এর অপেক্ষক আবার f_x ও f_y, x ও y এর অপেক্ষক তাই dzকেও x এবং y এর অপেক্ষক বলে ধরে নেওয়া যায়।

$$d^2z \equiv d(dz) = \frac{\partial(dz)}{dx}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy \qquad \text{..............(২.৭)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy$$

$$= (f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy$$

$$= f_{xx}(dx)^2 + f_{xy}dydx + f_{yx}dxdy + f_{yy}(dy)^2$$

$$= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dydx + f_{yy}dy^2$$

[যেহেতু $f_{xy} = f_{yx}$ এখানে $dx^2 = (dx)^2$ এবং $dy^2 = (dy)^2$]

আগের অপেক্ষক অর্থাৎ $z = x^3 + 7xy - y^2$ নিয়ে dz এবং d^2z নির্ণয় করলে বিষয়টি আরও স্পষ্ট হবে।

আগের অপেক্ষক অর্থাৎ $z = x^3 + 7xy - y^2$ নিয়ে dz এবং d^2z নির্ণয় করলে বিষয়টি আরও স্পষ্ট হবে।

$z = x^3 + 7xy - y^2$ । এই উদাহরণটির থেকে পাওয়া আংশিক অন্তরকলজগুলির মান (২.৬) এবং (২.৭) এ প্রতিস্থাপন করলে

$$dz = (3x^2 + 7y)dx + (7x - 2y)dy$$

এবং $d^2z = 6xdx^2 + 14dxdy - 2dy^2$। এবার যে কোনো (x_0, y_0) বিন্দুতে এর মান নির্ণয় করা সম্ভব।

পূর্ণ অবকলের পরিপ্রেক্ষিতে বলা যায় যে প্রান্তবর্তী মানে পৌঁছানোর জন্য সেই বিন্দুতে z এর তাৎক্ষণিকভাবে স্থির থাকা প্রয়োজন। তার মানে $dz = 0$ হওয়া প্রয়োজন। এখন $dz = f_x dx + f_y dy$ । এক্ষেত্রে যেহেতু dx এবং dy দুটিই একসঙ্গে শূন্য হওয়ার কোনো কারণ নেই তাই একমাত্র f_x এবং f_y উভয়ই যদি একই সঙ্গে শূন্য হয় তবেই যে কোনো অবস্থাতেই $dz = 0$ হতে পারে। তাই $dz = 0$ এবং $f_x = f_y = 0$ শর্ত দুটি একই।

দ্বিতীয় -পর্যায় শর্ত

$dz = 0$ হলে z এর প্রান্তবর্তী মান পাওয়া যাবে। তারপর সেটি চরম না অবম তা নির্ধারণ করার জন্য d^2z ঋণাত্মক না ধনাত্মক তা দেখতে হবে। (২.৭) নং সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে dx এবং dy জানা থাকলে d^2z এর চিহ্ন f_{xy} , f_{xx} এবং f_{yy} এর চিহ্নের উপর নির্ভরশীল হবে। নীচের সারণিতে শর্তগুলি সংক্ষেপে দেওয়া হল। [সারণি (২.১) দ্রষ্টব্য]।

সারণি ২.১

$z = f(x, y)$ এর প্রান্তবর্তী মানের. শর্ত

শর্ত	চরম	অবম
প্রথম পর্যায়	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
দ্বিতীয় পর্যায়	$f_{xx}, f_{yy} < 0$ এবং $f_{xx}, f_{yy} > f_{xy}^2$	$f_{xx}, f_{yy} > 0$ এবং $f_{xx} . f_{yy} > f_{xy}^2$

২.৯ দ্বিঘাত রূপে দ্বিতীয় পর্যায়ের পূর্ণ অবকলকে প্রকাশ (Expressing second order total differential in a quadratic form)

(২.৭) নং সমীকরণ এর অবকল dx ও dy কে চল ধরে এবং আংশিক অন্তরকলজগুলিকে সহগ ধরে

$$u = dx,\ v = dy,\ a = f_{xx},\ b = f_{yy},\ h = f_{xy}\ (= f_{yx}) \qquad \text{............ (২.৮)}$$

এবার তাহলে (২.৭) কে একটি দ্বিঘাত সমীকরণরূপে প্রকাশ করা যায়।

$$q = au^2 + 2huv + bv^2 \qquad \text{........... (২.৭)}$$

q কে বলা হবে

নিশ্চিত ধনাত্মক (Positive definite)	যদি q দ্বিঘাত রূপের চলগুলির মান নির্বিশেষে (যেখানে সবগুলিই শূন্য নয়) অপরিবর্তনীয় ভাবে	ধনাত্মক (>0)
প্রায় নিশ্চিত ধনাত্মক (Positive semi definite)		অধনাত্মক (≥ 0) হয়।
প্রায় নিশ্চিত ঋনাত্মক (Negative semi definite)		অধনাত্মক (≤ 0)
নিশ্চিত ঋনাত্মক (Negative definite)		ঋনাত্মক (≤ 0)

যদি চলগুলির বিভিন্ন মানের জন্য q এর চিহ্ন পরিবর্তন হয় q কে বলা হয় অনিশ্চিত (indefinite) । এখানে মূল আলোচ্য হবে d^2z এর দুটি চিহ্ন যেখানে d^2z নিশ্চিত ধনাত্মক ও যেখানে d^2z নিশ্চিত ঋণাত্মক। প্রথমটি z এর চরম মান নির্ণয় করার জন্য আবশ্যক। সমীকরণ (২.৭) এ।

$$q = au^2 + 2huv + \frac{h^2v^2}{a} + bv^2 - \frac{h^2v^2}{a}$$

$$= a\left(u^2 + \frac{2huv}{a} + \frac{h^2}{a^2}v^2\right) + \left(b - \frac{h^2}{a}\right)v^2$$

$$= a\left(u + \frac{hv}{a}\right)^2 + \left(\frac{ab - h^2}{a}\right)v^2$$

এখানে u এবং v বর্গ হিসাবে রয়েছে বলে q এর চিহ্ন সম্পূর্ণভাবেই a, b এবং h এর মানের উপর নির্ভরশীল।

$$\left\{\begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix}\right\} \text{ এবং } ab - h^2 > 0 \text{ হলে এবং হলেই } q \text{ হবে } \left\{\begin{matrix} \text{নিশ্চিত ধনাত্মক} \\ \\ \text{নিশ্চিত ঋনাত্মক} \end{matrix}\right\} \quad \ldots(২.৯)$$

দুক্ষেত্রেই $ab - h^2 > 0$ । $ab - h^2 > 0$ মানে $ab > h^2$। $h^2 > 0$ (বর্গ বলে)। তাই $ab > 0$ হতে হবে। তার মানে a ও b উভয়ের একই চিহ্ন হতে হবে। [হয় দুটিই ধনাত্মক নয় দুটিই ঋণাত্মক হতে হবে।] (২.৭') কে নীচের প্রতিসম (symmetric) বর্গ (square) রূপে লেখা যায়।

$$q^2 = a(u^2) + h(uv)$$
$$+ h(uv) + b(u^2)$$

[এখানে বর্গরাশিগুলি আড়াআড়িভাবে কর্ণ (diagonal) বরাবর লেখা হবে ও 2huv কে দুটি সমান ভাগ করে কর্ণের বাইরে লেখা হবে।]

এর সহগগুলি একটি প্রতিসম আয়তক্ষেত্রাকারে (symmetric matrix form) সাজিয়ে ফেলা যায়—

$$q = [u\ v]\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

এই 2×2 সহগ আয়তক্ষেত্রের (coefficient matrix) ছক (determinant) $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$ কে লেখা হয় |D|।

(২.৯) কে এবার তাহলে লেখা যায় যে

$$\begin{Bmatrix} |a| > 0 \\ |a| < 0 \end{Bmatrix} \text{ এবং } \begin{Bmatrix} a & h \\ h & b \end{Bmatrix} > 0 \text{ হলে এবং হলেই}$$

$$q \begin{Bmatrix} \text{নিশ্চিত ধনাত্মক} \\ \text{নিশ্চিত ঋনাত্মক} \end{Bmatrix} \text{হবে।} \qquad \ldots\ldots (২.৯^{\prime})$$

$|a| = a$ হল $|D|$ ছকের উপছক (sub-determinant)। এটিকে প্রথম মুখ্য উপছক (first principal minor) $|D_1|$ বলা হয়। $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$ হল $|D|$। এর দ্বিতীয় মুখ্য উপছক $|D_2|$ (Second principal minor.)। এবার (২.৯´) ও (২.৮) ব্যবহার করে লেখা যায় যে

$$\begin{Bmatrix} f_{xx} > 0 \\ f_{xx} < 0 \end{Bmatrix} \text{ এবং } \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - fxy^2 > 0$$

হলে এবং হলেই $d^2z \begin{Bmatrix} \text{নিশ্চিত ধনাত্মক} \\ \text{নিশ্চিত ঋনাত্মক} \end{Bmatrix}$ হবে। এর থেকে এবার এটিও স্পষ্ট হচ্ছে কেন f_{xx} এবং f_{yy} এর চিহ্ন এক হতে হবে [সারণি ২.১ দ্রষ্টব্য]। দ্বিতীয় পর্যায়ের আংশিক অন্তরকলজের ছকটিকে বলা হয় হেসিয়ান ছক (Hessian determinant)। দুই বাছুই চলের ক্ষেত্রে এই ছকটি হবে—

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

উদাহরণ

$q = 5u^2 + 3uv + 2v^2$ কী নিশ্চিত ধনাত্মক বা ঋণাত্মক? এই প্রশ্নের উত্তর পেতে গেলে

$|a|$ ও $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$ দেখতে হবে।

এখানে $a = 5 > 0$

$$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 2.25 = 7.75 > 0।$$

অতএব q নিশ্চিত ধনাত্মক।

২.১০ n চলের ক্ষেত্রে এই সূত্রের প্রসারণ

যে সকল ক্ষেত্রে n বাছাই চল রয়েছে অর্থাৎ সেখানে $z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ সেখানে

$$dz = f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_2dx_2 + \ldots\ldots + f_x dx_n$$ ।

তাই প্রান্তবর্তী মানের জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত $dz = 0$ হতে গেলে প্রথম পর্যায়ের সবকটি অন্তরকলজকেই শূন্য হতে হবে।

দ্বিতীয় পর্যায়ের অবকল d^2z আবার দ্বিঘাত রূপ নেবে এবং তাকে $n \times n$ বিন্যাসে সাজানো যাবে। সেই বিন্যাসের সহগগুলিকে সঠিকভাবে সাজালে একটি প্রতিসম হেসিয়ান পাওয়া যাবে।

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots\ldots\ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots\ldots\ldots & f_{2n} \\ \\ f_{n_1} & f_{n_2} & \ldots\ldots\ldots & f_{n_n} \end{vmatrix}$$

এখান থেকে মুখ্য উপছক $|H_1|$, $|H_2|$, ……, $|H_n|$ পাওয়া যায়। এগুলির ভিত্তিতে প্রান্তবর্তী মানের বিভিন্ন শর্তগুলি নীচের সারণি নং (২.২) তে দেওয়া হল।

সারণি ২.২

$z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ এর প্রান্তবর্তী মানের শর্ত

শর্ত	চরম	অবম
প্রথম পর্যায়	$f_1 = f_2 = \ldots\ldots = f_n = 0$	$f_1 = f_2 = \ldots\ldots = f_n = 0$
দ্বিতীয় পর্যায়	$\|H_1\| < 0$; $\|H_2\| > 0$; $\|H_3\| < 0$ ……… (d^2z নিশ্চিত ঋণাত্মক)	$\|H_1\|, \|H_2\|, \|H_3\|, \ldots\ldots, \|H_n\| > 0$ (d^2z নিশ্চিত ধনাত্মক)

উদাহরণস্বরূপ ৩টি বাছাই চলের একটি অপেক্ষক নেওয়া হল। ধরা যাক $z = 2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + 2$। z এর প্রান্তবর্তী মানের জন্য প্রথম আংশিক অন্তরকলজ $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ হওয়া আবশ্যক।

অর্থাৎ
$$f_1 = 4x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$f_2 = x_1 + 8x_2 = 0$$
$$f_3 = x_1 + 2x_3 = 0$$

এই সমীকরণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ তাই সহগ আয়তক্ষেত্রের ছকটি বিলুপ্ত হয়না। অতএব এর একমাত্র সমাধান $\overline{x_1} = \overline{x_2} = \overline{x_3} = 0$। তাই $z = 2$ হবে একটি অনড় মান।

এর
$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

এর $|H_1| = 4 > 0$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 31 > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4(16) - 1(2) + 1(-8)$$
$$= 64 - 2 - 8$$
$$= 54 > 0$$

অতএব নিয়ম অনুসারে $\overline{z} = 2$ হবে অবম।

২.১১ কয়েকটি অর্থনৈতিক উদাহরণ

উদাহরণ ১

পূর্ণ প্রতিযোগিতামূলক বাজারের এমন একটি প্রতিষ্ঠানের কথা আলোচনা করা হচ্ছে যার উৎপাদিত পণ্যের সংখ্যা দুটি। এখানে পণ্যদুটির দাম বাইরে থেকে দেওয়া থাকবে এবং যথাক্রমে P_{10} ও P_{20} বলা হবে। প্রতিষ্ঠানটির মোট আয় অপেক্ষক (Total revenue function) $R = P_{10}Q_1 + P_{20}Q_2$

Q_i — i-তম পণ্যের সময়ভিত্তিক উৎপাদন।

প্রতিষ্ঠানটির ব্যয় অপেক্ষক (cost function) $c = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$ । প্রান্তিক ব্যয় (Marginal cost) $\frac{\partial c}{\partial Q_1} = 4Q_1 + Q_2$— অতএব প্রথম পণ্যটির জন্য প্রান্তিক ব্যয় কিন্তু দ্বিতীয় পণ্যটিরও অপেক্ষক। একইভাবে দ্বিতীয় পণ্যটির প্রান্তিক ব্যয় শুধুমাত্র দ্বিতীয় পণ্যটিরই নয় প্রথম পণ্যটিরও অপেক্ষক। এই প্রতিষ্ঠানটির মুনাফা অপেক্ষক (Profit function) $\pi = R - C = P_{10}Q_1 + P_{20}Q_2 - 2Q_1^2 + Q_1Q_2 - 2Q_2^2$ । এখান থেকে Q_1 ও Q_2 এর সেই মাত্রাগুলি বের করতে হবে যার জন্য মুনাফা সর্ববৃহৎ হবে। তার জন্য মুনাফা অপেক্ষকের প্রথম আংশিক অন্তরকলজ দুটি বের করতে হবে।

$$\pi_1 \left(\equiv \frac{\partial \pi}{\partial Q_1}\right) = P_{10} - 4Q_1 - Q_2$$

.... (২.১০)

$$\pi_2 \left(\equiv \frac{\partial \pi}{\partial Q_2}\right) = P_{20} - Q_1 - 4Q_2$$

π এর চরম মানের জন্য π_1 ও π_2 দুটিই শূন্য হওয়া প্রয়োজন।

অর্থাৎ $\pi_1 = P_{10} - 4Q_1 - Q_2 = 0$

অথবা $4Q_1 + Q_2 = P_{10}$ .... (২.১০ ক)

এবং $\pi_2 = P_{20} - Q_1 - 4Q_2 = 0$

অথবা $Q_1 + 4Q_2 = P_{20}$ .... (২.১০ খ)

(২.১০ ক) ও (২.১০ খ) কে সমাধান করার জন্য (ক) কে 4 দিয়ে গুণ করে তার থেকে (r) বিয়োগ করে।

$$16Q_1 + 4Q_2 = 4P_{10}$$

$$Q_1 + 4Q_2 = P_{20}$$

$$15Q_1 \qquad = 4P_{10} - P_{20}$$

অথবা $\overline{Q_1} = \dfrac{4P_{10} - P_{20}}{15}$

আবার (খ) কে 4 দিয়ে গুণ করে তাকে (ক) থেকে বিয়োগ করে

$$4Q_1 + Q_2 \quad = P_{10}$$

$$4Q_1 + 16Q_2 = 4P_{20}$$

$$-15Q_2 \qquad = P_{10} - 4P_{20}$$

অথবা $\overline{Q_2} = \dfrac{4P_{20} - P_{10}}{15}$

এবার P_{10} ও P_{20} এর মান জানা থাকলে $\overline{Q_1}$ ও $\overline{Q_2}$ সহজেই বের করা সম্ভব হবে। ধরা যাক $P_{10} = 12$ ও $P_{20} = 18$। তাহলে

$$\overline{Q_1} = \frac{48 - 18}{15} = 2$$

এবং $\overline{Q_2} = \dfrac{72 - 12}{15} = 4$ ।

$\overline{Q_1} = 2$ ও $\overline{Q_2} = 4$ হলে

$\pi = 12\,(2) + 18(4) - 2(2)^2 - 2(4) - 2(4)^2$ ।

$= 24 + 72 - 8 - 8 - 32 = 48$ ।

এটি মুনাফার প্রান্তবর্তী মান নিঃসন্দেহে কারণ প্রথম আংশিক অন্তরকলজগুলি দেখা হয়েছে কিন্তু এটিই যে চরম তা বোঝার জন্য দ্বিতীয় আংশিক অন্তরকলজের হেসিয়ানটি দেখতে হবে।

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H_1| = -4 < 0 \\ |H_2| = 16 - 1 = 15 > 0 \end{array}\right\}$$ অতএব এটিই মুনাফার চরম মান।

উদাহরণ ২

উপরের আলোচনাটি এবার একচেটিয়া বাজারের পরিপ্রেক্ষিতে করা যাক। একচেটিয়া বাজারে পণ্যের দাম আর বাইরে থেকে নির্ধারিত থাকবেনা—উৎপাদনের মাত্রার উপর নির্ভরশীল হবে। ধরা যাক একচেটিয়া কারবারীর পণ্যগুলির জন্য চাহিদা অপেক্ষকগুলি হল

$$Q_1 = 40 - 2P_1 + P_2$$

$$\text{এবং } Q_2 = 15 + P_1 - P_2 \qquad \ldots\ldots\ldots (২.১১)$$

এর থেকে বোঝা যাচ্ছে যে পণ্যদুটিকে পরিবর্ত দ্রব্য (substitutes) হিসাবে ধরা যায় কারণ যে কোনো একটির দাম বাড়লে অন্যটির চাহিদা বাড়ে। (২.১১) কে কিছুটা পরিবর্তন করে নীচে লেখা হল।

$$Q_1 - 40 = -2P_1 + P_2 \qquad (২.১১ ক)$$

$$\text{এবং} \quad Q_2 - 15 = P_1 - P_2 \qquad (২.১১ খ)$$

Q_1 ও Q_2 কে নির্দিষ্ট ধ্রুবক ধরে P_1 এবং P_2 এর মান নির্ণয় করা সম্ভব। (২.১১ ক) ও (২.১১ খ) যোগ করে

$$Q_1 + Q_2 - 55 = -P_1$$

$$\text{অথবা } P_1 = 55 - Q_1 - Q_2$$

এবার (২.১১ ক) তে P_1 এর মান প্রতিস্থাপন করলে P_2 এর মান নির্ণয় করা যাবে।

$$Q_1 - 40 = -2P_1 + P_2$$

$$\text{অথবা } P_2 = Q_1 - 40 + 2P_1$$

$$= Q_1 - 40 + 2(55 - Q_1 - Q_2)$$

$$= Q_1 - 40 + 110 - 2Q_1 - 2Q_2$$

$$= 70 - Q_1 - 2Q_2$$

অতএব $P_1 = 55 - Q_1 - Q_2$

এবং $P_2 = 70 - Q_1 - 2Q_2$ .... (২.১১´)

আগেই জানা আছে যে গড় আয় AR সর্বদা দামের সঙ্গে সমান। সুতরাং (২.১১´) কে গড় আয় অপেক্ষকও বলা যায়।

প্রতিষ্ঠানের মোট আয় অপেক্ষক

$$R = P_1Q_1 + P_2Q_2$$
$$= (55 - Q_1 - Q_2)\,Q_1 + (70 - Q_1 - 2Q_2)\,Q_2$$
$$= 55Q_1 - Q_1^2 - Q_2Q_1 + 70Q_2 - Q_1Q_2 - 2Q_2^2$$
$$= 55Q_1 - Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 70Q_2 - 2Q_2^2$$

ধরা যাক মোট ব্যয় অপেক্ষক

$$C = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$$

তাহলে মুনাফা অপেক্ষক হবে

$$\pi = R - C = 55Q_1 - Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 70Q_2 + 70Q_2 - 2Q_2^2 - Q_1^2 - Q_1Q_2 - Q_2^2$$
$$= 55Q_1 - 2Q_1^2 - 3Q_1Q_2 + 70Q_2 - 3Q_2^2 \qquad ....(২.১২)$$

এটিই হবে লক্ষ্য অপেক্ষক।

এখান থেকে আংশিক অন্তরকলজগুলি বের করে দেখা যাচ্ছে

$$\pi_1 = 55 - 4Q_1 - 3Q_2$$
$$\pi_2 = -3Q_1 + 70 - 6Q_2$$
$$\pi_{11} = -4,\ \pi_{12} = -3,\ \pi_{21} = -3,\ \pi_{22} = -6$$

π এর চরম মান বের করার জন্য $\pi_1 = \pi_2 = 0$ হওয়া আবশ্যক।

তার অর্থ $55 - 4Q_1 - 3Q_2 = 0$

অথবা $55 = 4Q_1 + 3Q_2$

এবং $70 - 3Q_1 - 6Q_2 = 0$

অথবা $70 = 3Q_1 + 6Q_2$

সমাধান

π_1 কে 2 দিয়ে গুণ করলে এবং তার থেকে π_2 বিয়োগ দিলে

$$\begin{array}{r} 110 = 8Q_1 + 6Q_2 \\ 70 = 3Q_1 + 6Q_2 \\ \hline 40 = 5Q_1 \end{array}$$

.... (২.১১)

অথবা $\overline{Q_1} = 8$

আবার π_1 কে 3 এবং π_2 কে 4 দিয়ে গুণ করে প্রথমটির থেকে দ্বিতীয়টি বিয়োগ করলে

$$\begin{array}{r} 165 = 12Q_1 + 9Q_2 \\ 280 = 12Q_1 + 24Q_2 \\ \hline -115 = \quad -15Q_2 \end{array}$$

অথবা $Q_2 = \frac{115}{15} = 7\frac{2}{3}$

অতএব $(\overline{Q_1}, \overline{Q_2}) = (8, 7\frac{2}{3})$ হল এর সমাধান। এর থেকে এবার P_1, P_2 বের করতে হবে।

$$P_1 = 55 - Q_1 - Q_2 = 55 - 8 - 7\tfrac{2}{3} = 39\tfrac{1}{3}$$

$$P_2 = 70 - Q_1 - 2Q_2 = 70 - 8 - 15\tfrac{1}{3} = 46\tfrac{2}{3}$$

$$\overline{\pi} = 55(8) - 2(8)^2 - 3\left(8.\ 7\tfrac{2}{3}\right) + 70\left(7\tfrac{2}{3}\right) - 3\left(7\tfrac{2}{3}\right)^2$$

$$= 440 - 128 - 184 + 536\tfrac{2}{3} - 176\tfrac{1}{3}$$

$$= 488\tfrac{1}{3} \text{ ।}$$

এর হেসিয়ানটি হল $= \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} |H_1| = -4 < 0 \\ |H_2| = 15 > 0 \end{array}$

তার অর্থ $\overline{\pi}$ ই π এর চরম মান।

বিভেদাত্মক মূল্যনীতি (Price discrimination)

একপণ্য বিশিষ্ট প্রতিষ্ঠানেও কিন্তু সর্বাপেক্ষা অনুকূল অবস্থা নির্ধারণ করার প্রশ্ন উঠতে পারে। এই প্রতিষ্ঠানের একচেটিয়া কারবারী যদি একাধিক ভিন্ন বাজারে তার পণ্য বিক্রয় করে তাহলে সেই বাজারগুলির মধ্যে কিভাবে তার মোট পণ্য ভাগ করে যোগান দেবে যাতে মুনাফা সর্ববৃহৎ হয় সেটাই হবে মূল প্রশ্ন। Q_i হল i তম বাজারে যোগান দেওয়া পণ্যের পরিমাপ। ভিন্ন ভিন্ন বাজারে সাধারণতঃ চাহিদা অপেক্ষক আলাদা এবং যদি চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা ভিন্ন ভিন্ন হয় তবেই মুনাফা সর্ববৃহৎ করার জন্য বিভেদাত্মক মূল্যনীতির আশ্রয় নিতে হবে।

উদাহরণ ৩

উদাহরণস্বরূপ যে কারবারীটিকে নেওয়া হচ্ছে ধরা যাক যে তিনটি বাজারে পণ্য বিক্রয় করে। তার মোট আয় অপেক্ষক

$$R = R_1(Q_1) + R_2(Q_2) + R_3(Q_3)$$

R_i—i তম বাজারের আয় অপেক্ষক।

মোট ব্যয় অপেক্ষক

$$C = C(Q) \quad [\text{ এখানে } Q = Q_1 + Q_2 + Q_3\ ]$$

অর্থাৎ মোট ব্যয় মোট উৎপাদনের অপেক্ষক কারণ সমস্ত পণ্যই একটি প্রতিষ্ঠানে উৎপাদিত হচ্ছে।

মুনাফা অপেক্ষক $\pi = R_1(Q_1) + R_2(Q_2) + R_3(Q_3) - C(Q)$

প্রথম আংশিক অন্তরকলজ $\pi_i = \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_i}$ $(i = 1, 2, 3)$

$$\left.\begin{cases} \pi_1 = R_1'(Q_1) - C'(Q)\dfrac{\partial Q}{\partial Q_1} = R_1'(Q_1) - C'(Q) \text{ [কারণ } \partial Q/\partial Q_1 = 1] \\ \pi_2 = R_2'(Q_2) - C'(Q)\dfrac{\partial Q}{\partial Q_2} = R_2'(Q_2) - C'(Q) \text{ [কারণ } \partial Q/\partial Q_2 = 1] \\ \pi_3 = R_3'(Q_3) - C'(Q)\dfrac{\partial Q}{\partial Q_3} = R_3'(Q_3) - C'(Q) \text{ [কারণ } \partial Q/\partial Q_3 = 1] \end{cases}\right\} \quad \text{......(২.১৩)}$$

তিনটি আংশিক অন্তরকলজই যদি শূন্য হয় তাহলে

$$C'(Q) = R_1'(Q_1) = R_2'(Q_2) = R_3'(Q_3)$$

অর্থাৎ প্রান্তিক ব্যয় MC = প্রথম বাজারের প্রান্তিক **আয় MR_1 =** দ্বিতীয় বাজারের প্রান্তিক আয় MR_2 = তৃতীয় বাজারের প্রান্তিক আয় MR_3।

অতএব Q_1, Q_2, Q_3 এর মান এমনভাবে বাছাই করতে হবে যাতে প্রান্তিক ব্যয় প্রতিটি বাজারের প্রান্তিক আয়ের সঙ্গে সমান হয়।

এখন প্রতিটি বাজারে মোট আয় $R_i = P_iQ_i$

$$MR_i = P_i \frac{dQ_i}{dQ_i} + Q_i \frac{dP_i}{dQ_i}$$

$$= P_i \left(1 + \frac{Q_i}{P_i}\frac{dP_i}{dQ_i}\right)$$

$$= P_i \left(1 + \frac{1}{Ed_i}\right) = P_i \left(1 - \frac{1}{|Ed_i|}\right) \qquad (২.১৪)$$

এখানে Ed_i হল i তম বাজারে চাহিদার দামগত স্থিতিস্থাপকতা যা সাধারণত ঋণাত্মক।

$|Ed_i| < 1$ (চাহিদা অস্থিতিস্থাপক) হলে $MR_i < 0$ হবে, $|Ed_i| = 1$ হলে $MR_i = 0$ হবে। একমাত্র $|Ed_i| > 1$ হলেই $|MR_i| > 0$ হবে। যদি $MC > 0$ হয় তবে প্রতিষ্ঠানটির Q_i উৎপাদন এমন হতে হবে যাতে $MR_i > 0$—অর্থাৎ যেখানে চাহিদার বিন্দু স্থিতিস্থাপকতা একের চেয়ে বেশি। প্রথম পর্যায়শর্ত $MR_1 = MR_2 = MR_3$ কে

$$= P_1\left(1 - \frac{1}{|Ed_1|}\right) = P_2\left(1 - \frac{1}{|Ed_2|}\right) = P_3\left(1 - \frac{1}{|Ed_3|}\right)$$ লেখা যায়।

এখান থেকে স্পষ্ট বোঝা যাচ্ছে যে মুনাফা সর্ববৃহৎ করার জন্য পণ্যের নির্ধারিত পরিমাপে যে বাজারে $|Ed|$ যত ছোট সেই বাজারে দাম তত বেশি নিতে হবে। তার মানে কারবারীটিকে বিভেদাত্মক মূল্যনীতির আশ্রয় নিতে হবে। (২.১৩) থেকে দ্বিতীয় আংশিক অন্তরকলজগুলি নির্ণয় করা যায়।

$$\pi_{11} = R_1''(Q_1) - C''(Q)\frac{\partial Q}{\partial Q_1} = R_1''(Q_1) - C''(Q) \quad [\text{কারণ } \frac{\partial Q}{\partial Q_1} = 1]$$

একইভাবে

$$\pi_{22} = R_2''(Q_2) - C''(Q)$$

$$\pi_{33} = R_3''(Q_3) - C''(Q)$$

$\pi_{12} = \pi_{13} = \pi_{21} = \pi_{23} = \pi_{31} = \pi_{32} = -C''(Q)$ [যেহেতু $\frac{\partial Q}{\partial Q_i} = 1$]

তার হেসিয়ান হল

$$\begin{vmatrix} R_1''-C'' & -C'' & -C'' \\ -C'' & R_2''-C'' & -C'' \\ -C'' & -C'' & R_3''-C'' \end{vmatrix}$$

চরম হওয়ার জন্য ∂। $|H_1| < 0$ হওয়া আবশ্যক অর্থাৎ $R_1'' - C'' < 0$ হওয়া আবশ্যক। তার মানে প্রান্তিক আয় অপেক্ষক MR এর ঢাল প্রান্তিক ব্যয় অপেক্ষক MC এর ঢালের চেয়ে ছোট হবে। এখানে প্রথম বাজারের ক্ষেত্রে শর্তটি দেখানো হল কিন্তু যে কোনো একটি বাজারকেই প্রথম বাজার ধরা যায় তাই $R_2'' - C'' < 0$ এবং $R_3'' - C'' < 0$ শর্ত দুটিও এর মধ্যে থেকেই বেরিয়ে আসবে।

(২) $|H_2| > 0$ হওয়া আবশ্যক অর্থাৎ

$$(R_1'' - C'')(R_2'' - C'') - (C'')^2 > 0$$

অথবা $R_1'' R_2'' - C''R_2'' - C''R_1'' + (C'')^2 - (C'')^2 > 0$

অথবা $R_1'' R_2'' - (R_1'' + R_2'') C'' > 0$

(৩) $|H_3| < 0$ হওয়া আবশ্যক অর্থাৎ

$$(R_1'' - C'') [(R_2'' - C'')(R_3'' - C'') - (C'')^2] - (-C'') [(-C'')(R_3'' - C'') - (-C'')^2] + (-C'') [(-C'')^2 - (-C'')(R_2'' - C'')] < 0$$

অথবা $(R_1'' - C'') [R_2''R_3'' - C''R_3'' - C''R_2'' + (C'')^2 - (C'')^2] + C'' [-C''R_3'' + (C'')^2 - (C'')^2] + (-C'') [(C'')^2 + R_2''C'' - (C'')^2] < 0$

অথবা, $R_1''R_2''R_3'' - C''R_2''R_3'' - C''R_1''R_3'' + (C'')^2 R_3'' - C''R_1''R_2'' + (C'')^2 R_2'' - (C'')^2 R_3'' - (C'')^2 R_2'' < 0$

অথবা $R_1''R_2''R_3'' - C'' [R_1''R_2'' + R_2''R_3'' + R_1''R_3''] < 0$

প্রথম পর্যায় শর্ত পূরণ হলে উপরের এই তিনটি শর্তই হবে মুনাফা সর্ববৃহৎ করার জন্য যথেষ্ট।

২.১২ নিয়ন্ত্রণ সাপেক্ষে সর্বাপেক্ষা অনুকূল অবস্থা নির্ধারণ (Contrained Optimisation)

মুক্ত অবস্থায় সর্বাপেক্ষা অনুকূল অবস্থা যখন নির্ধারিত হয়েছিল তখন বাছাই চলগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ ছিল। উদাহরণস্বরূপ দুই পণ্যবিশিষ্ট প্রতিষ্ঠানটির কথা ধরা যাক। সেখানে Q_1 ও Q_2 পরস্পর নিরপেক্ষভাবে নির্ধারিত হয়েছিল। এবার মনে করা যাক কোনোভাবে প্রতিষ্ঠানটির মোট উৎপাদনের উপর নিয়ন্ত্রণ আরোপ করে তা 950 এ বেঁধে দেওয়া হল। এক্ষেত্রে বাছাই চলগুলির নিরপেক্ষতা আর থাকবেনা। একটি নির্ধারিত হলেই অন্যটিও নির্ধারিত হয়ে যাবে। বাছাই চলের নিরপেক্ষতা না থাকলে সেই অবস্থায় সর্বাপেক্ষা অনুকুল অবস্থা নির্ণয় করার জন্য নিয়ন্ত্রিত সর্বাপেক্ষা অনুকূল অবস্থা নির্ণায়ক পদ্ধতি (contrained optimisation technique) ব্যবহৃত হয়।

এবার এই নিয়ন্ত্রণের প্রভাবে কী হয় তা আলোচনা করা যাক। এজন্য একজন ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষক।

$u = x_1x_2 + 2x_1$ (২.১৫) নেওয়া হল।

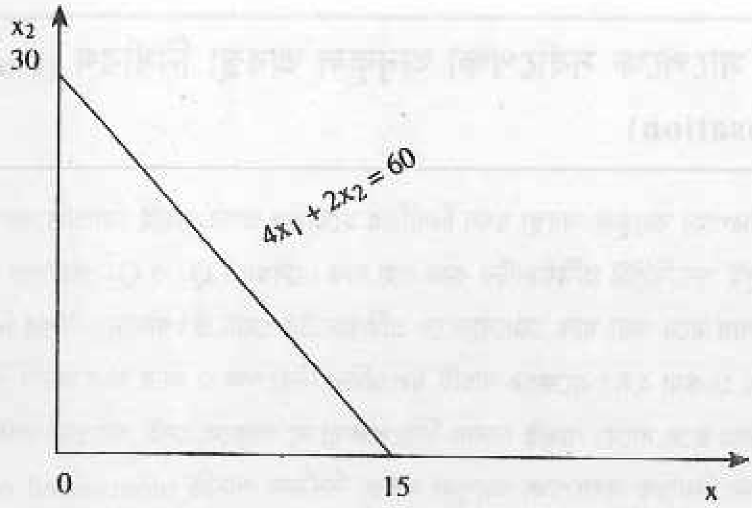
$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 + 2$$

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1$$

x_1 এবং x_2 এর সমস্ত ধনাত্মক মানের জন্যই u_1 এবং u_2 ধনাত্মক। অনিয়ন্ত্রিতভাবে u কে সর্বাধিক করার জন্য ভোক্তাকে x_1 এবং x_2 এর ক্রয় কেবলই বাড়িয়ে যেতে হবে—অর্থাৎ কোনো সুনির্দিষ্ট x_1 ও x_2 পাওয়া যাচ্ছেনা যার জন্য u সর্ববৃহৎ। কিন্তু এখানে মনে রাখা দরকার যে এরকম কোনো সমাধান বাস্তবে পাওয়া সম্ভব নয় কারণ ভোক্তার ক্রয়ক্ষমতা সর্বদাই সীমাবদ্ধ। যদি ধরা যায় যে সে মোট 60 টাকা খরচ করতে পারে এবং বাজারের বর্তমান $P_{10} = 4$ টাকা ও $P_{20} = 2$ টাকা তাহলে বাজেট রেখাটি হবে

$$4x_1 + 2x_2 = 60 \qquad \text{............(২.১৬)}$$

এই নিয়ন্ত্রণের ফলে $\overline{x_1}$ ও $\overline{x_2}$ এর নির্বাচন পরস্পর নির্ভরশীল হবে। এবার (২.১৬) এর সাপেক্ষে (২.১৫) এর সর্ববৃহৎ মান বের করতে হবে। এই নিয়ন্ত্রণ আরোপের ফলে লক্ষ্য অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল ছোট হয়ে যায়। (২.১৫) এর সংজ্ঞার অঞ্চল হবে। $\{ (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \}$। রেখাচিত্র নং (২.১০) তে এটি হল সম্পূর্ণ অঋণাত্মক পাদটি (non-negative quadrant)।



রেখাচিত্র নং ২.১০

এবার (২.১৬) বা বাজেট নিয়ন্ত্রণটি যোগ করার ফলে শুধু সেই সকল মানই ধরা যাবে যেগুলি ঐ বাজেট সমীকরণটি সন্তুষ্ট করে। অতএব রেখাচিত্র (২.১০) এ সংজ্ঞার অঞ্চল হবে বাজেট রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলি। এর ফলে লক্ষ্য অপেক্ষকের প্রসারটিও বদলাবে। উপযোগগুলোর **(utility plane)** যে অংশটি বাজেট রেখার সরাসরি উপরে অবস্থিতশুধু সেটুকুই এবার গুরুত্ব পাবে।

অনড় মান নির্ধারণ

$$x_2 = \frac{60 - 4x_1}{2} = 30 - 2x_1 \qquad \text{............(২.১৬')}$$

(২.১৬') থেকে x_2 এর মান (২.১৫) তে প্রতিস্থাপন করে

$$u = x_1(30 - 2x_1) + 2x_1 = 32x_1 - 2x_1^2$$

এখানে প্রথম অন্তরকলজ $\frac{du}{dx_1} = 32 - 4x_1$

u এর চরম মানের জন্য $\frac{du}{dx_1} = 0$ হতে হবে অথবা $32 - 4x_1 = 0$

অথবা $x_1 = 8$

তাহলে $x_2 = 30 - 16 = 14$

দ্বিতীয় অন্তরকলজ $\frac{d^2u}{dx_1^2} = -4 < 0$ । অতএব $(x_1 = 83x_2 = 14)$ এর জন্য u এর যে অনড় মান পাওয়া যাচ্ছে তা চরম।

$$\overline{u} = x_1x_2 + 2x_1$$
$$= (8)(14) + (2)(8)$$
$$= 112 + 16 = 128$$

এই উদাহরণে ব্যাপারটি যত সহজ যদি নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকটি জটিল হয় বা একাধিক নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষক থাকে সেখানে এই প্রতিস্থাপন পদ্ধতি খুব সুবিধাজনক হয়না। সেসকল ক্ষেত্রে ল্যাগ্রাঞ্জ (অনির্ণীত) গুণক [Lagrange (undetermined) multiplier] পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়।

২.১৩ ল্যাগ্রাঞ্জ গুণক পদ্ধতি (Lagrange multiplier method)

এই পদ্ধতিতে নিয়ন্ত্রিত প্রান্তবর্তী মান নির্ধারণের সমস্যাকে এমন একটি রূপে পরিবর্তিত করা হয় যাতে অনিয়ন্ত্রিত প্রান্তবর্তী মান নির্ধারণের প্রথম পর্যায় শর্ত প্রয়োগ করা যায়।

$4x_1 + 2x_2 = 60$ এর সাপেক্ষে $u = x_1x_2 + 2x_1$ এর চরম মান নির্ণয় করার জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের অপেক্ষকটি (Lagrangean function) প্রথমে লিখতে হবে। সেটি হল

$Z = x_1x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$ ....(২.১৭) । λ (ল্যামদা) একটি গ্রীক্ অক্ষর। এই λই হল ল্যাগ্রাঞ্জ্ গুণক। যদি এ বিষয়ে নিশ্চিত থাকা যায় যে $4x_1 + 2x_2 = 60$ সমীকরণটি সন্তুষ্ট হচ্ছেই তাহলে λ এর মান নির্বিশেষে (২.১৭) এর শেষ রাশিটি শূন্য হবে। সেক্ষেত্রে z এবং u একেবারেই সমান হবে। এবার u এর নিয়ন্ত্রিত চরমমান না খুঁজে Z এর মুক্ত চরম মান খুঁজতে হবে। (২.১৭) তে বন্ধনীর ভিতরকার অংশটিকে শূন্যে পরিণত করার জন্য λকে একটি বাড়তি চল হিসাবে ধরা হবে। তার মানে $Z = Z(\lambda, x_1, x_2)$। এবার মুক্ত প্রান্তিক মানের প্রথম পর্যায় শর্তগুলি হল—

$$Z_\lambda\left(\equiv \frac{dz}{d\lambda}\right) = 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0 \text{..............} (ক)$$

$$Zx_1\left(\equiv \frac{dz}{dx_1}\right) = x_2 + 2 - 4\lambda = 0 \text{..............} (খ) \qquad (২.১৮)$$

$$Zx_2\left(\equiv \frac{dz}{dx_2}\right) = x_1 - 2\lambda = 0 \text{..................} (গ)$$

প্রথম সমীকরণটি থেকে পরিষ্কার যে নিয়ন্ত্রণের শর্তটি পূরণ হচ্ছে।

সমীকরণগুলি সমাধান করে x_1, x_2 ও λ নির্ণয় করা যায়। (২.১৮ক) থেকে

$$60 - 4x_1 - 2x_2 = 0$$

অথবা $x_1 = \dfrac{60 - 2x_2}{4} = \dfrac{30 - x_2}{2}$

আবার (২.১৮গ) থেকে $x_1 = 2\lambda$

অতএব $\lambda = \dfrac{30 - x_2}{4}$

আবার (২.১৮খ) থেকে

$$x_2 + 2 - 4\lambda = 0$$

অথবা $x_2 + 2 = 4\lambda = 4\left(\dfrac{30 - x_2}{4}\right)$

$= 30 - x_2$

অথবা $x_2 = 14$

$$x_1 = \frac{30 - x_2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\lambda = \frac{x_2 + 2}{4} = 4$$

অতএব $\overline{x_1} = 8$, $\overline{x_2} = 14$ এবং $\lambda = 4$। আগের প্রতিস্থাপন পদ্ধতির থেকে প্রাপ্ত $\overline{x_1}$ এবং $\overline{x_2}$ এর মান ও ল্যাগ্রাঞ্জ গুণকের মাধ্যমে প্রাপ্ত $\overline{x_1}$ এবং $\overline{x_2}$ এর মানের সঙ্গে সমান।

$$\overline{z} = (8)(14) + (2)(8) + 4[60 - (4)(8) - (2)(14)]$$

$$= 112 + 16 + 4(0) = 128$$

এটিও $\overline{u}$ এর মানের সঙ্গে সমান। সুতরাং প্রতিস্থাপন পদ্ধতির পরিবর্তে এই পদ্ধতিটি প্রয়োগ করলে সমাধান কোনো ভাবেই পরিবর্তিত হচ্ছে না।

সাধারণভাবে লক্ষ্য অপেক্ষক $z = f(x, y)$ ......(২.১৯) এবং নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষক $g(x, y) = c$ [c ধ্রুবক] (২.২০) হলে ল্যাগ্রাঞ্জের অপেক্ষকটিকে

$Z = f(x, y) - \lambda[c - g(x, y)]$ (২.২১) লেখা যায়।

Z এর অনড় মানের জন্য প্রয়োজনীয় শর্তগুলি হল

$$Z_\lambda = C - g(x, y) = 0$$

$$Z_x = f_x - \lambda g_x = 0 \qquad \ldots\ldots (২.২২)$$

$$Z_y = f_y - \lambda g_y = 0$$

প্রথম সমীকরণটি নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকটিকেই অন্যভাবে লেখা তাই ল্যাগ্রাঞ্জের অপেক্ষক z এর অনড় মান আদিম অপেক্ষক z এর নিয়ন্ত্রণের শর্তটি পূরণ করবে। তাহলে নিশ্চিতভাবে $\lambda\,[c - g(x, y)\,] = 0$ হবে। এবং z এর অনড় মান (২.২০) নিয়ন্ত্রণ সাপেক্ষে (২.১৯) এর z এর অনড় মানের সঙ্গে সমান হবে।

একটি উদাহরণ নিলে বিষয়টি আরও পরিষ্কার হবে।

উদাহরণ ১

$x + y = 6$ এর সাপেক্ষে $z = xy$ এর প্রান্তবর্তী মান নির্ধারণ করতে হবে। এক্ষেত্রে ল্যাগ্রাঞ্জের অপেক্ষক

$$Z = xy + \lambda\,(6 - x - y)$$

z এর অনড় মানের জন্য

$$Z_\lambda = 6 - x - y = 0 \qquad \text{অথবা} \quad x + y = 6$$

$$Z_x = y - \lambda = 0 \qquad \text{অথবা} \quad -\lambda + y = 0$$

$$Z_y = x - \lambda = 0 \qquad \text{অথবা} \quad -\lambda + x = 0$$

এখান থেকে

$$\overline{x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(-6)\,(+1) + (1)\,(0)}{(-1)\,(+1) + (1)\,(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

আবার y কত তা দেখা যাক।

$$\overline{y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)(0) + 6(-1)}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

আবার $\lambda = 3$ [যেহেতু $x = \lambda$] ।

তার মানে সমীকরণগুলি সমাধান করে $\overline{x} = 3$, $\overline{y} = 3$ এবং $\lambda = 3$ পাওয়া যাচ্ছে। অতএব $\overline{Z} = \overline{z} = 9$।

২.১৪ পূর্ণ-অবকল-পদ্ধতি (Total differential Method)

$z = f(x, y)$ এর মুক্ত প্রান্তবর্তী মান বের করার ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় শর্ত ছিল।

$$dz = f_x d_x + f_y d_y = 0 \qquad \text{...... (২.২৩)}$$

এবার নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষক $g(x, y) = c$ কে যোগ করা হল। এখন আর dx, dy যা কিছু হতে পারবেনা কারণ $g(x, y) = c$ হলে $dg = dc = 0$ হবে [কারণ c ধ্রুবক]।

$$dg = g_x d_x + g_y d_y = 0 \qquad \text{...... (২.২৪)}$$

তাই dx ও dy পরস্পর নির্ভরশীল।

$$dz = f_x d_x + f_y d_y = 0$$

অর্থাৎ $f_x d_x = -f_y d_y$

অথবা $-\frac{f_x}{f_y} = \frac{dy}{dx}$

আবার $dg = g_x d_x + g_y d_y = 0$

অর্থাৎ $g_x d_x = -g_y d_y$

অথবা $-\frac{g_x}{g_y} = \frac{dy}{dx}$

অতএব $\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y}$

অথবা $\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$ ...... (২.২৫)

(২.২৫) ও নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষক $g(x, y) = c$ হল দুটি সমীকরণ যার থেকে x ও y এর বিশিষ্ট মান পাওয়া যাবে।

পূর্ণ অবকল পদ্ধতি আর ল্যাগ্রাঞ্জ গুণক পদ্ধতির থেকে কী একই প্রথম পর্যায় শর্ত পাওয়া যায়?

(২.২২) দেখলে বিষয়টি বুঝতে সহজ হবে। (২.২২) এর প্রথম সমীকরণটি নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকেরই ভিন্ন রূপ। (২.২৫) এই শর্তটিই পূরণ হচ্ছে। (২.২২) এর বাকী দুটি সমীকরণ একটু অন্যভাবে সাজিয়ে লিখলে

$\frac{f_x}{g_x} = \lambda$ এবং $\frac{f_y}{g_y} = \lambda$ ....(২.২৫´)

অর্থাৎ $\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$ । সুতরাং এটি পূর্ণ অবকল পদ্ধতির মত একই প্রথম পর্যায় শর্ত দিচ্ছে। পূর্ণ অবকল পদ্ধতি থেকে অবশ্য শুধুমাত্র $\overline{x}$ ও $\overline{y}$ নির্ধারণ করা যায় কিন্তু ল্যাগ্রাঞ্জ গুণক পদ্ধতিতে λ এর মানও নির্ণয় করা যায়।

২.১৫ ল্যাগ্রাঞ্জ গুণকের ব্যাখ্যা (Interpretation of Lagrange multiplier)

$\overline{z}$ বা z এর সর্বাপেক্ষা অনুকূল মানটি $\overline{x}$, $\overline{y}$ ও $\overline{\lambda}$ এর মানের উপর নির্ভরশীল।

এর কারণ $\overline{z} = f(\overline{x}, \overline{y}) + \overline{\lambda}\,[c - g(\overline{x}, \overline{y})]$ ...... (২.২৬)

$\overline{z}$ কে c এর সাপেক্ষে অবকলন করে

$$\frac{d\bar{z}}{dc} = f_x \frac{d\bar{x}}{dc} + f_y \frac{d\bar{y}}{dc} + \frac{d\bar{\lambda}}{dc} \left[c - g(\bar{x}, \bar{y}) \right]$$

$$+ \bar{\lambda} \left[1 - g_x \frac{d\bar{x}}{dc} - g_y \frac{d\bar{y}}{dc} \right]$$

[এখানে $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(c)$, $\bar{x} = \bar{x}(c)$ এবং $\bar{y} = \bar{y}(c)$—তাই সবগুলি চলকেই c এর পরোক্ষ অপেক্ষক বলা যায় তাই $\bar{z}$ শুধু c এর অপেক্ষক বলেও ধরা যায়।]

অথবা $\frac{d\bar{z}}{dc} = (f_x - \bar{\lambda} g_x) \frac{d\bar{x}}{dc} + (f_y - \bar{\lambda} gy) \frac{d\bar{y}}{dc} + \frac{d\bar{\lambda}}{dc} \left[c - g(\bar{x}, \bar{y}) \right] + \bar{\lambda}$।

কিন্তু জানা আছে যে

$$c - g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

$$f_x(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\lambda} g_x(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \qquad \text{.........(২.২৭)}$$

$$f_y(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\lambda} g_y(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

তাই $\frac{d\bar{\lambda}}{dc} \left[c - g(\bar{x}, \bar{y}) \right] = 0$,

$$(f_x - \bar{\lambda} g_x) \frac{d\bar{x}}{dc} = 0$$

এবং $(f_y - \bar{\lambda} g_y) \frac{d\bar{y}}{dc} = 0$

অতএব $\frac{d\bar{z}}{dc} = \bar{\lambda}$ ....(২.২৮)

তার মানে সমাধান করে ল্যাগ্রাঞ্জ গুণকের যে মান পাওয়া যায় তা হল নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষক পরিবর্তিত হলে, ধ্রুবক C এর মাধ্যমে লক্ষ্য অপেক্ষকের সর্বাপেক্ষা অনুকূল মানের উপর তার প্রভাবের পরিমাপ।

২.১৬ n-চলের ক্ষেত্রে ল্যাগ্রাঞ্জ্ পদ্ধতির প্রসারণ

n -চলের ক্ষেত্রে লক্ষ্য অপেক্ষকটি $z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ এবং নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকটি $g = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = c$ হবে। অতএব ল্যাগ্রাঞ্জের অপেক্ষকটি হবে—

$Z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) + \lambda [c - g(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)]$। এর প্রথম-পর্যায়-শর্তগুলি থেকে $(n + 1)$ সমীকরণ পাওয়া যাবে।

সেগুলি হল

$$z_\lambda = c - g(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0$$

$$z_1 = f_1 - \lambda g_1 = 0$$

$$z_2 = f_2 - \lambda g_2 = 0$$

$$z_n = f_n - \lambda g_n = 0$$

এগুলিকে সমাধান করে $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots\ldots \overline{x_n}, \overline{\lambda}$ বের করতে হবে।

দ্বিতীয়-পর্যায় শর্ত

ল্যাগ্রাঞ্জ্গুণক ব্যবহার করে নিয়ন্ত্রিত সর্বাপেক্ষা অনুকূল অবস্থা নির্ধারণের সমস্যাগুলির ক্ষেত্রে মুক্ত ক্ষেত্রের মত একই প্রথম পর্যায় শর্ত পাওয়া গেছিল। কিন্তু দ্বিতীয় পর্যায়ের ক্ষেত্রে এটা করা সম্ভব নয়। তার মূল কারণ হল $\overline{z}$ এর মান $\overline{x}$ ও $\overline{y}$ এর মানের উপর যেভাবে নির্ভরশীল $\overline{\lambda}$ এর উপর সেভাবে নয়। (২.২৬) এ যদি $\overline{\lambda}$ না বসিয়ে λ এর অন্য কোনো মান বসানো হয় তাহলেও $\overline{z}$ এর কোনো পরিবর্তন হবেনা। অতএব সর্বাপেক্ষা অনুকূল মান নির্ধারণের ক্ষেত্রে x ও y এর ভূমিকা এবং λ এর ভূমিকা এক নয়। সেই কারণেই λকে বাছাই চল ধরে নিয়ে দ্বিতীয় পর্যায় শর্ত প্রয়োগ করা সম্ভব না।

দ্বিতীয় পর্যায়-পূর্ণ-অবকল

যেই $g(x, y) = c$ বা $dg = dc = g_x dx + g_y dy = 0$ হয় তখনি dx ও dy আর নিরপেক্ষ থাকেনা। এবার যদি ধরা যায় যে dx নিজের মত করে বদলায় তাহলে dy, dx এর উপর নির্ভরশীল হবে। dy কে সেক্ষেত্রে এমন হতে হবে যাতে (২.২৪) সবসময় সন্তুষ্ট হয়। তার মানে যাতে $dy = -\frac{gx}{gy} dx$ হয়। সেই কারণে $d^2 z$ এর আগের সূত্র যার মূলে ছিল dx ও dy এর নিরপেক্ষতা আর ব্যবহার করা যাচ্ছেনা। এবার $d^2 f$ বের করার সময় dy কে x ও y এর উপর নির্ভরশীল একটি চল হিসাবে ধরা হচ্ছে।

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}(dz)dx + \frac{\partial}{\partial y}(dz)dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy$$

$$= \left[f_{xx}dx + \left(f_{xy}dy + f_y \frac{\partial dy}{\partial x}\right)\right]dx + \left[f_{yx}dx + \left(f_{yx}dx + f_y \frac{\partial dy}{\partial y}\right)\right]dy$$

$$= f_{xx}(dx)^2 + f_{xy}dydx + f_y \frac{\partial(dy)}{\partial x}dx + f_{yx}dxdy + f_{yy}(dy)^2 + f_y \frac{\partial(dy)}{\partial y}dy$$

$$= f_{xx}dx^2 + f_{xy}dydx + f_{yx}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_y\left[\frac{\partial}{\partial x}(dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(dy)dy\right]$$

$$= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dydx + f_{yy}dy^2 + f_y d(dy)$$

$$= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}d_x d_y + f_{yy}dy^2 + f_y d^2 y$$

অতএব $d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_y d^2y$ ....(২.২৯)

(২.৭) এর সঙ্গে (২.২৯) এর পার্থক্য এই যে আগে $f_y d^2y$ রাশিটি ছিলনা। এই রাশিটির উপস্থিতির জন্য d^2z সঠিক দ্বিঘাত রূপটিও পাচ্ছে না।

নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকটি হল

$g(x, y) = c$ তার মানে $dg = 0$ এবং $d(dg) = d^2g = 0$।

অতএব (২.২৯) এর পদ্ধতি ব্যবহার করে $d^2g = g_{xx}dx^2 + 2g_x dxdy + g_{yy}dy^2 + g_y d^2 y = 0$

অতএব $d^2y = \dfrac{-g_{xx}dx^2 + 2g_x dxdy + g_{yy}dy^2}{gy}$

এটি (২.২৯) এ প্রতিস্থাপন করলে

$$d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 - \frac{fy}{gy}\left[g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}dxdy + g_{yy}dy^2\right]$$

$$= \left(f_{xx} - \frac{fy}{gy}g_{xx}\right)dx^2 + 2\left(f_{xy} - \frac{fy}{gy}g_{xy}\right)dxdy + \left(f_{yy} - \frac{fy}{gy}g_{yy}\right)dy^2$$

এখন (২.২৫) এ আগেই দেখা গেছে যে $\frac{f_y}{g_y} = \lambda$

তাই $d^2z = (f_{xx} - \lambda g_{xx})dx^2 + 2(f_{xy} - \lambda g_{xy})dxdy + (f_{yy} - \lambda g_{yy})dy^2$

(২.২২) কে আংশিক অবকলন করে

$$\begin{aligned} z_{xx} &= f_{xx} - \lambda g_{xx} \\ z_{xy} &= f_{xy} - \lambda g_{xy} \\ z_{yy} &= f_{yy} - \lambda g_{yy} \end{aligned} \qquad \text{.........(২.৩০)}$$

তাই d^2z কে সংক্ষেপে

$d^2z = z_{xx}dx^2 + z_{xy}dxdy + z_{yx}dydx + z_{yy}dy^2$ লেখা যায়।

এই সমীকরণের সহগগুলি আসলে x ও y চলের সাপেক্ষে z এর দ্বিতীয় আংশিক অন্তরকলজগুলি। তাই তাদের থেকে হেসিয়ান ছক (Hessian determinant) পাওয়া যায়।

d^2z নিশ্চিত ঋণাত্মক না নিশ্চিত ধনাত্মক তার উপর নির্ভর করবে z চরম না অবম। কিন্তু এক্ষেত্রে d^2z এর চিহ্নের ব্যাপারটা dx ও dy এর সমস্ত সম্ভাব্য মানের জন্য দেখা হবেনা—দেখা হবে কেবলমাত্র dx ও dy এর সেই সমস্ত মানের জন্য যেগুলি $dg = 0$ রৈখিক সমীকরণটি সন্তুষ্ট করে।

অতএব দ্বিতীয় পর্যায় শর্তটি হল

z এর অবম মানের জন্য $dg = 0$, সাপেক্ষে d^2z নিশ্চিত ধনাত্মক।

z এর চরম মানের জন্য $dg = 0$ সাপেক্ষে d^2z নিশ্চিত ঋণাত্মক।

২.১৭ বেষ্টিত হোসিয়ান (Bordered Hessian)

এক্ষেত্রেও দ্বিতীয় পর্যায় শর্তটিকে ছকের মাধ্যমে প্রকাশ করা সম্ভব। তবে হোসিয়ান ছকের বদলে এবারের ছকটি হবে বেষ্টিত হেসিয়ান।

এবারে আবার d^2z কে q বলে দ্বিঘাত রূপে লেখা যাচ্ছে, কিন্তু নিয়ন্ত্রণ সাপেক্ষে।

অর্থাৎ $\alpha u + \beta v = 0$ নিয়ন্ত্রণ সাপেক্ষে

$$q = au^2 + 2huv + bv^2$$

নিয়ন্ত্রণ শর্তের ফলে $v = -\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)u$

অতএব q কে একটিমাত্র চলের অপেক্ষক হিসাবে লেখা যায়।

$$q = au^2 + 2hu\left(-\frac{\alpha}{\beta}u\right) + b\left(-\frac{\alpha}{\beta}u\right)^2$$

$$= au^2 - \frac{2h\alpha u^2}{\beta} + \frac{b\alpha^2 u^2}{\beta^2}$$

$$= [\alpha\beta^2 - 2h\alpha\beta + b\alpha^2]\,\frac{u^2}{\beta^2}$$

q নিশ্চিত ধনাত্মক (ঋণাত্মক) হবে যদি বন্ধনীর ভিতরকার রাশিটির মান ধনাত্মক (ঋণাত্মক) হয়।

প্রতিসম ছক $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} = -\alpha(\alpha b - \beta h) + \beta(\alpha h - a\beta)$

$$= -\alpha^2 b + \alpha\beta h + \beta\alpha h - a\beta^2$$

$$= 2\alpha\beta - \alpha^2 b - a\beta^2$$

অতএব ছকটি হল বন্ধনীর ভিতরকার মানের ঠিক ঋণাত্মক মানটি। তাই u এবং v এর (দুটিই একসঙ্গে শূন্য নয়) যেসব মান $\alpha u + \beta v = 0$ কে সন্তুষ্ট করে তাদের জন্য বলা যায় যে নিয়ন্ত্রণটি সাপেক্ষে

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} < 0\ (> 0) \text{ হলে}$$

q নিশ্চিত ধনাত্মক (নিশ্চিত ঋণাত্মক) হবে। এখন প্রশ্ন উঠতে পারে যে এই প্রতিসম ছকটি কীভাবে পাওয়া গেল। তার জন্য মূল দ্বিঘাত রূপের ছকটি প্রথমে নিতে হবে সেটি হল $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$ । এবার এই ছকটির উপরে ও বাঁদিকে একটি করে বেষ্টনী দেওয়া হবে। বেষ্টনীতে নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকের দুটি সহগ α ও β থাকবে এবং মুখ্য কর্ণ (principal diagonal) বরাবর শূন্য বসাতে হবে। এই বেষ্টিত ছকটি প্রতিসম হবে।

d^2z রূপের উপর প্রয়োগ করলে u এবং v যথাক্রমে dx এবং dy হয়ে যাবে। সেক্ষেত্রে সাধারণ হেসিয়ানটি হবে

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকটি হল $g_x dx + g_y dy = 0$ । সুতরাং বেষ্টিত হেসিয়ানটি হবে

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & z_{xx} & z_{xy} \\ g_y & z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

তাই $\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & z_{xx} & z_{xy} \\ g_y & z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$ < 0 (>0) হলে এবং হলেই $d^2 z$ নিশ্চিত ধনাত্মক (নিশ্চিত ঋণাত্মক) এবং লক্ষ্য অপেক্ষকের মান চরম (অবম) হবে। বেষ্টিত হেসিয়ানকে $|\overline{H}|$ লেখা হয়ে থাকে।

২.১৮ n-চলের ক্ষেত্রে বেষ্টিত হেসিয়ানের প্রসারণ

n-চলের ক্ষেত্রে প্রসারিত করলে লক্ষ্য অপেক্ষকটি হবে $z = f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ আর নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকটি হবে $g(x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n) = c$

$$dg = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + \ldots\ldots\ldots + g_n dx_n = 0$$

এক্ষেত্রে বেষ্টিত হেসিয়ান $|\overline{H}| =$ $\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \ldots\ldots\ldots\ldots g_n \\ g_1 & z_{11} & z_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots z_{1n} \\ g_2 & z_{21} & z_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots z_{2n} \\ g_n & z_{n1} & z_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots z_{nn} \end{vmatrix}$

এর মুখ্য উপছকগুলি হল $|\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & z_{11} & z_{12} \\ g_2 & z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}$ ইত্যাদি

$|\overline{H_2}|, |\overline{H_3}|, \ldots\ldots, |\overline{H_n}| < 0$ হলে d^2z নিশ্চিত ধনাত্মক হবে এবং $|\overline{H_2}| > 0$। $|\overline{H_3}| < 0$, $|\overline{H_4}| > 0$ হলে d^2z নিশ্চিত ঋণাত্মক হবে। নীচের (২.৩) নং সারণিতে সংক্ষেপে বিষয়টি দেওয়া হল।

সারণি ২.৩

$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ সাপেক্ষে $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ এর নিয়ন্ত্রিত প্রান্তবর্তী মান নির্ধারণের শর্ত। এখানে $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda\,[\,c - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,]$

শর্ত	চরম	অবম
প্রথম পর্যায়	$Z_\lambda = Z_1 = Z_2 = \ldots\ldots = Z_n = 0$	$Z_\lambda = Z_1 = Z_2 = \ldots\ldots = Z_n = 0$
দ্বিতীয় পর্যায়	$|\overline{H_2}| > 0, |\overline{H_3}| < 0, |\overline{H_4}| > 0$ …………	$|\overline{H_1}|, |\overline{H_2}|, |\overline{H_3}|, \ldots, |\overline{H_n}| < 0$

২.১৯ বেষ্টিত হেসিয়ানের অর্থনৈতিক প্রয়োগ

উপযোগ সর্বাধিক করা ও ভোক্তার চাহিদা : ভোক্তার বাজেট বা ক্রয়ক্ষমতা হল B। অতএব $xP_x + yP_y = B$ সাপেক্ষে উপযোগ $u = u(x, y)$ কে সর্বাধিক করতে হবে। এখানে ধরে নেওয়া হচ্ছে যে বাজারে ভোক্তার ক্রয়যোগ্য কেবলমাত্র দুটি দ্রব্যই আছে যেগুলি হল x ও y। P_x, ও P_y হল যথাক্রমে x ও y এর একক প্রতি দাম। u_x, $u_y > 0$—অর্থাৎ x ও y দুটি দ্রব্য থেকেই ধনাত্মক প্রান্তিক উপযোগ পাওয়া যায়।

প্রথম পর্যায় শর্ত :

এই সমস্যাটির জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের অপেক্ষক হল $z = u(x, y) + \lambda(B - xP_x + yP_y)$।

প্রথম পর্যায় শর্ত হিসাবে প্রাপ্ত সমীকরণগুলি হল

$$Z_\lambda = B - xP_x + yP_y = 0 \quad (ক)$$
$$Z_x = u_x - \lambda P_x = 0 \quad (খ) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (২.৩২)$$
$$Z_y = u_y - \lambda P_y = 0 \quad (গ)$$

(২.৩২ খ ও গ) থেকে

$$\frac{u_x}{p_x} = \frac{u_y}{p_y} = \lambda \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (২.৩২')$$

থেকে $\frac{u_x}{u_y} = \frac{p_x}{p_y}$ .... (২.৩২'')

সুতরাং (ক) সাপেক্ষে (২.৩২') পূরণ হলেই বলা যেতে পারে যে প্রথম পর্যায় শর্তটি পূরণ হচ্ছে। তার অর্থ হল ভোক্তার এমনভাবে তার মোট বাজেটকে বণ্টন করতে হবে যাতে প্রতিটি দ্রব্যের জন্য প্রান্তিক উপযোগ ও তার দামের অনুপাত সমান হয়। আগেই দেখানো হয়েছে যে নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকের ধ্রুবকের পরিবর্তনের ফলে লক্ষ্য অপেক্ষকের সর্বাপেক্ষা অনুকূল মানের যে পরিবর্তন ঘটে $\overline{\lambda}$ তারই পরিমাপ করে। অতএব এক্ষেত্রে $\overline{\lambda} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial B}$ তার মানে ক্রয়ক্ষমতার পরিবর্তন ঘটলে সর্বাপেক্ষা অনুকূল উপযোগ কতটা বদলাবে $\overline{\lambda}$ তাই নির্ধারণ করবে। এটিকে অর্থের (money) প্রান্তিক উপযোগও (marginal utility) বলা যায়।

অর্থনীতির তত্ত্ব থেকে একথা জানা আছে যে নিরপেক্ষতা রেখা (indifference curve) হল x ও y এর সেই সকল মিশ্রণের সমষ্টি যেগুলির জন্য উপযোগিতা u একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক।

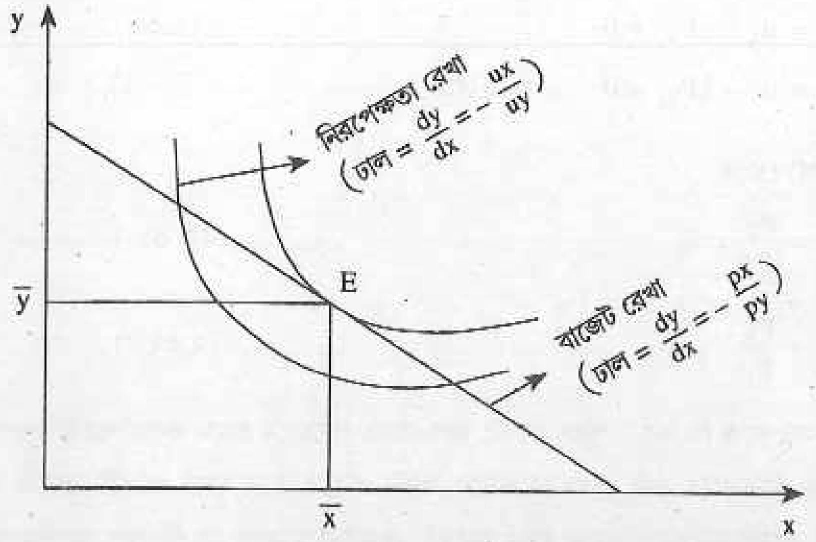
অতএব নিরপেক্ষতা রেখা বরাবর

$$du = u_x dx + u_y dy = 0$$

অথবা $\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}$

তারমানে xy তলে যদি একটি নিরপেক্ষতা রেখা আঁকা যায় তার ঢাল $\frac{dy}{dx}$ হবে প্রান্তিক উপযোগিতার অনুপাত $\frac{u_x}{u_y}$ এর ঋণাত্মক মান। $u_x, u_y > 0$ হবার ফলে $\frac{u_x}{u_y} > 0$ তাই নিরপেক্ষতা রেখার ঢাল $-\frac{u_x}{u_y}$ ঋণাত্মক হবে। আবার নিরপেক্ষতা রেখার ঢালের ঋণাত্মক মান বলে $\frac{u_x}{u_y}$ দুটি দ্রব্যের মধ্যেকার প্রান্তিক

পরিবর্ততার হার (marginal rate of substitution) নির্ধারণ করবে। নীচের রেখাচিত্র নং (২.১১) তে বিষয়টি দেখানো হল।



রেখাচিত্র নং ২.১১

বাজেট নিয়ন্ত্রণ $xP_x + yP_y = B$

অথবা $y = \frac{B}{P_y} - \frac{p_x}{p_y}x$ । এটিকে xy তলে আঁকলে একটি সরলরেখা পাওয়া যাবে যার ঢাল হবে $-\frac{p_x}{p_y}$ । অতএব প্রথম পর্যায় শর্ত (২.৩২´´) পূরণ করার অর্থ হল ভোক্তাকে তার বাজেট রেখার উপরে অবস্থান করে বাজেট রেখার ঢাল ও নিরপেক্ষতা রেখার ঢাল সমান করতে হবে। রেখাচিত্র নং (২.১১) তে E বিন্দুতে যেখানে বাজেট রেখাটি নিরপেক্ষতা রেখার স্পর্শক সেখানে এই শর্তটি পূরণ হচ্ছে।

দ্বিতীয় পর্যায় শর্ত :

এখানে u এর অনড় মানটি চরম হবার জন্য বেষ্টিত হেসিয়ান $|\overline{H}| > 0$ হতে হবে।

তার অর্থ $|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y \\ p_x & u_{xx} & u_{xy} \\ p_y & u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} > 0$

অথবা $-p_x(p_x u_{yy} - p_y u_{xy}) + p_y(p_x u_{yx} - p_y u_{xx}) > 0$

অথবা $2p_x p_y u_{xy} - p_y^2 u_{xx} - p_x^2 u_{yy} > 0$

[এখানে সমস্ত অন্তরকলজগুলি $\overline{x}$ এবং $\overline{y}$ এ নির্ধারিত।] এখানে দেখানো যায় যে $|\overline{H}| > 0$ মানে E বিন্দুতে নিম্নাভিমুখী নিরপেক্ষতা রেখাটি যথার্থ উত্তল (strictly convex)। নিম্নাভিমুখী হওয়ার জন্য $\frac{dy}{dx}$ ঋনাত্মক হওয়া প্রয়োজন আর যথার্থ উত্তল হওয়ার জন্য $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হওয়া প্রয়োজন। $\frac{d^2y}{dx^2}$ পাওয়ার জন্য

$\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)$ কে x এর সাপেক্ষে অবকলন করা যায় কিন্তু সেক্ষেত্রে মনে রাখা দরকার যে u_x, u_y দুটিই x ও y এর অপেক্ষক। অবশ্য নিরপেক্ষতা রেখা বরাবর x ও y পরস্পর নির্ভরশীল তাই y কে আবার x এরই অপেক্ষক বলে ধরা যায়। তার ফলে u_x ও u_y কে কেবলমাত্র x এর অপেক্ষক হিসাবেও গণ্য করা যায়।

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{u_x}{u_y}\right) = \frac{1}{u_y^2}\left(u_y\frac{du_x}{dx} - u_x\frac{du_y}{dx}\right) \qquad .... (২.৩৪)$$

[অবকলনের ভাগফলসূত্র অনুসারে]

আবার x শুধু প্রত্যক্ষভাবেই যে u_x ও u_y এর উপর প্রভাব বিস্তার করতে পারে তাই নয়, y এর মাধ্যমে পরোক্ষভাবেও তার প্রভাব পড়ে।

অতএব $\frac{du_x}{dx} = u_{xx} + u_{yx}\frac{dy}{dx}$

.... (২.৩৫)

এবং $\frac{du_y}{dx} = u_{xy} + u_{yy}\frac{dy}{dx}$

এখানে $\frac{dy}{dx}$ হল নিরপেক্ষতা রেখার ঢাল। দ্বিতীয় পর্যায় শর্ত আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে প্রাসঙ্গিক বিন্দুতে অর্থাৎ E তে নিরপেক্ষতা রেখার ঢাল $\frac{dy}{dx}$ = বাজেট রেখার ঢাল $= -\frac{p_x}{p_y}$।

অতএব (২.৩৫) কে

$$\frac{du_x}{dx} = u_{xx} - u_{yx}\frac{p_x}{p_y}$$

.... (২.৩৫´) লেখা যায়।

$$\frac{du_y}{dx} = u_{xy} - u_{yy}\frac{p_x}{p_y}$$

(২.৩৪) এ $u_x = u_y\frac{p_x}{p_y}$ এবং (২.৩৫´) প্রতিস্থাপন করে

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{u_y^2}\left[u_y\left(u_{xx} - u_{yx}\frac{p_x}{p_y}\right) - u_x\left(u_{xy} - u_{yy}\frac{p_x}{p_y}\right)\right]$$

$$= -\frac{u_y u_{xx} - u_y u_{yx}\frac{p_x}{p_y} - u_y\frac{p_x}{p_y}\left(u_{xy} - u_{yy}\frac{p_x}{p_y}\right)}{u_y^2}$$

$$= -\frac{u_y u_{xx} - u_y u_{yx}\frac{p_x}{p_y} - u_y u_{xy}\frac{p_x}{p_y} + u_y u_{yy}\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2}{u_y^2}$$

$$= -\frac{u_y u_{xx} p_y^2 - 2u_y u_{yx} p_x p_y + u_y u_{yy} p_x^2}{u_y^2 p_y^2}$$

$$= -\frac{2u_{yx} p_x p_y - p_y^2 u_{xx} - p_x^2 u_{yy}}{u_y^2 p_y^2}$$

অথবা $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{|\overline{H}|}{u_y p_y^2}$ .... (২.৩৪´)

তার মানে যখন (২.৩৩) এর দ্বিতীয় পর্যায় শর্তটি পূরণ হচ্ছে অর্থাৎ $|\overline{H}| > 0$ তখন

$\frac{|\overline{H}|}{u_y p_y^2} > 0$ $\left(\begin{matrix}\text{কারণ } u_y > 0 \\ p_y^2 > 0\end{matrix}\right)$ । এর অর্থ হল $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ বা নিরপেক্ষতা রেখা যথার্থ উত্তল। $|\overline{H}|$ অবশ্য $\overline{x}$, $\overline{y}$ এ নির্ধারিত। সুতরাং এখান থেকে নিরপেক্ষতা রেখা কেবলমাত্র স্পর্শকতা বিন্দুতে (E তে) যথার্থ উত্তল হবে এটুকুই বলা যায়। যদি সবকটি নিরপেক্ষতা রেখা সমস্ত বিন্দুতে যথার্থ উত্তল হয় তাহলে বাজেট রেখার সঙ্গে স্পর্শকতার বিন্দুতে x, y এর যে মিশ্রণ পাওয়া যাবে তা সবসময়ই উপযোগের চরমমান দেবে।

২.২০ সমপ্রাকৃতিক অপেক্ষক (Homogeneous Functions)

যদি একটি অপেক্ষকের সবকটি স্বাধীন চল ধ্রুবক k দিয়ে গুণ করার ফলে অপেক্ষকের মানটি K^r অনুপাতে পরিবর্তিত হয় অর্থাৎ $f(kx_1, kx_2, \ldots\ldots, kx_n) = k^r f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ হয় তাহলে মুল অপেক্ষকটিকে r মাত্রার (degree) সমপ্রাকৃতিক অপেক্ষক (homogeneous function) বলা হয়। k এর মান

যে কোনো কিছুই হতে পারে। অবশ্য সমীকরণটি অর্থবহ হওয়ার জন্য ($kx_1, kx_2 \ldots\ldots, kx_n$) কে সংজ্ঞার অঞ্চলের মধ্যে থাকতে হবে। অর্থনৈতিক প্রয়োগের ক্ষেত্রে $k > 0$ ধরা হয় কারণ অধিকাংশ অর্থনৈতিক চলেরই ঋণাত্মক মান হতে পারে না।

উদাহরণ ১ :

$f(x, y, w) = \frac{x}{y} + \frac{2w}{3x}$ অপেক্ষকটির সবকটি চল যদি k দিয়ে গুণ করা যায় তাহলে

$$f(kx, ky, kw) = \frac{kx}{ky} + \frac{2kw}{3kx} = \frac{x}{y} + \frac{2w}{3x} = f(x, y, w) = k^{\circ} f(x, y, w)$$

[কারণ $k^{\circ} = 1$]

এক্ষেত্রে চলগুলিকে k দিয়ে গুণ করার ফলে f এর মান কোনোভাবেই বদল হচ্ছে না। তার মানে এক্ষেত্রে f অপেক্ষকটি k° ($= 1$) দিয়ে গুণ হচ্ছে। এইরকম অপেক্ষককে শূন্য মাত্রার (zero degree) সমপ্রাকৃতিক অপেক্ষক বলা হয়।

উদাহরণ ২ :

$g(x, y, w) = \frac{x^2}{y} + \frac{2w^2}{x}$ অপেক্ষকের সবকটি চলকে যদি k দিয়ে গুণ করা যায় তাহলে

$$g(kx, ky, kw) = \frac{k^2x^2}{ky} + \frac{2k^2w^2}{kx}$$

$$= k\left(\frac{x^2}{y} + \frac{2w^2}{kx}\right)$$

$$= kg(x, y, w)$$

এক্ষেত্রে g কে একমাত্রার বা প্রথম মাত্রার সমপ্রাকৃতিক অপেক্ষক বলা হবে।

২.২১ রৈখিক সমপ্রকৃতি (Linear homogeneity) রৈখিক সমপ্রাকৃতিক উৎপাদন অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য ও তার ব্যাখ্যা

রৈখিক সমপ্রাকৃতিক অপেক্ষকের মুখ্য প্রয়োগক্ষেত্র হল উৎপাদন তত্ত্ব (theory of production)। সেইজন্য এই আলোচনাটি উৎপাদন অপেক্ষকের ভিত্তিতেই করা হবে।

ধরা যাক Q = f(K, L)………(২.৩৬) একটি উৎপাদন অপেক্ষক। বৃহত্তর একক (macro) বা ক্ষুদ্র একক (micro) যে কোনো পর্যায়েই আলোচনা করা হোক না কেন, রৈখিক সমপ্রকৃতির অর্থ মাত্রাগত সমহার প্রতিদান (constant returns to scale)। তার কারণ রৈখিক সমপ্রকৃতি মানে সবকটি উপাদান (উৎপাদন অপেক্ষকের স্বাধীন চল) K গুণ বৃদ্ধি করলে উৎপাদন (অপেক্ষকের মান) সর্বদা K গুণই বৃদ্ধি পাবে।

রৈখিক সমপ্রাকৃতিক (linear homogeneous) উৎপাদন অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য ও তার ব্যাখ্যা

বৈশিষ্ট্য ১

শ্রমের গড় বাস্তব উৎপাদন (Average Physical product of labour বা APP_2) এবং মূলধনের গড় বাস্তব উৎপাদন (Average physical product of capital বা APP_k) কে কেবলমাত্র মূলধন ও শ্রমের অনুপাত K/L (≡K*) এর অপেক্ষক হিসাবে লেখা যায়।

প্রমাণ (২.৩৬) এর প্রতিটি স্বাধীন চলকে $K = \left(= \frac{1}{L}\right)$ দিয়ে গুণ করলে রৈখিক সমপ্রকৃতির কারণে উৎপাদন Q, K গুণ অর্থাৎ $KQ = \left(= \frac{Q}{L}\right)$ হবে।

আবার (২.৩৬) এর ডানদিকটি হবে

$$f\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = f\left(\frac{K}{L}\ 1\right) = f\ (K,^*1) = \varphi(K^*)$$

(কারণ এটি এখন শুধুই K* এর অপেক্ষক ।)

অতএব $APP_L \equiv \frac{Q}{L} = \varphi\ (k^*)$ (২.৩৭) এবং

$$APP_K \equiv \frac{Q}{K} = \frac{Q}{L} \cdot \frac{L}{K} = \frac{\varphi(K^*)}{K^*} \text{ (২.৩৮) } \left(\text{যেহেতু } K^* \frac{K}{L}\right)$$

এর অর্থ হল উৎপাদন অপেক্ষকে রৈখিক সমপ্রকৃতি থাকলে যতক্ষণ মূলধন ও শ্রমের অনুপাত অপরিবর্তিত (ধ্রুবক) থাকবে ততক্ষণ গড় উৎপাদন ও অপরিবর্তিত (ধ্রুবক) থাকবে। তার মানে মূলধন ও শ্রমের সমহারে পরিবর্তন হলে (K* ধ্রুবক) APP_L বা APP_K এর মান বদলায় না। উৎপাদন অপেক্ষকটি প্রথম মাত্রার সমপ্রাকৃতিক হলে তাই বলা যায় যে APP_L ও APP_K অপেক্ষক দুটি শূন্য মাত্রার সমপ্রাকৃতিক হবে।

বৈশিষ্ট্য ২

শ্রম ও মূলধনের প্রান্তিক বাস্তব উৎপাদন যথাক্রমে MPP_L (Marginal physical product of labour) ও MPP_K কে (marginal physical product of capital) কেবলমাত্র K^* এর অপেক্ষক হিসাবে লেখা যায়।

$$Q = L\varphi(K^*) \ldots\ldots\ldots\ldots (২.৩৬´) \; [\, (২.৩৭) \text{ থেকে }]$$

$$\frac{\partial k^*}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{1}{L}$$

$$\frac{\partial k^*}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{K}{L}\right) = -\frac{K}{L^2}$$

Q কে K^* এর সাপেক্ষে অবকলন করে—

$$MPP_k \equiv \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\,[L\varphi(k^*)]$$

$$= L.\ \frac{\partial\varphi(K^*)}{\partial K}$$

$$= L.\ \frac{d\varphi(K^*)}{\partial K^*}\cdot\frac{\partial K^*}{\partial K} \qquad \text{[অবকলনের শৃঙ্খল-সূত্র অনুসারে]}$$

$$= \frac{Ld\varphi(K^*)}{\partial K^*}\ \frac{1}{L} = \varphi'(K^*)\ \left[\text{যেহেতু } \frac{d\varphi(k^*)}{dK^*} = \varphi'(k^*)\right] \qquad [\,২.৩৯ \text{ থেকে}]$$

অথবা $MPP_k = \varphi'(K^*)$ [২.৪০]

$$MPP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\,[\,L\varphi(K^*)]$$

$$= \varphi(K^*) + L.\frac{\partial\varphi(K^*)}{\partial L} \quad [\text{ গুণফল সূত্র অনুসারে }]$$

$$= \varphi(K^*) + L.\frac{\partial\varphi(K^*)}{\partial K^*} = \frac{\partial K^*}{\partial L} \quad [\text{ শৃঙ্খল সূত্র অনুসারে }]$$

$$= \varphi(K^*) + L.\varphi'(k^*)\left(-\frac{K}{L^2}\right) \qquad [\,২.৩৯ \text{ থেকে}]$$

$$= \varphi(K^*) - \frac{K}{L}\,\varphi'(k^*)$$

$$= \varphi(K^*) - K^*\varphi'(k^*) \qquad [২.৪১]$$

অতএব যদি মূলধন ও শ্রমের সমহারে পরিবর্তন হয় তবে গড় বাস্তব উৎপাদনের মতই প্রান্তিক বাস্তব উৎপাদনও ধ্রুবক হবে।

বৈশিষ্ট্য ৩ অয়েলারের উপপাদ্য (Euler's theorem)

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} = L.\frac{\partial Q}{\partial L} \equiv Q$$

প্রমাণ

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} + L.\frac{\partial Q}{\partial L} = K.\,\varphi'(K^*) + L\,[\varphi(K^*) - K^*\varphi'(k^*)] \quad [\,(২.৪০)\text{ ও }(২.৪১)\text{ থেকে}\,]$$

$$= K.\,\varphi'(K^*) + L.\,\varphi(K^*) - L.\frac{K}{L}\varphi'(k^*)] \quad (\text{যেহেতু } K^* = \frac{K}{L})$$

$$= L.\,\varphi'(K^*)$$

$$= L. + L.\frac{Q}{L} \quad [\,(২.৩৬')\text{ থেকে}]$$

$$= Q.$$

যেহেতু এই প্রমাণটি K ও L এরু যে কোনো মানের জন্য বহাল থাকবে তাই এই বৈশিষ্ট্যটিকে অভেদ সমীকরণ হিসাবে লেখা যায়।

এই বৈশিষ্ট্যের ফলে একটি রৈখিক সমপ্রাকৃতিক অপেক্ষকের মানকে কয়েকটি রাশির যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়। এই প্রতিটি রাশি হবে একটি স্বাধীন চল ও তার সাপেক্ষে অপেক্ষকটির প্রথম আংশিক অন্তরকলজের গুণফল। এখানে মনে রাখা দরকার $Q \equiv K.\frac{\partial Q}{\partial K} + L.\frac{\partial Q}{\partial L}$ অভেদ সমীকরণটি কেবলমাত্র $Q = f(K, L)$ এর মাত্রাগত সমহার প্রতিদানের ক্ষেত্রগুলিতেই প্রযোজ্য। এই অভেদ সমীকরণটির সঙ্গে সমীকরণ $dQ = \frac{\partial Q}{\partial K}dk + \frac{\partial Q}{\partial L}dL$ এর পার্থক্য আছে কারণ এই দ্বিতীয় সমীকরণটি হল যে কোনো $Q = f(K, L)$ অপেক্ষকের পূর্ণ অবকল।

বৈশিষ্ট্য ৩ এর অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা

অর্থনৈতিক দিক থেকে দেখলে মাত্রাগত সমহার প্রতিদানের ক্ষেত্রে যদি সমস্ত উপাদানকেই তার প্রান্তিক উৎপাদনের সমান হারে পারিশ্রমিক দেওয়া হয় তাহলে উৎপাদন সম্পূর্ণভাবে নিঃশেষ হয়ে যায়। বিষয়টি আরও পরিষ্কার করে বলতে গেলে অভেদ সমীকরণটির মাধ্যমে বোঝানো প্রয়োজন।

$$K.\frac{\partial Q}{\partial K} + L.\frac{\partial Q}{\partial L} \equiv Q$$

এখানে যদি $\frac{\partial Q}{\partial K} = P_k$ (মূলধনের একক প্রতি দাম)

এবং $\frac{\partial Q}{\partial L} = P_L$ (শ্রমের একক প্রতি দাম) হয় অর্থাৎ উভয় উপাদানের একক প্রতি পারিশ্রমিকই তাদের প্রান্তিক উৎপাদনের সঙ্গে সমান হয় তাহলে

$K.P_k + L.P_L \equiv Q_S$ লেখা যায়।

এই অভেদ সমীকরণটির বাঁদিকটির মানে হল মূলধন ও শ্রমের উপর মোট ব্যয়। তার মানে সম্পূর্ণ উৎপাদন Q কেই মূলধন ও শ্রমের উপর ব্যয় করা হচ্ছে। ফলস্বরূপ এক্ষেত্রে কোনো অর্থনৈতিক মুনাফা থাকবে না।

২.২২ কব্ ডগ্‌লাস উৎপাদন অপেক্ষক (Cobb Douglas Production Function)

$Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ (২.৪২) [এখানে A হল ধনাত্মক ধ্রুবক ও α ধনাত্মক ভগ্নাংশ]

(২.৪২) একটি কব্ ডগ্‌লাস্ উৎপাদন অপেক্ষক। প্রথমে এই অপেক্ষকের সাধারণ রূপ অর্থাৎ $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ (২.৪৩) নেওয়া যাক। এখানে β আরেকটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ যার মান $(1 - \alpha)$ হতেও পারে নাও হতে পারে। এই অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্যগুলি হল (১) এটি $(\alpha + \beta)$ মাত্রার সমপ্রাকৃতিক, (২) $(\alpha + \beta) = 1$ হলে সেই বিশেষ ক্ষেত্রে এটি রৈখিক সমপ্রাকৃতিক এবং (৩) এর সমোৎপাদন রেখাগুলির ঢাল সর্বত্রই ঋণাত্মক এবং K ও L এর সমস্ত ধনাত্মক মানের জন্য এগুলি যথার্থ উত্তল।

প্রমাণ :

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

K এবং L কে K দিয়ে গুণ করলে

$$A(KK)^{\alpha}(KL)^{\beta} = AK^{\alpha}K^{\alpha}K^{\beta}L^{\beta}$$

$$= K^{\alpha+\beta}AK^{\alpha}L^{\beta} = K^{\alpha+\beta}Q$$

উৎপাদনের নির্দিষ্ট পরিমাণ Q_0 এর জন্য (২.৪৩) কে

$AK^{\alpha}L^{\beta} = Q_0$ লেখা যায়।

দুদিকের স্বাভাবিক লগ্ নিলে

$$l_nA + \alpha l_nK + \beta l_nL = l_nQ_0$$

অথবা $l_nA + \alpha l_nK + \beta l_nL - l_nQ_0 = 0$

এতে K, L এর পরোক্ষ অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ পাচ্ছে। [পরোক্ষ অপেক্ষক উপপাদ্যের সমস্ত শর্তগুলিই পূরণ হচ্ছে কারণ F (বাঁদিকের রাশিগুলির) এর অবিচ্ছিন্ন আংশিক অন্তরকলজ আছে কারণ $\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\alpha}{K}$ এবং K এর সমস্ত ধনাত্মক মানের জন্য $-\frac{\alpha}{K} \neq 0$]

অতএব পরোক্ষ অপেক্ষক সূত্র ও লগ্ সূত্র অনুসারে $\frac{dK}{dL} = -\frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K} = -\frac{(\beta/L)}{(\alpha/K)} = -\frac{\beta K}{\alpha L} < 0$

অতএব সমোৎপাদন রেখা (isoquant) সর্বদাই নিম্নাভিমুখী।

আবার $\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{d}{dL}\left(-\frac{\beta K}{\alpha L}\right) = -\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{d}{dL}\left(\frac{K}{L}\right)$

$$= -\frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{L}\frac{dK}{dL} - \frac{K}{L^2}\right)$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{L^2}\left(L\frac{dK}{dL} - K\right) > 0$$

[কারণ $\frac{dK}{dL} < 0$ তাই $\left(L\frac{dK}{dL} - K\right) < 0$, এবং $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{L^2} > 0$]

তার মানে K ও L এর ধনাত্মক মানের KL তলে সমোৎপাদন রেখা যথার্থ উত্তল।

এবার $\alpha + \beta = 1$ হলে অর্থাৎ আসল কব্ ডগ্‌লাস্ উৎপাদন অপেক্ষককে রৈখিক সমপ্রাকৃতিক অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্যগুলি থাকে কিনা তা পরীক্ষা করে দেখা যাক।

এক্ষেত্রে মোট উৎপাদন হল

$$Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}.L$$
$$= L.A(K^*)^{\alpha} \qquad \text{............ (২.৪২)}$$

$A(K^*)^{\alpha}$ হল $\varphi(K^*)$ এরই নির্দিষ্ট রূপ। এক্ষেত্রে গড় উৎপাদন হল

$$APP_L = \frac{Q}{L} = A(K^*)^{\alpha}$$

$$APP_K = \frac{Q}{L}\cdot\frac{L}{K} = A(K^*)^{\alpha}\ \frac{1}{K^*}$$
$$= A(K^*)^{\alpha-1}$$

অতএব APP_L ও APP_K দুটিই কেবলমাত্র K^* এরই অপেক্ষক।

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = A\,\alpha\,K^{\alpha-1}\,L^{1-\alpha}$$
$$= A\,\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} = A \propto (K^*)^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = AK^{\alpha}(1-\alpha)L^{-\alpha}$$
$$= A(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{d}$$
$$= A(1-\alpha)(K^*)^{\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{অতএব } \frac{\partial Q}{\partial K} = A\alpha(K^*)^{\alpha-1} \\ &\text{এবং } \frac{\partial Q}{\partial L} = A(1-\alpha)(K^*)^{\alpha} \end{aligned}\right\} \text{............(২.৪৫)}$$

তাই এক্ষেত্রেও $\frac{\partial Q}{\partial K}$ এবং $\frac{\partial Q}{\partial L}$ K^* এর অপেক্ষক।

এই ক্ষেত্রে (২.৪৫) ব্যবহার করে

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = K.\ A\alpha(K^*)^{\alpha-1} + L.\ A(1-\alpha)\ (K^*)^{\alpha}$$

$$= LA(K^*)^{\alpha}\left[\frac{K\alpha}{LK^*} + (1-\alpha)\right]$$

$$= LA(K^*)^{\alpha}[\alpha + 1 - \alpha] \quad \left(\text{কারণ } K^* = \frac{K}{L}\right)$$

$$= LA(K^*)^{\alpha} = Q$$

সুতরাং এক্ষেত্রে অয়েলারের উপপাদ্যটিও সন্তুষ্ট হচ্ছে। প্রত্যেক উপাদানকে যদি তার প্রান্তিক উৎপাদন পারিশ্রমিক হিসাবে দেওয়া হয় তাহলে মুলধন উৎপাদনের যে তুলনামূলক অংশ পায় তা হল

$$\frac{K(\partial Q/\partial K)}{Q} = \frac{KA\alpha(K^*)^{\alpha-1}}{LA(K^*)\alpha} = \frac{K^*\alpha(K^*)^{\alpha-1}}{(K^*)\alpha} \ \left[\text{ কারণ } \frac{K}{L} = K^* \right] = \alpha$$

আবার উৎপাদনের যে তুলনামূলক অংশ শ্রমের প্রাপ্য হয় তা হল

$$\frac{L.(\partial Q/\partial L)}{Q} = \frac{LA(1-\alpha)\ (K^*)^{\alpha}}{LA(K^*)\alpha} = 1-\alpha$$

তার মানে দুটি উপাদান চলের সূচকগুলিই মোট উৎপাদনে তাদের নিজ নিজ অংশ কতখানি তা নির্দেশ করছে। A কে এখানে দক্ষতা ধ্রুবক (efficiency parameter) বলা যেতে পারে কারণ K ও L এর নির্দিষ্ট মানের জন্য A এর মান Q এর স্তরের উপর আনুপাতিক হারে প্রভাব বিস্তার করবে। এই দক্ষতা ধ্রুবক প্রযুক্তির অবস্থারই নির্দেশক।

২.২৩ উপাদানের সর্বনিম্ন ব্যয় মিশ্রণ নির্ধারণ (Determination of the least cost combination of inputs)

ধরা যাক একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ উৎপাদন Q_0 করা দরকার। সেক্ষেত্রে উপাদানগুলিকে কী কী পরিমাণে বাছাই করা হবে যাতে উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন হয় সেটাই মূল সমস্যা।

প্রথম পর্যায় শর্ত

ধরা যাক উৎপাদন অপেক্ষককে দুটি চল উপাদান (variable factor) আছে অর্থাৎ $Q = Q(a, b)$ এবং সংজ্ঞার অঞ্চলের প্রাসঙ্গিক উপসেটে (subzet) $Q_a , Q_b > 0$। দুটি উপাদানের দামই বহির্নির্ণীত। অতএব সমস্যাটি হল $Q(a, b) = Q_0$ এর সাপেক্ষে উৎপাদন ব্যয় $C = aP_a + bP_b$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ধারণ করা। এখানে ল্যাগ্রাঞ্জের অপেক্ষকটি হবে—

$$Z = aP_a + bP_b + \mu\,[Q_0 - Q(a, b)]$$

C এর অবম মানের জন্য প্রথম পর্যায় শর্ত হবে

$$Z_\mu = Q_0 - Q(a, b) = 0$$

$$Z_a = P_a - \mu Q_a = 0$$

$$Z_b = P_b - \mu Q_b = 0$$

প্রথম সমীকরণটি নিয়ন্ত্রণটিকেই ভিন্নরূপে লেখা কিন্তু দ্বিতীয় ও তৃতীয়টি মিলে

$$\frac{P_a}{Q_a} = \frac{P_b}{Q_b} = \mu \qquad \text{............(২.৪৬)}$$

তার মানে উপাদানের সর্বাপেক্ষা অনুকূল মিশ্রণে উপাদানের দাম ও তার প্রান্তিক উৎপাদনের অনুপাত প্রতিটি উপাদানের জন্য সমান হতে হবে। এই অনুপাতটি প্রাসঙ্গিক উপাদানটির প্রান্তিক উৎপাদনের একক প্রতি কত ব্যয় হল তা বোঝায় ল্যাগ্রাঞ্জ গুণকটিকে এক্ষেত্রে সর্বাপেক্ষা অনুকূল অবস্থায় প্রান্তিক ব্যয়ের নির্দেশক বলা যেতে পারে।

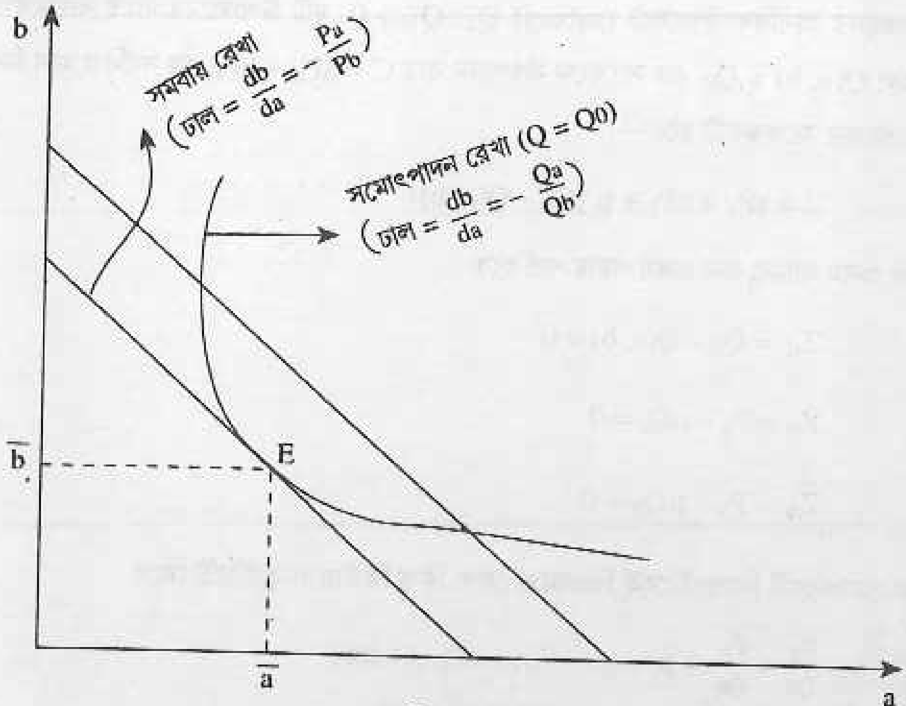
(২.৪৬) কে $\frac{P_a}{P_b} = \frac{Q_a}{Q_b}$ ......(২.৪৬´) লেখা যায়। এইভাবে প্রকাশ করলে প্রথম পর্যায় শর্তটিকে সমোৎপাদন ও সমব্যয় রেখার মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যায়।

এখন সমোৎপাদন রেখা বরাবর

$$dQ_0 = Q_a d_a + Q_b db = 0$$

অথবা $\frac{db}{da} = -\frac{Q_a}{Q_b}$

অর্থাৎ সমোৎপাদন রেখার ঢাল $= -\frac{Q_a}{Q_b}$ । [নীচের রেখাচিত্র নং (২.১২) দ্রষ্টব্য]



রেখাচিত্র নং ২.১২

তার অর্থ হল $\frac{Q_a}{Q_b}$ সমোৎপাদন রেখার ঢালের ঋণাত্মক মান। তার মানে এটি হল b এর জন্য a এর প্রযুক্তিগত পরিবর্তনের হার (Marginal Rate of Technical Substitution of a for b বা $MRTS_{ab}$)। এক্ষেত্রে যেহেতু একটিমাত্র উৎপাদনস্তর নির্দিষ্ট করে দেওয়া হয়েছে তাই রেখাচিত্র (২.১২) তে একটি মাত্র সমোৎপাদন রেখা দেখানো হয়েছে।

সমব্যয় রেখা হল উপাদানের সেইসব সংমিশ্রণের সমষ্টি যার জন্য মোট ব্যয় সমান। এটিকে রৈখিক সমীকরণ $C_0 = aP_a + bP_b$ দিয়ে প্রকাশ করা যায়।

$$C_0 = aP_a + bP_b$$

অথবা $b = \frac{C_0}{P_b} - \frac{P_a}{P_b}a$ ।

এখানে C_0 হল ধ্রুবক মোট ব্যয়। তাই এই সরলরেখাটি উল্লম্ব অক্ষে যে রেখাংশটি তৈরি করবে তার দৈর্ঘ্য হবে $\frac{C_0}{P_b}$ এবং রেখাটির ঢাল হবে $-\frac{P_a}{P_b}$ । অতএব P_a , P_b দেওয়া থাকলে ab তলে আঁকলে C_0 এর

বিভিন্ন মানের জন্য $-\frac{P_a}{P_b}$ ঢাল বিশিষ্ট বিভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যাবে। তার মানে মোট ব্যয় রেখাটি থেকে একটি সরলরেখা গোষ্ঠী পাওয়া যাবে। অতএব (২.৪৬´) এর অর্থ দাঁড়াচ্ছে সমোৎপাদন রেখা ও সমব্যয় রেখার ঢালের সমতা। যেহেতু এক্ষেত্রে উৎপাদনস্তর Q_0 তে নির্দিষ্ট রয়েছে তাই একটিমাত্র সমোৎপাদন রেখা নিয়েই আলোচনা করা হয়েছে। এই রেখাটির যে বিন্দুতে তার ঢাল সমব্যয় রেখার ঢালের সঙ্গে সমান সেটিই হবে উপাদানের সর্বাপেক্ষা অনুকূল মিশ্রণ। (২.১২) রেখাচিত্রের E বিন্দুতে যেখানে সমব্যয় রেখা সমোৎপাদন রেখার স্পর্শক সেখানে মোট ব্যয় অবম হবে। তার মানে সর্বাপেক্ষা অনুকূল মিশ্রণটি হবে $(\overline{a}, \overline{b})$।

দ্বিতীয় পর্যায় শর্ত

যদি প্রথম পর্যায় শর্ত পূরণ হয় তাহলে মোট ব্যয় অবম হওয়ার জন্য বেষ্টিত হেসিয়ানটি ঋণাত্মক হওয়াই যথেষ্ট। তার অর্থ

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & Q_a & Q_b \\ Q_a & -\mu Q_{aa} & -\mu Q_{ab} \\ Q_b & -\mu Q_{ba} & -\mu Q_{bb} \end{vmatrix} < 0$$

অথবা $-Q_a(-\mu Q_a Q_{bb} + \mu Q_{ab} Q_b) + Q_b(-\mu Q_a Q_{ba} + \mu Q_b Q_{aa}) < 0$

অথবা $\mu Q_a^2 Q_{bb} - \mu Q_{ab} Q_a Q_b - \mu Q_{ba} Q_a Q_b + \mu Q_{aa} Q_b^2 < 0$

অথবা $\mu(Q_a^2 Q_{bb} - 2Q_a Q_b Q_{ab} + Q_{aa} Q_b^2) < 0$

প্রান্তিক ব্যয় μ এর সর্বাপেক্ষা অনুকূল মান ধনাত্মক। তাই উপরের শর্তটিতে বন্ধনীর ভিতরকার মান ঋণাত্মক হওয়াই যথেষ্ট।

এবারে সমোৎপাদন রেখার ঢাল নিয়ে কিছু আলোচনা করা যাক। সমোৎপাদন রেখার অপেক্ষকটি হল

$$Q = Q(a, b)$$

এখান থেকে $dQ = Q_a da + Q_b db = 0$ (কারণ একটি রেখা বরাবর উৎপাদন নির্দিষ্ট)

অথবা $\frac{db}{da} = -\frac{Q_a}{Q_b}$ ।

তার মানে সমোৎপাদন রেখার ঢাল $\frac{db}{da}$ = a ও b এর প্রান্তিক বাস্তব উৎপাদনশীলতার অনুপাতের ঋণাত্মক মান বা $-\frac{MPP_a}{MPP_b}$ ।

দ্বিতীয় পর্যায় অবকলন করলে

$$\frac{d^2b}{da^2} = \frac{d}{da}\left(-\frac{Q_a}{Q_b}\right) = -\frac{1}{Q_b^2}\left[Q_b\frac{dQ_a}{da} - Q_a\frac{dQ_b}{da}\right]$$

এখন যেহেতু Q_a ও Q_b a ও b এর অপেক্ষক তাই

$$\frac{dQ_a}{da} = \frac{\partial Q_a}{\partial b}\frac{db}{da} + \frac{\partial Q_a}{\partial a}$$

$$= Q_{ba}\frac{db}{da} + Q_{aa}$$

এবং $\frac{dQ_a}{da} = -\frac{\partial Q_b}{\partial b}\frac{db}{da} + \frac{\partial Q_b}{\partial a}$

$$= Q_{bb}\frac{db}{da} + Q_{ab}$$

অতএব $\frac{d^2b}{da^2} = \frac{1}{Q_b^2}\left[Q_b\left(Q_b\frac{db}{da} + Q_{aa}\right) - Q_a\left(Q_{bb}\frac{db}{da} + Q_{ab}\right)\right]$

$$= -\frac{1}{Q_b^2}\left[Q_b\left\{Q_{ba}\left(-\frac{Q_a}{Q_b}\right) + Q_{aa}\right\} - Q_a\left\{Q_{bb}\left(-\frac{Q_a}{Q_b}\right) + Q_{ab}\right\}\right]$$

$$= -\frac{1}{Q_b^2}\left[-Q_bQ_{ba} + Q_bQ_{aa} + Q_a^2\frac{Q_{bb}}{Q_b} - Q_aQ_{ab}\right]$$

$$= -\frac{1}{Q_b^3}\left[Q_b^2Q_{aa} - 2Q_aQ_bQ_{ba} + Q_a^2Q_{bb}\right]$$

$\frac{d^2b}{da^2}$ থেকে সমোৎপাদন রেখার বক্রতা পাওয়া যায়। এবার যদি স্পর্শকতা বিন্দুতে সমোৎপাদন রেখাটি যথার্থ উত্তল হয় তবে $\frac{d^2b}{da^2} > 0$ ।

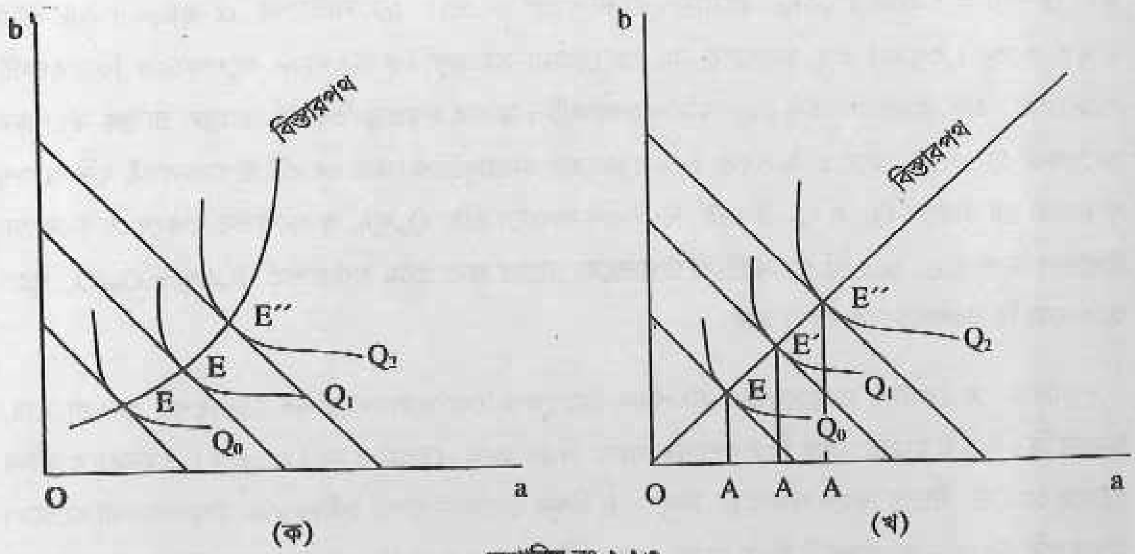
তার অর্থ হল $-\frac{1}{Q_b^3}(Q_b^2 Q_{aa} - 2Q_aQ_bQ_{ba} + Q_a^2Q_{bb}) > 0$, Q_b যেহেতু উপাদানের প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা তাই প্রাসঙ্গিক অঞ্চলে $Q_b > 0$ বলেই ধরা হবে। তার মানে $\frac{1}{Q_b^3} > 0$ ।

অতএব $-(Q_b^2 Q_{aa} - 2Q_aQ_bQ_{ba} + Q_a^2Q_{bb}) > 0$

অথবা $Q_b^2 Q_{aa} - 2Q_aQ_bQ_{ab} + Q_a^2Q_{bb} < 0$ । তাহলে দেখা যাচ্ছে যে যদি সমব্যয় রেখার সঙ্গে স্পর্শকতা বিন্দুতে সমোৎপাদন রেখার যথার্থ উত্তলতা থাকে তবে উপরের দ্বিতীয় পর্যায় শর্তটি পূরণ হচ্ছে। আবার বিপরীত দিক থেকে বিশ্লেষণ করলে দ্বিতীয় পর্যায় শর্ত পূরণ হওয়ার জন্য সমোৎপাদন রেখাটিকে স্পর্শকতা বিন্দুতে যথার্থ উত্তল হতে হবে।

২.২৪ প্রতিষ্ঠানের বিস্তারপথ (Expansion path) নির্ণয়

এবার উপরের মডেলের তুলনামূলক স্থিতি বিশ্লেষণ করা যাক। উপাদানের দাম স্থির ধরে, Q_0 বাড়ালে (ক্রমশঃ উচ্চতর সমোৎপাদন রেখায় আরোহন করলে) সর্বনিম্ন ব্যয় মিশ্রণ $\frac{\bar{b}}{a}$ কী হবে তা দেখা যাক। প্রতিটি নতুন সমোৎপাদন রেখার জন্য একটি উচ্চতর সমব্যয় রেখার সঙ্গে স্পর্শকতা বিন্দু পাওয়া যাবে। এই সকল স্পর্শকতা বিন্দুর সঞ্চার পথকেই (locus) প্রতিষ্ঠানের বিস্তার পথ (expansion path) বলা হয়। বিস্তার পথের দুটি সম্ভাব্য রূপ নীচের রেখাচিত্র নং (২.১৩) তে দেখানো হল।



রেখাচিত্র নং ২.১৩

যদি সমোৎপাদনরেখাগুলি যথার্থ উত্তল বলে ধরে নেওয়া হয় তাহলে দ্বিতীয় পর্যায় শর্ত পূরণ হবে। সেক্ষেত্রে বিস্তারপথটি সরাসরি প্রথম পর্যায় শর্ত (২.৪৬´) থেকে নির্ধারণ করা যাবে। সাধারণ কব্ ডগলাস্ উৎপাদন অপেক্ষকের পরিপ্রেক্ষিতে এটি আলোচনা করা হল।

(২.৪৬´) শর্তটি পূরণ হওয়ার অর্থ উপাদানের দামের অনুপাত ও উপাদানের প্রান্তিক উৎপাদনশীলতার অনুপাত সমান।

$Q = Aa^{\alpha}b^{\beta}$ অপেক্ষকের জন্য, বিস্তার পথের প্রতিটি বিন্দুতে

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{Q_a}{Q_b} = \frac{A\alpha a^{\alpha-1}b^{\beta}}{Aa^{\alpha}\beta b^{\beta-1}} = \frac{\alpha b}{\beta a} \text{ হতে হবে।}$$

তার মানে সর্বাপেক্ষা অনুকূল মিশ্রণটি হবে

$$\frac{\bar{b}}{a} = \frac{\beta P_a}{\alpha P_b} \quad (২.৪৭)$$

অর্থাৎ ধ্রুবক (কারণ, α, β, P_a, P_b সবই স্থির)। তার মানে বিস্তারপথের সমস্ত বিন্দুগুলিতেই উপাদান অনুপাতটি স্থির থাকবে। রেখাচিত্রের মাধ্যমে বোঝাতে গেলে বিস্তারপথটি হবে স্থির উৎস বিন্দুর (origin) থেকে একটি সরলরেখা। রেখাচিত্র নং (২.১২ খ) তে যেমন সবকটি স্পর্শকতা বিন্দু, E, E´, ও E´´ এতে উপাদান অনুপাত যথাক্রমে AE/OA, A´E´/OA´ ও A´´E´´/OA´´ সব সমান। সরলরৈখিক বিস্তারপথ সাধারণ কব্ ডগ্লাস্ উৎপাদন অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য। এর জন্য $\alpha + \beta = 1$ হওয়ার কোনো প্রয়োজন হয়না কারণ (২.৪৭) কোনোভাবেই $\alpha + \beta = 1$ এর উপর নির্ভর করেনা। শুধুমাত্র কব্ ডগলাসই নয় যে কোনো সমপ্রাকৃতিক উৎপাদন অপেক্ষকের বিস্তারপথই সরলরেখা। তার কারণগুলি হল (১) যদি অপেক্ষকটি r মাত্রার সমপ্রাকৃতিক হয় তাহলে প্রান্তিক উৎপাদন অপেক্ষক Q_a ও Q_b হবে a ও b তে $(r-1)$ মাত্রার সমপ্রাকৃতিক। অতএব দুটি উপাদানকেই যদি K গুণ বৃদ্ধি করা হয় তাহলে Q_a ও Q_b উভয়ই K^{r-1} গুণ বদলাবে তাই Q_a/Q_b অপরিবর্তিত থাকবে। যদি কোনো উপাদান মিশ্রণ (a_0, b_0) তে পূর্বনির্ধারিত উপাদানের দামের জন্য প্রথম পর্যায় শর্ত $P_a/P_b = Q_b/Q_a$ পূরণ হবে এবং বিস্তারপথটি সরলরেখা হবে।

যদিও যে কোনো সমপ্রাকৃতিক উৎপাদন অপেক্ষক থেকে সরলরৈখিক বিস্তারপথ পাওয়া যায়, সমপ্রকৃতির নির্দিষ্ট মাত্রার উপর বিস্তারপথের ব্যাখ্যা নির্ভর করে। রেখাচিত্র নং (২.১৩ খ) এমনভাবে আঁকা হয়েছে যে OE EE´র দ্বিগুণ অর্থাৎ E´ বিন্দুতে E বিন্দুর থেকে উপাদান গুলির মাত্রা দেড়গুণ করা হয়েছে। এবার যদি উৎপাদন অপেক্ষকটি প্রথম মাত্রার সমপ্রাকৃতিক হয় তাহলে E´ এর উৎপাদন (Q_1 বরাবর) E এর

উৎপাদনের দেড়গুণ $[(1.5)^1 = 1.5]$ হবে। কিন্তু যদি সমপ্রকৃতির মাত্রা 2 হয় তাহলে E´ এর উৎপাদন (Q_1 বরাবর), E এর উৎপাদনের সোয়া দুগুণ $[(1.5)^2 = (2.25)]$ হবে। তাই একই Q_1 বরাবর উৎপাদন কত হচ্ছে তা নির্ভর করবে সমপ্রকৃতির মাত্রার উপর। সমপ্রকৃতির মাত্রার উপরই তাই নির্ভর করবে Q = 1, Q = 2 ইত্যাদির জন্য বিভিন্ন সমোৎপাদন রেখার পরস্পরের মধ্যেকার দূরত্ব কত হবে।

২.২৫ প্রতিস্থাপন স্থিতিস্থাপকতা (Elasticity of Substitution)

তুলনামূলক স্থিতির আরেকটি দিক হল P_a/P_b বদলালে Q_0 উৎপাদন করার জন্য সর্বনিম্ন ব্যয় মিশ্রণ $\frac{\overline{b}}{\overline{a}}$ কীভাবে বদলাবে।

যখন বহির্নির্ণীত দাম অনুপাত $\frac{P_a}{P_b}$ বৃদ্ধি পায় সাধারণভাবে আশা করা যেতে পারে যে $\frac{\overline{b}}{\overline{a}}$ ও বৃদ্ধি পাবে কারণ এবার উপাদান b তুলনামূলকভাবে সস্তা হয়ে গেছে এবং প্রতিষ্ঠানের মালিক তাই a এর পরিবর্তে b ব্যবহার করবে।

প্রতিস্থাপনের রকমটি এক্ষেত্রে পরিষ্কার কিন্তু কতটা প্রতিস্থাপন হবে তা এখনও স্পষ্ট নয়। এই প্রতিস্থাপনের নির্দিষ্ট মাত্রা কতটা তা বুঝতে গেলে প্রতিস্থাপন স্থিতিস্থাপকতা (এটি একটি বিন্দু স্থিতিস্থাপকতা) পরিমাপ করতে হয়। প্রতিস্থাপন স্থিতিস্থাপকতাকে গ্রীক্ অক্ষর ছোট সিগ্‌মা (sigma) বা σ দিয়ে লেখা হয়।

$$\sigma \equiv \frac{\left(\overline{b}/\overline{a}\right) \text{ এ তুলনামূলক পরিবর্তন}}{\left(\frac{P_a}{P_b}\right) \text{ তে তুলনামূলক পরিবর্তন}} \qquad \text{............(২.৪৮)}$$

$$= \frac{d\left(\overline{b}/\overline{a}\right) / \overline{b} / \overline{a}}{d(P_a/P_b)/P_a/P_b}$$

$$= \frac{d\left(\overline{b}/\overline{a}\right) / d(P_a/P_b)}{\frac{\overline{b}/\overline{a}}{P_a/P_b}}$$

σ এর মান 0 এবং α এর মধ্যে যা কিছুই হতে পারে। σ যত বড় হবে দুটি উপাদানের মধ্যে ততই বেশি স্থিতিস্থাপকতা থাকবে $\sigma = 0$ মানে দুটি উপাদানের মধ্যে কোনো প্রতিস্থাপন সম্ভব নয় যার অর্থ হল দুটি উপাদান কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট অনুপাতেই ব্যবহার করা যায় —অর্থাৎ তারা পরস্পরের পরিপূরক (Complementary) অন্যদিকে যদি σ অসীম হয় সেক্ষেত্রে দুটি উপাদান পরস্পরের যথার্থ পরিবর্ত (perfect substitute)। যদি $\left(\overline{b/a}\right)$ কে (P_a/P_b) এর অপেক্ষক ধরা যায় তাহলে σ হবে প্রান্তিক অপেক্ষক ও গড় অপেক্ষকের অনুপাত।

উদাহরণস্বরূপ সাধারণ কব্‌ডগ্‌লাস্ উৎপাদন অপেক্ষকের জন্য প্রতিস্থাপন স্থিতিস্থাপকতা নির্ধারণ করা যাক। এই ক্ষেত্রে উপাদানের সর্বনিম্ন ব্যয়মিশ্রণটি হল

$$\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{P_a}{P_b}\right) \qquad [\,(২.৪৭)\ \text{থেকে}\,]$$

এই সমীকরণটি $y = kx$ রূপে লেখা হয়েছে। এখন $y = kx$ এর গড় মান $\frac{y}{x} = k$ এবং প্রান্তিক মান $\frac{dy}{dx} = k$ ।

$$\text{তার মানে} \quad \frac{d\left(\overline{b/a}\right)}{d(P_a/P_b)} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{আবার} \quad \frac{\overline{b/a}}{P_a/P_b} = \frac{\beta}{\alpha}$$

এই মানগুলিকে (২.৪৮) এ প্রতিস্থাপন করলে $\sigma = 1$ হয়। অতএব সাধারণ কবডগলাস অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য হল ধ্রুবক একক প্রতিস্থাপন স্থিতিস্থাপকতা। এই ফলাফলটিও কোনোভাবে $\alpha + \beta = 1$ এর উপর নির্ভরশীল নয়। তাই $\alpha + \beta \neq 1$ হলেও $Q = Aa^{\alpha} b^{\beta}$ উৎপাদন অপেক্ষকের প্রতিস্থাপন স্থিতিস্থাপকতা একক হবে।

২.২৬ সারাংশে

কোনো অর্থনৈতিক একক যথা একজন ভোক্তা বা একটি প্রতিষ্ঠান যখন উদ্দেশ্যমূলকভাবে একটি নির্দিষ্ট ভারসাম্য অবস্থার দিকে এগোয় তাকে বলা হয় লক্ষ্য ভারসাম্য (goal equilibrium)। এ সকল ক্ষেত্রে সর্বাধিক অনুকূল অবস্থা নির্ণায়ক (optimisation) পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়।

- সর্বাধিক অনুকূল মান নির্ণয় করার অর্থ কোনো কিছুর চরম বা অবম মান নির্ণয় করা। চরম ও অবম মানকে একসঙ্গে প্রান্তবর্তী (extreme) মান বলা হয়।

- অনুকূল মান নির্ণয় করার জন্য একটি নির্দিষ্ট অপেক্ষক বের করতে হয় তাকে বলা হয় লক্ষ্য অপেক্ষক (objective function)। এই অপেক্ষকের স্বাধীন চলগুলির ভিন্ন ভিন্ন মান বাছাই করে লক্ষ্য অপেক্ষকের সর্বাধিক অনুকূল মান নির্ণয় করা হয়। সেই কারণে এই স্বাধীন চলগুলিকে বাছাই চল (Choice variable) বলে।

- ধ্রুবক অপেক্ষকের ক্ষেত্রে যে কোনো বিন্দুকেই চরম বা অবম মান বলা যায়। একদিষ্ট আরোহী (অবরোহী) অপেক্ষকের কোনো সসীম চরম (অবম) [finite maximum (minimum)] মান থাকেনা।

- তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান হল সেই বিন্দুগুলির নিকটবর্তী অঞ্চলের মধ্যে যেগুলি অবম বা চরম। যে কোনো অপেক্ষকে বহু তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান থাকতে পারে যার মধ্যে কিছু চরম আবার কিছু অবম। একটি অপেক্ষকের যদি সবকটি চরম (অবম) মান জানা যায় তবে তার মধ্যে বৃহত্তম (ক্ষুদ্রতম) মানটি হবে পরম বৃহত্তম (ক্ষুদ্রতম) [absolute maximum (minimum)]।

- $y = f(x)$ অপেক্ষকের যে বিন্দুতে $f'(x) = 0$, তাকে বলা হয় অনড় বিন্দু (stationary point)। অনড় বিন্দু দুরকমের (ক) পথচ্যুতি বিন্দু এবং (খ) প্রান্তবর্তী বিন্দু। তুলনামূলক প্রান্তবর্তী বিন্দুকে অনড় বিন্দু হতেই হবে কিন্তু যে কোনো অনড় বিন্দুই প্রান্তবর্তী বিন্দু নয়।

- $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ হল দ্বিতীয় অন্তরকলজ বা অন্তরকলজের অন্তরকলজ। প্রথম অন্তরকলজ দিয়ে পরিবর্তনের হার মাপা হয়—দ্বিতীয় অন্তরকলজটি হল এই পরিবর্তনের হারের পরিবর্তনের হার।

- $f'(x) = 0$ হলে এবং $f''(x) < 0$ (>0) হলে তুলনামূলক চরম (অবম) মান পাওয়া যাবে। এটিই হল দ্বিতীয় পর্যায় শর্ত (second order condition)।

- একাধিক বাছাই চল থাকলে যে চলটি বদলাচ্ছে তার সাপেক্ষে দ্বিতীয় আংশিক অন্তরকলজটি দেখতে হবে।

- $Z = f(x, y)$ এর প্রান্তবর্তী মানের জন্য $f_x = f_y = 0$ হতেই হবে। f_{xx}, $f_{yy} < 0$ (>0) এবং $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2$ হলে মানটি চরম (অবম) হবে। n চলের ক্ষেত্রে এই সূত্রটি প্রসারণ করা যায়।

- দ্বিতীয় পর্যায়ের আংশিক অন্তরকলজের ছকটিকে বলা হয় হেসিয়ান ছক (Hessian determinant)।

- কোনো নিয়ন্ত্রণ সাপেক্ষে যখন সর্বাধিক অনুকূল অবস্থা নির্ধারণ করা হয় তাকে বলা হয় নিয়ন্ত্রিত সর্বাধিক অনুকূল অবস্থা নির্ণায়ক পদ্ধতি (Constrained optimisation technique)। এক্ষেত্রে বাছাই চলগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ নয়।

- ল্যাগ্রাঞ্জ গুণক পদ্ধতির মাধ্যমে নিয়ন্ত্রিত প্রান্তবর্তী মান নির্ধারণের সমস্যাকে এমন একটি রূপে পরিবর্তিত করা হয় যাতে অনিয়ন্ত্রিত প্রান্তবর্তী মান নির্ধারণের প্রথম পর্যায় শর্ত প্রয়োগ করা যায়।

- ল্যাগ্রাঞ্জ্ গুণকটির নির্নীত মান হল লক্ষ্য অপেক্ষকের সর্বাধিক অনুকূল মানের উপর নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকের প্রভাবের পরিমাপ।

- ল্যাগ্রাঞ্জ পদ্ধতিতে দ্বিতীয় পর্যায় শর্তটি বেষ্টিত হেসিয়ান (bordered Hessian) ছক $|\overline{H}|$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

- নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষক $g(x, y) = c$ সাপেক্ষে লক্ষ্য অপেক্ষক $z = f(x, y)$ এর সর্বাধিক অনুকূল মানের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের অপেক্ষক (lagrangean function) হবে $z = f(x, y) - \lambda\,[c - g(x, y)]$। এখানে λ হল ল্যাগ্রাঞ্জ্ গুণক।

- নিয়ন্ত্রিত সর্বাধিক অনুকূল অবস্থা নির্ণায়ক পদ্ধতিতে লক্ষ্য অপেক্ষক $z = f(x, y) - \lambda[c - g(x, y)]$ এর প্রান্তবর্তী মানের জন্য $z_\lambda = z_x = z_y = 0$ হতেই হবে।

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & z_{xx} & z_{xy} \\ g_y & z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} > 0\ (< 0)$$ হলে লক্ষ্য অপেক্ষকের মান তুলনামূলক চরম (অবম) হবে।

- কোনো একটি অপেক্ষকের সবকটি স্বাধীন চলকে K দিয়ে গুণ করার ফলস্বরূপ যদি অপেক্ষকের মান k^r অনুপাতে পরিবর্তিত হয় তাহলে অপেক্ষকটিকে r মাত্রার (degree) সমপ্রাকৃতিক (homogeneous) অপেক্ষক বলা হয়।

- $r = 1$ হলে তাকে রৈখিক সমপ্রকৃতি (linear homogeneity) বলা হয়।

- রৈখিক সমপ্রাকৃতিক উৎপাদন অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দুটি উপাদানের গড় ও প্রান্তিক বাস্তব উৎপাদনশীলতা উভয়কেই কেবলমাত্র উপাদান দুটির অনুপাতের অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

- রৈখিক সমপ্রাকৃতিক উৎপাদন অপেক্ষকের ক্ষেত্রে যদি দুটি উপাদানকেই তাদের নিজ নিজ প্রান্তিক উৎপাদনশীলতার সমান পারিশ্রমিক দেওয়া হয় তাহলে মোট উৎপাদন সম্পূর্ণ খরচ হয়ে যাবে। এক্ষেত্রে কোনো অর্থনৈতিক মুনাফা থাকবে না।

- উপাদানের দামগুলি স্থির ধরে বিভিন্ন উৎপাদন স্তরের জন্য উপাদানের যে সর্বনিম্ন ব্যয় মিশ্রণ পাওয়া যায় তার সঞ্চার পথটিই (locus) প্রতিষ্ঠানের বিস্তার পথ (expansion path)।

উপাদান-মূল্য অনুপাত (factor price ratio) পরিবর্তিত হলে তার জন্য একই উৎপাদন স্তরে সর্বনিম্ন ব্যয় মিশ্রণের পরিবর্তন কী রকম হবে তা প্রতিস্থাপন স্থিতিস্থাপকতা (elasticity of substitution) σ দিয়ে পরিমাপ করা হয়।

১.১২ অনুশীলনী

ছোট প্রশ্ন

১। লক্ষ্য অপেক্ষক কাকে বলে?

২। তুলনামূলক ও পরম প্রান্তবর্তী মানের পার্থক্য আলোচনা করুন।

৩। অনড় বিন্দু কী? এটিই কি প্রান্তবর্তী বিন্দু?

৪। পথচ্যুতি বিন্দু কাকে বলে?

৫। দ্বিতীয় অন্তরকলজ দিয়ে কী পরিমাপ করা হয়?

৬। কোনো রেখা উত্তল বা অবতল হওয়ার শর্তগুলি কী কী?

৭। সূচকীয় অপেক্ষক $y = b^t$ তে b এর মানের উপর কী শর্ত আরোপ করা হয় এবং কেন?

৮। ইয়ং এর উপাপাদ্যটি কী?

৯। হেসিয়ান ছক কাকে বলে?

১০। বেষ্টিত হেসিয়ান ছক কখন ব্যবহার করা হয়?

১১। ল্যাগ্রাঞ্জ গুণক পদ্ধতি কখন ব্যবহার করা হয় এবং কেন?

১২। ল্যাগ্রাঞ্জ গুণকের ব্যাখ্যা কী?

১৩। সমপ্রাকৃতিক অপেক্ষক কাকে বলে?

১৪। রৈখিক সমপ্রাকৃতিক অপেক্ষকের রূপটি লিখুন।

১৫। বিস্তারপথ কাকে বলে?

১৬। প্রতিস্থাপন স্থিতিস্থাপকতা কী?

বড় প্রশ্ন

১। উদাহরণসহ সর্বাধিক অনুকূল মান নির্ণায়ক পদ্ধতি আলোচনা করুন।

২। তুলনামূলক প্রান্তবর্তী মান নির্ণয় করার ক্ষেত্রে প্রথম অন্তরকলজ পরীক্ষার গুরুত্ব আলোচনা করুন। এই প্রসঙ্গে দেখান যে প্রান্তবর্তী বিন্দু মানেই অনড় বিন্দু কিন্তু অনড় বিন্দু মানেই প্রান্তবর্তী বিন্দু নয়।

৩। দ্বিতীয় অন্তরকলজ কাকে বলে? দ্বিতীয় অন্তরকলজ থেকে কী করে রেখার বক্রতা বোঝা যায় তা আলোচনা কর। প্রান্তবর্তী মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে দ্বিতীয় অন্তরকলজের ভূমিকা কী?

৪। একটি প্রতিষ্ঠানের মোট ব্যয় (c) ও চাহিদা (Q) অপেক্ষক নীচে দেওয়া হল।

$$c = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 11Q + 50$$

(ক) Q এর ভিত্তিতে মোট আয় অপেক্ষক R কী হবে?

(খ) মোট মুনাফা অপেক্ষক π লিখুন।

(গ) মুনাফা সর্বাধিক করার জন্য Q কে কত হতে হবে?

(ঘ) সর্বাধিক মুনাফা কত?

(ঙ) প্রান্তিক ব্যয় ও প্রান্তিক আয় অপেক্ষক দুটি বের করে তাদের সমতা থেকে Q এর সর্বাধিক অনুকূল মান নির্ণয় করুন। (গ) থেকে প্রাপ্ত $\overline{Q}$ আর এক্ষেত্রে প্রাপ্ত $\overline{Q}$ কী সমান?

৫। $y = f(t)$ [যেখানে t = সময়] হলে দেখান যে তাৎক্ষণিক ক্রমবৃদ্ধির হারকে প্রান্তিক ও মোট অপেক্ষকের অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

৬। যদি ভোগ C এর ক্রমবৃদ্ধির হার α এবং জনসংখ্যা H (heads বা মাথা অর্থে) এর ক্রমবৃদ্ধির হার β হয় তাহলে মাথাপিছু ভোগের ক্রমবৃদ্ধির হার কী হবে? [সূত্র—দুটি অপেক্ষকের সংমিশ্রণের ক্ষেত্রে ক্রমবৃদ্ধির হার নির্ধারণের নিয়মাবলী দ্রষ্টব্য]

৭। $Q = k/p$ [k ধনাত্মক ধ্রুবক] চাহিদা অপেক্ষক হলে তার বিন্দু স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় করুন।

৮। একাধিক বাছাই চল থাকলে সর্বাধিক অনুকূল অবস্থা নির্ণায়ক পদ্ধতিতে প্রথম ও দ্বিতীয় পর্যায় শর্তগুলি কী হবে তা বিস্তারিতভাবে আলোচনা করুন।

৯। একাধিক চলবিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দ্বিতীয় পর্যায় পূর্ণ অবকলকে কীভাবে দ্বিঘাতরূপে লেখা যায় তা ব্যাখ্যা করুন। এই রূপটির বিভিন্ন চিহ্ন ও তার অন্তর্নিহিত অর্থ সম্বন্ধে আলোচনা করুন।

১০। একটি ত্রিপণ্যবিশিষ্ট একচেটিয়া প্রতিষ্ঠানের আয় অপেক্ষকগুলি হল যথাক্রমে

$$P_1 = 63 - 4Q_1$$

$$P_2 = 105 - 5Q_2$$

এবং $P_3 = 75 - 6Q_3$।

এই প্রতিষ্ঠানের মোট ব্যয় অপেক্ষক $C = 20 + 15Q$ $(Q = Q_1 + Q_2 + Q_3)$ ।

প্রতিষ্ঠানটির মুনাফা সর্বাধিক করার জন্য Q_1, Q_2 ও Q_3 এবং Q কে কত হতে হবে?

১১। একটি দ্বিপণ্যবিশিষ্ট প্রতিষ্ঠানের চাহিদা অপেক্ষক দুটি হল যথাক্রমে $Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2$ এবং $Q_2 = 35 - P_1 - P_2$। এই প্রতিষ্ঠানটির মোট ব্যয় অপেক্ষক $C = Q_1^2 + 2Q_2^2 + 10$।

(ক) কোন্ কোন্ উৎপাদন স্তরের জন্য মুনাফার চরম মানের জন্য প্রয়োজনীয় (necessary) শর্তটি পূরণ হবে?

(খ) দ্বিতীয় পর্যায় শর্তটি পূরণ হচ্ছে কিনা দেখান।

(গ) মুনাফার চরম মান কত?

১২। ধরুন কোনো একচেটিয়া কারবারীর চাহিদা ও ব্যয় অপেক্ষক হল যথাক্রমে $P = 100 - 3Q + 4\sqrt{A}$ এবং $C = 4Q^2 + 10Q + A$ [A হল তার বিজ্ঞাপনের উপর ব্যয়]। সর্বাধিক মুনাফা অর্জনের জন্য A, Q ও P এর মান কত হওয়া প্রয়োজন? দ্বিতীয় পর্যায় শর্তগুলি পূরণ হচ্ছে কিনা দেখান।

১৩। নিয়ন্ত্রিত সর্বাধিক অনুকূল মান নির্ণায়ক পদ্ধতি কাকে বলে? এই পদ্ধতির ক্ষেত্রে প্রথম ও দ্বিতীয় পর্যায় শর্তগুলি কীভাবে নির্ণয় করা হয় তা আলোচনা করুন।

১৪। ল্যাগ্রাঞ্জ গুণক কাকে বলে? নিয়ন্ত্রিত সর্বাধিক অনুকূল মান নির্ণায়ক পদ্ধতিতে এই গুণকের ভূমিকা কী তা উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

১৫। ল্যাগ্রাঞ্জ গুণকের অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা দিন।

১৬। ধরুন $u = (x + 2)(y + 1)$, $P_x = 2$, $P_y = 5$, $B = 51$।
[u = উপযোগ ; x ও y দুটি দ্রব্য ; P_x, P_y যথাক্রমে x ও y এর দাম, B = মোট বাজেট।]

(ক) ল্যাগ্রাঞ্জের অপেক্ষকটি লিখুন।

(খ) x ও y এর সর্বাধিক অনুকূল মান $\overline{x}$ ও $\overline{y}$ নির্ণয় করুন।

(গ) এক্ষেত্রে কী চরম মানের দ্বিতীয় পর্যায় শর্তটি পূরণ হচ্ছে?

১৭। ধরুন উপযোগ অপেক্ষকটি (১৬) নং প্রশ্নের মতই আছে কিন্তু P_x, P_y বা B এর কোনো নির্দিষ্ট মান দেওয়া নেই। এক্ষেত্রে

(ক) ল্যাগ্রাঞ্জের অপেক্ষকটি লিখুন।

(খ) P_x, P_y এবং B এর ভিত্তিতে $\overline{x}$ ও $\overline{y}$ এবং $\overline{\lambda}$ এর মান নির্ণয় করুন।

(গ) চরমমানের দ্বিতীয় পর্যায় শর্ত পূরণ হচ্ছে কিনা দেখান।

(ঘ) এবার $P_x = 2$, $P_y = 5$ এবং $B = 51$ প্রতিস্থাপন করে (১৬) নং প্রশ্নের উত্তরের বৈধতা যাচাই করুন।

১৮। সমপ্রাকৃতিক অপেক্ষক কাকে বলে? রৈখিক সমপ্রকৃতি কী? কোনো উৎপাদন অপেক্ষককে রৈখিক সমপ্রকৃতি থাকলে তার বৈশিষ্ট্যগুলি কী হবে প্রমাণসহ আলোচনা করুন।

১৯। অয়েলারের উপপাদ্যটি প্রমাণ করুন। এটির অর্থনৈতিক তাৎপর্য আলোচনা করুন।

২০। কব্ ডগলাস উৎপাদন অপেক্ষকের সাধারণ রূপটি কী?

(ক) এটির সমপ্রকৃতির মাত্রা নির্ণয় করুন।

(খ) কখন এটি রৈখিক সমপ্রাকৃতিক হবে?

(গ) দেখান যে এর সমোৎপাদন রেখাগুলির ঢাল সর্বত্র ঋণাত্মক এবং উপাদানের সমস্ত ধনাত্মক মানের জন্য যথার্থ উত্তল।

২১। একটি প্রতিষ্ঠান কীভাবে উপাদানের সর্বনিম্ন ব্যয় মিশ্রণ নির্ণয় করে তা আলোচনা করুন। এর প্রথম পর্যায় শর্তটির অর্থনৈতিক তাৎপর্য আলোচনা করুন।

২২। বিস্তারপথ কাকে বলে? বিস্তারপথ কীভাবে নির্ণয় করা হয় তা ব্যাখ্যা করুন।

২৩। প্রতিস্থাপন স্থিতিস্থাপকতা কাকে বলে? প্রতিস্থাপন স্থিতিস্থাপকতা নির্ণায়ক পদ্ধতিটি আলোচনা করুন। কব্ ডগলাস উৎপাদন অপেক্ষকের ক্ষেত্রে এর মান কত হবে তা দেখান।

২৪। ধরুন উৎপাদন অপেক্ষক $Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$। যদি উপাদানের দাম P_k ও P_L হয়, দেখান যে বিস্তারপথটি হবে $(1 - \alpha)\, P_k.K - \alpha P_L.\, L = 0$।

২৫। $X = 15L^{4/5}K^{1/5}$ এবং $X = 50L^{2/3}K^{2/3}$ এই দুটি ক্ষেত্রেই প্রতিস্থাপন স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় করুন। প্রাপ্ত ফলের কোনো ক্ষেত্রে আশ্চর্যজনক কিছু আছে কী?

একক ৩ ☐ অর্থনৈতিক গতিবিজ্ঞান (Economic dynamics)—অবকল সমীকরণ (Differential equation) ও অন্তরফল সমীকরণ (Difference equation) এবং তাদের প্রয়োগ।

গঠন

৩.০ প্রস্তাবনা

ডোমার মডেলে অধীন চলটির গতিপথ নির্ণয় করার জন্য অবিচ্ছিন্ন সময় ধরে অবকল সমীকরণ সমাধান করা হয়েছিল। সময়কে অবিচ্ছিন্ন ধরলে অবকল সমীকরণ ব্যবহার করা হয়। কিন্তু সময় যদি বিচ্ছিন্ন হয় সেক্ষেত্রে অধীন চলটির মান ভিন্ন ভিন্ন সময়বিন্দুতে পাওয়া যায় তাদের অন্তরফল থেকে পরিবর্তন পরিমাপ করা হয়। সেক্ষেত্রে অন্তরকলজের পরিবর্তে অন্তরফল ব্যবহৃত হয় এসব ক্ষেত্রে অধীন চলটির গতিপথ নির্ণয় করার জন্য অন্তরফল সমীকরণ ব্যবহার করতে হয়।

৩.১ অবকল সমীকরণ তার পর্যায় ও মাত্রা (Differential equation, its order and degree)

যে সমীকরণে কোনো অপেক্ষকের অবকল (differential) কিংবা অন্তরকলজ বা অবকলসহগ (derivative or differential coefficient) থাকে সেই সমীকরণকে অবকল বা অন্তরকল সমীকরণ (differential equation) বলা হয়।

কোনো অবকল সমীকরণে অবকল বা অন্তরকলজের যে সর্বোচ্চ পর্যায় থাকে তাকে সমীকরণের পর্যায় (order) বলা হয়। যেমন $x\frac{dx}{dy} = 2y$ সমীকরণটির পর্যায় এক। এগুলিকে প্রথম পর্যায় (first order) অবকল সমীকরণ বলা হয়ে থাকে।

সমীকরণটিতে সর্বোচ্চ পর্যায়ের অন্তরকলজের ঘাতটিকে (Power) তার মাত্রা (degree) বলা হয়। যেমন $(y - x)\frac{dy}{dx} = 2y^2$ সমীকরণের মাত্রা এক, আবার $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} = x^2$ সমীকরণটির মাত্রা দুই কারণ $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ এর সর্বোচ্চ ঘাত দুই। যদি কোনো সমীকরণে অন্তরকলজটি এবং অধীন চল y উভয়ের মাত্রাই এক হয় এবং কোনো গুণফল রাশি $\left[\text{যেমন } y\left(\frac{dy}{dt}\right)\right]$ না থাকে তাহলে সমীকরণটিকে রৈখিক (linear) বলা হয়। অতএব সাধারণভাবে রৈখিক অবকল সমীকরণের রূপটি হবে

$$\frac{dy}{dt} + u(t).\, y = w(t) \quad \ldots\ldots(৩.১)।$$

এক্ষেত্রে y, u, w সবগুলিই t এর অপেক্ষক। $\frac{dy}{dt}$ বা y এর মতন অবশ্য u বা w এর উপর কোনো শর্ত আরোপ করা হচ্ছে না। সুতরাং u বা w t^2, e^t ইত্যাদি যা কিছুই হতে পারে। u অপেক্ষক (অধীন চল y এর সহগ) যদি ধ্রুবক হয় এবং w একটি যোজ্য (additive) ধ্রুবক হয় তাহলে (৩.১) একটি বিশেষ ধরনের প্রথম পর্যায়ের রৈখিক অবকল সমীকরণ হয়ে যাবে যার সহগ ও রাশি দুটিই ধ্রুবক।

৩.২ সমপ্রাকৃতিক অবকল সমীকরণ (Homogeneous differential equation)

যদি u ও w উভয়েই ধ্রুবক অপেক্ষক এবং w = 0 হয় তাহলে (৩.১) নং সমীকরণটি হবে

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0 \ldots\ldots\ldots (৩.২)$$ [a এখানে যে কোনো ধ্রুবক]

এই অবকল সমীকরণটিকে সমপ্রাকৃতিক বলা হয়।

সমীকরণ (৩.২) কে $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = -a$ .... (৩.২´) লেখা যায়।

ডোমারের সমীকরণের রূপটি ঠিক এই রকমই ছিল। [১.১২ নং অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য]। অতএব সেই একইভাবে (৩.২) বা (৩.২´) এর সমাধান করা যায়।

এই সমাধানগুলি হল

$y(t) = Ae^{-at}$ .... (৩.৩) [সাধারণ সমাধান (general solution)]

অথবা $y(i) = y(o)e^{-at}$ ....,, (৩.৩) [নির্দিষ্ট সমাধান (Particular solution)] সমাধান (৩.৩) এ A অনির্দিষ্ট ধ্রুবক (arbitrary constant) বলে এটি সাধারণ সমাধান। যখন A এর কোনো নির্দিষ্ট মান এতে প্রতিস্থাপন করা হবে তখন সেই সমাধানটি হবে (৩.২) এর নির্দিষ্ট সমাধান। Y(0) সহ A এর প্রতিটি সম্ভাব্য মানের জন্য একটি করে নির্দিষ্ট সমাধান থাকবে। তাই অসংখ্য নির্দিষ্ট সমাধান পাওয়া সম্ভব। কিন্তু একমাত্র y(0) মানের জন্যই সমাধানটি প্রাথমিক শর্ত (initial condition) পূরণ করবে। যেহেতু এক্ষেত্রে অনির্দিষ্ট ধ্রুবকটিকে নির্দিষ্ট করা হচ্ছে তাই (৩.৩´) কে (৩.২) বা (৩.২´) সমীকরণের নির্দিষ্ট সমাধান বলা হচ্ছে। অবকল সমীকরণ সমাধানের দুটি প্রধান বৈশিষ্ট্য হল (১) সমাধানটি কোনো সংখ্যা বা মান নয়। এটি

$y(t)$ এর অপেক্ষক। (২) $y(t)$ কোনো অবকল বা অন্তরকলজের উপর নির্ভরশীল নয়। তাই t এর নির্দিষ্ট মান বসালেই সেই t এর জন্য y এর মানটি পাওয়া যাবে।

৩.৩ অসমপ্রাকৃতিক অবকল সমীকরণ (Non-homogeneous differential equation)

যদি শূন্যের পরিবর্তে (৩.২) তে কোনো অন্য ধ্রুবক বসানো হয় তাহলে সেটি হবে অসমপ্রাকৃতিক অবকল সমীকরণ। —

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \text{.........} \quad (৩.৪)$$

এই সমীকরণের সমাধান হবে দুটি রাশির যোগফল—একটি পরিপূরক অপেক্ষক (complementary function) Y_c এবং অন্যটি নির্দিষ্ট সমাকল (particular integral) y_p। (৩.২) কে (৩.৪) এর রূপান্তরিত সমীকরণ (reduced equation) বলা হবে। y_c হল রূপান্তরিত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান এবং y_p হল সম্পূর্ণ সমীকরণটির যে কোনো নির্দিষ্ট সমাধান। যেহেতু y_c রূপান্তরিত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান, তাই

$$y_c = Ae^{-at} \quad [\text{ (৩.৩) থেকে }]$$

যেহেতু y_p সম্পূর্ণ সমীকরণটির যে কোনো নির্দিষ্ট সমাধান প্রথমে সমাধানের সবচেয়ে সহজ রূপটি চেষ্টা করে দেখা যাক। ধরা যাক y যে কোনো ধ্রুবক $(y = k)$। $(y = k)$ হলে $\frac{dy}{dt} = 0$। এক্ষেত্রে $ay = b$ হবে [(৩.৪) থেকে]।

অতএব $y = b/a$।

যতক্ষণ পর্যন্ত $a \neq 0$ ততক্ষণ পর্যন্ত এই সমাধানটি গ্রহণযোগ্য হবে। তাই $y_p = b/a \; [a \neq 0]$।

y_p ও y_c এর যোগফল হল সম্পূর্ণ সমীকরণ (৩.৪) এর সাধারণ সমাধান।

$y(t) = y_c + y_p = Ae^{-at} + \frac{b}{a} \; [a \neq 0]$ (৩.৫) অনির্দিষ্ট ধ্রুবক A এর উপস্থিতির কারণে এটিকে সাধারণ সমাধান বলা যায়। এই ধ্রুবকটিকে নির্দিষ্ট করার জন্য প্রাথমিক শর্ত আরোপ করা প্রয়োজন। ধরা যাক $t = 0$ হলে $y = y(0)$। (৩.৫) এ $t = 0$ প্রতিস্থাপন করলে

$$y(0) = Ae^{-a.0} + \frac{b}{a}$$

$$= A + \frac{b}{a} \text{ [যেহেতু } e^{-a.0} = e^0 = 1]$$

অথবা $A = y(0) - \frac{b}{a}$

A এর এই মান (৩.৫) এ প্রতিস্থাপন করে

$$y(t) = \left[y(O) - \frac{b}{a}\right]e^{-at} + \frac{b}{a}$$ (৩.৫´) লেখা যায়।

(৩.৫´) ই হবে $a \neq o$ এর ক্ষেত্রে সম্পূর্ণ সমীকরণ (৩.৪) এর নির্দিষ্ট সমাধান।

একটি উদাহরণ নিয়ে পদ্ধতিটি আলোচনা করা যাক।

উদাহরণ ১

$\frac{dy}{dt} + 2y = 6$ সমীকরণটির সমাধান করতে হবে। প্রাথমিক শর্ত হিসাবে দেওয়া আছে যে $y(0) = 10$। এক্ষেত্রে $a = 2$, $b = 6$। অতএব (৩.৫´) থেকে সমাধানটি হবে

$$y(t) = \left(10 - \frac{6}{2}\right) e^{-2t} + \frac{6}{2}$$

$$= (10 - 3)e^{-2t} + 3$$

এবার প্রশ্ন হল $a = 0$ হলে কী হবে? সেক্ষেত্রে অবকল সমীকরণটির রূপ হবে

$$\frac{dy}{dt} = b \quad .... (৩.৬)$$

সরাসরি সমাকলন করে এই সমীকরণটির সাধারণ সমাধান হবে $y(t) = bt + c$ .... (৩.৭)

[এখানে C অনির্দিষ্ট ধ্রুবক]

(৩.৭) এর উপাদান রাশি দুটিকে পরিপুরক অপেক্ষক ও নির্দিষ্ট রাশি হিসাবে চিহ্নিত করা যায়। a = C হওয়ার কারণে

$y_c = Ae^{-at} = Ac^0 = A$ (A একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক) $a = 0$ বলে y এর ধ্রুবক সমাধান $(y = k)$ হওয়া সম্ভব নয়। তাই এক্ষেত্রে অধ্রুবক সমাধান চেষ্টা করা উচিত। ধরা যাক $y = kt$ । $y = kt$ হলে $\frac{dy}{dt} = k$। সেক্ষেত্রে সম্পূর্ণ সমীকরণ (৩.৬) k কে b তে পরিণত করবে। অতএব $y = bt$ [$a = 0$] লেখা সম্ভব। এক্ষেত্রে (৩.৬) এর সাধারণ সমাধান হবে $y(t) = y_c + y_p = A + bt$ ………… (৩.৭´) [$a = 0$ হলে সাধারণ সমাধান]। এটি (৩.৭) এরই মতন কারণ C ও A দুটিই অনির্দিষ্ট ধ্রুবক। কিন্তু এক্ষেত্রে y_c ধ্রুবক এবং y_p t এর অপেক্ষক। (৩.৫) এ ঠিক এর বিপরীত ছিল। অনির্দিষ্ট ধ্রুবকটির নির্দিষ্ট মান প্রতিস্থাপন করে নির্দিষ্ট সমাধান $y(t) = y(0) + ft$ ………(৩.৭´´) পাওয়া সম্ভব। এটি হল $a = 0$ ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট সমাধান।

৩.৪ অর্থনৈতিক প্রয়োগ : বাজারদরের গতিবিজ্ঞান (Dynamics of market price)

ধরা যাক একটি পণ্যের চাহিদা ও যোগান অপেক্ষক দুটি হল যথাক্রমে,

$$\left.\begin{aligned} &Q_d = a - bP && (a, b > 0) \\ \text{ও}\quad &Q_s = -c + mP && (c, m > 0) \end{aligned}\right\} \quad (৩.৮)$$

ভারসাম্যের জন্য $Q_d = Q_s$ হওয়া আবশ্যক। তার অর্থ হল

$$a - bP = -c + mP$$

অথবা $\overline{P} = \frac{a + c}{b + m}$ ………(৩.৯) হবে ভারসাম্য দাম। যেহেতু a, b, c ও m সবগুলিই ধনাত্মক ধ্রুবক, $\frac{a + c}{b + m}$ ও ধনাত্মক ধ্রুবক হবে। অতএব $\overline{P}$ হল কোনো ধনাত্মক ধ্রুবক। যদি প্রাথমিক দাম P(O) ঠিক $\overline{P}$ এর সমান হয় তাহলে তাৎক্ষণিকভাবে বাজারে ভারসাম্য থাকবে এবং কোনো গতিবিজ্ঞানভিত্তিক বিশ্লেষণ প্রয়োজন হবে না। $P(O) \neq \overline{P}$ হলে যদি কখনো $\overline{P}$ এ পৌঁছানো আদৌ সম্ভবপর হয় তাহলে সেটি হবে একটি সমন্বয়সাধন প্রক্রিয়ার মাধ্যমে। যতদিন এই প্রক্রিয়া চলবে ততদিন শুধু দামেরই পরিবর্তন ঘটবে তাই নয়, দামের অপেক্ষক হওয়ার ফলস্বরূপ Q_d ও Q_s ও পরিবর্তিত হবে। এই পরিপ্রেক্ষিতে অতএব সমস্ত দাম ও পরিমাণ চলগুলিকে সময়ের অপেক্ষক হিসাবে ধরা যায়।

এবার যে প্রশ্নটি স্বাভাবিকভাবেই উঠে আসে তা হল যে যদি এই প্রক্রিয়াকে তার নিজস্ব গতিতে চলতে দেওয়া যায় তাহলে কী শেষ পর্যন্ত দাম ভারসাম্য স্তর অর্থাৎ $\overline{P}$ এ পৌঁছাবে অর্থাৎ $t \rightarrow \alpha$ হলে দামের সময়পথ $P(t)$ কী $\overline{P}$ এর দিকে যাবে?

সময়পথ

ধরা যাক সময়ের সাপেক্ষে দামের পরিবর্তনের হার তৎকালীন বাড়তি চাহিদার (excess demand $Q_d - Q_s$) সঙ্গে সরাসরি আনুপাতিক। তার অর্থ হল

$$\frac{dp}{dt} = \alpha (Q_d - Q_s) \; (\alpha > 0) \qquad \text{.........} (৩.১০)$$

α হল সমন্বয় সহগ (adjustment co-efficient)। এরকম সমন্বয় প্রক্রিয়াতে $(Q_d - Q_s) = 0$ হলে এবং একমাত্র $(Q_d - Q_s) = 0$ হলেই $\frac{dp}{dt} = 0$ হবে। এখানে মনে রাখা প্রয়োজন যে ভারসাম্য দাম কথাটির দুরকম অর্থ করা যেতে পারে। একটি হল সময়ান্তরগত (inter-temporal) অর্থ যেখানে সময়ের সঙ্গে P বদলাচ্ছে না এবং অন্যটি হল বাজার-পরিষ্কারক (market-clearing) অর্থ যেখানে ভারসাম্য দাম মানে সেই দামে Q_d ও Q_s সমান। এই মডেলে দুই অর্থেই কথাটি ব্যবহার করা যায় কিন্তু সবসময়ে তা নাও করা যেতে পারে।

(৩.৮) এর চাহিদা ও যোগান অপেক্ষকের মাধ্যমে (৩.১০) কে

$$\frac{dp}{dt} = \alpha (a - bp + c - mp)$$

$$= \alpha (a + c) - \alpha(b + m)p \text{ লেখা যায়।}$$

অথবা $$\frac{dp}{dt} + \alpha(b + m)p = \alpha(a + c) \qquad \text{.........} (৩.১০)$$

এটির রূপ ঠিক (৩.৪) এর অবকল সমীকরণটির মত এবং P এর সহগ শূন্য নয়, তাই (৩.৫´) সূত্রটি সরাসরি প্রয়োগ করা যেতে পারে।

$$P(t) = \left[P(O) - \frac{a + c}{b + m}\right] e^{-\alpha(b + m)t} + \frac{a + c}{b + m} \qquad \text{.........} (৩.১১)$$

$$= \left[P(O) - \overline{P}\right] e^{-kt} + \overline{P} \quad [\text{এখানে } k = \alpha(b + m)]$$

৩.৫ ভারসাম্যের গতিবিজ্ঞানভিত্তিক স্থিতিশীলতা (Dynamics stability of equilibrium)

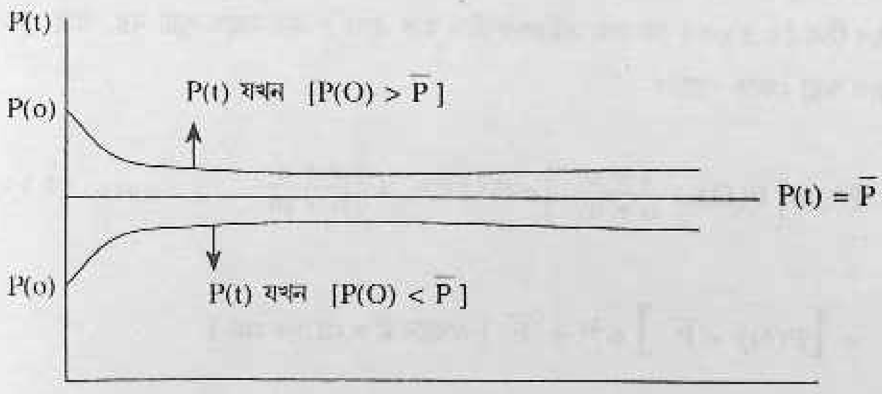
যদি $t \longrightarrow \alpha$ হলে $P(t) \longrightarrow \overline{P}$ হতে হয় তাহলে $t \longrightarrow \alpha$ হলে $[P(0) - \overline{P}]\, e^{-kt} \longrightarrow 0$ হতে হবে। $P(0)$ এবং $\overline{P}$ দুটিই ধ্রুবক বলে বিষয়টি নির্ভর করবে e^{-kt} এর উপর। $k > 0$ বলে $t \longrightarrow \alpha$ হলে $e^{-kt} \longrightarrow 0$ হবে। ফলস্বরূপ মডেলের বাকী পূর্বশর্তগুলি নিলে দামের সময়পথ তাকে ভারসাম্য অবস্থার দিকে নিয়ে যাবে। এই ধরনের ক্ষেত্রগুলিতে যেখানে প্রাসঙ্গিক চল $P(t)$ এর সময়পথ তাকে একটানাভাবে $\overline{P}$ এর দিকে নিয়ে যায়, ভারসাম্যটি গতিবিজ্ঞানের ভিত্তিতে স্থিতিশীল (dynamically stable)। এখানে $\overline{P}$ সময়গত অর্থেই ভারসাম্য দাম।

$P(0)$ এবং $\overline{P}$ এর তুলনামূলক মানের ভিত্তিতে (৩.১১) তে তিনটি সম্ভাবনা থাকতে পারে—

(ক) $P(0) = \overline{P}$ যার অর্থ $[P(0) - \overline{P}] = 0$ বা $P(t) = \overline{P}$। সেক্ষেত্রে দামের সময়পথটি একটি অনুভূমিক সরলরেখা হবে। নীচের (৩.১) নং রেখাচিত্রে এটি দেখানো হল। এক্ষেত্রে তাৎক্ষণিকভাবেই ভারসাম্যে পৌঁছানো যাচ্ছে।

(খ) $P(O) > \overline{P}$ অর্থাৎ $[P(O) - \overline{P}] > 0$। সেক্ষেত্রে $[P(O) - \overline{P}]\, e^{-kt}$ এর মান ক্রমশ কমে যাবে কারণ t বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে e^{-kt} এর মান কমে যাবে। এক্ষেত্রে P এর সময়পথ উপর থেকে ভারসাম্যের দিকে অগ্রসর হবে। এটি রেখাচিত্র নং (৩.১) এ দেখানো হল।

(গ) $P(0) < \overline{P}$ অর্থাৎ $[P(0) - \overline{P}] < 0$। সেক্ষেত্রে $[P(0) - \overline{P}]\, e^{-kt}$ ক্রমশ বেড়ে যাবে কারণ t বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে e^{-kt} এর মান কমে যাবে। এক্ষেত্রে P এর সময়পথ নীচের থেকে ভারসাম্যের দিকে অগ্রসর হবে। এটিও রেখাচিত্র নং (৩.১) এ দেখানো হল।



রেখাচিত্র নং ৩.১

তাই সাধারণভাবে গতিবিজ্ঞানভিত্তিক স্থিতিশীলতার জন্য ভারসাম্যের থেকে সময়পথের ব্যবধান হয় শূন্য [সম্ভাবনা (ক) এর ক্ষেত্রে] নয়তো ক্রমহ্রাসমান [সম্ভাবনা (খ) এবং (গ) এর ক্ষেত্রে] হতে হবে।

(৩.১১) এবং (৩.৫´) কে তুলনা করলে বোঝা যায় যে $\overline{P}$ হল নির্দিষ্ট সমাকল y_p এবং সূচকীয় রাশিটি হল নির্দিষ্ট পরিপূরক অপেক্ষক y_c। y_p হল প্রাসঙ্গিক চলটির সময়ান্তর (inter-temporal) ভারসাম্যস্তর এবং y_c হল ভারসাম্য মানের সঙ্গে তার ব্যবধান। তার মানে গতিবিজ্ঞানভিত্তিক স্থিতিশীলতার জন্য t অসীম হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে পরিপূরক অপেক্ষকটিকে ক্রমশ শূন্যের নিকট থেকে নিকটতর হতে হবে। এই মডেলে নির্দিষ্ট সমাকলটি ধ্রুবক তাই সময়ান্তরগত অর্থে অনড় ভারসাম্য পাওয়া যাচ্ছে যা $\overline{P}$ দিয়ে প্রকাশ করা হচ্ছে। যদি (৩.৭) এর মত নির্দিষ্ট সমাকলটি অধ্রুবক হয় তবে তাকে চলমান ভারসাম্য (moving equilibrium) বলা হয়ে থাকে।

৩.৬ গতিবিজ্ঞানভিত্তিক স্থিতিশীলতার জন্য প্রয়োজনীয় শর্তাবলী

গতিবিজ্ঞানভিত্তিক স্থিতিশীলতার জন্য অনির্দিষ্ট ধ্রুবকগুলির উপর কী ধরনের শর্ত আরোপ করা প্রয়োজন তা এবারে আলোচনা করা যাক।

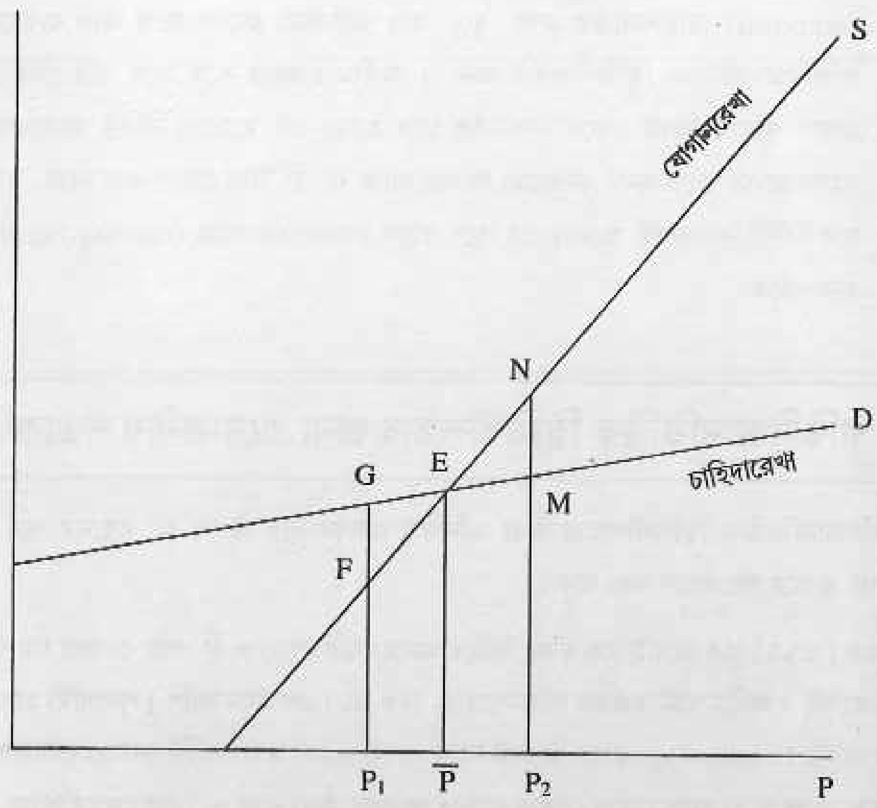
সমাধান (৩.১১) এর মধ্যেই এর উত্তর নিহিত আছে। যদি $P(0) = \overline{P}$ ধরে নেওয়া হয় তাহলে $K > 0$ হলে এবং হলেই t অসীমগামী হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে y_c [(৩.১১) এর প্রথম রাশি] শূন্যগামী হবে অর্থাৎ $k > 0$ হলে এবং হলেই $t \to \alpha \Rightarrow y_c \to 0$। $k > 0$ মানে $\alpha(b + m) > 0$। এটিই হল α (দামের সমন্বয় সহগ), b (Q উল্লম্ব অক্ষে মাপা হলে চাহিদা রেখার ঢালের ঋণাত্মক মান) এবং m (একইভাবে আঁকা যোগান রেখার ঢাল) এর উপর আরোপিত নিয়ন্ত্রণ।

যদি দাম সমন্বয়ের প্রক্রিয়া স্বাভাবিক হয় অর্থাৎ $\alpha > 0$, বাড়তি চাহিদা থাকলে দাম বাড়বে। সেই ক্ষেত্রে নিয়ন্ত্রণটি $(b + m) > 0$ হয়ে যাবে। $b + m > 0$ হওয়ার অর্থ

$$m > -b$$

তার মানে স্থিতিশীলতার জন্য যোগান রেখার ঢাল চাহিদা রেখার ঢালের থেকে বড় হওয়া প্রয়োজন।

যদি চাহিদা ও যোগান উভয় রেখারই স্বাভাবিক ঢাল থাকে তাহলে এই শর্তটি সর্বদাই পূরণ হবে [কারণ $-b < 0$ এবং $m > 0$]। কিন্তু কোনো একটি রেখা যদি বিকৃত ঢালে থাকে তাহলেও এই শর্তটি পূরণ হতে পারে [যেমন $m = 1$ এবং $-b = \frac{1}{2}$ (ধনাত্মক ঢালবিশিষ্ট চাহিদা রেখা)]। নীচে রেখাচিত্র নং (৩.২) এ বিষয়টি দেখানো হল।



রেখাচিত্র নং ৩.২

এই রেখাচিত্রে ভারসাম্য দাম হল $\overline{P}$ অর্থাৎ যেখানে চাহিদা ও যোগান সমান। যদি প্রাথমিক দাম P_1 থাকে তাহলে $Q_d (= P_1G) > Q_s (= P_1F)$ হবে এবং FG হবে বাড়তি চাহিদা। সেক্ষেত্রে P বাড়বে। আবার যদি প্রাথমিক দাম P_2 থাকে তাহলে $Q_d (= P_2M) < Q_S (= MN)$; হবে এবং ঋণাত্মক বাড়তি চাহিদা হবে MN। এর ফলে P কমে যাবে। তার মানে $\overline{P}$ এর যে দিক থেকেই শুরু করা যাক না কেন দাম সর্বদাই $\overline{P}$ মুখী হবে।

৩.৭ বিচ্ছিন্ন সময় (discrete time) অন্তরফল ও প্রথম পর্যায় অন্তরফল সমীকরণ (difference and first order difference equation)

অবিচ্ছিন্ন সময়ের পরিপ্রেক্ষিতে y চলের পরিবর্তনের রূপটি অন্তরকলজ $y'(t)$, $y''(t)$ ইত্যাদি দিয়ে বোঝানো হয়। কিন্তু যদি সময় t কে অবিচ্ছিন্ন চল না ধরে বিচ্ছিন্ন চল বলে ধরা হয় তাহলে আর অন্তরকলজ ব্যবহার করা যুক্তিসঙ্গত হবে না। সেক্ষেত্রে y চলের পরিবর্তনকে অন্তরকলজ বা অবকলের বদলে অন্তরফল (difference) দিয়ে পরিমাপ করতে হবে। সেসব ক্ষেত্রে অবকল সমীকরণের বদলে অন্তরফল সমীকরণ ব্যবহার করতে হবে।

যখন বিচ্ছিন্ন সময় নিয়ে কাজ করা হচ্ছে তখন y চলের পরিবর্তন তখনই হবে যখন t একটি পূর্ণসংখ্যা থেকে পরবর্তী পূর্ণসংখ্যাতে পৌঁছাচ্ছে যেমন $t = 2$ থেকে $t = 3$ ইত্যাদি। এর মধ্যবর্তী সময়ে y এর কোনো পরিবর্তন ঘটেনি বলেই ধরে নেওয়া হচ্ছে। সেই কারণে t কে সময়ের বিন্দু (point) বলে না ধরে সময়ের কাল বিভাগ (period) বলে ধরাই বাঞ্ছনীয়। $t = 1$ বলতে প্রথম কালবিভাগ, $t = 2$ বলতে দ্বিতীয় কালবিভাগ ইত্যাদি। তাহলে বলা যায় যে প্রতিটি কালবিভাগে y এর একটি অনন্য মান আছে।

অবিচ্ছিন্ন সময় থেকে বিচ্ছিন্ন সময়ে সরে গেলে গতি-বিজ্ঞান ভিত্তিক বিশ্লেষণের মূল চরিত্র বিশেষ বদলায় না। এক্ষেত্রেও y এর সময়গত পরিবর্তনের রূপের পরিপ্রেক্ষিতে তার সময়পথটি নির্ধারণ করতে হবে। কেবলমাত্র তফাৎ এই যে বিচ্ছিন্ন সময়ের ক্ষেত্রে পরিবর্তনের রূপটি $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ হল বিচ্ছিন্ন সময়ের জন্য $\frac{dy}{dt}$ এরই প্রতিরূপ। এখানে মনে রাখা প্রয়োজন যে t কেবলমাত্র পূর্ণসংখ্যাই হতে পারে। সুতরাং পরপর দুটি কালবিভাগের জন্য যখনই y এর পরিবর্তন Δy পরিমাপ করা হবে তখনই $\Delta t = 1$ হবে। অতএব $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \Delta y$ । এই Δy কেই বলা হয় y এর প্রথম অন্তরফল (first difference) । Δ(অন্তরফল এর চিহ্ন) দিয়ে তাই প্রথম অন্তরফল বোঝানো হয়। এটি হল বিচ্ছিন্ন সময়ের জন্য $\left(\frac{d}{dt}\right)$ এর প্রতিরূপ।

কোন্ দুটি কালবিভাগকে পরপর নিয়ে অন্তরফল পরিমাপ করা হচ্ছে তার উপর নির্ভর করবে Δy এর মান কত হবে। ব্যাপারটিকে পরিষ্কার করে লেখার জন্য y এর নীচে একটি সময় নির্দেশক চিহ্ন ব্যবহার করা হবে।

$$\Delta y_t \equiv y_{t+1} - y_t \qquad \text{......... (৩.১২)}$$

$y_t = t$ কালবিভাগে y এর মান .... (৩.১২)

$y_{t+1} = t + 1$ কালবিভাগে y এর মান

y এর পরিবর্তনকে এবার

$$\Delta y_t = 2 \qquad \text{......... (৩.১৩)}$$

অথবা $\Delta y_t = -0.1y_t$ সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা সম্ভব। এই ধরণের সমীকরণকে অন্তরফল সমীকরণ বলা হয়। (৩.১২) থেকে এগুলিকে

$$y_{t+1} - y_t = 2 \qquad \text{......... (৩.১৩´)}$$

অথবা $y_{t+1} - y_t = -0.1y_t$ .... (৩.১৪´) লেখা যায়।

অথবা $y_{t+1} - 0.9y_t = 0$

অথবা $y_{t+1} = 0.9y_t$ .... (৩.১৪´´)

অবকল সমীকরণের মতই অন্তরফল সমীকরণ ও বিভিন্ন পর্যায় ও মাত্রার রৈখিক, অরৈখিক, সমপ্রাকৃতিক ও অসমপ্রাকৃতিক সবই হতে পারে। (৩.১৩´) রৈখিক অসমপ্রাকৃতিক আবার (৩.১৪´) ও রৈখিক কিন্তু সমপ্রাকৃতিক।

৩.৮ অন্তরফল সমীকরণের সমাধান

(ক) পুনরাবৃত্তিকর প্রক্রিয়া (iterative method)

এই প্রক্রিয়াটি উদাহরণ সহযোগে আলোচনা করা যাক। ধরা যাক (৩.১৩) সমীকরণটি সমাধান করতে হবে এবং y এর প্রাথমিক মান $y_0 = 15$। সমাধানের জন্য এর অন্য রূপ $y_{t+1} = y_t + 2$ (৩.১৩´´) ব্যবহার করা সহজ হবে। এবার ধাপে ধাপে y এর বিভিন্ন মানগুলি বের করা হবে।

$$y_1 = y_0 + 2$$

$$y_2 = y_1 + 2 = (y_0 + 2) + 2 = y_0 + 2(2)$$

$$y_3 = y_2 + 2 = [y_0 + 2(2)] + 2 = y_0 + 3(2)$$

অতএব যে কোনো t এর জন্য $y_t = y_0 + t(2) = y_0 + 2t = 15 + 2t$। এটিই হবে সমীকরণটির সমাধান।

উদাহরণ ২

এবার (৩.১৪) সমাধান করা হবে কিন্তু y_0এর নির্দিষ্ট মান দেওয়া নেই। এখানেও (৩.১৪´´) নিয়ে কাজ করা সুবিধাজনক।

$$y_{t+1} = 0.9y_t \qquad \text{.........(৩.১৪´´)}$$

$$y_1 = (0.9)y_0$$

$$y_2 = (0.9)y_1 = (0.9)\,[(0.9)y_0] = (0.9)^2y_0$$

$$y_3 = (0.9)y_2 = (0.9)\,[(0.9)^2y_0] = (0.9)^2y_0$$

অতএব $y_t = (0.9)^t\,y_0$ ....(৩.১৬)

এই সমীকরণটির অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা দেওয়া সম্ভব। সাধারণ গুণকের (multiplier) ক্ষেত্রে প্রাথমিক বিনিয়োগ ব্যয় বৃদ্ধির ফলে পরের কালবিভাগগুলিতে আয় ও তার ফলস্বরূপ ভোগব্যয় বৃদ্ধি পায়। এর ফলে বিভিন্ন কালবিভাগে আয় বিভিন্ন মানে বৃদ্ধি পাবে। y যদি আয়ের বৃদ্ধি বোঝায় তবে প্রাথমিক কলাবিভাগে আয় বৃদ্ধি y_0 হবে 0 কালবিভাগে বাড়তি বিনিয়োগের সঙ্গে সমান। পরবর্তী আয়বৃদ্ধিগুলি নির্ভর করবে প্রান্তিক ভোগ প্রবণতার (marginal propensity to consume বা MPC) উপর। যদি MPC = 0.9 হয় এবং প্রতি কালবিভাগের উপার্জন শুধু তার পরবর্তী কালবিভাগেই ভোগ করা হয় তাহলে একনম্বর কালবিভাগে $y_1 = (0.9)y_0$ হবে। একইভাবে $y_2 = (0.9)y_1$ ইত্যাদি পাওয়া যাবে। অতএব এগুলি পুনরাবৃত্তিকর প্রক্রিয়ারই ফল। তার মানে আয় বৃদ্ধির গুণক প্রক্রিয়াটি (১৩.১৪´´) এর মত অন্তরফল সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব এবং (৩.১৬) এর মত সমাধান থেকে বিভিন্ন t তে এর মান কত হবে তা বোঝা সম্ভব।

উদাহরণ ৩

সমপ্রাকৃতিক অন্তরফল সমীকরণ

$my_{t+1} - ny_t = 0$ সমাধান করা যাক।

$$y_{t+1} = \left(\frac{n}{m}\right)y_t$$

অতএব $y_t = \left(\frac{n}{m}\right)^t y_0$ হবে এর সমাধান। [উদাহরণ ২ দ্রষ্টব্য]। $\left(\frac{n}{m}\right)^t$ রাশিটি অবকল সমীকরণের সমাধানে e^{rt} রাশিটির প্রতিরূপ। যদি $\left(\frac{n}{m}\right)^t$ এর পরিবর্তে b^t লেখা যায় এবং y এর পরিবর্তে যে কোনো গুণযোগ্য (multiplicative) ধ্রুবক A নেওয়া হয় তাহলে $y_t = b^t A$।

(খ) সাধারণ প্রক্রিয়া (general method)

একটি প্রথমপর্যায় অন্তরফল সমীকরণ $y_{t+1} = a_{yt} = c$ ....(৩.১৭) কে এবার সমাধান করতে হবে। এখানে a ও c দুটিই ধ্রুবক। এক্ষেত্রেও সমাধানটি দুটি উপাদান y_p ও y_c এর যোগফল। y_p বা নির্দিষ্ট সমাকলটি হল সম্পূর্ণ অসমপ্রাকৃতিক সমীকরণ (৩.১৭) এর যে কোনো সমাধান এবং y_c বা পরিপূরক অপেক্ষকটি হল (৩.১৭) এর রূপান্তরিত সমীকরণ $y_{t+1} = a_{yt} = 0$ ....(৩.১৮) এর সাধারণ সমাধান। y_p এখানেও সময়ান্তরগত ভারসাম্যের নির্দেশক এবং y_c হল ভারসাম্যের সঙ্গে সময়পথের ব্যবধান। y_p ও y_c এর যোগফল হল সাধারণ সমাধান। প্রাথমিক শর্তের সাহায্যে এটিকে নির্দিষ্ট সমাধানে রূপান্তরিত করা সম্ভব।.

প্রথমে y_c নিয়ে আলোচনা করা যাক। উদাহরণ ৩ এর থেকে আমরা বলতে পারি যে সমাধান $y_t = Ab^t$ ($Ab^t \neq 0$) চেষ্টা করা যেতে পারে। $Ab^t = 0$ হলে t এর সমস্ত মানের জন্য $y_t = 0$ হবে অর্থাৎ y, t অক্ষের উপরিস্থিত সরলরেখা হবে।

$$y_{t+1} = Ab^{t+1} \text{ হলে}$$

$$Ab^{t+1} + aAb^t = 0 \qquad ....(৩.১৮)$$

অথবা $Ab^t (b + a) = 0$

অথবা $(b + a) = 0$ [কারণ $Ab^t \neq 0$]

অথবা $b = -a$

তার মানে পরীক্ষামূলক সমাধানটি সঠিক হওয়ার জন্য $b = -a$ হতে হবে এবং

$$y_c \,(= Ab^t) = A(-a)^t \text{ লিখতে হবে।}$$

এবার নির্দিষ্ট সমাকল y_pটি দেখা যাক। উদাহরণ ৩ সমপ্রাকৃতিক হওয়ার ফলে এক্ষেত্রে কোনোভাবে তার সাহায্য নেওয়া সম্ভব হচ্ছে না। অবশ্য (৩.১৭) এর যে কোনো সমাধানকে y_p হিসাবে নেওয়া যায়।

এক্ষেত্রে প্রথমে সবচেয়ে সহজ সমাধান $y_p = k$ (ধ্রুবক) পরীক্ষা করে দেখা যাক। $y_t = k$ এর অর্থ হল y_p এর মান সমস্ত কাল বিভাগের জন্যই ধ্রুবক k। তার মানে $y_{t+1} = k$। (৩.১৭) তে এই মান প্রতিস্থাপন করে।

$$k + ak = c$$

অথবা $k = \frac{c}{1 + a}$

যেহেতু k এর এই মানটি সমীকরণটিকে সমাধান করে পাওয়া নির্দিষ্ট সমাকলনটিকে $y_p (= k) = \frac{c}{1 + a}$ $(a \neq -1)$ লেখা সম্ভব। এটি ধ্রুবক হওয়ার কারণে এখানে অনড় ভারসাম্য বোঝানো হচ্ছে।

$a = -1$ হলে অবশ্য এই সমাধানটি গ্রহণযোগ্য হবেনা কারণ সেক্ষেত্রে $\frac{c}{1 + a}$ অসংজ্ঞাত (undefined) হয়ে যাচ্ছে। এবার তাহলে (৩.১৭) এর অন্য কোনো সমাধান পরীক্ষা করে দেখতে হবে। $y = kt$ পরীক্ষা করে দেখা যাক। $y_t = kt$ হলে $y_{t+1} = k(t + 1)$ (৩.১৭) তে প্রতিস্থাপন করলে

$$k(t + 1) + akt = c$$

অথবা $kt + k + akt = c$

অথবা $k(t + 1 + at) = c$

অথবা $k(t + 1 - t) = c$ [যেহেতু $a = -1$]

অথবা $k = c$

অতএব $y_p (= kt) = ct$। এটি t এর অপেক্ষক এবং সেই কারণে অধ্রুবক। এই ধরনের সমাধান চলমান ভারসাম্য বোঝায়।

y_c ও y_p যোগ করে এবার সাধারণ সমাধানগুলি কীভাবে লেখা যায় তা নীচে দেখানো হল।

$$y_t = A(-a)^t + \frac{C}{1 + a} \quad [a \neq -1 \text{ হলে}] \qquad \text{.........(৩.১৯)}$$

বা $y_t = A(-a)^t + ct$ [$a = -1$ হলে] ....(৩.২০)

এই দুটি সমাধানের একটি সমাধানও নির্দিষ্ট নয় কারণ A অনির্দিষ্ট ধ্রুবক। এটিকে সরাবার জন্য প্রাথমিক শর্ত আরোপ করা প্রয়োজন। ধরা যাক $t = 0$ হলে $y_t = y_0$।

(৩.১৯) এ $t = 0$ প্রতিস্থাপন করলে

$$y_0 = A + \frac{C}{1+a} \text{ [কারণ } (-a)^0 = 1]$$

অথবা $A = y_0 - \dfrac{C}{1+a}$ ।

অতএব (৩.১৯) এর নির্দিষ্ট রূপ হবে

$$y_t = \left(y_0 - \frac{C}{1+a}\right)(-a)^t + \frac{C}{1+a} \qquad \text{.........(৩.১৯´)}$$

এটিই হল $a \neq -1$ হলে সমাধানের নির্দিষ্ট রূপ।

(৩.২০) তে $t = 0$ প্রতিস্থাপন করলে

$y_0 = A$ হবে।

অতএব (৩.২০) এর নির্দিষ্ট রূপটি হবে

$$y_t = y_0 + ct \qquad \text{.........(৩.২০´)}$$

(৩.২০´) ই $a = -1$ হলে নির্দিষ্ট সমাধান। এবার একটি উদাহরণ নিলে প্রক্রিয়াটি বোঝা সহজ হবে।

উদাহরণ ১

দেওয়া আছে যে $y_0 = \dfrac{7}{4}$ । এবার $y_{t+1} - 5y_t = 1$ সমীকরণটি সমাধান করতে হবে।

y_c এর জন্য প্রথমে $y_t = Ab^t$ পরীক্ষা করে দেখা যাক।

$y_t = Ab^t$ হলে $y_{t+1} = Ab^{t+1}$

y_c সমীকরণটিতে প্রতিস্থাপন করলে তার সমপ্রাকৃতিক রূপটি পাওয়া যাবে।

তার মানে

$$Ab^{t+1} - 5Ab^t = 0$$

অথবা $Ab^t(b-5) = 0$ [$Ab^t \neq 0$]

অথবা $(b-5)=0$ [যেহেতু $Ab^t \neq 0$]

অথবা $b=5$

$y_c = A(5)^t$

y_p এর জন্য $y_t = k$ পরীক্ষা করে দেখা যাক। $y_t = k$ মানে $y_{t+1} = k$ । সম্পূর্ণ সমীকরণটিতে প্রতিস্থাপন করলে

$$k - 5k = 1$$

অথবা $k(-4) = 1$

অথবা $k = -\frac{1}{4}$

অতএব $y_p = -\frac{1}{4}$

এর থেকে যে সাধারণ সমাধানটি পাওয়া যাচ্ছে তা হল

$$y_t = y_c + y_p = A(5)^t - \frac{1}{4}$$

$t=0$ হলে $y_0 = \frac{7}{4}$

তার মানে $\frac{7}{4} = A(5)^0 - \frac{1}{4}$

$$= A - \frac{1}{4}$$

অথবা $A = \frac{8}{4} = 2$

এবার নির্দিষ্ট সমাধানটি হবে

$$y_t = 2(5)^t - \frac{1}{4}$$

৩.৯ ভারসাম্যের গতিবিজ্ঞানভিত্তিক স্থিতিশীলতা (Dynamic stability of the equilibrium)

বিচ্ছিন্ন সময়ের ক্ষেত্রে ভারসাম্যের গতিবিজ্ঞানভিত্তিক স্থিতিশীলতা নির্ভর করবে পরিপূরক অপেক্ষকের Ab^t রাশিটির উপর।

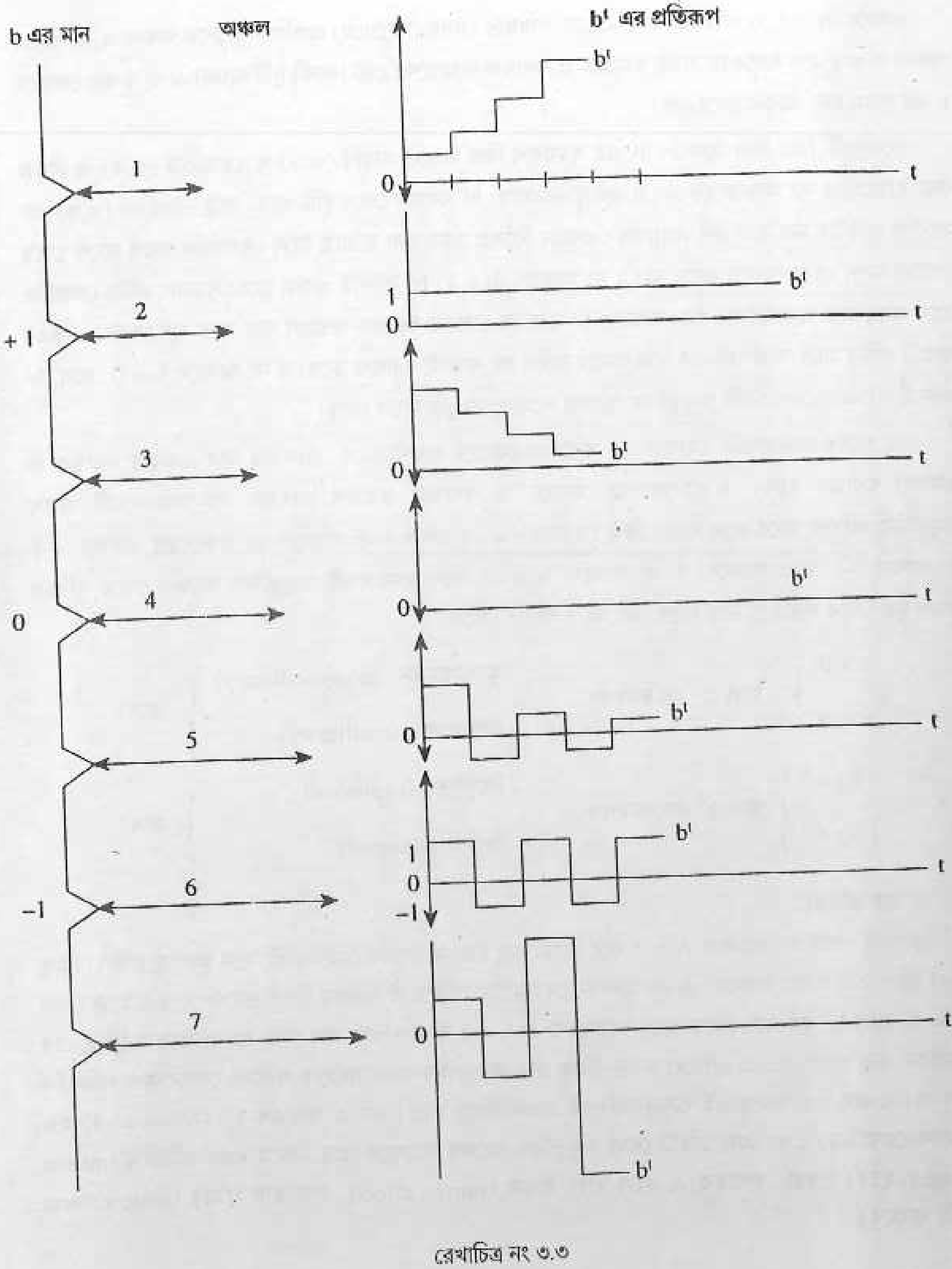
b এর মর্মার্থ

ভারসাম্য স্থিতিশীল হবে কিনা তা নির্ভর করবে t অসীমগামী হলে পরিপূরক অপেক্ষকটি শূন্যগামী হবে কিনা তার উপর। তার মানে $t \longrightarrow \alpha$ হলে পরিপূরক অপেক্ষকটি $\longrightarrow 0$ হবে কিনা। এটি বুঝতে গেলে t কে অনির্দিষ্টভাবে বাড়িয়ে Ab^t এর সময়পথটি দেখতে হবে। b এর মানই এক্ষেত্রে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ। প্রথমে $A = 1$ ধরে নিয়ে বিষয়টি আলোচনা করা যাক। b এর সমস্ত সম্ভাব্য মানের প্রসারটিকে সাতটি ভাগে ভাগ করা হয়েছে। [সারণি ৩.১ দ্রষ্টব্য]

সারণি ৩.১

অঞ্চল	b এর মান	b^t	b^t এর মান				
			$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
১	$b > 1$ ($\lvert b \rvert > 1$)	যথা $(2)^t$	1	2	4	8	16
২	$b = 1$ ($\lvert b \rvert = 1$)	$(1)^t$	1	1	1	1	1
৩	$0 < b <$ ($\lvert b \rvert < 1$)	যথা $\left(\frac{1}{2}\right)^t$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
৪	$b = 0$ ($\lvert b \rvert = 0$)	$(0)^t$	0	0	0	0	0
৫	$-1 < b < 0$ ($\lvert b \rvert < 1$)	যথা $\left(-\frac{1}{2}\right)^t$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
৬	$b = -1$ ($\lvert b \rvert = 1$)	$(-1)^t$	01	-1	1	-1	1
৭	$b < 0$ ($\lvert b \rvert > 1$)	যথা $(-2)^t$	1	-2	4	-8	16

এই বিভাগটি নীচের রেখাচিত্র নং (৩.৩) এ দেখানো হল। (পরের পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য)



রেখাচিত্র নং ৩.৩

এখানে $b = 1$, $b = 0$ ও $b = -1$ কে পরিষ্কার দেখানো হয়েছে। এগুলি যথাক্রমে অঞ্চল ২, ৪ ও ৬। অঞ্চল ৩ ও ৫ হল যথাক্রমে সমস্ত ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ভগ্নাংশের সেট। বাকী দুটি অঞ্চল ১ ও ৭ হল যেখানে b এর পরম মান একের চেয়ে বড়।

প্রত্যেকটি ভিন্ন ভিন্ন অঞ্চলে b^t এর সময়পথ ভিন্ন এগুলি সারণি (৩.১) ও রেখাচিত্র (৩.৩) এ বিবৃত করা হয়েছে। ১ নং অঞ্চলে $(b > 1)t$ এর বৃদ্ধির সঙ্গে b^t বর্ধমান বেগে বৃদ্ধি পায়। তাই রেখাচিত্র (৩.৩) এর সর্বোচ্চ ছবিটির মত হবে এর সময়পথ। এখানে বিচ্ছিন্ন সময় ধরা হয়েছে বলে রেখাগুলি ধাপে ধাপে গেছে কোনো মসৃণ রেখা পাওয়া যাচ্ছে না। ২ নং অঞ্চলে $(b = 1)$ b^t সর্বদাই একক হবে। সুতরাং এটির রেখাচিত্র হবে অনুভূমিক সরলরেখা। ৩নং অঞ্চলে b^t হল যে কোনো ধনাত্মক ভগ্নাংশ যার ঘাত পূর্ণসংখ্যা। অতএব ঘাতটি বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে b^t এর মান কমবে যদিও তা সর্বদাই ধনাত্মক হবে। ৪ নং অঞ্চলে $b = 0$ বলে b^t সর্বদাই 0। এর রেখাচিত্রটি অনুভূমিক অক্ষের সঙ্গে পুরোপুরি মিলে যাবে।

এর পরের অঞ্চলগুলি যেখানে b ঋণাত্মক যেখানে লক্ষণীয় যে b^t এর মান একবার ধনাত্মক ও একবার ঋণাত্মক হবে। ৫ নং অঞ্চলে যেখানে b ঋণাত্মক ভগ্নাংশ সেখানে এই সময়পথটি ক্রমশ অনুভূমিক অক্ষের কাছে এসে পড়ে। কিন্তু যেখানে $b = -1$ অর্থাৎ ৬ নং অঞ্চলে b^t ক্রমাগতই একবার $+1$ ও একবার -1 হতে থাকবে। ৭ নং অঞ্চলে $b < -1$ হলে সময়পথটি অনুভূমিক অক্ষের থেকে দুদিকে ক্রমশ দূর থেকে দূরান্তরে সরে যাবে। সংক্ষেপে বলতে গেলে

$$\left.\begin{matrix} b > 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \text{ হলে } b^t \text{ এর সময়পথ } \quad \left.\begin{matrix} \text{অদোলায়মান (non-oscillatory)} \\ \text{দোলায়মান (oscillatory)} \end{matrix}\right\} \text{ হবে।}$$

$$\text{এবং } \left.\begin{matrix} |b| > 1 \\ |b| < 1 \end{matrix}\right\} \text{ হলে } b^t \text{ এর সময়পথ } \quad \left.\begin{matrix} \text{বিস্ফোরক (explosive)} \\ \text{স্তিমিত (damped)} \end{matrix}\right\} \text{ হবে।}$$

A এর ভূমিকা

এতক্ষণ পর্যন্ত আলোচনায় $A = 1$ ধরে নিয়ে তার কোনো প্রভাব নেই এটাই মনে করা হয়েছিল। কিন্তু $A \neq 1$ হলে তার প্রভাব থাকবে। A এর মান b^t এর মানকে বাড়িয়ে বা কমিয়ে দিতে পারে। $A > 1$ হলে (যথা $A = 3$) হলে b^t এর মান বেড়ে যাবে আবার $0 < A < 1$ হলে b^t এর মান কমে যাবে। তার মানে A এর একরকম হার প্রভাব (scale effect) আছে। কিন্তু তার জন্য সময়পথের বাহ্যিক গঠনের কোনোরূপ পরিবর্তন হবে না। A এর চিহ্ন অবশ্য এই গঠনের উপরই প্রভাববিস্তার করে। যদি A ঋণাত্মক হয় (যথা $A = -1$) হয় তাহলে রেখাচিত্র (৩.৩) এর প্রতিটি রেখা অনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে তার নিজস্ব দর্পণ প্রতিবিম্ব (mirror image) হবে। সুতরাং ঋণাত্মক A হলে দর্পণ প্রভাব (mirror effect) এবং হার প্রভাব (scale effect) দুটিই থাকবে।

ভারসাম্যমুখীনতা **(Convengence to equilibrium)**

জানা আছে যে পরিপূরক অপেক্ষকের Ab^t রাশিটি সময়ান্তরগত ভারসাম্যের থেকে ব্যবধান বোঝায়। যদি $y_p = Ab^t$ এর সঙ্গে যোগ দেওয়া যায় তাহলে সময়পথটি উল্লম্বভাবে 5 করে উঠে যাবে। এর জন্য ভারসাম্যমুখীনতা কোনোভাবেই প্রভাবান্বিত হবেনা। শুধু যে মানের পরিপ্রেক্ষিতে ভারসাম্যমুখীনতা পরিমাপ করা হয়েছিল সেই মানটি পরিবর্তিত হয়ে যাবে। রেখাচিত্র (৩.৩) এ যেমন Ab^t এর ভারসাম্যমুখীনতা শূন্যের সাপেক্ষে পরিমাপ করা হয়েছিল।

এবার y_p কে যোগ দিলে $y_t = y_c + y_p$ এর ভারসাম্যস্তর y_p মুখীনতা দেখতে হবে।

দ্বিতীয় অঞ্চলের $(b = 1)$ সময়পথ

$$y_t = A(1)^t + y_p = A + y_p$$

দেখলে হঠাৎ মনে হতে পারে যে এটির ভারসাম্যমুখীনতা রয়েছে কারণ $(1)^t = 1$ এর কোনো বিস্ফোরক প্রভাব নেই। কিন্তু এক্ষেত্রে $y_t = A + y_p$ হবে। এমনকি $A = 0$ না হলে y_t কখনোই y_p র সমান হবে না। এ ধরনের সময়পথের উদাহরণস্বরূপ (৩.২০) কে ধরা যাক। এই সময়পথটিকে অপসরণশীল (divergent) বলে ধরা উচিত। তার কারণ অবশ্য অনির্দিষ্ট সমাকলে t এর উপস্থিতি নয়। তার কারণ $A \neq 0$ হলে চলমান ভারসাম্যের থেকে সর্বদাই ধ্রুবক ব্যবধান থাকবে। অতএব সময়পথ y_t এর সমকেন্দ্রাভিমুখীতার (convergence) জন্য $b = 1$ ক্ষেত্রটি কখনোই গ্রহণযোগ্য হবেনা। তার মানে $y_t = Ab^t + y_p$ সমকেন্দ্রাভিমুখী হবে কেবলমাত্র $|b| < 1$ হলে এবং হলেই।

উদাহরণ

$y_t = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^t + 9$ এর সময়পথটি কী হবে তা বুঝতে গেলে এক্ষেত্রে b এর মান কত তা দেখতে হবে। $b = -\frac{4}{5} < 0$ তাই সময়পথটি দোলায়মান। কিন্তু $|b| < 1$ বলে দোলায়মানতা স্তিমিত হয়ে যাবে অর্থাৎ সময়পথটি কালক্রমে ভারসাম্য মান 9 এর সঙ্গে সমকেন্দ্রাভিমুখী (convergent) হয়ে যাবে।

৩.১০ কব্‌ওয়েব মডেল (Cobweb Model)

অর্থনীতিতে প্রথম পর্যায় অন্তরফল সমীকরণের প্রয়োগ আলোচনা করার জন্য কবওয়েব মডেলটি নেওয়া যাক। কবওয়েব মডেলটিও বাজার মডেল কিন্তু সাধারণ বাজার মডেলের সঙ্গে এর পার্থক্য হল, এই যে এখানে যোগান Q_S বর্তমান দামের পরিবর্তে পূর্ববর্তী কালবিভাগের দামের অপেক্ষক।

এই মডেলে বিক্রির এক কালবিভাগ আগে উৎপাদক তার উৎপাদনের স্তর সম্বন্ধে সিদ্ধান্ত নেয়। কৃষিপণ্যের উৎপাদন এই ধরনের উৎপাদনের প্রকৃষ্ট উদাহরণ। t কালবিভাগে উৎপাদন সম্বন্ধে যে সিদ্ধান্ত নেওয়া হয় তা সেই সময়কার দাম P_t এর উপর নির্ভরশীল। কিন্তু এই উৎপাদনটি $(t + 1)$ কালবিভাগের আগে বাজারে বিক্রি করা যাচ্ছে না তাই P_t, $Q_{s,t}$ কে নির্ধারণ না করে $Q_{s,t+1}$ কে নির্ধারণ করবে। অতএব আমরা এখানে বিলম্বিত (lagged) যোগান অপেক্ষক পাচ্ছি।

$$Q_{s,t+1} = S(P_t)$$

$$\text{অথবা } Q_{st} = S(P_{t-1})$$

এইরকম যোগান অপেক্ষক ও চাহিদা অপেক্ষক $Q_{d,t} = D(P_t)$ এর পারস্পরিক ক্রিয়ার (interaction) ফলে দামের একটি গতিবিজ্ঞানভিত্তিক ধরন পাওয়া সম্ভব।

বিলম্বিত যোগান ও অবিলম্বিত চাহিদা অপেক্ষকের রৈখিক রূপ নিয়ে এবার বিষয়টি আলোচনা করা যাক। নীচে তিনটি সমীকরণের মাধ্যমে বাজার মডেলটি বিবৃত করা হল।

$$Q_{d,t} = Q_{s,t}$$

$$Q_{d,t} = \alpha - \beta P_t \ (\alpha, \beta > 0)$$

$$Q_{s,t} = -\gamma + \delta P_{t-1} \ (\gamma, \delta > 0)$$

দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণ দুটি প্রথমটিতে প্রতিস্থাপন করলে

$$\alpha - \beta P_t = -\gamma + \delta P_{t-1}$$

অথবা $\beta P_t + \delta P_{t-1} = \alpha + \gamma$। এটি একটি প্রথম পর্যায় অন্তরফল সমীকরণ।

এটির সমাধানের জন্য প্রথমে সমীকরণের সময়কে এক কালবিভাগ এগিয়ে নেওয়া যাক।

তার মানে

$$\beta P_{t+1} + \delta P_t = \alpha + \gamma$$

$$\text{অথবা} \quad P_{t+1} + \frac{\delta P}{\beta t} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

এটি সমীকরণ (৩.১৭) এরই প্রতিরূপ যেখানে $y = p$, $a = \dfrac{\delta}{\beta}$ এবং $C = \dfrac{\alpha + \gamma}{\beta}$ প্রতিস্থাপিত হয়েছে। δ ও β উভয়ই ধনাত্মক হওয়ার ফলে $a \neq -1$। অতএব (৩.১৯´) সূত্রটি সরাসরি প্রয়োগ করে সময়পথটি নির্ধারণ করা যায়।

সেই সমাধানটি ছিল

$$y_t = \left(y_0 - \frac{C}{1+a} \right) (-a)^t + \frac{C}{1+a}$$

এক্ষেত্রে তাই সমাধানটি হবে

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\frac{\alpha + \gamma}{\beta}}{1 + \frac{\delta}{\beta}} \right) \left(- \frac{\delta}{\beta} \right)^t + \frac{\frac{\alpha + \gamma}{\beta}}{1 + \frac{\delta}{\beta}}$$

$$= \left(P_0 - \frac{\frac{\alpha + \gamma}{\beta}}{\frac{\beta + \delta}{\beta}} \right) \left(- \frac{\delta}{\beta} \right)^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

$$= \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right) \left(- \frac{\delta}{\beta} \right)^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

অতএব $P_t = \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right) \left(- \frac{\delta}{\beta} \right)^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$ ....(৩.২৩)

[P_0 এখানে প্রাথমিক দাম]

(৩.২৩) ই হবে এই প্রথম পর্যায় অন্তরফল সমীকরণটির সমাধান। এই সময়পথের তিনটি বৈশিষ্ট্য বিশেষভাবে লক্ষণীয়।

(১) এই সমাধানের নির্দিষ্ট সমাকল $\left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right)$ কে মডেলের সময়ান্তরগত ভারসাম্য বলা যেতে পারে।

অতএব $\overline{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

ধ্রুবক হওয়ার ফলে এটি অনড় ভারসাম্য। $\overline{P}$ প্রতিস্থাপন করলে সময়পথ P_t কে

$P_t = (P_0 - \overline{P}) \left(- \frac{\delta}{\beta} \right)^t + \overline{P}$ (৩.২৩´) লেখা যায়।

(২) $(P_0 - \overline{P})$ রাশিটি Ab^tএর A এর সমতুল্য। অতএব $(P_0 - \overline{P})$ এর চিহ্নের উপর নির্ভর করবে সময়পথটি ভারসাম্যের উপরে না নীচে শুরু হবে অর্থাৎ দর্পণ প্রভাব কী হবে। আবার $(P_0 - \overline{P})$ এর মানের উপর নির্ভর করবে।

সময়পথটি কতটা উপরে বা কতটা নীচে আরম্ভ হবে অর্থাৎ হার প্রভাব কী হবে।

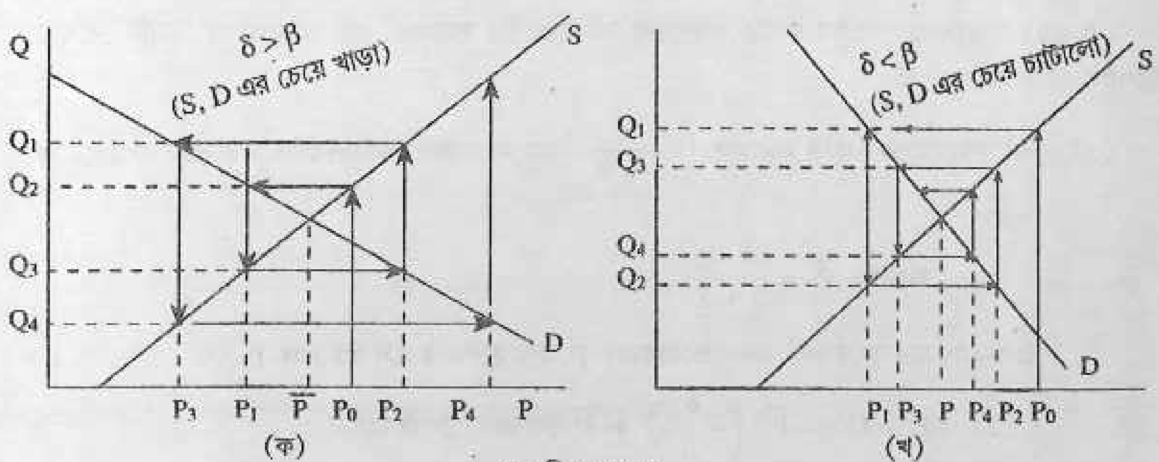
(৩) Ab^tএর b এর সমতুল্য হল $\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)$। এই মডেল অনুসারে $\beta, \delta > 0$। অতএব $\left(-\frac{\delta}{\beta}\right) < 0$। সেই কারণে সময়পথটি দোলায়মান হবে। এর থেকেই উর্ণা (মাকড়সার জাল) ব্যাপারটির সূত্রপাত।

এইখানে তিনরকমের দোলায়মানতা থাকতে পারে। সারণি (৩.১) বা রেখাচিত্র নং (৩.৩) অনুসারে যদি

$$\delta \gtreqless \beta \text{ হয় তাহলে দোলায়মানতা } \begin{Bmatrix} \text{বিস্ফোরক} \\ \text{সর্বত্র সমান} \\ \text{স্তিমিত} \end{Bmatrix} \text{ হবে}$$

ব্যাপারটি পরিষ্কার করে বোঝানোর জন্য মডেলটির রেখাচিত্রের সাহায্য নেওয়া যাক।

রেখাচিত্র নং (৩.৪) এ এগুলি আঁকা হল। মডেল (৩.২১) এর দ্বিতীয় সমীকরণটির থেকে যে চাহিদা রেখা পাওয়া যায় তা নিম্নাভিমুখী সরলরেখা এবং তার ঢাল β। এই মডেলের তৃতীয় সমীকরণটি থেকে যে রৈখিক যোগান রেখাটি পাওয়া যায় তার ঢাল δ। এই ক্ষেত্রে অবশ্য Q অক্ষে বিলম্বিত যোগান পরিমাপ করা হবে। $\delta > \beta$ (S বা যোগান রেখা D বা চাহিদা রেখার চেয়ে খাড়া) এবং $\delta < \beta$ (S D এর চেয়ে কম খাড়া) হলে কি হবে তা যথাক্রমে রেখাচিত্র নং (৩.৪ ক) ও (৩.৪ খ) তে দেখানো হল।



রেখাচিত্র নং ৩.৪

$\delta > \beta$ হলে দামের সময়পথটি বিস্ফোরক হবে [রেখাচিত্র (৩.৪ ক) দ্রষ্টব্য] ধরা যাক প্রাথমিক দাম P_0(এক্ষেত্রে $\overline{P}$ এর থেকে বড়)। তীরচিহ্ন বরাবর এগিয়ে S রেখায় দেখা যাবে যে পরবর্তী সময়ে (কালবিভাগ 1এ) যোগান হবে Q_1। এটি বিক্রি করার জন্য দামকে P_1 হতেই হবে (নিম্নাভিমুখী তীরচিহ্ন দ্রষ্টব্য)। দাম P_1 হলে পরবর্তী কালবিভাগে (কালবিভাগ 2এ) যোগান হবে Q_2। একইভাবে এগোলে দেখা যাচ্ছে যে, চাহিদা ও যোগান রেখার চারিপাশে একটি 'উর্ণা' বোনা হয়ে যাচ্ছে। P_0, P_1, P_2 ইত্যাদি দামকে তুলনা করলে দেখা যাবে যে দামের দোলায়মানতা রয়েছে এবং ক্রমশ ভারসাম্য দাম $\overline{P}$ এর থেকে তার ব্যবধান বেড়ে গেছে। ভিতর থেকে বাইরে উর্ণাটি বোনা হওয়ার ফলে সময়পথটি অপসরণশীল দোলায়মান ও বিস্ফোরক।

আবার (৩.৪ খ) রেখাচিত্রে যেখানে $\delta < \beta$ একইভাবে যদি একটি উর্ণা সৃষ্টি করা যায় তাহলে সেই উর্ণাটি কেন্দ্রাভিমুখী হবে। P_0 থেকে যদি তীরচিহ্নের মুখগুলি অনুসরণ করা যায় তাহলে ক্রমশ চাহিদা ও যোগান রেখার ছেদন বিন্দুর (intersection) নিকট পৌঁছানো সম্ভব হবে। তার মানে দোলায়মানতা থাকলেও সময়পথটি সমকেন্দ্রাভিমুখী।

P এর সময়পথ নির্ধারণ করার পর Q এর সময়পথটি নির্ধারণ করতে হবে। (৩.২১) এর দ্বিতীয় সমীকরণটিতে $Q_{d,t}$ ও দামের সম্পর্ক বিবৃত করা হয়েছে। সুতরাং যদি (৩.২৩) বা (৩.২৩´) কে চাহিদা অপেক্ষকে প্রতিস্থাপিত করা যায় তাহলে $Q_{d,t}$ এর সময়পথটি পাওয়া যাবে।

$$Q_{d,t} = \alpha - \beta P_t$$

$$\text{অথবা } Q_{d,t} = \alpha - \beta\left[\left(P_0 - \overline{P}\right)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \overline{P}\right]$$

$$\text{অথবা } Q_{d,t} = -\beta\left(P_0 - \overline{P}\right)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \left(\alpha - \beta\overline{P}\right)$$

এটিই হবে $Q_{d,t}$ এর সময়পথ। অবশ্য বাজারে ভারসাম্যের শর্ত হল প্রতিটি t এর জন্য $Q_{d,t} = Q_{s,t}$। সেই কারণে $Q_{d,t}$ এবং $Q_{s,t}$ এর মধ্যে কোনোরূপ পার্থক্য না করে এটিকেই Q_t এর সময়পথ বলা যেতে পারে।

৩.১১ সারাংশ

- কোনো অপেক্ষকের অন্তরকলজ, অবকল বা অবকলসহগ সম্বলিত সমীকরণকে অবকল সমীকরণ বলে। সমীকরণে অন্তরকলজের সর্বোচ্চ পর্যায়টিই সমীকরণের পর্যায়।
- যে কোনো অবকল সমীকরণে দুটি সমাধান থাকে —সাধারণ সমাধান ও নির্দিষ্ট সমাধান। নির্দিষ্ট সমাধান পাওয়ার জন্য প্রাথমিক-শর্ত আরোপ করা প্রয়োজন হয়।
- সময়গত পরিবর্তনের হার থেকে সময়পথ নির্ধারণ করার ক্ষেত্রে অবকল সমীকরণ ব্যবহার করা হয়। এর থেকে ভারসাম্যের গতিবিজ্ঞানভিত্তিক স্থিতিশীলতা থাকবে কিনা তাও বোঝা যায়।
- সময়কে অবিচ্ছিন্ন চল ধরলে অবকল সমীকরণ ব্যবহার করা যুক্তিসঙ্গত কিন্তু সময় যদি বিচ্ছিন্ন হয় সেক্ষেত্রে অন্তরফল সমীকরণ ব্যবহৃত হয়। এই সমীকরণে অন্তরকলজের পরিবর্তে দুটি বিচ্ছিন্ন কালবিভাগে অধীন চল y এর মানের অন্তরফলকে তার পরিবর্তন বলে ধরা হয়।
- অন্তরফল সমীকরণ থেকেও অধীন চলটির সময়পথ ও তা সমকেন্দ্রাভিমুখী কিনা তা নির্ধারণ করা যায়।

৩.১২ অনুশীলনী

ছোট প্রশ্ন

১। অবকল সমীকরণ কাকে বলে?

২। অবকল সমীকরণে সময় কী রকম?

৩। সমপ্রাকৃতিক ও অসমপ্রাকৃতিক অবকল সমীকরণের দুটি উদাহরণ দিন।

৪। সমপ্রাকৃতিক অবকল সমীকরণের সাধারণ ও নির্দিষ্ট সমাধানের রূপ দুটি কী হবে লিখুন।

৫। অসমপ্রাকৃতিক অবকল সমীকরণের সমাধানটি কোন কোন রাশির যোগফলই তাদের রূপগুলি কী রকম?

৬। চাহিদা ও যোগান অপেক্ষকের ঢাল কী রকম হলে দামের সময়পথ ভারসাম্যমুখী হবে?

৭। অন্তরফল সমীকরণ কখন ব্যবহৃত হয়?

বড় প্রশ্ন

১। অবকল সমীকরণ কাকে বলে? এর মাত্রা ও পর্যায় কীভাবে নির্ধারিত হয়?

২। সমপ্রাকৃতিক অবকল সমীকরণ কীভাবে সমাধান সমাধান করা যায় তা আলোচনা করুন।

৩। যে কোনো একটি অসমপ্রাকৃতিক অবকল সমীকরণ নিয়ে তাকে সমাধান করে পদ্ধতিটি আলোচনা করুন।

৪। যদি দামের সময়গত পরিবর্তন বাজারের বাড়তি চাহিদার সঙ্গে আনুপাতিক হয় তাহলে দামের সময়পথ কীভাবে পাওয়া যাবে? এই সময়পথ কী রকম হবে?

৫। মনে করুন একটি পণ্যের চাহিদা ও যোগান অপেক্ষকগুলি হল যথাক্রমে

$Q_d = \alpha - \beta P + \delta \frac{dp}{dt}$ এবং $Q_s = -\gamma + \delta P \; (\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$।

(ক) প্রতিটি সময়বিন্দুতে বাজারে ভারসাম্য থাকে ধরে নিয়ে দামের সময়পথটি নির্ণয় করুন। এই পথের কী কোনো স্থিতিশীল ভারসাম্য আছে?

(খ) প্রতিটি সময়বিন্দুতে ভারসাম্য থাকবে সেটা না ধরে সময়পথ দামের পরিবর্তনের সঙ্গে আনুপাতিক ধরে বিশ্লেষণটি আবার করুন।

(গ) দুটি ক্ষেত্রে ভারসাম্য দামস্তর কী এক? তোমার উত্তরের যথাযথ ব্যাখ্যা দিন।

৬। অন্তরফল সমীকরণ কাকে বলে? এই সমীকরণ সমাধানের পুনরাবৃত্তি করে প্রক্রিয়াটি উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

৭। অন্তরফল সমীকরণ সমাধানের সাধারণ প্রক্রিয়াটি আলোচনা করুন।

৮। বিচ্ছিন্ন সময়ের ক্ষেত্রে গতিবিজ্ঞানভিত্তিক স্থিতিশীলতা কিসের উপর নির্ভরশীল এবং কীভাবে তা বিস্তারিত আলোচনা করুন।

৮। আলোচিত কব্‌ওয়েব্ মডেলে $\delta = \beta$ হলে উর্ণাটি কি রকম হবে তা রেখাচিত্রের সাহায্যে বিশ্লেষণ করে দেখান।

৯। আলোচিত কব্‌ওয়েব মডেলে $\delta = \beta$ হলে উর্ণাটি কী রকম হবে তা রেখাচিত্রের সাহায্যে বিশ্লেষণ করে দেখান।

১০। হারপ্রভাব ও দর্পণ প্রভাব কাকে বলা হয় তা আলোচনা করুন।

১১। বিলম্বিত অপেক্ষক কাকে বলে? বাজার মডেলে যোগান অপেক্ষকটি বিলম্বিত হলে তার ফল কী হয়?

১২। মনে করুন

$Y_t = C_t + I_t$	$0 < b < 1$
$C_t = C_0 + bY_{t-1}$	$Y =$ আয়; $I =$ বিনিয়োগ
$I_t = \bar{I}_0$	$C =$ ভোগ

অন্তরফল সমীকরণ ব্যবহার করে আয়ের সময়পথটি নির্ধারণ করুন এবং তার তাৎপর্য ব্যাখ্যা করুন।

ই. ই. সি—৭

পর্যায়-২৮

অর্থনীতির ঐচ্ছিক পাঠক্রম

(স্নাতক পাঠক্রম)

একক ১ ☐ অর্থনীতিতে প্রযোজ্য রৈখিক ধারণা—ক্রেমারের নিয়ম

গঠন

১.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনারা জানতে পারবেন—

- ম্যাট্রিক্স ও ভেক্টরের মধ্যে মূল পার্থক্য
- ম্যাট্রিক্স এবং ভেক্টরের বিবিধ ক্রিয়া প্রণালী
- ম্যাট্রিক্স সংক্রান্ত বিবিধ সূত্র
- ছকের মূল বৈশিষ্ট্যসমূহ
- ম্যাট্রিক্সের বিপরীত নির্ণয়
- ক্রেমারের সূত্র
- অর্থনীতিতে ক্রেমারের সূত্রের প্রয়োগ

১.১ প্রস্তাবনা

কোনো রৈখিক (linear) মডেলে অনেকগুলি রৈখিক সহসমীকরণ (Simultaneous equation) থাকলে সেই মডেলগুলি সমাধান করার একটি দৃষ্টিনন্দন পদ্ধতিকে ম্যাট্রিক্স বীজগণিত (Matrix algebra) বলা হয়। ম্যাট্রিক্স বা ধাত্র কথাটির বীজগাণিতিক অর্থ হল আয়তক্ষেত্রাকারে উপরে-নিচে ও পাশাপাশি সাজানো সংখ্যা বা রাশিসমূহ। এটিকে সাধারণত একটি বর্ণ দিয়ে সূচিত করা হয়, (যেমন A) এবং ম্যাট্রিক্স সংক্রান্ত ক্রিয়াপ্রণালীতে একে একটি সংখ্যা বলেই কল্পনা করা হয়।

ম্যাট্রিক্স বীজগণিত বিভিন্নভাবে আমাদের কাজে লাগে। প্রথমতঃ এর মাধ্যমে যে কোন বড়সড় সহসমীকরণের সমষ্টিকে (Simultaneous equation system) ঘন বিন্যস্ত (Compact) ভাবে লেখা যায়। দ্বিতীয়তঃ এর সমাধানের কোনো অস্তিত্ব আছে কিনা তা প্রাসঙ্গিক ম্যাট্রিক্সের ছক (determinant) নির্ণয় করেই বোঝা যায়। তৃতীয়তঃ সমাধানের অস্তিত্ব থাকলে তা ম্যাট্রিক্স বিপরীতকরণ, ক্রেমার বা অন্য কোন পদ্ধতির মাধ্যমে নির্ণয়ও করা সম্ভব।

ম্যাট্রিক্স বীজগণিতের সমস্যা একটাই। এটি রৈখিক সমীকরণ সমষ্টি ছাড়া অন্য ক্ষেত্রে ব্যবহার করা দুঃসাধ্য।

১.২ ম্যাট্রিক্স ও ভেক্টর (Matrix and Vector)

পদার্থ বিজ্ঞানে যার শুধু মান আছে দিক নেই তাকে Scalar বলে আর যার মান ও দিক দুই-ই আছে তাকে Vector বলে। ম্যাট্রিক্স বীজগণিতে এই দুটি পরিভাষা একটু অন্য অর্থে ব্যবহৃত হয়। একটি ম্যাট্রিক্সে একাধিক সারি বা স্তম্ভ থাকতে পারে। এর অনুভূমিকভাবে বিন্যস্ত রাশিসমূহকে এর সারি (বা সারি ভেক্টর) বলা হয় আর এর উল্লম্বভাবে বিন্যস্ত রাশি সমূহকে এর স্তম্ভ বা স্তম্ভ ভেক্টর বলে। আবার একটি ম্যাট্রিক্সের শুধুমাত্র একটি সারি থাকলে তাকে সারি ভেক্টর বলা হয়। অনুরূপভাবে একটি ম্যাট্রিক্সে শুধুমাত্র একটি স্তম্ভ থাকলে তাকে স্তম্ভ ভেক্টর বলা হয়। কোন ম্যাট্রিক্সে একটি মাত্র সারি ও একটি মাত্র স্তম্ভ থাকলে তাকে স্কেলার (Scalar) বলা হয়। সাধারণতঃ ম্যাট্রিক্স বড় হাতের বর্ণ দিয়ে সূচিত হয় আর ভেক্টর ছোট হাতের বর্ণ দিয়ে সূচিত হয়। ভেক্টর বা ম্যাট্রিক্স থেকে Scalar কে আলাদা করতে অনেক সময় Bold type ব্যবহার করতে হয়।

ম্যাট্রিক্স ও ভেক্টরের সাহায্যে অনেক অর্থনৈতিক মডেল সংক্ষেপে উপস্থাপন করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ নীচের দ্বিপণ্য বিশিষ্ট বাজারের প্রতিচ্ছবি বা মডেল বিবৃত করা হল।

$$\boxed{Q_{d_i} - Q_{s_i} = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} &Q_{d_1} - Q_{s_1} = 0 \\ &Q_{d_1} = a_0 + a_1p_1 + a_2p_2 \\ &Q_{s_1} = b_0 + b_1p_1 + b_2p_2 \\ &Q_{d_2} - Q_{s_2} = 0 \\ &Q_{d_2} = \alpha_0 + \alpha_1p_1 + \alpha_2p_2 \\ &Q_{s_2} = \beta_0 + \beta_1p_1 + \beta_2p_2 \\ &\qquad \alpha_0 > \beta_0 > 0 \end{aligned}\right\} \quad (১.১)$$

[এখানে Q_{s_i} = i তম পণ্যের যোগান।
Q_{d_i} = i তম পণ্যের চাহিদা।
P_i = i তম পণ্যের দাম $i = 1, 2$]

এখান থেকে বলা যায় যে

$$a_0 + a_1p_1 + a_2p_2 = b_0 + b_1p_1 + b_2p_2$$

অথবা $(a_1 - b_1)p_1 + (a_2 - b_2)p_2 = (b_0 - a_0)$

অথবা $c_1p_1 + c_2p_2 = -Co \begin{bmatrix} Ci = a_i - b_i \\ i = 0, 1, 2 \end{bmatrix}$

আবার

$$\alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = \beta_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$$

অথবা $(\alpha_1 - \beta_1)p_1 + (\alpha_2 - \beta_2)p_2 = (\beta_0 - \alpha_0)$

অথবা $\gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 = -\gamma_0 \begin{bmatrix} \gamma_i = \alpha_i - \beta_i \\ i = 0, 1, 2 \end{bmatrix}$

তাই উৎপাদনের পরিমাণের চল Q_1 ও Q_2 কে বাদ দিয়ে (১.১) কে দুটি রৈখিক সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। যেগুলি হল

$$\left.\begin{aligned} c_1 p_1 + c_2 p_2 &= -c_0 \\ \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 &= -\gamma_0 \end{aligned}\right\} \quad (১.২)$$

পরে আমরা দেখাব যে ম্যাট্রিক বীজগণিতে (১.২) কে $A \cdot P = d$ এভাবে লেখা হয়।

যেখানে $A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} -c_0 \\ -d_0 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের বিন্যাস

সাধারণতঃ একটি **সমীকরণসমষ্টিতে** তিনধরণের উপাদান **থাকে।** (১) a_{ij} বা সহগগুলির সমষ্টি (২) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ চলগুলির সমষ্টি এবং (৩) ধ্রুবক d_i বা স্থির রাশিগুলির সমষ্টি। এই তিনটি সমষ্টিকে যদি পৃথক পৃথক আয়তক্ষেত্রাকার বিন্যাসে সাজিয়ে যথাক্রমে A, x ও d বলা যায় তাহলে,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ | \\ x_n \end{bmatrix} \text{ এবং } d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ | \\ d_n \end{bmatrix} \quad (১.৪)$$

একটি উদাহরণ নিলে বিষয়টি আরও পরিষ্কার হবে।

ধরা যাক

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + x_3 &= 22 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 12 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}\right\} \quad (১.৫)$$

(১.৫) একটি রৈখিক সমীকরণ সমষ্টি। এর থেকে

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} ; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} \text{ এবং } d = \begin{bmatrix} 22 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ লেখা যায়।} \quad (১.৬)$$

এই প্রতিটি বিন্যাসই এক একটি ম্যাট্রিক্স।

A বিন্যাসকে সংক্ষেপে $[a_{ij}]$ $\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$ লেখা হয়ে থাকে। এখানে i দ্বারা সারি ও j দ্বারা স্তম্ভ নির্দেশ করা হয়েছে যেমন a_{23} মানে দ্বিতীয় সারির তৃতীয় স্তম্ভে অবস্থিত রাশি।

বিশেষ ম্যাট্রিক্স হিসাবে ভেক্টর

ম্যাট্রিক্সের সারির (row) সংখ্যা ও স্তম্ভের (column) সংখ্যা মিলে ম্যাট্রিক্সের আয়তন (dimension) নির্ধারিত হয়। (১.৪) এর A তে mটি সারি ও nটি স্তম্ভ আছে তাই A-এর আয়তন হল $m \times n$ (এটিকে m by n বলা হয় এবং $A_{m \times n}$ হিসাবে লেখা হয়)। যদি কোন ম্যাট্রিক্সে $m = n$ হয় তাহলে তাকে চৌকো ম্যাট্রিক্স (square matrix) বলা হয়। (১.৬) তে, A হল একটি (3×3) চৌকো ম্যাট্রিক্স। যদি কোনো ম্যাট্রিক্সে একটিই স্তম্ভ থাকে তাকে বলা স্তম্ভ ভেক্টর (Column Vector)। (১.৪) এ x এর আয়তন $(n \times 1)$ এবং d এর আয়তন $(m \times 1)$— সুতরাং এগুলি স্তম্ভ ভেক্টর। (১.৬) এ x ও d উভয়ই (3×1) স্তম্ভ ভেক্টর। আমরা যদি x_j চলগুলিকে অনুভূমিক বিন্যাসে সাজাই তাহলে একটি $(1 \times n)$ ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে। এটিকে বলা হবে সারি ভেক্টর (row vector) এবং $x' = [x_1, x_2, \ldots x_n]$ লেখা হবে। x' লিখলেই বোঝা যাবে যে এটি স্তম্ভ ভেক্টর নয়। সারি ভেক্টর।

(১.৪) এর ম্যাট্রিক্সের মাধ্যমে (১.৩)-এর সমীকরণগুলিকে একসঙ্গে $Ax = d$ লেখা যাবে। কিন্তু Ax অর্থাৎ দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফল কি করে পাওয়া যায় বা কখন দুটি ম্যাট্রিক্স আমরা সমান বলব তা এখনো বলা হয়নি। এবার সে কথায় আসা যাক।

১.৩ ম্যাট্রিক্সের ক্রিয়াপ্রণালী (Operations)

প্রত্যেক অর্থনীতির ছাত্রদের ম্যাট্রিক্সের ক্রিয়াপ্রণালী সম্বন্ধে পরিচিত হওয়া বিশেষ প্রয়োজন। কারণ ম্যাট্রিক্স বীজগণিত ছাড়াও অর্থনীতির অগ্রসর বা উন্নত স্তরে প্রায় সবক্ষেত্রেই (যেমন চাহিদা তত্ত্ব, যোগান তত্ত্ব, সাধারণ ভারসাম্য তত্ত্ব, হিতসাধন অর্থনীতি) এর বহুল ব্যবহার হয়।

১.৩.১ ম্যাট্রিক্সের যোগ ও বিয়োগ :

দুটি ম্যাট্রিক্সের যোগ তখনই করা যাবে যখন দুটির আয়তন সমান।

সাধারণভাবে যোগের নিয়মটি হল—

$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]$ [এখানে $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$]

$[c_{ij}]$এর আয়তন $[a_{ij}]$ ও $[b_{ij}]$ এর আয়তনের সমান হবে।

উদাহরণ ১

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 & 9+0 \\ 2+0 & 1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

দুটি ম্যাট্রিক্সের বিয়োগফলও তখনই নির্ধারণ করা যায় যখন তাদের আয়তন সমান।

$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [c_{ij}]$ [এখানে $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$]

উদাহরণ ২

$$\begin{bmatrix} 18 & 4 \\ 16 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18-2 & 4-8 \\ 16-4 & 9-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

১.৩.২ ম্যাট্রিক্সকে একটি রাশি বা Scalar দ্বারা গুণ :

ম্যাট্রিক্সকে কোন একটি রাশি দিয়ে গুণ করার অর্থ তার প্রতিটি উপাদানকে সেই রাশিটি (scalar) দিয়ে গুণ করা। এই রাশিটি চল বা বিষম রাশি বা স্থির রাশি হতে পারে।

উদাহরণ ১

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{4} & \frac{a_{12}}{4} \\ \frac{a_{21}}{4} & \frac{a_{22}}{4} \end{bmatrix}$$

উদাহরণ ২

$$10x\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50x & 80x \\ 90x & 40x \end{bmatrix}$$

১.৩.৩ দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফল :

যদি দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর গুণফল নির্ধারণ করতে হয় তাহলে প্রথম ম্যাট্রিক্স A এর স্তম্ভের সংখ্যা এবং পরবর্তী ম্যাট্রিক্স B এর সারির সংখ্যা সমান হওয়া একান্ত দরকার।

ধরা যাক।

$$\underset{(1\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \text{ এবং } \underset{(2\times 3)}{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \qquad (১.৭)$$

এক্ষেত্রে গুণফল AB নির্দিষ্ট হবে কারণ A এর দুটি স্তম্ভ ও B এর দুটি সারি। কিন্তু এক্ষেত্রে **BA** নির্দিষ্ট করা যাবে না কারণ B এর স্তম্ভ তিনটি এবং A এর সারি দুটি। সাধারণভাবে বলতে গেলে যদি A এর আয়তন $(m\times n)$ হয় এবং B এর আয়তন $(p\times q)$ হয় তবে AB নির্দিষ্ট হতে গেলে $n = p$ হওয়া আবশ্যক। সেক্ষেত্রে AB এর আয়তন হবে $(m\times q)$। আমাদের উপরকার উদাহরণ (১.৭) এ AB এর আয়তন (1×3) ।

$$\underset{(1\times 3)}{A} = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}$$

এবার দেখা যাক c_{11} , c_{12} , c_{13} কিভাবে পাওয়া যায়। c_{ij} হল প্রথম ম্যাট্রিক্স A এর iতম সারি ও পরবর্তী ম্যাট্রিক্স B এর jতম স্তম্ভের উপাদানগুলির গুণফলগুলির যোগফল। যেমন c_{11}এ A এর প্রথম সারি $(i = 1$ বলে) ও B এর প্রথম স্তম্ভের $(j = 2$ বলে) উপাদানগুলি নেওয়া হবে।

তাই $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$ (১.৮)

আবার $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$ (১.৮′)

তাই $c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}$ (১.৮″)

এবার বিষয়টি উদাহরণের মাধ্যমে বোঝানো যাক।

উদাহরণ ১

$$\underset{(3\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \text{ এবং } \underset{(2\times 2)}{B} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \text{ হলে}$$

$$\underset{(3\times 2)}{AB} = \begin{bmatrix} 3(-2)+5(6) & 3(5)+5(9) \\ 4(-2)+6(6) & 4(5)+6(9) \\ 7(-2)+1(6) & 7(5)+1(9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 60 \\ 28 & 74 \\ -8 & 44 \end{bmatrix}$$

উদাহরণ ২

এবার একটি সাধারণ জাতীয় আয় মডেল নেওয়া যাক যেখানে মাত্র দুটি অন্তর্নিনীত (endogenous) চল আছে Y ও C [y = জাতীয় আয়, C = ভোগ] ।

$$Y = C + I_0 + G_0 \quad [\ I_0 = \text{নিনিয়োগ},\ G_0 = \text{সরকারি ব্যয়}\ ]$$

$$C = a + bY$$

এটিকে (১.৩) এর মত করে সাজালে

$$y - c = I_0 + G_0$$

$$-bY + c = a$$

অতএব সহগ ম্যাট্রিক্স A, চলরাশিগুলির ভেক্টর x ও ধ্রুবকগুলির ভেক্টর d হল যথাক্রমে

$$\underset{(2\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix},\ \underset{(2\times 1)}{x} = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} \text{ এবং } \underset{(2\times 1)}{d} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix}$$

যেহেতু A এর স্তম্ভ দুটি ও x এর সারিও দুটি তাই A_x নির্ণয় করা সম্ভব।

$$\underset{(2\times 1)}{A_x} = \begin{bmatrix} Y - C \\ -bY + C \end{bmatrix} = Y\begin{bmatrix} 1 \\ -b \end{bmatrix} + C\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

অতএব $A_x = d$। সেই কারণে এই মডেলটিকে $A_x = d$ হিসাবেও লেখা যায়।

১.৪ ভেক্টরের ক্রিয়াপ্রণালী (Operation)

১.৪.১ ভেক্টরের গুণ :

একটি $(m \times 1)$ আয়তনের স্তম্ভ ভেক্টর u ও একটি $(1 \times n)$ আয়তনের সারি ভেক্টর v' এর গুণফল হল $(m \times n)$ আয়তনের একটি ম্যাট্রিক্স।

উদাহরণ ১

ধরা যাক $\underset{(2\times 1)}{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ এবং $\underset{(1\times 2)}{v'} = [\ 7;\ 8\ ]$

$$\underset{(2\times 2)}{uv'} = \begin{bmatrix} 4\times 7 & 4\times 8 \\ 5\times 7 & 5\times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 32 \\ 35 & 40 \end{bmatrix}$$

উদাহরণ ২

ধরা যাক $u' = [\ 5\ 8\ 9\ ]$। এবার এখান থেকে $u'u$ বের করতে হবে। u হবে u' এর উপাদানগুলিকে উল্লম্বভাবে সাজিয়ে তৈরি একটি স্তম্ভ ভেক্টর।

অতএব $\underset{(1\times 3)\,(3\times 1)}{u'u} = \begin{bmatrix} 5\ 8\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$= \left[(5\times 5) + (8\times 8) + (9\times 9) \right]$$

$$= 170$$

তার মানে সাধারণভাবে বলা যায় যে যদি $u' = [u_1\ u_2\ \ldots u_n\ ]$ হয় তাহলে

$u'u$ হবে, $> u_1^2 + u_2^2 + \ldots\ u_n^2 \quad = \sum_{j=1}^{n} u_j^2$

১.৫ রৈখিক নির্ভরতা

$v_1, v_2, \ldots v_n$ ভেক্টর সেটের যে কোন একটি ভেক্টরকে বাকি ভেক্টরগুলির রৈখিক সংমিশ্রণ (linear combination) হিসাবে প্রকাশ করা গেলে, এবং গেলেই, ঐ ভেক্টরগুলিকে রৈখিকভাবে নির্ভরশীল (linearly dependent) বলা হবে। অন্যথায় তারা রৈখিকভাবে স্বাধীন (independent) বা স্বয়ম্ভর বলা যাবে।

উদাহরণ ১

$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ এবং $v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল কারণ v_3 হল v_1 এবং v_2 এর রৈখিক সংমিশ্রণ $3v_1 - 2v_2$ ।

$$3v_1 - 2v_2 = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = v_3$$

অথবা $3v_1 - 2v_2 - v_3 = 0$

এখানে $0 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ —এটিকে বলা হয় শূন্য ভেক্টর (zero vector or null vector)

শূন্য ভেক্টরের সাহায্য নিয়ে রৈখিক নির্ভরতার সংজ্ঞা আবার অন্যভাবেও দেওয়া যায়। কোন একটি স্থিররাশির সেট (set of scalars) $k_1, k_2, \ldots k_n$ (যার সবগুলিই শূন্য নয়)। যাতে

$\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = \underset{(m \times 1)}{0}$ হয় থাকলে এবং থাকলেই $v_1, v_2, \ldots, v_n$ [প্রতিটি $(m \times 1)$ আয়তন বিশিষ্ট] ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হবে। যদি $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = 0$ সমীকরণটি শুধুমাত্র সমস্ত i এর জন্য $k_i = 0$ হলেই সন্তুষ্ট হয়, তাহলে $v_1, v_2, v_i, \ldots, v_n$ রৈখিকভাবে স্বাধীন হবে।

১.৬ বিনিময় (Commutative), সংযোগ (Associative) এবং বিচ্ছে (Distributive)

সূত্র :

সাধারণ রাশিগত বীজগণিতে, যোগ ও গুণ করার প্রক্রিয়াগুলি বিনিময়, সংযোগ ও বিচ্ছেদ সূত্রগুলি সং করে। এই সূত্রগুলি নীচে পরিষ্কার করে বোঝানো হল।

যোগের বিনিময় সূত্র : $a + b = b + a$

গুণের বিনিময় সূত্র : $ab = ba$

যোগের সংযোগ সূত্র : $(a + b) + c = a + (b + c)$

গুণের সংযোগ সূত্র : $(ab)c = a(bc)$

বিচ্ছেদ সূত্র : $a(b + c) = ab + ac$

১.৬.১ ম্যাট্রিক্সের যোগ :

ম্যাট্রিক্সের যোগ বিনিময় সূত্র ও সংযোগ সূত্র দুটি সন্তুষ্ট করে। এখানে বিয়োগকেও যোগের মাধ্যমে প্রক করা যায় যেমন $A - B = A + (-B)$ । সেই কারণে বিয়োগ নিয়ে আর পৃথক আলোচনা করা হলনা

বিনিময় সূত্র : $A + B = B + A$

প্রমাণ :

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}]$$
$$= [b_{ij}] + [a_{ij}]$$
$$= B + A$$

উদাহরণ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+8 \\ 2+6 & 3+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+1 & 8+4 \\ 6+2 & 7+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= B +$$

সংযোগ সূত্র :

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

প্রমাণ :

$$(A + B) + C = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}]$$

$$= [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}]$$

$$= A + (B + C)$$

উদাহরণ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ এবং } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) + C = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right\} + \left\{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \left\{\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$$

অতএব $(A + B) + C = A + (B + C)$

১.৬.২ ম্যাট্রিক্সের গুণ :

ম্যাট্রিক্সের গুণ কিন্তু বিনিময় সূত্র সন্তুষ্ট করেনা কারণ প্রথমত : আগেই দেখানো হয়েছে যে AB নির্দিষ্ট হলেও BA নির্দিষ্ট নাও হতে পারে। ধরা যাক A এর আয়তন (2×3) এবং B এর আয়তন (3×3)। সেক্ষেত্রে AB নির্দিষ্ট হবে কারণ A এর স্তম্ভ B এর সারির সংখ্যা সমান কিন্তু BA নির্দিষ্ট হবেনা কারণ B এর স্তম্ভ ও A এর সারির সংখ্যা সমান নয়।

আবার যদি AB ও BA উভয়েই নির্দিষ্ট হয় তবুও কিন্তু বলা যাবেনা যে সবক্ষেত্রেই $AB = BA$ । এটি উদাহরণ নিলে বিষয়টি পরিষ্কার হবে। ধরা যাক

$$\underset{(2\times 2)}{A} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{এবং} \quad \underset{(2\times 2)}{B} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1(5) + 3(6) & 1(8) + 3(7) \\ 2(5) + 4(6) & 2(8) + 4(7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 29 \\ 34 & 44 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5(1) + 8(2) & 5(3) + 8(4) \\ 6(1) + 7(2) & 6(3) + 7(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 47 \\ 20 & 46 \end{bmatrix}$$

বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্র ছাড়া $AB \neq BA$ এবং যেহেতু বেশিরভাগ ক্ষেত্রে $AB \neq BA$ তাই পূর্বগুণ (pre-multiplication) এবং উত্তরগুণ (postmultiplication) কথা দুটি সাধারণতঃ ব্যবহার করা হয়। AB গুণফলে B কে A দিয়ে পূর্বগুণ করা হচ্ছে এবং A কে B দিয়ে উত্তরগুণ করা হচ্ছে। এখানে উল্লেখ করা দরকার যে K কোন রাশি (scalar) হলে $kA = AK$ । সেক্ষেত্রে বিনিময় সূত্রটি সন্তুষ্ট হবে।

সংযোগ সূত্র

$$AB(C) = A(BC) = ABC$$

এই গুণফল নির্ধারণের জন্য অবশ্যই ম্যাট্রিক্সগুলি পরস্পর গুণযোগ্য (স্তম্ভ ও সারির সংখ্যার শর্তানুসারে)

হওয়া আবশ্যক। যদি A এর আয়তন $(m \times n)$ হয় এবং C এর আয়তন $(p \times q)$ হয় তাহলে Bকে $(n \times p)$ হওয়া দরকার।

$$\underset{(m \times n)}{A} \quad \underset{(n \times p)}{B} \quad \underset{(p \times q)}{C}$$

এখানে লক্ষণীয় যে আয়তন নির্দেশকগুলির মধ্যে n ও p দুবার এসেছে। গুণযোগ্যতা থাকলে সংযোগ সূত্রানুসারে যে কোন দুটি সন্নিহিত ম্যাট্রিক্সকে আগে গুণ করা যায়। তবে এক্ষেত্রে গুণফলটিকে মূল ম্যাট্রিক্স দুটির যথার্থ জায়গায় সঠিকভাবে বসাতে হবে।

উদাহরণ ১

ধরা যাক

$$\underset{(3\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underset{(2\times 2)}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ এবং } \underset{(2\times 3)}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB(C) = \begin{bmatrix} 5(0)+1(1) & 5(2)+1(5) \\ 6(0)+8(1) & 6(2)+8(5) \\ 2(0)+0(1) & 2(2)+0(5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{(3\times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 8 & 52 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} \underset{(2\times 3)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+15(4) & 1(2)+15(5) & 1(3)+15(6) \\ 8(1)+52(4) & 8(2)+52(5) & 8(3)+52(6) \\ 0(1)+4(4) & 0(2)+4(5) & 0(3)+4(6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 61 & 77 & 93 \\ 216 & 276 & 336 \\ 16 & 20 & 24 \end{bmatrix}$$

A (BC)

$$= \underset{(3\times 2)}{\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}} \underset{(2\times 3)}{\begin{bmatrix} 0(1)+2(4) & 0(2)+2(5) & 0(3)+2(6) \\ 1(1)+5(4) & 1(2)+5(5) & 1(3)+5(6) \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 5(8)+1(21) & 5(10)+1(27) & 5(12)+1(33) \\ 6(8)+8(21) & 6(10)+8(27) & 6(12)+8(33) \\ 2(8)+0(21) & 2(10)+0(27) & 2(12)+0(33) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 61 & 77 & 93 \\ 216 & 276 & 336 \\ 16 & 20 & 24 \end{bmatrix}$$

অতএব $AB(C) = A(BC)$

বিচ্ছেদ সূত্র

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)A = BA + CA$$

উদাহরণ

$$\underset{(2\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underset{(2\times 2)}{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \underset{(2\times 2)}{C} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

A (B + C)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 18 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(14)+2(18) & 1(16)+2(20) \\ 3(14)+4(18) & 3(16)+4(20) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 56 \\ 114 & 128 \end{bmatrix}$$

AB + AC

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(5) + 2(7) & 1(6) + 2(8) \\ 3(5) + 4(7) & 3(6) + 4(8) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1(9) + 2(11) & 1(10) + 2(12) \\ 3(9) + 4(11) & 3(10) + 4(12) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 31 & 34 \\ 71 & 78 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 56 \\ 114 & 128 \end{bmatrix}$$

অতএব $A(B + C) = AB + AC$

একইভাবে প্রমাণ করা যায় যে $(B + C)A = BA + CA$

১.৭ অভেদ (identity) ম্যাট্রিক্স ও শূন্য (null) ম্যাট্রিক্স

১.৭.১ অভেদ ম্যাট্রিক্স :

অভেদ ম্যাট্রিক্স হল একটি চৌকো (square) ম্যাট্রিক্স যার মুখ্য কর্ণ (principal diagonal) বরাবর 1 থাকে এবং বাকী সমস্ত উপাদানগুলি শূন্য। এটিকে I_i (i = 1, 2, 3 ইত্যাদি) লেখা হয়ে থাকে। চৌকো ম্যাট্রিক্স বলে এর স্তম্ভ ও সারির সংখ্যা সমান। সেই কারণে I এর তলায় তাদের সংখ্যা নির্দেশ করার জন্য শুধু i লেখা হয়। উদাহরণ দিলে বিষয়টি বুঝতে সুবিধা হবে।

উদাহরণ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

স্কেলার বা রাশির বীজগণিতে 1 এর ভূমিকা আর ম্যাট্রিক্স বীজগণিতে অভেদ ম্যাট্রিক্সের ভূমিকা প্রায় একই। যে কোন সংখ্যা x এর ক্ষেত্রে $1(x) = x(1) = x$ । সেই রকম যে কোন ম্যাট্রিক্স A এর জন্য

$IA = AI = A$ ......(১.৯)

আমরা আগেই দেখেছি যে সাধারণতঃ $AB \neq BA$ । কিন্তু যদি Bটি বা Aটি বা উভয়েই অভেদ ম্যাট্রিক্স হয় তবে সেক্ষেত্রে $AB = BA$

উদাহরণ

ধরা যাক $\underset{(2\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

$$\underset{(2\times 2)}{I_2 A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1) + 0(9) & 1(8) + 0(7) \\ 0(1) + 1(9) & 0(8) + 1(7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = A$$

$$\underset{(2\times 2)}{AI_2} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1) + 8(0) & 1(0) + 8(1) \\ 9(1) + 7(0) & 9(0) + 7(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = A$$

এর থেকে বলা যায় যে কোন ম্যাট্রিক্স গুণফলের মধ্যে উপযুক্ত আয়তনের I বসালে বা তুলে নিলে গুণফলটির কোন পরিবর্তন হবেনা।

$$\underset{(m\times n)}{A} \; I_n \; \underset{(n\times p)}{B} = (AI)B = AB$$

আবার যদি $A = I_n$ হয়

$AI_n = (I_n)^2 = I_n$

প্রমাণ :

ধরা যাক $A = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$AI_2 = (I_2)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1) + 0(0) & 1(0) + 0(1) \\ 0(1) + 1(0) & 0(0) + 1(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

এই নিয়মটিকে প্রসারণ করে তাই বলা যায় যে $(I_n)^K = I_n$ $(k = 1, 2\ldots\ldots,)$। তার মানে একটি অভেদ ম্যাট্রিক্সকে যতবারই তার নিজেকে দিয়ে গুণ করা হোক না কেন সে অপরিবর্তিত থাকবে। এই ধরণের ম্যাট্রিক্সকে (যেখানে $AA = A$) সমঘাত (idempotent) ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

১.৭.২ শূন্য ম্যাট্রিক্স (null matrix) :

অভেদ ম্যাট্রিক্স যেমন 1 সংখ্যার ভূমিকা পালন করে শূন্য ম্যাট্রিক্স o তেমন শূন্য সংখ্যার ভূমিকাই পালন করে। শূন্য ম্যাট্রিক্সের সবকটি উপাদান শূন্য। শূন্য ম্যাট্রিক্স কিন্তু অভেদ ম্যাট্রিক্সের মত সবসময় চৌকো ম্যাট্রিক্স নাও হতে পারে। চৌকো শূন্য ম্যাট্রিক্স সমঘাত হবে কিন্তু অ-চৌকো (non-square) শূন্য ম্যাট্রিক্স সমঘাত হবেনা। o যদি চৌকো হয় তাহলে 0^2, 0^3 ইত্যাদি নির্ণয় করা সম্ভব কিন্তু যদি 0 চৌকো না হয় তাহলে 0^2 ইত্যাদি নির্ণয় করা যাবেনা।

উদাহরণ : ধরা যাক $\underset{(2\times 2)}{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

এক্ষেত্রে $0^2 = \underset{(2\times2)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{(2\times2)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$ এবং তাই নির্ণয়যোগ্য।

কিন্তু 0 যদি অচৌকো হয় তাহলে কি হয় তা এবার দেখা যাক। ধরি যে $\underset{(2\times 3)}{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

এবার $0^2 = \underset{(2\times3)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{(2\times3)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ । ম্যাট্রিক্সের গুণযোগ্যতার সূত্রানুসারে এদুটি গুণযোগ্য নয় তাই 0^2 নির্ণয় করা যায় না। একইভাবে প্রসারণ করে দেখানো যায় যে এটির বিভিন্ন ঘাতের কোনোটিই নির্ণয় করা যাবেনা।

0 সংখ্যাটির মত শূন্য ম্যাট্রিক্স ও যোগ ও গুণের কয়েকটি সূত্র সন্তুষ্ট করে যেমন

$$\underset{(m\times n)}{A} + \underset{(m\times n)}{0} = \underset{(m\times n)}{0} + \underset{(m\times n)}{A} = \underset{(m\times n)}{A}$$

$$\underset{(m\times n)\ (n\times p)}{A.0} = \underset{(m\times p)}{0}$$

এবং $\underset{(q\times m)\ (m\times n)}{0.A} = \underset{(q\times n)}{0}$

একটি উদাহরণ নিয়ে এবার এই সূত্রগুলি আলোচনা করা যাক।

উদাহরণ ১ :

ধরা যাক $\underset{(2\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 3+0 & 4+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= A$$

$$0 + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+1 & 0+2 \\ 0+3 & 0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

অতএব $A + 0 = 0 + A = A$

উদাহরণ ২ :

$$\underset{(2\times 3)}{0} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(2\times 3)\ (3\times 2)}{A.0} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(0) + 2(0) + 3(0) & 1(0) + 2(0) + 3(0) \\ 4(0) + 5(0) + 6(0) & 4(0) + 5(0) + 6(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{(2\times 2)}{0}$$

$$\underset{(3\times 2)\ (2\times 3)}{0.A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0(1)+0(4) & 0(2)+0(5) & 0(3)+0(6) \\ 0(1)+0(4) & 0(2)+0(5) & 0(3)+0(6) \\ 0(1)+0(4) & 0(2)+0(5) & 0(3)+0(6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{(3\times 3)}{0}$$

A বা B এর একটি শূন্য Matrix হলে বা উভয়েই শূন্য হলে।

১.৮ পক্ষান্তরিত (Transpose) ও বিপরীত (Inverse) ম্যাট্রিক্স

১.৮.১ পক্ষান্তরিত ম্যাট্রিক্স :

যখন কোন ম্যাট্রিক্স A এর সারি ও স্তম্ভগুলিকে পরস্পর স্থান বিনিময় করানো হয় তখন A এর পক্ষান্তরিত (Tranpose) ম্যাট্রিক্স A' বা A^T পাওয়া যায়।

উদাহরণ

ধরা যাক $\underset{(2\times 3)}{A} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

সেক্ষেত্রে A' হবে।

$\underset{(3\times 2)}{A'} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 4 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ । তাই সাধারণভাবে যদি A এর আয়তন $(m\times n)$ হয় তাহলে A' এর আয়তন হবে $(n\times m)$। কেবলমাত্র চৌকো ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে মূল ম্যাট্রিক্স ও পক্ষান্তরিত ম্যাট্রিক্স দুটির আয়তন সমান হবে। উদাহরণ হিসাবে

$\underset{(2\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ নেওয়া যাক। এক্ষেত্রে $\underset{(2\times ?)}{A'} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$,

অর্থাৎ মূল ম্যাট্রিক্স ও পক্ষান্তরিত ম্যাট্রিক্স দুটির আয়তন সমান।

ধরা যাক $\underset{(3\times 3)}{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

এক্ষেত্রে $D' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

তার মানে D' ও D এর আয়তনই শুধু সমান নয়, $D = D'$ ও বটে।

$D = D'$ হল মুখ্য কর্ণের পরিপ্রেক্ষিতে অন্যান্য উপাদানগুলির প্রতিসাম্যের ফল। D এর মুখ্য কর্ণটিকে দর্পণ হিসাবে ধরলে তার উত্তরপূর্বের উপাদানগুলি তার দক্ষিণপশ্চিমের উপাদানগুলির সঠিক প্রতিবিম্ব (exact image)। সেই কারণে প্রথম সারি ও প্রথম স্তম্ভটি একেবারে এক। এইভাবে প্রতিটি সারি তার অনুরূপ স্তম্ভের সঙ্গে এক। D এর মত এই সমস্ত ম্যাট্রিক্স হল চৌকো ম্যাট্রিক্সের একটি বিশেষ শ্রেণী যাকে বলা হয় প্রতিসম (symmetric) ম্যাট্রিক্স। অভেদ ম্যাট্রিক্স I_3 প্রতিসম অর্থাৎ $I = I'$।

পক্ষান্তরিত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্যসমূহ :

$(A')' = A$ (১.১০)

$(A + B)' = A' + B'$ (১.১১)

$(AB)' = B'A'$ (১.১২)

উদাহরণ ১ :

ধরা যাক $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$(A')' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$= A$

উদাহরণ ২ :

ধরা যাক $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

তার মানে $A' = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B' = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

$$(A + B) = \begin{bmatrix} 1+9 & 5+1 \\ 7+5 & 8+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

অতএব $(A + B)' = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$

$$A' + B' = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+9 & 7+5 \\ 5+1 & 8+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= (A + B)'$$

উদাহরণ ৩ :

ধরা যাক $\underset{(2\times 2)}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $\underset{(2\times 2)}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

অতএব $\underset{(2\times 2)}{A'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $\underset{(2\times 2)}{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

$$\underset{(2\times 2)\ (2\times 2)}{A\,.\,B} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(2) & 1(5)+2(9) \\ 3(1)+4(2) & 3(5)+4(9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 23 \\ 11 & 51 \end{bmatrix}$$

$$(AB)' = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 23 & 51 \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+2(2) & 1(3)+2(4) \\ 5(1)+9(2) & 5(3)+9(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 23 & 51 \end{bmatrix} = (AB)'$$

১.৮.২ বিপরীত ম্যাট্রিক্স ও তার বৈশিষ্ট্যসমূহ :

যে কোন ম্যাট্রিক্সের পক্ষান্তরিত ম্যাট্রিক্স সর্বদাই নির্ধারণ করা সম্ভব কিন্তু বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব থাকতে পারে আবার নাও থাকতে পারে। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} তখনই সংজ্ঞাত (defined) হবে যখন A একটি চৌকো ম্যাট্রিক্স এবং A^{-1} এমন একটি ম্যাট্রিক্স যাতে

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (১.১৩)

এখানে মনে রাখা দরকার যে (১) A চৌকো হওয়া A^{-1} এর অস্তিত্বের জন্য আবশ্যক শর্ত কিন্তু যথেষ্ট নয়। তাই সমস্ত চৌকো ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব থাকেনা। যদি কোন চৌকো ম্যাট্রিক্সের বিপরীতের অস্তিত্ব থাকে তাকে বলা হয় অনেক (non-singular) ম্যাট্রিক্স। আর বিপরীতের অস্তিত্ব না থাকলে তাকে বলা হয় একক (singular) ম্যাট্রিক্স।

(২) যদি A^{-1} এর অস্তিত্ব থাকে তাহলে A^{-1} হল A এর বিপরীত এবং A হল A^{-1} এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স। তার মানে A ও A^{-1} পরস্পরের বিপরীত ম্যাট্রিক্স।

(৩) যদি A এর আয়তন $(n \times n)$ হয় তাহলে A^{-1} এর আয়তনও $(n \times n)$ হওয়া আবশ্যক কারণ তা নাহলে পূর্বগুণ ও উত্তরগুণ দুটি করা সম্ভব হবেনা।

(৪) যদি বিপরীতের অস্তিত্ব থাকে তাহলে সেই বিপরীতটি হবে অনন্য (unique)।

ধরা যাক যে B হল A এর বিপরীত। তাহলে $AB = BA = I$।

এবার ধরা যাক যে এমন আরেকটি ম্যাট্রিক্স C এর অস্তিত্ব আছে যাতে $AC = CA = I$।

$AB = I$ এর দুইদিক C দিয়ে পূর্বগুণ করে

$CAB = CI (= c)$

এখন যেহেতু ধরা হয়েছে যে $CA = I$

$IB = CI$

অথবা $B = C$

তার মানে B ও C একই বিপরীত ম্যাট্রিক্স।

(৫) যদি $AA^{-1} = I$ হয় এবং B এমন একটি ম্যাট্রিক্স যাতে $BA = I$, তাহলে $B = A^{-1}$।

$BA = I$ এর দুইদিক A^{-1} দিয়ে উত্তরগুণ করে

$(BA)A^{-1} = IA^{-1}$

অথবা $B(AA^{-1}) = IA^{-1}$ [সংযোগ সূত্রানুসারে]

অথবা $BI = IA^{-1}$ [যেহেতু $AA^{-1} = I$]

অতএব $B = A^{-1}$

ঠিক একইভাবে যদি $A^{-1} = I$ হয় তাহলে $C = A$ই হবে একমাত্র ম্যাট্রিক্স যাতে $CA^{-1} = I$ হবে।

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (১.১৪)$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (১.১৫)$$
$$(A')^{-1} = (A^{-1})' \qquad (১.১৬)$$

ধরা যাক $(AB)^{-1} = C$, আগেই জানা আছে যে $CAB = I$ [(১.১৩) থেকে]

$CABB^{-1}A^{-1} = IB^{-1}A^{-1}$ $(= B^{-1}A^{-1})$ (১.১৭)

বাঁদিক অর্থাৎ

$$
\begin{aligned}
& CABB^{-1}A^{-1} \\
= \; & CA(BB^{-1})A^{-1} \\
= \; & CAIA^{-1} \\
= \; & CAA^{-1} \\
= \; & CI \\
= \; & C
\end{aligned}
$$

(১.১৭) তে প্রতিস্থাপন করলে $C = B^{-1}A^{-1}$

অথবা $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(১.১৬) এর প্রমাণ নীচে দেওয়া হল।

ধরা যাক A' দেওয়া আছে এবং তার বিপরীত হল D।

তাহলে $DA' = I$

কিন্তু $(AA^{-1})' = I' = I$

তাই $DA' = (AA^{-1})'$

$= (A^{-1})' A'$ [(১.১২) দ্রষ্টব্য]

সমীকরণের দুইদিক $(A')^{-1}$ দিয়ে উত্তরগুণ করে

$$DA'(A')^{-1} = (A^{-1})' A'(A')^{-1}$$

অথবা $D = (A^{-1})'$

অতএব $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

বিপরীত ম্যাট্রিক্স ও রৈখিক (বা একঘাত) সমীকরণ সমষ্টির সমাধান

এর আগেই দেখা গেছে যে (১.৫) সমীকরণ সমষ্টিকে

$$\underset{(3\times 3)}{A}\ \underset{(3\times 1)}{x} = \underset{(3\times 1)}{d} \quad \text{...... (১.১৮)}$$ লেখা যায়।

এবার যদি A^{-1} এর অস্তিত্ব থাকে তাহলে (১.১৮) এর দুইদিক A^{-1} দিয়ে পূর্বগুণ করে

$$A^{-1}Ax = A^{-1}d$$

অথবা $$\underset{(3\times 1)}{x} = \underset{(3\times 3)}{A^{-1}}\ \underset{(3\times 1)}{d} \quad \text{..... (১.১৯)}$$

(১.১৯) এর বাঁদিকটি একটি চলরাশির স্তম্ভ (ভেক্টর) এবং ডানদিকটি কয়েকটি জ্ঞাত (known) সংখ্যার স্তম্ভ ভেক্টর।

তাই ম্যাট্রিক্স বা ভেক্টরের সমতার সংজ্ঞা অনুসারে (১.১৯) থেকে চলরাশিগুলির সেই সমস্ত মানের সেটটি পাওয়া যাবে যেটি সমীকরণ সমষ্টিকে সন্তুষ্ট করে। তার অর্থ ঐ মানগুলিই হবে সমাধান। আবার যেহেতু A^{-1} এর অস্তিত্ব থাকলে A^{-1} অনন্য (unique), $A^{-1}d$ ও সমাধানের অনন্য ভেক্টর হবে। সেই কারণে (১.১৯)-এ x এর বদলে $\bar{x}$ লেখা যায় কারণ তাহলে স্পষ্ট বোঝা যাবে যে সমাধানটি অনন্য।

১.৯ ম্যাট্রিক্সের অনেকত্বের শর্তসমূহ (Conditions for non-singularity of a matrix)

প্রয়োজনীয় (necessary) বনাম যথেষ্ট (sufficient) শর্ত

প্রয়োজনীয় শর্ত মানে হল পূর্বশর্ত। একমাত্র q সত্যি হলেই যদি p সত্যি হয় তাহলে q হল p এর জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত। আবার যদি q সত্যি হলে p সত্যি হয় কিন্তু q সত্যি না হলেও p সত্যি হতে পারে তাহলে q কে বলা হবে যথেষ্ট শর্ত। q সত্যি হলে p সত্যি হবে অর্থাৎ p সত্যি হওয়ার জন্য q সত্যি হওয়া যথেষ্ট। কিন্তু আবশ্যিক নয় কারণ q সত্যি না হলেও p সত্যি হতে পারে।

প্রয়োজনীয় শর্তের উদাহরণস্বরূপ বলা যেতে পারে p রামবাবু শ্যামের বাবা এবং q-রামবাবু পুরুষমানুষ। তার মানে সত্যি যদি রামবাবু শ্যামের বাবা হন তাহলে তাঁর পুরুষমানুষ হওয়া একান্ত আবশ্যক।

যথেষ্ট শর্তের উদাহরণস্বরূপ বলা যেতে পারে p-রামবাবু আন্দামান যাচ্ছেন এবং q-রামবাবু আন্দামানগামী উড়োজাহাজ ধরলেন। এখন q সত্যি হলে অর্থাৎ আন্দামানগামী উড়োজাহাজ ধরলে রামবাবু আন্দামান পৌঁছাবেন নিশ্চয়ই কিন্তু q সত্যি না হলেও অর্থাৎ আন্দামানগামী উড়োজাহাজ না ধরলেও তিনি আন্দামান যেতে পারেন মানে p সত্যি হতে পারে। (তিনি সমুদ্রপথে যেতে পারেন।)

তৃতীয় একটি সম্ভাবনার কথা সহজেই ভাবা যায় যেখানে একটি শর্তই প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত। সেক্ষেত্রে q হলে এবং হলেই p হবে। ধরা যাক p—মাসটি ৩০ দিনের চেয়ে কম, q হল মাসটি ফেব্রুয়ারি। কোন মাসে ৩০ দিনের কম হওয়ার জন্য তাকে ফেব্রুয়ারি হতেই হবে আবার মাসটি ফেব্রুয়ারি বললেই বোঝা যাবে যে তাতে ৩০ দিনের কম আছে।

অনেকত্বের শর্ত

যদি চৌকো হওয়ার শর্তটি পূরণ হয় তাহলে ম্যাট্রিক্সের অনেকত্বের জন্য যথেষ্ট শর্ত হল তার সারিগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন (অথবা স্তম্ভগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন)। চৌকো হওয়ার শর্ত ও রৈখিক স্বাধীনতা শর্তদুটি মিলে অনেকত্বের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত পূরণ হচ্ছে।

$$\text{এখন } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_n' \end{bmatrix}$$

এখানে $v_i' = [a_{i1} \quad a_{i2}\ldots a_{in}]$। প্রতিটি পরস্পর নির্ভরশীল না হওয়ার জন্য কোন একটি সারিও অন্যান্য সারিগুলির রৈখিক সংমিশ্রণ হতে পারবে না।

তার মানে কেবলমাত্র স্থিররাশির সেট্ $k_i = 0$ই

$$\sum_{i=1}^{n} k_i v_i' = \underset{(1\times n)}{0} \quad \text{..... (১.২০) কে সন্তুষ্ট করবে।}$$

এই সারিগুলির মধ্যে রৈখিক নির্ভরতা থাকলে সেগুলি সমীকরণগুলির মধ্যে রৈখিক নির্ভরতা সৃষ্টি করতে পারে।

ধরা যাক $Ax = d$ এর রূপটি এইরকম

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

এখানে A এর দুটি সারি পরস্পর নির্ভরশীল এবং $v_1' = 2v_2'$। d_1 ও d_2 এর মান সম্বন্ধে কিছু বলা হয়নি কিন্তু সেক্ষেত্রে দুটি সম্ভাবনা আছে।

হয় $1/d_1 = 2d_2$

নয়তো $2/d_1 \neq 2d_2$

ধরা যাক সমীকরণদুটি হবে

$$10x_1 + 4x_2 = 12$$

এবং $$5x_1 + 2x_2 = 6$$

সেক্ষেত্রে সমীকরণ দুটি পরস্পর নির্ভরশীল। তার মানে একটি সমীকরণ বাড়তি হয়ে যাচ্ছে। সমীকরণ সমষ্টিতে একটি মাত্র সমীকরণ থাকছে $5x_1 + 2x_2 = 6$। ফলস্বরূপ এর কোন নির্দিষ্ট সমাধান পাওয়া যাবেনা—এর অসীম সংখ্যক সমাধান থাকতে পারে।

এবার দ্বিতীয় সম্ভাবনার কথায় আসি।

ধরা যাক $d_1 = 12$

$d_2 = 0$

সেক্ষেত্রে সমীকরণদুটি হবে

$$10x_1 + 4x_2 = 12$$

$$5x_1 + 2x_2 = 0$$

কিন্তু প্রথম সমীকরণটি থেকে $5x_1 + 2x_2 = 6$ (সমীকরণটির দুইপাস দুই দিয়ে ভাগ করে)। সেক্ষেত্রে প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণদুটি একসঙ্গে সত্যি হতে পারেনা। দুটির মধ্যে অসঙ্গতি (inconsistency) রয়েছে। তাই এক্ষেত্রেও কোন নির্দিষ্ট সমাধান পাওয়া যাচ্ছেনা।

তাই সাধারণভাবে বলা যায় যে সহগ ম্যাট্রিক্স এর সারিগুলি যদি রৈখিকভাবে পরস্পরের উপর নির্ভরশীল হয় তাহলে সেই সমীকরণ সমষ্টির কোন নির্দিষ্ট সমাধান পাওয়া যায়না। তার মানে অনন্য সমাধান পাওয়ার জন্য A এর সমস্ত সারিগুলিকে স্বাধীন হওয়া দরকার। সেক্ষেত্রে A অনেক হবে, এবং তার ফলে A^{-1} এর অস্তিত্ব থাকবে আর অনন্য সমাধান $\overline{x} = A^{-1}d$ নির্ণয় করা সম্ভব হবে।

ম্যাট্রিক্সের ক্রম (rank)

যদিও সারি স্বাধীনতার ধারণাটি এখানে কেবলমাত্র চৌকো ম্যাট্রিক্সের-ক্ষেত্রে আলোচনা করা হয়েছে, এই ধারণাটি যে কোনো $(m \times n)$ আয়তক্ষেত্রাকার ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রেও সমানভাবে প্রযোজ্য। এই ম্যাট্রিক্সে রৈখিকভাবে স্বাধীন সারির সর্বাধিক সংখ্যা যদি r হয় তাহলে r কে বলা হয় ম্যাট্রিক্সের ক্রম (rank)। এই ক্রমের থেকে রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভের সর্বাধিক সংখ্যাও পাওয়া যায়। একটি $(m \times n)$ ম্যাট্রিক্সের সর্ববৃহৎ ক্রম হতে পারে m এবং n এর মধ্যে যেটি ছোট সেটি।

১.১০ ছক ব্যবহার করে অনেকত্বের পরীক্ষা (test of non-singularity by use of determinant)

যে কোনো চৌকো ম্যাট্রিক্স A, এর ছক। $|A|$ হল A এর সঙ্গে সংযুক্তি অনন্যভাবে সংজ্ঞাও একটি স্থিররাশি (Scalar)। কেবলমাত্র চৌকো ম্যাট্রিক্সের জন্য ছকের সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব।

ধরা যাক $\underset{(2 \times 2)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ । এক্ষেত্রে A এর ছক

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (১.২১)$$

যেহেতু A এর আয়তন (2×2), এটিকে দ্বিতীয় পর্যায়ের (second-order) ছক (determinant) বলা হয়। এবার ছক ও রৈখিক নির্ভরতার বিষয়টি আলোচনা করা যাক।

ধরা যাক $\underset{(2 \times 2)}{C} = \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

এবং $\underset{(2 \times 2)}{D} = \begin{bmatrix} l_1' \\ d_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 24 \end{bmatrix}$

এখানে দুটি ম্যাট্রিক্সেরই সারিগুলি পরস্পর নির্ভরশীল কারণ $c_1' = c_2'$ এবং $d_2' = 4d_1'$। এবার এদের ছকগুলি নির্ণয় করা যাক।

$$|C| = 3(8) - 3(8) = 24 - 24 = 0$$

$$|D| = 2(24) - 8(6) = 48 - 48 = 0$$

এর থেকে স্পষ্টতঃই মনে হচ্ছে যে রৈখিক নির্ভরতার সঙ্গে ছকের মান শূন্য হওয়ার কোনো একটা সম্পর্ক আছে। তাই । A । এর মান দিয়ে সারিগুলির রৈখিক স্বাধীনতার পরীক্ষা করা যায়। । A । কোনো ম্যাট্রিক্সের বিপরীত নির্ণয় করতেও সাহায্য করে।

এবার দেখা যাক তৃতীয় পর্যায়ের ম্যাট্রিক্সের ছক কি করে নির্ণয় করা হয়।

ধরা যাক $\underset{(3\times 3)}{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

এই প্রসারণটির পিছনে একটি নিয়ম আছে। তাকে বলা হয় লাপ্লাস প্রসারণ (Laplace expansion)।

$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ছক প্রথম সারি ও প্রথম স্তম্ভটি বাদ দিয়ে । A । এর যে উপছক (sub determinant) পাওয়া যায় সেটি। এটিকে a_{11} (বাদ যাওয়া সারি ও স্তম্ভের সংযোগস্থলের উপাদানটি) এর গৌণ (minor) $|M_{11}|$ বলা হয়। সাধারণভাবে $|M_{ij}|$ হল i তম সারি ও j তম স্তম্ভ বাদ দিয়ে যে গৌণটি পাওয়া যায় সেটি। এর সঙ্গে সংযুক্তি আরেকটি ধারণা হল সহ-উৎপাদকের (Co-factor)। সহ-উৎপাদক $|C_{ij}|$ হল বীজগাণিতিক চিহ্ন সহ গৌণটি। এক্ষেত্রে নিয়মটি হল যদি i ও j এর যোগফল জোড় সংখ্যা হয় তাহলে $|M_{ij}|$ ও $|C_{ij}|$ এর চিহ্ন একই হয় অর্থাৎ $|C_{ij}| = |M_{ij}|$। আবার যদি i ও j এর যোগফল বিজোড় সংখ্যা হয় তাহলে $|M_{ij}|$ ও $|C_{ij}|$ এর চিহ্ন বিপরীত হবে অর্থাৎ

$$|C_{ij}| = -|M_{ij}|\,।$$

তার মানে

$|C_{ij}| = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$ কারণ $(-1)^{i+j}$ ধনাত্মক (= 1) হবে যদি (i + j) জোড় হয় এবং $-1)^{i+j}$ ঋণাত্মক (= −1) হবে যদি (i + j) বিজোড় হয়।

এবার তাহলে তৃতীয় পর্যায়ের ছকটিকে $a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$ লেখা যায়।

অথবা $|A| = a_{11}|c_{11}| + a_{12}|c_{12}| + a_{13}|c_{13}|$

$$= \sum_{j=1}^{3} a_{ij}|c_{ij}| \qquad (১.২২)$$

একই যুক্তিতে n পর্যায়ের ছক $|A|$ এর মান যে কোন সারি বা স্তম্ভের লাপ্লাস প্রসারণের মাধ্যমে নির্ণয় করা যাবে।

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|c_{ij}| \qquad [\ i \text{ তম সারি দিয়ে প্রসারণ}\ ] \qquad (১.২৩)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}|c_{ij}| \qquad [\ j \text{ তম স্তম্ভ দিয়ে প্রসারণ}\ ]$$

১.১১ ছকের মূল বৈশিষ্ট্যসমূহ (Basic properties of determinants)

$|A| = |A'|$

উদাহরণ ১ : ধরা যাক $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

$$|A| = 3(8) - 5(2) = 24 - 10 = 14$$

ম্যাট্রিক্সের যে কোনো দুটি সারি (বা স্তম্ভ) পরস্পর স্থান বিনিময় করলে ছকের চিহ্ন পরিবর্তিত হবে কিন্তু তার সংখ্যাগত মান একই থাকবে।

ধরা যাক $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

$$|A| = 1\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 10\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 10\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}$$

$$= 2 + 4 - 9 = -3$$

এবার প্রথম ও দ্বিতীয় সারির স্থান পরিবর্তিত করে ধরা যাক নতুন ম্যাট্রিক্স $A_2 = \begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 10\end{bmatrix}$

$$|A_2| = 4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 10\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 10\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix}$$

$$= -16 + 55 - 36$$

$$= 3$$

যদি কোন একটি সারি বা স্তম্ভকে একটি স্থিররাশি k দিয়ে গুণ করা হয় তাহলে ছকটি k গুণ বৃদ্ধি পায়।

ধরা যাক $A_1 = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ । এবার A এর প্রথম সারিটিকে k দিয়ে গুণ করলে নতুন ম্যাট্রিক্সটি হবে।

$$A_2 = \begin{bmatrix}ka & kb\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$|A_1| = ad - bc$$

$$|A_2| = kad - kbc$$

$$= k\,(ad - bc)$$

$$= k\,|A_1|$$

যে কোন একটি সারির (স্তম্ভের) কোন গুণক যদি অন্য কোন সারির (স্তম্ভের) সঙ্গে যোগ করা হয় বা তার থেকে বিয়োগ করা হয় তাহলে ছকের মানটি অপরিবর্তিত থাকবে।

ধরা যাক $A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

এক্ষেত্রে $|A_1| = ad - bc$

এবার প্রথম সারির k গুণ নীচের সারির সঙ্গে যোগ করা যাক।

নতুন ম্যাট্রিক্স $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{bmatrix}$

$$|A_2| = a(d + kb) - b(c + ka)$$

$$= ad + akb - bc - bka$$

$$= ad - bc$$

$$= |A_1|$$

যদি কোন সারি (স্তম্ভ) অন্য কোন সারির (স্তম্ভের) গুণিতক হয় তাহলে ছকটির মান শূন্য হবে।

উদাহরণ

ধরা যাক $A = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{bmatrix}$ [এখানে প্রথম সারিটি দ্বিতীয় সারির দুইগুণ]

এবং $C = \begin{bmatrix} c & c \\ d & d \end{bmatrix}$ [এখানে প্রথম স্তম্ভটি দ্বিতীয় স্তম্ভের একগুণ]

এক্ষেত্রে $|A| = 2ab - 2ab = 0$

এই বৈশিষ্ট্যটি বৈশিষ্ট্য (৪) থেকে পাওয়া যায়। এবার (৫) নং বৈশিষ্ট্যের উদাহরণটিতে (৪) নং বৈশিষ্ট্যের প্রয়োগ দেখা যাক। প্রথম ম্যাট্রিক্সের (A) দ্বিতীয় সারির দ্বিগুণটি প্রথম সারি থেকে বিয়োগ করে যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে তা হল $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$। কিন্তু এতে ছকের মান বদল হবেনা।

তাই $|A| = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$

আবার C এর প্রথম স্তম্ভটি দ্বিতীয় স্তম্ভ থেকে বিয়োগ করা যাক—তাহলেও ছকের মানের কোনো পরিবর্তন হবে না।

অতএব

$$|C| = \begin{vmatrix} c & c \\ d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0$$

তাই যখনই কোন সারি (স্তম্ভ) অন্য কোন সারির (স্তম্ভের) গুণিতক তখন বৈশিষ্ট্য (৪) প্রয়োগ করে সেই সারির (স্তম্ভের) সমস্তগুলি উপাদানকে শূন্যে পরিণত করা যায়। তার মানে এসকল ক্ষেত্রে ছকটির মান শূন্য হবে।

এর থেকে বলা যায় যে $(m \times n)$ ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে যে সকল ছকের মান শূন্য নয় সেই সকল ছকের মধ্যে সর্বাধিক পর্যায়ের ছকটির পর্যায়ের সমান। ধরা যাক একটি (3×5) ম্যাট্রিক্স A আছে তার সর্বাধিক ক্রম হতে পারে তিন। এর থেকে সর্বাধিক তৃতীয় পর্যায়ের ছক (শূন্য বা শূন্য নয়) নির্ণয় করা যাবে। অতএব A এর ক্রম $r(A) \le \min\{m, n\}$। যদি A কোন $(m \times n)$ অনেক ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে $r(A) = n$।

১.১২ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত নির্ণয় (Finding the inverse of a matrix)

বৈশিষ্ট্য ৬ পরক (alien) সহ উৎপাদক (অন্য কোন ভুল সারি বা স্তম্ভের সহ উৎপাদক) দিয়ে গুণ করলে সেটির মান সর্বদা শূন্য হবে।

ধরা যাক $A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ । এবার এটির দ্বিতীয় সারির সহউৎপাদকের সাহায্যে প্রথম সারিভিত্তিক প্রসারণ করা যাক।

$$4\,|c_{21}| + 1\,|c_{22}| + 2\,|c_{23}|$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 10 - 2 = 0$$

এটিকে সাধারণভাবে তাই বলা যায় যে

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, |c_{i'j}| = 0 \ (i \neq i') & \text{(i তম সারিকে i′ তম সারির সহউৎপাদক দিয়ে প্রসারণ)} \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\, |c_{ij'}| = 0 \ (j \neq j') & \text{(j তম স্তম্ভকে j′ তম স্তম্ভের সহউৎপাদক দিয়ে প্রসারণ)} \end{array}\right\} \quad (১.২৪)$$

ম্যাট্রিক্সের বিপরীতকরণ

ধরা যাক একটি $(n \times n)$ অনেক ম্যাট্রিক্স $\underset{(n \times n)}{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1_n} \\ a_{n_1} & a_{n_2} & a_{n_n} \end{vmatrix}$

দেওয়া আছে যার $|A| \neq 0$ । (১.২৫)

A এর প্রতিটি উপাদান a_{ij} এর একটি সহউৎপাদক $|c_{ij}|$ আছে। A এর সমস্ত উপাদান a_{ij} গুলির পরিবর্তে তাদের প্রত্যেকের সহউৎপাদক $|c_{ij}|$ গুলি প্রতিস্থাপন করলে একটি ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে। এই ম্যাট্রিক্সটি হবে।

$$\underset{(n \times n)}{C} = \begin{bmatrix} |c_{11}| & |c_{12}| & |c_{1n}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| & |c_{2n}| \\ |c_{n_1}| & |c_{n_2}| & |c_{nn}| \end{bmatrix} \quad (১.২৬)$$

C′ বা C-এর পক্ষান্তরিত ম্যাট্রিক্সটিকে বলা হয় A এর সংযুক্তি (adjoint) ম্যাট্রিক্স। এটিকে সাধারণতঃ adjA লেখা হয়।

$$\underset{(n \times n)}{C'} = \text{adj}A = \begin{bmatrix} |c_{11}| & |c_{21}| & |c_{n1}| \\ |c_{12}| & |c_{22}| & |c_{n2}| \\ |c_{1n}| & |c_{2n}| & |c_{nn}| \end{bmatrix}$$

A এবং C′ ম্যাট্রিক্স দুটি গুণযোগ্য।

$$AC' = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,|c_{1j}| & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,|c_{2j}| & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,|c_{nj}| \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,|c_{1j}| & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,|c_{2j}| & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,|c_{nj}| \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\,|c_{1j}| & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\,|c_{2j}| & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\,|c_{nj}| \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & |A| & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & |A| \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & |A| \end{bmatrix}$$ [(১.২৩) ও (১.২৪) থেকে]

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A|\, I_n$$

$|A|$ একটি স্থিররাশি এবং $|A| \neq 0$ তাই দুটি দিক $|A|$ দিয়ে ভাগ করে

$$\frac{AC'}{|A|} = I$$

অথবা $A.\dfrac{C'}{|A|} = I$ পাওয়া যাবে।

এবার দুইদিক A^{-1} দিয়ে পূর্বগুণ করে

$$A^{-1}A\,\frac{C'}{|A|} = A^{-1}I = A^{-1}$$ (কারণ $A^{-1}A = I$)

তাই $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$ (১.২৭)

একটি উদাহরণ নিলে বিষয়টি পরিষ্কার হবে।

উদাহরণ ১.

ধরা যাক $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

এক্ষেত্রে $|A| = 4$ । তাই A^{-1} এর অস্তিত্ব আছে।

$$C = \begin{bmatrix} |c_{11}| & |c_{12}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ [এখানে প্রতিটি সহউৎপাদক একেকটি স্থিররাশি।]

$$C' = \text{adj}A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

অতএব $A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

উদাহরণ ২.

ধরা যাক $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

এক্ষেত্রে $|B| = 4(21) - 1(-6) - 1(-9)$

$= 84 + 6 + 9$

$= 99 \neq 0$

অতএব B^{-1} এর অস্তিত্ব আছে।

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 6 & -9 \\ -7 & 31 & 3 \\ 5 & -8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$C' = \text{adj}B = \begin{bmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

অতএব $B^{-1} = \dfrac{1}{99} \begin{bmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{bmatrix}$

১.১৩ ক্রেমারের সূত্র (Cramer's rule)

ম্যাট্রিক্স বিপরীতকরণের পদ্ধতিটি থেকে রৈখিক সমীকরণ সমষ্টি সমাধানের একটি সুবিধাজনক সূত্র পাওয়া যায়। সূত্রটি কিভাবে পাওয়া যায় তা এবার আলোচনা করা যাক।

ধরা যাক $Ax = d$ [এখানে A-এর আয়তন $(n \times n)$ একটি সমীকরণ সমষ্টি। আমরা আগেই জেনেছি যে এর সমাধান $\overline{x} = A^{-1}d$।

এবার তাহলে বলা যায় যে A অনেক হলে

$$\overline{x} = \frac{\text{adj}A}{|A|}\, d \; [\; (১.২৭) \text{ থেকে }]$$

অতএব $\begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_n \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |c_{11}| & |c_{21}| & \dots & |c_{n1}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| & \dots & |c_{n2}| \\ |c_{1n}| & |c_{2n}| & \dots & |c_{nn}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_n \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d_1 |c_{11}| + d_2 |c_{21}| + \dots + d_n |c_{n1}| \\ d_1 |c_{12}| + d_2 |c_{22}| + \dots + d_n |c_{n2}| \\ d_1 |c_{1n}| + d_2 |c_{2n}| + \dots + d_n |c_{nn}| \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} di\ |c_{i1}| \\ \sum_{i=1}^{n} di\ |c_{i2}| \\ \sum_{i=1}^{n} di\ |c_{in}| \end{bmatrix}$$

অতএব $\bar{x}_1 = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{n} di\ |c_{i1}|$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{n} di\ |c_{i1}| \qquad (১.২৮)$$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{n} di\ |c_{in}|$$

(১.২৩) থেকে দেখা গেছে যে প্রথম স্তম্ভ দিয়ে লাপ্লাস প্রসারণ করলে $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\ |\ c_{i1}\ |$ হয়। যদি A এর প্রথম স্তম্ভটিকে d দিয়ে পরিবর্তিত করা যায় তাহলে নতুন যে ছকটি পাওয়া যাবে তাকে আমরা বলব $|A_1|$ = এখানে 1 সংখ্যাটি বোঝাবে যে প্রথম স্তম্ভটি d দিয়ে পরিবর্তিত করা হয়েছে। $|A_1|$ কে যদি

প্রথম স্তম্ভ দিয়ে প্রসারণ করা হয় তাহলে $|A_1| = \sum_{i=1}^{n} d_i \, |c_{i1}|$ হবে কারণ a_{i1} এর জায়গায় এবার d_i হবে।

অতএব $\bar{x}_1 = \frac{1}{|A|} |A_1|$

$$\bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$\bar{x}_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

এবার সাধারণ সূত্রটি লেখা যাক। j তম চলরাশির সমাধান মান $\bar{x}_j$ নির্ণয় করার জন্য $|A|$ এর j তম স্তম্ভকে d_1, d_2, d_n দিয়ে পরিবর্তিত করে $|A_j|$ নির্ণয় করে তাকে মূল ছক $|A|$ দিয়ে ভাগ করতে হবে।

$$\bar{x}_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j-1} & d_1 & a_{1j+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & d_2 & \\ a_{n1} & a_{n2} & & d_n & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (১.২৯)$$

এটিই হল ক্রেমারের সূত্র।

ম্যাট্রিক্স বিপরীতকরণ পদ্ধতিতে পুরো অন্তর্নিহিত চলরাশি ভেক্টরটির সমাধান একসঙ্গে পাওয়া যায় ($\bar{x}$ একটি ভেক্টর) কিন্তু ক্রেমারের সূত্র অনুসারে একবারে কেবলমাত্র একটি চলরাশির সমাধান মান পাওয়া যাবে (x_j একটি স্থিররাশি)।

উদাহরণ ১.

নীচে একটি সমীকরণ সমষ্টি দেওয়া আছে—

$$5x_1 + 3x_2 = 30$$
$$6x_1 - 2x_2 = 8$$

এবার আমরা ক্রেমারের সূত্র প্রয়োগ করে এটি সমাধান করব।

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -28$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 30 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -84$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 30 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -140$$

অতএব

$$\overline{x_1} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-84}{-28} = 3$$

এবং $\overline{x_2} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-140}{-28} = 5$

সমীকরণ সমষ্টি $Ax = d$ এবং d ভেক্টরে যে কোন ধ্রুবক থাকতে পারে। যদি কোন বিশেষ ক্ষেত্রে $d = 0$ হয় অর্থাৎ $d_1 = d_2 = d_3 = \ldots\ldots d_n = 0$ [সবকটি $d_i = 0$] হয় তাহলে সমীকরণ সমষ্টিটিকে $A_x = 0$ লেখা যায়। এই বিশেষ ক্ষেত্রে এটিকে সমপ্রাকৃতিক (homogenous) সমীকরণ সমষ্টি বলা হবে।

A যদি অনেক হয় তাহলে এক্ষেত্রে একটিই সমাধান পাওয়া যাবে। সেটি হল $\overline{x_1} = \overline{x_2} = \ldots \overline{x_n} = 0$।
এর কারণ এক্ষেত্রে $\overline{x} = A^{-1}d$

অথবা $\underset{(n\times 1)}{\overline{x}} = \underset{(n\times n)}{A^{-1}} \underset{(n\times 1)}{0} = \underset{(n\times 1)}{0}$

ক্রেমারের সূত্র ব্যবহার করেও ঠিক একই সমাধান পাওয়া যাবে। $d = 0$ হওয়ার ফলে প্রতিটি j এর জন্যই $|A_j|$ এর একটি স্তম্ভ থাকবে যার প্রতিটি উপাদানই শূন্য। অতএব $\overline{X_j} = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0$

$(j = 1, 2, \ldots, n)$

$A_x = d$ সমীকরণ সমষ্টির বিভিন্ন রূপের জন্য বিভিন্ন সমাধান পাওয়া যাবে। এইগুলি স্পষ্ট করে নীচের সারণি নং (১.১)-এ দেওয়া হল।

সারণি ১.১

রৈখিক সমীকরণ সমষ্টি Ax = d এর সমাধান

ভেক্টর d / ছক $\|A\|$		$d \neq 0$ (অসমপ্রাকৃতিক সমষ্টি)	$d = 0$ (সমপ্রাকৃতিক সমষ্টি)
$\|A\| \neq 0$ (ম্যাট্রিক্স A অনেক)		অনন্য সমাধান $x \neq 0$ এর অস্তিত্ব আছে।	অনন্য ও গতানুগতিক (trivial) সমাধান $\overline{x} = 0$ এর অস্তিত্ব আছে।
$\|A\| \neq 0$ (ম্যাট্রিক্স A একক)	সমীকরণগুলি পরস্পর নির্ভরশীল	গতানুগতিক সমাধান ছাড়াই অসীম সংখ্যক সমাধানের অস্তিত্ব আছে।	গতানুগতিক সমাধান ছাড়াই অসীম সংখ্যক সমাধানের অস্তিত্ব আছে।
	সমীকরণগুলি অসঙ্গতিপূর্ণ	কোন সমাধানের অস্তিত্ব নেই।	প্রযোজ্য নয়

১.১৪ অর্থনীতিতে ক্রেমারের সূত্রের প্রয়োগ (Applications of Cramer's rule in Economics)

উদাহরণ ১ : বাজার মডেল

ধরা যাক একটি দ্বিপণ্যবিশিষ্ট বাজার আছে। সেই মডেলের সমীকরণগুলি নীচে দেওয়া হল।

$$Qd_1 - Qs_1 = 0$$
$$Qd_1 = a_0 + a_1p_1 + a_2p_2$$
$$Qs_1 = b_0 + b_1p_1 + b_2p_2$$
$$Qd_2 - Qs_2 = 0$$
$$Qd_2 = \alpha_0 + \alpha_1p_1 + \alpha_2p_2$$
$$Qs_2 = \beta_0 + \beta_1p_1 + \beta_2p_2$$

আমরা (১.২) অনুচ্ছেদে দেখেছি যে উৎপাদনের পরিমাণের চল দুটিকে বাদ দিয়ে মডেলটিকে

$$\begin{aligned} c_1p_1 + c_2p_2 &= -c_0 \\ \gamma_1p_1 + \gamma_2p_2 &= -\gamma_0 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} c_i = a_i - b_i \\ \gamma_i = \alpha_i - \beta_i \end{bmatrix}$$ লেখা যায়।

এটিকে সমাধান করার জন্য $|A|$, $|A_1|$ ও $|A_2|$ নির্ণয় করা আবশ্যক।

$$|A| = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = c_1\gamma_2 - \gamma_1c_2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -c_0 & c_2 \\ -\gamma_0 & \gamma_2 \end{vmatrix} = -c_0\gamma_2 + \gamma_0c_2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} c_1 & -c_0 \\ \gamma_1 & -\gamma_0 \end{vmatrix} = -c_1\gamma_0 + c_0\gamma_1$$

অতএব $\overline{P_1} = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{c_2\gamma_0 - c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}$

এবং $\overline{P_2} = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{c_0\gamma_1 - c_1\gamma_0}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}$

এবার P_1 ও P_2 এর এই মানগুলি যোগান ও চাহিদা অপেক্ষকে প্রতিস্থাপন করে পণ্যগুলির ভারসাম্যমান নির্ণয় করা যাবে।

উদাহরণ ২ : জাতীয় আয় মডেল

$Y = C + I_0 + G_0$

$C = a + bY \ (a > 0, 0 < b < 1)$

$\begin{bmatrix} Y = \text{জাতীয় আয়} \\ C = \text{ভোগ} \\ I_0 = \text{বিনিয়োগ} \\ G_0 = \text{সরকারি ব্যয়} \end{bmatrix}$

অথবা $Y - C = I_0 + G_0$

$-by + c = a$

সহগম্যাট্রিক্স A এবার হবে $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}$ এবং d হবে $\begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix}$ ।

ক্রেমারের সূত্র প্রয়োগ করে—

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} (I_0 + G_0) & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{I_0 + G_0 + a}{1 - b}$$

এবং $$\overline{C} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & (I_0 + G_0) \\ -b & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a + b\,(I_0 + G_0)}{1 - b}$$

১.১৫ সারাংশ

- অনেকগুলি রৈখিক সহসমীকরণ বিশিষ্ট রৈখিক মডেল সমাধানের পদ্ধতিকে বলা হয় ম্যাট্রিক্স বীজগণিত।
- ম্যাট্রিক্স হল আয়তক্ষেত্রাকারে উপরে নীচে ও পাশাপাশি সাজানো সংখ্যাসমূহ। এটিকে একটি সংখ্যা বলেই ধরা হয়।
- কোন ম্যাট্রিক্সের সারির (row) সংখ্যা m ও স্তম্ভের (column) সংখ্যা n হলে ম্যাট্রিক্সটির আয়তন হবে $(m \times n)$।
- যে ম্যাট্রিক্সে সারি ও স্তম্ভের সংখ্যা সমান (অর্থাৎ $m = n$) তাকে বলা হয় চৌকো ম্যাট্রিক্স।
- একটি সারি (স্তম্ভ) বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে সারি (স্তম্ভ) ভেক্টর বলা হয়।
- $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ ভেক্টর সেটের কোন একটি ভেক্টরকে বাকি ভেক্টরগুলির রৈখিক সংমিশ্রণ হিসাবে প্রকাশ করা গেলে ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে পরস্পর নির্ভরশীল হবে।
- অভেদ ম্যাট্রিক্স হল একটি চৌকো ম্যাট্রিক্স যার মুখ্য কর্ণ বরাবর 1 থাকে এবং বাকি সমস্ত উপাদানগুলি শূন্য।

- যে ম্যাট্রিক্সের সমস্ত কটি উপাদানই শূন্য তাকে বলা হয় শূন্য ম্যাট্রিক্স।

- A ম্যাট্রিক্সের সারি ও স্তম্ভগুলিকে পরস্পর স্থানবিনিময় করিয়ে যে ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া যায় তা হল A এর পক্ষান্তরিত (Transpose) ম্যাট্রিক্স A'।

- A চৌকো ম্যাট্রিক্স হলে যদি $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ হয় তাহলে A^{-1} হল A এর বিপরীত (inverse) ম্যাট্রিক্স।

- যে ম্যাট্রিক্সের বিপরীতের অস্তিত্ব আছে তাকে বলা হয় অনেক (non-singular) ম্যাট্রিক্স। বিপরীতের অস্তিত্ব না থাকলে ম্যাট্রিক্সটি একক (singular)।

- A^{-1} সর্বদা অনন্য।

- A চৌকো ম্যাট্রিক্স হলে এবং তার সারিগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন হলে তবেই A অনেক হবে।

- A এর সমস্ত সারিগুলি স্বাধীন হলে $Ax = d$ সমীকরণ সমষ্টির সমাধান $\bar{x} = A^{-1}d$।

- একটি ম্যাট্রিক্সে রৈখিকভাবে স্বাধীন সারির সংখ্যা যদি r হয় তাহলে r কে তার ক্রম (rank) বলা হয়। $(m \times n)$ ম্যাট্রিক্সের সর্ববৃহৎ ক্রম হতে পারে m এবং n মধ্যে যে সংখ্যাটি ছোট তার সমান।

- কোন ম্যাট্রিক্সের ছকের মান যদি শূন্য হয় তাহলে ম্যাট্রিক্সের সারি (স্তম্ভ)গুলি রৈখিকভাবে পরস্পর নির্ভরশীল হবে।

- A ম্যাট্রিক্সের প্রতিটি উপাদানের পরিবর্তে তার সহ-উৎপাদকগুলি প্রতিস্থাপন করে c ম্যাট্রিক্স তৈরি করে তাকে পক্ষান্তরিত করলে c' হবে A এর সংযুক্তি (adjoint) ম্যাট্রিক্স adjA।

- $A = \dfrac{\text{adj}A}{|A|}$

- ক্রেমারের সূত্র অনুসারে $Ax = d$ এর সমাধান হল $\overline{X}_j = \dfrac{|A_j|}{|A|}$

  এখানে $|A_j|$ নির্ণয় করার জন্য $|A|$ এর jতম স্তম্ভকে $d_1, d_2, \ldots\ldots, d_n$ দিয়ে পরিবর্তিত করা হচ্ছে।

১.১৬ অনুশীলনী

ছোট প্রশ্ন :

১। ম্যাট্রিক্স কাকে বলে?

২। ম্যাট্রিক্সের আয়তন কিভাবে নির্ণয় করা হয়?

৩। ভেক্টর কাকে বলে?

৪। রৈখিক নির্ভরতা কাকে বলে?

৫। শূন্য ভেক্টর কী?

৬। অভেদ ম্যাট্রিক্স ও শূন্য ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা দিন।

৭। সমঘাত ম্যাট্রিক্স কাকে বলে?

৮। কোন ম্যাট্রিক্স থেকে তার পক্ষান্তরিত ম্যাট্রিক্স কিভাবে পাওয়া যায়।

৯। কোন ম্যাট্রিক্সের বিপরীত কাকে বলে?

১০। ক্রেমারের সূত্রানুসারে প্রাপ্ত সমাধান ও ম্যাট্রিক্স বিপরীতকরণ পদ্ধতিতে প্রাপ্ত সমাধানের পার্থক্য কী?

বড় প্রশ্ন :

১। ম্যাট্রিক্স বীজগণিত কাকে বলে? এই পদ্ধতিটির গুণাগুণ বিশ্লেষণ করুন।

২। কিভাবে ম্যাট্রিক্স পদ্ধতির সাহায্যে একটি রৈখিক সহসমীকরণ সমষ্টিকে সংক্ষিপ্তাকারে প্রকাশ করা যায় তা উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

৩। রৈখিক নির্ভরতা কাকে বলে তা একটি উদাহরণ নিয়ে আলোচনা করুন। শূন্য ভেক্টরের সাহায্যে কিভাবে রৈখিক নির্ভরতার সংজ্ঞা দেওয়া যায়?

৪। (ক) বিনিময়, সংযোগ ও বিচ্ছেদ সূত্রগুলি কী তা উদাহরণের মাধ্যমে পরিষ্কার করে বুঝিয়ে দিন।

(খ) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ হলে

সংযোগ ও বিচ্ছেদ সূত্রদুটি প্রমাণ করে দেখান।

৫। ধরুন $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

প্রমাণ করুন যে $AB \neq BA$।

৬। অভেদ ম্যাট্রিক্স কাকে বলে? প্রমাণ করে দেখান যে কোন ম্যাট্রিক্স গুণফলের মধ্যে I বসালে বা তুলে নিলে কোন পরিবর্তন হবে না।

৭। শূন্য ম্যাট্রিক্স কাকে বলে? শূন্য ম্যাট্রিক্স কী যোগ ও গুণের সূত্রগুলি সন্তুষ্ট করে? উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

৮। সমঘাত ম্যাট্রিক্স কাকে বলে? In যে সমঘাত ম্যাট্রিক্স তা প্রমাণ করুন।

৯। পক্ষান্তরিত ম্যাট্রিক্স কাকে বলে উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

১০। বিপরীত ম্যাট্রিক্স কাকে বলে? সমীকরণ সমষ্টি সমাধানে এর ভূমিকা উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

১১। অনেক ম্যাট্রিক্স কাকে বলে? এই প্রসঙ্গে ম্যাট্রিক্সের অনেকত্বের শর্তগুলি আলোচনা করুন।

১২। ছক ব্যবহার করে কিভাবে অনেকত্ব পরীক্ষা করা যায় তা উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

১৩। ম্যাট্রিক্স বিপরীতকরণ পদ্ধতি আলোচনা করুন।

১৪। ক্রেমারের সূত্র দিয়ে কিভাবে সমীকরণসমষ্টি সমাধান করা যায় তা আলোচনা করুন। অর্থনীতিতে এই সূত্রের প্রয়োগ কিভাবে করা যায় তা আলাচনা করুন।

১৫। ধরুন $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

(ক) $A + B$ (খ) $C - A$ (গ) $3A$ (ঘ) $4B + 2C$ নির্ধারণ করুন।

১৬। ধরুন যে $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

(ক) AB কী সংজ্ঞাত? AB নির্ণয় করুন। BA কী নির্ধারণ করা সম্ভব? কারণসহ আলোচনা করুন।

(খ) BC কী সংজ্ঞাত? BC নির্ণয় করুন। CB কী সংজ্ঞাত? CB নির্ণয় করুন। BC আর CB কী সমান?

১৭। ম্যাট্রিক্সগুলির আয়তন উল্লেখ করে গুণ করুন—

(ক) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (খ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

১৮। $u' = [5\ 2\ 3]$ এবং $v' = [3\ 1\ 9]$ হলে

(ক) $u'v$ (খ) uv' (গ) $v'u$ (ঘ) $u'u$ নির্ধারণ করুন।

১৯। $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $c = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ হলে

দেখান যে (ক) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(খ) $(A + B) - C = A + (B - C)$

২০। নীচের ম্যাট্রিক্সগুলির ব্যবহার করে ম্যাট্রিক্সের গুণ যে সংযোগসূত্র সন্তুষ্ট করে তা প্রমাণ করুন।

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

২১। উপরে (২০) নং প্রশ্নের ম্যাট্রিক্সগুলি ব্যবহার করে গুণের বিচ্ছেদসূত্রটি প্রমাণ করুন।

২২। $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ এবং $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

অভেদ ম্যাট্রিক্সের আয়তন উল্লেখ করে (ক) AI (খ) $'IA$ (গ) Ix এবং (ঘ) $x'I$ নির্ধারণ করুন।

২৩। উপরের (২২) নং প্রশ্নের ম্যাট্রিক্সগুলির সাহায্যে

(ক) Ab, (খ) AIb (গ) $x'IA$ (ঘ) $x'A$ নির্ণয় করুন। I এর অন্তর্ভুক্তি কী (ক) এবং (খ) এর মধ্যে কোন পার্থক্য আনে। I তুলে নেওয়ার ফলে (গ) এবং (ঘ) এর মধ্যে কি কোন তফাৎ দেখা যাবে?

২৪। ধরুন যে $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

দেখান যে (ক) $(A + B)' = A' + B$

(খ) $(AC)' = C'A'$

২৫। নীচের ম্যাট্রিক্সগুলির সারিগুলি কী রৈখিকভাবে স্বাধীন?

(ক) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$ (খ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (গ) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ঘ) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

এগুলির স্তম্ভগুলিকে রৈখিক স্বাধীনতার জন্য পরীক্ষা করলে কী সারি স্বাধীনতার মত একই উত্তর পাওয়া যাবে?

২৬। নিচের ছকগুলির মান নির্ণয় করুন।

(ক) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (খ) $\begin{vmatrix} x & 5 & 0 \\ 3 & y & 2 \\ 9 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

২৭। $\begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ লেখা যায় কী ? কারণ নির্দেশ করে আলোচনা করুন।

২৮। নিচের ম্যাট্রিক্সগুলির অনেকত্ব পরীক্ষা করুন।

(ক) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 19 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ (খ) $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 13 & -3 & -4 \end{vmatrix}$

(গ) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ঘ) $\begin{vmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 10 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

প্রতিটি ম্যাট্রিক্সের ক্রম সম্বন্ধে আলোচনা করুন।

২৯। (১.১৪) অনুচ্ছেদের জাতীয় আয় মডেলটিকে $Ax = d$ রূপে লিখুন (y হবে x ভেক্টরের প্রথম চলরাশি)। সহগ ম্যাট্রিক্স A অনেক কিনা তা পরীক্ষা করে দেখান।

৩০। $Y = C + I_0 + G_0$

$Y = a + b\,(Y - T)$ $\quad [\, a > 0,\ 0 < b < 1 \,]$

$T = d = tY$ $\quad [\, d > 0,\ 0 < t < 1 \,]$

$\left[\begin{array}{l} T = \text{কর} \\ t = \text{আয়করের হার} \end{array}\right]$

চলগুলিকে y, c, T ক্রমে লিখে এই মডেলটি ম্যাট্রিক্স্ বিপরীতকরণ পদ্ধতি ও ক্রেমারের সূত্র প্রয়োগ করে সমাধান করুন। দুটির মধ্যে কী কোন পার্থক্য হবে?

১.১৭ গ্রন্থপঞ্জী

(১) Fundamental Methods of Mathematical Economics—Chiang A. C.
(২) Mathematics for Economics—Mehta & Madhani

একক ২ ❑ রৈখিক অনুক্রমণ (Linear Programming)

গঠন

২.১৫ পরিবহন সমস্যা

২.১৬ সারাংশ

২.১৭ অনুশীলনী

২.১৮ গ্রন্থপঞ্জী

২.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনারা জানতে পারবেন—

- রৈখিক অনুক্রমণ বলতে কি বোঝায়?
- রৈখিক অনুক্রমণ গঠনের পদ্ধতি
- রৈখিক অনুক্রমণের চিত্র লৈখিক সমাধান
- রৈখিক অনুক্রমণ সমাধানের জন্য সিমপ্লেক্স পদ্ধতি
- রৈখিক অনুক্রমণ বিষয়ে আরো কিছু গুরুত্বপূর্ণ তথ্য

২.১ প্রস্তাবনা

এর আগের অংশে আমরা ক্ল্যাসিক্যাল সর্বাধিক অনুকূল অবস্থা নির্ণায়ক পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। সর্বাধিক অনুকূল অবস্থা নির্ণায়ক পদ্ধতি যাকে গাণিতিক অনুক্রমণ (mathematical programming) বলা হয় তার বিষয়ে কিছু বলা যাক।

এর একটি বৈশিষ্ট্য হল যে এখানে নিয়ন্ত্রণগুলিতে অসমতা (inequality) থাকতে পারে। তার মানে নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকটি $g(x, y) = c$ না হয়ে $g(x, y) \leq c$ রূপ নিতে পারে। উদাহরণস্বরূপ একটি ভোক্তাকে ধরা যাক। আগে যখন সর্বাধিক অনুকূল অবস্থা নির্ধারণ করা হয়েছিল তখন আমরা দেখেছিলাম যে ধরে নেওয়া হচ্ছে যে সে তার ক্রয়ক্ষমতার পূর্ণ সদ্ব্যবহার করে অর্থাৎ পুরোটাই খরচ করে। এবার কিন্তু আমরা ধরব যে নিয়ন্ত্রণ

একটাই সে তার ক্রয়ক্ষমতার মধ্যে থাকতে বাধ্য—সেখানে সে পুরোটা বা কম যা কিছুই খরচ করতে পারে। এইভাবে সমস্যাটিকে অনেক বেশি বাস্তবসম্মত করা হচ্ছে। আবার অনেক চলরাশি ঋণাত্মক হতে পারে না, যেমন বাজার দর p, সেই ক্ষেত্রেও আমরা $p \geq 0$ এধরণের নিয়ন্ত্রণ অন্তর্ভুক্ত করতে পারি। এর ফলে নতুন সমাধান পদ্ধতিরও প্রয়োজন হচ্ছে। গাণিতিক অনুক্রমণ পদ্ধতি এই ধরণের সমস্যা সমাধান করতে সক্ষম। গাণিতিক অনুক্রমণ পদ্ধতি দুই প্রকার—রৈখিক অনুক্রমণ পদ্ধতি (linear programming technique) এবং অরৈখিক অনুক্রমণ পদ্ধতি (non-linear programming technique)। এখানে আমাদের আলোচ্য বিষয় হল রৈখিক অনুক্রমণ পদ্ধতি।

২.২ রৈখিক অনুক্রমণ পদ্ধতি

রৈখিক অনুক্রমণ পদ্ধতিতে বিষয়টি সহজ করার জন্য ধরে নেওয়া হচ্ছে যে লক্ষ্য অপেক্ষক (Objective function) এবং নিয়ন্ত্রণ অসমতাগুলি (constraint inequalities) সমস্তই রৈখিক (linear)।

উদাহরণ ১ খাদ্যতালিকা সমস্যা (**Diet Problem**)

খাদ্য তালিকা সমস্যা হল এই পদ্ধতিতে সমাধান করা প্রথম অর্থনৈতিক সমস্যা। বিভিন্ন অর্থনৈতিক সমস্যা সমাধান করার জন্য এই ধরণের কাঠামোযুক্ত সমস্যার সমাধান পদ্ধতি প্রয়োগ করা সম্ভব।

এবার সমস্যাটি আলোচনা করা যাক। এখানে একটি সুগৃহিনীর কথা ধরা হচ্ছে যিনি তাঁর পরিবারের সদস্যদের সর্বনিম্ন-ব্যয়ে উপযুক্ত খাদ্য দিতে ইচ্ছুক। এই অবস্থায় প্রতিটি খাবারের কোনটার কতটা কিনবেন তিনি সেটাই এই সমস্যার মূল আলোচ্য। ধরা যাক mটি পুষ্টিকর উপাদান প্রতিটি মানুষের প্রয়োজন। প্রতিটি পুষ্টিকর উপাদান বার্ষিক ন্যূনতম কতটা করে প্রয়োজন তার একটি তালিকা দেওয়া যায়। নীচে সারণি নং (২.১)-এ এই তালিকাটি দেওয়া হল।

সারণি ২.১

পুষ্টিকর উপাদানগুলির ন্যূনতম বার্ষিক মান (Standard)

পুষ্টিকর উপাদান	ন্যূনতম মান
1	C_1
2	C_2
3	C_3
m	C_m

$c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots, c_m$ এর প্রতিটিই স্বাভাবিক কারণে ধনাত্মক। এবার ধরা যাক nটি সাধারণ খাবার আছে $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ । এগুলিকে যথাযোগ্য এককে পরিমাপ করা হচ্ছে।

এবার ধরা যাক প্রতিটি সাধারণ খাবারের প্রতি এককে প্রতিটি পুষ্টিকর উপাদান নির্দিষ্ট পরিমাণে আছে। যেমন যদি প্রত্যেক একক x_1 এ ভিটামিন ১০ একক থাকে তাহলে ২০০ একক x_1 এ ভিটামিন 2000 একক থাকবে। এটি কোনভাবেই অন্য x গুলি একই সঙ্গে কতটা পরিমাণে ভোগ করা হচ্ছে তার উপর নির্ভরশীল নয়। এই সমহার প্রতিদান (constant returns to scale) এবং স্বাধীনতার ধারণা দুটি ধরে নেওয়ার ফলে সমস্যাটিকে রৈখিক অনুক্রমণ তত্ত্বের সহজ পরিধির মধ্যে রাখা যাবে। এর ফলে দ্বিতীয় তথ্যপঞ্জিকে একটি আয়তক্ষেত্রাকার সারণির মাধ্যমে প্রকাশ করা সম্ভব হবে। এখানে a_{ij} মানে হল jতম খাবারে i তম পুষ্টিকর উপাদানের পরিমাণ। নীচের সারণি নং (২.২) এ বিষয়টি দেখানো হল।

সারণি ২.২

বিভিন্ন খাদ্যে পুষ্টিকর উপাদান

পুষ্টিকর উপাদান	খাবার $x_1\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$		ন্যূনতম মান
উপাদান ১	$a_{11}\ a_{12}$	a_{1n}	c_1
উপাদান ২	$a_{21}\ a_{22}$	a_{2n}	c_2
উপাদান m	$am_1\ am_2$	a_{mn}	c_m

সাধারণতঃ জানা পুষ্টিকর উপাদানের থেকে খাবারের ধরণ (সংখ্যা) অনেক বেশি তাই $n > m$ । এখানে ধরা হচ্ছে যে প্রতিটি প্রয়োজনীয় উপাদানই অন্ততঃ একরকমের খাবারে আছে অর্থাৎ কোন সারিরই প্রত্যেকটি a শূন্য নয়। তার ফলে প্রতিটি c_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ এই কোন না কোনভাবে পৌঁছানো যাবে। অতএব নানাখাদ্য সংমিশ্রণ দিয়েই $(c_1, c_2, \ldots\ldots c_m)$ এ পৌঁছানো সম্ভব হবে তবে খাদ্যের প্রতিটি সংমিশ্রণ সমান সুস্বাদু বা সমান সস্তা হবেনা।

ধরা যাক একটি খাদ্যতালিকা দেওয়া আছে যেখানে $(x_1, x_2, , x_k, , \ldots\ldots x_n) = (100, 550, \ldots 3.5, 25{,}000)$। এটি কি যথেষ্ট? কিভাবে এই পরীক্ষা করা যায় এবার তা দেখা যাক। এখানে x_k হল x_1

এর পরিমাণ। যেহেতু x_1 এর এক এককে প্রথম পুষ্টিকর উপাদানটি a_{11} পরিমাণে আছে তাই X_1 এর x_1 পরিমাণ নিলে তার থেকে $a_{11}x_1$ প্রথম পুষ্টিকর উপাদানটি পাওয়া যাবে। একইভাবে দ্বিতীয় খাবার থেকে $a_{12}x_2$ পরিমাণে প্রথম পুষ্টিকর উপাদানটি পাওয়া যাবে। এবার দেখতে হবে যাতে প্রতিটি খাবার থেকে প্রাপ্ত একটি পুষ্টিকর উপাদান তার ন্যূনতম প্রয়োজনীয় মানের থেকে কম না হয়।

তার মানে

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \geq c_1$ হওয়া দরকার। একইভাবে দ্বিতীয় উপাদানের ক্ষেত্রে $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \geq c_2$ হওয়া দরকার।

এখনো খাবারগুলির দাম সম্বন্ধে কোন কথা বলা হয়নি—দামের বিষয়টি আনলে মনে হওয়া স্বাভাবিক যে প্রতিটি উপাদান তার ন্যূনতম মানে পেলেই যথেষ্ট তার বেশি পেতে গিয়ে অতিরিক্ত ব্যয় করা অর্থহীন। কিন্তু প্রতিটি উপাদান ঠিক ঐ পরিমাণেই পাওয়া যাবে এরকম খাদ্যতালিকা সবসময় পাওয়া খুবই কঠিন। এমনকি অনেক সময়ে এও দেখা যায় যে এইরকম খাদ্যতালিকা সবচেয়ে সাশ্রয়কারী হয়না—হয়তো আরেকটি তুলনামূলকভাবে সস্তা খাদ্যতালিকা আছে যেটিতে পুষ্টিকর উপাদান আরও বেশিই পাওয়া যায়।

এবার বিভিন্ন খাবারের একক প্রতি দাম নীচের সারণি নং (২.৩) তে দেওয়া হল।

সারণি ২.৩

বিভিন্ন খাবারের একক প্রতি দাম

খাবার	x_1	x_2	x_k	x_n
দাম (একক প্রতি)	p_1	p_2	p_k	p_n

$(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ একটি নির্দিষ্ট খাদ্যতালিকা হলে মোট ব্যয় হবে প্রতিটি n খাবারের উপর খরচের সমষ্টি। তার মধ্যে অবশ্য ধরে নেওয়া যেতে পারে যেসব খাদ্যতালিকায় সবকটি খাবার গাণিতিকভাবে লিখলে টাকার অঙ্কে মোট ব্যয় হবে।

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_kx_k + p_nx_n$$

তার মানে সম্পূর্ণ সমস্যাটি হল

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \geq c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \geq c_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \geq c_m \end{array}\right\} \quad (২.১)$$

এবং $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \ldots\ldots, x_n \geq 0$ নিয়ন্ত্রণ সাপেক্ষে

$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n$ কে সর্বনিম্ন করার। এই ধরণের কোন খাদ্যতালিকা যদি পাওয়া যায় যাতে ন্যূনতম মান সন্তুষ্ট করে এবং মোট ব্যয়ও সর্বনিম্ন হয় তবে তাকে আমরা সর্বাধিক অনুকূল (optimal) খাদ্যতালিকা বলব।

২.৩ সংখ্যাগত উদাহরণ

এবার একটি সংখ্যাগত উদাহরণ নিয়ে বিষয়টি বোঝানো যাক। ধরা যাক মাত্র দুটি পুষ্টিকর উপাদান আছে (১) প্রয়োজনীয় পরিমাণ তাপ বা ক্যালোরি (calorie) ও (২) ভিটামিন (vitamin)। $(c_1, c_2) = (700, 400)$। ধরা যাক পাঁচ রকমের খাবার আছে। ধরা যাক x_1 এ শুধু ক্যালোরি আছে এবং $a_{11} = 1$। x_1 এ ভিটামিন নেই তাই এক্ষেত্রে $a_{21} = 0$। x_2 তে শুধুই ভিটামিন আছে তাই $a_{12} = 0$ এবং ধরা হচ্ছে যে $a_{22} = 1$। x_3 এর ক্ষেত্রে $a_{13} = 1$ এবং $a_{23} = 0$। চতুর্থ খাবার x_4 এর এককটি এমনভাবে সংজ্ঞাত যে তাতে উভয় উপাদানই সমপরিমাণে আছে। অর্থাৎ $a_{14} = a_{24}$। পঞ্চম খাবারটির প্রতি এককে ক্যালরি ভিটামিনের দ্বিগুণ পরিমাণে আছে অর্থাৎ $a_{15} = 2$ এবং $a_{25} = 1$। $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 20, 3, 11, 12)$। প্রতিটি দাম এককপ্রতি এবং টাকার অঙ্কে দেওয়া হচ্ছে। এবার সমস্যাটি হল সর্বশ্রেষ্ঠ (best) খাদ্যতালিকা এবং সর্বনিম্ন ব্যয় z নির্ধারণ করা। তার আগে উপরকার পুরো তথ্য নীচে সারণি নং (২.৪) এ দেওয়া হল।

সারণি ২.৪

সংখ্যাগত খাদ্যতালিকা সমস্যার সংকেত ও তথ্য

	সংকেত						সংখ্যাগত তথ্য					
	খাবারের একক প্রতি পুষ্টিকর উপাদান					মান	খাবারের একক প্রতি পুষ্টিকর উপাদান					মান
উপাদান	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5	
ক্যালরি	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	c_1	1	0	1	1	2	700
ভিটামিন	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	c_2	0	1	0	1	1	400
দাম	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	z	2	20	3	11	12	(?)

বারবার নানা সমাধান পরীক্ষা করে এবং ভুল থেকে শিক্ষা নিয়ে (trial and error method) যদি কেউ শেষ

পর্যন্ত সঠিক সমাধানে পৌঁছাতে পারেন তাহলে দেখা যাবে যে সর্বনিম্ন ব্যয় z হল 4,700 এবং (২) এটিকে একটিই খাদ্যতালিকার মাধ্যমে পাওয়া সম্ভব সেটি হল,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 100, 300)।$$

তার মানে (৩) প্রথম তিনটি খাবার একেবারেই কেনা হচ্ছেনা। তার মানে ঠিক যে কটি পুষ্টিকর উপাদান আছে, সে কটি খাবারই কেনা হচ্ছে। অতএব (৪) এই সর্বোৎকৃষ্ট (best) খাদ্য তালিকাটি যথাযথ (exact)।

কিভাবে এই সমাধানগুলি পাওয়া যাবে তা এখন আলোচনা করা হচ্ছে না। আগে সমাধানগুলির চরিত্র সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করা যাক। প্রথমতঃ এই ধরণের সমস্যায় সবসময় একটিই সর্বোৎকৃষ্ট z থাকে। এক্ষেত্রে কখনো দুটি আলাদা সর্বোৎকৃষ্ট z থাকতে পারেনা কারণ দুটি z অসমান হলে একটি অন্যটির থেকে ভাল হবে। তাছাড়া রৈখিক অনুক্রমণ সমস্যায় z কতটা ভাল (কত বড় বা কত ছোট) হতে পারে তাও বেঁধে দেওয়া হয় তাই অনুমোদিত z এর প্রান্তসীমায় অবস্থিত মানগুলি ধরে নেওয়া হবে। সুতরাং সেখানে একটি সর্বাধিক (greatest) অথবা সর্বনিম্ন (least) সম্ভাব্য z থাকবে এবং এটিই হবে সর্বাধিক অনুকূল (optimum)।

অবশ্য উপরের সমস্যাটির মত x গুলি সবসময় অনন্য নাও হতে পারে। একই সর্বোৎকৃষ্ট z এ বিভিন্ন খাদ্যতালিকার মাধ্যমে পৌঁছানো যেতে পারে। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক যে প্রথম তিনটি খাবারের দাম অন্য দুটির দামের তুলনায় অনেক সস্তা। তাহলে সর্বোৎকৃষ্ট খাদ্যতালিকায় স্বাভাবিকভাবেই প্রথম তিনটি খাবারই থাকবে। এর মধ্যে আবার ধরা যাক x_1 ও x_3 যাদের পুষ্টিকর উপাদান একই তাদের দামও সমান। তাহলে প্রয়োজনীয় ক্যালরি (700) x_1 ও x_3 এর অসংখ্য সংমিশ্রণের থেকেই পাওয়া যেতে পারে। এক্ষেত্রে তাদের প্রতিটি সংমিশ্রণ থেকে প্রাপ্ত ক্যালরি 700 হলেই হবে। তাহলে x_1 বা x_3 শূন্য বসালেও কোনো ক্ষতি হচ্ছেনা। তার অর্থ শেষ অবধি যে কটি পুষ্টিকর উপাদান আছে সে কটি খাবারের থেকেই সর্বোৎকৃষ্ট z পাওয়া যাবে। এর থেকে রৈখিক অনুক্রমণের ক্ষেত্রে একটি সাধারণ প্রস্তাব উত্থাপিত হচ্ছে।

২.৩.১ উপপাদ্য : একটি n চল (x গুলি) ও m অসমতা বিশিষ্ট রৈখিক সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন মান নির্ধারণের সমস্যায় অশূন্য (non-zero) x এর সংখ্যা কখনো m এর থেকে বেশি হওয়ার প্রয়োজন নেই। যে সকল ক্ষেত্রে $m > n$ সে সকল ক্ষেত্রে অবশ্য উপপাদ্যটি বিশেষ সাহায্য করবে না। এমনকি কোন কোন সময়ে $n = m$ সংখ্যকের চেয়ে বেশি শূন্যও থাকতে পারে। ছোট্ট একটি উদাহরণ নিলে বিষয়টি পরিষ্কার হবে। ধরা যাক x_4 এর দাম অন্য সমস্ত দামের তুলনায় অনেক কম তাহলে দুটি উপাদানই প্রয়োজনীয় পরিমাণে সবচেয়ে সস্তায় পাওয়া যাবে যদি 700 একক x_4 কেনা হয়। কিন্তু এই খাদ্যটি যথাযথ হবেনা কারণ এতে ভিটামিন প্রয়োজনের অতিরিক্ত আছে। সেকারণে সবসময় সর্বনিম্ন ব্যয়ে যথাযথ খাদ্যতালিকা নাও পাওয়া যেতে পারে।

২.৪ চিত্রলৈখিক সমাধান (Graphical solution)

এবার একটি ছোট্ট উদাহরণ নিয়ে এসব সমস্যার চিত্রলৈখিক সমাধান কিভাবে করা হয় তা দেখা যাক। এখানে $z = 0.6x_1 + x_2$ কে সর্বনিম্ন করতে হবে। দেওয়া আছে যে—

$10x_1 + 4x_2 \geq 20$ [ক্যালসিয়াম নিয়ন্ত্রণ]

$5x_1 + 5x_2 \geq 20$ [প্রোটিন নিয়ন্ত্রণ]

$2x_1 + 6x_2 \geq 12$ [ভিটামিন নিয়ন্ত্রণ]

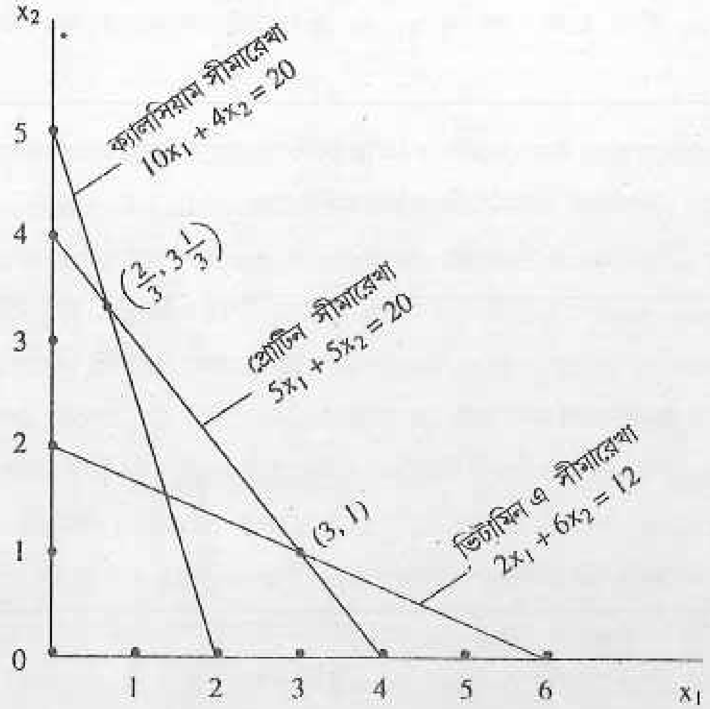
এবং $x_1, x_2 \geq 0$

(২.২) এর প্রথম সমীকরণটি হল লক্ষ্য অপেক্ষক (objective function)। নিয়ন্ত্রণগুলি হল দৈনিক প্রয়োজনভিত্তিক। প্রয়োজন পূরণ হওয়াই যথেষ্ট কিন্তু তার বেশি পেলে কোন অসুবিধা নেই তাই ≥ চিহ্ন ব্যবহৃত হচ্ছে। এখানে লক্ষণীয় যে রৈখিক অনুক্রমের মূলতঃ তিনটি উপাদান (১) লক্ষ্য অপেক্ষক (২) নিয়ন্ত্রণ সেট এবং (৩) অঋণাত্মকতা নিয়ন্ত্রণ। কোন চলকেই প্রথম ঘাতের বেশি ঘাতে ব্যবহার করা হয়নি বলে এটি পুরোপুরি রৈখিক। নীচে সারণি নং (২.৫) এ খাবারগুলির দাম ও তাদের প্রয়োজনীয় পরিমাণ দেওয়া হল।

সারণি ২.৫

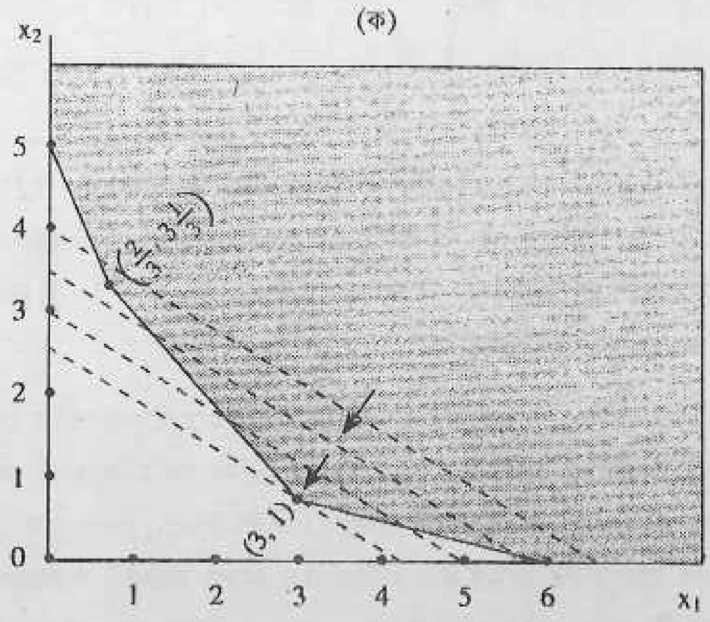
প্রতিটি খাবারের দামও পুষ্টিকর উপাদান

	খাবার I	খাবার II	ন্যূনতম দৈনিক চাহিদা
দাম (প্রতি ১০০ গ্রাম)	Re. 0.60	Re. 1.00	
ক্যালসিয়াম (একক প্রতি)	10	4	20
প্রোটিন (একক প্রতি)	5	5	20
ভিটামিন A (একক প্রতি)	2	6	12



x_2
ক্যালসিয়াম সীমারেখা
$10x_1 + 4x_2 = 20$
$\left(\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3}\right)$
প্রোটিন সীমারেখা
$5x_1 + 5x_2 = 20$
ভিটামিন এ সীমারেখা
$2x_1 + 6x_2 = 12$
(3, 1)
0
1
2
3
4
5
6
x_1

(ক)



x_2
$\left(\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3}\right)$
(3, 1)
0
1
2
3
4
5
6
x_1

(খ)

রেখাচিত্র ২.১

যেহেতু এখানে মাত্র দুটি বাছাই চল আছে এটিকে রেখাচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা সম্ভব। রেখাচিত্র নং (২.১) এ দুটি অক্ষে x_1 ও x_2 আঁকা হচ্ছে। যেহেতু $x_1, x_2 \geq 0$ তাই কেবলমাত্র অঋণাত্মক পাদটি দেখাই যথেষ্ট।

নিয়ন্ত্রণগুলিকে রেখাচিত্রে ধরার জন্য সেগুলিকে সমীকরণ হিসাবে ধরে তিনটি সরলরেখার মাধ্যমে রেখাচিত্র (২.১ ক) তে দেখানো হল। এগুলিকে যথাক্রমে ক্যালসিয়াম সীমারেখা (Calcium border), প্রোটিন সীমারেখা (Protein border) এবং ভিটামিন এ সীমারেখা (Vitamin A border) বলা হচ্ছে। এগুলি পাদটিকে দুটি অনধিক্রান্ত (non-overlapping) অঞ্চলে বিভক্ত করছে। যেহেতু নিয়ন্ত্রণগুলিতে ≥ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে তাই যে সকল বিন্দু সরলরেখাগুলির উপরে বা তাদের উত্তরপূর্বে অবস্থিত কেবল সেগুলিই নিয়ন্ত্রণগুলি সন্তুষ্ট করবে। তিনটি নিয়ন্ত্রণ একযোগে সন্তুষ্ট করার জন্য তাই সে সমস্ত (x_1, x_2) নিতে হবে যেগুলি কোন নিয়ন্ত্রণরেখারই দক্ষিণপূর্বে অবস্থিত নয়। যেমন (1, 2) বিন্দুটি ভিটামিন এ নিয়ন্ত্রণটি সন্তুষ্ট করে কিন্তু অন্যগুলি সন্তুষ্ট করেনা তাই এটি সম্ভবপর (feasible) নয়। রেখাচিত্র (২.১ খ) তে ছায়াবৃত (shaded) অঞ্চলটি একই সঙ্গে তিনটি নিয়ন্ত্রণই সন্তুষ্ট করে। সেইজন্য এটিকে সম্ভবপর অঞ্চল (feasible region) বলা হবে। এই অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দুকেই সম্ভবপর সমাধান (feasible solution) বলা হবে। এই সম্ভবপর অঞ্চলের মধ্যে তার (রেখাচিত্রে গভীরভাবে অঙ্কিত) বক্র সীমারেখাটিও (kinked boundary) অন্তর্ভুক্ত হবে। বিশেষতঃ অনুভূমিক অক্ষে $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 6, x_2 = 0\}$ বিন্দুগুলির সেটটি এবং উল্লম্ব অক্ষে $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 \geq 5\}$ বিন্দুগুলির সেটটিও সম্ভবপর অঞ্চলের সদস্য। অতএব এই সম্ভবপর অঞ্চলটিকে বদ্ধ সেট (closed set) হিসাবে ধরা যেতে পারে।

এখানে লক্ষণীয় যে সম্ভবপর অঞ্চলের বক্র সীমারেখাটি তিনটি নিয়ন্ত্রণ সীমারেখা এবং অক্ষগুলির নির্দিষ্ট অংশ নিয়ে গঠিত। এই সীমারেখাটির কোণের বিন্দুগুলিকে প্রান্তবর্তী বিন্দু (extreme point) বলা হবে। এই প্রান্তবর্তী বিন্দুগুলিকে হয় দুটি নিয়ন্ত্রণ সীমারেখার সংযোগস্থলে [যথা (3,1), $(^2/_3, 3^1/_3)$] নয়তো একটি নিয়ন্ত্রণ সীমারেখা এবং একটি অক্ষের সংযোগস্থলে [যথা (0,5), (6,0)] পাওয়া যাবে।

খাদ্যের যে কটি সংমিশ্রণ নিয়ন্ত্রণগুলি ও অশূন্য নিয়ন্ত্রণটি সন্তুষ্ট করে তার সবকটির সেটই হল সম্ভবপর অঞ্চল। কিন্তু এই সবকটি সংমিশ্রণের ব্যয়ই সমান নয়। সেই ব্যয় সর্বনিম্ন করাই এবারকার কাজ। z কে সর্বনিম্ন করার জন্য লক্ষ্য অপেক্ষকটি দেখতে হবে। এটিকে এবার $x_2 = z - 0.6x_1$ লেখা যাক। z কে প্যারামিটার (parameter) ধরে নিলে তার বিভিন্ন মানের জন্য এটিকে 0.6 ঢালের কয়েকটি সরলরেখার সমষ্টি হিসাবে আঁকা যায়। এর মধ্যে চারটি সরলরেখা রেখাচিত্র নং (২.১ খ) তে দেখানো হল (ভগ্ন সরলরেখা হিসাবে)। এগুলিকে সমব্যয় রেখা (isocost line) বলা যেতে পারে। এবার সম্ভবপর অঞ্চলের মধ্যে কোনটি সর্বনিম্ন

ব্যয় সেটি নির্ধারণ করতে হবে। তার মানে ঐ অঞ্চলের মধ্যেকার সর্বনিম্ন সমব্যয় রেখাটি খুঁজে বের করতে হবে। রেখাচিত্র নং (২.১ খ) তে এইভাবে (3, 1) প্রান্তবর্তী বিন্দুটি পাওয়া যাবে। অতএব সর্বাধিক অনুকূল সম্ভবপর সমাধান (op.imal feasible solution বা optimal solution) হবে $(\bar{x_1}, \bar{x_2}) = (3, 1)$। তার অর্থ

$$Z = [(0.60 \times 3) + (1.00 \times 1)]$$
$$= \text{Rs. } 1.80 + \text{Re } 1$$
$$= \text{Rs. } 2.80$$

রেখাচিত্র (২.১ খ) তে সর্বাধিক অনুকূল বিন্দুটি প্রান্তবর্তী বিন্দু। এটি কোন কাকতালীয় ঘটনা নয়। সমস্ত রৈখিক অনুক্রমণ সমস্যারই সমাধান হবে প্রান্তবর্তী বিন্দু। যেহেতু এই প্রান্তবর্তী বিন্দুগুলি যে কোন দুটি নিয়ন্ত্রণ সীমারেখা ও একটি অক্ষের সংযোগস্থলে অবস্থিত তাই সে দুটিকে সমাধান করে বিন্দুগুলি পাওয়া সম্ভব। উদাহরণস্বরূপ বর্তমান সমস্যাটি নেওয়া যাক। এর সমাধানটি ভিটামিন এ সীমারেখা ও প্রোটিন সীমারেখার সংযোগস্থলে অবস্থিত। তাই এই সমীকরণদুটি সমাধান করার চেষ্টা করা যাক।

$$5x_1 + 5x_2 = 20 \ldots\ldots \text{(ক)}$$
$$2x_1 + 6x_2 = 12 \ldots\ldots \text{(খ)}$$

অথবা [(ক) থেকে]

$$10x_1 + 10x_2 = 40$$

এবং [(খ) থেকে]

$$10x_1 + 30x_2 = 60$$

$$-20x_2 = -20$$

অতএব $x_2 = 1$

(ক) তে প্রতিস্থাপন করে

$$5x_1 + 5 = 20$$

অথবা $5x_1 = 15$

অতএব $x_1 = 3$

এটিতে কিন্তু ক্যালসিয়াম প্রয়োজনের অতিরিক্ত পাওয়া যাবে।

দাম পরিবর্তনের প্রভাব

p_1 এবং p_2 পরিবর্তিত হলে কি হবে? সমবায় রেখার ঢাল = $-0.6 = -\frac{.60}{1.00} = \frac{p_1}{p_2}$। তাই দাম পরিবর্তিত হলে সর্বপ্রথমেই সমবায় রেখার ঢালটি পরিবর্তিত হবে। অবশ্য দুটি দাম যদি একই হারে বদলায় তাহলে এই ঢালটির কোন পরিবর্তন হবেনা। অনেক সময়ে ঢালের সামান্য পরিবর্তন হলেও সর্বাধিক অনুকূল কোণটি বদলায় না। কিন্তু যদি $p_1 = p_2 = 1$ হয়ে যায় তাহলে সমবায় রেখার ঢাল প্রোটিন নিয়ন্ত্রণ সীমারেখার সমান্তরাল হয়ে যাবে। এক্ষেত্রে নতুন সম্ভাব্য সর্বনিম্ন সমবায় রেখাটি আর সম্ভবপর অঞ্চলকে একটি বিন্দুতে ছেদ করবেনা—সেটি কোন একটি সীমানার প্রান্ত বরাবর সংযুক্ত হবে। উপরের উদাহরণটির ক্ষেত্রে এই নতুন সমবায় রেখাটি (3, 1) থেকে ($^2/_3$, $3^1/_3$) পর্যন্ত সম্ভবপর অঞ্চলের সঙ্গে যুক্ত থাকবে। এর মধ্যবর্তী সমস্ত বিন্দুই হবে একইভাবে সর্বাধিক অনুকূল। এবার তাহলে একাধিক সর্বাধিক অনুকূল মান পাওয়া যাচ্ছে। সেক্ষেত্রে আগের নিয়মটিকেই প্রয়োগ করতে হবে—অর্থাৎ ধরতে হবে যে সর্বাধিক অনুকূল মান সবসময়ই প্রান্তবর্তী বিন্দুতে হবে। এই ধারণার থেকেই সিমপ্লেক্স পদ্ধতির (simplex method) উদ্ভব।

উদাহরণ ২

এবার উৎপাদন ক্ষেত্র থেকে আরেকটি ছোট্ট উদাহরণ নেওয়া যাক। একটি প্রতিষ্ঠান দুটি দ্রব্য উৎপাদন করে দ্রব্য I ও দ্রব্য II। তার কারখানায় তিনটি উৎপাদন বিভাগ আছে। সেগুলি হল কর্তন (cutting), মিশ্রণ (mixing) এবং বাক্সবন্দিকরণ (packaging) বিভাগ। প্রত্যেকটি বিভাগের যন্ত্রপাতি প্রতিদিন ৮ ঘণ্টা করে ব্যবহার করা যায়। দুটি পণ্যের টন (ওজনের পরিমাপ) প্রতি কোন কোন বিভাগের কতটা সময় নেবে এবং তাদের থেকে প্রাপ্ত মুনাফা নীচের সারণি নং (২.৬) এ দেওয়া হল।

সারণি ২.৬

পণ্যের টনপ্রতি পদ্ধতির প্রয়োজনীয়তা

	পণ্য I	পণ্য II	দৈনিক ক্ষমতা (ঘণ্টা)
কর্তন	$^1/_2$	0	8
মিশ্রণ	0	1	8
বাক্সবন্দিকরণ	$^1/_3$	$^2/_3$	8
টন প্রতি মুনাফা	Rs. 40	Rs. 30	

এটিকে রৈখিক অনুক্রম (linear programme) হিসাবে নীচে লেখা হল।

মুনাফা $\pi = 40x_1 + 30x_2$ কে সর্বাধিক করতে হবে যখন

$x_1 \leq 16$ (কর্তন নিয়ন্ত্রণ)

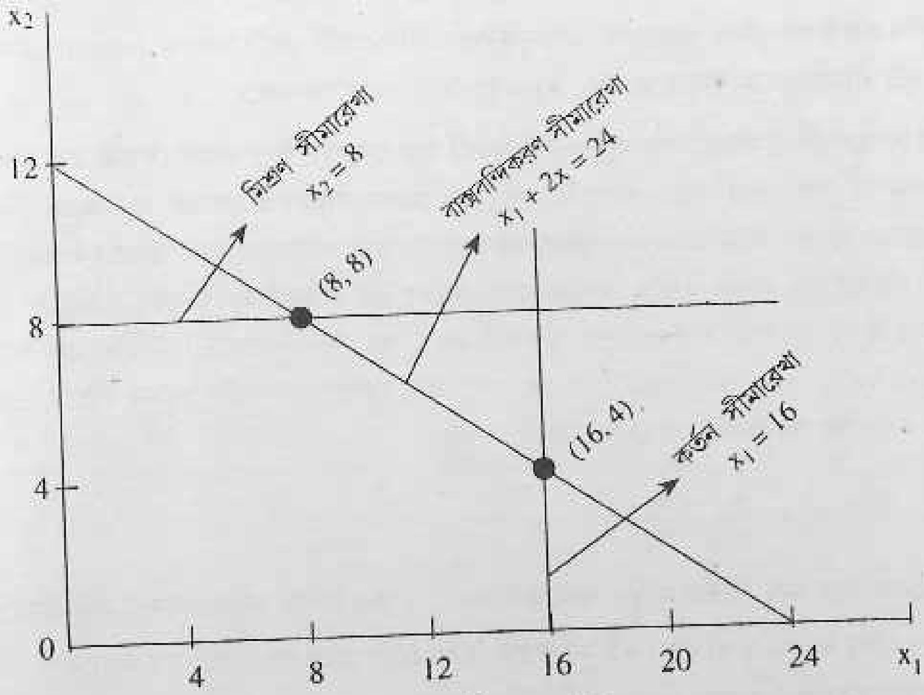
$x_2 \leq 8$ (মিশ্রণ নিয়ন্ত্রণ)

$x_1 + 2x_2 \leq 24$ (বাক্সবন্দিকরণ নিয়ন্ত্রণ)

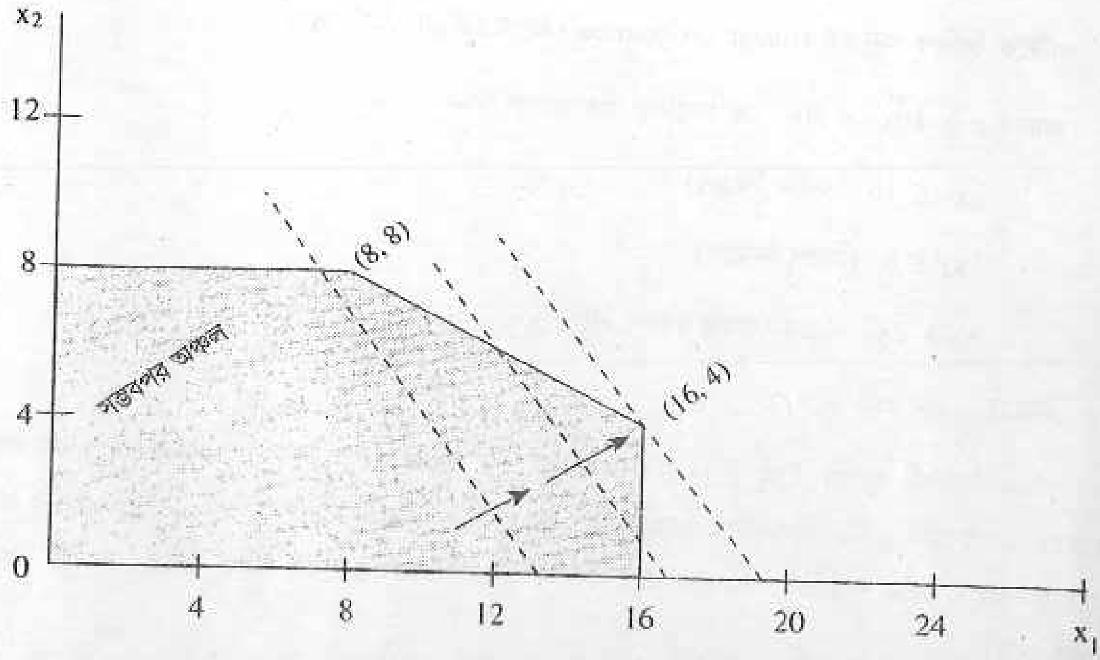
এবং $x_1, x_2 \geq 0$।

প্রথম নিয়ন্ত্রণটি আসলে হবে $^1/_2\, x_1 \leq 8$। সেটিকে ভগ্নাংশমুক্ত করার জন্য দুই পাশ দুই দিয়ে গুণ করা হয়েছে। একইভাবে তৃতীয় নিয়ন্ত্রণটিকেও রূপান্তরিত করা হয়েছে। এখানে নিয়ন্ত্রণগুলিতে $\leq$ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে কারণ কোন পদ্ধতিই ক্ষমতার অতিরিক্ত ব্যবহার করা সম্ভব নয় কিন্তু উদ্বৃত্ত থাকলে কোন ক্ষতি নেই।

উদাহরণ-২ এর চিত্রলৈখিক সমাধান



রেখাচিত্র ২.২ (ক)



রেখাচিত্র ২.২ (খ)

এখানে x_1, $x_2 \geq 0$ বলে শুধুমাত্র অঋণাত্মক পাদটিকেও ধরা হচ্ছে। এখানেই তিনটি নিয়ন্ত্রণ সীমারেখা আঁকা হচ্ছে। কর্তন সীমারেখাটি হবে $x_1 = 16$ অর্থাৎ একটি উল্লম্ব সরলরেখা এবং মিশ্রণ সীমারেখাটি হবে $x_2 = 8$ অর্থাৎ একটি অনুভূমিক সরলরেখা। বাক্সবন্দিকরণ সীমারেখাটি একটি ঢালযুক্ত (slauting) সরলরেখা যেটি অন্য দুটি সীমারেখাকে যথাক্রমে (16, 4) এবং (8, 8) এ ছেদ করছে।

এইবার নিয়ন্ত্রণগুলি ≤ ধরণের বলে সম্ভবপর অঞ্চলটি হবে সেইসব বিন্দুর সমষ্টি যেগুলি একযোগে নীচের তিনটি অবস্থানগত শর্ত পূরণ করে। শর্তগুলি হল (১) মিশ্রণ সীমারেখা বরাবর বা তলায়, (২) কর্তন সীমারেখা বরাবর বা তার বামে এবং (৩) বাক্সবন্দিকরণ সীমারেখা বরাবর বা তার তলায়। এগুলি রেখাচিত্র নং (২.২ খ) তে ছায়াবৃত অঞ্চল হিসাবে দেখানো হল। যেহেতু এই অঞ্চলটির সবদিকের সীমারেখা এবং তার ভিতরকার সব বিন্দুই সম্ভবপর তাই সম্ভবপর অঞ্চলটি একটি বদ্ধ সেট। এক্ষেত্রে সেটটিকে বলা হবে যথার্থ সীমাবদ্ধ (strictly bounded)। রেখাচিত্র নং (২.১ খ) এর সম্ভবপর অঞ্চলটি শুধুমাত্র নীচের দিক থেকে সীমাবদ্ধ। এবার লক্ষ্য অপেক্ষকটিকে দেখা যাক।

$$x_2 = \frac{\pi}{30} - \frac{4}{3} \quad x_1$$

π কে ধ্রুবক ধরে তার বিভিন্ন মানের জন্য এটিকে $\frac{4}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমষ্টি হিসাবে আঁকা যায় এগুলি রেখাচিত্র নং (২.২ খ) তে (ভগ্ন সরলরেখা হিসাবে) দেখানো হল। এগুলিকে সমমুনাফা রেখা বলা যায় কারণ প্রতিটি সরলরেখা বরাবর মুনাফা অপরিবর্তিত থাকছে। এখানে প্রতিষ্ঠানটির লক্ষ্য হল মুনাফা সর্বাধিক

করা। সেক্ষেত্রে (16, 4) সর্বোত্তম পণ্যমিশ্রণ হবে। তার মানে $\bar{x}_1$ = দৈনিক 16 টন এবং $\bar{x}_2$ = দৈনিক 4 টন। এবার তার সর্বাধিক দৈনিক মুনাফা হবে তা দেখা যাক।

$$4 = \frac{\pi}{30} - \frac{4}{3}.16$$

অথবা $$\frac{\pi}{30} = 4 + \frac{64}{3}$$

$$= \frac{76}{3} \quad \text{অথবা } \pi = 760$$

তার মানে তার দৈনিক মুনাফা হবে Rs. 760। এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে যদিও কর্তন ও বাক্সবন্দিকরণ নিয়ন্ত্রণ দুটি সম্পূর্ণ সন্তুষ্ট হচ্ছে মিশ্রণ ক্ষমতা কিছুটা উদ্বৃত্ত থেকে যাচ্ছে। সবকটি যদি সমীকরণ হিসাবে থাকে তাহলে অবশ্য এইধরণের ফলাফল চিন্তা করা যাবে না।

২.৫ রৈখিক অনুক্রমের সাধারণ রূপদান (General formulation of linear programmes)

এতক্ষণ পর্যন্ত আমরা যা করেছি তাতে অল্প কয়েকটি বাছাই চল এবং নিয়ন্ত্রণ নেওয়া হয়েছিল। কিন্তু সাধারণভাবে ধরে নেওয়া উচিত যে nটি বাছাই চল ও mটি নিয়ন্ত্রণ আছে। সেক্ষেত্রে সমস্যাটি এইভাবে লেখা হবে।

$$\pi = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n \text{ সর্বাধিক করুন}$$

যখন
$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n &\le r_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n &\le r_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n &\le r_m \end{aligned}\right\} \quad (২.৪)$$

এবং $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$

একইভাবে সর্বনিম্ন করার সমস্যাকে লেখা যাবে। সেটি হবে

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots c_nx_n$ কে সর্বনিম্ন করুন যখন

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots a_{1n}x_n &\ge r_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots a_{2n}x_n &\ge r_2 \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \ldots\ldots a_{m_n}x_n &\ge r_m \end{aligned}\right\} \quad (২.৫)$$

এবং $x_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$

এগুলিকে সংক্ষেপে যথাক্রমে

$$\pi = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ কে সর্বাধিক করুন যখন}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le r_i \ (i = 1, 2, \ldots\ldots, m)$$

এবং $x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ লেখা যায়।

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ কে সর্বনিম্ন করুন যখন}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge r_i \ (i = 1, 2, \ldots\ldots, m)$$

এবং $x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ লেখা যায়।

ধরা যাক $\underset{(n \times 1)}{C} \equiv \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_n \end{bmatrix}, \underset{(n \times 1)}{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix}, \underset{(m \times n)}{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$

এবং $\underset{(m \times 1)}{r} \equiv \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_m \end{bmatrix}$ ।

তাহলে $\pi = \underset{(1 \times n)\ (n \times 1)}{C' x}$ এটি একটি স্থিররাশি (scalar)

আবার $\underset{(m \times n)\ (n \times 1)}{A x} \le \underset{(m \times 1)}{r}$

এখানে অসমতার অর্থ প্রতিটি উপাদানের সঙ্গে প্রতিটি উপাদানের অসমতা। অর্থাৎ A_x এর iতম সারিটি r এর iতম সারির সমান বা ছোট। একইভাবে

$\underset{(n\times 1)}{x} \geq \underset{(n\times 1)}{0}$ রূপে অঋণাত্মকতা শর্তটি লেখা যায়। অতএব ম্যাট্রিক্স দিয়ে উপরের সমস্যা দুটিকে লিখতে সেগুলি হবে যথাক্রমে

$$\left.\begin{array}{l} \pi = c'x \text{ কে সর্বাধিক করুন যখন} \\ \quad A_x \leq r \\ \text{এবং } x \geq 0 \end{array}\right\} \quad (২.৪')$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{এবং } z = c'x \text{ কে সর্বনিম্ন করুন যখন} \\ \quad A_x \geq r \\ \text{এবং } x \geq 0 \end{array}\right\} \quad (২.৫')$$

২.৬ উত্তল সেট ও রৈখিক অনুক্রমণ (Convex Set and Linear Programming)

উত্তল সেট হল এমন একটি সেট যার অন্তর্গত যে কোন দুটি বিন্দুর উত্তল সংমিশ্রণ ও সেই সেটেরই অন্তর্গত। অর্থাৎ যদি

$$\left.\begin{array}{l} u'\varepsilon S \\ v\varepsilon S \end{array}\right\}$$ হয় তাহলে $W \varepsilon S$ হবে, যেখানে

$W \equiv \theta u + (1-\theta)v \; [0 \leq \theta \leq 1]$।

[ε চিহ্নটির অর্থ অন্তর্গত। $v \varepsilon S$ মানে v, S এর অন্তর্গত।]

এক্ষেত্রে S কে উত্তলসেট বলা হবে।

যে কোন n চলবিশিষ্ট রৈখিক অনুক্রমের সম্ভবপর অঞ্চলটি একটি বদ্ধ উত্তল সেট।

২.৭ তুলনামূলক সর্বাধিক অনুকূল মান ও পরম সর্বাধিক অনুকূল মান (Relative optimum and Absolute optimum)

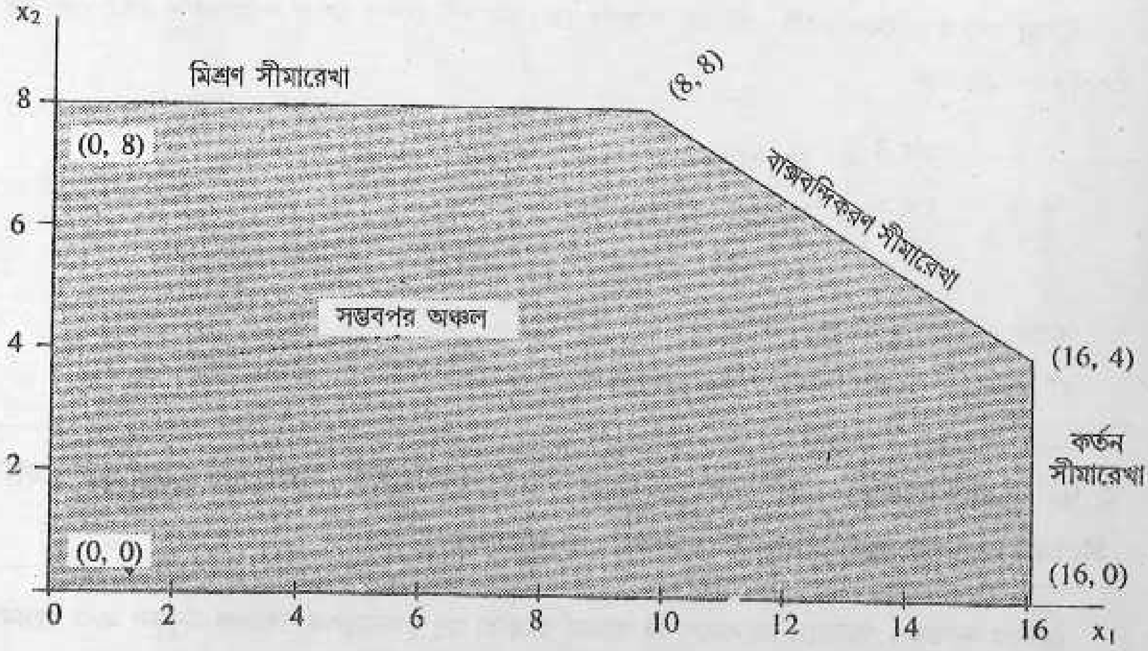
রৈখিক অনুক্রমণ পদ্ধতিতে যে সমাধানটি পাওয়া যাবে তা শুধু তুলনামূলক সর্বাধিক অনুকূল মানই হবেনা, পরম সর্বাধিক অনুকূল মানও হবে। নীচের উপপাদ্যটি থেকে তুলনামূলক সর্বাধিক অনুকূল মান কখন পরম সর্বাধিক অনুকূল মান হবে তার যথেষ্ট শর্তটি পাওয়া যাবে।

উপপাদ্য : যদি সম্ভবপর সেট F বদ্ধ উত্তল সেট হয় এবং যদি লক্ষ্য অপেক্ষকটি এই F এর উপর একটি অবিচ্ছিন্ন অবতল (উত্তল) অপেক্ষক হয় তাহলে (ক) যে কোন তুলনামূলক চরম বা সর্বাধিক (অধম বা সর্বনিম্ন) মানটিই পরম সর্বাধিক (সর্বনিম্ন) মান এবং (খ) F এর যে সকল বিন্দুতে লক্ষ্য অপেক্ষকটির সর্বাধিক অনুকূল মান পাওয়া যাবে যেগুলি মিলে একটি উত্তল সেট তৈরি হবে। যদি লক্ষ্য অপেক্ষকটি F এর উপর যথার্থ অবতল (উত্তল) হয় তাহলে পরম সর্বাধিক (সর্বনিম্ন) একটি অনন্য (unique) হবে।

২.৮ সিমপ্লেক্স পদ্ধতি প্রান্তবর্তী মান নির্ধারণ— (Simplex Method—Determination of Extreme points)

রৈখিক অনুক্রমের সমাধান সবসময়ই প্রান্তবর্তী মানের মধ্যে পাওয়া যাবে। (2×2) ক্ষেত্রে সহজে রেখাচিত্রের সাহায্যে এই মান নির্ধারণ করা সম্ভব হয়েছিল। কিন্তু $(m \times n)$ ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি ব্যবহার করা যাবেনা কারণ রেখাচিত্র আঁকা সম্ভব নয়।

শিথিল ও উদ্বৃত্ত (Slacks and Surpluses) : রেখাচিত্র নং (২.১) এবং (২.২) এর প্রান্তবর্তী বিন্দুগুলিকে মূলতঃ তিন প্রকারে ভাগ করা যায়। এগুলি নীচে রেখাচিত্র নং (২.৩) এ দেখানো হল।



রেখাচিত্র ২.৩

এই রেখাচিত্রে রেখাচিত্র নং (২.২) এর সম্ভবপর অঞ্চলটিকেই আবার আঁকা হয়েছে।

প্রথম প্রকারের প্রান্তবর্তী বিন্দুগুলি হল যেগুলি দুটি নিয়ন্ত্রণ সীমারেখার সংযোগস্থলে অবস্থিত যেমন (8,8) এবং (16, 4)। এগুলিতে দুটি নিয়ন্ত্রণ যথাযথভাবে সন্তুষ্ট হচ্ছে কিন্তু অন্যটি অযথাযথভাবে সন্তুষ্ট হচ্ছে (16, 4) বিন্দুটিতে যেমন কর্তন ও বাক্সবন্দিকরণ নিয়ন্ত্রণ দুটি যথাযথভাবে সন্তুষ্ট হচ্ছে কিন্তু মিশ্রণ নিয়ন্ত্রণটি নয়। অযথাযথভাবে কোন নিয়ন্ত্রণ সন্তুষ্ট হলে হয় ক্ষমতার সম্পূর্ণ সদ্ব্যবহার হচ্ছেনা অথবা (খাদ্যতালিকার সমস্যার মত ক্ষেত্রে) একটি উপাদান প্রয়োজনের অতিরিক্ত গ্রহণ করা হচ্ছে। অতএব হয় ক্ষমতার ব্যবহার শিথিল (slack) অথবা খাদ্যগ্রহণ উদ্বৃত্ত (surplus) হবে।

দ্বিতীয় প্রকারের বিন্দুগুলি যেমন (0, 8) এবং (16, 0) হল কোন নিয়ন্ত্রণ সীমারেখা ও কোন অক্ষের সংযোগস্থলে অবস্থিত। যেহেতু এগুলি একটিমাত্র নিয়ন্ত্রণের উপর অবস্থিত তাই এক্ষেত্রে দুটি শিথিলতা থাকবে।

তৃতীয় প্রকারের প্রান্তবর্তী বিন্দু হিসাবে (0, 0) পাওয়া যাবে যেটিতে কোন নিয়ন্ত্রণই যথাযথভাবে সন্তুষ্ট হবেনা। এটি সর্বাধিক করার সমস্যায় পাওয়া যাবে কারণ সর্বনিম্ন করার ক্ষেত্রে সম্ভবপর অঞ্চলের মধ্যে (0,0) বিন্দুটি থাকেনা [রেখাচিত্র (২.১ খ) দ্রষ্টব্য]।

সর্বাধিক করার সমস্যায় iতম নিয়ন্ত্রণে শিথিল চলকে (slack variable) s_i দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। আবার সর্বনিম্ন করার সমস্যায় s_i উদ্বৃত্ত চল (surplus variable) বোঝায়। শিথিল চল ও উদ্বৃত্ত চল উভয়কে একত্রে পুতুল চল (dummy variable) বলা হয়।

২.৯ রূপান্তরিত রৈখিক অনুক্রম— (Linear Programme transformed)

এবার (২.৩) এর উৎপাদন সমস্যাটি দেখা যাক। প্রতিটি নিয়ন্ত্রণে একটি করে শিথিল চল যোগ দিয়ে এবং লক্ষ্য অপেক্ষক ও অঋণাত্মকতা শর্ত দুটিকে সেইভাবে পরিবর্তিত করে অনুক্রমটি নতুন করে নীচে লেখা হল।

$\pi = 40x_1 + 30x_2 + 0.s_1 + 0.s_2 + 0.s_3$ কে সর্বাধিক করুন যখন

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \qquad s_1 &= 16 \text{ (কর্তন)} \\ x_2 + \qquad s_2 &= 8 \text{ (মিশ্রণ)} \\ x_1 + 2x_2 + s_3 &= 24 \text{ (বাক্সবন্দিকরণ)} \\ \text{এবং } x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (২.৭)$$

এটিকে কিভাবে ম্যাট্রিক্স রূপে লেখা যায় তা নীচে দেখানো হল।

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 24 \end{bmatrix} \qquad (২.৮)$$

এখানে সর্বমোট পাঁচটি চল আছে। শিথিল চলগুলি x_j এর মতই অঋণাত্মক। যদি $s_i > 0$ হয় তবে iতম নিয়ন্ত্রণে শিথিল চল থাকবে। $s_i = 0$ হলে iতম মিশ্রণটি যথাযথভাবে সন্তুষ্ট হয়। কিন্তু s_i কখনোই ঋণাত্মক হবেনা। লক্ষ্য অপেক্ষককে s_i এর সহগগুলি শূন্য দেওয়া হয়েছে কারণ শিথিল চলগুলি কোনোভাবেই মুনাফার উপর প্রভাব ফেলেনা। এখানে বলে রাখা ভাল যে সর্বনিম্ন করার সমস্যায় (অঋণাত্মক) পুতুল চলগুলি s_i রূপে নিয়ন্ত্রণে লেখা হবে।

প্রতিটি প্রান্তবর্তী বিন্দু থেকে শিথিল চলগুলির মান নির্ধারণ করা সম্ভব, যেমন (0, 0) বিন্দুর ক্ষেত্রে $x_1 = 0$ এবং $x_2 = 0$ রূপান্তরিত নিয়ন্ত্রণগুলিতে প্রতিস্থাপন করলে $s_1 = 16$, $s_2 = 8$ এবং $s_3 = 24$ পাওয়া যাবে। অতএব রেখাচিত্র নং (২.৩) এর দুই আয়তনের (two-dimensional) উৎপাদন অঞ্চলকে (Output-space) এবার 5-আয়তনবিশিষ্ট সমাধান অঞ্চলের $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 16, 8, 24)$ বিন্দুতে ছকে ফেলা (map) যায়। একইভাবে বাকি চারটি প্রান্তবর্তী বিন্দুকে ছকে ফেললে কী হবে তা নীচের সারণি নং (২.৭) এ দেখানো হল।

সারণি ২.৭

উৎপাদন অঞ্চল (x_1, x_2)	সমাধান অঞ্চল $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3$
(0, 0)	(0, 0, 16, 8, 24)
(16, 0)	(16, 0, 0, 8, 8)
(16, 4)	(16, 4, 0, 4, 0)
(8, 8)	(8, 8, 8, 0, 0)
(0, 8)	(0, 8, 16, 0, 8)

এখানে লক্ষণীয় যে প্রতিটি সমাধান বিন্দুতেই তিনটি করে চলের মান অশূন্য। এখন m সমীকরণবিশিষ্ট কোন সমষ্টি নির্দিষ্ট সমাধান দিতে পারবে তখনই যদি সঠিক mটি চল থাকে। এখানে m = 3। তাই তিনটির

বেশি চল এখানে অশূন্য মান নিয়ে সমাধানে থাকতে পারবেনা। নিয়ন্ত্রণগুলির ভেক্টর-সমীকরণ রূপটি নিলে হয়তো বিষয়টি আরেকটু পরিষ্কার হবে।

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_3 = \begin{bmatrix}16\\8\\24\end{bmatrix} \quad (২.৮')$$

এবার এই পাঁচটি চলের যে কোন দুটিকে যদি শূন্য ধরা যায় তাহলে (২.৮') এর বাঁদিকের সেই দুটি রাশি বাদ হয়ে যাবে এবং (২.৮') একটি তিন-চল ও তিন-সমীকরণ বিশিষ্ট সমষ্টি হবে। সেক্ষেত্রে যদি অবশিষ্ট সহগ ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন হয় তাহলে অনন্য সমাধান পাওয়া সম্ভব হবে। এইভাবে প্রাপ্ত সমাধান ও শূন্য চলগুলি মিলে পরিপূর্ণ সমাধান পাওয়া যাবে। [সারণি-নং (২.৭) দ্রষ্টব্য]।

২.১০ মৌলিক সম্ভবপর সমাধান ও প্রান্তবর্তী বিন্দু— (Basic feasible solution and extreme points)

উপরের পদ্ধতিতে দুটি সমস্যা দেখা দিতে পারে। প্রথমতঃ সমাধান কখন ঋণাত্মক হতে পারে যেমন $x_1 = s_3 = 0$ বসালে $x_2 = 12$, $s_1 = 16$ এবং $s_2 = -4$ পাওয়া যাবে। এই ধরণের সমাধান সম্ভবপর নয় কারণ $s_i \geq 0$। অতএব এগুলিকে বাতিল করতে হবে। রেখাচিত্র নং (২.২ ক) তে দেখলে এটি হবে বাক্সবন্দিকরণ নিয়ন্ত্রণের সঙ্গে উল্লম্ব অক্ষের সংযোগস্থল এবং ফলস্বরূপ সম্ভবপর অঞ্চলের বাইরে।

আবার যদি সমস্ত সমাধান মানগুলিই অঋণাত্মক হয় তাহলে সমাধানটি সম্ভবপর অঞ্চলেরই কোন প্রান্তবর্তী বিন্দুতে অবস্থান করবে। এটিকে বলা হবে মৌলিক সম্ভবপর সমাধান (basic feasible solution বা BFS)। এটি সম্ভবপর কারণ সম্ভবপর অঞ্চলে অবস্থিত আর এটি মৌলিক কারণ এটি যে তিনটি রৈখিকভাবে স্বাধীন সহগ ভেক্টরের উপর নির্ভরশীল সেগুলি একত্রে একটি তিন-অঞ্চলের (তিন-আয়তন-বিশিষ্ট অঞ্চল) মূল (basis) এই অঞ্চলটিকে প্রয়োজন-অঞ্চল (requirement space) বলা হবে। এবার তার মানে প্রান্তবর্তী বিন্দু অনুসন্ধান করার অর্থ দাঁড়াচ্ছে রূপান্তরিত নিয়ন্ত্রণগুলির মৌলিক সম্ভবপর সমাধান সন্ধান করা।

উদাহরণস্বরূপ (২.৮') এ $x_1 = x_2 = 0$ প্রতিস্থাপন করা যাক। তাহলে হয়

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} s_2 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} s_3 = \begin{bmatrix}16\\8\\24\end{bmatrix} \quad ......(২.৯)$$

নয়তো অন্যভাবে লিখলে

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 24 \end{bmatrix} \qquad ......(২.৯')$$

বাঁদিকের ম্যাট্রিক্সটি অভেদ ম্যাট্রিক্স হওয়ার ফলে সমীকরণটিকে কোনোভাবে প্রভাবান্বিত না করেই এটিকে বাতিল করে দেওয়া যায় এবং সরাসরি $s_1 = 16$, $s_2 = 8$ ও $s_3 = 24$ সমাধানটি পাওয়া যায়। তিনটি সহগ (স্তম্ভ) ভেক্টরের রৈখিক স্বাধীনতাই নিশ্চিত করবে যে অনন্য সমাধানের অস্তিত্ব আছে। সমাধানটি অঋণাত্মক হওয়ার কারণে এটি BFS। আবার যেহেতু সমাধানটি সমাধান অঞ্চলে (0, 0, 16, 4, 24) বিন্দুর জন্ম দেয় [অথবা রেখাচিত্র নং (২.৩) এ (0, 0) বিন্দু] BFS টি একটি প্রান্তবর্তী বিন্দুরই অনুরূপ।

যদি (২.৮') এর দুটি অন্য কোন চলকে শূন্য প্রতিস্থাপন করা যায় তাহলে সম্পূর্ণ নতুন একটি সমীকরণ সমষ্টি পাওয়া যাবে। যদি সেখানেও সহগ ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন হয় তাহলে প্রয়োজন অঞ্চলের জন্য নতুন মূল পাওয়া যাবে এবং সেক্ষেত্রে সমাধানটি অঋণাত্মক হলে আরেকটি প্রান্তবর্তী বিন্দু পাওয়া যাবে। তার মানে সম্ভবপর অঞ্চলে অন্য কোন প্রান্তবর্তী বিন্দু পাওয়ার জন্য আমাদের তিন আয়তন বিশিষ্ট প্রয়োজন অঞ্চলে নতুন একটি মূলে সরে যেতে হবে।

BFS ধারণার সবচেয়ে বড় সুবিধা হল যে এটি জ্যামিতিক না হয়ে বীজগাণিতিক হওয়ার ফলে এটিকে m নিয়ন্ত্রণ ও n বাছাই চল বিশিষ্ট সাধারণ রৈখিক অনুক্রমেও প্রসারিত করা যায়। এক্ষেত্রে প্রয়োজন অঞ্চল হবে m-আয়তনবিশিষ্ট এবং সমাধান অঞ্চলটির আয়তন হবে (m + n)। BFS নির্ণয় করার জন্য রূপান্তরিত নিয়ন্ত্রণ সমীকরণগুলিতে (m + n) চলের মধ্যে n চলকে শূন্য ধরতে হবে। এছাড়া বাকি পদ্ধতি উপরের উদাহরণটির মতই।

২.১১ সিমপ্লেক্স পদ্ধতি—সর্বাধিক অনুকূল প্রান্তবর্তী বিন্দু নির্ধারণ (Simplex Method—Finding the optimal extreme point)

প্রান্তবর্তী বিন্দু নির্ধারণ করার অর্থ BFS নির্ণয় করা। কিন্তু তাদের মধ্যে কোনটি সর্বাধিক অনুকূল তা নির্ধারণ করার জন্য সবকটি BFS নির্ণয় করে লক্ষ্য অপেক্ষকটির মানগুলি নির্ধারণ করে ক্ষেত্রবিশেষে সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন মানটি দেখতে হবে। কিন্তু যদি বহু নিয়ন্ত্রণ ও চল থাকে তাহলে এইভাবে সমস্ত মান নির্ণয় করা খুবই কঠিন হয়ে দাঁড়ায়। সিমপ্লেক্স পদ্ধতিতে প্রথমে যে কোন একটি প্রান্তবর্তী বিন্দু নিয়ে শুরু করে লক্ষ্য অপেক্ষকটির

মান নির্ণয় করা হয়। তারপর তার পরবর্তী প্রান্তবর্তী মানটি নিয়ে দেখা হয় লক্ষ্য অপেক্ষকটির মানের কোন উন্নতি হল কিনা। এইভাবে পরপর প্রান্তবর্তী বিন্দুগুলি নিয়ে লক্ষ্য অপেক্ষকটির মান যাচাই করতে হবে। যে বিন্দুতে পৌঁছে দেখা যাবে যে তার থেকে সরে গেলে লক্ষ্য অপেক্ষকটির মান কোনোভাবেই উন্নত হচ্ছেনা—সেটিই হবে সর্বাধিক অনুকূল সমাধান।

সিমপ্লেক্স সারণি (Simplex tableau)

(২.৯) এবং (২.৯´) থেকে $x_1 = x_2 = 0$ প্রতিস্থাপন করে একটি প্রাথমিক BFS পাওয়া গেছে। এটির থেকে প্রাপ্ত সমাধান অঞ্চল হল $S_1 = (0, 0, 16, 8, 24)$
এবং লক্ষ্য অপেক্ষকটির মান হল $\pi_1 = 40(0) + 30(0) = 0$ ......(২.১০)

এই একই সমাধান পরিকল্পনামত নির্ধারণ করা যায় সিম্প্লেক্স সারণির (Simplex tableau) মাধ্যমে।

সারণি ২.৮

সিমপ্লেক্স সারণি—সারণি-১ (Simplex tableau-tableau I)

	π	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ধ্রুবক
সারি ০	1	–40	–30	0	0	0	$\boxed{0}$
সারি ১	0	1	0	1	0	0	16
সারি ২	0	0	1	0	1	0	8
সারি ৩	0	1	2	0	0	1	24
				*	*	*	

এই ধরণের সারণিতে প্রতিটি বাছাই চলের জন্য একটি করে স্তম্ভ থাকে। তাছাড়া লক্ষ্য অপেক্ষকটি মান (এক্ষেত্রে π) ও ধ্রুবকের একটি করে স্তম্ভ থাকে। π এর স্তম্ভটি থাকার ফলে লক্ষ্য অপেক্ষক এবং তিনটি রূপান্তরিত নিয়ন্ত্রণে দেওয়া তথ্য সারণিটির অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এগুলি সারণি নং (২.৮) এ যথাক্রমে সারি ০ ও সারি ১, ২, ৩ এ দেখানো হল। প্রতিটি চলের নীচে অবস্থিত সংখ্যাগুলি হল প্রাসঙ্গিক সমীকরণে তাদের সহগ। ধ্রুবক স্তম্ভের সংখ্যাগুলি হল যেগুলি কোন চলের সঙ্গে যুক্ত নয় সেগুলি। ধ্রুবক অপেক্ষকের ঠিক বাঁয়ে

যে সরলরেখাটি আঁকা আছে সেটি হল সমীকরণগুলির সমতা (equality) চিহ্নের স্থান। তার মানে সারি ০টি $\pi - 40x_1 - 30x_2 = 0$ এইভাবে পড়তে হবে। একইভাবে অন্যান্য সারিগুলি পড়া যাবে।

এখানে BFS অনুসন্ধান করার অর্থ তিন আয়তন বিশিষ্ট প্রয়োজন অঞ্চলের জন্য একটি মূল খুঁজে বের করা। তার অর্থ শেষ তিনটি সারি থেকে তিনটি রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভ ভেক্টর নির্ধারণ করতে হবে। অবধারিতভাবে * চিহ্নিত স্তম্ভগুলিই বেরিয়ে আসবে। এই তিনটি স্তম্ভ ভেক্টর একত্রে একটি (3×3) অভেদ ম্যাট্রিক্স তৈরি করে। ফলস্বরূপ s_1, s_2, s_3 কে মূলের মধ্যে নিয়ে $x_1 = x_2 = 0$ বসানো যায়। এবার যদি মনে মনে x_1ও x_2 স্তম্ভ দুটি সরিয়ে ফেলা যায় তাহলে তিনটি নীচের সারি মিলে ((২.৯´) রূপ পাবেন এবং তা থেকে $(s_1, s_2, s_3) = (16, 8, 24)$ পাওয়া যাবে।

এই BFS এ উৎপাদন শূন্য বলে মুনাফা π ও শূন্য। অতএব এটি কখনোই সর্বাধিক অনুকূল নয়। কিন্তু সর্বাধিক করার সমস্যায় সবসময়ই পাওয়া গেলে সেরকম BFSটিকেই প্রাথমিক BFS করা সমীচীন যাতে কেবলমাত্র শিথিল চলই আছে। শিথিল চলগুলির সহগ ভেক্টর সর্বদাই রৈখিকভাবে স্বাধীন একক (unit) ভেক্টর হওয়ার ফলে তারা সর্বদাই সুবিধাজনক একটি মূল ভেক্টর দেবে।

মুনাফার তথ্যটিও সরাসরি সারণির থেকে পড়া যাবে। শুধুমাত্র সারি ০ ও নীচের তিনটি সারিকে যদি ধরা যায় সারণিটি নীচের সমীকরণ সমষ্টিতে রূপান্তরিত হয় [সমীকরণ (২.১১) দ্রষ্টব্য]।

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \\ 8 \\ 24 \end{bmatrix} \qquad (২.১১)$$

(২.১১) থেকে কেবলমাত্র শিথিল চল নয়, $\pi_1 = 0$ তথ্যটিও জানা যাবে [এখানে π এর তলায় 1 এর অর্থ প্রাথমিক]। তার ফলে লক্ষ্য অপেক্ষকটির মান জানতে গেলে (3×3) এর পরিবর্তে (4×4) অভেদ ম্যাট্রিক্স রাখতে হচ্ছে। সাধারণ ক্ষেত্রে প্রসারণ করলে $(n \times m)$ এর ক্ষেত্রে $(m + 1) \times (m + 1)$ অভেদ ম্যাট্রিক্স রাখতে হবে।

অক্ষ দণ্ডভিত্তিক-ঘূর্ণন পদ্ধতি (Pivoting)

এবার নতুন BFS এ চলে গিয়ে দেখতে হবে কোন উন্নতি হয় কিনা অক্ষদণ্ডভিত্তিক ঘূর্ণন পদ্ধতি (pivoting) এর প্রধান কাজ হল বর্তমান মূলের অন্তর্গত একটি স্তম্ভ ভেক্টরের পরিবর্তে তার বাইরের অন্য একটি ভেক্টরকে ঢোকানো। এক্ষেত্রে যেমন (s_1, s_2, s_3) এর পরিবর্তে (x_1, x_2) ঢোকানো যায়। এবার কোনগুলির

বদলে কোনগুলি ঢোকানো হবে তা আলোচনা করা যাক। (২.৭) থেকে দেখা যাচ্ছে যে x_1 ও x_2 এর জন্য প্রান্তিক মুনাফার হার যথাক্রমে 40 টাকা ও 30 টাকা। তার মানে মুনাফাবর্ধক হিসাবে x_1 কে ঢোকানো বেশি সুবিধাজনক। তার মানে সিমপ্লেক্স সারণির পরিপ্রেক্ষিতে সেই চলটিকেও নেওয়া উচিত যার জন্য লিপিবদ্ধ ঋণাত্মক মানটির (negative entry) পরম মান সর্বাধিক। এক্ষেত্রে এই সঠিক মানটি হল –40। অতএব x_1 ভিতরে আসবে। x_1 স্তম্ভটিকে অক্ষদণ্ড (pivot) স্তম্ভ বলা হবে।

অক্ষদণ্ড-স্তম্ভটি যে কোনো s_i -কে স্থানান্তরিত করবে। সেখানে কয়েকটি সিদ্ধান্ত নিতে হবে। প্রথমতঃ কোন s_iটি বাদ যাবে সেটা দেখতে হবে। দ্বিতীয়তঃ নতুন স্তম্ভটি যে পুরানো স্তম্ভগুলি রেখে দেওয়া হল সেগুলির সঙ্গে রৈখিকভাবে স্বাধীন কিনা। এগুলিকে সমাধান করার জন্য অক্ষদণ্ড-স্তম্ভটিকে এমনভাবে একক ভেক্টরে রূপান্তরিত করতে হবে যাতে নীচের তিনটি সারির যে কোনোটিতে 1 এবং বাকি সবজায়গায় 0 থাকে।

যদি রূপান্তরিত অক্ষদণ্ড স্তম্ভটির একক উপাদানটি সারি ১ এ থাকে তাহলে সেটি s_1 স্তম্ভের মত দেখতে হবে এবং সেক্ষেত্রে s_1 বাইরে চলে যাবে। কারণ তাহলেই রৈখিক স্বাধীনতা বজায় থাকবে। একইভাবে যদি অক্ষদণ্ড স্তম্ভের একক উপাদানটি সারি ২ এ থাকে তাহলে s_2 বাইরে চলে যাবে। এইভাবে দুটি সমস্যাই একসঙ্গে সমাধান করা সম্ভব হবে।

এখন প্রশ্ন হল অক্ষদণ্ড স্তম্ভের একক উপাদানটি সঠিক কোথায় বসানো হবে? যে উপাদানটি একক বসানো হবে তাকে বলা হবে অক্ষদণ্ড উপাদান (pivot element)। এখানে মূল নিয়ন্তা হল তিনটি বিভাগের উৎপাদন ক্ষমতা কারণ আমাদের তার মধ্যেই থাকতে হবে যদি তৃতীয় সারির উপাদানটিকে অক্ষদণ্ড উপাদান করা যায় তাহলে রূপান্তরের পরে x_1 হয়ে যাবে s_3 এর সমান। তার ফলে s_3 বাদ হয়ে যাবে। তার মানে (২.১১) তে s_3 এর বদলে x_1 বসবে। সেক্ষেত্রে x_1 এর সমাধানমান হবে 24। কিন্তু $x_1 = 24$ কর্তন নিয়ন্ত্রণটি অমান্য করবে এবং ফলে সম্ভবপর হবেনা। আবার যদি প্রথম সারিতে এককটি বসানো যায় তাহলে x_1 এর অনুপ্রবেশ ঘটবে s_1 এর জায়গায়। তখন $x_1 = 16$ হবে সমাধান। এটি কোন নিয়ন্ত্রণই অমান্য করবেনা। তার ফলে বৃত্তচিহ্নিত উপাদানটিকে অক্ষদণ্ড উপাদান বলে ধরা যেতে পারে। এক্ষেত্রে নতুন সারণিতে ধ্রুবক স্তম্ভের সবকটি ধ্রুবকই অঋণাত্মক হবে।

এর থেকে অক্ষদণ্ড উপাদান বাছাই করার কয়েকটি নিয়ম পাওয়া যায়।

১। অক্ষদণ্ড স্তম্ভের সারি 0 ব্যতীত অন্যান্য সারির সেই সমস্ত উপাদানগুলি বেছে নিতে হবে যেগুলি ধনাত্মক।

২। ধ্রুবক স্তম্ভে এগুলির প্রতিরূপ (counterpart) গুলিকে এগুলি দিয়ে ভাগ করে ভাগফল নির্ণয় করতে হবে।

৩। এই ভাগফলগুলিকে স্থানান্তর ভাগফল (displacement quotient) বলা হয়। এর মধ্যে যে ভাগফলটি সবচেয়ে ছোট সেই সারিটিই হবে অক্ষদণ্ড সারি।

৪। অক্ষদণ্ড স্তম্ভ ও অক্ষদণ্ড সারির সংযোগস্থলের উপাদানটিকেই অক্ষদণ্ড উপাদান হিসাবে বেছে নিতে হবে।

ক্ষুদ্রতম স্থানান্তর ভাগফলটি নিলে এটা নিশ্চিত করা যাবে যে, যে উৎপাদনটি যোগ করা যাচ্ছে (x_1) সেটি সবকটি নিয়ন্ত্রণের মধ্যে থাকার মত ছোট হবে এবং অঋণাত্মকতা নিয়ন্ত্রণও সন্তুষ্ট হবে। বর্তমান উদাহরণে দুটি ভাগফল তুলনা করা যায়—এদুটি হল $^{16}/_1$ এবং $^{24}/_1$ । যেহেতু প্রথম ভাগফলটি ছোট তাই প্রথম সারিটি হবে অক্ষদণ্ড সারি এবং তার বৃত্তচিহ্নিত উপাদান (1) হবে অক্ষদণ্ড উপাদান।

আমাদের পরবর্তী কাজ হল অক্ষদণ্ড স্তম্ভটিকে একক ভেক্টরে এমনভাবে রূপান্তরিত করা যাতে অক্ষদণ্ড উপাদানটি 1 হয় এবং বাকিগুলি শূন্য হয়। যেহেতু এক্ষেত্রে অক্ষদণ্ড উপাদানটি 1 তাই কিছু করণীয় নেই। সাধারণভাবে যদি উপাদানটি k হয় তাহলে অক্ষদণ্ড সারির ধ্রুবক স্তম্ভ পর্যন্ত সবকটি উপাদানকে k দিয়ে ভাগ করতে হবে। অক্ষদণ্ড সারির নতুন রূপটির মাধ্যমে এবার অন্য সারিগুলিকে রূপান্তরিত করতে হবে যাতে অক্ষদণ্ড স্তম্ভে শূন্যে থাকে। দ্বিতীয় সারির উপাদানটি এক্ষেত্রে প্রাথমিকভাবেই শূন্য হওয়ার ফলে কোন রূপান্তর প্রয়োজন হচ্ছে না। কিন্তু সারি 0 তে –40 উপাদানটিতে পরিবর্তন করতে হবে। এক্ষেত্রে সারি 0 এর সবকটি উপাদানের সঙ্গে অক্ষদণ্ড সারির নবরূপের 40 গুণ যোগ করতে হবে। আবার তৃতীয় সারির প্রথম উপাদানটিকে শূন্য করার জন্য তৃতীয় সারি থেকে প্রথম সারিটি বিয়োগ দেওয়া যায়। এই ফলাফলগুলি সারণি নং (২.৯) এ দেওয়া হল।

সারণি ২.৯

সিমপ্লেক্স সারণি—সারণি-২

	π	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ধ্রুবক
সারি ০	1	0	–30	40	0	0	$\boxed{640}$
সারি ১	0	1	0	1	0	0	16
সারি ২	0	0	1	0	1	0	8
সারি ৩	0	0	2	–1	0	1	8

এবার মনে মনে যদি x_2 এবং s_1 স্তম্ভগুলি বাদ দিয়ে দেওয়া যায় তাহলে সিমপ্লেক্স সারণি-২ নীচের সমীকরণ সমষ্টি নং (২.১২) এর অনুরূপ হবে।

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi \\ x_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 640 \\ 16 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad (২.১২)$$

এখান থেকে চারটি চলেরই সমাধান মান নির্ধারণ করা সহজ কারণ বাঁদিকের অভেদ ম্যাট্রিক্সটিকে অনায়াসেই বাদ দিয়ে দেওয়া যায়।

এই সমাধানটি সিমপ্লেক্স সারণি নং ২ এর ধ্রুবক স্তম্ভটি থেকেও সহজেই নির্ণয় করা যায়। π স্তম্ভে একক ভেক্টরের একক উপাদানটি সারি 0 এ অবস্থিত। সেই কারণে এই সারির ধ্রুবকটিকেই π এর মান বলে ধরা যায়। ঠিক একইভাবে নতুন মূলের x_1, s_2 , s_3 এর মান নির্ধারণ করা যাবে। x_2 ও s_1 স্তম্ভ যাদের একক ভেক্টর নেই সেগুলিকে মূল থেকে বাদ দিয়ে দেওয়া হচ্ছে এবং তাদের সমাধান মান শূন্য বলে ধরে নেওয়া হচ্ছে। অতএব দ্বিতীয় মৌলিক সম্ভবপর সমাধানের অর্থ হল—

$$\left.\begin{aligned} s_2 &= (16, 0, 0, 8, 8) \\ \pi_2 &= 640 \end{aligned}\right\} \quad (২.১৩)$$

S_1 এর সঙ্গে তুলনা করলে π এর মান এবার অনেকটাই বড়।

সারণি নং (২.৭) এর ভিত্তিতে বলতে গেলে আমরা প্রথম প্রান্তবর্তী বিন্দু থেকে দ্বিতীয় প্রান্তবর্তী বিন্দুতে সরে গেছি।

আরেকটি পদক্ষেপ

সিমপ্লেক্স সারণি-২এ x_2 এর সঙ্গে যুক্তি লিপিবদ্ধ মান –30। যেহেতু সারি 0 তে একটি ঋণাত্মক মান লিপিবদ্ধ হওয়ার অর্থ ধনাত্মক প্রান্তিক মুনাফার হার, x_2 কে শূন্য মুনাফার হার বা ঋণাত্মক মুনাফার হার প্রদানকারী কোন চলের পরিবর্তে মূলে ঢোকালে মুনাফা বাড়ার সম্ভাবনা সেই কারণে পরবর্তী ঘূর্ণনে x_2 স্তম্ভটিকে অক্ষদণ্ড স্তম্ভ হিসাবে ধরা যাক। অক্ষদণ্ড সারি বেছে নেওয়ার জন্য ক্ষুদ্রতম স্থানান্তর ভাগফলটি দেখতে হবে। এক্ষেত্রে ভাগফলদুটি যথাক্রমে $^8/_1$ এবং $^8/_2$ । সুতরাং ৩নং সারির ভাগফল কম হওয়ার কারণে সেটিকেই অক্ষদণ্ড সারি

হিসাবে ধরা যায়। তাই অক্ষদণ্ড উপাদানটি হল 2। এটিকে সারণিতে বৃত্তচিহ্নিত করে দেওয়া হল। x_2 স্তম্ভের উপাদানগুলিকে 0, 0, 0 এবং 1 এ রূপান্তরিত করার জন্য (১) ৩নং অক্ষদণ্ড সারির 15গুণ সারি 0 এর সঙ্গে যোগ করতে হবে। ১নং সারিকে একইভাবে রেখে দিতে হবে (৩) ২ নং সারি থেকে ৩ নং সারির $^1/_2$ গুণ বিয়োগ করতে হবে এবং (৪) ৩ নং সারিকে 2 দিয়ে ভাগ করতে হবে। [এগুলি নিজে একবার করে সিমপ্লেক্স্ সারণি ৩ এর সঙ্গে মিলিয়ে দেখা ভাল।] এগুলি সারণি নং (২.১০) বা সিমপ্লেক্স সারণি-৩ এ বিবৃত করা হল।

সারণি ২.১০

সিমপ্লেক্স সারণি—সারণি-৩

	π	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ধ্রুবক
সারি ০	1	0	0	25	0	15	$\boxed{760}$
সারি ১	0	1	0	1	0	0	16
সারি ২	0	0	0	$^1/_2$	1	$-^1/_2$	4
সারি ৩	0	0	1	$-^1/_2$	0	$^1/_2$	4

এখান থেকে পরিষ্কার বোঝা যাচ্ছে যে

$$\left.\begin{aligned} S_3 &= (16, 4, 0, 4, 0) \\ \text{এবং } \pi_3 &= 760 \end{aligned}\right\} \qquad (২.১৪)$$

এখানে দুটি পণ্যই উৎপাদিত হচ্ছে এবং মুনাফা বৃদ্ধি পেয়ে 760 হয়েছে।

এবার যেহেতু সারি 0 তে আর কোন ঋণাত্মক মান লিপিবদ্ধ নেই তাই আর ঘূর্ণন লাভজনক হবেনা। এটি বুঝবার জন্য সারি 0কে সমীকরণে রূপান্তরিত করা যাক। সমীকরণটি হবে

$$\pi = 760 - 25s_1 - 15s_3$$

এখানে সহগগুলি ঋণাত্মক বলে π কে সর্বাধিক করার জন্য $s_1 = s_3 = 0$ হতে হবে। S_3 তে ঠিক তাই করা হয়েছে। অতএব এই সর্বাধিক অনুকূল সমাধানটি চিত্রলৈখিখ সমাধানের সঙ্গে একেবারে এক।

রেখাচিত্র নং (২.৩) এর ভিত্তিতে বলতে গেলে আমরা স্থির উৎসবিন্দু (origin) বা প্রাথমিক প্রান্তবর্তী বিন্দু থেকে শুরু করে পরবর্তী প্রান্তবর্তী বিন্দু (16, 0) এবং তারপরে সর্বাধিক অনুকূল প্রান্তবর্তী বিন্দু (16, 4) এ সরে গেছি। এখানে সর্বাধিক অনুকূল মান বাছাই করার জন্য সবকটি বিন্দুকে কিন্তু তুলনা করতে হয়নি। প্রান্তিক মুনাফা হার শর্তানুসারে x_1 কে প্রথম অক্ষদণ্ড স্তম্ভ ধরার ফলে সংক্ষিপ্ততম পথে সর্বাধিক অনুকূল সমাধানে পৌঁছানো গেছে।

২.১২ সিমপ্লেক্স সম্বন্ধে আরও কিছু কথা

উপরে আলোচিত সর্বাধিক করার সমস্যাটিতে প্রাথমিক BFS সন্ধান করার কোন প্রয়োজন ছিলনা—স্থির উৎসবিন্দুতে একটি প্রাথমিক BFS পাওয়াই যাচ্ছিল। আসলে এই ধরণের সমস্যাগুলিতে স্থির উৎসবিন্দুটি সর্বদাই সম্ভবপর অঞ্চলের অন্তর্গত হওয়ার ফলে ওটিকে সবসময়ই প্রাথমিক BFS বলে ধরে নেওয়া যেতে পারে। কিন্তু সর্বনিম্ন করার সমস্যাগুলির ক্ষেত্রে অনেক সময়ই স্থির-উৎসবিন্দুটি সম্ভবপর অঞ্চলের অন্তর্গত হয়না—তাই ঐ বিন্দু থেকে আরম্ভ করার সুবিধাও থাকেনা।

(২.৩) নং অনুচ্ছেদটির উদাহরণটিকে অন্যভাবে লিখলে $Z = 0.6x_1 + x_2$ কে সর্বনিম্ন করুন।

$$\text{যখন} \quad \begin{bmatrix} 10 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad (২.১৫)$$

এবং $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

এখানে অঋণাত্মক s_i চলগুলি উদ্বৃত্ত (শিথিল নয়)। তাই এগুলিকে নিয়ন্ত্রণগুলির বাঁদিক থেকে বিয়োগ করতে হবে। অতএব (২.১৫) এর সহগ ম্যাট্রিক্সটির শেষ তিনটি স্তম্ভ অভেদ ম্যাট্রিক্সের ঋণাত্মক। যদি $x_1 = x_2 = 0$ প্রতিস্থাপন করা যায়, তিনটি নিয়ন্ত্রণ থেকে $(s_1, s_2, s_3) = (-20, -20, -12)$ পাওয়া যাবে। কিন্তু এটি সম্ভবপর নয়। সেই কারণে অন্য কোন প্রাথমিক BFS এর সন্ধান করা প্রয়োজন।

২.১২ সর্বনিম্নকরণ সমস্যাতে কৃত্রিম (artificial) চলের ব্যবহার

প্রাথমিক BFS সন্ধান করার প্রক্রিয়াটি সহজ করার জন্য প্রতিটি নিয়ন্ত্রণে একটি অঋণাত্মক কৃত্রিম (artificial) চল যোগ দিতে হবে। এই কৃত্রিম চলগুলিকে v_i দিয়ে চিহ্নিত করা হল। লক্ষ্য অপেক্ষকে এই v_i গুলির সহগ খুবই বড় অর্থাৎ বাছাই চলগুলির সহগের তুলনায় যথেষ্ট বড় হওয়া দরকার। ধরা যাক এগুলির প্রতিটি 100।

তাহলে(২.১৫) এর অনুক্রমটি হবে,

$Z = 0.6x_1 + x_2 + 100\,(v_1 + v_2 + v_3)$ কে সর্বনিম্ন করুন যখন

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 10 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & -1 & 0 & & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad (২.১৫)$$

এবং $x_1\ ,\ x_2\ ,\ s_1,\ s_2\ ,\ s_3\ ,\ v_1\ ,\ v_2,\ v_3 \geq 0$ ।

যেহেতু কৃত্রিম চলগুলি তিনটি রৈখিকভাবে স্বাধীন একক ভেক্টরের সঙ্গে যুক্ত (এবং এগুলি একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স সৃষ্টি করে), v_i চলগুলিকে প্রাথমিক মূলে সরাসরি ঢুকিয়ে দেওয়া যায়।

v_i গুলিকে অবশ্য সর্বাধিক অনুকূল সমাধানে প্রবেশ করতে দেওয়া যাবেনা। যদি v_i চলগুলিকে বিরাট বড় সহগ দেওয়া যায় তাহলে এই সমস্যাটির থেকে মুক্তি পাওয়া যেতে পারে। এই উদাহরণটি যেমন সহগগুলি হল কৃত্রিমভাবে কল্পিত কতগুলি খাবারের দাম এবং সেই কারণে অত্যন্ত বেশি দামী হওয়ার ফলে এই খাবারগুলি কখনোই সমাধান মিশ্রণের অন্তর্ভুক্ত হবেনা। এই কারণেই কৃত্রিম চলের সহগ খুবই বড় হওয়া আবশ্যিক। এইভাবে যদি নিশ্চিত করা যায় যে সর্বাধিক অনুকূল সমাধানে $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ হবে তাহলে (২.১৫′), (২.১৫) এর সমানই হবে।

এবার সিমপ্লেক্স পদ্ধতি প্রয়োগ করা যাক। নীচের সারণি নং (২.১১) তে সম্পূর্ণ পদ্ধতিটি বিবৃত করা হল।

সারণি ২.১১

সিমপ্লেক্স সারণি—সারণি-১-৬

		বাছাই চল			উদ্বৃত্ত চল			কৃত্রিম চল			
সারণি	সারি	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	V_1	V_2	V_3	ধ্রুবক
১	0	1	$-\frac{6}{10}$	-1	0	0	0	-100	-100	-100	0
	১	0	10	4	-1	0	0	1	0	0	20
	২	0	5	5	0	-1	0	0	1	0	20
	৩	0	2	6	0	0	-1	0	0	1	12
২	0	1	$\frac{8497}{5}$	1499	-100	-100	-100	0	0	0	$\boxed{5200}$
	১	0	10	4	-1	0	0	1	0	0	20
	২	0	5	5	0	-1	0	0	1	0	20
	৩	0	2	6	0	0	-1	0	0	1	12
৩	0	1	0	$\frac{20,481}{25}$	$\frac{3497}{50}$	-100	-100	$-\frac{8497}{50}$	0	0	$\boxed{\frac{9006}{5}}$
	১	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$	0	0	2
	২	0	0	3	$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	10
	৩	0	0	$\frac{26}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	-1	$-\frac{1}{5}$	0	1	8
৪	0	1	0	0	$\frac{2498}{65}$	-100	$\frac{7481}{130}$	$-\frac{8998}{65}$	0	$\frac{20,481}{130}$	$\boxed{\frac{35,154}{65}}$
	১	0	1	0	$-\frac{3}{26}$	0	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{26}$	0	$-\frac{1}{13}$	$\frac{18}{13}$
	২	0	0	0	$\frac{5}{13}$	-1	$\frac{15}{26}$	$-\frac{5}{13}$	1	$-\frac{15}{26}$	$\frac{70}{13}$
	৩	0	0	1	$\frac{1}{26}$	0	$-\frac{5}{26}$	$-\frac{1}{26}$	0	$\frac{5}{26}$	$\frac{20}{13}$
৫	0	1	0	0	$\frac{1}{15}$	$-\frac{19}{75}$	0	$-\frac{1501}{15}$	$-\frac{7481}{75}$	-100	$\boxed{\frac{56}{15}}$
	১	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{15}$	0	$\frac{2}{3}$
	২	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{26}{15}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{26}{15}$	-1	$\frac{28}{3}$
	৩	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
৬	0	1	0	0	0	$-\frac{2}{25}$	$-\frac{1}{10}$	-100	$-\frac{2498}{25}$	$-\frac{999}{10}$	$\boxed{\frac{14}{5}}$
	১	0	1	0	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{4}$	3
	২	0	0	0	1	$-\frac{13}{5}$	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{13}{5}$	$-\frac{3}{2}$	14
	৩	0	0	1	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	1

সারণি (২.১১) এর সিমপ্লেক্স সারণি-১এ দেখা যাচ্ছে যে v_i স্তম্ভগুলি চার উপাদান বিশিষ্ট একক ভেক্টর রূপে নেই। ঐ রূপে নিয়ে যাওয়ার জন্য সারি 0 এর সঙ্গে 100 (সারি ১ + সারি ২ + সারি ৩) যোগ করতে হবে। তাহলেই সারণি ১ সারণি ২তে রূপান্তরিত হবে। যেহেতু দ্বিতীয় সারণিটিতে (4 × 4) একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স আছে তাই সমাধান হবে $(c, v_1, v_2, v_3) = (5200, 20, 20, 12)$।

অক্ষদণ্ড স্তম্ভ বাছাই করার ক্ষেত্রে যে শর্ত আরোপ করা হবে তাতেও কিছু পরিবর্তন আবশ্যক। সর্বনিম্নকরণ সমস্যাগুলিতে z এবং ধ্রুবক স্তম্ভ দুটি বাদ দিয়ে যে স্তম্ভটিতে সারি 0 তে সর্বোচ্চ ধনাত্মক উপাদান থাকবে সেটিকেই অক্ষদণ্ড স্তম্ভ হিসাবে ধরা যেতে পারে। এই শর্তের যৌক্তিকতা বোঝার জন্য সারণি ২ এর সারি 0 কে সমীকরণ $z = 5200 - \frac{8497}{5} x_1 - 1499x_2 + 100 (s_1 + s_2 + s_3)$ তে রূপান্তরিত করতে হবে।

যদি প্রাথমিক মূলে একটি কৃত্রিম চলের পরিবর্তে প্রতিস্থাপন করার জন্য পাঁচটি চলের যে কোন একটিকে বেছে নিতে হয় তাহলে x_1 ব্যয় কমাবার ক্ষেত্রে সবচেয়ে বেশি সুবিধাজনক হবে কারণ x_1 এর ঋণাত্মক সহগটির পরমমান সর্বাধিক। সারণি ২ এর পরিপ্রেক্ষিতে আলোচনা করতে গেলে x_1 চলটির সারি 0 এর সহগ হল সর্বোচ্চ ধনাত্মক মান বিশিষ্ট। এইভাবেই উপরের শর্তটির যৌক্তিকতা ব্যাখ্যা করা যায় এবং x_1 স্তম্ভটিকে অক্ষদণ্ড স্তম্ভ হিসাবে বাছাই করে নেওয়া যায়।

ঠিক আগের পদ্ধতিতেই দ্বিতীয় সারণির অক্ষদণ্ড সারিটি বাছাই করা হয়েছে। এখানে ক্ষুদ্রতম স্থানান্তর ভাগফলটি হল $\underset{(\text{minimum})}{\min} \left\{ \frac{20}{10}, \frac{20}{5}, \frac{12}{2} \right\} = \text{Min } \{2, 4, 6\} = 2$।

অতএব প্রথম সারিটি হল অক্ষদণ্ড সারি এবং (বৃত্তচিহ্নিত) উপাদান 10 হল অক্ষদণ্ড উপাদান। এই অক্ষদণ্ড স্তম্ভটিকে একক ভেক্টরে রূপান্তরিত করে সারণি ৩এ পৌঁছানো যাবে। এটির থেকে সমাধান $(z, x_1, v_2, v_3) = \left(\frac{9006}{5}, 2, 10, 8 \right)$ পাওয়া যাবে। এবার খাদ্যতালিকায় v_1 এর পরিবর্তে x_1 ঢোকানোর ফলে মোট ব্যয় অনেক কমে গেছে। আগে মোট ব্যয় ছিল 5200 টাকা আর এবার মোট ব্যয় হয়েছে 1800 টাকা 20 পয়সা $\left[\frac{9006}{5} \right]$ ।

এর পরবর্তী ধাপগুলি একই পদ্ধতির পুনরাবৃত্তি। এখানে উল্লেখ্য যে আরো দুটি কৃত্রিম চলকে বের করার

জন্য আরো দুইবার অক্ষদণ্ডভিত্তিক ঘূর্ণন পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হবে। যেহেতু v_i চলগুলির ফলে পদ্ধতিটি দীর্ঘায়িত হচ্ছে তাই সর্বদা চেষ্টা করা উচিত যাতে এই ধরণের চলগুলির সংখ্যা কমানো যায়। যদি সহগ ম্যাট্রিক্সের প্রথম স্তম্ভটি (10, 5, 2) না হয়ে (0, 1, 0) হয় তাহলে v_2 কে বাদ দিয়ে x_1 কে প্রাথমিক মূলে ঢোকানো যায়।

সারণি 2 থেকে শুরু করে প্রতিটি পরবর্তী সারণিতে ক্রমাগতভাবে মোটব্যয় হ্রাস পেয়েছে। যখন সারণি ৬-এ মোট ব্যয় $\frac{14}{5}$ বা [2 টাকা 80 পয়সা] হবে তখন সারি 0 তে x_j , s_i এবং v_i স্তম্ভে আর কোন ধনাত্মক মান লিপিবদ্ধ থাকবেনা। তার মানে সর্বাধিক অনুকূল সমাধান হল।

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{s_1}, \overline{s_2}, \overline{s_3}) = (3, 1, 14, 0, 0)$$

এবং $\overline{z} = 2$ টাকা 80 পয়সা।

এটি চিত্রলৈখিক সমাধানের সঙ্গে এক।

কৃত্রিম চলের আরেকটি প্রয়োগ

কৃত্রিম চল যে শুধুমাত্র সর্বনিম্নকরণ সমস্যায় ব্যবহৃত হয় তা নয়, কিছু কিছু সর্বাধিকরণ সমস্যায় কৃত্রিম চল প্রয়োগ করা যায়।

সর্বাধিক করার পরিপ্রেক্ষিতে যদি একটি নিয়ন্ত্রণে (ধরা যাক তৃতীয়টিতে) যথার্থ সমতা থাকে তাহলে s_3 চলের কোন প্রয়োজন হবেনা। সেক্ষেত্রে সিমপ্লেক্স সারণিতে একটি একক ভেক্টর কম পাওয়া যাবে এবং তৈরি প্রাথমিক BFSটিকেও আর পাওয়া যাবেনা। সেক্ষেত্রে কৃত্রিম চল v_3 কে দিয়ে (তৃতীয় নিয়ন্ত্রণে) s_3 এর শূন্যস্থান পূরণ করা যায় কারণ v_3 ও একটি সঠিক একক ভেক্টরের জন্ম দিতে পারবে। v_3 যাতে সর্বাধিক অনুকূল সমাধানে না ঢোকে সেজন্য এটিকে লক্ষ্য অপেক্ষকে একটি ঋণাত্মক সহগ (ঋণাত্মক প্রান্তিক মুনাফার হার) দিতে হবে। তাছাড়া আগের মতই সিমপ্লেক্স পদ্ধতিটি প্রয়োগ করতে হবে।

২.১৪ শ্রেণীগত মর্যাদাচ্যুতি (degeneracy)

উপরে আলোচিত রৈখিক অনুক্রমগুলির সাধারণ বৈশিষ্ট্য হল যে m নিয়ন্ত্রণ সমীকরণে ধ্রুবকগুলির ভেক্টরটিকে m এর চেয়ে কমসংখ্যক সহগ ভেক্টরের রৈখিক সংমিশ্রণ হিসাবে প্রকাশ করা যায় না।

উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে (২.৮´) এ ডানদিকের ভেক্টরটিকে বাঁদিকের তিনটির কম ভেক্টরের সংমিশ্রণ হিসাবে প্রকাশ করা সম্ভব নয়। তার ফলে মূলের প্রতিটি m চলকেই অশূন্য (non-zero) মান নিতে হবে। সেই কারণেই সারণি (২.৭) এর সমাধান অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দুতেই ঠিক তিনটি উপাদান আছে। এই বৈশিষ্ট্যটি না থাকলে রৈখিক অনুক্রমটিকে শ্রেণীগত মর্যাদাচ্যুত (degenerate) বলা হয়।

সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতিতে শ্রেণীগত মর্যাদাচ্যুতির প্রকাশ দেখা যায় যখন স্থানান্তর ভাগফলগুলি সমান-সমান হয়। এক্ষেত্রে দুই বা তার বেশি স্থানান্তর ভাগফল ক্ষুদ্রতম হবে এবং তার ফলে দুই বা তার বেশি সারিই অক্ষদণ্ড সারি হওয়ার সমান যোগ্যতা অর্জন করবে। এই সকল অবস্থায় যেহেতু একটির বেশি চলকে একেক বারে পরিবর্তিত করা যায়না তাই কোন একটি মুক্তির পথ বের করতে হবে।

একটি বাস্তবসম্মত উপায় হচ্ছে অক্ষদণ্ড সারিটিকে এমনভাবে বাছাই করা যাতে যে কটি চলের সমান যোগ্যতা আছে তাদের মধ্যে সিম্‌প্লেক্স সারণিতে বামতম স্থানে অবস্থিত চলটি স্থানান্তরিত হয়।

শ্রেণীগত মর্যাদাচ্যুতির ক্ষেত্রে অক্ষদণ্ডভিত্তিক ঘূর্ণন পদ্ধতি আদৌ মুনাফা বৃদ্ধি বা মোট ব্যয় হ্রাস নাও করতে পারে। এমনকি এসব ক্ষেত্রে হয়তো বহুবার শূন্য-উন্নতি (zero-improvement) ধরণের ঘূর্ণন পদ্ধতি প্রয়োগ করার পরে তবে জট ছাড়ানো সম্ভব হয়।

সিমপ্লেক্স পদ্ধতির একমাত্র সমস্যা হল যে বড় আয়তনের রৈখিক অনুক্রমগুলির জন্য গণনা খুবই দীর্ঘ ও পরিশ্রমসাধ্য হয়ে পড়ে। অবশ্য বর্তমানে কম্পুটারগুলি এর সবকটি ধাপ ধারাবাহিকভাবে কষে দিতে সক্ষম হওয়ার ফলে এর প্রয়োগ অনেকটাই সহজ হয়ে এসেছে।

২.১৫ পরিবহন সমস্যা (Transportation problem)

রৈখিক অনুক্রমের আরেকটি বিখ্যাত সমস্যা সম্বন্ধে না বললে আলোচনাটি অসমাপ্ত থেকে যাবে। সেই সমস্যাটি হল পরিবহণ সমস্যা (Transportation problem)। ধরা যাক একজন উৎপাদনকারীর A, B, ও C তিনটি কারখানা আছে এবং সে 1, 2, 3, 4, 5 এই পাঁচটি অঞ্চলে মাল যোগান দেয়। এখানে ধরে নেওয়া হচ্ছে যে প্রতিটি কারখানা থেকে প্রতিটি অঞ্চলে একটন (ton) উৎপাদিত পণ্য পাঠানোর পরিবহন ব্যয় জানা আছে এবং প্রতিটি অঞ্চলে কত টন উৎপাদিত পণ্য যোগান দিতে হবে তা নির্দিষ্ট আছে। নীচের সারণি নং (২.১২) তে এই উদাহরণটির বিস্তারিত তথ্য দেওয়া হল।

সারণি ২.১২

পণ্যের টন প্রতি পরিবহণ ব্যয় (টাকা) এবং প্রয়োজন (অঞ্চলভিত্তিক)

[Transport costs per ton and requirements (areawise)]

		কারখানা			প্রয়োজন (টন)
		A	B	C	
অঞ্চল	১	10 টাকা	20 টাকা	30 টাকা	25
	২	15 টাকা	40 টাকা	35 টাকা	115
	৩	20 টাকা	15 টাকা	40 টাকা	60
	৪	20 টাকা	30 টাকা	55 টাকা	30
	৫	40 টাকা	30 টাকা	25 টাকা	70
উৎপাদন	ক্ষমতা (টন)	50	100	150	300

এখানে মূল সমস্যাটি হল সেইরকম একটি পরিবহণ পদ্ধতি নির্ণয় করা যাতে সব নিয়ন্ত্রণ সাপেক্ষে মোট পরিবহণ ব্যয় সর্বনিম্ন হয়। এখানে প্রতিটি কারখানা প্রত্যেকটি অঞ্চলে কত টন করে পণ্য পরিবহণ করবে সে সম্বন্ধে সিদ্ধান্তটিই হবে আসল। এক্ষেত্রে প্রতিটি কারখানা থেকে যে পরিমাণ দ্রব্য পাঠানোর পরিকল্পনা করা হবে তা কখনোই কারখানাটির উৎপাদন ক্ষমতার থেকে বেশি হতে পারবেনা। আবার প্রতিটি অঞ্চলে মোট যে পরিমাণ পণ্য পাঠানো হবে তা ঐ অঞ্চলের প্রয়োজনের সমান হওয়া আবশ্যক। নানাপথে পণ্য পরিবহণ করেই এই দুটি শর্ত সন্তুষ্ট করা সম্ভব। পরিবহণ সমস্যা হল সেই পথটির সন্ধান করা যাতে মোট পরিবহণ ব্যয় সর্বনিম্ন হয়।

সারণি নং (২.১২) তে তিনটি কারখানার উৎপাদন ক্ষমতা হল যথাক্রমে মাসিক 50, 100, ও 150 টন। কোন অঞ্চলে মাসে কত পণ্য প্রয়োজন তা একেবারে শেষ স্তম্ভে দেওয়া আছে। পরিবহণের ব্যয় সারণিটির মূল কাঠামোতে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে যেমন B কারখানা থেকে অঞ্চল ১এ এক টন্ পণ্য পরিবহণ করার খরচ 20 টাকা। এ ধরণের পরিবহণ সমস্যার একটি বৈশিষ্ট্য হল যে সবকটি কারখানার সম্মিলিত উৎপাদন ক্ষমতা এবং সবকটি অঞ্চলের ভোক্তাদের মোট প্রয়োজন সমান।

এধরণের সমস্যাকেও রৈখিক অনুক্রমের আকারে প্রকাশ করে সমাধান করা সম্ভব।

২.১৬ সারাংশ

- রৈখিক অনুক্রম অক্ল্যাসিক্যাল সর্বাধিক অনুকূল অবস্থা নির্ণায়ক পদ্ধতির অন্তর্ভুক্ত। এর লক্ষ্য ও নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষক গুলির সবকটিই রৈখিক। তাছাড়া এক্ষেত্রে নিয়ন্ত্রণ অপেক্ষকগুলিতে অসমতা থাকে অর্থাৎ সেগুলির রূপ $g(x, y) \geq c$ বা $g(x, y) \leq c$ হয়।

- খাদ্যতালিকা নির্ধারণ সমস্যায় মানুষের ন্যূনতম পুষ্টির প্রয়োজন মিটিয়ে একটি খাদ্যতালিকা তৈরি করতে হয় যাতে খাদ্যের উপর মোট ব্যয় সর্বনিম্ন হয়। এটিই হবে সর্বাধিক অনুকূল খাদ্যতালিকা।

- যদি পুষ্টিকর উপাদান ও সর্বাধিক অনুকূল সংমিশ্রণে খাদ্যের সংখ্যা সমান হয় তাহলে সেটিকে যথাযথ (exact) বলা হবে।

- একটি n চল ও m অসমতা বিশিষ্ট রৈখিক সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন মান নির্ধারণের সমস্যায় অশূন্য x এর সংখ্যা কখনো m এর থেকে বেশি হওয়ার দরকার নেই।

- রৈখিক অনুক্রমণ সমস্যার উপাদানগুলি হল ১। লক্ষ্য অপেক্ষক ২। নিয়ন্ত্রণগুলির সমষ্টি ও ৩। অঋণাত্মকতা নিয়ন্ত্রণ।

- রেখাচিত্রে সবকটি নিয়ন্ত্রণ সরলরেখার মধ্যবর্তী অঞ্চলই সবকটি নিয়ন্ত্রণকে একসঙ্গে সন্তুষ্ট করবে। তাই এটিকে সম্ভবপর অঞ্চল (feasible region) বলা হয়। এই সম্ভবপর অঞ্চলের সীমারেখার কোণের বিন্দুগুলিকে প্রান্তবর্তী বিন্দু (extreme point) বলা হয়।

- প্রান্তবর্তী বিন্দুগুলির মধ্যে থেকেই সর্বাধিক অনুকূল সম্ভবপর সমাধান (optimal feasible solution) নির্ধারণ করতে হবে।

- সর্বাধিক অনুকূল মান সর্বদাই প্রান্তবর্তী বিন্দুতে হবে এই ধারণার থেকেই সিমপ্লেক্স পদ্ধতির উদ্ভব।

- রৈখিক অনুক্রমের সাধারণ রূপকে ম্যাট্রিক্স ও ভেক্টরের সাহায্যে লেখা যায় যেমন

$\pi = c'x$ কে সর্বাধিক করুন যখন

$Ax \leq r$ এবং $x \geq 0$

বা $Z = c'x$ কে সর্বনিম্ন করুন

যখন $Ax \geq r$ এবং $x \geq 0$

- অযথাযথভাবে কোন নিয়ন্ত্রণ সন্তুষ্ট হলে হয় ব্যবহারে শিথিলতা নয়তো উদ্বৃত্ত থাকবে। সর্বাধিক করার সমস্যায় iতম নিয়ন্ত্রণে শিথিল চল এবং সর্বনিম্ন করার সমস্যায় উদ্বৃত্ত চল বোঝাতে si ব্যবহার করা হয়।
- শিথিল চল (slack variable) ও উদ্বৃত্ত চল (surplus variable) উভয়কে একত্রে পুতুল চল (dummy variable) বলা হয়।
- পুতুল চলের সাহায্যে রৈখিক অনুক্রমের অসমতাপূর্ণ নিয়ন্ত্রণগুলিকে সমীকরণরূপে প্রকাশ করা যায়।
- si কখনো ঋণাত্মক হবেনা।
- সমস্ত সমাধান-মানগুলি অঋণাত্মক হলে সমাধানটি সম্ভবপর অঞ্চলেরই কোন প্রান্তবর্তী বিন্দুতে অবস্থান করবে। এটিকেই বলা হবে মৌলিক সম্ভবপর সমাধান (basic feasible solution)।
- মৌলিক সম্ভবপর সমাধান জ্যামিতিক না হয়ে বীজগাণিতিক হওয়ার কারণে এটিকে m নিয়ন্ত্রণ ও n বাছাই চল বিশিষ্ট সাধারণ রৈখিক অণুক্রমে প্রসারিত করা যায়।
- সিমপ্লেক্স পদ্ধতিতে বিভিন্ন মৌলিক সম্ভবপর সমাধানগুলির জন্য লক্ষ্য অপেক্ষকটির মানগুলি নির্ধারণ করে তার মধ্যে কোনটি সর্বাধিক অনুকূল তা নির্ণয় করা হয়।
- সর্বাধিককরণ সমস্যায় স্থির-উৎসবিন্দুতে একটি প্রাথমিক মৌলিক সম্ভবপর সমাধান পাওয়া যায়।
- সর্বনিম্নকরণ সমস্যায় স্থির উৎসবিন্দু সর্বদা সম্ভবপর অঞ্চলের অন্তর্গত না হওয়ায় ঐ বিন্দুতে প্রাথমিক মৌলিক সম্ভবপর সমাধান পাওয়া যায়না। সেক্ষেত্রে কৃত্রিম চলের ব্যবহার করতে হয়।
- m নিয়ন্ত্রণ সমীকরণে ধ্রুবকগুলির ভেক্টরটি m এর চেয়ে কমসংখ্যক সহগ ভেক্টরের রৈখিক সংমিশ্রণ হিসাবে প্রকাশ করা গেলে রৈখিক অনুক্রমটিকে শ্রেণীগত মর্যাদাচ্যুত (degenerate) বলা হয়।
- শ্রেণীগত মর্যাদাচ্যুত রৈখিক অণুক্রমের ক্ষেত্রে অক্ষদণ্ডভিত্তিক ঘূর্ণনপদ্ধতি (pivoting) প্রয়োগ করে অনেক সময় লক্ষ্য অপেক্ষকটির মানের কোন উন্নতিসাধন করা যায় না। এসব ক্ষেত্রে কখন কখন বহুবার শূন্য উন্নতি ধরণের ঘূর্ণন পদ্ধতি প্রয়োগ করার পরেই জট ছাড়ে—বা লক্ষ্য অপেক্ষকের মানের উন্নতি হয়।

২.১৭ অনুশীলনী

ছোট প্রশ্ন

১। রৈখিক অনুক্রমণ পদ্ধতি কাকে বলে?

২। খাদ্য তালিকা সমস্যার মূল বিষয়টি সংক্ষেপে আলোচনা করুন।

৩। খাদ্য তালিকা সমস্যাটিকে রৈখিক অণুক্রম হিসাবে লিখে দেখান।

৪। রৈখিক অনুক্রমকে কি করে চিত্রলৈখিকভাবে সমাধান করা যায় তা সংক্ষেপে বিবৃত করুন।

৫। যথার্থ সীমাবদ্ধ অঞ্চল কাকে বলে?

৬। সাধারণ রৈখিক অনুক্রমকে ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে কিভাবে প্রকাশ করা যায় তা ম্যাট্রিক্স ও ভেক্টরগুলির আয়তন উল্লেখ করে লিখে দেখান।

৭। উত্তল সেট্ কাকে বলে?

৮। সিম্প্লেক্স পদ্ধতিতে কিভাবে সর্বাধিক অনুকূল মান নির্ণয় করা হয় তা অতিসংক্ষেপে লিখুন। [সারাংশ দ্রষ্টব্য] ।

৯। শিথিল ও উদ্বৃত্ত চল কখন ব্যবহৃত হয়?

১০। পুতুল চল কাকে বলে?

১১। মৌলিক সম্ভবপর সমাধান কাকে বলে?

১২। অক্ষদণ্ডভিত্তিক ঘূর্ণন পদ্ধতি কাকে বলে?

১৩। কৃত্রিম চল কখন ব্যবহার হয়?

১৪। শ্রেণীগত মর্যাদাচ্যুতি কাকে বলে?

১৫। পরিবহণ সমস্যার মূল বিষয়টি সংক্ষেপে আলোচনা করুন।

বড় প্রশ্ন

১। উদাহরণসহ রৈখিক অণুক্রমণ পদ্ধতিটি আলোচনা করুন।

২। একটি রৈখিক অণুক্রম নিয়ে তার চিত্রলৈখিক সমাধান কিভাবে করবে তা আলোচনা করুন।

৩। সাধারণ রৈখিক অনুক্রম কাকে বলে? সাধারণ রৈখিক অনুক্রমকে কিভাবে ম্যাট্রিক্সের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় তা বিস্তারিতভাবে আলোচনা করুন।

৪। সিমপ্লেক্স পদ্ধতিতে কিভাবে প্রান্তবর্তী বিন্দু নির্ধারণ করা হয় তা আলোচনা করুন।

৫। প্রান্তবর্তী বিন্দুগুলিকে কিভাবে ভাগ করা হয়? এগুলির বৈশিষ্ট্য উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

৬। পুতুল চল কাকে বলে? পুতুল চলের সাহায্যে কিভাবে রৈখিক অনুক্রমকে রূপান্তরিত করা যায় তা উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

৭। মৌলিক সম্ভবপর সমাধান কাকে বলে? প্রান্তবর্তী বিন্দুর সঙ্গে এর সম্পর্ক কি?

৮। অক্ষদণ্ডভিত্তিক ঘূর্ণন পদ্ধতির মাধ্যমে কিভাবে সর্বাধিক অনুকূল সমাধানে পৌঁছানো সম্ভব তা বিস্তারিত ভাবে আলোচনা করুন।

৯। কৃত্রিম চল কাকে বলে? কখন এই চলের ব্যবহার প্রয়োজন হয় তা উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

১০। পরিবহণ সমস্যাটি উদাহরণ দিয়ে বিবৃত করুন।

১১। নীচের সমস্যাদুটিকে চিত্রলৈখিকভাবে সমাধান করুন—

(ক) $\pi = 2x_1 + 5x_2$ কে সর্বাধিক করুন

যখন $x_1 \leq 4$

$x_2 \leq 3$

$x_1 + 2x_2 \leq 8$

এবং $x_1, x_2 \geq 0$

(খ) $z = 12x_1 + 42x_2$ কে সর্বনিম্ন করুন

যখন $x_1 + 2x_2 \geq 3$

$x_1 + 4x_2 \geq 4$

$3x_1 + x_2 \geq 3$

এবং $x_1, x_2 \geq 0$

১২। উপরের সমস্যাগুলিকে পুতুল চল ব্যবহার করে রূপান্তরিত করুন। এদের প্রান্তবর্তী বিন্দুগুলির সমষ্টিগুলি হল যথাক্রমে (ক) $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 0)$ এবং (খ) $(4, 0)$, $(2, {}^1/_2)$, $({}^3/_5, {}^6/_5)$, $(0, 3)$। সঠিক রূপান্তরিত নিয়ন্ত্রণগুলিতে এই মানগুলি প্রতিস্থাপন করে প্রতিটি প্রান্তবর্তী বিন্দুর জন্য si গুলির মান নির্ধারণ করুন। এবার এগুলিকে 5-আয়তন বিশিষ্ট সমাধান-অঞ্চল হিসাবে প্রকাশ করুন। [সারণি নং (২.৭) দ্রষ্টব্য]।

১৩। যথাযোগ্য পুতুল চল যোগ দিয়ে নিম্নলিখিত রৈখিক অনুক্রমগুলি সিমপ্লেক্স পদ্ধতির মাধ্যমে সমাধান করুন।

(ক) $\pi = 4x_1 + 3x_2$ কে সর্বাধিক করুন

যখন $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ এবং $x_1, x_2 \ge 0$

(খ) $\pi = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3$ কে সর্বাধিক করুন

যখন $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 19 \end{bmatrix}$

এবং $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

১৪। নীচের সমস্যাগুলিকে সিমপ্লেক্স পদ্ধতির মাধ্যমে সমাধান করুন।

(ক) $z = x_1 + 4x_2$ কে সর্বনিম্ন করুন

যখন $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$ এবং $x_1, x_2 \ge 0$

(খ) $\pi = 2x_1 + 7x_2$ কে সর্বনিম্ন করুন

যখন $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

এবং $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ [একটি মাত্র কৃত্রিম চল প্রয়োজন হবে]।

২.১৮ গ্রন্থপঞ্জী

(১) Fundamental Method of Mathematical Economics—Chiang A. C

(২) Mathemnatics for Economics—Mehta & Madnani

(৩) The Structure of Economics—Silberberg

একক ৩ □ স্থিতিশীল লিওন্টিয়েফ উপাদান-উৎপাদন মডেল (Static Leontief Input-Output Model)

গঠন

৩.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনারা জানতে পারবেন—

- স্থিতিশীল লিওন্টিয়েফ উপাদান-উৎপাদন মডেল বলতে কি বোঝানো হয়?
- উক্ত মডেলের একটি দ্বি-ক্ষেত্র বিশিষ্ট উদাহরণ।
- রৈখিক অনুক্রমণ ভিত্তিক ব্যাখ্যা।
- উৎপাদন-উপাদান মডেলের সমাধানের উপায় ও বিভিন্ন শর্ত
- বদ্ধ মডেল বলতে কি বোঝানো হয়।

৩.১ প্রস্তাবনা

উপাদান-উৎপাদন মডেল অর্থনীতিতে এ যুগের একটি নতুন সংযোজন। এর উদ্ভাবক মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রের হার্ভার্ড বিশ্ববিদ্যালয়ের ওয়াসিলি লিওন্টিয়েফের। এটি মূলতঃ শিল্পক্ষেত্রে উপাদান ও উৎপাদনের পারস্পরিক নির্ভরতার ভিত্তিতে গঠিত। আমরা লিওন্টিয়েফের অপেক্ষাকৃত সহজ মডেল অর্থাৎ স্থিতিশীল (static) বা প্রবাহ (flow) মডেলটি নিয়েই আলোচনা করব।

৩.২ উপাদান-উৎপাদন প্রবাহ সারণি (Input-Output flow tables)

লিওন্টিয়েফ যে অর্থনীতিটির কথা চিন্তা করেছেন সেখানে প্রত্যেক উৎপাদিত পণ্য (যেমন লোহা, কয়লা প্রভৃতি) তাদের নিজ নিজ শিল্পে একমাত্র প্রাথমিক উপাদান (primary factor) শ্রম ও অন্যান্য উপাদান (যেমন লোহা, কয়লা ইত্যাদি'র সাহায্য নিয়ে উৎপাদিত হচ্ছে। তাঁর মতে কোন কোন শিল্প যে উৎপাদনের প্রথম স্তরেই শুধু লাগবে এবং কোন কোন শিল্প উৎপাদনের পরবর্তী স্তরেই লাগবে তা ঠিক নয়। বাস্তব জগতে শিল্পের পারস্পরিক নির্ভরতার মধ্যে একটি আবর্ত লক্ষ্য করা যায়। কয়লা উৎপাদনের জন্য যেমন লোহার প্রয়োজন তেমন লোহা উৎপাদন করার জন্য আবার কয়লার প্রয়োজন। সুতরাং উৎপাদন পরম্পরায় লোহা আগে না কয়লা আগে তা নিশ্চিত ভাবে বলা যাবেনা। তাই শ্রম ছাড়া কোন প্রাথমিক উপাদান কল্পনা করা হয়নি।

৩.৩ একটি দ্বিক্ষেত্র বিশিষ্ট উদাহরণ (Two-sector example)

লিওন্টিয়েফ মডেলটি পরিষ্কারভাবে বুঝবার জন্য প্রথমে একটি অতি সরলীকৃত অর্থনীতিকে নেওয়া হচ্ছে যেখানে মাত্র দুটি উৎপাদন ক্ষেত্র আছে—কৃষি (agriculture) ও শিল্প (manufacturing)। এর প্রতিটি ক্ষেত্রেই উৎপাদন প্রক্রিয়াতে একমাত্র প্রাথমিক উপাদান শ্রম সরাসরি প্রয়োজন হচ্ছে। তাছাড়া প্রতিটিই অন্যের উৎপাদনকে নিজের উপাদান হিসাবে ব্যবহার করছে। সারণি নং (৩.১) এ প্রত্যেকের ক্ষেত্রভিত্তিক নির্দিষ্ট প্রয়োজন ও মোট উৎপাদন বিবৃত করা হল।

সারণি ৩.১

ক্ষেত্রভিত্তিক উপাদান প্রয়োজনীয়তা এবং মোট উৎপাদন

উৎপাদন ক্ষেত্র	কৃষিতে উপাদান	শিল্পে উপাদান	চূড়ান্ত চাহিদা	মোট উৎপাদন
কৃষি	25	175	50	250
শিল্প	40	20	60	120
শ্রম	10	40	0	50

সারণি নং (৩.১) এর প্রথম সারিতে কৃষিক্ষেত্রের মোট উৎপাদন কিভাবে বিভিন্ন ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হচ্ছে তা বিবৃত করা হয়েছে। কৃষিক্ষেত্র তার মোট উৎপাদন থেকে নিজে 25 একক উপাদান হিসাবে ব্যবহার করছে। 175 একক শিল্পকে উপাদান হিসাবে দিচ্ছে এবং চূড়ান্ত চাহিদা পূরণের জন্য 50 একক দিচ্ছে। এইভাবে তার মোট উৎপাদন 250 একক সম্পূর্ণ খরচ হয়ে যাচ্ছে। একইভাবে দ্বিতীয় সারিতে শিল্পক্ষেত্রের মোট উৎপাদন ও তৃতীয় সারিতে মোট শ্রম কিভাবে বিভিন্ন প্রয়োজনে ব্যয় হচ্ছে তা দেখানো হল। শ্রমের কোন চূড়ান্ত চাহিদা নেই, কারণ শ্রম উপাদান হিসাবেই ব্যবহৃত হয়—কোন ভোক্তা সরাসরি শ্রম কেনেন না। বিভিন্ন ক্ষেত্রের উৎপাদনগুলি বিভিন্ন এককে পরিমাপ করা হয়েছে। এগুলি সবই প্রবাহ (flow) অর্থাৎ বার্ষিক বাস্তব (physical) একক। শ্রমে হাজার শ্রমদিবস, কৃষিপণ্যে দশহাজার টন এবং শিল্পপণ্যে হাজার ডজনকে একক ধরা হয়েছে। যেহেতু একই সারির সবকটি উপাদান একই এককে পরিমাপ করা হচ্ছে তাই সারি বরাবর যোগ করা সম্ভব। মোট উৎপাদনের স্তম্ভটি থেকে সামগ্রিক শ্রম উপাদান ও প্রতিটি পণ্যের মোট উৎপাদনের হিসাব পাওয়া যাচ্ছে। যেকোন একটি স্তম্ভ বরাবর লিপিবদ্ধ মানগুলি অভিন্ন এককে পরিমাপ করা হয় তাই সেগুলিকে যোগ করা

অসম্ভব। তবুও প্রতিটি স্তম্ভকে একটি ভেক্টর হিসাবে ধরলে তার একটি অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা দেওয়া যায়। প্রথম স্তম্ভটি কৃষিক্ষেত্রের 250 একক উৎপাদন করতে প্রয়োজনীয় উপাদান কি কি এবং কতটা তা নির্দেশ করছে। একইভাবে দ্বিতীয় স্তম্ভে 120 একক তৈরি করতে শিল্পের প্রয়োজনীয় উপাদান কি কি এবং কতটা করে তা নির্দেশ করা হয়েছে এবং তৃতীয় স্তম্ভে কৃষি ও শিল্পপণ্যের জন্য চূড়ান্ত চাহিদা কতটা তা দেখানো হয়েছে। এই চূড়ান্ত চাহিদা ভোগ (consumption) ও সরকারি ব্যয় (government expenditure) হিসাবে ব্যবহৃত হবে। এইখানে ধরে নেওয়া হচ্ছে যে শ্রম সরাসরি ভোগ করা হয়না তাই শ্রমের চূড়ান্ত চাহিদা শূন্য।

৩.৪ প্রযুক্তি সম্পর্কে ধারণা (Technological assumptions)

সারণি নং (৩.১) কে বর্ণনামূলক থেকে বিশ্লেষণোপযোগী করার জন্য উৎপাদন অপেক্ষকগুলি জানা আবশ্যক। ধরা যাক কৃষিকে শিল্প ১ এবং শিল্পকে শিল্প ২ বলা হচ্ছে। শ্রমকে এক্ষেত্রে 0 (শূন্য) দ্বারা চিহ্নিত করা হচ্ছে। এবার তাহলে সারণি নং (৩.১) সারণি নং (৩.২) এ পরিণত হবে।

সারণি ৩.২

ক্ষেত্রভিত্তিক উপাদান প্রয়োজনীয়তা ও মোট উৎপাদনের সাধারণ রূপ

	শিল্প- ১	শিল্প- ২	চূড়ান্ত চাহিদা	শিল্পের মোট উৎপাদন
শিল্প- ১	x_{11}	x_{12}	c_1	x_1
শিল্প- ২	x_{21}	x_{22}	c_2	x_2
শ্রমসেবা (labour services)	x_{01}	x_{02}		x_0

এখানে x_{ij} বলতে iতম $(i = 0, 1, 2)$ ক্ষেত্র থেকে jতম $(j = 1, 2)$ শিল্পে কতটা উপাদান প্রয়োজন হচ্ছে তাই নির্দেশ করা হচ্ছে। শ্রমকে 0 দিয়ে চিহ্নিত করার ফলে jতম শিল্পে কতটা শ্রমের দরকার তা বোঝাতে x_{0j} $(j = 1, 2)$ ব্যবহার করা হচ্ছে। c_1, c_2, হল যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় শিল্পের পণ্যের চূড়ান্ত

চাহিদা। x_1, x_2 হল যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় শিল্পের মোট উৎপাদনের পরিমাণ। x_0 হল মোট শ্রমের পরিমাণ।

এই সারণিটির একেকটি স্তম্ভের সবকটি লিপিবদ্ধ মানই একই উৎপাদন অপেক্ষকের উপাদান। তাই আমরা উৎপাদন অপেক্ষকগুলিকে

$$\left.\begin{array}{ll}\text{যথাক্রমে} & x_1 = F'(x_{11}, x_{21}, x_{01}) \\ \text{এবং} & x_2 = F^2(x_{12}, x_{22}, x_{02})\end{array}\right\} \quad (৩.১)$$

লিখতে পারি কারণ x_1 ও x_2 হল মোট উৎপাদন।

আবার সারি বরাবর যোগ করে

$$\left.\begin{array}{l}x_{11} + x_{12} + c_1 = x_1 \\ x_{21} + x_{22} + c_2 = x_2 \\ \text{এবং } x_{01} + x_{02} = x_0\end{array}\right\} \quad (৩.২)$$

x_{11} = শিল্প ১ থেকে শিল্প ১এ যে উপাদান যাচ্ছে।

x_{12} = শিল্প ১ থেকে শিল্প ২এ যে উপাদান যাচ্ছে।

c_1 = শিল্প ১ থেকে চূড়ান্ত চাহিদা পূরণের জন্য যা অবশিষ্ট থাকছে। শিল্প ১ এর মোট উৎপাদন থেকে শিল্প ১ ও শিল্প ২ এর উপাদানের প্রয়োজন মিটিয়ে যা পড়ে থাকবে তাই চূড়ান্ত চাহিদা পূরণ করবে। সুতরাং $(x_{11} + x_{12} + c_1)$ কে x_1 এর সমান হতেই হবে। ঠিক একইভাবে দ্বিতীয় সমীকরণটিকে শিল্প ২ এর জন্য ব্যাখ্যা করা যায়। শ্রমের চূড়ান্ত চাহিদা না থাকার ফলে শ্রমসেবা কেবলমাত্র প্রথম ও দ্বিতীয় শিল্পের উপাদান হিসাবেই ব্যবহৃত হয়। অতএব $x_{01} + x_{02} = x_0$) ।

এবার সারণি নং (৩.১) দেখলে আমরা বলতে পারি যে $250 = F'(25, 40, 10)$ এবং $120 = F^2(175, 20, 40)$। যদি মাত্রাগত সমহার প্রতিদান (Constant returns to scale) আছে বলে ধরে নেওয়া হয় তাহলে আমরা বলতে পারি যে সবকটি উপাদান দ্বিগুণ করলে উৎপাদনও দ্বিগুণ হবে। তার মানে $F'(50, 80, 20) = 500$ এবং $F^2(350, 40, 80) = 240$। আবার সমস্ত উপাদানকে $^1/_5$ গুণ করলে উৎপাদনও $^1/_5$ গুণ হয়ে যাবে। তার মানে $F'(5, 8, 2) = 50$ এবং $F^2(35, 4, 8) = 24$। এছাড়া ধরে নেওয়া যায় যে সমোৎপাদন রেখাগুলি উত্তল (convex) অর্থাৎ সাধারণভাবে ক্রমহ্রাসমান প্রান্তিক প্রযুক্তিগত প্রতিদান (diminishing marginal rate of technical substitution) আছে।

লিওন্টিয়েফের মডেলে উপরের দুটি ধারণাই রয়েছে। এর উপরে লিওন্টিয়েফের মডেলে উৎপাদনের স্থির

সহগ (fixed coefficient of production) আছে বলে ধরে নেওয়া হয়েছে। তার মানে উনি ধরে নিয়েছেন যে প্রতিটি পণ্যের প্রতি একক উৎপাদনে প্রতিটি পণ্যের একটি নির্দিষ্ট লঘিষ্ঠ (minimal) পরিমাণ (এটি শূন্যও হতে পারে) উপাদান প্রয়োজন। এখানে লঘিষ্ঠ (minimal) কথাটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। যদি 1টন লোহা উৎপাদনের জন্য 2 ton আকরিক লোহা প্রয়োজন হয় তাহলে তার বেশি আকরিক লোহা দিয়েও নিশ্চয় 1টন লোহা উৎপাদন করা যাবে কিন্তু যতক্ষণ পর্যন্ত আকরিক লোহার ধনাত্মক মূল্য থাকবে ততক্ষণ পর্যন্ত কেউ নিশ্চয়ই নিতান্তই আবশ্যিক পরিমাণ 2 টনের বেশি ব্যবহার করবে না।

ধরা যাক a_{ij} = jতম পণ্যের উৎপাদনে iতম পণ্যের লঘিষ্ঠ প্রয়োজন। এক্ষেত্রে $i = 0, 1, 2$ এবং $j = 1, 2$।

$$\left.\begin{aligned} \text{তাহলে } x_1 &= \min\left(\frac{x_{11}}{a_{11}}, \frac{x_{21}}{a_{21}}, \frac{x_{01}}{a_{01}}\right) \\ \text{এবং } x_2 &= \min\left(\frac{x_{12}}{a_{12}}, \frac{x_{22}}{a_{22}}, \frac{x_{02}}{a_{02}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (৩.৩)$$

$$\frac{x_{11}}{a_{11}} = \frac{\text{শিল্প-১ এ প্রথম পণ্যের মোট উপাদান}}{\text{শিল্প-১ এ প্রথম পণ্যের এককপ্রতি প্রয়োজন}}$$

তার মানে ভগ্নাংশটি থেকে x_1 কত হতে পারে তা নির্ধারণ করা যায়। একইভাবে প্রথম শিল্পে ব্যবহৃত দ্বিতীয় পণ্য কতটা x_1 দিতে পারে তা $\frac{x_{21}}{a_{21}}$ থেকে জানা যাবে। ঐ ক্ষেত্রে ব্যবহৃত শ্রম কতটা x_1 দিতে পারে তা $\frac{x_{01}}{a_{01}}$ থেকে নির্ধারণ করা যায়। এই তিনটির মধ্যে সর্বনিম্নটিই হবে x_1 এর প্রকৃত উৎপাদন। একইভাবে (৩.৩) এর দ্বিতীয় উৎপাদন অপেক্ষকটিকেও ব্যাখ্যা করা যায়। কোন a_{ij} যদি শূণ্য হয় তাহলে $x_{ij} / a_{ij} + 2$ হবে এবং কখনোই সর্বনিম্ন হবেনা। সুতরাং সেক্ষেত্রে ওটিকে উৎপাদন অপেক্ষকের অন্তর্ভুক্ত না করলেও চলবে।

$\frac{x_{11}}{a_{11}}$, $\frac{x_{21}}{a_{21}}$ এবং $\frac{x_{01}}{a_{01}}$ এই তিনটি ভগ্নাংশের সবচেয়ে ছোটটির সমান বলে ধরে নেওয়া যায় যে

$$x_1 \le \frac{x_{11}}{a_{11}}$$

$$x_1 \le \frac{x_{21}}{a_{21}}$$

$$x_1 \le \frac{x_{01}}{a_{01}}$$

সাধারণভাবে লিখলে $x_j \le x_{ij}/a_{ij}$ অথবা বিস্তারিতভাবে

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} \geq a_{11}x_1,\ x_{21} \geq a_{21}x_1,\ x_{01} \geq a_{01}x_1 \\ x_{12} \geq a_{12}x_2,\ x_{22} \geq a_{22}x_2,\ x_{02} \geq a_{02}x_2 \end{array}\right\} \quad (৩.৪)$$

এখানে প্রতিটি সারিতে অন্তত একটি সমতা থাকবে।

এই ধরণের সঙ্কীর্ণ ধারণাগুলির কারণে সারণি নং (৩.১) এর প্রবাহ তথ্য (flow-data) আমাদের অর্থনীতিটির প্রযুক্তিকে সবিস্তারে বর্ণনা করতে পারছে। যদি ধরা যায় যে কোন পণ্যই বিনামূল্যে পাওয়া যায়না তাহলে সারণি (৩.১) এর প্রথম স্তম্ভের প্রতিটি উপাদানকে প্রথম সারির যোগফল এবং দ্বিতীয় স্তম্ভের প্রতিটি উপাদানকে দ্বিতীয় সারির যোগফল দিয়ে ভাগ করে ($x_{ij}/x_j = a_{ij}$ ধরে) আমরা সারণি নং (৩.৩) পাব।

সারণি ৩.৩

ক্ষেত্রভিত্তিক একক প্রতি উপাদান প্রয়োজনীয়তা ও মোট উৎপাদন

	শিল্প- ১ এর উপাদান	শিল্প- ২ এর উপাদান	চূড়ান্ত চাহিদা	শিল্পের মোট উৎপাদন
শিল্প- ১	0.10	1.46	50	250
শিল্প- ২	0.16	0.17	60	120
শ্রমসেবা	0.04	0.33	—	50

সারণি নং (৩.৩) থেকে বলা যায় যে প্রথম পণ্যের এক একক তৈরি করতে 0.10 একক প্রথম পণ্য, 0.16 একক দ্বিতীয় পণ্য এবং 0.04 একক শ্রমসেবা লাগছে। একইভাবে দ্বিতীয় পণ্যের এক একক তৈরি করতে প্রথম পণ্যের 1.46 একক, দ্বিতীয় পণ্যের 0.17 একক এবং শ্রমসেবার 0.33 একক লাগবে।

সাধারণভাবে যদি সারণি নং (৩.২) কে সারণি (৩.১) এর মত করে পরিবর্তিত করা যায় তাহলে তার থেকে সারণি নং (৩.৪) পাওয়া যাবে।

সারণি ৩.৪

ক্ষেত্রভিত্তিক একক প্রতি উপাদান প্রয়োজনীয়তা ও মোট উৎপাদনের সাধারণ রূপ

	শিল্প- ১ এর উপাদান	শিল্প- ২ এর উপাদান	চূড়ান্ত চাহিদা	মোট উৎপাদন
শিল্প- ১	a_{11}	a_{12}	c_1	x_1
শিল্প- ২	a_{21}	a_{22}	c_2	x_2
শ্রমসেবা	a_{01}	a_{02}		x_0

৩.৫ রৈখিক অনুক্রমণভিত্তিক ব্যাখ্যা (Linear Programming interpretation)

এই উৎপাদন মডেলটিকে রৈখিক অনুক্রমণ হিসাবেও ব্যাখ্যা করা যায়। সারণি নং (৩.৩) এর প্রথম স্তম্ভ থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রথম শিল্পটির এক এবং একটিই উৎপাদন পদ্ধতি আছে যাতে এক একক উৎপাদন করতে প্রথম পণ্যের 0.10 একক, দ্বিতীয় পণ্যের 0.16 একক এবং শ্রমসেবার 0.04 একক লাগছে। যতক্ষণ পর্যন্ত যথেষ্ট উপাদান পাওয়া যাবে ততক্ষণ পর্যন্ত পদ্ধতিটিকে যে কোন হারে বাড়িয়ে যাওয়া যায়।

এই পদ্ধতিটিকে একটু অন্যভাবে বললে বলা যায় যে এটির 'নীট (net) উৎপাদন 0.90 একক (মোট উৎপাদন 1 একক থেকে প্রয়োজনীয় উপাদান 0.10 একক বিয়োগ করে) এবং উপাদানগুলি হল 0.16 একক দ্বিতীয় পণ্য ও 0.04 একক শ্রমসেবা। উৎপাদনের যে স্তরে 'নীট' উৎপাদন 1 একক তাকে আমরা পদ্ধতির একক স্তর ক্রিয়া (unit-level-operation) বলব। এটি পাওয়ার জন্য তাহলে উৎপাদন ও উপাদানগুলিকে 10/9 গুণ বৃদ্ধি করতে হবে। এর ফলে 'নীট' উৎপাদন 1 একক হয়ে যাবে। নীচে এই বিষয়টি পরিষ্কার করে দেখানো হল।

মোট উৎপাদন আগে ছিল 1 । এখন তাহলে মোট উৎপাদন হবে $1 \times \frac{10}{9} = \frac{10}{9}$ । 1 একক মোট উৎপাদনের জন্য প্রথম পণ্যের 0.10 একক উপাদান হিসাবে ব্যবহৃত হয়। অতএব $\frac{10}{9}$ একক মোট

উৎপাদনের জন্য উপাদান হিসাবে প্রথম পণ্যের $\left\{ \frac{10}{9} \times (0.10) \right\} = \frac{1}{9}$ একক প্রয়োজন হবে।

সেক্ষেত্রে 'নীট' উৎপাদন হবে $\left(\frac{10}{9} - \frac{1}{9} \right) = 1$ ।

এবার উপাদান হিসাবে দ্বিতীয় পণ্যের $\left\{ (0.16) \times \frac{10}{9} \right\} = 1.78$ একক প্রয়োজন হবে এবং শ্রমসেবার $\left\{ (0.04) \times \frac{10}{9} \right\} = .044$ একক প্রয়োজন হবে।

একইভাবে সারণি নং (৩.৩) এর দ্বিতীয় স্তম্ভ থেকে দ্বিতীয় শিল্পের ক্ষেত্রেও উপরের পদ্ধতিটি প্রয়োগ করে এক একক নীট উৎপাদন স্তরে প্রয়োজনীয় উপাদানগুলি নির্ণয় করা যায়। এখানে মূল নিয়ন্ত্রণটি হল শ্রমসেবা যা মোট 50 এককের বেশি লভ্য নয়।

এখানে এবার একটি সহজ রৈখিক অনুক্রমণ সমস্যা পাওয়া যাচ্ছে। এখানে প্রতিটি পণ্য উৎপাদন করার জন্য একটি করেই পদ্ধতি আছে—তাই বিভিন্ন পদ্ধতি থেকে বাছাই করার কোন প্রশ্নই আসেনা। যদি প্রতিটি পণ্যই চূড়ান্ত চাহিদা তালিকার অন্তর্ভুক্ত হয় নয়তো উপাদান হিসাবে প্রয়োজন হয় তাহলে প্রতিটি পণ্যই উৎপাদন করতে হবে।

এর অর্থ হল প্রতিটি উৎপাদন পদ্ধতিই ব্যবহার করতে হবে। যেক্ষেত্রে মূল সমস্যাটি হবে পদ্ধতিগুলি ঠিক কি কি মাত্রায় ব্যবহৃত হবে তা নির্ণয় করা।

সারণি নং (৩.৪) এর a_{ij} সহগগুলির উপরে একটি নিয়ন্ত্রণ আরোপিত আছে। কোন প্রযুক্তিকে টিকে থাকার জন্য যা একান্ত আবশ্যক তা হল প্রত্যেকেরই 1 একক উৎপাদন করার জন্য তার নিজের পণ্যের 1 এককের চেয়ে কম উপাদান হিসাবে প্রয়োজন হওয়া। এর অন্যথা হলে 'নীট' উৎপাদন ঋণাত্মক হয়ে যাবে এবং সেক্ষেত্রে উৎপাদন প্রক্রিয়াটি চালিয়ে যাওয়াই অর্থহীন হবে কারণ তাতে পণ্যটির প্রাথমিক সঞ্চয়ই কমে যাবে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে যদি 1টন কয়লা উৎপাদন করতে 1 টনের চেয়ে বেশি কয়লা লাগে তাহলে নতুন কয়লা উৎপন্ন তো হবেই না বরঞ্চ আগেকার সঞ্চিত কয়লার ভাণ্ডার ক্রমশঃ শূন্য হবে। সারণি নং (৩.৪) এর পরিপ্রেক্ষিতে বলতে গেলে a_{11} এবং a_{22} দুটিকেই 1 এর চেয়ে কম হতে হবে কারণ তা নাহলে প্রথম ও দ্বিতীয় শিল্পের 'নীট' উৎপাদন যথাক্রমে $(1 - a_{11})$ এবং $(1 - a_{22})$ ঋণাত্মক হয়ে যাবে। এখানে লক্ষণীয় যে সারণি নং (৩.১) বা (৩.২) থেকে যদি সারণি নং (৩.৩) বা (৩.৪) নির্ণয় করা যায় তাহলে বেঁচে থাকার শর্তটি (Viability condition) আপনা আপনিই সন্তুষ্ট হচ্ছে। গাণিতিক নিয়মে এই সারণিগুলির কর্ণ বরাবর উপাদানগুলি তাদের নিজ নিজ সারির যোগফলের চেয়ে কম। ফলস্বরূপ প্রতিটি সারির যোগফলকে

সেই সারির কর্ণ বরাবর যে উপাদানটি আছে তা দিয়ে ভাগ করলে সর্বদাই $a_{11} < 1$ হবে। তার মানে যদি বর্তমান সঞ্চয়কে বাদ দেওয়া যায় তাহলে যে কোন অর্থনীতিকে এই অর্থে উৎপাদনশীল (productive) হতে হবে।

৩.৬ সম্ভবপর চূড়ান্ত চাহিদা (Feasible final demand)

রৈখিক অণুক্রমে (৩.২) এর সমীকরণগুলির রূপান্তরিত রূপ নীচে দেওয়া হল।

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + c_1 &\le x_1 \\ x_{21} + x_{22} + c_2 &\le x_2 \\ x_{01} + x_{02} &\le x_0 \end{aligned}\right\} \qquad (৩.২')$$

আগে ধরা হয়েছিল যে সম্পূর্ণ x_1ই প্রথম শিল্পে উপাদান, দ্বিতীয় শিল্পে উপাদান এবং চূড়ান্ত চাহিদা হিসাবে ব্যবহৃত হচ্ছে। সেই কারণেই x_1 কে এই তিনটির যোগফল হিসাবে লেখা হয়েছিল। এবার আমরা ধরে নেব যে x_1 হল প্রথম পণ্যের মোট উৎপাদন। তাই এবার = চিহ্নের বদলে ≤ চিহ্ন লেখা হচ্ছে। তার মানে যে মোট উৎপাদন পাওয়া যাচ্ছে তা তার সবরকম সম্ভাব্য ব্যবহারের যোগফলের থেকে কম হতে পারে না—সমান অথবা বড় হবে।

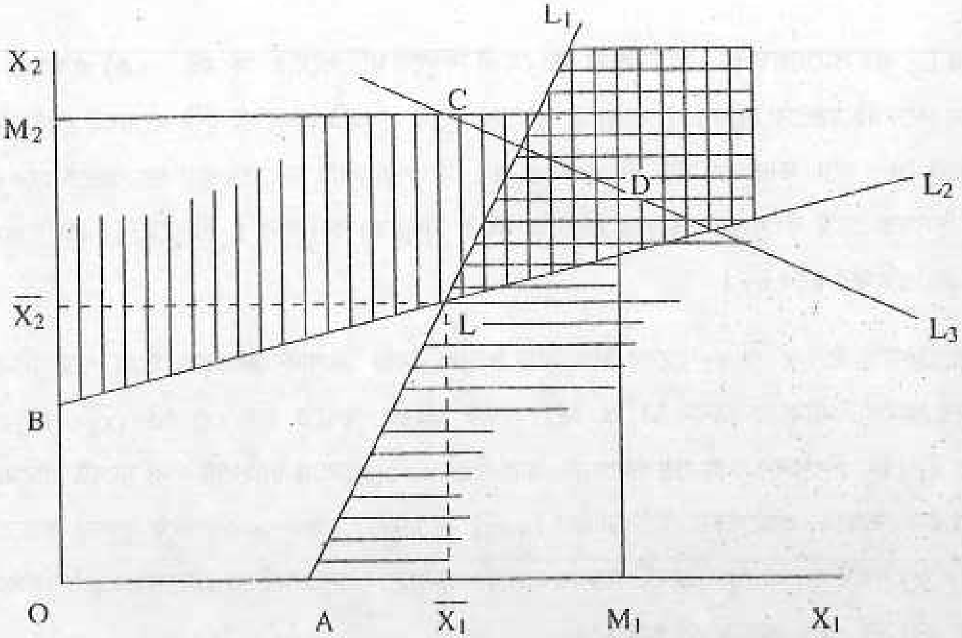
x_1 বা x_2 উৎপাদনের যে স্তরই হোক না কেন x_1 থেকে $a_{11}x_1$ প্রথম শিল্পে এবং $a_{12}x_2$ দ্বিতীয় শিল্পে ব্যবহৃত হবে [সারণি নং (৩.৪) দ্রষ্টব্য]। তার মানে $(x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)$ বাকি থাকছে। অতএব এই অবশিষ্ট অংশটি অন্ততঃ c_1 এর সমান হবে। এই একইভাবে $(x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)$ অংশটি অন্ততঃ c_2 এর সমান হবে। তাছাড়া শ্রমসেবার মোট চাহিদা $(a_{01}x_1 + a_{02}x_2)$ লভ্য শ্রমসেবা x_0 এর থেকে ছোট অথবা তার সমান হতে হবে। তার মানে

$$\left.\begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &\ge c_1 \\ a_{21}x_1 - (1 - a_{22})x_2 &\ge c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (৩.৫)$$

$$a_{01}x_1 + a_{02}x_2 \le x_0 \qquad (৩.৬)$$

এবার ধরা যাক বাজার প্রক্রিয়ার মাধ্যমে সমাজে মোট চাহিদা c_1 এবং c_2 দেওয়া আছে। এবার প্রশ্ন হল এই সংমিশ্রণটি কি উৎপাদন করা সম্ভব? সেজন্য মোট লভ্য শ্রমসেবা এতটা উৎপাদন করতে সক্ষম কিনা

এবং শিল্পদুটির মোট উৎপাদন ক্ষমতা কতটা তা দেখতে হবে। প্রথমে দেখা যাক c_1 এবং c_2 এর জন্য মোট x_1 ও c_2 এর জন্য মোট x_1 ও x_2 উৎপাদন কত হওয়া দরকার।



রেখাচিত্র ৩.১

উপরের রেখাচিত্র নং (৩.১) এর অনুভূমিক অক্ষে x_1 ও উল্লম্ব অক্ষে x_2 পরিমাপ করা হচ্ছে। $(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = c_1$ সরলরেখাটি L_1 হিসাবে আঁকা হয়েছে। L_1 বরাবর এবং তার ডানদিকের R_1(অনুভূমিক সরলরেখা দ্বারা ছায়াবৃত) অঞ্চলে $\geq$ চিহ্নটি সন্তুষ্ট হবে। $OA = \frac{c_1}{1-a_{11}}$ [OA ধনাত্মক কারণ $(1 - a_{11})$ ধনাত্মক]। L_1 রেখার ঢাল $\frac{dx_2}{dx_1} = \left(\frac{1-a_{11}}{a_{12}}\right)$। $a_{12} > 0$ হলে এটিও ধনাত্মক। $a_{12} = 0$ হলে $\frac{dx_2}{dx_1} = \alpha$ হবে এবং L_1 উল্লম্ব সরলরেখা হবে।

এখানে কেবলমাত্র ধনাত্মক পাদটি আঁকা হয়েছে কারণ ঋণাত্মক পাদ এক্ষেত্রে অর্থপূর্ণ নয়। L_2 সরলরেখা বরাবর $-a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 = c_2$ এবং R_2 (উল্লম্ব সরলরেখা দ্বারা ছায়াবৃত) অঞ্চলে এর অসমতাটি সন্তুষ্ট হবে। $OB = \frac{c_2}{1-a_{22}}$ এবং L_2 এর ঢাল হল $\frac{a_{21}}{1-a_{22}}$ । যে মোট উৎপাদনগুলি c_1 এবং c_2 উভয়কেই উৎপন্ন করতে সক্ষম হয় সেগুলি উভয় ছায়াবৃত অঞ্চলেই থাকবে। L_1ও L_2 এর সংযোগস্থল L থেকে বাইরের দিকে যে শঙ্কু-আকৃতির (খোপকেটি ছায়াবৃত) অঞ্চলটি বেরিয়ে গেছে সেটি। এই অঞ্চলের অন্তর্গত যে কোন

মোট উৎপাদন স্তরের জন্য সমাজটি যথাক্রমে c_1 ও c_2 পরিমাণ প্রথম ও দ্বিতীয় পণ্যদুটি ভোগ করতে পারবে।

L_1 ও L_2 এর সংযোগস্থল L এর বৈশিষ্ট্য হল যে ঐ বিন্দুতে দুটি পণ্যের ক্ষেত্রেই (৩.৫) এ সমতা থাকবে এবং কোন পণ্যেরই অপচয় হবেনা। L ছাড়া ঐ অঞ্চলের বাকি সবকটি বিন্দুতেই দুটি পণ্যেরই মোট উৎপাদন L এর থেকে বেশি হবে। তার অর্থ 'নীট' উৎপাদন c_1 ও c_2 উৎপন্ন করার সবচেয়ে কার্যকর পদ্ধতি হবে যেখানে এর সঙ্গে সুসঙ্গত মোট উৎপাদন সবচেয়ে ছোট অর্থাৎ L বিন্দুতে। ধরা যাক L বিন্দুতে x_1 এর পরিমাণ $\overline{x_1}$ এবং x_2 এর পরিমাণ হবে $\overline{x_2}$ ।

এবার দেখতে হবে x_1 ও x_2 তাদের নিজ নিজ শিল্পের মোট উৎপাদন ক্ষমতার মধ্যে পড়ে কিনা। ধরা যাক তাদের ক্ষমতার সীমা যথাক্রমে M_1 ও M_2। এবার তাহলে দেখতে হবে $\overline{x_1} \leq M_1$ ($\overline{x_2} \leq M_2$) কিনা। তা নাহলে $\overline{x_1}$ ($\overline{x_2}$) উৎপাদন করা সম্ভব হবেনা। তার মানে $c_1(c_2)$ চূড়ান্ত চাহিদার জন্য যথেষ্ট পরিমাণ পণ্য পাওয়া যাবেনা। তাছাড়া শ্রমসেবার মোট চাহিদা ($a_{01}\overline{x_1} + a_{02}\overline{x_2}$) কেও x_0 এর সঙ্গে তুলনা করতে হবে। যদি শর্ত (৩.৬) সন্তুষ্ট হয় তবে অনুক্রমটি সম্ভবপর হবে। তা নাহলে অনুক্রমটিতে শ্রমসেবার চাহিদা অতিরিক্ত হয়ে যাবে এবং তা পূরণ করা সম্ভব হবে না।

চিত্রলৈখিকভাবে দেখলে নিয়ন্ত্রণ $\overline{x_1} \leq M_1$ হবে একটি উল্লম্ব সরলরেখা ও তার বাঁদিকের অংশটি $\overline{x_2} \leq M_2$ হবে একটি অনুভূমিক সরলরেখা ও তার নীচের অংশটি। শ্রমসেবা নিয়ন্ত্রণ (৩.৬) বা $a_{01}x_1 + a_{02}x_2) \leq x_0$ হবে একটি নিম্নগামী সরলরেখা এবং তার থেকে স্থির উৎসবিন্দুর দিকে অবস্থিত অঞ্চলটি। [এটিকে রেখাচিত্র নং (৩.১) এ L_3 হিসাবে দেখানো হল।] তার মানে সম্ভবপর মোট উৎপাদনের অঞ্চলটি হবে রেখাচিত্র (৩.১) এ OM_2CDM_1 বহুভুজটি। যদি রেখাচিত্র নং (৩.১) এর মত Lবিন্দুটি ঐ বহুভুজটির ভিতরে থাকে তাহলে নির্দিষ্ট চূড়ান্ত চাহিদা পূরণ করা সম্ভব হবে। L যদি ঐ বহুভুজটির বাইরে থাকে তাহলে অতবড় পরিমাণ চূড়ান্ত চাহিদা পূরণ করার ক্ষমতা সেই সমাজের থাকবেনা। আবার যদি রেখাচিত্র (৩.১) এর মত L সম্ভবপর অঞ্চলের যথার্থ (strictly) ভিতরে থাকে তাহলে দুটি উপাদানকেই L এর থেকে বাড়িয়ে দেওয়া যায় এবং তার ফলে চূড়ান্ত চাহিদা c_1 এবং c_2 উভয়কেই বাড়ানো যাবে।

এবার প্রশ্ন উঠতে পারে L এর মত কোন বিন্দুর অস্তিত্ব নিয়ে। রেখাচিত্র নং (৩.১) এর থেকে বলা যায় যে যদি L_1 ও L_2 সরলরেখাদুটি সমান্তরাল হত তাহলে L এর মত কোন সংযোগস্থল পাওয়া যেত না। এমনকি যদি L_2 এর ঢাল L_1 এর ঢালের চেয়ে বড় হত তাহলে সরলরেখাদুটি ক্রমশঃ পরস্পরের থেকে দূরে সরে যেত এবং কোন সংযোগস্থল পাওয়া যেতনা। এই সবক্ষেত্রে L পাওয়া না গেলে শঙ্কু আকৃতির যে অঞ্চলটি পাওয়া

যাচ্ছিল তাও আর পাওয়া যাবেনা। তার মানে R_1 ও R_2 অঞ্চল দুটির কোন সাধারণ (common) বিন্দু থাকবেনা। তার মানে (৩.৫) অর্থপূর্ণ ধনাত্মক উৎপাদনের জন্য সন্তুষ্ট হবেনা। এর ফলস্বরূপ (৩.৫) কোন ধনাত্মক চূড়ান্ত চাহিদার জন্য সন্তুষ্ট হবেনা। তার মানে কোন চূড়ান্ত চাহিদা উৎপাদন করাই সম্ভব হবেনা।

৩.৭ হকিন্স-সিমন্স শর্ত (Hawkins-Simons condition)

উপরের আলোচনা থেকে স্পষ্ট বোঝা যাচ্ছে যে L এর মত কোন বিন্দু যাতে অবশ্যই থাকে সেটা আমাদের নিশ্চিত করতে হবে। L এর অস্তিত্ব থাকার জন্য L_2 এর ঢাল L_1 এর ঢালের থেকে ছোট হওয়া আবশ্যক। তার মানে

$$\frac{a_{21}}{1-a_{22}} < \frac{1-a_{11}}{a_{12}}$$

অথবা $(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ (৩.৭)

এটিকে ছকের মাধ্যমেও প্রকাশ করা যায়। ছকটি হবে

$$\begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21}, & 1 - a_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad (৩.৭^{\prime})$$

এটির বিস্তারিত ব্যাখ্যা নীচে দেওয়া হল। আমরা আগেই দেখেছি যে কোন পণ্যের এক একক উৎপাদনের জন্য তার নিজের পণ্যের এক এককের বেশি উপাদান হিসাবে ব্যবহার করা যাবেনা। (৩.৭) এবং (৩.৭´) থেকে এটাও সুনিশ্চিত করা যাচ্ছে যে যদি আমরা এক একক কোন পণ্য উৎপাদনের জন্য তার নিজের পণ্যের উপাদান হিসাবে প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষ ব্যবহারের পরিমাপ করি তাও এক এককের চেয়ে কম হবে। প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষ ব্যবহারের উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যেমন একটন কয়লা উৎপাদনের জন্য প্রত্যক্ষ কয়লা, কয়লা উৎপাদনের জন্য কয়লা, কয়লা উৎপাদনের জন্য প্রয়োজনীয় ইস্পাত তৈরির জন্য কয়লা ইত্যাদি। তার মানে একটন কয়লা উৎপাদনের জন্য প্রত্যক্ষভাবে ও পরোক্ষভাবে মিলে কখনোই একটনের বেশি কয়লা উপাদান হিসাবে ব্যবহার হবেনা। (৩.৭´) এবং $1 - a_{11} > 0$, $1 - a_{22} > 0$ একত্রে হকিন্স-সিমন্স শর্তটি তৈরি করছে। এটিকে বহুপণ্য বিশিষ্ট অর্থনীতির জন্যও প্রসারিত করা যায় —সেক্ষেত্রে ছকটি বড় হবে। এই শর্তটি পূরণ করলে তবেই অর্থনীতিটি স্বয়ম্ভর হবে।

৩.৮ উপাদান-উৎপাদন মডেলের সমাধান (Solution of an Input-Output model)

ধরা যাক আমরা যে মডেলটি নিয়ে আলোচনা করব তাতে nটি শিল্প আছে এবং একটি মুক্তক্ষেত্র (open sector) আছে। এই মুক্তক্ষেত্রটি হল গৃহস্থালি (household) ক্ষেত্র যেখান থেকে চূড়ান্ত চাহিদা বহির্নির্নীতভাবে মডেলটিতে প্রবেশ করছে এবং তারা প্রাথমিক উপাদান শ্রমসেবা যোগান দিচ্ছে। যেহেতু শ্রমসেবা n শিল্পের কোনোটিতেই তৈরি হচ্ছে না তাই এটিকে মুক্ত মডেল (open-model) বলা হবে। n শিল্পের জন্য উপাদান সহগ (input-coefficient) ম্যাট্রিক্সটি নীচে সারণি নং (৩.৫) এ দেওয়া হল।

সারণি ৩.৫

উপাদান-সহগ ম্যাট্রিক্স

উৎপাদন

উপাদান	1	2	3	n
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{2n}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{3n}
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	a_{nn}

এখানে মূল্যগুলির একক এমনভাবে সংজ্ঞাত করা হচ্ছে যাতে তার মূল্য একটাকার সমান হয়। এবার যদি $a_{21} = .20$ হয় তার অর্থ হবে প্রথম শিল্পে 20 পয়সা মূল্যের দ্বিতীয় পণ্য উপাদান হিসাবে ব্যবহৃত হয়। এক্ষেত্রে স্তম্ভগুলি যোগ করার ক্ষেত্রে আর কোন বাধা থাকবেনা। কারণ সবগুলি উপাদানই পয়সার মূল্যে হিসাব করা হচ্ছে। এখানে মুক্তক্ষেত্রটি থাকার কারণে শ্রমসেবার উপাদানটির হিসাব ধরা হয়নি। এখানে যে কোন একটি স্তম্ভের উপাদানগুলির যোগফল হবে শ্রমসেবার উপর ব্যয় ছাড়া সেই স্তম্ভে নির্দিষ্ট পণ্যটির অন্যান্য উপাদানের উপর ব্যয়। তার মানে ঐ যোগফলগুলি হবে এক একটি পণ্যের এক একক উৎপাদনের জন্য আংশিক উপাদান ব্যয় (partial input cost)। যেহেতু এক একক উৎপাদনের মূল্য একটাকা তাই এই আংশিক

উপাদান ব্যয় একটাকার চেয়ে কম হওয়া আবশ্যক। তা নাহলে উৎপাদন অর্থনৈতিক দিক থেকে অর্থপূর্ণ হবেনা।

তার মানে

$$\sum_{i=1}^{n} aij < 1 \ (j = 1, \ldots\ldots\ldots, n)$$

এখানে i এর উপর যোগফলটি নেওয়া হচ্ছে তার মানে একটি স্তম্ভের সবকটি উপাদান যোগ করা হচ্ছে। যেহেতু উৎপাদনের পূর্ণমূল্য Re 1.00 (একটাকা) সবকটি উপাদানের মধ্যে বণ্টন করে দেওয়া হয় তাই $\left(1 - \sum_{i=1}^{n} aij\right)$ হবে j তম পণ্যের এক একক উৎপাদনের জন্য ব্যবহৃত শ্রমসেবার মূল্য।

যদি প্রথম শিল্প সবকটি শিল্পে তার পণ্যের উপাদান হিসাবে চাহিদা এবং মুক্তক্ষেত্রের চূড়ান্ত চাহিদা পূরণ করার জন্য ঠিক যতটুকু পণ্য প্রয়োজন তাই উৎপাদন করে তাহলে

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n + c_1$$

অথবা $(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots\ldots - a_{1n}x_n = c_1$

এখানে c_1 মানে হল তার জিনিসের জন্য চূড়ান্ত চাহিদা এবং $a_{ij} \times j$ হল jতম শিল্প থেকে তার পণ্যের উপাদান হিসাবে চাহিদা।

এখানে একটি সতর্কবাণী দিয়ে দেওয়া ভাল। উপাদান সহগগুলি কখন সারি বরাবর যোগ করা উচিত নয় কারণ তার কোন অর্থনৈতিক অর্থ হয়না। কিন্তু আগে আমরা যা করেছি অর্থাৎ $(x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots + x_{1n})$ বা $(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n)$ যোগ করা যায় কারণ এটি হল প্রথম পণ্যের উপাদান হিসাবে মোট চাহিদা।

ঠিক একইভাবে অন্যান্য শিল্পের জন্য ci গুলি নির্ধারণ করা যায়। অতএব আমরা একটি n রৈখিক সমীকরণ বিশিষ্ট সমষ্টি পাব।

$$\left.\begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1n}x_n &= c_1 \\ - a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \ldots\ldots\ldots - a_{2n}x_n &= c_2 \\ - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots\ldots\ldots + (1 - a_{nn})x_n &= c_n \end{aligned}\right\} \qquad (৩.৮)$$

(৩.৮) কে ম্যাট্রিক্স দিয়েও প্রকাশ করা যায়।

$$\begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) \ldots\ldots\ldots -a_{2n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1-a_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_n \end{bmatrix} \quad (৩.৮')$$

যদি মুখ্য কর্ণ বরাবর 1 গুলিকে বাদ দেওয়া যায় তাহলে ম্যাট্রিক্সটি হবে

$$-A = [-a_{ij}]$$

এখানে 1 গুলি থাকার ফলে ম্যাট্রিক্সটিকে অভেদ ম্যাট্রিক্স I_n (যার মুখ্য কর্ণ বরাবর উপাদানগুলি 1 ও বাকিগুলি 0) ও $-A$ এর যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা সম্ভব।

তাই (৩.৮') কে $(I - A)\,X = C$.........(৩.৮'') লেখা যায়। $(I - A)$ কে প্রযুক্তি (technology) ম্যাট্রিক্স বলা হবে। এটিকে T দিয়ে লেখা হচ্ছে। অতএব (৩.৮'') কে এবার

$TX = C$................(৩.৮''') লেখা যাবে।

T যতক্ষণ পর্যন্ত অনেক (non singular) ততক্ষণ পর্যন্ত T^{-1} নির্ণয় করে একটি অনন্য সমাধান নির্ণয় করা সম্ভব। সমাধানটি হবে

$$\bar{X} = T^{-1}C = (I - A)^{-1}C \;\ldots\ldots\ldots (৩.৯)$$

একটি সংখ্যাগত উদাহরণ দিলে বিষয়টি পরিষ্কার হবে।

উদাহরণ

এখানে সরলীকরণের জন্য ধরা যাক যে মাত্র তিনটি শিল্প আছে। এর উপাদান সহগ ম্যাট্রিক্সটি নীচে দেওয়া হল।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (৩.১০)$$

a_{0j} = j তম শিল্পে ব্যবহৃত প্রাথমিক উপাদান শ্রমসেবার মূল্য।

$$a_{01} = \{1 - (0.2 + 0.4 + 0.1)\} = 0.3$$

$$a_{02} = \{1 - (0.3 + 0.1 + 0.3)\} = 0.3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (৩.১১)$$

$$a_{03} = \{1 - (0.2 + 0.2 + 0.2)\} = 0.4$$

A ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে মুক্ত উপাদান-উৎপাদন মডেলটিকে $TX = (I - A)X = C$ রূপে লেখা সম্ভব।

সেটি হবে

$$\begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.9 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

এখানে ইচ্ছাকৃতভাবেই C_1, C_2 , C_3 কে কোন নির্দিষ্ট মান দেওয়া হয়নি। এর ফলে সমাধানটি সূত্র (formula) হিসাবে পাওয়া যাবে এবং ভিন্ন ভিন্ন C ভেক্টর প্রতিস্থাপন করে উৎপাদনের ভিন্ন ভিন্ন নির্দিষ্ট মান নির্ধারণ করা যাবে। এবার সমাধানসূত্রটি নির্ণয় করার চেষ্টা করা যাক।

$$\begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{bmatrix} = T^{-1}C$$

আমরা জানি যে

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} \text{adj. } T$$

$$= \frac{1}{|T|} \begin{bmatrix} |c_{11}| & |c_{21}| & |c_{31}| \\ |c_{12}| & |c_{22}| & |c_{32}| \\ |c_{13}| & |c_{23}| & |c_{33}| \end{bmatrix}$$

$$|T| = 0.8\ \{(0.9 \times 0.8) - (-0.3 \times -0.2)\} + 0.3\ \{(-0.4 \times 0.8) - (-0.1 \times -0.2)\}$$
$$+ (-0.2)\ \{(-0.4 \times -0.3) - (-0.1 \times 0.9)\}$$
$$= (0.8 \times 0.66) + (0.3 \times -0.34) + (-0.2 \times 0.21) = 0.384 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (৩.১২)$$

এবার উপসহগগুলি নির্ণয় করা যাক

$|c_{11}| = \{(0.9 \times 0.8) - (-0.2 \times -0.3)\} = 0.66$

$|c_{12}| = -\{(-0.4 \times 0.8) - (-0.1 \times -0.2)\} = 0.34$

$|c_{13}| = \{(-0.4 \times -0.3) - (0.1 \times -0.9)\} = 0.21$

$|c_{21}| = -\{(-0.3 \times 0.8) - (-0.3 \times -0.2)\} = 0.30$

$|c_{22}| = \{(0.8 \times 0.8) - (-0.1 \times -0.2)\} = 0.62$

$|c_{23}| = -\{(0.8 \times -0.3) - (-0.1 \times -0.3)\} = 0.27$

$|c_{31}| = \{(-0.3 \times -0.2) - (0.9 \times -0.2)\} = 0.24$

$|c_{32}| = -\{(0.8 \times -0.2) - (0.4 \times -0.2)\} = 0.24$

$|c_{33}| = \{(0.8 \times 0.9) - (-0.4 \times -0.3)\} = 0.60$

অতএব $\begin{vmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{vmatrix} = T^{-1}C = \frac{1}{0.384} \begin{bmatrix} 0.66 & 0.30 & 0.24 \\ 0.34 & 0.62 & 0.24 \\ 0.21 & 0.27 & 0.60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

এবার ধরা যাক $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

তাহলে নির্দিষ্ট সমাধানটি হবে

$$\overline{x_1} = \frac{1}{0.384} [\, 0.66 \times 10 + 0.30 \times 5 + 0.24 \times 6 \,]$$

$$= \frac{9.54}{0.384} = 24.84$$

$$\overline{x_2} = \frac{1}{0.384} [\, 0.34 \times 10 + 0.62 \times 5 + 0.24 \times 6 \,]$$

$$= \frac{7.94}{0.384} = 20.68$$

$$\overline{x_3} = \frac{1}{0.384} [\, 0.21 \times 10 + 0.27 \times 5 + 0.60 \times 6 \,] = \frac{7.05}{0.384} = 18.36$$

এবার প্রশ্ন হল $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$ ও $\overline{x_3}$ উৎপাদন করার মত যথেষ্ট শ্রমসেবা পাওয়া যাবে কিনা। (৩.১১) এর ভিত্তিতে হিসাব করলে এক্ষেত্রে শ্রমসেবার মোট চাহিদা হবে

$$\sum_{j=1}^{n} a_{oj}x_j = 0.3\ (24.84) + 0.3(20.68) + 0.4(18.36) = 21$$

যদি অর্থনীতির চূড়ান্ত চাহিদাগুলি লক্ষ টাকার পরিমাপে থাকে তাহলে শ্রমসেবার মোট চাহিদা হবে 21 লক্ষ টাকার সমান। যদি লভ্য পরিমাণ তার থেকে ছোট হয় তাহলে চাহিদা সেই অনুযায়ী কমিয়ে ফেলতে হবে।

৩.৯ আসন্ন মান দ্বারা বিপরীত নির্ণয় (Finding the inverse by approximation)

খুব বড় সমীকরণ সমষ্টিগুলির জন্য বিপরীত নির্ণয় করার পদ্ধতিটি খুবই দীর্ঘ ও পরিশ্রমসাধ্য হয়ে পড়ে। সেক্ষেত্রে আসন্ন মান দিয়ে বিপরীত নির্ণয় করার পদ্ধতিটি ব্যবহার করা যায়।

$(I - A)\ (I + A + A^2 + \ldots\ldots + A^m)$ [m = ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা]

$= I\ (I + A + A^2 + \ldots\ldots + A^m) - A\ (I + A + A^2 + \ldots\ldots + A^m)$

$= (I + A + A^2 + \ldots + A^m) - (A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{m+1})$

$= I - A^{m+1}$

যদি এটি শুধু I এর সমান হত তাহলে

$(I + A + A^2 + \ldots + A^m)$ ম্যাট্রিক্সটিকে $(I - A)$ এর বিপরীত হিসাবে নেওয়া যেত। কিন্তু $-A^{m+1}$ এর উপস্থিতি বিষয়টিকে কিছুটা জটিল করে তুলেছে। একমাত্র যদি m বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে A^{m+1} একটি $(n \times n)$ শূন্য ম্যাট্রিক্সের দিকে অগ্রসর হয় তাহলে $(I - A^{m+1})$ ও I এর দিকে অগ্রসর হবে এবং ফলতঃ $(I + A + A^2 + \ldots + A^m)$ ও $(I - A)^{-1}$ এর দিকে অগ্রসর হবে।

ম্যাট্রিক্স A এর প্রত্যেকটি স্তম্ভের জন্যই প্রতিটি উপাদানের যোগফল 1 এর চেয়ে ছোট। এক্ষেত্রে mকে যথেষ্ট পরিমাণে বৃদ্ধি করলে A^{m+1} ক্রমশঃ ছোট হতে হতে শূন্যের দিকে অগ্রসর হবে।

$(I + A + A^2 + \ldots + A^m)$ এর প্রথম দুটি উপাদান I ও A এর সবকটি উপাদানই অঋণাত্মক। A এর উপাদানগুলি অঋণাত্মক বলে A^2, A^3 ইত্যাদিগুলির সবকটি উপাদানও অঋণাত্মক হবে। চূড়ান্ত চাহিদা ভেক্টরটিও অঋণাত্মক। তাই সমাধান উৎপাদন ভেক্টরটিও অঋণাত্মক হবে।

এবার প্রমাণ করে দেখানো যাক যে উপাদান সহগ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$ এর প্রত্যেকটি স্তম্ভের যোগফলগুলি 1 এর কম হলে m কে অনির্দিষ্টভাবে বাড়িয়ে গেলে A^{m+1} শূন্য ম্যাট্রিক্সের দিকে অগ্রসর হবে। A এর যে স্তম্ভের যোগফলটি সর্বাধিক তাকে ম্যাট্রিক্স A এর নমুনা (norm) N(A) বলে ধরা যাক যেমন (৩.১০) এ A ম্যাট্রিক্সের জন্য N(A) = 0.7 (প্রথম স্তম্ভের যোগফল)। এখন N(A) কে এমনভাবে সংজ্ঞাত করা হচ্ছে যে ম্যাট্রিক্সের কোন উপাদানই N(A) এর চেয়ে বড় হতে পারবেনা।

তার মানে $a_{ij} \leq N(A)$ (সব i, j এর জন্য) উপাদান-উৎপাদন ম্যাট্রিক্সের পরিপ্রেক্ষিতে বলতে গেলে $N(A) < 1$ এবং সমস্ত $a_{ij} < 1$

A অঋণাত্মক বলে $0 < N(A) < 1$।

নমুনা সম্পর্কে একটি উপপাদ্য আছে। যদি দুটি (গুণযোগ্য) ম্যাট্রিক্স A ও B থাকে তাহলে

$$N(AB) \leq N(A).\ N(B) \quad \text{............... (৩.১৩)}$$

যদি A = B হয় অর্থাৎ ম্যাট্রিক্সটি চৌকা হয় তাহলে

$$N(A^2) \leq [N(A)]^2 \quad \text{............... (৩.১৪)}$$

$B = A^2$ হলে

$$N(A.\ B) \leq N(A).\ N(B)$$

অথবা $N(A.\ A^2) \leq N(A).\ N(A^2) \leq N(A)\ [N(A)]^2$ [যেহেতু $N(A^2) \leq [N(A)]^2$

অথবা $N(A^3) \leq [N(A)]^3$

এটির সাধারণ রূপ হল

$$N(A^m) \leq [N(A)]^m \text{ ।}$$

$0 < N(A) < 1$ বলে m যত অসীমের (α) দিকে অগ্রসর হবে $[N(A)]^m$ তত শূন্যের দিকে যাবে। আবার যেহেতু $N(A^m) \leq [N(A)]^m$ তাই $N(A^m)$ ও এক্ষেত্রে শূন্যের দিকে যেতে বাধ্য। আগেই দেখা গেছে যে A^m ম্যাট্রিক্সের কোন উপাদানই $N(A^m)$ এর থেকে বড় হতে পারে না। সুতরাং $N(A^m)$ শূন্যের দিকে এগোলে A^m এর উপাদানগুলিও শূন্যের দিকে যাবে। অতএব $0 < N(A) < 1$ হলে m কে যথেষ্ট বৃদ্ধি করে A^{m+1} ম্যাট্রিক্সকে শূন্য ম্যাট্রিক্সের দিকে এগিয়ে নিয়ে যাওয়া যাবে।

A^{m+1} কে এইভাবে শূন্যের দিকে এগিয়ে নিয়ে যাওয়া সম্ভব হলে $(I + A + A^2 + \ldots A^m)$ কে (I–A) এর বিপরীত বলে ধরা যাবে।

৩.১০ বদ্ধ মডেল (Closed Model)

কোন উপাদান-উৎপাদন মডেলের বহির্নির্ণীত বিভাগটিকে যদি আরেকটি শিল্প হিসাবে তার অন্তর্ভুক্ত করে নেওয়া হয় তাহলেই মডেলটি বদ্ধ হয়ে যাবে। এই মডেলে চূড়ান্ত চাহিদা এবং প্রাথমিক উপাদান বলে কিছু থাকবেনা। তার পরিবর্তে একটি নতুন শিল্পের উপাদানের চাহিদা ও মোট উৎপাদন থাকবে এক্ষেত্রে সমস্ত পণ্যই মধ্যবর্তী (intermediate) চরিত্র (nature) লাভ করবে কারণ চূড়ান্ত চাহিদা না থাকার ফলে যা কিছুই উৎপন্ন হবে তার একমাত্র ব্যবহার হবে $(n + 1)$ শিল্পের উপাদান হিসাবে।

এখানে ধরে নেওয়া হচ্ছে যে অন্যান্য শিল্পগুলির মতই এই নবাগত শিল্পটিরও স্থির উপাদান অনুপাত (fixed input ratio) আছে। তার মানে আগে যা প্রাথমিক উপাদান ছিল তার যোগানের সঙ্গে আগে যাকে চূড়ান্ত চাহিদা বলা হচ্ছিল তার একটি স্থির অনুপাত থাকবে। তার মানে আগের চূড়ান্ত চাহিদা c_i কে গৃহস্থালির মোট উৎপাদন x_0 এর স্থির অনুপাত a_{i0} বলে ধরা হবে অর্থাৎ $c_i = a_{i0}x_0$। অন্যভাবে বলতে গেলে গৃহস্থালি তাদের মোট শ্রমসেবা যোগানের একটি নির্দিষ্ট অনুপাত হিসাবে প্রতিটি পণ্য ভোগ করবে। এর ফলে বিশ্লেষণের কাঠামোটিতে গুরুত্বপূর্ণ পরিবর্তন হবে।

গাণিতিক দিক থেকে দেখলে চূড়ান্ত চাহিদা না থাকার ফলে একটি সমপ্রাকৃতিক সমীকরণ সমষ্টি পাওয়া যাচ্ছে। নতুন শিল্পটিকে নিয়ে চারটি শিল্প আছে (নতুনটিকে '0' বলে চিহ্নিত করে) ধরে নিলে (৩.৮´) এর মত করে বলা যায় যে সঠিক (correct) উৎপাদন স্তর হবে সেগুলিই যেগুলি

$$\begin{bmatrix} (1-a_{00}) & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\ -a_{10} & (1-a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{20} & -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} \\ -a_{30} & -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

সমীকরণ সমষ্টিকে সন্তুষ্ট করে।

যেহেতু এটি সমপ্রাকৃতিক একমাত্র (4×4) প্রযুক্তি ম্যাট্রিক্স $(I-A)$ এর ছকটি অবলুপ্ত হলেই এর অগতানুগতিক (non-trivial) সমাধান থাকবে। এক্ষেত্রে এই শর্তটি সর্বদাই পূরণ হবে। বদ্ধ মডেলে এবার কোন প্রাথমিক উপাদান নেই তাই উপাদান সহগ-ম্যাট্রিক্স A এর প্রতিটি স্তম্ভের যোগফল এবার একের সমান হবে (তার চেয়ে ছোট হবেনা)। তার মানে

$a_{0j} + a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = 1$ অথবা $a_{0j} = 1 - a_{1j} - a_{2j} - a_{3j}$ ।

তার মানে উপরের $(I-A)$ ম্যাট্রিক্সটির প্রতিটি স্তম্ভের সবচেয়ে উপরের উপাদানটি অন্য তিনটি উপাদানের যোগফলের ঋণাত্মক মানের সমান। তার ফলে চারটি সারি পরস্পর রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হবে এবং আমরা

$|I - A| = 0$ পাব। এর থেকে নিশ্চিত বলা যায় যে মডেলটির অগতানুগতিক সমাধান থাকবে। সারণি (১.১) থেকে এও পরিষ্কার যে এক্ষেত্রে অসীম সংখ্যক অগতানুগতিক সমাধান থাকবে। তার অর্থ হল যে সমপ্রাকৃতিক সমীকরণ বিশিষ্ট বদ্ধ মডেলে কোন অনন্য 'সঠিক' উৎপাদন সংমিশ্রণ পাওয়া যাবেনা। $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$ ও $\overline{x_4}$ কে একে অন্যের অনুপাত হিসাবে নির্ণয় করা যাবে। কিন্তু আরও অতিরিক্ত কোন নিয়ন্ত্রণ আরোপ না করলে তাদের পরম মান (absolute levels) নির্ণয় করা যাবে না।

৩.১১ সারাংশ (Summary)

- লিওন্টিয়েফের উপাদান-উৎপাদন মডেল শিল্পক্ষেত্রে উপাদান ও উৎপাদনের পারস্পরিক নির্ভরতার উপর ভিত্তি করে গঠিত।
- লিওন্টিয়েফের মতে উৎপাদনের স্তরের ভিত্তিতে শিল্পগুলির প্রয়োজনের কোন ধারাবাহিকতা পাওয়া সম্ভব নয়। বাস্তব পৃথিবীতে শিল্পের পারস্পরিক নির্ভরতার মধ্যে একটি ঘূর্ণি লক্ষ্য করা যায়।
- লিওন্টিয়েফ প্রতিটি শিল্প থেকে প্রতিটি শিল্পে যে পণ্য উপাদান হিসাবে যাচ্ছে, তাদের মোট উৎপাদন, চূড়ান্ত চাহিদা, এবং বিভিন্ন শিল্পে শ্রমসেবার প্রয়োজন এবং তার মোট প্রাপ্ত পরিমাণ একটি সারণির মাধ্যমে প্রকাশ করেছেন। সেটিকে উপাদান-উৎপাদন সারণি বলা হয়।
- এখানে ধরে নেওয়া হয়েছে যে

  (ক) মাত্রাগত সমহার প্রতিদান আছে,

  (খ) সমোৎপাদন রেখাগুলি উত্তল অর্থাৎ ক্রমহ্রাসমান প্রান্তিক প্রযুক্তিগত প্রতিদান আছে। এবং

  (গ) উৎপাদনের সহগগুলি স্থির (fixed coefficient)।
- একক উৎপাদন স্তরের জন্য উৎপাদন সহগগুলি দিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সটিকে প্রযুক্তি (technology) ম্যাট্রিক্স বলা হয়।
- উপাদান-উৎপাদন মডেলটিকে রৈখিক অনুক্রমণ সমস্যা হিসাবেও ব্যাখ্যা করা যায়। তারপর তার থেকে প্রতিটি পণ্য কি কি মাত্রায় উৎপন্ন হবে তা নির্ধারণ করা হয়।
- কোন অর্থনীতিকে উৎপাদনশীল হওয়ার জন্য প্রতিটি পণ্যের এক একক উৎপাদনের জন্য তার নিজের পণ্যের এক এককের চেয়ে কম উপাদান হিসাবে ব্যবহার করা আবশ্যক।
- হকিন্স-সিমন্স শর্তটি আরেকটু অগ্রসর হয়ে বলে যে প্রতিটি পণ্যের এক একক উৎপাদনের জন্য তার নিজের পণ্যের প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষ উভয় চাহিদার যোগফল একের চেয়ে কম হওয়া আবশ্যক। দ্বিপণ্য বিশিষ্ট শিল্পে শর্তটি হল $(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ ।

- চূড়ান্ত চাহিদা বহির্নির্ণীত হলে বিভিন্ন চূড়ান্ত চাহিদার জন্য বিভিন্ন মোট উৎপাদনস্তর সমাধান হিসাবে পাওয়া যাবে।
- যদি গৃহস্থালিকে আরেকটি শিল্প বলে মডেলে ঢুকিয়ে ফেলা হয় তাহলে চূড়ান্ত চাহিদা বলে আর কিছু থাকে না—সব পণ্যই মধ্যবর্তী উপাদান হিসাবে ব্যবহৃত হওয়ার জন্য উৎপন্ন হয়। এই ক্ষেত্রে একটি অনন্য উৎপাদন সংমিশ্রণ সমাধান হিসাবে পাওয়া যায়না—x_i গুলি কেবল একে অন্যের অনুপাত হিসাবেই নির্নীত হয়।

৩.১২ অনুশীলনী

ছোট প্রশ্ন

১। উপাদান-উৎপাদন প্রবাহ সারণি কাকে বলে?

২। একটি দুই শিল্পবিশিষ্ট উপাদান-উৎপাদন প্রবাহ সারণি লিখুন।

৩। প্রযুক্তি ম্যাট্রিক্স কাকে বলে?

৪। (২) এর প্রবাহ সারণিটি থেকে প্রযুক্তি ম্যাট্রিক্সটি লিখুন।

৫। 'নীট' উৎপাদন কাকে বলে?

৬। একক-স্তর-ক্রিয়া কাকে বলা হয়?

৭। কোন অর্থনীতিকে টিকে থাকার জন্য 'নীট' উৎপাদন কত হওয়া প্রয়োজন?

৮। একটি দ্বিশিল্প বিশিষ্ট উপাদান-উৎপাদন মডেলকে রৈখিক অনুক্রম হিসাবে প্রকাশ করুন।

৯। হকিন্স-সিমন্স শর্তটি কী?

১০। বদ্ধ মডেল কাকে বলে?

বড় প্রশ্ন

১। উপাদান-উৎপাদন প্রবাহ সারণি কাকে বলে উদাহরণসহ বিবৃত করুন।

২। উপাদান-উৎপাদন প্রবাহ সারণি থেকে কিভাবে প্রযুক্তি ম্যাট্রিক্স নির্ধারণ করা হয় তা বিস্তারিত আলোচনা করুন।

৩। একটি উপাদান-উৎপাদন মডেলকে কিভাবে রৈখিক অনুক্রম হিসাবে প্রকাশ করা যায় তা বিবৃত করুন।

৪। 'নীট' উৎপাদন কাকে বলে? কেন অর্থনীতিকে টিকে থাকার জন্য নীট উৎপাদন ধনাত্মক হতে হবে তা আলোচনা করুন।

৫। কোন চূড়ান্ত চাহিদা সংমিশ্রণ উৎপাদন করা সম্ভব হবে কিনা তা চিত্রলৈখিকভাবে কি করে নির্ণয় করা হবে? এই আলোচনা থেকে কিভাবে সমাধানের অস্তিত্ব থাকার জন্য আবশ্যক শর্তটি পাওয়া যাবে তা দেখান।

৬। হকিন্স-সিমন্স শর্ত কাকে বলে? এর অর্থনৈতিক তাৎপর্য আলোচনা করুন।

৭। ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি ব্যবহার করে মুক্ত লিওন্টিয়েফ মডেল কিভাবে সমাধান করা যায় তা বিস্তারিতভাবে আলোচনা করুন।

৮। বদ্ধ মডেল কাকে বলে? এই মডেলটিকে কিভাবে সমাধান করা যায় তা আলোচনা করুন।

৯। একটি দ্বিশিল্পবিশিষ্ট ক্ষেত্রে প্রথম শিল্প তার একটাকা মূল্যের পণ্য তৈরি করতে তার নিজের পণ্য 10 পয়সা মূল্যের এবং দ্বিতীয় শিল্পের পণ্য 60 পয়সা মূল্যের ব্যবহার করে। দ্বিতীয় শিল্প একটাকা মূল্যের পণ্য তৈরি করতে তার নিজের পণ্য ব্যবহার করেনা—50 পয়সা মূল্যের প্রথম শিল্পের পণ্য ব্যবহার করে। মুক্ত ক্ষেত্রটি 1000 টাকা মূল্যের প্রথম পণ্য এবং 2000 টাকা মূল্যের দ্বিতীয় পণ্য চায়। এক্ষেত্রে

(ক) উপাদান ম্যাট্রিক্স, প্রযুক্তি ম্যাট্রিক্স এবং নির্দিষ্ট উপাদান-উৎপাদন ম্যাট্রিক্স সমীকরণটি লিখুন।

১০। নীচে একটি উপাদান ম্যাট্রিক্স A ও চূড়ান্ত চাহিদা ভেক্টর c দেওয়া হল।

$$A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.25 & 0.34 \\ 0.33 & 0.10 & 0.12 \\ 0.19 & 0.34 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$$

(ক) 0.33, 0, এবং 200 উপাদানগুলির অর্থনৈতিক তাৎপর্য বুঝিয়ে দিন।

(খ) তৃতীয় স্তম্ভের যোগফলের কোন অর্থনৈতিক মানে আছে কী?

(গ) এই মডেলটির জন্য নির্দিষ্ট উপাদান-উৎপাদন ম্যাট্রিক্স সমীকরণটি লিখুন।

(ঘ) মডেলটি ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে সমাধান করুন।

১০। দুই ক্ষেত্র বিশিষ্ট একটি মুক্ত স্থিতিশীল লিওন্টিয়েফ মডেল ধরুন যেখানে আন্তঃশিল্প উপাদান সহগ ম্যাট্রিক্সটি হল

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

এই মডেলটি কি হকিন্স-সিমন্স শর্তটি পূরণ করে?

৩.১৩ গ্রন্থপঞ্জী

(১) Linear Programming and Economic Analysis—Dorfman, Samuelson & Solow.

(২) Fundamental Method of Mathematical Economics—Chiay A. I.

(৩) The Structure of Economics—Silberberg.

[illegible]

— [illegible]

[illegible]

— সুভাষ

Any system of education which ignores Indian conditions ... and sociology is too unscientific to ... to any rational support

— Subhas Chandra Bose

Price : Rs. 150.00

Published by Netaji Subhas Open University, 1, Woodburn Park, Kolkata-700 020 & printed at Printtech, 15A, Ambika Mukherjee Road, Kolkata-700056. Phone : 2544-292...