প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোন বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এ-ক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে— যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয় সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধীতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থীও এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ-ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশকিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

নবম পুনর্মুদ্রণ ঃ সেপ্টেম্বর, 2017

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় : গণিতবিদ্যা | সাম্মানিক স্তর

পাঠক্রম : পর্যায় : EMT 04 : 01 & 02

	রচনা	সম্পাদনা
একক 1	ড. জয়শ্রী রায়	ড. কৃষ্ণা পাল (কুণ্ডু)
একক 2	ঐ	ঐ
একক 3	ড. রীতা ব্যানার্জী	ঐ
একক 4	ড. কাঁকন ভট্টাচার্য	ড. দীপক চ্যাটার্জী
একক 5	ঐ	ঐ
একক 6	ড. উমেশচন্দ্র পান	ড. অস্থির দাশগুপ্ত
একক 7	ঐ	ঐ
একক 8	ঐ	ঐ
একক 9	ঐ	ঐ
একক 10	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্তী	ঐ

প্রজ্ঞাপন

এই পাঠ-সংকলনের সমুদয় স্বত্ব নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের দ্বারা সংরক্ষিত। বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের লিখিত অনুমতি ছাড়া এর কোনও অংশের পুনর্মুদ্রণ বা কোনওভাবে উদ্ধৃতি সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ।

মোহন কুমার চট্টোপাধ্যায়
নিবন্ধক

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EMT 04

ভেক্টর বীজগণিত
ও
ভেক্টর ক্যালকুলাস

পর্যায়
1

পুরাতনী বীজগণিত

একক 1	❑	ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির কার্তিয় স্থানাঙ্ক, দিক্-কোসাইন ইত্যাদি	7–35
একক 2	❑	ভেক্টর	36–81
একক 3	❑	ভেক্টর গুণন	82–135
একক 4	❑	ভেক্টরের জ্যামিতিক প্রয়োগ	136–176
একক 5	❑	ভেক্টর অন্যান্য প্রয়োগ	177–193

পর্যায়
2

ভেক্টর ক্যালকুলাস

একক 6	❑	ভেক্টর ডেরিভেটিভ বা অবকল	194–225
একক 7	❑	ভেক্টর সমাকলন	226–251
একক 8	❑	গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স এবং কার্ল	252–291
একক 9	❑	গাউস ও স্টোকসের উপপাদ্য	292–341
একক 10	❑	ভেক্টর ক্যালকুলাসের প্রয়োগ	342–372

একক 1 : ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির কার্তিয় স্থানাঙ্ক, দিক্ নির্দেশক কোসাইন ইত্যাদি

গঠন :

1.1 প্রস্তাবনা

1.2 উদ্দেশ্য

1.3 ত্রিমাত্রিক দেশে কার্তিয় স্থানাঙ্ক, বেলনাকার স্থানাঙ্ক ও গোলীয় স্থানাঙ্ক

1.4 ত্রিমাত্রিক দেশে দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয়, অন্তর্বিভাজন ও বহির্বিভাজন

1.5 দিক্ যুক্ত রেখাংশ, লম্ব অভিক্ষেপ, কোন সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন ও দিক্‌নির্দেশক অনুপাত, নির্দিষ্ট দিক্‌যুক্ত দুটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণ, ত্রিমাত্রিক দেশে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়,

1.6 সারাংশ

1.7 বিবিধ প্রশ্নমালা

1.8 সমাধান / উত্তরমালা

1.1. প্রস্তাবনা :

এই এককে আমরা ত্রিমাত্রিক দেশে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির প্রাথমিক আলোচনা করব। ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতির ব্যবহার গণিত শাস্ত্রের বিবিধ বিষয়ে। এছাড়া পদার্থবিদ্যা, জ্যোতির্বিদ্যা (Astronomy), ভূবিদ্যা (Geology), ইঞ্জিনিয়ারিং বিদ্যা প্রভৃতিতে এর ব্যবহারের প্রয়োজনীয়তা অনস্বীকার্য। স্থানাঙ্ক জ্যামিতি বলতে বুঝি জ্যামিতিক সমস্যাগুলিকে বীজগাণিতিক সমীকরণে রূপান্তরিত করে সেই সমীকরণগুলিকে সরল করা এবং তাদের সমাধান বার করা (জ্যামিতিক ধর্ম ব্যবহার করে)। সংক্ষেপে বলা যায় স্থানাঙ্ক জ্যামিতি, — বীজগণিত ও জ্যামিতির মধ্যে এক এক্যৈক সম্বন্ধ (one to one correspondence) সৃষ্টি করে। বস্তুতঃ স্থানাঙ্ক জ্যামিতির ক্ষেত্রে যে কোন জ্যামিতিক ধর্মকে স্থানাঙ্কের মাধ্যমে প্রতিষ্ঠা করা যায় ও সেই সব ধর্মের ব্যবহারও স্থানাঙ্কের মাধ্যমেই হয়। যেমন দুটি রেখার অন্তর্ভুক্ত কোন $\theta = \tan^{-1} \dfrac{m_1 \sim m_2}{1 + m_1 m_2}$ যেখানে m_1, m_2 স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা যায়।

যে সকল বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে তাদের ত্রিমাত্রিক বস্তু বলে। কোন ত্রিমাত্রিক বস্তু যে দেশ জুড়ে থাকে তাকে ত্রিমাত্রিক দেশ বলে। ত্রিমাত্রিক দেশে কোন বস্তুর জ্যামিতিক দিক্‌গুলি আলোচনা করার জন্য প্রথমেই কোন বিন্দুর ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক সম্বন্ধে জ্ঞানের প্রয়োজন। দ্বিমাত্রিক দেশে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক সম্বন্ধে আপনাদের জানা আছে। দ্বিমাত্রিক দেশে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা হয় পরস্পর লম্ব দুটি অক্ষের (x′ox ও y′oy) সাপেক্ষে দুটি স্থানাঙ্ক (x, y) দ্বারা। একই ভাবে ত্রিমাত্রিক দেশে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা হয় তিনটি পরস্পর লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে তিনটি স্থানাঙ্ক দ্বারা। এই এককে ত্রিমাত্রিক দেশে দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করা হবে তাদের স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে। ছেদ অনুপাত ও কোন সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন বলতে কি বোঝায় তার আলোচনাও করা হবে। ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির দ্বারা সমতল, সরলরেখা, গোলক, চোঙ প্রভৃতির সমীকরণ নির্ণয় এবং তাদের বিস্তৃত আলোচনা অন্য পর্যায়ে জানতে পারবেন। এই এককে ভেক্টর পঠনের জন্যও ভেকটরের প্রয়োগ জ্যামিতিতে করতে গেলে ত্রিমাত্রিক জ্যামিতির ধারণা যতটুকু প্রযোজন শুধু সেই অংশটুকুই আলোচিত হবে।

1.2. উদ্দেশ্য

এই একক পঠনের পর আপনি যে বিষয়গুলি করতে পারবেন সেগুলি হল :—

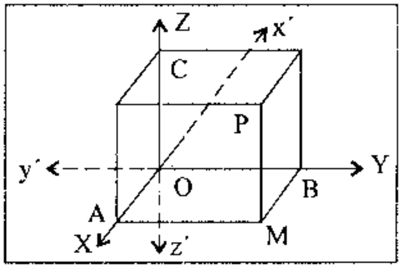
- ত্রিমাত্রিক দেশে কোন বিন্দুর লম্ব কার্তিয় স্থানাঙ্ক, বেলনাকার স্থানাঙ্ক ও গোলীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন।
- ত্রিমাত্রিক দেশে দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব বার করতে পারবেন।
- অন্তর্বিভাজন ও বহির্বিভাজন পদ্ধতির সঠিক প্রয়োগ করে সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।
- কোন সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন ও দিক নির্দেশক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন।
- নির্দিষ্ট দিকযুক্ত দুটি সরলরেখার অন্তর্গত নির্ধারণ করতে পারবেন।
- ত্রিমাত্রিক দেশে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন।

1.3. ত্রিমাত্রিক দেশে কার্তিয় স্থানাঙ্ক, বেলনাকার স্থানাঙ্ক ও গোলীয় স্থানাঙ্ক

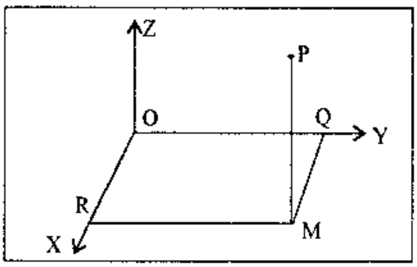
আমরা আগেই বলেছি যে সমস্ত বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে তাদের ত্রিমাত্রিক বস্তু বলে। এই সকল বস্তুর মধ্যস্থিত বা উপরিস্থিত কোন বিন্দুর যদি অবস্থান নির্ণয় করতে হয় তাহলে তিনটি সংখ্যা প্রয়োজন। এখানে ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে।

1.3.1 লম্ব কার্তিয় স্থানাঙ্ক (Rectangular Cartesian Co-ordinates)

ত্রিমাত্রিক দেশে একটি বিন্দুতে পরস্পর লম্ব তিনটি সরলরেখা অঙ্কন করা যায়। ধরি, যে কোন বিন্দু O-তে x′ox, y′oy, z′oz তিনটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা অঙ্কন করা হল (O - বিন্দুতে এরূপ একাধিক ত্রয়ী অঙ্কন করা সম্ভব)। ox, oy, oz যথাক্রমে পরস্পর লম্ব রেখা তিনটির ধনাত্মক দিক্ ও ox′, oy′, oz′ ঋণাত্মক দিক্ নির্দেশ করে। এই দেশে P যে কোন বিন্দু। এখন P বিন্দুগামী তিনটি সমতল অঙ্কন করা হল যারা যথাক্রমে yoz, zox ও xoy সমতলের সমান্তরাল। এরূপে অঙ্কিত সমতল তিনটি x′ox, y′oy ও z′oz রেখাগুলিকে যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। এখানে OA = x, OB = y, OC = z হলে (x, y, z) – এই ক্রমিক সংখ্যা (ordered number) তিনটি তাদের মান ও চিহ্ন দ্বারা ox, oy, oz-র সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান সম্পূর্ণ রূপে নির্দেশ করে। এখানে (x, y, z)-কে P - বিন্দুর কার্তিয় স্থানাঙ্ক বলে। সহজভাবে ত্রিমাত্রিক দেশে যে কোন বিন্দু P-র স্থানাঙ্ক বার করতে গেলে P বিন্দু থেকে xoy সমতলের উপর PM লম্ব অঙ্কন করা হল। আপনারা xoy তলে অবস্থিত পাদবিন্দু M-র স্থানাঙ্ক দ্বিমাত্রিক দেশের স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাহায্যে বার করতে পারেন। অর্থাৎ M বিন্দু থেকে থেকে oy এবং ox অক্ষের সমান্তরাল রেখা অঙ্কন করা হল যারা ox ও oy অক্ষকে যথাক্রমে R ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং OR ও OQ যথাক্রমে x ও y স্থানাঙ্ক নির্দেশ করে। যদি PM = $|Z|$ হয় তবে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, z) হবে। এখানে লক্ষণীয় Z ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হবে যদি PM, OZ-র ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত থাকে। অতএব বলা যেতে পারে এই ত্রিমাত্রিক দেশে প্রতিটি বিন্দু P-র জন্য তিনটি ক্রমিক বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যাবে। বিপরীত ভাবে যে কোন তিনটি প্রদত্ত ক্রমিক বাস্তব সংখ্যার জন্য ত্রিমাত্রিক দেশে একটি বিন্দুর অবস্থান পাওয়া যাবে যার স্থানাঙ্ক এই তিনটি বাস্তব সংখ্যা হবে।



চিত্র : 1.1



চিত্র : 1.2

এখানে O বিন্দুটিকে মূল বিন্দু বলে। x′ox, y′oy, z′oz অক্ষ তিনটিকে একত্রে স্থানাঙ্ক নির্দেশক অক্ষ বলে বা অক্ষতন্ত্র (axes of reference) বলে। xoy, yoz ও zox তলগুলিকে অক্ষতল বলে (Co-ordinates planes)। তিনটি অক্ষ তল ত্রিমাত্রিক দেশকে আটটি অংশে (eight octant) বিভক্ত করে। লক্ষণীয় yoz,

zox ও xoy তল দ্বারা সীমায়িত অংশে x, y ও z-র স্থানাঙ্ক সবই ধনাত্মক মান যুক্ত অর্থাৎ $o \le x < \infty$, $o \le y < \infty$, $o \le z < \infty$ হবে। এরূপে আটটি অংশে স্থানাঙ্কগুলির চিহ্ন নিম্নলিখিত ছকে নির্দেশিত হল।

আট অংশ (octant) / স্থানাঙ্ক	oxyz	ox′yz	ox′y′z	ox′y′z′	oxyz′	ox′yz′	oxy′z′	oxy′z
x	+	−	−	−	+	−	+	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	−	−	−	−	+

মন্তব্য

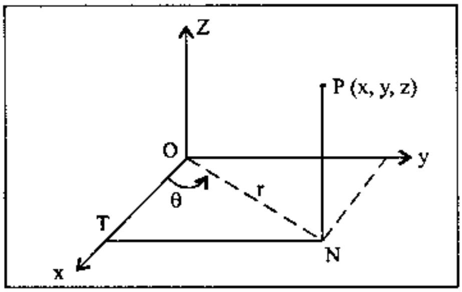
i) xoy তলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর Z-স্থানাঙ্ক শূন্য হবে এবং সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, o) দ্বারা নির্দেশিত হবে। অনুরূপে yoz ও zox তলে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (o, y, z) ও (x, o, z) হবে।

ii) x′ox, y′oy ও z′oz অক্ষের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, o, o), (o, y, o) ও (o, o, z) দ্বারা নির্দেশিত হবে।

1.3.2. বেলনাকার স্থানাঙ্ক (cylindrical Co-ordinates) ও গোলীয় (spherical) স্থানাঙ্ক :

কার্তিয় স্থানাঙ্কের পরিবর্তে আরও দুরকম স্থানাঙ্ক দ্বারা ত্রিমাত্রিক দেশে যে কোন বিন্দু P-র অবস্থান নির্ণয় করা যায়। যথা i) বেলনাকার স্থানাঙ্ক ও ii) গোলীয় স্থানাঙ্ক

i) বেলনাকার স্থানাঙ্ক :



চিত্র : 1.3

1.3 নং চিত্রে ox, oy ও oz পরস্পর তিনটি নির্দেশক অক্ষ। P যে কোন একটি বিন্দু যার কার্তিয় স্থানাঙ্ক (x; y, z)। P বিন্দু থেকে xoy তলের উপর PN লম্ব অঙ্কন করা হল এবং N বিন্দু থেকে ox অক্ষের উপর NT লম্ব অঙ্কন করা হল যা ox অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং আপনারা লিখতে পারেন

OT = x, TN = y এবং NP = z

ধরি ON = r, $\angle$ TON = θ

অতএব $x = r \cos\theta$ .... (1.1) [$\angle OTN = 90°$, ত্রিভুজ OTN থেকে লেখা যায় $\cos\theta = \frac{x}{r}$]

$y = r \sin\theta$ .... (1.2)

$z = z$

সমীকরণ (1.1) ও (1.2) কে বর্গ করে এবং যোগ করে লেখা যায়

$$r^2 = x^2 + y^2$$

সমীকরণ (2) থেকে r-র মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

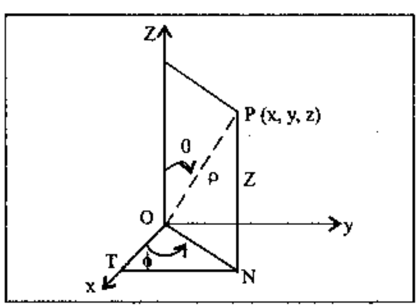
অনুরূপে 1.1 নং সমীকরণ থেকে লেখা যায়

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

অতএব $\tan\theta = \frac{y}{x}$; $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

সুতরাং (x, y, z)-র পরিবর্তে (r, θ, z) দ্বারাও P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা যাবে। এখানে (r, θ, z)-কে বেলনাকার স্থানাঙ্ক বলে। চিত্রানুসারে r, θ ও z-র সম্ভাব্য মানের সীমা যথাক্রমে $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $-\infty < Z < \infty$.

ii) গোলীয় স্থানাঙ্ক :



চিত্র : 1.4

1.4 নং চিত্রে ধরি $\angle ZoP = \theta$, $oP = \rho$, $\angle TON = \phi$, $\angle PNO = 90°$

$\therefore\ x = ON \cos\phi = oP \sin\theta \cos\phi$ [ত্রিভুজ ONP থেকে $\cos(90 - \theta) = \sin\theta = \frac{ON}{oP}$]

$$= \rho \sin\theta . \cos\phi \longrightarrow (1.3)$$

$y = ON \sin\phi = oP \sin\theta \sin\phi$

$$= \rho \sin\theta \sin\phi \longrightarrow (1.4)$$

$$z = oP \cos\theta \quad = \rho \cos\theta \longrightarrow (1.5) \; [\text{যেহেতু} \sin(90^\circ - \theta) = \frac{PN}{oP}]$$

সমীকরণ (1.3), (1.4) ও (1.5) কে বর্গকরে ও যোগ করে লেখা যায়

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

এবং (1.3) ও (1.4) এর বর্গ যোগ করে (1.5) দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়

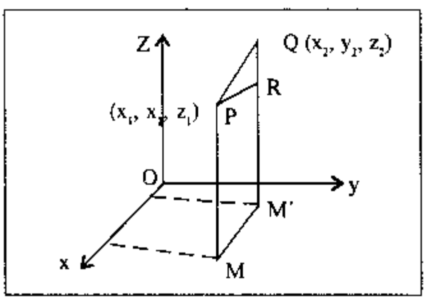
$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

একই ভাবে সমীকরণ (1.4) কে সমীকরণ (1.3) দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

সুতরাং (x, y, z)-র পরিবর্তে P-র অবস্থান (ρ, θ, ϕ) দ্বারা নির্দেশ করা যেতে পারে। (ρ, θ, ϕ)-কে গোলীয় স্থানাঙ্ক বলে। চিত্রানুসারে $\rho, \theta,$ ও ϕ -র সম্ভাব্য মানের সীমা যথাক্রমে $o \le \rho < \infty$, $o \le \theta \le \pi$, এবং $o \le \phi \le 2\pi$.

1.4 ত্রিমাত্রিক দেশে দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয়, অন্তর্বিভাবজন ও বহির্বিভাজন



চিত্র : 1.5

মনে করি ত্রিমাত্রিক দেশে $P(x_1, y_1, z_1)$ ও $Q(x_2, y_2, z_2)$ যে কোন দুটি বিন্দু। P ও Q বিন্দুদ্বয় হতে যথাক্রমে xoy তলের উপর PM ও QM′ লম্বদ্বয় অঙ্কন করা হল। M ও M′ পাদ বিন্দু। তাহলে M ও M′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, o) ও (x_2, y_2, o)। এখানে M ও M′ বিন্দু দুটি xoy তলের উপর অবস্থিত। আপনাদের নিশ্চয়ই মনে আছে দ্বিমাত্রিক দেশে দুটি বিন্দুর দূরত্ব কত হবে। অতএব এখানে Z = O দ্বিমাত্রিক তলে MM′-এর দূরত্ব $= \left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right|$

P বিন্দু হতে QM′-এর উপর PR লম্ব অঙ্কন করা হল যা QM′-কে R বিন্দুতে ছেদ করে। এখন চিত্রানুসারে,

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2 \; [\text{PQR ত্রিভুজের } \angle PRQ = 90^\circ]$$

$$= (MM')^2 + (Z_2 - Z_1)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\therefore PQ = \left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \right|$$

মন্তব্য : যদি Q = (o, o, o) এবং $P = (x_1, y_1, z_1)$ হয় তবে $QP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

1.4.1 ছেদ অনুপাত : (Section Ratio)

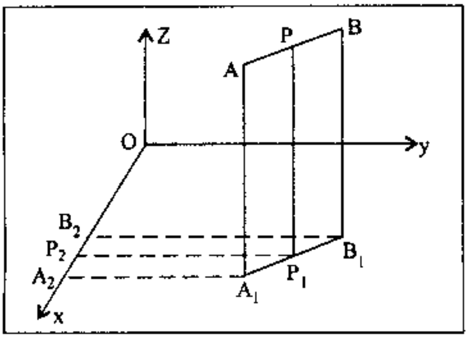
A ও B বিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখাকে m : n অনুপাতে বিভাজনকারী P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় :

i) অন্তর্বিভাজন :

ধরি A ও B বিন্দুর কার্তিয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2)। যে কোন বিন্দু P যা AB কে m:n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক হবে

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)।$$

প্রমাণ :



চিত্র : 1.6

A, P ও B বিন্দু তিনটি হতে xoy তলের উপর যথাক্রমে AA_1, PP_1 ও BB_1 লম্ব অঙ্কন করা হল। এখন পাদ বিন্দু A_1, P_1 ও B_1 থেকে ox-অক্ষের উপর যথাক্রমে A_1A_2, P_1P_2 ও B_1B_2 তিনটি লম্ব অঙ্কন করা হল যারা ox অক্ষকে যথাক্রমে A_2, P_2 ও B_2 বিন্দুতে ছেদ করে। এখানে $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$. ধরি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, z), চিত্র নং 1.6 থেকে লেখা যায়

$$\frac{A_2P_2}{P_2B_2} = \frac{A_1P_1}{P_1B_1} = \frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$$

এখন $OA_2 = x_1, OB_2 = x_2, OP_2 = x$ এবং $\frac{A_2P_2}{P_2B_2} = \frac{m}{n}$

সুতরাং $\frac{OA_2 - OP_2}{OP_2 - OB_2} = \frac{m}{n}$

বা $\frac{x_1 - x}{x - x_2} = \frac{m}{n}$

বা $x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

অনুরূপে A_1, P_1 ও B_1 বিন্দু তিনটি হতে oy-অক্ষের উপর লম্ব অঙ্কন করে পাওয়া যাবে $y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$ এবং A, B, P বিন্দুগুলি হতে xoy তলের পরিবর্তে yoz তলের উপর লম্ব অঙ্কন করে অনুরূপে পাওয়া যাবে $y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$ এবং $z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$

অতএব P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$.

মন্তব্য : P যদি AB-র মধ্যবিন্দু হয় তবে P-র স্থানাঙ্ক

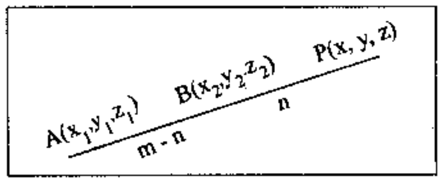
$$\frac{x_2 + x_1}{2},\ \frac{y_2 + y_1}{2},\ \frac{z_2 + z_1}{2}$$ হবে।

ii) বহির্বিভাজন :

P বিন্দু যদি AB-কে m : n অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তবে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$\left(\frac{m x_2 - nx_1}{m-n},\ \frac{m y_2 - ny_1}{m-n},\ \frac{m z_2 - nz_1}{m-n}\right)$ হবে যদি $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ হয়।

প্রমাণ :



চিত্র : 1.7

ধরি P = (x, y, z) দেওয়া আছে

$$\frac{AP}{BP} = \frac{m}{n}$$

বা $$\frac{AP}{BP} - 1 = \frac{m}{n} - 1$$

বা $$\frac{AP - BP}{BP} = \frac{m-n}{n}$$

বা $$\frac{AB}{BP} = \frac{m-n}{n}$$

অর্থাৎ B বিন্দু AP-কে(m-n) : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। সুতরাং অন্তর্বিভাজন ফর্মূলা থেকে আপনারা লিখতে পারেন.

$$x_2 = \frac{(m-n)\,x + n\,x_1}{(m-n) + n} \longrightarrow (1.6)$$

$$y_2 = \frac{(m-n)\,y + n\,y_1}{(m-n) + n} \longrightarrow (1.7)$$

$$z_2 = \frac{(m-n)\,z + n\,z_1}{m-n + n} \longrightarrow (1.8)$$

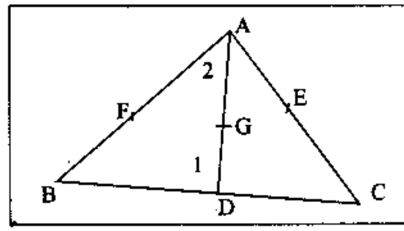
অতএব (1.6), (1.7), (1.8) সমীকরণগুলি থেকে লেখা যায়

$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \quad y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \quad z = \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}$$

সুতরাং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{nz_2 - nz_1}{m-n}\right)$

1.4.2 কোন ত্রিভুজের ভর কেন্দ্রের (centroid) স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যার শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ও (x_3, y_3, z_3)।

মনে করি A, B C ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ও (x_3, y_3, z_3), ধরি D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB-র মধ্যবিন্দু। এখানে D বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$। মনে করি ABC ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র G। সুতরাং G, AD মধ্যমার উপর এমন একটি বিন্দু যাতে $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ হয়।



চিত্র : 1.8

অতএব G বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{2.\frac{x_2+x_3}{2} + 1.x_1}{2+1}, \frac{2.\frac{y_2+y_3}{2} + 1.y_1}{2+1}, \frac{2.\frac{z_2+z_3}{2} + 1.z_1}{2+1}\right)$

$$= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

মন্তব্য : G-র এই প্রতিসম (symmetric) প্রকাশ থেকে বলা যায় এই বিন্দুটি অন্য দুটো মধ্যমার মধ্যেও অবস্থিত। সুতরাং কোন ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু হবে (concurrent).

উদাহরণ মালা :

উদা : 1. (2, 0, - 1) ও (- 2, 5, 4) বিন্দু দুটির মধ্যে দূরত্ব কত?

সমাধান : ধরি P = (2, 0, - 1) এবং Q = (– 2, 5, 4), যদি $P = (x_1, y_1, z_1)$ ও $Q = (x_2, y_2, z_2)$ হয় তবে $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2}$ অতএব এখানে নির্ণেয় দূরত্ব

$$|PQ| = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-0)^2 + (4+1)^2} \text{ একক}$$

$$= \sqrt{66} \text{ একক}$$

উদা : 2 প্রমাণ করুন (3, 2, 2), (2, 1, 2) দ্বারা (1, 3, 4) দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হবে।

সমাধান : ধরি P = (3, 2, 2), Q = (2, 1, 2), R = (1, 3, 4)

এখানে $|PQ| = \sqrt{(2-3)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2}$ একক $= \sqrt{2}$ একক

$|QR| = \sqrt{(1-2)^2 + (3-1)^2 + (4-2)^2}$ একক $= \sqrt{9}$ একক $= 3$ একক

$|RP| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-3)^2 \ (2-4)^2}$ একক $= \sqrt{9}$ একক $= 3$ একক

যেহেতু $|QR| = |RP|$ অতএব PQR ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

উদা : 3 কোন বিন্দুর বেলনাকার ও গোলীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যার কার্তিয় স্থানাঙ্ক (3, 4, 5),

সমাধান : কোন বিন্দুর কার্তিয় স্থানাঙ্ক যদি (x, y, z) হয় তবে সেই বিন্দুর বেলনাকার ও গোলীয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r, θ, z) ও (ρ, θ, ϕ) হবে।

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{4}{3}$$

$$z = z = 5$$

সুতরাং নির্ণেয় বেলনাকার স্থানাঙ্ক $= \left(5,\ \tan^{-1}\frac{4}{3},\ 5\right)$

গোলীয় স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{5} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{4}{3}$$

সুতরাং নির্ণেয় গোলীয় স্থানাঙ্ক $= \left(5\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4},\ \tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$

অনুশীলনী :

অনু. 1 : কোন ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যার শীর্ষ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক (1, 1, 3), (3, 0, 1) এবং (5, 5, 5)

অনু. 2 : (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ও (x_3, y_3, z_3) বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

অনু. 3 : কোন বিন্দুর বেলনাকার স্থানাঙ্ক $\left(2, \frac{\pi}{4}, 5\right)$ হলে তার কার্তিয় স্থানাঙ্ক কত হবে?

অনু. 4 : এমন একটি বিন্দুর সঞ্চার পথ (Locus) নির্ণয় করুন যা (2, 3, 0) ও (0, 4, 2) বিন্দুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী।

অনু. 5 : এমন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যা (2, 0, 4) ও (– 4, – 2, – 6) বিন্দুদ্বয় সংযোগকারী সরলরেখাকে xoy তল দ্বারা বিভক্ত করে।

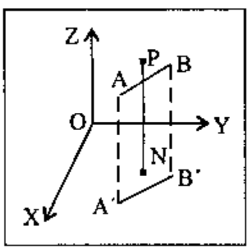
অনু, 6 : A (5, 0, 6) এবং B (–3, 5, 7) বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখা yoz তলকে যে বিন্দুতে ছেদ করে প্রমাণ করুন সেই বিন্দুতে AB-কে 5 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

1.5 দিক্‌যুক্ত রেখাংশ : (Directed line segment)

L একটি সরলরেখা, A ও B, L - সরলরেখার উপর দুটি বিন্দু। তা হলে A থেকে B পর্যন্ত দিক্‌যুক্ত রেখাংশকে AB দ্বারা নির্দেশিত করা হয়, অনুরূপে দিক্‌যুক্ত রেখাংশ BA বলতে বোঝায় B থেকে A পর্যন্ত। এর বিস্তৃত আলোচনা একক 2 - তে করা হয়েছে।

1.5.1 লম্ব অভিক্ষেপ : (projection) বা প্রক্ষেপ

i) সমতলের উপর কোন বিন্দুর এবং কোন নির্দিষ্ট দিক্‌যুক্ত সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ।

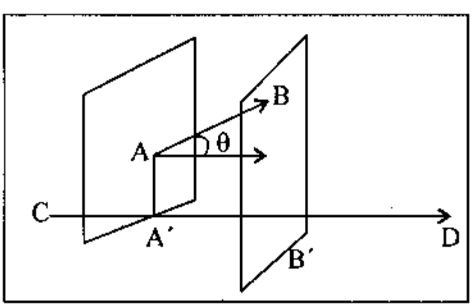


চিত্র : 1.9

ত্রিমাত্রিক দেশে P যে কোন একটি বিন্দু। P বিন্দু হতে xoy তলের উপর PN লম্ব অঙ্কন করা হল। N বিন্দুটিকে বলা হবে P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ xoy তলের উপর। চিত্র নং 1.9 দেখুন।

ত্রিমাত্রিক দেশে AB একটি সরলরেখা। AB সরলরেখার প্রতিটি বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ নেওয়া হল xoy তলের উপর। লম্ব অভিক্ষেপ বিন্দুগুলি xoy তলের উপর আর একটি সরলরেখা A′ B′ সৃষ্টি করবে। এই সরলরেখা A′ B′-কে AB-সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ বলা হবে xoy তলের উপর। চিত্র নং 1.9 দেখুন।

ii) কোন নির্দিষ্ট দিক্‌যুক্ত সরলরেখার উপর কোন রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ : (Projection of a line segment on a directed line)



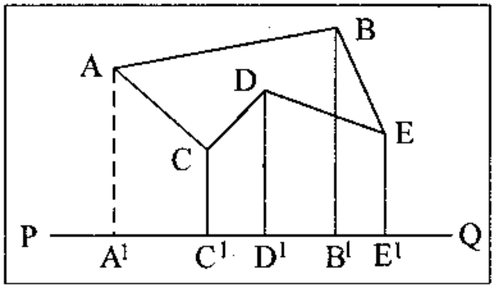
চিত্র : 1.10

চিত্র নং 1.10-এ CD একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ CD রেখার উপর বলতে বোঝায় রেখাংশ A′B′ যেখানে CD সরলরেখার উপর A′, B′ যথাক্রমে A ও B বিন্দুদ্বয়ের লম্ব অভিক্ষেপ। এখানে A ও B বিন্দুগামী দুটি তল অঙ্কন করা হল যারা CD রেখার সঙ্গে লম্ব হয় এবং CD রেখাকে যথাক্রমে A′ ও B′ বিন্দুতে ছেদ করে। ধরি AB ও CD সরলরেখার অন্তর্বর্তী কোন θ। এখানে A′ B′ হবে CD সরলরেখার উপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ যেখানে $A'B' = AB \cos\theta$.

1.5.2 উপপাদ্য 1 :

ত্রিমাত্রিক দেশে A ও B যে কোন দুটি বিন্দু। বিন্দু দুটিকে AB রেখাংশ দ্বার যুক্ত করা যেতে পারে অথবা বিভিন্ন রেখাংশ AC, CD, DE, EB দ্বারাও যুক্ত করা যেতে পারে। প্রমাণ করা যায় PQ রেখার উপর AB-র লম্ব অভিক্ষেপ, PQ-রেখার উপর AC, CD, DE, EB-র লম্ব অভিক্ষেপের যোগফলের সমান।

প্রমাণ :



চিত্র : 1.11

ধরি PQ সরলরেখার উপর A^1, C^1, D^1, E^1, B^1 যথাক্রমে A, C, D, E, ও B বিন্দুগুলির লম্ব অভিক্ষেপ। সুতরাং PQ সরলরেখার উপর AC, CD, DE ও EB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপগুলির যোগফল

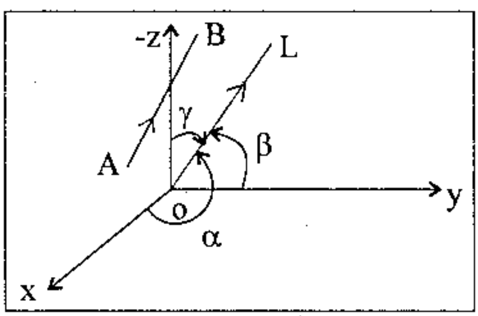
$= A^1C^1 + C^1D^1 + D^1E^1 - E^1B^1$ [চিত্র 1.11 লক্ষ করুন]

$= A^1C^1 + C^1D^1 + D^1B^1$

$= A^1B^1$

= AB-র লম্ব অভিক্ষেপ PQ-রেখার উপর।

1.5.3 দিক্ নির্দেশক কোসাইন (Direction Cosine) বা কোসাইন দিগঙ্ক গোষ্ঠি



চিত্র : 1.12

ত্রিমাত্রিক দেশে ox, oy, oz লম্ব কার্তিয় অক্ষতন্ত্র। এই দেশে AB একটি দিক্‌যুক্ত সরলরেখা। 1.12 নং চিত্রে AB-র উপর তীর চিহ্ন দ্বারা AB-র দিক্ নির্দেশ করা হয়েছে। এখন O বিন্দু গামী সরলরেখা OL অঙ্কন করা হল যা AB-র সমান্তরাল এবং সমদিক্ যুক্ত। ধরি OL রেখা x-অক্ষ, y-অক্ষ ও z-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যথাক্রমে α, β, ও γ কোণে নত আছে। এখন $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – এই তিনটি সংখ্যাকে AB কিংবা OL রেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন বলা হবে।

মন্তব্য :

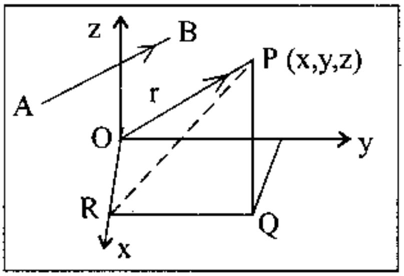
i) পরস্পর সমান্তরাল রেখাগুলির দিক্ নির্দেশক কোসাইন একই হবে।

ii) $\text{Cos}\,\alpha$, $\text{Cos}\,\beta$, $\text{Cos}\,\gamma$ কে সাধারণত ℓ, m, n দ্বারা চিহ্নিত করা হয়,

iii) ox-অক্ষ ; ox, oy ও oz অক্ষের সঙ্গে যথাক্রমে 0°, 90° ও 90° কোণে নত থাকে। সুতরাং ox অক্ষের দিক্‌নির্দেশক কোসাইন ($\text{Cos}\,0^\circ$, $\text{Cos}\,90^\circ$, $\text{Cos}\,90^\circ$) অর্থাৎ (1, 0, 0) হবে। অনুরূপে oy এবং oz অক্ষের দিক্ নির্দেশক কোসাইন যথাক্রমে (0, 1, 0) ও (0, 0,1) হবে।

1.5.4. দিক্ নির্দেশক কোসাইনগুলির মধ্যে সম্বন্ধ :

ℓ, m, n যদি কোন সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন হয় তবে প্রমাণ করা যায় $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$



চিত্র : 1.13

প্রমাণ :

ধরি AB যে কোন সরলরেখা যার দিক্ নির্দেশক কোসাইন ℓ, m, n। AB-র সমান্তরাল ও সমদিক্‌যুক্ত রেখা OP-র দিক্ নির্দেশক কোসাইন ℓ, m, n হবে। ধরি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং OP = r, P বিন্দু হতে xoy তলের উপর PQ লম্ব অঙ্কন করা হল, Q বিন্দু হতে ox অক্ষের উপর QR লম্ব অঙ্কন করা হল যা ox অক্ষকে R বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং OR = x, RQ = y, PQ = z.

$\text{Cos ROP} = l, \quad \angle PRO = 90^\circ$

$\therefore\ x = OR =$ x-অক্ষের উপর OP-র লম্ব অভিক্ষেপ

$= OP\ \text{Cos ROP}$

$= r\ell.$

বা $x^2 = r^2\ \ell^2$

অনুরূপে দেখানো যায় y = rm এবং z = rn

সুতরাং $y^2 = r^2 m^2$ এবং $z^2 = r^2 n^2$

অতএব $x^2 + y^2 + z^2 = r^2\ \ell^2 + r^2 m^2 + r^2 n^2$

বা $r^2 = r^2 (\ell^2 + m^2 + n^2)$

বা $1 = \ell^2 + m^2 + n^2$

1.5.5 দিক্ নির্দেশক অনুপাত : (Direction Ratios)

কোন সরলরেখা op-র দিক্ নির্দেশক অনুপাত রেখাটির দিক্ নির্দেশক কোসাইন ℓ, m, n -র সঙ্গে সমানুপাতিক হয়। অর্থাৎ OP রেখার দিক্ নির্দেশক অনুপাত যদি a, b, c হয় তবে $\frac{a}{\ell} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$ হবে।

ধরি $\frac{a}{\ell} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} = K$

সুতরাং $a = \ell k, b = mk, c = nk$

অতএব $a^2 + b^2 + c^2 = k^2 (\ell^2 + m^2 + n^2) = k^2$

$$\therefore \ \ell = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \ m = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, n = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

মন্তব্য :

i) এখানে OP-র দিক্ নির্দেশক অনুপাত ধনাত্মক হবে এবং PO-র দিক্‌নির্দেশক অনুপাত ঋণাত্মক হবে।

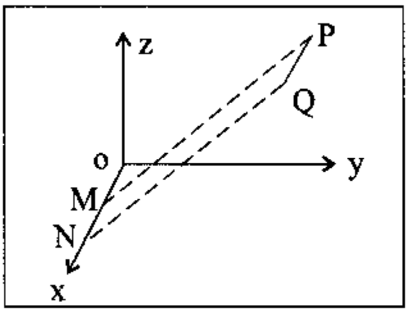
ii) যে কোন তিনটি সংখ্যাকে কোন সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন ধরা যায় না, কারণ আপনাদের মনে রাখতে হবে $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ শর্তটি সিদ্ধ হওয়া দরকার।

1.5.6 উপপাদ্য 2

P ও Q দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2) হলে PQ রেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন হবে

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}\right)$$

প্রমাণ :



চিত্র : 1.14

ধরি PQ রেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন (ℓ, m, n), P ও Q বিন্দু দুটি হতে ox-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব অঙ্কন করা হল, সুতরাং $OM = x_1$, $ON = x_2$ এখানে আপনারা স্পষ্টই বুঝতে পারছেন MN হল PQ সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ ox-অক্ষের উপর। তা হলে

$MN = PQ.\ell$

বা $ON - OM = PQ.\ell$

বা $x_2 - x_1 = PQ.\ell$

$$\text{সুতরাং } \ell = \frac{x_2 - x_1}{PQ}$$

অনুরূপে oy অক্ষ ও oz অক্ষের উপর P ও Q বিন্দুদ্বয় হতে লম্ব অঙ্কন করে দেখানো যাবে

$m = \frac{y_2 - y_1}{PQ}$ এবং $n = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$

অতএব PQ সরলরেখার দিক নির্দেশক কোসাইন

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}\right)$$

মন্তব্য : যেহেতু $\frac{x_2 - x_1}{\ell} = \frac{y_2 - y_1}{m} = \frac{z_2 - z_1}{n} = PQ$

সুতরাং $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ সংখ্যা তিনটি PQ রেখার দিক্ নির্দেশক অনুপাত হবে।

1.5.7 উপপাদ্য 3

$A(x_1, y_1, z_1)$ ও $B(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশ AB-র লম্ব অভিক্ষেপ L সরলরেখার উপর

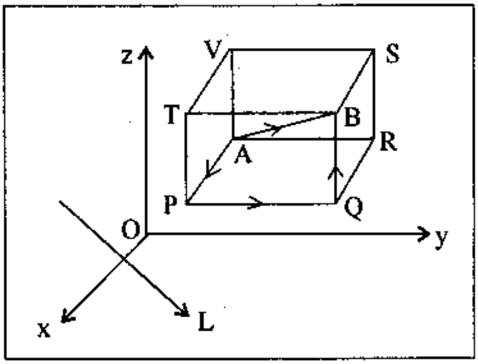
$(x_2 - x_1)\,\ell + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)\,n$

হবে যেখানে (ℓ, m, n) – L সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন।

প্রমাণ :

একটি আয়ত ষড়তলক (parallelopiped) অঙ্কন করা হল যার একটি কর্ণ AB ; এখানে AP, PQ, QB রেখাগুলি যথাক্রমে x-অক্ষ, y-অক্ষ ও z-অ ক্ষের সমান্তরাল ও সমদিক্ যুক্ত। অতএব

$AP = x_2 - x_1, \quad PQ = y_2 - y_1, \quad QB = z_2 - z_1$



চিত্র : 1.15

AB -এর লম্ব অভিক্ষেপ L-সরলরেখার উপর

= AP-র লম্ব অভিক্ষেপ L - র উপর

+ PQ-র লম্ব অভিক্ষেপ L - র উপর

+ QB-র লম্ব অভিক্ষেপ L - র উপর

[উপপাদ্য 1 (1.5.2)-র সাহায্যে]

$= AP.\ell + PQ.m + QB.n$

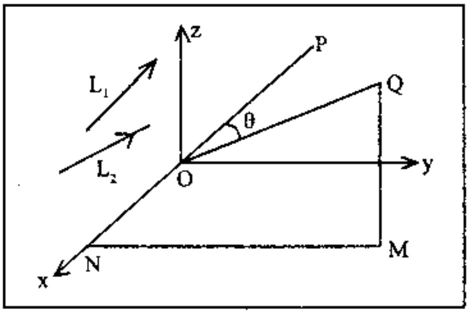
$= (x_2 - x_1)\ell + (y_2 - y_1)m + (z_2 + z_1)n$

[যেহেতু AP রেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং L ও x অক্ষের অন্তর্গত কোণের কোসাইন ℓ, অনুরূপে PQ ও QB রেখার বেলায় তাদের লম্ব অভিক্ষেপ একই ভাবে পাওয়া যাবে]

1.5.8. উপপাদ্য 4 :

L_1 ও L_2 সরলরেখা দুটির দিক্ নির্দেশক কোসাইন যথাক্রমে (ℓ_1, m_1, n_1) ও (ℓ_2, m_2, n_2) এবং রেখা দুটির অন্তর্গত কোণ θ হলে প্রমাণ করা যায় $\text{Cos}\,\theta = \ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2$

প্রমাণ :



চিত্র : 1.16

ধরি OP ও OQ রেখা দুটি মূলবিন্দুগামী যারা যথাক্রমে L_1 ও L_2 সরলরেখার সঙ্গে সমান্তরাল, সুতরাং OP ও OQ-র অন্তর্গত কোণ θ হবে। ধরি $P = (x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q = (x_2, y_2, z_2)$ Q বিন্দু হতে xoy তলের উপর QM লম্ব অঙ্কন করা হল এবং M বিন্দু হতে ox-অক্ষের উপর MN লম্ব অঙ্কন করা হল যা ox-অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং $ON = x_2 = OQ.\ell_2$

$NM = y_2 = OQ.m_2$

$MQ = z_2 = OQ.n_2$

OP রেখার উপর OQ-র লম্ব অভিক্ষেপ OP-রেখার উপর ON, NM ও MQ-র লম্ব অভিক্ষেপের যোগফলের সমান।

অতএব

$$\begin{aligned} OQ.\text{Cos}\,\theta &= x_2\,\ell_1 + y_2\,m_1 + z_2\,n_1 \\ &= (OQ.\ell_2)\ell_1 + (OQ.m_2)m_1 + (OQ.n_2)n_1 \\ \Rightarrow \quad \text{Cos}\,\theta &= \ell_1\,\ell_2 + m_1\,m_2 + n_1\,n_2 \end{aligned}$$

মন্তব্য :

i) যদি L_1 ও L_2 সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হয় তবে,
$\ell_1\,\ell_2 + m_1\,m_2 + n_1\,n_2 = 0$ হবে যেহেতু $\text{Cos}\,90^\circ = 0$

ii) যদি L, M, N ও L^1, M^1, N^1 যথাক্রমে L_1 ও L_2 রেখাদ্বয়ের দিক্ নির্দেশক অনুপাত হয় তবে

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{LL^1 + MM^1 + NN^1}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\;\sqrt{L^{1^2} + M^{1^2} + N^{1^2}}}$$

1.5.9 ত্রিমাত্রিক দেশে কোন ত্রিভুজ Δ-র লম্ব অভিক্ষেপ তিনটি অক্ষ তলের উপর যথাক্রমে Δ_1, Δ_2, Δ_3 হলে প্রমাণ করা যায়

$$\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2$$

প্রমাণ :

Δ ত্রিভুজটি যে সমতলের উপর অবস্থিত ধরি সেই সমতলের উপর লম্ব সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন Cos α, Cos β, Cos γ, Δ ত্রিভুজটির লম্ব অভিক্ষেপ yoz তলের উপর Δ Cos α।

সুতরাং $\Delta_1 = \Delta \text{ Cos } \alpha$

অনুরূপে $\Delta_2 = \Delta \text{ Cos } \beta$

এবং $\Delta_3 = \Delta \text{ Cos } \gamma$

অতএব $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = \Delta^2 \text{ Cos}^2\alpha + \Delta^2 \text{ Cos}^2\beta + \Delta^2 \text{ Cos}^2\gamma$

$$= \Delta^2 (\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma)$$

$$= \Delta^2 \qquad [\because \text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = 1$$

1.5.10 ত্রিমাত্রিক দেশে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

মনে করি ABC একটি ত্রিভুজ যেখানে $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ $C = (x_3, y_3, z_3)$ এবং এই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ. এখানে A, B, C বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ yoz তলের উপর যথাক্রমে $(o, y_1 z_1)$, (o, y_2, z_2) ও (o, y_3, z_3) হবে। আপনাদের নিশ্চয়ই মনে আছে দ্বিমাত্রিক তলে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\left\{y_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_3)\right\}$ হয় যেখানে শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)। যদি (o, y_1, z_1), (o, y_2, z_2) ও (o, y_3, z_3) দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ_1 ধরা হয় তবে

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\left\{y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

অনুরূপে A, B, C বিন্দুগুলির zox ও xoy তলের উপর লম্ব অভিক্ষেপ অঙ্কন করে দেখানো যায়

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

আপনারা আগে প্রমাণ করেছেন

$$\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2$$

অতএব $\Delta^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ z_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$

উদাহরণ-মালা :

উদা : 4(a) এমন একটি সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন বার করুন যা x-অক্ষ, y-অক্ষ, ও z-অক্ষের সঙ্গে সমান কোণে নত থাকে।

সমাধান : ধরি রেখাটি x-অক্ষ, y-অক্ষ ও z-অক্ষের সঙ্গে α কোণে নত থাকে। সুতরাং রেখাটির দিক্ নির্দেশক কোসাইন $\text{Cos}\,\alpha, \text{Cos}\,\alpha, \text{Cos}\,\alpha$ হবে।

অতএব $\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha = 1$

বা $\text{Cos}^2\alpha = \frac{1}{3}$

বা $\text{Cos}^2\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

সুতরাং রেখাটির দিক্ নির্দেশক কোসাইন $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

উদা : 4(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \right)\frac{1}{2}$ কি কোন সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন হতে পারে?

সমাধান :

এখানে $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n = \frac{1}{2}$

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \neq 1$$

সুতরাং $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ কোন সরলরেখার দিক নির্দেশক কোসাইন হতে পারে না।

উদা : 5 L_1 ও L_2 সরলরেখা দুটির দিক্ নির্দেশক অনুপাত যথাক্রমে (a, b, c) ও (a^1, b^1, c^1) হলে এমন একটি সরলরেখার দিক নির্দেশক অনুপাত নির্ণয় করুন যা L_1 ও L_2 উভয় রেখার সঙ্গে লম্ব হবে।

সমাধান : ধরি নির্ণেয় সরলরেখার দিক নির্দেশক অনুপাত (ℓ, m, n)

অতএব শর্তানুসারে $a\,\ell + b\,m + c\,n = 0$

এবং $a^1\ell + b^1 m + c^1 n = 0$

উপরের সমীকরণ দুটি থেকে বজ্রগুণন করে আপনারা লিখতে পারেন

$$\frac{\ell}{bc^1 - b^1c} = \frac{m}{ca^1 - ac^1} = \frac{n}{ab^1 - a^1 b}$$

অতএব নির্ণেয় দিক্ নির্দেশক অনুপাত
$(bc^1 - c\,b^1, ca^1 - ac^1, ab^1 - a^1b)$

উদা : 6 দুটি সরলরেখার দিক্ নির্দেশক অনুপাত যথাক্রমে (1, 1, 2) ও $(\sqrt{3}, -\sqrt{6}, 4)$ হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণের মান কত?

সমাধান : প্রথম সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন।

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}},\ \frac{2}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} \text{ বা } \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}$$

অনুরূপে দ্বিতীয় সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন। A

$$\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{\sqrt{6}}{5},\ \frac{4}{5}$$

ধরি সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণের মান θ

$$\text{অতএব } \cos\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{\sqrt{6}}{5}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{6}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}+8\right)$$

অনুশীলনী :

অনু : 7 তিনটি সমতলীয় সরলরেখা যাদের দিক্ নির্দেশক কোসাইন যথাক্রমে (ℓ_1, m_1, n_1), (ℓ_2, m_2, n_2), (ℓ_3, m_3, n_3) একটি বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ করুন

$$\begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_1 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

অনু : 8 (0, 2, – 3) ও (3, – 1, 2) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন বার করুন।

অনু : 9 $y = mx + c$ সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন নির্ণয় করুন।

অনু : 10 তিনটি সরলরেখার দিক নির্দেশক অনুপাত যথাক্রমে (1, – 2, 3), (1, – 2, 1), (4, 1, – 2) হলে প্রমাণ করুন সরলরেখা তিনটি পরস্পর লম্ব হবে।

অনু : 11 (2, – 1, 4) এ (0, 1, 5) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট দুটি বিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখার উপর (3, 3, 5) ও (5, 4, 3) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট দুটি বিন্দুর সংযোগকারী সরললেখার লম্ব অভিক্ষেপ বার করুন।

অনু : 12 প্রমাণ করুন তিনটি সরলরেখা যাদের দিক্ নির্দেশক অনুপাত যথাক্রমে (2, 0, 5), (2, 2, 3) ও (4, 3, 7) সমতলীয়।

1.6 সারাংশ :

এই এককে আপনারা যা জানতে পারলেন তার সংক্ষিপ্ত বিবরণ নিম্নে দেওয়া হল :

(i) **ত্রিমাত্রিক কার্তিয়, বেলনাকার ও গোলীয় স্থানাঙ্ক :**

ত্রিমাত্রিক দেশে যে কোন বিন্দু P-র কার্তিয় স্থানাঙ্ক তিনটি পরস্পর লম্ব অক্ষ x′ox, y′oy, z′oz-র সাপেক্ষে (x, y, z) দ্বারা সূচিত হয়। P বিন্দুর বেলনাকার ও গোলীয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\{x = r \text{ Cos } \theta, y = \text{Sin } \theta, z = z\}$ ও $\{x = \rho \text{ Sin } \theta \text{ Cos } \phi, y = \rho \text{ Sin } \theta \text{ Sin } \phi, z = \rho \text{ Cos } \theta\}$ দ্বারা নির্দেশিত হয়।

(ii) ত্রিমাত্রিক দেশে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট দুই বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব =

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(iii) A ও B বিন্দুর কার্তিয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2) হলে যে কোন বিন্দু P যা AB কে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত (বা বহির্বিভক্ত) করে তার স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+1}\right)\left[\text{বা } \frac{mx_2 - nx_1}{m-1}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n} = \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right]$$

হবে।

(iv) $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

(v) **লম্ব অভিক্ষেপ :** AB ও CD সরলরেখার অন্তবর্তী কোণ θ হলে, AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ CD সরলরেখার উপর A′B′ দ্বারা সূচিত হবে যেখানে $A'B' = AB \text{ Cos } \theta$ [চিত্র নং 1.10]

(vi) কোন সরলরেখা যদি ox, oy ও oz অক্ষের সঙ্গে যথাক্রমে α, β, γ কোণে নত থাকে তবে সেই রেখার দিক নির্দেশক কোসাইন বলতে বুঝি Cos α, Cos β, Cos γ এবং $\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = 1$ হবে।

(vii) কোন সরলরেখার দিক নির্দেশক কোসাইন ℓ, m, n হলে সেই রেখার দিক্ নির্দেশক অনুপাত ℓ, m, n-র সঙ্গে সমানুপাতিক হয়। অর্থাৎ যদি দিক নির্দেশক অনুপাত a, b, c হয় তবে $\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$ তবে। এখানে

$$\ell = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, m = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, n = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(viii) L_1 এবং L_2 সরলরেখা দুটির দিক নির্দেশক কোসাইন যথাক্রেমে (ℓ_1, m_1, n_1) ও (ℓ_2, m_2, n_2) এবং রেখাদুটির অন্তর্গত কোণ θ হলে $\text{Cos } \theta = \ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$.

(ix) $A(x_1, y_1, z_1)$ ও $B(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুদুটির সংযোজক রেখাংশ AB-র লম্ব অভিক্ষেপ (ℓ, m, n) দিক্ নির্দেশক কোসাইন বিশিষ্ট L সরলরেখার উপর $(x_2 - x_1)\,\ell + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)n$ হবে।

1.7 বিবিধ প্রশ্নমালা

প্রশ্ন : 1. কোন বিন্দুর গোলীয় স্থানাঙ্ক $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ হলে তার কার্তিয় স্থানাঙ্ক কত হবে?

প্রশ্ন : 2. প্রমাণ করুন তিনটি বিন্দু যাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, 5, 0), (2, 6, 2) ও (2, 3, – 1) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রশ্ন : 3. প্রমাণ করুন তিনটি বিন্দু P, Q, R যাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 5, – 4), (1, 4, -3) ও (4, 7, – 6) সমরেখ (Collinear).

প্রশ্ন : 4. A (0, 0, 0), B (3, – 4, 4) ও C (7. 2. 4) বিন্দুগামী তলে D (x, y, z) এমন একটি বিন্দু যে ABCD একটি সামান্তরিক গঠন করে। D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

প্রশ্ন : 5. কোন বিন্দু P-র স্থানাঙ্ক (2,1, 2) হলে মূলবিন্দু ও P-র সংযোজক সরলরেখার দিক নির্দেশক কোসাইন বার করুন।

প্রশ্ন : 6. কোন সরলরেখা ox ও oy অক্ষদ্বয়ের সঙ্গে যথাক্রমে 30° ও 60° কোণে নত হলে ঐ সরলরেখাটি oz অক্ষের সঙ্গে কত কোণে নত থাকবে?

প্রশ্ন : 7. মূলবিন্দুগামী কোন সরলরেখার দিক্ নির্দেশক অনুপাত (1, 2, 3) হলে ঐ রেখার উপর অবস্থিত এমন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যার দূরত্ব মুল বিন্দু থেকে 5 একক।

প্রশ্ন : 8. যদি কোন রেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ হয় তবে প্রমাণ করুন $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$

প্রশ্ন : 9. প্রমাণ করুন A(2, 3, 1), B(-2, 2, 0) ও C(0, 1, –1) বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ। অন্য কোণ দুটির মান কত হবে?

প্রশ্ন : 10. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি A(2, -5, 3), B(1, -7, 4) C(2, -3, 5) হলে তার ক্ষেত্রফল কত হবে?

প্রশ্ন : 11. A (0, 1, 7), B(1, 0, 5), C(-1, 2, 4) এবং D (2, 5, -2) চারটি বিন্দু, নিম্নলিখিত লম্ব অভিক্ষেপগুলি নির্ণয় করুন।

i) AB-র লম্ব অভিক্ষেপ CD-র উপর

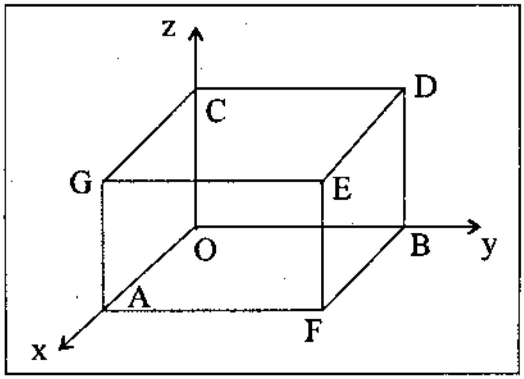
ii) CA-র লম্ব অভিক্ষেপ CD-র উপর

iii) AC-র লম্ব অভিক্ষেপ BD-র উপর

প্রশ্ন : 12. চিত্রে OAFBDEGC একটি আয়ত ষড়তলক। OA = a, OB = b, OC = c হলে

i) OE, AD, CF কর্ণগুলির দিক নির্দেশক কোসাইন বার করুন

ii) OE ও AD-র অন্তর্বর্তী কোণের মান কত ?



চিত্র : 1.17

প্রশ্ন : 13. L_1 ও L_2 রেখা দুটির দিক্ নির্দেশক কোসাইন যথাক্রমে (ℓ_1, m_1, n_1) ও (ℓ_2, m_2, n_2) এবং রেখা দুটির অন্তর্গত কোণ θ হলে প্রমাণ করুন

$$\mathrm{Sin}\theta = \left\{\begin{vmatrix}\ell_1 & m_1\\ \ell_2 & m_2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}n_1 & \ell_1\\ n_2 & \ell_2\end{vmatrix}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

প্রশ্ন : 14. (1, 2, – 1) এবং (2, – 3, 6) দিক্ নির্দেশক অনুপাতবিশিষ্ট সরলরেখা দুটির উপর লম্ব সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন নির্ণয় করুন।

1.8 সমাধান/উত্তরমালা

অনুশীলনীর সমাধান

অনু : 1. ত্রিভুজের ভর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

$$= \left(\frac{1+3+5}{3}, \frac{1+0+5}{3}, \frac{3+1+5}{3}\right)$$

$$= (3, 2, 3)$$

অনু : 2. ধরি ABC ত্রিভুজের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ও (x_3, y_3, z_3)। BC বাহুর মধ্য বিন্দু D হলে তার স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$ ∴ AD মধ্যমার দূরত্ব হবে

$$\sqrt{\left(\frac{x_2+x_3}{2}-x_1\right)^2 + \left(\frac{y_2+y_2}{2}-y_1\right)^2 + \left(\frac{z_2+z_3}{2}-z_2\right)^2}$$

অনুরূপে অন্য মধ্যমা দুটির দূরত্ব আপনারা নিজেরাই নির্ণয় করতে পারবেন।

অনু : 3. ধরি P বিন্দুর বেলনাকার স্থানাঙ্ক (r, θ, z) এবং কার্তিয় স্থানাঙ্ক (x, y, z) সুতরাং $r = 2, \theta = \frac{\pi}{4}$, $z = 5$.

$x = r\,\text{Cos}\,\theta \;= 2\,\text{Cos}\,\frac{\pi}{4} \;=\; \frac{2}{\sqrt{2}}$

$y = r\,\text{Sin}\,\theta \;=\; 2\,\text{Sin}\,\frac{\pi}{4} \;=\; \frac{2}{\sqrt{2}}$

$z = z \;=\; 5$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তিয় স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\,,\;\frac{2}{\sqrt{2}}\,,\;5\right)$

অনু : 4. ধরি $A = (2, 3, 0)$ এবং $B = (0, 4, 2)$, P এমন একটি বিন্দু যা A ও B বিন্দু দুটি হতে সমদূরবর্তী। ধরি $P = (\alpha, \beta, \gamma)$

$\therefore$ $AP = BP$, বা $(\alpha - 2)^2 + (\beta - 3)^2 + (\gamma - 0)^2 \;=\; (\alpha - 0)^2 + (\beta - 4)^2 + (\gamma - 2)^2$

বা $4\alpha - 2\beta - 4\gamma + 7 \;=\; 0$

অতএব P বিন্দুর সঞ্চার পথ $4x - 2y - 4z + 7 = 0$

অনু : 5 ধরি প্রয়োজনীয় বিন্দুটি (x, y, z) যা প্রদত্ত বিন্দু দ্বারা সংযোজক রেখাকে xoy তল দ্বারা $m : n$ অনুপাতে ছেদ করে।

সুতরাং $z = \frac{-6m + 4n}{m + n} = 0$ [এখানে z-এর মান শূন্য হবে কারণ xoy তলে অবস্থিত কোন বিন্দুর z-র স্থানাঙ্ক শূন্য]

বা $\frac{m}{n} \;=\; \frac{2}{3}$

$\therefore\; x \;=\; \frac{2.(-4) + 3.2}{2 + 3} = -\frac{2}{5}$

$y \;=\; \frac{2(-2) + 3.0}{2 + 5} = -\frac{4}{5}$

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $= \left(-\frac{2}{5}\;,\;-\;\frac{4}{5}\,,\;0\right)$

অনু : 6. এখানে yoz তলে অবস্থিত কোন বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক শূন্য হবে। এবার অনু : 5 এর মত করে করুন

অনু : 7. ধরি তিনটি রেখা যে তলে অবস্থিত তার উপর লম্ব সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন (ℓ, m, n)

যেহেতু লম্ব সরলরেখাটি তিনটি প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব

সুতরাং $\ell_1\,\ell + m_1\,m + n_1\,n = 0$

$\ell_2\,\ell + m_2\,m + n_2\,n = 0$

$\ell_3\,\ell + m_3\,m + n_3\,n = 0$

এই সমীকরণ তিনটি থেকে ℓ, m, n অপনয়ন করে পাওয়া যায়

$$\begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

অনু : 8. $(0, 2, -3)$ ও $(3, -1, 2)$ সংযোজক রেখার দিক্ নির্দেশক

অনুপাত $(3-0, -1-2, 2+3)$ বা $(3, -3, 5)$

সুতরাং এই রেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন

$$\frac{3}{\sqrt{3^2+3^2+5^2}}, \frac{-3}{\sqrt{3^2+3^2+5^2}}, \frac{5}{\sqrt{3^2+3^2+5^2}} \text{ বা } \frac{3}{\sqrt{43}}, \frac{-3}{\sqrt{43}}, \frac{5}{\sqrt{43}}$$

অনু : 9 প্রদত্ত সরলরেখাটি xoy তলে অবস্থিত। সুতরাং এই সরলরেখাটি z-অক্ষের সঙ্গে $\frac{\pi}{2}$ কোণে নত আছে। এখানে $m = \tan\theta$ । অতএব x-অক্ষের সঙ্গে সরলরেখাটি θ কোণে এবং 7-অক্ষের সঙ্গে $\frac{\pi}{2} - \theta$ কোণে নত আছে। অতএব সরলরেখাটির দিক্ নির্দেশক কোসাইন $\left(\text{Cos}\theta, \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \text{Cos}\frac{\pi}{2}\right)$ বা $(\text{Cos}\,\theta, \text{Sin}\,\theta, 0)$

অনু : 10. নিজেরা প্রমাণ করুন।

অনু : 11. $(2, -1, 4)$ ও $(0, 1, 5)$ স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার দিক্ নির্দেশক অনুপাত $(-2, 2, 1)$. সুতরাং এই সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন $\left(\frac{-2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}, \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}, \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1}}\right)$ বা $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ অতএব উপপাদ্য 3 (1. 5. 7) এর সাহায্যে $(3, 3, 5)$ ও $(5, 4, 3)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ $(2, -1, 4)$ ও $(0, 1, 5)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখার উপর

$$= (5-3)\left(-\frac{2}{3}\right) + (4-3)\left(\frac{2}{3}\right) + (3-5)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}$$

অনু : 12. প্রদত্ত সরলরেখা তিনটির দিক্ নির্দেশক কোসাইন যথাক্রমে $\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{0}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right)$, $\left(\frac{4}{\sqrt{74}}, \frac{3}{\sqrt{74}}, \frac{7}{\sqrt{74}}\right)$ । ধরি সরলরেখা তিনটি সমতলীয়। এখন এই সমতলের উপর লম্বরেখা প্রতিটি সরলরেখার উপর লম্ব হবে। অতএব লম্ব সরলরেখাটির দিক নির্দেশক কোসাইন (ℓ, m, n) হলে আপনারা লিখতে পারেন

$$\ell\,\frac{2}{\sqrt{29}} + m\frac{0}{\sqrt{29}} + n\frac{5}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\ell\,\frac{2}{\sqrt{17}} + m\frac{2}{\sqrt{17}} + n\frac{3}{\sqrt{17}} = 0$$

$$\ell\,\frac{4}{\sqrt{74}} + m\frac{3}{\sqrt{74}} + n\frac{7}{\sqrt{74}} = 0$$

উপরের সমীকরণগুলি থেকে ℓ, m, n অপনয়ন করে পাওয়া যায়

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

অতএব যদি এই নির্ণায়কটি (determinant) সিদ্ধ হয় তবেই বলা যাবে সরলরেখা তিনটি সমতলীয়।

বাম দিকের মান $= 2(14-9) - 0(14-12) + 5(6-8)$

$= 10 - 10$

$= 0.$

$\therefore$ সরলরেখা তিনটি সমতলীয়।

বিবিধ প্রশ্নমালার সমাধান :

প্রশ্ন 1. কোন বিন্দুর কার্তিয় স্থানাঙ্ক (x, y, z) ও গোলীয় স্থানাঙ্ক (ρ, θ, ϕ) হলে আপনারা লিখতে পারেন

$$x = \rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\phi = 2 \operatorname{Sin}\frac{\pi}{4} \operatorname{Cos}\frac{\pi}{4} = 2.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$y = \rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi = 2 \operatorname{Sin}\frac{\pi}{4} \operatorname{Sin}\frac{\pi}{4} = 2.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$z = \rho \operatorname{Cos}\theta = 2 \operatorname{Cos}\frac{\pi}{4} = 2.\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $= (1, 1, \sqrt{2})$

প্রশ্ন : 2 ধরি $A = (4, 5, 0)$, $B = (2, 6, 2)$, $C = (2, 3, -1)$। এখানে $AB = 3$, $BC = 3\sqrt{2}$, $CA = 3$

প্রশ্ন : 3 ধরি $P = (2, 5, -4)$, $Q = (1, 4, -3)$, $R = (4, 7, -6)$

$PQ = \sqrt{3}$, $QR = 3\sqrt{3}$, $RP = 2\sqrt{3}$, অতএব $PQ + RP = RQ$

প্রশ্ন : 4 ধরি D = (x, y, z) এবং AC-র মধ্যবিন্দু $O = \left(\frac{7}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right)$

আবার O বিন্দুটি BD-রও মধ্য বিন্দু হবে যেহেতু সামান্তরিকের কর্ণ দুটি পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

অতএব $\frac{7}{2} = \frac{3+x}{2} \Rightarrow x = 4$

$\frac{2}{2} = \frac{-4+y}{2} \Rightarrow y = 6$

$\frac{4}{2} = \frac{z+4}{2} \Rightarrow z = 0$

$\therefore$ D = (4, 6, 0)

প্রশ্ন : 5. উত্তর $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

প্রশ্ন : 6. ধরি রেখাটির দিক্ নির্দেশক কোসাইন ℓ, m, n

$\therefore \ell = \text{Cos } 30°, \quad m = \text{Cos } 60°$

অতএব $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$

বা $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + n^2 = 1$

বা $n^2 = 0$

বা $n = \text{Cos } 90°$

উত্তর : 90°

প্রশ্ন : 7. ধরি রেখাটির দিক্ নির্দেশক কোসাইন Cos α, Cos β, Cos γ

$\therefore \text{Cos}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \; ; \; \text{Cos}\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \; , \; \text{Cos}\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$

মনে করি বিন্দুটির স্থানাঙ্ক = (x, y, z)

অতএব আপনারা লিখতে পারেন

$x = r\,\text{Cos}\alpha = \frac{5}{\sqrt{14}} \qquad \left[\because \frac{x-0}{\text{Cos}\alpha} = \frac{y-0}{\text{Cos}\beta} = \frac{z-0}{\text{Cos}\gamma} = r\right]$

$$y = r\,Cos\beta = \frac{10}{\sqrt{14}}$$

$$z = r\,Cos\gamma = \frac{15}{\sqrt{14}}$$

প্রশ্ন : 8. নিজেরা করুন

$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1$ -এর সাহায্য নিয়ে।

প্রশ্ন : 9. BA, BC ও CA সরলরেখাগুলির দিক্ নির্দেশক কোসাইন বার করুন। এরপর BA ও BC রেখা দুটির এবং CA ও BA রেখা দুটির অন্তর্গত কোণগুলির মান নির্ণয় করুন। দেখা যাবে BC ও CA-র অন্তর্বর্তী কোণ 90°।

অন্য দুটি কোণের মান যথাক্রমে $Cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ ও $Cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{6}}$ হবে।

প্রশ্ন : 10. ধরি (0, – 5, 3), (0, – 7, 4) ও (0, – 3, 5) বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল A।

$$\therefore\ A_1 = \frac{1}{2}\left\{-5(4-5) - 7(5-3) - 3(3-4)\right\} \text{ বর্গ একক}$$

$= 3$ বর্গ একক

অনুরূপে $A_2 = 1$ বর্গ একক, $A_3 = 1$ বর্গ একক

যেহেতু $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

সুতরাং নির্ণেয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$ বর্গ একক

[এখানে A_1 এর মান (– 3) হচ্ছে। কিন্তু আপনাদের নিশ্চয়ই মনে আছে বিন্দু তিনটিকে যদি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নেওয়া যায় তবে এর মান ধনাত্মক হবে। এখানে ধনাত্মক মান নেওয়া হয়েছে]

প্রশ্ন : 11. AB-র লম্ব অভিক্ষেপ CD সরলরেখার উপর = ABCos θ, AB ও CD-র অন্তর্গত কোণ θ, AB ও CD-র অন্তর্গত কোণ θ।

∴ AB-র লম্ব অভিক্ষেপ CD সরলরেখার উপর

$$= AB\left\{\frac{1-0}{AB}, \frac{2+1}{CD} + \frac{0-1}{AB}\cdot\frac{5-2}{CD} + \frac{5-7}{AB}\cdot\frac{-2-4}{CD}\right\}$$

$$= \frac{3-3+12}{CD} = \frac{12}{\sqrt{3^2+3^2+6^2}} = \frac{12}{\sqrt{54}}$$

অনুরূপে ii) ও iii) নিজেরা করুন।

প্রশ্ন : 12. O বিন্দুকে মূলবিন্দু এবং OA, OB, OC বরাবর যথাক্রমে x-অক্ষ, y-অক্ষ ও z-অক্ষ ধরে পাই O = (o, o, o), A = (a, o, o), B = (o, b, o), C = (o, o, c), D = (o, b, c) , E = (a, b, c), F = (a, b, o), G = (a, o, c).

অতএব OE কর্ণের দিক্ নির্দেশক কোসাইন

$$= \frac{a-o}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b-o}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c-o}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

AD-কর্ণের দিক নির্দেশক কোসাইন = $\frac{o-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b-o}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c-o}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

সুতরাং OE ও OD-র অন্তর্বর্তী কোণ $\text{Cos}^{-1}\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$

অনুরূপে অপর কর্ণগুলির দিক্ নির্দেশক নিজেরা করুন।

প্রশ্ন : 13. আপনারা জানেন

$\text{Cos}\,\theta = \ell_1\,\ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$

অতএব $\text{Sin}^2\theta = (1 - \text{Cos}^2\theta)$

$= 1 - (\ell_1\,\ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)^2$

$= (\ell_1^2 + m_1^2 + m_1^2)(\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - (\ell_1\,\ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)^2$

যেহেতু $\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ and $\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$

$= \ell_1^2 m_2^2 + \ell_1^2 n_2^2 + m_1^2 \ell_2^2 + m_1^2 n_2^2 + n_1^2 m_2^2$

$\qquad - 2\,\ell_1\,\ell_2 m_1 m_2 - 2\ell_1\,\ell_2 n_1 n_2 - 2\,m_1 m_2 n_1 n_2$

$= (\ell_1 m_2 - \ell_2 m_1)^2 + (m_1 m_2 - m_2 m_1)^2 + (n_1\,\ell_2 - n_2\,\ell_1)^2$

$$= \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{vmatrix}^2$$

প্রশ্ন : 14. ধরা যাক্ নির্ণেয় দিক্ নির্দেশক কোসাইন (ℓ, m, n) শর্তানুসারে (ℓ, m, n) দিক বিশিষ্ট সরলরেখাটি $(1, 2, -1)$ ও $(2, -3, 6)$ দিক নির্দেশক অনুপাত বিশিষ্ট সরল রেখা দুটির উপর লম্ব। অতএব

$\ell\,.\,1 + m\,.\,2 + n\,(-1) = 0$

$\ell \cdot 2 + m(-3) + n \cdot 6 = 0$

উপরের সমীকরণ দুটির মধ্যে বজ্রগুণন দ্বারা পাই

$$\frac{\ell}{9} = \frac{m}{-8} = \frac{n}{-7} = \frac{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{194}} = \frac{1}{\sqrt{194}}$$

$$\therefore \ \ell = \frac{9}{\sqrt{194}}, \quad m = \frac{-8}{\sqrt{194}}, \quad n = \frac{-7}{\sqrt{194}}$$

একক 2 ❐ ভেক্টব

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

2.2 উদ্দেশ্য

2.3 ভেক্টরের সংজ্ঞা - সদিক্ রেখাংশ

ভেক্টর সংক্রান্ত কতিপয় সংজ্ঞাদি

2.4 ভেক্টরের বীজগণিত

2.5 সারাংশ

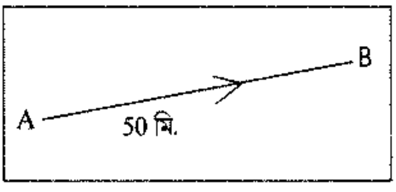
2.6 বিবিধ প্রশ্নমালা

2.7 সমাধান / উত্তরমালা

2.1 প্রস্তাবনা :

আপনাদের সকলেরই হয়ত জানা আছে সকল ভৌত রাশিগুলিকে সাধারণত দুটি ভাগে বিভক্ত করা যায়। একটি স্কেলার রাশি অপরটি ভেক্টর রাশি। যে সকল রাশি শুধু একটি মান বিশিষ্ট, অর্থাৎ কোনো সাংখ্য মানের দ্বারা তাদের সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়, এমন রাশিগুলিকে স্কেলার রাশি বলা হয়। যেমন দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, তাপমাত্রা ইত্যাদি স্কেলার রাশি। কোন বস্তুর ভর 100 গ্রাম বলতে বুঝি একটি বিশেষ এককের সাহায্যে বস্তুর ভরের পরিমাণ একটি বাস্তব সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা হচ্ছে। সুতরাং যে কোনো স্কেলার রাশিকে কোনো উপযুক্ত এককের সাহায্যে বাস্তব সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায়। আপনারা জানেন জলের স্ফুটনাংক্ষ বায়ুর সাধারণ চাপে 100 ডিগ্রি সেন্টিগ্রেড। এখানে তাপমাত্রা স্কেলার রাশি। কেননা এর শুধু মান প্রকাশ করলেই যথেষ্ট।

দ্বিতীয় রাশিটির কিন্তু শুধু মান বললেই তার সম্পূর্ণ রূপ প্রকাশ পায় না। অর্থাৎ একটি নির্দিষ্ট দিক্ নির্দেশ অবশ্যম্ভাবী হয়ে পড়ে। যেমন আমরা যদি বলি দূরত্ব 50 মিটার, তখনই প্রশ্ন জাগে দূরত্ব কোথা থেকে কত পর্যন্ত।



চিত্র : 2.1

এখানে আমাদের বলতে হবে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে অপর কোন নির্দিষ্ট বিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব 50 মিটার। 2.1 নং চিত্রে A ও B দুটি বিন্দু যেখানে A থেকে B-র দূরত্ব 50 মিটার। এখানে এই রাশিটি অর্থাৎ দূরত্বকে আমরা ভেক্টর

রাশি বলব। সুতরাং যে সকল রাশি একটি মান বিশিষ্ট কোনো বিশেষ দিকের ভাব প্রকাশ করে তাদের ভেক্টর রাশি বলা হয়। যেমন সরণ, ভার, গতিবেগ ও বল ভেক্টর রাশির উদাহরণ।

যে কোন জ্যামিতিক, ভৌত ও স্থিতিবিদ্যার সম্পাদ্য বা সমস্যা (problem) ভেক্টরের সাহায্যে আমরা সমাধান করতে পারি। এই সকল সমস্যার সমাধান আমরা ভেক্টর ব্যতীত অন্য পদ্ধতিতেও করতে পারি। কিন্তু দেখা যায় ভেক্টর বা ভেক্টর বিশ্লেষণ বিদ্যার সাহায্যে অতি সহজে আমরা কঠিন গাণিতিক গণনা ছাড়া অনেক সমস্যা সমাধান করতে পারি। তাই ভেক্টর সম্বন্ধে আপনাদের পরিষ্কার জ্ঞান থাকা বিশেষ প্রয়োজন।

এই এককে আমরা প্রথমে আলোচনা করব ভেক্টর হলো নির্দিষ্ট দিক যুক্ত সরলরেখার অংশ বিশেষ। ভেক্টর বীজগণিতের আলোচনাও করা হবে, যার সাহায্যে দেখতে পারবেন অনেক ভৌত ও জ্যামিতিক সমস্যা সমাধান করা যাবে। এই ভেক্টর বীজগণিতে যাবার আগে প্রথমে বিভিন্ন সংজ্ঞার আলোচনা করা হবে। ভেক্টরের ত্রিমাত্রিক প্রকাশের পর কোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর সম্বন্ধেও আপনারা জানতে পারবেন এবং দেখতে পাবেন কোনো ভেক্টরকে স্থানাঙ্ক দিয়েও প্রকাশ করা যায়। অবশেষে রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত ভেক্টরের সাহায্য নিয়ে তিনটি বিন্দু সমরেখ ও চারটি বিন্দু সমতলীয় হবার শর্ত আলোচনা করা হবে এবং এদের প্রয়োগ নানান সমস্যার মাধ্যমে দেখানো হবে।

2.2 উদ্দেশ্য :

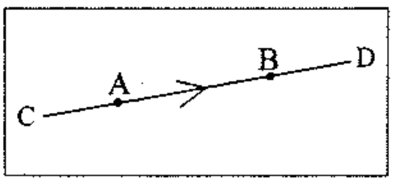
এই এককটি পঠনের পর আপনি

- ভেক্টর ও স্কেলারের পার্থক্য নির্ণয় করতে পারবেন।
- ভেক্টরকে নির্দিষ্ট দিক যুক্ত সরলরেখা দ্বারা প্রকাশ করতে পারবেন।
- বীজগণিতে ভেক্টরের প্রয়োগ দেখাতে পারবেন।
- দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ করতে শিখবেন।
- ভেক্টরের ত্রিমাত্রিক প্রকাশ, অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করতে পারবেন।
- সরল জ্যামিতিক ও ভৌত সমস্যাতে ভেক্টরের ব্যবহার করতে পারবেন।

2.3 ভেক্টর হল নির্দিষ্ট দিক যুক্ত একটি সরলরেখার অংশ বিশেষ (Vector as directed line segment)

2.3.1 দিষ্ট রেখাংশ বা রেখাখণ্ড (Directed line segment) :

কোন একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার নির্দিষ্ট অংশ যার একটি আদি (initial) বিন্দু ও অন্তিম (terminal) বিন্দু থাকে তাকে রেখাংশ বলা হয়। 2.2. নং চিত্রে CD সরলরেখার উপর A ও B দুটি বিন্দু। এখানে $\overrightarrow{AB}$ প্রতীক (symbol) দ্বারা রেখাংশ বোঝায় যার আদি বিন্দু A এবং অন্তিম বিন্দু B। লক্ষণীয়, রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BA}$ কিন্তু এক নয়। অর্থাৎ এরা বিপরীত দিক যুক্ত।



চিত্র : 2.2

2.3.2 রেখাংশের দৈর্ঘ্য (length), অবলম্বন (support) ও অভিদিশা (sense) :

যে কোন রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$-র দৈর্ঘ্য, অবলম্বন ও অভিদিশা থাকে। রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$-র দৈর্ঘ্য বলতে বোঝায় $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ বা AB অর্থাৎ রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$-র মাপাঙ্ক (modulus), রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ যে নির্দিষ্ট সরলরেখার অংশ তাকে বলে অবলম্বন। 2.2 নং চিত্রে রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ হল CD সরলরেখার অংশ। সুতরাং এখানে CD হল অবলম্বন। রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$-র অভিদিশা হল A বিন্দু থেকে B পর্যন্ত এবং রেখাংশ $\overrightarrow{BA}$-র অভিদিশা হল B বিন্দু থেকে A পর্যন্ত। এখানে আপনারা একটু লক্ষ্য করলেই বুঝতে পারবেন রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BA}$-র দৈর্ঘ্য ও অবলম্বন এক কিন্তু অভিদিশা আলাদা। অর্থাৎ

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| , \qquad \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$$

$\overrightarrow{AB}$ কে $\overrightarrow{BA}$-র অথবা $\overrightarrow{BA}$ কে $\overrightarrow{AB}$ ঋণাত্মক ভেক্টর বলা হয়।

2.3.3 স্কেলার ও ভেক্টর :

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে স্কেলারকেএকটি সরলরেখার অংশ বিশেষের দৈর্ঘ্য দ্বারা প্রকাশ করা যায়, এবং ভেক্টর হল নির্দিষ্ট দিকযুক্ত একটি সরলরেখার অংশ বিশেষ যার একটি আদি বিন্দু ও একটি অন্তিম বিন্দু থাকে। অর্থাৎ আরো সহজে বলা যেতে পারে ভেক্টর হল সদিক রেখাংশ। 2.2 নং চিত্র হতে রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ একটি ভেক্টর। যার মানকে $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, যা $\overrightarrow{AB}$-র মাপাঙ্ক। $\left|\overrightarrow{AB}\right|$-র মান কখনও ঋণাত্মক হয় না। একে সবসময় ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হিসেবে চিহ্নিত করা হয় যা একটি নির্দিষ্ট এককে দৈর্ঘ্যের পরিমাপ বোঝায়। বাস্তব সংখ্যাগুলিকে স্কেলার বলা হয়। কোন স্কেলার m-র পরম মান (absolute value) আমরা $|m|$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করে থাকি। যেখানে $|m| = m$, যদি $m \geq 0$ হয় এবং $|m| = -m$, যদি $m < 0$ হয়। একটি চলন্ত বিন্দুর গতিবেগ অথবা একটি বস্তুখণ্ডের কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে প্রযুক্ত একটি বলের মান এবং দিক একটি সরলরেখা দ্বারা সম্পূর্ণ রূপে সূচিত করা যেতে পারে।

ভেক্টর রাশিকে আমরা কোন অক্ষরের মাথার উপর তীর চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করে থাকি। যেমন $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$। অথবা গ্রীক হরফের মাথার উপর তীর চিহ্ন দিয়ে অর্থাৎ $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ দ্বারাও উল্লেখ করা হয়। স্কেলার রাশিকে সাধারণতঃ x, y, z দ্বারা চিহ্নিত করে থাকি।

2.3.4 শূন্য ভেক্টর (Null vector) :

যে ভেক্টরের আদি ও অন্তিম বিন্দু এক তাকে শূন্য ভেক্টর বলে। যথা $\overrightarrow{AA}$ অর্থাৎ যার দৈর্ঘ্য শূন্য। শূন্য ভেক্টরকে $\vec{0}$ বা $\bar{0}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য শূন্য নয় তাকে প্রকৃত (proper) ভেক্টর বলা হয়।

2.3.5 একক ভেক্টর (Unit vector) :

একক দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট ভেক্টরকে একক ভেক্টর বলা হয়। যে কোন ভেক্টর $\vec{a}$-র দিক যুক্ত একক ভেক্টর হল $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ । লক্ষ্য করুন $|\vec{u}| = 1$

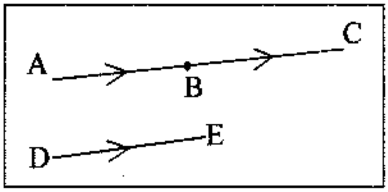
2.3.6 সমান ভেক্টর (Equality of two vectors) :

দুটি ভেক্টরকে সমান ভেক্টর বলা হয় যখন

(i) উভয়ের দৈর্ঘ্য সমান

(ii) উভয়ের অবলম্বন একই সরলরেখা কিংবা দুটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা

(iii) উভয়ের অভিদিশা এক।

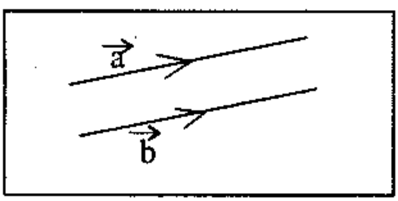


চিত্র : 2.3

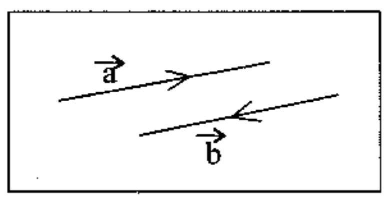
2.3 নং চিত্রে $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE}$। একটু লক্ষ্য করলেই আপনারা বুঝতে পারবেন $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ -র দৈর্ঘ্য, অবলম্বন ও অভিদিশা এক কিন্তু $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য ও অভিদিশা $\overrightarrow{AB}$ অথবা $\overrightarrow{BC}$-র সমান কিন্তু এর অবলম্বন $\overrightarrow{AB}$-র সমান্তরাল।

2.3.7 সদৃশ ও অসদৃশ ভেক্টর (Like and unlike vectors) :

যে দুটি ভেক্টর একই দিক নির্দেশ করে তাদের সদৃশ ভেক্টর বলা হয় এবং যারা বিপরীত দিক নির্দেশ করে তাদের অসদৃশ ভেক্টর বলা হয়। চিত্র নং 2.4-এ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ সদৃশ ভেক্টর এবং চিত্র নং 2.5 -এ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ অসদৃশ ভেক্টর।



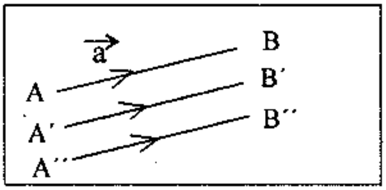
চিত্র : 2.4



চিত্র : 2.5

2.8 মুক্ত ভেক্টর (Free Vector) :

সমান ভেক্টরের ধারণা হতে সহজেই আপনারা বুঝতে পারছেন যে সকল ভেক্টরগুলি একই মান বিশিষ্ট এবং একই দিক যুক্ত তারা প্রত্যেকেই একটি ভেক্টরকেই নির্দেশ করছে। সুতরাং এই সকল সমান ভেক্টরকে যে কোন বিন্দুকে আদি বিন্দু ধরে প্রকাশ করা সম্ভব। 2.6 নং চিত্রে প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. অন্য যে কোন একটি আদি বিন্দু A′ থেকে $\overrightarrow{AB}$-র সমান ও সমান্তরাল একই দিক্‌যুক্ত সরলরেখার অংশ বিশেষ $\overrightarrow{A'B'}$ দ্বারা প্রকাশ করা যাচ্ছে। অনুরূপে $A''B'' = \vec{a}$, এই সকল ভেক্টরগুলিকে মুক্ত ভেক্টর বলে।



চিত্র : 2.6

2.3.9 ভেক্টরকে স্কেলার দ্বারা গুণন (Multiplication of a vector by a scalar) :

আপনারা স্কেলারের সংজ্ঞা থেকে জানতে পেরেছেন স্কেলারকে বাস্তব সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায়। ধরি p একটি বাস্তব সংখ্যা। p-র মান শূন্য, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। $\vec{a}$ যে কোন একটি ভেক্টর। এখানে $p\vec{a}$ বলতে এমন একটি ভেক্টরকে বোঝাবে যে

i) $p\vec{a}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $\vec{a}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্যের $|p|$ গুণ হবে।

ii) $p\vec{a}$ ও $\vec{a}$ ভেক্টরের অবলম্বন একই সরলরেখা বা পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা হবে।

iii) $p\vec{a}$ ও $\vec{a}$-র দিক একই দিক নির্দেশ করবে অর্থাৎ এদের অভিদিশা এক হবে যখন $p > 0$ এবং $p\vec{a}$-র দিক ও $\vec{a}$-র দিক পরস্পর বিপরীত দিক নির্দেশ করবে যখন $p < 0$ হবে।

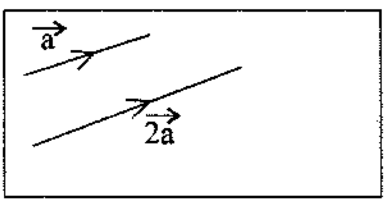
মন্তব্য :

i) $o \,.\, \vec{a} = \vec{o}$, এখানে বাঁ দিকের শূন্য স্কেলার কিন্তু ডান দিকের শূন্য, "শূন্য ভেক্টর" নির্দেশ করে।

ii) $(mn)\,\vec{a} = m\,(n\,\vec{a})$ হবে।

iii) যদি দুটি ভেক্টরের একই অথবা পরস্পর সমান্তরাল অবলম্বন হয় তবে যে কোন একটিকে অপরটির সঙ্গে কোন স্কেলার গুণন দ্বারা প্রকাশ করা যায়। যেমন 2.3 নং চিত্রে B যদি AC-র মধ্য বিন্দু হয় তবে $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$ হবে।

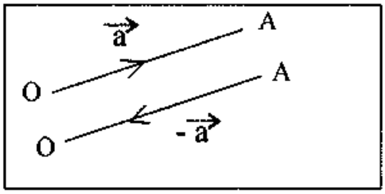
iv) যদি p একটি স্কেলার ও $\vec{a}$ একটি ভেক্টর হয় তা হলে $p\vec{a}$ ভেক্টর $\vec{a}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। উদাহরণ স্বরূপ ধরা যাক $2\vec{a}$ একটি ভেক্টর যা $\vec{a}$ ভেক্টরের সমান্তরাল এবং যার মান $\vec{a}$ ভেক্টরের দ্বিগুণ।



চিত্র : 2.7

2.3.10 ঋণাত্মক ভেক্টর (Negative vector) :

কোন ভেক্টর $\vec{a}$-র ঋণাত্মক ভেক্টর বলতে বুঝি যার মান $\vec{a}$ ভেক্টরের সমান কিন্তু অভিদিশা বিপরীত দিক্ যুক্ত। অর্থাৎ - $\vec{a}$ ভেক্টরকে $\vec{a}$ ভেক্টরের ঋণাত্মক ভেক্টর বলা হবে। $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ হলে $\overrightarrow{AO} = -\vec{a}$ হবে।

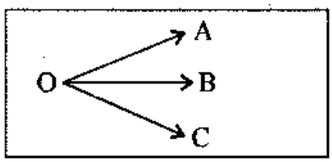


চিত্র : 2.8

মন্তব্য : স্কেলার দ্বারা গুণনে p-র মান –1 হলে ($-\vec{a}$) ভেক্টরটি $\vec{a}$-র সমান মান বিশিষ্ট কিন্তু বিপরীত দিকযুক্ত ভেক্টরকে নির্দেশ করে। এখানে ($-\vec{a}$)-কে $\vec{a}$-র ঋণাত্মক ভেক্টর বলে।

2.3.11 একই আদি বিন্দু বিশিষ্ট ভেক্টব (Co-initial vectors)

দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশির আদি বিন্দু একই বিন্দু হলে তাদের একই আদি বিন্দু বিশিষ্ট ভেক্টর বলা হয়।



চিত্র : 2.9

2.9 চিত্রে $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টরগুলি একই আদি বিন্দু বিশিষ্ট ভেক্টর।

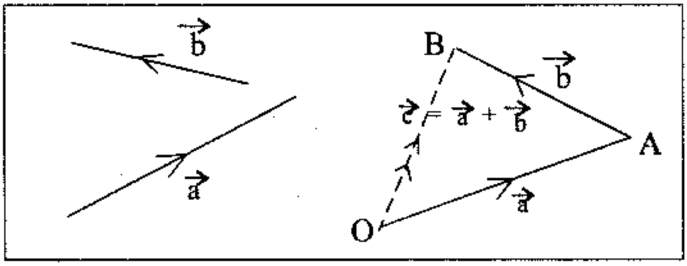
2.4 ভেক্টর বীজগণিত(Algebra of vectors)

ভেক্টর রাশির সম্বন্ধে নিশ্চয়ই আপনাদের ধারণা পরিষ্কার হয়েছে। এখন ভেক্টর রাশিগুলির দ্বারা একটি সেট গঠন করা যায়। সেট সম্বন্ধে অল্প ধারণা থাকলেই হবে। আপনাদের হয়ত মনে আছে কোন প্রদত্ত নিয়মানুসারে কতকগুলি সংজ্ঞায়িত (well defined) বস্তু বা উপাদানের (elements) সমবায়কে(collection) একটি সেট বলা হয়। এবং সেটের এক একটি উপাদানকে সেটের এক একটি পদ (element) বলা হয়। এই ভেক্টর রাশি গুলির দ্বারা গঠিত সেটে যে কোন দুটি ভেক্টরের মধ্যে ত্রিভুজ সূত্রানুসারে (এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে) যোগ প্রক্রিয়া সংযুক্ত হয়ে একটি গাণিতিক কাঠামো বা গঠন সৃষ্টি হয়েছে। এই গাণিতিক কাঠামোটিই হল ভেক্টর বীজগণিত। ভেক্টর বীজগণিতের বিভিন্ন গাণিতিক তত্ত্বগুলি জ্যামিতি, স্থিতিবিদ্যা ও গতিবিদ্যা বিষয়ক আলোচনায় সহায়তা করে।

2.4.1 ভেক্টরের যোগপ্রক্রিয়া (Addition of vectors)

যোগ প্রক্রিয়া : ত্রিভুজ সূত্র (Addition operation : Triangle Law)

ধরি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি নির্দিষ্ট ভেক্টর। আমরা এই দুটি ভেক্টরের যোগফল বার করতে চাই। যে কোন বিন্দু o-কে আদি বিন্দু ধরে নিয়ে $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর অঙ্কন করা হল যা $\vec{a}$ ভেক্টরের সমান। $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ অর্থাৎ $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরের মান ও দিক্ উভয়েই $\vec{a}$ ভেক্টরের সমান। অনুরূপে A বিন্দুকে আদি বিন্দু ধরে $\overrightarrow{AB}$ আরও একটি ভেক্টর অঙ্কন করা হল যা $\vec{b}$ ভেক্টরের সমান। এখানে $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$। তা হলে $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-র যোগফল নির্দেশ করবে অর্থাৎ



চিত্র : 2.10

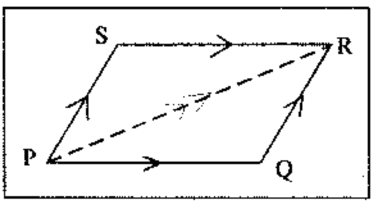
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ অথবা $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ । সুতরাং ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{AB}$-র যোগফল হবে একটি ভেক্টর যা $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টর দ্বারা সম্পূর্ণভাবে রূপ পাবে অর্থাৎ OAB ত্রিভুজের $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টর দুটির যোগফল তৃতীয় বাহু $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা নির্দিষ্ট হবে। যোগফল ভেক্টরটির আদি বিন্দু হবে প্রথম ভেক্টরটির অর্থাৎ $\overrightarrow{OA}$-র আদিবিন্দু এবং অন্তিম বিন্দু হবে দ্বিতীয় ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$-র অন্তিম বিন্দু। একেই বলে ত্রিভুজ সূত্র।

মন্তব্য : i) আমরা লিখতে পারি যে কোন ভেক্টর $\vec{a}$-র জন্য $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$ যেখানে $\vec{O}$ শূন্য ভেক্টর।

ii) এই যোগফল ত্রিভুজের সূত্র সকল প্রকার ভেক্টর দ্বারা সিদ্ধ হয়। কিন্তু এটি আমাদের জ্যামিতির পরিচিত ধর্মকে যেন বিরুদ্ধাচরণ করছে। অর্থাৎ "যে কোন ত্রিভুজের দুটি বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহু থেকে বৃহত্তর হয়।" কিন্তু এখানে লক্ষণীয় ভেক্টরের যোগফল প্রক্রিয়ায় দেখা যায় দুটি বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহুর সমান। এখানে ভেক্টরের যোগফলের ত্রিভুজের বাহুর শুধু মান নয় দিক নির্দেশও আছে।

2.4.2 সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram law of addition)

ধরি একই আদি বিন্দু P বিশিষ্ট $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{PS}$ দুটি ভেক্টর। 2.11 নং চিত্রে PQRS সামান্তরিকটি অঙ্কন করা হল। এখানে $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ ও $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ । এখন ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী লেখা যায় $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ $= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PS}$



চিত্র : 2.11

সুতরাং একই আদিবিন্দু বিশিষ্ট দুটি ভেক্টর $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{PS}$- যোগফল PQRS সামান্তরিকের কর্ণ $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা যায়, একে ভেক্টর যোগফলের সামান্তরিক সূত্র বলে।

2.4.3 বহুভুজ সূত্র

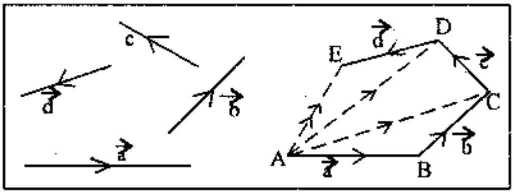
আপনারা 2.12 নং চিত্র থেকে অতি সহজেই বুঝতে পারবেন কি ভাবে 4টি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ কে যোগ করা হবে উপরের সংজ্ঞাদির প্রয়োগে। এখানে ত্রিভুজ সূত্র বারে বারে প্রয়োগ করে ভেক্টর গুলির যোগফল বার করা হয়েছে। 2.12 চিত্র থেকে লিখতে পারেন $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$ এখন $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরের যোগফল $\overrightarrow{AC}$ অর্থাৎ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ বা $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, ত্রিভুজ সূত্রানুসারে।

একই ভাবে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{CD}$-র যোগফল $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

আবার $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{DE}$-র যোগফল $\overrightarrow{AE}$ অর্থাৎ

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$



চিত্র : 2.12

এখানে ABCD বহুভুজের $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}$ চারটি নির্দিষ্ট ভেক্টর হলে তাদের যোগফল $\overrightarrow{AE}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। একেই বহুভুজ সূত্র বলে। একই নিয়মে আপনারা যে কোন সংখ্যক ভেক্টরের যোগফল বার করতে পারবেন।

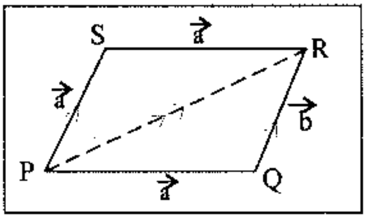
2.4.4 যোগ প্রক্রিয়ার বিভিন্ন নিয়ম : (Laws of addition)

1) বিনিময় সূত্র : (commutative law)

যে কোন দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যে যোগ প্রক্রিয়া বিনিময় নিয়ম মেনে চলে। যথা . $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

প্রমাণ : ধরি $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ও $\vec{b} = \overrightarrow{PS}$ দুটি একই বিন্দু বিশিষ্ট ভেক্টর।

PQRS সামান্তরিকটি অঙ্কন করা হল।



চিত্র : 2.13

এখানে সামান্তরিকের সূত্রের সাহায্যে আপনারা লিখতে পারেন

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \vec{a} + \vec{b} \text{ আবার } \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}$$

$$\text{অতএব } \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} \text{ অথবা } \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

সুতরাং দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যে যোগ প্রক্রিয়া বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

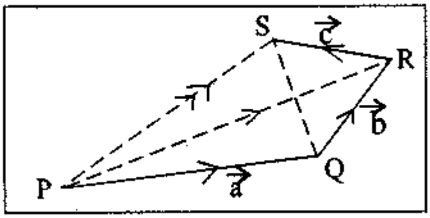
মন্তব্য : যদি সকল ভেক্টর রাশির দ্বারা গঠিত সেটকে V ধরি, তাহলে যে কোন দুটি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b} \in V$ হলে $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ সিদ্ধ হবে।

2) সংযোগ সূত্র : (Associative Law)

যে কোন তিনটি ভেক্টর রাশির মধ্যে যোগ প্রক্রিয়া সংযোগ নিয়ম মেনে চলে। যথা

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

প্রমাণ :



চিত্র : 2.14

ধরি $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$, $\overrightarrow{QR} = \vec{b}$, $\overrightarrow{RS} = \vec{c}$ এখানে ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী

Δ PQR-র $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$, বা $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PR}$

আবার Δ PRS থেকে আপনারা লিখতে পারেন

$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$, বা $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{PS}$ ⟶ (1)

আবার ΔQRS-র $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QS}$ বা $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{QS}$

Δ PQS-র $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$, বা $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{PS}$ ⟶ (2)

সুতরাং (1) ও (2) হতে লেখা যায় $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

অতএব তিনটি ভেক্টর সংযোগ সূত্র মেনে চলে।

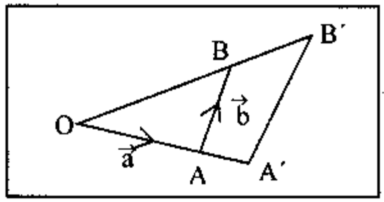
3) স্কেলার দ্বারা ভেক্টর গুণনের বণ্টন সূত্র : (The distributive law for multiplication of a vector by a scalar)

যে কোন দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এবং দুটি স্কেলার m ও n, স্কেলার দ্বারা ভেক্টর গুণনের বণ্টন সূত্র মেনে চলে। যথা

i) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

ii) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

i) প্রমাণ : ধরা যাক m একটি স্কেলার এবং $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$



চিত্র : 2.15

সুতরাং $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ --------- (1)

$\overrightarrow{OA}$ রেখাকে A′ বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে

$\overrightarrow{OA'} = m\vec{a} = m\overrightarrow{OA}$ $\qquad \therefore \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA'}} = \dfrac{1}{m}$

এখন A′ বিন্দু হতে AB-র সমান্তরাল করে A′B′ রেখা অঙ্কন করা হল যা OB বর্ধিত রেখাকে B′ বিন্দুতে ছেদ করে। A′ B′ ও AB রেখার অভিদিশা এক। সুতরাং আপনারা লিখতে পারেন,

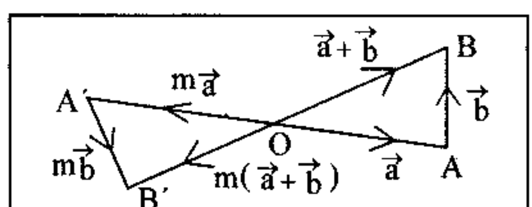
$\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{OB'} = m\overrightarrow{OB}$ $\qquad$ [যেহেতু $AB \parallel A'B'$ $\therefore \dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{1}{m}$]

অতএব $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB} = m\vec{b}$

$\overrightarrow{OB'} = m\overrightarrow{OB} = m(\vec{a} + \vec{b})$ -----------(2) $\qquad$ [সমীকরণ (1) -এর সাহায্যে]

আবার $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$ $\qquad$ [ত্রিভুজ OA′ B′ হতে]

$= m\vec{a} + m\vec{b}$ ------------- (3)



চিত্র : 2.16

$\therefore$ সমীকরণ (2) ও (3) হতে লেখা যায়

$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

এবার m যদি ঋণাত্মক হয় তবেও প্রমাণ করা যাবে

$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

2.16 চিত্রে ধরি $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, m-এর ঋণাত্মক মানের জন্য $\overrightarrow{AO}$ কে এমন ভাবে বর্ধিত করা হল যাতে $\overrightarrow{OA'} = m\,\overrightarrow{OA}$ হয়। অর্থাৎ $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OA}$ বিপরীত দিক নির্দেশ করবে। এখন A′ বিন্দু থেকে BA-র সমান্তরাল A′ B′ রেখা অঙ্কন করা হল যা BO বর্ধিত রেখাকে B′ বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং লেখা যায় (2.16 নং চিত্রানুসারে)

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{1}{m}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{OB'} = m\,\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OA'} = m\overrightarrow{OA}$$

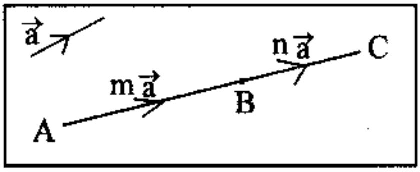
$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} = m\,\overrightarrow{OA} + m\,\overrightarrow{AB} = m\vec{a} + m\vec{b} \text{ ——— } (1)$$

আবার $\overrightarrow{OB'} = m\,\overrightarrow{OB} = m\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = m\,(\vec{a} + \vec{b})$

অতএব সমীকরণ (1) ও (2) হতে লেখা যায়

$$m\,\vec{a} + m\,\vec{b} = m\,(\vec{a} + \vec{b})$$

ii) প্রমাণ :



চিত্র : 2.17

ধরি $\overrightarrow{AB} = m\vec{a}$ সুতরাং $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $\vec{a}$ ভেক্টরের m গুণ। $\overrightarrow{AB}$ কে C বিন্দু পর্যন্ত এমন ভাবে বর্ধিত করা হল যাতে, $\overrightarrow{BC} = n\vec{a}$ হয়। সুতরাং $\overrightarrow{BC}$-র দৈর্ঘ্য $\vec{a}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্যের n গুণ। অতএব $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $\vec{a}$ ভেক্টরের (m + n) গুণ।

$$\therefore \quad \overrightarrow{AC} = (m+n)\,\vec{a} \text{ ——— } (1)$$

আবার $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{a}$ ——— (2)

সুতরাং সমীকরণ (1) ও (2) হতে লেখা যায়

$$(m+n)\,\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$

মন্তব্য : রৈখিক সংযোজনের মৌল ধর্ম গুলিকে (Basic properties of the linear composition) নিম্নলিখিত যোগ সূত্র ও স্কেলার দ্বারা ভেক্টরের গুণন সহযোগে সংক্ষেপে একত্রে সাজানো যেতে পারে।

আমরা যদি সকল ভেক্টর দ্বারা গঠিত সেটকে V ধরি এবং সকল বাস্তব সংখ্যা দ্বারা গঠিত সেটকে R ধরি তবে

i) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{b} + \vec{a}, \ \forall^* \ \vec{a}, \vec{b} \ \in^* V$

ii) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \ \forall \ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ \in V$

iii) $\exists^*$ একটি শূন্য $(\overline{O})$ ভেক্টর যাতে

$\vec{a} + \overline{O} = \vec{a} = \overline{O} + \vec{a} = \forall \vec{a} \in V$

iv) প্রত্যেকটি $\vec{a}$ ভেক্টরের জন্য অপর একটি ভেক্টর $\vec{b} \in V$ পাওয়া যাবে যাতে

$\vec{a} + \vec{b} = \overline{O} = \vec{b} + \vec{a}$

এখানে $\vec{b}$ ভেক্টরটিকে $- \vec{a}$ দ্বারা প্রকাশিত করা হয়।

v) $(m\,n)\,\vec{a} = m\,(n\vec{a}), \forall\ \vec{a} \in V$ এবং $\forall\ m, n \in R$

vi) $1(\vec{a}) = \vec{a}, \forall\ \vec{a} \in V$

vii) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\,\vec{a} + n\,\vec{b}, \forall\ \vec{a},\ \vec{b} \in V$ এবং $\forall\ m \in R$

viii) $(m+n)\,\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}, \forall\ m,n \in R$

এবং $\forall\ \vec{a} \in V$

* ব্যবহৃত প্রতীক চিহ্ন (Symbol)

$\forall$ – For all, প্রত্যেকের জন্য

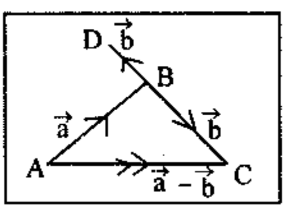
$\in$ – Belong to এখানে $\vec{a} \in V$-র অর্থে $\vec{a}$ ভেক্টরটি V সেটে আছে।

$\exists$ – There exists, অস্তিত্ব থাকবে।

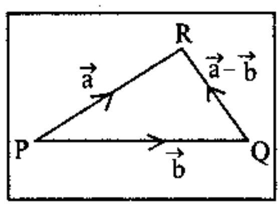
2.4.5 দুটি ভেক্টরের বিয়োগ ফল

দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-র মধ্যে বিয়োগ বলতে আমরা বুঝি $\vec{a}$ ও $(-\vec{b})$ ভেক্টরের মধ্যে যোগফল।

অর্থাৎ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



চিত্র : 2.18 (i)



চিত্র : 2.18(ii)

চিত্র 2.18(i) থেকে আপনাদের নিশ্চয়ই বুঝতে অসুবিধে হচ্ছে না যে $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$

অতএব $\overrightarrow{BC} = -\vec{b}$

চিত্র 2.18(ii) থেকে লেখা যায়

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

বা $\vec{b} + \overrightarrow{QR} = \vec{a}$ বা $\overrightarrow{QR} = \vec{a} - \vec{b}$

যে কোন ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ কে $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ দ্বারা লেখা যায়।

2.4.6 ভেক্টর সমীকরণ : (Vector Equation)

$\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি প্রদত্ত ভেক্টর এবং $\vec{x}$ একটি অজানা ভেক্টর। তা হলে ভেক্টর সমীকরণ $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$, একটি এবং কেবলমাত্র একটি ভেক্টর $\vec{x}$ দ্বারাই সিদ্ধ হবে। যথা

$\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$

এখানে $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$

$(-\vec{a})$ ভেক্টর উভয় পক্ষে যোগ করে পাই

$(-\vec{a}) + \vec{a} + \vec{x} = (-\vec{a}) + \vec{b}$

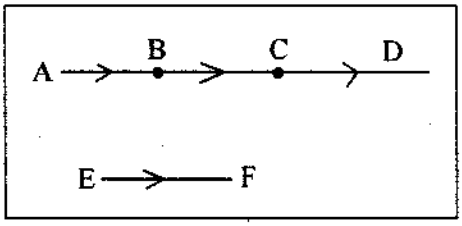
বা $(-\vec{a} + \vec{a}) + \vec{x} = \vec{b} + (-\vec{a})$

বা $\overline{O} + \vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$

বা $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$

2.4.7 সমরেখ ভেক্টব (Collinear Vectors)

দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিকে সমরেখ ভেক্টর বলা হয় যদি তাদের অবলম্বন একই সরলরেখা অথবা পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা হয়। সমান্তরাল ভেক্টরগুলিকে সমরেখ ভেক্টর বলা হয়। আপনারা একটু ভাবলেই বুঝতে পারবেন যে সকল ভেক্টর একই আদি বিন্দু বিশিষ্ট এবং সমরেখ তাদের অবলম্বন একই সরলরেখা হবে। 2.19 নং চিত্র হতে বলা যায় $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ ও $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরগুলি সমরেখীয়।



চিত্র : 2.19

2.4.8 সমতলীয় ভেক্টর (Coplanar Vectors)

তিন বা ততোধিক ভেক্টরকে একই তলে অবস্থিত তিন বা ততোধিক রেখাংশ দ্বারা নির্দেশ করা সম্ভব হলে তাদের সমতলীয় বলা হবে।

2.4.9 রৈখিক সমবায় (Linear Combination)

যদি $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ------------ সম্বন্ধটি সিদ্ধ হয় তবে $\vec{r}$ ভেক্টরকে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ----- ভেক্টর গুলির রৈখিক সমবায় বলা হবে যেখানে x, y, z, -------- স্কেলার রাশি নির্দেশ করে। উদাহরণ স্বরূপ $2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}$ ভেক্টরটি $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ভেক্টরের রৈখিক সমবায়।

মন্তব্য : i) $x\vec{a} + y\vec{b}$ ভেক্টরটি যা $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরের রৈখিক সমবায়, ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-র সঙ্গে সমতলীয় হবে।

ii) দুটি ভেক্টর সমরেখ হলে একটিকে অপরটির রৈখিক সমবায়ে প্রকাশ করা যায়।

iii) যদি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি সমান্তরাল ভেক্টর হয় তবে এদের মধ্যে যে কোন একটিকে অপরটির রৈখিক সমবায়ে প্রকাশ করা যাবে। অর্থাৎ $\vec{b} = x\vec{a}$ বা $\vec{a} = \frac{1}{x}\vec{b}$।

2.4.10 রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত ভেক্টর (Linearly Dependent Vectors)

একটি ভেক্টর তন্ত্র (system of vectors) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ -কে পরস্পর রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত ভেক্টর বলা হবে যদি

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + \text{--------------} = O \text{ ———— } (1)$$

সম্বন্ধটি সিদ্ধ হয় সেখানে x, y, z, ------- এমন কতগুলো স্কেলার রাশি যাদের সবার মান শূন্য নহে অর্থাৎ $(x, y, z, \text{-------}) \neq (o, o, o, \text{------})$

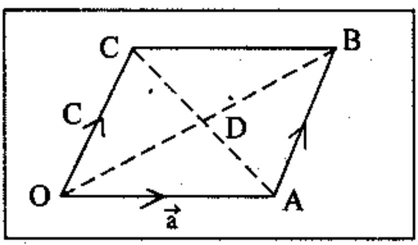
অপরভাবে যদি সমীকরণ (1) সিদ্ধ হয় এবং

$x = y = z = - - - = O$ হয় অর্থাৎ সব কটি স্কেলার রাশির মান শূন্য হয় তবে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, - - - - ভেক্টর গুলি রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হবে না এবং এই ক্ষেত্রে এদের বলা হবে রৈখিক সম্বন্ধহীন (Linerly independent) ভেক্টর। আপনারা নিশ্চয়ই বুঝতে পারবেন যে কোন দুটি সমরেখ ভেক্টর সবসময় রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হবে। তিনটি সমতলীয় ভেক্টর পরস্পর রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হবে বা বিপরীত ক্রমে তিনটি ভেক্টর রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হলে তারা সমতলীয় হবে।

উদাহরণমালা :

উদা : 1 ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ :



চিত্র : 2.20

OABC একটি সামান্তরিক। ধরি $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ এখানে $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ যেহেতু AB = OC এবং AB||OC আপনারা লিখতে পারেন

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ [ত্রিভুজ সূত্রানুসারে OAB ত্রিভুজ থেকে]

$= \vec{a} + \vec{c}$

এবং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ [OAC ত্রিভুজ থেকে]

বা $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$ ----------- (1)

ধরি কর্ণ দুটি পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু O, B, D বিন্দু তিনটি সমরেখীয় অতএব $\overrightarrow{OD} = m\ \overrightarrow{OB}$ লেখা যায়। m একটি স্কেলার। $\therefore\ \overrightarrow{OD} = m\ \overrightarrow{OB}$

$$= m(\vec{a} + \vec{c})$$

অনুরূপে $\overrightarrow{AD} = n\ \overrightarrow{AC} = n(\vec{c} - \vec{a})$ ------------ (2)

এখন ত্রিভুজ OAD থেকে লেখা যায়

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}$$

বা $\vec{a} + n(\vec{c} - \vec{a}) = m(\vec{a} + \vec{c})$

বা $\vec{a} - n\vec{a} - m\vec{a} + n\vec{c} - m\vec{c} = 0$

বা $\vec{a}(1-n-m) + \vec{c}(n-m) = 0$

কিন্তু যেহেতু $\vec{a}$ ও $\vec{c}$ সমান্তরাল ভেক্টর নয় অতএব

$n - m = 0$ এবং $1 - n - m = 0$ হবে। শেষ দুটি সমীকরণের সমাধান হবে $m = n = \frac{1}{2}$

সুতরাং $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OB}$

এবং $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}$ [সমীকরণ (1) ও (2)-এর সাহায্যে]

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{OD}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OB}\right|,\ \left|\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|$$

অর্থাৎ $OD = \frac{1}{2}\ OB$ এবং $AD = \frac{1}{2}\ AC$

অতএব প্রমাণিত হল OB ও AC কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

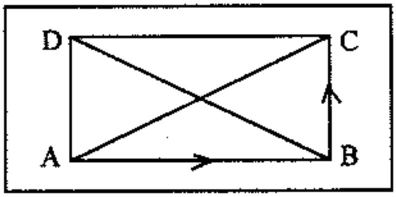
উদা : 2. ABCD সামান্তরিকের AC ও BD দুটি কর্ণ হলে

i) $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$-র দ্বারা প্রকাশ করুন।

ii) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ কে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ -র দ্বারা প্রকাশ করুন।

iii) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ -র দ্বারা প্রকাশ করুণ।

সমাধান :



চিত্র : 2.21

i) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ [ABC ত্রিভুজ থেকে]

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ [যেহেতু $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$]

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ [BAD ত্রিভুজ থেকে]

$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ ________ (1) [ABC ত্রিভুজ থেকে]

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ [ABD ত্রিভুজ থেকে]

$= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ ———— (2)

সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে লেখা যায়

$2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ [যেহেতু $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$ ———— (3)

আবার $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ [ত্রিভুজ ACD থেকে]

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$

$$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$= AC - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$$ [সমীকরণ (3) থেকে]

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

iii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ [ত্রিভুজ ABD থেকে]

$$= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$$

এবং $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ ADC থেকে]

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$$ [সমীকরণ (2) থেকে]

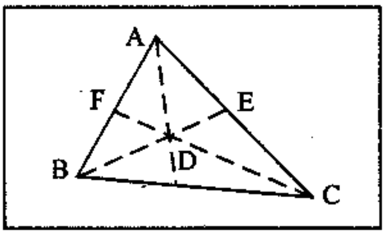
$$= 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$$

উদা : 3. যে কোন ত্রিভুজ ABC-র D, E, F যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুগুলির মধ্য বিন্দু হলে

i) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$-র মান $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$-র রৈখিক সমবায়ে নির্ণয় করুন।

ii) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$-র মান $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BE}$ - এর রৈখিক সমবায়ে নির্ণয় করুন।

সমাধান :



চিত্র : 2.22

i) ABC ত্রিভুজ থেকে আপনারা লিখতে পারেন

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \therefore \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \text{ ——— (1)}$$

ABD ত্রিভুজ থেকে লেখা যায়

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

$\therefore \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [যেহেতু D বিন্দু BC বাহুর মধ্য বিন্দু]

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ [সমীকরণ (1) থেকে]

ABE ত্রিভুজ থেকে $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

$\therefore \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ [যেহেতু E, AC বাহুর মধ্য বিন্দু]

ACF ত্রিভুজ থেকে লেখা যায়

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF}$$

$\therefore \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ [যেহেতু F, AB বাহুর মধ্য বিন্দু]

ii) যেহেতু E বিন্দু AC বাহুর মধ্যবিন্দু

$\therefore \quad \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$ ——— (2)

ABC ত্রিভুজ থেকে লেখা যায়

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}$$

$$= -\overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$$

$$= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$$

ADC ত্রিভুজ থেকে $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$= 2\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) - \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BE}$$

$$= \frac{3}{2}\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$$

ACF ত্রিভুজ থেকে লেখা যায়

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$$

$$= -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}$$

$$= -2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} \quad \text{[সমীকরণ (2) থেকে]}$$

$$= -\frac{3}{2}\ \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE}$$

উদা : 4. প্রমাণ করুন $3\vec{a} - 7\vec{b} - 4\vec{c}, 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ ভেক্টরগুলি সমতলীয় যেখানে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ যে কোন তিনটি ভেক্টর।

সমাধান : তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হবে যদি যে কোন একটিকে অপর দুটি ভেক্টরের রৈখিক সমবায়ে প্রকাশ করা যায়। ধরি তিনটি প্রদত্ত ভেক্টর সমতলীয়।

∴ $3\vec{a} - 7\vec{b} - 4\vec{c} = x(3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) + y(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$ .... (1) যেখানে x ও y দুটি স্কেলার রাশি। এখানে উভয় পক্ষ থেকে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ভেক্টরের সহগকে (Co-efficient) তুলনা করে লেখা যায়

$3 = 3x + y \quad ----\rightarrow (2)$

$-7 = -2x + y \quad ----\rightarrow (3)$

$-4 = x + 2y \quad ----\rightarrow (4)$

সমীকরণ (2) ও (3) কে সমাধান করে পাওয়া যায় $x = 2, y = -3$, x ও y-র এই মানদ্বয় সমীকরণ (4) কে সিদ্ধ করে। সুতরাং সমীকরণ (1) কে লেখা যায় $3\vec{a} - 7\vec{b} - 4\vec{c} = 2(3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) - 3(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$

অতএব আপনারা বলতে পারেন প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

অনুশীলনী :

অনু : 1. একটি সমবাহু ষড়ভুজ (regular hexagon) ABCDEF-র পরপর দুটি বাহুকে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর দ্বারা

প্রকাশ করলে $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ও $\overrightarrow{CE}$ ভেক্টরগুলিকে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দ্বারা প্রকাশ করুন।

অনু : 2. D, E, F যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB-র মধ্য বিন্দু। প্রমাণ করুন $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ বলগুলি $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ বলগুলির সমতুল্য (equivalent), যেখানে O বিন্দুটি ABC ত্রিভুজের তলে অবস্থিত।

অনু : 3. একটি ত্রিভুজের বাহু ভেক্টর গুলি $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ হলে প্রমাণ করুন $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

অনু : 4. ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে প্রমাণ করুন $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$

অনু : 5. M বিন্দু AB-র মধ্যবিন্দু এবং 0 যে কোন বিন্দু হলে $\overrightarrow{OM}$-র নিম্নলিখিত কোন মানটি সঠিক হবে?

i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MA}$, ii) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{MA}$, iii) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$, iv) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

অনু : 6. নিম্নের ভেক্টরগুলি সমতলীয় কিনা দেখান

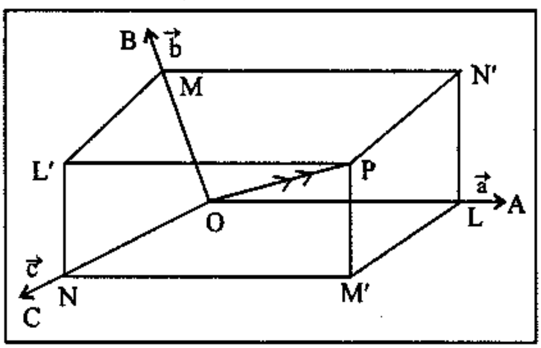
$5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, $7\vec{a} - 8\vec{b} + 9\vec{c}$, $3\vec{a} + 20\vec{b} + 5\vec{c}$

2.4.11 ভেক্টরের ত্রিমাত্রিক প্রকাশ : (Resdution of vectors : To express a given vector in,terms of three given non-coplanar vectors)

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ একই সমতলে অবস্থিত নয় এমন তিনটি ভেক্টর। তাহলে দেখানো যেতে পারে যে কোন অপর ভেক্টর $\vec{r}$ কে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$-র সাপেক্ষে প্রকাশ করা যাবে নিম্নলিখিত গঠনে :

$\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, যেখানে x, y, z, তিনটি স্কেলার। পুনরায় প্রমাণ করা যেতে পারে যে $\vec{r}$-র $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$-র সাপেক্ষে উল্লেখিত প্রকাশটি অনন্য (unique)

প্রমাণ :



চিত্র : 2.23

O যেকোন একটি বিন্দু। ধরি $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OP} = \vec{r}$। যেহেতু $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ ভেক্টরগুলি সমতলীয় নয় সুতরাং BOC, COA, AOB আলাদা তিনটি তল উৎপন্ন করে। P বিন্দু দিয়ে যায় এমন তিনটি তল অঙ্কন করা হল যারা BOC, COA ও AOB তলের সমান্তরাল এবং OA, OB ও OC রেখাকে যথাক্রমে L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। আপনারা দেখতে পারছেন এখানে একটা সামান্তরিক ষড়তলক (parallelopiped) উৎপন্ন হল, যার একটি কর্ণ (diagonal) OP.

$$\vec{r} = \vec{OP} = \vec{OL} + \vec{LP} \quad \text{[ত্রিভুজ সূত্রানুসারে]}$$

$$= \vec{OL} + \vec{LN'} + \vec{N'P}$$

$$= \vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON}$$

এখন $\vec{OL}$ ও $\vec{OA}$ সমরেখ ভেক্টর হওয়ায় আমরা পাই $\vec{OL} = x\vec{OA} = x\vec{a}$, অনুরূপে $\vec{OM} = y.\vec{OB} = y\vec{b}$ এবং $\vec{ON} = z.\vec{OC} = z.\vec{c}$, এখানে x, y, z স্কেলার রাশি। সুতরাং,

$$\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

এবার দেখাব x, y,. z- এই স্কেলার তিনটি অনন্য। সম্ভব হলে ধরা যাক x, y, z এই তিনটি স্কেলার ব্যতীত x^1, y^1, z^1 অপর তিনটি স্কেলার দ্বারাও আমরা লিখতে পারি

$$\vec{r} = x^1\vec{a} + y^1\vec{b} + z^1\vec{c}$$

তাহলে, $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x^1\vec{a} + y^1\vec{b} + z^1\vec{c}$

বা $(x - x^1)\vec{a} + (y - y^1)\vec{b} + (z - z^1)\vec{c} = 0$

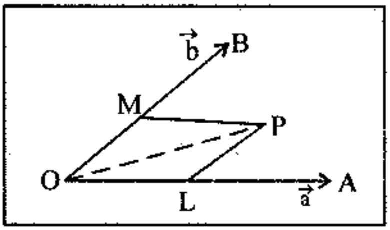
যেহেতু $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় নয় সুতরাং ঐগুলি রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত ভেক্টর হবে না। অর্থাৎ $x - x^1 = y - y^1 = z - z^1 = 0$ হবে।

বা $x = x^1, y = y^1, z - z^1$

অতএব $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ প্রকাশটি অনন্য।

2.4.12 উপপাদ্য : (Theorem) 1

সমরেখ নয় এমন যে কোন দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এবং $\vec{r}$ অপর একটি ভেক্টর যা $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-র মধ্যগামী তলে অবস্থিত। তাহলে $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$ হবে যেখানে x ও y দুটি অনন্য (unique) স্কেলার রাশি।



চিত্র : 2.24

প্রমাণ : যে কোন একটি বিন্দু O নেওয়া হল। ধরি $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ এবং $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, এমন একটি ভেক্টর যা $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরের সঙ্গে সমতলীয়। অর্থাৎ এখানে আপনারা বুঝতে পারছেন $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OP}$ সমতলীয় ভেক্টর। P বিন্দু হতে OB ও OA-র সমান্তরাল করে দুটি সরলরেখা অঙ্কিত হল যারা $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ কে যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ছেদ করে।

এক্ষেত্রে $\overrightarrow{OL}$ ও $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর সমরেখ বলে আপনারা লিখতে পারেন $\overrightarrow{OL} = x\,\overrightarrow{OA}$ । অনুরূপে $\overrightarrow{OM} = y\,\overrightarrow{OB}$, x ও y যে কোন দুটি স্কেলার। সুতরাং $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP}$ [ত্রিভুজ সূত্রানুসারে]

$$= \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM}$$

$$= x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}$$

$$= x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$$

এবার দেখানো হবে x ও y স্কেলার দুটি অনন্য। যদি সম্ভব হয় ধরা যাক

$\vec{r} = x'\,\vec{a} + y'\,\vec{b}$ যেখানে $x \neq x', y \neq y'$

সুতরাং $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = x'\,\vec{a} + y'\,\vec{b}$

বা $(x - x')\,\vec{a} + (y - y')\,\vec{b} = O$

যদি $(x - x') \neq 0$ হয় তবে $\vec{a} = \dfrac{y - y'}{x - x'}\,\vec{b}$

এখান থেকে আপনারা দেখতে পারছেন $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর দুটি সমরেখ। কিন্তু প্রথমে ধরা হয়েছিল $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর সমরেখ নয়। কাজেই ঐটি শর্তের বিপরীত। সুতরাং $x = x'$, এবং $y = y'$ হবে। অতএব $\vec{r} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$ প্রকাশে x ও y স্কেলার দুটি অনন্য।

2.4.13 উপপাদ্য 2 :

শূন্যমান নয় এবং সমরেখ নয় এমন দুটি ভেক্টর রৈখিক সম্বন্ধ যুক্ত ভেক্টর হবে না।

প্রমাণ : ধরি শূন্যমান নয় এবং সমরেখ নয় এমন দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-র মধ্যে $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = 0$, সম্বন্ধটি

সিদ্ধ হয় যেখানে x ও y দুটি স্কেলার। প্রমাণ করতে হবে $x = y = 0$ অর্থাৎ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ রৈখিক সম্বন্ধহীন ভেক্টর। মনে করি $x \neq 0$, তা হলে

$$x\vec{a} + y\vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b}$$

সুতরাং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর দুটি সমরেখ যেহেতু $\vec{a}$ ভেক্টরকে $\vec{b}$ ভেক্টরের স্কেলার গুণন দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। কিন্তু দেওয়া আছে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর সমরেখ নয়। কাজেই এটি শর্তের বিপরীত।

সুতরাং $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$ হলে $x = 0, \ y = 0$ হবে।

অর্থাৎ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত ভেক্টর হবে না।

উপপাদ্য 3 :

শূন্যমান নয় এবং সমতলীয় নয় এমন তিনটি ভেক্টর রৈখিক সম্বন্ধহীন ভেক্টর হবে।

প্রমাণ : ধরি শূন্যমান নয় এবং সমতলীয় নয় এমন তিনটি ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$-র মধ্যে

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$$

সম্বন্ধটি সিদ্ধ হয় যেখানে x, y, z তিনটি স্কেলার। এখন প্রমাণ করতে হবে $x = y = z = 0$। মনে করি $x \neq O$, তাহলে লেখা যায়

$$\vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b} - \frac{z}{x}\vec{c}$$

সুতরাং $\vec{a}$ ভেক্টর $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয়ের সঙ্গে সমতলীয়। কিন্তু দেওয়া আছে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ তিনটি অসমতলীয় ভেক্টর। কাজেই এটি শর্তের বিপরীত। সুতরাং $x = 0$ হবে। অনুরূপে প্রমাণ করা যায় $y = 0, z = 0$

অতএব $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$ হলে $x = 0, y = 0, z = 0$

অর্থাৎ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ রৈখিক সম্বন্ধহীন ভেক্টর।

2.4.15 উপপাদ্য 4 :

যে কোন চারটি ভেক্টর দিয়ে গঠিত সেট সর্বদা রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হবে।

প্রমাণ : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ যে কোন চারটি প্রদত্ত ভেক্টর। এদের মধ্যে ধরি তিনটি ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ অসমতলীয় ভেক্টর। সুতরাং অপর ভেক্টর $\vec{d}$ কে আমরা $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$-র রৈখিক সমবায়ে প্রকাশ করতে পারি। অর্থাৎ

$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, x, y, z যে কোন তিনটি স্কেলার $\Rightarrow x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + (-\vec{d}) = 0$

সুতরাং এখানে স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত ভেক্টর যেহেতু $(x, y, z, -1) \neq (0, 0, 0, 0)$

এখন ধরি চারটি প্রদত্ত ভেক্টরের মধ্যে তিনটি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ সমতলীয় ভেক্টর। এবং ধরি এই তিনটির মধ্যে যে কোন দুটি ভেক্টর সমরেখ (Collinear) নয়। সুতরাং আপনারা লিখতে পারেন $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

$\Rightarrow \quad x\vec{a} + y\vec{b} + (-1)\,\vec{c} + o,\ \vec{d} = 0$

অতএব $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত ভেক্টর যেহেতু $(x, y, -1, d) \neq (0, 0, 0, 0)$

2.4.16 ভেক্টরের নিধান, উপাংশ এবং স্থানাঙ্ক : (Bases, Components and Co-ordinates of a vector)

ধরি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ যে কোন অসমতলীয় প্রদত্ত ভেক্টর। তাহলে যে কোন ভেক্টর $\vec{r}$ কে প্রকাশ করা যায় নিম্নলিখিত গঠন দ্বারা

$$\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c},$$ যেখানে x, y, z স্কেলার।

এখানে $\vec{r}$ ভেক্টর উপাংশ হল $x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}$ এবং x, y, z স্কেলারগুলিকে $\vec{r}$ ভেক্টরের স্থানাঙ্ক বলা হয়। অসমতলীয় রৈখিক সম্বন্ধহীন ভেক্টর-সেট $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ যার সাপেক্ষে কোন প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{r}$ কে প্রকাশ করা যায় তাকে নিধান বলে। যে কোন তিনটি অসমতলীয় ভেক্টর তন্ত্রকে একটি নিধান ধরা যেতে পারে।

দুটি ভেক্টরের যোগফলের স্থানাঙ্ক এবং ভেক্টরের স্কেলার দ্বারা গুণনের স্থানাঙ্ক নির্ণয় :

ধরি $\vec{r}$ ও $\vec{r}'$ দুটি প্রদত্ত ভেক্টর যাদের স্থানাঙ্ক কোন প্রদত্ত নিধান $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$-র সাপেক্ষে (relatively) যথাক্রমে (x, y, z) ও (x', y', z') অতএব

$$\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

$$\vec{r}' = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$$

সুতরাং $\vec{r} + \vec{r}' = (x + x')\,\vec{a} + (y + y')\,\vec{b} + (z + z')\,\vec{c}$

$\therefore\ \vec{r} + \vec{r}'$ – ভেক্টরের স্থানাঙ্ক প্রদত্ত নিধান $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$-র সাপেক্ষে $\{(x + x'), (y + y'), (z + z')\}$ হবে।

আবার যে কোন স্কেলার m-র জন্য $m\vec{r} = mx\vec{a} + my\vec{b} + mz\vec{c}$

$\therefore\ m\vec{r}$ ভেক্টরের স্থানাঙ্ক $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ নিধানের সাপেক্ষে (mx, my, mz) হবে।

উদাহরণমালা :

উদাহরণ 5 : যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ একটি নিধান হয় তবে প্রমাণ করুন $\vec{a},\ \vec{a} + \vec{b},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ - ও একটি নিধান গঠন করবে।

সমাধান : এখানে দেখাতে হবে $\vec{a},\ \vec{a} + \vec{b},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ রৈখিক সম্বন্ধহীন ভেক্টর।

এখন $x(\vec{a}) + y(\vec{a} + \vec{b}) + z(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\Rightarrow (x + y + z)\vec{a} + (y + z)\vec{b} + z\vec{c} = 0$

যেহেতু $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ একটি নিধান অতএব তারা রৈখিক সম্বন্ধহীন ভেক্টর।

অতএব $x + y + z = 0, y + z = 0, z = 0$

$\Rightarrow x = y = z = 0$

$\therefore$ $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ রৈখিক সম্বন্ধহীন ভেক্টর হবে। সুতরাং তারা একটি নিধান গঠন করবে।

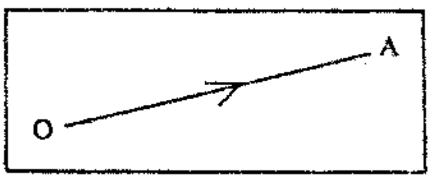
অনুশীলনী :

অনু : 7. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ -র নিধানের সাপেক্ষে কোন ভেক্টর $\vec{u}$-র স্থানাঙ্ক (x, y, z) হলে $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$-র সাপেক্ষে $\vec{u}$-র স্থানাঙ্ক কত হবে?

অনু : 8. যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ একটি নিধান গঠন করে তবে $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{\omega}$ ভেক্টরের স্থানাঙ্ক বার করুন যেখানে $\vec{u} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{v} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{\omega} = \vec{a} - \vec{b}$.

2.4.17 কোন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর : (position vector of a point)

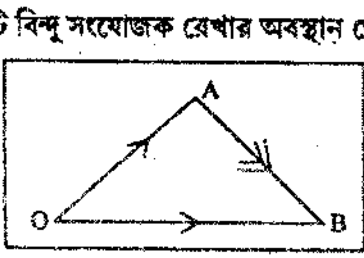
একটি যে কোন (arbitrary) বিন্দুকে স্থির বিন্দু ধরে তার সাপেক্ষে অপর যে কোন একটি বিন্দুর অবস্থান একটি ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। অবস্থান নির্দেশক ভেক্টরটিকে অবস্থান ভেক্টর বলে।



চিত্র : 2.25

2.25 নং চিত্রে O স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে অপর একটি বিন্দু A-র অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। সুতরাং $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরটিকে O-র সাপেক্ষে A-বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হবে। এখানে $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরের আদি বিন্দু O এবং অন্তিম বিন্দু A.

দুটি বিন্দু সংযোজক রেখার অবস্থান ভেক্টর (position vector of a line joining two points)



চিত্র : 2.26

ধরি A ও B যে কোন দুটি বিন্দু এবং O একটি স্থির বিন্দু, উপরের আলোচনা থেকে আপনারা বুঝতে পারছেন A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর O বিন্দুর সাপেক্ষে যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ নির্দেশক ভেক্টর দ্বারা নির্দেশ করা যায়। এখানে আমরা লিখতে পারি

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$
$$= -\vec{OA} + \vec{OB}$$
$$= \vec{OB} - \vec{OA}$$

= (অন্তিম বিন্দু B-র অবস্থান ভেক্টর)

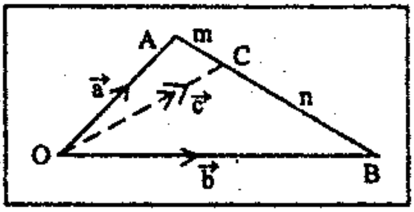
− (আদি বিন্দু A-র অবস্থান ভেক্টর)

2.4.18 ছেদ অনুপাত : (Section Ratio)

A ও B বিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখাকে m : n অনুপাতে বিভাজনকারী P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় :

i) অন্তর্বিভাজন : কোন স্থির বিন্দু O-র সাপেক্ষে দুটি বিন্দু A ও B-র অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ হলে যে কোন বিন্দু যা AB কে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তার অবস্থান ভেক্টর হবে $\dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m + n}$

প্রমাণ :



চিত্র : 2.27

প্রশ্নানুসারে দেওয়া আছে $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{m}{n}$ এবং $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$

বা $n\,AC = m\,CB$

বা $n\,\vec{AC} = m\,\vec{CB}$ [কারণ $\vec{AC}$ ও $\vec{CB}$ ভেক্টরের দিক ও অভিদিশা এক]

এবার আপনারা $\vec{AC}$ ও $\vec{CB}$ ভেক্টরকে অবস্থান ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারেন। অর্থাৎ

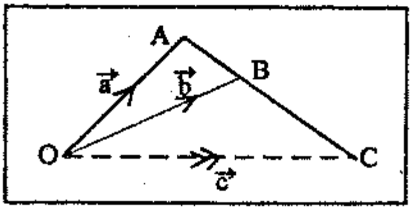
$$n(\vec{OC} - \vec{OA}) = m(\vec{OB} - \vec{OC})$$

বা $(n + m)\,\vec{OC} = m\,\vec{OB} + n\,\vec{OA}$

বা $\vec{OC} = \dfrac{m\,\vec{OB} + n\,\vec{OA}}{m + n} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m + n}$

i) বহির্বিভাজন :

কোন স্থির বিন্দু O-র সাপেক্ষে দুটি বিন্দু A ও B-র অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ হলে যে কোন বিন্দু C যা AB কে m : n অনুপাতে বহির্বিভাজন করে, তার অবস্থান ভেক্টর হবে $\dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$



চিত্র : 2.28

প্রমাণ : দেওয়া আছে $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ এবং

$$\frac{AC}{BC} = \frac{m}{n}$$

বা $n\,AC = m\,BC$

বা $n\,\overrightarrow{AC} = m\,\overrightarrow{BC}$

বা $n(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$

বা $\overrightarrow{OC} = \dfrac{m\,\overrightarrow{OB} - n\,\overrightarrow{OA}}{m-n} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$

মন্তব্য : এখানে C যদি AB-র মধ্য বিন্দু হয় তবে AC : CB = 1 : 1 সুতরাং মধ্য বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ যেখানে A ও B-র অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$.

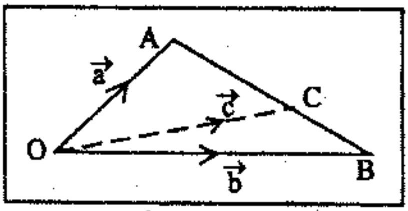
2.4.19 উপপাদ্য 5 : তিনটি বিন্দু সমরেখ হবার শর্ত

A, B, C তিনটি বিন্দু, এদের অবস্থান ভেক্টর একটি স্থির বিন্দু O-র সাপেক্ষে যথাক্রমে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$। বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থান করবে তার প্রয়োজনীয় (necessary) এবং যথেষ্ট (Sufficient) শর্ত হচ্ছে

$$x\,\vec{a} + y\,\vec{b} + z\,\vec{c} = 0 \longrightarrow (1)$$ এবং

$$x + y + z = 0 \longrightarrow (2)$$ যেখানে x, y, z প্রত্যেকেই শূন্যমান নয় এমন তিনটি স্কেলার অর্থাৎ $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

প্রমাণ : প্রয়োজনীয় শর্ত :



চিত্র : 2.29

তিনটি বিন্দু সমরেখ হলে প্রমাণ করতে হবে সমীকরণ (1) ও (2) সিদ্ধ হয়। ধরি A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ। অবশ্যই একটি বিন্দু অপর দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী অংশকে অন্তর্বিভাজন করবে। ধরি C বিন্দু AB কে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে। অতএব

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$$

বা $n\,AC = m\,CB$

বা $n\,\overrightarrow{AC} = m\,\overrightarrow{CB}$

বা $n\,(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = m\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$

বা $n\,(\vec{c} - \vec{a}) = m\,(\vec{b} - \vec{c})$

বা $-n\vec{a} - m\vec{b} + \vec{c}\,(n + m) = 0 \longrightarrow (3)$

এখন ধরি $-n = x$, $-m = y$ এবং $n + m = z$, তাহলে (3) নং সমীকরণ থেকে লেখা যায় $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$, সুতরাং প্রয়োজনীয় শর্ত প্রমাণিত হল।

যথেষ্ট শর্ত :

যদি সমীকরণ (1) ও (2) সিদ্ধ হয় তবে প্রমাণ করতে হবে A, B, C সমরেখ। এখন যেহেতু x, y, z প্রত্যেকেই শূন্যমান নয় ধরি $z \neq 0$। সুতরাং $x + y + z = 0$ হতে পাই $x + y = -z \neq 0 \longrightarrow (4)$

আবার $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$ হতে পাই $z\vec{c} = -(x\vec{a} + y\vec{b})$

অতএব $$\vec{c} = \frac{-(x\vec{a} + y\vec{b})}{z}$$

$$= \frac{x\vec{a} + y\vec{b}}{x + y}$$ [সমীকরণ (4) এর সাহায্যে]

সুতরাং C বিন্দুটি A ও B বিন্দু দুটির সংযোগকারী সরলরেখাকে y : x অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে। অর্থাৎ A, B, C সমরেখ। সুতরাং যথেষ্ট শর্তটি প্রমাণিত হল।

2.4.20 উপপাদ্য 6 : চারটি বিন্দু সমতলীয় হবার শর্ত

A, B, C, D এমন চারটি বিন্দু যে এদের মধ্যে কোন তিনটি বিন্দু একই সরলরেখার উপর অবস্থিত নয় এবং একটি স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে এদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$। বিন্দু চারটি একই সমতলে অবস্থান করবে তার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + \omega\vec{d} = 0 \longrightarrow \quad (1)$$

এবং $x + y + z + \omega = 0 \longrightarrow$ (2) যেখানে x, y, z, w প্রত্যেকেই শূন্যমান নয় এমন চারটি স্কেলার অর্থাৎ $(x, y, z, \omega) \neq (0, 0, 0, 0)$

প্রমাণ : প্রয়োজনীয় শর্ত : মনে করি A, B, C, D এই চারটি বিন্দু একই সমতলে আছে কিন্তু এদের কোন তিনটি বিন্দু একই সরলরেখার উপর অবস্থিত নয়। সুতরাং চারটি বিন্দু থেকে দুটি বিন্দু নেওয়া যেতে পারে যাদের সংযোগকারী সরলরেখা অপর দুটি বিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখাকে অন্তঃস্থভাবে একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি AB রেখা CD সরলরেখাকে P বিন্দু p : q অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে অর্থাৎ $\frac{CP}{PD} = \frac{p}{q}$ এবং P বিন্দু AB রেখাকে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। অর্থাৎ $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$ যদি P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ হয় তবে

$$\vec{r} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n} = \frac{p\vec{d} + q\vec{c}}{p+q}$$

বা $$\frac{n}{m+n}\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b} + \left(-\frac{q}{p+q}\right)\vec{c} + \left(-\frac{p}{p+q}\right)\vec{d} = 0 \longrightarrow (3)$$

এখন ধরি $\frac{n}{m+n} = x,\ \frac{m}{m+n} = y,\ -\frac{q}{p+q} = z$ এবং $-\frac{p}{p+q} = \omega$

অতএব সমীকরণ (3) থেকে লেখা যায়

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + \omega\vec{d} = 0 \text{ এবং } x + y + z + \omega = 0$$

সুতরাং প্রয়োজনীয় শর্ত প্রমাণিত হল।

যথেষ্ট শর্ত : যদি সমীকরণ (1) ও (2) সিদ্ধ হয় তবে প্রমাণ করতে হবে A, B, C, D বিন্দু চারটি সমতলীয়। এখানে যেহেতু x, y, z, ω স্কেলার চারটির মধ্যে কমপক্ষে একটি শূন্যমান নয়, সুতরাং x + y, x + z, x + ω-র মধ্যে কমপক্ষে একটি শূন্যমান নয়। কারণ এরা প্রতিটি শূন্য হলে $x = y = z = \omega = 0$ হতে পারে।

অতএব ধরা যাক $x + y \neq 0$ এখানে সমীকরণ (2) থেকে লেখা যায়

$$z + \omega = -(x+y), \neq 0 \longrightarrow (4)$$

এখন সমীকরণ (1) থেকে লেখা যায়

$$x\vec{a} + y\vec{b} = -(z\vec{c} + \omega\vec{d})$$

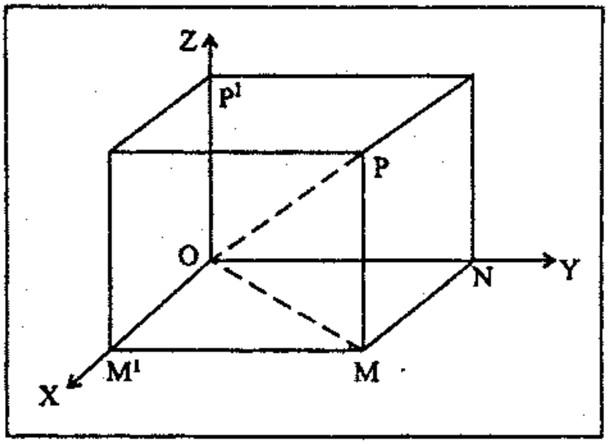
বা $$\frac{x\vec{a} + y\vec{b}}{x+y} = \frac{-(z\vec{c} + \omega\vec{d})}{x+y} = \frac{-z\vec{c} + \omega\vec{d}}{-z+w} = \frac{-z\vec{c} + \omega\vec{d}}{-z+w} \longrightarrow (5)$$

[সমীকরণ (4) এর সাহায্যে]

এখানে লক্ষণীয় $\frac{x\vec{a} + y\vec{b}}{x+y}$ ভেক্টরটি A ও B বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর এবং $\frac{z\vec{c} + \omega\vec{d}}{z+\omega}$ ভেক্টরটি C ও D-র সংযোজক সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর। কিন্তু সমীকরণ (5) থেকে আপনারা নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন বিন্দু দুটি একই বিন্দু নির্দেশ করে। অতএব AB ও CD সরলরেখাদ্বয় একই তলে অবস্থিত। অর্থাৎ A, B, C, D বিন্দু চারটি সমতলীয়। অতএব যথেষ্ট শর্ত প্রমাণিত হল।

2.4.21 একটি ভেক্টরের তিনটি পরস্পর লম্ব উপাংশের সাপেক্ষে প্রকাশ (Vectors in terms of its resolved parts along three mutually perpendicular direction)

2.30 নং চিত্রে O বিন্দুগামী তিনটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা ox, oy, oz নেওয়া হল। এবার আপনারা ox,



চিত্র : 2.30

oy, oz রেখা বরাবর একক দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট যথাক্রমে তিনটি ভেক্টর $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ধরুন। এই ত্রিমাত্রিক দেশে P যে কোন একটি বিন্দু, যার স্থানাঙ্ক (x, y, z)। তাহলে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর মূল বিন্দু O-র সাপেক্ষে $\overrightarrow{OP}$। এবার P বিন্দু থেকে xoy তলের উপর PM লম্ব অঙ্কন করা হল। M কে পাদ বিন্দু বলা হবে। MN রেখা অঙ্কন করা হল যাতে MN, ox-র সঙ্গে সমান্তরাল হয়। তাহলে ON = y, NM = x এবং PM = z হবে।

ত্রিভুজ OMP থেকে আপনারা লিখতে পারেন $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$

আবার Δ OMN থেকে লেখা যায় $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$

সুতরাং $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OP'} \longrightarrow (1)$

এখন ox রেখায় $\overrightarrow{OM'}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{i}$ একক ভেক্টর।

সুতরাং একক ভেক্টরের সংজ্ঞা অনুযায়ী $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OM'}}{\left|\overrightarrow{OM'}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{OM'}}{x} \therefore \overrightarrow{OM'} = x\,\vec{i}$

অনুরূপে $\vec{j} = \dfrac{\overrightarrow{ON}}{\left|\overrightarrow{ON}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{ON}}{y} \quad \therefore \overrightarrow{ON} = y\,\vec{j}$

এবং $\vec{k} = \dfrac{\overrightarrow{OP'}}{\left|\overrightarrow{OP'}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{OP'}}{z} \quad \therefore \overrightarrow{OP'} = z\,\vec{k}$

সুতরাং $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ এবং $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরের মাপাঙ্ক অর্থাৎ এর দৈর্ঘ্য

$$= \left|\overrightarrow{OP}\right| = \left| x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ হবে}$$

অতএব p(x, y, z) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$ কে লেখা যায়

$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, যার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2.4.22 দুটি বিন্দুর P ও Q-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2) হলে

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

প্রমাণ : এখানে $\overrightarrow{OP} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\overrightarrow{OQ} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

আপনাদের জানা আছে $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 + z_1)\vec{k}$

মন্তব্য : i) $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর হবে

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ii) $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর হবে

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \frac{(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 + z_1)\vec{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2}}$$

iii) $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরকে (x, y, z) স্থানাঙ্ক দ্বারাও প্রকাশ করা যায়

iv) এখানে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ যথাক্রমে তিনটি একক ভেক্টর ox, oy, oz অক্ষ বরাবর অর্থাৎ এরা পরস্পর লম্ব এবং অসমতলীয় ভেক্টর।

উদাহরণমালা

উদা : 6. ভেক্টর $\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$, $3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হবে কি?

সমাধান : প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হবে যদি

$$x(\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}) + y(2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}) + z(3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) = 0 \longrightarrow (1)$$

সম্বন্ধটি সিদ্ধ হয় যেখানে x, y, z এমন তিনটি স্কেলার রাশি যাদের সবার মান শূন্য নয়। সমীকরণ (1) থেকে লেখা যায়

$$\vec{i}(x + 2y + 3z) + \vec{j}(-3x - 4y - 2z) + \vec{k}(2x - 4y - z) = 0$$

যেহেতু $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ভেক্টরগুলি অসমতলীয় অতএব

$$x + 2y + 3z = 0 \longrightarrow (2)$$

$$-3x - 4y - 2z = 0 \longrightarrow (3)$$

$$2x - 4y - z = 0 \longrightarrow (4)$$

এখন (2) ও (3) নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{x}{8} = \frac{7}{-7} = \frac{z}{2} = k' \quad (\text{ধরি})$$

(4) নং সমীকরণে $x = 8k', y = -7k', z = 2k'$ বসিয়ে পাই,

$$(16 + 28 - 2)k' = 0$$

$$\therefore k' = 0$$

$$\therefore x = y = z = 0$$

অতএব প্রদত্ত ভেক্টরগুলি রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত ভেক্টর হবে না।

উদা : 7 প্রমাণ করুন চারটি বিন্দু A, B, C, D সমতলীয় যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $-6\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$, $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$, $5\vec{a} + 7\vec{b} + 3\vec{c}$ এবং $-13\vec{a} + 17\vec{b} - \vec{c}$

সমাধান : O বিন্দুকে স্থিরবিন্দু ধরে লেখা যায়

$$\overrightarrow{OA} = -6\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OB} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OC} = 5\vec{a} + 7\vec{b} + 3\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OD} = -13\vec{a} + 17\vec{b} - \vec{c}$$

অতএব $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 9\vec{a} - 5\vec{b} + 2\vec{c}$

অনুরূপ $\overrightarrow{AC} = 11\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}$

$$\overrightarrow{AD} = -7\vec{a} + 14\vec{b} - 3\vec{c}$$

এখন আপনারা লিখতে পারেন

$$\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC} = -13\vec{a} - 13\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AD} + 3\,\overrightarrow{AC} = 26\vec{a} + 26\vec{b} = -2(-13\vec{a} - 13\vec{b})$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AD} + 3\,\overrightarrow{AC} = -2\,(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$$

বা $\quad \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

অতএব $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরগুলি সমতলীয়। উপরন্তু তিনটি ভেক্টরের আদি বিন্দু A।

$\therefore$ A, B, C, D সমতলীয়।

উদা : 8 নিম্নের ভেক্টরগুলির মডিউলাস এবং তাদের যোগফলের মডিউলাস কত?

$$2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k},\ \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k},\ 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

সমাধান : তিনটি প্রদত্ত ভেক্টরের মডিউলাস যথাক্রমে

$|2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}|$, $|\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}|$ এবং $|2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}|$

অর্থাৎ $\sqrt{14}$, $\sqrt{6}$ এবং $\sqrt{29}$

তিনটি ভেক্টরের যোগফল $5\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$

$\therefore$ মডিউলাস = $\sqrt{43}$

উদা : 9 প্রমাণ করুন A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখীয় যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $-2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $7\vec{a} - \vec{c}$

সমাধান : O বিন্দুকে স্থির বিন্দু ধরে লেখা যায়

$$\overrightarrow{OA} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$$

$\overrightarrow{OC} = 7\vec{a} - \vec{c}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = 9\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c} = 3(3\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}) = 3\overrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টর সমরেখীয়। এখানে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টর দ্বয়ের আদি বিন্দু A.

$\therefore$ A, B, C সমরেখীয়।

উদা : 10 প্রমাণ করুন তিনটি বিন্দু A, B, C যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ এবং $3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$, একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

সমাধান : O বিন্দুকে স্থির বিন্দু ধরে আপনারা লিখতে পারেন

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CA} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

এখানে দেখা যাচ্ছে $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = -2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

$$= -(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

অর্থাৎ ত্রিভুজ সূত্র থেকে আপনারা বলতে পারেন A, B, C একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। এখানে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, এবং $\overrightarrow{CA}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে

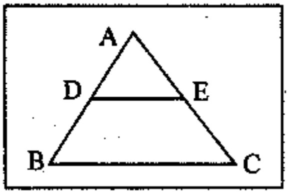
$$|\overrightarrow{AB}| = 3,\ |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2},\ |\overrightarrow{CA}| = 3$$

যেহেতু $AB = AC$ $\therefore$ ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু

আবার $BC^2 = AB^2 + CA^2$ $\therefore \angle A = 90^\circ$. $\therefore$ ABC সমকোণী ত্রিভুজও হবে।

উদা : 11 প্রমাণ করুন ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দুগামী।

সমাধান : ধরি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C-র অবস্থান ভেক্টরে কোন স্থির বিন্দু O-র সাপেক্ষে যথাক্রমে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, এখন D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB-র মধ্যবিন্দু হলে



চিত্র : 2.31

D-র অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

E-র অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$

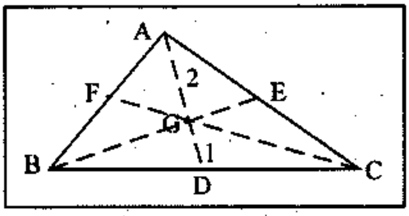
F-র অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

এখানে প্রমাণ করতে হবে তিনটি মধ্যমা AD, BE ও CF সমবিন্দুগামী। AD-র উপর G একটি বিন্দু নেওয়া হল যা AD-কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে; অর্থাৎ AG : GD = 2 : 1। অতএব G-র অবস্থান ভেক্টর =

$\dfrac{2 . \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2} + 1.\vec{a}}{2+1} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, এটি $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$-র একটি প্রতিসম প্রকাশ (symmetrical form)।

G-র এই প্রতিসম প্রকাশ থেকে বলা যেতে পারে G-র বিন্দুটি অপর দুটি মধ্যমা BE ও CF-র উপরও আছে। সুতরাং মধ্যমা তিনটি সমবিন্দুগামী।

উদা : 12 প্রমাণ করুন যে কোন ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও এর দৈর্ঘ্য তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের সমান



চিত্র : 2.32

সমাধান :

ABC ত্রিভুজের D ও E যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু। সুতরাং D ও E বিন্দু দুটির অবস্থান ভেক্টর O বিন্দুর সাপেক্ষে যথাক্রমে

$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$। এখানে $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \dfrac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$

আবার $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{c} - \vec{b}$

$\therefore \quad \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ অতএব $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$

এবং $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ অর্থাৎ $DE = \frac{1}{2}BC$

উদা : 13 প্রমাণ করুন (2, 4, 10) ও (3, 6, 15) ভেক্টর দুটি রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত।

সমাধান : ধরি x ও y এমন দুটি স্কেলার যাতে

$x\vec{a} + y\vec{b} = 0$ হয় যেখানে $\vec{a} = (2, 4, 10)$ ও $\vec{b} = (3, 6, 15)$

বা $x(2, 4, 10) + y(3, 6, 15) = 0$

বা $(2x + 3y, 4x + 6y, 10x + 15y) = \vec{O} = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow$ $2x + 3y = 0$

$4x + 6y = 0$

$10x + 15y = 0$

এই সমীকরণগুলি $x = 3\ \ 3y = -2$ মানের জন্য সিদ্ধ হয়।

অর্থাৎ প্রত্যেকটি মান শূন্য নয়।

$\therefore$ লেখা যেতে পারে $3\vec{a} - 2\vec{b} = 0$

অতএব প্রদত্ত ভেক্টর দুটি রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত।

অনুশীলনী :

অনু : 9 i) $4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ভেক্টরের সদিক যুক্ত একক ভেক্টর নির্ণয় করুন।

ii) এমন একটি একক ভেক্টর বার করুন যা $4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ এবং $2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের যোগফলের সমান্তরাল হয়।

অনু : 10 প্রমাণ করুন $\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{i} - 7\vec{j} - 8\vec{k}$ ও $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ ভেক্টর তিনটি রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত।

অনু : 11 প্রমাণ করুন $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 4)$, $\vec{c} = (-1, 8, 1)$ পরস্পর রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত ভেক্টর।

অনু : 12 প্রমাণ করুন চারটি বিন্দু যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $5\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $-\vec{a} + 5\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ সমতলীয়

অনু : 13 যদি $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ হয় তবে $|\vec{a} + \vec{b}|$-র মান কত?

অনু : 14 ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং P, Q, R, S যথাক্রমে AB, BC, CD, DA বাহুর মধ্য বিন্দু হলে প্রমাণ করুন PQRS একটি সামান্তরিক।

অনু : 15 কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন যার শীর্ষ বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

2.5 সারাংশ :

এই একক পঠনের পর আপনারা যা জানতে পেরেছেন তা নিম্নে সংক্ষেপে লেখা হল :

1. যে রাশির মান ও দিক দুই আছে তাকে ভেক্টর রাশি বলে এবং যার শুধু মান আছে তাকে স্কেলার রাশি বলে।

2. ভেক্টরকে আমরা দিষ্ট রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করতে পারি।

3. দুই বা ততোধিক ভেক্টরকে ত্রিভুজ সূত্র বা সামন্তরিক সূত্র অনুযায়ী যোগ করা যেতে পারে।

4. ভেক্টরের যোগ প্রক্রিয়া ও স্কেলার দ্বারা গুণনের ধর্ম।

5. যদি $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} +$ ------------- সম্বন্ধটি সিদ্ধ হয় তবে $\vec{r}$ ভেক্টরকে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ------ ভেক্টরের রৈখিক সমবায় বলা যেতে পারে যেখানে x, y, z, ------- স্কেলার রাশি।

6. i) দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ রৈখিক সম্বন্ধহীন হলে

$x\vec{a} + y\vec{b} = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$

এবং রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হলে $x\vec{a} + y\vec{b} = 0 \Rightarrow (x, y) \neq (0, 0)$

ii) যদি তিনটি ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ রৈখিক সম্বন্ধহীন হয় তবে

$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0, z = 0$

এবং রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হলে $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$

দুটো সমরেখ ভেক্টর রৈখিকসম্বন্ধযুক্ত হবে।

তিনটি সমতলীয় ভেক্টর পরস্পর রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হবে।

যে কোন চারটি ভেক্টর দিয়ে গঠিত সেট সর্বদা রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হবে।

7. i) কোন ভেক্টর $\vec{r}$ যদি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরের সঙ্গে সমতলীয় হয় তবে $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$ হবে যেখানে x ও y দুটি স্কেলার।

ii) যদি $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ভেক্টরগুলি অসমতলীয় হয় তবে যে কোন ভেক্টর $\vec{r}$ কে লেখা যায় $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, যেখানে x, y, z স্কেলার।

8. কোন রৈখিক সম্বন্ধহীন ভেক্টরের সেটকে নিধান বলে (base) যদি যে কোন একটি প্রদত্ত ভেক্টরকে এই সেটের ভেক্টরগুলির রৈখিক সমবায়ে প্রকাশ করা যায়

অর্থাৎ $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ হলে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ নিধানের সাপেক্ষে এখানে (x, y, z) $\vec{r}$-ভেক্টরের স্থানাঙ্ক নির্দেশ করে।

9. কোন স্থির বিন্দু O-র সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ হলে কোন বিন্দু যা AB কে অন্তর্বিভক্ত (বা বহির্বিভক্ত) করে m : n অনুপাতে তার অবস্থান ভেক্টর হবে $\dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$ বা $\dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$.

10. তিনটি বিন্দু সমরেখ হবার শর্ত।

11. চারটি বিন্দু সমতলীয় হবার শর্ত।

12. যে কোন ভেক্টর $\vec{u}$ কে আমরা প্রকাশ করতে পারি

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, যেখানে $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ একক ভেক্টর যথাক্রমে ox, oy, oz অক্ষ বরাবর।

2.6 বিবিধ প্রশ্নমালা :

প্রশ্ন : 1. ABCD সামন্তরিকের কর্ণ দুটি P বিন্দুতে ছেদ করে এবং o-যে কোন একটি বিন্দু হলে প্রমাণ করুন $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\,\overrightarrow{OP}$

প্রশ্ন : 2. প্রমাণ করুন যে কোন চতুস্তলকের (tetrahedron) শীর্ষবিন্দু এবং তার বিপরীত তলের ভর কেন্দ্র সংযোগকারী সরলরেখাগুলি এক বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রশ্ন : 3. OAC ত্রিভুজের B বিন্দু AC বাহুর মধ্যবিন্দু হলে $\overrightarrow{OC}$-র কোন মানটি সঠিক হবে? i) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, ii) $2\vec{b} - 2\vec{a}$, iii) $2\vec{b} - \vec{a}$, যেখানে $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

প্রশ্ন : 4. ABCD এমন একটি চতুর্ভুজ যার BC বাহু AD বাহুর সমান্তরাল এবং BC : AD = 4 : 7। যদি $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{AD} = 7\vec{b}$ হয় তবে $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DC}$ ও $\overrightarrow{AE}$ ভেক্টরের মান বার করুন $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর দ্বারা যেখানে E বিন্দু BD-র উপর এমন একটি বিন্দু যাতে $BE = \frac{4}{11}BD$ হয়।

প্রশ্ন : 5. $2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{\omega}$ ভেক্টরের স্থানাঙ্ক বার করুন যেখানে ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ একটি বিধান গঠন করে এবং $\vec{u} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{v} = -2\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{\omega} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ হয়।

প্রশ্ন : 6. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ নিধানের সাপেক্ষে দেখান $\vec{u} + \vec{\omega}, -\vec{u} + \vec{\omega}$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{\omega}$ একটি নিধান গঠন করে।

প্রশ্ন : 7. প্রমাণ করুন (-2, 3, 5), (1,2,3) ও (7, 0, – 1) ভেক্টরগুলি সমরেখ।

প্রশ্ন : 8. নিম্নের ভেক্টরগুলি সমতলীয় কিনা দেখান :

i) $5\vec{a} - 4\vec{b} + 4\vec{c}$, $3\vec{a} + 8\vec{b} + 5\vec{c}$, $-3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{c}$

ii) $6\vec{a}-4\vec{b}+4\vec{c},\ -\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c},\ \vec{a}+2\vec{b}-5\vec{c},\ -\vec{c}$

প্রশ্ন : 9. $(2,-1,0), (3,2,1), (4,0,5)$ ও $(1,2,-3)$ ভেক্টর চারটির যোগফল কত ?

প্রশ্ন : 10 প্রমাণ করুন ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু ভেক্টর $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ যথাক্রমে $2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$, $6\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, $3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$ হলে তা সমবাহু ত্রিভুজ।

প্রশ্ন :11. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি যার অবস্থান ভেক্টর দেওয়া আছে তারা সমরেখ হবে কি?

i) $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c},\ 2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c},\ -7\vec{b}+10\vec{c}$

ii) $5\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c},\ 6\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c},\ 7\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

iii) $2\vec{a}+5\vec{b}-4\vec{c},\ \vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c},\ 4\vec{a}+7\vec{b}-6\vec{c}$

iv) $\vec{b}-2\vec{c},\ \vec{a}+3\vec{b}-3\vec{c},\ 2\vec{a}+5\vec{b}-4\vec{c}$

প্রশ্ন :12. প্রমাণ করুন $2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k},\ 5\vec{i}+\vec{k},\ 11\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$ বিন্দু তিনটি সমরেখীয়।

প্রশ্ন :13. একটি সামন্তরিকের দুটি বাহু যথাক্রমে $2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k},\ \vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ হলে কর্ণের সদিক যুক্ত একক ভেক্টরের মান নির্ণয় করুন।

প্রশ্ন :14. প্রমাণ করুন $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k},\ \vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k},\ \vec{c}=4\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$ ভেক্টরগুলি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং এমন একটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন যা $\vec{c}$ ভেক্টরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রশ্ন :15. $\vec{i}+\vec{k},\ -\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},\ 3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ভেক্টর তিনটি কি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু ভেক্টর হতে পারে?

প্রশ্ন :16. চারটি বিন্দু A, B, C, D-র অবস্থান ভেক্টর কোন স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে যথাক্রমে $2\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ ও $3\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ হলে প্রমাণ করুন $AB \parallel CD$ এবং ABCD একটি সামন্তরিক।

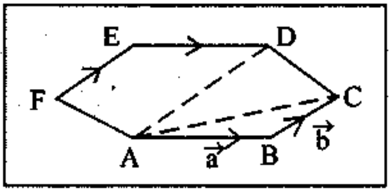
প্রশ্ন :17. চারটি বিন্দু P, Q, R, S-র অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\vec{i}+4\vec{k},\ 5\vec{i}+3\sqrt{3}\,\vec{j}+4\vec{k}$, $-2\sqrt{3}\,\vec{j}+\vec{k},\ 2\vec{i}+\vec{k}$ হলে প্রমাণ করুন $PQ \parallel RS$ এবং $RS=\frac{2}{3}PQ$.

প্রশ্ন :18. ABCD একটি চতুস্তলক, E ও F বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু। $AB \parallel DC$ হলে প্রমাণ করুন $FE \parallel AB$ এবং $FE=\frac{1}{2}(AB+DC)$

2.7 সমাধান/উত্তরমালা

অনুশীলনীর সমাধান :

অনু : 1.



চিত্র : 2.33

উপরের চিত্র হতে ধরি $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

সুতরাং $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$ [যেহেতু AB ∥ ED এবং উভয়ের দৈর্ঘ্য সমান এবং BC ∥ EF এবং উভয়ের দৈর্ঘ্য সমান।]

এখন $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$

আবার $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{BC} = 2\,\vec{b}$ [যেহেতু AD ∥ BC এবং AD-র দৈর্ঘ্য BC-র দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ]

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$\therefore \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD} = \vec{a} - \vec{b}$ [যেহেতু $\overrightarrow{FA}$ ও $\overrightarrow{CD}$ দুটি সমান অথচ বিপরীত দিক যুক্ত ভেক্টর]

$\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{a} = \vec{b} - 2\vec{a}$

$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BC} = -\vec{b}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = 2\vec{b} - \vec{a}$

অনু : 2 এখানে লেখা যায় $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$ (যেহেতু D, BC-র মধ্যবিন্দু)

অনুরূপে $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OE}$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OF}$$

এবার উপরের সমীকরণগুলি যোগ করলেই যা প্রমাণ করতে দেওয়া আছে তা পেয়ে যাবেন।

অনু : 3 ABC ত্রিভুজের $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$

ত্রিভুজসূত্র থেকে লেখা যায় $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ বা $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$\therefore\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

অনু : 4 ত্রিভুজ সূত্র থেকে $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$

এই সমীকরণগুলি যোগ করে অনু : 3 -এর সাহায্যে প্রমাণ করুন।

অনু : 5 উত্তর : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

অনু : 6 উত্তর : সমতলীয়, উদা : 4-এর সাহায্য নিন

অনু : 7 $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} - z\vec{c}$, ধরি $\vec{u} = x'\vec{a} + y'(\vec{a} + \vec{b}) + z'(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$= (x' + y' + z')\,\vec{a} + (y' + z')\,\vec{b} + z'\,\vec{c}$

কিন্তু আপনাদের জানা আছে $\vec{u}$-র রৈখিক সমবায় প্রকাশ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$-র সাপেক্ষে অনন্য। সুতরাং $x = x' + y' + z', y = y' + z', z = z'$

$$\Rightarrow\ z = z',\ y' = y - z,\ x' = x - y$$

সুতরাং $x - y$, $y - z$ ও z হল $\vec{u}$-ভেক্টরের স্থানাঙ্ক নতুন নিধান $\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$-র সাপেক্ষে।

অনু : 8 $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{\omega} = 3(\vec{a} + \vec{c}) - (\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 4\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$

$\therefore$ প্রয়োজনীয় স্থানাঙ্ক $(4, -2, 2)$

অনু : 9 a) প্রয়োজনীয় একক ভেক্টর $= \dfrac{4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4^2 + 1^2 (-1)^2}} = \dfrac{4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{18}}$

b) যোগফল $6\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\therefore$ প্রয়োজনীয় একক ভেক্টর $= \dfrac{6\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{76}}$

অনু : 10 উদাহরণ 6-র মত হবে।

অনু : 11 ধরি $\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} = 0 \longrightarrow (1)$

$\therefore\ (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) + \lambda(2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}) + \mu(-\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}) = 0$

বা $\vec{i}\,(1+2\lambda-\mu)+\vec{j}\,(2-\lambda+8\mu)+\vec{k}\,(3+4\lambda+\mu)=0$

$\Rightarrow \quad 1+2\lambda-\mu = 0 \longrightarrow (2)$

$2-\lambda+8\mu = 0 \longrightarrow (3)$

$3+4\lambda+\mu = 0 \longrightarrow (4)$

(2) ও (3) সমীকরণ সমাধান করে পাই $\lambda=-\frac{2}{3}, \mu=-\frac{1}{3}$

সমীকরণ (4) λ ও μ-এর মান দ্বারা সিদ্ধ হয়।

$\therefore \quad \vec{a}-\frac{2}{3}\,\vec{b}+\frac{1}{3}\,\vec{c}=0 \quad \therefore \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ রৈখিকসম্বন্ধযুক্ত,

যেহেতু সমীকরণ (1) সিদ্ধ হয় যেখানে $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

অনু : 12. উদাহরণ 7-র মত হবে। এই অনুশীলনীটি অন্য ভাবেও করা যেতে পারে,

ধরি $\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\ \overrightarrow{OB}=5\vec{a}-\vec{b}-\vec{c},\ \overrightarrow{OC}=-\vec{a}+5\vec{b}-\vec{c},\ \overrightarrow{OD}=\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}$

এখানে এই চারটি ভেক্টর সমতলীয় হবে যদি যে কোন একটিকে অপর তিনটির রৈখিক সমবায়ে লেখা যায়।

ধরি $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=x(5\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})+y(-\vec{a}+5\vec{b}-\vec{c})+z(\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}) \longrightarrow (1)$

উভয় পক্ষ হতে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$-র সহগ তুলনা করে লেখা যায়

$1=5x-y+z \longrightarrow (2)$

$1=-x+5y-z \longrightarrow (3)$

$1=-x-y+5z \longrightarrow (4)$

(3) ও (4) থেকে বিয়োগ করে পাওয়া যায় $y=z$

(2) ও (3) থেকে পাওয়া যায় $y=\frac{6}{20}$

(4) থেকে পাওয়া যায় $x=\frac{4}{20}$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{4}{20}(5\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})+\frac{6}{20}(-\vec{a}+5\vec{b}-\vec{c})+\frac{6}{20}(\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c})$$

সুতরাং $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ ভেক্টরগুলি সমতলীয়। অপর পক্ষে A, B, C, D সমতলীয়।

অনু :13 উত্তর : $\sqrt{211}$

অনু :14 ধরুন A, B, C, D বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$

∴ P, Q, R, S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} \quad \overrightarrow{OS} = \frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} = \frac{\vec{c}-\vec{a}}{2}, \quad \overrightarrow{SR} = \frac{\vec{c}-\vec{a}}{2} \quad \therefore \quad \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{SR} \text{ এবং } |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{SR}|$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় QR ∥ PS ∴ PQRS একটি সামান্তরিক।

অনু : 15 ধরুন $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

তা হলে $AB = \sqrt{54}$, $BC = \sqrt{27}$, $CA = \sqrt{17}$ হবে

বিবিধ প্রশ্নমালার সমাধান :

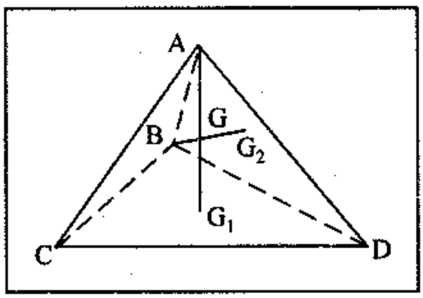
প্রশ্ন : 1 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$ [ত্রিভুজ OAP থেকে]

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP}$ [ত্রিভুজ OCP থেকে]

এদের যোগ করে লেখা যায় $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OP}$ [∴ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

অনুরূপে $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\,\overrightarrow{OP}$ ∴ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OP}$

প্রশ্ন : 2



চিত্র : 2.34

ABCD একটি চতুস্তলক। ধরি A, B, C, D-র অবস্থান যথাক্রমে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ । ত্রিভুজাকৃতি তল

BCD, CDA, DAB, ABC-র ভরকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$, $\frac{\vec{c}+\vec{d}+\vec{a}}{3}$, $\frac{\vec{d}+\vec{a}+\vec{b}}{3}$, $\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$. এখানে G_1, G_2 যথাক্রমে BCD ও BAD তলের ভরকেন্দ্র। AG_1-র উপর G এমন একটি বিন্দু যা AG_1 কে 3 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। সুতরাং G-র অবস্থান ভেক্টর $\frac{3.\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})+1.\vec{a}}{3+1} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$, এটি $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$-র প্রতিসম প্রকাশ। সুতরাং বলা যেতে পারে G বিন্দুটি অপর তিনটি রেখার উপরও থাকবে।

প্রশ্ন : 3 উত্তর : $2\vec{b} - \vec{a}$

প্রশ্ন : 4 $\overrightarrow{BC} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AD} = \frac{4}{7}.7\vec{b} = 4\vec{b}$

ABC ত্রিভুজ থেকে লেখা যায় $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$$\text{বা } \overrightarrow{AC} = a + 4\vec{b}$$

ABD ত্রিভুজ থেকে লেখা যায় $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

$$\text{বা } \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + 7\vec{b}$$

BDC ত্রিভুজ থেকে $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$

$$\text{বা } \overrightarrow{DC} = \vec{a} - 3\vec{b}$$

ABE ত্রিভুজ থেকে $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{4}{11}\overrightarrow{BD} = \frac{28}{11}\vec{b} + \frac{7}{11}\vec{a}$

প্রশ্ন : 5 $2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{\omega} = 2(2\vec{b}+3\vec{c}) - 3(-2\vec{a}+\vec{c}) + 4(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}) = 10\vec{a} + 0.\vec{b} + 7\vec{c}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক = (10, 0, 7)

প্রশ্ন : 6 ধরা যাক $\ell(\vec{u}+\vec{\omega}) + m(-\vec{u}+\vec{\omega}) + n(\vec{u}+\vec{v}+\vec{\omega}) = 0$

$$\Rightarrow \vec{u}(\ell - m + n) + \vec{v}(n) + \vec{\omega}(\ell + m + n) = 0$$

যেহেতু $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ একটি নিধান সুতরাং $\ell - m + n = 0, n = 0, \ell + m + n = 0$

$$\Rightarrow \ell = m = n = 0 \quad \therefore \text{ প্রমাণিত হল।}$$

প্রশ্ন : 7 প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি

$$x(-2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}) + y(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}) + z(7\vec{i}-\vec{k}) = 0 \longrightarrow (1)$$

এবং $x + y + z = 0$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ সিদ্ধ হয়।

সমীকরণ (1) থেকে লেখা যায় $\vec{i}\,(-2x+y+7z)+\vec{j}\,(3x+2y)+\vec{k}\,(5x+3y-z)=0$

যেহেতু $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ সমতলীয় ভেক্টর নয় অতএব

$$-2x+y+7z = 0 \longrightarrow (2)$$
$$3x+2y+\ \ = 0 \longrightarrow (3)$$
$$5x+3y-z = 0 \longrightarrow (4)$$

সমীকরণ (3) থেকে $x = \frac{2y}{3}$. সমীকরণ (2) থেকে x-র মান বসিয়ে পাই $\frac{2y}{3} = -2z$

$\therefore\ x = -\frac{2y}{3} = 2z = k'$ (ধরি) $k' \neq 0.$

∴ এই সমীকরণগুলি উপরের মান দ্বারা সিদ্ধ হয়। এবং $x+y+z=0$ সমীকরণটিও এই মান দ্বারা সিদ্ধ হয়। তিনটি ভেক্টর সমরেখীয়।

প্রশ্ন : 8. a) সমতলীয় b) অসমতলীয়।

প্রশ্ন : 9 উত্তর : $10\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$ অথবা (10, 3, 3)

প্রশ্ন : 10 উত্তর : প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 7 একক,

প্রশ্ন : 11 a) ধরি $\overrightarrow{OA} = \vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c},\ \overrightarrow{OB} = 2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c},\ \overrightarrow{OC} = 7\vec{b}-10\vec{c}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \vec{a}+5\vec{b}-7\vec{c},\ \ \overrightarrow{AC} = -\vec{a}-5\vec{b}+7\vec{c},\ \ \overrightarrow{BC} = -2\vec{a}-10\vec{b}+14\vec{c}$

এখানে $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. সুতরাং A, B, C সমরেখীয়

b) সমরেখীয় হবে না, c) সমরেখীয় হবে, d) সমরেখীয় হবে।

প্রশ্ন : 12 প্রশ্ন : 11-র মত করে করুন।

প্রশ্ন : 13 ধরি ABCD সামন্তরিকের $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = 3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$ $\therefore$ $\overrightarrow{AC}$ কর্ণের সদিক যুক্ত একক ভেক্টর হবে

$$\frac{3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{49}}$$

আবার $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD} = \vec{i}-2\vec{j}+8\vec{k}$ $\therefore$ $\overrightarrow{BD}$ কর্ণের সদিক যুক্ত একক ভেক্টর

$$\frac{\vec{i}-2\vec{j}+8\vec{k}}{\sqrt{69}}$$

প্রশ্ন : 14 এখানে $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$, সুতরাং $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ভেক্টরগুলি একটি ত্রিভুজ গঠন করে। নির্ণেয় ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $\sqrt{6}$

প্রশ্ন : 15 প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি ত্রিভুজের বাহু ভেক্টর হবে না।

ধরুন $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

এখানে $\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{c}\neq\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}\neq\vec{a}$

প্রশ্ন : 16 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

$\overrightarrow{CD}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ $\therefore$ $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$ এবং $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$

অনুরূপে দেখানো যায় অপর বাহু দুটিও সমান ও সমান্তরাল,

প্রশ্ন : 17 নিজেরা করুন।

প্রশ্ন : 18 ধরা যাক A স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে B ও D বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{b}$ ও $\vec{d}$. $\therefore$ $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. যেহেতু $AB\parallel DC$, সুতরাং $\overrightarrow{DC}=t\ \overrightarrow{AB}=t\vec{b}$, $\longrightarrow$ (1) t একটি স্কেলার।

C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর A বিন্দুর সাপেক্ষে $\overrightarrow{AC}$, এখানে লেখা যায় $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{d}+t\vec{b}$ E ও F-র অবস্থান ভেক্টর A-র সাপেক্ষে যথাক্রমে $\frac{\vec{b}+\vec{d}+t\vec{b}}{2}$ ও $\frac{\vec{d}}{2}$

$\therefore$ $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}$

$=-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}$

$=-\frac{\vec{d}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{d}+t\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}(1+t)\ \overrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AB}$ এবং $FE=\frac{1}{2}(1+t)AB$

আবার $DC=t\ AB$

$\therefore$ $AB+DC=AB+tAB=(1+t)AB=2FE$

একক 3 ঃ ভেক্টর গুণন

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

3.2 উদ্দেশ্য

3.3 দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল ও আনুষঙ্গিক গুণাবলী, স্কেলার গুণফলের মৌলিক অসমতা সমূহ

3.4 দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল
দক্ষিণাবর্ত প্রণালীর ব্যাখ্যা
ভেক্টর গুণফলের বিভিন্ন ধর্মাবলী

3.5 তিন বা ততোধিক ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল এবং
ভেক্টর গুণফল

3.6 সারাংশ

3.7 বিবিধ প্রশ্নমালা

3.8 সমাধান / উত্তরমালা

3.1 প্রস্তাবনা

ইতিপূর্বে ভেক্টরের বিভিন্ন সংজ্ঞা ও তার বিভিন্ন দিক্ ও ধর্ম এবং যোগ ও বিয়োগের প্রক্রিয়া আলোচিত হয়েছে। ত্রিমাত্রিক জ্যামিতি, স্থিতিবিদ্যা ও গণিতের বিভিন্ন বিষয় সহজভাবে ও সংক্ষেপে জানার জন্য আপনাদের দুই বা ততোধিক ভেক্টরের গুণফল সম্বন্ধে ধারণা থাকা বিশেষ প্রয়োজন। এই এককে আমি ভেক্টরের গুণফল সম্বন্ধে বিভিন্ন প্রক্রিয়া ও প্রয়োগবিধি আলোচনা করব। আপনারা সহজেই অনুধাবন করতে পারবেন ভেক্টরের প্রয়োগ বিধির ক্ষেত্রে ভেক্টরের গুণনের ধারণার প্রয়োজন অবশ্যম্ভাবী।

3.2 উদ্দেশ্য

এই এককের পঠনের শেষে আপনি যেগুলি করতে পারবেন সেগুলি হল ঃ—

- দুটি ভেক্টরের স্কেলার ও ভেক্টর গুণফলের মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- তিন বা ততোধিক ভেক্টরের স্কেলার ও ভেক্টর গুণফল নির্ণয় করতে সক্ষম হবেন।
- যে কোন ধরনের সমস্যার জ্যামিতিক সমাধান ভেক্টর গুণনের সাহায্যে করতে পারবেন।

3.3 দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল (Scalar product or Dot product)

এই পরিচ্ছেদে দুটি ভেক্টরের মধ্যে স্কেলার গুণনের বিভিন্ন নিয়ম, ধর্ম, প্রয়োগ প্রভৃতি বিষয়ে আপনারা অবগত হতে পারবেন। প্রথমে দুটি ভেক্টরের মধ্যে স্কেলার গুণফলের অর্থ ভাষায় বুঝিয়ে দেওয়া হচ্ছে।

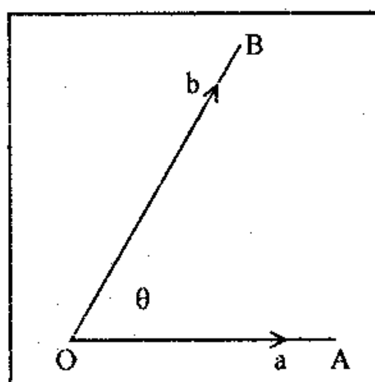
প্রকৃতি জগতে স্কেলার রাশিগুলির প্রত্যেকটি দুটি ভেক্টর রাশির উপর এমনভাবে নির্ভর করে যে সেই স্কেলার রাশিটি দুটি ভেক্টর রাশির মাপাঙ্ক এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের (Cosine) সঙ্গে যুক্ত সমানুপাতিক (Jointly proportional).

এবার গাণিতিকভাবে ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞা দেওয়ার চেষ্টা করা হল।

মনে করি $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ দুটি ভেক্টর রাশি ও তাদের অন্তর্বর্তী কোণ θ চিত্র (3.1) লক্ষ্য করুন। $\vec{OA} = \bar{a}$, $\vec{OB} = \bar{b}$, $\angle BOA = \theta$

দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণন $\bar{a} . \bar{b}$ ($\bar{a}$ ডট $\bar{b}$) দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং তার মান— ভেক্টর রাশিদুটির মাপাঙ্ক ও কোণের কোসাইনের গুণফলের সমান। অতএব সংজ্ঞা অনুসারে লেখা যায়

$\bar{a} . \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \text{Cos}\theta$ [যেখানে $\bar{a}$ ও $\bar{b}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ]



চিত্র 3.1

এখানে $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$ এবং Cosθ প্রতিটি স্কেলার রাশি হওয়ায় আপনারা সহজেই একটা সিদ্ধান্তে আসতে পারেন—দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণন ($\bar{a} . \bar{b}$) একটি স্কেলার রাশি (বাস্তব সংখ্যা)

সংজ্ঞানুসারে সহজেই লেখা যায়

$\vec{b}.\vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}| \cos\theta = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$

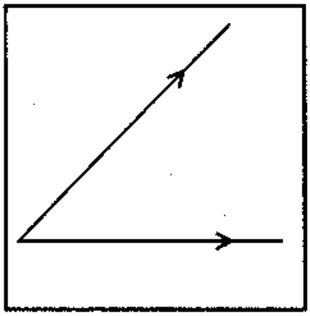
$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

সুতরাং দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বিনিময় সূত্র (Commutative law) মেনে চলে। আপনারা সহজেই বলতে পারেন যে কোন একটি ভেক্টর রাশি ও শূন্য ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল শূন্য হবে অর্থাৎ

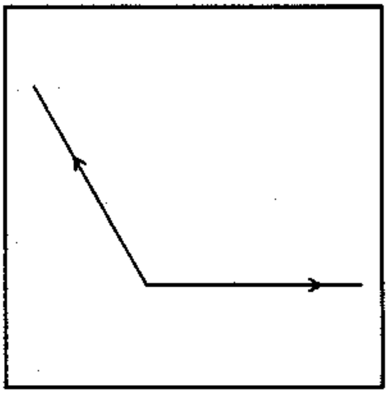
$\vec{a}.\vec{O} = \vec{O}.$

3.3 স্কেলার গুণফলের চিহ্ন

যদি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর রাশি হয়। তবে তাদের স্কেলার গুণফল ধনাত্মক, ঋণাত্মক অথবা শূন্য হবে যথাক্রমে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর মধ্যবর্তী কোণটি সূক্ষ্মকোণ, স্থূলকোণ ও সমকোণ হলে অর্থাৎ



চিত্র 3.2

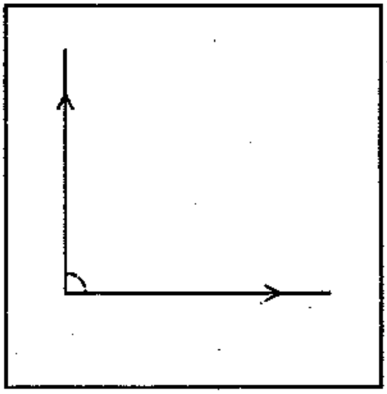


চিত্র 3.3

i) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta > 0$

ii) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta < 0$

iii) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = 0$



চিত্র 3.4

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

ক) এই আলোচনার সাহায্যে আপনারা একটা সিদ্ধান্তে পৌঁছাতে পারেন ঃ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর রাশি দুটি যদি পরস্পরের উপর লম্ব হয় তবে ভেক্টর রাশি দুটির স্কেলার গুণফল শূন্য হবে।

খ) আবার $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর রাশি দুটি সমান্তরাল হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ নিশ্চয়ই শূন্য হবে। অতএব $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \text{ Cos}0^\circ = |\vec{a}||\vec{b}|$ সুতরাং ভেক্টর রাশি দুটি সমান্তরাল ও একই দিক্ বরাবর হলে ভেক্টর রাশি দুটির স্কেলার গুণন তাদের দৈর্ঘ্যের গুণফলের সমান হবে।

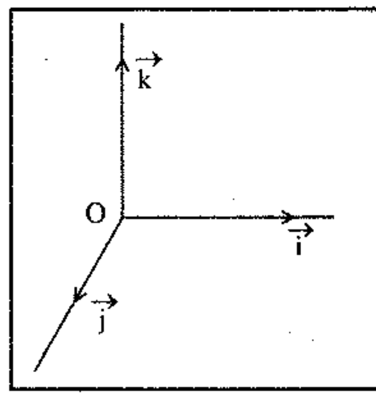
গ) আবার $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর দুটি সমরেখ হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ 0° অথবা 180° হবে।

অর্থাৎ $\text{Cos}\theta = 1$ অথবা -1 হবে।

সুতরাং $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ যখন $\theta = 0^\circ$

$= -|\vec{a}||\vec{b}|$ যখন $\theta = 180^0$

পূর্ব এককে আলোচিত হয়েছে $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ তিনটি একক ভেক্টর যারা পরস্পরের উপর লম্বভাবে অবস্থিত এবং যথাক্রমে x–অক্ষ, y–অক্ষ ও z–অক্ষ বরাবর আছে।



চিত্র 3.5

যা চিত্র (3.5) থেকে সহজেই অনুধাবন করতে পারেন।

সুতরাং আপনারা সহজেই লিখতে পারেন

$\vec{i}.\vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}| \text{ Cos}90^\circ = (1)(1)(0) = 0 = \vec{j}.\vec{i}$

অনুরূপে লেখা যায় [স্কেলার গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে।]

$\vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

আবার আপনারা লক্ষ্য করুন $\vec{i}.\vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}| \text{ Cos}0^\circ = (1)(1)(1) = 1$

$\vec{i}$ একটি একক ভেক্টর যার মাপাঙ্ক এক (1) এবং $\vec{i}$ ভেক্টর $\vec{i}$ সঙ্গে শূন্য ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করে। অতএব অনুরূপে লিখতে পারেন

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$\vec{a}$ যদি একটি ভেক্টর রাশি হয় তবে

$\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \text{Cos}0^\circ = |\vec{a}|^2 = a^2$

a^2 একটি স্কেলার রাশি যা $\vec{a}$ ভেক্টর রাশির দৈর্ঘ্যের বর্গক্ষেত্রের সমান।

আপনারা পূর্বের একক থেকে জানতে পেরেছেন যে ভেক্টর $\vec{a}$-এর দিক্‌যুক্ত একক ভেক্টর

হল = $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, যদি $|\vec{a}| > 0$ হয়।

দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞা থেকে আপনারা লিখতে পারেন

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

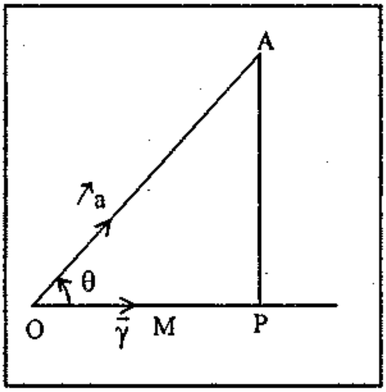
$$\therefore\ \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\ \therefore\ \theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]$$

অতএব দুটি ভেক্টর রাশির **মধ্যবর্তী কোণ** স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞা থেকে সহজেই নির্ণয় করতে পারেন।

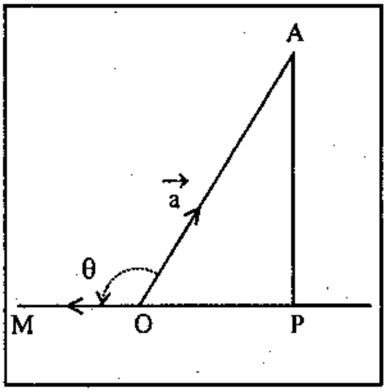
3.3.2 একটি ভেক্টরের উপাংশ (Component) ও উপাংশ ভেক্টর (Projected vector or component vector)

ধরি $\vec{a}$ একটি ভেক্টর রাশি যার উপাংশ ও উপাংশ ভেক্টর নির্ণয় করতে হবে। ধরি $\vec{OA} = \vec{a}$

$\vec{\gamma} = \overrightarrow{OM}$ ($|\vec{\gamma}| = 1$) একক ভেক্টরটি $\vec{a}$-এর সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করেছে।



চিত্র 3.6 (1)



চিত্র 3.6 (2)

AP সরলরেখা OM-এর উপর লম্ব করে টানা হলো। সুতরাং $\pm$ OP-কে বলা হবে $\vec{a}$-এর উপাংশ এবং $\vec{\gamma}$-এর দিক্ বরাবর। চিত্র 3.6 (1) লক্ষ্য করুন। $\overrightarrow{OM}$ ও $\overrightarrow{OP}$ একই দিকে অবস্থিত। সুতরাং $\overrightarrow{OP}$ ধনাত্মক চিহ্ন যুক্ত হবে যখন $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OM}$ একই দিকে অবস্থিত হবে। চিত্র 3.6(2) লক্ষ্য করুন। $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OM}$ বিপরীত দিকে অবস্থিত। অতএব $\overrightarrow{OP}$-কে ঋণাত্মক চিহ্ন যুক্ত ধরা হবে যখন $\overrightarrow{OM}$ ও $\overrightarrow{OP}$ পরস্পর বিপরীত দিকে অবস্থিত হয়।

চিত্র 3.6 (1) অনুসারে

$\vec{\gamma}$-র দিক্ বরাবর $\vec{a}$-এর উপাংশ $= +\ \overrightarrow{OP} = OA\cos\theta = |\vec{a}|\cos\theta$

চিত্র 3.6(2) অনুসারে

$\vec{\gamma}$-র দিক্ বরাবর $\vec{a}$-এর উপাংশ $= -\overrightarrow{OP} = -OA\cos\theta\ (\pi-\theta) = OA\cos\theta = |\vec{a}|\cos\theta$

অতএব উভয় ক্ষেত্রে প্রমাণিত হল $\vec{a}$-এর উপাংশ $\vec{\gamma}$ একক ভেক্টরের দিক্ বরাবর হবে $|\vec{a}|\cos\theta$। এখন $|\vec{a}|\cos\theta\,\vec{\gamma}$ ভেক্টরটিকে বলা হবে $|\vec{a}|$-এর উপাংশ ভেক্টর (Projected vector or component vector) $\vec{\gamma}$ একক ভেক্টরের দিক্ বরাবর।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

$\vec{a}$ ভেক্টরটিকে ত্রিমাত্রিকভাবে $\vec{a} = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3$ রূপে প্রকাশ করা যায়। যেখানে a_1, a_2, a_3 যথাক্রমে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ দিক্ বরাবর উপাংশ।

$\vec{a}$-এর উপাংশ $\vec{i}$-এর দিক্ বরাবর

$$\vec{a}.\vec{i} = (\vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3).\vec{i}$$

$$= \vec{i}.\vec{i}a_1 + \vec{j}.\vec{i}a_2 + \vec{k}.\vec{i}a_3$$

$$= a_1 \qquad [\because \vec{i}.\vec{i} = 1,\ \vec{j}.\vec{i} = \vec{k}.\vec{i} = 0]$$

অতএব অনুরূপে আপনারা লিখতে পারেন

$\vec{a}$-এর উপাংশ $\vec{j}$-এর দিক বরাবর $= a_2$

$\vec{a}$ " " $\vec{k}$ " " $= a_3$

মন্তব্য ঃ a_1, a_2, a_3-কে $\vec{a}$-এর পরস্পর লম্ব উপাংশও বলে।

3.3.3 স্কেলার গুণফল

মনে করি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দ্বারা গঠিত সেটটি V এবং বাস্তব সংখ্যা দ্বারা গঠিত সেটটি R হলে আমরা লক্ষ্য করছি স্কেলার গুণফল একটি চিত্রণ (mapping) সৃষ্টি করেছে যার ফলে

$$V \times V \xrightarrow{f\,:\,\text{স্কেলার গুণফল}} R$$

হয়। অতএব স্কেলার গুণফল প্রক্রিয়াটি দ্বিপদ (Binary) প্রক্রিয়া নয়।

3.3.4 উপাংশের সাপেক্ষে স্কেলার গুণফল নির্ণয়

মনে করি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর রাশি। অতএব ধরি $\vec{a} = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3$ যেখানে a_1, a_2, a_3 তিনটি স্কেলার যথাক্রমে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$-এর দিক্ বরাবর উপাংশ। $\vec{b} = \vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3$ যেখানে b_1, b_2, b_3 তিনটি স্কেলার যথাক্রমে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$-এর দিক্ বরাবর উপাংশ। এখন আমরা উপাংশের সাপেক্ষে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় করি।

$$\vec{a}.\vec{b} = (\vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3).(\vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3)$$

$= \vec{i}.\vec{i}a_1b_1 + \vec{i}.\vec{j}a_1b_2 + \vec{i}.\vec{k}a_1b_3 + \vec{j}.\vec{i}a_2b_1 + \vec{j}.\vec{j}a_2b_2 + \vec{j}.\vec{k}a_2b_3 + \vec{k}.\vec{i}a_3b_1 + \vec{k}.\vec{j}a_3b_2 + \vec{k}.\vec{k}a_3b_3$

যেহেতু $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ এবং $\vec{i}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{i} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

অতএব সমীকরণ (1) হতে আপনারা লিখতে পারেন $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ----- (2)
সুতরাং দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল উপাংশে সাপেক্ষে নির্ণয় হল।

অনুসিদ্ধান্ত a) আপনারা জানেন $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ এবং $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

সুতরাং দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞা থেকে লিখ্তে পারেন

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}| \, Cos\theta$

$(\vec{a}.\vec{b}), |\vec{a}|, |\vec{b}|$-এর মান বসিয়ে পাই

$a_1b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \; \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \cos\theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \; \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \text{------}(3)$$

সমীকরণ (3) এর সাহায্যে দুটি ভেক্টরের অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় করা যায়।

b) অতএব $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর অন্তর্গত কোণ যদি $\theta = \frac{\pi}{2}$ হয় অর্থাৎ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ পরস্পরের উপর লম্ব হয় তবে

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ হবে।

3.3.5 স্কেলার গুণফলের বিভিন্ন ধর্মাবলী

ক) দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে সেটা আপনারা স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞা থেকে বুঝতে পেরেছেন অর্থাৎ $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ সিদ্ধ হবে যে কোন দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর ক্ষেত্রে।

খ) স্কেলারের সঙ্গে সংযোগ নিয়ম (Associativity with scalars)

$\vec{a}$ ও $\vec{b}$ যদি ভেক্টর রাশি হয় এবং m ও n যে কোন স্কেলার রাশি হয় তবে $m\vec{a}.n\vec{b} = mn(\vec{a}.\vec{b})$ হবে।

প্রমাণ ঃ

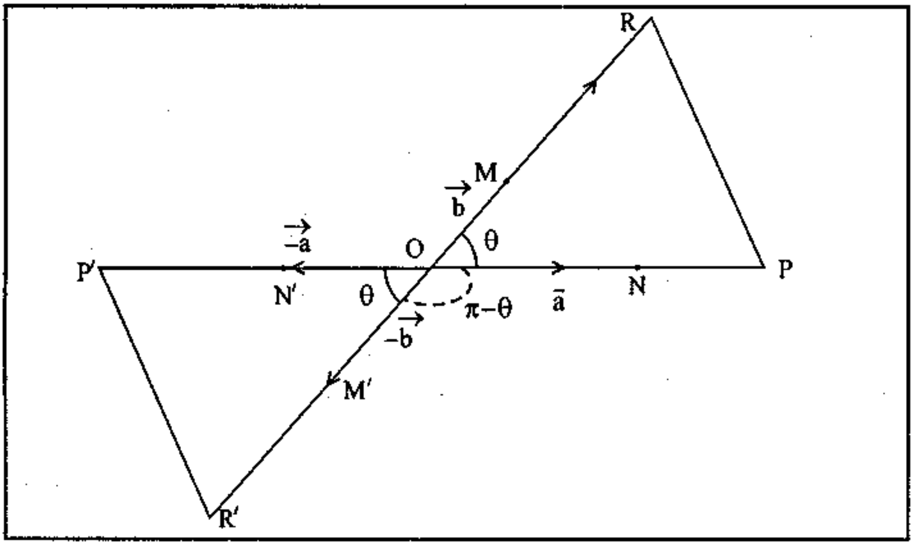
i) m ও n যে কোন ধনাত্মক স্কেলার রাশি হয় তবে $\vec{a}$ ও $m\vec{a}$ একই দিক নির্দেশ করে। অনুরূপে $\vec{b}$ ও $n\vec{b}$-এর দিক ও একই। এই সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা পূর্ব এককে পেয়েছেন। সুতরাং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $m\vec{a}$ ও $n\vec{b}$-এর মধ্যবর্তী কোণ একই হবে।

সুতরাং স্কেলার গুণনের সংজ্ঞানুসারে আপনারা লিখতে পারেন

$m\vec{a}.n\vec{b} = |m\vec{a}|\,|m\vec{b}|\, Cos\theta$ [θ যদি $m\vec{a}$ ও $n\vec{b}$-এর মধ্যবর্তী কোণ হয়।1

$= |m|\,|n|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\text{Cos}\theta$

$= mn\,(\vec{a}\,.\,\vec{b})$ [সংজ্ঞানুসারে]



চিত্র 3.7

চিত্র 3.7 থেকে আপনাদের ধারণা পরিষ্কার হয়ে যাবে। মনে করি $= \vec{a}$, $\overrightarrow{OP} = m\vec{a}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{b}$ $\overrightarrow{OR} = n\vec{b}$ এবং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ মধ্যবর্তী কোণ θ। সুতরাং $m\vec{a}$ ও $n\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হবে।

ii) এখন মনে করুন m ধনাত্মক রাশি ও n ঋণাত্মক রাশি হয় তবে $m\vec{a}$ ও $n\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $(\pi-\theta)$ হবে। চিত্র 3.7 লক্ষ করুন n ঋণাত্মক হলে এর দিক বিপরীত হয়ে যাবে। অর্থাৎ $n\vec{b} = \overrightarrow{OR'}$ হবে। অতএব $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OR'}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\pi-\theta$ হবে।

$m\vec{a}\,.\,n\vec{b} = |m\vec{a}|\,|n\vec{b}|\,\text{Cos}(\pi-\theta)$

$= |m|\,|n|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,(-\,\text{Cos}\theta)$

$= -\,mn\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\text{Cos}\theta$

যেহেতু n ঋণাত্মক অতএব

$m\vec{a}\,.\,n\vec{b} = mn\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\text{Cos}\theta$

$= mn\,(\vec{a}\,.\,\vec{b})$

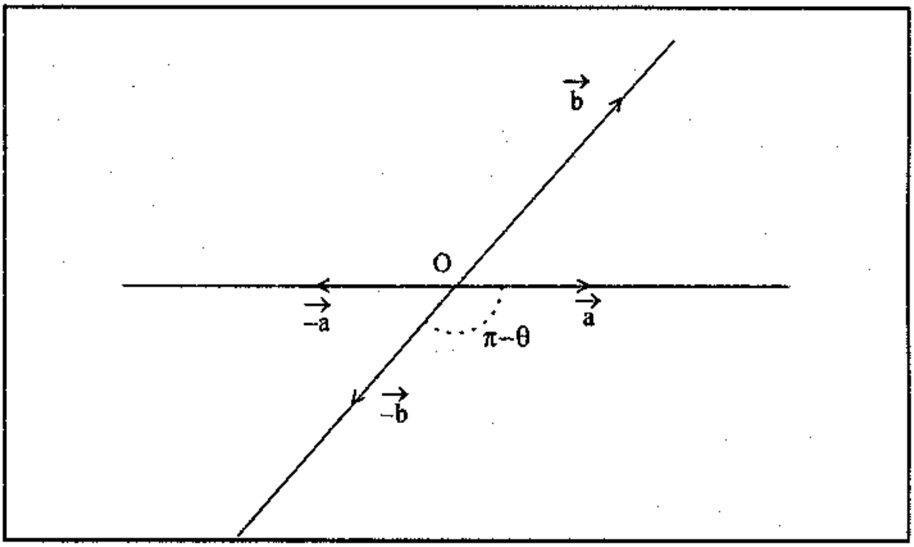
iii) যদি m ঋণাত্মক ও n ঋণাত্মক রাশি হয় তবে $m\vec{a}$ ও $n\vec{b}$-এর মধ্যবর্তী কোণও θ হবে। চিত্র (3.7) লক্ষ্য করুন m ও ঋণাত্মক হলে $\overrightarrow{OR'} = n\vec{b}$ ও $\overrightarrow{OP'} = m\vec{a}$ ধরি। সুতরাং $\overrightarrow{OR'}$ ও $\overrightarrow{OP'}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হবে।

অতএব

$m\vec{a}.n\vec{b} = |m|\,|n|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\mathrm{Cos}\theta$

$= mn(\vec{a}.\vec{b})$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ i) চিত্র 3.8 লক্ষ্য করুন।



চিত্র 3.8

যেকোন দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর ক্ষেত্রে সহজেই প্রমাণ করা যায়।

$\vec{a}.(-\vec{b}) = -(\vec{a}.\vec{b})$

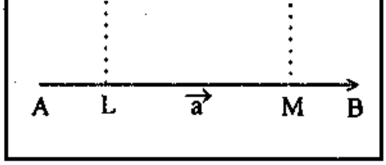
$(-\vec{a}).(-\vec{b}) = \vec{a}.\vec{b}$

গ) যে কোন তিনটি অসমতলীয় ভেক্টর রাশির প্রতিটির সঙ্গে অন্য একটি ভেক্টর রাশির ($\vec{r}$) স্কেলার গুণফল শূন্য হবে একমাত্র $\vec{r}$ ভেক্টরটি যদি শূন্য ভেক্টর রাশি হয়।

উপরের স্কেলার গুণফলের ধর্ম থেকে সহজেই আপনারা একটা সিদ্ধান্তে পৌঁছাতে পারেন কোন অশূন্য ভেক্টর রাশি কখনও তিনটি অসমতলীয় ভেক্টরের প্রতিটির সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত হবে না।

অতএব $\vec{r}$ ভেক্টরটি প্রতিটি ভেক্টরের উপর লম্বভাবে অবস্থিত হবে যদি ভেক্টর রাশিটি শূন্য ভেক্টর হয়।

ঘ) চিত্র 3.9 লক্ষ্য করুন। মনে করুন $\overrightarrow{PQ} = \vec{b}, \vec{a}$ ভেক্টরটির অবলম্বন $\overrightarrow{AB}$, PL ও QM দুটি লম্ব $\overrightarrow{AB}$ উপর টানা হলো। অতএব



চিত্র 3.9

$\vec{b}$ এর প্রক্ষেপ $\overrightarrow{AB}$-এর উপর $= LM = |\vec{b}|\,\mathrm{Cos}\theta$

সুতরাং আপনারা সহজেই বলতে পারেন $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল $\vec{a}$-এর দৈর্ঘ্য ও $\vec{b}$-এর প্রক্ষেপ বা লম্ব অভিক্ষেপ ($\vec{a}$-এর উপর) এর গুণফলের সমান। ধনাত্মক হবে বা ঋণাত্মক হবে তা নির্ভর করবে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর দিকের উপর।

ঙ) বন্টন সূত্র (Distributive Law)

স্কেলার গুণফল বন্টন সূত্র মেনে চলে। অর্থাৎ $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{c}$ তিনটি ভেক্টর রাশি হয় তবে

$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

প্রমাণ ঃ

চিত্র 3.10 দেখুন। মনে করি $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{BC} = \vec{c}$ অতএব $\vec{AC} = \vec{b}+\vec{c}$ হবে।

$\vec{a}$ ভেক্টরের অবলম্বন RK রেখাংশের উপর AL, BM ও CN লম্ব টানা হলো।

$\vec{AB}$-এর উপাংশ ভেক্টর $\vec{RK}$-এর দিক বরাবর হল LM

$\vec{BC}$ " " " " " MN

$\vec{AC}$ " " " " " LN

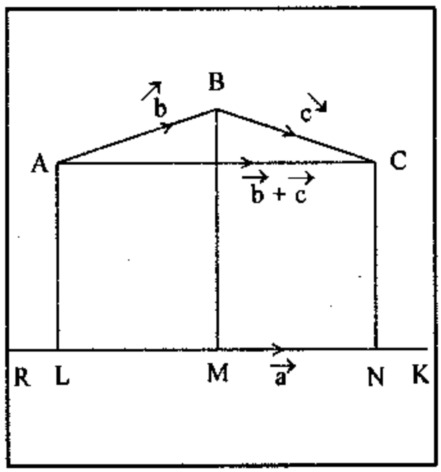
অতএব ($\vec{b}+\vec{c}$)-এর উপাংশ = উপাংশ $\vec{b}$ + উপাংশ $\vec{c}$

সুতরাং $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|$ ($\vec{b}+\vec{c}$)-এর উপাংশ

$= |\vec{a}|$ ($\vec{b}$-এর উপাংশ + $\vec{c}$-এর উপাংশ)

$= |\vec{a}|\vec{b}$-এর উপাংশ $+|\vec{a}|\vec{c}$-এর উপাংশ

$= \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$



চিত্র 3.10

অনুরূপে দেখানো যায়

$\vec{a}.(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}.(\vec{b}+(-\vec{c}))$

$= = \vec{a}.\vec{b} + [-(\vec{a}.\vec{c})]$

$= = \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c}$

উপরের স্কেলার গুণফলের বণ্টনসূত্রের ধর্ম অনুযায়ী লেখা যায়

i) $(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} - \vec{b}.\vec{b} = a^2 - b^2$

ii) $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a}. + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b} = a^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + b^2$

iii) $(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a}. - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b} = a^2 - 2a.\vec{b} + b^2$

উপরের (ii) ও (iii) থেকে আপনারা লিখতে পারেন

$\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}\{(\vec{a}+\vec{b})^2 - (\vec{a}-\vec{b})^2\}$

$= \frac{1}{4}\{|\bar{a}+\bar{b}|^2 - |\bar{a}-\bar{b}|^2\}$

অর্থাৎ দুটো ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণন ভেক্টর রাশি দুটির যোগফল ও বিয়োগফলের দৈর্ঘ্য দ্বারাও প্রকাশ করা যায়।

3.3.6 স্কেলার গুণফলের মৌলিক অসমতা সমূহ (Inequalities for dot or Scalar product)

i) (Canchy – Schwarz-এর মৌলিক অসমতা

যদি $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ দুটি ভেক্টর রাশি হয় তবে $|\bar{a}.\bar{b}| \le |\bar{a}|\,|\bar{b}|$

প্রমাণ ঃ মনে করুন $\bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$, t যে কোন স্কেলার রাশি হয়। অতএব

$|t\bar{a} + \bar{b}|^2 = (t\bar{a}+\bar{b}).(t\bar{a}+\bar{b})$

$= t^2\bar{a}.\bar{a} + 2 + (\bar{a}.\bar{b}) + \bar{b}.\bar{b}$

$= t^2|\bar{a}|^2 + 2t(\bar{a}.\bar{b}) + |\bar{b}|^2$

যেহেতু $|t\bar{a} + \bar{b}|^2 \ge 0$ অতএব

$t^2|\bar{a}|^2 + 2t(\bar{a}.\bar{b}) + |\bar{b}|^2 \ge 0$

অথবা $t^2|\bar{a}|^2 + 2t|\bar{a}|\,\frac{\bar{a}.\vec{b}}{|\bar{a}|} + \left(\frac{\bar{a}.\vec{b}}{|\bar{a}|}\right)^2 + |\vec{b}|^2 - \frac{(\bar{a}.\vec{b})^2}{|\bar{a}|^2} \ge 0$

অথবা $\left(t|\bar{a}| + \frac{\bar{a}.\vec{b}}{|\bar{a}|}\right)^2 + \frac{1}{|\bar{a}|^2}\left[|\bar{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\bar{a}.\vec{b}|^2\right] \ge 0$ -----(1)

যেহেতু $\left(t|\bar{a}| + \frac{\bar{a}.\vec{b}}{|\bar{a}|}\right)^2 \ge 0$ এবং $|\bar{a}|^2 \ge 0$

সুতরাং সমীকরণ (1) হতে আপনারা লিখতে পারেন

$|\bar{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\bar{a}.\vec{b}|^2 \ge 0$

$|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 \ge |\bar{a}.\bar{b}|^2$

$|\bar{a}|\,|\bar{b}| \ge |\bar{a}.\bar{b}|$ ---------- (2)

অতএব Canchy Schwarz's-এর মৌলিক অসমতা প্রমাণিত হল।

সমীকরণ (2) থেকে লিখতে পারেন

$\frac{|\bar{a}.\vec{b}|}{|\bar{a}||\vec{b}|} \le 1$

ii) $|\bar{a}+\bar{b}| \le |\bar{a}| + |\bar{b}|$

প্রমাণ ঃ আপনারা জানেন

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

Canchy Schwarz's এর মৌলিক অসমতা থেকে আপনারা জানেন $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$

অতএব $|\vec{a}+\vec{b}|^2 \le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| + |\vec{b}|^2$

$$\le (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

$$\therefore |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ হবে যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ পরস্পর উপর লম্ব হয়।

প্রমাণ ঃ $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

সুতরাং $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ হবে যদি $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ হয় অর্থাৎ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{2}$ হয়।

সুতরাং আপনারা বুঝতে পারছেন $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর উপর লম্ব হলে

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ হবে।

উদাহরণ ঃ ABC ত্রিভুজের A, B এবং C শীর্ষ বিন্দুস্থ কোণ ত্রয়ের পরিমাপ যথাক্রমে A, B এবং C দ্বারা সূচিত করা হল। A, B এবং C কোণের বিপরীত বাহু তিনটির পরিমাপকে অর্থাৎ BC, CA ও AB এর বাহুর দৈর্ঘ্যকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা প্রকাশ করা হল। আপনাদের জানা আছে ত্রিকোণমিতির সাহায্যে ত্রিভুজের নিম্নলিখিত ধর্মগুলি প্রমাণ করা যায়। আপনারা এই ধর্মগুলি ভেক্টরের স্কেলার গুণনের সাহায্যে প্রমাণ করতে পারবেন।

i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A$

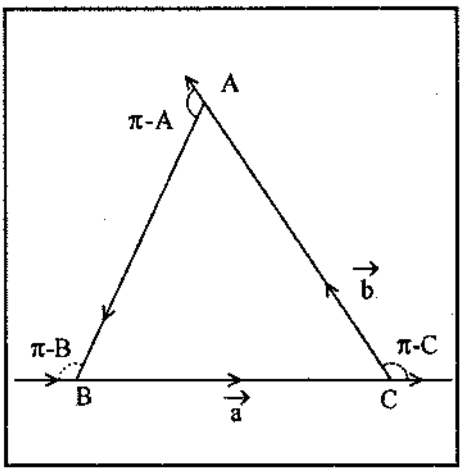
ii) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \operatorname{Cos} B$

iii) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos} C$

iv) $a = b\operatorname{Cos} C + c\operatorname{Cos} B$

v) $b = c\operatorname{Cos} A + a\operatorname{Cos} C$

vi) $c = a\operatorname{Cos} B + b\operatorname{Cos} A$



চিত্র 3.11

i) **এর প্রমাণ**

চিত্র 3.11 লক্ষ্য করুন। ধরা যাক $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ ও $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$

ভেক্টরের যোগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে আপনারা লিখতে পারেন

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \text{ ------- } (1)$$

সুতরাং সমীকরণ (1) এর উভয় পার্শ্বে স্কেলার গুণফল লিখে লিখতে পারেন

$$(-\overrightarrow{AB}).(-\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}).(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$$

অথবা $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}$

$$\vec{c}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{a} + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b}$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\text{Cos}\,(\pi - c) + |\vec{b}|^2 \text{ -----(2)}$$

$|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{c}| = c$ লেখা হয় তবে সমীকরণ (2) থেকে পাই

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\text{Cos}c$$

প্রমাণিত হল।

অনুরূপে আপনারা ত্রিভুজের (ii) ও (iii) ধর্ম দুটি প্রমাণ করুন।

উদাহরণ ঃ

2. (vi)-এর প্রমাণ

চিত্র (3.11) লক্ষ্য করুন।

সমীকরণ (1) এর উভয় পার্শ্বে $\overrightarrow{AB}$-এর সঙ্গে স্কেলার গুণফল নিলে আমরা লিখতে পারি

$$-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}).\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} \quad \text{(বণ্টনসূত্রানুসারে)}$$

$$= |\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{AB}|\,\text{Cos}\,(\pi - B)$$

$$+ |\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{AB}|\,\text{Cos}\,(\pi - A)$$

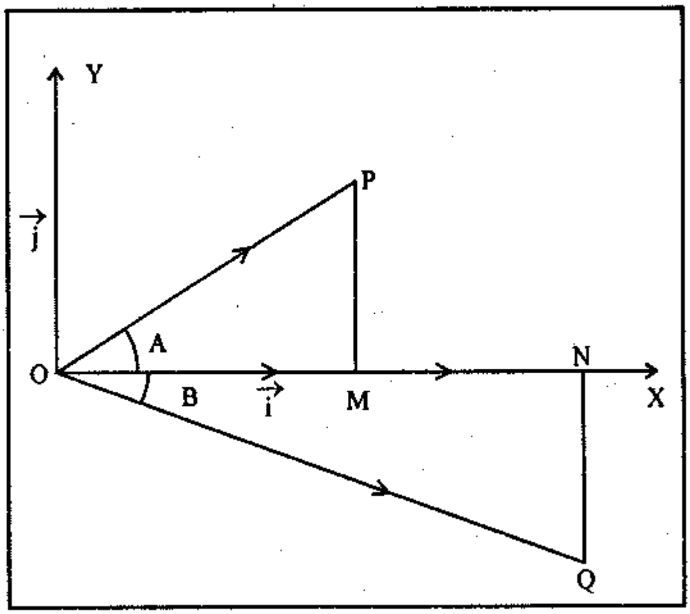
$$-|\overrightarrow{AB}|^2 = -|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{AB}|\,\text{CosB}$$

$$-|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{AB}|\,\text{CosA}$$

এখানে $|\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{BC}|, |\overrightarrow{CA}|$ হলো ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য। অতএব এরা সব স্কেলার রাশি। সুতরাং $|\overrightarrow{AB}| = c$, $|\overrightarrow{BC}| = a$ এবং $|\overrightarrow{CA}| = b$ লিখলে আপনারা লিখতে পারেন।

$$-c^2 = -ca\cos B - cb\,\text{CosA}$$

অথবা $c = a\text{CosB} + b\text{Cos.A}$



চিত্র 3.12

অনুরূপ ভাবে ত্রিভুজের অন্য দুটি ধর্ম (iv) ও (v) আপনারা করে দেখবেন।

উদাহরণ 3. প্রমাণ করুন

$$\text{Cos}(A + B) = \text{CosACosB} - \text{SinA SinB}$$

সমাধান ঃ চিত্র 3.12 লক্ষ্য করুন। OX, OY দুটি পরস্পর O বিন্দুতে লম্ব রেখা। $\bar{i}, \bar{j}$ যথাক্রমে OX ও OY বরাবর একক ভেক্টর। XY– সমতলের X–অক্ষের উভয় পার্শ্বে দুটি ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OQ}$ নেওয়া হল যারা OX-এর সঙ্গে যথাক্রমে A ও B কোণে নত।

X–অক্ষের উপর PM ও QN লম্ব টানা হল। এখন ত্রিভুজের যোগসূত্রানুসারে লেখা যায়

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \text{OP CosA}\,\bar{i} + \text{OP Sin A}\,\bar{j}$$

এবং $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NQ} = \text{OQ CosB}\,\bar{i} - \text{OQ SinB}\,\bar{j}$

$$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = (\text{OP CosA}\,\bar{i} + \text{OP SinA}\,\bar{j}).(\text{OQ CosB}\,\bar{i} - \text{OQ sinB}\,\bar{j})$$

$$[\because \bar{i}.\bar{i} = \bar{j}.\bar{j} = 1,\ \bar{i}.\bar{j} = \bar{i}.\bar{j} = 0]$$

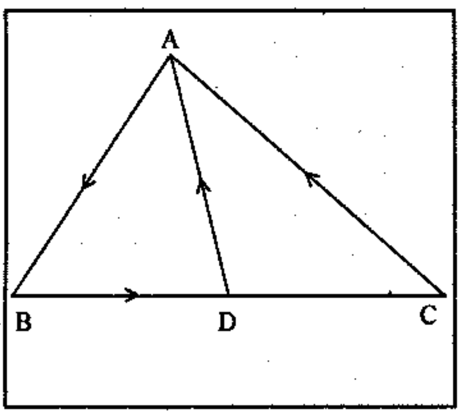
$$|OP|\,|OQ|\,\text{Cos}(A + B) = (OP)(OQ)\,[\text{CosA CosB} - \text{sinA sinB})$$

$$\therefore \text{Cos}(A + B) = \text{CosA CosB} - \text{SinA SinB}$$

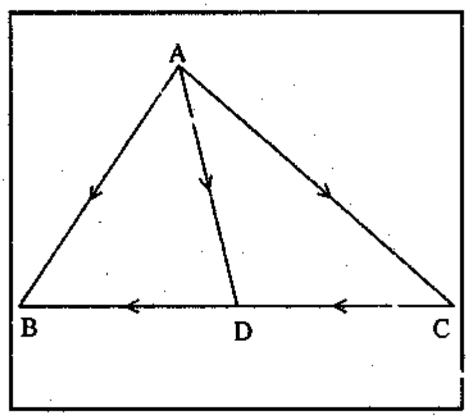
প্রমাণিত হল।

উদাহরণ 4. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$



চিত্র 3.13



চিত্র 3.14

প্রমাণ ঃ ত্রিভুজের যোগ সূত্রানুযায়ী লেখা যায়

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})$$

$$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB}$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{DB}|^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB} \text{-------}(1)$$

অনুরূপভাবে আমরা লিখতে পারি

$$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$$

$$\therefore \vec{AC}.\vec{AC} = (\vec{AD} + \vec{DC}).(\vec{AD} + \vec{DC})$$

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{AD}|^2 + |\vec{DC}|^2 + 2\vec{AD} . \vec{DC} \text{ ------ } (2)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) যোগ করে পাওয়া যায়

$$|\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 = 2|\vec{AD}|^2 + |\vec{DB}|^2 + |\vec{DC}|^2 + 2\vec{AD} . (\vec{DB} + \vec{DC}) \text{ ----- } (3)$$

যেহেতু D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু

$$\therefore \vec{BD} = \vec{DC} \;\therefore |\vec{DB}| = |\vec{DC}| \text{ ------ } (4)$$

বা $-\vec{DB} = \vec{DC}$

$$\vec{DC} + \vec{DB} = 0 \text{ ....}(5)$$

অতএব এখন সমীকরণ (3) এ সমীকরণ (4) ও (5) বসিয়ে পাই

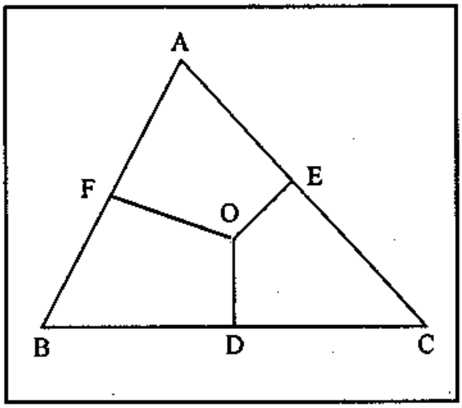
$$|\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 = 2(|\vec{AD}|^2 + |\vec{DB}|^2) \text{ ....}(6)$$

যেহেতু $|\vec{AB}|$, $|\vec{AC}|$ ও $|\vec{AD}|$, $|\vec{DB}|$ বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সূচিত করে। অতএব সমীকরণ (6)-কে লেখা যায়

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + DB^2)$$

উদাহরণ 5. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকগুলি (Perpendicular bissectors) সম বিন্দুগামী।

সমাধান



ABC ত্রিভুজের BC ও AC বাহু উপর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে OD ও OE, O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরি।

চিত্র 3.15

ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু A, B, C-এর অবস্থান ভেক্টর O-এর সাপেক্ষে যথাক্রমে $\bar{a}, \bar{b}$ ও $\bar{c}$ ধরি। AB বাহুর মধ্য F, OF যোগ করি। OF যদি AB-এর উপর লম্ব হয় তবেই OE, OD, OF লম্ব সমদ্বিখণ্ডকগুলি O বিন্দুগামী হবে, প্রমাণ হয়ে যাবে।

ধরি $\vec{OA} = \bar{a}$, $\vec{OB} = \bar{b}$, $\vec{OC} = \bar{c}$

$$\therefore \vec{OD} = \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}, \vec{CA} = \bar{a} - \bar{c}, \vec{AB} = \bar{b} - \bar{a}, \vec{BC} = \bar{c} - \bar{b}$$

যেহেতু OD সরলরেখা BC-র উপর লম্ব অতএব স্কেলার গুণনের সাহায্যে আপনারা লিখতে পারেন

$$\vec{OD}.\vec{BC} = O$$

$$\frac{1}{2}(\bar{b}+\bar{c}).(\bar{c}-\bar{b}) = O$$

বা $|\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 = O$

$|\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$ ----------- (1)

অনুরূপে আমরা লিখতে পারি

$\frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) . (\vec{c} - \vec{a}) = 0$

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2$ ----(2)

সমীকরণ (1) এবং (2) হতে পাই

$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$

বা $\vec{a}.\vec{a} - \vec{b}.\vec{b} = 0$

বা $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = 0$

$\therefore \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ হবে।

$\therefore \vec{OF}. \vec{BA} = 0$

সুতরাং $\vec{OF}$, $\vec{AB}$-এর উপর লম্ব।

অতএব ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকগুলি (OE, OF, OD) O বিন্দুগামী প্রমাণ হলো।

অনুশীলনী —A

1. $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ ভেক্টরের উপাংশ (Component ও উপাংশ ভেক্টরটি (Component vector or Projected vector) নির্ণয় করুন।
2. মান নির্ণয় করুন।

   a) $\vec{j}.(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$

   b) $(2\vec{i} - \vec{j}).(3\vec{j} + \vec{k})$
3. যদি $\vec{A} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ এবং $\vec{B} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ হয় তবে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।
4. α-এর মান নির্ণয় করুন যাতে $\vec{A} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$ এবং $\vec{B} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ পরস্পর লম্ব হয়।
5. দেখান যে ভেক্টর $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ এবং $\vec{C} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ একটি ত্রিভুজের বাহু নির্দেশ করলে প্রমাণ করুন ত্রিভুজটি সমকোণী হবে।
6. প্রমাণ করুন যে একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব রেখাগুলি সম বিন্দুগামী হবে।
7. প্রমাণ করুন যে রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরে সমকোণে ছেদ করে।
8. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C-এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k})$, $(4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$ এবং $(3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k})$ হলে প্রমাণ করুন যে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে।

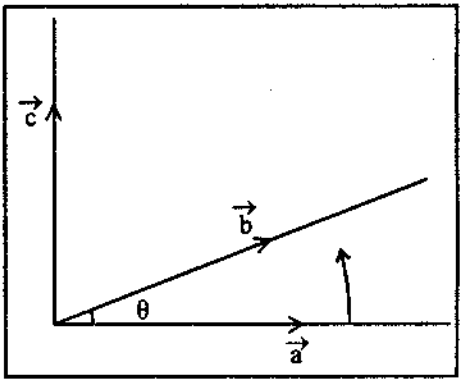
3.4 দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফল

দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের সংজ্ঞা দেওয়ার আগে দক্ষিণাবর্ত প্রণালী সম্বন্ধে আপনাদের পরিষ্কার ধারণা থাকা বিশেষ প্রয়োজন। সেইজন্য প্রথমে দক্ষিণাবর্ত প্রণালীর বর্ণনা দেওয়া হল।

3.4.1 দক্ষিণাবর্ত প্রণালী (Right handed system)

দুটি বা ততোধিক ভেক্টরের ভেক্টর গুণনের বিভিন্ন পদ্ধতি বোঝার আগে আপনাদের দক্ষিণাবর্ত প্রণালী এবং বামাবর্ত প্রণালী সম্বন্ধে কিছু অভিজ্ঞতা থাকা প্রয়োজন। আশা করি এর সম্বন্ধে আপনাদের কিছু জ্ঞান আছে। তাও আমি কিছু বর্ণনা দেওয়ার চেষ্টা করছি।

মনে করি $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ তিনটি ভেক্টর রাশি $\vec{c}$ ভেক্টরটি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-র মধ্যগামী সমতলের উপর লম্ব অর্থাৎ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ উভয়ের উপর লম্ব। এখন যদি দেখা যায় $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-র মধ্যগামী সমতলের উপর লম্বভাবে রেখে একটি দক্ষিণাবর্ত স্ক্রুকে (Right handed screw) $\vec{a}$ হতে $\vec{b}$-র দিকে θ কোণ ঘোরালে স্ক্রুটি $\vec{c}$-এর সমদিকে অগ্রসর হয় তবে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ এই ক্রমটিকে (order) বলা হয় দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আছে। এটি সহজে বোঝা যাবে একটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত ঘূর্ণন চিন্তা করলে।



চিত্র 3.16

উপরে বর্ণিত উপায়ে ঘুরিয়ে স্ক্রুটি যদি $\vec{c}$-র বিপরীত দিকে অগ্রসর হয় তবে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ এই ক্রমটিকে বামাবর্ত প্রণালী (Left handed system) আছে বলা হয়।

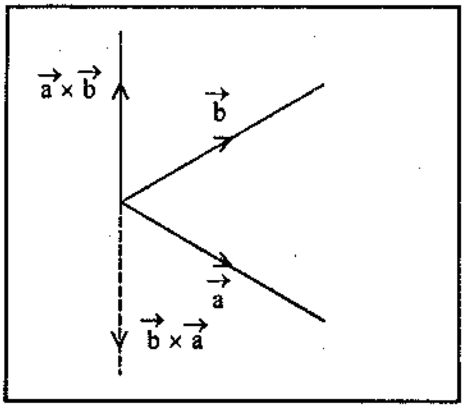
যদি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-র মধ্যে অন্তর্গত $\theta = \frac{\pi}{2}$ কোণ হয় তবে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ পরস্পর লম্ব হবে। এই তিনটি ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ চক্রাকারে (cyclic order) দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আবদ্ধ থাকবে। অতএব এক্ষেত্রে বলা যায় OX, OY ও OZ পরস্পর লম্ব অক্ষ তিনটি চক্রাকারে দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আছে। সুতরাং OX, OY, OZ-অক্ষ বরাবর যথাক্রমে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ এই তিনটি একক ভেক্টর দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আছে বলা হয়।

3.4.2 দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল (Vector product or cross product between two vectors)

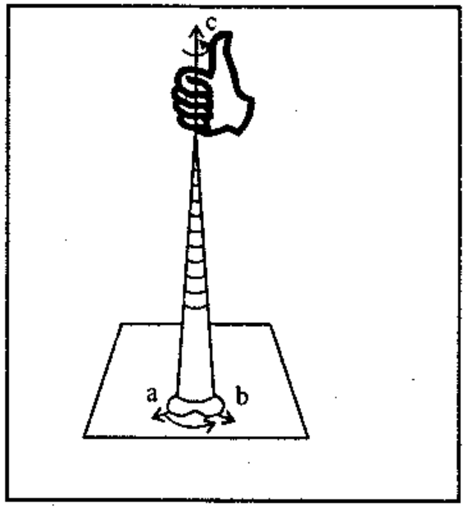
দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফলের সংজ্ঞা প্রথমে ভাষায় দেওয়া হল। ভেক্টর রাশিগুলির প্রত্যেকটি দুটি ভেক্টর রাশির উপর এমনভাবে নির্ভর করে যে সেই ভেক্টর রাশিটি অন্য দুটি ভেক্টর রাশির মাপাঙ্ক এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন (sine) এর সঙ্গে যুক্ত সমানুপাতিক এবং রাশিটির একটি নির্দিষ্ট দিক আছে। সেই রাশিটি ভেক্টর রাশি দুটির প্রত্যেকটির উপর লম্বভাবে থাকবে।

এখন আমি আপনাদের দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফল গাণিতিক ভাবে বোঝানোর চেষ্টা করব। আপনারা মনে করুন $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর রাশি যাদের অন্তর্গত কোণ θ $(0 < \theta < \pi)$ $\vec{\gamma}$ একটি একক ভেক্টর যা $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর মধ্যগামী সমতলের উপর লম্ব এবং $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ এই ক্রমটি দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আছে। অতএব গাণিতিকভাবে দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফল হল $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\theta\,\vec{\gamma}$ ভেক্টর গুণফল $\vec{a} \times \vec{b}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

$$\therefore\ \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\theta\,\vec{\gamma} \quad \text{-----(1)}$$



চিত্র 3.17



চিত্র 3.18

উপরের চিত্র 3.17 এবং চিত্র 3.18 থেকে আপনাদের দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফলের সম্বন্ধে ধারণা পরিষ্কার হবে। এখানে $\vec{\gamma}$ হল একক ভেক্টর যেটি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ সমতলের উপর লম্বভাবে আছে। তার ঘূর্ণন $\vec{a}$ থেকে $\vec{b}$-র দিকে হবে। বৃদ্ধাঙ্গুলীটি $\vec{c}$-এর দিক নির্দেশ করে।

সমীকরণ (1) থেকে সহজেই বলা যায় দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি। অর্থাৎ $\vec{c}$ একটি ভেক্টর রাশি। সুতরাং এর দিক আছে। চিত্র থেকে দিকটি নিশ্চয়ই পরিষ্কার হয়ে যাবে। $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\text{Sin}\theta$ স্কেলার রাশি। কিন্তু $\vec{\gamma}$ একটি একক ভেক্টর রাশি।

সুতরাং $\vec{b} \times \vec{a}$-এর দিক $\vec{a} \times \vec{b}$-এর বিপরীত দিকে হবে। চিত্র 3.17 লক্ষ্য করুন। কিন্তু এই দুটি ভেক্টরের মান সমান হবে। অর্থাৎ $\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a}$

সুতরাং আপনারা সহজেই বলতে পারেন ভেক্টরের গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

আবার $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\text{Sin}\theta|\vec{\gamma}|$ $\qquad [|\vec{\gamma}| = 1]$

$$= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\text{Sin}\theta$$

মন্তব্য ঃ

i) দুটি ভেক্টরের ($\vec{a}$ ও $\vec{b}$) ভেক্টর গুণন $\vec{a} \times \vec{b}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

ii) $\vec{c} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\text{Sin}\theta\,\bar{\gamma}$

θ হলো $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর মধ্যবর্তী কোণ এবং $0 \le \theta \le 180^\circ$

iii) $\vec{c}$-র অবলম্বন $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের অবলম্বনের উপর লম্ব।

iv) $\vec{c}$-এর অভিদিশা এমন যে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আছে।

v) ভেক্টর গুণফল এক প্রকার চিত্রণ (mapping) সৃষ্টি করেছে যার ফলে

vxv $\xrightarrow{\text{f : ভেক্টর গুণফল}}$ v, অর্থাৎ vxv সেটটি v সেটেই চিত্রিত হচ্ছে ভেক্টর গুণফল দ্বারা। [ভেক্টরগুলি দ্বারা গঠিত সেটটি v ধরা হয়েছে]

vi) যেহেতু $0 < \theta < 180^\circ$ সুতরাং Sinθ কখনও ঋণাত্মক হবে না। অতএব $|\vec{a} \times \vec{b}|$ বা $|\vec{c}|$ কখনও ঋণাত্মক হবে না।

ভেক্টর গুণনের সংজ্ঞা থেকে সহজেই আমরা বলতে পারি যে কোন ভেক্টরের শূন্য ভেক্টরের সঙ্গে ভেক্টর গুণনের মান শূন্য ভেক্টর হবে।

$\therefore \vec{a} \times \vec{O} = \vec{O}$

$(\vec{a} \times \vec{b})$ ভেক্টরটি নিশ্চয়ই $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের প্রতিটির সঙ্গে লম্ব ভাবে অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ প্রমাণ করুন $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$

প্রমাণ ঃ ধরি $|\vec{c}|^2 = \vec{c}.\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{a} \times \vec{b})$

$$(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|^2$$

$$= |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,\text{Sin}\theta$$

$$= |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,(1 - \text{Cos}^2\theta)$$

$$= |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\text{Cos}^2\theta$$

$$= |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$$

সুতরাং ভেক্টরের গুণনের স্কেলার গুণন দ্বারাও প্রকাশ করা যায়।

i) $|\vec{c}| = \sqrt{\left[|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2\right]}$

ii) $\vec{c}.\vec{a} = 0$ $\vec{c}.\vec{b} = 0$ হবে।

iii) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে থাকবে।

3.4.3 ভেক্টর গুণনের বিভিন্ন ধর্মাবলী

ক) দুটি অশূন্য ভেক্টর পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্ত

দুটি অশূন্য ভেক্টরের $(\vec{a} \ne 0, \vec{b} \ne 0)$ ভেক্টর গুণফল $= \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\text{Sin}\theta\,\bar{\gamma}$

সুতরাং $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ হবে যদি $\sin\theta = 0$ হয় অর্থাৎ $\theta = 0^0$ বা 180° হয়।

অতএব ভেক্টর দুটি **সমান্তরাল বা সমরেখ** হবে যদি $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ হয়।

অর্থাৎ $\vec{c} = 0$ হবে।

সুতরাং দুটি সমান্তরাল ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফল একটি **শূন্য ভেক্টর** হবে।

খ) দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। অর্থাৎ

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

এখান থেকে সহজেই বলা যায় $\vec{a} \times \vec{b}$ ও $\vec{b} \times \vec{a}$ অবলম্বন ও মাপাঙ্ক একই। কিন্তু অভিদিশা আলাদা।

গ) **স্কেলারের সাথে সংযোগ সূত্র** (Associativity with Scalars)

m যদি যে কোন স্কেলার রাশি হয় তবে প্রমাণ করা যায় $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$

প্রমাণ ঃ i) m যদি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়

চিত্র 3.7 লক্ষ্য করুন। ধরা যাক $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর অন্তর্গত কোণ θ এবং m একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। অতএব $m\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর অন্তর্গত কোণ θ হবে কারণ $m\vec{a}$ ও $\vec{a}$ সমদিকযুক্ত। অনুরূপে $\vec{b}$ ও $m\vec{b}$ সমদিকযুক্ত। সুতরাং $m\vec{b}$ ও $\vec{a}$-এর অন্তর্গত θ-ই হবে।

$$\therefore (m\vec{a}) \times \vec{b} = |m\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\,\vec{\gamma}$$

$$= m|\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\,\vec{\gamma}$$

$$= m(\vec{a} \times \vec{b}) \text{ ----- } (1)$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়

$$\vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b}) \text{ ------}(2)$$

সুতরাং সমীকরণ (1) এবং (2) থেকে লিখতে পারি

$(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$ হবে যদি m ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়।

ii) m যদি ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়

m ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা হওয়ায় $m\vec{a}$ ও $\vec{a}$ বিপরীত দিক্‌যুক্ত হবে। সুতরাং $m\vec{a}$ ও $\vec{b}$-র অন্তর্গত কোণ θ-র পরিবর্তে $(\pi - \theta)$ হবে। চিত্র 3.7 লক্ষ্য করুন।

$$(m\vec{a}) \times \vec{b} = |m\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin(\pi - \theta)(-\vec{\gamma})$$

[m ঋণাত্মক হওয়ায় $m\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{\gamma}$ ক্রমটি দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আছে এবং $|m| = -m$]

$$\therefore (m\vec{a}) \times \vec{b} = m|\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\,\vec{\gamma}$$

$$= m(\vec{a} \times \vec{b})$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়

$\bar{a} \times (m\bar{b}) = m(\bar{a} \times \bar{b})$

$\therefore (m\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (m\bar{b}) = m(\bar{a} \times \bar{b})$ যখন m একটি বাস্তব ঋণাত্মক সংখ্যা।

সুতরাং সাধারণভাবে বলতে পারেন

$m\bar{a} \times n\bar{b} = mn(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times mn\bar{b}$ হবে, যখন m ও n যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত : i) $-\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{a} \times \bar{b})$

ii) $\bar{a} \times (-\bar{b}) = -(\bar{a} \times \bar{b})$

iii) $(-\bar{a}) \times (-\bar{b}) = (\bar{a} \times \bar{b})$ হবে

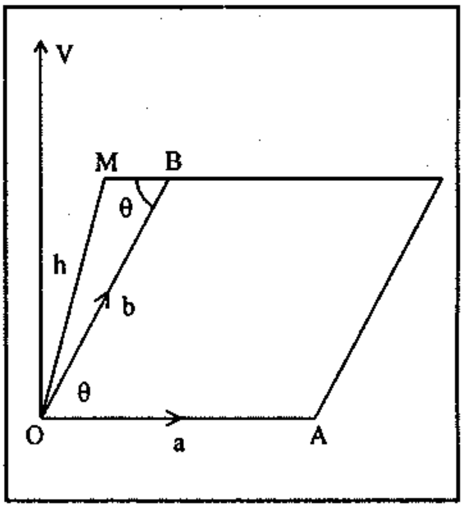
ঘ) **বণ্টন সূত্র বা বিতারক সূত্র** (Distributive law)

ভেক্টরের গুণফল বণ্টনসূত্র মেনে চলে $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ হবে।

3.4.4 ভেক্টরের ভেক্টর গুণনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

আপনারা যদি দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণন জ্যামিতিক উপায়ে বোঝার চেষ্টা করেন তবে আমার মনে হয় আপনাদের ভেক্টর গুণনের সংজ্ঞা ও পারিপার্শ্বিক ধারণা পরিষ্কার হয়ে যাবে।

OACB একটি সামান্তরিক আঁকা হল। যার বাহু $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$ দ্বারা চিহ্নিত করা যেহেতু OACB একটি সামান্তরিক সুতরাং $\overrightarrow{AC} = \bar{b}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \bar{a}$ হবে। বর্ধিত CB-র উপর OM লম্ব টানা হল। V এমন একটি ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টর দুটির সমতলের উপর লম্ব হবে। $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$-এর অন্তর্গত কোণ θ ধরি। এখানে OM সামান্তরিকের উচ্চতা হবে।



চিত্র 3.19 C

OACB সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা।

$= |\overrightarrow{OA}|\, OM$

$= |\bar{a}|h = |\bar{a}|\, OB \sin\theta$

$= |\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin\theta$

আমরা দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণনের সংজ্ঞা থেকে লিখতে পারি

$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin\theta$

∴ $|\bar{a} \times \bar{b}|$ = সামান্তরিক OACB এর ক্ষেত্রফল। আপনারা জানেন সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিক দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে এবং ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল সমান হবে।

অর্থাৎ $m\ \Delta OBC = m\ \Delta OAC,\ m\ \Delta OBA = m\ \Delta ABC$

∴ ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$

সুতরাং ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু দুটি $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ হয় তবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$ হবে।

3.4.5 তিনটি লম্ব একক ভেক্টরের মধ্যে সম্পর্ক

দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের সংজ্ঞা থেকে কতগুলি সিদ্ধান্তে আসা যায়। পরস্পর লম্ব তিনটি অক্ষ OX, OY ও OZ-এর দিক বরাবর যথাক্রমে $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ আছে। $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ চক্রাকারে দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আছে।

আপনারা চিত্র 3.5 লক্ষ্য করুন। সুতরাং,

$\bar{i} \times \bar{j} = |\bar{i}||\bar{j}| \sin\frac{\pi}{2}\ \bar{k}$ [$\bar{k}$ একক ভেক্টর টি $\bar{i}$ ও $\bar{j}$

$= (1)\ (1)\ (1)\ \bar{k}$ প্রত্যেকটির উপর লম্বভাবে

$= \bar{k}$ আছে এবং $\bar{i}$ ও $\bar{j}$-এর

$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$ মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{2}$]

অনুরূপ লিখতে পারেন $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},\ \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i},\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j},\ \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$

আবার $\bar{i} \times \bar{i} = |\bar{i}||\bar{i}|\ \mathrm{Sin}O°$

$= (1)\ (1)\ (O)$ [$\bar{i}$ ও $\bar{i}$-এর অন্তর্গত কোণ 0°]

$= 0$

অনুরূপে লিখতে পারেন $\bar{k} \times \bar{k} = \bar{j} \times \bar{j} = 0$ হবে।

এই একক ভেক্টরগুলির গুণফলের ফল আপনাদের মনে রাখতে হবে। কারণ দুই বা ততোধিক ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল বার করতে হলে এই সিদ্ধান্তগুলির প্রয়োজন হবে। অর্থাৎ পরস্পর লম্ব উপাংশের সাপেক্ষে দুটি বা ততোধিক ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল বার করতে এই সিদ্ধান্তগুলির বিশেষ প্রয়োজন হবে।

3.4.6 পরস্পর লম্ব উপাংশের সাপেক্ষে দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল

ধরা যাক $\bar{a} = \bar{i}\,a_1 + \bar{j}\,a_2 + \bar{k}\,a_3$

$\bar{b} = \bar{j}\,\bar{b}_1 + \bar{j}\,\bar{b}_2 + \bar{k}\,\bar{b}_3$

এখানে $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ পরস্পর লম্ব তিনটি অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরের $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আবদ্ধ। a_1, a_2, a_3 যথাক্রমে $\vec{a}$-র $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$-র দিক বরাবর লম্ব উপাংশ এবং b_1, b_2, b_3 যথাক্রমে $\vec{b}$-র $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$-এর দিক বরাবর লম্ব উপাংশ

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3) \times (\vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3)$$

$$= \vec{i}a_1 \times (\vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3) + \vec{j}a_2 \times (\vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3) + \vec{k}a_3 \times (\vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3)$$

(বণ্টন সূত্রানুসারে)

$$= a_1b_1(\vec{i}\times\vec{i}) + a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j}) + a_1b_3(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+ a_2b_1(\vec{j}\times\vec{i}) + a_2b_2(\vec{j}\times\vec{j}) + a_2b_3(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+ a_3b_1(\vec{k}\times\vec{i}) + a_3b_2(\vec{k}\times\vec{j}) + (\vec{k}\times\vec{k})a_3b_3$$

যেহেতু $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$

এবং $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

অতএব

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i}$$

$$= \vec{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \vec{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \vec{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

আপনারা উপরের গঠনকে অনুরূপভাবে নির্ণায়ক গঠন (Determinant form)-এ প্রকাশ করতে পারেন।

$$\therefore \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

সুতরাং $|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$

আপনারা জানেন

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\mathrm{Sin}\theta$

$$\mathrm{Sin}\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$= \frac{\sqrt{\left\{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2\right\}}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

এই সম্পর্ক ব্যবহার করে আপনারা দুটি ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করতে পারেন।

3.4.7 যদি $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ তিনটি অশূন্য ভেক্টর হয় তবে প্রমাণ করুন

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

প্রমাণ ঃ মনে করুন $\vec{a} = \vec{i}\,a_1 + \vec{j}\,a_2 + \vec{k}\,a_3$, $\vec{b} = \vec{i}\,b_1 + \vec{j}\,b_2 + \vec{k}\,b_3$ এবং $\vec{c} = \vec{i}\,c_1 + \vec{j}\,c_2 + \vec{k}\,c_3$

অতএব $\vec{b} + \vec{c} = \vec{i}\,(b_1 + c_1) + \vec{j}\,(b_2 + c_2) + \vec{k}\,(b_3 + c_3)$

সুতরাং $(\vec{b} + \vec{c})$ একটি ভেক্টর রাশি। অতএব $\vec{a}$ ও $(\vec{b} + \vec{c})$ দুটি ভেক্টর রাশি। দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফল নিম্নে দেওয়া হল।

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

সুতরাং ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল বণ্টন সূত্র মেনে চলে। অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়

$$(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} + \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

1) $(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = -\,\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$

$= -\,[\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}\,]$

$= -\,\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}$

$= \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$

2) $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times [\vec{b} + (-\vec{c})]$

$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times (-\vec{c})$

$= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}$

অনুরূপভাবে

$(\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{a}$

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}$

3.4.8 ভেক্টর গুণফল ভেক্টর ক্ষেত্রফল রূপে জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

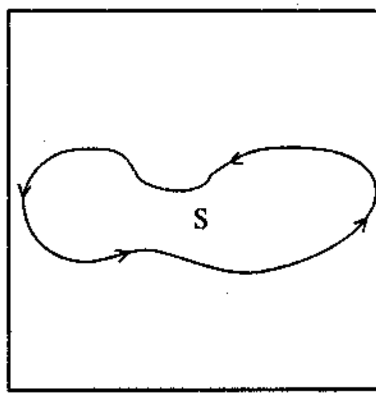
দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের সংজ্ঞা থেকে আপনাদের সামান্তরিক ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে ধারণা হয়েছে। এখন আমি ভেক্টর ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে ধারণা দেওয়ার চেষ্টা করছি।

এমন একটি তল বিশিষ্ট ক্ষেত্রফল S কল্পনা করা হল যা একটি সীমাবদ্ধ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ যাতে বক্ররেখাটি কখনও কোন জায়গায় নিজেকে ছেদ না করে। তাহলে উক্ত সীমাবদ্ধ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফলকে ভেক্টর $\vec{c}$ দ্বারা প্রকাশ করা যাবে এবং $\vec{c}$ এমন একটি ভেক্টর যাতে।

i) $\vec{c}$-এর দৈর্ঘ্যের একক সংখ্যা প্রদত্ত ক্ষেত্রফল s-র একক সংখ্যার সমান হবে।

ii) $\vec{c}$-এর অবলম্বন ক্ষেত্রফলের সমতলের উপর লম্ব হবে।

iii) একটি দক্ষিণাবর্ত স্ক্রুকে s তলের উপর লম্বভাবে রেখে পরিসীমা c-এর উপর [চিত্র 3.20] চিহ্নিত দিক্ বরাবর ঘোরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হবে সেই দিকটি হবে ভেক্টরের দিক।



চিত্র 3.20

এইভাবে যে ভেক্টরটি উৎপন্ন হবে তাকে বলা হবে c-বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ **ভেক্টর ক্ষেত্রফল**।

মন্তব্য ঃ চিত্রে বর্ণিত দিক্ বরাবর পরিসীমা c-কে অতিক্রম না করে বিপরীতভাবে অতিক্রম করলে ভেক্টর ক্ষেত্রফল বিপরীত দিক্ যুক্ত হবে।

এই ভেক্টরের মান ক্ষেত্রফল s-সমমান বিশিষ্ট এবং এর অভিলম্ব s-তলের উপর লম্ব।

3.4.9 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ভেক্টর গুণফলের সাহায্যে নির্ণয়

চিত্র (3.23) লক্ষ্য করুন।

ধরাযাক $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, OAB ত্রিভুজ নিলাম। দেখানো যেতে পারে OAB ত্রিভুজের ভেক্টর ক্ষেত্রফল $\Delta\overrightarrow{OAB}$.

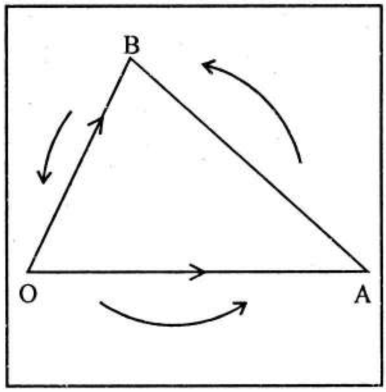
$\Delta\overrightarrow{OAB} = \frac{1}{2}\vec{a} \times \vec{b}$ = হবে ------ (1)

সমীকরণ (1) এর বাঁদিকের ও ডানদিকের মান সমান অর্থাৎ $\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\,\mathrm{Sin}\theta$ এবং তাদের অভিলম্ব ও অভিদিশাও এক।

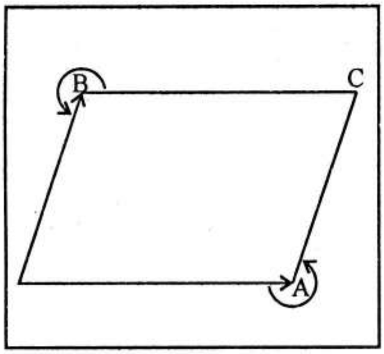
সুতরাং আপনারা লিখ্তে পারেন

$$\Delta OAB = \frac{1}{2}\,\vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{2}\,\vec{OA} \times \vec{OB}$$

মন্তব্য ঃ কোন সামান্তরিকের যার সন্নিহিত বাহুদুটি $\vec{OA}$ ও $\vec{OB}$ ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা যায়, সেক্ষেত্রে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবে $(\vec{OA} \times \vec{OB})$ চিত্র 3.22 লক্ষ্য করুন।



চিত্র 3.21



O চিত্র 3.22

উদাহরণ—6 ঃ যদি $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ এবং

$\vec{B} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ হয় তবে নির্ণয় করুন

a) $\vec{A}\times\vec{B}$ b) $\vec{B}\times\vec{A}$ c) $(\vec{A}+\vec{B}) \times (\vec{A}-\vec{B})$

সমাধান ঃ $\vec{A}\times\vec{B} = (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) \times (\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k})$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 3\vec{j} + 11\vec{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -10\vec{i} - 3\vec{j} - 11\vec{k}$$

$$\vec{A}+\vec{B} = (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) + (\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}) = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

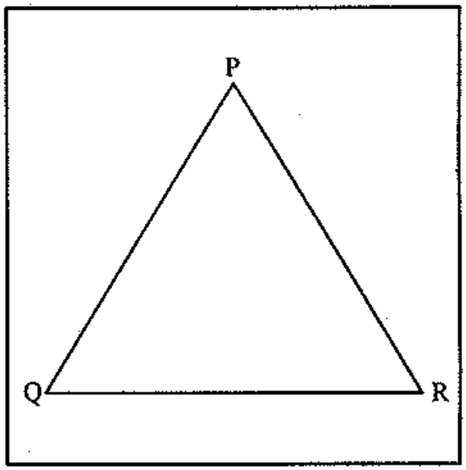
$$\vec{A}-\vec{B} = (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) - (\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}) = \vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k}$$

সুতরাং $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

$$= (3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) \times (\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -20\vec{i} - 6\vec{j} - 22\vec{k}$$

উদাহরণ—7 ঃ PQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন যদি ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে P (1, 3, 2) Q(2, –1, 1) এবং R(–1, 2, 3) হয়।



চিত্র 3.23

সমাধান ঃ

$$\vec{PQ} = (2-1)\vec{i} + (-1-3)\vec{j} + (1-2)\vec{k}$$

$$= \vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{PR} = (-1-1)\vec{i} + (2-3)\vec{j} + (3-2)\vec{k}$$

$$= -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

ΔPQR-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{PQ} \times \vec{PR}|$ -----(1)

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-5\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k})$$

ΔPQR-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + (1)^2 + (-9)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{107}$ বর্গএকক।

উদাহরণ—8 ঃ একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করুন যা $\vec{A} = 2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ এবং

$\vec{B} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$) ভেক্টর দুটির সমতলের উপর লম্ব।

সমাধান ঃ $\vec{A} \times \vec{B}$ একটি ভেক্টর রাশিটি $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টর দুটির সমতলের উপর লম্ব। অতএব

একক ভেক্টর $= \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\vec{i} - 10\vec{j} + 30\vec{k}$$

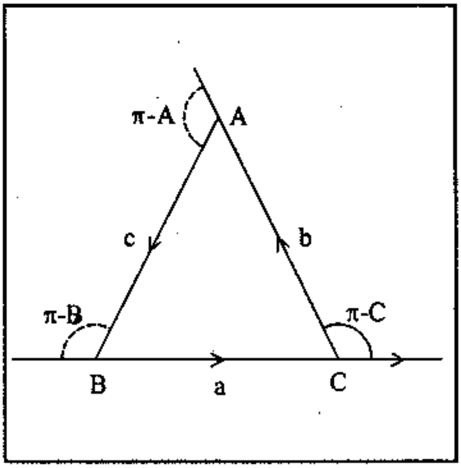
একক ভেক্টর $= \frac{15\vec{i} - 10\vec{j} + 30\vec{k}}{\sqrt{15^2 + (-10)^2 + (30)^2}}$

$$= \frac{1}{7}(3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})$$

উদাহরণ—9 ঃ কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে $\bar{a}$, $\bar{b}$ ও $\bar{c}$ ভেক্টর দ্বারা চিহ্নিত হয় তবে প্রমাণ করুন যে

$|\bar{b}\times\bar{c}| = |\bar{c}\times\bar{a}| = |\bar{a}\times\bar{b}|$ এবং $\frac{SinA}{a} = \frac{SinB}{b} = \frac{SinC}{c}$

সমাধান ঃ



চিত্র 3.24

ভেক্টরের যোগ সূত্রানুসারে লেখা যায়

$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$

$\bar{a} \times (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = 0$

বণ্টন সূত্রানুসারে

$\bar{a}\times\bar{a} + \bar{a}\times\bar{b} + \bar{a}\times\bar{c} = 0 \quad [\because \bar{a}\times\bar{a} = 0]$

$\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{a}\times\bar{c} = \bar{c}\times\bar{a}$ ------(1)

অনুরূপে $\bar{b}\times(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = 0$

$\bar{b} \times \bar{c} = \bar{a}\times\bar{b}$ ------(2)

সমীকরণ (1) ও (2) হতে লিখতে পারেন

$\bar{a}\times\bar{b} = \bar{b}\times\bar{c} = \bar{c}\times\bar{a}$

$\therefore \bar{a}\times\bar{b} = \bar{b}\times\bar{c} = \bar{c}\times\bar{a}$

দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের সংজ্ঞানুসারে লেখা যায়

$|\bar{a}|\,|\bar{b}|\,Sin\,(\pi - C) = |\bar{b}|\,|\bar{c}|\,Sin\,(\pi - A) = |\bar{c}|\,|\bar{a}|\,Sin\,(\pi - B)$---- (3)

যেহেতু $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$, $|\bar{c}|$ ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য। সুতরাং এগুলি স্কেলার রাশি। আমরা বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c দ্বারা চিহ্নিত করতে পারি। সমীকরণ (3) থেকে লিখতে পারি

ab SinC = bc SinA = ca SinB

abc দ্বারা ভাগ করে পাই

$\frac{SinC}{c} = \frac{SinA}{a} = \frac{SinB}{b}$ প্রমাণিত হল।

উদাহরণ—10 ঃ ABCD ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহু দুটি BC এবং AD এর মধ্য বিন্দু P ও Q হয় তবে প্রমাণ করুন যে ΔAPD = ΔCQB

সমাধান ঃ $\vec{AB} = \bar{b}$ এবং $\vec{AD} = \bar{d}$, A-কে মূল বিন্দু ধরি তবে B ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর A বিন্দুর সাপেক্ষে যথাক্রমে $\bar{b}$ ও $\bar{d}$ হবে।

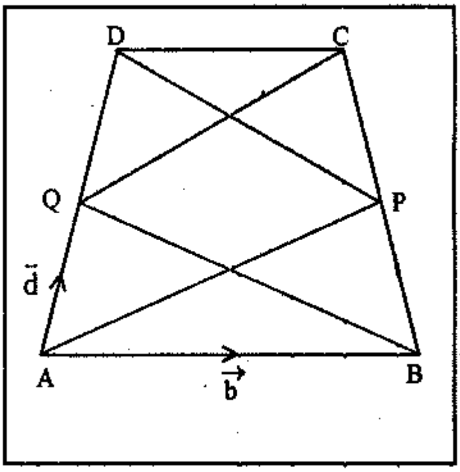
এখানে $\vec{DC}$, $\vec{AB}$-এর সঙ্গে সমান্তরাল।

সুতরাং $\vec{DC} = t\vec{AB} = t\vec{b}$ [t যে কোন স্কেলার সংখ্যা]

$\therefore \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{d} + t\vec{b}$

$\therefore$ C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর A বিন্দুর সাপেক্ষে $\vec{d} + + \vec{b}$

সুতরাং P ও Q যেহেতু $\vec{BC}$ ও $\vec{AD}$-এর মধ্যবিন্দু। অতএব P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর A বিন্দুর সাপেক্ষে যথাক্রমে $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d} + t\vec{b})$ এবং $\frac{1}{2}\vec{d}$ হবে।



চিত্র 3.25

এখন $\Delta\overrightarrow{APD} = \vec{AP} \times \vec{AD}$

$= \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d} + t\vec{b}) \times \vec{d}$

$= \frac{1}{2}(\vec{b}\times\vec{d} + \vec{d}\times\vec{d} + t\vec{b}\times\vec{d})$

$= \frac{1}{2}(1+t)\ \vec{b}\times\vec{d} \qquad [\because\ \vec{d}\times\vec{d} = 0]$

$2\Delta\overrightarrow{CQB} = \vec{CQ} \times \vec{CB}$

$= \left[\frac{1}{2}\vec{d} - (\vec{d} + t\vec{b})\right] \times \left[\vec{b} - (\vec{d} + t\vec{b})\right]$

$= -\frac{1}{2}(1-t)\,\vec{d}\times\vec{b} + t(\vec{b}\times\vec{d})$

$= \frac{1}{2}(1-t)\,\vec{b}\times\vec{d} + t(\vec{b}\times\vec{d})$

$= \frac{1}{2}(1+t)\,\vec{b}\times\vec{d}$

$= 2\Delta\overrightarrow{APD}$

$\therefore\ \Delta APD = \Delta CQB$

অনুশীলন–B

9. যদি $\vec{\alpha}$ এবং $\vec{\beta}$ দুটি ভেক্টর রাশি হয় এবং $|\vec{\alpha}| = 8, |\vec{\beta}| = 6$ এবং $\vec{\alpha}.\vec{\beta} = 0$ তবে $|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|$ এর মান নির্ণয় করুন।

10. যদি $\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ হয় তবে $\vec{A} \times \vec{B}$ নির্ণয় করুন।

11. যদি $\vec{\alpha} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ এবং $\vec{\beta} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ হয় তবে উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব একক ভেক্টরটি নির্ণয় করুন এবং ভেক্টর দুটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করুন।

12. দেওয়া আছে $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ এবং $\vec{c} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ হয় তবে দেখান যে $\vec{a} \times \vec{b} = 7\vec{c}$

13. যদি D, E, F যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু হয় তবে প্রমাণ করুন যে

$$\Delta DEF = \frac{1}{4}\Delta ABC$$

14. প্রমাণ করুন যে $\text{Sin}(A + B) = \text{SinA CosB} + \text{Cos A Sin B}$

15. O বিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, $(2\vec{i} + 3\vec{j})$, $(3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k})$ এবং $\vec{k} - \vec{j}$ হলে $\vec{AB} \times \vec{CD}$ বের করুন এবং দেখান যে $\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ সরলরেখা দুটি সমান্তরাল।

16. কোন ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $A \to (\vec{a})$, $B \to (\vec{b})$ এবং $C \to (\vec{c})$ হয় তবে দেখান যে ABC ত্রিভুজের ভেক্টর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$ হবে।

3.5 তিন ও ততোধিক ভেক্টরের স্কেলার ও ভেক্টর গুণফল (Scalar triple product and cross product)

দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল ও ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল সম্বন্ধে আপনাদের ধারণা আশা করি পরিষ্কার হয়েছে। পূর্ব অধ্যায়ের আলোচনা থেকে সহজেই বলা যায় দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি এবং দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি।

অতএব $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ একটি স্কেলার রাশি। সুতরাং অপর যে কোন একটি ভেক্টর রাশি $\vec{c}$ ও $(\vec{a}\,.\,\vec{b})$ এর মধ্যে স্কেলার ও ভেক্টর গুণফল কোনটাই সম্ভব নয়। অর্থাৎ স্কেলার ও ভেক্টর গুণফল দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যে হবে। অতএব $\vec{a}\times\vec{b}$ একটি ভেক্টর রাশি সুতরাং $\vec{c}$ ও $\vec{a}\times\vec{b}$ এর মধ্যে উভয় গুণফল (অর্থাৎ স্কেলার ও ভেক্টর গুণফল) সম্ভব। আপনারা বুঝতে পারছেন $\vec{a}\times\vec{b}\,.\,\vec{c}$ এবং $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ গুণফল দুটি যথাক্রমে একটি স্কেলার ও ভেক্টর রাশি হবে। সুতরাং $(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,\vec{c}$ কে তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল (scalar triple product) এবং $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$-কে তিনটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল (vector triple product) বলা হয়।

3.5.1 তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল

এই এককের প্রথম ভাগে তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞা, জ্যামিতিক ব্যাখ্যা ও বিভিন্ন ধর্মাবলী সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে।

মনে করি $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ তিনটি ভেক্টর একই আদি বিন্দু বিশিষ্ট এবং ভেক্টর তিনটি সাধারণভাবে পরস্পরের উপর লম্ব নয়। এমতাবস্থায় মনে করি $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ চক্রাকারে দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আবদ্ধ আছে অর্থাৎ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$; $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$; $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

এই ক্রম তিনটি যে কোন একটি ক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল—ভেক্টরটি ও তৃতীয় ভেক্টরটি প্রথম দুটি ভেক্টরের মধ্যগামী সমতলের একই পার্শ্বে অবস্থিত হয়। অপরপক্ষে বলা যায় $(\vec{a}\times\vec{b})$ ও $\vec{c}$ ভেক্টর দুটি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর মধ্যগামী সমতলের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হলে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ বামাবর্ত প্রণালীতে আবদ্ধ হবে।

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ভেক্টর তিনটি দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আবদ্ধ হলে $\vec{a}\times\vec{b}$ ও $\vec{c}$-র অন্তর্গত কোণ $(\vec{b}\times\vec{c})$ ও $\vec{a}$-এর অন্তর্গত কোণ এবং $(\vec{c}\times\vec{a})$ ও $\vec{b}$-র অন্তর্গত কোণের প্রতিটি সূক্ষ্মকোণ হবে।

3.5.2 তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলকে নির্ণায়কে (Determinant form) প্রকাশ

ধরি $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ তিনটি ভেক্টর রাশি।

ধরা যাক $\vec{a} = \vec{i}\,a_1 + \vec{j}\,a_2 + \vec{k}\,a_3$

$\vec{b} = \vec{i}\, b_1 + \vec{j}\, b_2 + \vec{k}\, b_3$

$\vec{c} = \vec{i}\, c_1 + \vec{j}\, c_2 + \vec{k}\, c_3$

যেখানে $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ তিনটি পরস্পর লম্ব অক্ষ-বরাবর একক ভেক্টর এবং চক্রাকারে দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আছে।

a_1, a_2, a_3 যথাক্রমে $\vec{a}$-র $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$-র দিক বরাবর লম্ব উপাংশ

b_1, b_2, b_3 " $\vec{b}$ " " " " " " " লম্ব উপাংশ

c_1, c_2, c_3 " $\vec{c}$ " " " " " " " লম্ব উপাংশ

(3.4) অধ্যায়ে আপনারা দেখেছেন

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(b_2c_3-b_3c_2) - j\,(b_1c_3-b_3c_1) + \vec{k}\,(b_1c_2-b_2c_1)$$

সুতরাং $\vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c})$

$$= (\vec{i}\,a_1 + \vec{j}\,a_2 + \vec{k}\,a_3)\,.\,[\vec{i}\,(b_2c_3-b_3c_2) - \vec{j}\,(b_1c_3-b_3c_1) + \vec{k}\,(b_1c_2-b_2c_1)] \text{---}(1)$$

যেহেতু $\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{k}\,.\,\vec{k} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = 1$

$\vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{k}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = 0$

সুতরাং সমীকরণ (1) থেকে পাই

$$\vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(-\,b_1c_3 + b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

অতএব আপনারা সহজেই তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলকে নির্ণায়কে (Determinant) প্রকাশ করতে পারেন।

$$\vec{a}\,.\,\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{-----}\ (2)$$

অনুসিদ্ধান্ত : সুতরাং নির্ণায়কের (Determinant) ধর্ম অনুযায়ী তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলকে অনুরূপভাবে লেখা যায়।

$$(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের যে কোন দুটি সারির (Row) পরস্পরের মধ্যে পরিবর্তন হলে নির্ণায়কের চিহ্ন (sign) ও মান অপরিবর্তনীয় থাকে। অতএব আপনারা লিখতে পারেন

i) $V = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$

ii) স্কেলার গুণফলে বিনিময় সূত্র প্রযোজ্য

$$V = (\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a}).\vec{b} = (\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c})$$

iii) আপনারা জানেন দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলে বিনিময় সূত্র প্রযোজ্য নয়।

অর্থাৎ $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (দিক পরিবর্তনের জন্য ঋণাত্মক হল)

অতএব অনুবর্তী সূত্র (consequent) অনুযায়ী লেখা যায়।

$V = -\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b}) = -\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c}) = -\vec{c}.(\vec{b}\times\vec{a})$

$= -(\vec{c}\times\vec{b}).\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{c}).\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a}).\vec{c}$

এই গুচ্ছ সম্বন্ধকে **Heaviside** সূত্র অথবা **সামান্তরিক ষড়তলক** সূত্র বলা হয়।

$\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}.\vec{c}$ কে সংক্ষেপে [a b c] লেখা হয়।

প্রয়োজনীয় আলোচনা (Important discussion) তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের (V) উপরোক্ত বারটি সম্পর্ক থেকে আপনারা তিনটি সিদ্ধান্ত সহজেই নিতে পারেন।

i) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আবদ্ধ হলে অথবা চক্রাকারে পরিবর্তিত হলে তাদের স্কেলার গুণফলের মান একই থাকে।

ii) তিনটি ভেক্টর স্কেলার গুণফল (.) এবং (×) চিহ্ন পরস্পর স্থান বিনিময় করলে স্কেলার গুণফলের মান অপরিবর্তিত থাকে।

$$\therefore (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = (\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})$$

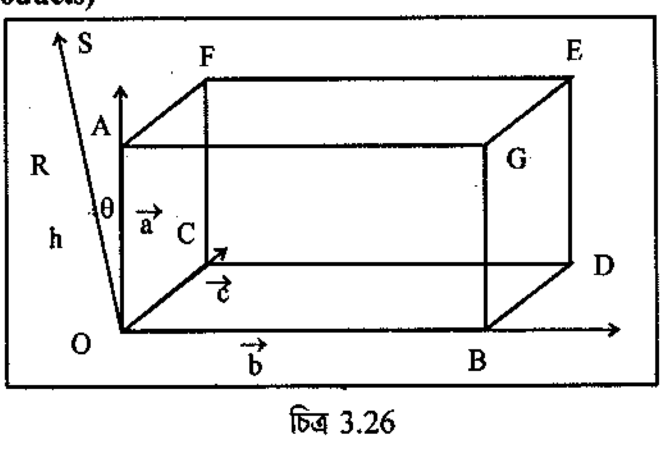
iii) তিনটি স্কেলার গুণফলের যে কোন দুটি ভেক্টর পরস্পর স্থান বিনিময় করলে স্কেলার গুণফলের চিহ্ন পরিবর্তিত হবে। অর্থাৎ ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক কিংবা ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক হবে।

$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})$

বা $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = -[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}]$

3.4.3 তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের ($\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}$) জ্যামিতিক ব্যাখ্যা (Geometrical interpretation of scalar triple products)

আপনাদের তিনটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা বোঝার জন্য একটি OBDCFAGE সামান্তরিক ষড়তলক আঁকা হল। চিত্র 3.26 লক্ষ্য করুন। ধরা যাক $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ এবং $\vec{OC} = \vec{c}$



চিত্র 3.26

$\vec{OS}$ অভিলম্ব OBDC তলের উপর আঁকা হল। যে তলটি ভেক্টর $\vec{b}$

এবং ভেক্টর $\vec{c}$ দ্বারা সীমাবদ্ধ। অতএব $\vec{b}\times\vec{c}$ ভেক্টরটি OBDC তলের উপর লম্ব এবং $\vec{OS}$ দিক্ বরাবর। সুতরাং পূর্ব অধ্যায় থেকে আপনারা সহজেই বলতে পারেন $|\vec{b}\times\vec{c}|$ হল OBDC সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

ভেক্টর $\vec{a}$-এর প্রক্ষেপ (Projection) $\vec{OS}$ উপর নিলে তা সামান্তরিকের ষড়তলকের উচ্চতার সমান হবে। অর্থাৎ OR = h হবে শীর্ষবিন্দু A থেকে OBDC সামান্তরিক তলের উচ্চতা। যা সামান্তরিক ষড়তলকের উচ্চতা হিসাবে গণ্য হবে।

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}\times\vec{c}|\,\text{Cos}\theta$

[দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}\times\vec{c}$-এর স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞানুসারে]

এখানে $\vec{OA}$ এবং $\vec{b}\times\vec{c}$-এর ($\vec{OS}$ দিক্ বরাবর) মধ্যবর্তী কোণ মনেকরি θ

অতএব $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = h|\vec{b}\times\vec{c}|$

= (h) (OBDC সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল)

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$ = OBDCFAGE সামান্তরিক ষড়তলকের ঘনফল

যদি $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টর তিনটি দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আবদ্ধ থাকে।

3.5.4 উপপাদ্য তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত

তিনটি অশূন্য ভেক্টর সমতলীয় হবে তার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট (necessary and sufficient) শর্ত হল ভেক্টর তিনটির স্কেলার গুণফল শূন্যমান হওয়া।

প্রমাণ ঃ প্রয়োজনীয় শর্ত

$\vec{a},\vec{b}$ ও $\vec{c}$ যে কোন তিনটি অশূন্য ভেক্টর [অর্থাৎ $\vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0,\ \vec{c}\neq 0$] ধরা যাক্ একই তলে অবস্থিত।

সংজ্ঞানুসারে বলা যায় $\vec{a}\times\vec{b}$ ভেক্টরটি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর মধ্যগামী সমতলের উপর লম্ব ভেক্টর। সুতরাং $\vec{a}\times\vec{b}$ ভেক্টরটি $\vec{c}$-এর উপর লম্ব হবে কারণ $\vec{c}$ ভেক্টরটি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর মধ্যগামী সমতলে অবস্থিত। সুতরাং স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞা অনুসারে আপনারা লিখতে পারেন।

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\ \vec{c} = 0$

$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = 0$

যথেষ্ট শর্ত

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ তিনটি অশূন্য ভেক্টর। ভেক্টরগুলি এমন যে তাদের স্কেলার গুণফল শূন্যমান বিশিষ্ট অর্থাৎ

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\ \vec{c} = 0$

অর্থাৎ $\vec{a}\times\vec{b}$ ভেক্টরটি $\vec{c}$ ভেক্টরের উপর লম্ব।

এখন $\vec{a}\times\vec{b}$ ভেক্টরটি সংজ্ঞানুসারে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ উভয়ের উপর লম্ব হওয়ায় প্রমাণিত হয় $\vec{a}\times\vec{b}$ ভেক্টরটি $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ প্রত্যেকের উপর লম্ব। অতএব একই ভেক্টরের উপর লম্ব হওয়ায় $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ একই সমতলে অবস্থিত অর্থাৎ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ সমতলীয়।

3.5.5 $\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}=0$ হওয়ার বিভিন্ন শর্ত।

i) যদি $\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}=0$ হয় অর্থাৎ সামান্তরিক ষড়তলকের ঘনফল শূন্য হবে। সুতরাং আপনারা সহজে বলতে পারেন $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ সমতলীয় হবে।

ii) ধরি $\vec{a}=\vec{i}a_1+\vec{j}a_2+\vec{k}a_3$, $\vec{b}=\vec{i}b_1+\vec{j}b_2+\vec{k}b_3$ ও $\vec{c}=\vec{i}c_1+\vec{j}c_2+\vec{k}c_3$

সুতরাং $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ সমতলীয় হওয়ার শর্ত হল

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0 \text{ ------ } (1)$$

iii) যদি $\vec{a}=\vec{b}$ হয় তবে $\vec{a}.\vec{a}\times\vec{c}=0$ হবে।

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\vec{a}.\vec{a}\times\vec{c}$$

এখান থেকে বলতে পারেন $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টর তিনটির মধ্যে যে কোন দুটি ভেক্টর সমান হলে উপরের নির্ণায়কের দুটি সারি (row) পরস্পর সদৃশ (identical) হবে। নির্ণায়কের ধর্ম অনুযায়ী বলা যায় নির্ণায়কের মান শূন্য হবে। অর্থাৎ

$\vec{a}.\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}.\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}\times\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}\times\vec{c}=0$ হবে।

(দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের ধর্ম অনুযায়ীও বলা যায় অর্থাৎ $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{c}=0$]

iv) $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ মধ্যে যে কোন একটি শূন্য ভেক্টর হলে উপরের নির্ণায়কের (1) একটি সারির (row) সবকটি সংখ্যা শূন্য হবে। অতএব সেক্ষেত্রেও $\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c}=0$ হবে।

v) যদি $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টর তিনটির মধ্যে যে কোন দুটি সমান্তরাল হয় সেক্ষেত্রেও $\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}=0$ হবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ সমান্তরাল অর্থাৎ $\vec{a}=n\vec{b}$ (n যে কোন স্কেলার সংখ্যা)

$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=n\vec{b}.\vec{b}\times\vec{c}$

$= n(\vec{b}\times\vec{b}).\vec{c}$ $[\vec{b}\times\vec{b} = 0]$

$= 0$

সুতরাং আপনারা বলতে পারেন যে কোন তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল শূন্য হবে যদি যে কোন দুটি ভেক্টর সমান ও সমান্তরাল হয়।

vi) যদি $\theta = 0$ হয় অর্থাৎ $\vec{a}$ ভেক্টর এবং $\vec{b}\times\vec{c}$ ভেক্টর দুটোর অন্তর্গত কোণটি শূন্য হবে। অন্যভাবে বলা যায় $\vec{a}$ ভেক্টরটি $\vec{b}\times\vec{c}$ তলের উপর লম্ব হবে। অর্থাৎ $\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c} = 0$ হবে।

3.5.6 তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হওয়ার শর্ত।

i) $\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}$ ধনাত্মক হবে যদি $\theta < \frac{\pi}{2}$ হয় অর্থাৎ $\vec{a}$ এবং $(\vec{b}\times\vec{c})$ ভেক্টর দুটো $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ দিয়ে যে তল হবে তার একই পার্শ্বে থাকবে। অন্যভাবে বলা যায় $\vec{a}$ এবং $(\vec{b}\times\vec{c})$ ভেক্টর দুটোর অন্তর্গত কোণ সূক্ষ্মকোণ হবে। $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আবদ্ধ হলে $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ (যে কোন তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল) ধনাত্মক হবে।

ii) $\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}$ ঋণাত্মক হবে যদি $\vec{a}$ এবং $(\vec{b}\times\vec{c})$ ভেক্টর দুটো $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ দিয়ে যে তল গঠিত হবে তার বিপরীত পার্শ্বে থাকবে। অন্যভাবে বলা যায় $\vec{a}$ ও $(\vec{b}\times\vec{c})$ এর অন্তর্গত কোণ (θ) স্থূল কোণ হবে অর্থাৎ $(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ দক্ষিণাবর্ত প্রণালীতে আবদ্ধ না থাকলেও ঋণাত্মক হবে

3.5.7 তিনটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফল

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ একটি ভেক্টর রাশি। প্রমাণ করতে হবে

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} = -(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $\vec{a} = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3$

$\vec{b} = \vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3$

$\vec{c} = \vec{i}c_1 + \vec{j}c_2 + \vec{k}c_3$

আপনারা জানেন

$\vec{b}\times\vec{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)\vec{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\vec{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{k}$ ----(1)

$\therefore\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\times(\vec{b}\times\vec{c})$

$\therefore\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1\vec{i}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + a_2\vec{j}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + a_3\vec{k}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ---- (2)

সুতরাং সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$$a_1 \vec{i} \times (\vec{b}\times\vec{c}) = a_1 \vec{i} \times [(b_2c_3 - b_3c_2)\vec{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\vec{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{k}]$$

$$= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2)\vec{i}\times\vec{i} + a_1(b_3c_1 - b_1c_3)\vec{i}\times\vec{j} + a_1(b_1c_2 - b_2c_1)\vec{i}\times\vec{k}$$

$$= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2)(0) + a_1(b_3c_1 - b_1c_3)(\vec{k}) + a_1(b_1c_2 - b_2c_1)(-\vec{j})$$

$$\vec{i}\times\vec{i} = 0;\ \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$$

যেহেতু

$$= a_1c_1(b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) - a_1b_1(c_2\vec{j} + c_3\vec{k})$$

$$= a_1c_1(b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + a_1c_1b_1\vec{i} - [a_1b_1(c_2\vec{j} + c_3\vec{k}) + a_1b_1c_1\vec{i}]$$

$$= a_1c_1(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) - a_1b_1(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k})$$

$$= a_1c_1\vec{b} - a_1b_1\vec{c} \text{ ------ } (3)$$

অনুরূপভাবে আপনারা লিখতে পারেন $a_2\vec{j}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = a_2c_2\vec{b} - a_2b_2\vec{c}$ ----(4)

এবং $a_3\vec{k}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = a_3c_3\vec{b} - a_3b_3\vec{c}$ ---(5)

সমীকরণ (3), (4) ও (5)-এর মান সমীকরণ (2)-এ বসিয়ে পাই

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\vec{b} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\vec{c}$$

$$= (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} \text{ ----- } (6)$$

$(\vec{a}.\vec{c})$ এবং $(\vec{a}.\vec{b})$ দুটো স্কেলার রাশি। কিন্তু $(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}$ এবং $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ দুটো ভেক্টর রাশি। অতএব সমীকরণ (6) থেকে সহজেই বলা যায় $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ একটি ভেক্টর রাশি।

অনুসিদ্ধান্ত : $\vec{a}$, $\vec{b}\times\vec{c}$ দুটো ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। অতএব

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}$$

$$= -[(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c})]$$

$$= (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}$$

সুতরাং আপনারা সহজেই একটা সিদ্ধান্তে পৌছাতে পারেন যে সংযোগ সূত্র (Associative law) তিনটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়।

আলোচনা ঃ

$\vec{a} \times (\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

$\vec{a}.\vec{c}$ এবং $\vec{a}.\vec{b}$ উভয়েই স্কেলার রাশি। অতএব $\{(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}\}$ ভেক্টরটি $\vec{b}$ ও $\vec{c}$-এর মধ্যগামী তলে অবস্থিত। সুতরাং $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ভেক্টরটি $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ এর মধ্যগামী তলে অবস্থিত ভেক্টর। অনুরূপভাবে বলা যায় $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$ ভেক্টরটি $\vec{c}$ ও $\vec{a}$-এর মধ্যগামী তলে এবং $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ ভেক্টরটি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-র মধ্যগামী তলে অবস্থিত।

3.5.8 চারটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন (scalar product of four vectors)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ চারটি ভেক্টরের $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d})$ -কে চারটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বলে।

প্রমাণ করুন যে

$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$

প্রমাণ ঃ মনে করি $\vec{v} = \vec{c}\times\vec{d}$

অতএব $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}\times\vec{b}.\vec{v}$

$= \vec{a}.\vec{b}\times\vec{v}$ [Heavid঳ সূত্র বা সামন্তরিক ষড়স্তলক সূত্র অনুসারে]

$= \vec{a}.\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})$

$= \vec{a}.[(\vec{b}.\vec{d})]\vec{c} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{d}]$

$\therefore (\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$

যেহেতু $(\vec{b}.\vec{d})$ ও $(\vec{b}.\vec{c})$ স্কেলার রাশি এবং $\vec{a}$, $\vec{c}$ ও $\vec{d}$ ভেক্টর রাশি। সেইজন্য $\vec{a}$ ভেক্টরের সঙ্গে স্কেলার গুণন $\vec{c}$ ও $\vec{d}$-এর সঙ্গে হয়েছে।

$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d})$ এর স্কেলার গুণনকে নিয়ামকে প্রকাশ করা যায়।

অর্থাৎ $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d} \\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}$

$\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c}\times\vec{d}$ একটি স্কেলার রাশি।

সিদ্ধান্ত ঃ i) $\vec{a}\times\vec{b}$ একটি ভেক্টর রাশি এবং $\vec{c}\times\vec{d}$ কে অন্য একটি ভেক্টর রাশি বলা যায়। অতএব দুটো ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞা অনুসারে বলা যায় $[\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c}\times\vec{d}]$ একটি স্কেলার রাশি।

ii) অন্যভাবে বলা যায় $\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c}\times\vec{d}$ একটি স্কেলার রাশি কারণ $(\vec{a}.\vec{c})$, $(\vec{a}.\vec{d})$, $(\vec{b}.\vec{c})$ ও $(\vec{b}.\vec{d})$ প্রত্যেকটিই স্কেলার রাশি।

3.5.9 চারটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণন (Vector product of four vectors)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ভেক্টরের জন্য $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d})$ কে চারটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল বলে।

প্রমাণ করুন যে $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\vec{d}$

$= [\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}]\vec{a}$

যেখানে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ও $\vec{d}$ চারটি ভেক্টর রাশি।

প্রমাণ ঃ $\vec{a} \times \vec{b}$ ও $\vec{c} \times \vec{d}$ দুটি ভেক্টর রাশি হিসাবে চিন্তা করতে পারেন। অতএব $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$-কে আবার একটি ভেক্টর রাশি বলতে পারেন।

মনে করুন $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{p}$

অতএব $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{p} \times (\vec{c} \times \vec{d})$

$= (\vec{p}.\vec{d})\vec{c} - (\vec{p}.\vec{c})\vec{d}$

[তিনটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের নিয়ম অনুসারে]

$= (\vec{a} \times \vec{b}.\vec{d})\vec{c} - (\vec{a} \times \vec{b}.\vec{c})\vec{d}$

$= (\vec{a}\;\vec{b}\,\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\vec{d}$ ------(1)

আবার ধরি $\vec{c} \times \vec{d} = \vec{r}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{r}$

$= -\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{r}.\vec{a})\vec{b} - (\vec{r}.\vec{b})\vec{a}$

$= (\vec{c} \times \vec{d}.\vec{a})\vec{b} - (\vec{c} \times \vec{d}.\vec{b})\vec{a}$

$= (\vec{a}.\vec{c} \times \vec{d})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c} \times \vec{d})\vec{a}$

[স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে]

$\therefore (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}]\vec{a}$ ------(2)

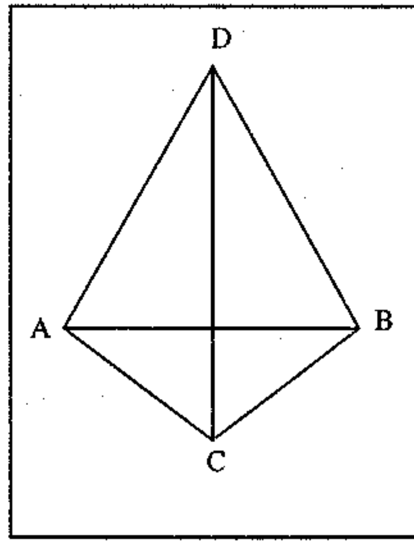
মন্তব্য ঃ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$ ভেক্টরটি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর মধ্যগামী তলে কিংবা $\vec{c}$ ও $\vec{d}$-এর মধ্যগামী তলে অবস্থিত।

3.5.10 চতুস্তলকের ঘনফল (Volume of tetrahedron)

প্রমাণ করুন যে

ABCD চতুস্তলকের আয়তন বা ঘনফল

$$=\frac{1}{6}\left[\vec{AB}.\vec{AC}\times\vec{AD}\right]$$



চিত্র 3.27

প্রমাণ ঃ

আপনারা জানেন ABCD চতুস্তলকের ঘনফল $=\frac{1}{3}$(ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল) (ABC তল থেকে D বিন্দুর উচ্চতা)

যদি $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ও $\vec{AD}$ তিনটি সরলরেখা A বিন্দুগামী এবং সামান্তরিক ষড়স্তলকের বাহু হয় তবে সামান্তরিক ষড়স্তলকের ঘনফল = $\vec{AB}\cdot(\vec{AC}\times\vec{AD})$ হবে।

অতএব ABCD চতুস্তলকের ঘনফল

$=\frac{1}{3}$(ত্রিভুজাকৃতি প্রিজমের ঘনফল যার ভূমি ABC তল এবং শীর্ষবিন্দু D)

$=(\frac{1}{3})(\frac{1}{2})$ (ABCD সামান্তরিক ষড়স্তলকের ঘনফল যার $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ও $\vec{AD}$ সন্নিহিত বাহু)

$=\frac{1}{6}(\vec{AB}\cdot\vec{AC}\times\vec{AD})$ [তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা থেকে)

উদাহরণ ঃ 11. মান নির্ণয় করুন

$$(\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k})\times(2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k}).(\bar{j}+\bar{k})$$

সমাধান ঃ $(\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k})\times(2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}).(\bar{j}+\bar{k})$

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 1(1+1)+2(3+2)+0(2-3)$$

$$= 2 + 10 = 12$$

উদাহরণ 12. তিনটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল নির্ণয় করুন। যদি $\bar{a}=(\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})$, $\bar{b}=2\bar{i}-3\bar{j}-\bar{k}$ এবং $\bar{c}=2\bar{j}+3\bar{k}$

সমাধান ঃ আমরা জানি

$$a\times(\bar{b}\times\bar{c})=(a.\bar{c})\bar{b}-(a.\bar{b})\bar{c}$$

$= \{(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}).(2\vec{j} + \vec{k})\}(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}) - \{(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}).(2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k})\}(2\vec{j} + \vec{k})$

$= (-2 + 1)(2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) - (2 + 3 - 1)(2\vec{j} + \vec{k})$

$= -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} - 8\vec{j} - 4\vec{k}$

$= -2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$

$= -(2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k})$

উদাহরণ 13. দেখান যে তিনটি ভেক্টর $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{k}$ সমতলীয় হবে।

সমাধান ঃ আপনারা জানেন তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত হল

$\vec{a}.\vec{b} \times \vec{c} = 0$ হবে।

অতএব $(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}).(4\vec{i} + \vec{j}) \times (3\vec{i} + \vec{k}) = 0$ হবে।

সুতরাং $(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}).(4\vec{i} + \vec{j} + O.\vec{k}) \times (3\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k})$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 2(1-0) - 1(3.0 - 4) + 2(4.0 - 1.3)$

$= 2 + 4 - 6 = 0$ অতএব $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

উদাহরণ ঃ 14. O বিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর যদি $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ হয় তবে দেখান যে $\{\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}\}$, ABC তলের উপর লম্ব হবে।

সমাধান ঃ মনে করি $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}$

O কে মূলবিন্দু ধরি।

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

অতএব $\vec{AB}.\vec{d} = (\vec{b} - \vec{a}).(\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$

$= \vec{b}.\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b}.\vec{c} \times \vec{a} + \vec{b}.\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a}.\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a}.\vec{c} \times \vec{a} - \vec{a}.\vec{a} \times \vec{b}$

যেহেতু $\vec{b}.\vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}.\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}.\vec{c} \times \vec{a} = \vec{a}.\vec{a} \times \vec{b} = 0$

অতএব $\vec{AB}.\vec{d} = \vec{b}.\vec{c} \times \vec{a} - \vec{a}.\vec{b} \times \vec{c}$

$= \vec{a}.\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a}.\vec{b} \times \vec{c} = 0$

অতএব স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞার শর্ত অনুসারে বলা যায়

ভেক্টর $\vec{d}$, $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের উপর লম্ব অর্থাৎ $\vec{d}$ ভেক্টরটি ABC ত্রিভুজের $\overrightarrow{AB}$ বাহুর উপর লম্ব।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় $\vec{d}$ ভেক্টরটি ABC ত্রিভুজের $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{BC}$ বাহুর উপর লম্ব। অতএব খুব সহজেই আপনারা বলতে পারেন $\vec{d}$ ভেক্টরটি ABC তলের উপর লম্ব। অর্থাৎ $(\vec{b}\times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})$ ভেক্টরটি ABC তলের উপর লম্ব প্রমাণিত হল।

উদাহরণ ঃ 15. যদি $\vec{\alpha} = (2, -10, 2)$ $\vec{\beta} = (3, 1, 2)$ এবং $\vec{\gamma} = (2, 1, 3)$ হয় তবে $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ নির্ণয় করুন। $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta}\times \vec{\gamma})$-এর মান থেকে জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিন।

সমাধান ঃ $\vec{\alpha} = 2\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{\beta} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ এবং $\vec{\gamma} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

$\square\therefore\ \vec{\alpha}.\vec{\gamma} = (2\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k}) . (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$

$= (2)(2) - (10)(1) + (2)(3)$

$= 4 - 10 + 6 = 0$ ------- (1)

$\vec{\alpha}.\vec{\beta} = (2\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k}) . (3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

$= (2)(3) - (10)(1) + (2)(2)$

$= 6 - 10 + 4$

$= 0$ ------ (2)

আপনারা জানেন

$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta}\times \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}.\vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha}.\vec{\beta})\ \vec{\gamma}$

$= (0)\vec{\beta} - (0)\vec{\gamma} = 0$

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

যেহেতু $\vec{\alpha}.\vec{\gamma} = 0$ এখান থেকে আপনারা বলতে পারেন ভেক্টর $\vec{\alpha}$, ভেক্টর $\vec{\gamma}$-এর উপর লম্ব।

$\vec{\alpha}.\vec{\beta} = 0$ অনুরূপে বলা যায় $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ উপর লম্ব।

সুতরাং $\vec{\alpha}$ ভেক্টর $\vec{\beta}$ ও $\vec{\gamma}$ উভয়ের উপর লম্ব। সুতরাং $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ও $\vec{\gamma}$ সমতলীয় ভেক্টর।

উদাহরণ ঃ 15. প্রমাণ করুন যে

$\vec{a}\times(\vec{b}\times \vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times \vec{b}) = 0$ সম্বন্ধটির জ্যামিতিক ব্যাখ্যা কি?

সমাধান ঃ আপনারা তিনটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের যে সূত্র পেয়েছেন সেই অনুসারে লিখতে পারেন

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ ------ (1)

$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{b}.\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$

$= (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$ ----- (2) [বিনিময় সূত্র অনুযায়ী]

$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}$

$= (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}$ ----- (3)

এখন সমীকরণ (1) , (2) এবং (3) যোগ করে পাই

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}+(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}+(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}$

$=0$

অতএব এই সম্বন্ধটি থেকে সহজেই বলা যায় $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$, $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ ভেক্টর তিনটি পরস্পর রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত (linearly dependent) অতএব ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

অনুশীলনী– C

17. যদি $\vec{\alpha} = (-2, -2, 4)$, $\vec{\beta} = (-2, 4, -2)$ এবং $\vec{\gamma} = (4, 2, -2)$ হয় তবে $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}\times\vec{\gamma}$ নির্ণয় করুন এবং জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিন।

18. যদি $\vec{A} = 3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ এবং $\vec{C} = \vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ হয় তবে

a) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$, b) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ নির্ণয় করুন।

19. চারটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল নির্ণয় করুন

$[(3\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k})\times(\vec{i}-\vec{k})]\times[(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k})]$

20. ABCD চতুস্তলকের ঘনফল নির্ণয় করুন যার শীর্ষবিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে (0, 1, 2), (3, 0, 1), (4, 3, 6) এবং (2, 3, 2)

21. প্রমাণ করুন যে

$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^2$

22. $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$ এর বিস্তার থেকে $[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}]\vec{a}+[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{d}]\vec{b}+[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]\vec{c}+[\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}]\vec{d}=0$ সম্পর্কটি নির্ণয় করুন।

3.6 সারাংশ

এই এককের সমস্ত আলোচনা সংক্ষেপে লেখার চেষ্টা করি তবে আপনাদের পক্ষে অঙ্ক সমাধান করা ও ভেক্টর গুণনের বিভিন্ন ধর্ম মনে রাখা সহজ হবে।

1. $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ $\vec{c}$ যদি দুটি ভেক্টর রাশি হয় তবে $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\,\text{Cos}\theta$....... (1) যেখানে θ হল $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর অন্তর্গত কোণ।

সমীকরণ (1) থেকে লেখা যায়

(1) $\theta = \cos^{-1}\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ যেখানে $\vec{a}$-এর মাপাঙ্ক $|\vec{a}|$

$\vec{b}$ " " $|\vec{b}|$

ii) $\vec{a}.\vec{b} = 0$ হয় $\vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0$

অতএব $\vec{a}$, $\vec{b}$-এর উপর লম্ব হবে। $\theta = \frac{\pi}{2}$ হবে।

iii) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ হয়। $\vec{a}.\vec{b}$ একটি স্কেলার রাশি।

iv) $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ তিনটি ভেক্টর রাশি হয় তবে $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ হবে।

v) $\vec{i}$, $\vec{j}$ ও $\vec{k}$ তিনটি পরস্পর লম্ব একক ভেক্টর হয় তবে

$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$ হবে।

যদি $\vec{a} = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3$

$\vec{b} = \vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3$ হয়

তবে $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ হবে।

ভেক্টর $\vec{a}$-এর মাপাঙ্ক $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

ভেক্টর $\vec{b}$ " $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$$\therefore \theta = \text{Cos}^{-1}\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$\vec{a}$ ও $\vec{b}$ পরস্পর লম্ব হয় অর্থাৎ $\theta = \frac{\pi}{2}$ হয় তবে

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ হবে।

2. i) দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল $= \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \,Sin\theta\, \vec{n}$

$\vec{n}$ এমন একটি একক ভেক্টর যা $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ মধ্যগামী সমতলের উপর লম্ব। $\vec{a} \times \vec{b}$ একটি ভেক্টর রাশি।

ii) $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ পরস্পর সমান্তরাল ও সমরেখ হলে $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ হবে, অর্থাৎ $\theta = 0$ বা π হবে।

iii) $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ যদি কোন ত্রিভুজের দুটি বাহু নির্দেশ করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

আবার $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ যদি কোন সামান্তরিকের দুটি বাহু নির্দেশ করে তবে

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

iv) ভেক্টর গুণনে বিনিময় সূত্র ও সংযোগসূত্র প্রযোজ্য নয় অর্থাৎ $|\vec{a} \times \vec{b}| = -\vec{b} \times \vec{a}$.
ভেক্টর গুণন দক্ষিণাবর্ত প্রণালী মেনে চলে।

v) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

3. i) $\vec{a}$, $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ তিনটি ভেক্টর হলে $\vec{a}.\vec{b} \times \vec{c}$ তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন চিহ্নিত করে।

ii) তিনটি ভেক্টরে স্কেলার গুণনে চক্র বিন্যাসে কোন মানের পরিবর্তন হয় না। যদি বিপরীত চক্রবিন্যাস করা যায় তবে মানের কোন পরির্বতন না কিন্তু চিহ্নের পরিবর্তন হয়।

iii) $\vec{a}.\vec{b} \times \vec{c}$ সামান্তরিক যড়তলকের ঘনফল সূচিত করে।

iv) $$\vec{a}.\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

v) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$

3.7 বিবিধ প্রশ্নমালা

1. O বিন্দুর সাপেক্ষে P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $3\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$ এবং $6\vec{i} - 2\vec{j} + 12\vec{k}$ হলে $\vec{OP}$ ও $\vec{OQ}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করুন।

2. প্রমাণ করুন : Cos (A – B) = CosA CosB + SinA SinB

3. এমন একটি ভেক্টর δ নির্ণয় করুন যেটা $= 4\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ এবং $\vec{\beta} = \vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ প্রত্যেকের উপর লম্ব এবং $\vec{\delta}.\vec{\gamma} = 21$ যেখানে $\vec{\gamma} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$ হবে।

4. প্রমাণ করুন

   Sin(A – B) = SinA CosB – CosA SinB

5. $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, ও $\vec{\delta}$ এই চারটি ভেক্টর এমনভাবে আছে যে $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{\gamma} \times \vec{\delta}$ এবং $\vec{\alpha} \times \vec{\gamma} = \vec{\beta} \times \vec{\delta}$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $(\vec{\alpha} - \vec{\delta})$ এবং $(\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ ভেক্টর দুটি সমরেখ হবে।

6. ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করুন যে কোন দুটি সামান্তরিক একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত হলে সামন্তরিক দুটির ক্ষেত্রফল একই হবে।

7. P ও Q-এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$ এবং $5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ হলে $\overrightarrow{PQ}$ নির্ণয় করুন এবং $\overrightarrow{PQ}$-এর কোসাইন দিগঙ্ক গোষ্ঠী নির্ণয় করুন।

8. একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করুন যা $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ এবং $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ প্রতিটির উপর লম্ব এবং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় করুন।

9. প্রমাণ করুন

   $(\vec{b}\times\vec{c}).(\vec{a}\times\vec{d}) + (\vec{c}\times\vec{a}).(\vec{b}\times\vec{d}) + (\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = 0$

10. প্রমাণ করুন

   $(\vec{a}\times\vec{b}) \times (\vec{a}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{b} \times \vec{c})\vec{a}$

3.8 সমাধান/উত্তরমালা

অনুশীলনী – A

1. সংকেত : $\vec{a}$-এর সমদিক বরাবর একক ভেক্টর $= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

   $\vec{b}$-এর উপাংশ -র দিক বরাবর $= \vec{b} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

   $\therefore$ $\vec{b}$-এর উপাংশ ভেক্টর $\vec{a}$-এর দিক বরাবর

   $=$ ($\vec{b}$-এর উপাংশ $\vec{a}$-এর দিক বরাবর) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

উত্তর $-\sqrt{2}$

   $-(\vec{j} + \vec{k})$

2. উত্তর a) –3, b) 6

3. সংকেত $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

উত্তর $\cos^{-1}\frac{4}{21}$

4. সংকেত ঃ $\vec{A}.\vec{B}=0$ হবে যদি $\vec{A}\perp\vec{B}$ হয়।

উত্তর $\alpha = 3$

5. সংকেত ঃ প্রথমে দেখাতে হবে ভেক্টর তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

i) যে কোন দুটি ভেক্টরের যোগফল তৃতীয় ভেক্টরটির সমান হবে।

ii) তিনটি ভেক্টরের যোগফল শূন্য হবে। তারপর $\vec{A}.\vec{B}$, $\vec{B}\ \vec{C}$ ও $\vec{A}.\vec{C}$ নির্ণয় করলেই দেখা যাবে যে কোন একটি স্কেলার গুণফলের মান শূন্য হয়েছে। অর্থাৎ $\theta = \frac{\pi}{2}$ হবে।

7. সমাধান

ABCD একটি রম্বাস সুতরাং

$$\vec{AC}.\vec{BD} = (\vec{AB}+\vec{BC}).(\vec{AD}-\vec{AB})$$

$$= (\vec{AB}+\vec{AD}).(\vec{AD}-\vec{AB})$$

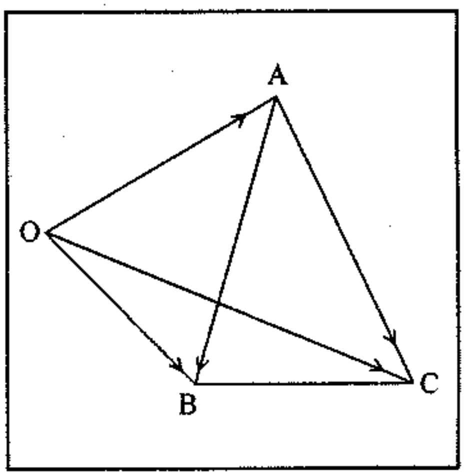
$[\because \vec{AD}=\vec{BC}]$

$$= \vec{AD}.\vec{AD} - \vec{AB}.\vec{AB}$$

$$= |\vec{AD}|^2 - |\vec{AB}|^2$$

$$= |\vec{AD}|^2 - |\vec{AD}|^2$$

$$= 0$$



চিত্র 3.30

সুতরাং $\vec{AC}$, $\vec{BD}$

উপর লম্ব অর্থাৎ রম্বাসের কর্ণদ্বয় $\vec{AC}$ ও $\vec{BD}$ পরস্পরে সমকোণে ছেদ করবে।

8. সমাধান

$$\vec{AB} = (4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k})-(2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k})$$

$$= (2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$$

$\vec{BC} = (3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}) - (4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$

$= -\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{CA} = (2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}) - (3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k})$

$= -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = (2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + (-\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}) + (-\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$

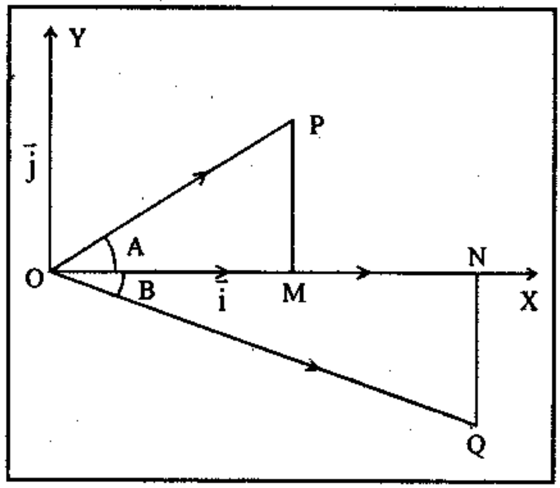
∴ A, B, C শীর্ষবিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজ গঠন করে।

$\vec{AB} . \vec{BC} = (2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) . (-\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k})$
$= -2 + 1 - 8 = -9$

14. $\vec{OP} = \vec{i}$ OP CosA + $\vec{j}$ OP SinA

$\vec{OQ} = \vec{i}$OQ CosB – $\vec{j}$OQ SinB

$\vec{OQ} \times \vec{OQ}$ বার করুন। তারপর $|\vec{OP} \times \vec{OQ}|$ নির্ণয় করুন।



চিত্র 3.12

15. $\vec{AB} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

$= \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{CD} = (\vec{k} - \vec{j}) - (3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k})$

$= -3\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} = -3(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$

$= (-3)\vec{AB}$

অতএব $\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ সরলরেখা দুটি সমান্তরাল।

16. $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a}$

অতএব ABC ত্রিভুজের ভেক্টর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\left(\vec{AB} \times \vec{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \times \left(\vec{c} - \vec{a}\right)\right]$

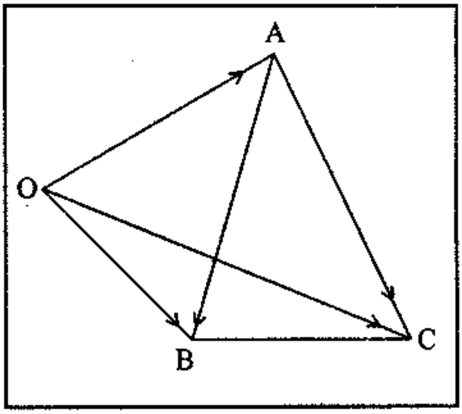
$$=\frac{1}{2}\left[\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{a}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{a}\right]$$

যেহেতু $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$\vec{c}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{c}$

$\vec{a}\times\vec{a}=0$



চিত্র 3.30

$\vec{BC}\cdot\vec{CA}=-9$

$\vec{AB}\cdot\vec{CA}=(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\cdot(-\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})$
$=-2-2+4=0$

সুতরাং ABC ত্রিভুজের $\angle BAC$ কোণ সমকোণ অতএব ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

অনুশীলনী –B

9. $\vec{\alpha}.\vec{\beta}=0$ সুতরাং $\vec{\alpha}$ ও $\vec{\beta}$-এর অন্তর্গত কোণ $\theta=\frac{\pi}{2}$ হবে, অতএব $|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\text{Sin}\theta$
$=(8)\,(6)\,(1)=48$

10. $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}$

$=-\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}$

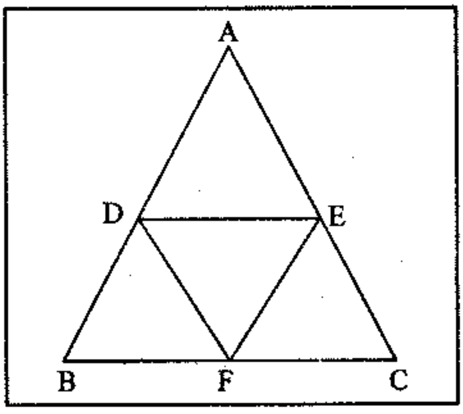
11. একক ভেক্টর $=\frac{\vec{\alpha}\times\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|}=\frac{1}{\sqrt{155}}\left(5\vec{j}+11\vec{k}-3\vec{i}\right)$

$\theta=\text{Sin}^{-1}\left(\frac{155}{156}\right)^{1/2}\quad\left[|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\text{Sin}\theta\right]$

12. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 6\\ 3 & -6 & 2\end{vmatrix}$, $7\vec{c}=7(6\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})$

13. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C-এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ সুতরাং $\vec{AB}$ ও $\vec{BC}$ বার করুন।

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। এখন D,



চিত্র 3.29

E ও F-এর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করুন। একই পদ্ধতিতে DEF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

অনুশীলনী–C

17. উত্তর $\vec{\alpha}.\ \vec{\beta} \times \vec{\gamma} = 0$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে।

18. উত্তর $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = 24\vec{i} + 7\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = 15\vec{i} + 15\vec{j} - 15\vec{k}$

সমাধান $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$

$\therefore (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (-\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}) \times (\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 24\vec{i} + 7\vec{j} - 5\vec{k}$

অনুরূপে প্রথমে $\vec{B} \times \vec{C}$ নির্ণয় করুন তারপর $\vec{A} \times \square(\vec{B} \times \vec{C})$ নির্ণয় করুন।

19. উত্তর $\vec{i} + 16\vec{j} - 7\vec{k}$

সংকেত ঃ প্রথমে 1) $(3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) \times (\vec{i} - \vec{k})$ নির্ণয় করুন

2) $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k})$ নির্ণয় করুন

এখন এই দুটো ফলের ভেক্টর গুণফল নির্ণয় করলেই হয়ে যাবে।

20. ABCD চতুস্তলকের ঘনফল = 6 একক। সংকেত ঃ ABCD চতুস্তলকের ঘনফল।

$= \frac{1}{6} |\vec{AB} \times \vec{AC} \cdot \vec{AD}|$

$\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AC},$ নির্ণয় করুন।

$\vec{AB} = (3\vec{i} + \vec{k}) - (\vec{j} + 2\vec{k})$

21. সমাধান

মনে করুন $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{m}$

সুতরাং $\vec{a}\times\vec{b}.\vec{m}\times(\vec{c}\times\vec{a})$

$=\vec{m}.(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$=\vec{m}.\left[\{(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{b}\}\vec{a}-\{(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{a}\}\vec{b}\right]$

$=(\vec{m}.\vec{a})(\vec{c}\times\vec{a}.\vec{b})-(\vec{m}.\vec{b})(\vec{c}\times\vec{a}.\vec{a})$

$=(\vec{b}\times\vec{c}.\vec{a})(\vec{c}\times\vec{a}.\vec{b})-(\vec{b}\times\vec{c}.\vec{b})(0)$ $[\because \vec{c}\times\vec{a}.\vec{a}=0]$

$=(\vec{b}\times\vec{c}.\vec{a})(\vec{c}\times\vec{a}.\vec{b})$

$=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})$

$=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^2$ প্রমাণিত হল।

22. সমাধান

মনে করুন $(\vec{a}\times\vec{b})=m$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{m}\times(\vec{c}\times\vec{d})$

$=(\vec{m}.\vec{d})\ \vec{c}-(\vec{m}.\vec{c})\vec{d}$

$=(\vec{a}\times\vec{b}.\vec{d})\ \vec{c}-(\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c})\vec{d}$

$=(\vec{a}\times\vec{b}.\vec{d})\ \vec{c}+(\vec{b}.\vec{a}\times\vec{c})\vec{d}$ $[\because\ \vec{c}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{c}]$

$=[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]\vec{c}+[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]\vec{d}$

আবার মনে করুন $\vec{c}\times\vec{d}=\vec{n}$ হয় তবে $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{n}=-\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$=(\vec{n}.\vec{a})\vec{b}-(\vec{n}.\vec{b})\vec{a}$

$=(\vec{c}\times\vec{d}.\vec{a})\vec{b}-(\vec{c}\times\vec{d}.\vec{b})\vec{a}$

$=(\vec{c}.\vec{d}\times\vec{a})\vec{b}-[\vec{b}.\vec{c}\times\vec{d}]\vec{a}$

$=-[\vec{c}.\vec{a}\times\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}.\vec{c}\times\vec{d}]\vec{a}$

$=-[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]\vec{a}$ ----- (2)

সমীকরণ (1) ও (2) থেকে লিখতে পারি

$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]\vec{c} + [\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}]\vec{d} = -[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}]\vec{a}$

বা $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]\vec{c} + [\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}]\vec{d} + [\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{d}]\vec{b} + [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}]\vec{a} = 0$ প্রমাণিত হল।

বিবিধ প্রশ্নমালার সমাধান

1. $\vec{OP} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{OQ} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 12\vec{k}$,

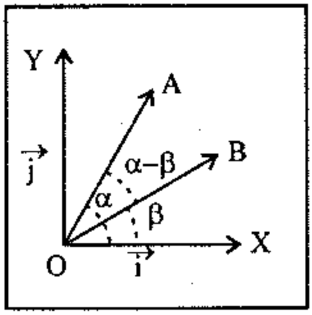
$$\therefore \vec{OP}\,\vec{OQ} = |\vec{OP}|\,|\vec{OQ}|\,\text{Cos}\theta$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{(3)(6) + 7(-2) + (-4)(12)}{\sqrt{3^2 + 7^2 + (-4)^2}\,\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 12^2}}$$

$$= \frac{-44}{\sqrt{74}\,\sqrt{184}}$$

2. সমাধান

মনে করি $\vec{i}$, $\vec{j}$ একক ভেক্টর দুটি যথাক্রমে x অক্ষ এবং y অক্ষ দিক বরাবর। মনে করি xy তলে $\vec{OA} = \bar{a}$, $\vec{OB} = \bar{b}$ ভেক্টর দুটি x অক্ষের সঙ্গে যথাক্রমে α ও β কোণে নত।



চিত্র 3.31

সুতরাং $\angle AOB = \alpha - \beta$

মনে করি $\bar{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি একক ভেক্টর xy তলে অবস্থিত।

সুতরাং $\bar{a} = \vec{i}\,\text{Cos}\alpha + \vec{j}\,\text{Sin}\alpha$

$\bar{b} = \vec{i}\,\text{Cos}\beta + \vec{j}\,\text{Sin}\beta$

দুটি একক ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞানুসারে

$\bar{a}.\vec{b} = |\bar{a}|\,|\vec{b}|\,\text{Cos(AOB)}$

$= |\bar{a}|\,|\bar{b}|\,\text{Cos}(\alpha - \beta)$

$= \text{Cos}\,(\alpha - \beta)$

$\bar{a}.\vec{b} = (\vec{i}\,\text{Cos}\alpha + \vec{j}\,\text{Sin}\alpha).(\vec{i}\,\text{Cos}\beta + \vec{j}\,\text{Sin}\beta)$

$= \text{Cos}\alpha\,\text{Cos}\beta + \text{Sin}\alpha\,\text{Sin}\alpha$

$\therefore \text{Cos}\,(\alpha - \beta) = \text{Cos}\alpha\,\text{Cos}\beta + \text{Sin}\alpha\,\text{Sin}\beta$

3. সংকেত ঃ মনে করি $\vec{\delta} = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3$

প্রশ্নানুসারে $\vec{\alpha}.\vec{\delta} = \vec{\beta}.\vec{\delta} = 0$ হবে।

$\vec{\alpha}.\vec{\delta} = 0,\ \vec{\beta}.\vec{\delta} = 0,\ \vec{\delta}.\vec{\gamma} = 21$

নির্ণয় করুন। অতএব তিনটি সমীকরণ গঠন হবে। a_1, a_2, a_3-এর মান নির্ণয় করুন।

উত্তর $\vec{\delta} = 7\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k}$

4. সংকেত ঃ চিত্র 3.33 লক্ষ্য করুন। অঙ্কটি (2) এর অনুরূপে করা যাবে। এক্ষেত্রে $|\vec{a} \times \vec{b}|$ নির্ণয় করতে হবে।

5. সমাধান

$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{\gamma} \times \vec{\delta}$ ------ (1)

$\vec{\alpha} \times \vec{\gamma} = \vec{\beta} \times \vec{\delta}$ ------ (2)

সমীকরণ (2) থেকে সমীকরণ (1) বিয়োগ করলে পাই,

$\vec{\alpha} \times \vec{\gamma} - \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{\beta} \times \vec{\delta} - \vec{\gamma} \times \vec{\delta}$

$\vec{\alpha} \times (\vec{\gamma} - \vec{\beta}) = (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \times \vec{\delta} = -\vec{\delta} \times (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = \vec{\delta} \times (\vec{\gamma} - \vec{\beta})$

$\therefore\ \vec{\alpha} \times (\vec{\gamma} - \vec{\beta}) - \vec{\delta} \times (\vec{\gamma} - \vec{\beta}) = 0$

বা $(\vec{\alpha} - \vec{\delta}) \times (\vec{\gamma} - \vec{\beta}) = 0$

অতএব $(\vec{\alpha} - \vec{\delta})$ এবং $(\vec{\gamma} - \vec{\beta})$ ভেক্টর দুটির ভেক্টর গুণফল শূন্য। সুতরাং $(\vec{\alpha} - \vec{\delta})$ এবং $(\vec{\gamma} - \vec{\beta})$ ভেক্টর দুটি সমরেখ হবে।

6. সংকেত ঃ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু। $\vec{a}$ ও $\vec{c}$ অপর সামান্তরিকের দুটি বাহু। প্রমাণ করুন $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$

7. O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরি। সুতরাং $\vec{OP} = \vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$ এবং $\vec{OQ} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ হয়

তবে $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) - (\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k})$

$= 4\vec{i} - 5\vec{j} + 11\vec{k}$

$\left|\vec{PQ}\right| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 11^2} = \sqrt{162}$

অতএব $\vec{PQ}$ সরলরেখার কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী

$\left[\frac{4}{9\sqrt{2}}, \frac{-5}{9\sqrt{2}}, \frac{11}{9\sqrt{2}}\right]$

৪. সংকেত ঃ

একক ভেক্টর $= \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

প্রথমে $\vec{a} \times \vec{b}$ নির্ণয় করুন। তারপর ভেক্টরটির মাপাঙ্ক নির্ণয় করুন। এখন একক ভেক্টরটি নির্ণয় করুন।

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\, \text{Sin}\theta$

$$\text{Sin}\theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$ নির্ণয় করুন।

উত্তর ঃ $\frac{1}{\sqrt{155}}\left(5\vec{j} + 11\vec{j} - 3\vec{i}\right),\ \text{Sin}^{-1}\left(\frac{155}{156}\right)^{1/2}$

একক 4 ঃ ভেক্টরের জ্যামিতিক প্রয়োগ

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

4.2 উদ্দেশ্য

4.3 জ্যামিতিতে ভেক্টরের প্রাথমিক প্রক্রিয়ার প্রয়োগ এবং সরলরেখা ও সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ও বিভিন্ন উপপাদ্যের প্রমাণ।

4.4 জ্যামিতিতে দুই বা ততোধিক ভেক্টরের স্কেলার গুণ ও ভেক্টর গুণের প্রয়োগ।

4.5 জ্যামিতিতে ভেক্টরের বিভিন্ন প্রক্রিয়ার প্রয়োগ সম্বন্ধীয় বিস্তারিত উদাহরণ।

4.6 সারাংশ

4.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

4.1 প্রস্তাবনা

পূর্বের এককগুলিতে [EMT–04, Block–I, Unit–01, 02, 03] ভেক্টরের প্রক্রিয়া, দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণন আলোচিত হয়েছে। তিন বা ততোধিক ভেক্টরের স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণনও আলোচিত হয়েছে।

এই সমস্ত প্রক্রিয়াগুলির সাহায্যে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সমীকরণগুলি কিভাবে সহজে লেখা যায় তা এই বর্তমান এককে আলোচনা করা হয়েছে।

4.2 উদ্দেশ্য

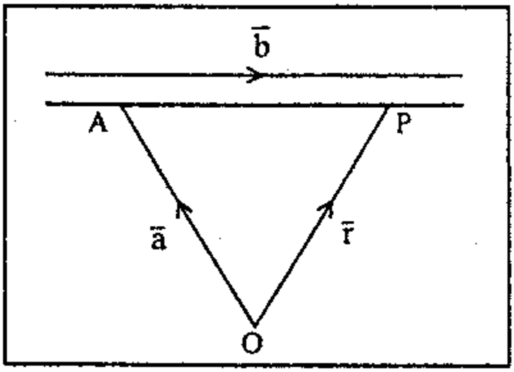
এই এককটি পড়লে আপনি ভেক্টরের প্রাথমিক প্রক্রিয়ার সাহায্যে সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ এবং দুটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলির প্রমাণ করতে পারবেন।

4.3 জ্যামিতিতে ভেক্টরের প্রাথমিক প্রক্রিয়াগুলির প্রয়োগ

4.3.1 সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় :

(ক) একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং একটি প্রদত্ত ভেক্টরের সমান্তরাল সরলেখার সমীকরণ নির্ণয় (প্রচল আকার)

মনে করি A একটি প্রদত্ত বিন্দু যার মূলবিন্দু O-এর সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$ এবং $\bar{b}$ প্রদত্ত ভেক্টর। মনে করি P নির্ণেয় সরলরেখাটির উপর যে কোনও একটি বিন্দু। O-এর সাপেক্ষে P-এর অবস্থান ভেক্টর হল $\bar{r}$। যেহেতু ভেক্টর $\vec{AP}$ ভেক্টর $\bar{b}$-এর সমান্তরাল সুতরাং $\vec{AP} = t\bar{b}$, যেখানে t একটি স্কেলার সংখ্যা।



চিত্র-1

1নং চিত্র হতে $\vec{OA} = \bar{a}$, $\vec{OP} = \bar{r}$

$$\therefore \vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \bar{r} - \bar{a}$$

$$\therefore \bar{r} - \bar{a} = t\bar{b} \quad \boxed{\therefore \bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}} \quad \text{----- (1)}$$

এই সমীকরণটি হতে t-এর বিভিন্ন মানের জন্য সরলরেখাটির উপর গতিশীল বিন্দু P-এর অবস্থান ভেক্টর পাওয়া যায়। সুতরাং এই সমীকরণটি হল নির্ণেয় সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত (1) : নির্ণেয় সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী হলে তার ভেক্টর সমীকরণ হবে $\bar{r} = t\bar{b}$.

$[\bar{a} = 0]$

বিঃ দ্রঃ 1নং সমীকরণকে $\boxed{\bar{r} \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{b}}$ এই আকারেও লেখা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত (2) : O বিন্দুগামী কোন সমকোণীক অক্ষগোষ্ঠীর প্রেক্ষিতে P এবং A-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y, z) ও (a_1, a_2, a_3) এবং $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ হলে (1) নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়।

$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(b_1, b_2, b_3)$

অথবা $(x - a_1, y - a_2, z - a_3) = t(b_1, b_2, b_3) = (tb_1, tb_2, tb_3)$

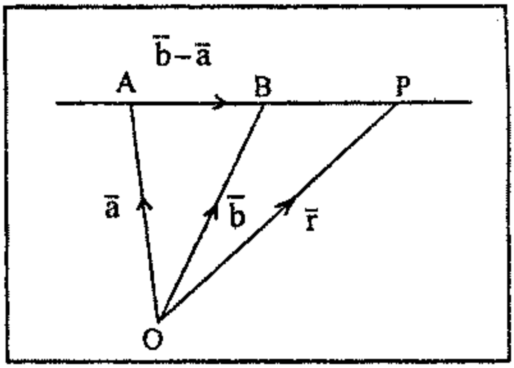
$$\boxed{\therefore \frac{x-a_1}{b_1} = \frac{y-a_2}{b_2} = \frac{z-a_3}{b_3} = t}$$

এটি ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিতে (a_1, a_2, a_3) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বিন্দুগামী একটি সরলরেখার সমীকরণ ও এটির কোসাইন দিগাঙ্কগোষ্ঠী (direction cosines) হলে (b_1, b_2, b_3) ।

(খ) প্রদত্ত দুইটি বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় :

মনে করি A ও B দুটি প্রদত্ত বিন্দু (চিত্র-2) যাদের মূলবিন্দু O-এর সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\bar{a}$ এবং $\bar{b}$ । মনে করি AB সরলরেখার উপর P যে কোনও একটি বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর O-এর সাপেক্ষে হল $\bar{r}$ । $\therefore \overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OP} = \bar{r}$

$\therefore \overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$, $\overline{AP} = \bar{r} - \bar{a}$



চিত্র-2

যেহেতু $\overline{AP}$ এবং $\overline{AB}$ সমরেখ ভেক্টর (collinear vectors) সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$\overline{AP} = t\overline{AB}$

$\therefore \bar{r} - \bar{a} = t(\bar{b} - \bar{a})$

$\therefore \bar{r} = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) = (1-t)\bar{a} + t\bar{b}$

অর্থাৎ $\boxed{\bar{r} = (1-t)\bar{a} + t\bar{b}}$ —— (2)

অথবা $\boxed{\bar{r} = s\bar{a} + t\bar{l}}$ ----- (3)

যেখানে = $s = 1 - t$, t একটি স্কেলার সংখ্যা।

(2) নং সমীকরণ অথবা (3) নং সমীকরণ হল নির্ণেয় সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত (1) : (3) নং সমীকরণকে লেখা যায়

$\bar{r} = s\bar{a} + t\bar{b}$ অর্থাৎ $\bar{r} - s\bar{a} + t\bar{b} = 0$,

এখানে $\bar{r}$, $\bar{a}$ এবং $\bar{b}$-এর স্কেলার সহগগুলির যোগফল হলো

$1 - s + t = 1 - (1 - t) + t = 0$।

সুতরাং A, B, P এই তিনটি বিন্দুর সমরেখ হওয়ার শর্ত সিদ্ধ হলো।

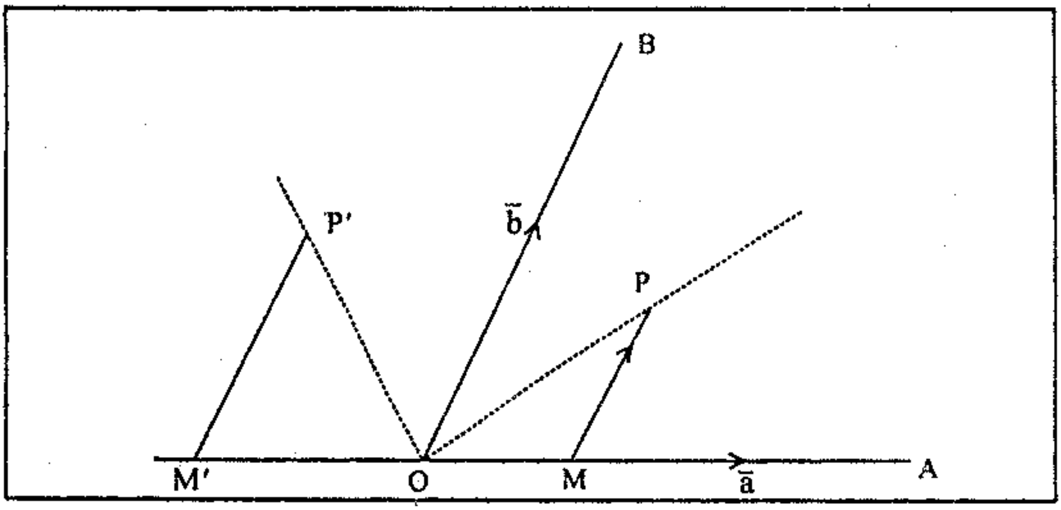
অনুসিদ্ধান্ত (2) : মনে করি O বিন্দু দিয়া অঙ্কিত সমকোণী অক্ষগোষ্ঠীর সাপেক্ষে P, A, B-এর সমকোণী কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (rectangular cartesian coordinates) যথাক্রমে (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) এবং (x_2, y_2, z_2)। (3)নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায়।

$(x, y, z) = s(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2)$

$$\boxed{\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t} \text{ -------- (8)}$$

ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিতে (4)নং সমীকরণটি হলো দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণদ্বয়।

4.3.2 দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় :



চিত্র-3

মনে করি ∠AOB কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক হলো $\overline{OP}$ সরলরেখা। মনে করি $\bar{a}$ এবং $\bar{b}$ হলো যথাক্রমে $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ এর দিকে একক ভেক্টর। O হলো ভেক্টর মূলবিন্দু (vector origin)

অন্তর্সমদ্বিখণ্ডকের উপর P যে কোনও একটি বিন্দু নেওয়া হলো এবং $\overline{MP}$ হলো $\overline{OB}$ সরলরেখার সমান্তরাল। এখানে OM = MP = t (ধরি)

$\therefore\ \overline{OM} = t\bar{a}$ এবং $\overline{MP} = t\bar{b}$

মনে করি $\overline{OP} = \bar{r}$ ΔOMP এই ত্রিভুজে

$\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP}$

অথবা $\bar{r} = t\bar{a} + t\bar{b}$ $\boxed{\therefore\ \bar{r} = t(\bar{a} + \bar{b})}$ ---- (1)

এই সম্পর্ক হতে t-এর বিভিন্ন মানের জন্য OP-এর উপর যে কোনও বিন্দু P-এর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করা যাবে। সুতরাং এটিই হলো ∠AOB কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডকের ভেক্টর সমীকরণ।

মনে করি OP′, ∠AOB কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক এবং $\overline{OP'} = \bar{r}$। M′A′ হলো $\overline{OB}$-এর সমান্তরাল এবং এটি $\overline{AO}$ কে (বর্দ্ধিত) M′ বিন্দুতে ছেদ করে। যদি OM′ = M′P′ = t হয় তবে

$\overline{OM'} = -t\bar{a},\quad \overline{M'P'} = t\bar{b}$।

$\boxed{\therefore\ \bar{r} = t(\bar{b} - \bar{a})}$ ---- (2)

এটিই হলো ∠AOB কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকের ভেক্টর সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত (1) ঃ যদি $\overline{OA} = \bar{a}$ এবং $\overline{OB} = \bar{b}$ হয় তবে $\overline{OA}$-এর দিকে একক ভেক্টর হবে $\frac{\bar{a}}{|a|}$ এবং $\overline{OB}$-এর দিকে একক ভেক্টর হবে। $\frac{\bar{b}}{|b|}$ সুতরাং এই ক্ষেত্রে ∠AOB এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং বহির্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হবে।

$$\boxed{\bar{r} = t\left(\frac{\bar{b}}{|b|} \pm \frac{\bar{a}}{|a|}\right)} \text{ ------ (3)}$$

4.3.3 সমদ্বিখণ্ডক সম্বন্ধীয় উপপাদ্যগুলির ভেক্টর প্রক্রিয়ার সাহায্যে প্রমাণ ঃ

উপপাদ্য (1) ঃ একটি ত্রিভুজের যে কোনও একটি কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ঐ কোণের বিপরীত বাহুকে অপর দুই বাহুর অনুপাতে অন্তঃবিভক্ত করে।

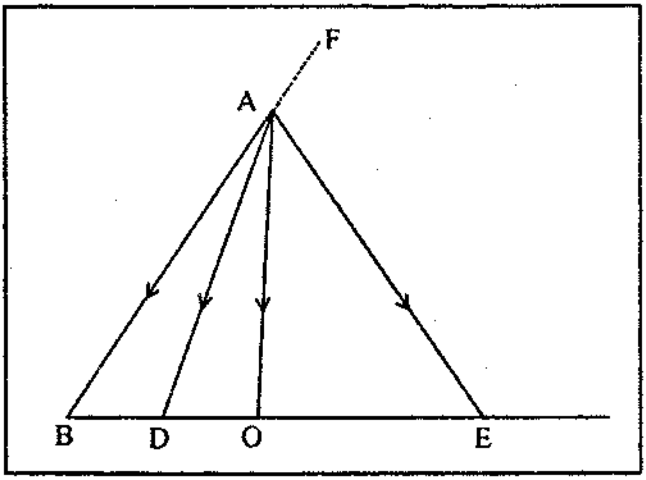
ΔABC ত্রিভুজের ∠BAC কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক হলো AD সরলরেখা। A বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরা হলো। A-এর সাপেক্ষে B এবং C বিন্দু দুটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\bar{c}$ এবং $\bar{b}$। সুতরাং $\overline{AD}$ সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ হবে $\bar{r} = t\left(\frac{\bar{c}}{|c|} + \frac{\bar{b}}{|b|}\right) = t\,\frac{|\bar{b}|\bar{c} + |\bar{c}|\bar{b}}{|c||b|}$

যেখানে t একটি স্কেলার সংখ্যা।

যদি আমরা $t = \frac{|\bar{b}|\ |\bar{c}|}{|\bar{b}| + |\bar{c}|}$

ধরি $\overline{AD}$ সরলরেখার সমীকরণ

হবে $\boxed{\bar{r} = \frac{|\bar{b}|\bar{c} + |\bar{c}|\bar{b}}{|\bar{b}| + |\bar{c}|}}$ ------ (1)



চিত্র-4

এক্ষেত্রে $\bar{r}$ হলো $\overline{BC}$ বাহুর উপর এমন একটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যা $\overline{BC}$ বাহুকে $|\bar{b}| : |\bar{c}|$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে। এই বিন্দুটি হলো AD এবং BC সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু। সুতরাং AD সরলরেখা BC বাহুকে D বিন্দুতে AB : AC অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে।

উপপাদ্য (2) : কোনও ত্রিভুজের যেকোনও একটি কোণের বহির্সমদ্বিখণ্ডক ঐ কোণের বিপরীত বাহুকে অপর দুই বাহুর অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

ΔABC ত্রিভুজের $\angle FAC$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক হল AE (4নং ছবি হতে)।

এখানে $\overline{AB} = \bar{c}$, $\overline{BC} = \bar{b}$ সুতরাং AE সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হবে

$$\bar{r} = t\left(\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} - \frac{\bar{c}}{|\bar{c}|}\right) = t\,\frac{|\bar{c}|\bar{b} - |\bar{b}|\bar{c}}{|\bar{b}||\bar{c}|}$$

আমরা যদি $t = \frac{|\bar{b}||\bar{c}|}{|\bar{b}| - |\bar{c}|}$ ধরি তাহলে $\overline{AE}$-এর সমীকরণ হবে

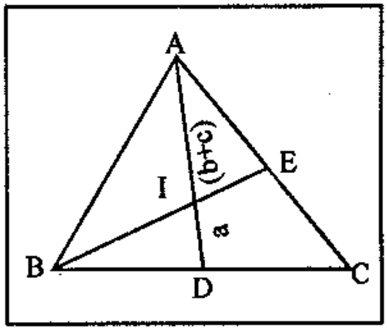
$$\boxed{\bar{r} = \frac{|\bar{b}|\bar{b} - |\bar{c}|\bar{c}}{|\bar{b}| - |\bar{c}|}} \text{ ------- (2)}$$

এটাই হলো $\overline{BC}$ সরলরেখার ওপর এমন একটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যেটি $\overline{BC}$ বাহুকে $|\bar{c}| : |\bar{b}|$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করেছে। সুতরাং এটিই হলো $\overline{BC}$ বাহু এবং $\overline{AE}$ সরলরেখার ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর। সুতরাং E বিন্দু BC বাহুকে AB : AC অনুপাতে বহির্বিভক্ত করেছে।

উপপাদ্য (3) : কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু।

ধরা যাক ΔABC ত্রিভুজের A, B, C এই শীর্ষবিন্দুগুলির কোনও মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$ এবং $\overline{r_3}$ ।

মনে করি BC = a, CA = b, AB = c। যদি ∠A কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে তবে D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হবে $\dfrac{b\overline{r_2}+c\overline{r_3}}{b+c}$ ।



চিত্র-5

মনে করি AD সরলরেখার ওপর I একটি বিন্দু যা AD রেখাংশকে (b + c) : a অনুপাতে অন্তঃবিভক্ত করে। সুতরাং I বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হবে

$$\frac{a\overline{r_1}+(b+c).\dfrac{b\overline{r_2}+c\overline{r_3}}{(b+c)}}{a+(b+c)}$$

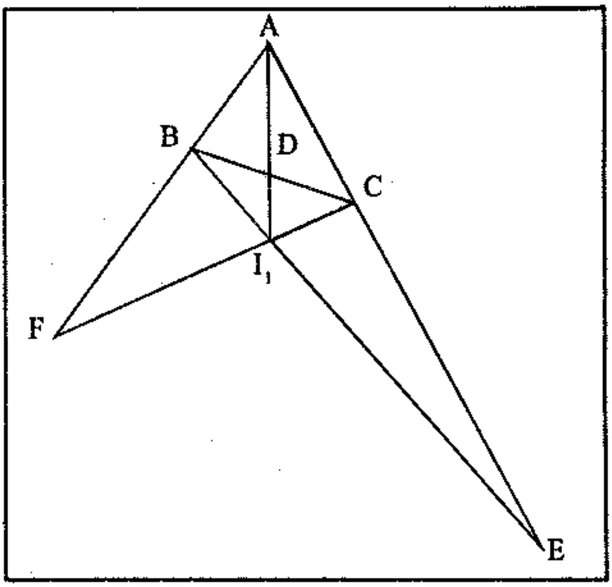
$$=\frac{a\overline{r_1}+b\overline{r_2}+c\overline{r_3}}{a+b+c}$$

এই রাশিমালাটির প্রতিসাম্য (symmetry) হতে বোঝা যাচ্ছে যে I বিন্দুটি অপর দুই কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক দ্বয়ের উপরেও থাকবে। সুতরাং সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

উপপাদ্য (4) ঃ কোনো ত্রিভুজের যে কোনো একটি কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক এবং অপর দুই কোণের বহির্সমদ্বিখণ্ডক দ্বয় সমবিন্দু হবে।

মনে করি ΔABC ত্রিভুজে A, B, C এই শীর্ষবিন্দু তিনটির কোনও ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$, $\overline{r_3}$ ।

যদি ∠B কোণের বহির্সমদ্বিখণ্ডকটি AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে E বিন্দু AC বাহুকে c : a অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে যেখানে BC = a, AC = b এবং AB = c সুতরাং, E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হবে $\dfrac{c\overline{r_3}+a\overline{r_1}}{c-a}$



চিত্র-6

মনেকরি BE সরলরেখার ওপর I_1

এমন একটি বিন্দু যা $\overline{BE}$ কে $(c - a) : b$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ I_1 বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$$= \frac{(c-a).\left(\frac{c\bar{r}_3 - a\bar{r}_1}{c-a}\right) + b\bar{r}_2}{(c-a)+b}$$

$$= \frac{c\bar{r}_3 - a\bar{r}_1 + b\bar{r}_2}{b+c-a}\text{ ।}$$

যদি $\angle C$ কোণের বহির্সমদ্বিখণ্ডক AB বাহুকে বহির্ভাবে F বিন্দুতে ছেদ করে তবে F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হবে $\frac{b\bar{r}_2 - a\bar{r}_1}{b-a}$ । এখন CF সরলরেখাটি যে বিন্দুতে $(b - a) : c$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার অবস্থান ভেক্টর হবে $\frac{(b-a)\left(\frac{b\bar{r}_2 - a\bar{r}_1}{b-a}\right) + c\bar{r}_3}{(b-a)+c}$

$$= \frac{c\bar{r}_3 - a\bar{r}_1 + b\bar{r}_2}{b+c-a}$$

$= I_1$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর।

অনুরূপে দেখানো যাবে যে $\angle A$ কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক AD সরলরেখা I_1 বিন্দুতে $(b + c) : a$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়।

সুতরাং AD, BE, CF সরলরেখা ত্রয় সমবিন্দু।

4.4 জ্যামিতিতে ভেক্টর গুণের প্রয়োগ ঃ

4.4 অনুচ্ছেদে দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণ ও ভেক্টর গুণের সাহায্যে সমতলের ভেক্টর সমীকরণ বিভিন্ন সর্তানুযায়ী নির্ণয় করা হয়েছে।

এছাড়া কোন বিন্দু থেকে সমতলের উপর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করা হয়েছে।

সমতল সম্বন্ধীয় সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ এই অনুচ্ছেদে পাওয়া যায়।

স্কেলার গুণ ও ভেক্টর গুণ প্রক্রিয়ার সাহায্যে কোণ ও বিন্দু হতে সরলরেখার উপর লম্ব দূরত্ব, দুটি নৈক্যতলীয় সরলরেখার (skew lines) মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব (shortest distance) ইত্যাদি আলোচিত হয়েছে।

তিন বা ততোধিক ভেক্টরের স্কেলার গুণের সাহায্যে চতুস্তলকের ঘনফল এখানে নির্ণয় করা হয়েছে। এই অনুচ্ছেদে গোলকের সমীকরণ ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়েছে।

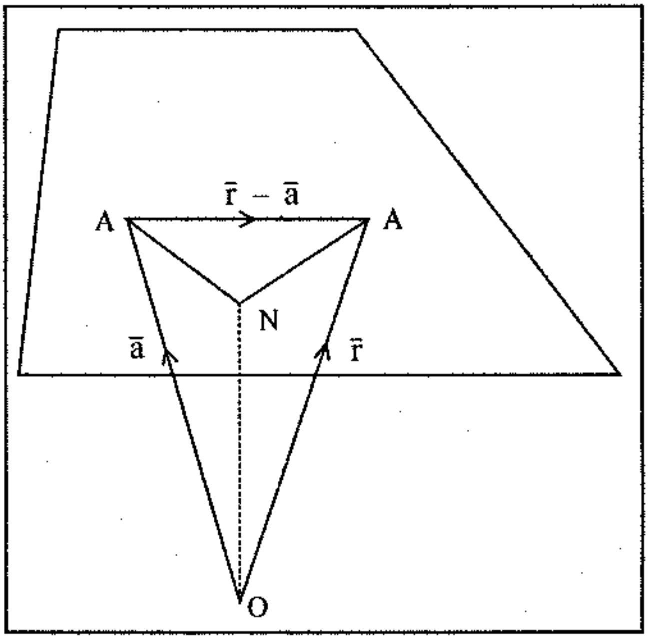
অনুচ্ছেদে বিস্তারিত উদাহরণ দেওয়া হয়েছে।

4.4.1 সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয়

(ক) একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং একটি প্রদত্ত ভেক্টরের সঙ্গে লম্ব এমন একটি তলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ঃ

[অভিলম্ব আকারে তলের ভেক্টর সমীকরণ]

মনে করি O হল মূলবিন্দু এবং O-এর সাপেক্ষে প্রদত্তবিন্দু A-এর অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$। ON হল সমতলের ওপর লম্ব। সমতলে অবস্থিত যে কোনও একটি বিন্দু P-এর অবস্থান ভেক্টর হলো $\bar{r}$। এখানে $\overline{OA} = \bar{a}$ $\overline{OP} = \bar{r}$, $\overline{ON} = p\bar{n}$ যেখানে $p = |\overline{ON}| = ON$ এবং $\bar{n}$ হলো সমতলের উপর লম্ব এবং একক ভেক্টর।



চিত্র-7

7নং চিত্র হতে $\overline{AP} = \bar{r} - \bar{a}$, $\overline{AP}$ সরলরেখাটি সমতলের মধ্যে আছে। সুতরাং $\overline{AP}$ হলো $\bar{n}$ ভেক্টরের ওপর লম্ব।

$\boxed{\therefore (\bar{r} - \bar{a}).\ \bar{n} = 0}$ ----- (1)

P বিন্দুর যে কোনও অবস্থানের জন্য এটি সিদ্ধ। (1)নং সমীকরণ হলো সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ।

(1) নং সমীকরণ হতে $\bar{r}.\bar{n} = \bar{a}.\bar{n}$

এখানে $\bar{a}.\bar{n} = \overline{ON}$ ভেক্টরের উপর $\overline{OA}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ

$\overline{ON} = p$

$\boxed{\therefore \bar{r}.\bar{n} = p}$ ------- (2)

এটাই হলো সমতলের ভেক্টর সমীকরণের অভিলম্ব রূপ (normal form)।

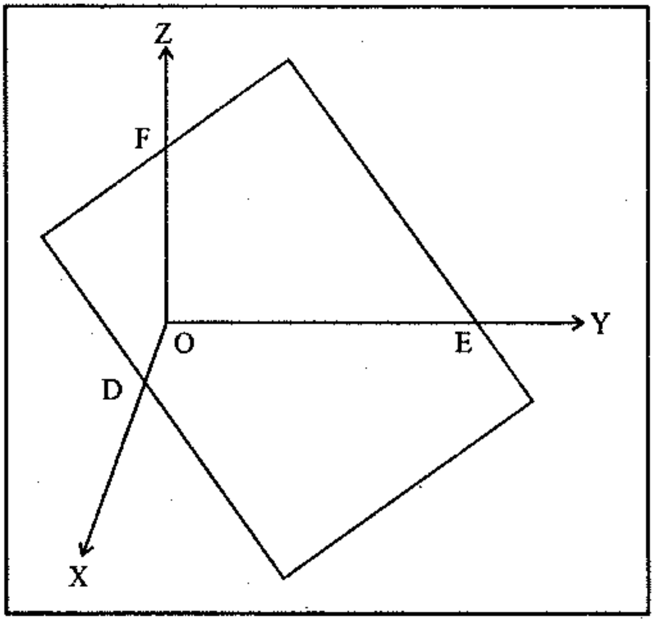
অনুসিদ্ধান্ত (1) ঃ যদি মূলবিন্দু O সমতলের মধ্যে অবস্থিত হয় তবে $p = 0$ হবে এবং সমতলের ভেক্টর সমীকরণ হবে $\bar{r}.\ \bar{n} = 0$ --------- (3)

অনুসিদ্ধান্ত (2) ঃ মনে করি $\bar{r}.\bar{n} = p$ এই সমতলটি সমকোণী অক্ষগোষ্ঠীর তিনটি অক্ষকে যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে ছেদ করে যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\therefore \alpha\hat{i}, \beta\hat{j}$, এবং $\gamma\hat{k}$

অর্থাৎ $\overline{OD} = \alpha\hat{i}$

$\overline{OE} = \beta\hat{j}$

এবং $\overline{OF} = \gamma\hat{k}$ যেখানে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ হলো যথাক্রমে সমকোণী অক্ষগোষ্ঠীর তিনটি অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর।



চিত্র-৪

যেহেতু DEF বিন্দু তিনটি সমতলে অবস্থিত সুতরাং (1) নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায় $(\alpha\hat{i}).\bar{n} = p$,

$(\beta\hat{j}).\bar{n} = p$ এবং $(\gamma\hat{k}).\bar{n} = p$

$$\alpha = \frac{p}{\hat{i}.\bar{n}}, \quad \beta = \frac{p}{\hat{j}.\bar{n}}, \quad \gamma = \frac{p}{\hat{k}.\bar{n}}$$

অনুসিদ্ধান্ত (3) ঃ O বিন্দুতে সমকোণী অক্ষগোষ্ঠীর মূলবিন্দু ধরে যদি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, z) হয় এবং $\bar{n}$ ভেক্টরের কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী (l, m, n) হয় তবে

$\bar{r} = xi + yj + zk$ এবং $\bar{n} = li + mj + nk$। এক্ষেত্রে (1)নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায়

$$\boxed{lx + my + nz = p}$$

এটাই হলো স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে সমতলের সমীকরণের অভিলম্বরূপ।

(খ) একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং দুইটি প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয়।

মনে করি A প্রদত্তবিন্দু এবং O হল ভেক্টর মূলবিন্দু।

মনে করি O এর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$এবং সমতলে অবস্থিত যে কোনও বিন্দু P-এর অবস্থান ভেক্টর O-এর সাপেক্ষে হলো $\bar{r}$।

প্রদত্ত সরলরেখা দুটি যথাক্রমে ভেক্টর $\bar{b}$ এবং $\bar{c}$ ভেক্টর এর সমান্তরাল। সুতরাং নির্ণেয় সমতলটি $\bar{b}$ এবং $\bar{c}$-এর সমান্তরাল হবে।

এক্ষেত্রে $\overline{AP}$ ভেক্টর, $\bar{b}$ ভেক্টর এবং $\bar{c}$ ভেক্টর নির্ণেয় সমতলের সমান্তরাল হবে।

যেহেতু নির্ণেয় সমতলটি $\bar{b}$ এবং $\bar{c}$-এর সমান্তরাল সুতরাং $\bar{b} \times \bar{c}$ ঐ সমতলের ওপর লম্ব হবে।

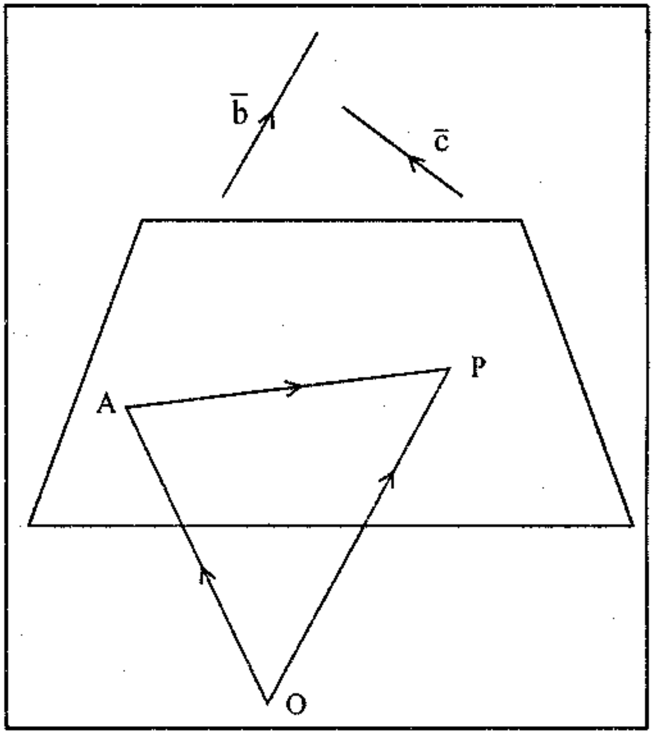
যেহেতু P বিন্দু সমতলের ওপর যে কোনও একটি বিন্দু $\therefore$ $\overline{AP}$ ভেক্টর $\bar{b} \times \bar{c}$-এর উপর লম্ব হবে।

$\therefore (\bar{r} - \bar{a}) . (\bar{b} \times \bar{c}) = 0$

অর্থাৎ $\bar{r} .(\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a}.(\bar{b} \times \bar{c})$

অথবা $\boxed{[\bar{r}\ \bar{b}\ \bar{c}] = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$ --- (4)

এটিই হলো নির্ণেয় সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ।



চিত্র-9

অনুসিদ্ধান্ত (1) ঃ যেহেতু $\overline{AP}$, $\bar{b}$ এবং $\bar{c}$ ভেক্টরগুলি একই সমতলের সঙ্গে সমান্তরাল সুতরাং $\overline{AP}$ ভেক্টর $\bar{b}$ এবং $\bar{c}$ এর সঙ্গে সামতলিক হবে। এই ক্ষেত্রে ভেক্টরের প্রাথমিক প্রক্রিয়া অনুযায়ী

$\bar{r} - \bar{a} = s\bar{b} + t\bar{c}$ হবে।

অর্থাৎ $\boxed{\bar{r} = \bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c}}$ ------ (5)

যেখানে s এবং t দুটি স্কেলার সংখ্যা। (5)নং সমীকরণকে $(\bar{b} \times \bar{c})$ দিয়ে স্কেলার গুণ (scalar product) করা হলে (4) নং সমীকরণটি পাওয়া যায়।

অনুসিদ্ধান্ত (2) ঃ (4) নং সমীকরণকে (2) নং সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করলে পাওয়া যায়

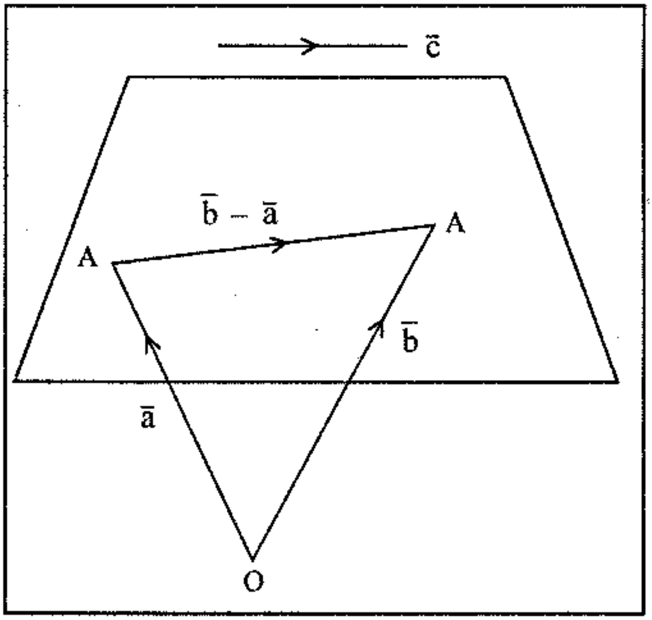
$$\bar{n} = \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{|\bar{b} \times \bar{c}|} \text{ এবং } p = \text{মূলবিন্দু হতে সমতলের উপর লম্ব দূরত্ব } = \frac{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}{|\bar{b} \times \bar{c}|}$$

অনুসিদ্ধান্ত (3) ঃ $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$ এই সরলরেখার মধ্যগামী এবং $\bar{r} . \bar{d} = q$ এই সমতলের উপর লম্ব সমতলটি নির্দিষ্ট একটি বিন্দুগামী যার অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$। এই সমতলটি $\bar{b}$ এবং $\bar{d}$ ভেক্টর দুটির সমান্তরাল। সুতরাং এই সমতলের ভেক্টর সমীকরণ হবে $(\bar{r} - \bar{a}) . (\bar{b} \times \bar{d}) = 0$ [3.4.1 অনুচ্ছেদের 1নং সমীকরণ হতে]

অথবা $\boxed{[\bar{r}\ \bar{b}\ \bar{d}] = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}]}$

(গ) দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং একটি প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল সমতলের ভেক্টর সমীকরণ ঃ

মনেকরি A এবং B সমতলে অবস্থিত দুটি বিন্দু যাদের অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$ এবং $\bar{b}$। প্রদত্ত সরলরেখাটি $\bar{c}$ ভেক্টরের সমান্তরাল।



চিত্র-10

এই ক্ষেত্রে সমতলটি A বিন্দুগামী এবং $\bar{b}-\bar{a}$ এবং $\bar{c}$ এই দুটি ভেক্টরের সমান্তরাল।

সুতরাং (4) নং সমীকরণ অনুযায়ী এই সমতলটির সমীকরণ হবে

$(\bar{r}-\bar{a}) \cdot \{(\bar{b}-\bar{a}) \times \bar{c}\} = 0$

অথবা $\bar{r} \cdot \{(\bar{b}-\bar{a}) \times \bar{c}\}$

$= \bar{a} \cdot \{(\bar{b}-\bar{a}) \times \bar{c}\}$

বা $\bar{r} \cdot (\bar{b}\times\bar{c} + \bar{c} \times \bar{a})$

$= \bar{a} \cdot (\bar{b}\times\bar{c} + \bar{c} \times \bar{a})$

বা $\bar{r} \cdot (\bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a}) = \bar{a} \cdot (\bar{b}\times\bar{c})\ [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

বা $\boxed{\bar{r} \cdot (\bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a}) = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$ ------- (6)

নির্ণেয় সমতলটি A বিন্দুগামীও $\bar{b}-\bar{a}$ এবং $\bar{c}$ এই দুটি ভেক্টরের সমান্তরাল বলে (5)নং সমীকরণ অনুযায়ী এটি লেখা যায়

$\bar{r} = \bar{a} + t(\bar{b}-\bar{a}) + s\bar{c}$

বা $\boxed{\bar{r} = (1-t)\bar{a} + t\bar{b} + s\bar{c}}$ ------ (7)

(ঘ) তিনটি প্রদত্ত বিন্দুগামী সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে করি A, B, C সমরেখ নয় এমন তিনটি বিন্দু, যাদের অবস্থান ভেক্টর O বিন্দুর সাপেক্ষে যথাক্রমে $\bar{a}$, $\bar{b}$ এবং $\bar{c}$।

সুতরাং, $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$

$\overline{AC} = \bar{c} - \bar{a}$

এই সমতলে P যে কোন একটি বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর O-এর সাপেক্ষে $\bar{r}$।

সুতরাং, $\overline{AP}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ এই তিনটি ভেক্টর সামতলিক হবে।

সুতরাং, $\overline{AP}\,(\overline{AB} \times \overline{AC}) = 0$

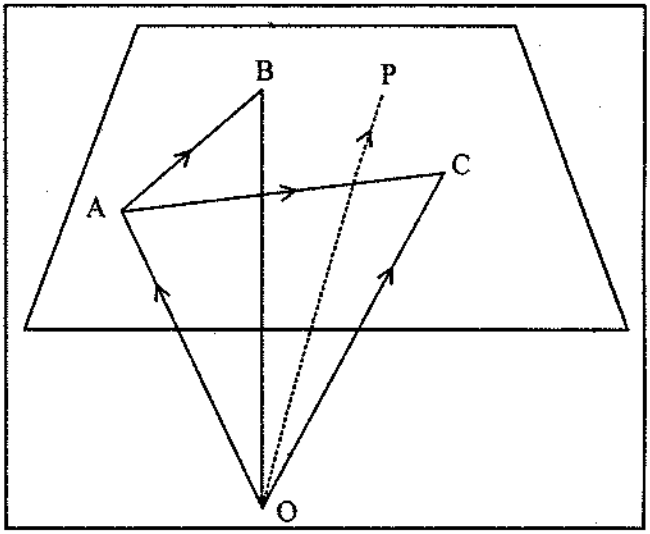
বা $(\bar{r} - \bar{a}).\{(\bar{b} - \bar{a}) \times (\bar{c} - \bar{a})\} = 0$

বা $\bar{r}.\{(\bar{b} - \bar{a}) \times (\bar{c} - \bar{a})\}$

$= \bar{a}.\{(\bar{b} - \bar{a}) \times (\bar{c} - \bar{a})\}$

বা $\bar{r}.\{\bar{b}\times\bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} + \bar{a}\times\bar{b}\}$

$= \bar{a}.\{\bar{b}\times\bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} + \bar{a}\times\bar{b}\}$



চিত্র-11

বা $\boxed{\bar{r}.\,\bar{m} = \bar{a}.(\bar{b}\times\bar{c}) = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$ ------ (8)

(8) নং সমীকরণটি হলো সমতলটির নির্ণেয় ভেক্টর সমীকরণ।

$[\bar{m} = \{\bar{b}\times\bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} + \bar{a}\times\bar{b}\} = 2 \times$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল]

এইক্ষেত্রে যেহেতু সমতলটি A বিন্দুগামী এবং $(\bar{b}-\bar{a})$ এবং $\bar{c}-\bar{a}$ এই দুটি ভেক্টরের সমান্তরাল সুতরাং (5) নং সমীকরণ অনুযায়ী প্রাথমিক প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ হবে।

$\bar{r} = \bar{a} + t(\bar{b}-\bar{a}) + s(\bar{c}-\bar{a})$

অথবা $\boxed{\bar{r} = (1 - t - s)\bar{a} + t\bar{b} + s\bar{c}}$ ----- (9)

অনুসিদ্ধান্ত (1) ঃ (8)নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায় p = মূলবিন্দু হতে সমতলটির লম্বদূরত্ব।

$$= \frac{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}{|\bar{m}|}$$

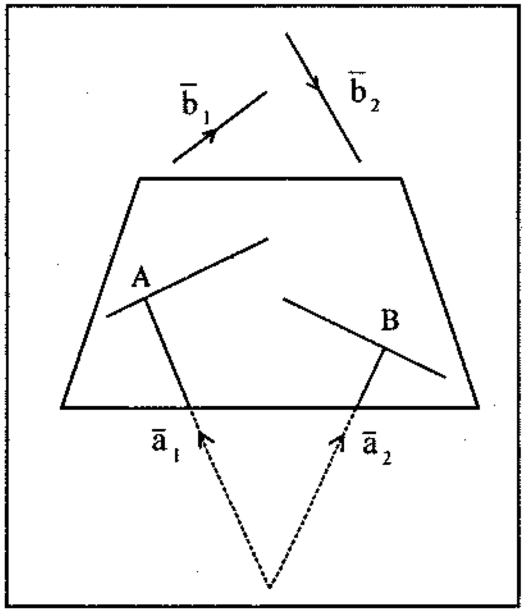
(ঙ) দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখাগামী সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে করি প্রদত্ত সরলরেখা দুটির ভেক্টর সমীকরণ যথাক্রমে $\bar{r} = \bar{a}_1 + t\bar{b}_1$

এবং $\bar{r} = \bar{a}_2 + s\bar{b}_2$ যেখানে t এবং s হল দুটি স্কেলার সংখ্যা।

সমতলটি A বিন্দুগামী যার অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}_1$।

সরলরেখা দুটির সমীকরণ হতে বোঝা যাচ্ছে যে সমতলটির ভেক্টর $\bar{b}_1$ এবং ভেক্টর $\bar{b}_2$-এর সমান্তরাল। সুতরাং (4)নং সমীকরণ অনুযায়ী এই সমতলের ভেক্টর সমীকরণ হবে



চিত্র-12

$$(\bar{r} - \bar{a}_1) . (\bar{b}_1 \times \bar{b}_2) = 0$$

অর্থাৎ $\boxed{[\bar{r}\ \bar{b}_1\ \bar{b}_2] = [\bar{a}_1\ \bar{b}_1\ \bar{b}_2]}$ ---- (10)

অথবা (5) নং সমীকরণ অনুযায়ী

$\boxed{\bar{r} = \bar{a}_1 + t\bar{b}_1 + s\bar{b}_2}$ ------ (11)

যেখানে t এবং s দুটি যে কোন স্কেলার সংখ্যা।

অনুসিদ্ধান্ত (1) ঃ দুটি সরলরেখার সামতলিক হওয়ার শর্ত ঃ

যেহেতু সমতলটি B বিন্দুগামী যার অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}_2$ সুতরাং (10)নং সমীকরণে $\bar{r} = \bar{a}_2$ বসিয়ে পাই $[\bar{a}_2\ \bar{b}_1\ \bar{b}_2] = [\bar{a}_1\ \bar{b}_1\ \bar{b}_2]$

অর্থাৎ $\boxed{[\bar{a}_1\ \bar{b}_1\ \bar{b}_2] = [\bar{a}_2\ \bar{b}_1\ \bar{b}_2]}$

(চ) পরস্পর সমান্তরাল নয় এমন দুটি সমতল যে সরলরেখা বরাবর ছেদ করে তার মধ্যগামী সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে করি সমতল দুটির ভেক্টর সমীকরণ 1নং সমীকরণ অনুযায়ী) যথাক্রমে

$\bar{r} . \bar{n}_1 = p_1$ ----- (12)

$\bar{r} . \bar{n}_2 = p_2$ ----- (13)

এখানে দেখা যাচ্ছে যে সব বিন্দুগুলি (12)নং এবং (13)নং সমতলে অবস্থিত সেই সমস্ত বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর

$(\bar{r} . \bar{n}_1 - p_1) + \lambda(\bar{r} . \bar{n}_2 - p_2) = 0$ ------ (14)

এই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। এখানে λ একটি প্রচল।

সুতরাং (14) নং সমীকরণটি একটি তলের সমীকরণ যা (12) নং (13) নং তলের সাধারণ বিন্দুগুলি দিয়ে যাবে। অর্থাৎ (12)নং এবং (13)নং যে সরলরেখা বরাবর ছেদ করে (14)নং সমতলটি সেই সরলরেখাগামী হবে।

(14)নং সমীকরণটিকে

$\bar{r} . (\bar{n}_1 - \lambda\bar{n}_2) = (p_1 - \lambda p_2)$ ------ (15)

এই আকারে লেখা যায়।

যদি (14) নং সমতলটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হয় যার অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$ তাহলে

$\bar{a}.(\bar{n}_1 - \lambda\bar{n}_2) = (p_1 - \lambda p_2)$

$\therefore (\bar{a}.\bar{n}_1 - p_1) = \lambda(\bar{a}.\bar{n}_2 - p_2)$

$$\therefore \lambda = \frac{\bar{a}.\bar{n}_1 - p_1}{\bar{a}.\bar{n}_2 - p_2}$$

(14) নং সমীকরণে λ-এর মান বসিয়ে পাই

$$\boxed{(\bar{r}.\bar{n}_1 - p_1)(\bar{a}.\bar{n}_2 - p_2) + (\bar{a}.\bar{n}_1 - p_1)(\bar{r}.\bar{n}_2 - p_2) = 0} \quad \text{----- (16)}$$

এটিই হলো (12) নং এবং (13) নং সমতলের দ্বারা ছেদিত সরলরেখাগামী এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$ দিয়ে যায় এমন সমতলের ভেক্টর সমীকরণ।

4.4.2 একটি প্রদত্তবিন্দু হতে কোনও সমতলের দূরত্ব নির্ণয় ঃ

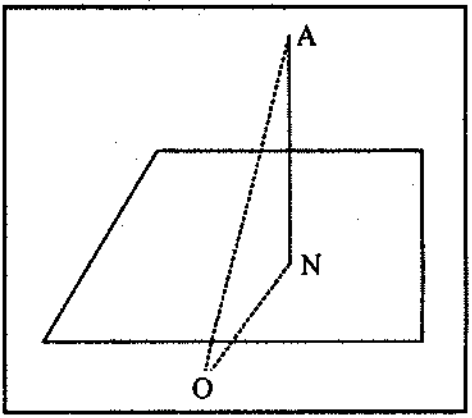
(ক) লম্ব দূরত্ব নির্ণয় ঃ

মনে করি A একটি প্রদত্তবিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর হলো $\bar{a}$ (O বিন্দুর সাপেক্ষে)।

মনে করি প্রদত্ত সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ

$\bar{r}.\bar{n} = p$, যেখানে $\bar{n}$ হলো সমতলটির ওপর লম্ব ভেক্টর এবং একক ভেক্টর।

যদি A হতে সমতলের ওপর লম্ব AN হয় তাহলে এই লম্বটি A বিন্দুগামী এবং ভেক্টর $\bar{n}$-এর সমান্তরাল। সুতরাং $\overline{AN}$ সরলরেখার সমীকরণ হবে $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{n}$, যেখানে t হল স্কেলার সংখ্যা।



চিত্র-13

সুতরাং N বিন্দুতে লম্বটি এই সমতলকে ছেদ করে।

$\therefore$ N বিন্দুতে $(\bar{a} + t\bar{n}).\bar{n} = p$

$\therefore \bar{a}.\bar{n} + t = p$

$\therefore t = (p - \bar{a}.\bar{n})$

$$\therefore t = \frac{p - \bar{a}.\bar{n}}{|\bar{n}|^2} \qquad [\because |\bar{n}| = 1]$$

$\therefore$ N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হলো

$\overline{ON} = \bar{a} + t\bar{n}$

$$= \bar{a} + \left(\frac{p - \bar{a}.\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\right)\bar{n}$$

$$\therefore \overline{AN} = \left\{\bar{a} + \left(\frac{p - \bar{a}.\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\right)\bar{n}\right\} - \bar{a}$$

$$= \left(\frac{p - \bar{a}.\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\right)\bar{n}$$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব দূরত্ব

$= |\overline{AN}|$

$$= \left|\frac{p - \bar{a}.\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\right| |\bar{n}| = \left|\frac{p - \bar{a}.\bar{n}}{|\bar{n}|}\right|$$

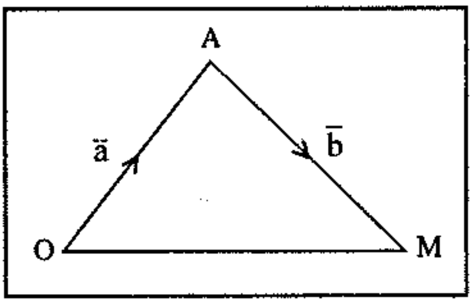
$$= \left|\frac{p - \bar{a}.\bar{n}}{|\bar{n}|}\right|$$

(খ) কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু হতে কোনও নির্দিষ্ট দিকে কোনও সমতলের দূরত্ব ঃ

মনেকরি সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ

$\bar{r}.\bar{n} = p$ ------- (17)

মনে করি প্রদত্তবিন্দু A-এর অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$ (O-এর সাপেক্ষে)। $\bar{b}$ হলো একটি নির্দিষ্ট দিকে একক ভেক্টর।



চিত্র-14

A বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত $\bar{b}$-এর সমান্তরাল সরলরেখা সমতলটিকে M বিন্দুতে ছেদ করেছে।

যদি AM = d হয় তবে $\overline{AM} = d\bar{b}$ ।

আবার $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \bar{a} + d\bar{b}$ ।

যেহেতু M বিন্দুটি একই সমতলে অবস্থিত

$\therefore (\bar{a} + d\bar{b})\bar{n} = p$

অথবা $\bar{a}.\bar{n} + d\bar{b}.\bar{n} = p$

$d\bar{b}.\bar{n} = p - \bar{a}.\bar{n}$

$\therefore d = \frac{p - \bar{a}.\bar{n}}{\bar{b}.\bar{n}}$ এটিই হলো A বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত নির্ণেয় দূরত্ব।

4.4.3 দুটি সমতলের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক সমতলদ্বয়ের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে করি সমতল দুটির ভেক্টর সমীকরণ যথাক্রমে $\bar{r}.\bar{n}_1 = p_1$ এবং $\bar{r}.\bar{n}_2 = p_2$।

যদি সমদ্বিখণ্ডক সমতলে (bisecting plane) অবস্থিত যে কোনও একটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\bar{r}$ হয় তাহলে ঐ বিন্দু হতে উপরোক্ত তল দুটির ওপর লম্ব দূরত্ব দুটি সমান এবং বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হবে।

সুতরাং $\frac{p_1 - \bar{r}.\overline{n_1}}{|\overline{n_1}|} = \pm \frac{p_2 - \bar{r}.\overline{n_2}}{|\overline{n_2}|}$

অথবা $\bar{r}.\left(\frac{\overline{n_1}}{|\overline{n_1}|} \mp \frac{\overline{n_2}}{|\overline{n_2}|}\right) = \left(\frac{p_1}{|\overline{n_1}|} \pm \frac{p_2}{|\overline{n_2}|}\right)$

$$\therefore \boxed{\bar{r}.\left(\frac{\overline{n_1}}{|\overline{n_1}|} + \frac{\overline{n_2}}{|\overline{n_2}|}\right) = \left(\frac{p_1}{|\overline{n_1}|} + \frac{p_2}{|\overline{n_2}|}\right)} \quad \text{----- (1)}$$

এবং $$\boxed{\therefore \bar{r}.\left(\frac{\overline{n_1}}{|\overline{n_1}|} - \frac{\overline{n_2}}{|\overline{n_2}|}\right) = \left(\frac{p_1}{|\overline{n_1}|} - \frac{p_2}{|\overline{n_2}|}\right)} \quad \text{----- (2)}$$

(1)নং এবং (2)নং সমীকরণ দুটি হলো নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডক সমতলদুটির ভেক্টর সমীকরণ।

4.4.4 সমতলের সঙ্গে সম্পর্কিত সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ঃ

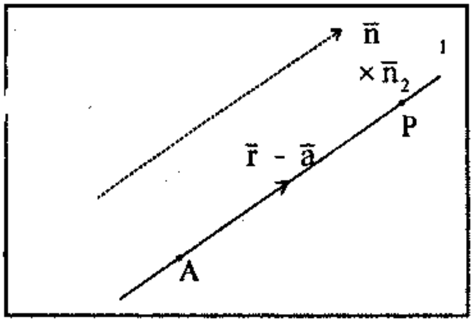
(ক) দুটি পরস্পরছেদি সমতলের মধ্যগামী এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে করি সমতল দুটির সমীকরণ যথাক্রমে

$\bar{r}.\bar{n}_1 = p_1$ এবং $\bar{r}.\bar{n}_2 = p_2$

সুতরাং নির্ণেয় সরলরেখাটি সমতল দুটির ওপর লম্বদ্বয়ের সঙ্গে লম্বভাবে থাকবে।

সুতরাং ঐ সরলরেখাটি $\overline{n_1} \times \overline{n_2}$ এই ভেক্টরের সমান্তরাল হবে।



চিত্র-15

মনে করি সরলরেখাটি A বিন্দুগামী যার অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$।

সুতরাং $\boxed{(\bar{r}-\bar{a}) \times (\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) = 0}$ ----- (1)

এটিই হলো নির্ণেয় সলরেখাটির সমীকরণ।

(খ) একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী ও নির্দিষ্ট সমতলের সঙ্গে সমান্তরাল এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে ছেদ করেছে এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে করি প্রদত্ত সরলরেখাটির সমীকরণ $\bar{r} = \bar{\alpha} + b\bar{\beta}$ ---- (2) এবং প্রদত্ত বিন্দু দুটির অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$।

প্রদত্ত সমতলের সমীকরণ ধরি $\bar{r}.\bar{n} = p$ ----- (3)

সুতরাং নির্ণেয় সরলরেখা এবং (2) নং সরলরেখাগামী সমতলটি $\bar{\beta}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। আবার (2) নং সরলরেখাটি এই সমতলে আছে বলে যে বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর $\bar{\alpha}$ সেই বিন্দুটি ঐ সমতলে আছে।

সুতরাং $(\bar{a} - \bar{\alpha})$ ভেক্টরটি ঐ সমতলেই আছে।

অর্থাৎ $(\bar{a} - \bar{\alpha}) \times \bar{\beta}$ এই ভেক্টরটি ঐ সমতলের ওপর লম্ব হবে। যেহেতু নির্ণেয় সরলরেখাটি এই সমতলের সমান্তরাল সুতরাং $(\bar{a} - \bar{\alpha}) \times \bar{\beta}$ ভেক্টর ঐ সরলরেখার ওপর লম্ব হবে।

আবার নির্ণেয় সরলরেখা $\bar{r}.\bar{n} = p$ এর সমান্তরাল বলে সরলরেখাটি $\bar{n}$-এর ওপর লম্ব হবে।

$\therefore$ সরলরেখাটি $\{(\bar{a}-\bar{\alpha})\times\bar{\beta}\}\times\bar{n}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে।

সরলরেখাটির সমীকরণ হবে।

$\boxed{(\bar{r}-\bar{a})\times\left[\{(\bar{\alpha}-\bar{a})\times\bar{\beta}\}\times\bar{n}\right]=0}$ ------- (4)

(গ) দুটি পরস্পরছেদি সমতলের মধ্যগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে করি সমতল দুটির সমীকরণ $\bar{r}.\bar{n}_1 = p_1$---- (5)

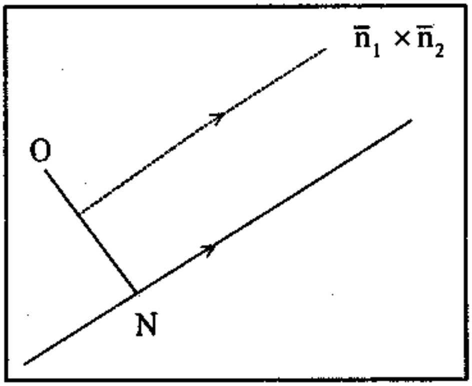
এবং $\bar{r}.\bar{n}_2 = p_2$ ----- (6)

যেহেতু নির্ণেয় সরলরেখাটি উভয় সমতলেই অবস্থিত সুতরাং এটি $\bar{n}_1$ এবং $\bar{n}_2$ এই দুই ভেক্টরের ওপর লম্ব হবে। এক্ষেত্রে সরলরেখাটি $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ এই ভেক্টরের সমান্তরাল হবে।

ON হলো মূলবিন্দু O হতে সরলরেখাটির ওপর লম্ব।

$\bar{n}_1$ এবং $\bar{n}_2$ ভেক্টর ঐ সরলরেখাটির ওপর লম্ব এবং $\overline{ON}$ ভেক্টরটি ঐ সরলরেখার ওপর লম্ব হলে $\bar{n}_1$ এবং $\bar{n}_2$ যে সমতলে আছে $\overline{ON}$ ভেক্টর সেই সমতলে থাকবে।

অর্থাৎ $\overline{ON}$, $\bar{n}_1$ এবং $\bar{n}_2$ সামতলিক বলে $\overline{ON} = l_1\bar{n}_1 + l_2\bar{n}_2$। যেখানে l_1 এবং l_2 দুটি স্কেলার সংখ্যা। যেহেতু N বিন্দুটি (5) নং এবং (6) নং সমতলে অবস্থিত সুতরাং।



চিত্র-16

$(l_1\bar{n}_1 + l_2\bar{n}_2) \cdot \bar{n}_1 = p_1$

অথবা $(l_1\bar{n}_1^2 + l_2\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = p_1$ ------ (9)

এবং $(l_1\bar{n}_1 + l_2\bar{n}_2) \cdot \bar{n}_2 = p_2$

অর্থাৎ $l_1\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 + l_2\bar{n}_2^2 = p_2$ ----- (8)

এই দুটি সম্পর্ক হতে পাওয়া যায়

$$l_1 = \frac{p_1\bar{n}_2^2 - p_2\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{\bar{n}_1^2\bar{n}_2^2 - (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)^2}, \quad l_2 = \frac{p_2\bar{n}_1^2 - p_1\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{\bar{n}_1^2\bar{n}_2^2 - (\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2)^2}$$

সুতরাং নির্ণেয় সরলরেখাটির সমীকরণ হবে

$$\boxed{\bar{r} = l_1\bar{n}_1 + l_2\bar{n}_2 + t(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)} \text{ ----- (9)}$$

যেখানে t হলো একটি স্কেলার সংখ্যা।

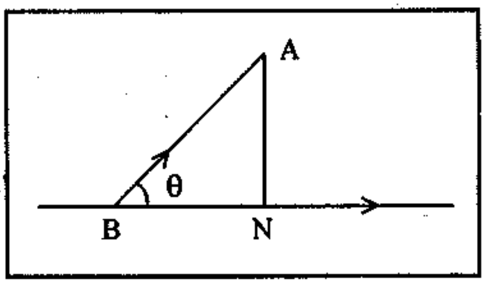
4.4.5 স্কেলার গুণ এবং ভেক্টর গুণ প্রক্রিয়ার সাহায্যে দূরত্ব নির্ণয় :

(ক) একটি প্রদত্ত বিন্দু হতে কোনও সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় :

মনেকরি BN সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ

$\bar{r} = \bar{b} + t\bar{n}$ ----- (1)

যেখানে t হলো স্কেলার সংখ্যা, $\bar{b}$ হলো B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর এবং $\bar{n}$ হলো $\overline{BN}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর।



চিত্র-17

A একটি প্রদত্ত বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর হলো $\bar{a}$।

$\therefore \overline{BA} = (\bar{a} - \bar{b})$।

$\therefore \overline{BA}^2 = (\bar{a} - \bar{b}).(\bar{a} - \bar{b})$।

AN হলো BN-এর ওপর লম্ব। এক্ষেত্রে BN হল BN সরলরেখার ওপর $\overline{BA}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ।

$\therefore BN = BA\ Cos\theta = 1|\overline{BA}|Cos\theta$

$= 1.|\bar{a} - \bar{b}|\cos\theta \qquad [\angle ABN=0]$

$= (\bar{a} - \bar{b}) . \bar{n}$

সুতরাং 17 নং ছবি হতে পাওয়া যায়

$AB^2 = BN^2 + AN^2$

$AN^2 = AB^2 - BN^2 = |\overline{BA}|^2 - BN^2$

$= (\bar{a} - \bar{b})^2 \{(\bar{a} - \bar{b}).\bar{n}\}^2$------ (2)

অনুসিদ্ধান্ত 1. ঃ

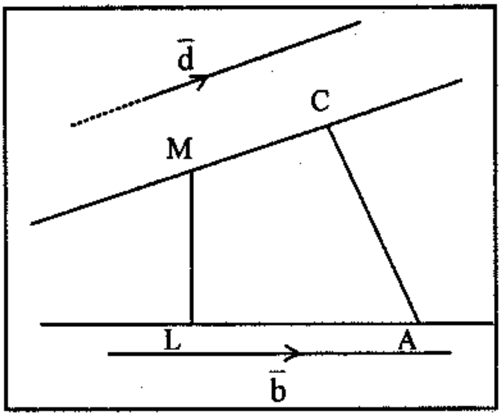
$\overline{NA} = \overline{BA} - \overline{BN}$

$= (\bar{a} - \bar{b}) - \{(\bar{a} - \bar{b}).\bar{n}\}\bar{n}$

অনুসিদ্ধান্ত 2. ঃ যদি (1)নং সমীকরণে ভেক্টর $\bar{n}$ একক ভেক্টর না হয় তবে $\bar{n}$ কে $\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$ দিয়ে প্রতিস্থাপন করতে হবে।

(খ) দুটি নৈকতলীয় সরলরেখার (skewlines) মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব (shortest distance) নির্ণয় ঃ

মনে করি LA এবং MC দুটি নৈকতলীয় সরলরেখা।



চিত্র-18

LA সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ

$\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$

এবং MC সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ $\bar{r} = \bar{c} + s\bar{d}$, যেখানে t ও s স্কেলার সংখ্যা। A এবং C হল LA এবং MC-এর ওপর দুটি প্রদত্ত বিন্দু যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\bar{a}$ এবং $\bar{c}$।

LA সরলরেখাটি $\bar{b}$-এর সমান্তরাল এবং MC সরলরেখা $\bar{d}$-এর সমান্তরাল।

LM হলো সরলরেখাদুটির মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব।

LM = LM সরলরেখার ওপর $\overline{AC}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ।

এখন $\overline{AC} = \bar{c} - \bar{a}$ এবং LM হল LA এবং MC সরলরেখাদুটির উভয়ের ওপর লম্ব।

সুতরাং $\overline{LM}$ ভেক্টর $\bar{b}\times\bar{d}$-এর সমান্তরাল হবে।

$\therefore$ $\overline{LM}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর হলো $\frac{\bar{b}\times\bar{d}}{|\bar{b}\times\bar{d}|}$ ।

$$\therefore\ LM = \overline{AC}.\left\{\frac{\overline{b}\times\overline{d}}{l\overline{b}\times\overline{d}}\right\}$$

$$= (\overline{c}-\overline{a}).\left\{\frac{\overline{b}\times\overline{d}}{|\overline{b}\times\overline{d}|}\right\} \text{-------- (3)}$$

নৈক্যতলীয় সরলরেখাদুটির সর্বনিম্ন দূরত্বের সমীকরণ নির্ণয় ঃ

নৈক্যতলীয় সরলরেখাদুটির সর্বনিম্ন দূরত্বগামী সরলরেখাটি (অর্থাৎ LM সরলরেখা) হল ঐ সরলরেখা এবং নৈক্যতলীয় সরলরেখাদুটি দিয়ে অঙ্কিত দুটি সমতলের (অর্থাৎ ALM সমতল এবং CML সমতল) মধ্যগামী সরলরেখা।

LMA সমতলের উপর লম্ব হলো $\overline{b}\times(\overline{b}\times\overline{d})$

কারণ $\overline{b}$ ভেক্টর LA সরলরেখার সমান্তরাল এবং $\overline{LM}$ ভেক্টর $\overline{b}\times\overline{d}$-এর সমান্তরাল।

এই সমতলটি A বিন্দুগামী বলে এটির সমীকরণ হবে।

$$\boxed{(\overline{r}-\overline{a}).\{\overline{b}\times(\overline{b}\times\overline{d})\}=0} \text{ ----- (4)}$$

অনুরূপে LMC সমতলটির ওপর লম্ব হলো $\overline{b}\times(\overline{b}\times\overline{d})$ এবং এটি C বিন্দুগামী বলে এটির সমীকরণ হবে $\boxed{(\overline{r}-\overline{c}).\{\overline{b}\times(\overline{b}\times\overline{d})\}=0}$ -----(5)

(4) নং এবং (5) নং সমীকরণদুটি একই সঙ্গে LM সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. ঃ ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে

$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{c} = (x_2, y_2, z_2)$

$\overline{b} = (l_1, m_1, n_1)$, $\overline{d} = (l_2, m_2, n_2)$

$$\therefore\ LM = (\overline{c}-\overline{a}).\left\{\frac{(\overline{b}\times\overline{d})}{|\overline{b}\times\overline{d}|}\right\} = \frac{[\overline{c}-\overline{a}\ \ \overline{b}\ \ \overline{d}]}{|\overline{b}\times\overline{d}|} \text{-------- (6)}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2}$$

অনুসিদ্ধান্ত (2) ঃ দুটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করার শর্ত নির্ণয় ঃ

দুটি সরলরেখা যাদের ভেক্টর সমীকরণ যথাক্রমে

$\overline{r} = \overline{a} + t\overline{b}$ এবং $\overline{r} = \overline{c} + s\overline{d}$

যদি পরস্পর ছেদ করে তবে তাদের মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব শূন্য হবে। এই ক্ষেত্রে (6) নং সম্পর্ক হতে পাওয়া যায় $[\overline{c}-\overline{a}\ \ \overline{b}\ \ \overline{d}] = 0$------ (7)

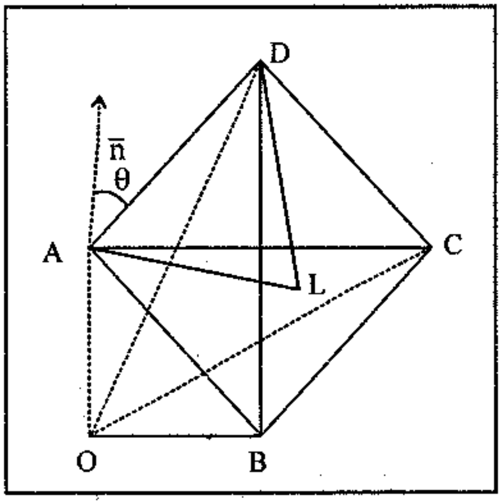
4.4.6 জ্যামিতিতে তিন বা ততোধিক ভেক্টরের স্কেলার গুণফল এবং ভেক্টর গুণফলের প্রয়োগে ঘনফল নির্ণয় ঃ

(ক) **চতুস্তলকের ঘনফল নির্ণয় ঃ** ABCD একটি চতুস্তলক এবং O হল মূলবিন্দু। O-এর সাপেক্ষে A, B, C, D-এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ এবং $\bar{d}$। DL হল D বিন্দু হতে ABC সমতলের উপর লম্ব। এখন $\overline{AB} \times \overline{AC}$

$= (\bar{b}-\bar{a}) \times (\bar{c}-\bar{a})$

এটি $\overline{LD}$ ভেক্টরের সমান্তরাল ভেক্টর এবং এটির মান (Magnitude) হলো 2ΔABC

= 2 × ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল



চিত্র-19

$\bar{n}$ হলো ABC সমতলের ওপর লম্ব এবং একক ভেক্টর LD = $\overline{LD}$ ভেক্টরের ওপর $\overline{AD}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ

= AD.Cosθ [∠ADL = θ = $\overline{AD}$ এবং $\bar{n}$ ভেক্টরের মধবর্তী কোণ]

∴ চতুস্তলকের ঘনফল

$= \frac{1}{3} \times ABC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল × LD

$= \frac{1}{3} \times \Delta ABC \times LD$

$= \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| . LD$

$= \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| . AD \cos\theta$

$= \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| \{|\overline{AD}| . |\bar{n}| . \cos\theta\} \quad [\because |\bar{n}| = 1]$

$= \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| (\overline{AD} . \bar{n}) = \frac{1}{6} \{|\overline{AB} \times \overline{AC}| \bar{n}\} . \overline{AD}$

$= \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| . \overline{AD} \qquad [\because \overline{AB} \times \overline{AC} = |\overline{AB} \times \overline{AC}| \bar{n}]$

$= \frac{1}{6} \{(\bar{b}-\bar{a}) \times (\bar{c}-\bar{a})\} . (\bar{d}-\bar{a})$

$= \frac{1}{6} (\bar{b}-\bar{a}) . \{(\bar{c}-\bar{a})\} \times (\bar{d}-\bar{a})$ [ভেক্টরগুণ ও স্কেলারগুণের বিনিময় করে]

$= \frac{1}{6}\ [\bar{b}-\bar{a}\ \ \bar{c}-\bar{a}\ \ \bar{d}-\bar{a}]$ ----- (1)

$= \frac{1}{6}\ \{[\bar{b}\ \ \bar{c}\ \ \bar{d}] + [\bar{c}\ \ \bar{a}\ \ \bar{d}] + [\bar{d}\ \ \bar{a}\ \bar{b}] - [\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}]\}$------ (2)

অনুসিদ্ধান্ত (1) ঃ ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে

$\bar{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$

$\bar{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

$\bar{c} = x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\hat{k}$

$\bar{d} = x_4\hat{i} + y_4\hat{j} + z_4\hat{k}$

$\bar{b} - \bar{a} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

$\bar{c} - \bar{a} = (x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (z_3 - z_1)\hat{k}$

$\bar{d} - \bar{a} = (x_4 - x_1)\hat{i} + (y_4 - y_1)\hat{j} + (z_4 - z_1)\hat{k}$

$\therefore$ চতুস্তলকের ঘনফল

$= \frac{1}{6}\ [\bar{b}-\bar{a}\ \ \bar{c}-\bar{a}\ \ \bar{d}-\bar{a}]$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

অনুসিদ্ধান্ত (2) ঃ চারটি বিন্দু সামতলিক হওয়ার প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত হলো ঐ বিন্দুগুলিকে শীর্ষবিন্দু ধরে অঙ্কিত চতুস্তলকের ঘনফল শূন্য হবে

অর্থাৎ $[\bar{b}\ \ \bar{c}\ \ \bar{d}] + [\bar{c}\ \ \bar{a}\ \ \bar{d}] + [\bar{d}\ \ \bar{a}\ \bar{b}] - [\bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{c}] = 0$

অনুসিদ্ধান্ত (3) ঃ চতুস্তলকের যে কোন দুটি নৈক্যতলীয় বাহুর মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় ঃ

19 নং ছবি হতে দেখা যায় $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$ দুটি নৈক্যতলীয় বাহু।

$\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$ এই দুটি বাহুর মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্বের সংখ্যামান হবে

$$\frac{(\bar{d}-\bar{a}).\{(\bar{c}-\bar{a})\times(\bar{d}-\bar{b})\}}{|(\bar{c}-\bar{a})\times(\bar{d}-\bar{b})|}$$

[4.4.5 অনুচ্ছেদের (3)নং সম্পর্ক অনুযায়ী]

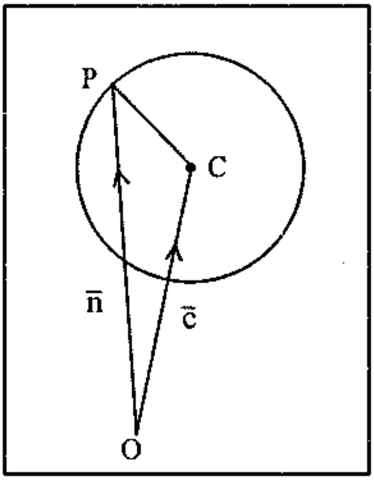
অনুরূপভাবে $\overline{AD}$ এবং $\overline{BC}$ বাহুদ্বয় ও $\overline{AB}$ এবং $\overline{DC}$ বাহুদ্বয়ের মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত (4) ঃ যদি A বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু ধরা হয় তাহলে ABCD চতুস্তলকের ঘনফল (1) নং সম্পর্ক হতে ABCD চতুস্তলকের ঘনফল হবে $= \frac{1}{6}\ [\bar{b}\ \ \bar{c}\ \ \bar{d}]$.

4.4.9 গোলকের সমীকরণ নির্ণয়ে ভেক্টরের প্রয়োগ ঃ

(ক) একটি গোলকের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যার কেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর $\bar{c}$ এবং ব্যাসার্ধ a।

মনেকরি গোলকের কেন্দ্র c এর অবস্থান ভেক্টর O-মূলবিন্দুর সাপেক্ষে হলো $\bar{c}$ এবং গোলকের ব্যাসার্ধ a । গোলকের ওপরে P যে কোন একটি বিন্দু।



চিত্র-20

P-এর অবস্থান ভেক্টর O-এর সাপেক্ষে হলো $\bar{r}$ ।

$\therefore\ \overline{CP} = \bar{r} - \bar{c}$

এখন $|\overline{CP}|^2 = a^2$

$\therefore\ |\bar{r} - \bar{c}|^2 = a^2$

অথবা $(\bar{r} - \bar{c}).(\bar{r} - \bar{c}) = a^2$

অথবা $\boxed{\bar{r}^2 - 2\bar{r}.\bar{c} + \bar{c}^2 - a^2 = 0}$ ------ (1)

এটিই হলো গোলকটির ভেক্টর সমীকরণ।

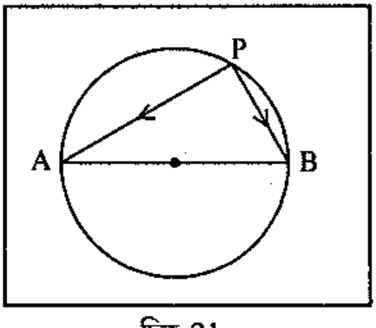
যদি $k = \bar{c}^2 - a^2$ হয় তাহলে (1)নং সমীকরণ হবে $\boxed{\bar{r}^2 - 2\bar{r}.\bar{c} + k = 0}$ ------ (2)

অনুসিদ্ধান্ত (1) ঃ যদি গোলকটির কেন্দ্র মূলবিন্দু হয় তবে $\bar{c} = \bar{O}$ এবং গোলকটির সমীকরণ (1) নং হতে হবে $\bar{r}^2 = a^2$ ----- (3)

অনুসিদ্ধান্ত (2) ঃ যদি ভেক্টর মূলবিন্দু O গোলকের তলের উপরে থাকে তবে $\bar{c}^2 = a^2$ এবং সেক্ষেত্রে গোলকের সমীকরণ হবে।

$\bar{r}^2 - 2\bar{r}.\bar{c} = 0$ ----- (4)

(খ) একটি গোলকের কোনও ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর প্রদত্ত হলে গোলকের সমীকরণ নির্ণয় ঃ



চিত্র-21

AB হল গোলকটির একটি ব্যাস ও প্রান্তবিন্দুদ্বয় A এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\bar{a}$ এবং $\bar{b}$ মনেকরি P হলো গোলকটির ওপর যে কোনও একটি বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর হলো $\bar{r}$ ।

তাহলে $\overline{AP} = \bar{r} - \bar{a}$, $\overline{BP} = \bar{r} - \bar{b}$

যেহেতু $\overline{PA}$ এবং $\overline{PB}$ পরস্পর লম্ব (অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ বলে),

$$\boxed{(\bar{r}-\bar{a}).(\bar{r}-\bar{b}) = 0} \text{ ---- (5)}$$

এটিই হলো গোলকটির ভেক্টর সমীকরণ।

(গ) একটি গোলক ও একটি সরলরেখার ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় ঃ

মনে করি গোলকটির সমীকরণ

$\bar{r}^2 - 2\bar{r}.\bar{c} + k = 0$ ----- (6)

এবং সরলরেখাটির সমীকরণ

$\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$ ----- (7)

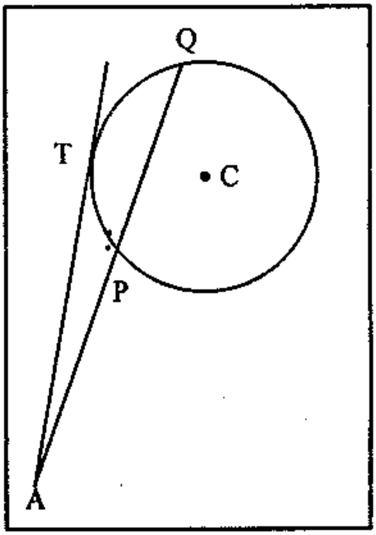
t-এর যে সকল মানের জন্য সরলরেখাটি গোলকটিকে ছেদ করবে তা নির্ণয় করতে হবে।

এখন (6) এবং (7) হতে পাওয়া যায়

$(\bar{a} + t\bar{b})^2 - 2(\bar{a} + t\bar{b}).\bar{c} + k = 0$

অথবা $\boxed{\bar{b}^2 t^2 + 2\bar{b}.(\bar{a}-\bar{c}) + \bar{a}^2 - 2\bar{a}.\bar{c} + k = 0}$ -- (8)

এটি t-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। (8)নং হতে t-এর দুটি মানের জন্য (6) এবং (7)-এর ছেদবিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর পাওয়া যাবে।



চিত্র-22

অনুসিদ্ধান্ত (1) ঃ (7) নং সরলরেখাটি (6)নং সরলরেখাকে স্পর্শ করবে যদি (8)নং সমীকরণে t-এর মান দুটি সমান হয়।

অনুসিদ্ধান্ত (2) ঃ মনে করি A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$ এবং সরলরেখাটি গোলককে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করছে। (8) নং সমীকরণের বীজদ্বয় t_1 এবং t_2 হলে

P এবং Q-এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\bar{a} + t_1\bar{b}$ এবং $\bar{a} + t_2\bar{b}$ হবে।

(8) নং সমীকরণ হতে $t_1 t_2 = \dfrac{\bar{a}^2 - 2\bar{a}.\bar{c} + k}{\bar{b}^2}$ ------ (9)

এখন $\overline{AP} = (\bar{a} + t_1\bar{b}) - \bar{a} = t_1\bar{b}$ $\therefore AP = t_1|\bar{b}|$

অনুরূপে $\overline{AQ} = t_2\bar{b}$ $\therefore AQ = t_2|\bar{b}|$

$\therefore AP.AQ = t_1 t_2|\bar{b}|^2 = t_1 t_2\bar{b}^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}.\bar{c} + k$

[(9)নং হতে]

যদি সরলরেখাটি গোলককে স্পর্শ করে T বিন্দুতে সেক্ষেত্রে (8)নং সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হবে অর্থাৎ

$t_1 = t_2$ হবে $\therefore AP = AQ = AT$

$\therefore AT = \bar{a}^2 - 2\bar{a}.\bar{c} + k$ ------(10)

(ঘ) একটি প্রদত্ত গোলকের ওপর নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শক তলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ঃ

20 নং ছবি হতে দেখা যাচ্ছে যদি (9)নং সরলরেখাটি A বিন্দুতে স্পর্শক হয় তবে A, P, Q সমাপতিত হবে।

এক্ষেত্রে $t_1 = 0$ হবে $\therefore t_2 = 0$

সুতরাং (8)নং সমীকরণ হতে $t_1 + t_2 = 0$ এবং $t_1 t_2 = 0$

$\therefore \bar{b}(\bar{a} - \bar{c}) = 0$ ------ (11)

এবং $\bar{a}^2 - 2\bar{a}.\bar{c} + k = 0$ ------ (12)

(11)নং শর্তটি নির্দেশ করে সরলরেখা $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$ এবং $(\bar{a} - \bar{c})$ ভেক্টর পরস্পরের ওপর লম্ব।

$\therefore (\bar{r} - \bar{a}).(\bar{a} - \bar{c}) = 0$ ----- (13)

(13) নং সমীকরণ হতে বোঝা যাচ্ছে A বিন্দুগামী সকল স্পর্শক (13)নং তলের ওপর অবস্থিত।

(13) নং হতে

$$\bar{r}.\bar{a} - \bar{r}.\bar{c} - \bar{a}^2 + (\bar{a}.\bar{c}) = 0$$

অথবা $\bar{r}.\bar{a} - \bar{c}.(\bar{r} - \bar{a}) - \bar{a}^2 = 0$

অথবা $\bar{r}.\bar{a} - \bar{c}.(\bar{r} - \bar{a}) - 2\bar{a}.\bar{c} + k = 0$ [(12)নং হতে]

অথবা $\boxed{\bar{r}.\bar{a} - \bar{c}.(\bar{r} + \bar{a}) + k = 0}$ ------ (14)

এটাই হলো A বিন্দুতে (যার অবস্থান ভেক্টর) গোলকের স্পর্শকতলের ভেক্টর সমীকরণ।

(ঙ) $\bar{r}^2 - 2\bar{r}.\bar{c} + k = 0$ এই সমীকরণ বিশিষ্ট কোন গোলককে $\bar{r}.\bar{n} = p$ এই সমতল দ্বারা স্পর্শ করার শর্ত ঃ

মনে করি $\bar{r}^2 - 2\bar{r}.\bar{c} + k = 0$

এই গোলকের কোন বিন্দুতে

$\bar{r}.\bar{n} = p$ একটি স্পর্শক তল।

এক্ষেত্রে গোলকের কেন্দ্র হতে স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শক তলের উপর লম্ব দূরত্ব গোলকের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

এখন গোলকের কেন্দ্র C-এর অবস্থান ভেক্টর $\bar{c}$। C হতে $\bar{r}.\bar{n} = p$ এই তলের ওপর লম্ব দূরত্ব

$= \frac{|p - \bar{c}.\bar{n}|}{|\bar{n}|}$ [4.4.2 অনুচ্ছেদের (ক) হতে]

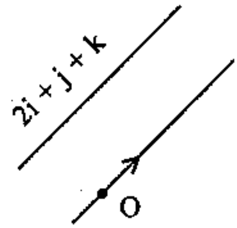
∴ নির্ণেয় শর্তটি হলো

$$\frac{|p - \bar{c}.\bar{n}|^2}{|\bar{n}|^2} = a^2$$

অথবা $\frac{|p - \bar{c}.\bar{n}|^2}{\bar{n}^2} = a^2$ ।

4.5 বিবিধ উদাহরণমালা ঃ

উদাহরণ—1 ঃ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা মূলবিন্দুগামী এবং $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এই ভেক্টরের সমান্তরাল।



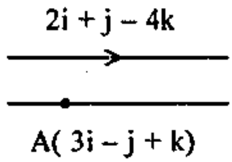
সমাধান ঃ সরলরেখাটির সমীকরণ হবে

$$\bar{r} = t(2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

(4.3.1 অনুচ্ছেদের 1নং সমীকরণ দেখুন)

যেখানে t একটি স্কেলার সংখ্যা।

উদাহরণ—2 ঃ একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $(3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ বিন্দুগামী এবং $(2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k})$ এই ভেক্টরের সমান্তরাল।



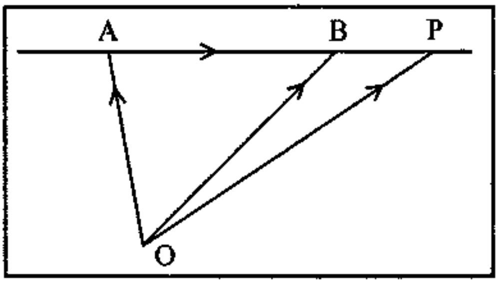
সমাধান ঃ ভেক্টর সমীকরণ হবে

$$\bar{r} = (3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + t(2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k})$$

অর্থাৎ $\bar{r} = (3 + 2t)\hat{i} + (t-1)\hat{j} + (1-4t)\hat{k}$

উদাহরণ—3 ঃ একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন যা

$(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ এবং $(3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ বিন্দুগামী।



সমাধান ঃ মনে করি A এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর O বিন্দুর সাপেক্ষে যথাক্রমে $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ এবং

$(3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ । P সরলরেখার ওপর যে কোনও একটি বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর $\bar{r}$ ।

সুতরাং $\overline{AB} = (3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}) - (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

$\overline{AP} = \bar{r} - (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

$\therefore\ \overline{AP} = t\overline{AB}$ [4.3.1-এর (2) নং সমীকরণ দেখুন]

$\therefore\ \bar{r} - (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = t(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$

$\therefore\ \bar{r} = (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) + t(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$

$= (1+2t)\hat{i} + (1+t)\hat{j} + (1-2t)\hat{k}$

$\therefore\ \bar{r} = (1+2t)\hat{i} + (1+t)\hat{j} + (1-2t)\hat{k}$

উদাহরণ—3 ঃ একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন যা (–1, 1, 2), (1, –2, 1) এবং (2, 2, 4) বিন্দুগামী।

সমাধান ঃ প্রদত্ত তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\bar{a} = (-\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$,

$\bar{b} = (\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ এবং $\bar{c} = (2\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})$

এখানে সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ হবে

$\bar{r}.(\bar{a}\times\bar{b} + \bar{b}\times\bar{c} + \bar{c}\times\bar{a}) = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

[4.3.1 অনুচ্ছেদের 8নং সমীকরণ দেখুন]

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$$

$$\bar{b}\times\bar{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -10\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}$$

$$\bar{c}\times\bar{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8\hat{j}+4\hat{k}$$

$$\therefore\ \bar{a}\times\bar{b} + \bar{b}\times\bar{c} + \bar{c}\times\bar{a} = 5\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k} - 10\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k} - 8\hat{j}+4\hat{k}$$

$$= -5\hat{i}-7\hat{j}+11\hat{k}$$

$\therefore [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \bar{a}.(\bar{b} \times \bar{c})$

$$= (-\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) . (-10\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

$$= 10 - 2 + 12 = 20$$

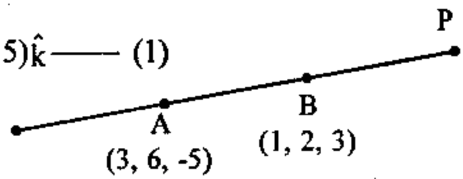
$\therefore$ সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ হবে $\bar{r}\ (11\hat{k} - 5\hat{i} - 7\hat{j}) = 20$

উদাহরণ (4) ঃ একটি সমতল (1, –2, 4) এবং (3, 0, 2) এবং (3, 1, 4) বিন্দুগামী। (3, 6, –5) এবং (1, 2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা সমতলটিকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাদের অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করুন।

আমরা জানি (3, 6, –5) এবং (1, 2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ হবে

$$\bar{r} = (3\hat{i} + 6\hat{j} - 5\hat{k}) + t\{(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (3\hat{i} + 6\hat{j} - 5\hat{k})\}$$

$$[\therefore \overline{AP} = t\overline{AB}]$$



অথবা $\bar{r} = (3 - 2t)\hat{i} + (6 - 4t)\hat{j} + (8t - 5)\hat{k}$ —— (1)

আবার (1, –2, 4), (3, 0, 2), (3, 1, 4) বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ হবে

$$\bar{r} = (1 - t_1 - s)(\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) + t_1(3\hat{i} + 2\hat{k}) + s(3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$$

[4.4.1 অনুচ্ছেদের (9)নং সমীকরণ দেখুন]

$$= (1 + 2s + 2t_1)\hat{i} + (3s + 2t_1 - 2)\hat{j} + (4 - 2t)\hat{k} \text{ —— (2)}$$

যেখানে t, s, t_1 তিনটি স্কেলার সংখ্যা।

(1) নং সরলরেখাটি যে বিন্দুতে (2)নং সমতলটিকে ছেদ করে সেই বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর (1) এবং (2) সমীকরণে একই হবে।

$\therefore \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগগুলি তুলনা করে পাই

$3 - 2t = 1 + 2s + 2t_1$ -------- (i)

$6 - 4t = 3s + 2t_1 - 2$ -------- (ii)

$8t - 5 = 4 - 2t_1$ -------- (iii)

সমাধান করে পাওয়া যাবে

$$t = \frac{19}{10},\ t_1 = -\frac{31}{10},\ s = \frac{11}{5}$$

সুতরাং নির্ণেয় ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর (1) বা (2) হতে

$$\bar{r} = -\frac{4}{5}\hat{i} - \frac{8}{5}\hat{j} + \frac{51}{5}\hat{k}$$

উদাহরণ—5. ঃ দুটি সরলরেখা L_1 এবং L_2-এর ভেক্টর সমীকরণ দুটি যথাক্রমে

$\bar{r} = 3\hat{i}+\hat{j} + t\,(2\hat{j} + \hat{k})$

$\bar{r} = 4\hat{k} + s(\hat{i}+\hat{j} - \hat{k})$, যেখানে t এবং s দুটি স্কেলার। প্রমাণ করেন L_1 এবং L_2 পরস্পরছেদি এবং তারা যে সমতলে অবস্থিত তার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

আমরা জানি যে দুটি সরলরেখা L_1 এবং L_2 যাদের সমীকরণ যথাক্রমে $\bar{r} = \bar{a}_1 + t\bar{b}_1$ এবং $\bar{r} = \bar{a}_2 + t\bar{b}_2$ তাদের সামতলিক হওয়ার শর্ত হবে $[\bar{a}_1\ \ \bar{b}_1\ \ \bar{b}_2] = [\bar{a}_2\ \ \bar{b}_1\ \ \bar{b}_2]$

[4.4.1 অনুচ্ছেদের (ঙ)-এর অনুসিদ্ধান্ত (1) দেখুন]

এখানে $\bar{a}_1 = 3\hat{i} + \hat{k},\ \bar{b}_1 = 2\hat{i} + \hat{k}$

$\bar{a}_2 = 4\hat{k},\ \ \bar{b}_2 = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$$[\bar{a}_1\ \ \bar{b}_1\ \ \bar{b}_2] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3.(-2-1) + 1(1) = -9 + 1 = -8$$

$$[\bar{a}_2\ \ \bar{b}_1\ \ \bar{b}_2] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.(-2) = -8$$

সুতরাং সরলরেখা দুটি ছেদ করবে।

নির্ণেয় সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ হবে (4.4.1 অনুচ্ছেদের (ঙ)-এর (10) নং সমীকরণ দেখুন)

$[\bar{r}\ \ \bar{b}_1\,\bar{b}_2] = [\bar{a}_1\ \bar{b}_1\,\bar{b}_2]$

বা $\bar{r}\,.\,(\bar{b}_1 \times \bar{b}_2) = -8$

বা এখন $\bar{b}_1 \times \bar{b}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

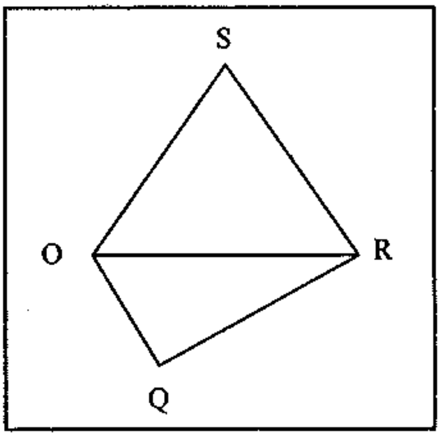
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হবে $\bar{r}\,.(-3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) = -8$

উদাহরণ—6. ঃ O, Q, R, S চারটি বিন্দু (যাদের যে কোনও তিনটি সমরেখ নয়)। যদি O-এর সাপেক্ষে Q, R, S বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\bar{\beta}\ \bar{\gamma}\ \ \bar{\delta}$ হয় তবে OQ এবং RS-এর মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\overline{OQ}$ সরলরেখার সমীকরণ হবে $\bar{\lambda} = t\bar{\beta}$ ------ (1)

এবং RS সরলরেখার সমীকরণ হবে $\bar{r} - \bar{\gamma} = s(\bar{\delta} - \bar{\gamma})$

অর্থাৎ $\bar{r} = \bar{\gamma} + s(\bar{\delta} - \bar{\gamma})$ ------ (2)



সুতরাং তাদের মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব হবে

$$\frac{(\bar{\gamma}-0).\{\bar{\beta}\times(\bar{\delta}-\bar{\gamma})\}}{|\bar{\beta}\times(\bar{\delta}-\bar{\gamma})|}$$

$$\frac{\bar{\gamma}.\{\bar{\beta}\times(\bar{\delta}-\bar{\gamma})\}}{|\bar{\beta}\times(\bar{\delta}-\bar{\gamma})|}$$

[4.4.5 অনুচ্ছেদের (খ) এ (3) নং সম্পর্ক দেখুন]

উদাহরণ—7 : $\bar{r} = \bar{r}_1 + t\bar{\alpha}$ এবং $\bar{r} = \bar{r}_2 + t\bar{\beta}$

এই দুটি নৈক্যতলীয় সরলরেখার মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করুন। যেখানে s, t দুটি স্কেলার এবং $\bar{r}_1$, $\bar{\alpha}$, $\bar{r}_2$ $\bar{\beta}$ ভেক্টরগুলি হলো যথাক্রমে (1, –2, 3) (2, 1, 1), (–2, 2, –1) এবং (–3, 1, 2).

সমাধান : এখানে $\bar{r}_1 = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\bar{r}_2 = -2\hat{i} + 2 - \hat{k}$$

$$\bar{\alpha} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k},\ \bar{\beta} = (-3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\therefore\ \bar{\alpha}\times\bar{\beta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore\ |\bar{\alpha}\times\bar{\beta}| = \sqrt{1+49+25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

আবার $|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$

সুতরাং তাদের মধ্যে নির্ণেয় সর্বনিম্ন দূরত্ব হবে

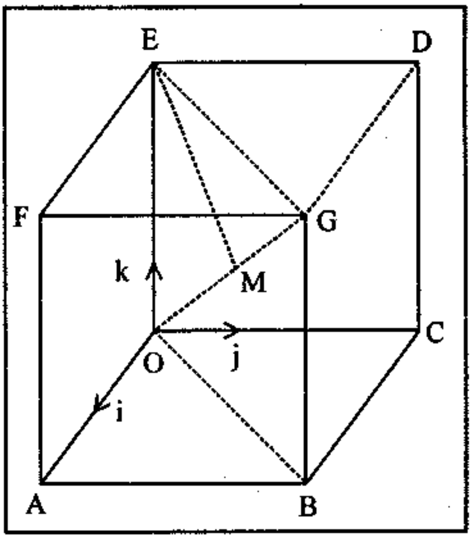
$$\frac{(\bar{r}_1-\bar{r}_2).(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})}{|\bar{\alpha}\times\bar{\beta}|}$$ [4.4.5 অনুচ্ছেদের (3)নং সম্পর্ক হতে]

$$=\frac{(3i-4j-4k).(i-7j+5k)}{5\sqrt{3}}$$

$\frac{3+28+20}{5\sqrt{3}} = \frac{51}{5\sqrt{3}}$ একক।

উদাহরণ—৪. : একটি একক ঘনকের কোনও কৌণিক বিন্দু হতে কোন কর্ণের (যা ঐ বিন্দুগামী নয়) ওপর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি OABCDEFG একটি একক ঘনক। এবং $\overline{OA} = \hat{i}$, $\overline{OC} = \hat{j}$ $\overline{OE} = \hat{k}$, যেখানে $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ তিনটি পরস্পর লম্ব একক ভেক্টর।



$\therefore$ কর্ণ $\overline{OG} = \overline{OB} + \overline{BG}$

$= \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BG}$

$= \overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OE}$

$= \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

সুতরাং $\overline{OG}$ বরাবর একক ভেক্টর হবে $\frac{\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{3}}$

EM হলো $\overline{OG}$-এর লম্ব।

$\therefore \overline{OM} = OM.\left(\frac{\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{3}}\right)$

আবার OM = $\overline{OE}$ এর $\overline{OM}$-এর উপর লম্ব অভিক্ষেপ

$= \overline{OE}.\overline{OM}$

$= k.\left(\frac{\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

আবার $|\overline{OE}| = 1$

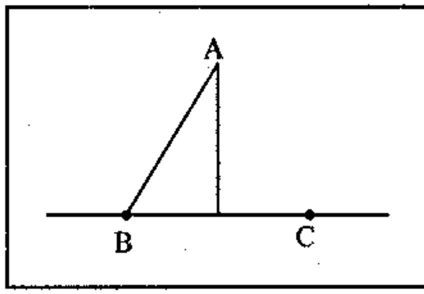
$\therefore EM^2 = OE^2 - OM^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\therefore EM = \sqrt{\frac{2}{3}}$ একক।

উদাহরণ—9 : A(4, d, –1), B(4, 2, –2) এবং C(6, 4, –1) তিনটি বিন্দু সমরেখ নয়। A বিন্দু হতে BC সরলরেখার উপর লম্ব দূরত্ব 1। d-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে $\overline{BA} = (0, d-2, 1)$

এবং $\overline{BC} = (2, 2, 1) \therefore |\overline{BC}| = \sqrt{4+4+1} = 3$



প্রদত্ত শর্তানুসারে $\dfrac{|\overline{BC} \times \overline{BA}|}{|\overline{BC}|} = 1$ ------ (1)

এখন $\overline{BC} \times \overline{BA}$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & d-2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (4-d)i - 2j + (2d-4)k$

$\therefore (4-d)^2 + 4 + (2d-4)^2 = 9$ (1নং হতে)

বা $5d^2 - 24d + 27 = 0$

বা $(d-3)(5d-9) = 0$

$\therefore d = 3, \dfrac{9}{5}$

উদাহরণ—10 ঃ $\bar{r} = t\bar{\alpha}$ এই সরলরেখাগামী এবং $\bar{r} = t_1\bar{\beta}$ ও $\bar{r} = t_2\bar{\gamma}$ সরলরেখাদ্বয় যে সমতলে আছে তার ওপর লম্ব সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সরলরেখা $\bar{r} = t\bar{\alpha}$ মূলবিন্দুগামী এবং এটি $\bar{\alpha}$-এর সমান্তরাল। যেহেতু নির্ণেয় সমতলটির মধ্যে এই সরলরেখা আছে সুতরাং এই সমতলটি মূল বিন্দুগামী হবে এবং $\bar{\alpha}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। প্রদত্ত সমতলটির ওপর লম্ব হলো $\bar{\beta} \times \bar{\gamma}$।

সুতরাং নির্ণেয় তলটি $\bar{\beta} \times \bar{\gamma}$ এর সমান্তরাল হবে।

এক্ষেত্রে $\bar{\alpha} \times (\bar{\beta} \times \bar{\gamma})$ ভেক্টরটি এই সমতলের ওপর লম্ব ভেক্টর হবে।

সুতরাং সমতলটির সমীকরণ হবে $\bar{r}.\{\bar{\alpha} \times (\bar{\beta} \times \bar{\gamma})\} = 0$ [4.4.1 অনুচ্ছেদের (2)নং সমীকরণ দেখুন]

উদাহরণ—11 ঃ তিনটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ যথাক্রমে $\bar{r}.\bar{n}_1 = p_1$, $\bar{r}.\bar{n}_2 = p_2$, $\bar{r}.\bar{n}_3 = p_3$ যেখানে $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$, $\bar{n}_3$ হল অসামতলিক ভেক্টর। এদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ যেহেতু প্রদত্ত সমতল তিনটির ওপর লম্ব ভেক্টরগুলি অসামতলিক সুতরাং $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, $\bar{n}_2 \times \bar{n}_3$, $\bar{n}_3 \times \bar{n}_1$ এই ভেক্টরগুলিও অসামতলিক হবে।

মনে করি প্রদত্ত সমতলগুলি একটি বিন্দুতে ছেদ করে যার অবস্থান ভেক্টর হল $\overline{\alpha}$।

$\overline{\alpha}.\overline{n}_1 = p_1$, $\overline{\alpha}.\overline{n}_2 = p_2$, $\overline{\alpha}.\overline{n}_3 = p_3$।

আবার $\overline{\alpha}$ ভেক্টরকে $\overline{n}_1 \times \overline{n}_2$, $\overline{n}_2 \times \overline{n}_3$, $\overline{n}_3 \times \overline{n}_1$-এর রৈখিক সমবায় হিসাবে লেখা যায়।

$\overline{\alpha} = x(\overline{n}_2 \times \overline{n}_3) + y(\overline{n}_3 \times \overline{n}_1) + z(\overline{n}_1 \times \overline{n}_2)$ ----(1)

সুতরাং $\overline{\alpha}.\overline{n}_1 = p_1 \Rightarrow$

$x\{\overline{n}_1.(\overline{n}_2 \times \overline{n}_3)\} = p_1$

$$\therefore x = \frac{p_1}{[\overline{n}_1\overline{n}_2\overline{n}_3]}$$

অনুরূপে $y = \dfrac{p_2}{[\overline{n}_1\overline{n}_2\overline{n}_3]}$, $z = \dfrac{p_3}{[\overline{n}_1\overline{n}_2\overline{n}_3]}$

(1)নং সম্পর্কে x, y, z-এর মান বসিয়ে প্রদত্ত সমতলগুলির সাধারণবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর পাওয়া যাবে।

উদাহরণ—12 ঃ একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $(8\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ বিন্দুগামী ও $\overline{r}.(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 0$ এবং $\overline{r}.(\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) + 5 = 0$ এই দুটি সমতলের প্রত্যেকটির ওপর লম্ব।

সমাধান ঃ $\overline{r}.(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 0$-এর ওপর লম্ব ভেক্টর হল $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\overline{r}.(\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) + 5 = 0$ এর ওপর লম্ব ভেক্টর হলো $\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ ($\overline{r}.\overline{n} = p$-এর সঙ্গে তুলনা করে) নির্ণেয় সমতলটি এই দুটি ভেক্টরের সঙ্গে সমান্তরাল হবে।

সুতরাং $(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$ এই ভেক্টরটি নির্ণেয় সমতলের ওপর লম্ব হবে।

এখন $(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -\hat{i} + 12\hat{j} + 7\hat{k}$$

নির্ণেয় সমতলটি $(8\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ বিন্দুগামী বলে এটির সমীকরণ হবে

$\{\overline{r} - (8\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})\}.(-\hat{i} + 12\hat{j} + 7\hat{k}) = 0$

[4.4.1 অনুচ্ছেদের 1 নং সমীকরণ দেখুন]

বা $\bar{r}.(-\hat{i}+12\hat{j}+7\hat{k}) = (8\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}).(-\hat{i}+12\hat{j}+7\hat{k})$

বা $\bar{r}.(-\hat{i}+12\hat{j}+7\hat{k}) = -8+24-21 = -5$

বা $\bar{r}.(-\hat{i}+12\hat{j}+7\hat{k})+5 = 0$

উদাহরণ—13. : PQRS একটি চতুস্তলক যার শীর্ষবিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে (–5, –4, 8), (2, 3, 1) , (4, 1, 2) এবং (6, 3, 7)।

P বিন্দু হতে QRS সমতলটির লম্ব ধূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি O হলে i মূলবিন্দু।

$\overline{OP} = -5\hat{i}+4\hat{j}+8\hat{k}$

$\overline{OQ} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$, $\overline{OR} = 4\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$

$\overline{OS} = 6\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$

$$\overline{OQ}\times\overline{OS} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 6 & 3 & 7\end{vmatrix} = +18\hat{i}-8\hat{j}-12\hat{k}$$

$\therefore\ \overline{OS}\times\overline{OQ} = -18\hat{i}+8\hat{j}+12\hat{k}$

$$\overline{OQ}\times\overline{OR} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix} = 5\hat{i}-10\hat{k}$$

$$\overline{OR}\times\overline{OS} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & 1 & 2\\ 6 & 3 & 7\end{vmatrix} = \hat{i}-16\hat{j}+6\hat{k}$$

$\overline{OQ}.(\overline{OR}\times\overline{OS}) = (2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}-16\hat{j}+6\hat{k}) = -40$

QRS সমতলের সমীকরণ হবে [অনুচ্ছেদ 4.4.1-এর 8 নং সমীকরণ]

$\bar{r}.[\overline{OQ}\times\overline{OR}+\overline{OR}\times\overline{OS}+\overline{OS}\times\overline{OQ}] = [\overline{OQ}\ \overline{OR}\ \overline{OS}]$

বা $\bar{r}.[5\hat{i}-10\hat{k}+\hat{i}-16\hat{j}+6\hat{k}-18\hat{i}+8\hat{j}+12\hat{k}] = -40$

বা $\bar{r}.[-12\hat{i}-8\hat{j}+8\hat{k}] = -40$

বা $\bar{r}.[-3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}] = -10$

বা $\bar{r}.\frac{-3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{9+4+4}} = +\frac{10}{\sqrt{17}}$

বা $r.\left(\frac{3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{17}}\right) = \frac{10}{\sqrt{17}}$ ----- (1) [$\bar{r}.\bar{n} = p$ আকারে প্রকাশ করা হল]

সুতরাং P বিন্দু হতে (1)নং সমতলটির লম্ব দূরত্ব

$= \left|\frac{10}{\sqrt{17}} - \overline{OP}.\left(\frac{3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{17}}\right)\right|$ [4.4.2 অনুচ্ছেদের (ক) হতে $|\bar{n}|=1$ হলে পাওয়া যায়)

$$= \left|\frac{10}{\sqrt{17}} - \left\{\left(-5\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}\right).\left(\frac{3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{17}}\right)\right\}\right|$$

$= \left|\frac{10}{\sqrt{17}} - \frac{15-8-16}{\sqrt{17}}\right| = \frac{49}{\sqrt{17}}$ একক।

উদাহরণ—14 : একটি চতুস্তলকের ঘনফল হলো 2 এবং তিনটি শীর্ষবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে (1, 1, 0) (1, 0, 1), (2, –1, 1)। চতুর্থ শীর্ষ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি ABCD একটি চতুস্তলক এবং A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে (1, 1, 0), (1, 0, 1) এবং (2, –1, 1)। মনে করি D এর অবস্থান ভেক্টর (α, β, γ)

চতুস্তলকের ঘনফল

$= \frac{1}{6}(\overline{AB} \times \overline{AC}) . \overline{AD}$

এখানে $\overline{AB} = -(i + j) + (i + k) = -j + k$

$\overline{AC} = i - 2j + k,$

$\overline{AD} = (\alpha - 1)i + (\beta - 1)j + \gamma k$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে

$= \frac{1}{6}\{\overline{AD} . (\overline{AB} \times \overline{AC})\} = 2$

বা $\frac{1}{6}\begin{vmatrix} \alpha-1 & b-1 & \gamma \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2$

বা $(\alpha - 1)(-1 + 2) + ((\beta - 1)(1 + 0) + \gamma(0 + 1) = 12$

বা $(\alpha - 1) + (\beta - 1) + \gamma = 12$

বা $\alpha + \beta + \gamma = 14$

সুতরাং D বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ হবে $x + y + z = 14$.

উদাহরণ—15 ঃ একটি চতুস্তলকের চারটি তলের সমীকরণ যথাক্রমে $\bar{r}.\bar{i} = 0$, $\bar{r}.\bar{j} = 0$, $\bar{r}.\bar{k} = 0$ এবং $\bar{r}.(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}) = 0$। শীর্ষবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত অন্তর্গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। গোলকটির কেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি গোলকটির কেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর $\bar{\alpha}$ । প্রদত্ত চারটি সমতলের ওপর কেন্দ্র হতে অঙ্কিত লম্বগুলি গোলকের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\therefore\ \bar{\alpha}.\bar{i} = \bar{\alpha}.\bar{j} = \bar{\alpha}.\bar{k} = \frac{\bar{\alpha}.(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}) - a}{\sqrt{3}} \text{-----}\ (1)$$

[4.4.2 অনুচ্ছেদের (ক) হতে]

যদি $\bar{\alpha} = \alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k}$ হয় তবে (1) হতে

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - a}{\sqrt{3}}$$

বা $\dfrac{3\alpha_1 - a}{\sqrt{3}} = \alpha_1 \quad \therefore\ 3\alpha_1 - a = \sqrt{3}\alpha_1$

বা $(3-\sqrt{3})\alpha_1 = a \quad \therefore\ \alpha_1 = \dfrac{a}{3-\sqrt{3}}$

$\therefore\ \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_1 = \dfrac{a}{3-\sqrt{3}} = \dfrac{a(3+\sqrt{3})}{6} =$ ব্যাসার্ধ

গোলকের কেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর হবে

$$\frac{a}{6}(3+\sqrt{3})(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

সুতরাং গোলকটির সমীকরণ হবে। $(\bar{r}-\bar{\alpha})^2 = \left\{\frac{a}{6}(3+\sqrt{3})\right\}^2$

[4.4.7 অনুচ্ছেদের (1)নং সমীকরণ হতে]

4.6 সারাংশ ঃ

(i) $\bar{r} = \bar{a} + \bar{b}$ সমীকরণটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ যেখানে t একটি স্কেলার।

(ii) সমতলের ভেক্টর সমীকরণের অভিলম্ব রূপটি (Normal form) হল

$$\bar{r} \cdot \bar{n} = p$$

যেখানে p = মূলবিন্দু থেকে সমতলের উপর লম্ব দূরত্ব।

4.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. দেখান যে $(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ এবং $(3\hat{k} - 2\hat{j})$ বিন্দু দুটি দিয়ে যায় এমন সরলরেখার সমীকরণ হবে $\bar{r} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + t(2\hat{k} - \hat{i})$

2. একটি সমতল মূলবিন্দুগামী এবং $(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$ ও $(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$ এই দুটি ভেক্টরের সমান্তরাল। দেখান যে সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ হবে

$$\bar{r} = (t + 2s)\vec{i} + (2t - s)\vec{j} + (3t - s)\vec{k}$$

3. একটি সমতল (3, –2, –1) বিন্দুগামী এবং (1, –2, 4), (3, 2, –5) এই দুটি ভেক্টরের সমান্তরাল। দেখান যে সমতলটির কার্তেসীয় সমীকরণ হবে $2x + 17y + 8z + 36 = 0$

4. (–2, 6, –6), (–3, 10, 9) এবং (–5, 0, –6) এই তিনটি বিন্দুগামী একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

   [উঃ $\bar{r}.(2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}) = 2$]

5. দেখান যে (2, 2, 2), (3, 1, 1) ও (6, –4, –6) বিন্দুগামী সমতলের কার্তেসীয় সমীকরণ হবে $x + 2y - z = 4$

6. একটি সরলরেখা (7, –3, 4) ও (2, –1, 1) বিন্দুগামী। একটি সমতলে অবস্থিত তিনটি বিন্দু হলো (3, 0, 1) (4, –1, 2) এবং (2, 1, –3)। দেখান যে ঐ সরলরেখা এবং ঐ সমতলের ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হবে (5, –2, 3)।

7. $(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$ ও $(3\vec{k} - 2\vec{j})$ এই দুটি বিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

   দেখান যে মূলবিন্দু ও $4\hat{j}$ এবং $(2\hat{i} + \hat{k})$ বিন্দুগামী সমতলকে ঐ সরলরেখাটি যে বিন্দুতে ছেদ করে তার অবস্থান ভেক্টর হবে $\frac{1}{5}(6\hat{i} - 10\hat{j} + 3\hat{k})$।

8. দেখান যে (6, –4, 4), (0, 0, –4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা (–1, –2, –3) ও (1, 2, –5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার অবস্থান ভেক্টর হবে (0, 0, –4)।

9. দেখান যে $\bar{r} = \bar{a} + t(\bar{b} + \bar{c})$ এবং $\bar{r} = \bar{b} + t(\bar{c} + \bar{a})$ এই দুটি সরলরেখা যে বিন্দুতে ছেদ করে তার অবস্থান ভেক্টর $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$।

10. একটি সমতল $\bar{r} = \bar{a} + s\bar{b}$ এবং $\bar{r} = \bar{a}' + t\bar{b}$ এই দুটি সরলরেখার সমান্তরাল। দেখান যে সমতলটির সমীকরণ হবে $\bar{r}.\{(\bar{a}' - \bar{a})\times\bar{b}\} = [\bar{a}\ \bar{a}'\ \bar{b}]$

11. দেখান যে $\bar{r} = \bar{a} + t(\bar{b} \times \bar{c})$ এবং $\bar{r} = \bar{b} + s(\bar{c} \times \bar{a})$ এই দুটি সরলরেখা ছেদ করবে যদি $\bar{a}.\bar{c} = \bar{b}.\bar{c}$ হয়। যেখানে $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ হলো তিনটি অসামতলিক ভেক্টর। দেখান যে যদি এগুলি ছেদ করে তবে ছেদ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হবে

$$\bar{r} = \frac{1}{[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}]}\{(\bar{b}.\bar{a})(\bar{b}\times\bar{c}) + (\bar{a}.\bar{b})(\bar{c}\times\bar{a}) + (\bar{a}.\bar{c})(a\times\bar{b})\}$$

12. $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{\alpha}$ এবং $\bar{r} = \bar{b} + s\bar{\beta}$ এই দুটি নৈক্যতলীয় সরলরেখার মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করুন যেখানে $\bar{a} = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = -4\bar{i} - \bar{k} - \bar{k}$, $\bar{\alpha} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$ এবং $\bar{\beta} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$. [উঃ 9 একক]

13. (– 14, 8, 6) ও (– 11, 4, 1) বিন্দুগামী সরলরেখা এবং (3, 5, 5) ও (6, 11, 8) বিন্দুগামী সরলরেখা দুটির সর্বনিম্ন দূরত্ব হবে $\frac{58}{5\sqrt{2}}$ একক এটি দেখান।

14. $\bar{r} = \bar{\alpha} + t\bar{\beta}$ এবং $\bar{r} = \bar{\gamma} + s\bar{\delta}$ সরলরেখা দুটির সর্বনিম্ন দূরত্ব m-এর সাহায্যে নির্ণয় করুন যেখানে $\bar{\alpha} = (1, 2, 3)$, $\bar{\beta} = (2, 3, 4)$, $\bar{\gamma} = (m, 3, 4)$ এবং $\bar{\delta} = (3, 4, 5)$. m-এর কোন মানের জন্য সরলরেখা দুটি সামতলিক হবে?

[উঃ $\frac{k-2}{\sqrt{6}}$, k = 2]

15. A, B, C, D চারটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে (–1, 2, –3), (–16, 6, 4), (1, –1, 3) এবং (4, 9, 7)। AB এবং CD সরলরেখা দুটির সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করুন।
[উঃ 7 একক]

16. দুটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ যথাক্রমে $\bar{r} = \bar{r}_1 + t\bar{\alpha}$, $\bar{r} = \bar{r}_2 + t\bar{\beta}$, যেখানে t একটি স্কেলার এবং $\bar{r}_1$, $\bar{\alpha}$, $\bar{r}_2$, $\bar{\beta}$ ভেক্টরগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 4, 5), (2, 1, 2), (2, 8, 11) এবং (–1, 3, 4)। দেখান যে সরলরেখা দুটি সামতলিক।

17. একটি সমতল (2, 3, –1) বিন্দুগামী এবং $(3\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k})$ এই ভেক্টরের ওপর লম্ব। সমতলটির ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন। [উঃ $\bar{r}.(3\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k}) + 13 = 0$]

18. A এবং B দুটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে (3, 1, 2) এবং (1, –2, –4)। দেখান যে B বিন্দুগামী সমতল $\overline{AB}$ ভেক্টরের ওপর লম্ব তার কার্তেসীয় সমীকরণ হবে
$2x + 3y + 6z + 28 = 0$ ।

19. $\bar{r}.(2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}) = 9$ সমতলের সঙ্গে স্থানাঙ্ক অক্ষ তিনটির ছেদিতাংশ নির্ণয় করুন।
[উঃ $\frac{9}{2}, 3, -9$]

20. দেখান যে $\bar{r}.(2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}) = 7$ এবং $\bar{r}.(3\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}) = 5$ এই সমতল দুটির মধ্যবর্তী কোণ হবে $\text{Cos}^{-1}\frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{38}}$
[সমতল দুটির লম্ব ভেক্টর গুলির স্কেলার গুণ নিতে হবে]

21. দেখান যে চারটি বিন্দু (0, –1, –1), (4, 5, 1), (3, 9, 4) এবং (–4, 4, 4) সামতলিক।

22. দেখান যে $(2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k})$ বিন্দু হতে $\bar{r}.(4\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}) = 18$ এই সমতলের ওপর লম্ব দূরত্ব হবে $\frac{20}{\sqrt{26}}$ একক।

23. দেখান যে $(\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k})$ এবং $3(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$ বিন্দু দুটি $\bar{r}.(5\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}) + 9 = 0$ এই সমতল হতে সমদূরবর্তী এবং এগুলি সমতলের বিপরীত দিকে অবস্থিত।

24. দেখান যে $\bar{r}.(\bar{b} + \bar{c}) = 0$, $\bar{r}.(\bar{c} + \bar{a}) = 0$ এবং $\bar{r}.(\bar{a} + \bar{b}) = 0$ এই সমতল তিনটি পরস্পরের উপর লম্ব।

25. $\bar{r}.(3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 1$ এবং $\bar{r}.(\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}) = 2$ এই সমতল দুটি যে সরলরেখা বরাবর ছেদ করে সেই সরলরেখার ওপর লম্ব সমতল $(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ বিন্দুগামী হলে দেখান যে ঐ সমতলের সমীকরণ হবে $\bar{r}.(-2\hat{i} + 7\hat{j} + 13\hat{k}) + 1 = 0$

26. $\bar{r}.(\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$ এবং $\bar{r}.(\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$ সমতল দুটি যে সরলরেখা বরাবর ছেদ করে সেই সরলরেখাগামী এবং (2, 1, –1) বিন্দুগামী সমতলের ভেক্টর সমীকরণ হবে
$\bar{r}.(\hat{i} + 9\hat{j} + 11\hat{k}) = 0$ দেখান।
[সূত্র সমতলটির সমীকরণ হবে $\bar{r}.(\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + \lambda\bar{r}.(\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$]

27. $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$ এই সরলরেখাগামী সমতল $\bar{r}.\bar{\delta} = q$ এই সমতলের উপর লম্ব। দেখান যে ঐ সমতলের সমীকরণ হবে $[\bar{r} - \bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{\delta}] = 0$
[সূত্র ঃ 4.4.1 অনুচ্ছেদের (খ) হতে (4) নং সমীকরণ দেখুন। সমতলটি $\bar{b}$ এবং $\bar{\delta}$ ভেক্টরের সমান্তরাল এবং নির্দিষ্ট বিন্দু A (যার অবস্থান ভেক্টর $\bar{a}$) দিয়ে যায়।]

28. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু A-এর অবস্থান ভেক্টর হলো $\bar{\alpha}$ । একটি সঞ্চরণশীল বিন্দু P-এর অবস্থান ভেক্টর হলো $\bar{r}$ ।

(i) যদি $(\bar{r} - \bar{\alpha}).\bar{\alpha} = 0$ হয় দেখান যে P, A বিন্দুগামী এবং OA-এর ওপর লম্ব সমতলে থাকবে যেখানে O হলো মূলবিন্দু।

(ii) যদি $|\bar{r} - \bar{a}| = 3$ হয় তবে দেখান P বিন্দু একটি গোলকের ওপর থাকবে যার কেন্দ্র হল A এবং ব্যাসার্ধ 3 একক।

29. PQRS একটি চতুস্তলক যার শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 0, –2), (–1, 1, 0), (2, –1, 1) এবং (0, 3, 1). P হতে QRS সমতলের ওপর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করুন।

[উঃ $\frac{11}{\sqrt{12}}$ একক]

30. দেখান যে (2, 1, 2) ও (3, –1, 4) বিন্দুগামী সরলরেখাটির (6, –4, 4) থেকে লম্ব দূরত্ব 3 একক।

31. O হলো একটি সমকোণী অক্ষগোষ্ঠীর মূলবিন্দু। O-এর সাপেক্ষে A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে (3, –2, –1), (1, 3, 4) এবং (2, 1, –2) দেখান A বিন্দু হতে OBC সমতলের ওপর লম্ব দূরত্ব 3 একক হবে।

32. O বিন্দুর সাপেক্ষে P, Q, R তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\bar{a}$, $\bar{b}$ এবং $\bar{c}$ । দেখান যে QR সরলরেখা থেকে P-এর লম্ব দূরত্ব হবে

$$\frac{|\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}|}{|\bar{b}-\bar{a}|}$$

33. O বিন্দু হতে অঙ্কিত সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট গোলককে P বিন্দুতে ছেদ করে। OP সরলরেখার ওপর Q একটি বিন্দু দেওয়া হলো। OP : OQ হলো একটি নির্দিষ্ট অনুপাত। দেখান যে Q বিন্দুর সঞ্চার পথ একটি গোলক হবে।

34. $\bar{r}.(m\hat{j} + n\hat{k}) = 0$, $\bar{r}.(n\hat{k} + l\hat{i}) = 0$, $\bar{r}.(l\hat{i} + m\hat{j}) = 0$ এবং $\bar{r}.(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}) =$ p এই চারটি সমতল দ্বারা আবদ্ধ চতুস্তলকের ঘনফল দেখান $\frac{2p^3}{3lmn}$ হবে।

35. $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$ এই গোলকের একটি স্পর্শকতল সমকোণী অক্ষগোষ্ঠী হতে a, b, c ছেদিতাংশ উৎপন্ন করলে দেখান যে $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2}$

[সূত্র ঃ স্পর্শকতলের সমীকরণ $\bar{r}.\bar{n} = p$ হলে $\frac{p}{|\bar{n}|}=d$, $\frac{p}{\bar{n}.\hat{i}}=a$; $\frac{p}{\bar{n}.\hat{j}}=b$, $\frac{p}{\bar{n}.\hat{k}}=c$]

একক — 05 : ভেক্টরের অন্যান্য প্রয়োগ (বলবিদ্যায়)

গঠন

5.1 — প্রস্তাবনা

5.2 — উদ্দেশ্য

5.3 — স্থিতিবিদ্যায় ভেক্টরের প্রয়োগ

5.4 — গতিবিদ্যায় ভেক্টরের প্রয়োগ

5.5 — বিবিধ উদাহরণ

5.6 — গতিবিদ্যায় ভেক্টরের প্রয়োগ সম্বন্ধীয় উদাহরণ সমূহ

5.7 — সারাংশ

5.8 — সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

5.1 প্রস্তাবনা :

আমরা দেখেছি যে আগের এককগুলিতে (Unit – 01, 02, 03) ভেক্টরের বিভিন্ন প্রক্রিয়াগুলির বিস্তারিত আলোচনা হয়েছে। এই প্রক্রিয়াগুলির জ্যামিতিতে প্রয়োগ (একক - 04 দেখুন) বিশেষ ভাবে আলোচনা হয়েছে। এই এককটিতে বলবিদ্যায় ভেক্টরের প্রয়োগ সম্বন্ধে বিস্তারিত ধারণা দেওয়া হলো।

আমরা জানি বল, সরণ, গতিবেগ, ভ্রামক ইত্যাদি ভেক্টর রাশি। সুতরাং এই রাশিগুলির জন্যে ভেক্টরের বিভিন্ন প্রক্রিয়াগুলি প্রযোজ্য হবে।

5.2 উদ্দেশ্য :

5.3 অনুচ্ছেদে স্থিতিবিদ্যায় ভেক্টরের প্রয়োগ দেখানো হয়েছে। I নং এককে মুক্ত ভেক্টরের ধারণা দেওয়া হয়েছে। এই অনুচ্ছেদে আবদ্ধ ভেক্টর সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে। বল যে আবদ্ধ ভেক্টর তা আলোচনা করা হয়েছে। এছাড়া এই অনুচ্ছেদে স্থিতি বিদ্যায় বিভিন্ন উপপাদ্যের ভেক্টররূপ প্রদত্ত হলো। 5.4 অনুচ্ছেদে গতিবিদ্যায় ভেক্টরের বিভিন্ন প্রক্রিয়ার প্রয়োগ দেখানো হয়েছে। ৫.৫ অনুচ্ছেদে স্থিতিবিদ্যা ও গতিবিদ্যায় ভেক্টর প্রয়োগের বিস্তারিত উদাহরণ দেওয়া হলো।

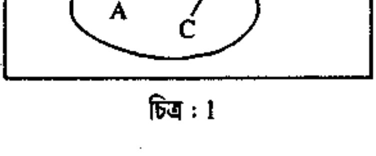
5.3 স্থিতিবিদ্যায় ভেক্টরের প্রয়োগ :

স্থিতিবিদ্যায় ভেক্টরের প্রয়োগ কিভাবে হয় তা জানতে হলে নিম্নে বর্ণিত বিশেষ তথ্যগুলি আগে জানা দরকার।

5.3.1 বল এবং আবদ্ধ ভেক্টরের ধারণা (Force and Bound Vector) :–

আমরা জানি বল একটি মান ও দিক বিশিষ্ট রাশি হওয়ায় একটি ভেক্টর দ্বারা বলকে প্রকাশ করা সম্ভব। ভেক্টরের সংজ্ঞা অনুযায়ী পূর্বে বর্ণিত I নং এককে (EMT-04, Block – I, unit – 01) মুক্ত ভেক্টরের ধারণা দেওয়া আছে। কিন্তু বলের ক্ষেত্রে একটি বিশেষ পার্থক্য আছে।

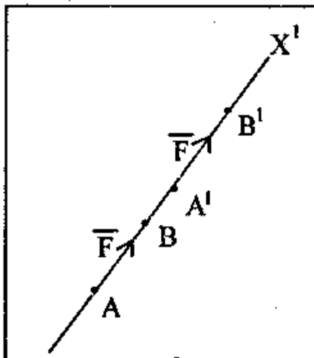
মনে করি BA বরাবর (B হতে A দিক বরাবর) F মান বিশিষ্ট একটি বল বস্তুর A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এখন বস্তুর অপর এক বিন্দু C-তে BA-র সমান্তরাল DC বরাবর F-এর সমমান ও সমদিক বিশিষ্ট বলের ক্রিয়া অবশ্যই A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল F-বলের সমতুল্য নয় কারণ দুটি ক্ষেত্রে বস্তুর সরণ একই হবে না। সুতরাং সমান্তরাল রেখা বরাবর বস্তুর বিভিন্ন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল সমমান ও সমদিক্ বিশিষ্ট বলগুলি সমতুল্য নয়। অতএব মুক্ত ভেক্টরের (free vector) ধারণা বল ভেক্টরের ক্ষেত্রে প্রজোয্য হবে না।



চিত্র : 1

বলরূপ ভেক্টরকে অবশ্যই একটি বিশেষ রেখা বরাবব হতে হবে। সেইহেতু বল ভেক্টরকে আবদ্ধ ভেক্টর বলা হয় (একটি বিশেষ রেখার ওপর আবদ্ধ)।

এখানে মনে রাখতে হবে যে রেখা বরাবর বলরূপ ভেক্টরটি আবদ্ধ সেই রেখা বরাবর মান ও দিক ঠিক রেখে কোন অবস্থানে বলটিকে প্রকাশ করা যেতে পারে (চিত্র : ২)। একে বলের সরণ যোগ্যতার নিয়ম (Principle of transmissibility) বলে। 2নং ছবিতে xx' রেখা বরাবর $\overline{AB}$ অথবা $\overline{A'B'}$ ভেক্টর দ্বারা একটি বলকে প্রকাশ করা সম্ভব যদি $\overline{AB}$ এবং $\overline{A'B'}$ সমান ও সমদিক বিশিষ্ট হয়।



চিত্র : 2

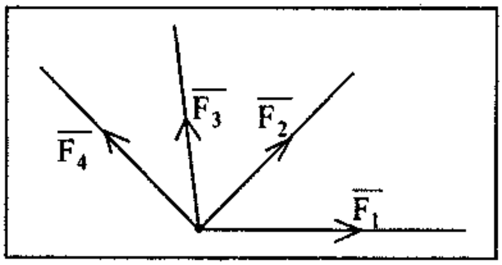
5.3.2. বল-ভেক্টর (Force vector) :

একটি প্রদত্ত বল আছে। অতএব বলের মান, দিক ও যে রেখা বারবার বলটি ক্রিয়াশীল তা প্রদত্ত আছে। এখন এই প্রদত্ত বলের সমমান ও সমদিক্ বিশিষ্ট যে কোন ভেক্টরকে বল-ভেক্টব বলা হয়।

বল-ভেক্টর বলের সমচিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অতএব একটি বলকে প্রকাশ করতে হলে উক্ত বলের বল ভেক্টর এবং বলটি যে বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তা জানতে হবে।

5.3.3. সমবিন্দুগামী বলের লব্ধি বল : (Resultant of concurrent forces) :

মনে করি $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, $\overline{F_4}$ .... একাধিক বল একই বিন্দুতে O-তে ক্রিয়াশীল।



চিত্র : 3

আমরা জানি একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বল সামন্তরিক সূত্র মেনে চলে। অতএব $\overline{F_1}$ এবং $\overline{F_2}$ বলের লব্ধি বল হবে $\overline{F_1}$ এবং $\overline{F_2}$ বল-ভেক্টরের ভেক্টর যোগফল এবং একই বিন্দুর O-তে ক্রিয়াশীল। অনুরূপে $(\overline{F_1} + \overline{F_2})$ এবং $\overline{F_3}$ বল ভেক্টরের লব্ধি বল বলের সামন্তরিক সূত্র অনুযায়ী

$(\overline{F_1} + \overline{F_2}) + \overline{F_3} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$ এবং এটিও O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এইভাবে একাধিকবার বলের সামন্তরিক সূত্র ব্যবহার করে বলা যায় O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ $\overline{F_4}$ .... বলগুলির লব্ধি বল হবে O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল একটি বল যা $(\overline{F_1} + \overline{F_2} + ...)$-এর সমান। অতএব $\overline{R}$ লব্ধি বল হলে আমরা পাই $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$ .... $= \sum \overline{F_i}$ যদি $\overline{R} = \overline{O}$ (শূন্য ভেক্টর) হলে বলগুলি সাম্যাবস্থায় (Equilbrium of forces) আছে বুঝতে হবে।

লব্ধি বল-ভেক্টর $\overline{R}$ বল-ভেক্টরগুলির যোগফল সুতরাং $\overline{R}$-কে ভেক্টরের বহুভুজ সূত্র দ্বারা প্রকাশ করা যাবে। $A_1 A_2 A_3$ .... $A_n A_{n+1}$ বহুভুজের $\overline{A_1A_2} = \overline{F_1}$, $\overline{A_2A_3} = \overline{F_2}$, $\overline{A_3A_4} = \overline{F_3}$, ... $\overline{A_nA_{n+1}} = \overline{F_n}$ হলে লব্ধি-বল-ভেক্টরকে $\overline{A_nA_{n+1}}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

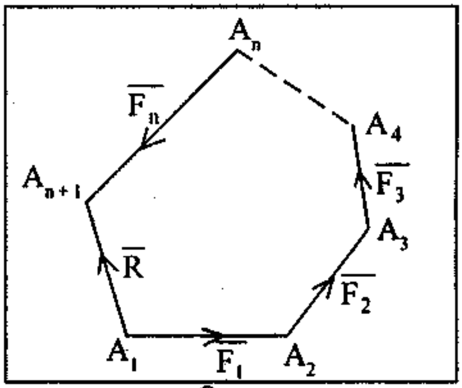
কারণ $\overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$ .... $+ \overline{F_n}$

$= \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \overline{A_nA_{n+1}}$

$= \overline{A_nA_{n+1}}$ (চিত্র — 4)

অতএব $\overline{R} = \overline{A_nA_{n+1}}$ ।

$A_1A_2A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+1}$ বহুভুজকে ভেক্টর বহুভুজ (Vector polygon) বলা হয়।



চিত্র : 4

বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকলে $\overline{R} = \overline{A_1A_{n+1}} = O$ হবে। এক্ষেত্রে ভেক্টর বহুভুজটি একটি সম্পূর্ণ বহুভুজ হবে (Complete Polygon)।

বি: দ্র: (1) ভেক্টর বহুভুজের সাহায্যে লব্ধিবলের বল-ভেক্টর $\overline{R} = \overline{A_1A_{n+1}}$ নির্ণয় করা যায়। লব্ধি বলটি যে বিন্দুতে বলগুলি ক্রিয়াশীল, সেই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হবে।

(2) ভেক্টর বহুভুজটি একটি সমতলে নাও থাকতে পারে। বলগুলি সমতলীয় হলে ভেক্টর বহুভুজটি একটি সমতলে থাকবে।

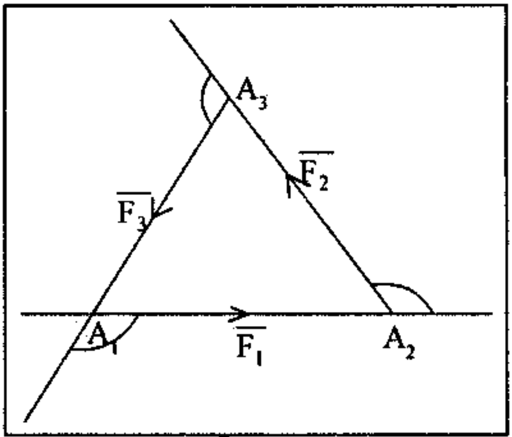
5.3.4. ল্যামির উপপাদ্য : (Lami's theorem)

কোন বস্তুর একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে বলগুলি সমতলীয় হবে এবং প্রতিটি বলের মান অপর দুইটি বলের অন্তর্গত কোণের সাইনের (sine) সঙ্গে সমানুপাতিক হবে।

প্রমাণ : মনে করি তিনটি বল $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ কোন- ও বস্তুর একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং এগুলির লব্ধিবল শূন্য ভেক্টর হবে।

অর্থাৎ $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} = O$

$\because \overline{F_3} = -\overline{F_1} - \overline{F_2}$ সুতরাং, বল তিনটি সামতলিক হবে। সুতরাং বল-ভেক্টরগুলি দ্বারা গঠিত ভেক্টর বহুভুজটি একটি সম্পূর্ণ ত্রিভুজ হবে।



চিত্র : 5

মনে করি $A_1A_2A_3$ ত্রিভুজে $\overline{A_1A_2} = \overline{F_1}$, $\overline{A_2A_3} = \overline{F_2}$, $\overline{A_3A_1} = \overline{F_3}$

$$\therefore \frac{A_1A_2}{\text{Sin}\,\angle A_1A_3A_2} = \frac{A_2A_3}{\text{Sin}\,\angle A_2A_1A_3} = \frac{A_3A_1}{\text{Sin}\,\angle A_1A_2A_3}$$

বা $$\frac{A_1A_2}{\text{Sin}(\pi-\angle A_3)} = \frac{A_2A_3}{\text{Sin}(\pi-\angle A_1)} = \frac{A_3A_1}{\text{Sin}(\pi-\angle A_2)}$$

বা $$\frac{|\overline{F_1}|}{\text{Sin}(\overline{F_2}\widehat{\ ,\ }\overline{F_3})} = \frac{|\overline{F_2}|}{\text{Sin}(\overline{F_3}\widehat{\ ,\ }\overline{F_1})} = \frac{|\overline{F_3}|}{\text{Sin}(\overline{F_1}\widehat{\ ,\ }\overline{F_2})}$$

সুতরাং ল্যামির উপপাদ্য প্রমাণিত হলো।

বিকল্প প্রমাণ : মনে করি $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ হলো যথাক্রমে $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ বল ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর।

$$\therefore \quad \overline{F_1} = |\overline{F_1}|\ \bar{a}, \quad \overline{F_2} = |\overline{F_2}|\ \bar{b}, \quad \overline{F_3} = |\overline{F_3}|\ \bar{c}$$

যেহেতু বলগুলির লব্ধিবল শূন্য-ভেক্টর সুতরাং এগুলি সাম্যবস্থায় থাকবে।

$$\therefore \quad \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} = 0$$

বা $$|\overline{F_1}|\ \bar{a} + |\overline{F_2}|\ \bar{b} + |\overline{F_3}|\ \bar{c} = O \ .... (1)$$

$\bar{a}$ দ্বারা ভেক্টর গুণ করলে

$$|\overline{F_1}|(\bar{a} \times \bar{a}) + |\overline{F_2}|(\bar{a} \times \bar{b}) + |\overline{F_3}|(\bar{a} \times \bar{c}) = O$$

বা $$|\overline{F_2}|(\bar{a} \times \bar{b}) = |\overline{F_3}|(\bar{c} \times \bar{a})$$

$$\therefore \quad \frac{|\overline{F_2}|}{|\bar{c} \times \bar{a}|} = \frac{|\overline{F_3}|}{|\bar{a} \times \bar{b}|}$$

অনুরূপে (1) নং সমীকরণে $\bar{b}$ দ্বারা ভেক্টর গুণ করলে পাওয়া যাবে $\frac{|\overline{F_1}|}{|\bar{b} \times \bar{c}|} = \frac{|\overline{F_3}|}{|\bar{a} \times \bar{b}|}$

অর্থাৎ $$\frac{|\overline{F_1}|}{|\bar{b} \times \bar{c}|} = \frac{|\overline{F_2}|}{|\bar{c} \times \bar{a}|} = \frac{|\overline{F_3}|}{|\bar{a} \times \bar{b}|}$$

বা $$\frac{|\overline{F_1}|}{\text{Sin}(\overline{F_2}\widehat{\ ,\ }\overline{F_3})} = \frac{|\overline{F_2}|}{\text{Sin}(\overline{F_3}\widehat{\ ,\ }\overline{F_1})} = \frac{|\overline{F_3}|}{\text{Sin}(\overline{F_1}\widehat{\ ,\ }\overline{F_2})}$$

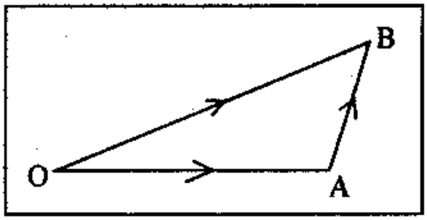
5.4 গতিবিদ্যায় ভেক্টরের প্রয়োগ :

5.4.1 : আপেক্ষিক গতিবেগ (Relative Velocity)

(ক) আপেক্ষিক অবস্থান :

দুইটি গতিশীল বিন্দুর কোনও এক সময়ে তাদের অবস্থান যথাক্রমে A ও B বিন্দু। স্থির বিন্দু (মুখবিন্দু) O-এর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ ভেক্টর।

এখন $\overline{AB}$ ভেক্টরকে A বিন্দুর সাপেক্ষে B-এর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। সুতরাং $\overline{AB}$ কে A-এর সাপেক্ষে B-এর আপেক্ষিক অবস্থান ভেক্টর বলা হবে।



চিত্র : 6

(খ) আপেক্ষিক গতিবেগ :

A-এর সাপেক্ষে B-এর আপেক্ষিক গতিবেগ হবে B-এর আপেক্ষিক ভেক্টরের সময়-হার (time-rate)।

(গ) উপপাদ্য : A-এর সাপেক্ষে B-এর গতিবেগ ভেক্টর হবে B-এর গতিবেগ ও A-এর গতিবেগের ভেক্টর বিয়োগফল যেখানে একটি স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B-এর গতিবেগ জানা আছে।

প্রমাণ : সংজ্ঞা অনুসারে

A-এর সাপেক্ষে B-এর গতিবেগ

= $\overline{AB}$ -এর সময় হার [6নং ছবি]

= ($\overline{OB}$ − $\overline{OA}$)-এর সময় হার [O স্থির বিন্দু]

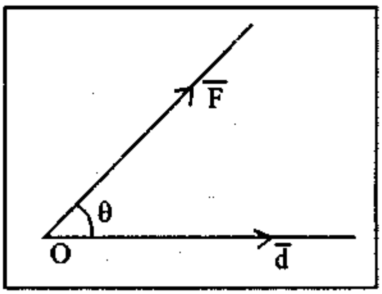
= $\overline{OB}$ -এর সময় হার − $\overline{OA}$ -এর সময় হার

= B-এর গতিবেগ ভেক্টর -এর গতিবেগ ভেক্টর :

= $\overline{\vartheta} - \overline{u}$

5.4.2 : বলদ্বারা সাধিত কার্যের পরিমাণ নির্ণয় :

আমরা জানি যদি একটি বল কোন বস্তুকণার উপর প্রযুক্ত হয় তবে ঐ বল দ্বারা সাধিত কার্যের পরিমাণ হবে বলের মান ও বলের অভিমুখে প্রয়োগ বিন্দুর সরণের গুণফল।



চিত্র . 7

মনে করি $\overline{F}$ বল ক্রিয়া করার ফলে বস্তুর সরণ ভেক্টর হলো $\overline{d}$ । $\overline{F}$ এবং $\overline{d}$ ভেক্টরের অন্তবর্তী কোণ θ হলে

কার্যের পরিমাণ $= |\overline{F}|\ |\overline{d}|\ \text{Cos}\theta$

$= \overline{F} \cdot \overline{d}$ । সুতরাং এটি একটি স্কেলার রাশি।

অনুসিদ্ধান্ত – (1) : যদি $\overline{d}$ এবং $\overline{F}$ পরস্পরের ওপর লম্ব হয় তবে $\overline{F} \cdot \overline{d} = O$ হবে। এক্ষেত্রে কোনও কার্য সাধিত হবে না।

অনুসিদ্ধান্ত – (2) : একটি বিন্দুতে একাধিক বল $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}, \ldots\ldots\ldots \overline{F_n}$ ক্রিয়াশীল হয় এবং বিন্দুটির সরণ ভেক্টর $\overline{d}$ হলে মোট কার্যের পরিমাপ হবে বলগুলির লব্ধি-বল ভেক্টর এবং বিন্দুটির সরণ ভেক্টরের স্কেলার গুণফল অর্থাৎ কার্যের পরিমাণ = $\overline{F_1} \cdot \overline{d} + \overline{F_2} \cdot \overline{d} + \overline{F_3} \cdot \overline{d} + \overline{F_4} \cdot \overline{d} + \overline{F_n} \cdot \overline{d}$

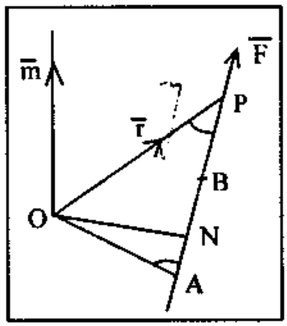
$= \overline{F} \cdot \overline{d}$

যেখানে $\overline{F} = (\overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \overline{F_n})$

= লব্ধি বল।

5.4.3 : ভ্রামক :

(ক) **একটি স্থির বিন্দুর চারিদিকে একটি বলের ভ্রামক:**



চিত্র : ৪

মনে করি O একটি স্থির বিন্দু। $\overline{F}$ বল P বিন্দুতে প্রযুক্ত হলো। O-এর সাপেক্ষে P-এর অবস্থান ভেক্টর হইল $\overline{r}$ । সুতরাং P বিন্দু $\overline{F}$-এর ক্রিয়া রেখায় অবস্থিত। O-বিন্দুর চারিদিকে $\overline{F}$ বলের ভ্রামক $\overline{m}$ একটি ভেক্টর রাশি এবং $\overline{m} = \overline{r} \times \overline{F}$ ।

O বিন্দু এবং $\overline{F}$-এর ক্রিয়ারেখা যে সমতলে অবস্থিত $\overline{m}$ ভেক্টর সেই তলের উপর লম্ব হবে

$\overline{m}$ এবং $\overline{F}$ পরস্পর লম্ব।

$\therefore\ \overline{m} \cdot \overline{F} = O$ (শূন্য ভেক্টর)

এখন $|\overline{m}| = |\overline{r} \times \overline{F}|$

$= |\overline{r}|\ |\overline{F}|\ \text{Sin}\ \angle OPN$

$= |\overline{r}|\ |\overline{F}|\ \text{Sin}\,\theta$

$= |\overline{F}|\ OP\ \text{Sin}\,\theta$

$= |\overline{F}|\ ON$

যেখানে ON = O বিন্দু হতে $\bar{F}$ বলের ক্রিয়ারেখার ওপর লম্ব।

$\therefore$ $|\bar{m}|$ হলো ভ্রামকের মান।

অনুসিদ্ধান্ত – (1) : যদি বহুসংখ্যক বল $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots\ldots\ldots \overline{F_n}$ একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হয় তবে একটি প্রদত্ত বিন্দুর চারিদিকে বল সমূহের ভ্রামকের যোগফল তাদের লব্ধি বলের ভ্রামকের সমান হবে।

$$\therefore \quad \bar{m} = \bar{r} \times \bar{F}$$

$$= \bar{r} \times (\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots\ldots\ldots \overline{F_n}) \qquad [\bar{F} \text{ হলো তাদের লব্ধি বল }]$$

$$= \bar{r} \times \overline{F_1} + \bar{r} \times \overline{F_2} + \bar{r} \times \overline{F_3} + \ldots\ldots\ldots + \bar{r} \times \overline{F_n}$$

[এটিভ্যারিগনন্-এর উপপাদ্য] (Varignon's theorem)

অনুসিদ্ধান্ত – 2 : $\bar{F}$ বলের ভ্রামক P বিন্দুর অবস্থানের ওপরে নির্ভর করে না।

ধরি A এবং B বিন্দুদুটি $\bar{F}$ বলের ক্রিয়ারেখার উপরে নেওয়া হল।

$$\therefore \quad \overline{OB} \times \bar{F} = (\overline{OA} + \overline{AB}) \times \bar{F}$$

$$= \overline{OA} \times \bar{F} + \overline{AB} \times \bar{F}$$

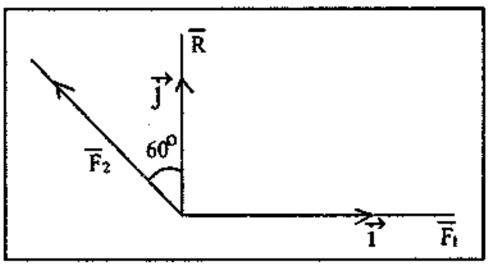
কিন্তু $\overline{AB} \times \bar{F} = O$ যেহেতু $\overline{AB}$ এবং $\bar{F}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

$$\therefore \quad \overline{OB} \times \bar{F} = \overline{OA} \times \bar{F}$$

সুতরাং O বিন্দুর চারিদিকে $\bar{F}$ বলের ভ্রামক $\bar{F}$ এর ক্রিয়ারেখার ওপর যে কোনও বিন্দুর জন্য একই হবে।

5.5 স্থিতিবিদ্যায় ভেক্টরের প্রয়োগ সম্বন্ধীয় বিভিন্ন উদাহরণ সমূহ

উদাহরণ – 1 : $\overline{F_1}$ এবং $\overline{F_2}$ বলের লব্ধি $\bar{R}$। $\overline{F_1}$ অনুভূমিক ও $\bar{R}$ উলম্ব দিক বরাবর এবং $\overline{F_2}$ বলটি $\bar{R}$-এর যেদিকে $\overline{F_1}$ আছে তার বিপরীত দিকে $\bar{R}$-এর সঙ্গে 60° কোণে নত। $\bar{R}$-এর মানের সাপেক্ষে $\overline{F_1}$ এবং $\overline{F_2}$-এর মান নির্ণয় করুন।



চিত্র : 9

সমাধান — মনে করি $\hat{i}$ এবং $\hat{j}$ যথাক্রমে অনুভূমিক ও উলম্ব দিক বরাবর একক ভেক্টর। সুতরাং $\overline{F_1} = |\overline{F_1}| \vec{i}$, $\bar{R} = |\bar{F}| \vec{j}$

$\overline{F_2} = |\overline{F_2}| \text{Cos}(90^\circ + 60^\circ) + |\overline{F_2}| \text{Sin}(90^\circ + 60^\circ)$

$= \quad -|\overline{F_2}|\frac{\sqrt{3}}{2}\text{i} + |\overline{F_1}|\frac{\text{i}}{2}$

যেহেতু $\overline{R}$, $\overline{F_1}$ এবং $\overline{F_2}$ এর লব্ধি বল সুতরাং $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$

$\therefore \quad |\overline{R}|\vec{J} = |\overline{F_1}|\vec{i} - |\overline{F_2}| \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i} + |\overline{F_2}| \frac{\vec{i}}{2}$

$\therefore \quad |\overline{R}| = \frac{1}{2} |\overline{F_2}|$ .... (1)

এবং $|\overline{F_1}| - |\overline{F_2}| \frac{\sqrt{3}}{2} = O \quad \therefore \quad |\overline{F_1}| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\overline{F_2}|$

$\therefore \quad |\overline{F_1}| = |\overline{F_2}| \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; 2 \, |\overline{R}| = \sqrt{3} \, |\overline{R}|$

$|\overline{F_2}| = 2 \, |\overline{R}|.$

উদাহরণ – 2 $\quad \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$ বলগুলি O বিন্দুতে বিভিন্ন দিকে ক্রিয়াশীল এবং সাম্যাবস্থায় আছে। একটি সরলরেখা বল তিনটির ক্রিয়াশীল রেখা গুলিকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন যে

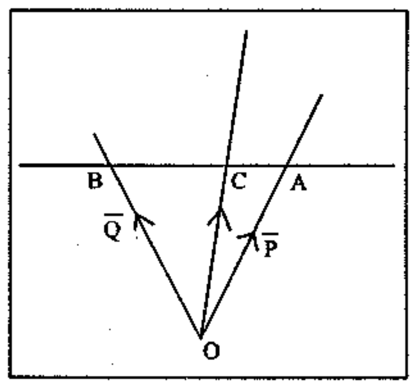
$$\frac{|\overline{P} \cdot|}{\cdot OA} + \frac{|\overline{OQ}|}{OB} + \frac{|\overline{R}|}{OC} = O$$

সমাধান — মনে করি $\overline{P} = x\,\overline{OA}$, $\overline{Q} = y\,\overline{OB}$, $\overline{R} = Z\,\overline{OC}$ .... (i) যেখানে x, y, z তিনটি স্কেলার।

যেহেতু বল তিনটি একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং সাম্যাবস্থায় আছে

$\therefore \quad \overline{P} + \overline{Q} + \overline{R} = \overline{O}$

বা $\quad x\,\overline{OA} + y\,\overline{OB} + z\,\overline{OC} = \overline{O}$ .... (ii)



চিত্র : 10

A, B, C তিনটি বিন্দু সমরেখীয় হওয়ায় (ii)-এর স্কেলার তিনটির যোগফল শূন্য হবে অর্থাৎ

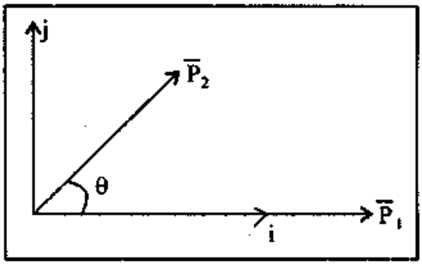
$x + y + z = O$

$\therefore \quad \frac{|\overline{P}|}{OA} + \frac{|\overline{Q}|}{OB} + \frac{|\overline{R}|}{OC} = O \qquad$ [(i) নং কে ব্যবহার করে]

উদাহরণ – 3 দেখান যে $\overline{P_1}$ ও $\overline{P_2}$ দুটি বলের লব্ধি বলের মান হবে

$(\bar{P}_1^2 + \bar{P}_2^2 + 2\bar{P}_1 . \bar{P}_2 . \cos\theta)^{1/2}$ । যেখানে বল দুটির ক্রিয়া রেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ

মনে করি $\vec{i}$ এবং $\vec{j}$ দুটি পরস্পরের লম্ব একক ভেক্টর যেখানে $\overline{P_1}$ -এর ক্রিয়ারেখার দিকে i ভেক্টর আছে।



$\therefore \quad \overline{P_1} = |\overline{P_1}| = p_1\vec{i} \quad [\,|\overline{P_1}| = p_1\vec{j}$

$\overline{P_2} = |\overline{P_2}|\,\text{Cos}\,\theta\,\vec{i} + |\overline{P_2}|\,\text{Sin}\,\theta\,\vec{i}$

$= p_2\,\text{Cos}\,\theta\,\vec{i} + p_2\,\text{Sin}\,\theta\,\vec{J}$

$[\,|\overline{P_2}| = p_2\,]$

চিত্র : 11

যদি $\bar{R}$ ভেক্টর তাদের লব্ধি বল ভেক্টর হয় তবে $\bar{R} = \overline{P_1} + \overline{P_2}$

$= p_1\vec{i} + p_2\,\text{Cos}\,\theta\,\vec{J} + p_2\,\text{Sin}\,\theta\,\vec{J}$

$= (p_1 + p_2\,\text{Cos}\,\theta)\,\vec{i} + p_2\,\text{Sin}\,\vec{J}$

$\therefore\ |\bar{R}| = \sqrt{(p_1 + p_2\,\text{Cos}\theta)^2 + P_2^2\,\text{Sin}^2\theta}$

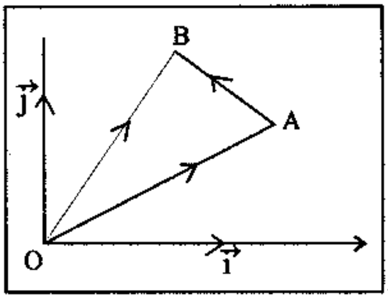
$= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\,\text{Cos}\theta}$

$= \left(|\overline{P_1}|^2 + |\overline{P_2}|^2 + 2|\overline{P_1}||\overline{P_2}|\,\text{Cos}\theta\right)^{1/2}$

5.6 গতিবিদ্যায় ভেক্টরের প্রয়োগ সম্বন্ধীয় উদাহরণ সমূহ :

উদাহরণ 1. A-এর প্রকৃত গতিবেগ $x\vec{i} + y\vec{j}$ এবং B-এর প্রকৃত গতিবেগ $u\vec{i} + \upsilon\vec{J}$ হলে A-এর সাপেক্ষে B-এর গতিবেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান :



চিত্র : 12

$\overline{AB}$ = A - এর সাপেক্ষে B-এর গতিবেগ

$\overline{OA} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$\overline{OB} = u\hat{i} + \upsilon\hat{j}$

$\therefore \quad \overline{AB} = (u\vec{i} + \upsilon\hat{j})$

$= (u+x)\,\hat{i}\,\square\!-(\upsilon - y)\hat{j}$

উদাহরণ 2. নদীতে জলের গতিবেগের সাপেক্ষে নৌকার গতিবেগ $3\vec{i} + 5\vec{j}$ এবং জলের গতিবেগ পৃথিবীর গতিবেগের সাপেক্ষে $\vec{i} - \vec{j}$ । পৃথিবীর গতিবেগের সাপেক্ষে নৌকার গতিবেগ নির্ণয় করুন। $\hat{i}$ এবং $\hat{j}$ যথাক্রমে পূর্ব ও উত্তর দিকে ঘণ্টায় 1 কিলোমিটার গতিবেগ ভেক্টর।

সমাধান : মনে করি পথিবীর গতিবেগ $= \bar{u}$

জলের গতিবেগ $= \bar{v}$

নৌকার গতিবেগ $= \bar{w}$

অতএব জলের গতিবেগ ভেক্টর পৃথিবীর গতিবেগের সাপেক্ষে $= \bar{v} - \bar{u} = \hat{i} - \hat{j}$ ....(i)

আবার নৌকার গতিবেগ ভেক্টর জলের গতিবেগের সাপেক্ষে $= \bar{w} - \bar{v} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$ .... (ii)

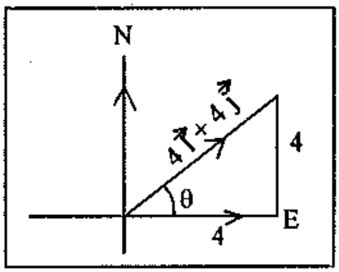
সুতরাং নৌকার গতিবেগ ভেক্টর পৃথিবীর

গতিবেগের সাপেক্ষে $= \bar{w} - \bar{u}$

$= (\bar{w} - \bar{v}) + (\bar{v} - \bar{u})$

$= (3\hat{i} + 5\hat{j}) + (\hat{i} - \hat{j})$

$= 4\hat{i} + 4\hat{j}$



চিত্র : 13

$\therefore$ নির্ণেয় গতিবেগের মান $= \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ কিলোমিটার প্রতি ঘণ্টায়

এবং গতিবেগের দিক উত্তর বা পূর্ব দিকের সঙ্গে θ কোণে নত হলে

$$\tan\theta = \frac{4}{4} = 1 = \tan\frac{\Pi}{4}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\Pi}{4} = 45^\circ$$

উদাহরণ 3. এক ব্যক্তি প্রতি ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার বেগে পূর্বদিকে ধাবমান হলে বায়ু সোজাসুজি উত্তর দিক হতে আসছে বোধ হয়। ব্যক্তিটি গতিবেগ দ্বিগুণ করলে বায়ু উত্তর-পূর্ব দিক্ হতে আসছে বোধ হয়।

বায়ুর প্রকৃত গতিবেগ এবং তার দিক্ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনেকরি $\hat{i} - \hat{j}$ হলো যথাক্রমে পূর্ব এবং উত্তরদিকে 6 কিলোমিটার/ঘণ্টায় গতিবেগ ভেক্টর।

মনেকরি বায়ুর প্রকৃত গতিবেগ ($\hat{i} - \hat{j}$ সমতলে) হলো $(x\hat{i} + y\hat{j})$ যেখানে x, y দুটি স্কেলার।

সুতরাং ব্যক্তিটির সাপেক্ষে বায়ুর গতিবেগ হলো বায়ু এবং ব্যক্তিটির গতিবেগের লব্ধি গতিবেগ

$= \quad (x\hat{i} + y\hat{j}) \square - \hat{i}$ [ব্যক্তির গতিবেগ $N = -\hat{i}$]

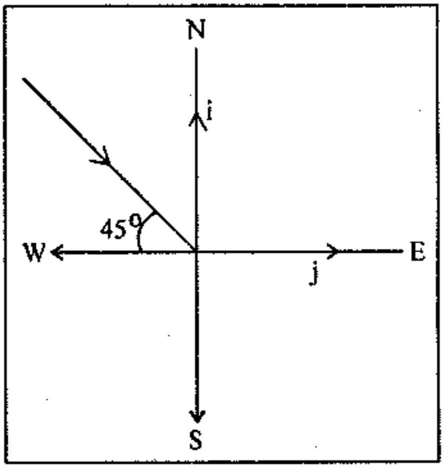
$= \quad (x-1)\hat{i} + y\hat{i}$

কিন্তু মনে হচ্ছে যেন বায়ু উত্তর দিক হতে বইছে।

$\therefore$ লব্ধি গতিবেগ $= -a\hat{j}$

$\therefore \quad (x-1)\hat{i} + y\hat{j} = -a\hat{j}$

$\therefore \quad x - 1 = 0,\ y = -a. \quad \therefore\ x = 1$



চিত্র : 14

আবার যদি ব্যক্তিটি তার গতিবেগ দ্বিগুণ করে অর্থাৎ $-2\hat{i}$ হয় তবে ব্যক্তির গতিবেগ ও বায়ুর গতিবেগের লব্ধি গতিবেগ ভেক্টর হবে

$(x\hat{i} + y\hat{j}) - 2\hat{i} \ = \ (x-2)\hat{i} + y\hat{j}$

এক্ষেত্র মনে হচ্ছে যেন বায়ু - উত্তর - পূর্ব দিক থেকে বইছে। $\therefore$ যদি গতিবেগ হবে $-b\,(\vec{i} + \vec{j})$

[$\theta = 45^\circ$, উত্তর-পূর্ব দিকে একক ভেক্টর হলো $\hat{i} + \hat{j}$]

$\therefore \qquad (x-2)\hat{i} + y\hat{j} = -b\,(\hat{i} + \hat{j})$

$\therefore \qquad x - 2 = -b, \ \ y = -b$

$\therefore \qquad x = 2 - b, y = -b$

$x = 1$ বসিয়ে $b = 1 \quad \therefore\ y = -1$

সুতরাং বায়ুর প্রকৃত গতিবেগ ভেক্টর $= x\hat{i} + y\hat{j} \ = \ \hat{i} - \hat{j}$

এর মান $= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

এবং পূর্ব বা উত্তরদিকের সঙ্গে 45° কোণে নত।

উদাহরণ 4 একটি বল $\overline{F} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ প্রয়োগের ফলে একটি কর্ণার একটি সরলরেখার দিকে $(3, 2, -1)$ থেকে $(2, -1, 4)$ বিন্দুতে সরণ হয়। $\overline{F}$ বলদ্বারা কৃত কার্যের পরিমাপ নির্ণয় করুন।

সমাধান এখানে সরণ $= \overline{d} = (2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}) - (3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = (-\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k})$

$\overline{F} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

$\therefore$ কৃতকার্য = $\overline{F} \cdot \overline{d}$

$= (4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}).(-\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k})$

$= -4 + 9 + 10 = 15$ কার্যের একক।

উদাহরণ 5 একটি কণার ওপর দুটি বল $(4\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ ও $(3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ প্রয়োগের ফলে কণাটি $(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ বিন্দু হতে $(5\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হলো।

বলগুলি দ্বারা মোট কৃতকার্যের পরিমাপ নির্ণয় করুন।

সমাধান মনে করি $\overline{F_1} = 4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

$\overline{F_2} = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ লব্ধি বল ভেক্টর $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$

$= (4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) + (3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$

$= 7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

কণাটির সরণ $\overline{d} = (5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}) - (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$

$= 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

$\therefore$ নির্ণেয় কৃতকার্য = $\overline{R} \,.\, \overline{d}$

$= (7\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}).(4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k})$

$= 28 + 4 + 16$

$= 48$ কার্যের একক

উদাহরণ 6 15 এককের একটি বল একটি কণাতে প্রয়োগের ফলে কণাটি (1, 1, 1) বিন্দু হতে (2, 1, 3) বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়। যদি বলের ক্রিয়া রেখা $\vec{i} + 2\vec{i} + 2\vec{k}$ ভেক্টর হয় তবে বলের দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাপ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর হলো $\dfrac{\vec{i} \quad \vec{j} + 2\,\vec{k} + 2}{\sqrt{1+4+4}}$

$\underline{\vec{i}} \quad \vec{j} \quad \dfrac{+\vec{k}2 \quad +2}{3}$

সুতরাং বল ভেক্টর $\overline{F_1} = 15 \,.\, \left(\dfrac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}\right)$

$$= 5(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

কণাটির সরণ $\overline{d} = (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) - (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

$$= \vec{i} + 2\vec{k}$$

$\therefore$ নির্ণেয় কৃতকার্য $= \overline{F} \cdot \overline{d}$

$$= 5(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) . (\vec{i} + 2\vec{k})$$

$$= 5 + 20$$

$= 25$ কার্যের একক।

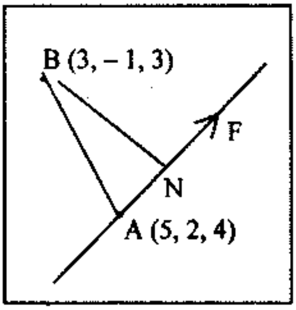
উদাহরণ 7. একটি বল $\overline{F}$ (4, 2, 1) একটি বিন্দু A (5, 2, 4)-এর মধ্যে দিয়ে যায়। B (3, –1, 3) বিন্দুর চারিদিকে $\overline{F}$ বলের ভ্রামক নির্ণয় করুন।

সমাধান : যদি $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ পরস্পরের ওপর লম্ব এবং একক ভেক্টর হয় তাহলে B বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হলো

$$\overline{r} = \overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB}$$

যেখানে $\overline{OA} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$$\overline{OB} = 3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$



চিত্র : 15

$$\therefore \quad \overline{r} = (5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}) - (3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}, \quad \overline{F} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + \vec{k}$$

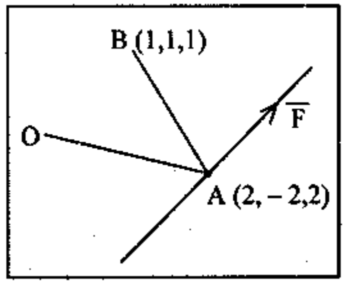
সুতরাং নির্ণেয় ভ্রামক হলো $\overline{r} \times \overline{F}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

উদাহরণ 8 $(2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ বিন্দুগামী ও 15 এককের একটি বল $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এই ভেক্টরের দিকে ক্রিয়া করে। $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ বিন্দুর চারিদিকে বলটির ভ্রামক নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= 2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ $\overline{F}$ বল ভেক্টরের মান = 15 একক $\overline{F}$ বলের ক্রিয়া রেখা $(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$-এর দিকে আছে।



চিত্র : 16

সুতরাং $\overline{F}$- এর ক্রিয়ারেখার দিকে একক ভেক্টর হলো

$$\frac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \left(\frac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}\right)$$

$$\therefore \quad \overline{F} = 15 \cdot \left(\frac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}\right) = 5(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

মনে করি B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} = \overline{OB}$

$\therefore$ B বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \bar{r}$

$$\therefore \quad \vec{r} = \overline{BA} = (\overline{OA} - \overline{OB})$$

$$= (2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) - (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$= \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভ্রামক $= \bar{r} \times \overline{F}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & -10 & 10 \end{vmatrix} = -20\vec{i} - 5\vec{j} \;\; 5\vec{k}$$

5.7 সারাংশ :

(i) ল্যামির উপপাদ্যের (Lami's Theorem) গাণিতিক রূপটি হলো

$$\frac{|\overline{F_1}|}{\text{Sin}\left(\overline{F_2} \wedge \overline{F_3}\right)} = \frac{|\overline{F_2}|}{\text{Sin}\left(\overline{F_3} \wedge \overline{F_1}\right)} = \frac{|\overline{F_3}|}{\text{Sin}\left(\overline{F_1} \wedge \overline{F_2}\right)}$$

(ii) ধরুন $\overrightarrow{F}$ বল ক্রিয়া করার ফলে বস্তুর সরণ ভেক্টর $\vec{d}$ এবং $\overrightarrow{F}$ ও $\vec{d}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে কার্যের পরিমাণ হবে $|\overrightarrow{F}|\ |\vec{d}|\ \text{Cos}\ \theta = \overrightarrow{F}.\vec{d}$

(iii) ভ্রামকের মান

$|\vec{m}| = |\overrightarrow{F}|\ ON$

যেখানে ON = O বিন্দু থেকে $\overrightarrow{F}$ বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব।

5.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী :

1। মূল বিন্দুতে স্থাপিত একটি কণার ওপর তিনটি বল $(\hat{i}+\hat{k}-2\hat{i})$, $(\hat{k}+\hat{i}-2\hat{j})$, $(\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ প্রযুক্ত হলো। বলগুলির লব্ধি বল নির্ণয় করুন। [উঃ $\overline{R} = O$]

2। দুইটি সমবিন্দুবল n $\overline{OA}$ এবং n $\overline{OB}$ দ্বারা প্রকাশ করা গেলে দেখান যে তাদের লব্ধি বল হবে $(m+n)\ \overline{OR}$ যেখানে R বিন্দু $\overline{AB}$ কে m : n অনুপাতে বিভক্ত করে এবং O হলো মূল বিন্দু।

3। ABCD চতুর্ভুজে $\overline{AB}$ এবং $\overline{AD}$ বল দুটি A বিন্দুতে এবং $\overline{CD}$ ও $\overline{CB}$ বল দুটি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। দেখান যে লব্ধি বল ভেক্টরটি হবে 4 $\overline{LM}$, L এবং M যথাক্রমে $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ -এর মধ্যবিন্দু।

4। ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ (regular hexagon)। পাঁচটি বল $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ ও $\overline{AF}$ A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। দেখান যে তাদের লব্ধি বল হবে 6 $\overline{AO}$, যেখানে O বিন্দুটি হলো ষড়ভুজের ভরকেন্দ্র।

5। ABCDE একটি পঞ্চভুজের (pentagon) $\overline{AB}$, $\overline{AE}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{ED}$ ও $\overline{AC}$ বলগুলি একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। দেখান যে তাদের লব্ধি বল হবে 3 $\overline{AC}$ ।

6। D, E, F যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করুন $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ এবং $\overline{OC}$ বলগুলি $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ এবং $\overline{OF}$ বলগুলির সমতুল্য। O বিন্দুটি ABC সমতলে অবস্থিত।

7। একটি বস্তুকণার ওপর $(5\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$ এবং $(2\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})$ দুটি বল প্রযুক্ত হলো এবং এর ফলে কণাটি মূলবিন্দু হতে $(4\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})$ বিন্দুতে যায়। দেখান যে বলগুলির দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাপ হলো 35 একক।

8। একটি কণার ওপর $(2\vec{i}+3\hat{j}-\hat{k})$ এবং $(3\hat{i}-\hat{j}-5\vec{k})$ এই দুটি বল প্রযুক্ত হলে কণাটি A (1, 3, 2) বিন্দু হতে B (4, 5, –1) বিন্দুতে সরে যায়। দেখান যে ঐ বলগুলির দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাপ হবে 7 একক।

9। 6, 7, 2 পাউন্ডের তিনটি বল যথাক্রমে (6, 2, 3), (3, –2, 6), (2, –3, –6) ভেক্টর বরাবর ক্রিয়াশীল। এই তিনটি বল একটি কণাতে প্রযুক্ত হলে কণাটি (2, –1, –3) বিন্দু হতে (5, –1, 1) বিন্দুতে সরে যায়।

দেখান যে ঐ বলগুলির দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাপ হলো $53\frac{4}{7}$ ফুট - পাউন্ড, যখন দৈর্ঘ্যের একক হলো 1 ফুট।

10। একটি বল ভেক্টর $(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$ একটি বিন্দু $(3\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k})$ দিয়ে ক্রিয়াশীল। $(2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})$ বিন্দুর চারিদিকে ঐ বলটির ভ্রামক দেখান $(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})$ হবে।

11। 15 এককের একটি বল $(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$ ভেক্টর বরাবর $(2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$ বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। $(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ বিন্দুর চারিদিক ঐ বলটির ভ্রামক নির্ণয় করুন।

[উঃ $-20\hat{i}-5\hat{j}+5\hat{k}$]

একক 6 ❑ ভেক্টরের ডেরিভেটিভ বা অবকল (Vector Differentiation)

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

6.2 উদ্দেশ্য

6.3 ভেক্টর ফাংশন

6.4 ভেক্টর ফাংশনের লিমিট বা সীমা ও সান্তত্য

6.4.1 সীমা বিষয়ক কতিপয় উপপাদ্য ও প্রমাণ

6.4.2 সান্তত্য বিষয়ক কতিপয় উপপাদ্য

6.5 ভেক্টরের অবকল

6.5.1 অবকলযোগ্য ফাংশনের সহিত সান্তত্যের সম্পর্ক

6.6 ভেক্টরের অবকলের কতিপয় সূত্র

6.7 ধ্রুবক ভেক্টরের অবকল

6.7.1 ধ্রুবক ভেক্টরের অবকলজ সংক্রান্ত আরও কিছু উপপাদ্য

অনুশীলনী - 1

6.8 ভেক্টরের আংশিক অবকলজ

6.9 জ্যামিতিতে ডেরিভেটিভের প্রয়োগ

6.9.1 বক্রতা, টরশন ইত্যাদির অন্য সূত্রাবলী

অনুশীলনী - 2

6.10 সারাংশ

6.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

6.12 উত্তরমালা (সংকেত সহ)

6.1 প্রস্তাবনা

এই এককে আমরা ভেক্টর ফাংশন, ফাংশনের লিমিট্, সান্ততা ডেরিভেটিভ ইত্যাদি বিষয় নিয়ে আলোচনা করব। একটি স্কেলার ফাংশনের লিমিট্, সান্তত্য, ডেরিভেটিভ ও তাদের বিভিন্ন ধর্ম নিয়ে যেভাবে ব্যাখ্যা দেওয়া হয় ভেক্টর ফাংশনের ক্ষেত্রেও অনেকাংশেই অনুরূপভাবে বিষয়গুলি বিশ্লেষণ করা হয়। কয়েকটি ধাপে আমরা উপরোক্ত বিষয়গুলি নিয়ে এবং তাদের প্রয়োগ নিয়ে বিশদভাবে আলোচনা করব।

প্রকৃতপক্ষে ডেরিভেটিভ হল তাৎক্ষণিক (Instantaneous) পরিবর্তনের হার। এই ভাবনার ফলশ্রুতি হিসাবে জ্যামিতি, গতিবিদ্যা, ইলেকট্রো ম্যাগনেটিক্ থিওরি (Electromagnetic theory) ইত্যাদি গাণিতিক শাখায় ভেক্টর ডেরিভিটিভের সফল প্রয়োগ সম্ভব হয়েছে। গণিতের এইসব উচ্চতর শাখায় জ্ঞান অর্জনের সুবিধার জন্য প্রাথমিকভাবে ভেক্টর ডেরিভেটিভ সংক্রান্ত কিছু আলোচনা এই এককে করা হবে।

6.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি

- ভেক্টর ফাংশন (অপেক্ষক) সম্বন্ধে ধারণা করতে পারবেন
- ভেক্টর ফাংশনের সীমা, সান্তত্যর সংজ্ঞা এবং বিভিন্ন ধর্ম নির্দেশ করতে সক্ষম হবেন
- ভেক্টর ফাংশনের ডেরিভেটিভের (অবকলজ) সংজ্ঞা ও তার ধর্মসমূহ বিবৃত করতে পারবেন
- ভেক্টরের আংশিক অবকলজ সম্বন্ধে বুঝিয়ে দিতে পারবেন
- ডেরিভেটিভের জ্যামিতিক প্রয়োগ দেখাতে পারবেন, এবং বক্ররেখার স্পর্শক, লম্ব, বক্রতা, টরশন, ইত্যাদি ভেক্টরের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

6.3 ভেক্টর ফাংশন (Vector function)

ধরা যাক t একটি স্কেলার চলরাশি (Scalar variable) এবং $\bar{r}$ একটি ভেক্টর রাশি। এই স্কেলার চলরাশি t এর জন্য নির্ধারিত বাস্তব সংখ্যার কোনো অন্তরাল (Interval) [a,b] থেকে নেওয়া t এর প্রতিটি মানের জন্য যদি কোনো একটি সম্পর্ক থেকে $\bar{r}$ এর নির্দিষ্ট মান ও দিক পাওয়া যায় তবে $\bar{r}$ কে t স্কেলারের ভেক্টর ফাংশন বলা হয়।

সাধারণভাবে সম্পর্কটিকে $\bar{r} = \bar{f}(t)$ এই আকারে প্রকাশ করা হয়। আবার যদি ত্রিমাত্রিক দেশে কার্তিয় অক্ষ ত্রয় X, Y ও Z বরাবর একক ভেক্টর সমূহ যথাক্রমে $\bar{i}, \bar{j}$ ও $\bar{k}$ হয় তবে $\bar{f}(t)$-কে উক্ত অক্ষত্রয় বরাবর উপাংশে বিভাজন করে লিখলে

$$\bar{r} = f_1(t)\,\bar{i} + f_2(t)\,\bar{j} + f_3(t)\,\bar{k}$$

এই ভাবেও একটি ভেক্টর ফাংশনকে প্রকাশ করা যায়। এখানে $f_1(t), f_2(t)$ ও $f_3(t)$ ফাংশন তিনটি t-এর স্কেলার ফাংশন, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ এগুলি ধ্রুবক একক ভেক্টর।

উদাহরণ : ধরা যাক্ ত্রিমাত্রিক দেশে অবস্থিত কোন বক্রের (Curve) উপর চলমান বিন্দু P -এর কোনো একটি অবস্থানের কার্তিয় স্থানাংক $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$। তাহলে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর (Position vector) $\bar{r}$ -কে

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\,\bar{i} + f_2(t)\,j + f_3(t)\bar{k}$$

আকারে লেখা হয়। এখানে t একটি প্রচল (Parameter) এবং f_1, f_2 ও f_3 স্কেলার ফাংশন তিনটি t-এর উপর নির্ভরশীল। P-এর স্থানাঙ্ক (x,y,z) লিখলে $x = f_1(f),\ y = f_2(f)\ \ z = f_3(f)$

যেমন, $\bar{r}(t) = a\cos t\bar{i} + b\sin t\bar{j} + o\bar{k}$ হল xy -তলে একটি উপবৃত্তের ভেক্টর সমীকরণ, যার কার্তিয় রূপ $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \ z = 0$ ।

কারণ P -এর স্থানাঙ্ক x,y,z হলে $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ z = 0$

ভেক্টর অপেক্ষক বহুচল বিশিষ্ট হতে পারে। কোন ভেক্টর $\bar{f}$ যদি u,v,w ইত্যাদি একাধিক স্কেলারের উপর নির্ভরশীল হয়, তবে $\bar{f}$ -কে আমরা বহুচলের ভেক্টর ফাংশন বলি।

6.4 ভেক্টর ফাংশনের লিমিট্ বা সীমা ও সান্তত্য (Limit and Continuity of a vector function)

সংজ্ঞা : যদি একটি ভেক্টর $\bar{\ell}$ এমন থাকে এবং পূর্বনির্ধারিত খুব ছোট (যতটা সম্ভব) ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর জন্য যদি ℓ -এর উপর নির্ভরশীল আর একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যায়, যাতে

$$\left|\vec{f}(t) - \bar{\ell}\right| < \varepsilon \text{ যখন } |t - t_0| < \delta$$

হয়; তখন t স্কেলার রাশি চলরাশির t_0 মানের সমীপগামী হওয়ার জন্য $\bar{\ell}$-কে বলা হয় $\bar{f}(f)$-এর লিমিট বা সীমা। সাধারণত $\lim_{t \to t_0} \bar{f}(t) = \bar{\ell}$

এইভাবে উপরোক্ত সংজ্ঞার প্রকাশ করা হয়।

উপরোক্ত সংজ্ঞায় যদি $\bar{\ell} = \bar{f}(t_0)$ হয় তবে $f(t)$-কে $t = t_0$ মানেতে সন্তত (Continuous) বলা হয়।

6.4.1 সীমা বিষয়ক কতিপয় উপপাদ্য ও প্রমাণ (Some theorems on limit)

(A) যদি $\vec{f}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}$, $\vec{\ell} = \ell_1\vec{i} + \ell_2\vec{j} + \ell_3\vec{k}$

এবং $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{\ell}$ হয়, তবে

$\lim\limits_{t\to t_0} f_1(t) = \ell_1$, $\lim\limits_{t\to t_0} f_3(t) = \ell_3$, $\lim\limits_{t\to t_0} f_3(t) = \ell_3$, উপপাদ্যটি বিপরীতক্রমেও সত্য।

(B) যদি $\vec{f}(t)$ এবং $\vec{g}(t)$ ভেক্টর ফাংশন দুটির জন্য

$\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{\ell}$ এবং $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{g}(t) = \vec{m}$ হয়

তাহলে (i) $\lim\limits_{t\to t_0} [\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t)] = \vec{\ell} \pm \vec{m}$

(ii) $\lim\limits_{t\to t_0} [\vec{f}(t).\vec{g}(t)] = \vec{\ell}.\vec{m}$

(iii) $\lim\limits_{t\to t_0} [\vec{f}(t).\vec{g}(t)] = \vec{\ell} \times \vec{m}$

(C) যদি স্কেলার ফাংশন $\phi(t)$ এবং ভেক্টর ফাংশন $\vec{f}(t)$-এর জন্য

$\lim\limits_{t\to t_0} \phi(t) = a$ এবং $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{\ell}$ হয়

তাহলে (i) $\lim\limits_{t\to t_0} [\phi(t)\vec{f}(t)] = a\vec{\ell}$

(ii) $\lim\limits_{t\to t_0} [\vec{f}(t)] = [\vec{\ell}]$

প্রমাণ : উপরোক্ত উপপাদ্য সমূহের দুই একটির প্রমাণ এখানে সংক্ষিপ্তভাবে আলোচনা করা হচ্ছে, যেগুলিকে অনুসরণ করলে বাকি উপপাদ্যগুলির প্রমাণ পাঠকগণ সহজেই করতে পারবেন।

উপপাদ্য (A) এর প্রমাণ ঃ যেহেতু $\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{\ell}$; আমরা সংজ্ঞা থেকে পাই

$$\left|\vec{f}(t) - \vec{\ell}\right| < \varepsilon, \text{ যখন } |t - t_0| < \delta$$

অর্থাৎ $\left|\left\{f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}\right\} - \left\{\ell_1\vec{i} + \ell_2\vec{j} + \ell_3\vec{k}\right\}\right| < \varepsilon$ যখন $|t - t_0| < \delta$

অর্থাৎ $\left|\left\{f_1(t) - \ell_1\right\}\vec{i} + \left\{f_2(t) - \ell_2\right\}\vec{j} + \left\{f_3(t) - \ell_3\right\}\vec{k}\right| < \varepsilon$ যখন $|t - t_0| < \delta$.

অর্থাৎ $|f_1(t) - \ell_1| < \varepsilon$, $|f_2(t) - \ell_2| < \varepsilon$, $|f_3(t) - \ell_3| < \varepsilon$, যখন $|t - t_0| < \delta$.

[∵ ভেক্টরের ধর্ম অনুযায়ী তিনটি পরস্পরের সঙ্গে লম্ব ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ জন্য

$|\vec{a}| < |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|, |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|, |\vec{c}| < |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ হয়।

এখানে $\vec{a} = \left\{f_1(t) - \ell_1\right\}\vec{i}$, $\vec{b} = \left\{f_2(t) - \ell_2\right\}\vec{j}$, $|\vec{c}| = \left\{f_3(t) - \ell_3\right\}\vec{k}$ ইত্যাদি।]

$$\therefore \quad \lim_{t\to t_0} f_1(t) = \ell_1, \quad \lim_{t\to t_0} f_2(t) = \ell_2, \quad \lim_{t\to t_0} f_3(t) = \ell_3,$$

মন্তব্য : অর্থাৎ কোনো ভেক্টর $\vec{f}$-এর f_1, f_2, f_3 উপাংশগুলির সীমা যথাক্রমে ঐ ভেক্টরের সীমার উপাংশগুলি (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) হবে। এই উপপাদ্যগুলি কাজে লাগিয়ে আমরা সীমা-সংক্রান্ত নানা উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারি।

উপপাদ্য (খ) (iii)-এর প্রমাণ : $\vec{f} = f_1\,\vec{i} + f_2\,\vec{j} + f_3\,\vec{k}$, $\vec{g} = g_1\,\vec{i} + g_2\,\vec{k} + g_3\,\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{f} \times \vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = (f_2 g_3 - f_3 g_2)\,\vec{i} + (f_3 g_1 - f_1 g_3)\,\vec{j} + (f_1 g_2 - f_2 g_1)\,\vec{k}$$

$$\therefore \lim_{t\to t_0} (\vec{f} \times \vec{g}) = \lim_{t\to t_0} \left\{(f_2 g_3 - f_3 g_2)\,\vec{i} + (f_3 g_1 - f_1 g_3)\,\vec{j} + (f_1 g_2 - f_2 g_1)\,\vec{k}\right\}$$

$$= (\ell_2 m_3 - \ell_3 m_2)\,\vec{i} + (\ell_3 m_1 - \ell_1 m_3)\,\vec{j} + (\ell_1 m_2 - \ell_2 m_1)\,\vec{k}$$

$$= \vec{\ell} \times \vec{m}$$ (উৎপাদক 'ক' অনুযায়ী যখন $\vec{m} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$)

6.4.2 সান্তত্য বিষয়ক কতিপয় উপপাদ্য (Some theorems on Continuity)

6.4.1 অনুচ্ছেদের উপপাদ্য খ-তে যদি $\vec{\ell} = \vec{f}(t_0)$ এবং $\vec{m} = \vec{g}(t_0)$ হয়, অর্থাৎ যদি $\vec{f}(t)$ ও $\vec{g}(t)$ ফাংশনদ্বয় $t = t_0$-তে সন্তত হয়, তবে (i), (ii) ও (iii) অনুযায়ী বলা যায় দুটি সন্তত ভেক্টর ফাংশনের যোগফল, বিয়োগফল, স্কেলার গুনফল (Dot product), ভেক্টর গুণফল (Vector product) এই সকলই $t = t_0$-তে সন্তত হয়।

আবার একই অনুচ্ছেদের উপপাদ্য গ-তে যদি $a = \phi(t_0)$ এবং $\vec{\ell} = \vec{f}(t_0)$ হয় তবে বলা যায় একটি সন্তত ভেক্টর ফাংশনকে যদি একটি সন্তত স্কেলার ফাংশন দিয়ে গুণ করা হয় তাহলে ঐ গুণফল $t = (t_0)$-তে একটি সন্তত ভেক্টর ফাংশন হয়।

উদাহরণ : দেখান যে $\vec{r} = \vec{f}(t) = (t-2)\vec{i} + 3\vec{j} - t\vec{k}$ ভেক্টর ফাংশটি $t = 2$-তে সন্তত।

সমাধান: $\left|\vec{f}(t) - \vec{f}(2)\right| = \left|(t-2)\vec{i} + 3\vec{j} - t\vec{k} - (3j - 2\vec{k})\right| = \left|(t-2)(\vec{i} - \vec{k})\right|$

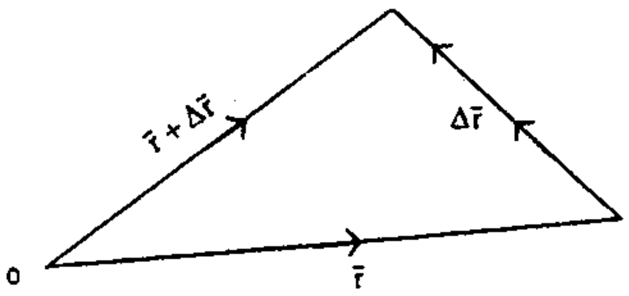
$$= |t-2|\left|\vec{i} - \vec{k}\right| = |t-2|\ \sqrt{2}$$

$$\therefore\quad \left|\vec{f}(t) - \vec{f}(2)\right| < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{2}\ |t-2| < \varepsilon \Rightarrow |t-2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \delta \text{ (ধরি)।}$$

অতএব সংজ্ঞানুসারে প্রমানিত হল $f = 2$-তে $f(t)$ সন্তত।

6.5 ভেক্টরের অবকল (Derivative of a Vector)

সংজ্ঞা : ধরা যাক $\vec{r} = \vec{f}(t)$ একটি ভেক্টর ফাংশন, যখন t একটি স্কেলার চলরাশি। t-এর পরিবর্তিত মান $t + \Delta t$-এর জন্য যদি $\vec{r}$ এর পরিবর্তিত মান $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ হয় তবে



চিত্র 6.1

$\vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{f}(t+\Delta t)$, যখন $\Delta t = t$-এর খুব ছোট পরিবর্তন এবং

$\Delta\vec{r}$ হল t এর অনুরূপ পরিবর্তনের জন্য $\vec{r}$-এর পরিবর্তন।

অর্থাৎ $\Delta\vec{r} = \vec{f}(t+\Delta t) - \vec{r}$

$$= \vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)$$

∴ t-এর এই পরিবর্তনের সাপেক্ষে $\vec{r}$ এর পরিবর্তনের হার $= \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t}$

যদি $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t}$ এই লিমিটের অনন্য অস্তিত্ব থাকে তবে

$\vec{r} = \vec{f}(t)$ কে t-এর সাপেক্ষে অবকলযোগ্য এবং ঐ লিমিটের মানকে $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ বা $\vec{f}'(t)$ দ্বারা সূচীত করা হয়

এবং এই $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$-কেই স্কেলার চলরাশি t এর সাপেক্ষে $\vec{r}$ ভেক্টর ফাংশনের ডেরিভেটিভ বা অন্তরকলজ বলা হয়

এখানে যেহেতু $\vec{r}$ একটি t স্কেলার চলরাশির ভেক্টর ফাংশন, অতএব সাধারণভাবে $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$-ও t এর একটি ভেক্টর ফাংশন। যদি $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ অবকলনযোগ্য হয় তবে তার অবকলজকে $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং $\vec{r}$ এর দ্বিতীয় ক্রমের অবকলজ বা ডেরিভেটিভ বলে। একইভাবে $\dfrac{d^3\vec{r}}{dt^3}, \dfrac{d^4\vec{r}}{dt^4}$ .... ইত্যাদি যথাক্রমে তৃতীয়, চতুর্থ,..............., ক্রমের ডেরিভেটিভ। উদাহরণস্বরূপ

যদি t স্কেলার চলরাশি সময় এবং $\vec{r}(t)$ ভেক্টর ফাংশন কোন গতিশীল বস্তুকণার t সময়ে অবস্থান ভেক্টর (Position vector) হয়, তখন $\Delta\vec{r}$ কে Δt সময়ে বস্তুকণার সরণ বলা হয় এবং t সময়ে বস্তুকণার বেগ $= \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ধরা হয়।

আবার একই সময়ে বস্তুকণার·

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

দ্রষ্টব্য : যদি $\bar{r} = \bar{f}(t) = f_1(t)\,\bar{i} + f_2(t)\,\bar{j} + f_3(t)\,\bar{k}$ হয় যেখানে f_1, f_2, f_3 স্কেলার ফাংশন

তাহলে $$\bar{f}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{f}(t+\Delta t) - \bar{f}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1(t+\Delta t) - f_1(t)}{\Delta t}\,\bar{i}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_2(t+\Delta t) - f_2(t)}{\Delta t}\,\bar{j} + \lim_{t \to t_0} \frac{f_3(t+\Delta t) - f_3(t)}{\Delta t}\,\bar{k}$$

$$= f_1'(t)\,\bar{i} + f_2'(t)\,\bar{j} + f_3'(t)\,\bar{k}$$

উদাহরণ 1. যদি $\bar{r} = (t^3 - 3)\,\bar{i} + (t^2 - 2)\,\bar{j} + (t - 1)\,\bar{k}$ হয় তবে

$\frac{d\bar{r}}{dt}$, $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ $\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|$, $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=1}$ ইত্যাদির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left\{\frac{d}{dt}(t^3 - 3)\right\}\bar{i} + \left\{\frac{d}{dt}(t^2 - 2)\bar{j}\right\} + \left\{\frac{d}{dt}(t-1)\vec{k}\right\} = 3t^2\bar{i} + 2t\bar{j} + \vec{k}$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \left\{\frac{d(3t^2)}{dt}\right\}\bar{i} + \left\{\frac{d(2t)}{dt}\right\}\bar{j} + \left\{\frac{d(1)}{dt}\right\}\vec{k} = 6t\bar{i} + 2\bar{j} + 0\vec{k} = 6t\bar{i} + 2\bar{j}$$

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \sqrt{(3t^2) + (2t)^2 + (1)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}$$

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_{t=1} = 3(1)^2\,\bar{i} + 2(1)\bar{j} + \bar{k} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \vec{k}$$

2. একটি বস্তুকণা x = a cost, y = bsint, z = ct (যখন t = সময়)

বক্র বরাবর গতিশীল। $t = \frac{\pi}{2}$ সময়ে বস্তুকনার বেগ ও ত্বরণ কত?

সমাধান ঃ

ধরা যাক্ বস্তুকণার যে কোনো অবস্থান P(x,y,z) এর অবস্থান ভেক্টর $\bar{r}$

অতএব $\bar{r} = a\cos t\,\bar{i} + b\sin t\,\bar{j} + ct\bar{k}$

$\therefore$ বস্তুকণার বেগ $$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(a\cos t)\bar{i} + \frac{d}{dt}(b\sin t)\bar{j} + \frac{d}{dt}(ct)\vec{k}$$

$$= -a\sin t\,\bar{i} + b\cos t\,\bar{j} + c\bar{k}$$

এবং বস্তুকণার ত্বরণ $$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-a\sin t\,\bar{i} + b\cos t\,\bar{j} + c\bar{k}\right)$$

অতএব $f = \frac{\pi}{2}$ সময়ে বেগ—

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = -a\sin\frac{\pi}{2}\vec{i} + b\cos\frac{\pi}{2}\vec{j} + c\vec{k} = -a\vec{i} + c\vec{k}$$

ত্বরণ হল, $\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = -a\cos\frac{\pi}{2}\vec{i} - b\sin\frac{\pi}{2}\vec{j} = -b\vec{j}$

6.5.1 অবকলনযোগ্য ফাংশনের সহিত সান্তত্যের সম্পর্ক (Relation between differentiable function and its continuity)

উপপাদ্য : যদি $\vec{f}(t)$ ভেক্টর ফাংশনটি $t = t_0$-তে অবকলযোগ্য হয় তবে ফাংশনটি $t = t_0$-তে সন্তত হবে।

প্রমাণ : $\lim\limits_{t\to t_0} \left\{\vec{f}(t_0+\Delta t) - \vec{f}(t_0)\right\}$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \left[\Delta t\left\{\frac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}\right\}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \Delta t \,.\, \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t} = 0.\vec{f}'(t_0) = 0$$

($\because$ $\vec{f}(t)$, $t = t_0$-তে অবকলযোগ্য)

বা $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t_0+\Delta t) = f(t_0)$

অতএব সংজ্ঞা থেকে বলা যায় যে $\vec{f}(t)$ ফাংশনটি $t = t_0$-তে সন্তত।

মন্তব্য : t এর কোনো মান $t = t_0$ তে $\vec{f}(t)$ সন্তত হলে $t = t_0$-তে অবকলনযোগ্য নাও হতে পারে।

উদাহরণ : যদি $\vec{f}(t) = |t|\vec{i} + o\vec{j} + o\vec{k}$ নেওয়া যায় তবে

$$\left|\vec{f}(t) - \vec{f}(0)\right| = \left||t|\vec{i} - |0|\vec{i}\right| = \left||t|\vec{i}\right| = |t|$$

অতএব, $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(0)$ $\quad [\because t\to 0 \Rightarrow |t| < \varepsilon]$

সুতরাং f(t) ফাংশনটি t = 0 বিন্দুতে সন্তত।

কিন্তু $(-1)\bar{i}\dfrac{\bar{f}(t)-\bar{f}(0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to t_0+}\dfrac{|t|\bar{i}}{t} \pm \lim\limits_{t\to t_0}\bar{i}$ $[\,|t|=t$ যখন $t>0$

$$= \bar{i}$$

এবং $\lim\limits_{t\to t_0-}\dfrac{\bar{f}(t)-\bar{f}(0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to t_0-}\dfrac{|t|\bar{i}}{t} = \lim\limits_{t\to t_0-}(-1)\bar{i}$

$= -\bar{i}$ $[\because |t| = -t,$ যখন $t<0]$

যেহেতু উপরোক্ত লিমিট্দ্বয় বিভিন্ন, সুতরাং $f'(0)$-এর কোনো অস্তিত্ব নেই। অর্থাৎ, $f(t)$ অবকলনযোগ্য নয়।

6.6 ভেক্টরের অবকলের কতিপয় সূত্র (Rules of differentiation)

যদি $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$, $\bar{w}(t)$ তিনটি ভেক্টর ফাংশন t স্কেলার চলরাশির সাপেক্ষে অবকলনযোগ্য হয় এবং $\phi(t)$ স্কেলার ফাংশনটিও t-এর সাপেক্ষে অবকলনযোগ্য হয় তবে

(i) $\dfrac{d}{dt}(\bar{u}\pm\bar{v}) = \dfrac{d\bar{u}}{dt}\pm\dfrac{d\bar{v}}{dt}$

(ii) $\dfrac{d}{dt}(\bar{u}.\bar{v}) = \bar{u}.\dfrac{d\bar{v}}{dt}+\dfrac{d\bar{u}}{dt}.\bar{v}$

(iii) $\dfrac{d}{dt}(\bar{u}\times\bar{v}) = \bar{u}\times\dfrac{d\bar{v}}{dt}+\dfrac{d\bar{u}}{dt}\times\bar{v}$

(iv) $\dfrac{d}{dt}(\phi\bar{u}) = \phi\dfrac{d\bar{u}}{dt}+\dfrac{d\phi}{dt}\times\bar{u}$

(v) $\dfrac{d}{dt}[\bar{u}\bar{v}\bar{w}] = \bar{u}.\bar{v}\times\dfrac{d\bar{w}}{dt}+\bar{u}.\dfrac{d\bar{v}}{dt}\times\bar{w}+\dfrac{d\bar{u}}{dt}.\bar{v}\times\bar{w}$,

(vi) $\dfrac{d}{dt}\{\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})\} = \bar{u}\times\left(\bar{v}\times\dfrac{d\bar{w}}{dt}\right)+\bar{u}\times\left(\dfrac{d\bar{v}}{dt}\times w\right)+\dfrac{d\bar{u}}{dt}\times(\bar{v}\times\bar{w})$

প্রমাণ : ধরা যাক t স্কেলার চলরাশির Δt পরিবর্তনের জন্য $\bar{u}$, $\bar{v}$ ও $\bar{w}$ ফাংশনগুলির পরিবর্তন যথাক্রমে $\Delta\bar{u}$, $\Delta\bar{v}$, $\Delta\bar{w}$, তাহলে

(i) t স্কেলার চলরাশির Δt পরিবর্তনের জন্য $\bar{u}+\bar{v}$ ভেক্টর ফাংশনের পরিবর্তন

$$\Delta(\bar{u}+\bar{v}) = (\bar{u}+\Delta\bar{u}+\bar{v}+\Delta\bar{v})-(\bar{u}+\bar{v}) = \Delta\bar{u}+\Delta\bar{v}$$

$$\therefore \frac{\Delta(\bar{u}+\bar{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{u}}{\Delta t}+\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$$

উভয় পক্ষে $\Delta t \to 0$ এই পরিপ্রেক্ষিতে লিমিট্ নিয়ে পাই

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{(সংজ্ঞা থেকে)}$$

অনুরূপে, $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}-\vec{v}) = \dfrac{d\vec{u}}{dt}-\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

(ii) t স্কেলার চলরাশির Δt পরিবর্তনের জন্য $\vec{u}.\vec{v}$ এর পরিবর্তন.

$$\Delta(\vec{u}.\vec{v}) = (\vec{u}+\Delta\vec{u}).(\vec{v}+\Delta\vec{v})-\vec{u}.\vec{v}$$

$$= \vec{u}.\Delta\vec{v}+\Delta\vec{u}.\vec{v}+\Delta\vec{u}.\Delta\vec{v}$$

$$\therefore \frac{\Delta(\vec{u}.\vec{v})}{\Delta t} = \vec{u}.\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}+\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}.\vec{v}+\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}.\Delta\vec{v}$$

এখন $\Delta t \to 0$ এই পরিপ্রেক্ষিতে উভয়পক্ষে লিমিট্ নিয়ে পাই

$\dfrac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.\dfrac{d\vec{v}}{dt}+\dfrac{d\vec{u}}{dt}.\vec{v}$ [$\because \Delta\vec{u}, \Delta\vec{v}$ উভয়েই Δt-এর সাথে সাথে $\vec{0}$ এর সমীপগামী হয়]

(iii) t-এর Δt পরিবর্তনের জন্য $\vec{u}\times\vec{v}$ এর পরিবর্তন

$$\Delta(\vec{u}\times\vec{v}) = (\vec{u}+\Delta\vec{u})\times(\vec{v}+\Delta\vec{v})-\vec{u}\times\vec{v}$$

উভয়পক্ষকে Δt দিয়ে ভাগ করে এবং একইভাবে $\Delta t \to 0$ এর পরিপ্রেক্ষিতে লিমিট নিয়ে পাই

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}$$

(iv) t-এর পরিবর্তন Δt এর জন্য $\phi\vec{u}$ এর পরিবর্তন

$$\Delta(\phi\vec{u}) = (\phi+\Delta\phi)(\vec{u}+\Delta\vec{u})-\phi\vec{u}$$

$$= (\Delta\phi)\vec{u}+\phi(\Delta\vec{u})+(\Delta\phi)(\Delta\vec{u})$$

এক্ষেত্রেও Δt দিয়ে ভাগ করে উভয়পক্ষে একই ভাবে লিমিট্ নিলে উত্তর পাওয়া যাবে।

(v) $\dfrac{d}{dt}[\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}] = \dfrac{d}{dt}\{\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})\}$

$$= \vec{u}.\frac{d}{dt}(\vec{v}\times\vec{w})+\frac{d\vec{u}}{dt}.(\vec{v}\times\vec{w}) \qquad \text{[(ii) নং সূত্রানুসারে]}$$

$$= \vec{u}.\left(\vec{v}\times\frac{d\vec{w}}{dt}+\frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{w}\right)+\frac{d\vec{u}}{dt}.(\vec{v}\times\vec{w}) \qquad \text{[(iii) নং সূত্রানুসারে]}$$

$$= \vec{u} . \vec{v} \times \frac{d\vec{w}}{dt} + \vec{u} . \frac{d\vec{v}}{dt} \times w + \frac{d\vec{u}}{dt} . \vec{v} \times \vec{w}$$

$$= \left[\vec{u}\vec{v}\frac{d\vec{w}}{dt}\right] + \left[\vec{u}\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{w}\right] + \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\vec{v}\vec{w}\right]$$

(vi) $\frac{d}{dt}\{\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})\} = \vec{u} \times \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{w}) + \frac{d\vec{u}}{dt} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ [(iii) নং সূত্র অনুযায়ী]

$$= \vec{u} \times \left(\vec{v} \times \frac{d\vec{w}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{w}\right) + \frac{d\vec{u}}{dt} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$= \vec{u} \times \left(\vec{v} \times \frac{d\vec{w}}{dt}\right) + \vec{u} \times \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{w}\right) + \frac{d\vec{u}}{dt} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$

6.7 ধ্রুবক ভেক্টরের অবকল (Derivation of a Constant Vector)

যখন কোনো ভেক্টরের মান ও দিক উভয়ই নির্দিষ্ট থাকে তখন তাকে ধ্রুবক ভেক্টর বলা হয়।

ধরা যাক্ t স্কেলার চলরাশির একটি ধ্রুবক ভেক্টর ফাংশন $\vec{r} = \vec{c}$ অতএব t-এর পরিবর্তন Δt-এর জন্য $\vec{r}$ এর পরিবর্তন $\Delta\vec{r}$ ধরলে, এখানে $\vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{c}$ হয়, অর্থাৎ $\Delta\vec{r} = \vec{0}$

$$\therefore \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{0}}{\Delta t} = \vec{0}$$

$$\therefore \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{0}$$

$$\therefore \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0}$$

বিপরীতক্রমে যদি $\vec{r} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ এই ভেক্টর ফাংশনের ক্ষেত্রে $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0}$ হয়, তখন

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{df_1}{dt}\vec{i} + \frac{df_2}{dt}\vec{j} + \frac{df_3}{dt}\vec{k} = \vec{0}$$

অর্থাৎ, $\frac{df_1}{dt} = 0, \quad \frac{df_2}{dt} = 0, \quad \frac{df_3}{dt} = 0$

অতএব f_1, f_2, f_3' স্কেলার ফাংশন ত্রয় সকলেই ধ্রুবক

$=> \vec{r} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর।

অতএব আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে (উপপাদ্য) একটি ভেক্টর ফাংশন $\vec{r}(t)$ বা $\vec{f}(t)$-এর ধ্রুবক হওয়ার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট (necessary and sufficient) শর্ত হল

$$\frac{d\vec{f}(t)}{dt} = \vec{0}$$

6.7.1 ধ্রুবক ভেক্টরের অবকলজ সংক্রান্ত আরও কিছু উপপাদ্য (Some more theorems on derivatives of constant vector)

যখন একটি ভেক্টর ফাংশনের পরিবর্তন ঘটে তখন ভেক্টরটির দিকের অথবা মানের অথবা উভয়েরই পরিবর্তন ঘটতে পারে। যদি মান ও দিকের কোনো একটি ধ্রুবক থাকে তখন তার ডেরিভেটিভ সংক্রান্ত দুটি উপপাদ্য এই অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হচ্ছে।

উপপাদ্য (A) : ভেক্টর ফাংশন $\vec{r} = \vec{f}(t)$ এর মান ধ্রুবক থাকার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল

$$\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} = 0$$

প্রমাণ : ভেক্টর ফাংশন $\vec{r} = \vec{f}(t)$-এর মানকে $|\vec{f}(t)|$ দ্বারা চিহ্নিত করলে আমরা জানি

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{f}(t) = |\vec{f}(t)|^2$$

উভয় পক্ষকে t এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$$2\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} = 2|\vec{f}| \frac{d|\vec{f}|}{dt} \qquad \left(|\vec{f}(t)| \text{ হল স্কেলার ফাংশন}\right)$$

$$\text{বা} \quad \vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} = |\vec{f}| \frac{d|\vec{f}|}{dt} \ldots\ldots(i) \qquad [\because \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}]$$

এখন যদি $|\vec{f}| =$ ধ্রুবক হয় তখন $\frac{d|\vec{f}|}{dt} = 0$ হয় এবং তখন (i) থেকে বলা যায় —

$$\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} = 0$$

∴ শর্তটি প্রয়োজনীয়।

আবার যদি $\vec{f}\cdot\dfrac{d\vec{f}}{dt}=0$ হয় তবে (i) থেকে বলা যায়,

$$\left|\vec{f}\right|\frac{d\left|\vec{f}\right|}{dt}=0$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\left|\vec{f}\right|=0$$

=> $\vec{f}(t)$ ভেক্টর ফাংশনটির মান ধ্রুবক।

$\therefore$ শর্তটি যথেষ্ট

অনুসিদ্ধান্ত : $\vec{f}(t)$ ভেক্টরটির মান ধ্রুবক হলে যেহেতু $\vec{f}\cdot\dfrac{d\vec{f}}{dt}=0$, সুতরাং $\vec{f}$ ও $\dfrac{d\vec{f}}{dt}$ পরস্পর লম্ব।

উপপাদ্য (B) : ভেক্টর ফাংশন $\vec{r}=\vec{f}(t)$ এর দিক নির্দিষ্ট বা ধ্রুবক থাকার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল

$$\vec{f}\times\frac{d\vec{f}}{dt}=\vec{0}$$

প্রমাণ : ধরা যাক্ $\vec{f}=f\,\hat{n}$, যখন $\hat{n}=\vec{f}$ এর দিকে বরাবর একক ভেক্টর এবং $\left|\vec{f}\right|=f$

$$\therefore\ \frac{d\vec{f}}{dt}=f\frac{d\hat{n}}{dt}+\frac{df}{dt}\hat{n}\qquad [\text{ এখানে } f \text{ এবং } \hat{n} \text{ উভয়েই } t \text{ এর ফাংশন }]$$

$$\therefore\ \vec{f}\times\frac{d\vec{f}}{dt}=\vec{f}\times\left(f\frac{d\hat{n}}{dt}+\frac{df}{dt}\hat{n}\right)$$

$$=f\hat{n}\times\left(f\frac{d\hat{n}}{dt}+\frac{df}{dt}\hat{n}\right)\qquad\left[\because\ \vec{f}=f\,\hat{n}\right]$$

$$=f^2\hat{n}\times\frac{d\hat{n}}{dt}\ldots\ldots\ldots\ldots(i)\qquad\left[\because\ \hat{n}\times\hat{n}=\vec{0}\right]$$

এখন যদি $\vec{f}(t)$-এর দিক্ ধ্রুবক থাকে তখন $\hat{n}$ একক ভেক্টরটির দিকও ধ্রুবক হয় অর্থাৎ $\hat{n}$ ভেক্টরটি স্বক ভেক্টর হয় (যেহেতু $\hat{n}$ এর মান ও দিক্ উভয়েই ধ্রুবক)।

অতএব আগের 6.7-এর উপপাদ্য অনুযায়ী $\dfrac{d\hat{n}}{dt}=\vec{0}$

অতএব (i) থেকে পাওয়া যায় $\bar{f}\times\frac{d\bar{f}}{dt}=\bar{0}$

=> শর্তটি প্রয়োজনীয়।

আবার যদি $\bar{f}\times\frac{d\bar{f}}{dt}=\bar{0}$ হয় তবে (i) থেকে পাওয়া যায়

$$f^2\hat{n}\times\frac{d\hat{n}}{dt}=\bar{0}$$

$$\Rightarrow\ \hat{n}\times\frac{d\hat{n}}{dt}=\bar{0}.............(ii)\qquad [\because f \text{ সর্বদা শূন্য নয়}]$$

এছাড়া যেহেতু $\hat{n}$ ভেক্টরটির মান ধ্রুবক (এককমান বিশিষ্ট), উপপাদ্য (A) অনুযায়ী

$$\hat{n}.\frac{d\hat{n}}{dt}=0..............(iii)$$

অতএব (ii) এবং (iii) থেকে মন্তব্য করা যায়

$$\frac{d\hat{n}}{dt}=\bar{0}$$

=> $\hat{n}$ ভেক্টরটি ধ্রুবক ভেক্টর।

=> $\bar{f}(t)$ ভেক্টর দিক্ নির্দিষ্ট বা ধ্রুবক

অতএব শর্তটি যথেষ্ট।

উদাহরণ 1 : যদি $\bar{\alpha}=(3t^2-1)\bar{i}-\bar{j}+2t\bar{k}$ এবং $\bar{\beta}=\bar{i}-t\bar{j}+t^2\bar{k}$ হয় তবে

$\frac{d}{dt}(\bar{\alpha}.\bar{\beta})$, $\frac{d}{dt}(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})$, $\frac{d}{dt}(\bar{\beta}\times\bar{\beta})$, ইত্যাদির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : [প্রথমে $\bar{\alpha}.\bar{\beta}$ এর মান নির্ণয় করে তাকে t-এর সাপেক্ষে অবকলন করলে $\frac{d}{dt}(\bar{\alpha}.\bar{\beta})$-এর মান নির্ণয় করা যায় এবং অনুরূপ পদ্ধতিতে $\frac{d}{dt}(\bar{\alpha}\times\bar{\beta})$ ও $\frac{d}{dt}(\bar{\beta}.\bar{\beta})$ এগুলিরও মান নির্ণয় করা যায়। কিন্তু আমরা এখানে তা না করে এই এককে আলোচিত সূত্রের প্রয়োগের মাধ্যমে সমাধান করব।]

$$\frac{d}{dt}(\bar{\alpha}.\bar{\beta})=\bar{\alpha}.\frac{d\bar{\beta}}{dt}+\frac{d\bar{\alpha}}{dt}.\bar{\beta}$$

$$=\{(3t^2-1)\bar{i}-\bar{j}+2t\bar{k}\}.\frac{d}{dt}\{\bar{i}-t\bar{j}+t^2\bar{k}\}+\frac{d}{dt}\{(3t^2-1)\bar{i}-\bar{j}+2t\bar{k}\}.\{\bar{i}-t\bar{j}+t^2\bar{k}\}$$

$= \{(3t^2-1)\,\vec{i}-\vec{j}+2t\vec{k}\}\;\{-\vec{j}+2t\vec{k}\}+\{6t\vec{i}+2\vec{k}\}.\{\vec{i}-t\vec{j}+t^2\vec{k}\}$

$= \{(3t^2-1).0+(-1)(-1)+(2t).(2t)\}+\{(6t).1+0.(-t)+2.t^2\}$

$= 1+4t^2+6t+2t^2 = 6t^2+6t+1$

$$\frac{d}{df}(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}) = \alpha\times\frac{d\vec{\beta}}{dt}+\frac{d\vec{\alpha}}{dt}\times\vec{\beta}$$

$$= \{(3t^2-1)\,\vec{i}-\vec{j}+2t\vec{k}\}\times(-\vec{j}+2t\vec{k})+(6t\vec{i}+2\vec{k})\times(\vec{i}-t\vec{j}+t^2\vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2-1 & -1 & 2t \\ 0 & -1 & 2t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6t & -0 & 2 \\ 1 & -t & t^2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-2t+2t)+\vec{j}\,\{0-2t(3t^2-1)\}+\vec{k}\{(3t^2-1)(-1)+0\}$$

$$+\,\vec{i}(0+2t)+\vec{j}(2-6t^3)+\vec{k}(-6t^2-0)$$

$$= 2t\vec{i}-(12t^3-2t-2)\vec{j}-(9t^2-1)\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\beta}.\vec{\beta}) = \vec{\beta}.\frac{d\vec{\beta}}{dt}+\frac{d\vec{\beta}}{dt}.\vec{\beta} = 2\vec{\beta}.\frac{d\vec{\beta}}{dt}$$

$$= 2\,(\vec{i}-t\vec{j}+t^2\vec{k}).(-\vec{j}+2t\vec{k})$$

$$= 2\,\{1.0+(-t)(-1)+t^2\,2t\} = 2(2t^3+t)$$

2. দেখান যে $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}-\frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}\right)=\vec{u}\times\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}-\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\times\vec{v}$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{d}{dt}\left(\vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}-\frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}\right)$

$$=\left\{\vec{u}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)+\frac{d\vec{u}}{dt}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right\}-\left\{\frac{d\vec{u}}{dt}\times\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)\times\vec{v}\right\}$$

$= \vec{u}\times\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}-\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\times\vec{v}$ = ডানপক্ষ।

3. $\vec{\alpha} = t^2\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$, $\beta = \vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}$, $\vec{\gamma} = t\vec{i} + \vec{j} + t^2\vec{k}$ হলে

$\frac{d}{dt}\left[\vec{\alpha}\,\vec{\beta}\,\vec{\gamma}\right]$ এর মান $t = 2$ তে কত?

সমাধান : $\frac{d}{dt}\left[\vec{\alpha}\,\vec{\beta}\,\vec{\gamma}\right] = \vec{\alpha}.\vec{\beta}\times\frac{d\vec{\gamma}}{dt} + \vec{\alpha}.\frac{d\vec{\beta}}{dt}\times\vec{\gamma} + \frac{d\vec{\alpha}}{dt}.\vec{\beta}\times\vec{\gamma}$

এখন $\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\vec{i} + \vec{j} + t^2\vec{k}) = \vec{i} + 2t\vec{k}$

$$\frac{d\vec{\beta}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}) = 2t\vec{j} + \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}) = 2t\vec{i} + \vec{j}$$

∴ উপরের সূত্রে মানগুলি বসিয়ে পাই

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\alpha}\vec{\beta}\vec{\gamma}\right] = \begin{vmatrix} t^2 & t & 1 \\ 1 & t^2 & t \\ 1 & 0 & 2t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t^2 & t & 1 \\ 0 & 2t & 1 \\ t & 1 & t^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2t & 1 & 0 \\ 1 & t^2 & t \\ t & 1 & t^2 \end{vmatrix}$$

$\left(\because \left[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,\right] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right.$, যখন $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$
$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$
$\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$

$$= \left\{t^2(2t^3 - 0) + t(t - 2t) + 1(0 - t^2)\right\} + \left\{t^2(2t^3 - 1) + t(t - 0) + 1(0 - 2t^2)\right\}$$

$$+ \left\{2t(t^4 - t) + 1(t^2 - t^2)\right\}$$

$$= (2t^5 - t^2 - t^2) + (2t^5 - 2t^2) + (2t^5 - 2t^2)$$

$$= 6t^5 - 6t^2 = 6t^2(t^3 - 1)$$

∴ $t = 2$ তে $\frac{d}{dt}\left[\,\vec{\alpha}\vec{\beta}\vec{\gamma}\,\right]$-এর মান $= 6.2^2(2^3 - 1) = 24\times7 = 168$

অনুশীলনী - 1

1. দেখান যে $\vec{r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + 5\vec{k}$ ভেক্টর ফাংশনটি $\theta = \frac{\pi}{2}$-তে সন্তত।

2. $\vec{r} = 5t^2\vec{i} + (t^3+1)\vec{j} + 2t\vec{k}$ ভেক্টরটি যদি t সময়ে কোনো গতিশীল বস্তুকণার স্থান ভেক্টর হয় তবে t=1 তে $2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ দিক্ বরাবর উহার বেগের উপাংশ নির্ণয় করুন।

[সংকেত-:- $\frac{d\vec{r}}{dt} = 10t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2\vec{k}$, => $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=1} = 10\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} =$ বেগ

$2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর

$$= \frac{2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{\left|2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right|} = \frac{2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{3}\left(2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)$$

∴ নির্ণেয় উপাংশ $= (10\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}).\frac{1}{3}(2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}) = \frac{1}{3}(10.2+3.2+2.1) = \frac{28}{3}$]

3. $\vec{\alpha} = (t^2+1)\vec{i} + (t^2-1)\vec{j} + t\vec{k}, \vec{\beta} = t\vec{i} + (t^2+1)\vec{j} + (t^2-1)\vec{k}$ হলে t = 1-তে

$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\alpha}}{dt}\times\vec{\beta}\right)$ এর মান নির্ণয় করুন [উত্তর : $2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$]

4. দেখান যে $\frac{d}{dt}\left\{\vec{r}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{\gamma}}{dt^2}\right)\right\} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right) + \vec{r}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)$

6.8 ভেক্টরের আংশিক অবকলজ (Partial derivatives of vectors)

কেবলমাত্র একটি স্কেলার চলরাশি t এর উপর নির্ভরশীল না হয়ে কোনো কোনো ভেক্টর ফাংশন একাধিক স্কেলার চলরাশির উপর নির্ভরশীল হতে পারে। ত্রিমাত্রিক দেশে কোনো বিন্দুর স্থান ভেক্টর সেখানের স্থানাংকের উপর নির্ভরশীল হতে পারে। যদি কার্তিয় স্থানাংকের কথা ভাবা হয় তবে চলমান বিন্দু P(x,y,z)-এর স্থান ভেক্টর

$\vec{r} = \vec{f}(x,y,z)$ দ্বারা চিহ্নিত করা যায়।

এক্ষেত্রে x-এর সাপেক্ষে $\vec{r}$ এর আংশিক অবকলজ (আংশিক ডেরিভেটিভ) নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িতঃ

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{f}(x+\Delta x, y, z) - \vec{f}(x,y,z)}{\Delta x}$$

অবশ্যই এই লিমিটের অস্তিত্ব থাকতে হবে। অনুরূপে y ও z এর সাপেক্ষে

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{f}(x, y+\Delta y, z) - \vec{f}(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{f}(x, y+\Delta y, z) - \vec{f}(x,y,z)}{\Delta z}$$

এইভাবে আংশিক অবকলজগুলিকে সংজ্ঞায়িত করা হয়, অবশ্যই এই ক্ষেত্রগুলিতেও লিমিটগুলির অস্তিত্ব থাকতে হবে।

অন্তরকলনবিদ্যার স্কেলার ফাংশনের আংশিক ডেরিভেটিভের মতই ভেক্টর ফাংশনের ক্ষেত্রেও উচ্চক্রমের ডেরিভেটিভ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত হয় :

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2}\right), \frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial y \delta x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2}\right)$$ ইত্যাদি।

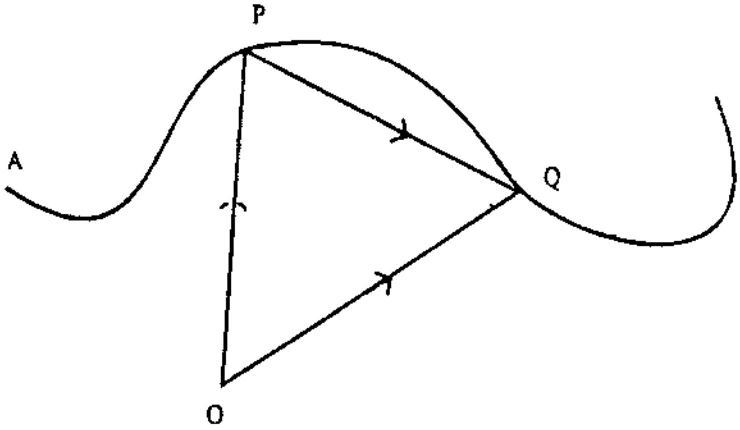
এছাড়াও, $\frac{\delta^3 \vec{f}}{\delta x^3} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta^2 \vec{f}}{\delta x^2}\right), \frac{\delta^3 \vec{f}}{\delta y \delta x^2} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta^2 \vec{f}}{\delta x^2}\right)$ ইত্যাদি।

এক্ষেত্রে মনে রাখা প্রয়োজন, f -এর কমপক্ষে দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অবকলজগুলি যদি সন্তত হয় তবে

$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial x}$ হয়। ভেক্টর ফাংশনের আংশিক অবকলজের নিয়মাবলী স্কেলার ফাংশনের আংশিক অবকলজের অনুরূপ। প্রয়োজনীয়তা না থাকায় এখানে বিশদ আলোচনা করা হল না।

6.9 জ্যামিতিতে ডেরিভেটিভের প্রয়োগ (Application of derivative to geometry)

ধরা যাক ত্রিমাত্রিক দেশে একটি বক্ররেখার উপর বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান ঐ রেখার উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু A থেকে বক্ররেখা বরাবর দূরত্ব দিয়ে নির্ণয় করা হয়। যদি বক্ররেখার উপর নির্দিষ্ট বিন্দু A থেকে ঐ বক্ররেখার উপর অন্য যে কোনো একটি চলমান বিন্দু P এর বক্র বরাবর দূরত্ব s হয় তবে যে কোনো একটি বিন্দু o কে মূলবিন্দু ধরে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ সর্বদাই s এর উপর নির্ভরশীল হবে। তাই এই ধরনের বক্ররেখার সমীকরণ $\vec{r} = \vec{f}(s)$



চিত্র 6.2

এইভাবে সূচীত করা যায়, যেখানে s একটি স্কেলার চলরাশি।

A **স্পর্শক** : নির্দিষ্ট বিন্দু A থেকে বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দূরত্ব s বলে ঐ বিন্দুকে P(s) দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। ধরা যাক্ Q(s+ Δs) বিন্দুটি বক্রের উপর এবং P এর খুব কাছাকাছি। যদি Q-এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OQ} = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ ধরা হয় তাহলে

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r} + \Delta\vec{r} - \vec{r} = \Delta\vec{r}$$

এখন $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\text{চাপ PQ}} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\text{জ্যা PQ}} = \dfrac{\text{জ্যা PQ}}{\text{চাপ PQ}}$ ....(i) $[\because \Delta s = \text{চাপ PQ}]$

আমরা জানি $\lim\limits_{Q \to P} \dfrac{\text{জ্যা PQ}}{\text{চাপ PQ}} = 1$ একটি প্রতিষ্ঠিত ফল; এবং $Q \to P$ হলে $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\text{জ্যা PQ}}$ অনুপাতটি

একটি একক ভেক্টরে রূপান্তরিত হতে থাকবে যার দিক P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বরাবর। ঐ একক ভেক্টরকে $\vec{t}(s)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

অতএব (i)-এর উভয়পক্ষে $Q \to P$ এর উপর লিমিট নিয়ে পাই

$$\lim_{Q \to P} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \lim_{Q \to P} \frac{\overrightarrow{PQ}}{\text{জ্যা } PQ} \quad \lim_{Q \to P} \frac{\text{জ্যা } PQ}{\text{চাপ } PQ}$$

$$\text{or,} \quad \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}(s) \,.\, 1 = \vec{t}(s) \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

এই $\vec{t}(s)$ একক ভেক্টরটি s এর বর্ধিত দিক বরাবর P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং এটিকে একক স্পর্শক (unit tangent) বলা হয়।

যদি বক্রের সমীকরণ

$$\vec{r} = \vec{f}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)k$$

এইভাবে লেখা হয় তাহলে

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}$$

সুতরাং P বিন্দুতে অঙ্কিত একক স্পর্শক $\vec{t}$ এর দিক্ কোসাইনগুলি (direction cosines) হল

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ভেক্টর সমীকরণ

$$\vec{R} = \vec{r} + \lambda\vec{t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

যেখানে স্পর্শকের উপর যে কোনো বিন্দুর স্থান ভেক্টর $\vec{R}$ এবং $\vec{r}$ ও $\vec{t}$ সম্বন্ধে আগেই বলা হয়েছে। স্পর্শকের ভেক্টর সমীকরণ (iii)-কে কার্তিয় স্থানাংকে রূপান্তরিত করলে স্পর্শকের কার্তিয় সমীকরণ হয়—

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{ds}} \; (= \lambda)$$

যেখানে $\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ অর্থাৎ P বিন্দুর কার্তিয় স্থানাংশ (x,y,z) এবং স্পর্শকের উপর যে কোনো বিন্দুর স্থানাংক (X,Y,Z)

দ্রষ্টব্য : একটি বক্র রেখাকে $\vec{r} = \vec{f}(u)$, এভাবেও লেখা যায় যেখানে u একটি স্কেলার চল। এক্ষেত্রে স্পর্শক $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{du}\frac{du}{ds}$ হবে।

উদাহরণ : যদি বক্ররেখার সমীকরণ x = cost, y = sint, z = t হয় তবে তার উপর যেকোন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$$\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\therefore\ \frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$$

কিন্তু $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \vec{t}\,\frac{ds}{dt}$ ....(iv) [t হল একক সংস্পর্শ ভেক্টর।]

$$\therefore\quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \qquad [\because |\vec{t}| = 1]$$

বা $\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = \left|\frac{ds}{dt}\right|$

বা $\sqrt{2} = \left|\frac{ds}{dt}\right|$

$\therefore\ \vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}$ [(iv) থেকে]

$$= (-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k})\ /\ \sqrt{2}$$

এই প্রসঙ্গে বলা যায় P বিন্দুগামী যে তল, স্পর্শক $\vec{t}$ এর সাথে লম্ব ভাবে অবস্থিত তাকে অভিলম্ব তল (normal plane) বলে। অভিলম্বতলের ভেক্টর সমীকরণ : $(\vec{R} - \vec{r})\ \vec{t} = 0$..............(v)

(কারণ $\vec{R} - \vec{r}$ ভেক্টরটি অভিলম্ব তলে অবস্থিত)

যখন $\vec{R}$ = অভিলম্ব তলের উপর যে কোনো বিন্দুর স্থান ভেক্টর $= X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

এবং $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$

অভিলম্ব তলের কার্তিয় স্থানাংক অনুযায়ী সমীকরণ

$$(X - x)\frac{dx}{ds} + (Y - y)\frac{dy}{ds} + (Z - z)\frac{dz}{ds} = 0$$

উদাহরণ : x = cost, y = sint, z = t বক্ররেখার উপর (1,0,0)

বিন্দুতে অভিলম্ব তলের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

এখানে $\vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$; x = 1, y = 0, z = 0 (t = 0)

এবং $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt}$। সুতরাং অভিলম্ব তলের সমীকরণ লেখা যায়

$$(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

বা $\left\{\left(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}\right) - \left(\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}\right)\right\} \cdot (\vec{j} + \vec{k}) = 0$

$$\left[\because \left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} = -\sin 0\vec{i} + \cos 0\vec{j} + \vec{k} = \vec{j} + \vec{k}\right]$$

বা $\left\{(X-1)\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}\right\} \cdot (\vec{j} + \vec{k}) = 0$

বা $(X-1).0 + Y.1 + Z.1 = 0$

বা $Y + Z = 0$

B: মুখ্য বা প্রধান অভিলম্ব (Principal normal)

এই P বিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখা অভিলম্বতলে অবস্থিত হলে তা $\vec{t}$ এর উপর তথা বক্ররেখার উপর P বিন্দুতে লম্ব। আবার $\vec{t}$ একটি ধ্রুবক মান বিশিষ্ট ভেক্টর বলে $\frac{d\vec{t}}{ds}$ ভেক্টরটি $\vec{t}$ এর উপর লম্ব তথা বক্ররেখার উপর P বিন্দুতে লম্ব।

P বিন্দুতে $\frac{d\vec{t}}{ds}$ এর দিক বরাবর অঙ্কিত সরলরেখাকে মুখ্য অভিলম্ব (Principal normal) বলা হয়। মুখ্য অভিলম্ব বরাবর একক ভেক্টর $\vec{n}$ হলে

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa\vec{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(vi)$$ এইভাবে লেখা হয়।

এখানে $k (\geq 0)$ স্কেলার রাশিটিকে P বিন্দুতে বক্রতা (Curvature) এবং $\vec{n}$ ভেক্টরটিকে P বিন্দুতে একক মুখ্য অভিলম্ব বা প্রধান অভিলম্ব বলে।

P বিন্দুতে মুখ্য অভিলম্বের ভেক্টর সমীকরণ $\vec{R} = \vec{r} + \lambda\vec{n}$

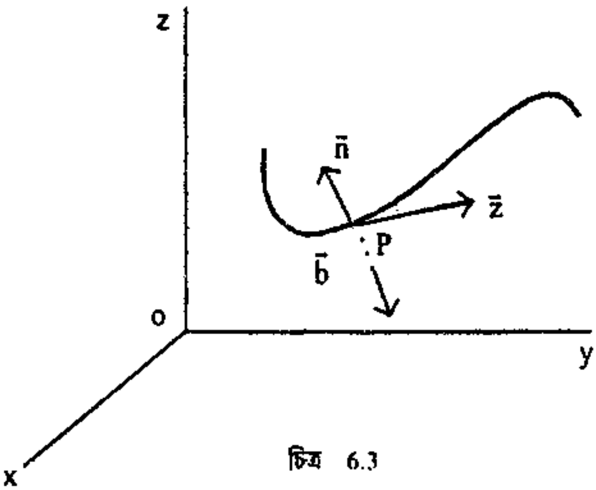
বা $(\vec{R} - \vec{r}) \times \vec{n} = \vec{0} \ldots\ldots\ldots\ldots(vii)$

যেখানে $\vec{R}$ = মুখ্য অভিলম্বের উপর যে কোনো একটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর এবং $\vec{r}$ ও $\vec{n}$ সম্পর্কে আগেই বলা হয়েছে।

$k \neq 0$ হলে $\rho = \frac{1}{k}$ -কে বক্রের P বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ (radius of curvature) বলে।

C. দ্বিতীয় অভিলম্ব (Binormal) :

যদি এমন একটি একক ভেক্টর $\bar{b}$ এর অবতারণা করা যায় যাতে $\bar{t} \times \bar{n} = \bar{b}$ সম্পর্কটি সিদ্ধ হয় এবং



চিত্র 6.3

$\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ ভেক্টর তিনটি পরস্পরের সাথে লম্ব দক্ষিণ-হস্তের তন্ত্র (Right-handed system) অনুযায়ী গঠিত হয় তাহলে P থেকে $\bar{b}$ -এর দিক বরাবর সরলরেখাকে দ্বিতীয় অভিলম্ব (binormal) এবং $\bar{b}$ একক ভেক্টরটিকে একক দ্বিতীয় অভিলম্ব (Unit binormal) বলে।

এখানে মনে রাখা প্রয়োজন $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ দক্ষিণহস্তের তন্ত্র অনুযায়ী গঠিত বলে $\bar{t} \times \bar{n} = \bar{b}$, $\bar{n} \times \bar{b} = \bar{t}$ এবং $\bar{b} \times \bar{t} = \bar{n}$.................(viii)

যেহেতু $\bar{b}$ একটি একক ভেক্টর, $\frac{d\bar{b}}{ds}$ এর মান শূন্য না হলে তা $\bar{b}$ এর সাথে লম্ব হবে।

এখন $\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n}$ সম্পর্কটিকে s-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{d\bar{t}}{ds} \times \bar{n} + t \times \frac{d\bar{n}}{ds} = k\bar{n} \times \bar{n} + \bar{t} \times \frac{d\bar{n}}{ds} \qquad \left[\because \frac{d\bar{t}}{ds} = k\bar{n}\right]$$

$$= \bar{t} \times \frac{d\bar{n}}{ds} \qquad [\because \bar{n} \times \bar{n} = 0]$$

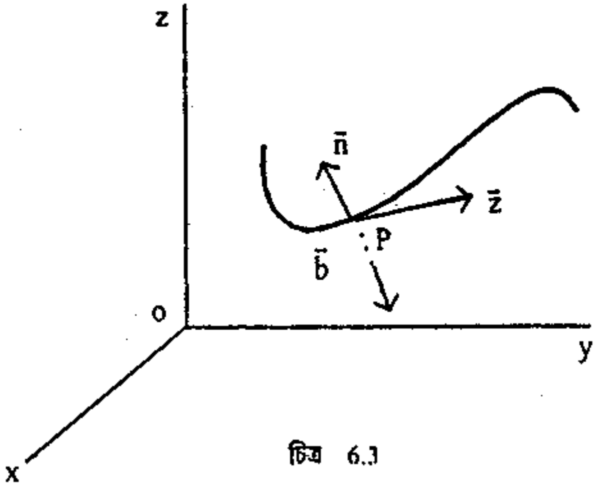
অতএব $\frac{d\bar{b}}{ds}$ ভেক্টরটি $\bar{t}$ এর সাথেও লম্ব। কিন্তু আগে দেখান হয়েছে যে $\frac{d\bar{b}}{ds}$, $\bar{b}$ এর সাথে লম্ব। সুতরাং $\frac{d\bar{b}}{ds}$ ভেক্টরটি $\bar{n}$ এর সমান্তরাল এবং তাই লেখা হয়

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -\tau\bar{n} \ ....(ix)$$

$k \neq 0$ হলে $\rho = \frac{1}{k}$ -কে বক্রের P বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ (radius of curvature) বলে।

C. দ্বিতীয় অভিলম্ব (Binormal) :

যদি এমন একটি একক ভেক্টর $\bar{b}$ এর অবতারণা করা যায় যাতে $\bar{t} \times \bar{n} = \bar{b}$ সম্পর্কটি সিদ্ধ হয় এবং



চিত্র 6.3

$\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ ভেক্টর তিনটি পরস্পরের সাথে লম্ব দক্ষিণ-হস্তের তন্ত্র (Right-handed system) অনুযায়ী গঠিত হয় তাহলে P থেকে $\bar{b}$-এর দিক বরাবর সরলরেখাকে দ্বিতীয় অভিলম্ব (binormal) এবং $\bar{b}$ একক ভেক্টরটিকে একক দ্বিতীয় অভিলম্ব (Unit binormal) বলে।

এখানে মনে রাখা প্রয়োজন $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ দক্ষিণহস্তের তন্ত্র অনুযায়ী গঠিত বলে $\bar{t} \times \bar{n} = \bar{b}$, $\bar{n} \times \bar{b} = \bar{t}$ এবং $\bar{b} \times \bar{t} = \bar{n}$................(viii)

যেহেতু $\bar{b}$ একটি একক ভেক্টর, $\frac{d\bar{b}}{ds}$ এর মান শূন্য না হলে তা $\bar{b}$ এর সাথে লম্ব হবে।

এখন $\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n}$ সম্পর্কটিকে s-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{d\bar{t}}{ds} \times \bar{n} + t \times \frac{d\bar{n}}{ds} = k\bar{n} \times \bar{n} + \bar{t} \times \frac{d\bar{n}}{ds} \qquad \left[\because \quad \frac{d\bar{t}}{ds} = k\bar{n}\right]$$

$$= \bar{t} \times \frac{d\bar{n}}{ds} \qquad [\because \bar{n} \times \bar{n} = 0]$$

অতএব $\frac{d\bar{b}}{ds}$ ভেক্টরটি $\bar{t}$ এর সাথেও লম্ব। কিন্তু আগে দেখান হয়েছে যে $\frac{d\bar{b}}{ds}$, $\bar{b}$ এর সাথে লম্ব। সুতরাং $\frac{d\bar{b}}{ds}$ ভেক্টরটি $\bar{n}$ এর সমান্তরাল এবং তাই লেখা হয়

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -\tau\bar{n} \text{ ....(ix)}$$

সমাধান : এখানে $\vec{r} = 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j} + t\vec{k}$

$$\therefore \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = -2\sin t\vec{i} + 2\cos t\vec{j} + \vec{k}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 1^2} = 3 = \dot{s}$$

$$\because \vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}} = -\frac{2}{3}\sin t\vec{i} + \frac{2}{3}\cos t\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$$

$$\kappa\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \left(-\frac{2}{3}\cos t\vec{i} - \frac{2}{3}\sin t\vec{j} + 0\vec{k}\right)\cdot\frac{1}{\dot{s}}$$

$$= -\frac{2}{9}\cos t\vec{i} - \frac{2}{9}\sin t\vec{j} \qquad [\because \dot{s} = 3]$$

$$\therefore \kappa = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \sqrt{\left(-\frac{2}{9}\cos t\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\sin t\right)^2} = \frac{2}{9} \Rightarrow \rho = \frac{1}{k} = \frac{9}{2}$$

আবার, $$\vec{n} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{9}{2}\left(-\frac{2}{9}\cos t\vec{i} - \frac{2}{9}\sin t\vec{j}\right)$$

$$= -\left(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}\right)$$

$$\vec{b} = \vec{t}\times\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{2}{3}\sin t & \frac{2}{3}\cos t & \frac{1}{3} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\sin t\vec{i} - \frac{1}{3}\cos t\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

সর্বশেষে, $-\tau\bar{n} = \dfrac{db}{dt}\Big/\dfrac{ds}{dt} = \left(\dfrac{1}{3}\cos t\bar{i} + \dfrac{1}{3}\sin t\bar{j} + 0\bar{k}\right)\Big/3$

$$= \frac{1}{9}\cos t\bar{i} + \frac{1}{9}\sin t\bar{j}$$

$$\therefore (-\tau)(-\cos t\bar{i} - \sin t\bar{j}) = \frac{1}{9}\cos t\bar{i} + \frac{1}{9}\sin t\bar{j}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{9} \quad \therefore \quad \sigma = \frac{1}{\tau} = 9.$$

অনুশীলনী-2

1. যদি $\bar{r} = x^3yz\bar{i} + xy^2z\bar{j} + xyz^2\bar{k}$ হয় তবে (1,1,2) বিন্দুতে $\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2\bar{r}}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial z\bar{r}}{\partial y\partial x}$ এবং $\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial y}$,-এর মান নির্ণয় করুন।

2. $x = 2t,\ y = t^2,\ z = \dfrac{1}{3}t^3$ বক্রের (twised cubic) t = 1-তে $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}, k, \tau$ নির্ণয় করুন।

উত্তর : 1. $4\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k},+\ 4\bar{i},\ 4\bar{i},\ 4\bar{j}+4\bar{k}, -8\bar{i}-8\bar{j}+12\bar{k}$

2. $\frac{2}{3}\bar{i}+\frac{2}{3}\bar{j}+\frac{1}{3}\bar{k},\ \frac{2}{3}\bar{i}-\frac{1}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k},\ \frac{1}{3}\bar{i}-\frac{2}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{9}$

6.10. সারাংশ

(i) কোনো বক্ররেখার ভেক্টর সমীকরণ $\bar{r} = \bar{f}(s)$, যেখানে s হল ঐ রেখার উপর কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে রেখা বরাবর অন্য কোন বিন্দু p এর দূরত্ব। কখনও s স্কেলার চলরাশির পরিবর্তে অন্য প্রচল (Parameter) t -ও ব্যবহৃত হয়।

(ii) লিমিট : পূর্বনির্ধারিত যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর জন্য যদি ε-এর উপর নির্ভরশীল আর একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যায় যাতে $\left|\vec{f}(t)-\vec{\ell}\right| < \varepsilon$ যখন $\left|t-t_0\right|<\delta$ হয়, তবে $\vec{f}(t)$ ফাংশনটির সীমা হবে $\vec{\ell}$ এবং তখন লেখা হয় $\lim_{t\to t_0} f(t)=\vec{\ell}$ এখানে t একটি স্কেলার চলরাশি।

(iii) $\vec{f}(t)=\lim_{\Delta t\to t_0}\dfrac{\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)}{\Delta t}$, এখানে t একটি স্কেলার চলরাশি।

(iv) $\vec{f}(t)$ এর মান ধ্রুবক হলে $\vec{f}.\dfrac{d\vec{f}}{dt}=0$

$\vec{f}(t)$ এর দিক ধ্রুবক হলে $\vec{f}\times\dfrac{d\vec{f}}{dt}=0$

(v) $\vec{f}(x,y,z)$ হলে, আংশিক অবকলজ $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y,z)-\vec{f}(x,y,z)}{\Delta x}$

(vi) $\vec{r}=\vec{f}(s)$ বক্ররেখার নির্দিষ্ট কোন বিন্দু থেকে যদি P বিন্দুর বক্ররেখা বরাবর দৈর্ঘ্য যদি s হয় তবে P বিন্দুতে s এর বর্ধিত দিক বরাবর একক স্পর্শক ভেক্টর

$$\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds}$$

একক মুখ্য অভিলম্ব $\vec{n}=\dfrac{1}{k}.\dfrac{d\vec{t}}{ds}$

এবং একক বাইনরম্যাল $\vec{b}=\vec{t}\times\vec{n}$

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=k\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds}=-\tau\vec{n}$$

এখানে $k=\left|\dfrac{d\vec{t}}{ds}\right|=$ বক্রতা, $\tau=\left|\dfrac{d\vec{b}}{ds}\right|=$ টরশন

6.11. সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1.(i) $\vec{r}(t) = (2t^2 - 1)\vec{i} + (\log t + e^{2t})\vec{j} + \tan^{-1} t\vec{k}$

হলে $\lim_{t \to 1} \vec{r}(t)$ -এর মান কত?

(ii) $\vec{f}(t) = (1 - \cot\theta)\vec{i} + \log\sin\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{k}$ এবং

$\vec{g}(t) = (\operatorname{cosec}^2\theta + 1)\vec{i} + (\cos\theta + 2)\vec{j} + (\sin^2\theta + 1)\vec{k}$ হলে

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \left\{\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)\right\}$-এর মান নির্ণয় করুন।

(iii) যদি $\phi(t) = \dfrac{e^{\sin t} - 1}{t}$ এবং $\vec{f}(t) = \cos t\vec{i} + \sin\vec{j} + 3\vec{k}$

হলে $\lim_{t \to 0} \left\{\phi(t)\vec{f}(t)\right\}$-এর মান কত?

2. (i) দেখান যে $\vec{r}(t) = (5t^2 - 1)\vec{i} + (2t + 3)\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ ভেক্টর ফাংশনটি $t = 2$ বিন্দুতে সন্তত।

[সংকেত: দেখান যে $\lim_{t \to 2} \vec{r}(t) = \vec{r}(2)$]

(ii) দেখান যে $\vec{r}(\theta) = (2\tan^2\theta + 1)\vec{i} + (2\sin^2\theta + 1)\vec{j} + (2\cos^2\theta + 1)\vec{k}$ ভেক্টর ফাংশনটি

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ বিন্দুতে সন্তত।

3. (i) $\vec{r} = 4\sin^2 ti + 4\cos^2 t\vec{j} + 9\cos 2t\vec{k}$ হলে

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}, \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \dfrac{d\vec{r}}{dt}.\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|, \left[\dfrac{d\vec{r}}{dt}\ \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \dfrac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$ এর মানগুলি নির্ণয় করুন।

(ii) $\dfrac{\vec{r} \times \vec{a}}{\vec{r}.\vec{a}}$ ভেক্টর ফাংশনটির t স্কেলার চলরাশির সাপেক্ষে অবকল নির্ণয় করুন, যেখানে $\vec{r}$ ভেক্টরটি t-এর ফাংশন এবং $\vec{\alpha}$ ভেক্টরটি ধ্রুবক ভেক্টর।

(iii) $r^5\vec{r}$ ভেক্টর ফাংশনটির t-এর সাপেক্ষে অবকল নির্ণয় করুন যেখানে $r = |\vec{r}|$

(iv) মান নির্ণয় করুন (a) $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dr}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$ (b) $\frac{d^2}{dt^2}\left[\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dr}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$

$$(c)\ \frac{d}{dt}\left\{\vec{r}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\right\}\quad (d)\ \frac{d^2}{dt^2}\left\{\vec{r}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\right\}$$

4. (i) যদি $\vec{r} = x\sin y\,\vec{i} + y\sin x\,\vec{j} + (\sin x + \sin y)\vec{k}$ হয় তবে

$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x\partial y}$ এর মানগুলি নির্ণয় করুন এবং পরীক্ষা করে দেখুন

$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x\partial y}$

(ii) $\vec{f}(x,y) = x^2y^3\vec{i} + x\log y\,\vec{j} + e^x y\vec{k}$ এবং

$\vec{g}(x,y) = e^{xy}\vec{i} + x^3y^2\vec{j} + y\log x\,\vec{k}$ হলে (1,1) বিন্দুতে

$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(\vec{f}\times\vec{g})$ এর মান নির্ণয় করুন।

(iii) যদি $\vec{f} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$ এবং $\vec{g} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2k$ হলে (4, −2, 1) বিন্দুতে

$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2}\times\frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial x^2}$ এর মান কত?

5. একটি বস্তুকণা $x = t^3,\ y = 2t^2 + 1,\ z = 3t - 2$ বক্র বরাবর গতিশীল, যেখানে t স্কেলার চলরাশিটি সময়কে সূচিত করে। $t = 4$-তে $2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ভেক্টরের দিক বরাবর বস্তুকণাটির বেগ ও ত্বরণ কত?

6. (i) প্রমাণ করুন যে $\vec{r} = e^{at}(\vec{A}\cos bt + \vec{B}\sin bt)$, (যেখানে $\vec{A}, \vec{B}$ ধ্রুবক ভেক্টর এবং t স্কেলার চলরাশি) ভেক্টর ফাংশনটি $\frac{d^2\vec{r}^2}{dt^2} - 2a\frac{d\vec{r}}{dt} + \left(a^2 + b^2\right)\vec{r} = \vec{0}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(ii) প্রমাণ করুন যে $\vec{r} = e^{-kx}(\vec{A}\sin ky + \vec{B}\cos ky)$, (যেখানে $\vec{A}, \vec{B}$ ধ্রুবক ভেক্টর এবং k স্কেলার ধ্রুবক) ভেক্টর ফাংশনটি $\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial y^2} = \vec{0}$ সমীকরনটিকে সিদ্ধ করে।

7. (i) $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, at\cot\beta)$ বক্রের যে কোন বিন্দু t-তে $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$, $\vec{\rho}$ এবং τ এর মান নির্ণয় করুন। (বক্রটির নাম বৃত্তাকার হেলিক্স এখানে a এবং β ধ্রুবক)।

(ii) $\bar{r} = a(3t - t^3, 3t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ (এখানে a ধ্রুবক) বক্রের যে কোনো বিন্দুতে $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$, বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ এবং টরশনের ব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় করুন।

৪. প্রমাণ করুন যে $\frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} = \frac{\tau}{\rho^2}$

[সংকেত : $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t},\ \frac{d\bar{r}}{ds^2} = \frac{\partial\bar{t}}{ds} = k\bar{n},\ .\ \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} = \frac{d}{ds}(k\bar{n}) = k\frac{d\bar{n}}{ds} + \frac{dk}{ds}\bar{n}$

$$= k(\tau\bar{b} - k\bar{t}) + \frac{dk}{ds}\bar{n}$$

এখন বামপক্ষ $= \bar{t}\,.\,k\bar{n} \times \left(k\tau\bar{b} - k^2\bar{t} + \frac{dk}{ds}\bar{n}\right) = \bar{t}\,.\,(k^2\tau\bar{t} + k^3\bar{b}) = k^2\tau. = \frac{\tau}{\rho^2}$]

6.12 উত্তরমালা (সংকেতসহ)

1. (i) $\bar{i} + e^2\bar{j} + \frac{\pi}{4}\bar{k}$ (ii) $2(-\bar{i} + \bar{k})$ [সংকেত 6.4.1 অনুচ্ছেদের B (iii) -এর সূত্র অনুযায়ী]

(iii) সংকেত: $\lim_{t\to 0} \phi(t) = \lim_{t\to 0} e^{\sin t} \frac{-1}{\sin t} \cdot \frac{\sin t}{t} = 1.1 = 1,$

এবং $\lim_{t\to 0} \bar{f}(t) = \lim_{t\to 0} (\cos t\bar{i} + \sin t\bar{j} + 3\bar{k}) = \bar{i} + 3\bar{k}$, অতএব নির্ণেয় লিমিট

$$= \frac{\lim}{t \to 0}\phi(t) \cdot \frac{\lim}{t \to 0}\bar{f}(t) = 1.(\bar{i} + 3\bar{k}) = \bar{i} + 3\bar{k}$$

3. (i) $4\sin 2t\bar{i} - 4\sin 2t\bar{j} - 18\sin 2t\bar{k},\ 4\cos 2t\,(2\bar{i} - 2\bar{j} - 9\bar{k})$

$756\sin 4t, 0, 0$ (ii) সংকেত: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{r}\times\bar{a}}{\bar{r}.\bar{a}}\right) = \frac{1}{\bar{r}.\bar{a}}\frac{d}{dt}(\bar{r}\times\bar{a}) + \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\bar{r}.\bar{a}}\right)\right\}\bar{r}\times\bar{a}$

[এখানে $\bar{r}\,.\,\bar{a} =$ স্কেলার]

$$= \frac{1}{\bar{r}\,.\,\bar{a}}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\bar{a} + \bar{r}\times\frac{d\bar{a}}{dt}\right) - \left\{\frac{1}{(\bar{r}.\bar{a})^2}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\,.\,\bar{a} + \bar{r}\,.\,\frac{d\bar{a}}{dt}\right)\right\}\bar{r}\times\bar{a}$$

$$= \frac{1}{\vec{r}.a}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{a}\right) - \frac{1}{(\vec{r}.\vec{a})^2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}.\vec{a}\right)\vec{r}\times\vec{a} \qquad \left[\because \frac{d\vec{a}}{dt}=0\right]$$

(iii) সংকেত: $\frac{d}{dt}(r^5.\vec{r}) = \left(\frac{d}{dt}r^5\right)\vec{r} + r^5\frac{d}{dt}\vec{r} = \left(5r^4\frac{dr}{dt}\right)\vec{r} + r^5\frac{d\vec{r}}{d\vec{t}}$

(iv) (a) $\left[\vec{r}\ \frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$ (সংকেত: স্কেলার ট্রিপল প্রোডাক্ট-এর নিয়মানুসারে)

(b) $\left[\vec{r}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right] + \left[\vec{r}\ \frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^4\vec{r}}{dt^4}\right]$ (c) $\frac{d\vec{r}}{dt}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) + \vec{r}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)$

(d) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) + 2\frac{d\vec{r}}{dt}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) + \vec{r}\times\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\times\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) + \vec{r}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^4\vec{r}}{dt^4}\right)$

4. (i) $\sin y\vec{i} + y\cos x\vec{j} + \cos x\vec{k},\ x\cos y\vec{i} + \sin x\vec{j} + \cos y\vec{k};\ -y\sin x\vec{j} - \sin x\vec{k},$

$-x\sin y\vec{i} - \sin y\vec{k},\ \cos y\vec{i} + \cos x\vec{j},\ \cos y\vec{i} + \cos x\vec{j}$

(ii) $(1-12e)\vec{i} + (5e^2-4)\vec{j} + (25-2e)\vec{k}$ (iii) $8\vec{k}$

5. $\frac{118}{3}, \frac{52}{3}$

7. (i) $\vec{t} = \sin\beta\,(-\sin t, \cos t, \cot\beta),\ \vec{n} = (-\cos t, -\sin t, 0)$

$\vec{b} = \sin\beta(\sin t\cot\beta, -\cos t\cot\beta, 1),\ \rho = a\,\mathrm{cosec}^2\beta,\ \tau = \frac{1}{2a}\sin 2\beta$

(ii) $\vec{t} = \frac{1}{1+t^2}\left\{(1-t^2)\vec{i} + 2tj + (1+t^2)\vec{k}\right\},\ \vec{n} = \frac{1}{1+t^2}\left\{-2t\vec{i} + (1-t^2)\vec{j}\right\}$

$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}\left\{-(1-t^2)\vec{i} - 2t\vec{j} + (1+t^2)\vec{k}\right\},\ \rho = 3a(1+t^2)^2 = \sigma$

একক 7 ❑ ভেক্টরের সমাকলন (Vector Integration)

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

7.2 উদ্দেশ্য

7.3 স্কেলার চলরাশির সাপেক্ষে ভেক্টরের সমাকলন

7.4 আদর্শ সূত্রাবলী

7.4.1 ভেক্টর অবকল সমীকরণ

অনুশীলনী – 1

7.5 রেখা সমাকলন

7.5.1 অন্যপ্রকারের রেখা সমাকল

অনুশীলনী – 2

7.6 তল সমাকলন

7.6.1 অন্য প্রকারের তল সমাকল

7.7 আয়তন সমাকলন

অনুশীলনী – 3

7.8 সারাংশ

7.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

7.10 উত্তরমালা (সংকেত সহ)

7.1 প্রস্তাবনা

একটি বল ভেক্টর দ্বারা কৃতকার্য, কোনো তলের মধ্য দিয়ে একটি ভেক্টরের বহিঃমুখী প্রবাহের (Out flow or flux) হার ইত্যাদি নির্ণয়ের জন্য ভেক্টর সমাকলনের প্রয়োজন। এছাড়াও ফলিত গণিতের বিভিন্ন শাখায় সমাকলনের প্রয়োগ আছে।

স্কেলার ফাংশনের ক্ষেত্রে ঠিক যেভাবে অন্তরকলনবিদ্যার (Differential Calculus) পাশাপাশি সমাকলন বিদ্যার (Integral Calculus) আলোচনা হয়ে থাকে ভেক্টর ফাংশনের ক্ষেত্রেও ভেক্টর অবকলনের সাথে সমান্তরালভাবে ভেক্টর সমাকলন তার স্বকীয় বৈশিষ্ট্যে আলোচিত হয়।

এখানে প্রাথমিক কিছু আলোচনার মাধ্যমে বিষয়টির উপর আলোকপাত করা হয়েছে।

7.2 উদ্দেশ্য

এই এককে ভেক্টরের সমাকলন বিষয়টি মোটামুটি চারটি ভাগে আলোচনা করা হবে। ভাগগুলি হল

(a) স্কেলার চলরাশির সাপেক্ষে ভেক্টর ফাংশনের সমাকলন

(b) রেখা সমাকলন (line integration)

(c) তল সমাকলন (Surface integration) এবং

(d) আয়তন সমাকল (Volume integration)

এককটি পাঠ করলে আপনারা জানতে পারবেন —

- ভেক্টর ফাংশনের অনির্দিষ্ট সমাকল কী
- রেখা সমাকলের সংজ্ঞা এবং রেখা সমাকলনের পদ্ধতি
- তল সমাকল ও সমাকলন
- আয়তন সমাকল ও সমাকলন

7.3 স্কেলার চলরাশির সাপেক্ষে ভেক্টরের সমাকলন

সংজ্ঞা 1 : যদি $\vec{\phi}(t)$ এবং $\vec{f}(t)$ ভেক্টর ফাংশন দুটি এমনভাবে সম্পর্কিত যাহাতে $\frac{d}{dt}\vec{\phi}(t) = \vec{f}(t)$ হয়, যেখানে t একটি স্কেলার চলরাশি,

তাহলে,

$$\int \vec{f}(t)dt = \int \frac{d}{dt}\vec{\phi}(t)dt = \vec{\phi}(t) + \vec{c} \text{ হয়}$$

প্রসঙ্গত বলা যায় এখনে $\vec{c}$ একটি যে কোনো ধ্রুবক ভেক্টর এই $\vec{\phi}(t)+\vec{c}$ ভেক্টরটিকে $\vec{f}(t)$ ফাংশনের অনির্দিষ্ট সমাকল (Indefinite integral) বলে। [এখানে $\vec{f}(t)$ এর সমাকলকে $\int \vec{f}(t)dt$ লেখা হয়েছে]

সংজ্ঞা 2 : মনে করি $\vec{f}(t)$, t-এর [a,b] অন্তরালে সন্তত ও সসীম। [a,b] অন্তরালকে $a = t_0 < t_2 \dots\dots\dots < t_n = b$ বিন্দুগুলি দ্বারা n অংশে ভাগ করা হল এবং —

$S = \vec{f}(\xi_1)(t_1 - t_0) + \vec{f}(\xi_2)(t_2 - t_1) + \dots \vec{f}(\xi_n)(t_n - t_{n-1})$ যোগফলটি নির্ণয় করা হল।

$\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots \xi_n$ বিন্দুগুলি যথাক্রমে $[t_1, t_0], [t_2, t_1] \ldots\ldots\ldots [t_n, t_{n-1}]$ অন্তরালের যে কোনো বিন্দু। এখন $n \to \infty$ করে বিভাজন সংখ্যা বাড়ান হল যাতে প্রতিটি $[t_i - t_{i-1}]$ অন্তরালের দৈর্ঘ্য খুব ছোট হতে থাকে এবং এই অবস্থায় S এর লিমিট নেওয়া হল। অর্থাৎ $\lim_{n\to\infty} S$ নেওয়া হল। এই লিমিটের অস্তিত্ব থাকলে $\lim_{n\to\infty} S$ কে বলা হয় $t = a$ থেকে $t = b$ অব্দি f(t) এর নির্দিষ্ট সমাকল বা সীমিত সমাকল। (Definite Integral) এই সমাকলকে $\int_a^b f(t)dt$ এইভাবে লেখা হয়।

দ্রষ্টব্য : সীমিত সমাকলের স্বাধীন সংজ্ঞা বিশদভাবে এখান দেওয়া হল না। কয়েকটি নির্দিষ্ট শর্ত সাপেক্ষে $a \le t \le b$ হলে $\int_a^b \vec{f}(t)$ সীমিত সমাকলের সংজ্ঞা আছে, দেখানো যায় কয়েকটি শর্ত সাপেক্ষে $\int_a^b \vec{f}(t)dt = \phi(b) - \phi(c)$ যখন $\bar{\phi}(t)$ হল $\vec{f}(t)$ এর অনির্দিষ্ট সমাকল।

7.4 আদর্শ সূত্রাবলী (Standard formulae)

নিম্নে কতিপয় আদর্শ সূত্র লিপিবদ্ধ করা হল যেগুলি মূলত সংজ্ঞার উপর নির্ভরশীল। সূত্রে ব্যবহৃত ভেক্টর ফাংশন দুটি $\vec{f}(t)$ এবং $\vec{F}(t)$, যেখানে t একটি স্কেলার চলরাশি।

(i) $\int \left(\vec{f} \cdot \frac{d\vec{F}}{dt} + \vec{F} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} \right) dt = \vec{f} \cdot \vec{F} + A,$ যেখানে A একটি ধ্রুবক স্কেলার রাশি।

$$\left[\because \frac{d}{dt}(\vec{f} \cdot \vec{F}) = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{F}}{dt} + \vec{F} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} \right]$$

(ii) (ক) $\int 2\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} dt = \vec{f} . \vec{f} + A = \left| \vec{f} \right|^2 + A$ A একটি ধ্রুবক স্কেলার রাশি।

(খ) $\int 2 \frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} dt = \left(\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| \right)^2 + A$

(iii) $\int \vec{f} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} dt = \vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt} + \vec{c}$, এখানে $\vec{c}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর।

$$\left[\because \frac{d}{dt}\left(\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt}\right) = \vec{f} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} + \frac{d\vec{f}}{dt} \times \frac{d\vec{f}}{dt} = \vec{f} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right]$$

(iv) $\int \left(\frac{1}{|\vec{f}|} \frac{d\vec{f}}{dt} - \frac{d|\vec{f}|}{dt} \frac{\vec{f}}{|\vec{f}|^2} \right) dt = \frac{\vec{f}}{|\vec{f}|} + \vec{c}$

$$\left[\because \frac{d}{dt} \frac{\vec{f}}{|\vec{f}|} = \frac{1}{|\vec{f}|} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} - \frac{1}{|\vec{f}|^2} \cdot \frac{d|\vec{f}|}{dt} \vec{f} \right]$$

(vi) যদি $\vec{a}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর হয় তবে

$$\int \vec{a} \times \frac{d\vec{f}}{dt} dt = \vec{a} \times \vec{f} + \vec{c}$$

(vi) যদি $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ হয় তবে [এখানে f_1, f_2, f_3 প্রত্যেকেই t-এর স্কেলার ফাংশন এবং $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ লম্ব কার্তিয় অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর সমূহ।]

$$\int \vec{f}(t)dt = \left\{\int f_1(t)dt\right\}\vec{i} + \left\{\int f_2(t)dt\right\}\vec{j} + \left\{\int f_3(t)dt\right\}\vec{k} + \vec{c}$$

দ্রষ্টব্য : উপরোক্ত সূত্র সমূহে সমাকলের ধ্রুবকগুলি কখনও স্কেলার এবং কখনও ভেক্টর রাশি হয়। কোনো ক্ষেত্রে কেমন ধ্রুবক হবে সে বিষয়ে সতর্ক থাকতে হবে।

7.4.1 ভেক্টর অবকল সমীকরণ

কোন ভেক্টর সমীকরণে যদি ভেক্টরের অবকলজ থাকে তবে তাকে ভেক্টর অবকল সমীকরণ বলে যেমন

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + n^2\vec{r} = 0$$

এখানে $\vec{r}(t)$ হল ভেক্টর ফাংশন, স্কেলার ক্যালকুলাসের মতো ভেক্টর কলনবিদ্যাতেও, অবকল সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করা হয়। এখানে বিশদ আলোচনা করা হল না। উদাহরণও অনুসরণ করলে অবকল সমীকরণের ধারণা পাবেন।

উদাহরণ 1. যদি $\vec{f}(t) = \sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + t\vec{k}$ হয় তবে

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} dt$$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : সূত্রানুসারে $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} dt = \left[\left(\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|\right)^2 + A\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j} + \vec{k}\right)^2 + A\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\cos^2 t + \sin^2 t + 1\right) + A\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= [2 + A]_0^{\frac{\pi}{2}} = (2 + A) - (2 + A) = 0$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} dt = 0$$

2. সময় $t = 0$ তে কোনো চলমান বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \vec{0}$ এবং $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}$ হলে

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a} \quad (\vec{a} \text{ ধ্রুবক ভেক্টর})$$

সমীকরণটি সমাধান করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{a}$

$$\therefore \int d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \int \vec{a}\, dt + \vec{c} \qquad [\text{ সমাকলন করে }]$$

বা $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}t + \vec{c}$

বা প্রাথমিক শর্তানুযায়ী, $\vec{u} = \vec{a}.0 + \vec{c} \Rightarrow \vec{c} = \vec{u}$

$\therefore \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}t + \vec{u}$

$\therefore \int d\vec{r} = \int \vec{a}tdt + \int \vec{u}dt + \vec{D}$ [সমাকলন করে]

বা $\vec{r} = \vec{a}\frac{t^2}{2} + \vec{u}t + \vec{D}$

আবার $\vec{r} = \vec{0}$, যখন $t = 0 \Rightarrow \vec{0} = \vec{D}$

$$\therefore \vec{r} = \vec{u}t + \vec{a}\frac{t^2}{2}$$

3. $\vec{f}(t) = 5t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + (3t^2 - 1)\vec{k}$ হলে (i) $\int \vec{f}(t)dt$ এবং

(ii) $\int_1^2 \vec{f}(t)dt$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : (i) $\int \vec{f}(t)dt = \int \left\{5t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + (3t^2 - 1)\vec{k}\right\}dt = 5\frac{t^3}{3}\vec{i} + 2.\frac{t^2}{2}\vec{j} + \left(3\frac{t^3}{3} - t\right)\vec{k} + \vec{c}$

(ii) $\int_1^2 \vec{f}(t)dt = \left[5\frac{t^3}{3}\vec{i} + t^2\vec{j} + (t^3 - t)\vec{k}\right]_1^2 = \left(\frac{40}{3}\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}\right) - \left(\frac{5}{3}\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}\right)$

$$= \frac{35}{3}\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

অনুশীলনী - 1

1. যদি $\vec{f}(t) = 5t^4\vec{i} + (3t^2+2t)\vec{j} - 4t^3\vec{k}$ তাহলে

(i) $\int \vec{f}(t)dt$ এবং (ii) $\int_1^3 \vec{f}(t)dt$-এর মান নির্ণয় করুন।

[উত্তর (i) $t^5\vec{i} + (t^3+t^2)\vec{j} - t^4\vec{k}$ (ii) $242\vec{i} + 34\vec{j} - 80\vec{k}$]

2. যদি $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t^2 j + (t^3-1)\vec{k}$ এবং $\vec{F}(t) = t^2\vec{i} - t\vec{j} + 4k$ হয়

তবে দেখান যে (i) $\int_0^1 \vec{f}.\vec{F}dt = -3$ (ii) $\int_0^1 \vec{f} \times \vec{F}dt = \frac{31}{30}\vec{i} - \frac{13}{6}\vec{j} - \frac{8}{15}\vec{k}$

3. দেখান যে $\int_1^2 \vec{f} \times \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}dt = 12\vec{i} + 32\vec{j} - 174\vec{k}$

যখন $\vec{f}(t) = (t^3+1)\vec{i} + (2t+3)\vec{j} + (t^2-1)\vec{k}$

4. যদি t সময়ে কোনো বস্তুকণার ত্বরণ $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\sin t\vec{i} + 3\cos t\vec{j} + 4\sec^2 t + \vec{k}$ হয় এবং t=0 তে বেগ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0}$ এবং $\vec{r} = \vec{0}$ হয় তবে দেখান যে যে কোনো সময় t-তে

$\vec{v} = 2(1-\cos t)\vec{i} + 3\sin t\vec{j} + 4\tan t\vec{k}$ এবং সরণ $\vec{r} = 2(t-\sin t)\vec{i} + 3(1-\cos t)\vec{j} + 4\log\sec t\vec{k}$

সংকেত : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\sin t\vec{i} + 3\cos tj + 4\sec^2 tk,$

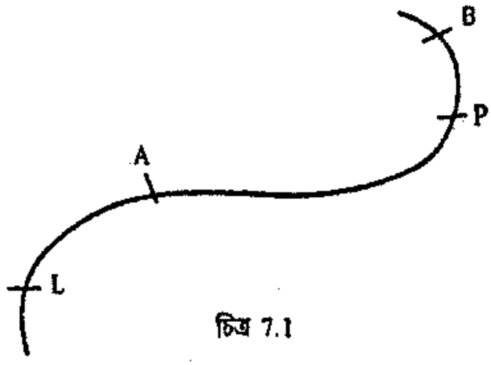
সমাকলন করলে $\vec{v} = -2\cos ti + 3\sin tj + 4\tan tk + \vec{c}$

7.5 রেখা সমাকলন

যদি কোনো বিন্দু (x,y,z) এর x,y,z স্থানাঙ্কগুলি একটি স্কেলার চলরাশি t-এর উপর নির্ভরশীল হয় অর্থাৎ ঐ বিন্দুর স্থান ভেক্টর $\bar{r}(t = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ হয় তখন $\bar{r} = \bar{r}(t)$ দ্বারা একটি বক্ররেখা নির্দেশিত হয়। এখানে t-এর জন্য নির্ধারিত বিভিন্ন মানের জন্যে বক্রের উপর বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর পাওয়া যায়।

আমরা জানি $\frac{d\bar{r}}{dt}$ হল বক্ররেখার উপর $\bar{r}$ বিন্দুতে স্পর্শক ভেক্টর। t -এর জন্য নির্ধারিত এবং প্রয়োজনীয় অন্তরালে $(t_1 \le t \le t_2)$ সমস্ত বিন্দুতে যদি $\bar{r}$ এবং $\bar{r}$ এর প্রথম ক্রমের অবকলজ সন্তত হয় তবে $\bar{r}(t)$ $= x(t)i + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ বক্ররেখার ঐ অংশকে (যে বিন্দুর স্থান ভেক্টর $\bar{r}(t_1)$ সেখান থেকে যে বিন্দুর স্থান ভেক্টর $\bar{r}(t_2)$ সেই বিন্দু পর্যন্ত) সুষম (smooth) বলা হয়। আমরা এই পর্যায়ে বক্ররেখা বলতে এই রকম সুষম বক্ররেখার কথা অথবা কখনও কয়েকটি সুষম বক্রাংশ পরপর যুক্ত করে যে বক্ররেখা তৈরি করা যায় তার কথা বুঝব।

ধরা যাক্ $\bar{r} = \bar{r}(s)$ একটি সুষম বক্ররেখা। এখানে s হল ঐ বক্রের কোনো একটি বিন্দু L থেকেঅন্য যে কোনো বিন্দু P-এর বক্ররেখা বরাবর দূরত্ব। আরও ধরা যাক্ $s = s_1$-এর জন্য রেখাটির উপর A বিন্দু এবং $s = s_2$ এর জন্য B বিন্দুর স্থান ভেক্টর পাওয়া যায়। এখন যদি ঐ বক্ররেখার AB অংশকে C দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং যদি C-এর সমস্ত বিন্দুতে অন্য একটি ভেক্টর $\bar{F}$ সংজ্ঞায়িত থাকে তবে C-এর যে কোন বিন্দুতে একক স্পর্শক $\bar{t}$ বরাবর $\bar{F}$ এর উপাংশ $\bar{F}.\bar{t}$ হয় এবং $\bar{F}.\bar{t}$ s এর ফাংশন থাকে। এখন $s = s_1$ থেকে $s = s_2$ অব্দি $\bar{F}.\bar{t}$ এর s এর সাপেক্ষ নির্দিষ্ট সমাকলকে $\bar{F}$ ভেক্টর ফাংশনটির C এর উপর রেখা সমাকল বলে। এই রেখা সমাকলের $\int_C \bar{F}.tds$ লেখা হয়।



চিত্র 7.1

অর্থাৎ $\int_C \bar{F}.\bar{t}ds = \int_C \bar{F}.\frac{d\bar{r}}{ds}ds$ $\left[\because t = \frac{d\bar{r}}{ds}\right]$

$= \int_C \bar{F}.d\bar{r}$ হল, C -এর উপর $\bar{F}$এর রেখা সমাকল বা স্পর্শক বরাবর রেখা সমাকল (Tangen-

যদি $\vec{F}$ ভেক্টর ফাংশনটিকে কার্তিয় স্থানাঙ্ক অনুযায়ী

$$\vec{F} = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$$

এইভাবে লেখা হয় এবং $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$ হয়

তবে $\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_c (F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$

$$= \int_c (F_1dx + F_2dy + F_3dz) = \int_{s_1}^{s}\left(F_1\frac{dx}{ds} + F_2\frac{dy}{ds} + F_3\frac{dz}{ds}\right)ds$$

আবার যদি প্রচল s-এর পরিবর্তে t হয় তাহলে

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2}\left(F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt}\right)dt$$

যেখানে t-এর মান t_1 ও t_2-র জন্য c এর প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের স্থান-ভেক্টর পাওয়া যায়।

মন্তব্য : যদি C একটি সরল বদ্ধ বক্ররেখা (simple closed curve) হয় অর্থাৎ যদি বদ্ধ বক্ররেখাটি নিজেকে নিজে ছেদ না করে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু A থেকে শুরু হয়ে আবার A তে শেষ হয় তখন সমাকলটিকে লেখা হয় $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ । তখন উপরিউক্ত সমাকলের প্রকাশ নিম্নরূপ হয় :

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C (F_1dx + F_2dy + F_3dz)$$

বদ্ধরেখার এই সমাকলকে সারকুলেশন বলে।

মন্তব্য : যদি $\vec{F}$ ভেক্টরটি বলকে নির্দেশ করে তাহলে $\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}$ হল বক্রের উপর $\vec{r}$ বিন্দুতে স্পর্শক বরাবর বলের উপাংশ এবং $\left(F\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}\right)ds = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ হল বক্র বরাবর ds সরণের জন্য কৃতকার্য। অতএব C বরাবর মোট দৈর্ঘ্যই যদি সরণ হয় তবে মোট সাধিত কার্য $= \int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$, এখানে অবশ্যই সরণের দিক বরাবর সমাকলন করতে হবে।

উদাহরণ : 1. যদি c বক্ররেখাটি xy তলে $y = 4x^2$ হয় এবং

$\vec{F} = 2x^2\vec{i} + (3x^2 - y^2)\vec{j}$ হয় তবে রেখাটির (0,0) বিন্দু থেকে (1,4) পর্যন্ত অংশে $\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $y=4x^2$-এর প্রচল সমীকরণ $x=t,\ y=4t^2$, অতএব

$$\vec{F}.d\vec{r}=\left\{2t^2i+(3t^2-16t^4)j\right\}.\left\{dt\vec{i}+8tdt\vec{j}\right\} \qquad \therefore\ \vec{r}=t\vec{i}+4t^2\vec{j}$$

$$=2t^2dt+(3t^2-16t^4).8t\,dt$$

(0,0) ও (1,4) বিন্দুতে যথাক্রমে t-এর মান $t=0$ এবং $=1$

$$\therefore \int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_0^1\left\{2t^2+8t\left(3t^2-16t^4\right)\right\}dt$$

$$=\left[2.\frac{t^3}{3}+24.\frac{t^4}{4}-128\frac{t^6}{6}\right]_0^1=\frac{2}{3}+6-\frac{64}{3}=-\frac{44}{3}$$

2. যদি বল ভেক্টর $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}$ হয় তাহলে $y=2x-4$ সরলরেখা বরাবর (2, 0) থেকে (3, 2) বিন্দু পর্যন্ত যেতে কৃতকার্য কত?

সমাধান : সাধিত কার্য $=\int_c \vec{F}.d\vec{r}=\int_c (F_1.dx+F_2dy)$

$$=\int_{x=2}^{3}\left[\{x+(2x-4)\}dx+\{2(2x-4)-x\}2dx\right] \qquad [\because y=2x-4 \text{ এবং } \frac{dy}{dx}=2dx]$$

$$=\int_2^3(9x-20)dx=\left[9\frac{x^2}{2}-20x\right]_2^3=\frac{5}{2}$$

3. যদি $\vec{F}=\left(x^2+2y^2\right)\vec{i}+5y^2z\vec{j}-6yz^2\vec{k}$ হয় তাহলে $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ এর মান (0,0,0) থেকে (1,1,1) পর্যন্ত বার করুন,

যখন (i) $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ হল বক্ররেখা c-এর সমীকরণ

(ii) c কয়েকটি সরলরেখাংশের সমষ্টি : (0,0,0) থেকে (1,1,0) এবং তারপরে (1,1,0) থেকে 1,1,1)

সমাধান : (i) $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ বক্ররেখায় (0,0,0) ও (1,1,1) বিন্দুদ্বয়ে t-এর মান যথাক্রমে $t=0,\ t=1$

$$\therefore \int_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_c \left[\left(x^2+2y^2\right)dx + 5y^2zdy - 6yz^2dz\right]$$

$$= \int_{t=0}^{1}\left[(t^2+2t^4)dt + 5t^4.t^3d(t^2) - 6t^2.t^6d(t^3)\right]$$

$$= \int_0^1 (t^2+2t^4)dt + 5t^7.2tdt - 6t^8.3t^2dt$$

$$= \int_0^1 (t^2+2t^4+10t^8-18t^{10})dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + 10\frac{t^9}{9} - 18\frac{t^{11}}{11}\right]_0^1 = \frac{103}{495}$$

(ii) (0,0,0) ও (1,1,0) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-0}{0-0} = t$ (ধরি) অর্থাৎ $x = t,\ \ y = t,\ \ z = 0$

$\therefore$ (0,0,0) থেকে (1,1,0) পর্যন্ত নির্ণেয় সমাকলের অংশ

$= \int_{t=0}^{1}\left[(t^2+2t^2)dt + 5t^2.0dt - 6.t.0.0\right],$ $\qquad\qquad [\because x = t, y = t, z = 0]$

$$= \left[3\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1$$

আবার (1,1,0) ও (1,1,1) বিন্দুদ্বয় সংযোগকারী সরলরেখার বিশেষত্ব x=1, y=1 এবং z-এর মান 0 থেকে 1 পর্যন্ত পরিবর্তনশীল। অতএব এই রেখাংশে নির্ণেয় সমাকলের অংশ

$= \int_{z=0}^{1}(1^2+2.1^2)0 + 5.1^2.z.0 - 6.1.z^2dz$ $\qquad\qquad [\because x = 1, y = 1$ এবং z পরিবর্তনশীল

dx=0, dy=0 ইত্যাদি]

$$= -\int_0^1 6z^2dz = -\left[6.\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = -2$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাকল $= 1 - 2 = -1$

7.5.1 অন্যপ্রকারের রেখা সমাকল

(i) $\int_c \vec{F}\times d\vec{r}$ (ii) $\int_c \phi d\vec{r}$, যেখানে $\vec{F}$ এবং ϕ উভয়েই সন্তত কিন্তু $\vec{F}$ ভেক্টর ফাংশন এবং ϕ স্কেলার ফাংশন।

(i) আগের মতই $\int_c \vec{F}\times d\vec{r} = \int_c \vec{F}\times\frac{d\vec{r}}{ds}ds = \int_c \vec{F}\times\vec{t}ds$

আবার যদি $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ এবং $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

হয় তখন $\int_c \vec{F}\times d\vec{r} = \int_c \left(F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}\right)\times\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$

$$= \vec{i}\int_c \left(F_2dz - F_3dy\right) + \vec{j}\int_c \left(F_3dx - F_1dz\right)$$

$$+ \vec{k}\int_c (F_1dy - F_2dx)$$

(ii) এখানে $\int_c \phi d\vec{r} = \int_c \phi(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$

$$= i\int_c \phi dx + \vec{j}\int_c \phi dy + \vec{k}\int_c \phi dz$$

উদাহরণ : 1. যদি $\phi = xy + yz + zx$, $\vec{F} = x\ y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$ এবং বক্র রেখাংশে $C: x = t^2,\ y = 2t,\ z = t^3$ এর t=0 থেকে t=1 হয় তবে

(i) $\int_c \phi d\vec{r}$ এবং (ii) $\int_c \vec{F}\times d\vec{r}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান (i) c বরাবর $\phi = xy + yz + zx = t^2.2t + 2t.t^3 + t^3.t^2 = 2t^3 + 2t^4 + t^5$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + t^3\vec{k} \Rightarrow d\vec{r} = (2t\vec{i} + 2\vec{j} + 3t^2\vec{k})dt$

$$\therefore \int_c \phi d\vec{r} = \vec{i}\int_0^1 (2t^3 + 2t^4 + t^5)2tdt + \vec{j}\int_0^1 (2t^3 + 2t^4 + t^5)2dt + \vec{k}\int_0^1 (2t^3 + 2t^4 + t^5)3t^2dt$$

$$= 2\vec{i}\left[2\frac{t^5}{5} + 2.\frac{t^6}{6} + \frac{t^7}{7}\right]_0^1 + 2\vec{j}\left[2\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{6}\right]_0^1 + 3\vec{k}\left[2\frac{t^6}{6} + 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^8}{8}\right]_0^1$$

$$= \frac{184}{105}\vec{i} + \frac{32}{15}\vec{j} + \frac{125}{56}\vec{k}$$

(ii) c বরাবর $\vec{F} = t^4.2t\vec{i} + 4t^2.t^3\vec{j} + t^6.t^2\vec{k} = 2t^5\vec{i} + 4t^5\vec{j} + t^8\vec{k}$

$$\therefore \vec{F}\times d\vec{r} = \left(2t^5\vec{i} + 4t^5\vec{j} + t^8\vec{k}\right)\times\left(2t\vec{i} + 2j + 3t^2\vec{k}\right)$$

$$= \left[\left(12t^7 - 2t^8\right)\vec{i} + \left(2t^9 - 6t^7\right)\vec{j} + \left(4t^5 - 8t^6\right)\vec{k}\right]dt$$

$$\therefore \int_c \vec{F}\times d\vec{r} = \vec{i}\int_0^1\left(12t^7 - 2t^8\right)dt + \vec{j}\int_0^1\left(2t^9 - 6t^7\right)dt + \vec{k}\int_0^1\left(4t^5 - 8t^6\right)dt$$

$$= 2\vec{i}\left[6.\frac{t^8}{8} - \frac{t^9}{9}\right]_0^1 + 2\vec{j}\left[\frac{t^{10}}{10} - 3.\frac{t^8}{8}\right]_0^1 + 4\vec{k}\left[\frac{t^6}{6} - 2.\frac{t^7}{7}\right]_0^1$$

$$= \frac{23}{18}\vec{i} - \frac{11}{20}\vec{j} - \frac{10}{21}\vec{k}$$

অনুশীলনী – 2

1. যদি $\vec{F} = xy\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ হলে $(0,0)$ থেকে $(1,1)$ পর্যন্ত $y = x^3$ বরাবর $\vec{F}$ এর রেখা সমাকল নির্ণয় করুন।

সংকেত: এখানে $x = t,\ y = t^3$ অতএব $dx = dt,\ dy = 3t^2dt,\ \vec{F} = t^4\vec{i} + (t^2 + t^6)\vec{j}$

$$\therefore \int_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_{t=0}^1\left\{t^4dt + \left(t^2 + t^6\right)3t^2dt\right\} = \left[4.\frac{t^5}{5} + 3.\frac{t^9}{9}\right]_0^1 = \frac{17}{15}$$

2. যদি $\vec{F} = \left(x^2 + y\right)\vec{i} + \left(x^2 + y^2\right)\vec{j}$ এবং $y = x^2 + 1$ বক্ররেখা বরাবর $(1,2)$ থেকে $(2,5)$ বিন্দু পর্যন্ত রেখাংশ c হয় তাহলে $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ এর মান নির্ণয় করুন।

[সংকেত : $\int_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_c \left(x^2 + y\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy = \int_{x=1}^2\left\{x^2 + (x^2 + 1)\right\}dx$

$$+ \int_{y=2}^5\left\{(y-1) + y^2\right\}dy = \left[2\frac{x^3}{3} + x\right]_1^2 + \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} - y\right]_2^5 = \frac{313}{6}\ ]$$

3. $\vec{F} = (2 - x)\vec{i} - y\vec{j} + xyz\vec{k}$ এবং $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$ বৃত্তটি c হলে c এর বেষ্টনীতে $\vec{F}$ এর সারকুলেশন (Circulation) নির্ণয় করুন।

[সংকেত: বৃত্তের সমীকরণ $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 0 \Rightarrow dx = -2\sin t dt.\quad dy = 2\cos t dt,\ dz = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সারকুলেশন $= \oint_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_{t=0}^{2\pi} \{(2-2\cos t)(-2\sin t dt) - 2\sin t . 2\cos t dt + 2\cos t . 2\sin t . 0.0\}$

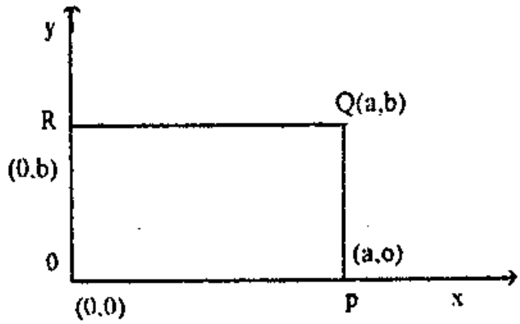
$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin t)dt$$

$$= +4 \times 0 = 0\ ]$$

4. $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$ এবং xy তলে $y = 0, x = a, y = b, x = 0$ সরলরেখাগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ আয়তক্ষেত্র c হলে $\oint_c \vec{F}.d\vec{r}$ এর মান কত?

[সংকেত: এখানে $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}\ ; z = 0$

$\therefore \oint_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_c \{(x^2 + y^2)dx - 2xydy\}$



চিত্র–7.2

এখন OP বরাবর y=0, dy=0 এবং x-এর মান 0 থেকে a পর্যন্ত পরিবর্তনশীল

PQ বরাবর x=a, dx=0 এবং y-এর মান 0 থেকে b পর্যন্ত পরিবর্তনশীল

QR বরাবর y=b, dy=0 এবং x-এর মান a থেকে 0 পর্যন্ত পরিবর্তনশীল

RO বরাবর x=0, dx=0 এবং y-এর মান b থেকে 0 পর্যন্ত পরিবর্তনশীল

অতএব, $\oint_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^a x^2 dx + \int_0^b (-2ay)dy + \int_a^0 (x^2 + b^2)dk + \int_b^0 0dy$

$$= -2ab^2\ ]$$

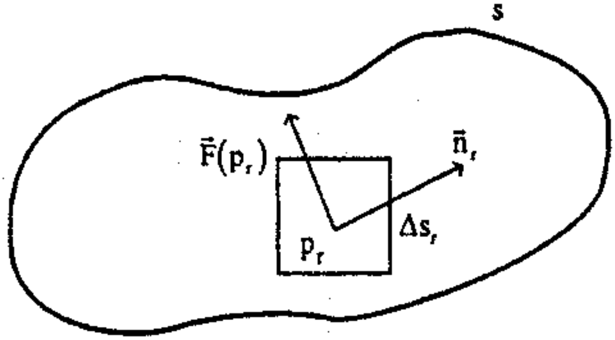
7.6 তল সমাকলন

যদি একটি তল s এমন হয় যে ঐ তলের প্রত্যেক বিন্দুতে কেবলমাত্র একটি করে অভিলম্ব অঙ্কন করা যায় এবং ঐ অভিলম্বের দিক্ সন্ততভাবে তলের বিন্দুগুলির উপর নির্ভরশীল হয় তাহলে ঐ তল s কে সুষম তল (Smooth Surface) বলা হয়।

সুষম নয় এমন কোনো তলকে যদি কতকগুলি সসীম সংখ্যক সুষম তলে বিভক্ত করা যায় তাহলে ঐ তলকে খণ্ডভাবে (piecewise) সুষমতল বলে।

[উদাহরণ : একটি গোলকের তল সুষম এবং একটি আতঘনের তল খণ্ডভাবে সুষম।]

ধরা যাক্ সসীম ক্ষেত্রফল যুক্ত একটি তল s এর উপর বিন্দুগুলিতে সংজ্ঞাত $f(x,y,z)$ একটি একমান বিশিষ্ট (Single valued) স্কেলার ফাংশন। এই s তলকে n সংখ্যক খণ্ডে বিভক্ত করা হল যাদের ক্ষেত্রফল $\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \Delta s_3,\ldots\ldots\ldots,\Delta s_n$। ধরা যাক্ এদের প্রত্যেক অংশ Δs_r-এ একটি করে ইচ্ছামত (arbitrary) বিন্দু p_r নেওয়া হল যার স্থানাঙ্ক (x_r, y_r, z_r). এখন



চিত্র–7.3

$$\sum_{r=1}^{n} f(P_r)\,\Delta s_r,\ \text{যেখানে}\ f(p_r) = f(x_r, y_r, z_r),$$

এই যোগফলটি গঠন করে এমনভাবে লিমিট নেওয়া হল যেন $n \to \infty$ হলে উপরোক্ত ক্ষেত্রফল $\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ldots\ldots\ldots,\Delta s_n$ গুলির মধ্যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফলটি $\to 0$ হয়।

যদি এই লিমিটের অস্তিত্ব থাকে তাহলে তাকে

$$\iint_s f(x,y,z)\,ds$$

দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং একে s তলের উপরে f এর তল সমাকল বলে।

সাধারণভাবে যদি s তলটি সুষম বা খণ্ডভাবে সুষম ও $f(x,y,z)$ ফাংশনটি s তলে সন্তত হয় তাহলে উপরোক্ত লিমিটের অস্তিত্ব থাকে।

অভিলম্ব তল সমাকল (Normal surface integral)

উপরের স্কেলার ফাংশন $f(x,y,z)$-এর পরিবর্তে যদি ভেক্টর ফাংশন $\vec{F}(x,y,z)$ নেওয়া যায়, যেখানে $\vec{F}(p_r) = \vec{F}(x_r, y_r, z_r)$ এবং Δs_r এর উপর p_r বিন্দুতে ধনাত্মক দিকে অঙ্কিত একক অভিলম্ব যদি $\vec{n}_r$ হয়, তাহলে

$$\sum_{r=1}^{n} \vec{F}(P_r).\vec{n}_r \Delta s_r$$

এইভাবে গঠিত যোগফলের একইভাবে লিমিট্ নিলে ঐ লিমিটকে (যদি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়) s-এর উপর $\vec{F}$-এর অভিলম্ব বরাবর উপাংশের তল সমাকল বলে। উক্ত মানকে

$$\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds$$

এই আকারে প্রকাশ করা হয়। এক্ষেত্রেও s একটি সুষম বা খণ্ডভাবে সুষমতল এবং $\vec{F}$ একটি সন্তত ভেক্টর ফাংশন।

এখানে ds হল s তলের একটি ছোট অংশের ক্ষেত্রফল এবং $\vec{n}$ ঐ ছোট অংশ ds-এর উপর একক অভিলম্ব।

$\therefore\ \vec{n}ds = \vec{ds} =$ ভেক্টর ক্ষেত্রফল যার স্কেলার ক্ষেত্রফল ds

$\therefore \iint_s \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_s \vec{F}.\vec{ds}$

এই তল সমাকলকে s এর মধ্য দিয়ে $\vec{F}$ এর flux (ফ্লাক্স) বলা হয়।

মন্তব্য 1. যদি s তলের উপর p বিন্দুতে ধনাত্মক দিকে অঙ্কিত একক অভিলম্ব $\vec{n}$ যথাক্রমে x, y ও z অক্ষের সাথে α, β ও γ কোন করে, তবে $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ আবার $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ হলে $\vec{F}.\vec{n} = F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma$ এবং $\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_s (F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma)ds$

মন্তব্য 2. আমরা জানি Δs_r ক্ষেত্রের xy -তলে লম্ব অভিক্ষেপ (Projection) হল $\left|(\vec{n}_r\Delta s_r).\vec{k}\right|$ বা $\left|\vec{n}_r.\vec{k}\right|\Delta s_r$ (যেহেতু xy তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর $\vec{k}$)। এই লম্ব অভিক্ষেপক $\Delta x_r \Delta y_r$ দ্বারা চিহ্নিত করলে পাই

$$\left|\vec{n}_r.\vec{k}\right|\Delta s_r = \Delta x_r \Delta y_r$$

$$\therefore\quad \Delta s_r = \frac{\Delta x_r \Delta y_r}{\left|\vec{n}_r.\vec{k}\right|}$$

$$\therefore\quad \iint_s \vec{F}.\vec{n}ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \vec{F}(p_r).\vec{n}_r \Delta s_r$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \vec{F}(p_r).\vec{n}_r \frac{\Delta x_r \Delta y_r}{\left|\vec{n}_r.\vec{k}\right|}$$

$$= \iint_R \vec{F}.\vec{n}\frac{dxdy}{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}$$ যেখানে xy-তলে s-এর লম্ব অভিক্ষেপ R.

মন্তব্য 3. যদি কোনো তলের সমীকরণ $f(x,y,z)=c$; তাহলে ঐ তলের কোন বিন্দু (x,y,z)-তে

একক অভিলম্ব $\vec{n} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right|}$

(একক 8-এর 8.3.2 অনুচ্ছেদে আলোচিত হয়েছে।)

7.6.1 অন্য প্রকারের তল সমাকল

যদি $\vec{F}=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}+F_3\vec{k}$ একটি ভেক্টর ফাংশন এবং $\phi(x,y,z)$ একটি স্কেলার ফাংশন হয় তাহলে

(a) $\iint_s \vec{F}ds = \vec{i}\iint_s F_1 ds + \vec{j}\iint_s F_2 ds + \vec{k}\iint_s F_3 ds$

(b) $\iint_s \vec{F}\times\vec{n}ds = \vec{i}\iint_s (F_2n_3 - F_3n_2)ds + \vec{j}\iint_s (F_3n_1 - F_1n_3)ds + \vec{k}\iint_s (F_1n_2 - F_2n_1)ds$

$[\because \vec{F}\times\vec{n} = \begin{vmatrix} i & \vec{j} & \vec{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}$ যখন $\vec{n}=n_1\vec{i}+n_2\vec{j}+n_3\vec{k}$

$= \vec{i}(F_2n_3 - F_3n_2)+\vec{j}(F_3n_1 - F_1n_3)+\vec{k}(F_1n_2 - F_2n_1)]$

(c) $\iint_s \phi\vec{d}s = \iint_s \phi\vec{n}ds$

উদাহরণ 1 যদি $\vec{F}=z\vec{i}+xz\vec{j}+(x+y)\vec{k}$ হয় এবং s তলটি যদি প্রথম অষ্টমাংশে **(First octant)** অবস্থিত $x^2+y^2+z^2=1$ গোলকের তল হয় তবে $\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে তল $f(x,y,t)=x^2+y^2+z^2-1$ অতএব

$$\vec{n}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}{\left|\dfrac{\partial f}{\delta x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\delta y}\vec{j}+\dfrac{\partial f}{\delta z}\vec{k}\right|} = \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{\left|2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}\right|}$$

$$=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \quad [\because x^2+y^2+z^2=1]$$

$$\vec{F}.\vec{n} = \left\{z\vec{i} + xz\vec{j} + (x+y)\vec{k}\right\}.(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= xz + xyz + z(x+y) = z(2x+y+xy)$$

$$\vec{n}.\vec{k} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).\vec{k} = z$$

$\therefore \iint_s \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_R \vec{F}.\vec{n}\frac{dxdy}{|\vec{n}.k|}$ এখানে R হল $x^2+y^2=1,\ z=0\ \ x\geq 0,\ y\geq 0$

$$= \iint_R z\frac{(2x+y+xy)}{z}dxdy$$

$$= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1}\left(2r\cos\theta + r\sin\theta + r^2\sin\theta\cos\theta\right).rd\theta dr$$

[$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ধরে]

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{2\cos\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 + \sin\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 + \sin\theta\cos\theta\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}\cos\theta + \frac{1}{3}\sin\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta\right)d\theta$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sin\theta - \frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1}{16}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{16}\cos\pi\right) - \left(\frac{2}{2}\sin 0 - \frac{1}{3}\cos 0 - \frac{1}{16}\cos 0\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} - 0 + \frac{1}{16}\right) - \left(0 - \frac{1}{3} - \frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{16} + \frac{1}{3} + \frac{1}{16} = \frac{9}{8}$$

2. যদি $\vec{F} = y^2\vec{i} + x\vec{j} - zx\vec{k}$ হয় এবং s তলটি যদি $x^2+y^2=4$ বেলনের সেই অংশ যা প্রথম অষ্টমাংশে অবস্থিত এবং $z=0$ ও $z=2$ তলদ্বয়ের অন্তর্বর্তী হয়, তবে $\iint \vec{F}.\vec{n}ds$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $\vec{n} = s$ তলের (x, y, z) বিন্দুতে একক অভিলম্ব

$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial t}\vec{k}\right|}, \qquad \text{যখন } f = x^2 + y^2$$

$$= \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j}}{\left|2x\vec{i} + 2y\vec{j}\right|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}(x\vec{i} + y\vec{j}) \qquad [\because x^2 + y^2 = 4]$$

এখানে s তলটি যেহেতু xy তলের সাথে লম্ব সেইজন্য ঐ তলে s এর লম্ব অভিক্ষেপ নেওয়া যাবে না। যদি অন্য একটি স্থানাঙ্কতল xz -এ s এর লম্ব অভিক্ষেপ নেওয়া হয় তাহলে

$\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_R \vec{F}.\vec{n}\frac{dxdz}{\left|\vec{n}.\vec{j}\right|}$, যেখানে xz -তলে s এর লম্ব অভিক্ষেপ R.

এখন $\vec{F}.\vec{n} = \left(y^2\vec{i} + x\vec{j} - zx\vec{k}\right).\frac{1}{2}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = \frac{1}{2}\left(xy^2 + xy\right)$

$$\vec{n}.\vec{j} = \frac{1}{2}(x\vec{i} + y\vec{j}).\vec{j} = \frac{1}{2}y$$

$\therefore$ নির্ণেয় তল সমাকল $= \iint_R \frac{1}{2}(xy^2 + xy).\frac{dxdz}{\frac{1}{2}y} = \int_{x=0}^{2}\int_{z=0}^{2} x(y+1)dxdz$

$$= 2\int_{x=0}^{2} x\left(\sqrt{4 - x^2} + 1\right)dx$$

$$= 2\int_{2}^{0} t(-tdt) + 2.\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \qquad [4 - x^2 = t^2 \text{ ধরে}]$$

$$= 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 + 4 = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3}$$

7.7 আয়তন সমাকলন

ধরা যাক্ s তলদ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের আয়তন v এবং ঐ v এর সকল বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত $f(x,y,z)$ একটি এক মান বিশিষ্ট স্কেলার ফাংশন। এই v আয়তনকে n সংখ্যক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র আয়তন $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots\ldots, \Delta v_n$ -এ বিভক্ত করা হল। ধরা যাক এদের প্রত্যেক অংশ Δv_r -তে একটি করে ইচ্ছামতো বিন্দু $p_r(x_r, y_r, z_r)$ নিয়ে $\sum_{r=1}^{n} f(p_r)\Delta v_r$, যেখানে $f(p_r) = f(x_r, y_r, z_r)$,

এই যোগফলটি নেওয়া হল এবং যোগফলটির এমন ভাবে লিমিট নেওয়া হল যেন $n \to \infty$ হলে উপরোক্ত ক্ষুদ্র আয়তন $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$ গুলির মধ্যে বৃহত্তম আয়তন $\to 0$ হয়।

যদি এই লিমিটের অস্তিত্ব থাকে তাহলে তাকে

$$\iiint_{v} f(x,y,z)dv$$

দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং একে v-এর উপর f-এর আয়তন সমাকল বলে।

সাধারণভাবে যদি s তলটি সুষম বা খণ্ডভাবে সুষম এবং f ফাংশনটি v-এর সব বিন্দুতে সন্তত হয় তাহলে উপরোক্ত লিমিটের অস্তিত্ব থাকে। এক্ষেত্রে আয়তন v-এর উপ বিভিভক্তিকরন এবং প্রত্যেক উপবিভাগে একটি করে বিন্দু p_r এর পছন্দের উপর লিমিটের মান নির্ভর করে না।

যদি $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$

ভেক্টর ফাংশনটি v এর সববিন্দুতে একমান বিশিষ্ট এবং সন্তত হয় তবে $\vec{F}$ এর আয়তন সমাকলকে নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায় :

$$\iiint_{v} \vec{F}dv = i\iiint_{v} F_1 dv + \vec{j}\iiint_{v} F_2 dv + \vec{k}\iiint_{v} F_3 dv$$

উদাহরণ 1. আয়তঘন $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c$,-এর ক্ষেত্রে $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ভেক্টর ফাংশনটির আয়তন সমাকল নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $dv = dxdydz$ ধরে নির্ণেয় সমাকল

$$\iiint_{v} \vec{F}dv = \vec{i}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} xdxdydz + j\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} ydxdydzt + \vec{k}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} zdxdydz \ldots\ldots\ldots(i)$$

এখন, $\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} xdxdydz = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} x[z]_0^c dxdy = c\int_{x=0}^{a} x[y]_0^b dx$

$$= bc\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^2bc}{2}$$

অনুরূপে $\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} y\,dxdydz = \frac{ab^2c}{2}$

এবং $\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} z\,dxdydz = \frac{abc^2}{2}$

$\therefore \iiint_v \vec{F}dv = \frac{1}{2}abc\,(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$ [(i) নং-এ মান বসিয়ে]

2. যদি $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল v হয় তবে $\iiint_v \vec{F}dv$ -এর মান নির্ণয় করুন যখন $\vec{F} = xy\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$.

সমাধান : নির্ণেয় সমাকল $\iiint_v \vec{F}dv = \vec{i}\int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{2} xy\,dxdydz + \vec{j}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{2} z\,dxdydz$

$$+\vec{k}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{2} y\,dxdydz \text{ ....(i)}$$

এখন $\int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{2} xy\,dxdydz = \int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xy[z]_0^2\,dxdy = 2\int_{x=-2}^{2} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx$

$$= \int_{-2}^{2} x.0x = 0$$

$\int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{2} z\,dxdydz = \int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 dxdy = 2\int_{-2}^{2}[y]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

$$= 4\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 4.2\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

[$\because \sqrt{4-x^2}$ জোড় অপেক্ষক]

$$= 8\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 = 8\left[0 + 2.\frac{\pi}{2}\right] = 8\pi$$

অনুরূপে $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{2} y\,dxdydz = 0$

$\therefore \iiint_v \vec{F}dv = \vec{i}.0 + \vec{j}.8\pi + \vec{k}.0 = 8\pi\vec{j}$

অনুশীলনী–3

1. $\vec{F}(x,y,z)=2x\vec{i}+yz\vec{j}+z^2\vec{k}$ এবং s তলটি $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=2$ তলগুলি দ্বারা পরিবেষ্টিত হলে $\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds$ এর মান কত?

[সংকেত: z = 0 তলের জন্য $\vec{n}=-\vec{k},\ \iint_{s_1}\vec{F}.\vec{n}ds=-\iint_{s_1}\vec{F}.\vec{k}ds=\iint_{s_1}0ds$ [z = 0 বসিয়ে]

z = 2 তলের জন্য $\vec{n}=\vec{k},\ \iint_{s_2}\vec{F}.\vec{n}ds=\iint_{s_2}\vec{F}.\vec{k}ds=\iint_{s_2}4ds$ [z = 2 বসিয়ে]

$$=4.4\pi$$

$[\because\ \pi r^2=\pi 2^2=4\pi]$

এবং সর্বশেষে $x^2+y^2=4$ বক্রতলের জন্য $\vec{n}=\dfrac{2x\vec{i}+2y\vec{j}}{|2x\vec{i}+2y\vec{j}|}=\dfrac{1}{2}\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)$

$$\therefore\ \iint_s\vec{F}.\vec{n}ds=\int_y\int_{z=0}\frac{2x^2+y^2z}{2}\cdot\frac{dydz}{\vec{n}.\vec{i}}=\frac{1}{2}\int_y\left[\ 2x^2[z]_0^2+y^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2\ \right]\frac{dy}{\frac{1}{2}x}$$

$$=\int\frac{(4x^2+2y^2)dy}{x}=\int_0^{2\pi}\frac{\left(4.4\cos^2\theta+2.4\sin^2\theta\right)2\cos\theta d\theta}{2\cos\theta}$$

$[x^2+y^2=4 \Rightarrow x=2\cos\theta$

$y=2\sin\theta,\ 0\le\theta\le$ হয়]

$$=\int_0^{2\pi}\left(8+8\cos^2\theta\right)d\theta=24\pi$$

$$\therefore\ \iint_s F.nds=0+16\pi+24\pi=40\pi$$

2. আয়তঘন $0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c$ এর ক্ষেত্রে $\iint_s\vec{F}.\vec{n}ds$-এর মান নির্ণয় করুন, যখন

$\vec{F}=(x^2-yz)\vec{i}+(y^2-zx)\vec{j}+(z^2-xy)\vec{k}$

[সংকেত : আয়তঘনের মোট ছয়টি তলের জন্য সমাকলের অংশগুলি নির্ণয় করে যোগ করতে হবে উদাহরণস্বরূপ যে কোনো একটি তল ধরি $x=a$ তলের ক্ষেত্রে

সমাকল $= \iint_{s_1} \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_{s_1} \vec{F}.\vec{i}ds = \int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c}(a^2 - yz)dydz = a^2bc - \frac{b^2c^2}{4}$

নির্ণেয় মান = এইরূপ ছয়টি অংশের সমষ্টি = abc(a+b+c)]

3. $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ হলে এবং অক্ষতলগুলি ও $x + y + z = a$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল v হলে $\iiint_v \vec{F}dv$ -এর মান নির্ণয় করুন।

[সংকেত : $\iiint_v \vec{F}dv = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\int_{z=0}^{a-x-y}(y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k})dxdydz$

$$= \frac{a^4}{24}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) \text{]}$$

7.8 সারাংশ

(i) $\int \vec{f}(t)dt = \vec{\phi}(t) + \vec{c}$, যখন $\frac{d}{dt}\vec{\phi}(t) = \vec{f}(t)$, $\vec{c}$ সমাকলের ধ্রুবক ভেক্টর।

(ii) আদর্শ সূত্রাবলীর জন্য 7.8 অনুচ্ছেদ দেখুন।

(iii) $\vec{F}(x, y, z) = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ এবং $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ হলে c রেখা বরাবর রেখা সমাকল

$$= \int_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_c \left(F_1dx + F_2dy + F_3dz\right)$$

(iv) $\int_c \vec{F}.d\vec{r} = \vec{i}\int_c \left(F_2dz - F_3dy\right) + \vec{j}\int_c \left(F_3dx - F_1dz\right) + \vec{k}\int_c \left(F_1dy - F_2dx\right)$

(v) $\int_c \phi d\vec{r} = \vec{i}\int_c \phi dx + \vec{j}\phi dy + \vec{k}\int_c \phi dz$

(vi) সুষম বা খণ্ডভাবে সুষম তল s-কে n ভাগে বিভক্ত করলে যদি Δs_r ক্ষেত্রফলযুক্ত r-তম খণ্ডের উপর একটি বিন্দু p_r-এ অভিলম্ব $\vec{n}_r$ হয় তবে

$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} \vec{F}(p_r).\vec{n}_r\Delta s_r = \iint_s \vec{F}.\vec{n}ds$, যেখানে s -তলে (x,y,z) বিন্দুতে অভিলম্ব $\vec{n}$, $\vec{F}(x, y, z)$ একটি সন্তত ভেক্টর ফাংশন।

(vii) $\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_R \vec{F}.\vec{n}\frac{dxdy}{|\vec{n}.\vec{k}|}$, যেখানে xy তলে s এর লম্ব অভিক্ষেপ R.

(viii) $\iint_s \vec{F}.ds = \vec{i}\iint_s F_1 ds + \vec{j}\iint_s F_2 ds + \vec{k}\iint_s F_3 dx$

(ix) $\iint_s \vec{F}\times\vec{n}ds = \vec{i}\iint_s (F_2 n_3 - F_3 n_2)ds + \vec{j}\iint_s (F_3 n_1 - F_1 n_3)ds + \vec{k}\iint_s (F_1 n_2 - F_2 n_1)ds$

যখন $\vec{n} = n_1\vec{i} + n_2\vec{j} + n_3\vec{k}$

(x) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} f(p_r)\Delta v_r = \iiint_v f(x,y,z)dv$

(xi) $\iiint_v \vec{F}dv = \vec{i}\iiint_v F_1 dv + j\iiint_v F_2 dv + \vec{k}\iiint_v F_3 dv$

যখন $\vec{F}(x,y,z) = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$.

7.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. দেখান যে $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t\vec{i} + 5\cos t\vec{j} + \sin 2t\vec{k})dt = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$

2. যদি $\vec{u} = 2t\vec{i} - \vec{j} + 3t\vec{k}, v = \vec{i} + 2t\vec{j} - 5k, w = 3\vec{i} + 2\vec{j} + t\vec{k}$ হয়

তবে i) $\int_0^2 \vec{u}.\vec{v}\times\vec{w}dt$ এবং ii) $\int_0^1 \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})dt$ -এর মান নির্ণয় করুন।

3. যদি $\vec{f} = 2t^2\vec{i} + \vec{j} + 2t\vec{k}$ হয় তবে $\int_1^2 \left(\frac{1}{|\vec{f}|}\frac{d\vec{f}}{dt} - \frac{d|\vec{f}|}{dt}\frac{\vec{f}}{|\vec{f}|^2}\right)df$ এর মান নির্ণয় করুন।

4. যদি c বক্রটি $y = x^2$ অধিবৃত্তের (0,0) থেকে (1,1) পর্যন্ত হয় তবে $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ -এর মান নির্ণয় করুন যখন $\vec{F} = 3x^2\vec{i} + 4y^3\vec{j}$.

5. $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ -এর মান নির্ণয় করুন যখন $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (2x-y)\vec{j}$ এবং c হল $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ উপবৃত্তের (2,0) বিন্দু থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সম্পূর্ণ প্রদক্ষিন।

6. $x^2+y^2=1,\ z=2$ বক্রের ধনাত্মক দিকে (0,1,2) থেকে (1,0,2) পর্যন্ত অংশকে c ধরে এবং $\vec{F}=(xz^2+y)\vec{i}+(z-y)\vec{j}+(xy-z)\vec{k}$ হলে $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ এর মান নির্ণয় করুন।

7. যদি $\vec{F}=(2x+3y^2)\vec{i}-5yz\vec{j}+(2x^2-y)\vec{k}$ হয় এবং (0,0,0) ও (1,1,1) বিন্দুদ্বয় সংযোগকারী সরলরেখাংশ c হয় তবে $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$-এর মান কত?

8. প্রথম অষ্টমাংশে $x+y+z=a$ তলের অংশ s হলে এবং $\vec{F}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+zx\vec{k}$ হলে $\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds$ এর মান কত?

9. যদি s তলটি প্রথম অষ্টমাংশে z = 4 তলদ্বারা ছেদিত $2x+y=6$ তল এবং $\vec{F}=y\vec{i}+2x\vec{j}-t\vec{k}$ হয় তবে $\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds$ এর মান নির্ণয় করুন।

10. যদি s তলটি প্রথম অষ্টমাংশে y = 4 এবং z = 6 দ্বারা সীমাবদ্ধ $y^2=8x$-এর তল হয় এবং $\vec{F}=2y\vec{i}-z\vec{j}+x^2\vec{k}$ হয় তবে $\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds$-এর মান কত?

11. যদি v অঞ্চলটি $z=4-x^2$ চোঙ এবং $x=0, y=0, y=2, z=0$ তলগুলির দ্বারা সীমাবদ্ধ হয় এবং $\phi=5xy^2$ হয় তবে $\iiint_v \phi dv$-এর মান নির্ণয় করুন।

7.10 উত্তরমালা (সংকেতসহ)

2.(i) 52 (ii) $\frac{1}{2}(49\vec{i}+37\vec{j}-10\vec{k})$

3. $\frac{2}{9}(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})$ [সংকেত: 9.8 অনুচ্ছেদের (iv) নং সূত্র ব্যবহার করুন]

4. 2

5. 2π [সংকেত: এখানে $x=2\cos t, y=\sin t$ এবং $t=0$ থেকে $t=2\pi$ পর্যন্ত সমাকল করতে হবে]

6. $\frac{1}{4}(\pi+2)$ [সংকেত: $c: x=\cos t, y=\sin t, z=2$ বক্রের $t=\frac{\pi}{2}$ থেকে $t=0$]

7. $\frac{1}{2}$

8. সংকেত: এখানে $\vec{n} = \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$, নির্ণেয় সমাকল $= \iint_R \vec{F}.\vec{n} \frac{dxdy}{|\vec{n}.\vec{k}|}$

[$R: x = 0, y = 0, x + y = a$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র]

$$= \iint_R \frac{1}{\sqrt{3}}(xy + yz + zx)\frac{dxdy}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \int_{y=0}^{a}\int_{x=0}^{a-y}\{xy + (x+y)(a-x-y)\}dxdy = \frac{1}{8}a^4$$

9. সংকেত: এখানে $\vec{n} = \frac{2\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{5}}$, $\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_R \vec{F}.\vec{n}\frac{dxdz}{|\vec{n}.\vec{j}|}$, যখন xz-তলে s এর লম্ব অভিক্ষেপ R (s তলটি xy তলের সহিত লম্ব বলে ঐ তলে অভিক্ষেপ নেওয়া গেল না)

$$R = \iint_R \frac{2}{\sqrt{5}}(y + x)\frac{dxdz}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2\iint_R (6 - 2x + x)dxdz = 2\int_{z=0}^{4}\int_{x=0}^{3}(6 - x)dxdz = 108$$

10. 132 [সংকেত: $\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_R \vec{F}.\vec{n}\frac{dydz}{|\vec{n}.\vec{i}|}$, যখন yz-তলে s-এর লম্ব অভিক্ষেপ R_1 এইভাবে অগ্রসর হতে হবে]

11. $\frac{160}{3}$ [সংকেত: এখানে $\iiint_V \phi dv = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{4-x^2} 5xy^2 dxdydz = \ldots\ldots,$

বিশেষ ভাবে নজর দেওয়া প্রয়োজন $z = 4 - x^2$ বক্রে $z = 0$ হলে $x = 2$ হয় তাই x-এর লিমিট 0 থেকে 2 নিতে হবে]

একক 8 ❑ গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স এবং কার্ল (Gradient, Divergence and Curl)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

8.2 উদ্দেশ্য

8.3 স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন এবং ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন

8.3.1 লেভেল তল

8.3.2 দিশা অবকলজ

8.4 স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন-এর গ্রেডিয়েন্ট

8.4.1 গ্রেডিয়েন্টের কতিপয় ধর্ম

8.4.2 গ্রেডিয়েন্টের জ্যামিতিক তাৎপর্য

8.4.3 গ্রেডিয়েন্ট সংক্রান্ত উপপাদ্য

8.5 তলের উপর কোনো বিন্দুতে স্পর্শকতল ও অভিলম্বের সমীকরণ

8.5.1 দুটি তল দ্বারা ছেদিত বক্ররেখার কোনো বিন্দুতে স্পর্শক (সরলরেখা) ও লম্ব তলের সমীকরণ

8.6 ডাইভারজেন্স ও কার্ল

8.6.1 ডাইভারজেন্স ও কার্ল সংক্রান্ত বিভিন্ন সূত্রাবলী

8.6.2 দ্বিতীয় ক্রমের ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর

8.7 div *f* এবং curl *f*-এর ব্যবহারিক বিষয়ে আলোচনা

8.8 সারাংশ

8.9 প্রশ্নাবলী

8.10 উত্তরমালা

8.1 প্রস্তাবনা

আমরা এই এককে যে বিষয়গুলি নিয়ে আলোচনা করব সেগুলি হল গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স এবং কার্ল, তাদের জ্যামিতিক তাৎপর্য, বিভিন্ন ধর্ম ইত্যাদি। জ্যামিতি, ফলিত গণিতের বিভিন্ন শাখা ইত্যাদিতে এগুলির প্রয়োগ আছে।

আলোচনার মূলপর্বে পৌঁছানোর আগে আমাদের কয়েকটি বিষয় বিশেষ করে জানা প্রয়োজন, সেগুলি হল (ক) স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন (Scalar point function) (খ) ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন (Vector point function) (গ) লেভেল তল (Level surface) (ঘ) দিশা অবকল (Directional derivative) ইত্যাদি। আমরা এখানে এই বিষয়গুলি আমাদের প্রয়োজন অনুযায়ী আলোচনা করব এবং পরে মূল বিষয়ে যাব।

অন্যথা উল্লেখ না থাকলে, আমরা এখানে ভেক্টর ফাংশনকে মোটা অক্ষরে (Bold face) প্রকাশ করব।

8.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি নিম্নলিখিত বিষয়গুলি জানতে পারবেন—

- স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন, ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন ও ফিল্ড কী।
- দিশা অবকলজ কী এবং কীভাবে নির্ণয় হয়।
- স্কেলার ফাংশনের গ্রেডিয়েন্ট, তার ধর্ম এবং জ্যামিতিক ব্যাখ্যা বুঝতে পারবেন।
- তলের স্পর্শকতল, অভিলম্বের সমীকরণ কীভাবে নির্ণয় করা যায়।
- ভেক্টর ডাইভারজেন্স ও কার্ল সম্বন্ধে জানতে পারবেন। ডাইভারজেন্স ও কার্ল বিষয়ক সূত্রাবলী ও ভেক্টর অপারেটরের ব্যবহার বুঝতে পারবেন।

8.3 স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন এবং ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন

ধরা যাক্ ত্রিমাত্রিক দেশ (Three dimensional space)-এর একটি অঞ্চল (Region) D-তে P একটি বিন্দু যার কার্তিয় স্থানাঙ্ক (x, y, z); স্থানাঙ্ক অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরগুলি i, j, k হলে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর (Position Vector) $r = xi + yi + zk$ লেখা হয়। যদি ত্রিমাত্রিক দেশের D-অঞ্চলের যেকোনো বিন্দু P-এর জন্য একটি ফাংশন f(x, y, z) বা f(P) বা f(r) এমন ভাবে সংজ্ঞায়িত থাকে যেন ঐ অঞ্চলের প্রত্যেকটি বিন্দুর জন্য f(x, y, z)-এর নির্দিষ্ট স্কেলার মান পাওয়া যায়, তবে f(x, y, z)-কে একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন বলে। এক্ষেত্রে আমরা বলি D অঞ্চলে একটি স্কেলার ফিল্ড (Scalar field) সংজ্ঞায়িত আছে।

উদাহরণ : (i) যদি D অঞ্চলের কোনো বিন্দু P(x, y, z)-তে তাপমাত্রা f(x, y, z) হয় তবে আমরা বলব D অঞ্চলে তাপমাত্রার স্কেলার ফিল্ড সংজ্ঞায়িত আছে।

(ii) যদি একটি তরলপূর্ণ পাত্রে তরলের বিভিন্ন বিন্দু (x, y, z)-তে ঘনত্বের মান f(x, y, z) দ্বারা নির্ণীত হয় তবে এক্ষেত্রেও তরলটিতে ঘনত্বের একটি স্কেলার ফিল্ড আছে বলে ধরা হয়।

আবার যদি D অঞ্চলের যে কোন বিন্দু P(x, y, z)-এর জন্য একটি ফাংশন **F**(x, y, z) বা **F**(P) বা **F**(r) এমনভাবে সংজ্ঞায়িত থাকে যেন ঐ অঞ্চলের প্রত্যেকটি বিন্দুর জন্য F(x, y, z)-এর নির্দিষ্ট ভেক্টর মান পাওয়া যায় তবে F(x, y, z)-কে একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন বলা হয়। আগের মত এক্ষেত্রে আমরা বলি D অঞ্চলে একটি ভেক্টর ফিল্ড (Vector field) সংজ্ঞায়িত আছে।

উদাহরণ : (i) কোনো গতিশীল তরলের বিশেষ অঞ্চল D-এর প্রত্যেক বিন্দুর বেগের মান সমূহ একটি ভেক্টর ফিল্ড গঠন করে।

(ii) কোনো বস্তুর বিশেষ অঞ্চল D-এর প্রত্যেক বিন্দুতে ক্রিয়ারত অভিকর্ষ জনিত বলসমূহ অন্য একটি ভেক্টর ফিল্ডের উদাহরণ।

8.3.1 লেভেল তল

ধরা যাক D-অঞ্চলে f(x, y, z) একটি স্কেলার ফিল্ড আছে। তাহলে f(x, y, z) = c সমীকরণটি f-এর সংজ্ঞার অঞ্চলে D-তে একটি তল বোঝায়। c-এর বিভিন্ন মানের জন্য একগুচ্ছ বিভিন্ন তল সূচিত হয়। তলগুলিকে লেভেল তল বলা হয়।

উদাহরণ স্বরূপ c এর ইচ্ছামত (arbitrary) মানের জন্য

(i) $x^2 + y^2 + z^2 = c$ (বিভিন্ন ব্যাসার্ধের একগুচ্ছ গোলকের তল)

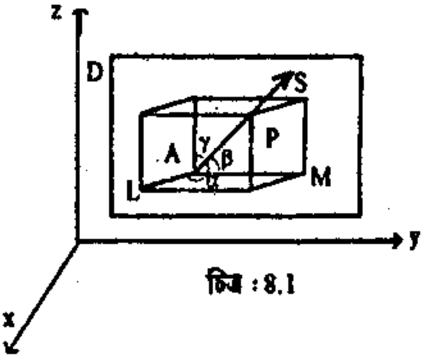
(ii) $\alpha x + \beta y + \gamma z = c$ (বিভিন্ন সমান্তরাল তলসমূহ যারা $n = (\alpha, \beta, \gamma)$ ভেক্টরের সাথে লম্ব)

ইত্যাদি প্রত্যেকটিই এক এক গুচ্ছ লেভেল তলকে সূচিত করে।

8.3.2 দিশা অবকলজ

ধরা যাক্ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন f(x, y, z)-এর সংজ্ঞার অঞ্চল D-তে A(x, y, z) একটি বিন্দু এবং A থেকে অঙ্কিত S ভেক্টরের উপর A-এর খুব কাছে $P(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ আর একটি বিন্দু। AP-কে কর্ণ ধরে এবং বাহুগুলি অক্ষগুলির সমান্তরাল করে অঙ্কিত (চিত্র-8.1) আয়তঘনের বাহুগুলি $AL = \Delta x$, $AM = \Delta y$ এবং $AN = \Delta z$, অতএব $AP = \Delta S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ এবং S ভেক্টরের দিক্ কোসাইনগুলি (Direction Cosines) $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ হলে

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta s},\ \cos\beta = \frac{\Delta y}{\Delta s}\ \text{এবং}\ \cos\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$



চিত্র : 8.1

এখানে আরও ধরা যাক্ f(x, y, z) ফাংশনটি সন্তত (Continuous) এবং ফাংশনটির সন্তত অবকল সহগ আছে। বহুচল (Several variables) ফাংশনের অবকলনযোগ্যতার (Differentiability) শর্ত অনুযায়ী বলা যায় যেহেতু f(x, y, z) ফাংশনটির A(x, y, z) বিন্দুতে অবকলজ আছে অতএব

$$f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \phi_1 \Delta x + \phi_2 \Delta y + \phi_3 \Delta z$$

যখন ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, প্রত্যেক $\Delta x, \Delta y, \Delta z$-এর ফাংশন এবং $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)$ হলে এরা প্রত্যেকে শূন্যের সমীপবর্তী (approach) হয়। উপরোক্ত সম্পর্কটির উভয়পক্ষকে Δs দ্বারা ভাগ করে পাই

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s} + \phi_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \phi_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \phi_3\frac{\Delta z}{\Delta s}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma + \phi_1\cos\alpha + \phi_2\cos\beta + \phi_3\cos\gamma$$

$$\text{or, } \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma + \phi_1\cos\alpha + \phi_2\cos\beta + \phi_3\cos\gamma\right]$$

[উভয় পক্ষে লিমিট্ $\Delta s \to 0$ করে]

or, $\nabla_s f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$ ..... (i)

[∵ $\Delta s \to 0$ হলে $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)$ হয় এবং তখন ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 প্রত্যেকে $\to 0$ হয়]

$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$ বা $\nabla_s f$ কে S ভেক্টরের দিকে A(x, y, z) বিন্দুতে, f(x, y, z)-এর দিশা অবকলজ বলে।

এখন দিক্ কোসাইনগুলিকে l, m, n দ্বারা প্রকাশ করলে f(x,y,z)-এর দিশা অবকলজ নিম্নরূপ :

$$\nabla_s f = l\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial z} \text{ ..... (ii)}$$

$$= (\mathbf{i}l + \mathbf{j}m + \mathbf{k}n).(\mathbf{i}f_x + \mathbf{j}f_y + \mathbf{k}f_z)$$

$$= \mathbf{a}.(\mathbf{i}f_x + \mathbf{j}f_y + \mathbf{k}f_z) \text{ .... (iii)}$$

যখন $\mathbf{a}$ = AP বরাবর একক ভেক্টর এবং $\mathbf{i}f_x + \mathbf{j}f_y + \mathbf{k}f_z$ একটি ভেক্টর ফাংশন।

মন্তব্য 1 : যখন $\mathbf{s}$ ভেক্টরের দিক্ x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সমান্তরাল তখন l, m, n-এর মান 1,0,0 এবং (ii) নং সূত্র অনুযায়ী x-অক্ষের দিশা বরাবর f(x,y,z)-এর দিশা অবকলজ $\nabla_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$ অনুরূপে y-অক্ষ এবং z-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর f(x,y,z) ফাংশনটির দিশা অবকলজ যথাক্রমে $\frac{\partial f}{\partial y}$ এবং $\frac{\partial f}{\partial z}$

আবার (i) নং থেকে $\nabla_s f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds} = \frac{df}{ds}$

[∵ $\Delta s \to 0$ হলে $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$ ইত্যাদি]

মন্তব্য 2 : যদি **f** (x, y, z) ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশনটিকে উপাংশে $\mathbf{f}(x,y,z) = \mathbf{i}f_1(x, y, z) + \mathbf{j}f_2(x,y,z) + \mathbf{k}f_3(x, y, z)$ এইভাবে লেখা হয়, যখন f_1, f_2, f_3 প্রত্যেকে স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন, তখন একইভাবে AP দিক অর্থাৎ $\mathbf{s}$ ভেক্টরের দিক বরাবর **f** (x,y,z) ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশনটির দিশা অবকলজ

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\mathbf{f}(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \mathbf{f}(x,y,z)}{\Delta s}$$

$$= \mathbf{i}\lim_{\Delta s \to 0}\frac{f_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f_1(x,y,z)}{\Delta s} + \mathbf{j}\lim_{\Delta s \to 0}\frac{f_2(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta s}$$

$$+ \mathbf{k}\lim_{\Delta s \to 0}\frac{f_3(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f_3(x,y,z)}{\Delta s}$$

$$= \mathbf{i}\left(l\frac{\partial f_1}{\partial x} + m\frac{\partial f_1}{\partial y} + n\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(l\frac{\partial f_2}{\partial x} + m\frac{\partial f_2}{\partial y} + n\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(l\frac{\partial f_3}{\partial x} + m\frac{\partial f_3}{\partial y} + n\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)$$

$$= l\left(i\frac{\partial f_1}{\partial x}+j\frac{\partial f_2}{\partial x}+k\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+m\left(i\frac{\partial f_1}{\partial y}+j\frac{\partial f_2}{\partial y}+k\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)+n\left(i\frac{\partial f_1}{\partial z}+j\frac{\partial f_2}{\partial z}+k\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)$$

$$= l\frac{\partial}{\partial x}(if_1+jf_2+kf_3)+m\frac{\partial}{\partial y}(if_1+jf_2+kf_3)+n\frac{\partial}{\partial z}(if_1+jf_2+kf_3)$$

$$= l\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}+n\frac{\partial f}{\partial z}$$

উদাহরণ ঃ

1. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ হলে y অক্ষের দিক বরাবর f-এর দিশা অবকলজ নির্ণয় করন।

সমাধান ঃ

আমরা জানি y-অক্ষের দিক বরাবর f-এর দিশা অবকলজ $= \dfrac{\partial f}{\partial y}$

∴ নির্ণেয় দিশা অবকলজ $= \dfrac{\partial}{\partial y}(x^3+y^3+z^3)$

$= 0 + 3y^2 + 0 = 3y^2$

2. $f(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$ হলে (1, −2, 5) বিন্দুতে

(ক) x-অক্ষের দিকে (খ) $2i + j - 3k$ ভেক্টরের দিকে দিশা অবকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}=y^2+2zx,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2xy+z^2\cdot\ \frac{\partial f}{\partial z}=2yz+x^2$$

$$\therefore \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,-2,5)}=(-2)^2+2\cdot5\cdot1=4+10=14$$

$$\therefore \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,-2,5)}=2.1.(-2)+(5)^2=21$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(1,-2,5)}=2.(-2).5+(1)^2=-19$$

এবং $2i + j - 3k$ ভেক্টরের দিক কোসাইনগুলি

$$\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}},\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}},\frac{-3}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}}$$

বা, $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$ । অতএব

(a) x-অক্ষের দিক বরাবর (1, −2, 5) বিন্দুতে f-এর দিশা অবকলজ $=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,-2,5)}=14$

(b) $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ ভেক্টরের দিক বরাবর (1, −2, 5) বিন্দুতে f-এর দিশা অবকলজ

$$=\frac{2}{\sqrt{14}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,-2,5)}+\frac{1}{\sqrt{14}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,-2,5)}+\frac{(-3)}{\sqrt{14}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(1,-2,5)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{14}}\cdot 14+\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot 21-\frac{3}{\sqrt{14}}\cdot(-19)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{14}}(28+21+57)=\frac{106}{\sqrt{14}}=\frac{53\sqrt{14}}{7}$$

3. $f(x,y,z)=x^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ ভেক্টর ফাংশনটির

(0, 2, −1) বিন্দুতে $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ ভেক্টরের দিকে দিশা অবকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ ভেক্টরের দিক কোসাইনগুলি

$\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ (যেহেতু $\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$)

আবার $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}-z\mathbf{k}\right)=2x\mathbf{i}+o\mathbf{j}+o\mathbf{k}$

$$=2x\mathbf{i}$$

অনুরূপে $\frac{\partial f}{\partial y}=z\mathbf{j}$ এবং $\frac{\partial f}{\partial z}=y\mathbf{j}-\mathbf{k}$

$\therefore$ f-এর দিশা অবকলজ $=l\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}+n\frac{\partial f}{\partial z}$

$$=\frac{2}{3}\cdot(2x\mathbf{i})-\frac{1}{3}(z\mathbf{j})+\frac{2}{3}(y\mathbf{j}-\mathbf{k})$$

$$=\frac{4}{3}x\mathbf{i}+\frac{1}{3}(2y-z)\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}$$

$\therefore$ (0, 2, −1) বিন্দুতে নির্ণেয় দিশা অবকল

$$=\frac{4}{3}\cdot 0\mathbf{i}+\frac{1}{3}(2.2+1)\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}=\frac{1}{3}(5\mathbf{j}-2\mathbf{k})$$

8.4 স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন-এর গ্রেডিয়েন্ট

f(x, y, z) যদি একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন হয় তবে পূর্ববর্তী 8.3.2 অনুচ্ছেদে (iii) নং সূত্রে বর্ণিত $i\frac{\partial f}{\partial x}+j\frac{\partial f}{\partial y}+k\frac{\partial f}{\partial z}$ ভেক্টর ফাংশনটিকে স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন f(x, y, z)-এর গ্রেডিয়েন্ট বলে এবং একে grad f বা ∇f দ্বারা সূচিত করা হয়। এখানে $\nabla \equiv i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}$ । স্বভাবতই grad f একটি ভেক্টর রাশি। অপারেটর ∇-কে ডেলটা বা ন্যাবলা বলা হয়।

তাহলে grad f-এর সাহায্যে নিম্নলিখিত উপায়ে 8.3.2 অনুচ্ছেদের (iii) নং সূত্রটিকে প্রকাশ করা যায় :

যে ভেক্টরের দিক্ কোসাইনগুলি l, m, n সেই দিক্‌বরাবর f(x, y, z) এর দিশা অবকলজ

$\nabla_s f = (il + jm + kn)$. grad f .... (i)

= a . grad f, হল, a যেদিকে দিশা অবকলজ নির্ণীত হচ্ছে সেই দিকের একক ভেক্টর।

8.4.1 গ্রেডিয়েন্টের কতিপয় ধর্ম :

(a) যদি f(x, y, z) = ধ্রুবক হয় তবে $\frac{\partial f}{\partial x}=0=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}$ সুতরাং gr d f = 0 হয়। আবার বিপরীত ক্রমে যদি grad f = 0 হয় তবে $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$ প্রত্যেকের মানই শূন্য হবে এবং সেই কারণে f(x, y, z) ধ্রুবক হতে বাধ্য।

অতএব grad f = 0 শর্তটি f(x, y, z) = ধ্রুবক হওয়ার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট (necesary and sufficient) শর্ত।

(b) যদি f(x, y, z) এবং g(x, y, z) দুটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন হয় তবে

(i) grad $(f \pm g)$ = grad f $\pm$ grad g

(ii) grad (fg) = f gradg + g grad f

(iii) $\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\,\text{grad}\,f - f\,\text{grad}\,g}{g^2}$

প্রমাণ : (i) $\text{grad}(f+g)=i\frac{\partial}{\partial x}(f+g)+j\frac{\partial}{\partial y}(f+g)+k\frac{\partial}{\partial z}(f+g)$

$$=i\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}\right)+j\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)+k\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

$$=\left(i\frac{\partial f}{\partial x}+j\frac{\partial f}{\partial y}+k\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\left(i\frac{\partial g}{\partial x}+j\frac{\partial g}{\partial y}+k\frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

= grad f + grad g

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় grad (f – g) = grad f – grad g

অর্থাৎ $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$

(ii) $$\text{grad}(fg) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(fg)$$

$$= f\left(\mathbf{i}\frac{\partial g}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial g}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial g}{\partial z}\right) + g\left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= f\,\text{grad}\,g + g\,\text{grad}\,f$$

$$\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\nabla f$$

(iii) $$\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{f}{g} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right)$$

$$= \mathbf{i}\frac{g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2} + \mathbf{j}\frac{g\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2} + \mathbf{k}\frac{g\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}$$

$$= \frac{1}{g^2}\left[g\left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right) - f\left(\mathbf{i}\frac{\partial g}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial g}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial g}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{g^2}\left[g\nabla f - f\nabla g\right]$$

উদাহরণ :

1. স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন $f = xy + yz + zx$-এর (1, 1, 1) বিন্দুতে grad f এর মান নির্ণয় করুন এবং সেখান থেকে $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ ভেক্টরের দিকে f-এর দিশা অবকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান :

$$\text{grad}\,f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= \mathbf{i}(y+z) + \mathbf{j}(x+z) + \mathbf{k}(y+x)$$ [$\because f = xy + yz + zx \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y + z$ ইত্যাদি]

$\therefore$ (1,1,1) বিন্দুতে grad f-এর মান

$$(\nabla f)_{(1,1,1)} = \mathbf{i}(1+1) + \mathbf{j}(1+1) + \mathbf{k}(1+1)$$

$$= 2\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

আবার i + k ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর $=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{k}}{|\mathbf{i}+\mathbf{k}|}=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$$=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় দিশা অবকলজ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k})\cdot 2(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}(1.1+0.1+1.1)=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

দ্রষ্টব্য : যেহেতু এই মানটি ধনাত্মক, প্রদত্ত দিক বরাবর f বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয় এবং বৃদ্ধির হার $2\sqrt{2}$.

2. ∇r^{10}-এর মান নির্ণয় করুন যখন $r=|\mathbf{r}|$

সমাধান :

যেহেতু $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, অতএব $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\Rightarrow r^{10}=\left\{\left(x^2+y^2+z\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{10}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^5$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x}r^{10}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^5=5\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5-1}\cdot 2x$$

$$=10x\,(x^2+y^2+z^2)^4$$

অনুরূপে $\frac{\partial r^{10}}{\partial y}=10y\left(x^2+y^2+z^2\right)^4$ এবং $\frac{\partial r^{10}}{\partial z}=10z\left(x^2+y^2+z^2\right)^4$

$$\therefore \nabla r^{10}=\mathbf{i}\frac{\partial r^{10}}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{dr^{10}}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial r^{10}}{\partial z}$$

$$=\mathbf{i}\,10x\left(x^2+y^2+z^2\right)^4+\mathbf{j}\,10y\left(x^2+y^2+z^2\right)^4+\mathbf{k}\,10z\left(x^2+y^2+z^2\right)^4$$

$$=10\left(x^2+y^2+z^2\right)^4(x\mathbf{i}+y\mathbf{i}+z\mathbf{k})$$

$$=10\left\{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^8\mathbf{r}$$

$$=10r^8\,\mathbf{r}$$

3. দুটি বিন্দু (α, β, γ) ও (x, y, z)-এর দূরত্ব যদি r হয় অর্থাৎ যদি $\mathbf{r} = (x-\alpha)\,\mathbf{i} + (y-\beta)\,\mathbf{j} + (z-\gamma)\,\mathbf{k}$,

যখন $r = |\mathbf{r}|$ হয়, তাহলে দেখান যে $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$

সমাধান ঃ

প্রশ্নানুসারে $r = \left\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\left\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right\}^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left\{(x-\alpha)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(x-\alpha)$$

$$= \frac{x-\alpha}{\left\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{x-\alpha}{r}$$

অনুরূপে $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-\beta}{\left\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$ এবং $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-\gamma}{\left\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$

$$\therefore \nabla r = \mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$= \frac{(x-\alpha)\mathbf{i} + (y-\beta)\mathbf{j} + (z-\gamma)\mathbf{k}}{\left\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \left[\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \text{ এর মান বসিয়ে}\right]$$

$= \frac{\mathbf{r}}{r}$ [দ্রষ্টব্য ঃ $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$ হলেও $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ বসিয়ে]

8.4.2 গ্রেডিয়েন্টের জ্যামিতিক তাৎপর্য ঃ

আমরা জানি $f(x, y, z) = c$ লেভেল তলের উপর কোন বিন্দু $P(x, y, z)$-এর অবস্থান ভেক্টর (Position Vector) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ হলে $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$

ভেক্টরটি লেভেল তলটির P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক তলের উপর অবস্থিত হয়।

আবার, $\text{grad}\, f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$

অতএব, $d\mathbf{r} \cdot \text{grad}\, f = (\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dx + \mathbf{k}\,dz) \cdot \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$= df$ [আংশিক অবকলের সূত্র অনুযায়ী]

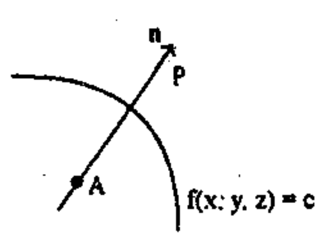
$= 0$, যেহেতু $f(x, y, z) = c$ = ধ্রুবক।

অতএব grad f এবং dr ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব অর্থাৎ grad f ভেক্টরটি $f(x, y, z) = c$ তলের অভিলম্বের (normal) দিক বরাবর নির্দেশিত। এখানে আমরা grad f ভেক্টরের দিকটির জ্যামিতিক তাৎপর্যে দেখলাম। এবার দুটি উপপাদ্যের সাহায্যে grad y-এর মান সম্পর্কিত জ্যামিতিক ব্যাখ্যা আলোচনা করব।

8.4.3 গ্রেডিয়েন্ট সংক্রান্ত উপপাদ্য

উপপাদ্য 1 : যদি $f(x, y, z) = c$ লেভেল তলের উপর কোনো বিন্দু $P(x, y, z)$-তে অভিলম্বের দিক বরাবর একক ভেক্টর **n** এবং একই দিক বরাবর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু A থেকে P-এর দূরত্ব n হয় তবে,

$$\text{grad } f = \frac{df}{dn} \mathbf{n}$$



চিত্র : 8.2

প্রমান : grad f -এর জ্যামিতিক তাৎপর্যতে আমরা দেখেছি grad f ভেক্টরটির দিক $f(x, y, z) = c$ তলের অবিলম্ব **n**-এর দিকবরাবর নির্দেশিত।

$$\text{grad } f = |\text{grad } f| \, \mathbf{n} \quad \text{...... (ii)}$$

আমরা জানি n-এর দিকে f-এর দিশা অবলকজ

বা, $\frac{df}{dn} = \text{grad } f . \mathbf{n}$ [$\because \nabla n$, 8.3.2 অনুচ্ছেদের থেকে]

বা, $\frac{df}{dn} = |\text{grad } f| \mathbf{n}.\mathbf{n}$ [(ii) নং থেকে]

$= |\text{grad } f|$ [$\because$ n.n = 1]

$\therefore \text{ grad } f = \frac{df}{dn} \mathbf{n}$ বা, $|\text{grad } f| = \frac{df}{dn}$

অর্থাৎ |grad f| হল f = c লেভেল তলের B লম্বের দিকের বৃদ্ধির হার।

উপাপাদ্য 2 : স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন $f(x, y, z)$-এর দিশা অববকলজ $\nabla_s f$ বা, $\frac{\partial f}{\partial s}$ এর চরম (Maximum) মান $f(x, y, z) = c$ লেভেল তলের অভিলম্বের দিকে। অর্থাৎ grad f ভেক্টরটি যেদিকে নির্দেশিত সেই দিক বরাবর $\frac{df}{ds}$-এর মান চরম।

প্রমাণ : আমরা জানি f(x, y, z) স্কেলার পয়েন্ট ফাংশনটির সংজ্ঞার অঞ্চলে যে ভেক্টরটির দিক কোসাইনগুলি l, m, n সেইদিক বরাবর দিশা অবকলজ

$$\frac{df}{ds} = \nabla_s f = a.\text{grad}\, f\,, \text{ যখন } a = il + jm + kn$$

$$= a.\frac{df}{dn}n \qquad [\text{ আগের উপপাদ্য অনুযায়ী }]$$

$$= \frac{df}{dn}\cos\theta \qquad [\because |a| = 1 = |n| \text{ যখন } \text{ ও } n \text{ এর অন্তবর্তী কোন } \theta]$$

যেহেতু $\frac{df}{dn}$-এর মান নির্দিষ্ট $\frac{df}{ds}$-এর মান চরম হবে যদি $\cos\theta$-এর মান চরম হয়;

অর্থাৎ যদি $\cos\theta = 1$ হয়,

অর্থাৎ যদি $\theta = 0$ হয়

অর্থাৎ যদি a ভেক্টরটি n-এর দিকে নির্দেশিত হয়।

মন্তব্য : স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন f(p) অক্ষতন্ত্র নিরপেক্ষ। f(p) = c এই লেভেল তলটি অক্ষতন্ত্র নিরপেক্ষ জ্যামিতিক তল। আমরা দেখলাম তলটির উপর কোন p বিন্দুতে grad f হল এমন ভেক্টর যার দিক তলটির অভিলম্বের দিকে এবং যার মান $\frac{df}{ds}$ এর চরম মান। এই জ্যামিতিক ব্যাখ্যা অনুযায়ী বলা যায় grad f হল অক্ষতন্ত্র নিরপেক্ষ। (যদিও 8.4 অনুচ্ছেদে grad f-এর কোনো অক্ষতন্ত্র সাপেক্ষে সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে)।

উদাহরণ :

1. গ্রেডিয়েন্টের দিক বা অভিলম্বের দিক বরাবর $f(x, y, z) = 4x^2 - 3y^2 + 2z^2$ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশনটির (0,0,4) বিন্দুতে অবকল সহগ নির্ণয় করুন।

সমাধান :

আমরা জানি $\text{grad}\, f = \frac{df}{dn}n$

$$\therefore \frac{df}{dn} = |\text{grad}\, f|$$

এখন $\text{grad}\, f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}$

$$= i8x + j(-6y) + k(4z)$$

$\therefore \quad (\text{grad}\, f)_{(0,0,4)} = i.0 + j.0 + k4.4$

$= 16\,k$

$\therefore \frac{df}{dn} = |16k| = 16$, (0,0,4) বিন্দুতে f বর্ধিত হওয়ার সর্বোচ্চ হার হল 16।

2. দেখান যে $f(x, y, z) = x^3 y^2 z$ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশনটির (−1,1,2) বিন্দুতে দিশা অবকলজ, $6i - 4j - k$ ভেক্টরের দিকে চরম এবং এই চরম মান $\sqrt{53}$ ।

সমাধান ঃ

$$\nabla f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} \quad (\nabla f \text{ হল grad f})$$

$$= i(3x^2y^2z) + j(2x^3yz) + k(x^3y^2) \quad [\because f = x^3y^2z]$$

$$\therefore \quad (\nabla f)_{(-1,1,2)} = i(3.1.1.2) + j(2.(-1).1.2) + k(-1.1)$$

$$= 6i - 4j - k$$

∴ নির্ণেয় দিশা অবকলজ $6i - 4j - k$ এর দিকে চরম।

আবার দিশা অবকলজের চরম মান $= \left|(\nabla f)_{(-1,1,2)}\right|$

$$= |6i - 4j - k|$$

$$= \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{36+16+1} \qquad = \sqrt{53}$$

অতএব (−1, 1, 2) বিন্দুতে f ফাংশনটির বর্ধিত হওয়ার সর্বোচ্চ হার $\sqrt{53}$

3. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ লেভেল তলের উপর (1,2,3) বিন্দুতে একক অভিলম্ব ভেক্টর নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

এখানে $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \; \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

$$\therefore \quad \nabla f = i2x + j2y + k2z$$

$(\nabla f)_{(1,2,3)} = 2i + 4j + 6k$, এই ভেক্টরটি অভিলম্বের দিকে।

$\therefore$ নির্ণেয় ভেক্টর $= \pm \dfrac{2i+4j+6k}{|2i+4j+6k|}$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{56}}(2i+4j+6k)$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{14}}(i+2j+3k)$$

4. $x^2+y^2+z^2=9$ এবং $z=x^2+y^2-3$ তলদ্বয়ের মধ্যে $(2,-1,2)$ বিন্দুতে কোণ নির্ণয় করুন

সমাধান ঃ

আমরা জানি $(2, -1, 2)$ বিন্দুতে প্রদত্ত তলদ্বয়ের অভিলম্বদ্বয়ের অন্তর্গত কোণই নির্ণেয় কোণ।

যদি $f_1\,(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-9=0$ এবং $f_2(x,y,z) \equiv x^2+y^2-z-3=0$ হয়

তবে $\nabla_{f_1} = i\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+j\dfrac{\partial f_1}{\partial y}+k\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = i\,2x+j\,2y+k\,2z$

$\therefore$ $f_1(x, y, z)=0$ তলের $(2, -1, 2)$ বিন্দুতে অভিলম্ব

$$\left(\nabla_{f_1}\right)_{(2,-1,2)} = i2.2+j2.(-1)+k.2.2$$

$$= 4i-2j+4k$$

আবার $\nabla_{f_2} = i\dfrac{\partial f_2}{\partial x}+j\dfrac{\partial f_2}{\partial y}+k\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = i2x+j2y+k(-1)$

$\therefore$ $f_2(x, y, z)=0$ তলের $(2, -1, 2)$ বিন্দুতে অভিলম্ব

$$\left(\nabla f_2\right)_{(2,-1,2)} = i2.2+j2.(-1)-k = 4i-2j-kk$$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ θ হলে $\theta = \cos^{-1}\dfrac{(4i-2j-k)\cdot(4i-2j+4k)}{|4i-2j-k||4i-2j+4k|}$

$$= \cos^{-1}\frac{4.4+(-2).(-2)+(-1).4}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-1)^2}\ \sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{16}{\sqrt{21.6}} \quad = \cos^{-1}\frac{8\sqrt{21}}{63}$$

8.5 তলের উপর কোনো বিন্দুতে স্পর্শকতল ও অভিলম্বের সমীকরণ

ধরা যাক্ f(x,y,z) = c তলের উপর p(z,y,z) একটি বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর r = xi + yj + zk (এখানে f(x,y;z) স্কেলারটির জন্য f(x,y,z)=c একটি লেভেল তল) তাহলে আমরা জানি—

$\text{grad } f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = \nabla f$ ভেক্টরটি উক্ত তলের উপর p বিন্দুতে অভিলম্বের দিকে নির্দেশিত।

অতএব ∇f ভেক্টরটি p বিন্দুতে স্পর্শকতলের উপর লম্ব। এই তথ্যের উপর ভিত্তি করে নিম্নলিখিত উপায়ে p বিন্দুতে f(x, y, z) = c তলটির স্পর্শকতল ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করা যায় :

স্পর্শকতল : যদি নির্ণেয় স্পর্শক তলে যেকোনো একটি বিন্দু Q(x, y, z)-এর স্থান ভেক্টর $R = Xi + Yj + Zk$ হয় তবে $R - r = \overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটি স্পর্শকতলে অবস্থিত হয় এবং উপরের তথ্য অনুযায়ী তলটি ∇f ভেক্টরের সাথে লম্ব হয়। অতএব P বিন্দুতে f(x, y, z) = c তলের উপর স্পর্শকতলের সমীকরণ

$$(R - r).\ \nabla f = 0$$

স্পর্শকতলের এই সমীকরণটিকে কার্তিয় স্থানাঙ্কে রূপান্তরিত করে নিম্নলিখিত রূপে লেখা যায় :

$$\text{বা, } \left\{(X-x)i+(Y-y)j+(Z-z)k\right\}\cdot\left\{i\frac{\partial f}{\partial x}+j\frac{\partial f}{\partial y}+k\frac{\partial f}{\partial z}\right\}=0$$

$$\text{বা, } (X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

অভিলম্ব : যদি Q(X, Y, Z) বিন্দুটি P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের উপর যেকোনো বিন্দু হয় এবং $R = Xi + Yj + Zk$ হয় তাহলে $R - r = \overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটি অভিলম্বের দিক বরাবর নির্দেশিত হয়। কিন্তু তা ∇f-এর দিক্। অতএব P বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$(R - r) \times \nabla f = 0$$

$R - r = (X - x)\ i + (Y - y)j + (Z - z)\ k$ এবং

$\nabla f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}$ ভেক্টর দুটি একই দিকে নির্দেশিত,

সমান্তরাল হওয়ার শর্ত থেকে পাই,

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

এটি একটি সরলরেখার সমীকরণ যা P বিন্দুতে f(x, y, z) = c তলের উপর অভিলম্ব।

8.5.1 দুটি তল দ্বারা ছেদিত বক্ররেখায় কোন বিন্দুতে স্পর্শক ও লম্ব তলের সমীকরণ

$f(x,y,z) = 0$ এবং $g(x,y,z) = 0$ তল দুটি যে বক্ররেখায় ছেদিত হয় তার উপর $p(x,y,z)$ বিন্দুতে স্পর্শক (সরলরেখা) ও লম্বতলের সমীকরণ :

যদি স্পর্শক সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দু $Q(X,Y,Z)$-এর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ এবং $P(x,y,z)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ তবে স্বাভাবিকভাবেই $\mathbf{R} - \mathbf{r} = \overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটি ∇f এবং ∇g উভয় ভেক্টরের সাথে লম্ব হবে। অতএব $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটি $\nabla f \times \nabla g$ এর সাথে সমান্তরাল হবে।

$\therefore\ (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times (\nabla f \times \nabla g) = 0$ হল স্পর্শকের সমীকরণ।

$\mathbf{R} - \mathbf{r}$ এবং $\nabla f \times \nabla g$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হওয়ার শর্ত থেকে পাই

$$\frac{X-x}{f_y g_z - f_z g_y} = \frac{Y-y}{f_z g_x - f_x g_z} = \frac{Z-z}{f_x g_y - f_y g_x}$$

এটাই নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ।

আবার যদি $Q(X, Y, Z)$ বিন্দুটি $P(x, y, z)$ বিন্দুতে লম্বতলের উপর অবস্থিত হয় তবে $\mathbf{R} - \mathbf{r}$ এবং $(\nabla f \times \nabla g)$ ভেক্টরদ্বয় লম্ব হবে। অতএব লম্বতলের সমীকরণ

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r})\ (\nabla f \times \nabla g) = 0$$

বা, $(X-x)\left(f_y g_z - f_z g_y\right) + (Y-y)\left(f_z g_x - f_x g_z\right) + (Z-z)\left(f_x g_y - f_y g_x\right) = 0$

উদাহরণ ঃ

1. তল $x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$ এর উপর $(1, 1, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকতল ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

ধরা যাক $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2 - 2 = 0$

$$\therefore\quad \nabla f = \mathbf{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \mathbf{i}(2x) + \mathbf{j}(-2y) + \mathbf{k}(4z)$$

$$(\nabla f)_{(1,1,1)} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

এখন $(1,1,1)$ বিন্দুতে স্পর্শক তলে যেকোনো বিন্দু (x, y, z) নিলে $(x-1)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}$ ভেক্টরটি স্পর্শক তলে অবস্থিত থাকায় তা $(\nabla f)_{(1,1,1)}$ এর সাথে লম্ব হবে। অতএব নির্ণেয় স্পর্শকতলের সমীকরণ

$$\left[(x-1)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}\right] \cdot (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 0$$

বা, $2(x-1) - 2(y-1) + 4(z-1) = 0$

বা, $(x-1) - (y-1) + 2(z-1) = 0$

বা, $x - y + 2z - 2 = 0$

আবার (1,1,1) বিন্দুগামী অভিলম্বের উপর (x, y, z) যেকোন একটি বিন্দু হলে $(x-1)\mathbf{i}+(y-1)\mathbf{j}+(z-1)\mathbf{k}$ ভেক্টরটি $(\nabla f)_{(1,1,1)}$ এর সাথে সমান্তরাল হবে। অতএব নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ

$$[(x-1)\mathbf{i}+(y-1)\mathbf{j}+(z-1)\mathbf{k}]\times(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k})=0$$

বা, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{4}$ [সমান্তরাল হওয়ার শর্ত থেকে]

বা, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$

2. $yz+zx+2xy=0$ এবং $x^2+y^2+z^2=3$ তলদ্বয়ের ছেদিত বক্রের উপর (1, 1, −1) বিন্দুতে স্পর্শকরেখা ও লম্বতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান :

যদি $f(x,y,z) \equiv yz+zx+2xy=0$ এবং $g(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-3=0$ হয় তবে $f_x=z+2y$, $f_y=z+2x$, $f_z=y+x$, $g_x=2x$, $g_y=2y$, $g_z=2z$ এবং $(1,1,-1)$ বিন্দুতে এগুলির মান $f_x=1$, $f_y=1$, $f_z=2$, $g_x=2$, $g_y=2$, $g_z=-2$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x-1}{1.(-2)-2.2}=\frac{y-1}{2.2-(-2).1}=\frac{z+1}{1.2-1.2}$

বা, $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+1}{0}$

বা, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}$, $z+1=0$

নির্ণেয় লম্বতলের সমীকরণ $(x-1).(-6)+(y-1).6+(z+1).0=0$

বা, $x-y=0$

8.6 ডাইভারজেন্স এবং কার্ল

(A) ডাইভারজেন্স : ধরা যাক্ $\mathbf{f}(x,y,z)$ একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন যার সন্তত আংশিক অবকলজ আছে। $\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}$ ফাংশনটিকে $\mathbf{f}$ ফাংশনের ডাইভারজেন্স বলে। এটি একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন এবং একে div $\mathbf{f}$ বা $\nabla \mathbf{f}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore \operatorname{div}\mathbf{f}=\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}$$

$$=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{f}$$

$$=\nabla.\mathbf{f}$$

আবার f -কে উপাংশে বিশ্লেষণ করে

$$f(x, y, z) = f_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\,\mathbf{k},$$

(যখন f_1, f_2, f_3 স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন), এই ভাবে লিখেলে

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{i}f_1+\mathbf{j}f_2+\mathbf{k}f_3\right)$$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z} \qquad [\because \mathbf{i.i}=\mathbf{j.j}=\mathbf{k.k}=1 \text{ এবং } \mathbf{i.j}=\mathbf{j.k}=\mathbf{k.i}=0]$$

সোলেনয়ডাল (Solenoidal) ভেক্টর ঃ যদি $\operatorname{div}\mathbf{f}=0$ হয় তবে ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন f-কে সোলেনয়ডাল ভেক্টর বলে।

(B) কার্ল ঃ সন্তত আংশিক অবকলজ আছে এমন একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{i}f_1(x, y, z) + \mathbf{j}f_2(x, y, z) + \mathbf{k}f_3(x, y, z)$ (যখন f_1, f_2, f_3 স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন) এর জন্য

$$\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}$$

ফাংশনটিকে f -এর কার্ল বলে। এটি একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন এবং একে curl f বা $\nabla\times\mathbf{f}$ বা rot f দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore \quad \operatorname{curl}\mathbf{f}=\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\mathbf{f}=\nabla\times\mathbf{f}$$

আবার f -কে উপাংশে বিশ্লেষণ করে লিখলে

$$\operatorname{curl}\mathbf{f}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\mathbf{i}f_1+\mathbf{j}f_2+\mathbf{k}f_3\right)$$

$$=\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

অনাবর্তনশীল (Irrolational) ভেক্টর ঃ যদি $\operatorname{curl}\mathbf{f}=0$ হয় তবে ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন f -কে অনাবর্তনশীল ভেক্টর বলে।

8.6.1 ডাইভারজেন্স এবং কার্ল সংক্রান্ত বিভিন্ন সূত্রাবলী ঃ

(A) যদি f (x, y, z) এবং g(x, y, z) দুটি অবকলনযোগ্য ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন হয় তবে

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}\pm\mathbf{g})=\operatorname{div}\mathbf{f}\pm\operatorname{div}\mathbf{g}$$

$$\operatorname{curl}(\mathbf{f}\pm\mathbf{g})=\operatorname{curl}\mathbf{f}\pm\operatorname{curl}\mathbf{g}$$

প্রমাণ : $\text{div}(\mathbf{f} \pm \mathbf{g}) = \mathbf{i}.\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f} \pm \mathbf{g}) + \mathbf{j}.\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{f} \pm \mathbf{g}) + \mathbf{k}.\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})$

$$= \left(\mathbf{i}.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{j}.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \mathbf{k}.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right) \pm \left(\mathbf{i}.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} + \mathbf{j}.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} + \mathbf{k}.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)$$

$$= \text{div } \mathbf{f} \pm \text{div } \mathbf{g}$$

$$\text{curl}(\mathbf{f} \pm \mathbf{g}) = \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f} \pm \mathbf{g}) + \mathbf{j} \times \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{f} \pm \mathbf{g}) + \mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})$$

$$= \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right) \pm \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)$$

$$= \text{curl } \mathbf{f} \pm \text{curl } \mathbf{g}$$

(B) যদি $u(x, y, z)$ একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন এবং $\mathbf{f}(x, y, z)$ একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন হয় এবং যদি উভয়েই অবকলনযোগ্য হয় তবে

$\text{div}(u\mathbf{f}) = (\text{grad } u).\mathbf{f} + u \text{ div } \mathbf{f}$

$\text{curl}(u\mathbf{f})$ $(\text{grad } u) \times \mathbf{f} + u \text{ curl } \mathbf{f}$

প্রমাণ : $\text{div}(u\mathbf{f}) = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(u\mathbf{f}) + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(u\mathbf{f}) + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(u\mathbf{f})$

$$= \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{f} + u\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\right) + \mathbf{j}.\left(\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{f} + u\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\right) + \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{f} + u\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{f} + u\left(\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right)$$

$$= (\text{grad } u) \cdot \mathbf{f} + u \text{ div } \mathbf{f}$$

$$\text{curl}(u\mathbf{f}) = \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x}(u\mathbf{f}) + \mathbf{j} \times \frac{\partial}{\partial y}(u\mathbf{f}) + \mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial z}(u\mathbf{f})$$

$$= \sum \mathbf{i} \times \frac{\partial}{\partial x}(u\mathbf{f})$$

$$= \sum \mathbf{i} \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{f} + u \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right)$$

$$= \left(\sum \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \times \mathbf{f} + u \left(\sum \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right)$$

$$= (\text{grad } u) \times \mathbf{f} + u \,\text{curl}\, \mathbf{f}$$

(c) যদি $\mathbf{f}(x, y, z)$ এবং $\mathbf{g}(x, y, z)$ দুটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন হয় তবে

$$\text{grad}(\mathbf{f} . \mathbf{g}) = \mathbf{f} \times \text{curl}\, \mathbf{g} + \mathbf{g} \times \text{curl}\, \mathbf{f} + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f}$$

$$\text{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\text{curl}\, \mathbf{f}) . \mathbf{g} - \mathbf{f} . \text{curl}\, \mathbf{g}$$

$$\text{curl}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f} \,\text{div}\, \mathbf{g} - \mathbf{g} \,\text{div}\, \mathbf{f} + (\mathbf{g} . \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} . \nabla)\mathbf{g}$$

প্রমাণ : $\text{grad}(\mathbf{f} . \mathbf{g}) = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f} . \mathbf{g}) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{f} . \mathbf{g}) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{f} . \mathbf{g})$ ..... (i)

এখন প্রথম পদ $= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{i}\left(\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot \mathbf{g} \right)$

$$= \mathbf{i}\left(\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \right) + \mathbf{i}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot \mathbf{g} \right)$$

$$= \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \right)\mathbf{i} + \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right)\mathbf{i}$$

$$= \left[\mathbf{f} \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \right) + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{i}) \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \right] + \left[\mathbf{g} \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{i}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right]$$

$$\left[\because \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \right]$$

$$= \mathbf{f} \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \right) + \mathbf{g} \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) + (\mathbf{f} . \mathbf{i}) \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} + (\mathbf{g} . \mathbf{i}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$$

অনুরূপে, দ্বিতীয় পদ

$$= \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{f}.\mathbf{g}) = \mathbf{f}\times\left(\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}\right)+\mathbf{g}\times\left(\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\right)+(\mathbf{f}.\mathbf{j})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}+(\mathbf{g}.\mathbf{j})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}$$

এবং তৃতীয় পদ

$$= \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{f}.\mathbf{g}) = \mathbf{f}\times\left(\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)+\mathbf{g}\times\left(\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right)+(\mathbf{f}.\mathbf{k})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}+(\mathbf{g}.\mathbf{k})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}$$

এই মানগুলি (i) নং-এ বসিয়ে পাই

$$\text{grad}(\mathbf{f}.\mathbf{g}) = \mathbf{f}\times\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)+\mathbf{g}\times\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right)$$

$$+\left[(\mathbf{f}.\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial n}+(\mathbf{f}.\mathbf{j})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}+(\mathbf{f}.\mathbf{k})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right]+\left[(\mathbf{g}.\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+(\mathbf{g}.\mathbf{j})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+(\mathbf{g}.\mathbf{k})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right]$$

$$= \mathbf{f}\times\text{curl}\,\mathbf{g}+\mathbf{g}\times\text{curl}\,\mathbf{f}+(\mathbf{f}.\nabla)\mathbf{g}+(\mathbf{g}.\nabla)\mathbf{f}$$

$$\left[\because (\mathbf{f}.\nabla)\mathbf{g} = \mathbf{f}.\mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}+\mathbf{f}.\mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}+\mathbf{f}.\mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} = (\mathbf{f}.\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}+(\mathbf{f}.\mathbf{j})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}+(\mathbf{f}.\mathbf{k})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} \text{ ইত্যাদি}\right]$$

$$\text{div}(\mathbf{f}\times\mathbf{g}) = \mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})$$

$$= \mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)+\mathbf{j}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}\right)+\mathbf{k}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\times\mathbf{g}+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\times\mathbf{g}+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\times\mathbf{g}\right)+\left(\mathbf{i}.\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}+\mathbf{j}.\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}+\mathbf{k}.\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\cdot\mathbf{g}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\cdot\mathbf{g}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\cdot\mathbf{g}\right)-\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\cdot\mathbf{f}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}\cdot\mathbf{f}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\cdot\mathbf{f}\right)$$

$$\left[\because \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \text{ এবং } \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = -(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}\right]$$

$$=\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{g}-\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{f}$$

$$=(\text{curl}\,\mathbf{f}).\mathbf{g}-(\text{curl}\,\mathbf{g}).\mathbf{f}$$

$$\text{curl}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})=\mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})+\mathbf{j}\times\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})+\mathbf{k}\times\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})$$

$$=\mathbf{i}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)+\mathbf{j}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}\right)+\mathbf{k}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)$$

$$=\left\{\mathbf{i}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\times\mathbf{g}\right)+\mathbf{j}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\times\mathbf{g}\right)+\mathbf{k}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\times\mathbf{g}\right)\right\}+\left\{\mathbf{i}\times\left(\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)+\mathbf{j}\times\left(\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}\right)+\mathbf{k}\times\left(\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)\right\}$$

$$=\sum\mathbf{i}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\times\mathbf{g}\right)+\sum\mathbf{i}\times\left(\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)$$

$$=\sum\left\{(\mathbf{i}\cdot\mathbf{g})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}-\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\right)\mathbf{g}\right\}+\sum\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)\mathbf{f}-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right\}$$

$$\left[\because \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\right]$$

$$=\sum(\mathbf{g}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}-\sum\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\right)\mathbf{g}+\sum\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)\mathbf{f}-\sum(\mathbf{f}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}$$

$$=(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}-(\text{div}\,\mathbf{f})\mathbf{g}+(\text{div}\,\mathbf{g})\mathbf{f}-(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g}$$

$$\left[\because(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}=\mathbf{g}\cdot\mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{g}\cdot\mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{g}\cdot\mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}=\sum(\mathbf{g}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\right]$$

$$=\mathbf{f}\,\text{div}\,\mathbf{g}-\mathbf{g}\,\text{div}\,\mathbf{f}+(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}-(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g}$$

8.6.2 দ্বিতীয় ক্রমের ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর (Second Order Differential Operator) :

যদি $\phi(x,y,z)$ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন এবং $\mathbf{f}(x,y,z)$ ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন হয় তবে grad ϕ এবং curl $\mathbf{f}$ উভয়েই ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন; তাই এই উভয় ফাংশনেরই ডাইভারজেন্স এবং কার্ল নির্ণয় করা যেতে পারে। আবার যেহেতু div $\mathbf{f}$ একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন grad (div $\mathbf{f}$) এই ভেক্টর ফাংশনটিরও অস্তিত্ব থাকতে পারে। এই ফাংশনগুলির জন্য সূত্র বা মান এখন আমরা একে একে নির্ণয় করব।

(A) $$\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi=\nabla\cdot(\nabla\phi)=\operatorname{div}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\sum\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\sum\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+0+0\right)\qquad[\because \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}\ \text{ইত্যাদি}]$$

$$=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\nabla^2\phi$$

$$\therefore\quad \nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

এই ∇^2 অপারেটরটিকে ল্যাপলাসের অপারেটর (Laplace's Operator) বা Laplacian বলে।

$\nabla^2\phi=0$ সমীকরণটিকে ল্যাপলাসের সমীকরণ বলা হয়।

$$\boxed{\therefore\ \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi)=\nabla^2\phi}$$

(B) $$\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\phi)=\operatorname{curl}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\times\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\mathbf{k}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\mathbf{j}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)+\left(-\mathbf{k}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}+\mathbf{i}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)+\left(\mathbf{j}\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}-\mathbf{i}\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)$$

$$[\because \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}]$$

$$=0\qquad\left[\because \text{এখানে}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\ \ \text{ইত্যাদি}\right]$$

$$\boxed{\therefore\ \operatorname{curl}(\operatorname{grad}\phi)=0}$$

(c) $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{f})=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{f})$

$$=\nabla\cdot\left\{\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$\because \mathbf{f}=f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}+f_3\mathbf{k} \text{ হলে } \nabla\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\left\{\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$=0$ $\quad [\because \mathbf{i}.\mathbf{i}=\mathbf{j}.\mathbf{j}=\mathbf{k}.\mathbf{k}=1$ এবং $\mathbf{i}.\mathbf{j}=\mathbf{j}.\mathbf{k}=\mathbf{k}.\mathbf{i}=0]$

$\therefore \operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{f})=0$

(D) $\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\mathbf{f})=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{f})=\nabla\times\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z}\right)$

$$=\sum\mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z}\right)$$

$$=\sum\mathbf{i}\times\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x^2}+\mathbf{j}\times\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x\partial z}\right)$$

$$=\sum\left[\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x^2}\right)\mathbf{i}-(\mathbf{i}.\mathbf{i})\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x^2}\right\}+\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x\partial y}\right)\mathbf{j}-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x\partial y}\right\}+\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{k}-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x\partial z}\right\}\right]$$

$$=\sum\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x^2}\right)\mathbf{i}+\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x\partial y}\right)\mathbf{j}+\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{k}\right\}-\sum\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x^2}$$

$$=(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xx})\mathbf{i}+(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xy})\mathbf{j}+(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xz})\mathbf{k}+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{yx})\mathbf{i}+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{yy})\mathbf{j}+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{yz})\mathbf{k}$$

$$+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zx})\mathbf{i}+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zy})\mathbf{j}+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zz})\mathbf{k}-\sum\mathbf{f}_{xx} \quad \left[\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x^2}=\mathbf{f}_{xx},\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x\partial y}=\mathbf{f}_{xy} \text{ ইত্যাদি লিখে}\right]$$

$$=\mathbf{i}\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xx}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{yx}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zx}\right)\right\}+\mathbf{j}\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xy}\right)+\left(\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{yy}\right)+\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zy}\right)\right\}$$

$$+\mathbf{k}\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xz}\right)+\left(\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{yz}\right)+\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zz}\right)\right\}-\sum\mathbf{f}_{xx}$$

$$=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xx}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{y}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{z}\right)+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{x}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{y}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{z}\right)+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{x}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{y}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{z}\right)-\sum\mathbf{f}_{xx}$$

$\left[\because \mathbf{f}_{xy}=\mathbf{f}_{yx}\right.$ ইত্যাদি$\left.\right]$

$$=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\mathbf{f})+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\mathbf{f})+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\mathbf{f})-\nabla^2\mathbf{f}\quad\left[\because\sum\mathbf{f}_{xx}=\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial z^2}=\nabla^2\mathbf{f}\right]$$

$$=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{f})-\nabla^2\mathbf{f}$$

$$\boxed{\therefore\ \text{curl (curl f)} = \text{grad (div f)} - \nabla^2 \mathbf{f}}$$

দ্রষ্টব্য : আমরা জানি $\nabla^2\phi$ = div (grad ϕ) যখন ϕ স্কেলার ফাংশন। ∇^2f = div (grad f) লিখলে তা সংজ্ঞায়িত হয় না যেহেতু f একটি ভেক্টর ফাংশন।

(E) উপরোক্ত আলোচনা (D)-এর সূত্র থেকে পাই—

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\mathbf{f})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{f})-\nabla^2\mathbf{f}$$

$$\therefore\ \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{f})=\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\mathbf{f})+\nabla^2\mathbf{f}$$

8.7 div f এবং curl f -এর ব্যবহারিক বিষয়ে আলোচনা

(A) যদি একটি দৃঢ় বস্তু (Rigid body) কোনো বিন্দুর চারদিকে **w** কৌণিক বেগে আবর্তিত হতে থাকে তবে যে বস্তুকণার স্থান ভেক্টর **r** তার রৈখিক বেগ **v** হলে গতিবিদ্যার সূত্র থেকে আমরা জানি

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r},$$

এখানে **v** ভেক্টরটি বিভিন্ন অবস্থানের বস্তুকণার জন্য বিভিন্ন, অর্থাৎ **v** একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন কিন্তু **w** ভেক্টরটি সকল বস্তুকণার জন্য একই।

অতএব $\operatorname{curl}\mathbf{v}=\operatorname{curl}(\mathbf{w}\times\mathbf{r})$

$$=\mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{w}\times\mathbf{r})+\mathbf{j}\times\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{w}\times\mathbf{r})+\mathbf{k}\times\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{w}\times\mathbf{r})$$

$$=\mathbf{i}\times\left(\mathbf{w}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\right)+\mathbf{j}\times\left(\mathbf{w}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\right)+\mathbf{k}\times\left(\mathbf{w}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right)$$ [∵ **w** একটি ধ্রুবক ভেক্টর]

$$=\mathbf{i}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{i})+\mathbf{j}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{j})+\mathbf{k}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{k})$$

$$=\sum \mathbf{i}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{i})$$

$$=\sum\{(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{w}-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{w})\mathbf{i}\}$$ [ভেক্টর গুণনের নিয়মানুযায়ী]

$$=\sum\{(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{w}-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{w})\mathbf{i}\}$$

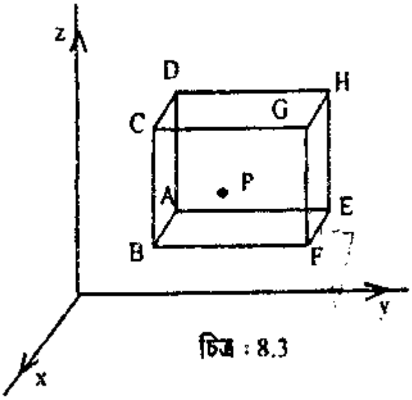
$$=3\mathbf{w}-\mathbf{w}$$ [$\because$ $(\mathbf{i.i})\,\mathbf{w} = (\mathbf{i.i})\,\mathbf{w} + (\mathbf{j.j})\,.\,\mathbf{w} + (\mathbf{k.k})\,\mathbf{w}$

$$=2\mathbf{w}$$ এবং $\Sigma(\mathbf{i.w})\,\mathbf{i} = \mathbf{w}_1\mathbf{i} + \mathbf{w}_2\mathbf{j} + \mathbf{w}_3\mathbf{k} = \mathbf{w}$

যদি $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1\mathbf{i} + \mathbf{w}_2\mathbf{j} + \mathbf{w}_3\mathbf{k}$ হলে $(\mathbf{i.w}) = \mathbf{w}_1$ ইত্যাদি]

অতএব কোনো আবর্তনশীল দৃঢ় বস্তুর কোনো কণার রৈখিক বেগের curl বস্তুটির কৌণিক বেগর দ্বিগুণের সমান। সেইজন্য কোনো ভেক্টর ফাংশনের curl-কে rotation বা সংক্ষেপে rot দিয়েও চিহ্নিত করা হয়।

(B) ধরা যাক্ কোনো গতিশীল তরলের কোনো বিন্দু $P(x, y, z)$-তে গতির ফিল্ড $U(x, y, z) = u_1(x, y, z)\mathbf{i} + u_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + u_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$. এই P বিন্দুকে কেন্দ্রস্থলে রেখে খুব ছোট একটি আয়তঘন কল্পনা করা হল যার ধারগুলি (edges) স্থানাঙ্ক অক্ষগুলির সঙ্গে সমান্তরাল এবং তাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে Δx, Δy, Δz। গতি ভেক্টর যেভাবে ধরা হয়েছে সেই অনুযায়ী EFGH তল দিয়ে যে গতিতে তরল বহির্গত হচ্ছে তা $u_2\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z\right)$ এবং একক সময়ে ঐ তলদিয়ে যে পরিমাণ তরল বহির্গত হচ্ছে তার আয়তন $\left[u_2\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z\right)\right]\Delta x\cdot\Delta z$



চিত্র : 8.3

$$=\left[u_2(x,y,z)+\frac{\Delta y}{2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y}(x,y,z)\right]\Delta x\Delta z,$$ Δy এর দ্বিতীয় এবং তার অধিক ঘাত বিশিষ্ট পদগুলিকে অগ্রাহ্য করে। আবার ঠিক একই ভাবে, যেহেতু ABCD তলে তরলের গতি $u_2\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z\right)$ একক সময়ে ঐ তল দিয়ে যে পরিমাণ তরল ঐ আয়তঘনের ভিতরে প্রবেশ করছে তার আয়তন $\left[u_2(x,y,z)-\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial u_2}{\partial y}(x,y,z)\right]\Delta x\Delta z$

অতএব ঐ দুটি তল দিয়ে মোট যে পরিমাণ তরল বেরিয়ে যায় তার মোট আয়তন

$$=\left[u_2(x,y,z)+\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial}{\partial y}u_2(x,y,z)\right]\Delta x\Delta z-\left[u_2(x,y,z)-\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial u_2}{\partial y}(x,y,z)\right]\Delta x\Delta z$$

$$=\frac{\partial u_2}{\partial y}(x,y,z)\,\Delta x\Delta y\Delta z$$

অনুরূপে অন্য দুই জোড়া তল দিয়ে একক সময়ে যে পরিমাণ তরল বেরিয়ে যায় তার আয়তন $\frac{\partial u_3}{\partial z}(x, y, z)\Delta x\Delta y\Delta z$ এবং $\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y, z)\Delta x\Delta y\Delta z$

অতএব একক সময়ে মোট নির্গত তরলের আয়তন

$$=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z=(\text{div}\, u)\Delta x\Delta y\Delta z$$

$\therefore$ $\Delta x\Delta y\Delta z$ দিয়ে ভাগ করে এবং $\Delta x\Delta y\Delta z \to 0$ লিমিট নিয়ে পাই

একক সময়ে একক আয়তন থেকে নির্গত তরলের আয়তন = div u

উদাহরণ :

1. যদি $f(x,y,z) = xyi + yzj + zxk$ হয় তবে নিম্নলিখিত মানগুলি নির্ণয় করুন :

   (a) div **f**, (b) curl **f**, (c) grad (div **f**), (d) curl (curl **f**)

সমাধান :

(a) $$\text{div}\,\mathbf{f}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+zx\mathbf{k})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(xy)+\frac{\partial}{\partial y}(yz)+\frac{\partial}{\partial z}(zx)$$

$$=y+z+x$$

(b) $$\text{curl}\,\mathbf{f}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\mathbf{i}xy+\mathbf{j}yz+\mathbf{k}zx)$$

$$=\mathbf{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(zx)-\frac{\partial}{\partial z}(yz)\right\}+\mathbf{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(xy)-\frac{\partial}{\partial x}(zx)\right\}+\mathbf{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(yz)-\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right\}$$

$$=\mathbf{i}(0-y)+\mathbf{j}(0-z)+\mathbf{k}(0-x)$$

$$=-(y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k})$$

(c) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{f}) = \operatorname{grad}(x+y+z)$ [(a) থেকে div **f** = x + y + z]

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(x+y+z) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(x+y+z) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(x+y+z)$$

$$= \mathbf{i}\cdot 1 + \mathbf{j}\cdot 1 + \mathbf{k}\cdot 1$$

$$= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

(d) $$\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\mathbf{f}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & -z & -x \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-x) - \frac{\partial}{\partial z}(-z)\right\} + \mathbf{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}(-x)\right\} + \mathbf{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-z) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right\}$$

$$= \mathbf{i}(0+1) + \mathbf{j}(0+1) + \mathbf{k}(0+1)$$

$$= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

2. **f** = y sin xi + z sin y **j** + x sin z **k** হলে $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুতে div **f** এবং curl **f**-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\operatorname{div}\mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}(y\sin x) + \frac{\partial}{\partial y}(z\sin y) + \frac{\partial}{\partial z}(x\sin z)$

$$= y\cos x + z\cos y + x\cos z$$

$(\pi/2, \pi/2, \pi/2)$ বিন্দুতে div **f** এর মান $= \pi/2\cos\pi/2 + \pi/2\cos\pi/2 + \pi/2\cos\pi/2$

$$= 3\pi/2\cos\pi/2 = 0$$

$$= \mathbf{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(x\sin z) - \frac{\partial}{\partial z}(z\sin y)\right\} + \mathbf{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(y\sin x) - \frac{\partial}{\partial x}(x\sin x)\right\} + \mathbf{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(z\sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(y\sin x)\right\}$$

$$= \mathbf{i}(0-\sin y) + \mathbf{j}(0-\sin z) + \mathbf{k}(0-\sin x)$$

$$= -(\mathbf{i}\sin y + \mathbf{j}\sin z + \mathbf{k}\sin x)$$

$\therefore$ $(\pi/2, \pi/2, \pi/2)$ বিন্দুতে curl **f** এর মান

$$= -\left(\mathbf{i}\sin \pi/2 + \mathbf{j}\sin \pi/2 + \mathbf{k}\sin \pi/2\right)$$

$$= -\left(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

3. যদি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ হয় তবে দেখান যে

(a) div $\mathbf{r} = 3$ এবং (b) curl $\mathbf{r} = 0$

সমাধান : (a) $\operatorname{div}\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(z)\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right]$$

$$= 0$$

4. যদি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ (ধ্রুবক ভেক্টর) হয় তবে দেখান যে

(a) div $(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = 0$ (b) curl $(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = -2\mathbf{a}$

সমাধান :

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(a_3 y - a_2 y) + \mathbf{j}(a_1 z - a_3 x) + \mathbf{k}(a_2 x - a_1 y)$$

(a) $$\operatorname{div}(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(a_3 y - a_2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(a_1 z - a_3 x) + \frac{\partial}{\partial z}(a_2 x - a_1 y)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

(b) $$\operatorname{curl}(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_3 y - a_2 z & a_1 z - a_3 x & a_2 x - a_1 y \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(a_2 x - a_1 y) - \frac{\partial}{\partial z}(a_1 z - a_3 x)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(a_3 y - a_2 z) - \frac{\partial}{\partial x}(a_2 x - a_1 y)\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(a_1 z - a_3 x) - \frac{\partial}{\partial y}(a_3 y - a_2 z)\right]$$

$$= \mathbf{i}(-a_1 - a_1) + \mathbf{j}(-a_2 - a_2) + \mathbf{k}(-a_3 - a_3)$$

$$= -2a_1\mathbf{i} - 2a_2\mathbf{j} - 2a_3\mathbf{k} = -2(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = -2\mathbf{a}$$

5. $f(x,yz) = (x + y^2)i + (ay + z^2)j + (az + x^2)k$ ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল হলে a-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : f ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল হওয়ার শর্ত div f = 0

বা, $\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(ay+z^2)+\frac{\partial}{\partial z}(az+x^2)=0$

বা, $1+a+a=0$ বা, $a=-\frac{1}{2}$

6. দেখান যে $f(x, y, z) = (xe^x + y^2\cos x)\ \mathbf{i} + (2y \sin x + z)\ \mathbf{j} + (y + \log z)\ \mathbf{k}$ ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল (irrotational)।

সমাধান : প্রদত্ত ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল হবে যদি curl f = 0 হয়।

এখন $\text{curl } \mathbf{f} = \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(y+\log z)-\frac{\partial}{\partial z}(2y\sin x+z)\right]+\mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(xe^x+y^2\cos x)-\frac{\partial}{\partial x}(y+\log z)\right]$

$$+\mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2y\sin x+z)-\frac{\partial}{\partial y}(xe^x+y^2\cos x)\right]$$

$$=\mathbf{i}[1-1]+\mathbf{j}[0-0]+\mathbf{k}[2y\cos x-2y\cos x]$$

$$=\mathbf{i}\cdot 0+\mathbf{j}\cdot 0+\mathbf{k}\cdot 0$$

$$=0$$

∴ f ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল।

7. যদি $\phi(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ হয় তবে div grad ϕ এবং curl grad ϕ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\text{grad}\,\phi=\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$

$$=\mathbf{i}(3x^2-3yz)+\mathbf{j}(3y^2-3xz)+\mathbf{k}(3z^2-3xy)$$

∴ $\text{div}(\text{grad}\,\phi)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2-3yz)+\frac{\partial}{\partial y}(3y^2-3xz)+\frac{\partial}{\partial z}(3z^2-3xy)$

$$=6x+6y+6z$$

$$=6(x+y+z),$$

এবং $\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 - 3yz & 3y^2 - 3xz & 3z^2 - 3xy \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(3z^2 - 3xy) - \frac{\partial}{\partial z}(3y^2 - 3xz)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(3x^2 - 3yz) - \frac{\partial}{\partial x}(3z^2 - 3xy)\right]$$

$$+ \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 3xz) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3yz)\right]$$

$$= \mathbf{i}(-3x + 3x) + \mathbf{j}(-3y + 3y) + \mathbf{k}(-3z + 3z)$$

$$= \mathbf{i}\cdot 0 + \mathbf{j}\cdot 0 + \mathbf{k}\cdot 0 \ = 0$$

8. যখন $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ এবং $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ তখন দেখান যে $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^n) = \nabla^2 r^n$ $n(n+1)r^{n-2}$ এবং $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} r^n) = 0$

সমাধান : যেহেতু $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x$

$$= \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{r}$$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

আবার, $\frac{\partial}{\partial x}(r^n) = nr^{n-1} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = nr^{n-1} \cdot \frac{x}{r} = nx\,r^{n-2}$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2}(r^n) = n \cdot 1\, r^{n-2} + nx(n-2)\, r^{n-3} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= n\left[r^{n-2} + x(n-2)\, r^{n-3} \cdot \frac{x}{r}\right]$$

$$= nr^{n-2}\left[1 + (n-2)x^2 \cdot r^{-2}\right]$$

অনুরূপে $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(r^n) = n r^{n-2}\left[1+(n-2)y^2 \cdot r^{-2}\right]$ এবং $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(r^n) = nr^{n-2}\left[1+(n-2)z^2 r^{-2}\right]$

$$\therefore \operatorname{div}(\operatorname{grad} r^n) = \nabla^2(r^n) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(r^n)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(r^n)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(r^n)$$

$$= nr^{n-2}\left[3+(n-2)r^{-2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]$$

$$= nr^{n-2}\left[3+(n-2)r^{-2}.r^2\right]$$

$$= nr^{n-2}\left[3+(n-2)\right] = n(n+1)r^{n-2}$$

এখন $\operatorname{grad}(r^n) = i\frac{\partial}{\partial y}(r^n)+j\frac{\partial}{\partial y}(r^n)+k\frac{\partial}{\partial z}(r^n)$

$$= i\,nxr^{n-2}+jnyr^{n-2}+knzr^{n-2}$$

$$\therefore \operatorname{curl}(\operatorname{grad} r^n) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ nxr^{n-2} & nyr^{n-2} & nzr^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= i\left[\frac{\partial}{\partial y}(nzr^{n-2})-\frac{\partial}{\partial z}(nyr^{n-2})\right]+j\left[\frac{\partial}{\partial z}(nxr^{n-2})-\frac{\partial}{\partial x}(nzr^{n-2})\right]+k\left[\frac{\partial}{\partial x}(nyr^{n-2})-\frac{\partial}{\partial y}(nxr^{n-2})\right]$$

$$= i\left[nz(n-2)r^{n-3}\left(\frac{y}{r}\right)-ny(n-2)r^{n-3}\left(\frac{z}{r}\right)\right]+j\left[nx(n-2)r^{n-3}\left(\frac{z}{r}\right)-nz(n-2)r^{n-3}\frac{x}{r}\right]$$

$$+k\left[ny(n-2)r^{n-3}\frac{x}{y}-nx(n-2)r^{n-3}\frac{y}{r}\right]$$

$$\left[\because \frac{\partial r^{n-2}}{\partial y} = (n-2)r^{n-3}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = (n-2)r^{n-3}\cdot\frac{y}{r}\right]$$

$$= n(n-2)r^{n-4}\left[i(yz-yz)+j(zx-zx)+k(xy-xy)\right]$$

$$= n(n-2)r^{n-4}\left[i.0+j.0+k.0\right]$$

$$= 0$$

9. যদি f এবং g ভেক্টর দুটি অনাবর্তনশীল (irrotational) হয় তবে প্রমাণ করুন যে $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল।

প্রমাণ : শর্তানুসারে curl $\mathbf{f} = 0$ এবং curl $\mathbf{g} = 0$

$\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল হতে হলে div $(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = 0$ হতে হবে।

এখন, সূত্র থেকে পাই

ইত্যাদি

$$\text{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\text{curl } \mathbf{f}).\, \mathbf{g} - (\text{curl } \mathbf{g})\,.\mathbf{f}$$

$$= 0 - 0 \qquad [\because \text{ curl } \mathbf{f} = 0 \text{ এবং curl } \mathbf{g} = 0]$$

$$= 0$$

অতএব $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল।

10. যদি $\mathbf{f}(x, y, z) = (2x - ay + 3z)\,\mathbf{i} + (4x - 5y + bz)\,\mathbf{j} + (cx - 7y + 6z)\mathbf{k}$ ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল হয় তবে a, b, c এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : f ভেক্টর অনাবর্তনশীল হওয়ার শর্ত curl $\mathbf{f} = 0$

বা, $$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x - ay + 3z & 4x - 5y + bz & cx - 7y + 6z \end{vmatrix} = 0$$

বা, $$\mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(cx - 7y + 6z) - \frac{\partial}{\partial z}(4x - 5y + bz)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(2x - ay + 3z) - \frac{\partial}{\partial x}(cx - 7y + 6z)\right]$$

$$+\mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(4x - 5y + bz) - \frac{\partial}{\partial y}(2x - ay + 3z)\right] = 0$$

বা, $\mathbf{i}(-7 - b) + \mathbf{j}(3 - c) + \mathbf{k}(4 + a) = 0$

$\therefore -7 - b = 0,\ 3 - c = 0$ এবং $4 + a = 0$

$\therefore b = -7,\ c = 3,\ a = -4$

11. দেখান যে $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$, যখন $f(r)$ স্কেলার ফাংশনটির সন্তত অবকল সহগ আছে।

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r) = \frac{\partial}{\partial r} f(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r} \qquad \left[\because r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\right]$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(r) = \frac{\partial}{\partial x}\left[f'(r) \cdot \frac{x}{r}\right]$$

$$=\frac{\left\{1.f'(r)+xf''(r)\cdot\frac{x}{r}\right\}r-xf'(r)\cdot\frac{x}{r}}{r^2}\quad\left[\because\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\right]$$

$$=\frac{f'(r)}{r}+\frac{x^2f''(r)}{r^2}-\frac{x^2f'(r)}{r^3}$$

অনুরূপে $\frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2}=\frac{f'(r)}{r}+\frac{y^2f''(r)}{r^2}-\frac{y^2f'(r)}{r^3}$

এবং $\frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2}=\frac{f'(r)}{r}+\frac{z^2f''(r)}{r^2}-\frac{z^2f'(r)}{r^3}$

$$\therefore\nabla^2 f(r)=\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2}=\frac{3f'(r)}{r}+\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^2}f''(r)-\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^3}f'(r)$$

$$=\frac{3f'(r)}{r}+\frac{r^2}{r^2}f''(r)-\frac{r^2}{r^3}f'(r)=\frac{3f'(r)}{r}+f''(r)-\frac{1}{r}f'(r)$$

$$=\frac{2}{r}f'(r)+f''(r)$$

12. দেখান যে $(\mathbf{f}\ \nabla)\phi=\mathbf{f}\ (\nabla\phi)$, যখন $\mathbf{f}(x,y,z)=\mathbf{i}f_1(x,y,z)+\mathbf{j}f_2(x,y,z)+\mathbf{k}f_3(x,y,z)$ এবং ϕ একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন।

সমাধান ঃ বামপক্ষ ঃ $(\mathbf{f}\cdot\nabla)\phi=\left[(\mathbf{i}f_1+\mathbf{j}f_2+\mathbf{k}f_3)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\phi$

$$=\left[f_1\frac{\partial}{\partial x}+f_2\frac{\partial}{\partial y}+f_3\frac{\partial}{\partial z}\right]\phi$$

$$=f_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+f_2\frac{\partial\phi}{\partial y}+f_3\frac{\partial\phi}{\partial z}$$ [$\because$ $\mathbf{i}.\mathbf{i}=\mathbf{j}.\mathbf{j}=\mathbf{k}.\mathbf{k}=1$ এবং $\mathbf{i}.\mathbf{j}=\mathbf{j}.\mathbf{k}=\mathbf{k}.\mathbf{i}=0$]

আবার, ডানপক্ষ $=\mathbf{f}\cdot(\nabla\phi)$

$$=(\mathbf{i}f_1+\mathbf{j}f_2+\mathbf{k}f_3)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=f_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+f_2\frac{\partial\phi}{\partial y}+f_3\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

অতএব বামপক্ষ = ডানপক্ষ

13. দেখান যে $\text{div}\left\{\frac{f(r)}{r}\mathbf{r}\right\}=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{r^2 f(r)\right\}$

সমাধান ঃ $\frac{f(r)}{r}\mathbf{r}=\frac{f(r)}{r}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\frac{f(r)}{r}x\mathbf{i}+\frac{f(r)}{r}y\mathbf{j}+\frac{f(r)}{r}z\mathbf{k}$

$$\therefore \text{div}\left\{\frac{f(r)}{r}\mathbf{r}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{xf(r)}{r}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{yf(r)}{r}\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{zf(r)}{r}\right\} \ldots\ldots (i)$$

এখন $\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{xf(r)}{r}\right\}=\frac{\left\{1.f(r)+xf'(r)\frac{x}{r}\right\}r-xf(r)\cdot\frac{x}{r}}{r^2}$ $\left[\because \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\right]$

$$=\frac{f(r)}{r}+\frac{x^2}{r^2}f'(r)-\frac{x^2}{r^3}f(r)$$

অনুরূপে

$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{yf(r)}{r}\right\}=\frac{f(r)}{r}+\frac{y^2}{r^2}f'(r)-\frac{y^2}{r^3}f(r)$ এবং $\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{zf(r)}{r}\right\}=\frac{f(r)}{r}+\frac{z^2}{r^2}f'(r)-\frac{z^2}{r^3}f(r)$

এই মানগুলি (i)-এ বসিয়ে পাই

$$\text{div}\left\{\frac{f(r)}{r}\mathbf{r}\right\}=3\frac{f(r)}{r}+\frac{(x^2+y^2+z^2)}{r^2}f'(r)-\frac{(x^2+y^2+z^2)}{r^3}f(r)$$

$$=\frac{3f(r)}{r}+\frac{r^2}{r^2}f'(r)-\frac{r^2}{r^3}f(r)=\frac{3f(r)}{r}+f'(r)-\frac{f(r)}{r}$$

$$=\frac{2f(r)+rf'(r)}{r}=\frac{2rf(r)+r^2f'(r)}{r^2}=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{r^2f(r)\right\}$$

14. যদি $\mathbf{f}(x, y, z)=xe^x\mathbf{i}+y^2z\,\mathbf{j}+z\log x\,\mathbf{k}$, এবং $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ হয় তবে $(\mathbf{f}\times\nabla)\phi=\mathbf{f}\times(\nabla\phi)$ সম্পর্কটির সত্যতা যাচাই করুন।

সমাধান : বামপক্ষ $(\mathbf{f}\times\nabla)\phi=\left[\left(xe^{x}\mathbf{i}+y^{2}z\mathbf{j}+z\log x\mathbf{k}\right)\times\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\phi$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ xe^{x} & y^{2}z & z\log x\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}\phi$$

$$=\left[\mathbf{i}\left(y^{2}z\frac{\partial}{\partial z}-z\log x\frac{\partial}{\partial y}\right)+\mathbf{j}\left(z\log x\frac{\partial}{\partial x}-xe^{x}\frac{\partial}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\left(xe^{x}\frac{\partial}{\partial y}-y^{2}z\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\phi$$

$$=\left[\mathbf{i}\left(y^{2}z\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\log x\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\mathbf{j}\left(z\log x\frac{\partial\phi}{\partial x}-xe^{x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\left(xe^{x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-y^{2}z\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right]$$

$$=2\left(y^{2}z^{2}-yz\log x\right)\mathbf{i}+2\left(zx\log x-zxe^{x}\right)\mathbf{j}+2\left(xye^{x}-xy^{2}z\right)\mathbf{k}$$

$$=2yz(zy-\log x)\mathbf{i}+2zx\left(\log x-e^{x}\right)\mathbf{j}+2xy\left(e^{x}-yz\right)\mathbf{k}$$

ডানপক্ষ $=\mathbf{f}\times\nabla\phi=\left(xe^{x}\mathbf{i}+y^{2}z\mathbf{j}+z\log x\mathbf{k}\right)\times\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ xe^{x} & y^{2}z & z\log x\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}\left(y^{2}z\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\log x\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\mathbf{j}\left(z\log z\frac{\partial\phi}{\partial x}-xe^{x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\left(xe^{x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-y^{2}z\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

$$=\mathbf{i}\left(y^{2}z.2z-z\log x.2y\right)+\mathbf{j}\left(z\log z.2x-xe^{x}.2z\right)+\mathbf{k}\left(xe^{x}.2y-y^{2}z.2x\right)$$

$$=2yz(yz-\log x)\mathbf{i}+2zx\left(\log z-e^{x}\right)\mathbf{j}+2xy\left(e^{x}-yz\right)\mathbf{k}$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

15. যদি $\phi(x, y, z)$, $u(x, y, z)$ দুটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন এবং $\mathbf{f} = u \text{ grad } \phi$ হয় তবে দেখান যে $\mathbf{f}.\text{curl } \mathbf{f} = 0$

সমাধান : $\text{curl } \mathbf{f} = \text{curl } (u \text{ grad } \phi)$ [প্রদত্ত শর্তানুসারে]

$= u \text{ curl grad}\phi + (\text{grad} u) \times (\text{grad}\phi)$

[$\because \text{curl } (u\mathbf{f}) = u \text{ curl } \mathbf{f} + \text{grad } u \times \mathbf{f}$ যখন u স্কেলার এবং f ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন]

$= (\text{grad } u) \times (\text{grad } \phi)$ [$\because$ curl grad $\phi = 0$]

$\therefore$ $\mathbf{f} \cdot \text{curl } \mathbf{f} = (u \text{ grad } \phi) \cdot \{(\text{grad } u) \times (\text{grad } \phi)\}$

$= u[\text{grad}\phi \text{ grad } u \text{ grad}\phi] = 0$ [তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণনের নিয়ম অনুযায়ী]

8.8 সারাংশ

1. s ভেক্টরের দিক কোসাইনগুলি $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ হলে s এর দিকে f(x, y, z) স্কেলারটির দিশা অবকলজ হবে $\frac{df}{ds} = \nabla_s f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

2. একক ভেক্টর **a** এর দিকে f -এর দিশা অবকলজ হবে $\nabla_s f = l\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial r}$ এখানে $\mathbf{a} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$

3. $\text{grad } f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$ যখন f একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন।

4. স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন f-এর দিশা অবকলজ $\frac{\partial f}{\partial s}$ -এর চরম মান f(x, y, z) = c লেভেল তলের অভিলম্বের দিকে অর্থাৎ grad f ভেক্টরটি যেদিকে নির্দেশিত সেই দিকে ।

5. f(x, y, z) = c তলের ক্ষেত্রে $(\mathbf{R} - \mathbf{r}). \nabla f = 0$ স্পর্শক তলের সমীকরণ এবং $(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \nabla f = 0$ অভিলম্বের সমীকরণ (x, y, z) বিন্দুতে যার অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$

6. (i) $\text{div}\,\mathbf{f} = \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}$, f-একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন। এবং div **f** একটি স্কেলার।

(ii) $\text{curl}\,\mathbf{f} = \mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}$, f-একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন। এবং curl **f** হল ভেক্টর।

7. ডাইভারজেন্স ও কার্ল-সংক্রান্ত বিভিন্ন সূত্রাবলীর জন্য 8.5.1 অনুচ্ছেদ দেখুন।

8. div gradϕ, curl gradϕ, div curl **f**, ইত্যাদি দ্বিতীয় ক্রমের ডিফারেন্সিয়াল অপারেটরগুলির জন্য 8.5.2 অনুচ্ছেদ দেখুন।

8.9 প্রশ্নাবলী

A. 1. দিশা অবকলজ নির্ণয় করুন :

(i) $f(x, y, z) = 3x^3y^2 + 2z^5$ এর **i**, −**j** এবং **i** − **j** ভেক্টরের দিকে।

(ii) $g(x, y, z) = xyz$ এর (2,3,5) বিন্দুতে **i** + 2**j** + 2**k** ভেক্টরের দিকে।

(iii) $\phi(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ এর (2, −1, 1) বিন্দুতে **i** + **j** + **k** ভেক্টরের দিকে।

2. $\psi(x, y, z) = x^3i + 3y^2zj + y^3k$ ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশনটির (−1, 1, 3) বিন্দুতে 2i + **j** − 2**k** ভেক্টরের দিকে দিশা অবকলজ নির্ণয় করুন।

3. স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন $f(x, y, z) = x^2yz + 4xz^2$ এর (2, 2, 3) বিন্দুতে grad f-এর মান নির্ণয় করুন এবং সেখান থেকে 2i − j + k ভেক্টরের দিকে f-এর দিশা অবকল নির্ণয় করুন।

4. কোনো বিন্দু (x, y, z) এর স্থান ভেক্টর **r** এবং | **r** | = r হলে দেখান যে

(i) $\nabla\phi = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r}$, যখন $\phi = \frac{1}{r}$

(ii) $\nabla\phi = nr^{n-2}\mathbf{r}$, যখন $\phi = r^n$

(iii) $\nabla\phi = \frac{1}{r^2}\mathbf{r}$, যখন $\phi = \log r$

5. গ্রেডিয়েন্টের দিক বা অভিলম্বের দিক বরাবর $f(x, y, z) = xy^2z^3$ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশনটির (1, 1, 1) বিন্দুতে অবকল সহগ নির্ণয় করুন।

6. দেখান যে $\phi(x, y, z) = 2xy + 3yz + zx$ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশনটির (0, 1, 6) বিন্দুতে দিশা অবকলজ 8i + 18j + 3k ভেক্টরের দিকে চরম এবং এই চরম মান $\sqrt{397}$

7. স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন $\psi(x, y, z) = x(y + z) + y(z + x) + z(x + y)$ এর (0, −1, 2) বিন্দুতে কোনো দিক বরাবর দিশা অবকলজের মান সব থেকে বেশি? দিশা অবকলজের ঐ সর্বাপেক্ষা বেশি মানটি কত?

8. $xy + 2yz + 5zx = 5$ লেভেল তলের উপর (1, 0, 1) বিন্দুতে একক অভিলম্ব ভেক্টর নির্ণয় করুন।

9. $f(x, y, z) = x^2yz^3$ স্কেলার ফাংশনটির (2, 1, −1) বিন্দুতে সর্বোচ্চ বৃদ্ধির হার নির্ণয় করুন।

[সঙ্কেত : সর্বোচ্চ বৃদ্ধির হার = | ∇f |, (2, 1, −1) বিন্দুতে]

0. $yz + zx + xy = 0$ এবং $x + y^2 + z^2 - 7 = 0$ তলদ্বয়ের মধ্যে (2, −1, 2) বিন্দুতে কোণ নির্ণয় করুন।

11. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 3z - 13 = 0$ গোলকটির উপর (1, 0, 2) বিন্দুতে স্পর্শকতল ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

12. $f(x, y, z) = x + y + z$ এবং $g(x, y, z) = xyz$ হলে grad (fg) এর মান নির্ণয় করুন।

13. $x^2 - y^2 + z^2 = 8$ এবং $2x - 5y + z = 6$ তলদ্বয়ের ছেদিত বক্রের উপর (2, 0, 2) বিন্দুতে স্পর্শক রেখা ও লম্বতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

14. দুটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন f(x, y, z) ও g(x, y, z) এর জন্য প্রমাণ করুন যে grad (af + bg) = a grad f + b grad g, যখন a, b উভয়েই ধ্রুবক।

B. 1. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}$ হলে (a) div **f** (b) curl **f** এবং (c) grad (div **f**) এর মান নির্ণয় করুন।

2. যদি $\mathbf{f}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + y^2zx\mathbf{j} + z^2xy\mathbf{k}$ হয় তবে (1,–1,–1) বিন্দুতে (a) div **f**, (b) curl **f** (c) grad (div **f**) এবং (d) curl (curl **f**)–এর মান নির্ণয় করুন।

3. যদি $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর হয় তবে দেখান যে (a) div **a** = 0 এবং (b) curl **a** = 0.

4. যদি $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয় ধ্রুবক এবং $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ হয় তবে দেখান যে

(a) grad $[\mathbf{r}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})] = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (b) div $[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}] = -2\mathbf{a}.\mathbf{b}$ এবং (c) curl $[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}] = 2\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

5. $\mathbf{f}(x, y, z) = (-ax + 2yz)\mathbf{i} + (-3y + 4zx)\mathbf{j} + (4z - 5xy)\mathbf{k}$ ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল হলে a–এর মান নির্ণয় করুন।

6. দেখান যে $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + \sin x)\,\mathbf{i} + (y + \text{zin } z)\,\mathbf{j} + (z + y\cos z)\mathbf{k}$ ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল।

7. যদি $\phi(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3y^3z^3$ হয় তবে div (grad ϕ) এবং curl (grad ϕ)–এর মান নির্ণয় করুন।

8. দেখান যে (a) $\text{div}\left(\text{grad}\frac{1}{r}\right) = 0$ (b) $\mathbf{a}.\left(\text{grad}\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$ যখন $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ এবং **a** একটি ধ্রুবক ভেক্টর $r = |\mathbf{r}|$

9. যদি $\phi(x, y, z) = 3x^2yz - y^3z$ হয় তবে দেখান যে $\nabla^2\phi = 0$, অর্থাৎ ϕ স্কেলার ফাংশনটি ল্যাপলাসের সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

10. দেখান যে (a) $\nabla^2 r^n = n(n + 1)\, r^{n-2}$ কিন্তু (b) $\nabla^2(r^n\mathbf{r}) = n(n + 3)\, r^{n-2}\mathbf{r}$

11. যদি $\mathbf{f}(x, y, z) = \log(1 + 2x)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + \sin(x + z)\mathbf{k}$ এবং $\phi(x, y, z) = xy^2z^3$ হয় তবে $(\mathbf{f}.\nabla)\phi = \mathbf{f}.(\nabla\phi)$ সম্পর্কটির সত্যতা যাচাই করুন।

12. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x - by - z)\mathbf{i} + (x - y - cz)\mathbf{j} + (ax - y - z)\mathbf{k}$ ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল হলে a, b, c এর মান নির্ণয় করুন।

13. দেখান যে (i) $\nabla^2\phi = 0$ হলে grad ϕ ভেক্টরটি একই সাথে সোলেনয়ডাল এবং অনাবর্তনশীল (ii) n = –3 এর জন্য $r^n\mathbf{r}$ ভেক্টরটি সলেনয়ডাল কিন্তু n-এর অন্য সকল মানের জন্য উহা অনাবর্তনশীল।

14. প্রমাণ করুন যে

$$\mathbf{a}\cdot\{\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}) - \nabla\times(\mathbf{f}\times\mathbf{a})\} = \text{div}\,\mathbf{f},$$

যখন **a** একটি ধ্রুব ভেক্টর।

8.10 উত্তর মালা

A. 1. (i) $9x^2y^2 - 6x^3y$, $\frac{3x^2y}{\sqrt{2}}(3y-2x)$, (ii) $\frac{47}{3}$, (iii) $-\frac{4}{\sqrt{3}}$

2. $2i + 8j + k$, 3. $4(15i + 3j + 14k)$, $\frac{82\sqrt{6}}{3}$ 5. $\sqrt{14}$

7. $2(i+2j-k), 2\sqrt{6}$, 8. $\pm\frac{1}{\sqrt{59}}(5i+3j+5k)$ 9. $4\sqrt{11}$

10. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{42}}\right)$ 11. $4x - 4y + 7z = 18$, $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-4} = \frac{z-2}{7}$

12. $(2xyz + y^2z + yz^2)\,\mathbf{i} + (2xyz + x^2z + xz^2)\,\mathbf{j} + (2xyz + x^2y + xy^2)\mathbf{k}$

13. $\frac{x-2}{5} = y = \frac{z-2}{5}$, $5x + y - 5z = 0$

B. 1. (a) $2(x + y + z)$ (b) $-(2ix + 2jy + 2kz)$ (c) $2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

2. (a) 6 (b) b (c) $6(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$ (d) $4(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$

4. [সংকেত : (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ = ধ্রুবক ভেক্টর = $\mathbf{c}$ ধরে $\mathbf{r}.(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{r}.\,\mathbf{c} = xc_1 + yc_2 + zc_3$ লেখা হলে grad $(\mathbf{r}.\mathbf{c}) = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} = \mathbf{c}$

(b) $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{f}$ ধরে, div $(\mathbf{f} \times \mathbf{b})$ = (curl $\mathbf{f}$).$\mathbf{b}$ – (curl $\mathbf{b}$).$\mathbf{f}$

এখন curl $\mathbf{f}$ = curl $(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = -2\mathbf{a}$, উদা. 4 (খ) এবং curl $\mathbf{b} = 0$.

(c) curl $[(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}]$ = curl $[(\mathbf{b}.\mathbf{r})\mathbf{a} - (\mathbf{b}.\mathbf{a})\mathbf{r}]$ = curl $\{(\mathbf{b}.\mathbf{r})\mathbf{a}\}$ – curl$\{(\mathbf{b}.\mathbf{a})\mathbf{r}\}$

= [{grad $(\mathbf{b}.\mathbf{r})$} $\times \mathbf{a}$ + $(\mathbf{b}.\mathbf{r})$ curl $\mathbf{a}$] – [{grad $(\mathbf{b}.\mathbf{a})$} $\times \mathbf{r}$ + $(\mathbf{b}.\mathbf{a})$ curl $\mathbf{b}$]

যেহেতু $\mathbf{b}.\mathbf{r}$, $\mathbf{b}.\mathbf{a}$ এরা স্কেলার। ইত্যাদি]

5. 1

7. $2xy\,(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)$

12. $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$

একক 9 ☐ গাউস ও স্টোকসের উপপাদ্য

গঠন

0.9 প্রস্তাবনা

9.1 উদ্দেশ্য

9.2 গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য

9.2.1 গ্রীনের উপপাদ্য

9.2.2 গাউসের উপপাদ্য

9.2.3 গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স ও কার্লের বিকল্প সংজ্ঞা

9.2.4 উদাহরণমালা — A

9.3 সামতলিক ক্ষেত্রে গ্রীনের উপপাদ্য

9.4 স্টোকসের উপপাদ্য

9.4.1 স্টোকসের উপপাদ্য অনুযায়ী কিছু সিদ্ধান্ত

9.4.2 উদাহরণমালা — B

9.5 সারাংশ

9.6 প্রশ্নাবলী

9.7 উত্তরমালা

0.9 প্রস্তাবনা

ভেক্টর বিদ্যার দুটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য (ক) গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য ও (খ) স্টোকসের উপপাদ্য, এই এককে আলোচিত হয়েছে। এছাড়াও এই এককেই আলোচিত কোনো সমতলে গ্রীনের উপাপাদ্যটিও খুব গুরুত্বপূর্ণ; এটিকে স্টোকসের উপপাদ্যের একটি বিশেষ (Special) ক্ষেত্র হিসাবেও দেখান হয়েছে।

গাউসের উপপাদ্যটির মাধ্যমে আয়তন সমাকল (Volume Integral)-কে তলীয় সমাকলে (Surface Integral-এ) রূপান্তর করা যায় বা উল্টোটিও করা যায়। আবার স্টকের উপপাদ্যটির সাহায্যে তলীয় সমাকলকে রৈখিক সমাকলে (Line Integral-এ) রূপান্তর করা যায় বা এক্ষেত্রেও বিপরীত প্রক্রিয়াটিও করা যায়। এতে সমাকল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে অনেক সুবিধা পাওয়া যায়। (এই এককে ভেক্টর গুলিকে মোটা অক্ষরে প্রকাশ করা হয়েছে।)

9.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি অধ্যায়ন করলে আপনি জানতে পারবেন

- গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য ও গ্রীনের উপপাদ্য
- গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স ও কার্ল এর অক্ষ নিরপেক্ষ সংজ্ঞা পাবেন
- স্টোকসের উপপাদ্য জানতে পারবেন

9.2 গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য (Gauss's Divergence Theorem) :

$\mathbf{f}(x, y, z)$ ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশনটির v অঞ্চলে যদি সন্তত অবকল সহগ থাকে এবং v অঞ্চলকে বেষ্টনকারী বদ্ধতল (closed surface) s-এর বহির্মুখী অভিলম্ব বরাবর একক ভেক্টর যদি $\mathbf{n}$ হয় তবে

$$\iint_s \mathbf{f}\cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_v \operatorname{div}\mathbf{f}\, dv$$

অথবা, কার্তিয় স্থানাঙ্কে $\mathbf{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$,

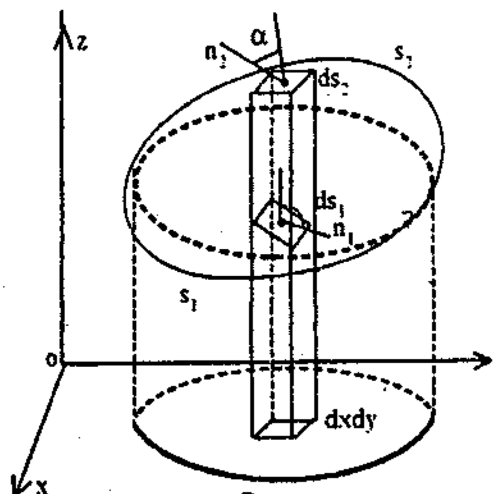
যখন f_1, f_2, f_3 প্রত্যেকে স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন, হলে

$$\iint_s (f_1 dydz + f_2 dzdx + f_3 dxdy) = \iiint_v \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dxdydz$$ এইরূপেও উপপাদ্যটি প্রকাশ করা যায়।

প্রমাণ : প্রথমে ধরা যাক্ কার্তিয় অক্ষগুলির যে কোনো একটির (এখানে z অক্ষ নেওয়া হল) সাথে সমান্তরালভাবে অঙ্কিত যে সরলরেখাগুলি v অঞ্চল দিয়ে যায় তারা প্রত্যেকে s-কে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে বা স্পর্শক হলে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে।

এখন $\iiint_v \frac{\partial f_3}{\partial z} dxdydz$ সমাকলটি বিবেচনা করা যাক্।

যদি ত্রিমাত্রিক অঞ্চল v-এর xy তলে লম্ব অভিক্ষেপ (Projection) দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে R হয় তবে শর্তানুযায়ী R ক্ষেত্রের যে কোনো অভ্যন্তরীণ বিন্দু থেকে z-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা সমূহের প্রত্যেকটি s-কে দুটি বিন্দুতে ছেদ করবে।



চিত্র : 1

এ ক্ষেত্রে যে ছেদবিন্দুগুলির z স্থানাঙ্ক কম তাদের দ্বারা s এর অধিকৃত অংশটিকে s_1 এবং যে ছেদাবন্দুগুলির z স্থানাঙ্ক বেশি তারা s তলটির যে অংশ জুড়ে আছে সেটিকে s_2 দ্বারা চিহ্নিত করা হল (অতএব $s = s_1 + s_2$) যদি s_1 ও s_2 তলদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $z = \phi(x, y)$ ও $z = \psi(x, y)$ হয় তবে

$$\iiint_v \frac{\partial f_3}{\partial z} dxdydz = \iint_R \left[\int_\phi^\psi \frac{\partial f_3}{\partial z} dz\right] dxdy$$

$$= \iint_R \left[f_3(x, y, \psi) - f_3(x, y, \phi)\right] dxdy$$

$$= \iint_R f_3(x, y, \psi)\, dxdy - \iint_R f_3(x, y, \phi)\, dxdy \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

এখন যদি $\mathbf{n}_1$ এবং $\mathbf{n}_2$ যথাক্রমে s_1 এবং s_2 এর যে কোনো বিন্দুতে [(x, y, ϕ), (x, y, ψ) বিন্দুতে] বহির্মুখী অভিলম্ব বরাবর একক ভেক্টর হয় তবে z-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\mathbf{n}_2$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\mathbf{n}_1$ স্থূলকোণ করে।

$$\therefore \iint_R f_3(x, y, \psi)\,dxdy = \iint_{s_2} f_3 \mathbf{n}_2 . \mathbf{k}\, ds_2$$

[z-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একক ভেক্টর $\mathbf{k}$ হলে $\mathbf{n}_2 . \mathbf{k} ds_2 = \cos\alpha\, ds_2 = dxdy$]

এবং $\iint_R f_3(x, y, \phi)\,dxdy = -\iint_{s_1} f_3 \mathbf{n}_1 . \mathbf{k}\, ds_1$

সমাকলের এই মানগুলি (i)-এ বসিয়ে পাই

$$\iiint_v \frac{\partial f_3}{\partial z} dxdydz = \iint_{s_2} f_3 \mathbf{n}_2 . \mathbf{k} ds_2 + \iint_{s_1} f_3 \mathbf{n}_1 . \mathbf{k} ds_1 = \iint_s f_3 \mathbf{n} . \mathbf{k} ds, \quad \text{......... (ii)}$$

যখন s-এর যে কোনো বিন্দুতে বহির্মুখী অভিলম্ব বরাবর একক ভেক্টর $\mathbf{n}$.

এক্ষেত্রে উল্লেখ করা প্রয়োজন s_1 ও s_2-এর মধ্যে বা বাইরে যদি s তলের এমন কোনো অংশ থেকে থাকে যেখানে বহির্মুখী অভিলম্ব $\mathbf{n}$, $\mathbf{k}$ এর সাথে লম্ব, স্বাভাবিক ভাবেই সেক্ষেত্রে $\mathbf{n} . \mathbf{k} = 0$ হবে এবং তারজন্য উপরোক্ত ফলের কোনো পরিবর্তন হবে না।

ঠিক একইভাবে yz এবং zx তলে লম্ব অভিক্ষেপ নিয়ে প্রমাণ করা যায়—

$$\iiint_v \frac{\partial f_1}{\partial x} dxdydz = \iint_s f_1 \mathbf{n} . \mathbf{i}\, ds \quad \text{........ (iii)}$$

এবং
$$\iiint_v \frac{\partial f_2}{\partial y} dxdydz = \iint_s f_2 \mathbf{n} . \mathbf{j}\, ds \quad \text{........ (iv)}$$

এখন যদি (ii), (iii) এবং (iv) নং-এর সমীকরণগুলি যোগ করা হয় তবে

$$\iiint_v \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_s (f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}) . \mathbf{n}\, ds$$

বা,
$$\iiint_v \operatorname{div} \mathbf{f}\, dv = \iint_s \mathbf{f} . \mathbf{n}\, ds$$

এখন যদি যে কোনো সাধারণ (General) ত্রিমাত্রিক অঞ্চল v-এর জন্য উপরোক্ত উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করতে চাই তবে v -কে এমন কতকগুলি উপঅঞ্চলে বিভক্ত করতে হবে যারা প্রত্যেকেই প্রথমে আরোপিত শর্তটি মেনে চলে (অর্থাৎ যে কোনো একটি অক্ষের সহিত সমান্তরাল সরলরেখা, উপঅঞ্চলের বেষ্টনকারী তলটিকে সর্বাধিক দুটি বিন্দুতে ছেদ করে)। তাহলে প্রত্যেক উপঅঞ্চলের জন্য গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটি সত্য হবে। কিন্তু এই উপঅঞ্চলগুলির সমষ্টি মোট অঞ্চল v-এর সমান হলেও তাদের বেষ্টনকারী তলগুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি s অপেক্ষা বেশি হবে। (কারণ, পরস্পর পাশাপাশি দুটি তলের মধ্যে একটি সাধারণ তলাংশ থাকবে যাকে দুবার নেওয়া হয়েছে) তবে পাশাপাশি দুটি অঞ্চলের বন্টনকারী তলটি সাধারণ (Common) হওয়ার ঐ দুটি অঞ্চলের বহির্মুখী অভিলম্ব দুটি সাধারণ তলটিতে বিপরীতমুখী হয়। তাই ঐ তলগুলির জন্য সমাকলগুলি সমান অথচ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়। সুতরাং সব উপঅঞ্চলগুলির জন্য আলাদাভাবে গাউসের উপপাদ্যটি লিখে যদি সবগুলি যোগ করা হয় তবে আয়তন সমাকলগুলির সমষ্টি সরাসরি v অঞ্চলের জন্য আয়তন সমাকল হবে এবং

তলীয় সমাকলগুলির সমষ্টি কেবলমাত্র s তলের জন্য হবে, যেহেতু উপঅঞ্চলগুলির বন্টনকারী তলগুলির জন্য তলীয় সমাকলগুলির সমষ্টি শূন্য হবে। অর্থাৎ এক্ষেত্রেও

$$\iiint_v \operatorname{div} \mathbf{f}\, dv = \iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds$$

সম্পর্কটি বহাল থাকবে।

9.2.1 গ্রীনের উপপাদ্য

যদি s তল দ্বারা সীমাবদ্ধ কোনো অঞ্চল v-তে ϕ এবং ψ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন দুটি এবং যে কোনো দিকবরাবর তাদের অবকলজগুলি একরূপ (uniform) এবং সন্তত হয় তবে

$$\iiint_v \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dv = \iint_s \left(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\right)\cdot \mathbf{n}\, ds$$

প্রমাণ ঃ গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা জানি

$$\iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds = \iiint_v \operatorname{div} \mathbf{f}\, dv$$

এখন, $\mathbf{f} = \phi\nabla\psi$ বসালে হয়

$$\iint_s (\phi\nabla\psi).\mathbf{n}\, ds = \iiint_v \operatorname{div}(\phi\nabla\psi)\, dv$$

এখন $\operatorname{div}(\phi\mathbf{f}) = \phi \operatorname{div}\mathbf{f} + \mathbf{f}.\operatorname{grad}\phi$ সূত্রানুযায়ী

$$\operatorname{div}(\phi\nabla\psi) = \phi \operatorname{div}(\nabla\psi) + \nabla\psi\cdot\nabla\phi$$

$$= \phi\nabla^2\psi + \nabla\psi\cdot\nabla\phi \qquad \left[\because \operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi) = \nabla^2\psi\right]$$

$$\iint_s (\phi\nabla\psi)\cdot \mathbf{n} ds = \iiint_v \left[\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right] dv \text{ ..... (i)}$$

এই অভেদকে গ্রীনের প্রথম অভেদ বা গ্রীনের প্রথম উপপাদ্য বলে।

(i) এর ϕ এবং ψ -কে নিজেদের মধ্যে পরিবর্তন করে পাই

$$\iint_s (\psi\nabla\phi)\cdot \mathbf{n} ds = \iiint_v \left[\psi\nabla^2\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right] dv, \text{ ..... (ii)}$$

এখন (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে এবং ঘুরিয়ে লিখে পাই

$$\iiint_v \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dv = \iint_s \left(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\right).\mathbf{n}\, ds, \text{ ..... (iii)}$$

এটাই নির্ণেয় অভেদ। এটিকে (iii) গ্রীনের দ্বিতীয় অভেদও বলা হয়। আবার $\mathbf{n}\,ds$ এর স্থানে $d\mathbf{s}$ লিখেও গ্রীনের উপপাদ্যটি নিম্নরূপ হয় ঃ

$$\iiint_v \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dv = \iint_s \left(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\right).d\mathbf{s}$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. যেহেতু $\text{grad}\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial n}\mathbf{n}$ এবং $\text{grad}\,\psi = \frac{\partial\psi}{\partial n}\mathbf{n}$ লেখা যায়, অতএব

$$(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\ \mathbf{n}ds = \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathbf{n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathbf{n}\right).\mathbf{n}ds$$

$$= \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)ds$$

অতএব গ্রীনের উপপাদ্য (iii) নং রূপ থেকে পরিবর্তিত করে

$$\iiint_v (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)dv = \iint_s \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)ds \quad \text{....... (iv)}$$

এই আকারেও লেখা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত 2. আবার যদি ϕ এবং ψ উভয়েই হারমোনিক (harmonic) হয় তবে $\nabla^2\phi = 0$ এবং $\nabla^2\psi = 0$ হয় এবং তখন (iv) নং অনুযায়ী

$$\iint_s \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)ds = 0 \text{ হয়।}$$

$$\therefore \quad \iint_s \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds = \iint_s \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}ds$$

অভেদটিকে গ্রীনের অন্যোন্যক (reciprocal) উপপাদ্য বলে।

9.2.2 গাউসের উপপাদ্য

যদি s একটি বন্ধ (closed) তল এবং মূলবিন্দু 0 থেকে যে কোনো বিন্দু (x, y, z) এর অব স্থানভেক্টর $\mathbf{r}$ হয় তবে

(i) $\iint_s \frac{\mathbf{n.r}}{r^3}ds = 0$, যদি 0 বিন্দুটি s-এর বাইরে অবস্থিত হয়।

(ii) $\iint_s \frac{\mathbf{n.r}}{r^3}ds = 4\pi$, যদি 0 বিন্দুটি s-এর ভিতরে অবস্থিত হয়।

প্রমাণ ঃ (i) গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\iint_s \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iiint_v \nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}dv$$, এখানে s দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটি v.

কিন্তু $r \neq 0$ হলে $\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla\cdot(r^{-3}\mathbf{r}) = (\nabla r^{-3})\cdot\mathbf{r} + (r^{-3})\nabla\cdot\mathbf{r}$

$$= -3r^{-5}\,\mathbf{r}.\mathbf{r} + 3r^{-3} \qquad [\because\ \nabla r^n = nr^{n-2}\,\mathbf{r} \text{ এবং } \nabla.\mathbf{r} = 3]$$

$$= 0$$

$$=\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{g}-\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{f}$$

$$=(\text{curl}\,\mathbf{f}).\mathbf{g}-(\text{curl}\,\mathbf{g}).\mathbf{f}$$

$$\text{curl}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})=\mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})+\mathbf{j}\times\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})+\mathbf{k}\times\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})$$

$$=\mathbf{i}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)+\mathbf{j}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}\right)+\mathbf{k}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)$$

$$=\left\{\mathbf{i}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\times\mathbf{g}\right)+\mathbf{j}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\times\mathbf{g}\right)+\mathbf{k}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\times\mathbf{g}\right)\right\}+\left\{\mathbf{i}\times\left(\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)+\mathbf{j}\times\left(\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}\right)+\mathbf{k}\times\left(\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)\right\}$$

$$=\sum\mathbf{i}\times\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\times\mathbf{g}\right)+\sum\mathbf{i}\times\left(\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)$$

$$=\sum\left\{(\mathbf{i}\cdot\mathbf{g})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}-\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\right)\mathbf{g}\right\}+\sum\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)\mathbf{f}-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right\}$$

$$\left[\because \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\right]$$

$$=\sum(\mathbf{g}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}-\sum\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\right)\mathbf{g}+\sum\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}\right)\mathbf{f}-\sum(\mathbf{f}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}$$

$$=(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}-(\text{div}\,\mathbf{f})\mathbf{g}+(\text{div}\,\mathbf{g})\mathbf{f}-(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g}$$

$$\left[\because (\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}=\mathbf{g}\cdot\mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{g}\cdot\mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{g}\cdot\mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}=\sum(\mathbf{g}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\right]$$

$$=\mathbf{f}\,\text{div}\,\mathbf{g}-\mathbf{g}\,\text{div}\,\mathbf{f}+(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}-(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g}$$

8.6.2 দ্বিতীয় ক্রমের ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর (Second Order Differential Operator) :

যদি $\phi(x,y,z)$ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন এবং $\mathbf{f}(x,y,z)$ ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন হয় তবে grad ϕ এবং curl **f** উভয়েই ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন; তাই এই উভয় ফাংশনেরই ডাইভারজেন্স এবং কার্ল নির্ণয় করা যেতে পারে। আবার যেহেতু div **f** একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন grad (div **f**) এই ভেক্টর ফাংশনটিরও অস্তিত্ব থাকতে পারে। এই ফাংশনগুলির জন্য সূত্র বা মান এখন আমরা একে একে নির্ণয় করব।

(A) $$\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi=\nabla\cdot(\nabla\phi)=\operatorname{div}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\sum\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\sum\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+0+0\right)\qquad[\because \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}\ \text{ইত্যাদি}]$$

$$=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\nabla^2\phi$$

$$\therefore\quad \nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

এই ∇^2 অপারেটরটিকে ল্যাপলাসের অপারেটর (Laplace's Operator) বা Laplacian বলে।

$\nabla^2\phi=0$ সমীকরণটিকে ল্যাপলাসের সমীকরণ বলা হয়।

$$\boxed{\therefore \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi)=\nabla^2\phi}$$

(B) $$\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\phi)=\operatorname{curl}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\times\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\mathbf{k}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\mathbf{j}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)+\left(-\mathbf{k}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}+\mathbf{i}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)+\left(\mathbf{j}\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}-\mathbf{i}\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)$$

$$[\because \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}]$$

$$=0\qquad\left[\because \text{এখানে }\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\ \text{ইত্যাদি}\right]$$

$$\boxed{\therefore \operatorname{curl}(\operatorname{grad}\phi)=0}$$

(c) $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{f}) = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{f})$

$$= \nabla\cdot\left\{\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$\because \mathbf{f} = f_1\mathbf{i}+f_2\mathbf{j}+f_3\mathbf{k} \text{ হলে } \nabla\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\left\{\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$= 0 \qquad [\because\ \mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1$ এবং $\mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{j}.\mathbf{k} = \mathbf{k}.\mathbf{i} = 0]$

$\boxed{\therefore \operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{f}) = 0}$

(D) $$\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\mathbf{f}) = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{f}) = \nabla\times\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right)$$

$$= \sum \mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right)$$

$$= \sum \mathbf{i}\times\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2}+\mathbf{j}\times\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x\partial z}\right)$$

$$= \sum\left[\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2}\right)\mathbf{i}-(\mathbf{i}.\mathbf{i})\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2}\right\}+\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x\partial y}\right)\mathbf{j}-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x\partial y}\right\}+\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{k}-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x\partial z}\right\}\right]$$

$$= \sum\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2}\right)\mathbf{i}+\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x\partial y}\right)\mathbf{j}+\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{k}\right\}-\sum\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2}$$

$$= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xx})\mathbf{i}+(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xy})\mathbf{j}+(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xz})\mathbf{k}+(\mathbf{j}.\mathbf{f}_{yx})\mathbf{i}+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{yy})\mathbf{j}+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{yz})\mathbf{k}$$

$$+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zx})\mathbf{i}+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zy})\mathbf{j}+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zz})\mathbf{k}-\sum\mathbf{f}_{xx} \qquad \left[\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} = \mathbf{f}_{xx},\ \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x\partial y} = \mathbf{f}_{xy} \text{ ইত্যাদি লিখে}\right]$$

$$=\mathbf{i}\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xx}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{yx}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zx}\right)\right\}+\mathbf{j}\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xy}\right)+\left(\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{yy}\right)+\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zy}\right)\right\}$$

$$+\mathbf{k}\left\{\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xz}\right)+\left(\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{yz}\right)+\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{zz}\right)\right\}-\sum\mathbf{f}_{xx}$$

$$=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{xx}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{y}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{z}\right)+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{x}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{y}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{z}\right)+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{f}_{x}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{f}_{y}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}_{z}\right)-\sum\mathbf{f}_{xx}$$

$\left[\because \mathbf{f}_{xy}=\mathbf{f}_{yx}\right.$ ইত্যাদি$\left.\right]$

$$=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\mathbf{f})+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\mathbf{f})+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\mathbf{f})-\nabla^2\mathbf{f}\quad\left[\because\sum\mathbf{f}_{xx}=\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial z^2}=\nabla^2\mathbf{f}\right]$$

$$=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{f})-\nabla^2\mathbf{f}$$

$$\boxed{\therefore\ \text{curl (curl f) = grad (div f)} - \nabla^2 \mathbf{f}}$$

দ্রষ্টব্য : আমরা জানি $\nabla^2\phi$ = div (grad ϕ) যখন ϕ স্কেলার ফাংশন। $\nabla^2\mathbf{f}$ = div (grad f) লিখলে তা সংজ্ঞায়িত হয় না যেহেতু f একটি ভেক্টর ফাংশন।

(E) উপরোক্ত আলোচনা (D)-এর সূত্র থেকে পাই—

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\mathbf{f})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{f})-\nabla^2\mathbf{f}$$

$$\therefore\ \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{f})=\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\mathbf{f})+\nabla^2\mathbf{f}$$

8.7 div f এবং curl f -এর ব্যবহারিক বিষয়ে আলোচনা

(A) যদি একটি দৃঢ় বস্তু (Rigid body) কোনো বিন্দুর চারদিকে **w** কৌণিক বেগে আবর্তিত হতে থাকে তবে যে বস্তুকণার স্থান ভেক্টর **r** তার রৈখিক বেগ **v** হলে গতিবিদ্যার সূত্র থেকে আমরা জানি

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}\times\mathbf{r},$$

এখানে **v** ভেক্টরটি বিভিন্ন অবস্থানের বস্তুকণার জন্য বিভিন্ন, অর্থাৎ **v** একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন কিন্তু **w** ভেক্টরটি সকল বস্তুকণার জন্য একই।

অতএব $\operatorname{curl}\mathbf{v}=\operatorname{curl}(\mathbf{w}\times\mathbf{r})$

$$=\mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{w}\times\mathbf{r})+\mathbf{j}\times\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{w}\times\mathbf{r})+\mathbf{k}\times\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{w}\times\mathbf{r})$$

$$=\mathbf{i}\times\left(\mathbf{w}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\right)+\mathbf{j}\times\left(\mathbf{w}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\right)+\mathbf{k}\times\left(\mathbf{w}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right)$$ [$\because$ **w** একটি ধ্রুবক ভেক্টর]

$$=\mathbf{i}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{i})+\mathbf{j}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{j})+\mathbf{k}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{k})$$

$$= \sum \mathbf{i} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{i})$$

$$= \sum \{(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\mathbf{w} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{w})\mathbf{i}\}$$ [ভেক্টর গুণনের নিয়মানুযায়ী]

$$= \sum \{(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\mathbf{w} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{w})\mathbf{i}\}$$

$$= 3\mathbf{w} - \mathbf{w}$$ [$\because$ $(\mathbf{i}.\mathbf{i})\,\mathbf{w} = (\mathbf{i}.\mathbf{i})\,\mathbf{w} + (\mathbf{j}.\mathbf{j})\,.\,\mathbf{w} + (\mathbf{k}.\mathbf{k})\,\mathbf{w}$

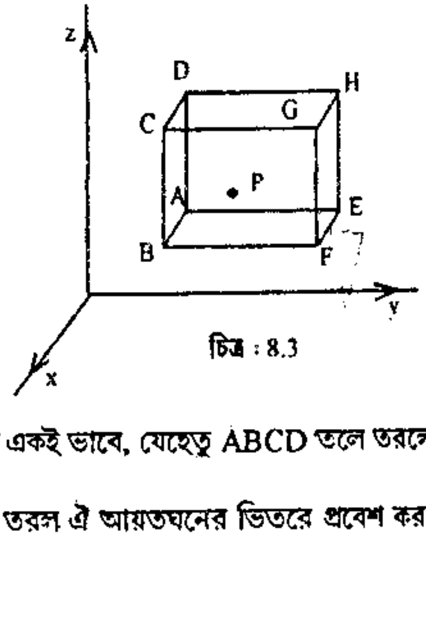
$$= 2\mathbf{w}$$ এবং $\Sigma(\mathbf{i}.\mathbf{w})\,\mathbf{i} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k} = \mathbf{w}$

যদি $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ হলে $(\mathbf{i}.\mathbf{w}) = w_1$ ইত্যাদি]

অতএব কোনো আবর্তনশীল দৃঢ় বস্তুর কোনো কণার রৈখিক বেগের curl বস্তুটির কৌণিক বেগর দ্বিগুণের সমান। সেইজন্য কোনো ভেক্টর ফাংশনের curl-কে rotation বা সংক্ষেপে rot দিয়েও চিহ্নিত করা হয়।

(B) ধরা যাক্ কোনো গতিশীল তরলের কোনো বিন্দু $P(x, y, z)$-তে গতির ফিল্ড $U(x, y, z) = u_1(x, y, z)\mathbf{i} + u_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + u_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$. এই P বিন্দুকে কেন্দ্রস্থলে রেখে খুব ছোট একটি আয়তঘন কল্পনা করা হল যার ধারগুলি (edges) স্থানাঙ্ক অক্ষগুলির সঙ্গে সমান্তরাল এবং তাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে Δx, Δy, Δz। গতি ভেক্টর যেভাবে ধরা হয়েছে সেই অনুযায়ী EFGH তল দিয়ে যে গতিতে তরল বহির্গত হচ্ছে তা $u_2\left(x, y + \dfrac{\Delta y}{2}, z\right)$ এবং একক সময়ে ঐ তলদিয়ে যে পরিমাণ তরল বহির্গত হচ্ছে তার আয়তন $\left[u_2\left(x, y + \dfrac{\Delta y}{2}, z\right)\right]\Delta x \cdot \Delta z$

$$= \left[u_2(x, y, z) + \frac{\Delta y}{2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y, z)\right]\Delta x \Delta z,$$ Δy এর দ্বিতীয় এবং তার অধিক ঘাত বিশিষ্ট পদগুলিকে অগ্রাহ্য করে। আবার ঠিক একই ভাবে, যেহেতু ABCD তলে তরলের গতি $u_2\left(x, y - \dfrac{\Delta y}{2}, z\right)$ একক সময়ে ঐ তল দিয়ে যে পরিমাণ তরল ঐ আয়তঘনের ভিতরে প্রবেশ করছে তার আয়তন $\left[u_2(x, y, z) - \dfrac{\Delta y}{2}\dfrac{\partial u_2}{\partial y}(x, y, z)\right]\Delta x \Delta z$



চিত্র : 8.3

অতএব ঐ দুটি তল দিয়ে মোট যে পরিমাণ তরল বেরিয়ে যায় তার মোট আয়তন

$$= \left[u_2(x, y, z) + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial}{\partial y}u_2(x, y, z)\right]\Delta x \Delta z - \left[u_2(x, y, z) - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y, z)\right]\Delta x \Delta z$$

$$= \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y, z)\,\Delta x \Delta y \Delta z$$

অনুরূপে অন্য দুই জোড়া তল দিয়ে একক সময়ে যে পরিমাণ তরল বেরিয়ে যায় তার আয়তন $\frac{\partial u_3}{\partial z}(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$ এবং $\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$

অতএব একক সময়ে মোট নির্গত তরলের আয়তন

$$=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z=(\operatorname{div}\mathbf{u})\Delta x\Delta y\Delta z$$

$\therefore$ $\Delta x\Delta y\Delta z$ দিয়ে ভাগ করে এবং $\Delta x\Delta y\Delta z \to 0$ লিমিট নিয়ে পাই

একক সময়ে একক আয়তন থেকে নির্গত তরলের আয়তন = div **u**

উদাহরণ :

1. যদি $f(x,y,z) = xyi + yzj + zxk$ হয় তবে নিম্নলিখিত মানগুলি নির্ণয় করুন :

   (a) div **f**, (b) curl **f**, (c) grad (div **f**), (d) curl (curl **f**)

সমাধান :

(a) $$\operatorname{div}\mathbf{f}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+zx\mathbf{k})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(xy)+\frac{\partial}{\partial y}(yz)+\frac{\partial}{\partial z}(zx)$$

$$=y+z+x$$

(b) $$\operatorname{curl}\mathbf{f}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\mathbf{i}xy+\mathbf{j}yz+\mathbf{k}zx)$$

$$=\mathbf{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(zx)-\frac{\partial}{\partial z}(yz)\right\}+\mathbf{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(xy)-\frac{\partial}{\partial x}(zx)\right\}+\mathbf{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(yz)-\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right\}$$

$$=\mathbf{i}(0-y)+\mathbf{j}(0-z)+\mathbf{k}(0-x)$$

$$=-(y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k})$$

(c) $\text{grad}(\text{div}\,\mathbf{f}) = \text{grad}(x+y+z)$ [(a) থেকে div f = x + y + z]

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(x+y+z) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(x+y+z) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(x+y+z)$$

$$= \mathbf{i}\cdot 1 + \mathbf{j}\cdot 1 + \mathbf{k}\cdot 1$$

$$= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

(d) $$\text{curl}(\text{curl}\,\mathbf{f}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & -z & -x \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-x) - \frac{\partial}{\partial z}(-z)\right\} + \mathbf{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}(-x)\right\} + \mathbf{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-z) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right\}$$

$$= \mathbf{i}(0+1) + \mathbf{j}(0+1) + \mathbf{k}(0+1)$$

$$= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

2. $\mathbf{f} = y \sin x\mathbf{i} + z \sin y\, \mathbf{j} + x \sin z\, \mathbf{k}$ হলে $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুতে div f এবং curl f-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\text{div}\,\mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}(y\sin x) + \frac{\partial}{\partial y}(z\sin y) + \frac{\partial}{\partial z}(x\sin z)$

$$= y\cos x + z\cos y + x\cos z$$

$(\pi/2, \pi/2, \pi/2)$ বিন্দুতে div f এর মান $= \pi/2 \cos\pi/2 + \pi/2\cos\pi/2 + \pi/2\cos\pi/2$

$$= 3\pi/2\cos\pi/2 = 0$$

$$= \mathbf{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(x\sin z) - \frac{\partial}{\partial z}(z\sin y)\right\} + \mathbf{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(y\sin x) - \frac{\partial}{\partial x}(x\sin x)\right\} + \mathbf{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(z\sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(y\sin x)\right\}$$

$$= \mathbf{i}(0-\sin y) + \mathbf{j}(0-\sin z) + \mathbf{k}(0-\sin x)$$

$$= -(\mathbf{i}\sin y + \mathbf{j}\sin z + \mathbf{k}\sin x)$$

$\therefore$ $(\pi/2, \pi/2, \pi/2)$ বিন্দুতে curl **f** এর মান

$$= -\left(\mathbf{i}\sin \pi/2 + \mathbf{j}\sin \pi/2 + \mathbf{k}\sin \pi/2\right)$$

$$= -\left(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)$$

3. যদি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ হয় তবে দেখান যে

(a) div $\mathbf{r} = 3$ এবং (b) curl $\mathbf{r} = 0$

সমাধান : (a) $\operatorname{div}\mathbf{r} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(z) = 1+1+1 = 3$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(z)\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right]$$

$$= 0$$

4. যদি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ (ধ্রুবক ভেক্টর) হয় তবে দেখান যে

(a) div $(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = 0$ (b) curl $(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = -2\mathbf{a}$

সমাধান :

$$\mathbf{r}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(a_3 y - a_2 y) + \mathbf{j}(a_1 z - a_3 x) + \mathbf{k}(a_2 x - a_1 y)$$

(a) $$\operatorname{div}(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(a_3 y - a_2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(a_1 z - a_3 x) + \frac{\partial}{\partial z}(a_2 x - a_1 y)$$

$$= 0+0+0 = 0$$

(b) $$\operatorname{curl}(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_3 y - a_2 z & a_1 z - a_3 x & a_2 x - a_1 y \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(a_2 x - a_1 y) - \frac{\partial}{\partial z}(a_1 z - a_3 x)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(a_3 y - a_2 z) - \frac{\partial}{\partial x}(a_2 x - a_1 y)\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(a_1 z - a_3 x) - \frac{\partial}{\partial y}(a_3 y - a_2 z)\right]$$

$$= \mathbf{i}(-a_1 - a_1) + \mathbf{j}(-a_2 - a_2) + \mathbf{k}(-a_3 - a_3)$$

$$= -2a_1\mathbf{i} - 2a_2\mathbf{j} - 2a_3\mathbf{k} = -2(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = -2\mathbf{a}$$

5. $f(x,yz) = (x+y^2)i + (ay+z^2)j + (az+x^2)k$ ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল হলে a-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : f ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল হওয়ার শর্ত div f = 0

বা, $\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(ay+z^2)+\frac{\partial}{\partial z}(az+x^2)=0$

বা, $1+a+a=0$ বা, $a=-\frac{1}{2}$

6. দেখান যে $f(x, y, z) = (xe^x + y^2\cos x)\ i + (2y \sin x + z)\ j + (y + \log z)\ k$ ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল (irrotational)।

সমাধান : প্রদত্ত ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল হবে যদি curl f = 0 হয়।

এখন $\text{curl}\, f = i\left[\frac{\partial}{\partial y}(y+\log z)-\frac{\partial}{\partial z}(2y\sin x+z)\right]+j\left[\frac{\partial}{\partial z}(xe^x+y^2\cos x)-\frac{\partial}{\partial x}(y+\log z)\right]$

$$+k\left[\frac{\partial}{\partial x}(2y\sin x+z)-\frac{\partial}{\partial y}(xe^x+y^2\cos x)\right]$$

$$= i[1-1]+j[0-0]+k[2y\cos x-2y\cos x]$$

$$= i\cdot 0+j\cdot 0+k\cdot 0$$

$$= 0$$

$\therefore$ f ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল।

7. যদি $\phi(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ হয় তবে div grad ϕ এবং curl grad ϕ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\text{grad}\,\phi = i\frac{\partial\phi}{\partial x}+j\frac{\partial\phi}{\partial y}+k\frac{\partial\phi}{\partial z}$

$$= i(3x^2-3yz)+j(3y^2-3xz)+k(3z^2-3xy)$$

$$\therefore \text{div}(\text{grad}\,\phi)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2-3yz)+\frac{\partial}{\partial y}(3y^2-3xz)+\frac{\partial}{\partial z}(3z^2-3xy)$$

$$=6x+6y+6z$$

$$=6(x+y+z),$$

এবং $\text{curl}(\text{grad}\,\phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2-3yz & 3y^2-3xz & 3z^2-3xy \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(3z^2-3xy) - \frac{\partial}{\partial z}(3y^2-3xz)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(3x^2-3yz) - \frac{\partial}{\partial x}(3z^2-3xy)\right]$$

$$+ \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(3y^2-3xz) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2-3yz)\right]$$

$$= \mathbf{i}(-3x+3x) + \mathbf{j}(-3y+3y) + \mathbf{k}(-3z+3z)$$

$$= \mathbf{i}\cdot 0 + \mathbf{j}\cdot 0 + \mathbf{k}\cdot 0 = 0$$

8. যখন $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ এবং $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ তখন দেখান যে $\text{div}(\text{grad}\, r^n) = \nabla^2 r^n$ $n(n+1)r^{n-2}$ এবং $\text{curl}(\text{grad}\, r^n) = 0$

সমাধান : যেহেতু $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2x$

$$= \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{r}$$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

আবার, $\frac{\partial}{\partial x}(r^n) = nr^{n-1}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = nr^{n-1}\cdot\frac{x}{r} = nx\,r^{n-2}$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2}(r^n) = n\cdot 1\, r^{n-2} + nx(n-2)\,r^{n-3}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= n\left[r^{n-2} + x(n-2)\,r^{n-3}\cdot\frac{x}{r}\right]$$

$$= nr^{n-2}\left[1+(n-2)x^2\cdot r^{-2}\right]$$

অনুরূপে $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(r^n) = n r^{n-2}[1+(n-2)y^2 \cdot r^{-2}]$ এবং $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(r^n) = nr^{n-2}[1+(n-2)z^2 r^{-2}]$

$$\therefore \operatorname{div}(\operatorname{grad} r^n) = \nabla^2(r^n) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(r^n) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(r^n) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(r^n)$$

$$= nr^{n-2}[3+(n-2)r^{-2}(x^2+y^2+z^2)]$$

$$= nr^{n-2}[3+(n-2)r^{-2}.r^2]$$

$$= nr^{n-2}[3+(n-2)] = n(n+1)r^{n-2}$$

এখন $\operatorname{grad}(r^n) = i\frac{\partial}{\partial y}(r^n) + j\frac{\partial}{\partial y}(r^n) + k\frac{\partial}{\partial z}(r^n)$

$$= i\,nxr^{n-2} + jnyr^{n-2} + knzr^{n-2}$$

$$\therefore \operatorname{curl}(\operatorname{grad} r^n) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ nxr^{n-2} & nyr^{n-2} & nzr^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= i\left[\frac{\partial}{\partial y}(nzr^{n-2}) - \frac{\partial}{\partial z}(nyr^{n-2})\right] + j\left[\frac{\partial}{\partial z}(nxr^{n-2}) - \frac{\partial}{\partial x}(nzr^{n-2})\right] + k\left[\frac{\partial}{\partial x}(nyr^{n-2}) - \frac{\partial}{\partial y}(nxr^{n-2})\right]$$

$$= i\left[nz(n-2)r^{n-3}\left(\frac{y}{r}\right) - ny(n-2)r^{n-3}\left(\frac{z}{r}\right)\right] + j\left[nx(n-2)r^{n-3}\left(\frac{z}{r}\right) - nz(n-2)r^{n-3}\frac{x}{r}\right]$$

$$+ k\left[ny(n-2)r^{n-3}\frac{x}{y} - nx(n-2)r^{n-3}\frac{y}{r}\right]$$

$$\left[\because \frac{\partial r^{n-2}}{\partial y} = (n-2)r^{n-3}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = (n-2)r^{n-3}\cdot\frac{y}{r}\right]$$

$$= n(n-2)r^{n-4}[i(yz-yz) + j(zx-zx) + k(xy-xy)]$$

$$= n(n-2)r^{n-4}[i.0 + j.0 + k.0]$$

$$= 0$$

9. যদি f এবং g ভেক্টর দুটি অনাবর্তনশীল (irrotational) হয় তবে প্রমাণ করুন যে $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল।

প্রমাণ: শর্তানুসারে curl $\mathbf{f} = 0$ এবং curl $\mathbf{g} = 0$

$\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল হতে হলে div $(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = 0$ হতে হবে।

এখন, সূত্র থেকে পাই

ইত্যাদি

$$\text{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\text{curl } \mathbf{f}).\, \mathbf{g} - (\text{curl } \mathbf{g})\, .\mathbf{f}$$

$$= 0 - 0 \qquad [\because \text{ curl } \mathbf{f} = 0 \text{ এবং curl } \mathbf{g} = 0]$$

$$= 0$$

অতএব $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল।

10. যদি $\mathbf{f}(x, y, z) = (2x - ay + 3z)\,\mathbf{i} + (4x - 5y + bz)\,\mathbf{j} + (cx - 7y + 6z)\mathbf{k}$ ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল হয় তবে a, b, c এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: f ভেক্টর অনাবর্তনশীল হওয়ার শর্ত curl $\mathbf{f} = 0$

$$\text{বা, } \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x - ay + 3z & 4x - 5y + bz & cx - 7y + 6z \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{বা, } \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(cx - 7y + 6z) - \frac{\partial}{\partial z}(4x - 5y + bz)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(2x - ay + 3z) - \frac{\partial}{\partial x}(cx - 7y + 6z)\right]$$

$$+\mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(4x - 5y + bz) - \frac{\partial}{\partial y}(2x - ay + 3z)\right] = 0$$

$$\text{বা, } \mathbf{i}(-7 - b) + \mathbf{j}(3 - c) + \mathbf{k}(4 + a) = 0$$

$$\therefore -7 - b = 0,\ 3 - c = 0 \text{ এবং } 4 + a = 0$$

$$\therefore b = -7,\ c = 3,\ a = -4$$

11. দেখান যে $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \dfrac{2}{r} f'(r)$, যখন $f(r)$ স্কেলার ফাংশনটির সন্তত অবকল সহগ আছে।

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r) = \frac{\partial}{\partial r} f(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r} \qquad \left[\because r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\right]$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(r) = \frac{\partial}{\partial x}\left[f'(r) \cdot \frac{x}{r}\right]$$

$$=\frac{\left\{1.f'(r)+xf''(r)\cdot\frac{x}{r}\right\}r-xf'(r)\cdot\frac{x}{r}}{r^2}\quad\left[\because\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\right]$$

$$=\frac{f'(r)}{r}+\frac{x^2f''(r)}{r^2}-\frac{x^2f'(r)}{r^3}$$

অনুরূপে $\frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2}=\frac{f'(r)}{r}+\frac{y^2f''(r)}{r^2}-\frac{y^2f'(r)}{r^3}$

এবং $\frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2}=\frac{f'(r)}{r}+\frac{z^2f''(r)}{r^2}-\frac{z^2f'(r)}{r^3}$

$$\therefore\nabla^2 f(r)=\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2}=\frac{3f'(r)}{r}+\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^2}f''(r)-\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^3}f'(r)$$

$$=\frac{3f'(r)}{r}+\frac{r^2}{r^2}f''(r)-\frac{r^2}{r^3}f'(r)=\frac{3f'(r)}{r}+f''(r)-\frac{1}{r}f'(r)$$

$$=\frac{2}{r}f'(r)+f''(r)$$

12. দেখান যে $(\mathbf{f}\ \nabla)\phi=\mathbf{f}\ (\nabla\phi)$, যখন $\mathbf{f}(x,y,z)=\mathbf{i}f_1(x,y,z)+\mathbf{j}f_2(x,y,z)+\mathbf{k}f_3(x,y,z)$ এবং ϕ একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন।

সমাধান ঃ বামপক্ষ ঃ $(\mathbf{f}\cdot\nabla)\phi=\left[(\mathbf{i}f_1+\mathbf{j}f_2+\mathbf{k}f_3)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\phi$

$$=\left[f_1\frac{\partial}{\partial x}+f_2\frac{\partial}{\partial y}+f_3\frac{\partial}{\partial z}\right]\phi$$

$$=f_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+f_2\frac{\partial\phi}{\partial y}+f_3\frac{\partial\phi}{\partial z}$$ [$\because$ $\mathbf{i.i}=\mathbf{j.j}=\mathbf{k.k}=1$ এবং $\mathbf{i.j}=\mathbf{j.k}=\mathbf{k.i}=0$]

আবার, ডানপক্ষ $=\mathbf{f}\cdot(\nabla\phi)$

$$=(\mathbf{i}f_1+\mathbf{j}f_2+\mathbf{k}f_3)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=f_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+f_2\frac{\partial\phi}{\partial y}+f_3\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

অতএব বামপক্ষ = ডানপক্ষ

13. দেখান যে $\text{div}\left\{\frac{f(r)}{r}\mathbf{r}\right\}=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{r^2 f(r)\right\}$

সমাধান : $\frac{f(r)}{r}\mathbf{r}=\frac{f(r)}{r}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\frac{f(r)}{r}x\mathbf{i}+\frac{f(r)}{r}y\mathbf{j}+\frac{f(r)}{r}z\mathbf{k}$

$$\therefore \text{div}\left\{\frac{f(r)}{r}\mathbf{r}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{xf(r)}{r}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{yf(r)}{r}\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{zf(r)}{r}\right\} \text{.......} (i)$$

এখন $\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{xf(r)}{r}\right\}=\frac{\left\{1.f(r)+xf'(r)\frac{x}{r}\right\}r-xf(r)\cdot\frac{x}{r}}{r^2}$ $\left[\because \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\right]$

$$=\frac{f(r)}{r}+\frac{x^2}{r^2}f'(r)-\frac{x^2}{r^3}f(r)$$

অনুরূপে

$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{yf(r)}{r}\right\}=\frac{f(r)}{r}+\frac{y^2}{r^2}f'(r)-\frac{y^2}{r^3}f(r)$ এবং $\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{zf(r)}{r}\right\}=\frac{f(r)}{r}+\frac{z^2}{r^2}f'(r)-\frac{z^2}{r^3}f(r)$

এই মানগুলি (i)-এ বসিয়ে পাই

$$\text{div}\left\{\frac{f(r)}{r}\mathbf{r}\right\}=3\frac{f(r)}{r}+\frac{(x^2+y^2+z^2)}{r^2}f'(r)-\frac{(x^2+y^2+z^2)}{r^3}f(r)$$

$$=\frac{3f(r)}{r}+\frac{r^2}{r^2}f'(r)-\frac{r^2}{r^3}f(r)=\frac{3f(r)}{r}+f'(r)-\frac{f(r)}{r}$$

$$=\frac{2f(r)+rf'(r)}{r}=\frac{2rf(r)+r^2f'(r)}{r^2}=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{r^2f(r)\right\}$$

14. যদি $\mathbf{f}(x, y, z)=xe^x\,\mathbf{i}+y^2z\,\mathbf{j}+z\log x\,\mathbf{k}$, এবং $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ হয় তবে $(\mathbf{f}\times\nabla)\phi=\mathbf{f}\times(\nabla\phi)$ সম্পর্কটির সত্যতা যাচাই করুন।

সমাধান : বামপক্ষ $(\mathbf{f}\times\nabla)\phi=\left[\left(xe^{x}\mathbf{i}+y^{2}z\mathbf{j}+z\log x\mathbf{k}\right)\times\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\phi$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ xe^{x} & y^{2}z & z\log x\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}\phi$$

$$=\left[\mathbf{i}\left(y^{2}z\frac{\partial}{\partial z}-z\log x\frac{\partial}{\partial y}\right)+\mathbf{j}\left(z\log x\frac{\partial}{\partial x}-xe^{x}\frac{\partial}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\left(xe^{x}\frac{\partial}{\partial y}-y^{2}z\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\phi$$

$$=\left[\mathbf{i}\left(y^{2}z\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\log x\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\mathbf{j}\left(z\log x\frac{\partial\phi}{\partial x}-xe^{x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\left(xe^{x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-y^{2}z\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right]$$

$$=2\left(y^{2}z^{2}-yz\log x\right)\mathbf{i}+2\left(zx\log x-zxe^{x}\right)\mathbf{j}+2\left(xye^{x}-xy^{2}z\right)\mathbf{k}$$

$$=2yz(zy-\log x)\mathbf{i}+2zx\left(\log x-e^{x}\right)\mathbf{j}+2xy\left(e^{x}-yz\right)\mathbf{k}$$

ডানপক্ষ $=\mathbf{f}\times\nabla\phi=\left(xe^{x}\mathbf{i}+y^{2}z\mathbf{j}+z\log x\mathbf{k}\right)\times\left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ xe^{x} & y^{2}z & z\log x\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}\left(y^{2}z\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\log x\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\mathbf{j}\left(z\log z\frac{\partial\phi}{\partial x}-xe^{x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\left(xe^{x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-y^{2}z\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

$$=\mathbf{i}\left(y^{2}z.2z-z\log x.2y\right)+\mathbf{j}\left(z\log z.2x-xe^{x}.2z\right)+\mathbf{k}\left(xe^{x}.2y-y^{2}z.2x\right)$$

$$=2yz(yz-\log x)\mathbf{i}+2zx\left(\log z-e^{x}\right)\mathbf{j}+2xy\left(e^{x}-yz\right)\mathbf{k}$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

15. যদি $\phi(x, y, z)$, $u(x, y, z)$ দুটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন এবং $\mathbf{f} = u \text{ grad } \phi$ হয়

তবে দেখান যে $\mathbf{f}.\text{curl } \mathbf{f} = 0$

সমাধান : $\text{curl } \mathbf{f} = \text{curl } (u \text{ grad } \phi)$ [প্রদত্ত শর্তানুসারে]

$= u \text{ curl grad}\phi + (\text{grad} u) \times (\text{grad}\phi)$

[$\because$ $\text{curl }(u\mathbf{f}) = u \text{ curl } \mathbf{f} + \text{grad } u \times \mathbf{f}$ যখন u স্কেলার এবং f ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন]

$= (\text{grad } u) \times (\text{grad } \phi)$ [$\because$ $\text{curl grad } \phi = 0$]

$\therefore$ $\mathbf{f}\cdot\text{curl } \mathbf{f} = (u \text{ grad } \phi)\cdot\{(\text{grad } u) \times (\text{grad } \phi)\}$

$= u[\text{grad}\phi \text{ grad } u \text{ grad}\phi] = 0$ [তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণনের নিয়ম অনুযায়ী]

8.8 সারাংশ

1. s ভেক্টরের দিক কোসাইনগুলি $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ হলে s এর দিকে $f(x, y, z)$ স্কেলারটির দিশা অবকলজ হবে $\frac{df}{ds} = \nabla_s f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

2. একক ভেক্টর **a** এর দিকে f -এর দিশা অবকলজ হবে $\nabla_s f = l\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial r}$ এখানে $\mathbf{a} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$

3. $\text{grad } f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$ যখন f একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন।

4. স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন f-এর দিশা অবকলজ $\frac{\partial f}{\partial s}$-এর চরম মান $f(x, y, z) = c$ লেভেল তলের অভিলম্বের দিকে অর্থাৎ grad f ভেক্টরটি যেদিকে নির্দেশিত সেই দিকে ।

5. $f(x, y, z) = c$ তলের ক্ষেত্রে $(\mathbf{R} - \mathbf{r}).\nabla f = 0$ স্পর্শক তলের সমীকরণ এবং $(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \nabla f = 0$ অভিলম্বের সমীকরণ (x, y, z) বিন্দুতে যার অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$

6. (i) $\text{div } \mathbf{f} = \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}$, f-একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন। এবং div **f** একটি স্কেলার।

   (ii) $\text{curl } \mathbf{f} = \mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}$, f-একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন। এবং curl **f** হল ভেক্টর।

7. ডাইভারজেন্স ও কার্ল-সংক্রান্ত বিভিন্ন সূত্রাবলীর জন্য 8.5.1 অনুচ্ছেদ দেখুন।

8. div gradφ, curl gradφ, div curl **f**, ইত্যাদি দ্বিতীয় ক্রমের ডিফারেন্সিয়াল অপারেটরগুলির জন্য 8.5.2 অনুচ্ছেদ দেখুন।

8.9 প্রশ্নাবলী

A.1. দিশা অবকলজ নির্ণয় করুন ঃ

(i) $f(x, y, z) = 3x^3y^2 + 2z^5$ এর **i**, −**j** এবং **i** − **j** ভেক্টরের দিকে।

(ii) $g(x, y, z) = xyz$ এর (2,3,5) বিন্দুতে **i** + 2**j** + 2**k** ভেক্টরের দিকে।

(iii) $\phi(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ এর (2, −1, 1) বিন্দুতে **i** + **j** + **k** ভেক্টরের দিকে।

2. $\psi(x, y, z) = x^3i + 3y^2zj + y^3k$ ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশনটির (−1, 1, 3) বিন্দুতে 2i + **j** − 2**k** ভেক্টরের দিকে দিশা অবকলজ নির্ণয় করুন।

3. স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন $f(x, y, z) = x^2yz + 4xz^2$ এর (2, 2, 3) বিন্দুতে grad f-এর মান নির্ণয় করুন এবং সেখান থেকে 2i − j + k ভেক্টরের দিকে f-এর দিশা অবকল নির্ণয় করুন।

4. কোনো বিন্দু (x, y, z) এর স্থান ভেক্টর **r** এবং | r | = r হলে দেখান যে

(i) $\nabla\phi = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r}$, যখন $\phi = \frac{1}{r}$

(ii) $\nabla\phi = nr^{n-2}\mathbf{r}$, যখন $\phi = r^n$

(iii) $\nabla\phi = \frac{1}{r^2}\mathbf{r}$, যখন $\phi = \log r$

5. গ্রেডিয়েন্টের দিক বা অভিলম্বের দিক বরাবর $f(x, y, z) = xy^2z^3$ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশনটির (1, 1, 1) বিন্দুতে অবকল সহগ নির্ণয় করুন।

6. দেখান যে $\phi(x, y, z) = 2xy + 3yz + zx$ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশনটির (0, 1, 6) বিন্দুতে দিশা অবকলজ 8i + 18j + 3k ভেক্টরের দিকে চরম এবং এই চরম মান $\sqrt{397}$

7. স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন $\psi(x, y, z) = x(y + z) + y(z + x) + z(x + y)$ এর (0, −1, 2) বিন্দুতে কোনো দিক বরাবর দিশা অবকলজের মান সব থেকে বেশি? দিশা অবকলজের ঐ সর্বাপেক্ষা বেশি মানটি কত?

8. $xy + 2yz + 5zx = 5$ লেভেল তলের উপর (1, 0, 1) বিন্দুতে একক অভিলম্ব ভেক্টর নির্ণয় করুন।

9. $f(x, y, z) = x^2yz^3$ স্কেলার ফাংশনটির (2, 1, −1) বিন্দুতে সর্বোচ্চ বৃদ্ধির হার নির্ণয় করুন।

[সঙ্কেত ঃ সর্বোচ্চ বৃদ্ধির হার = | ∇f |, (2, 1, −1) বিন্দুতে]

0. $yz + zx + xy = 0$ এবং $x + y^2 + z^2 - 7 = 0$ তলদ্বয়ের মধ্যে (2, −1, 2) বিন্দুতে কোণ নির্ণয় করুন।

11. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 3z - 13 = 0$ গোলকটির উপর (1, 0, 2) বিন্দুতে স্পর্শকতল ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

12. $f(x, y, z) = x + y + z$ এবং $g(x, y, z) = xyz$ হল grad (fg) এর মান নির্ণয় করুন।

13. $x^2 - y^2 + z^2 = 8$ এবং $2x - 5y + z = 6$ তলদ্বয়ের ছেদিত বক্রের উপর (2, 0, 2) বিন্দুতে স্পর্শক রেখা ও লম্বতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

14. দুটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন f(x, y, z) ও g(x, y, z) এর জন্য প্রমাণ করুন যে grad (af + bg) = a grad f + b grad g, যখন a, b উভয়েই ধ্রুবক।

B. 1. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}$ হলে (a) div **f** (b) curl **f** এবং (c) grad (div **f**) এর মান নির্ণয় করুন।

2. যদি $\mathbf{f}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + y^2zx\mathbf{j} + z^2xy\mathbf{k}$ হয় তবে (1,–1,–1) বিন্দুতে (a) div **f**, (b) curl **f** (c) grad (div **f**) এবং (d) curl (curl **f**)–এর মান নির্ণয় করুন।

3. যদি $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর হয় তবে দেখান যে (a) div **a** = 0 এবং (b) curl **a** = 0.

4. যদি $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ভেক্টরদ্বয় ধ্রুবক এবং $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ হয় তবে দেখান যে

(a) grad $[\mathbf{r}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})] = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (b) div $[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}] = -2\mathbf{a}.\mathbf{b}$ এবং (c) curl $[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}] = 2\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

5. $\mathbf{f}(x, y, z) = (-ax + 2yz)\mathbf{i} + (-3y + 4zx)\mathbf{j} + (4z - 5xy)\mathbf{k}$ ভেক্টরটি সোলেনয়ডাল হলে a-এর মান নির্ণয় করুন।

6. দেখান যে $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + \sin x)\,\mathbf{i} + (y + \text{zin } z)\,\mathbf{j} + (z + y \cos z)\mathbf{k}$ ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল।

7. যদি $\phi(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3y^3z^3$ হয় তবে div (grad ϕ) এবং curl (grad ϕ)-এর মান নির্ণয় করুন।

8. দেখান যে (a) $\text{div}\left(\text{grad}\frac{1}{r}\right) = 0$ (b) $\mathbf{a}.\left(\text{grad}\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$ যখন $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ এবং **a** একটি ধ্রুবক ভেক্টর $r = |\mathbf{r}|$

9. যদি $\phi(x, y, z) = 3x^2yz - y^3z$ হয় তবে দেখান যে $\nabla^2\phi = 0$, অর্থাৎ ϕ স্কেলার ফাংশনটি ল্যাপলাসের সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

10. দেখান যে (a) $\nabla^2 r^n = n(n + 1)\, r^{n-2}$ কিন্তু (b) $\nabla^2(r^n\mathbf{r}) = n(n + 3)\, r^{n-2}\mathbf{r}$

11. যদি $\mathbf{f}(x, y, z) = \log(1 + 2x)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + \sin(x + z)\mathbf{k}$ এবং $\phi(x, y, z) = xy^2z^3$ হয় তবে $(\mathbf{f}.\nabla)\phi = \mathbf{f}.(\nabla\phi)$ সম্পর্কটির সত্যতা যাচাই করুন।

12. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x - by - z)\mathbf{i} + (x - y - cz)\mathbf{j} + (ax - y - z)\mathbf{k}$ ভেক্টরটি অনাবর্তনশীল হলে a, b, c এর মান নির্ণয় করুন।

13. দেখান যে (i) $\nabla^2\phi = 0$ হলে grad ϕ ভেক্টরটি একই সাথে সোলেনয়ডাল এবং অনাবর্তনশীল (ii) n = –3 এর জন্য $r^n\mathbf{r}$ ভেক্টরটি সলেনয়ডাল কিন্তু n-এর অন্য সকল মানের জন্য উহা অনাবর্তনশীল।

14. প্রমাণ করুন যে

$$\mathbf{a}\cdot\{\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}) - \nabla\times(\mathbf{f}\times\mathbf{a})\} = \text{div}\,\mathbf{f},$$

যখন **a** একটি ধ্রুব ভেক্টর।

8.10 উত্তর মালা

A. 1. (i) $9x^2y^2 - 6x^3y$, $\frac{3x^2y}{\sqrt{2}}(3y-2x)$, (ii) $\frac{47}{3}$, (iii) $-\frac{4}{\sqrt{3}}$

2. $2\mathbf{i}+8\mathbf{j}+\mathbf{k}$, 3. $4(15\mathbf{i}+3\mathbf{j}+14\mathbf{k})$, $\frac{82\sqrt{6}}{3}$ 5. $\sqrt{14}$

7 $2(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}), 2\sqrt{6}$, 8. $\pm\frac{1}{\sqrt{59}}(5\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k})$ 9. $4\sqrt{11}$

10. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{42}}\right)$ 11. $4x-4y+7z=18$, $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-4}=\frac{z-2}{7}$

12. $(2xyz+y^2z+yz^2)\,\mathbf{i}+(2xyz+x^2z+xz^2)\,\mathbf{j}+(2xyz+x^2y+xy^2)\mathbf{k}$

13. $\frac{x-2}{5}=y=\frac{z-2}{5}$, $5x+y-5z=0$

B. 1. (a) $2(x+y+z)$ (b) $-(2\mathbf{i}x+2\mathbf{j}y+2\mathbf{k}z)$ (c) $2(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

2. (a) 6 (b) b (c) $6(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})$ (d) $4(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})$

4. [সংকেত ঃ (a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ = ধ্রুবক ভেক্টর = $\mathbf{c}$ ধরে $\mathbf{r}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{r}.\mathbf{c}=xc_1+yc_2+zc_3$

লেখা হলে grad $(\mathbf{r}.\mathbf{c})=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}=\mathbf{c}$

(b) $\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\mathbf{f}$ ধরে, div $(\mathbf{f}\times\mathbf{b})=(\text{curl }\mathbf{f}).\mathbf{b}-(\text{curl }\mathbf{b}).\mathbf{f}$

এখন curl $\mathbf{f}$ = curl $(\mathbf{r}\times\mathbf{a})=-2\mathbf{a}$, উদা. 4 (খ) এবং curl $\mathbf{b}=0$.

(c) curl $[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}]$ = curl $[(\mathbf{b}.\mathbf{r})\mathbf{a}-(\mathbf{b}.\mathbf{a})\mathbf{r}]$ = curl $\{(\mathbf{b}.\mathbf{r})\mathbf{a}\}$ − curl$\{(\mathbf{b}.\mathbf{a})\mathbf{r}\}$

= $[\{\text{grad }(\mathbf{b}.\mathbf{r})\}\times\mathbf{a}+(\mathbf{b}.\mathbf{r})\text{ curl }\mathbf{a}]-[\{\text{grad }(\mathbf{b}.\mathbf{a})\}\times\mathbf{r}+(\mathbf{b}.\mathbf{a})\text{ curl }\mathbf{b}]$

যেহেতু $\mathbf{b}.\mathbf{r}$, $\mathbf{b}.\mathbf{a}$ এরা স্কেলার। ইত্যাদি]

5. 1

7. $2xy\,(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$

12. $a=-1$, $b=-1$, $c=1$

একক 9 ❑ গাউস ও স্টোকসের উপপাদ্য

গঠন

0.9 প্রস্তাবনা

9.1 উদ্দেশ্য

9.2 গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য

9.2.1 গ্রীনের উপপাদ্য

9.2.2 গাউসের উপপাদ্য

9.2.3 গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স ও কার্লের বিকল্প সংজ্ঞা

9.2.4 উদাহরণমালা — A

9.3 সামতলিক ক্ষেত্রে গ্রীনের উপপাদ্য

9.4 স্টোকসের উপপাদ্য

9.4.1 স্টোকসের উপপাদ্য অনুযায়ী কিছু সিদ্ধান্ত

9.4.2 উদাহরণমালা — B

9.5 সারাংশে

9.6 প্রশ্নাবলী

9.7 উত্তরমালা

0.9 প্রস্তাবনা

ভেক্টর বিদ্যার দুটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য (ক) গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য ও (খ) স্টোকসের উপপাদ্য, এই এককে আলোচিত হয়েছে। এছাড়াও এই এককেই আলোচিত কোনো সমতলে গ্রীনের উপাপাদ্যটিও খুব গুরুত্বপূর্ণ; এটিকে স্টোকসের উপপাদ্যের একটি বিশেষ (Special) ক্ষেত্র হিসাবেও দেখান হয়েছে।

গাউসের উপপাদ্যটির মাধ্যমে আয়তন সমাকল (Volume Integral)-কে তলীয় সমাকলে (Surface Integral-এ) রূপান্তর করা যায় বা উল্টোটিও করা যায়। আবার স্টকের উপপাদ্যটির সাহায্যে তলীয় সমাকলকে রৈখিক সমাকলে (Line Integral-এ) রূপান্তর করা যায় বা এক্ষেত্রেও বিপরীত প্রক্রিয়াটিও করা যায়। এতে সমাকল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে অনেক সুবিধা পাওয়া যায়। (এই এককে ভেক্টর গুলিকে মোটা অক্ষরে প্রকাশ করা হয়েছে।)

9.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি অধ্যায়ন করলে আপনি জানতে পারবেন

- গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য ও গ্রীনের উপপাদ্য
- গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স ও কার্ল এর অক্ষ নিরপেক্ষ সংজ্ঞা পাবেন
- স্টোকসের উপপাদ্য জানতে পারবেন

9.2 গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য (Gauss's Divergence Theorem) :

$\mathbf{f}(x, y, z)$ ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশনটির v অঞ্চলে যদি সন্তত অবকল সহগ থাকে এবং v অঞ্চলকে বেষ্টনকারী বদ্ধতল (closed surface) s-এর বহির্মুখী অভিলম্ব বরাবর একক ভেক্টর যদি $\mathbf{n}$ হয় তবে

$$\iint_s \mathbf{f}\cdot \mathbf{n}\,ds=\iiint_v \operatorname{div}\mathbf{f}\,dv$$

অথবা, কার্তিয় স্থানাঙ্কে $\mathbf{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$,

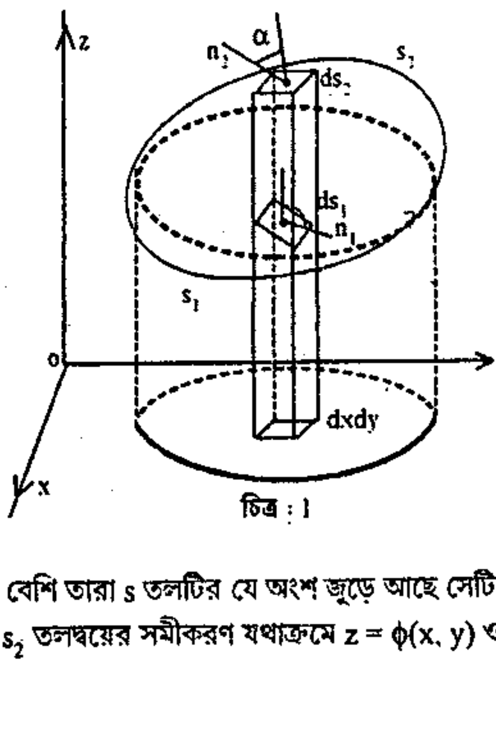
যখন f_1, f_2, f_3 প্রত্যেকে স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন, হলে

$$\iint_s (f_1 dydz+f_2 dzdx+f_3 dxdy)=\iiint_v\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)dxdydz$$ এইরূপেও উপপাদ্যটি প্রকাশ করা যায়।

প্রমাণ : প্রথমে ধরা যাক্ কার্তিয় অক্ষগুলির যে কোনো একটির (এখানে z অক্ষ নেওয়া হল) সাথে সমান্তরালভাবে অঙ্কিত যে সরলরেখাগুলি v অঞ্চল দিয়ে যায় তারা প্রত্যেকে s-কে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে বা স্পর্শক হলে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে।

এখন $\iiint_v \frac{\partial f_3}{\partial z}dxdydz$ সমাকলটি বিবেচনা করা যাক্।

যদি ত্রিমাত্রিক অঞ্চল v-এর xy তলে লম্ব অভিক্ষেপ (Projection) দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে R হয় তবে শর্তানুযায়ী R ক্ষেত্রের যে কোনো অভ্যন্তরীণ বিন্দু থেকে z-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা সমূহের প্রত্যেকটি s-কে দুটি বিন্দুতে ছেদ করবে।



চিত্র : 1

এ ক্ষেত্রে যে ছেদবিন্দুগুলির z স্থানাঙ্ক কম তাদের দ্বারা s এর অধিকৃত অংশটিকে s_1 এবং যে ছেদাবন্দুগুলির z স্থানাঙ্ক বেশি তারা s তলটির যে অংশ জুড়ে আছে সেটিকে s_2 দ্বারা চিহ্নিত করা হল (অতএব $s = s_1 + s_2$) যদি s_1 ও s_2 তলদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $z = \phi(x, y)$ ও $z = \psi(x, y)$ হয় তবে

$$\iiint_v \frac{\partial f_3}{\partial z}dxdydz=\iint_R\left[\int_\phi^\psi \frac{\partial f_3}{\partial z}dz\right]dxdy$$

$$=\iint_R\left[f_3(x,y,\psi)-f_3(x,y,\phi)\right]dxdy$$

$$=\iint_R f_3(x,y,\psi)\,dxdy-\iint_R f_3(x,y,\phi)\,dxdy \quad ......\,(i)$$

এখন যদি $\mathbf{n}_1$ এবং $\mathbf{n}_2$ যথাক্রমে s_1 এবং s_2 এর যে কোনো বিন্দুতে [(x, y, ϕ), (x, y, ψ) বিন্দুতে] বহির্মুখী অভিলম্ব বরাবর একক ভেক্টর হয় তবে z-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\mathbf{n}_2$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\mathbf{n}_1$ স্থূলকোণ করে।

$$\therefore \iint_R f_3(x,y,\psi)dxdy = \iint_{s_2} f_3\mathbf{n}_2.\mathbf{k}\, ds_2$$

[z-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একক ভেক্টর $\mathbf{k}$ হলে $\mathbf{n}_2.\mathbf{k}ds_2 = \cos\alpha\, ds_2 = dxdy$]

এবং $\iint_R f_3(x,y,\phi)dxdy = -\iint_{s_1} f_3\mathbf{n}_1.\mathbf{k}\, ds_1$

সমাকলের এই মানগুলি (i)-এ বসিয়ে পাই

$$\iiint_v \frac{\partial f_3}{\partial z}dxdydz = \iint_{s_2} f_3\mathbf{n}_2.\mathbf{k}ds_2 + \iint_{s_1} f_3\mathbf{n}_1.\mathbf{k}ds_1 = \iint_s f_3\mathbf{n}.\mathbf{k}ds, \text{ .... (ii)}$$

যখন s-এর যে কোনো বিন্দুতে বহির্মুখী অভিলম্ব বরাবর একক ভেক্টর $\mathbf{n}$.

এক্ষেত্রে উল্লেখ করা প্রয়োজন s_1 ও s_2-এর মধ্যে বা বাইরে যদি s তলের এমন কোনো অংশ থেকে থাকে যেখানে বহির্মুখী অভিলম্ব $\mathbf{n}$, $\mathbf{k}$ এর সাথে লম্ব, স্বাভাবিক ভাবেই সেক্ষেত্রে $\mathbf{n}.\mathbf{k} = 0$ হবে এবং তারজন্য উপরোক্ত ফলের কোনো পরিবর্তন হবে না।

ঠিক একইভাবে yz এবং zx তলে লম্ব অভিক্ষেপ নিয়ে প্রমাণ করা যায়—

$$\iiint_v \frac{\partial f_1}{\partial x}dxdydz = \iint_s f_1\mathbf{n}.\mathbf{i}ds \text{ .... (iii)}$$

এবং $$\iiint_v \frac{\partial f_2}{\partial y}dxdydz = \iint_s f_2\mathbf{n}.\mathbf{j}ds \text{ .... (iv)}$$

এখন যদি (ii), (iii) এবং (iv) নং-এর সমীকরণগুলি যোগ করা হয় তবে

$$\iiint_v \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_s (f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}).\mathbf{n}\, ds$$

বা, $$\iiint_v \text{div}\, \mathbf{f}\, dv = \iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds$$

এখন যদি যে কোনো সাধারণ (General) ত্রিমাত্রিক অঞ্চল v-এর জন্য উপরোক্ত উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করতে চাই তবে v -কে এমন কতকগুলি উপঅঞ্চলে বিভক্ত করতে হবে যারা প্রত্যেকেই প্রথমে আরোপিত শর্তটি মেনে চলে (অর্থাৎ যে কোনো একটি অক্ষের সহিত সমান্তরাল সরলরেখা, উপঅঞ্চলের বেষ্টনকারী তলটিকে সর্বাধিক দুটি বিন্দুতে ছেদ করে)। তাহলে প্রত্যেক উপঅঞ্চলের জন্য গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটি সত্য হবে। কিন্তু এই উপঅঞ্চলগুলির সমষ্টি মোট অঞ্চল v-এর সমান হলেও তাদের বেষ্টনকারী তলগুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি s অপেক্ষা বেশি হবে। (কারণ, পরস্পর পাশাপাশি দুটি তলের মধ্যে একটি সাধারণ তলাংশ থাকবে যাকে দুবার নেওয়া হয়েছে) তবে পাশাপাশি দুটি অঞ্চলের বন্টনকারী তলটি সাধারণ (Common) হওয়ার ঐ দুটি অঞ্চলের বহির্মুখী অভিলম্ব দুটি সাধারণ তলটিতে বিপরীতমুখী হয়। তাই ঐ তলগুলির জন্য সমাকলগুলি সমান অথচ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়। সুতরাং সব উপঅঞ্চলগুলির জন্য আলাদাভাবে গাউসের উপপাদ্যটি লিখে যদি সবগুলি যোগ করা হয় তবে আয়তন সমাকলগুলির সমষ্টি সরাসরি v অঞ্চলের জন্য আয়তন সমাকল হবে এবং

তলীয় সমাকলগুলির সমষ্টি কেবলমাত্র s তলের জন্য হবে, যেহেতু উপঅঞ্চলগুলির বন্টনকারী তলগুলির জন্য তলীয় সমাকলগুলির সমষ্টি শূন্য হবে। অর্থাৎ এক্ষেত্রেও

$$\iiint_v \operatorname{div}\mathbf{f}\, dv = \iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds$$

সম্পর্কটি বহাল থাকবে।

9.2.1 গ্রীনের উপপাদ্য

যদি s তল দ্বারা সীমাবদ্ধ কোনো অঞ্চল v-তে ϕ এবং ψ স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন দুটি এবং যে কোনো দিকবরাবর তাদের অবকলজগুলি একরূপ (uniform) এবং সন্তত হয় তবে

$$\iiint_v \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dv = \iint_s \left(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\right)\cdot \mathbf{n}\, ds$$

প্রমাণ : গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা জানি

$$\iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds = \iiint_v \operatorname{div}\mathbf{f}\, dv$$

এখন, $\mathbf{f} = \phi\nabla\psi$ বসালে হয়

$$\iint_s (\phi\nabla\psi).\mathbf{n}\, ds = \iiint_v \operatorname{div}(\phi\nabla\psi)\, dv$$

এখন $\operatorname{div}(\phi\mathbf{f}) = \phi\operatorname{div}\mathbf{f} + \mathbf{f}.\operatorname{grad}\phi$ সূত্রানুযায়ী

$$\operatorname{div}(\phi\nabla\psi) = \phi\operatorname{div}(\nabla\psi) + \nabla\psi\cdot\nabla\phi$$

$$= \phi\nabla^2\psi + \nabla\psi\cdot\nabla\phi \qquad \left[\because \operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi) = \nabla^2\psi\right]$$

$$\iint_s (\phi\nabla\psi)\cdot \mathbf{n}ds = \iiint_v \left[\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right] dv \text{ ..... (i)}$$

এই অভেদকে গ্রীনের প্রথম অভেদ বা গ্রীনের প্রথম উপপাদ্য বলে।

(i) এর ϕ এবং ψ -কে নিজেদের মধ্যে পরিবর্তন করে পাই

$$\iint_s (\psi\nabla\phi)\cdot \mathbf{n}ds = \iiint_v \left[\psi\nabla^2\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right] dv, \text{ ..... (ii)}$$

এখন (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে এবং ঘুরিয়ে লিখে পাই

$$\iiint_v \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dv = \iint_s \left(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\right).\mathbf{n}\, ds, \text{ ..... (iii)}$$

এটাই নির্ণেয় অভেদ। এটিকে (iii) গ্রীনের দ্বিতীয় অভেদও বলা হয়। আবার $\mathbf{n}ds$ এর স্থানে $d\mathbf{s}$ লিখেও গ্রীনের উপপাদ্যটি নিম্নরূপ হয় :

$$\iiint_v \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) dv = \iint_s \left(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\right).d\mathbf{s}$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. যেহেতু $\text{grad}\,\phi=\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathbf{n}$ এবং $\text{grad}\,\psi=\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathbf{n}$ লেখা যায়, অতএব

$$(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\,\mathbf{n}ds=\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathbf{n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathbf{n}\right).\mathbf{n}ds$$

$$=\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)ds$$

অতএব গ্রীনের উপপাদ্য (iii) নং রূপ থেকে পরিবর্তিত করে

$$\iiint_v(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)dv=\iint_s\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)ds \quad \text{......} \quad \text{(iv)}$$

এই আকারেও লেখা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত 2. আবার যদি ϕ এবং ψ উভয়েই হারমোনিক (harmonic) হয় তবে $\nabla^2\phi=0$ এবং $\nabla^2\psi=0$ হয় এবং তখন (iv) নং অনুযায়ী

$$\iint_s\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)ds=0 \text{ হয়।}$$

$$\therefore \quad \iint_s\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds=\iint_s\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}ds$$

অভেদটিকে গ্রীনের অন্যোন্যক (reciprocal) উপপাদ্য বলে।

9.2.2 গাউসের উপপাদ্য

যদি s একটি বদ্ধ (closed) তল এবং মূলবিন্দু 0 থেকে যে কোনো বিন্দু (x, y, z) এর অব স্থানভেক্টর **r** হয় তবে

(i) $\iint_s\frac{\mathbf{n}.\mathbf{r}}{r^3}ds=0$, যদি 0 বিন্দুটি s-এর বাইরে অবস্থিত হয়।

(ii) $\iint_s\frac{\mathbf{n}.\mathbf{r}}{r^3}ds=4\pi$, যদি 0 বিন্দুটি s-এর ভিতরে অবস্থিত হয়।

প্রমাণ ঃ (i) গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\iint_s\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\mathbf{n}\,ds=\iiint_v\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}dv$$, এখানে s দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটি v.

কিন্তু $r\neq0$ হলে $\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\nabla\cdot(r^{-3}\mathbf{r})=(\nabla r^{-3})\cdot\mathbf{r}+(r^{-3})\nabla\cdot\mathbf{r}$

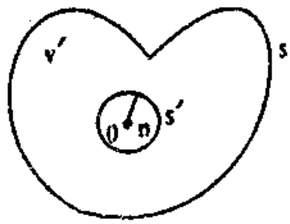
$$=-3r^{-5}\mathbf{r}.\mathbf{r}+3r^{-3} \qquad [\because \nabla r^n=nr^{n-2}\mathbf{r} \text{ এবং } \nabla.\mathbf{r}=3]$$

$$=0$$

অর্থাৎ $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ যখন মূলবিন্দু 0, S-এর বাইরে থাকে ($r \neq 0$ বলে)।

$$\therefore \quad \iint_s \frac{\mathbf{n} . \mathbf{r}}{r^3} ds = 0$$

(ii) 0 বিন্দুটি s-এর ভিতরে অবস্থিত হলে 0 কে কেন্দ্র করে খুব ছোট ব্যাসার্ধ a বিশিষ্ট একটি গোলক s′ নেওয়া হল যাতে 0 বিন্দুটি s এবং s′ তলদ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল v′ এর বাইরে থাকে। এখন v′ অঞ্চলের জন্য গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই



চিত্র : 2

$$\iint_{s+s'} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_{v'} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv$$

$$= 0 \quad [\because v' \text{ অঞ্চলে } r \neq 0 \text{ এবং } \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0]$$

$$\therefore \iint_s \frac{\mathbf{r}}{r^3} . \mathbf{n} ds = -\iint_{s'} \frac{\mathbf{r}}{r^3} . \mathbf{n} ds$$

আবার s′ গোলকের উপর, $r = a$, $\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{a}$ [এখানে n-এর দিক্ s′ এর ভিতরের লম্ব বরাবর নির্দেশিত বলে ঋণাত্মক চিহ্ন নেওয়া হল]

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{a^3} \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{a}\right) = -\frac{\mathbf{r}.\mathbf{r}}{a^4} = -\frac{a^2}{a^4} = -\frac{1}{a^2}$$

$$\therefore \quad \iint_s \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n}\, ds = -\iint_{s'} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_{s'} \frac{1}{a^2} ds$$

$$= \frac{1}{a^2} \iint_{s'} ds = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = 4\pi$$

9.2.3 গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স ও কার্ল-এর বিকল্প সংজ্ঞা :

সংজ্ঞাগুলি দেওয়ার জন্য প্রথমে আমরা নিম্নলিখিত সম্পর্ক দুটি প্রতিষ্ঠিত করব :

(i) $\iint_s \phi \mathbf{n}\, ds = \iiint_v \nabla \phi\, dv$

(ii) $\iint_s \mathbf{f} \times \mathbf{n}\, ds = -\iiint_v \text{curl}\, \mathbf{f}\, dv$, সাধারণ অর্থে সমস্ত চিহ্নগুলি ব্যবহৃত।

প্রমাণ : (i) মনে করি **a** একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক ভেক্টর এবং ϕ একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন। $\mathbf{a}\phi$ ভেক্টরের জন্য গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী পাই $\iint_s (\mathbf{a}\phi).\mathbf{n} ds = \iiint_v \text{div}(\mathbf{a}\phi) dv$

বা, $\mathbf{a}\cdot\iint_s \phi\mathbf{n}\,ds=\iiint_v \mathbf{a}\cdot\nabla\phi dv$ $\left[\because \operatorname{div}(\mathbf{a}\phi)=\sum i\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}\phi)\right.$

$$=\sum i\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\phi+\mathbf{a}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=0+\sum i\cdot\left(\mathbf{a}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

বা, $\mathbf{a}\cdot\left[\iint_s \phi\mathbf{n}\,ds-\iiint_v \nabla\phi\,dv\right]=0$ $\left.=\mathbf{a}\cdot\sum i\frac{\partial\phi}{\partial x}=\mathbf{a}.\nabla\phi\right]$

যেহেতু $\mathbf{a}$ যে কোনো একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক ভেক্টর, অতএব

$$\iint_s \phi\mathbf{n}\,ds-\iiint_v \nabla\phi\,dv=0$$

বা, $\iint_s \phi\mathbf{n}\,ds=\iiint_v \nabla\phi\,dv$ .... (i)

(ii) যদি $\mathbf{a}$ যে কোনো একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক ভেক্টর হয় তবে $\mathbf{a}\times\mathbf{f}$ ভেক্টর ফাংশনের জন্য গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সাহায্যে

$$\iint_s (\mathbf{a}\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{n}\,ds=\iiint_v \operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{f})dv$$

$$=\iiint_v \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{f})dv$$

বা, $\iint_s \mathbf{a}\cdot(\mathbf{f}\times\mathbf{n})ds=\iiint_v \{-(\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{a}\}dv$

[যেহেতু তিনটি ভেক্টরের স্কেলার গুণনে এবং $\times$ এর স্থান পরিবর্তন করা যায় এবং

$\nabla.(x\ \mathbf{f}) = -\nabla.(\mathbf{f}\times\mathbf{a}) = -(\nabla\times\mathbf{f}).\mathbf{a}]$

বা, $\iint_s \mathbf{a}\cdot(\mathbf{f}\times\mathbf{n})ds+\iiint_v \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{f})dv=0$

বা, $\mathbf{a}\cdot\left[\iint_s \mathbf{f}\times\mathbf{n}\,ds+\iiint_v \nabla\times\mathbf{f}\,dv\right]=0$

যেহেতু $\mathbf{a}$ যে কোনো একটি যদৃচ্ছ ভেক্টর অতএব

$$\iint_s \mathbf{f}\times\mathbf{n}\,ds+\iiint_v \nabla\times\mathbf{f}\,dv=0$$

বা, $\iint_s \mathbf{f}\times\mathbf{n}\,ds=-\iiint_v \nabla\times\mathbf{f}\,dv$ .... (ii)

সংজ্ঞা : ধরা যাক্ কোনো একটি বিন্দু P-কে ঘিরে Δs তলদ্বারা খুব ছোট একটি অঞ্চল Δv. অতএব (i) নং সম্পর্ক অনুযায়ী

$$\iint_{\Delta s} \phi \mathbf{n}\, ds = \iiint_{\Delta v} \nabla\phi\, dv = \iiint_{\Delta v} \left\{(\nabla\phi)_p + \varepsilon\right\} dv$$

যখন P বিন্দুতে $\nabla\phi$ এর মান $(\nabla\phi)_p$ এবং Δv অঞ্চলের অন্য কোনো এক বিন্দুতে $\nabla\phi$ এর মান $(\nabla\phi)_p + \varepsilon$ অতএব $\Delta v \to 0$ লিমিট নিলে $\varepsilon \to 0$ হবে (কারণ তখন Δv আয়তন ছোট হতে হতে P বিন্দুতে সঙ্কুচিত হতে থাকবে)।

$\therefore (\nabla\phi)_p + \varepsilon$ ধ্রুবক ধরে

$$\iint_{\Delta s} \phi \mathbf{n}\, ds = \left\{(\nabla\phi)_p + \varepsilon\right\} \iiint_{\Delta v} dv = \left\{(\nabla\phi)_p + \varepsilon\right\} \Delta v$$

$$\therefore \quad (\nabla\phi)_p = \lim_{\Delta v \to 0} \left\{ \frac{\iint_{\Delta s} \phi \mathbf{n}\, ds}{\Delta v} \right\}$$

এই ভাবে $\nabla\phi$ এর বিকল্প সংজ্ঞা পাওয়া গেল।

ঠিক একইভাবে অগ্রসর হয়ে

$$\iint_{s} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_{v} \nabla \cdot \mathbf{f}\, dv$$ [গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য]

থেকে দেখান যায় যে,

$$\therefore \quad (\nabla \cdot \mathbf{f})_p = \lim_{\Delta v \to 0} \left\{ \frac{\iint_{\Delta s} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, ds}{\Delta v} \right\}$$

এটিই হল P বিন্দুতে div **f** -এর সংজ্ঞা। আবার (ii) নং সম্পর্ক

$$\iint_{s} \mathbf{f} \times \mathbf{n}\, ds = -\iiint_{v} \nabla \times \mathbf{f}\, dv$$

থেকে দেখান যায় যে

$$(\nabla \times \mathbf{f})_p = \lim_{\Delta v \to 0} \left\{ \frac{\iint_{\Delta s} \mathbf{n} \times \mathbf{f}\, ds}{\Delta v} \right\}$$ । এটি হল curl **f** এর সংজ্ঞা।

মন্তব্য : grad ϕ. div **f** এবং curl **f** এর এই বিকল্প সংজ্ঞা অক্ষতন্ত্র নিরপেক্ষ ভাবে দেওয়া হল।

9.2.4 উদাহরণ মালা— A

উদাহরণ :

1. যদি বদ্ধতল s দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল v হয় তবে ডাইভারজেন্স উপপাদ্য লেখা যায়

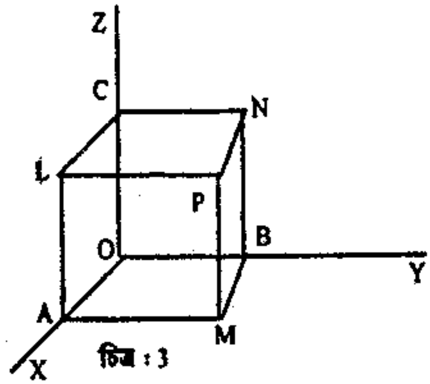
$$\iint_s \mathbf{r}.\mathbf{n}\,ds = \iiint \text{div}\,\mathbf{r}\,dv$$

$$= \iiint_v 3\,dv$$

$$= 3v$$

2.(a) s তলটি x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a তলগুলির দ্বারা বেষ্টিত ঘনক হলে $\iint_s \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}ds$ -এর মান নির্ণয় করুন যখন s তলের বাইরের দিকে নির্দেশিত একক অভিলম্ব ভেক্টর **n** এবং $\mathbf{f} = 2xy\mathbf{i} + 3yz\mathbf{j} + 4xy\mathbf{k}$ এবং গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন।

সমাধান : আমরা $\iint_s \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}ds$ এর মান নির্ণয়ের জন্য ঘনকের ছয়টি তলে মান নির্ণয় করে যোগ করব।



চিত্র : 3

(i) AMPL তলে **n** = **i** এবং x = a

$\therefore$ $\mathbf{f}.\mathbf{n} = (2ay\mathbf{i} + 3yz\mathbf{j} + 4ay\mathbf{k}).\mathbf{i}$

$= 2ay$ [x = a এবং **n** = **i** বসিয়ে]

এবং $ds = \dfrac{dydz}{\mathbf{n}.\mathbf{i}} = dydz$

$$\therefore \iint_{s_1} \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = \int_0^a\int_0^a 2ay\,dydz = \int_0^a \left[ay^2\right]_0^a dz = a^3\left[z\right]_0^a = a^4$$

(ii) BOCN তলে **n** = –**i**, x = 0

$\therefore$ $\mathbf{f}.\mathbf{n} = (2.0.y\mathbf{i} + 3yz\mathbf{j} + r.0.r).(-\mathbf{i}) = 0$ $[\because \mathbf{j}.\mathbf{i} = 0]$

$$\therefore \iint_{s_2} \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = 0$$

(iii) PMBN তলে $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ এবং $y = a$

$\therefore \quad \mathbf{f}.\mathbf{n} = (2xa\mathbf{i} + 3\,az\mathbf{j} + 4xa\mathbf{k}).\mathbf{j} = 3az \qquad [\because \mathbf{i}.\mathbf{j} = 0 = \mathbf{k}.\mathbf{j}]$

$$\iint_{s_3} \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = \int_0^a\int_0^a 3az\frac{dzdx}{\mathbf{j}.\mathbf{j}} \qquad \left[\because \text{এক্ষেত্রে} \quad ds = \frac{dzdx}{\mathbf{n}.\mathbf{j}}\right]$$

$$= 3a\int_0^a\int_0^a z\,dzdx = 3a\int_0^a\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^a dx = \frac{3}{2}a^3\int_0^a dx = \frac{3}{2}a^4$$

(iv) OALC তলে $y = 0$, $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$

$\therefore \quad \mathbf{f}.\mathbf{n} = (2x.0.\mathbf{i} + 3.0.z..\mathbf{j} + 4rx.0.\mathbf{k}).(-\mathbf{j}) = 0$

$$\therefore \quad \iint_{s_4} \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = 0$$

(v) CLPN তলে $z = a$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$

$\mathbf{f}.\mathbf{n} = (2xy\mathbf{i} + 3ya\mathbf{j} + 4xy\mathbf{k}).\mathbf{k}$

$= 4xy \qquad [\because \mathbf{i}.\mathbf{k} = 0 = \mathbf{j}.\mathbf{k}]$

$$\therefore \quad \iint_{s_5} \mathbf{f}.\mathbf{n}ds = \int_0^a\int_0^a 4xy\frac{dxdy}{\mathbf{k}.\mathbf{k}} = 4\int_0^a\int_0^a xy\,dxdy = 4\int_0^a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a y\,dy$$

$$= 2a^2\int_0^a y\,dy = 2a^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^a = 2a^2\cdot\frac{a^2}{2} = a^4$$

(vi) OAMB তলে $z = 0$, $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$

$\therefore \quad \mathbf{f}.\mathbf{n} = (2xy\mathbf{i} + 3y0\mathbf{j} + 4xy\mathbf{k})(-\mathbf{k}) = -4xy$

$$\therefore \quad \iint_{s_6} \mathbf{f}.\mathbf{n}ds = \int_0^a\int_0^a(-4xy)\cdot dxdy = -4\int_0^a\int_0^a xy\,dxdy = -a^4$$

উপরোক্ত মানগুলি যোগ করে সমগ্রতলে $\iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}ds = a^4 + 0 + \frac{3a^4}{2} + 0 + a^4 - a^4$

$$= \frac{5}{2}a^4$$

আবার $\iiint_v \text{div}\,\mathbf{f}\,dv = \int_0^a\int_0^a\int_0^a \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xy)+\frac{\partial}{\partial y}(3yz)+\frac{\partial}{\partial z}(4xy)\right]dxdydz \quad [\because dv = dxdydz]$

$$= \int_0^a\int_0^a\int_0^a (2y+3z+0)\,dxdydz$$

$$= \int_0^a\int_0^a (2y+3z)[x]_0^a\,dydz = a\left[2\int_0^a y[z]_0^a dy + 3\int_0^a z[y]_0^a dz\right]$$

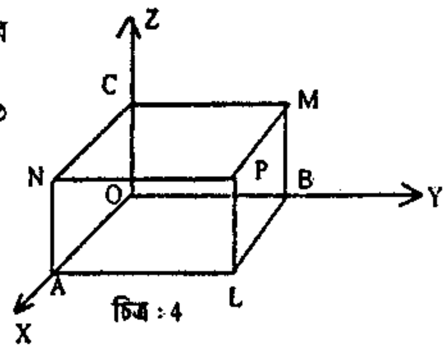
$$= a^2\left\{2\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^a + 3\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^a\right\} = a^2\left[a^2+\frac{3a^2}{2}\right] = \frac{5a^4}{2}$$

$\therefore \iiint_v \text{div}\,\mathbf{f}\,dv = \iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds$, গাউসের উপপাদ্য যাচাই করা হল।

2. (b) আয়তনঘন $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c$ এর ক্ষেত্রে $f(x,y,z) = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} - (z^2 - xy)\mathbf{k}$ হলে গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন।

সমাধান : সমগ্রতলের জন্য $\iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds$ এর মান নির্ণয়ের জন্য ছয়টি তলে আলাদা আলাদা করে মান নির্ণয় করে যোগ করতে হবে। অতএব

(i) ALPN তলের জন্য $x = a,\ \mathbf{n} = \mathbf{i}$



চিত্র : 4

$$\iint_{s_1} \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = \iint_{s_1}\left[(a^2-yz)\mathbf{i}+(y^2-za)\mathbf{j}+(z^2-ay)\mathbf{k}\right]\cdot\mathbf{i}\,dydz$$

$$= \int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c}(a^2-yz)\,dydz$$

$$= \int_{y=0}^{b}\left[a^2z - y\frac{z^2}{2}\right]_0^c dy = \int_{y=0}^{b}\left[a^2c - \frac{c^2}{2}y\right]dy$$

$$= \left[a^2cy - \frac{c^2}{4}y^2\right]_0^b = a^2bc - \frac{b^2c^2}{4}$$

(ii) OBMC তলে $x = 0, n = -i$

$$\iint_{s_2} \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds = \iint_{s_2} \left[(0-yz)\mathbf{i} + (y^2-0)\mathbf{j} + (z^2-0)\mathbf{k}\right]\cdot(-\mathbf{i})\, dydz$$

$$= \int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} (+yz)\, dydz = +\int_0^b y\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^c dy$$

$$= +\frac{c^2}{2}\int_0^b y\, dy = +\frac{c^2}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b = \frac{b^2c^2}{4}$$

(iii) BMPL তলে $y = b$, $\mathbf{n} = \mathbf{j}$

$$\iint_{s_3} \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds = \iint_{s_3} \left[(x^2-bz)\mathbf{i} + (b^2-zx)\mathbf{j} + (z^2-bx)\mathbf{k}\right].\mathbf{j}\, dzdx$$

$$= \int_{z=0}^{c}\int_{x=0}^{a} (b^2-zx)\, dzdx = \int_0^c \left[b^2x - z\frac{x^2}{2}\right]_0^a dz$$

$$= \int_0^c \left[ab^2 - \frac{a^2}{2}z\right]dz = \left[ab^2z - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{z^2}{2}\right]_0^c$$

$$= ab^2c - \frac{a^2c^2}{4}$$

(iv) OANC তলে $y = 0, n = -\mathbf{j}$

$$\therefore \iint_{s_4} \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds = \iint_{s_4} \left[(x^2-0)\mathbf{i} + (0-zx)\mathbf{j} + (z^2-0)\mathbf{k}\right]\cdot(-\mathbf{j})\, dzdx$$

$$= \int_{z=0}^{c}\int_{x=0}^{a} zx\, dzdx = \int_0^c z\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a dz$$

$$= \int_0^c z\frac{a^2}{2}dz = \frac{a^2}{2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^c = \frac{a^2c^2}{4}$$

(v) CNPM তলে $z = c$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$

$$\therefore \iint_{s_5} \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds = \iint_{s_5} \left[(x^2-cy)\mathbf{i} + (y^2-cx)\mathbf{j} + (c^2-xy)\mathbf{k}\right]\cdot\mathbf{k}\, dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} (c^2-xy)\, dxdy = \int_0^a \left(c^2y - \frac{xy^2}{2}\right)_0^b dx$$

$$=\int_0^a\left(c^2b-\frac{b^2}{2}x\right)dx=\left[c^2bx-\frac{b^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

$$=abc^2-\frac{a^2b^2}{4}$$

(vi) OALB তলে $z=0$, $\mathbf{n}=-\mathbf{k}$

$$\therefore\quad \iint_{s_6}\mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds=\iint_{s_6}\left[(x^2-0)\mathbf{i}+(y^2-0)\mathbf{j}+(0-xy)\mathbf{k}\right]\cdot(-\mathbf{k})\,dxdy$$

$$=\int_{x=0}^a\int_{y=0}^b xy\,dxdy=\int_0^a x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b dx$$

$$=\int_0^a x.\frac{b^2}{2}dx=\frac{b^2}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{a^2b^2}{4}$$

$\therefore$ সমগ্র তলের জন্য $$\iint_s\mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds=\left(a^2bc-\frac{c^2b^2}{4}\right)+\frac{b^2c^2}{4}+\left(ab^2c-\frac{a^2c^2}{4}\right)$$

$$+\frac{a^2c^2}{4}+\left(abc^2-\frac{a^2b^2}{4}\right)+\frac{a^2b^2}{4}$$

$$=a^2bc+ab^2c+abc^2\ \ ....\ (A)$$

আবার, $$\iiint_v \operatorname{div}\mathbf{f}\,dv=\int_{x=0}^a\int_{y=0}^b\int_{z=0}^c\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2-yz)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2-zx)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2-xy)\right]dxdydz$$

$$=2\int_0^a\int_0^b\int_0^c(x+y+z)\,dxdydz=2\int_0^a\int_0^b\left[xz+yz+\frac{z^2}{2}\right]_0^c dxdy$$

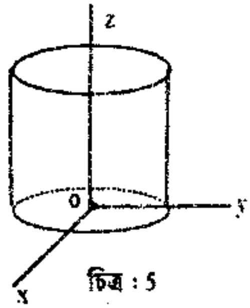
$$=2\int_0^a\int_c^b\left(cx+cy+\frac{c^2}{2}\right)dxdy=2\int_0^a\left[cxy+\frac{cy^2}{2}+\frac{c^2y}{2}\right]_0^b dx$$

$$=2\int_0^a\left(cbx+\frac{cb^2}{2}+\frac{c^2b}{2}\right)dx=2\left[\frac{cbx^2}{2}+\frac{cb^2x}{2}+\frac{c^2bx}{2}\right]_0^a$$

$=a^2bc+ab^2c+abc^2$ ....(B)। এখন (A) ও (B) এর মান সমান বলে উপপাদ্যটি সত্য।

3. $\mathbf{f}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ এবং s তলটি $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 2$ তলগুলি দ্বারা পরিবেষ্টিত হলে গাউসের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন।

সমাধান : $\iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds$ এর মান নির্ণয়ের জন্য $z = 0$, $z = 2$ এবং $x^2 + y^2 = 4$ বক্রতলে উক্ত সমাকলের মান নির্ণয় করে যোগ করতে হবে।



চিত্র : 5

(i) $z = 0$ তলে $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$

$\therefore\ \mathbf{f}.\mathbf{n} = (2x\,\mathbf{i} + 0.y\mathbf{j} + 0.\mathbf{k}).(-\mathbf{k}) = 0\quad [\because\ \mathbf{i}.\mathbf{k} = 0]$

$\therefore\ \iint_{s_1} \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = 0$

(ii) $z = 2$ তলে $\mathbf{n} = \mathbf{k}$

$\therefore\ \mathbf{f}.\mathbf{n} = (2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k}).\mathbf{k} = 4\qquad [\because\ \mathbf{i}.\mathbf{k} = 0 = \mathbf{j}.\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{k}.\mathbf{k} = 1]$

$\therefore\ \iint_{s_2} \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = \iint_s 4\,ds = 4\iint_s ds = 4.4\pi\quad [\because\ \pi r^2 = \pi.2^2]$

$= 16\pi$

(iii) $x^2 + y^2 = 4$ বক্রতলের ক্ষেত্রে $\phi = x^2 + y^2 - 4$ ধরলে

$$n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2xi + 2yj}{|2xi + 2yj|}\left[\because\ \nabla\phi = i\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\frac{\partial\phi}{\partial y} + k\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]$$

$$= \frac{2(xi + yj)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{xi + yi}{2}\qquad \left[\because 4x^2 + 4y^2 = 4(x^2 + y^2) = 4\cdot 4\right]$$

$$\mathbf{f}.\mathbf{n} = (2xi + yzj + z^2k)\cdot\frac{xi + yi}{2}$$

$$= \frac{2x^2 + y^2z}{2},\ \mathbf{n}.\mathbf{i} = \frac{xi + yj}{2}\cdot\mathbf{i} = \frac{x}{2}$$

$$\iint_{s_3} \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = \int_y\int_{z=0}^{2} \frac{2x^2 + y^2z}{2}\cdot\frac{dydz}{\mathbf{n}.\mathbf{i}}$$

$$= \int_y\int_{z=0}^{2} \frac{2x^2 + y^2z}{2}\cdot\frac{2}{x}dydz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(2.4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta.z\right)\cdot\frac{2\cos\theta\,d\theta\,dz}{2\cos\theta}$$

[$\because$ এখানে $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$, $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$

$\therefore\ dy = 2\cos\theta\,d\theta$ এবং $0 \le \theta \le 2\pi$]

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[8\cos^2\theta+4\left(1-\cos^2\theta\right)z\right]d\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[4z-4\cos^2\theta\left(z-2\right)\right]d\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[2z^2-2\cos^2\theta\left(z-2\right)^2\right]_0^2 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}8\,d\theta+\int_0^{2\pi}8\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=8\cdot 2\pi+8\cdot\left[2\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right] \qquad \left[\because \int_0^{2a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx \text{ যখন } f(2a-x)=f(x)\right]$$

$$=16\pi+16\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 d\theta\right] \qquad [\text{ঐ}]$$

$$=16\pi+32\cdot\frac{\pi}{4} \qquad \left[\because \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta=\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=24\pi$$

∴ সমগ্রতলের জন্য উপরোক্ত মানগুলি যোগ করে পাই

$$\iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds=0+16\pi+24\pi=40\pi$$

আবার, $\iiint_v \operatorname{div}\mathbf{f}\,dv=\int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{2}(2+z+2z)dxdydz$

$$\left[\because \operatorname{div}\mathbf{f}=\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial x}(yz)+\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right)\right]$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left[2z+\frac{3z^2}{2}\right]_0^2 dxdy$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}10\,dxdy=\int_{-2}^{2}\left[10y\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}20\sqrt{4-x^2}\,dx=20.2\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$\left[f(-x)=f(x) \text{ হলে } \int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx\right]$$

$$=40\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$=40\left[0+2\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=40\pi$$

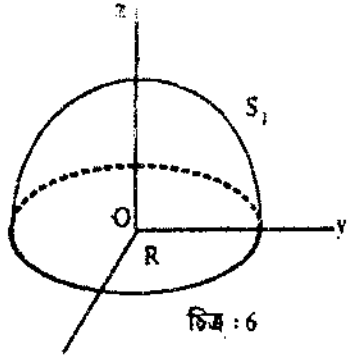
$$\therefore \quad \iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds=\iiint_v \text{div}\,\mathbf{f}\,dv$$

4. V অঞ্চলটি যদি $x^2+y^2+z^2=1$ গোলকের xy-তলের উপরের অংশ এবং $z=0$ তল দ্বারা সীমাবদ্ধ হয় তবে দেখান যে

$$\int_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds=\int_v \text{div}\,\mathbf{f}\,dv$$

যখন $\mathbf{f}(x, y, z)=xz\mathbf{i}+y^2\mathbf{k}$ এবং v অঞ্চলটির উপরিতল s।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে $\iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds$ এর মান নির্ণয় করার জন্য আমরা অর্ধগোলকের বক্রতলের জন্য এবং $z=0$ তলে বৃত্তাকার অংশের জন্য উহার মান নির্ণয় করে যোগ করব।



চিত্র : 6

(i) এখন n নির্ণয়ের জন্য ধরা যাক $\phi=x^2+y^2+z^2-1$

$$\therefore \nabla\phi=\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}=\mathbf{i}.2x+\mathbf{j}.2y+\mathbf{k}.2z$$

$$\therefore n=\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}=\frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\ \left[\because x^2+y^2+z^2=1\right]$$

∴ অর্ধগোলকের বক্রতল s_1 এর xy-তলে লম্বঅভিক্ষেপ যদি R বৃত্ত হয় তবে

$$\iint_{s_1}\mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds=\iint_R \mathbf{f}.\mathbf{n}\frac{dxdy}{\mathbf{n}.\mathbf{k}}$$

$$=\iint_R\left(x^2+y^2\right)z\frac{dxdz}{z}\quad\left[\begin{array}{l}\because \mathbf{f}.\mathbf{n}=\left(xz\mathbf{i}+y^2\mathbf{k}\right)\cdot\left(x\mathbf{i}+y\mathbf{i}+z\mathbf{k}\right)=\left(x^2+y^2\right)z\\ \text{এবং } \mathbf{n}.\mathbf{k}=\left(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{k}=z\end{array}\right]$$

$$=\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dxdy\quad [\because \text{ R বৃত্তের সমীকরণ } x^2+y^2=1,\ z=0]$$

$$=2\times2\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$\left[\because \mathbf{f}(-x)=\mathbf{f}(x)\text{ হলে }\int_{-a}^{a}\mathbf{f}(x)dx=2\int_0^a\mathbf{f}(x)dx\right]$$

$$=4\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=4\int_0^1\left\{x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3}\right\}dx$$

$$=4\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}\left(3x^2+1-x^2\right)dx$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1\left(2x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\left(2\sin^2\theta+1\right)\cos^2\theta\,d\theta$$ [যখন $x=\sin\theta$]

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,d\theta+\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos4\theta\right)d\theta+\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\left[\theta-\frac{\sin4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}+\frac{2}{3}\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

(ii) $z=0$ তলে $\mathbf{n}=-\mathbf{k}$

$$\therefore\ \mathbf{f}.\mathbf{n}=\left(xz\mathbf{i}+y^2\mathbf{k}\right)\cdot\left(-\mathbf{k}\right)=-y^2$$

$$\therefore\iint_R\mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds=\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(-y^2\right)dxdy=-4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y^2dxdy$$

$$=-4\int_0^1\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{4}{3}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{3/2}dx$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta \qquad [\text{যখন } x = \sin\theta]$$

$$= -\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

উপরিউক্ত মান দুটি যোগ করে সমগ্রতলের জন্য

$$\iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

আবার, $\iiint_v \operatorname{div}\mathbf{f}\,dv = \iiint_v z\,dv$ $\quad\left[\because \operatorname{div}\mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}y^2 = z + 0 + 0\right]$

$$= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\phi=0}^{2\pi} r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^3\sin 2\theta\,dr d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{\pi/2} r^3\sin^2\theta[\phi]_0^{2\pi}\,dr d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 r^3\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot 2\pi\,dr$$

$$= \pi\int_0^1 r^3\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]dr$$

$$= \pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

[Spherical Polar স্থানাঙ্কের এবং কার্তিয় স্থানাঙ্কে (r,θ,ϕ) এবং (x, y, z) এর সম্পর্ক $z = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ এবং $dv = dr\, r d\theta.\, r\sin\theta\, d\phi = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$. এই অঙ্কে v এর অঞ্চল পূরণের জন্য r কে 0 থেকে 1, θ কে 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$ এবং φ কে 0 থেকে 2π পর্যন্ত চলমান থাকতে হবে।]

অতএব প্রমাণিত হল যে

$$\int_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = \int_v \operatorname{div}\mathbf{f}\,dv$$

5. গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য কাজে লাগিয়ে প্রমাণ করুন যে

$$\iint_s (ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,ds = \frac{4}{3}\pi(a+b+c),$$ যখন s

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ গোলকের তলকে সূচিত করে।

সমাধান : এখানে $f(x, y, z) = axi + byj + czk$ ধরলে

$$\text{div}\,\mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}(ax) + \frac{\partial}{\partial y}(by) + \frac{\partial}{\partial z}(cz) = a + b + c$$

∴ গাউসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\iint_s (axi + byj + czk)\cdot \mathbf{n}\,ds$$

$$= \iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds$$

$$= \iiint_v \text{div}\,\mathbf{f}\,dv \qquad [\text{ v হল s গোলক দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চল। }]$$

$$= \iiint_v (a + b + c)\,dv = (a + b + c)\iiint_v dv$$

$$= (a + b + c)\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot 1^3 \qquad [\because \text{ 1 ব্যাসার্দ্ধ সম্পূর্ন গোলকের আয়তন } = \frac{4}{3}\pi\cdot 1^3]$$

$$= \frac{4}{3}\pi(a + b + c)$$

6. যদি xy-তলের উপরের দিকে $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ শঙ্কুর বক্রতল s এবং $\mathbf{f} = x^2zi + (x^3 - y)j + 2x^2yk$ হয় তবে $\iint_s (\nabla \times \mathbf{f}).\mathbf{n}\,ds$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত শঙ্কুর সমীকরনে $z = 0$ বসিয়ে পাই,

$$0 = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \text{ বা, } x^2 + y^2 = 4$$

অতএব প্রদত্ত শঙ্কুটি xy-তলকে $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ বৃত্তে ছেদ করেছে। যদি ঐ বৃত্তের তলকে R বলা হয় তবে ধরা যাক S এবং R দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের আয়তন V

অতএব গাউসের ডাইভারেজন্স উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\iint_{S+R} (\nabla \times \mathbf{f})\cdot\mathbf{n}\,ds = \iiint \text{div}(\nabla \times \mathbf{f})dv \qquad [\nabla \times \mathbf{f} = \text{curl}\,\mathbf{f}]$$

$$= 0 \qquad [\because \text{div}(\text{curl}\,\mathbf{f}) = 0]$$

$$\iint_s (\text{curl}\,\mathbf{f}).\mathbf{n}\,ds + \iint_R (\text{curl}\,\mathbf{f}).\mathbf{n}\,ds = 0$$

বা, $$\iint_s (\text{curl}\,\mathbf{f}).\mathbf{n}\,ds = -\iint_R (\text{curl}\,\mathbf{f}).\mathbf{n}\,ds \quad \text{.........} \; (i)$$

এখন $\text{curl}.\mathbf{f} = 2x^2\mathbf{i} + (x^2 - 4xy)\mathbf{j} + 3x^2\mathbf{k}$

যেহেতু R-তলের বাইরের দিকে একক অভিলম্ব $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, অতএব

$$(\text{curl}\,\mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} = \left[2x^2\mathbf{i} + (x^2 - 4xy)\mathbf{j} + 3x^2\mathbf{k}\right] \cdot (-\mathbf{k})$$

$$= -3x^2 \qquad [\because \mathbf{i}.\mathbf{k} = \mathbf{j}.\mathbf{k} = 0,\ \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1]$$

$\therefore$ (i) নং থেকে পাই

$$\iint_s (\nabla \times \mathbf{f}).\mathbf{n}\,ds = \iint_s (\text{curl}\,\mathbf{f}).\mathbf{n}\,ds = -\iint_R (\text{curl}\,\mathbf{f}).\mathbf{n}\,ds$$

$$= \iint_R 3x^2 ds = 3\int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} (r\cos\theta)^2\, r\,d\theta\,dr$$ [পোলার স্থানাঙ্কে পরিবর্তন করে]

$$= \frac{3}{2}\int_0^2\int_0^{2\pi} r^3(1+\cos 2\theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 r^3\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} dr$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 r^3.2\pi.dr$$

$$= 3\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 12\pi$$

7. অক্ষতলগুলি এবং $x + y + z = a$ তলদ্বারা উৎপন্ন সমগ্রতল s দ্বারা প্রথম অষ্টমাংশে সীমাবদ্ধ অঞ্চল v হলে $\iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds$-এর মান নির্ণয় করুন যখন $\mathbf{f} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$.

সমাধান ঃ গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা জানি

$$\iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = \iiint_v \text{div}\,\mathbf{f}\,dv$$

$$= \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\int_{z=0}^{a-x-y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(zx)\right]dx\,dy\,dz$$

বা, $\iint_s \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,ds=\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\int_{z=0}^{a-x-y}(y+z+x)\,dxdydz$

$$=\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\left[yz+\frac{z^2}{2}+xz\right]_0^{a-x-y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}(a-x-y)(2x+2y+a-x-y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}(a-x-y)(a+x+y)dxdy=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\left(a^2-x^2-y^2-2xy\right)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a\left[a^2y-x^2y-\frac{y^3}{3}-xy^2\right]_0^{a-x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a\left[a^2(a-x)-x^2(a-x)-\frac{1}{3}(a-x)^3-x(a-x)^2\right]dx$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^a\left(x^3-3a^2x+2a^3\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{x^4}{4}-3a^2\cdot\frac{x^2}{2}+2a^3x\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{a^4}{4}-\frac{3}{2}a^4+2a^4\right]$$

$$=\frac{1}{8}a^4$$

৪. $\mathbf{a}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর হলে দেখান যে

(i) $\iint_s \mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\,ds=2v\mathbf{a}$

(ii) $\iint_s \mathbf{r}\times\mathbf{n}\,ds=0$

(iii) $\iiint_v \nabla\phi\cdot\text{curl}\,\mathbf{f}\,dv=\iint_s(\mathbf{f}\times\nabla\phi)\cdot\mathbf{n}\,ds$

সমাধান ঃ (i) আমরা জানি $\iint_s \mathbf{f}\times\mathbf{n}\,ds=-\iiint_v \nabla\times\mathbf{f}\,dv$

এখানে $\mathbf{f}=\mathbf{a}\times\mathbf{r}$ নিলে

বামপক্ষ $=\iint_s \mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})ds=-\iint_s(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\mathbf{n}\,ds=-\left\{-\iiint_v \nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\,dv\right.$

$$=\iiint_v \nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\,dv$$

এখন $\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})=\sum \mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}\times\mathbf{r})=\sum \mathbf{i}\times\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\times\mathbf{r}+\mathbf{a}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)$

$$=\sum \mathbf{i}\times(0+\mathbf{a}\times\mathbf{i})=\sum \mathbf{i}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{i})=\sum\left[(\mathbf{i}.\mathbf{i})\mathbf{a}-(\mathbf{i}.\mathbf{a})\mathbf{i}\right]$$

$$=\sum(\mathbf{a}-a_1\mathbf{i})$$ [যখন $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$]

$$=3\mathbf{a}-\mathbf{a}=2\mathbf{a}$$

$\therefore$ বামপক্ষ $=\iiint_v 2\mathbf{a}\,dv=2\mathbf{a}\iiint_v dv=2\mathbf{a}v$

= ডানপক্ষ

(ii) আমরা জানি যে, $\iint_s \mathbf{n}\times\mathbf{f}\,ds=\iiint_v \nabla\times\mathbf{f}\,dv$

$\therefore$ বামপক্ষ $=\iint \mathbf{r}\times\mathbf{n}\,ds=-\iiint_v \nabla\times\mathbf{r}\,dv=0$

যেহেতু $\nabla\times\mathbf{r}=\mathbf{i}.0+\mathbf{j}.0+\mathbf{k}.0=0$

(iii) ডানপক্ষ $=\iint_s(\mathbf{f}\times\nabla\phi).\mathbf{n}\,ds$

$=\iiint_v \operatorname{div}(\mathbf{f}\times\nabla\phi)\,dv$ [ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী]

$$=\iiint_v(\nabla\phi.\operatorname{curl}\mathbf{f}-\mathbf{f}.\operatorname{curl}\nabla\phi)\,dv$$

$=\iiint_v \nabla\phi.\operatorname{curl}\mathbf{f}\,dv$ $\quad[\because \operatorname{curl}\nabla\phi=0]$

= বামপক্ষ

9. যদি v অঞ্চলে ϕ একটি হারমোনিক ফাংশন হয় তবে দেখান যে

$$\iint_s \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}ds=\iiint_v |\nabla\phi|^2\,dv$$

সমাধান : বামপক্ষ $= \iint_s \phi \dfrac{\partial\phi}{\partial n} ds = \iint_s \phi \dfrac{\partial\phi}{\partial n} \mathbf{n}.\mathbf{n}\, ds$

$$= \iint_s \left[\phi\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathbf{n}\right)\right].\mathbf{n}\, ds = \iint_s (\phi\nabla\phi).\mathbf{n}\, ds = \iiint_v \text{div}(\phi\nabla\phi)\, dv$$

[ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী]

$$= \iiint_v \left[(\nabla\phi.\nabla\phi) + \phi(\nabla.\nabla\phi)\right] dv$$

$$= \iiint_v \left[(\nabla\phi)^2 + \phi\nabla^2\phi\right] dv$$

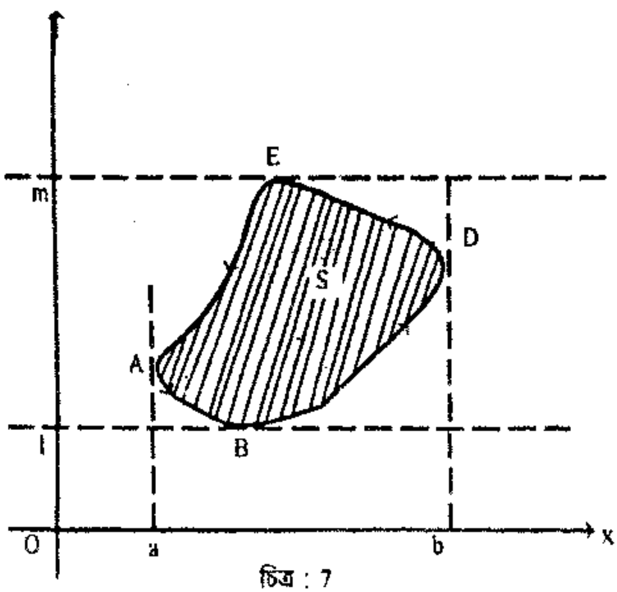
$$= \iiint_v |\nabla\phi|^2\, dv, \qquad \text{যেহেতু } \nabla^2\phi = 0 \text{ এবং } (\nabla\phi)^2 = |\nabla\phi|^2$$

= ডানপক্ষ

9.3 সামতলিক ক্ষেত্রে গ্রীনের উপপাদ্য (Green's Theorem in a plane) :

নিজে নিজে ছেদিত হয় না এমন একটি সহজ বদ্ধ বক্র (simple closed curve) C-র দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল (Closed region) S -এ যদি দুটি সন্তত ফাংশন F (x, y) ও G (x, y) সংজ্ঞাত থাকে যাদের ঐ একই অঞ্চলে সন্তত অবকল সহগ আছে, তাহলে

$$\oint_C (F dx + G dy) = \iint_S \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dx\, dy.$$



চিত্র : 7

অবশ্য C ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে C বরাবর গমন করলে S অঞ্চলটি যেন সর্বদা বাম দিকে থাকে। C বরাবর এই দিককে ধনাত্মক দিক বলে। পরস্পরকে ছেদ করে না এমন সসীম সংখ্যক সহজ বদ্ধ বক্রের দ্বারা সীমাবদ্ধ যে কোন সামতলিক অঞ্চলের জন্যও উপরোক্ত উপপাদ্য পালিত হয়।

প্রমাণ : প্রথমে আমরা একটি সহজ বদ্ধ বক্র C -র দ্বারা সীমাবদ্ধ এমন একটি অঞ্চল S নিলাম (চিত্র 7) যেন x অক্ষ বা y অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা C কে দুই এর বেশি বিন্দুতে ছেদ না করে।

ধরা যাক, C বক্রের উপর A ও D বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় y অক্ষের সমান্তরাল এবং উহারা x অক্ষকে $x = a$ ও $x = b$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। যদি চিত্রানুযায়ী ABD এবং AED বক্রদ্বয়ের সমীকরণ $y = \phi_1(x)$ এবং $y = \phi_2(x)$ হয়, তবে

$$\iint_S \frac{\partial F}{\partial y} dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial F}{\partial y} dy\right] dx = \int_a^b \left[F(x,y)\right]_{\phi_1}^{\phi_2} dx$$

$$= \int_a^b \left[F(x,\phi_2) - F(x,\phi_1)\right] dx$$

$$= \int_a^b F(x,\phi_2) dx - \int_a^b F(x,\phi_1) dx$$

$$= -\left[\int_a^b F(x,\phi_1) dx + \int_b^a F(x,\phi_2) dx\right]$$

$$= -\oint_C F dx \quad \ldots \text{(i)}$$

[যেহেতু প্রথম সমাকলটি ABD এবং দ্বিতীয় সমাকলটি DEA বরাবর বোঝায়।]

আবার যদি B ও E বিন্দুদ্বয়ে স্পর্শকদ্বয় x অক্ষের সমান্তরাল হয়, এবং তারা যদি y অক্ষকে যথাক্রমে $y = \ell$ ও $y = m$ বিন্দুতে ছেদ করে, এবং EAB ও BDE বক্রদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $x = \psi_1(y)$ ও $x = \psi_2(y)$ হয় তবে,

$$\iint_s \frac{\partial G}{\partial x} dx dy = \int_\ell^m \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial G}{\partial x} dx\right] dy = \int_\ell^m \left[G(x,y)\right]_{\psi_1}^{\psi_2} dy$$

$$= \int_\ell^m \left[G(\psi_2,y) - G(\psi_1,y)\right] dy$$

$$= \int_\ell^m G(\psi_2,y) dy - \int_\ell^m G(\psi_1,y) dy$$

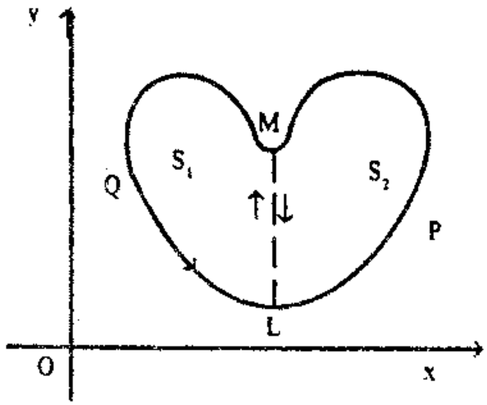
$$= \int_\ell^m G(\psi_2,y) dy + \int_m^\ell G(\psi_1,y) dy$$

$$= \oint_c G dy \quad \ldots \text{(ii)}$$

[∵ প্রথম সমাকলটি BDE এবং দ্বিতীয় সমাকলটি EAB বরাবর বোঝায়।]

(ii) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$$\iint_{s} \left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{c} (Fdx + Gdy)$$ প্রমাণিত।



চিত্র : ৪

যদি C বক্র দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল S এমন হয় যে কোনো অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা C বক্রটিকে দুই এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করে তবে এমন ভাবে S অঞ্চলটিকে কয়েকটি রেখা দ্বারা কতকগুলি উপঅঞ্চলে বিভক্ত করতে হবে যেন প্রত্যেকটি উপঅঞ্চল পূর্ব আরোপিত শর্ত মেনে চলে। ধরা যাক্ চিত্র ৪ অনুযায়ী LM রেখা দ্বারা S কে দুটি উপঅঞ্চল S_1 ও S_2 তে বিভক্ত করা হল। তবে S_1 ও S_2 প্রত্যেকেই এমন বক্র দ্বারা সীমাবদ্ধ যারা যে কোনো অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা দুই এর বেশি বিন্দুতে ছেদিত হয় না। অতএব পূর্বের প্রমাণিত ফল অনুযায়ী

$$\int_{LMQL} (Fdx + Gdy) = \iint_{S_1} \left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right) \qquad .... (iii)$$

এবং $$\int_{MLPM} (Fdx + Gdy) = \iint_{S_2} \left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right) \qquad .... (iv)$$

এখন (iii) এবং (iv) এর বামপক্ষের সমষ্টি

$$\int_{LMQL} + \int_{MLPM} = \int_{LM} + \int_{MQL} + \int_{ML} + \int_{LPM}$$ [সুবিধার জন্য ইনটিগ্রান্ড Fdx +Gdy না লিখে]

$$= \int_{MQL} + \int_{LPM} \quad \left[\because \int_{LM} = -\int_{ML}\right]$$

$$= \int_{MQLPM}$$

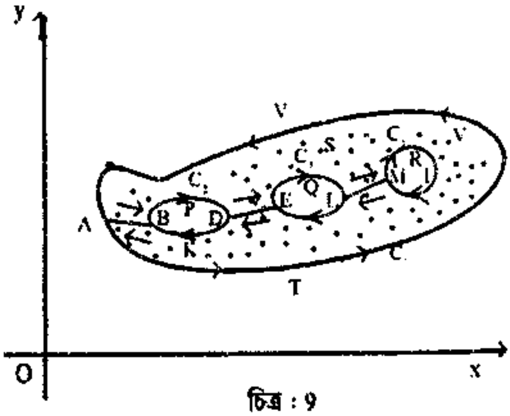
আবার একইভাবে (iii) ও (iv) -এর ডান পক্ষের সমষ্টি

$$\iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \iint_{S}$$

অতএব $\int_{MQLPM} (Fdx + Gdy) = \iint_S \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)$

অর্থাৎ এক্ষেত্রেও গ্রীনের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

যখন S অঞ্চলটি 9 চিত্রের ন্যায় কতকগুলি সহজবদ্ধ বক্র C_1, C_2, C_3, C_4 দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে তখন গ্রীনের উপপাদ্য প্রমাণের জন্য AB, DE, LM রেখাগুলি অঙ্কনের দ্বারা উক্ত বক্রগুলিকে যুক্ত করে S-কে একটি Simply Connected অঞ্চলে রূপান্তরিত করা হল [যদি কোন অঞ্চলে কোন বদ্ধবক্রকে অবিরামভাবে সঙ্কুচিত করে ঐ অঞ্চলের মধ্যেই একটি বিন্দুতে পরিণত করা যায় তবে ঐ অঞ্চলকে simply-connected বলে]। অতএব এখন এই S অঞ্চলের জন্য গ্রীনের উপপাদ্য পালিত হয়।



চিত্র : 9

যে বক্রটির দ্বারা S সীমাবদ্ধ তার উপর সমাকল এক্ষেত্রে

$$\int_{AB} + \int_{BPD} + \int_{DE} + \int_{EQL} + \int_{LM} + \int_{MRIM} + \int_{ML} + \int_{LJE} + \int_{ED} + \int_{DKB} + \int_{BA} + \int_{ATUVA}$$

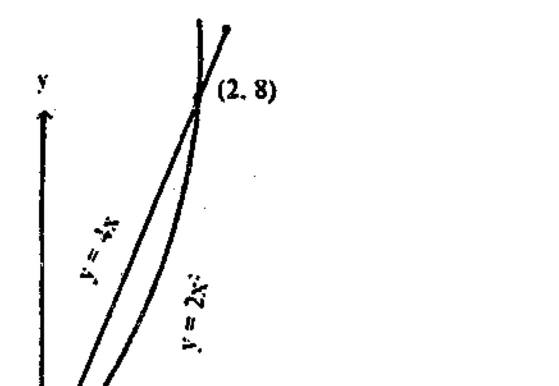
$$= \int_{BPD} + \int_{EQL} + \int_{MRIM} + \int_{LJE} + \int_{DKB} + \int_{ATUVA} \qquad \left[\because \int_{AB} = -\int_{BA} \text{ ইত্যাদি }\right]$$

$$= \left(\int_{BPD} + \int_{DKB}\right) + \left(\int_{EQL} + \int_{LJE}\right) + \int_{MRIM} + \int_{ATUVA}$$

$$= \int_{BPDKB} + \int_{EQLJE} + \int_{MRIM} + \int_{ATUVA} = \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} + \int_{C_1}$$

$= \int_C$, এখানে C_1, C_2, C_3, C_4 এর সংযুক্তির ফলে উৎপন্ন বক্র C.

অতএব $\oint_C (Fdx + Gdy) = \iint_S \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)$



চিত্র 10

উদাহরণ :

1. সমতলে $y = 4x$ এবং $y = 2x^2$ দ্বারা বদ্ধ বক্রটিকে C ধরে

$\int_C (2ydx + 3xydy)$ সমাকলটির মান সরাসরি নির্ণয় করুন এবং C কর্তৃক সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটিকে S ধরে গ্রীনের উপপাদ্যের সাহায্যেও সমাকলটির মান আরও একবার নির্ণয় করুন।

সমাধান :

প্রথম অংশ : এখানে $y = 4x, y = 2x^2$ বক্রদুটি (2, 8) বিন্দুতে ছেদ করে।

$$\int_C (2ydx + 3xydy)$$

$$= \int_0^2 (2.2x^2dx + 3x.2x^2.4x.dx) + \int_2^0 (2.4x.dx + 3x.4x.4.dx)$$

$$= \left[4.\frac{x^3}{3} + 24.\frac{x^5}{5}\right]_0^2 + \left[8.\frac{x^2}{2} + 48\frac{x^3}{3}\right]_2^0$$

$$= 4.\frac{8}{3} + \frac{24}{5}.32 - 16 - 16.8 = \frac{304}{15}$$

দ্বিতীয় অংশ :

গ্রীনের উপপাদ্য অনুযায়ী $\int_C (Fdx + Gdy) = \iint_S \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)dxdy$

$$\therefore \int_C (2ydx + 3xydy) = \int_{x=0}^{2}\int_{y=2x^2}^{4x}\left[\frac{\partial(3xy)}{\partial x} - \frac{\partial(2y)}{\partial y}\right]dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{y=2x^2}^{4x} (3y-2)\,dx\,dy$$

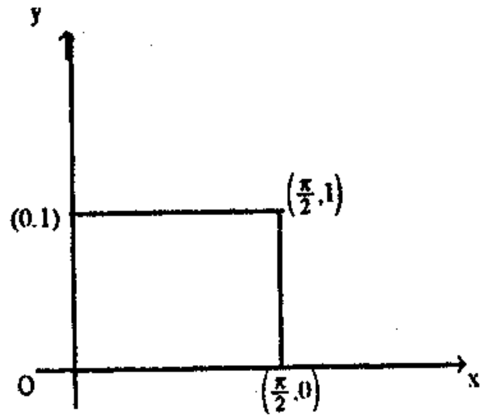
$$= \int_0^2 \left[\frac{3y^2}{2} - 2y\right]_{2x^2}^{4x} dx = \int_0^2 \left(48\frac{x^2}{2} - 8x - \frac{12}{2}x^4 + 4x^2\right)dx$$

$$= \int_0^2 (28x^2 - 8x - 6x^4)dx = \left[28\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} - 6\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \frac{28}{3}.8 - 4.4 - \frac{6}{5}.32 = \frac{304}{15}$$

2. গ্রীনের উপপাদ্যের সাহায্যে $\int_C \left\{(x-y^2)dx + (y+\sin x)dy\right\}$

সমাকলটির মান নির্ণয় করুন, যখন C বক্রটি xy - সমতলে একটি আয়তক্ষেত্র যার কৌণিক বিন্দুগুলি (0,0), $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, (0, 1).



চিত্র : 11

সমাধান : সমতলে গ্রীনের উপপাদ্য থেকে পাই,

$$\int_C (Fdx + Gdy) = \iint_S \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

এখানে $F = x - y^2, G = y + \sin x$

$$\therefore \frac{\partial G}{\partial x} = \cos x,\ \frac{\partial F}{\partial y} = -2y$$

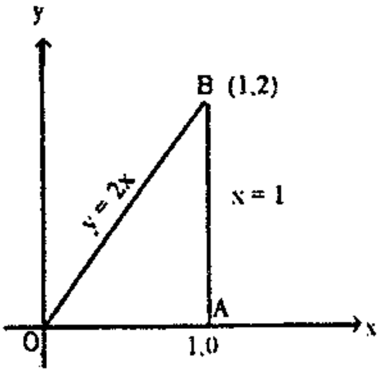
$$\therefore \int_C \left\{(x-y^2)dx + (y+\sin x)dy\right\} = \iint_S (\cos x + 2y)\,dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{1} (\cos x + 2y)dxdy = \int_0^{\pi/2} \left[y\cos x + y^2 \right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos x + 1)dx = \left[\sin x + x\right]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2}.$$

3. xy সমতলে (0,0), (1,0), (1,2) কৌণিক বিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজকে C ধরে $\int_C (ye^x dx + xe^y dy)$ সমাকলটি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে গ্রীনের উপপাদ্যটি যাচাই করুন।



চিত্র 12

সমাধান : এখানে প্রদত্ত ত্রিভুজটি OAB এবং OA, AB, ও OB -এর সমীকরণ যথাক্রমে $y = 0$, $x = 1$ ও $y = 2x$.

এখন, $\int_{OA} (ye^x dx + xe^y dy) = \int_0^1 (0.e^x.dx + x.e^0.0)$ $[\because y = 0,\ dy = 0]$

$$= 0$$

$\int_{AB} (ye^x dx + xe^y dy) = \int_0^2 (y.e^1.0 + 1.e^y.dy)$ $(\because x = 1,\ dx = 0)$

$$= \int_0^2 e^y dy = \left[e^y\right]_0^2 = e^2 - 1$$

$\int_{BO} (ye^x dx + xe^y dy) = \int_1^0 \left(2xe^x dx + xe^{2x}.2dx\right)$ $[\because y = 2x, dy = 2dx]$

$$= 2\left[xe^x - e^x\right]_1^0 + 2\left[x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right]_1^0$$ [আংশিক সমাকল করে]

$$= 2[0 - 1 - e + e] + 2\left[0 - \frac{1}{4} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4}\right]$$

$$= -2 - \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{e^2}{2}$$

$$\therefore \int_C \left(ye^x dx + xe^y dy\right) = \int_{OA} \left(y.e^x.dx + x.e^y.dy\right) + \int_{AB} \left(ye^x dx + xe^y dy\right)$$

$$+ \int_B^0 \left(ye^x dx + xe^y dy\right)$$

$$= 0 + e^2 - 1 - \frac{5}{2} - \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{7}{2} \quad \text{..... (i)}$$

গ্রীনের উপপাদ্য অনুযায়ী $\int_C \left(ye^x dx + xe^y dy\right) = \iint_S \left[\frac{\partial(xe^y)}{\partial x} - \frac{\partial(ye^x)}{\partial y}\right] dx\, dy$

$= \iint_S \left(e^y - e^x\right) dx\, dy$ হওয়া উচিত।

এখন $\iint_S \left(e^y - e^x\right) dx\, dy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2x} \left(e^y - e^x\right) dx\, dy$

$$= \int_0^1 \left(e^y - ye^x\right)_0^{2x} dx = \int_0^1 \left(e^{2x} - 2xe^x - 1\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2\left(xe^x - e^x\right) - x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 2(e-e) - 1 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{7}{2} \quad \ldots (ii)$$

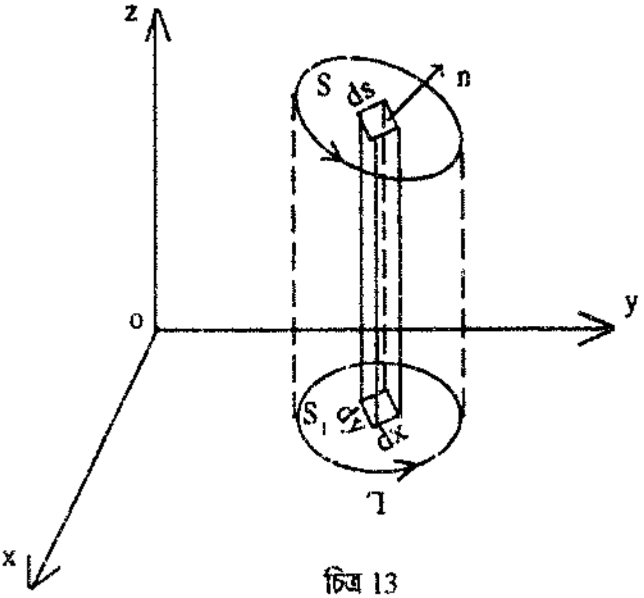
অতএব (i) ও (ii) থেকে প্রমাণিত হয় যে গ্রীনের উপপাদ্যটি এক্ষেত্রে সত্য।

9.4 স্টোকের উপপাদ্য (Stoke's Theorem) :

যদি **F** (r) ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশনটির দুই দিক মুক্ত (Open & two sided) S তলে সন্তত অবকল সহগ থাকে এবং নিজে নিজে ছেদিত হয় না এমন একটি সহজবদ্ধ বক্র দ্বারা যদি এই S তলটি বেষ্টিত থাকে, তবে

$$\iint_S \text{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

এখানে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে C বরাবর গমন করলে S অঞ্চলটি যেন সর্বদা বাম দিকে থাকে এবং ডান হাত দিয়ে একটি স্ক্রুকে একই দিকে ঘোরালে তার গতির দিকে S এর যে কোনো স্থানে একক লম্ব ভেক্টর **n** দ্বারা নির্দেশিত।



চিত্র 13

প্রমাণ : ধরা যাক, সহজবদ্ধ বক্র C দ্বারা বেষ্টিত অঞ্চল S এর xy, yz, এবং zx তলে লম্ব অভিক্ষেপ নিলে

তারাও সহজবদ্ধ বক্র দ্বারা বেষ্টিত থাকে। চিত্রে প্রদর্শিত xy তলে লম্ব অভিক্ষেপ S_1 ক্ষেত্রটি Γ বক্র দ্বারা বেষ্টিত। আরও ধরা যাক S এর সমীকরণ

$z = f(x, y)$ বা $x = g(y, z)$

বা $y = h(x, z)$, যখন

f, g, h প্রত্যেকেই এক মান বিশিষ্ট সন্তত এবং অবকলনযোগ্য ফাংশন।

যদি $\mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\mathbf{k}$ হয় তবে

$$\text{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n} = \nabla \times (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}).\mathbf{n}$$

এখন $\nabla \times F_1\mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial z}\mathbf{j} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{k}$

অতএব $\left[\nabla \times F_1\mathbf{i}\right]\mathbf{n}.ds = \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\mathbf{j}.\mathbf{n} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{k}.\mathbf{n}\right)ds$ .... (i)

আবার যদি S এর সমীকরণ $z = f(x,y)$ এবং S এর উপর যে কোনো বিন্দুর স্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ধরা হয়, তবে $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}$ এবং $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{k}$ হয়।

যেহেতু $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ ভেক্টরটি S-এর (x,y,z) বিন্দুতে স্পর্শক দিকে তাই $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ নির্দেশিত এইটি অভিলম্ব $\mathbf{n}$ এর সঙ্গে লম্ব অর্থাৎ $\mathbf{n}.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = 0$ অতএব $\mathbf{n}.\left(\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{k}\right) = 0$. বা $\mathbf{n}.\mathbf{j} = -\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{n}.\mathbf{k}$

এটি (i) নং-এ বসিয়ে পাই

$$[\nabla \times F_1\mathbf{i}].\mathbf{n}.ds = \left(-\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{n}.\mathbf{k} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{n}.\mathbf{k}\right)ds$$

$$= -\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathbf{n}.\mathbf{k}\,ds \quad \left[\because \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

$$= -\frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{n}.\mathbf{k}ds, \text{ যখন } F_1(x,y,z) \equiv F_1[x,y,f(x,y)] = \phi(x,y)$$

$$= -\frac{\partial \phi}{\partial y}dxdy$$

$$\therefore \iint_S [\nabla \times F_1\mathbf{i}].\mathbf{n}ds = \iint_{S_1} \frac{\partial \phi}{\partial y}dxdy$$

$= \oint_{\Gamma} \phi dx$, S_1 অঞ্চলের জন্য xy তলে গ্রীনের উপপাদ্য অনুযায়ী

$= \oint_C F_1 dx$, যেহেতু Γ এর উপর (x,y) বিন্দুতে ϕ এর মান C-তে (x, y, z) বিন্দুতে F_1 এর মানের সমান এবং উভয় বক্রে dx একই।

অনুরূপে অন্য অক্ষতলগুলিতে S এর লম্ব অভিক্ষেপ নিয়ে প্রমাণ করা যায়।

$$\iint_S [\nabla \times F_2\mathbf{j}].\mathbf{n}.ds = \oint_C F_2 dy$$

এবং $\iint_S [\nabla \times F_3\mathbf{k}].\mathbf{n}.ds = \oint_C F_3 dz$

উপরোক্ত ফল তিনটিকে যোগ করে পাই

$$\iint_S \text{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}.ds = \oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

যদি কোনো ক্ষেত্রে S এর উপর আরোপিত শর্ত পালিত না হয় তাহলেও স্টোকের উপপাদ্য প্রমাণ করা যাবে S-কে কতকগুলি উপঅঞ্চলে বিভক্ত করা যায় যাদের প্রত্যেকটি সহজবদ্ধ বক্র দ্বারা বেষ্টিত এবং প্রত্যেকটির অক্ষতলগুলিতে সহজ বদ্ধ বক্র দ্বারা বেষ্টিত এবং প্রত্যেকটির অক্ষতলগুলিতে সহজ বদ্ধ বক্র দ্বারা বেষ্টিত লম্ব অভিক্ষেপ থাকে। সেক্ষেত্রে প্রত্যেক উপ অঞ্চলে স্টোকের উপপাদ্য পালিত হবে। এখন সমস্ত উপঅঞ্চলের জন্য স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী সমাকল সমীকরণগুলি লিখে এবং পরে সমস্ত সমীকরণগুলি যোগ করে সমগ্র অঞ্চল S এর জন্য যে উপপাদ্যটি পালিত হয় তা প্রমাণ করা যায়।

মন্তব্য 1 : স্টোকের উপপাদ্যের কার্তিয় গঠন।

ধরা যাক উপরোক্ত স্টোকের উপপাদ্যে

$$\mathbf{F}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\mathbf{i} + f_2(x,y,z)\mathbf{j} + f_3(x,y,z)\mathbf{k}$$

$\mathbf{n} = \ell\,\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ এবং $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ এখানে f_1, f_2, f_3 স্কেলার পয়েন্ট ফাংশনসমূহ এবং $\mathbf{n}$ ভেক্টরের দিক্ কোসাইনগুলি ℓ,m,n,

$$\therefore \mathbf{F}.d\mathbf{r} = (f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}).dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$= f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \text{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)l + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)m + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)n$$

অতএব স্টোকের উপপাদ্য

$$\iint_S \text{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \int_c \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

এর কার্তিয় গঠন

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\ell + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)m + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)n\right]ds = \int_c (f_1dx + f_2dy + f_3dz)$$

$$\text{বা,} \iint_S \left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dxdy\right] = \int_c (f_1dx + f_2dy + f_3dz)$$

[$\because \ell\, ds = \cos\alpha ds = dydz$ ইত্যাদি]

মন্তব্য 2 : যেহেতু xy তলে $z = 0$ এবং $dz = 0$, ঐ তলে স্টোকের উপপাদ্যের কার্তিয় রূপ মন্তব্য 1 অনুযায়ী হয়।

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dxdy = \int_c (f_1dx + f_2dy)$$

এটি 9.3 অনুচ্ছেদে বর্ণিত সামতলিক ক্ষেত্রে গ্রীনের উপপাদ্য।

9.4.1 স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী কিছু সিদ্ধান্ত (deduction)

i) $\int_c \mathbf{r}.d\mathbf{r} = 0$

ii) $\int_c \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = 2\iint_S \mathbf{n}\,ds = 2\iint ds$

iii) $\int_c \phi\nabla\phi.d\mathbf{r} = 0$

iv) $\int_c \phi\, d\mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla\phi)ds,$ [ϕ সন্তত স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন]

v) $\int_c d\mathbf{r}.\mathbf{f} = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla).\mathbf{f}\, ds$

vi) $\int_c d\mathbf{r}\times\mathbf{f} = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla).\mathbf{f}\, ds$

সমাধান : স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\iint_S \text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds = \int_c \mathbf{f}.d\mathbf{r}$$

$\therefore$ (i) $\mathbf{f} = \mathbf{r}$ ধরে স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\iint_S \text{curl}\,\mathbf{r}.\mathbf{n}\, ds = \int_c \mathbf{r}.d\mathbf{r}$$

বা $0 = \int_c \mathbf{r}.d\mathbf{r}$ $[\because \text{curl}\,\mathbf{r} = 0]$

ii) $\mathbf{f} = \mathbf{a}\times\mathbf{r}$, যখন $\mathbf{a}$ একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক ভেক্টর, ধরলে

curl $\mathbf{f} = \text{curl}(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = +2\mathbf{a}$ [একক 8-এর উদাহরণ 4 দ্রষ্টব্য (87 পৃষ্ঠায়)]

$\therefore$ গাউসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\int_c (\mathbf{a}\times\mathbf{r}).d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n}.\text{curl}(\mathbf{a}\times\mathbf{r})ds$$

$$= \iint_S \mathbf{n}.2\mathbf{a}\, ds = 2\mathbf{a}.\iint_S \mathbf{n}\, ds \quad [\because \mathbf{a} \text{ ধ্রুবক ভেক্টর}]$$

$$\therefore \int_c \mathbf{a}.(\mathbf{r}\times d\mathbf{r}) = 2\mathbf{a}.\iint_S \mathbf{n}\, ds \quad [\because \mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}]$$

বা, $\mathbf{a}.\left[\int_c \mathbf{r}\times d\mathbf{r} - 2\iint_S \mathbf{n}\, ds\right] = 0$

$\therefore \int_c \mathbf{r}\times d\mathbf{r} - 2\iint_S \mathbf{n}\, ds = 0,$ যেহেতু $\mathbf{a}$ যে কোন একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক ভেক্টর।

$\therefore \int_c \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = 2\iint_S \mathbf{n}\, ds$

iii) $\mathbf{f} = \phi\nabla\phi$ ধরে স্টোকের উপপাদ্য প্রয়োগ করলে পাই

$$\int_c (\phi\nabla\phi).d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}(\phi\nabla\phi).\mathbf{n}\, ds$$

$$= \iint_S [(\text{grad}\,\phi)\times(\text{grad}\,\phi) + \phi\,\text{curl}(\text{grad}\,\phi)].\mathbf{n}\, ds$$

$= 0,$ যেহেতু $(\text{grad}\,\phi)\times\text{grad}\,\phi = 0$ এবং $\text{curl grad}\,\phi = 0$

iv) যে কোন যদৃচ্ছ ধ্রুবক ভেক্টর **a** হলে $\mathbf{f} = \mathbf{a}\,\phi$ এর জন্য স্টোকের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$$\int_c \mathbf{a}\phi.d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}(\mathbf{a}\phi).\mathbf{n}\,ds$$

বা, $\mathbf{a}.\int_c \phi d\mathbf{r} = \iint_S \text{grad}\,\phi \times \mathbf{a}.\mathbf{n}\,ds$ [$\because$ **a** ধ্রুবক ভেক্টর এবং $\text{curl}(\mathbf{a}\,\phi) = \text{grad}\,\phi \times \mathbf{a}$]

$$= \mathbf{a}.\iint_S (\mathbf{n} \times \text{grad}\,\phi)ds$$ [ভেক্টরের গুণনের নিয়ম অনুযায়ী]

$\therefore \int_c \phi\, d\mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{n} \times \text{grad}\,\phi)ds,$ যেহেতু **a** যে কোনো যদৃচ্ছ ধ্রুবক ভেক্টর।

v) যেহেতু ∇ একটি ভেক্টর অপারেটর, গুণনের নিয়মানুযায়ী-

$$(\nabla \times \mathbf{f})\,\mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \nabla).\mathbf{f}$$

$\therefore$ স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\int_c \mathbf{f}.d\mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla)\mathbf{n}.ds$$

বা $$\int_c d\mathbf{r}.\mathbf{f} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla).\mathbf{f}\,ds$$

vi) যদি **a** যে কোনো একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক ভেক্টর হয় তবে $\mathbf{F} = \mathbf{a} \times \mathbf{f}$ ভেক্টরের জন্য স্টোকে উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\int_c (\mathbf{a} \times \mathbf{f}).d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{f}).\mathbf{n}\,ds$$

আমরা জানি $\text{curl}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{f}) = \mathbf{a}\,\text{div}\,\mathbf{f} - \mathbf{f}\,\text{div}\,\mathbf{a} + (\mathbf{f}.\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}.\nabla)\mathbf{f}$

$= \mathbf{a}\,\text{div}\mathbf{f} - (\mathbf{a}.\nabla)\mathbf{f}$ [$\because$ **a** ধ্রুবক ভেক্টর]

$$\therefore \int_c (\mathbf{a} \times \mathbf{f}).d\mathbf{r} = \iint_S [\mathbf{a}\,\text{div}\,\mathbf{f} - (\mathbf{a}.\nabla)\mathbf{f}].\mathbf{n}\,ds$$

বা, $\int_c \mathbf{a}.\mathbf{f} \times d\mathbf{r} = \iint_S [\mathbf{a}.(\text{div}\mathbf{f})\mathbf{n} - \mathbf{a}.\nabla(\mathbf{f}.\mathbf{n})]ds$

$\because [(\mathbf{a}.\nabla)\mathbf{f}].\mathbf{n} = \mathbf{a}.\nabla(\mathbf{f}.\mathbf{n})$ এখানে ∇ অপারেটরের সাপেক্ষে **n** ধ্রুবক ভেক্টর]

বা, $\mathbf{a}.\int_c \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = \mathbf{a}\iint_S [(\text{div}\mathbf{f})\mathbf{n} - \nabla(\mathbf{f}.\mathbf{n})]ds$

বা, $\mathbf{a}.\int_c \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = \mathbf{a}\iint_S [-(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{f}]ds$

$$\therefore \int_c \mathbf{f}\times d\mathbf{r} = -\iint_S (\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{f}\, ds$$

বা, $$\int_c d\mathbf{r}\times\mathbf{f} = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{f}\, ds$$

9.4.2 উদাহরণমালা — B

1. প্রমাণ করুন যে

i) $\int_c \phi\nabla\psi . d\mathbf{r} = -\int_c \psi\nabla\phi . d\mathbf{r}$

ii) $\int_c \phi\nabla\psi . d\mathbf{r} = \iint_S [\nabla\phi\times\nabla\psi].\mathbf{n}\, ds$

সমাধান :—

i) স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী $\mathbf{f} = \nabla(\phi\psi)$ ধরে

$$\int_c \nabla(\phi\psi).d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\nabla(\phi\psi).\mathbf{n}\, ds$$

$= 0$ [$\because$ curl grad $= 0$, যখন u স্কেলার ফাংশন]

বা, $\int_c [\phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi].d\mathbf{r} = 0 \quad [\because \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi]$

বা, $\int_c \phi\nabla\psi.d\mathbf{r} = -\int_c \psi\nabla\phi.d\mathbf{r}$

ii) $\mathbf{f} = \phi\nabla\psi$ ধরে স্টোকের উপপাদ্য কাজে লাগিয়ে পাই,

$$\int \phi\nabla\psi.d\mathbf{r} = \iint_S [\nabla\times(\phi\nabla\psi)].\mathbf{n}\, ds$$

$$= \iint_S \{(\nabla\phi\times\nabla\psi) + \phi(\text{curl}\nabla\psi)\}.\mathbf{n}\, ds$$

$$= \iint_S (\nabla\phi\times\nabla\psi).\mathbf{n}\, ds,$$ যেহেতু curl grad $\psi = 0$

2. স্টোকের উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে,

(i) div curl $\mathbf{f} = 0$ এবং (ii) curl grad $\phi = 0$

সমাধান : (i) ধরা যাক, S তলদ্বারা সীমাবদ্ধঅঞ্চল V এবং একটি বদ্ধ (closed) বক্র C দ্বারা S তলকে দুটি ভাগে বিভক্ত করা হয়েছে S_1 ও S_2.

এখন গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী পাই,

$$\iiint_V \operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{f})dv = \iint_s \operatorname{curl}\mathbf{f}.d\mathbf{s}$$

$$= \iint_{s_1} \operatorname{curl}\mathbf{f}.\mathbf{n}ds + \iint_{s_2} \operatorname{curl}\mathbf{f}.\mathbf{n}ds$$

$$= \int_c \mathbf{f}.d\mathbf{r} + \int_c \mathbf{f}.d\mathbf{r}$$ স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী।

এখন যেহেতু s_1 ও s_2 তল দুটি c বক্রের উভয় পার্শ্বে অবস্থিত উপরের সমাকল দুটি c বরাবর বিপরীত দিকে নির্দেশিত।

অতএব তাদের সমষ্টি শূন্য হবে; অর্থাৎ

$$\iiint_V \operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{f})dv = 0$$

কিন্তু এটি আয়তনের সমস্ত ক্ষুদ্র অংশ dv এর জন্যই সত্য ; অতএব $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{f}) = 0$

ii) যদি $\mathbf{f} = \operatorname{curl}\operatorname{grad}\phi$ ধরে স্টোকের উপপাদ্য প্রয়োগ করা যায় তবে,

$$\iint_S (\operatorname{curl}\operatorname{grad}\phi).\mathbf{n}\,ds = \int_c \operatorname{grad}\phi.d\mathbf{r}$$

$$= \int_c \left(\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right).(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dx + \mathbf{k}\,dz)$$

$$= \int_c \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \int_c \partial\phi = 0,$$ যেহেতু C একটি বদ্ধ বক্র।

যেহেতু এটি যে কোনো (arbitrary) S এর জন্যই সত্য, অতএব

$$\operatorname{curl}\operatorname{grad}\phi = 0$$

3. স্টোকের উপপাদ্যের সাহায্যে

$$\int_c (xe^x dx + ye^y dy + ze^z dz)$$

এর মান নির্ণয় করুন যখন C বক্রের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 4,\ z = 3$.

সমাধান : এখানে $xe^x dx + ye^y dy + ze^z dz = \mathbf{f}.d\mathbf{r}$ ধরলে

$\mathbf{f} = xe^x\mathbf{i} + ye^y\mathbf{j} + ze^z\mathbf{k}$ হয়।

এখন $\text{curl}\,\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^x & ye^y & ze^z \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \int_c \left(xe^x dx + ye^x dy + ze^z dz\right) = \int_c \mathbf{f}.d\mathbf{r}$$

$$= \iint_S \text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds,$$ স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$= 0,$$ যেহেতু $\text{curl}\,\mathbf{f} = 0$

4. $\int_c (x^3y dx + xy^3 dy)$, সমাকলটির মান স্টোকের উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় করুন, যখন c বক্রটি xy তলে একটি আয়তক্ষেত্র যার শীর্ষ বিন্দুগুলি (0,0), (b,0), (b,a), (0,a),

সমাধান :- এখানে $\mathbf{f} = x^3y\mathbf{i} + xy^3\mathbf{j}$ ধরে

$$\text{Curl}\,\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3y & xy^3 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0) + \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(y^3 - x^3)$$

$$= \mathbf{k}(y^3 - x^3)$$

আবার xy তলে লম্ব $\mathbf{n} = \mathbf{k}$

$$\therefore \text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n} = \left[\mathbf{k}(y^3 - x^3)\right].\mathbf{k} = y^3 - x^3$$

$$\therefore \int_c (x^3y dx + xy^3 dy) = \int_c \mathbf{f}.d\mathbf{r}$$

$$= \iint_x \text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n}ds,$$ স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$= \int_{x=0}^{b}\int_{y=0}^{a} (y^3 - x^3)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^b \left(\frac{y^4}{4} - x^3y\right)_0^a dx$$

$$= \int_0^b \left(\frac{a^4}{4} - ax^3\right)dx$$

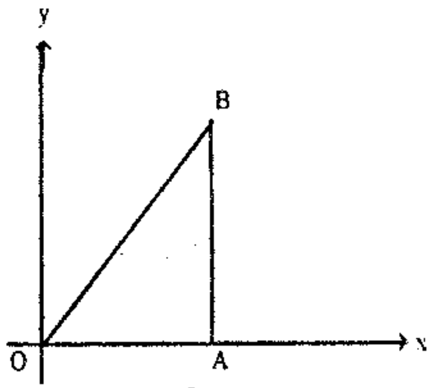
$$= \left[\frac{a^4}{4}x - a\frac{x^4}{4}\right]_0^b$$

$$= \frac{a^4b}{4} - \frac{ab^4}{4} = \frac{ab}{4}\left(a^3 - b^3\right)$$

5 যদি C বক্রটি (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0) বিন্দুগুলি শীর্ষবিন্দু এমন একটি ত্রিভুজ হয় তবে স্টোকের উপপাদ্যের সাহায্যে

$$\int_c \left[(x^2y)\mathbf{i} + (xy^2)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}\right].dr$$

এর মান নির্ণয় করুন।



চিত্র 14

সমাধান : এখানে O (0,0,0) ও A (0,0,0) বিন্দুদ্বয় সংযোগকারী বাহু AB -এর সমীকরণ y = 0, z = 0 ; B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1,1,0) অতএব AB বাহুর সমীকরণ x = 1, z = 0 এবং OB বাহুর সমীকরণ y = x, z = 0.

∴ স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\mathbf{f} = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$$

ধরলে $\int_c (x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + e^z\mathbf{k})dr = \int_c \mathbf{f}.d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds$

কিন্তু এখানে $\text{curl } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & xy^2 & e^z \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}.0 + \mathbf{j}.0 + \mathbf{k}(x^2 - y^2)$$

$$= -(x^2 - y^2)\mathbf{k}$$

$\therefore \text{curl } \mathbf{f}.\mathbf{n} = -(x^2 - y^2)\mathbf{k}.\mathbf{k}$ [∴ $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, xy তলে]

$$= -x^2 + y^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাকল $= \iint_S \text{curl}\, \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} -\left(x^2 - y^2\right) dx\, dy$$

$$= \int_0^1 -\left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)_0^x dx$$

$$= \int_0^1 -\left(x^3 - \frac{x^3}{3}\right) dx = \int_0^1 -\frac{2x^3}{3} dx$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{6}$$

6. স্টোকের উপপাদ্য ব্যবহার করে $\iint_S (\nabla \times \mathbf{f}).\mathbf{n}\, ds$-এর মান নির্ণয় করুন যখন

$\mathbf{f} = (x^2 - y)\mathbf{i} + (y^2 - z)\mathbf{j} + (z^2 - x)\mathbf{k}$ এবং xy -তলের উপরের দিকে $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ গোলকের তল S.

সমাধান : $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ গোলকটি xy তল দ্বারা $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ বৃত্তে ছেদিত হয় এই বৃত্তকে C ধরলে তার প্যারামেট্রিক সমীকরণ হয় $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

$\therefore$ স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{f}).\mathbf{n}\, ds = \int_c \mathbf{f}.\mathbf{r}$$

$$= \int_c (x^2 - y)dx + (y^2 - z)dy + (z^2 - x)dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left\{a^2\cos^2\theta - a\sin\theta\right\}(-a\sin\theta)d\theta + a^2\sin^2\theta(a\cos\theta)d\theta\right]$$

[$\because$ C এর উপর $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = 0$ এবং $0 \le \theta \le 2\pi$]

$$= a^2\int_0^{2\pi} \left[-a\cos^2\theta\sin\theta + \sin^2\theta + a\sin^2\theta\cos\theta\right] d\theta$$

$$= -a^3\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin\theta d\theta + a^3\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos\theta d\theta + a^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta$$

$$= -a^3.0 + a^2.2\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta + a^3.2\int_0^{\pi} \sin^2\theta\cos\theta\, d\theta$$

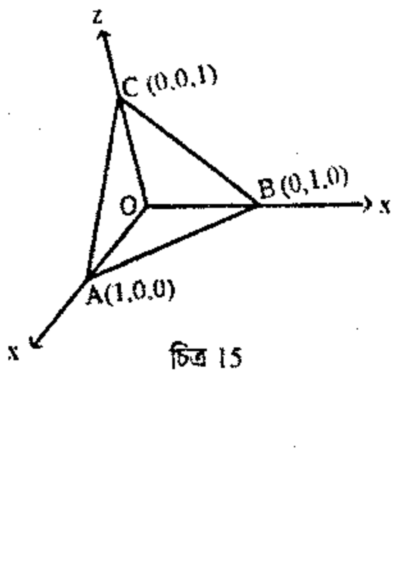
$[\because \int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx,$ যখন $f(2a-x) = f(x)$ এবং

$\int_0^{2a} f(x)dx = 0,$ যখন $f(2a-x) = -f(x)]$

$$= 2.a^2.2\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta + 2a^3.0$$

$$= 4a^2.\frac{\pi}{4} = \pi a^2$$

7 অক্ষতলগুলি $x+y+z=1$ তলটিকে প্রথম অষ্টমাংশে (first octant) যে ত্রিভুজাকৃতি তল ছিন্ন করে তাকে S এবং বাহুগুলির দ্বারা উৎপন্ন বদ্ধ বক্রটিকে C ধরে ভেক্টর ফাংশন f = (xy, yz, zx)-এর জন্য স্টোকের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন।



চিত্র 15

সমাধান : এখানে ABC ত্রিভুজের তল S ; AB, BC এবং CA বাহুত্রয় দ্বারা গঠিত বক্র C ; যখন A, B, ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1,0,0), (0,1,0) ও (0,0,1)

স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\iint_S \text{curl}\,\mathbf{f}.\,\mathbf{n}ds = \int_C \mathbf{f}.d\mathbf{r} \quad ....(i)$$

বামপক্ষের সমাকলের মান নির্ণয়ের জন্য ধরা যাক $\phi = x+y+z-1.$

$\therefore \mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}.$ যেহেতু $\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$

এবং $\mathbf{n}.\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ যখন xy তলের উপর ABC ত্রিভুজের অর্থাৎ S এর লম্ব অভিক্ষেপ OAB ত্রিভুজের তল এবং এই OAB তলকে R দ্বারা চিহ্নিত করলে এই R-এর উপর একক লম্ব ভেক্টর **k**.

আবার $\text{curl}\,\mathbf{f} = -y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - x\mathbf{k},$

আবার $\text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n} = -(y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}).\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}(y+z+x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad [\because \text{S তলের সমীকরণ } x+y+z=1.]$$

$\therefore$ (i) এর বামপক্ষ $= \iint_S \text{curl}\,\mathbf{f}\,.\,\mathbf{n}\,ds = \iint_R \text{curl}\,\mathbf{f}\,.\,\mathbf{n}\,ds$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{dxdy}{|\mathbf{n}.\mathbf{k}|}$$

[$\because$ R তলটি $x = 0$, $y = 0$ এবং $x + y = 1$ সরলরেখাগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ]

$$= -\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} dx\,dy \quad \left[\because |\mathbf{n}.\mathbf{k}| = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= -\int_0^1 (1-x)dx = -\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

আবার (i)-এর ডানপক্ষ

$$= \int_c \mathbf{f}.d\mathbf{r} = \int_c (xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}).(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{AB+BC+CA} (xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz) \qquad \text{..... (ii)}$$

এখন AB সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x-1}{1-0} = \frac{y-0}{0-1} = \frac{z-0}{0-0} = t$ (ধরি)।

অতএব তার প্যারামেট্রিক সমীকরণ $x = t+1, y = -t, z = 0$ এবং $A(1,0,0)$ ও $B(0,1,0)$ বিন্দুদ্বয় $t = 0$ ও $t = -1$ এর জন্য নির্দেশিত। সুতরাং

$$\int_{AB} (xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz) = \int_0^{-1} (t+1)(-t)dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{-1} = -\frac{1}{6}.$$

আবার, BC সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x-0}{0-0} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{z-0}{1-0} = \theta$ (ধরি)।

অতএব ইহার প্যারামেট্রিক সমীকরণ $x = 0,\ y = 1-\theta, z = \theta$ এবং B ও C বিন্দুদ্বয় $\theta = 0$ 3$\theta = 1$ মানের জন্য নির্দেশিত।

সুতরাং $\int_{BC} (xydx + yzdy + zxdz) = \int_0^1 (1-\theta)\theta(-d\theta)$

$$= \left[-\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

অনুরূপে দেখান যায় যে, $\int_{CA} (xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz) = -\frac{1}{6}$

অতএব (i) এর ডানপক্ষ $= -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$.

$\therefore$ (i) এর বামপক্ষ $= -\frac{1}{2} =$ ডানপক্ষ

অতএব স্টোকের উপপাদ্যটি সত্য।

8. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ গোলকের xy তলের উপরের অর্দ্ধাংশের তলকে S, এবং ইহা xy-তলকে যে বৃত্তে ছেদ করে তাকে C দ্বারা চিহ্নিত করলে $\mathbf{f} = (2x-y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$ ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশনের জন্য স্টোকের উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করুন।

সমাধান : এখানে C এর সমীকরণ $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

$$\therefore \int_c \mathbf{f}.d\mathbf{r} = \int_c \left[(2x-y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}\right].\left[dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}\right]$$

$= \int_C (2x-y)dx$ [$\because$ C এর উপর $z = 0,\ dz = 0$]

$= \int_0^{2\pi} (2\cos\theta - \sin\theta)(-\sin\theta)d\theta$ [$\because$ C এর প্যারামেট্রিক সমীকরণ

$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ z = 0$]

$= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta - \sin 2\theta)d\theta = \pi - 0 = \pi$

$\iint_s \text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n}ds$ নির্ণেয়ের জন্য $\text{curl}\,\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = \mathbf{k}$

এবং $\phi = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ধরে $\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}$

$$= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$\therefore \text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n} = \mathbf{k}.(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = z$

আবার, $\iint_S \text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = \iint_S z\frac{dx\,dy}{\mathbf{n}.\mathbf{k}} = \iint_S dx\,dy \quad [\because \mathbf{n}.\mathbf{k} = z]$

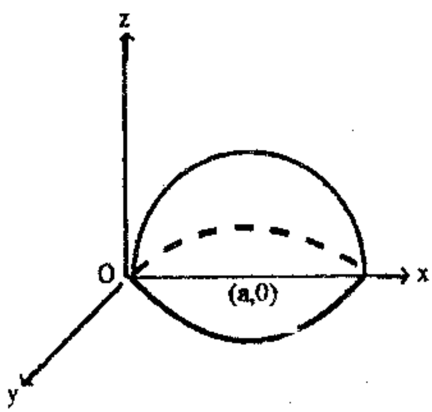
$$= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} dx\,dy = 2\times 2\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dx\,dy = 4\int_0^1 [y]_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= 4.\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt, \text{ যখন } x = \sin t$$

$$= 4.\frac{\pi}{4} = \pi$$

$\therefore \iint_S \text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n} = \int_C \mathbf{f}.d\mathbf{r}$ অর্থাৎ স্টোকের উপপাদ্যটি সত্য।

9 xy-তলের উপরের দিকে অবস্থিত $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + az = 0$ তলকে S এবং $z = 0$ তলদ্বারা S এর ছেদিত বক্রকে C ধরে $\mathbf{f} = (y^2 + z^2 - x^2, z^2 + x^2 - y^2, x^2 + y^2 - z^2)$ এর জন্য স্টোকের উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করুন



চিত্র 16

সমাধান : এখানে C বক্রের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0,\ z = 0$$

i.e. $(x-a)^2 + y^2 = a^2, z = 0$

যার প্যারামেট্রিক সমীকরণ

$x = a + a\cos\theta, y = a\sin\theta$

$0 \le \theta \le 2\pi$ এবং $ds = r\,d\theta\,dr$ যখন $0 \le r \le a$ এবং $\mathbf{n} = \mathbf{k}$.

$$\text{curl}\,\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial k} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2-x^2 & z^2+x^2-y^2 & x^2+y^2-z^2 \end{vmatrix} = 2[\mathbf{i}(y-z)+\mathbf{j}(z-x)+\mathbf{k}(x-y)]$$

$$\therefore \text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n} = 2(x-y) \quad [\because \mathbf{n}=\mathbf{k}]$$

$$\therefore \iint_S \text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = 2\int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} (a+a\cos\theta - a\sin\theta) r\,d\theta\,dr$$

$$= 2\int_0^a ar[\theta]_0^{2\pi} dr + 0 - 0 \qquad \left[\because \int_0^{2\pi}\cos\theta = 0 = \int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\right]$$

$$= 4\pi a\left[\frac{r^2}{r}\right]_0^a = 2\pi a^3 \qquad \text{.... (i)}$$

আবার $\int_C \mathbf{f}.d\mathbf{r} = \int_C \left[(y^2-x^2)dx + (x^2-y^2)dy\right] \quad [z=0 \text{ বসিয়ে}]$

$$= \int_C (x^2-y^2)(dy-dx) = \int_0^{2\pi} \left\{(a+a\cos\theta)^2 - a^2\sin^2\theta\right\}(a\cos\theta + a\sin\theta)\,d\theta$$

$$= a^3\int_0^{2\pi} (2\cos^2\theta + 2\cos\theta)(\cos\theta+\sin\theta)d\theta$$

$$= a^3\int_0^{2\pi} (2\cos^2\theta + 2\cos\theta)\cos\theta\,d\theta + a^3\int_0^{2\pi} (2\cos^2\theta+2\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= a^3.2\int_0^{\pi} (2\cos^2\theta + 2\cos\theta)\cos\theta\,d\theta + a^3.0 \qquad \therefore \int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx,$$

যখন $f(2a-x)=f(x)$

$$= 4a^3\int_0^{\pi} \cos^3 d\theta + 4a^3\int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta \qquad = 0 \text{ যখন } f(2a-x) = f(x)$$

$$= 4a^3.0 + 4a^3.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 8a^3\,\frac{\pi}{4} = 2\pi a^3 \qquad \text{... (ii)}$$

অতএব (i) ও (ii) থেকে বলা যায়

$\iint_S \text{curl}\,\mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds = \int_C \mathbf{f}.d\mathbf{r}$ অর্থাৎ স্টোকের উপপাদ্যটি সত্য।

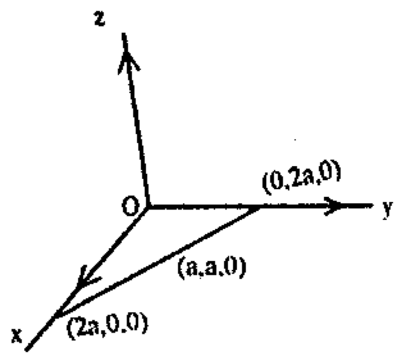
10. স্টোকের উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে

$$\int_C (ydx + zdy + xdz) = -2\sqrt{2}\pi a^2$$

যখন C বক্রটি $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0, x + y = 2a$ এবং এটি $(2a,0,0)$ বিন্দু থেকে প্রথমে xy তলের নীচের দিকে যাচ্ছে।

সমাধান : যেহেতু $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0$ গোলকের কেন্দ্র $(a, a, 0)$ এবং এই কেন্দ্রবিন্দুটি $x + y = 2a$ তলটিকেও সিদ্ধ ধরে অতএব C বক্রটি গোলকটির উপর অবস্থিত একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $(a,a,0)$ এবং যার তল $x + y = 2a$.

এই বৃত্ত C-এর ব্যাসার্দ্ধ = গোলকের ব্যাসার্দ্ধ $= \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, এবং C দ্বারা সীমাবদ্ধ তলটিকে S ধরলে তার উপর একক লম্ব ভেক্টর



চিত্র -17

$$n = \frac{\text{grad}(x+y)}{|\text{gard}(x+y)|} = \frac{i+j}{|i+j|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+j) \quad ....(i)$$

এখন

$$\int_C (ydx + zdy + xdz) = \int_C (yi + zj + xk).dr$$

$$= \iint_S [\text{curl}\,(yi + zj + xk)].n\,ds \quad ....(ii)$$

[স্টোকের উপপাদ্য অনুযায়ী]

কিন্তু $\text{curl}\,(yi + zj + xk) = -i - j - k$

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই

নির্ণেয় সমাকল $= \iint_S (-i - j - k).\frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)ds$

$$= \iint_S \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)ds \qquad [\because i.i = j.j = k.k = 1 \text{ এবং } i.j = k.i = j.k = 0]$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2}}\iint_S ds$$

$= -\sqrt{2} \times (a\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল)

$$= -\sqrt{2}\left[\pi\left(a\sqrt{2}\right)^2\right] = -2\sqrt{2}\pi a^2$$

9.5 সারাংশ

1. গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য : যদি $\mathbf{f}(x,y,z)$ ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশনটির v অঞ্চলে সন্তত অবকল সহগ থাকে এবং V অঞ্চলকে বেষ্টনকারী বদ্ধতল S -এর বহির্মুখী অভিলম্ব বরাবর একক ভেক্টর $\mathbf{n}$ হয় তবে,

$$\iint_S \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds = \iiint_V \text{div}\, \mathbf{f}\, dv$$

2. $$(\nabla\phi)_P = \lim_{\Delta V \to 0}\left\{\frac{\iint_{\Delta S} \phi \mathbf{n} ds}{\Delta V}\right\}, \quad (\nabla.\mathbf{f})_P = \lim_{\Delta V \to 0}\left\{\frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{f}.\mathbf{n} ds}{\Delta V}\right\}$$

এবং $(\nabla \times \mathbf{f})_P = \lim_{\Delta V \to 0}\left\{\frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{f} ds}{\Delta V}\right\}$, যখন P বিন্দুতে ΔS তল দ্বারা বেষ্টিত খুব ছোট একটি অঞ্চল ΔV.

3. সামতলিক ক্ষেত্রে গ্রীনের উপপাদ্য : নিজে নিজে ছেদিত হয় না এমন একটি সহজ বদ্ধ বক্র C এর দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল S -এ যদি x ও y এর দুটি সন্তত ফাংশন F(x, y) ও G (x, y) সংজ্ঞাত থাকে যাদের ঐ একই অঞ্চলে সন্তত অবকল সহগ আছে, তাহলে

$$\int_C (F dx + G dy) = \iint_S \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dx dy.$$

অবশ্য ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে C বরাবর গমন করলে S অঞ্চলটি যেন সর্বদা বাম দিকে থাকে।

4. স্টোকের উপপাদ্য যদি $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশনটির দুই দিক যুক্ত S তলে সন্তত অবকল সহগ থাকে এবং নিজে নিজে ছেদিত হয় না এমন একটি সহজ বদ্ধ বক্র দ্বারা যদি এই S তলটি বেষ্টিত থাকে তবে

$$\iint_S \text{curl}\, \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

এখানে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে C বরাবর গমন করলে S অঞ্চলটি যেন সর্বদা বাম দিকে থাকে এবং ডান হাত দিয়ে একটি স্ক্রুকে একই দিকে ঘোরালে তার গতির দিকে S এর যে কোন স্থানে একক ভেক্টর **n** দ্বারা নির্দেশিত।

9.6 প্রশ্নাবলী

A

1. যে কোনো বদ্ধতল S দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল V হলে প্রমাণ করুন যে,

i) $\iint_S \mathbf{r}.\mathbf{n}ds = 3V$

ii) $\iiint_V \text{div}\mathbf{n}dv = S$

iii) $\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{f}).\mathbf{n}ds = 0$

iv) $\iint_S (\nabla\phi \times \nabla\psi).\mathbf{n}ds = 0$

v) $\iint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3}.\mathbf{n}ds = \iiint_V \frac{1}{r^2}dv$

[সঙ্কেত : গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য ব্যবহার করুন।]

2. যদি V অঞ্চলে ϕ ফাংশনটি হারমোনিক হয় এবং $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ হয় তবে দেখান যে V অঞ্চলে ϕ একটি ধ্রুবক ফাংশন। [সংকেত : উদাহরণ A(9) কাজে লাগান]

3. যদি $\mathbf{f} = \nabla\phi$ এবং $\nabla^2\phi = 0$ তবে দেখান যে,

$$\iiint_V \mathbf{f}^2 dv = \iint_S \phi\mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds$$

[সংকেত : ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী $\iint_S (\phi\mathbf{f}).\mathbf{n} = \iiint_V \text{div}(\phi\mathbf{f})dv$

$= \iiint_V (\phi\,\text{div}\,\mathbf{f} + \mathbf{f}.\nabla\phi)dv$, $\text{div}\,\mathbf{f} = \text{div}(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = 0$, $\mathbf{f}.\nabla\phi = \mathbf{f}.\mathbf{f} = \mathbf{f}^2$ ইত্যাদি।]

4. দেখান যে, $\iint_S (\mathbf{f}\times\nabla\phi).\mathbf{n}\,ds = \iiint_V (\nabla\phi).(\nabla\times\mathbf{f})dv$

5. গাউস ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সাহায্যে $\iint_S \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds$ এর মান নির্ণয় করুন যখন S তলটি $x=0, x=a, y=0, y=a, z=0, z=a$ তলগুলি দ্বারা বেষ্টিত ঘনক, $\mathbf{f}=(x^3-yz)\mathbf{i}-3x^2y\mathbf{j}+5z\mathbf{k}$ এবং S এর বাহিরের দিকে অভিলম্ব n

6. S তলটি $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$ তলগুলি দ্বারা বেষ্টিত ঘনক এবং $\mathbf{f}=(4xz, -y^2, yz)$ হলে গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করুন।

7. $x^2+y^2=4, z=0, z=1$ চোঙের তল S এবং $\mathbf{f}=x\mathbf{i}-y\mathbf{j}+(z^2-1)\mathbf{k}$ হলে $\iint \mathbf{f}.\mathbf{n}ds$ এর মান নির্ণয় করুন এবং ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করুন।

8. $\iint_S [x^2dydz+y^2dzdx+2z(xy-x-y)dxdy]$ এর মান নির্ণয় করুন যখন

$0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$ ঘনকের তল S দ্বারা সূচিত।

[সংকেত : প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left[\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(y^2)}{\partial y}+\frac{\partial\{2z(xy-x-y)\}}{\partial z}\right]dv$]

9. $x^2+y^2=9, z=0, z=4$ চোঙের তল S দ্বারা বেষ্টিত অঞ্চল V এবং $\mathbf{f}=(4x, -2y^2, z^2)$ হলে ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করুন।

10. যদি $\mathbf{f}=(x^2-y^2)\mathbf{i}+(5-2xy)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ হয় তবে ডাইভারজেন্স উপপাদ্য কাজে লাগিয়ে $\iint \mathbf{f}.\mathbf{n}ds$ এর মান নির্ণয় করুন। যখন $x^2+y^2+z^2=a^2$ গোলকের তল S দ্বারা সূচিত।

11. $\iint_S (\text{curl}\ \mathbf{f}).\mathbf{n}ds$ এর মান নির্ণয় করুন যখন xy তলের উপরের দিকে অবস্থিত $x^2+y^2+z^2=4$ গোলকের তলটি S এবং $\mathbf{f}=(z-y)\mathbf{i}+(z+x)\mathbf{j}-(x+y)\mathbf{k}$.

12. যদি S তলটি xy তলের উপরের দিকে অবস্থিত $x^2+y^2+z^2=1$ গোলক এবং $z=0$ তল দ্বারা গঠিত হয় তবে $\iint_S (y^2z^2\mathbf{i}+z^2x^2\mathbf{j}+x^2y^2\mathbf{k}).\mathbf{n}\, ds$ এর মান নির্ণয় করুন এবং ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন।

13. দেখান যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ এর তল S হলে

$$\iint_S (x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}).\mathbf{n}\, ds=0$$

[সংকেত : প্রদত্ত সমাকল

$$= \iiint_V \operatorname{div}(x^2 i + y^2 j + z^2 k)dv = \int_{z=-c}^{c} \int_{y=b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}} \int_{x=-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}} (2x+2y+2z)dxdydz$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

14. $x = 0, y = 0, z = 0$ এবং $x + y + z = 1$ অঞ্চলে $\mathbf{f} = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$ ভেক্টর ফাংশনের জন্য ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন।

B

1. স্টোকের উপপাদ্যের সাহায্যে $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds$ এর মান নির্ণয় করুন, যখন xy তলের উপরের দিকে $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ গোলকের তল S দ্বারা নির্দেশিত এবং $\mathbf{f} = (z-y)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} - (x+y)\mathbf{k}$.

2. স্টোকের উপপাদ্যের সাহায্যে $\int_C (2x \sin y\, dx + x^2 \cos y\, dy + z^2 dz)$ এর মান নির্ণয় করুন যখন C বক্রের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 1, z = 2$.

3. স্টোকের উপপাদ্য ব্যবহার করে $\int_C z^3 dx - \cos x dy + (y+z)dz$ এর মান নির্ণয় করুন, যখন C বক্রটি $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1, z = 1$ আয়তক্ষেত্রের সীমারেখা (boundary) ।

4. ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন $\mathbf{f} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$ এবং $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ আয়তক্ষেত্রের জন্য স্টোকের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন।

5. ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন $\mathbf{f} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$ এবং $x = \pm a, y = 0, y = b$ আয়তক্ষেত্রের জন্য স্টোকের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন।

6. $\iint_S (\nabla \times f).\mathbf{n}\, ds$-এর মান নির্ণয় করুন যখন S তলটি $z = 4 - (x^4 + y^4), z \ge 0$ এবং $\mathbf{f}(x^2 - y + 4, 3xy, 2xz + z^2)$.

7. অক্ষ তলগুলি $2x + y + 2z = 6$ তলকে প্রথম অষ্টমাংশে যে ত্রিভুজটি ছিন্ন করে তাকে S এবং এই ত্রিভুজের সীমারেখাকে C ধরে $\mathbf{f} = (x + 2y, -3z, x)$ ভেক্টর ফাংশনটির জন্য স্টোকের উপপাদ্যটি যাচাই করুন।

8. প্রমাণ করুন যে, $\iint \nabla \times \mathbf{f}.\mathbf{n}\, ds = -\frac{a^3}{2}$

যখন $\mathbf{f} = (xy + z^2, yz + 1, zx + 5)$ এবং $x = y = z = 0$, $x = y = z = a$ ঘনকের xy তলের উপরের তল S.

[**সংকেত** : xy তলে $x = 0, x = a, y = 0, y = a$ বর্গক্ষেত্রের সীমারেখাকে C ধরে স্টোকের উপপাদ্য ব্যবহার করা যেতে পারে।]

9. সমতলে $y = x$, $x^2 = y$ বক্রদুটির দ্বারা বদ্ধ বক্রটিকে C এবং C দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটিকে S ধরে

$$\int_C \left[\left(3xy - x^2\right)dx + (2xy - y^2)dy\right]$$

সমাকলটির ক্ষেত্রে গ্রীনের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন।

10. গ্রীনের উপপাদ্যের সাহায্যে $\int_C \left\{(x^2 - y\cos x)dx + (y^2 + x)dy\right\}$ সমাকলটির মান নির্ণয় করুন, যখন C বক্রটি xy সমতলে একটি আয়তক্ষেত্র যার কৌণিক বিন্দুগুলি $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(\pi,2)$, $(0,2)$.

11. x অক্ষের উপরের দিকে $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্তের অর্ধাংশ এবং x অক্ষ দ্বারা বদ্ধবক্রটিকে C ধরে $\int_C \left\{(2x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy\right\}$ এর মান নির্ণয় করুন।

[সংকেত : গ্রীনের উপপাদ্য অনুযায়ী নির্ণেয় সমাকল $= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 - y^2)\right]dxdy$

$$= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} (2x + 2y)dxdy = 2\int_{-1}^{1} \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx + 2\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)dx}{2}$$

$= 0 + 2\int_0^1 (1-x^2)dx$ [$\because \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ যখন $f(x)$ অযুগ্ম এবং $= 2\int_0^a f(x)dx$ যখন $f(x)$ যুগ্ম]

$= \frac{4}{3}$]

9.7 উত্তরমালা

(A) 5. $5a^3$ 7. 4π 8. $\frac{1}{2}$ 10. $\frac{4}{3}\pi a^3$ 11. -8π 12. $\frac{1}{12}\pi$

(B) 1. 8π 2. 0 3. 2 6. 4π 10. 2π 11. $\frac{4}{3}$.

একক 10 ☐ ভেক্টর ক্যালকুলাসের প্রয়োগ (Application of Vector Calculus)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

10.2 উদ্দেশ্য

10.3 বক্ররেখার জ্যামিতি

10.3.1 সমতলীয় বক্ররেখা

10.3.2 অসমতলীয় বক্ররেখার জ্যামিতি (বক্রতা ও মোচড়)

10.3.3 সেরে-ফ্রেনের সূত্র (Serret-Frenet formulae)

10.3.4 অস্কুলেটিং সমতলের সমীকরণ (Osculating plane)

10.4 কণার গতি (Kinematies of a particle)

10.4.1 সমতলে চলমান কণার মেরু স্থানাঙ্ক গতি ও ত্বরণ

10.5 নিউটনীয় গতি সমীকরণ (Newtonian equations of motion)

10.6 কেন্দ্রীয় বলাধীন গতি (Motion under central force)

10.7 ভেক্টর সমাকলের প্রয়োগ

10.7.1 বলকর্তৃক কৃতকার্য (Work done by a force)

10.7.2 অঘূর্ণক ভেক্টর (Irrotational vector)

10.7.3 ভেক্টর অপেক্ষকের কোন তল সাপেক্ষে উদ্গমন (Flux of a Vector across a surface)

10.7.4 সলেনয়েডীয় ভেক্টর (Solenoidal Vector)

10.8 সারাংশ

10.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

10.10 উত্তরমালা

10.1 প্রস্তাবনা

ভেক্টর ক্যালকুলাসের বিভিন্ন এককে ভেক্টরের অন্তরকলন ও সমাকল সম্বন্ধে আলোচনা হয়েছে। এই তত্ত্ব প্রয়োগ করে যে কোনো বক্ররেখার প্রতিটি বিন্দুতে তার স্পর্শক ভেক্টর, অভিলম্ব ভেক্টর, বক্রতা ব্যাসার্ধ প্রভৃতির সহজে আলোচনা করা যায়। গতিবিদ্যার কণার গতি, ত্বরণ, যেহেতু এগুলি ভেক্টর এবং সময়ের উপর নির্ভর করে, সেজন্য ভেক্টর ক্যালকুলাসের প্রয়োগ খুবই স্বাভাবিক ও বিষয়টিকে সহজে উপস্থাপিত করা যায়। নিউটনের

গতি সমীকরণ একটি ভেক্টর সমীকরণ হওয়ায় এখানেও ভেক্টর ক্যালকুলাসের প্রয়োগ করা হয়। আবার বলবিদ্যায় একটি বল কর্তৃক কার্যের পরিমাণ একটি সমাকল হিসাবে লেখা যায়। সমাকলীয় শর্তসাপেক্ষে কোনো ভেক্টরকে অঘূর্ণক (irrolational) বা সলেনয়ডীয় (solenoidal) ভেক্টর বলা যায়। এই জাতীয় কতগুলি প্রয়োগ এই এককে দেখানো হয়েছে। (এখানে ভেক্টরগুলিকে মোটা অক্ষরে অথবা ভেক্টর চিহ্ন → দিয়ে দেখান হয়েছে)

10.2 উদ্দেশ্য

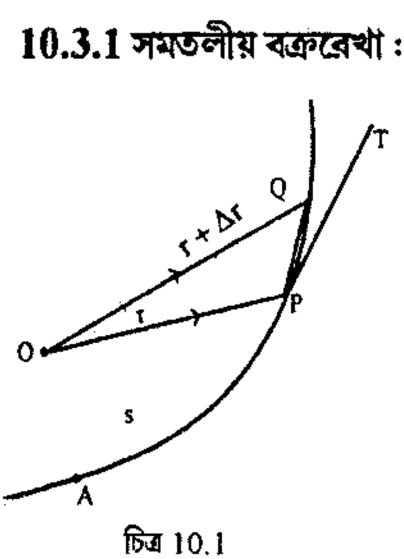
এই এককটি পাঠ করে আপনি

- একটি বক্ররেখার স্পর্শক ভেক্টর সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- একটি বক্ররেখার একটি বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধের পরিমাণ নির্ণয় করতে পারবেন।
- বিভিন্ন স্থানাঙ্কতে প্রকাশিত বস্তুকণার বেগ, ত্বরণ ইত্যাদির সূত্র জানবেন।
- কোনো বস্তুকণার গতিসমীকরণ দ্বারা কণার গতিপথের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় করতে পারবেন।
- একটি বস্তুকণার উপর প্রযুক্ত বল কর্তৃক কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করতে পারবেন।
- অঘূর্ণক ও সলেনয়ডীয় ভেক্টরের স্বরূপ বুঝতে পারবেন।

10.3 বক্ররেখার জ্যামিতি (Geometry of curves)

কোনো বক্ররেখার একটি বিন্দুতে ঐ রেখার স্পর্শককে ভেক্টর ভাবা যায়। আবার অভিলম্ব ভেক্টর সম্বন্ধে সঠিক ধারণা করা প্রয়োজন। এখানে 10.3.1 অনুচ্ছেদে একটি সমতলীয় বক্ররেখার আলোচনা করা হবে। 10.3.2 অনুচ্ছেদে সাধারণভাবে যে কোনো বক্ররেখার সাপেক্ষে আলোচনা করা হবে। সাধারণ ক্ষেত্রে স্পর্শক, প্রধান অভিলম্ব ও দ্বিতীয় অভিলম্ব এই তিনটি সম্বন্ধে বলা হবে। 10.3.3 অনুচ্ছেদে ঐ অভিলম্বদ্বয় ও স্পর্শক-এর পরিবর্তনের হার সম্বন্ধে সেরে-ফ্রেনের (Seret-Frenet) সূত্র আলোচনা করা হবে।

10.3.1 সমতলীয় বক্ররেখা : (Plane Curve) স্পর্শক ভেক্টর ও বক্রতা, বক্রতা ব্যাসার্ধ



চিত্র 10.1

একটি একতলীয় বক্ররেখার P একটি বিন্দু, যার অবস্থান ভেক্টর **r** (কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দু O সাপেক্ষে) এবং Q বক্ররেখার অপর একটি বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ বক্ররেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু A থেকে রেখার দৈর্ঘ্য s মাপা হলে এবং AP = s হলে $AQ = s + \Delta s$ ধরা যায়। তা হলে $\vec{PQ} = \Delta\mathbf{r}$ এবং চাপ $PQ = \Delta s$.

সংজ্ঞা : স্পর্শক ভেক্টর (tangent vector)

যদি $\lim_{Q\to P} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s}$ এর অস্তিত্ব থাকে, তবে এই লিমিট্‌কে **t** ভেক্টর দিয়ে সূচিত করা যায় এবং একে P বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক

(tangent Vector) বলা হয়। $\therefore \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ ....(1) সংজ্ঞা থেকে স্পষ্ট যে t একটি একক ভেক্টর (কারণ $\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} \to 1$

যখন $\Delta s \to 0$) এবং যেহেতু এই ভেক্টরটি $\frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta s}$ ভেক্টরের লিমিট অতএব তা P বিন্দুতে রেখাটির স্পর্শকের দিকে।

এইভাবে বোঝা যায় যে বক্ররেখার প্রতিটি বিন্দুতে একটি স্পর্শক ভেক্টর আছে। অতএব স্পর্শক t কে রেখাদৈর্ঘ্য s এই প্রচলের (Parameter) অপেক্ষক (ফাংশন) হিসাবে দেখা যায়।

t এর মান এক, কিন্তু t এর দিক বিভিন্ন বিন্দুতে বিভিন্ন হওয়ায়, s এর সঙ্গে t এর পরিবর্তন স্পর্শক ভেক্টরের বাঁকবার হার বুঝায়।

$$\lim_{Q \to P} \frac{\mathbf{t}_Q - \mathbf{t}_P}{PQ} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{t}(s+\Delta s) - \mathbf{t}(s)}{\Delta s}$$

$$= \frac{d\mathbf{t}}{ds} \text{.....} \quad (২)$$

$= \frac{d\mathbf{t}}{ds}$ ভেক্টর t ভেক্টরের উপর লম্ব।

($\because \mathbf{t}.\mathbf{t} = 1$ এই সমীকরণকে s এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাওয়া যায় $\mathbf{t}.\frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0$)

আমরা এখানে বক্ররেখাটিকে সমতলীয় নিয়েছি ; অতএব $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$, ঐ সমতলে অবস্থিত t এর লম্ব অর্থাৎ P বিন্দুতে $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ একটি ভেক্টর যা ঐ রেখার P বিন্দুতে অভিলম্বের দিকে অবস্থিত।

t ভেক্টর x অক্ষের সঙ্গে ψ কোণ করলে $\mathbf{t} = \cos\psi \mathbf{i} + \sin\psi \mathbf{j}$

অতএব $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = (-\sin\psi \mathbf{i} + \cos\psi \mathbf{j})\frac{d\psi}{ds}$

অতএব $\left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \frac{d\psi}{ds}$.

অতএব $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ ভেক্টরের মান থেকে স্পর্শক ভেক্টরের x অক্ষের সাথের কোণের পরিবর্তনের হার পাওয়া যায়।

অতএব n যদি P বিন্দুতে বক্ররেখার অভিলম্ব দিকে অঙ্কিত একক ভেক্টর হয়, তাহলে আমরা লিখতে পারি—

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}\ , \text{ ....} (3)$$

যেখানে k একটি ধনাত্মক স্কেলার এবং k বক্ররেখার P বিন্দুতে বক্রতার পরিমাপক। k কে P বিন্দুতে রেখাটির বক্রতা (**Curvature**) বলা হয়।

$\rho = \frac{1}{k}$ কে P বিন্দুতে বক্ররেখাটির বক্রতা ব্যাসার্ধ (Radius of Curvature) বলা হয়।

উদাহরণ 1 : সরলরেখার বক্রতা শূন্য।

সমাধান : সরলরেখার ক্ষেত্রে একক **t** ভেক্টরটি ধ্রুবক। কারণ **t** দিকটিও ধ্রুবক.

$$\therefore \frac{dt}{ds} = 0, \quad k = 0$$

উদাহরণ 2 : একটি বৃত্তের যে কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ভেক্টর, অভিলম্বক ভেক্টর, বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

a ব্যাসার্ধযুক্ত কোনো বৃত্তের কেন্দ্রকে মূলবিন্দু নিয়ে O_x, O_y, অক্ষ নিয়ে বৃত্তের যে কোনো বিন্দুর P অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = a\cos\theta\, \mathbf{i} + a\sin\theta\, \mathbf{j}$ যেখানে **i, j** **x, y** দিকে একক ভেক্টর।

যেহেতু

$$ds^2 = d\mathbf{r}.d\mathbf{r} = (-a\sin\theta\mathbf{i} + a\cos\theta\mathbf{j})d\theta$$
$$(-a\sin\theta\mathbf{i} + a\cos\theta\mathbf{j})d\theta$$
$$= a^2 d\theta^2$$
$$\therefore ds = a d\theta$$

$\therefore$ P এর স্পর্শক ভেক্টর

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{-\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j}}{a}$$
$$= -\frac{1}{a}\ \frac{\mathbf{r}}{a}$$
$$= k\mathbf{n}$$

যেখানে $k = \frac{1}{a}, \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{a}$

বক্রতা ব্যাসার্ধ = a

অতএব বৃত্তের বক্রতা ব্যাসার্ধ একটি ধ্রুবক এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

উদাহরণ 3 : উপবৃত্তের একটি বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

উপবৃত্তের প্রচল সমীকরণ $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ এই রূপে নিলে, এবং কেন্দ্র (0,0) কে মূলবিন্দু নিয়ে অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} = a\cos\theta\,\mathbf{i} + b\sin\theta\,\mathbf{j}$.

সমাধান : এখানে $f(x, y, z) = axi + byj + czk$ ধরলে

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}(ax) + \frac{\partial}{\partial y}(by) + \frac{\partial}{\partial z}(cz) = a + b + c$$

∴ গাউসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\iint_s (ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k})\ \mathbf{n}ds$$

$$= \iint_s \mathbf{f}.\mathbf{n}\,ds$$

$$= \iiint_v \operatorname{div} \mathbf{f}\, dv$$ [v হল s গোলক দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চল।]

$$= \iiint_v (a + b + c)dv = (a + b + c)\iiint_v dv$$

$$= (a + b + c) \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 1^3$$ [∵ 1 ব্যাসার্দ্ধ সম্পূর্ন গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3$]

$$= \frac{4}{3}\pi(a + b + c)$$

6. যদি xy-তলের উপরের দিকে $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ শঙ্কুর বক্রতল s এবং $\mathbf{f} = x^2z\mathbf{i} + (x^3 - y)\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k}$ হয় তবে $\iint_s (\nabla \times \mathbf{f}).\mathbf{n}\,ds$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত শঙ্কুর সমীকরনে $z = 0$ বসিয়ে পাই,

$$0 = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \text{ বা, } x^2 + y^2 = 4$$

অতএব প্রদত্ত শঙ্কুটি xy-তলকে $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ বৃত্তে ছেদ করেছে। যদি ঐ বৃত্তের তলকে R বলা হয় তবে ধরা যাক S এবং R দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের আয়তন V

অতএব গাউসের ডাইভারেজন্স উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\iint_{S+R} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}\,ds = \iiint_v \operatorname{div}(\nabla \times \mathbf{f})dv$$ $[\nabla \times \mathbf{f} = \operatorname{curl} \mathbf{f}]$

$$= 0$$ $[\because \operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{f}) = 0]$

অতএব,

$$kn = \frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{2a\sqrt{t^2+1}}\frac{d}{dt}\left(\frac{ti+j}{\sqrt{t^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{t^3+1}}\frac{\sqrt{t^2+1}\,i + \frac{t(ti+j)}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}$$

$$= \frac{(t^3+1)i + t^2 i + tj}{2a(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{(2t^3+1)i + tj}{2a(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{(2t^2+1)i+tj}{\sqrt{(2t^2+1)^2+t^2}} \cdot \frac{\sqrt{(2t^2+1)^2+t^3}}{2a(t^2+1)^2}$$

অতএব, $$k = \frac{\sqrt{(2t^2+1)^2+t^2}}{2a(t^2+1)^2}$$

উদাহরণ 5 : $y = c\cosh\frac{x}{c}$ এই বক্ররেখার কোনো একটি বিন্দুতে স্পর্শক ভেক্টর ও অভিলম্ব ভেক্টর নির্ণয় করুন।

সংকেত : (0,0) থেকে অবস্থান ভেক্টর $r = xi + yj$ নিয়ে

$$ds^2 = dr.dr = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \sinh^2\frac{x}{c}dx^2 = \cosh^2\frac{x}{c}dx^2$$

অতএব, $t = \frac{dr}{ds} = \frac{dxi + jdy}{ds} = \operatorname{sech}\frac{x}{c}i + j\tanh\frac{x}{c}$

$$kn = \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dx}\frac{dx}{ds} = \operatorname{sech}\frac{x}{c}\left(-\operatorname{sech}\frac{x}{c}\tanh\frac{x}{c}.\frac{1}{c}i + \frac{j}{c}\operatorname{sech}^2\frac{x}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{c}\operatorname{sech}^2\frac{x}{c}\left(-\tanh\frac{x}{c}i + \operatorname{sech}\frac{x}{c}j\right)$$

$\therefore k = \frac{1}{c}\operatorname{sech}^2\frac{x}{c}$

উদাহরণ 6 : ভেক্টর পদ্ধতিতে বক্রতা নির্ণয় করুন যেখানে মেরু স্থানাঙ্কে বক্ররেখার সমীকরণ হল $r = \dfrac{\ell}{1 + e\cos\theta}$, ℓ, e ধ্রুবক।

সংকেত : ভেক্টর সমীকরণ হল

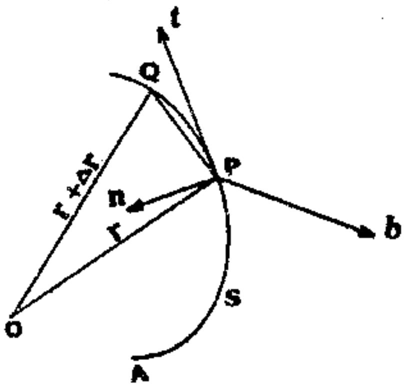
$$\mathbf{\bar{r}} = r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j}$$

10.3.2 অসমতলীয় বক্ররেখার জ্যামিতি (Curves in three dimensions)

10.3.1 অনুচ্ছেদে সমতলীয় রেখার স্পর্শক ইত্যাদি নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। এখন সাধারণভাবে যে কোনো বক্ররেখার স্পর্শক ও অভিলম্ব ইত্যাদি আলোচনা করা হবে। ধরা যাক O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু সাপেক্ষে বক্ররেখার ভেক্টর সমীকরণ

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(s)$$

যেখানে s হল বক্ররেখার কোনো বিন্দু A থেকে P অবধি রেখা বরাবর দৈর্ঘ্য। Q বিন্দুতে দৈর্ঘ্য $s + \Delta s$ হলে, P বিন্দুতে স্পর্শক ভেক্টর হল,



চিত্র 10.2

$$\mathbf{t} = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad ....(i)$$

এখন যেহেতু $\lim_{Q \to P} \dfrac{\text{জ্যা } PQ}{\text{চাপ } PQ} = 1$

t একটি একক ভেক্টর কিন্তু ধ্রুবক ভেক্টর নয়, আবার যেহেতু $\mathbf{t}.\mathbf{t} = 1$

$$\text{অতএব, } \mathbf{t}.\frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0$$

অতএব, $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ ভেক্টর **t** ভেক্টরের উপর লম্ব। আবার $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ ভেক্টরটি এমন একটি সমতলে আছে যা P এর দুটি সন্নিহিত বিন্দু Q ও R হলে QPR এই সমতলের সীমাস্থ অবস্থান তল, যখন $Q \to P, R \to P$.

QPR সমতলের সীমাস্থ অবস্থান যখন $Q \to P, R \to P$ এই সমতলকে অসকুলেটিং সমতল বলা হয়। অর্থাৎ P বিন্দুর স্পর্শক $\mathbf{t}_P$, Q বিন্দুর স্পর্শক $\mathbf{t}_Q$ ও R বিন্দুর স্পর্শক $\mathbf{t}_R$ হলে এবং $Q \to P, R \to P$ হলে, $(\mathbf{t}_P, \mathbf{t}_Q, \mathbf{t}_R)$ দ্বারা যে সীমাসমতল হয়, তাই অসকুলেটিং সমতল। (Osculating Plane)

$\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ এর সংজ্ঞা থেকে দেখা যাচ্ছে যে $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$, P বিন্দুতে অসকুলেটিং সমতলে আছে। ঐ অসকুলেটিং সমতলের উপর P বিন্দুতে $\mathbf{t}_p$ এর লম্বকে আমরা প্রধান বা মুখ্য অভিলম্ব (Principal normal) বলব। অতএব প্রধান অভিলম্ব দিকে একক ভেক্টর $\mathbf{n}$ নেওয়া হলে, আমরা পাই,

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n} \qquad \ldots (2)$$

যেখানে k হল $\left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|$ এর পরিমাপ (magnitute) এবং k কে বক্ররেখার P বিন্দুতে বক্রতা (curvature) বলা হয়। $\frac{1}{k}$ কে P বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ ρ বলা যায়।

$$\rho = \frac{1}{k} \qquad \ldots (3)$$

P বিন্দুতে যদি $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, এবং আর একটি একক ভেক্টর $\mathbf{b}$ এমনভাবে নেওয়া হয় যে $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ একটি দক্ষিণহস্তীয় তন্ত্র (right handed system) তৈরি করে, তাহলে

$$\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}\times\mathbf{b} = \mathbf{t}, \quad \mathbf{b}\times\mathbf{t} = \mathbf{n} \quad \ldots (4)$$

অতএব $\mathbf{b}$ এর দিক $\mathbf{t}$ এর লম্ব। এজন্য আমরা $\mathbf{b}$ ভেক্টরকে দ্বিতীয় অভিলম্ব ভেক্টর (binormal vector) বলব। এখন

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}\times\mathbf{n} + \mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}$$

$$= k\mathbf{n}\times\mathbf{n} + \mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}$$

$= \mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}$, সুতরাং $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ ভেক্টর, $\mathbf{t}$ এর সাথে লম্ব। আবার $\mathbf{b}$ একক ভেক্টর বলে, $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ হল $\mathbf{b}$ এর উপর লম্ব।

অতএব $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ ভেক্টর $\mathbf{n}$ এর সমান্তরাল।

আমরা $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n} \qquad \ldots (5)$

লিখি। (এখানে τ একটি স্কালার। ঋণাত্মক চিহ্ন নেওয়ার কারণ তাহলে হেলিক্স ইত্যাদি বক্ররেখার জন্য τ ধনাত্মক হবে)। τ কে আবার মোচড় বা torsion বলা হয়।

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{b}\times\mathbf{t}) = \frac{d\mathbf{b}}{ds}\times\mathbf{t} + \mathbf{b}\times\frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

$$= -\tau\mathbf{n}\times\mathbf{t} + \mathbf{b}\times k\mathbf{n}$$

অতএব $\frac{dn}{ds} = \tau b - kt$ .... (6)

উদাহরণ 1. $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta,\ z = c\theta$ এই বক্ররেখার একটি বিন্দু θ তে বক্রতা নির্ণয় করুন।

$\bar{r} = a\cos\theta\bar{i} + b\sin\theta\bar{j} + c\theta\vec{k}$

সংকেত : এখানে $ds^2 = \left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2\right)d\theta^2$

$$\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{d\theta}\bigg/\frac{ds}{d\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2}}\left(-a\sin\theta\bar{i} + b\cos\theta j + c\vec{k}\right)$$

$$\therefore k\bar{n} = \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{d\bar{t}}{d\theta}\bigg/\frac{ds}{d\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2}}\frac{d\bar{t}}{d\theta}$$

$$= -\frac{ia(b^2+c^2)\cos\theta + jb(a^2+c^2)\sin\theta + kc(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2)^2}$$

$$-\tau\bar{n} = \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\bar{t}\times\bar{n}\right) = \frac{d\bar{t}}{ds}\times\bar{n} + \bar{t}\times\frac{d\bar{n}}{ds}$$

$$= \bar{t}\times\frac{d\bar{n}}{ds},$$ এর থেকে মোচড় τ নির্ণয় করা যায়।

অতএব বক্রতা

$$k = \left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right| = \frac{\sqrt{a^2(b^2+c^2)^2\cos^2\theta + b^2(a^2+c^2)^2\sin^2\theta + c^2(a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2)^2}$$

উদাহরণ 2 : সমতলীয় বক্ররেখার মোচড় শূন্য

কারণ সমতলীয় বক্ররেখার t ও n ঐ তলেই অবস্থিত। তাই $t\times n$ ধ্রুবক। সুতরাং, b ধ্রুবক ভেক্টর।

$$\therefore \frac{db}{ds} = 0 = -\tau n, \Rightarrow \tau = 0$$

10.3.3 সেরে-ফ্রেনের সূত্র (Serret-Fernet formulae)

আমরা বক্ররেখার প্রতিবিন্দুতে তিনটি একক ভেক্টর **t, n, b** সম্বন্ধে পূর্বের অনুচ্ছেদে আলোচনা করেছি। সেখানে আমরা তাদের পরিবর্তনের হার কিরূপ হয়, তাও দেখেছি।

10.3.2 তে (2), (5), (6) এই তিনটি সূত্রকে একত্রে সেরে-ফ্রেনের সূত্র (Serret-Frenet formulae) বলা হয়। সেগুলি হল

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n} \qquad \dots (1.1)$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau\mathbf{b} - k\mathbf{t} \qquad \dots (1.2)$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n} \qquad \dots (1.3)$$

কোনো বক্ররেখার সমীকরণ জানা থাকলে এই তিনটি সূত্র থেকে তার বক্রতা ওমোচড় নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1: একটি বৃত্তীয় হেলিক্সের যে কোনো বিন্দুর বৃত্তীয় বেলনাকার স্থানাঙ্ক r, θ, z গুলি যদি এমন হয় যে $r = a,\ z = c\theta$ তা হলে যে কোনো বিন্দু θ তে বক্রটির বক্রতা ও মোচড় নির্ণয় করুন।

আয়তক্ষেত্রাকার কার্তিয় অক্ষ x, y, z হলে এবং O বিন্দু z অক্ষের উপর একটি বিন্দু হলে হেলিক্স বক্ররেখার যে কোনো বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর

$$\bar{r} = \vec{OP} = \bar{i}a\cos\theta + \bar{j}a\sin\theta + c\theta\bar{k}. \quad (x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = c\theta)$$

$$\therefore ds^2 = d\bar{r}.d\bar{r} = (-a\sin\theta d\theta\bar{i} + a\cos\theta d\theta\bar{j} + c\bar{k}d\theta).(-a\sin\theta d\theta\bar{i} + a\cos\theta d\theta\bar{j} + c\bar{k}d\theta)$$

$$= a^2\sin^2\theta d\theta^2 + a^2\cos^2\theta d\theta^2 + c^2 d\theta^2$$

$$= (a^2 + c^2)d\theta^2$$

অতএব $\bar{t} = \dfrac{d\bar{r}}{ds} = \dfrac{d\bar{r}}{d\theta}\Big/\dfrac{ds}{d\theta}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}.\left(-\bar{i}a\sin\theta + \bar{j}a\cos\theta + c\bar{k}\right)$$

$$\therefore \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{d\bar{t}}{d\theta}\Big/\frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}.\frac{(-\bar{i}a\cos\theta - \bar{j}a\sin\theta)}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$= \frac{a}{a^2+c^2}(-\bar{i}\cos\theta - \bar{j}\sin\theta)$$

$$= k\bar{n}$$

অতএব বক্রতা $k = \frac{a}{a^2 + c^2}$

এখন $t = -\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2+c^2}}\vec{i} + \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2+c^2}}\vec{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\vec{k}$

$$\vec{n} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}.$$

অতএব, $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \vec{i}\frac{c\sin\theta}{\sqrt{a^2+c^2}} - \vec{j}\frac{c\cos\theta}{\sqrt{a^2+c^2}} + \vec{k}\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$

আমরা জানি, $-\tau\vec{n} = \frac{d\vec{b}}{ds}$

$$\therefore \tau = -\frac{d\vec{b}}{ds}.\vec{n}$$

$$= +\left(\vec{i}\frac{c\cos\theta}{\sqrt{a^2+c^2}} + \vec{j}\frac{c\sin\theta}{\sqrt{a^2+c^2}}\right).\left(\frac{\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)$$

$$= \frac{c\cos^2\theta + c\sin^2\theta}{a^2+c^2} = \frac{c}{a^2+c^2}$$

উদাহরণ 2 : প্রমাণ করুন :

একটি বক্ররেখা $\vec{r} = \vec{r}(s)$ এর বক্রতা ও মোচড়

$$k = \left|\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|, \tau = -\frac{1}{k^2}\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right).\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

প্রমাণ : যেহেতু $\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$

আবার, $\vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{t} \times k\vec{n} = k\vec{b}$

অতএব, $\left|\vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds}\right| = k$ । এখন $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$

অতএব $k = \left|\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{t} \times k\vec{n} = k\vec{b}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\times\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right)=\frac{dk}{ds}\bar{b}+k\frac{d\bar{b}}{ds}=\frac{dk}{ds}\bar{b}-k\tau\bar{n}$$

অথবা, $\frac{d\bar{r}}{ds}\times\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}=-k\tau\bar{n}+\frac{dk}{ds}\bar{b}$

$$\therefore \frac{d\bar{r}}{ds}\times\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}.\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}=(-k\tau\bar{n}).\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}+\frac{dk}{ds}\bar{b}.\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$$

$$=-k^2\tau\bar{n}.\bar{n}+\frac{dk}{ds}\vec{b}.k\vec{n}. \quad (\because \vec{b}.\vec{n}=0)$$

$$\therefore \tau=-\frac{1}{k^2}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\times\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}.\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right).$$

উদাহরণ 3 : একটি বক্ররেখার ভেক্টর সমীকরণ $\bar{r}=\vec{r}(t)$, হলে যেখানে t একটি প্রচল, দেখান যে,

$$k=\left(\frac{\ddot{\bar{r}}\dot{s}-\dot{\bar{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^8}\right),$$

উদাহরণ : $k\bar{n}=\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{d\bar{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right)$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\bar{r}}}{\dot{s}}\right)\frac{dt}{ds} \; ; \quad \dot{\bar{r}}=\frac{d\bar{r}}{dt},\ \dot{s}=\frac{ds}{dt}$$

$$=\frac{\ddot{\bar{r}}\dot{s}-\dot{\bar{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^3}$$

অতএব $k=\left|\frac{\ddot{\bar{r}}\dot{s}-\dot{\bar{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^3}\right|$

10.3.4 অসকুলেটিং সমতলের সমীকরণ :

মনে করি, $\bar{r}=\bar{r}(s)$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ $P(\bar{r})$ বিন্দুতে অসকুলেটিং সমতলের যে কোনো বিন্দুর অবস্থান যদি $\bar{R}$ হয়, তবে $P(\bar{r})$ বিন্দুতে ঐ অসকুলেটিং সমতলের সমীকরণ হবে

$(\vec{R}-\bar{r}).\vec{b}=0$ (কারণ ঐ তলের উপর $\vec{b}$ লম্ব)

অর্থাৎ, $(\vec{R}-\bar{r}).(\vec{t}\times\vec{n})=0$

অর্থাৎ, $(\vec{R}-\bar{r}).\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\times\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right)=0.$

10.3.5

P বিন্দুতে $\vec{b}$ ও $\vec{n}$ দ্বারা গঠিত তলকে অভিলম্ব তল (Normal plane) বলে। অভিলম্ব তলের সমীকরণ

$$(\vec{R}-\vec{r}).\frac{d\vec{r}}{ds}=0$$

P বিন্দুতে, $\vec{t}$ ও $\vec{b}$ দ্বারা গঠিত তলকে রেক্টিফাইন তল (Rectifying plane) বলে। এই তলের সমীকরণ :

$$(\vec{R}-\vec{r}).\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=0$$

উদাহরণ 1. বক্ররেখার সমীকরণ $x=t,\ y=t^2,\ z=\frac{2}{3}t^3$ হলে $t=1$ এ অসকুলেটিং তল, অভিলম্ব তল এবং রেক্টিফাইং তলের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান :

$$\text{এখানে}\quad \vec{r}=t\vec{i}+t^2\vec{j}+\frac{2}{3}t^3\vec{k}$$

$$\therefore\ \dot{\vec{r}}=\vec{i}+2t\vec{j}+2t^2\vec{k}$$

$$\ddot{\vec{r}}=2\vec{j}+4t\vec{k}$$

$$\therefore t=1\text{-তে},\ \vec{r}=\vec{i}+\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\ddot{\vec{r}}=2\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\therefore \dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix}=4\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$$

$$(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -4 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=-12\vec{i}-6\vec{j}+12\vec{k}$$

অসকুলেটিং তলের সমীকরণ $(\vec{R}-\vec{r}).\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}=0$

বা $\left\{\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)-\left(\vec{i}+\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}\right)\right\}.\left(4\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}\right)=0$

বা $4(x-1)-4(y-1)+2\left(z-\frac{2}{3}\right)=0$

বা $2x-2y+z-\frac{2}{3}=0$

অভিলম্ব তলের সমীকরণ $(\vec{R}-\vec{r}).\vec{r} = 0$

বা $\left\{(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})-\left(\vec{i}+\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}\right)\right\}.(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})=0$

বা $(x-1)+2(y-1)+2\left(z-\frac{2}{3}\right)=0$

বা $x+2y+2z-\frac{13}{3}=0$

রেক্টিফাইং তলের সমীকরণ $(\vec{R}-\vec{r}).\left(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right)\times\dot{\vec{r}}=0$

বা $\left\{(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})-\left(\vec{i}+\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}\right)\right\}.(-12\vec{i}-6\vec{j}+12\vec{k})=0$

বা $-12(x-1)-6(y-1)+12\left(z-\frac{2}{3}\right)=0$

বা $6x+3y-6z-5=0$

উদাহরণ 2. যদি $\vec{r} = a\cos\vec{i}+a\sin\theta\vec{j}+c\theta\vec{k}$ হয়, তবে θ বিন্দুতে অসকুলেটিং তলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন :—

সমীকরণ হল, $(\vec{R}-\vec{r}).\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\times\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)=0$

অথবা, $(\vec{R}-\vec{r}).\left(\frac{d\vec{r}}{d\theta}\times\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds}\right)\right)=0$

অথবা, $(\vec{R}-\vec{r}).\frac{d\vec{r}}{d\theta}\times\left(\frac{\ddot{\vec{r}}\dot{s}-\dot{\vec{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^3}\right)=0$

$$\left[\because\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\vec{r}}{d\theta}\Big/\frac{ds}{d\theta}\right).\frac{d\theta}{ds}\right.$$

$$=\left(\frac{\frac{d^2\vec{r}}{d\theta^2}}{\frac{ds}{d\theta}}-\frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2}\frac{d^2s}{d\theta^2}\right).\frac{d\theta}{ds}$$

$$= \frac{\frac{d^2\vec{r}}{d\theta^2}}{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2} - \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}\frac{d^2s}{d\theta^2} = \frac{1}{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}\left(\ddot{\vec{r}}\dot{s} - \dot{\vec{r}}\ddot{s}\right) \Bigg]$$

অথবা, $\left(\vec{R}-\vec{r}\right).\left(\dot{\vec{r}}\times\left(\ddot{\vec{r}}\,\dot{s}-\dot{\vec{r}}\,\ddot{s}\right)\right)=0$

অথবা, $\left(\vec{R}-\vec{r}\right).\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}=0$

অথবা, $\left(\vec{R}-\vec{r}\right).\left(-a\sin\theta\vec{i}+a\cos\theta\vec{j}+c\vec{k}\right)\times\left(-a\cos\theta\vec{i}-a\sin\theta\vec{j}\right)=0$

$$\left(\vec{R}-\vec{r}\right).\left\{ac\sin\theta\vec{i}+\vec{j}(-ca\cos\theta)+\vec{k}(+a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)\right\}=0$$

বা, $\left(\vec{R}-\vec{r}\right).\left(c\sin\theta\vec{i}-c\cos\theta\vec{j}+a\vec{k}\right)=0$

বা, $\vec{R}.\left(c\sin\theta\vec{i}-c\cos\theta\vec{j}+a\vec{k}\right)-\left(a\cos\theta\vec{i}+a\sin\theta\vec{j}+c\theta\vec{k}\right).\left(c\sin\theta\vec{i}-c\cos\theta\vec{j}+a\vec{k}\right)=0$

বা, $\vec{R}.\left(c\sin\theta\vec{i}-c\cos\theta\vec{j}+a\vec{k}\right)-ac\sin\theta\cos\theta+ac\sin\theta\cos\theta-ac\theta=0$

বা, $\vec{R}.\left(c\sin\theta\vec{i}-c\cos\theta\vec{j}+a\vec{k}\right)=ac\theta$

উদাহরণ 3. অসকুলেটিং সমতল, বক্রতা ও টরসন নির্ণয় করতে হবে যেখানে বক্ররেখাটির সমীকরণ হল $x = a\cos2t, y = a\sin2t, z = 2a\sin t.$

সংকেত :

এখানে মূলবিন্দু হতে অঙ্কিত P (t) এর অবস্থান ভেক্টর

$$\vec{r} = (a\cos2t,\ a\sin2t,\ 2a\sin t)$$

অতএব, $d\vec{r} = (-2a\sin2t\,dt,\ 2a\cos2t\,dt,\ 2a\cos t\,dt)$

$$\therefore ds^2 = d\vec{r}.d\vec{r} = \left(4a^2+4a^2\cos^2 t\right)dt^2$$

$$= 4a^2(1+\cos^2 t)dt^2$$

$$\therefore ds = 2a\sqrt{1+\cos^2 t}\ dt$$

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \left(\frac{-2a\sin2t}{2a\sqrt{1+\cos^2 t}}, \frac{2a\cos2t}{2a\sqrt{1+\cos^2 t}}, \frac{2a\cos t}{2a\sqrt{1+\cos^2 t}}\right)$$

$$= \left(-\frac{\sin2t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \frac{\cos2t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\ \frac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\right)$$

$k = \left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right| = \left|\frac{d\bar{t}}{dt}\right| \left|\frac{dt}{ds}\right|$, এরপর নিজে করুন।

উদাহরণ 4. একটি বক্ররেখার প্রতিটি বিন্দুতে স্পর্শক একটি নির্দিষ্ট দিকের সাথে সর্বদা একটি ধ্রুবক কোণ α কোণে নত থাকলে, দেখাতে হবে যে,

$$\frac{1}{\tau} = \pm\frac{1}{k}\tan\alpha$$

নির্দিষ্ট দিকটিকে z অক্ষ ধরে পাই যে, স্পর্শক ভেক্টর

$$\bar{t} = (\sin\alpha\cos\theta, \sin\alpha\sin\theta, \cos\alpha) = \frac{d\bar{r}}{ds}$$

(যেখানে একক স্পর্শকের x-y তলে লম্ব অভিক্ষেপ x-অক্ষের সাথে θ কোণ করেছে)

অতএব, $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\right)\frac{d\theta}{ds}$

$$= (-\sin\alpha\sin\theta,\ \sin\alpha\cos\theta,\ 0)\frac{d\theta}{ds} = k\bar{n}$$

$$\left|\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right| = |k\bar{n}| = k$$

$$\therefore \sin^2\alpha\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = k^2$$

অথবা, $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = k^2\operatorname{cosec}^2\alpha.$

or, $\frac{ds}{d\theta} = \pm\frac{\sin\alpha}{k}$

$$\bar{b} = \bar{t}\times\bar{n}$$

$$= (\sin\alpha\cos\theta, \sin\alpha\sin\theta, \cos\alpha)\times\frac{1}{k}(-\sin\alpha\sin\theta, \sin\alpha\cos\theta, 0)\frac{d\theta}{ds}$$

$$= \pm(\sin\alpha\cos\theta,\ \sin\alpha\sin\theta,\ \cos\alpha)\times(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$= \pm\left[-\cos\alpha\cos\theta, -\cos\alpha\sin\theta, \sin\alpha\cos^2\theta + \sin\alpha\sin^2\theta\right]$$

$$= \pm[-\cos\alpha\cos\theta,\ -\cos\alpha\sin\theta,\ \sin\alpha]$$

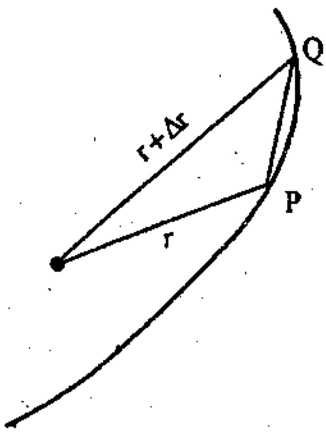
$$\therefore \tau\bar{n} = -\frac{d\bar{b}}{ds} = -\frac{d\bar{b}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \pm[+\cos\alpha\sin\theta, -\cos\alpha\cos\theta, 0]\frac{d\theta}{ds}$$

$$\therefore \tau^2 = \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\cos^2\alpha = k^2\cot^2\alpha$$

$$\therefore \frac{1}{\tau} = \pm\frac{1}{k}\tan\alpha$$

10.4 কণার গতি (Kinematics of a particle)

একটি কণার অবস্থান যে কোনো সময় t তে আমরা একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দু O-এর সাপেক্ষে স্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$ দ্বারা চিহ্নিত করিতে পারি। সময়ের সঙ্গে $\mathbf{r}$-এর অপেক্ষকতা (অধীনতা) বুঝাতে $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ লিখি। অতএব $\mathbf{r}$ ভেক্টর একটি স্কেলার t এর অপেক্ষক। এখন $t + \Delta t$ সময়ে কণাটির অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ দ্বারা চিহ্নিত করলে, Δt সময়ে কণাটির সরণ $= \Delta\mathbf{r}$। অতএব P বিন্দুতে কণার



চিত্র 10.3.

গতিবেগ (velocity) $= \lim\limits_{\substack{\Delta t \to 0 \\ Q \to P}} \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

স্বাভাবিকভাবে কণার গতিপথের P বিন্দুতে স্পর্শক দিকে গতিবেগ ভেক্টর $\mathbf{v}$ এবং $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ .... (i)

P বিন্দুতে কণার ত্বরণ (acceleration)

$\mathbf{v}$ ভেক্টরের সময়ের সাথে পরিবর্তনের হার, অর্থাৎ $\mathbf{f}$ যদি ত্বরণ ভেক্টর হয় তবে,

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta b \to 0} \frac{\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v} - \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad \text{(ii)}$$

s যদি কণার গতিপথের দৈর্ঘ্য (t সময় পর্যন্ত অতিক্রান্ত) হয়, তবে যেহেতু $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds} =$ একক স্পর্শক ভেক্টর,

$\therefore$ (i) থেকে, P বিন্দুতে স্পর্শক ভেক্টর $\mathbf{e}$ লিখলে

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{e}\frac{ds}{dt} = \mathbf{e}v \quad \text{.... (iii)} \quad \left(\text{এখানে } v \text{ হল } |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}\right)$$

$$\therefore \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\mathbf{v}}{ds} \qquad \text{... (iv)}$$

P বিন্দুতে প্রধান অভিলম্ব দিকে একক ভেক্টর $\mathbf{n}$ হলে $k\mathbf{n} = \dfrac{d\mathbf{e}}{ds}$, যেখানে k বক্রতা, (সেরে-ফ্রেনের সূত্র থেকে)

$$\text{এখন } \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}v)$$

$$= \mathbf{e}\frac{dv}{dt} + v\frac{d\mathbf{e}}{dt}$$

$$= \mathbf{e}\frac{dv}{dt} + v\frac{d\mathbf{e}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

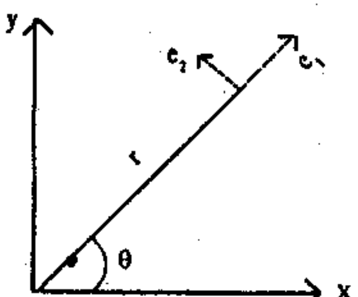
$$= \mathbf{e}\frac{dv}{dt} + v^2 k\, \mathbf{n} \qquad .... (v)$$

অতএব ত্বরণ ভেক্টরের একটি অংশ স্পর্শক দিকে $\frac{dv}{dt}$ এবং অপরটি প্রধান অভিলম্ব দিকে v^2k বা $\frac{v^2}{\rho}$ যেখানে ρ = বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ।

10.4.1 সমতলে চলমান কণার মেরু স্থানাঙ্ক (r, θ) -র মাধ্যমে গতিবেগ ও ত্বরণ ভেক্টর।

চিত্র অনুসারে $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ দুটি একক ভেক্টর যথাক্রমে r এর বৃদ্ধি দিকে ও θ এর বৃদ্ধি দিকে।

কণার স্থান ভেক্টর $= \mathbf{r} = r\mathbf{e}_1$



চিত্র 10.4

x ও y দিকে বিশ্লেষিতাংশ নিয়ে পাই

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta$$

$$\mathbf{e}_2 = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta \quad .... (i)$$

এখানে r ও θ , সময়ের সাথে পরিবর্তিত হচ্ছে $\frac{dr}{dt}(=\dot{r})$ ও $\frac{d\theta}{dt}(=\dot{\theta})$ তাদের সময় ডেরিভেটিভ। (i) থেকে t এর সাপেক্ষে অবকল নিয়ে পাই ($\vec{i}$ ও $\vec{j}$ নির্দিষ্ট দিকে একক ভেক্টর হওয়ায় $\frac{di}{dt} = \frac{dj}{dt} = 0$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} &= -\mathbf{i}\sin\theta\,\theta + \mathbf{j}\cos\theta\,\theta \\ &= \mathbf{e}_2\theta \\ \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} &= -\mathbf{i}\cos\theta\,\dot{\theta} - \mathbf{j}\sin\theta\,\dot{\theta} \\ &= -\mathbf{e}_1\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \qquad .... (ii)$$

আমরা জানি গতিবেগ $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_1)$$

$$= \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_1 + r\frac{d\mathbf{e}_1}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_1 + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_2 \text{ (ii) থেকে } ... (iii)$$

আবার ত্বরণ **f** ,

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\mathbf{e}_1 + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_2\right)$$

$$= \ddot{r}\,\mathbf{e}_1 + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + \frac{d}{dt}\left(r\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_2 + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} \qquad \text{... (ii) বসিয়ে}$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{d}{dt}\left(r\dot{\theta}\right) + \dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_2 \qquad \text{... (iii)}$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_1 + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{e}_2 \qquad \text{... (iv)}$$

অতএব (iii) ও (iv) থেকে দেখা যাচ্ছে যে গতিবেগ ভেক্টর v এর ব্যাসার্দ্ধের দিকে অর্থাৎ r এর দিকে বিশ্লেষিতাংশ $\frac{dr}{dt}$ এবং প্রতিব্যাসার্দ্ধের দিকে (অর্থাৎ θ-এর বৃদ্ধির দিকে) বিশ্লেষিতাংশ $r\frac{d\theta}{dt}$। ত্বরণ ভেক্টরের ব্যাসার্দ্ধ ও প্রতি ব্যাসার্দ্ধের দিকে বিশ্লেষিতাংশ $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ ও $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2 d\theta}{dt}\right)$

10.5 নিউটনের গতি সমীকরণ

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে একটি বস্তুর উপর ক্রিয়াকারী বল ঐ বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হারের সাথে সমানুপাতী। অতএব বস্তুকণার উপর ক্রিয়ারত বল ভেক্টর ও ভরবেগের পরিবর্তনের হার একই দিকে থাকবে। বলের একক এমনভাবে নেওয়া হয় যে বল ও ভরবেগের পরিবর্তনের হার সমান। এইভাবে **v** গতিবেগ ভেক্টর, **F** বল ভেক্টর হলে এবং m বস্তুটির ভর হলে, আমরা পাই,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \qquad \text{.... (i)}$$

যেখানে mv হল কণাটির ভরবেগ ভেক্টর। যদি ভর অপরিবর্তিত থাকে তবে (i) থেকে

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{f} \qquad \text{.... (ii)}$$

যেখানে $\mathbf{f}$ = ত্বরণ = $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$

(ii) হল নিউটনের গতিসূত্রানুযায়ী, বস্তুকণার গতি সমীকরণ, (ii) এর সমাধান দ্বারা বস্তুকণাটির গতি ও অবস্থান যে কোনো সময়ে পাওয়া যায়। এর জন্য প্রাথমিক অবস্থান ও গতি জানা প্রয়োজন

(ii) থেকে $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ লিখিলে, আমরা পাই,

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad \text{.... (iii)}$$

একটি বস্তুকণা **F** বলাধীন একটি সমতলে চললে মেরুস্থানাঙ্ক r, θ ব্যবহার করে নিউটনের গতিসূত্র অনুযায়ী

$$m\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_1 + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_2\right]$$

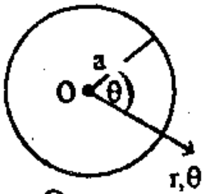
$$= \mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2$$

যেখানে F_1, F_2 হল F বলের ব্যাসার্ধ ও প্রতি ব্যাসার্ধ দিকে বিশ্লেষিতাংশ। স্কালার সমীকরণ দুটি হল

$$m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) = F_1$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = F_2,$$

উদাহরণ : একটি বস্তুকণার ভর m এবং বস্তুটি একটি বৃত্তাকার পথে সুষমভাবে চলছে। বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বলটি কিরূপ।



চিত্র 10.5

ধরা যাক বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্দ্ধ a। অতএব কেন্দ্র সাপেক্ষে মেরুস্থানাঙ্ক r, θ ব্যবহার করলে

$$r = a$$

এবং $\theta = \omega t$, যেখানে বস্তুকণাটির t সময়ে ωt কোণ ঘুরেছে। অর্থাৎ প্রতি একক সময়ে বস্তুকণাটি বৃত্তপথের কেন্দ্রে ω কোণ করে।

আমরা দেখেছি যে, r এর দিকে ত্বরণ $= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

এবং θ এর দিকে ত্বরণ $= f = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$

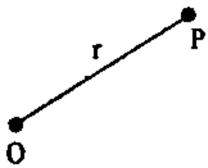
যেহেতু বর্তমান সমস্যায় $\dot{\theta} = \omega =$ ধ্রুবক দেওয়া আছে।

এবং $r = a$ সর্বদা, অতএব বস্তুকণার ত্বরণের যে দুটি অংশ তারা ব্যাসার্ধদিকে $-a\dot{\theta}^2$, এবং প্রতি ব্যাসার্ধ দিকে 0। অতএব কণাটির ভর m হলে নিউটনের সূত্র অনুযায়ী ব্যাসার্ধদিকে $-ma\omega^2$ বল অর্থাৎ, বস্তুটির উপর কেন্দ্রাভিমুখী $ma\omega^2$ এই বল ক্রিয়া করলে তবেই বস্তুকণাটি ঐ বৃত্তপথে সুষম বেগে চলবে।

10.6 কেন্দ্রীয় বলাধীন গতি

ধরা যাক একটি বস্তুকণার উপর সর্বদা এমন একটি বল ক্রিয়া করে যা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (যাকে বলের কেন্দ্র বলা হবে) O ও কণাটির অবস্থান সংযোজক রেখা বরাবর এবং বলটির পরিমাপ O থেকে বস্তুটির দূরত্ব r-এর উপর নির্ভর করে। বস্তুটির অবস্থান P হলে, বলটি O থেকে P এর দিকে অথবা P থেকে O এর দিকে হতে পারে। (অর্থাৎ বলটি বিকর্ষক (repulsive) বা আকর্ষক (attractive) হতে পারে। এই ধরনের বলকে কেন্দ্রীয় বলে।

অতএব কেন্দ্রীয় বলাধীন কোনো বস্তুকণা m ভরযুক্ত হলে বলটি $\phi(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$



চিত্র 10.6

যেখানে $\phi(r)$ ধনাত্মক হলে বলটি বিকর্ষক আর $\phi(r)$ ঋণাত্মক হলে বলটি আকর্ষক।

যেখানে $\mathbf{r}$ হল বস্তুকণার O সাপেক্ষে স্থান ভেক্টর।

অতএব নিউটন গতিসূত্র অনুযায়ী ঐ কণার গতি সমীকরণ হয়।

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \phi(r)\,\mathbf{r} \qquad \ldots (i)$$

এখন উভয়পক্ষকে $\mathbf{r}$ ভেক্টর দ্বারা ভেক্টর গুণ করে পাই,

$$\mathbf{r}\times m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{r}\times\phi(r)\mathbf{r}$$

কিন্তু $\mathbf{r}\times\mathbf{r}=0$ অতএব

$$\mathbf{r}\times m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=0 \qquad \dots \text{(ii)}$$

অতএব $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\times m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$

$$=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{r}\times m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$$=0+\mathbf{r}\times m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$= 0$ ... (ii) হইতে .... (iii)

অতএব (iii) সমাকলনের দ্বারা পাই।

$$\mathbf{r}\times m\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\text{ধ্রুবক}$$

অর্থাৎ, $\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}=$ ধ্রুবক = প্রাথমিক মান।

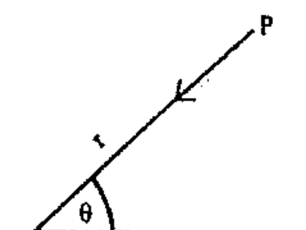
$$=\mathbf{r}_0\times\mathbf{V} \qquad \text{....(iv)}$$

যেখানে $\mathbf{r}_0$ বস্তুকণার প্রাথমিক অবস্থান ভেক্টর এবং $\mathbf{V}$ প্রাথমিক গতিবেগ।

অতএব কণাটির অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$ ও গতিবেগ $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. সর্বদা একটি নির্দিষ্ট সমতলে থাকবে। অতএব বস্তুকণাটির ভ্রমণপথ সমতলীয়।

উদাহরণ : একটি কণা একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দু অভিমুখে ব্যস্ত বর্গানুসারে আকৃষ্ট। কণাটির প্রাথমিক অবস্থান $\mathbf{r}_0$ এবং প্রাথমিক গতিবেগ $\mathbf{V}$ হলে কণাটির গতিবেগ নির্ণয় করুন।

ধরা যাক O দিকে বলটি এমন যে



চিত্র 10.7

$$\phi(r)=-\frac{m\mu}{r^2} \quad (\text{যেখানে } m=\text{ভর},\ \mu=\text{ধ্রুবক})$$

ফলে বলটি হইল $-\frac{m\mu}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$

মেরু স্থানাঙ্ক r,θ ব্যবহার করে নিউটনের গতিসূত্রানুসারে,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{m\mu}{r^3}\mathbf{r}$$

অথবা, $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$ ... (ii)

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = 2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$$= \frac{-2\mu}{r^3}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{r} \qquad \text{... (ii) হইতে}$$

$$= -\frac{\mu}{r^3}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})$$

$$= -\frac{\mu}{r^3}\frac{d}{dt}r^2$$

$$= \frac{-2\mu}{r^2}\frac{dt}{dt} = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right) \qquad \text{... (iii)}$$

(iii) সমাকলন করে

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{2\mu}{r} + C$$ যেখানে C = ধ্রুবক।

কিন্তু প্রাথমিক অবস্থায় $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0,\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}$

অতএব $V^2 = \frac{2\mu}{r_0} + C$,

অতএব $\frac{dr}{dt} = v$ লিখলে

$$v^2 = V^2 + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{r_0}$$

$$= \mu\left[\left(\frac{2}{r}\right) + \frac{V^2}{\mu} - \frac{2}{r_0}\right]$$

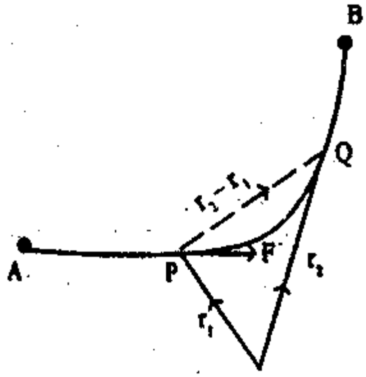
10.7 ভেক্টর সমাকলের প্রয়োগ (Application of Vector Integration)

10.7.1 বলকর্তৃক কৃতকার্য (Work done by a Force)

মনে করি একটি কণার উপর ক্রিয়াকারী একটি বল F যখন কণাটি একটি বিন্দু $r_1(x_1, y_1, z_1)$ থেকে $r_2(x_2, y_2, z_2)$ এই বিন্দুতে একটি বিশেষ পথে গমন করে, তখন বলকর্তৃক যে পরিমাণ কার্য (Work) সম্পন্ন হয়, সেটা আমরা একটি রেখা সমকল রূপে লিখতে পারি। যেমন—

যদি কণাটি P বিন্দু থেকে Q বিন্দুতে সামান্য সময় Δt -তে যায়, তাহলে ঐ সময়ে বল F কর্তৃক কৃতকার্যের পরিমাণ

$$= \mathbf{F}.(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{F}(\mathbf{r}).\Delta\mathbf{r}$$



চিত্র 10.8

অতএব কণাটি যদি A থেকে B বিন্দুতে গমন করে, তা হলে ঐ সময়ে F বল কর্তৃক কৃতকার্য

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i).\Delta\mathbf{r}_i \qquad \ldots (1)$$

যেখানে $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots \mathbf{r}_n$ হল $P_1, P_2, \ldots P_n$ বিন্দুগুলির স্থান ভেক্টর।

অতএব যদি $n \to \infty$ এবং $|\Delta r_i| \to 0$ প্রত্যেক i-এর জন্য,

তাহলে (1)-এর লিমিট হবে নিম্নের রেখা সমাকল।

$$W_{APB} = \int_{APB} \mathbf{F}(\mathbf{r}).d\mathbf{r} \qquad \ldots (2)$$

মন্তব্য : কণাটির উপর ক্রিয়াকারী বলের কার্য সাধারণভাবে নির্ভর করে সম্পূর্ণ পথ APB এর উপর।

উপপাদ্য 1. কোনো বলের ক্ষেত্রে যদি দেখা যায় যে কার্য পরিমাণ কেবল প্রাথমিক বিন্দু A ও শেষবিন্দু B-এর উপর নির্ভরশীল এবং A ও B এর মধ্যবর্তী পথের উপর যদি তা নির্ভর না করে সেক্ষেত্রে আমরা কার্য পরিমাণকে একটি কার্য-অপেক্ষকের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি। যেমন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু A হতে কোনো বিন্দু P (r) পর্যন্ত যাওয়ার জন্য কার্য পরিমাণ

$$W_P = \int_A^P \mathbf{F}.d\mathbf{r}.$$ যেখানে সমাকলটিকে যে কোনো পথে A থেকে P-তে নেওয়া যেতে পারে।

$P'(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ যদি P-এর নিকটস্থ বিন্দু হয়, তবে কণাটি A থেকে p′ পর্যন্ত যাওয়ার জন্য কার্য

$$W_{P'} = \int_A^{P'} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_A^P \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_P^{P'} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

$$\therefore W_{P'} - W_P = \int_P^{P'} \mathbf{F}.d\mathbf{r} \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}).\Delta\mathbf{r}, \text{ যেখানে } \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_P \qquad \ldots (3)$$

অতএব দেখা যাচ্ছে W_p একটি **r**-এর স্কেলার অপেক্ষক এবং grad $W_P = \mathbf{F}(\mathbf{r})$

এখন $W_P = -V_P$ লিখলে, grad $V_P = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$

এই V_P স্কেলার অপেক্ষককে F বল দ্বারা ক্রিয়াকারী কণার বিভব (Potential energy) শক্তি বলে।

মন্তব্য 3. যদি $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ হয় তবে

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}, \mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} \text{ হয়}$$

তবে $\int \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int (Xdx + Ydy + Zdz)$

উদাহরণ 1. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ এই বলটি একটি কণার উপর $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ অবস্থান থেকে $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ এই অবস্থান পর্যন্ত ক্রিয়া করে, বল কর্তৃক কার্যের পরিমাণ কত?

সমাধান : 2 কার্য $= 2x\int_{AB} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$

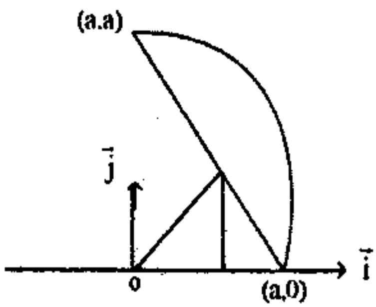
$$= 2x\int_{AB} (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}).(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k})$$

$$= 2x\int (xdx+ydy+zdz)$$

$$= \left[x^2+y^2+z^2\right]_A^B$$

$$= x_2^2+y_2^2+z_2^2-\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right) = \mathbf{r}_2.\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1.\mathbf{r}_1$$

অতএব দেখা যাচ্ছে এখানে কার্য শুধু r_1 ও r_2 ভেক্টর উপর নির্ভর করে।



চিত্র 10.9

উদাহরণ 2. $\int \vec{F}.d\vec{r}$, যেখানে $F = \frac{r^2\mathbf{i}}{a^2}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ দুটি পথের জন্য নির্ণয় করুন :

(1) $\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i}+a\sin t\,\mathbf{j}$ ($t=0$ থেকে $t=\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত)

(2) $\mathbf{r} = (1-t)\,a\mathbf{i}+ta\mathbf{j}$ $\quad 0 \le t \le 1.$

প্রথমক্ষেত্রে

$$\vec{F}.d\vec{r} = \left(\frac{a^2\mathbf{i}}{a^2}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\right).(-a\sin t\,\mathbf{i}+a\cos t\,\mathbf{j})dt \qquad \left(\because r^2=a^2\right)$$

$$= (-a\sin t+a\cos t)dt$$

অতএব প্রথমক্ষেত্রে $\int \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} (-a\sin t+a\cos t)dt$

$$= -a+a = 0$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে :

$$\vec{F}.d\vec{r} = \left\{((1-t)^2+t^2)\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\right\}.(-a\,dt\,\mathbf{i}+a\,dt\,\mathbf{j})$$

$$= \left[-a\left(1-2t+2t^2\right)+a\right]dt. \qquad \left(\because r^2 = \left[(1-t)^2+t^2\right]a^2\right)$$

$$\therefore \int \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^1 \left[-a(1-2t+2t^2)+a\right]dt$$

$$= a\int_0^1 (2t-2t^2)dt = a\left[1-\frac{2}{3}\right] = \frac{a}{3}$$

অতএব দুটি পথের জন্য কার্যপরিমাণ আলাদা।

সংজ্ঞা : সংরক্ষী ফিল্ড (Conservative field) : কোন ভেক্টর ফিল্ড $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ যদি এমন হয় যে $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{grad}\,\phi(\mathbf{r})$, যেখানে ϕ একটি সন্তত আংশিক অবকলযুক্ত স্কেলার, তাহলে ভেক্টর ফিল্ড $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ কে সংরক্ষী ফিল্ড বলা হয়।

10.7.2 সংজ্ঞা : অঘূর্ণক ফিল্ড (Irrolational field) যদি কোন ভেক্টর ফিল্ড $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ এমন হয় যে সর্বত্র cur $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$, তবে এরূপ ভেক্টর ফিল্ডকে অঘূর্ণক ফিল্ড বলা হয়।

উপপাদ্য 1 : $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ সংরক্ষী ফিল্ড হলে, Curl $\mathbf{F} = 0$ হবে।

প্রমাণ : $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{grad}\ \phi$, ϕ স্কেলার, অতএব curl $\mathbf{F}$ = curl grad $\phi = 0$.

অতএব $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ সংরক্ষী হলে অঘূর্ণক হবে।

উপপাদ্য 2 : $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ অঘূর্ণক ফিল্ড হলে, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ সংরক্ষী ফিল্ড ও হয়।

প্রমাণ : যেহেতু $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ অঘূর্ণক, অতএব curl $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$

অর্থাৎ $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ হলে,

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

আমরা একটি স্কেলার অপেক্ষক $\phi(x,y,z)$ নিলাম যাতে

$$\phi(x,y,z) = \int_{x_1}^{x} F_1(t,y_1,z_1)dt + \int_{y_1}^{y} F_2(x,t,z_1)dt + \int_{z_1}^{z} F_3(x,y,t)dt$$

যেখানে প্রথম সমাকল হল (x_1, y_1, z_1) বিন্দু থেকে (x, y_1, z_1) বিন্দু পর্যন্ত সরলরেখা বরাবর

দ্বিতীয় সমাকল হল (x, y_1, z_1) বিন্দু থেকে (x, y, z_1) বিন্দু পর্যন্ত সরলরেখা বরাবর

তৃতীয় সমাকল হল (x, y, z_1) থেকে (x, y, z) সরলরেখা বরাবর

অতএব

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3(x,y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2(x,y,z_1) + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,t)dt$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2(x,y,z_1) + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_2}{\partial t}(x,y,t)dt \qquad \left[\because \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}\right]$$

$$= F_2(x,y,z_1) + F_2(x,y,z) - F_2(x,y,z_1)$$

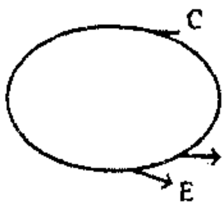
$$= F_2(x,y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=F_1(x,y_1,z_1)+\int_{y_1}^{y}\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,t,z_1)dt+\int_{z_1}^{z}\frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,t)dt$$

$$=F_1(x,y_1,z_1)+\int_{y_1}^{y}\frac{\partial F_1}{\partial t}(x,t,z_1)dt+\int_{z_1}^{z}\frac{\partial F_1}{\partial t}(x,y,t)dt$$

$$=F_1(x,y,z_1)+F_1(x,y,z_1)-F_1(x,y,z_1)+F(x,y,z)-F_1(x,y,z_1).$$

$$=F_1(x,y,z).$$



চিত্র 10.10

অতএব আমরা দেখতে পাচ্ছি $\mathbf{F}(r)=\text{grad}\,\phi$ অতএব $\mathbf{F}(r)$ একটি সংরক্ষী ভেক্টর।

উপপাদ্য 3 : **E** একটি অঘূর্ণক ভেক্টর ফিল্ড হলে যে কোনো বদ্ধ বক্ররেখার দিকে **E** এর সমাকল শূন্য হবে।

কারণ, $\oint_C \mathbf{E}.dt=\int_s \text{curl}\,\mathbf{E}.\mathbf{n}\,ds$ .... (i)

(স্টোকস উপপাদ্য)

যেখানে S হল একটি তল যার সীমারেখা হল C. (C বদ্ধরেখা দ্বারা S তলটি আবদ্ধ।)

কিন্তু **E** অঘূর্ণক ভেক্টর হওয়ায় $\mathbf{E}=\text{grad}\,\phi$, যেখানে ϕ একটি স্কেলার অপেক্ষক।

অতএব (i) থেকে

$$\oint_C \mathbf{E}.dl=\oint_s (\text{curl}\,\text{grad}\,\phi).\mathbf{n}.ds$$

$=0$ যেহেতু curl grad $\phi=0$.

10.7.3 একটি ভেক্টর অপেক্ষক F(x) এর একটি বদ্ধতল সাপেক্ষে উদ্‌গমন (Flux) বা প্রবাহ

একটি ত্রিমাত্রিক দেশে (space) একটি বদ্ধ তল S (যেমন একটি বদ্ধতল গোলক $x^2+y^2+z^2=a^2$) নেওয়া হল। ঐ দেশে একটি ভেক্টর অপেক্ষক **F** (r) সংজ্ঞাত হলে এবং ঐ তলের একটি বিন্দু P তে তলের বহিঃস্থ অভিলম্ব একক ভেক্টর **n** হলে, আমরা ঐ বদ্ধতলের সাপেক্ষে **F** (r) এর উদ্‌গমন (flux) বলতে বুঝব

$\int_S \mathbf{F}(r).\mathbf{n}\,ds$ ... (1) এই তল সমাকল

মন্তব্য : যদি **F**(r) কোন সন্তত (একক ভর ঘনত্ব যুক্ত) বস্তুপুঞ্জের r বিন্দুতে অবস্থিত বস্তুকণার গতি ভেক্টর হয় তাহলে **F**(r) **n** ds হল ds ক্ষেত্র দিকের গমনকারী বস্তুর আয়তন এবং $\int \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds$ বুঝাচ্ছে কি আয়তন বস্তু প্রতি একক সময়ে S তল মধ্য দিয়ে S এর বাইরে যাচ্ছে। গ্যাউস্ এর উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\int_s \mathbf{F}(r).\mathbf{n}ds=\int_V \text{div}\mathbf{F}dv \quad ...(2)$$

অতএব আমরা দেখলাম যে একটি বদ্ধ তলের সাপেক্ষে একটি ভেক্টর অপেক্ষকের উদ্‌গমন ঐ ভেক্টরের ডাই-ভারজেন্সের আয়তন সমাকলের সমান।

10.7.4 সলেনয়ডীয় ভেক্টর অপেক্ষক (Solenoidal Vector Function)

একটি অঞ্চলে যদি কোনো ভেক্টর অপেক্ষক এমন হয় যে ঐ অঞ্চলে যে কোনো বদ্ধ তলের সাপেক্ষে ঐ ভেক্টর অপেক্ষকের উদ্‌গমন (flux) সর্বদা শূন্য হয়, তা হলে এরূপ ভেক্টর অপেক্ষককে বলা হয় সলেনয়েডীয় ভেক্টর অপেক্ষক। গাণিতিকভাবে লেখা যায় যে F (r) যদি একটি অঞ্চলে এমন হয় যে কোনো বদ্ধতল S এর জন্য

$$\int_S \mathbf{F}(r).\mathbf{n}\, ds = 0$$

তাহলে $\mathbf{F}(r)$ একটি সলেনয়েডীয় ভেক্টর।

উপপাদ্য 1 : যদি $\mathbf{F}(r)$ একটি ভেক্টর অপেক্ষক ψ এর কার্ল (curl) এর সমান হয় অর্থাৎ $\mathbf{F}(r) = \text{curl}\,\psi = \text{curl}\,(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ হয়, যেখানে ψ_1, ψ_2, ψ_3 তিনটি অপেক্ষক তাহলে F (r) সলেনয়েডীয় ভেক্টর অপেক্ষক হবে। কারণ

$$\int_S \mathbf{F}(r).\mathbf{n}ds = \int_V \text{div}\mathbf{F}dv = \int_V \text{div}\,\text{curl}\,\psi dv\ v = 0 \quad \text{যেহেতু}$$

(গাউসের প্রতিজ্ঞা অনুসারে)

উপপাদ্য 2 : একটি ভেক্টর অপেক্ষককে দুটি ভেক্টরের যোগফল রূপে লেখা যায়, যার প্রথমটি একটি স্কালার অপেক্ষকের গ্রেডিয়েন্ট এবং অপরটি একটি ভেক্টর অপেক্ষকের কার্ল। অর্থাৎ

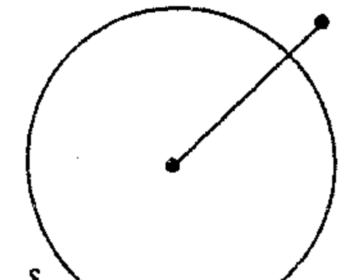
$\mathbf{F}(r)$ অপেক্ষককে

$$\mathbf{F}(r) = \text{grad}\,\phi + \text{curl}\,\psi$$

যেখানে ϕ একটি স্কালার অপেক্ষক এবং ψ একটি ভেক্টর অপেক্ষক। (এই উপপাদ্যটির প্রমাণ এখানে দেওয়া হল না)

উপপাদ্য 3. F (r) যদি একটি সলেনয়েডীয় ভেক্টর অপেক্ষক হয়, তা হলে div F প্রতিটি বিন্দুতে শূন্য হবে।

$$\int_S \mathbf{F}(r).\mathbf{n}\, ds = 0$$



অর্থাৎ $\int_V \text{div}\,\mathbf{F}\, dv = 0$ (গাউসের উপ: অনুযায়ী)

কিন্তু উপরের সমাকল যে কোন ক্ষুদ্র আয়তনের জন্য সত্য হওয়ায়, div F সন্তত হলে, div F প্রতিটি বিন্দুতে শূন্য হবে।

উদাহরণ 1 : যদি $\vec{v}(\vec{r}) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ একটি ভেক্টর অপেক্ষক হয়, এবং $|r| = a$ একটি গোলক তল S হয়। S এর সাপেক্ষে $\vec{v}$ এর উৎগমন (flux) নির্ণয় করুন।

এখানে S এর সমীকরণ হল

$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ এবং

$$n \text{ হল } \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{dz}\right)^2}}$$

$$\text{অতএব ফ্লাক্স} = \int_S \vec{v}.\vec{n}.ds = \int \frac{x^3+y^3+z^3}{a}ds$$

$$= a^2\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\sin^3\theta\cos^3\phi+\sin^3\theta\sin^3\phi+\cos^3\theta\right)a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

($x = a\sin\theta\cos\phi,\ y = a\sin\theta\sin\phi,\ z = a\cos\theta$ বসিয়ে)

$$= a^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^4\theta\cos^3\phi+\sin^4\theta\sin^3\phi+\cos^3\theta\sin\theta\right)d\theta\, d\phi$$

$$= 0+0+2\pi\frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{2}a^4$$

উদাহরণ 2 : যদি $\vec{v}(\vec{r}) = k(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = k\vec{r}$ হয়

তবে $x^2+y^2+z^2 = 1$ এই গোলক সাপেক্ষে $\vec{v}$ এর ফ্লাক্স নির্ণয় করুন। [উঃ $4\pi k$]

সংকেত : উদা. 1 এর মত করুন। এখানে $\vec{v}.\vec{n} = k$ উঃ $4\pi k$

10.8 সারাংশ

এই এককে ভেক্টর ক্যালকুলাস প্রয়োগ করে (1) একটি রেখার স্পর্শক, প্রধান অভিলম্ব ও দ্বিতীয় অভিলম্ব এদের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করা হয়েছে। এর ফলে বক্ররেখার প্রতি বিন্দুতে বক্রতাব্যাসার্ধ ও মোচড় এই দুটি বৈশিষ্ট্য নিরুপণ করা সম্ভব হচ্ছে। সমাকলের সাহায্যে একটি বস্তুকণার উপর প্রযুক্ত বল কর্তৃক কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করা হয়েছে। সংরক্ষী বল ভেক্টর, অঘূর্ণক ভেক্টর ও সলেনডীয় ভেক্টর হওয়ার শর্ত দেওয়া হয়েছে কোন বদ্ধ তলের সাপেক্ষে ভেক্টর অপেক্ষকদের উদ্‌গমন (flux) এর সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে।

10.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. বল $\vec{F} = 3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$ বল, একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল এবং কণাটির অবস্থান $A(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ থেকে $B(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k})$-তে গেলে বলকর্তৃক কৃতকার্য কত?

2. $\vec{F} = x^2\vec{i}+y^2\vec{j}$ একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল। কণাটি $x^2+y^2 = 4$ এই বৃত্তে একটি বিন্দু হতে যাত্রা করে ঐ বৃত্তপথে একই বিন্দুতে পুনরায় এলে বল $\vec{F}$ কি পরিমাণ কার্য করবে?

3. দেখান যে $\vec{F} = f_1(x)\vec{i} + f_2(y)\vec{j} + f_3(z)\vec{k}$

একটি অঘূর্ণক ভেক্টর।

4. $\vec{F} = f_1(y,z)\vec{i} + f_2(z,x)\vec{j} + f_3(x,y)\vec{k}$ হলে দেখান যে, $\vec{F}$ সলেনয়েডীয়।

5. যদি $\mathbf{F} = \nabla\phi$ হয়, যেখানে ϕ হল একটি স্কেলার অপেক্ষক যার আংশিক অবকলসমূহ সন্তত, তাহলে দেখান যে কোনো কণা যে কোনো বিন্দু $P_1(x_1, y_1, z_1)$ থেকে $P_2(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুতে যেতে $\mathbf{F}$ কর্তৃক কৃতকার্য, পথের উপর নির্ভর করে না।

6. যদি $\mathbf{F} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} + 3z^2x\mathbf{k}$ হয় তবে দেখান যে এটি একটি সংরক্ষী বলের ফিল্ড।

7. মান নির্ণয় করুন : $\int_S \vec{r}.\vec{n}.ds$ যেখানে s একটি বদ্ধতল

8. প্রমাণ করুন : $\int_v \text{grad}\,\phi\, dv = \int_s \phi\, \vec{n}\, ds$

9 যদি $x = -1, y = -1, z = -1, x = 1, y = 1, z = 1$, এই তল ছয়টি দ্বারা গঠিত একটি ঘনকের তল S হয় তা হলে $\int_S \vec{r}.\vec{n}\, ds$ নির্ণয় করুন।

10. যদি $\vec{A} = 5x\vec{i} + 10y\vec{j} + 30z\vec{k}$ একটি ভেক্টর ফিল্ড হয়, তা হলে S একটি বদ্ধতল হলে $\int_S \vec{A}.\vec{n}.ds$ নির্ণয় করুন।

10.10 উত্তরমালা

1. উত্তর 26

2. সংকেত : বৃত্তের একটি বিন্দু (2, 0) থেকে রওনা হয়ে কণাটি ঐ বিন্দুতে ফিরে এলে কার্যপরিমাণ

$$= \int_c \vec{F}.d\vec{r} \quad (\text{বৃত্তের সমীকরণ } x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta)$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} (4\cos^2\theta\, i + 4\sin^2\theta\vec{j}).(-2\sin\theta\vec{i} + 2\cos\theta\vec{j})d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos^2\theta\sin\theta + \sin^2\theta\cos\theta)d\theta$$

$$= 0 \cdot$$

3. উত্তর : $\phi = \int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy + \int f_3(z)dz$

হলে $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = f_1(x),\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = f_2(y),\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = f_2(z)$

অতএব, $\vec{F} = \text{grad}\,\phi$, অতএব $\vec{F}$ একটি অঘূর্ণক ভেক্টর

4. $\because \int_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds = \int_v \text{div}\,\mathbf{F}\, ds = 0$ অতএব $\vec{F}$ সলেনয়েডীয়।

5. সমাধান : কারণ কার্যপরিমাণ $= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)(\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz)$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right)$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi(P_2) - \phi(P_1)$$

সুতরাং কার্যপরিমাণ শুধুমাত্র P_2 ও P_1 এর অবস্থানের উপর নির্ভরশীল।

অতএব P_1 থেকে P_2 যে পথেই যাওয়া হোক না কেন, $\mathbf{F}$ কর্তৃক কার্য-পরিমাণ অপরিবর্তিত হবে।

6. সংকেত : $(2xy + z^3,\ x^2 + y^2,\ 3z^2x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x^2y + z^3x + \frac{1}{3}y^3\right)$

7. $\iint_s \vec{r}.\vec{n}ds$

$$= \iiint_v (\text{div}\,\vec{r})\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_v 3dx\,dy\,dz = 3v,\ v = s$$ তল দ্বারা বদ্ধ আয়তন।

8. যদি $\vec{c}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর (অর্থাৎ মান ও দিশা অপরিবর্তনীয় হয়, তবে $\phi\vec{c}$ এই ভেক্টরের সাপেক্ষে গাউস্ প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী।

$$\int_v \text{div}(\phi\vec{c})dv = \int_s \phi\vec{c}.\vec{n}\,ds$$

কিন্তু $\text{div}(\phi\vec{c}) = (\text{grad}\,\phi).\vec{c} + \phi\,\text{div}\,\vec{c} = (\text{grad}\,\phi).\vec{c}$

অতএব, $\int_v (\text{grad}\,\phi).\vec{c}\,dv = \int_s \vec{c}.\phi\vec{n}\,ds$

বা, $\vec{c}.\left[\int_v \text{grad}\,\phi\,dv - \int_s \phi\,\vec{n}\,ds\right] = 0$

কিন্তু $\vec{c}$ আমাদের স্বেচ্ছাধীন একটি ভেক্টর। অতএব $\int_v \text{grad}\,\phi\,dv = \int_v \phi\,\vec{n}\,ds$

9. উঃ 24

10. উঃ 45V, V = S দ্বারা বদ্ধ আয়তন।

NOTES