NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

ELECTIVE PHYSICS HONOURS

EPH 07

Electrostatics

BLOCKS
1 & 2

প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোন বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠউপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে—যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয় সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠউপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠউপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয় পাঠউপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তাঁর নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক — অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠউপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

তৃতীয় পুনর্মুদ্রণ ঃ ফেব্রুয়ারি, 2020

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় ঃ পদার্থবিদ্যা সাম্মানিক স্তর

পাঠক্রম ঃ পর্যায় ঃ EPH 07 : 01 & 02

	রচনা	সম্পাদনা
একক 1	অধ্যাপিকা নন্দিতা দত্ত	সুব্রত দত্ত
একক 2	ঐ	ঐ
একক 3	ঐ	ঐ
একক 4	ঐ	ঐ
একক 5	ড. প্রতীক কুমার চৌধুরী	ঐ
একক 6	ঐ	অধ্যক্ষ ড. প্রদীপকুমার ঘোষ
একক 7	ঐ	ঐ
একক 8	ঐ	ঐ

প্রজ্ঞাপন

এই পাঠ সংকলনের সমুদয় স্বত্ব নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের দ্বারা সংরক্ষিত। বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের লিখিত অনুমতি ছাড়া এর কোন অংশের পুনর্মুদ্রণ বা কোনভাবে উদ্ধৃতি সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ।

মোহন কুমার চট্টোপাধ্যায়
নিবন্ধক

নেতাজি সুভাষ
মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EPH 07
স্থির তড়িৎ

পর্যায়
1

স্থির তড়িৎ (1)

একক 1 ❐ তড়িৎ চুম্বকীয় রাশির একক ও মাত্রা 7–30

একক 2 ❐ তড়িৎ আধান, বল ও তড়িৎক্ষেত্র 31–65

একক 3 ❐ গাউসের সূত্র 66–101

একক 4 ❐ তড়িৎ বিভব 102–158

একক 5 ❐ ধারক 159–184

পর্যায়
2

একক 6 ❐ অন্তরক ও তার আণুবীক্ষণিক ধর্ম 185–204

একক 7 ❐ প্রতিবিম্ব পদ্ধতি 205–228

একক 8 ❐ লাপ্লাস সমীকরণ ও তার প্রয়োগ 229–256

একক 1 ☐ তড়িৎ-চুম্বকীয় রাশির একক ও মাত্রা

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

1.2 স্থির তড়িৎ একক (esu) এবং এই এককে তড়িৎ-চুম্বকীয় রাশির মাত্রা

1.3 তড়িৎচুম্বকীয় একক (emu) এবং এই এককে তড়িৎচুম্বকীয় রাশির মাত্রা

1.4 স্থির তড়িৎ একক (esu) এবং বিদ্যুৎচুম্বকীয় এককের (emu) তুলনা

1.5 ব্যবহারিক এবং আন্তর্জাতিক একক

1.6 MKSA একক এবং বিজ্ঞান সম্মত উপায়ে সুসঙ্গত MKSA একক (Rationalised MKSA System)

1.7 SI একক এবং এই এককে প্রকাশিত রাশির মাত্রা ও অন্যান্য পদ্ধতির এককের সঙ্গে তুলনা

1.8 সারাংশ

1.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1.10 উত্তরমালা

1.1 প্রস্তবনা

প্রাচীনকালে মানুষ যখন গাছের ফলমূল এবং বন্যজন্তু শিকার করে এক জায়গা থেকে অন্য জায়গায় দলবদ্ধ ভাবে ঘুরে বেড়াত তখন তাদের বস্তুর পরিমাপের কোন প্রথা জানা ছিল না বা প্রয়োজন ছিল না। সভ্যতার বিস্তারের সঙ্গে সঙ্গে পরিমাপের প্রয়োজন অনুভব করা গেল। সপ্তদশ এবং অষ্টাদশ শতাব্দীতে বিজ্ঞানের বিকাশের সঙ্গে বিজ্ঞানীরা পরিমাপের জন্য বিভিন্ন প্রকার এককের প্রবর্তনের প্রয়োজন অনুভব করলেন। তখন থেকে বিভিন্ন প্রকারের একক পদ্ধতির উদ্ভব। আপনারা নিশ্চয়ই CGS, FPS, MKS এককের কথা পড়েছেন?

বলবিদ্যায় তিনটি মৌলিক একক হচ্ছে দৈর্ঘ্য, ভর এবং সময়ের একক। এই তিনটি একককে সেন্টিমিটার (cm), গ্রাম (gm) এবং সেকেন্ড (s) বলায় যে পদ্ধতির প্রচলন হয় সেইটিই (absolute) CGS পদ্ধতি। CGS পদ্ধতির এককগুলির মান খুব ছোট হওয়ায় 1901 সালে Giorgi বৃহত্তর মানের এককের প্রস্তাব দেন। সেগুলি হল মিটার (m) কিলোগ্রাম (kg) এবং সেকেন্ড (s)। এই পদ্ধতিকে MKS পদ্ধতি বলা হয়।

পদার্থবিদ্যার অন্যান্য শাখা থেকে তড়িৎচুম্বকত্ব একটু পৃথক এই অর্থে যে, এই ক্ষেত্রে বিভিন্ন সময় বিভিন্ন বৈদ্যুতিক একক (electrical unit) ব্যবহারের ফলে অসুবিধার সৃষ্টি হয়। তড়িৎ ক্ষেত্রে এবং চৌম্বক ক্ষেত্রে ব্যবহৃত রাশিগুলিকে প্রথমেই ভর, দৈর্ঘ্য এবং সময়ের মৌলিক এককের ভিত্তিতে প্রকাশ করা অসুবিধাজনক। সে জন্য একটি চতুর্থ রাশির প্রয়োজন। প্রাথমিক অবস্থায় এই চতুর্থ রাশিটি দুটি ভিন্ন উপায়ে উপস্থিত করা হয়েছিল। সেই অনুসারে আমরা দুই প্রকার CGS একক পাই (i) স্থির তড়িৎ একক বা esu (e.g.s. electrostatic unit) এবং (ii) তড়িৎ চুম্বকীয় একক বা emu (c.g.s electromagnetic unit)। আমরা অতঃপর এই দুটি একককে esu এবং emu নামেই অভিহিত করব। esu -এ চতুর্থ রাশিটি হল বিদ্যুৎশীলতা বা পারমিটিভিটি (permittivity)। emu -এ চতুর্থ রাশিটি মাধ্যমের চুম্বকশীলতা বা পারমিয়েবিলিটি (permeability)।

এই দুইটি পদ্ধতিতে প্রধান মৌলিক একক তিনটি —ভর, দৈর্ঘ্য এবং সময়। সেইজন্য এই একক দুইটিকে (CGS esu এবং CGS emu) নিরপেক্ষ পদ্ধতির একক বলা হয়। বাস্তবে দেখা যায় যে, esu এবং emu পদ্ধতিতে যে রাশিগুলির সংজ্ঞা দেওয়া হয় তাদের মাত্রা সবসময় সুবিধাজনক হয় না। সেইজন্য একটি ব্যবহারিক এককের প্রয়োজন হয়। MKS পদ্ধতির এককগুলির সঙ্গে তড়িৎ প্রবাহের একক যুক্ত করে MKSA পদ্ধতির একক সৃষ্টি হয়। কিন্তু এই একক সুসংহত না হওয়ায় MKSA এককগুলিকে সুসংহত করা হয়। পরিশেষে আন্তর্জাতিক একক পদ্ধতি বা SI পদ্ধতির কথা বলা প্রয়োজন কেননা বর্তমান এই একক পদ্ধতিই বহুল প্রচারিত।

উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে আপনারা

- তড়িৎচুম্বকীয় রাশিগুলি প্রকাশের জন্য কী কী একক ব্যবহৃত হয় জানতে পারবেন।
- স্থির তড়িৎ একক (esu) কাকে বলে জানতে পারবেন এবং এই এককে প্রকাশিত তড়িৎচুম্বকীয় রাশিগুলির মাত্রা নির্ণয় করতে পারবেন।
- তড়িৎচুম্বকীয় একক (emu) কাকে বলে জানতে পারবেন এবং এই এককে প্রকাশিত তড়িৎচুম্বকীয় রাশিগুলির মাত্রা নির্ণয় করতে সক্ষম হবেন।
- MKSA এককের সম্বন্ধে অবগত হবেন। এই এককের প্রয়োজনীয়তা এবং সুসংহত MKSA এককের কথা জানবেন।
- SI একক কাকে বলে জানতে পারবেন। আর এও জানতে পারবেন যে, SI এককই এখন বহুল প্রচারিত একক পদ্ধতি।

1.2 স্থির তড়িৎ একক (esu) এবং এই এককে তড়িৎচুম্বকীয় রাশির মাত্রা

একটি একক পদ্ধতি প্রস্তুত করতে হলে আমাদের মাধ্যমের ধর্মের কথা মনে রাখতে হবে। কেননা মাধ্যমের ধর্মের উপরই বলের মান নির্ভর করে। ESU র ক্ষেত্রে এই ধর্মটি হচ্ছে মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতা।

স্থিরবৈদ্যুৎ পদ্ধতিতে দুটি সমান তড়িৎ আধানের মধ্যের বলের সূত্রের উপর ভিত্তি করে একক নির্ণয় করা হয়। এর সাহায্যে আমরা একটি তড়িৎ আধানের মাত্রা নির্ণয় করতে পারি।

দুটি তড়িৎ আধানের মধ্যে বলের সূত্র অনুযায়ী দুটি তড়িৎ আধান q_1 এবং q_2 পরস্পরের থেকে r দূরত্বে অবস্থিত হলে তাদের মধ্যে যে বলের সৃষ্টি হবে তা হল

$$F = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r} \qquad (1)$$

এখানে ε – মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতা অথবা ডাইলেকট্রিক স্থিরাঙ্ক (Dielectric Constant)। esu পদ্ধতিতে শূন্যস্থানে ε – এর মান ε_0 হিসাবে লেখা হয়। ε_0 এর মান একক এবং মাত্রাহীন গণ্য করা হয়, তৎসত্ত্বেও নিম্নলিখিত মাত্রা নির্ণয়ের সমীকরণগুলিতে এটিকে রাখা হয়। এর কারণ পরে স্পষ্ট হবে।

(1) নং সমীকরণের উপর ভিত্তি করে আমরা শূন্যস্থানে তড়িৎ আধানের মাত্রা নির্ণয় করতে পারি। যথা—

(i) $[q][q] = [F][\varepsilon_0][L^2] = [MLT^{-2}][\varepsilon_0 L^2]$

অথবা $[q] = \left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}\right]$

অন্যান্য স্থির তড়িৎ এককগুলির মাত্রা তাদের যথাযথ সংজ্ঞা থেকে নির্ণয় করা সম্ভব। যেমন

(ii) কৃতকার্য W = তড়িৎ আধান q × বিভব পার্থক্য V

$$\therefore [V] = \frac{[W]}{[q]} = \frac{[M L^2 T^{-2}]}{\left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}\right]} = \left[\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$$

তড়িচ্চালক বলের মাত্রাও উপরের প্রতিরূপটির মতো হবে।

(iii) তড়িৎ ক্ষেত্রে তীব্রতা E = একক তড়িৎ আধান কর্তৃক অনুভূত বল

$$= \frac{F}{q}$$

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{[MLT^{-2}]}{\left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}\right]}$$

$$= \left[\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$$

(iv) তড়িৎ বিজ্ঞাপন বা আবেশন (electric induction or displacement)

$$D = \varepsilon_0 E$$

$$[D] = [\varepsilon_0][E] = \left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$$

(v) তড়িৎ ফ্লাক্স্ Ψ = তড়িৎ ক্ষেত্র প্রাবল্য Ex ক্ষেত্রফল

$$[\Psi] = \left[\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}\right][L^2]$$

$$= \left[\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}\right]$$

(vi) তড়িৎ প্রবাহ i = আধান প্রবাহের হার $= \frac{q}{t}$

$$[i] = \frac{[q]}{[T]} = \left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}\right]$$

(vii) রোধ R = $\frac{\text{তড়িচ্চালক বল V}}{\text{তড়িৎ প্রবাহ i}}$

$$\therefore [R] = \frac{[v]}{[i]} = \frac{\left[\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]}{\left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}\right]} = \left[\varepsilon_0^{-1} L^{-1} T\right]$$

(viii) ধারকত্ব C = $\frac{\text{তড়িৎ আধান q}}{\text{বিভব প্রভেদ v}}$

$$[C] = \frac{[q]}{[v]} = \frac{\left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}\right]}{\left[\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]} = \left[\varepsilon_0 L\right]$$

(ix) আবেশ্যতা L = (inductance)

$$\frac{\text{তড়িচ্চালক বল } V}{\text{তড়িৎপ্রবাহের পরিবর্তনের হার } \left(\frac{di}{dt}\right)}$$

$$[L] = \frac{[V]}{[i]\left[T^{-1}\right]} = \frac{\left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]}{\left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}\right]\left[T^{-1}\right]}$$

$$= \left[\varepsilon_0^{-1} L^{-1} T^{2}\right]$$

(x) চৌম্বক ক্ষেত্রের তীব্রতা $H = \frac{idL\ \sin\theta}{r^2}$

$$[H] = \frac{[i][L]}{[L]^2} = \left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}\right]$$

(xi) চৌম্বক ফ্লাক্স্ ঘনত্ব বা চৌম্বক বিস্থাপন

$$B = \frac{\text{আবিষ্ট তড়িচ্চালক বল}}{lv}$$

$$[B] = \frac{\left[\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}\right]}{[L]\left[LT^{-1}\right]} = \left[\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}}\right]$$

(xii) চৌম্বক মেরু প্রাবল্য $m = \frac{F}{B}$ $(\because F = mB)$

$$[m] = \frac{\left[MLT^{-2}\right]}{\left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}}\right]} = \left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-2}\right]$$

(xiii) চৌম্বক ভ্রামক M = 2ml

$$[M]=\left[M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{5}{2}}T^{-2}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}\right][L]=\left[M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{7}{2}}T^{-2}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}\right]$$

1.3 তড়িৎচুম্বকীয় একক (emu) এবং এই এককে তড়িৎচুম্বকীয় রাশির মাত্রা

এই পদ্ধতির একক নির্ণয় করতে গেলে আমরা মাধ্যমের যে ধর্মটির সাহায্য নিই সেটি হল মাধ্যমের চুম্বকশীলতা (Permeability).

পরস্পরের মধ্যে r দূরত্বে অবস্থিত দুটি মেরু m_1 এবং m_2 -এর মধ্যের বলের সম্পর্ক নিম্নরূপ

$$F=\mu\frac{m_1m_2}{r^2}$$

এক্ষেত্রে μ = চুম্বকশীলতা। (EMU) পদ্ধতিতে শূন্যস্থানে μ এর মান μ_0 হিসাবে লেখা হয় μ_0 এর মান একক এবং মাত্রাহীন গণ্য করা হয়, তৎসত্ত্বেও নিম্নলিখিত মাত্রা নির্ণয়ের সমীকরণগুলিতে এটিকে রাখা হয়।

(i) $F=\frac{[\mu_0][m][m]}{L^2}$

$$\therefore \text{ চৌম্বক মেরু প্রাবল্য } [m]=\frac{\left[F^{\frac{1}{2}}\right]\left[L^2\right]^{\frac{1}{2}}}{[\mu_0]^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\left[\mu_0^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}L\right]=\left[\mu_0^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}\right]$$

অন্যান্য বৈদ্যুতিক রাশির মাত্রা মূল সংজ্ঞা থেকে নির্ণয় করা যায়। যথা—

(ii) চৌম্বক ফ্লাক্স ঘনত্ব বা চৌম্বক বিস্থাপন B (Magnetic Induction) = একক মেরু কর্তৃক অনভূতি বল = F/m

$$[B]=\frac{[F]}{[M]}=\frac{\left[MLT^{-2}\right]}{\left[\mu_0^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}\right]}=\left[\mu_0^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}\right]$$

(iii) চৌম্বক ক্ষেত্রের তীব্রতা $H = \frac{B}{\mu_0}$

$$[H] = \frac{[B]}{[\mu_0]} = \left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$$

(iv) চৌম্বক ফ্লাক্স্ $\phi = [B][A] = \left[\mu_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}\right]\left[L^2\right]$

$$= \left[\mu_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}\right]$$

(v) চৌম্বক ভ্রামক $M = m \times$ চুম্বকের দৈর্ঘ্য 2ℓ

$$[M] = [m][l] = \left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}\right][L] = \left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-1}\right]$$

(vi) চুম্বকনাঙ্ক (intensity of magnetisation) $I = \frac{M}{\text{আয়তন } V}$

$$[I] = \frac{[M]}{[L^3]} = \left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$$

(vii) চুম্বক ক্ষেত্রের সঙ্গে তড়িৎপ্রবাহের সম্পর্কের রূপ

$$H = \frac{i dl \sin\theta}{r^2}$$

$$\therefore [i] = \frac{[H][r^2]}{[dl]} = \frac{\left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}\right]\left[L^2\right]}{[L]} = \left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$$

(viii) তড়িৎ আধান $q = ixt$

$$[q] = [i][t] = \left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right][T]$$

$$= \left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}\right]$$

(xi) তড়িৎক্ষেত্রের তীব্রতা E = একক আধানের অনুভূত বল

$$= \frac{E}{q}$$

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{[MLT^{-2}]}{\left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}\right]} = \left[\mu_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}\right]$$

(x) বিভব প্রভেদ V = একক আধান দ্বারা কৃত কার্য

$$\frac{W}{q}$$

$$[V] = \frac{[W]}{[q]} = \frac{[ML^2T^{-2}]}{\left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}\right]} = \left[\mu_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}} T^{-2}\right]$$

(xi) তড়িচ্চালক বলের মাত্রাও উপরের ন্যায় হবে

$$\text{রোধ } R = \frac{V}{i} \quad [R] = \frac{[v]}{[i]} = \frac{\left[\mu_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}\right]}{\left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]} = \left[\mu_0 L T^{-1}\right]$$

(xii) ধারকত্ব $C = \frac{q}{v}$

$$[C] = \frac{\left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[\mu_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}\right]} = \left[\mu_0^{-1} L^{-1} T^{2}\right]$$

(xiii) আবেশ্যতা $L = \frac{V}{\left(\frac{di}{dt}\right)}$

$$[L] = \frac{\frac{[v]}{[i]}}{[t]} = \frac{\left[\mu_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}\right]}{\left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]\left[T^{-1}\right]} = \left[\mu_0 L\right]$$

1.4 স্থির তড়িৎ একক এবং বিদ্যুৎচুম্বকীয় এককের তুলনা

1.2 এবং 1.3 অনুচ্ছেদ থেকে দেখতে পাচ্ছি যে, একই বৈদ্যুতিক রাশির স্থির তড়িৎ (CGS ESU) এবং বিদ্যুৎচুম্বকীয় (CGS emu) পদ্ধতিতে নির্ণীত মাত্রার মধ্যে আপাত পার্থক্য আছে।

তড়িৎ আধানের উদাহরণ গ্রহণ করলে

emu তে $[q] = \left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}\right]$

esu তে $[q] = \left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}\right]$

কিন্তু একই তড়িৎ আধানের বিভিন্ন মাত্রা হতে পারে না। এখানে দেখা যাচ্ছে μ_0 এবং ε_0 -এর মাত্রা কী আমাদের জানা নেই বলেই এই বিভ্রান্তির সৃষ্টি হয়েছে। দুটি ক্ষেত্রে (অর্থাৎ esu এবং emu তে) $[q]$ এর মাত্রা সমান ধরলে

$$\left[\mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}\right] = \left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}\right]$$

$$\therefore \left[\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[LT^{-1}\right]$$

$\left[LT^{-1}\right] \rightarrow$ বেগের মাত্রা

উপরের উপায়ে যদিও আমরা $\left[\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\right]^{\frac{1}{2}}$ এর মাত্রা নির্ণয়ে সক্ষম হলাম কিন্তু আলাদাভাবে μ_0 এবং ε_0 এর মাত্রা নির্ণয়ের কোন উপায় নেই। emu এ μ_0 এর মান একক এবং এটিকে মাত্রাহীন ধরে নেওয়া হয়। এবং esu তে ε_0 এর মান একক এবং এটিকে মাত্রাহীন ধরে নেওয়া হয়। এই বেগের মান নির্ণয়ের জন্য একটি প্রদত্ত তড়িৎ আধান q এর মান প্রথমে esu এ এবং পরে emu তে নির্ণয় করা হয়। এই দুটি মানের অনুপাত থেকেই বেগের মান পাওয়া যাবে। পরীক্ষাগারে একটি ধারকের ধারকত্ব নির্ণয় করেই আধানের মান নির্ণয় করা হয়।

ধরা যাক C_{esu} = ধারকটির esu তে ধারকত্বের মান

C_{emu} = ধারকটির emu তে ধারকত্বের মান

পরীক্ষার ফল থেকে দেখা যায় যে

$$\frac{C_{esu}}{C_{emu}} = e^2$$ (c = ছোট হাতের c)

এখানে $c = 2{\cdot}9979 \times 10^{10} \approx 3 \times 10^{10}$

অতএব আমরা বলতে পারি যে, ধারকত্বের esu এর মান emu এর মান থেকে $1 : e^2$ অর্থাৎ $1 : 9 \times 10^{20}$ অনুপাতে ছোট। এখন ধারকত্বের esu এর মাত্রা $\left[\varepsilon_0 L\right]$ এবং emu এর মাত্রা $\left[\mu_0^{-1} L^{-1} T^2\right]$

$$\therefore C_{esu}\left[L\varepsilon_0\right] = C_{emu}\left[\mu_0^{-1} L^{-1} T^{-2}\right]$$

$$\frac{C_{esu}}{C_{emu}} = c^2 = \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0^2 \left[L^2 T^{-2}\right]}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c\left[LT^{-1}\right]$$

কিন্তু $\left[LT^{-1}\right]$ বেগের মাত্রা CGS পদ্ধতিতে একক বেগের মাত্রা $1 cm\ sec^{-1}$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^{10}\ cm\ sec^{-1}$$

esu ব্যবহার করতে হলে $\varepsilon_0 = 1$ কিন্তু যেহেতু $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$

অতএব μ_0 এর মান হবে $\frac{1}{c^2 \varepsilon_0} = \frac{1}{c^2}$

অন্যদিকে emu ব্যবহার করতে হলে $\mu_0 = 1$, সেক্ষেত্রে ε_0 হবে $\frac{1}{c^2 \mu_0} = \frac{1}{c^2}$

এখানে এটি লক্ষ্যণীয় যে, $c = 3 \times 10^{10}$ সেমি সেকেন্ড $^{-1}$ হচ্ছে শূন্যস্থানে আলোর (তড়িৎচুম্বকীয় বিকিরণের) গতিবেগের মান। এই তথ্যের ভিত্তিতে ম্যাক্সওয়েল (Maxwell) তাঁর বিখ্যাত আলোকের তড়িৎচুম্বকীয় তত্ত্বের উপস্থাপনা করেছিলেন।

অন্যান্য রাশিগুলির মাত্রার অনুপাত অনুরূপভাবে নির্ণয় করা যায়

(i) তড়িৎ আধান q

$$\frac{q_{emu}}{q_{esu}} = \frac{\left[M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}\mu_0^{-\frac{1}{2}}\right]}{\left[M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}\right]} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\left[LT^{-1}\right]^{-1} = c$$

এখানে লক্ষণীয় যে, c এখানে একটি অনুপাত মাত্র কেননা আমরা দেখেছি যে $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ এর মাত্রা $\left[LT^{-1}\right]$

(ii) বিভব পার্থক্য অথবা তড়িচ্চালক বল

$$\frac{V_{emu}}{V_{esu}} = \frac{\left[M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2}\mu_0^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}}\right]} = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\left[LT^{-1}\right]$$

$$= c^{-1}$$

(iii) তড়িৎপ্রবাহ

$$\frac{i_{emu}}{i_{esu}} = \frac{\left[M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}\mu_0^{-\frac{1}{2}}\right]}{\left[M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}\right]} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\left[LT^{-1}\right]^{-1} = c$$

(iv) রোধ $\frac{R_{emu}}{R_{esu}} = \frac{\left[LT^{-1}\mu_0\right]}{\left[L^{-1}T\ \varepsilon_0^{-1}\right]} = \mu_0\varepsilon_0\left[L^2T^{-2}\right] = c^{-2}$

(v) ধারকত্ব $\frac{C_{emu}}{C_{esu}} = \frac{\left[\mu_0^{-1}L^{-1}T^2\right]}{\left[\varepsilon_0 L\right]} = \mu_0^{-1}\varepsilon_0^{-1}\left[L^{-2}T^2\right] = c^2$

(vi) আবেশ্যতা $\frac{L_{emu}}{L_{esu}} \frac{\left[\mu_0^{L}\right]}{\left[\varepsilon_0^{-1}L^{-1}T^{2}\right]} = \mu_0\varepsilon_0\left[LT^{-1}\right]^2$

$= c^{-2}$

(vii) চৌম্বক ক্ষেত্রের তীব্রতা $\frac{H_{emu}}{H_{esu}} = \frac{\left[\mu_0^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}\right]}{\left[\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-2}\right]} = \mu_0^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}}\left[LT^{-1}\right]^{-1}$

$= c$

(viii) তড়িৎক্ষেত্রের তীব্রতা $\frac{E_{emu}}{E_{esu}} \frac{\left[\mu_0^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-2}\right]}{\left[\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}\right]} = \mu_0^{\frac{1}{2}}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}\left[LT^{-1}\right] = c^{-1}$

উপরের সম্পর্কগুলি থেকে আপনারা নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে, emu তে রোধের মাত্রা ও বেগের মাত্রা একই (যখন $\mu_0 = 1$ এবং μ_0 এর মাত্রা অগ্রাহ্য করা হয়)। অতএব রোধের emu এ একক ধরা যায় সেন্টিমিটার / সেকেন্ড। আবার esu এ ধারকত্বের একক এবং দৈর্ঘ্যের একক এক ($\varepsilon_0 = 1$ ε_0 -র মাত্রা অগ্রাহ্য করে)। অতএব ধারকত্বের esu -তে একক সেন্টিমিটার।

1.5 ব্যবহারিক এবং আন্তর্জাতিক একক

বাস্তবে emu ব্যবহার করা অসুবিধাজনক কেননা emu -র মান ব্যবহারিক কাজের পক্ষে ছোট। সেইজন্য emu ব্যবহারের জন্য তড়িৎপ্রবাহ i বিভব প্রভেদ V, রোধ R এর যে এককগুলি ব্যবহার করা হয় সেগুলিকে ব্যবহারিক একক বলা হয়। সেই এককগুলি হল তড়িৎপ্রবাহের একক অ্যাম্পিয়ার (ampere)

1 অ্যাম্পিয়ার $= 10^{-1}$emu

বিভব প্রভেদের একক ভোল্ট 1 ভোল্ট $= 10^{8}$emu

রোধের একক ওহম (Ω) $1\,\Omega = \frac{1 \text{ ভোল্ট}}{1 \text{ অ্যাম্পিয়ার}} = 10^{9}$emu

এই ব্যবহারিক এককগুলির সংজ্ঞা যেভাবে দেওয়া হয়েছে তাতে এদের সঠিক মান নির্ণয় করা

কঠিন। সেইজন্য 1908 সালে লন্ডনে অনুষ্ঠিত তড়িৎ মানক নির্ণয়ের জন্য আন্তর্জাতিক সম্মেলনে (International Conference on Electrical Standards) রাশি তিনটির সংজ্ঞা প্রস্তুত করা হয় এবং এই এককগুলির নাম আন্তর্জাতিক একক দেওয়া হয়। সংজ্ঞাগুলি হল —

(i) $AgNO_3$ দ্রবণের তড়িৎ বিশ্লেষণ করার সময় যে তড়িৎপ্রবাহ দ্বারা 0.001118 গ্রাম রূপা 1 সেকেন্ডে জমা হয় সেই তড়িৎপ্রবাহের মান 1 আন্তর্জাতিক অ্যাম্পিয়ার।

(ii) 1 আন্তর্জাতিক ওহম = এটি একটি সুষম প্রস্থচ্ছেদযুক্ত পারদস্তম্ভের রোধ। স্তম্ভটির দৈর্ঘ্য 0°C তাপমাত্রায় 106.3 সেমি, প্রস্থচ্ছেদ 1 মিলিমিটার^2 এবং পারদের ভর 14.452 গ্রাম।

(iii) 1 আন্তর্জাতিক ভোল্ট –1 আন্তর্জাতিক ওহম রোধযুক্ত পরিবাহীর মধ্যে। আন্তর্জাতিক অ্যাম্পিয়ার তড়িৎপ্রবাহের ফলে পরিবাহীর দুইপ্রান্তে যে বিভব প্রভেদের সৃষ্টি হয় তাকে 1 আন্তর্জাতিক ভোল্ট বলে।

1933 সালে ওজন এবং পরিমাপের সম্মেলনে (Conference for Weights and Measures) স্থির করা হয় যে, পরীক্ষা পদ্ধতির যথেষ্ট উন্নতি হওয়ায় উপরোক্ত রাশিগুলির আন্তর্জাতিক এককের সংজ্ঞার প্রয়োজন নেই। ব্যবহারিক এককগুলি সোজাসুজি পরম (absolute) একক পদ্ধতিতে প্রকাশ করা যেতে পারে। আন্তর্জাতিক এবং ব্যবহারিক এককের মধ্যে সম্পর্ক হচ্ছে

1 আন্তর্জাতিক অ্যাম্পিয়ার	=	0.999835 অ্যাম্পিয়ার
1 আন্তর্জাতিক ওহম	=	1.000495 ওহম (Ω)
1 আন্তর্জাতিক ভোল্ট	=	1.00033 ভোল্ট

আধুনিক যন্ত্রপাতিগুলি পরম ব্যবহারিক এককে ক্রমাঙ্কিত। পুরানো যন্ত্রপাতি আন্তর্জাতিক এককে ক্রমাঙ্কিত হত।

1908 সালের প্রথম সম্মেলনে স্থিরীকৃত কিছু নির্দেশাঙ্কে ভুলের জন্য 1908 এবং 1933 সালের সম্মেলনে স্থির করা এককগুলির মধ্যে পার্থক্য লক্ষ্য করা যায়। অধিকাংশ ব্যবহারিক ক্ষেত্রে এই সামান্য পার্থক্যকে অগ্রাহ্য করা যায়।

অন্যান্য ব্যবহারিক এককগুলি হল — ক্ষমতার একক ওয়াট, ধারকত্বের একক ফ্যারাড, আবেশ্যতার একক হেনরী ইত্যাদি। এইগুলি উপরোক্ত পরম ব্যবহারিক একক থেকে নির্ণয় করা যায়।

1.6 MKSA একক এবং বিজ্ঞান সম্মত উপায়ে সুসঙ্গত MKSA একক (Rationalised MKSA System)

বিজ্ঞানী Giorgi 1901 সালে বলেন যে, তড়িৎ বিজ্ঞানের এককগুলি আরও সহজভাবে প্রকাশ করা সম্ভব হবে যদি দৈর্ঘ্যের একক সেন্টিমিটারের পরিবর্তে মিটার এবং ভরের একক গ্রামের পরিবর্তে কিলোগ্রাম নেওয়া হয়। এই পদ্ধতির নামই MKS পদ্ধতি। এটির প্রধান সুবিধা হল যে, অ্যাম্পিয়ার, ভোল্ট, ওহম প্রভৃতি ব্যবহারিক এককগুলির মাত্রা MKS এককে সমান।

এই পদ্ধতিতে বলের এককের নাম নিউটন (Newton)। এটি এমন একটি বল যেটি 1 কিলোগ্রাম ভরে 1 মিটার / সেকেন্ড^2 ত্বরণ সৃষ্টি করতে পারে।

CGS ও MKS তুলনা করলে

(বল) $=\left[MLT^{-2}\right]$

1 নিউটন = 1 কিগ্রাম. 1 মিটার 1 সেকেন্ড$^{-2}$

$=10^3$ গ্রাম $\times 10^2$ সেমি $\times 1$ সেকেন্ড$^{-2}$

$=\left(10^3\times 10^2\right)$ ডাইন $=10^5$ ডাইন

অনুরূপভাবে (কার্য বা শক্তি) $\left[ML^2T^{-2}\right]$

কার্যের MKS একক জুল (Joule) এবং CGS পদ্ধতির

একক আর্গ (erg)

1 জুল = 1 কিলোগ্রাম 1 মিটার^2 1 সেকেন্ড$^{-2}$

$=10^3$ গ্রাম $\times 10^4$ সেমি^{2} $\times 1$ সেকেন্ড$^{-2}$

$=10^7$ আর্গ

ক্ষমতার MKS একক — ওয়াট (Watt)

(ক্ষমতা) $=\left[ML^2T^{-3}\right]$

1 ওয়াট = 1 কিলোগ্রাম. 1 মিটার^2 1 সেকেন্ড$^{-3}$

$= 10^1$ গ্রাম $\times 10^4$ সেমি^{2} $\times 1$ সেকেন্ড$^{-1}$

$= 10^7$ আর্গ / সেকেন্ড

তড়িৎ বিজ্ঞানে MKS পদ্ধতির একক ব্যবহার করার সময় দৈর্ঘ্য, ভর ও সময়ের তিনটি নিরপেক্ষ একক (CGS emu এবং CGS esu পদ্ধতিতে ব্যবহৃত) ছাড়াও তড়িৎপ্রবাহের একককে একটি চতুর্থ নিরপেক্ষ একক হিসাবে নেওয়া হয়েছিল। এই এককটি হল অ্যাম্পিয়ার। সেইজন্য এই পদ্ধতিকে বলা যায় MKSA পদ্ধতি। এটি একটি সুসঙ্গত পদ্ধতি। এই পদ্ধতিতে তড়িৎ বিজ্ঞানে ব্যবহৃত অন্য এককগুলি এবং তাদের মাত্রা নির্ণয় করা যায়।

(i) তড়িৎ প্রবাহ ; প্রবাহের একক অ্যাম্পিয়ার। শূন্য মাধ্যমে 1 মিটার দূরত্বে অবস্থিত দুটি সমান্তরাল অসীম পরিবাহীর (প্রস্থচ্ছেদ উপেক্ষণীয়) মধ্যে যে পরিমাণ তড়িৎপ্রবাহের ফলে পরিবাহী দুটির মধ্যে প্রতি একক দৈর্ঘ্যে 2×10^{-7} নিউটন / মিটার বলের উদ্ভব হয় সেটিই 1 অ্যাম্পিয়ার তড়িৎপ্রবাহ।

প্রবাহের মাত্রা $[i] = [I]$

1 অ্যাম্পিয়ার $= 10^{-1}$ emu $= 3 \times 10^9$ esu

(ii) তড়িৎ আধান q = তড়িৎপ্রবাহ $\times$ সময়

= অ্যাম্পিয়ার সেকেন্ড = কুলম্ব

$$[q] = [I] \times [T] = [IT]$$

(iii) বিভব প্রভেদ, তড়িচ্চালক বল

V = একক তড়িৎ বহন করতে কৃতকার্য

= জুল / কুলম্ব = ভোল্ট

$$[v] = \frac{[w]}{[q]} = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[IT]} = [I^{-1}ML^2T^{-3}]$$

(iv) তড়িৎ ক্ষেত্রের তীব্রতা

$$E = -\frac{dv}{dx} = \frac{\text{ভোল্ট}}{\text{মিটার}}$$

$$[E] = \frac{[V]}{[L]} = [I^{-1}MLT^{-2}]$$

(v) তড়িৎ বিজ্ঞাপন বা আবেশন

(D)

$$\int \vec{D}.\vec{ds} = q$$

$\therefore D =$ কুলম্ব / মিটার ^{2}

মাত্রা $[D] = \frac{[q]}{[L^2]} = [IL^{-2}T]$

(vi) বিদ্যুৎশীলতা $\varepsilon_0 = \frac{D}{E} =$ $\frac{\text{কুলম্ব/মিটার}^2}{\text{ভোল্ট/মিটার}}$ $=$ $\frac{\text{কুলম্ব}}{\text{ভোল্ট মিটার}}$

$$[\varepsilon_0] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{[IL^{-2}T]}{[I^{-1}MLT^{-3}]} = [I^2M^{-1}L^{-3}T^4]$$

(vii) রোধ $R =$ $\frac{\text{বিভব প্রভেদ}}{\text{প্রবাহ মাত্রা}}$ $=$ $\frac{\text{ভোল্ট}}{\text{অ্যাম্পিয়ার}}$ $=$ ওহম

$$[R] = \frac{[V]}{[I]} = [I^{-2}ML^2T^{-3}]$$

(viii) ধারকত্ব $C =$ $\frac{\text{তড়িৎ আধান}}{\text{বিভব প্রভেদ}}$ $=$ $\frac{\text{কুলম্ব}}{\text{ভোল্ট}}$ $=$ ফ্যারাড

$$[C] = \frac{[q]}{[v]} = \frac{[IT]}{[I^{-1}ML^2T^{-3}]} = [I^2M^{-1}L^{-2}T^4]$$

(ix) আবেশ্যতা $L = \dfrac{\text{আবিষ্ট তড়িচ্চালক বল}}{\dfrac{di}{dt}} = \dfrac{\text{ভোল্ট} \times \text{সেকেন্ড}}{\text{অ্যাম্পিয়ার}}$

= হেনরী

$$[L] = \frac{[V]}{[IT^{-1}]} = \left[I^{-1}ML^2T^{-3}\right] \Big/ \left[IT^{-1}\right]$$

$$= \left[I^{-2}ML^2T^{-2}\right]$$

(x) চৌম্বক ক্ষেত্রের প্রাবল্য H $\int \vec{H}.d\vec{\ell} = i$

$$H = \frac{\text{অ্যাম্পিয়ার পাক}}{\text{মিটার}}$$

$$[H] = \frac{[I]}{[L]} = \left[IL^{-1}\right]$$

(xi) চৌম্বক ফ্লাক্স্ ϕ :- আবিষ্ট তড়িচ্চালক বল ε

$= -$ ফ্লাক্স্ পরিবর্তনের হার $\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)$

$\therefore \phi =$ ভোল্ট $\times$ সেকেন্ড প্রতি পাকে

= ওয়েবার (weber)

$$[\phi] = [V][T] = \left[I^{-1}ML^2T^{-2}\right]$$

(xii) চৌম্বক ফ্লাক্স্ ঘনত্ব বা চৌম্বক বিস্থাপন B

$$B = \frac{\text{চৌম্বক ফ্লাক্স্}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{\text{ওয়েবার}}{\text{মিটার}^2}$$

$$[B] = \frac{[\phi]}{[L^2]} = [I^{-1}MT^{-2}]$$

(xiii) চুম্বকশীলতা $\mu_0 = \frac{B}{H} = \frac{\text{ভোল্ট সেকেন্ড/মিটার}^2}{\text{অ্যাম্পিয়ার/মিটার}}$

$$= \frac{\text{ভোল্ট. সেকেন্ড}}{\text{অ্যাম্পিয়ার. মিটার}} = \frac{\text{হেনরী}}{\text{মিটার}}$$

$$[\mu_0] = \frac{[B]}{[H]} = \frac{[I^{-1}MT^{-2}]}{[IL^{-1}]} = [I^{-2}MLT^{-2}]$$

$$\therefore [\mu_0\epsilon_0]^{\frac{1}{2}} = [I^2M^{-1}L^{-3}T^4 . I^{-2}MLT^{-2}]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [L^{-2}T^2]^{\frac{1}{2}} = [LT^{-1}]^1$$

বিজ্ঞানসম্মতভাবে পুনর্গঠিত সুসংহত (rationalised) MKSA পদ্ধতি ঃ—

CGS emu এবং CGS esu এককগুলিকে বিজ্ঞানসম্মতভাবে পুনর্গঠিত প্রস্তাব প্রথমে Oliver Heaveside এবং Lorentz দেন।

Heaveside উদাহরণ দিয়ে বলেন, আমরা যদি একটি একক ব্যাসযুক্ত বৃত্তের ক্ষেত্রফলকে একক ক্ষেত্রফলের সংজ্ঞা হিসাবে গ্রহণ করি কিংবা একক ব্যাসের বৃত্তের আয়তনকে একক আয়তনের সংজ্ঞা হিসাবে নিই তাহলে এই সংজ্ঞাগুলির ভিত্তিতে আমরা একটি সঙ্গতিপূর্ণ একক পদ্ধতি তৈরি করতে পারি। কিন্তু এই পদ্ধতিতে একটি আয়ত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কিংবা একটি সমান্তর ষট্‌ফলক (parallelopiped) এর আয়তনের প্রতিরূপে π সংখ্যাটি থাকবে। উদ্ভূত বিভিন্ন এইরকম প্রতিরূপে এই অদ্ভুত বৈশিষ্ট্য লক্ষ্য করা যাবে। এই পদ্ধতিটি অযৌক্তিক এবং বিজ্ঞানসম্মত নয়। কাজেই তড়িৎ বিজ্ঞানে ব্যবহৃত এককগুলিকে সঙ্গতিপূর্ণ এবং বিজ্ঞাসম্মত করতে হবে। এজন্য প্রথমে করণীয় হচ্ছে, যে সমস্ত বস্তুতে বৃত্তীয় সাম্য অনুপস্থিত তাদের একক থেকে 4π সংখ্যাটিকে এবং যে বস্তুগুলিতে বেলনাকার (cylindrical) সাম্য

অনুপস্থিত তাদের একক থেকে 2π সংখ্যাটিকে অপসৃত করা। ফলে যে সমস্ত উদ্ভূত এককগুলি পাওয়া যাবে সেগুলি মনে রাখা সহজ এবং এককগুলির সঙ্গে সংযুক্ত অন্তর্নিহিত প্রাকৃতিক ঘটনার সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ হবে।

MKSA পদ্ধতির এককগুলিকে সঙ্গতিপূর্ণ করা সহজ। শূন্যস্থানে বিদ্যুৎশীলতা ε_0 র মান সুসংহত সংগঠিত (rationalised) এককে, ε_0 এর অগঠিত এককের মানের $\frac{1}{4\pi}$ ভাগ হয়। অর্থাৎ, সুসঙ্গত এককে

$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_0}{4\pi}$.

যেহেতু $\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ এর মান c^2 হবে কাজে কাজেই $\varepsilon_0^1 = \frac{\varepsilon_0}{4\pi}$ হলে সুসঙ্গত এককে μ_0^1 এর মান হবে $\mu_0^1 = 4\pi\,\mu_0$

অগঠিত MKS এককে শূন্যস্থানে বিদ্যুৎশীলতার মান $\varepsilon_0 = \frac{1}{9\times 109}$ ফ্যারাড / মিটার এবং চুম্বকশীলতার মান $\mu_0 = 10^{-7}$ হেনরী / মিটার

সুসঙ্গত MKS এককের অন্যান্য বিশেষত্বগুলি হল

1. emu অনুসারে শূন্যস্থানের চুম্বকশীলতার মান 1 (এক)। কিন্তু এই এককে $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7} = 1.257\times 10^{-6}$ হেনরী / মিটার

2. esu অনুসারে তড়িৎবিভাজকে ধ্রুবক বা বিদ্যুৎশীলতার মান 1 (এক)। কিন্তু এই এককে $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\times 9\times 10^9} = 8.85\times 10^{-12}$ ফ্যারাড / মিটার সুসঙ্গত এককে গাউসের সূত্রের রূপ হবে

$\int_0 D\eta ds = Q$ (অসংগঠিত এককে Q র স্থানে $4\pi Q$ হয়)

অসংগঠিত এককে যেখানে একক আধান থেকে 4π বলরেখার সৃষ্টি হয় সেখানে সুসংহত এককে একক আধান থেকে একটি বলরেখার সৃষ্টি হবে। আর একটি বিশেষ ক্ষেত্র যেখানে সুসঙ্গত এককের প্রয়োগের অত্যন্ত প্রয়োজনীয়তা লক্ষ্য করা যায় সেটি হল তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্বের আলোচনা।

অসংগঠিত MKSA পদ্ধতি অথবা ব্যবহারিক পদ্ধতির এককগুলি সুসঙ্গত পদ্ধতিতে বজায় রাখার চেষ্টা করা হয়, সেজন্য সুসঙ্গত পদ্ধতিতে সংজ্ঞাগুলি সুবিধামত পরিবর্তিত করা হয়। যেমন বিপরীত বর্গীয় সূত্রের রূপ (Inverse Square Law) তড়িৎবিজ্ঞানে হয়

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{\varepsilon r^2}$$

এবং চুম্বক বিজ্ঞানে এর রূপ $F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu_{mm'}}{r^2}$

এখানে $\varepsilon =$ মাধ্যমের আপাত তড়িৎশীলতা এবং $\mu =$ মাধ্যমের আপাত চুম্বকশীলতা

1.7 SI একক এবং এই এককে প্রকাশিত রাশির মাত্রা ও অন্যান্য পদ্ধতির এককের সঙ্গে তুলনা

1965 সালে অনুষ্ঠিত ওজন এবং মাপের একাদশ সম্মেলনে সুসঙ্গত MKSA পদ্ধতিকে আন্তর্জাতিক স্তরে ব্যবহারের স্বীকৃত দেওয়া হয়েছিল। এই পদ্ধতিতে ব্যবহৃত এককগুলির সঙ্গে উষ্ণতা মাপক একক 'ডিগ্রী কেলভিন' এবং জ্যোতি মাপক একক 'ক্যান্ডেলা'কে যুক্ত করে একটি নতুন একক নির্ধারণ পদ্ধতি এই সম্মেলনে গৃহীত হয়। এই পদ্ধতির নাম এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতি (International System of Units)

কাজেই আমরা বলতে পারি নিম্নে বর্ণিত ছয়টি মৌলিক একক নিয়ে যে সুসঙ্গত পদ্ধতি তৈরি হয়েছে সেটিই 'এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতি'।

মিটার	m	অ্যাম্পিয়ার	A
কিলোগ্রাম	kg	কেলভিন	K
সেকেন্ড	s	ক্যান্ডেলা	Cal

এই পদ্ধতির এককগুলি SI একক (SI units - Systeme Internationale d'units) নামে পরিচিত। পরে এই পদ্ধতিতে আরও দুটি একক যুক্ত হয়েছে। এই দুটি মাত্রাহীন (dimensionless) একক। একক দুটি হচ্ছে সমতলীয় কোণের একক 'রেডিয়ান' (চিহ্ন rad) ও ঘন কোণের একক 'স্টেরেডিয়ান' (চিহ্ন sr)।

SI পদ্ধতি একটি যুক্তিসঙ্গত এবং সঙ্গতিপূর্ণ পদ্ধতি :

এটি যুক্তিসম্মত কেননা এই পদ্ধতিতে যে কোন একটি ভৌত রাশি একটি মাপনযোগ্য এককে প্রকাশ করা যায়।

এটি সঙ্গতিপূর্ণ কেননা বিজ্ঞানের যে কোন রাশিকে উপরোক্ত ছটি মৌলিক এবং দুটি সম্পূরক এককের ভিত্তিতে প্রকাশ করা যায়। SI পদ্ধতির এককগুলির মাত্রা এবং সুসংগঠিত MKSA পদ্ধতির এককের মাত্রা সমান। নিচে প্রদত্ত তালিকা থেকে বিভিন্ন রাশির esu, emu এবং সুসঙ্গত MKSA অথবা SI (উভয়ের এককই সমান) এককের একটি তুলনামূলক চিত্র আপনারা পাবেন।

তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্রে ব্যবহৃত কয়েকটি রাশির esu, emu এবং সুসঙ্গত MKSA (SI) এককের পারস্পরিক সম্পর্কের তালিকা

ভৌত রাশি	রাশির চিহ্ন symbol	রাশির মাত্রা		MKSA (SI)	emu esu	MKSA (SI) একক
		emu	esu			
বৈদ্যুতিক আধান	q	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}\mu_0^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}$	IT	c	কুলম্ব
বিভব প্রভেদ	V	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-2}\mu_0^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}}$	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	c^{-1}	ভোল্ট
তড়িৎ ক্ষেত্রের তীব্রতা	E	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-2}\mu_0^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}}$	$MLT^{-3}I^{-1}$	c^{-1}	ভোল্ট/মিটার
তড়িৎ আবেশ	D	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}\mu_0^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}$	$L^{-2}TI$	c	কুলম্ব/মিটার^2
তড়িৎ প্রবাহ	I	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}\mu_0^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}$	I	c	অ্যাম্পিয়ার
রোধ	R	$LT^{-1}\mu_0$	$L^{-1}T\varepsilon_0^{-1}$	$ML^2T^{-3}I^{-2}$	c^{-2}	ওহম
ধারকত্ব	C	$L^{-1}T^2\mu_0^{-1}$	$L\varepsilon_0$	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$	c^2	ফ্যারাড
আবেশ্যতা	L	$L\mu_0$	$L^{-1}T^2\varepsilon_0^{-1}$	$ML^3T^{-2}I^{-2}$	c^{-2}	হেনরী
তড়িৎশীলতা	ε_0	$L^{-2}T^2\mu_0^{-1}$	ε_0	$M^{-1}L^{-3}T^4I^2$	c^{-2}	$\frac{10^{-9}}{36\pi}$ ফ্যারাড/মিটার
চৌম্বক মেরু প্রাবল্য	m	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}\mu_0^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2}\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}}$	$ML^2T^{-2}I^{-1}$	c	নিউটন/টেসলা

ভৌত রাশি	রাশির চিহ্ন symbol	রাশির মাত্রা		MKSA (SI)	emu esu	MKSA (SI) একক
		emu	esu			
চৌম্বক ক্ষেত্রের প্রাবল্য	H	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}\mu_0^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-2}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}$	$L^{-1}I$	c	অ্যাম্পিয়ার পাক / মিটার
চৌম্বক ফ্লাক্স্	ϕ	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}\mu_0^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{5}{2}}T^{-1}\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}}$	$ML^2T^{-2}I^{-1}$	c^{-1}	ওয়েবার
চৌম্বক ফ্লাক্স্ ঘনত্ব বা বিস্থাপন	B	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}\mu_0^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}$	$MT^{-2}I^{-1}$	c^{-1}	ওয়েবার / মিটার^2 = টেসলা
চৌম্বক ভ্রামক	M	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{5}{2}}T^{-1}\mu_0^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{7}{2}}T^{-2}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}$	$ML^3T^{-2}I^{-1}$	c	ওয়েবার-মিটার
চুম্বকশীলতা	μ_0	μ_0	$L^{-2}T^2\varepsilon_0^{-1}$	$MLT^{-2}I^{-2}$	c^2	হেনরী/ মিটার

1.8 সারাংশ

এই একক পড়ে আমরা জানলাম যে

- তড়িৎচুম্বকীয় রাশিদের একক নির্ধারণের সময় মাধ্যমের ধর্মের কথা মনে রাখতে হবে।
- মাধ্যমের ধর্মের উপর নির্ভর করে দুই প্রকার একক সৃষ্টি হয়েছিল CGS emu এবং CGS esu।
- এই দুটি এককে মান নির্ণয়ে অসুবিধা হওয়ায় ব্যবহারিক MKSA এককের প্রচলন হয়।
- MKSA এককের ভিত্তিতে রাশিগুলির সংজ্ঞায় অসঙ্গতি লক্ষ্য করা গেলে তাকে বিজ্ঞানসম্মতভাবে সঙ্গতিপূর্ণ করার প্রয়োজন হয়। নতুন পদ্ধতির নাম পুর্নগঠিত সুসঙ্গত (rationalised) MKSA পদ্ধতি।
- সুসঙ্গত MKSA পদ্ধতির এককগুলির সঙ্গে আরও দুটি মৌলিক একক (উষ্ণতামাপক একক এবং জ্যোতি মাপক একক) যুক্ত করে SI পদ্ধতির প্রচলন হয়। SI পদ্ধতির এককের ব্যবহার এখন বহুল প্রচারিত।

1.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. মাত্রা নির্ণয়ের প্রণালী থেকে দেখান যে ধারকত্বের একক 1 ফ্যারাড 9×10^{11} সেমি।

2. আধানের SI এককের সঙ্গে CGS esu এককের সম্পর্ক স্থাপন করুন (আধানের SI একক কুলম্ব এবং esu একক স্ট্যাট কুলম্ব (statcoulomb)

1.10 উত্তরমালা

1. আমরা জানি যে

$$\frac{\text{ধারকত্বের emu একক}}{\text{ধারকত্বের esu একক}} = c^2 = \left(3\times10^{10}\right)^2 = 9\times10^{20}$$

$$1 \text{ ফ্যারাড} = \frac{1 \text{ কুলম্ব}}{1 \text{ ভোল্ট}} = \frac{10^{-1}\text{emu}}{10^{8}\text{emu}} = 10^{-9}\text{emu}$$

$$= 10^{-9}\times9\times10^{20} \text{ e.s.u}$$

যেহেতু esu এককে ধারকত্বের মাত্রা দৈর্ঘ্যের মাত্রার সমান

$\therefore 1 \text{ esu} = 1 \text{ cm}$

$\therefore 1$ ফ্যারাড 9×10^{11} সেমি।

2. দুটি সমপরিমাণ আধান বায়ু মাধ্যমে 1 মিটার দূরে অবস্থান করে যদি পরস্পরের উপর 9×10^{9} নিউটন বল প্রয়োগ করে তাহলে প্রত্যেকটি আধানকে 1 কুলম্ব আধান বলা হয়।

CGS esu পদ্ধতিতে একই ধরনের সম পরিমাণ দুটি বিন্দু আধান বায়ু মাধ্যমে 1 সেমি দূরে থেকে যদি পরস্পরের উপর 1 ডাইন বল প্রয়োগ করে তাহলে প্রত্যেক আধানকে 1 স্ট্যাটকুলম্ব বলে, সুতরাং

$$\frac{(1 \text{ কুলম্ব})^2}{(1 \text{ স্ট্যাটকুলম্ব})^2} = \frac{\left(9\times10^9\right) \text{ নিউটন} \times (1 \text{ মি})^2}{1 \text{ ডাইন} \times (1 \text{ সেমি})^2}$$

$$= \frac{9\times10^9 \text{ নিউটন} \times 1 \text{ মি}^2}{10^{-5} \text{ নিউটন} \times (10^{-2} \text{ মি})^2}$$

$$= 9\times10^{14}\times10^4 \quad = 9\times10^{18}$$

$$\therefore \frac{1 \text{ কুলম্ব}}{1 \text{ স্ট্যাটকুলম্ব}} = 3\times10^9$$

$\therefore$ 1 কুলম্ব $= 3\times10^9$ স্ট্যাটকুলম্ব।

একক 2 ❑ তড়িৎ আধান, বল ও তড়িৎ ক্ষেত্র

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

2.2 তড়িৎ আধানের ধর্ম

আধানের বিভিন্ন প্রকার

আধানের একক

আধানের সংরক্ষণ (conservation of charge)

আধানের কোয়ান্টিকরণ (quantization of charge)

2.3 কুলম্বের সূত্র

2.4 উপরিপাতের নীতি

2.5 তড়িৎক্ষেত্র

তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য (Intensity of Electric field)

তড়িৎ বলরেখা

2.6 সারাংশ

2.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

2.8 উত্তরমালা

2.1 প্রস্তাবনা

কোন আর্দ্র গ্রীষ্মের দিনে আপনারা নিশ্চয় লক্ষ্য করেছেন বৃষ্টি হলে তার সঙ্গে সঙ্গে বিদ্যুৎচমক এবং বজ্রপাতের ঘটনা ঘটে। আপনারা কি বজ্রপাত এবং বিদ্যুৎচমকের কারণ জানেন? বেঞ্জামিন ফ্র্যাঙ্কলিন (Benjamin Franklin) তাঁর অভিজ্ঞতার ফল থেকে প্রমাণ করে দেখান যে, মেঘের গর্জন, মেঘের মধ্যে তড়িৎ আধানের উপস্থিতি ঘোষণা করে। এই মেঘ তড়িৎ মোক্ষণের সময় বায়ুমণ্ডলীর মধ্যে একটি বিরাট স্ফুলিঙ্গের সৃষ্টি হয়। এই ঘটনাকেই আমরা বিদ্যুৎ চমক বলি (এই তড়িৎ মোক্ষণের সময়ে প্রায় 20,000 অ্যাম্পিয়ার তড়িৎ প্রবাহিত হয়)।

তড়িৎ মোক্ষণের ফলে বিদ্যুৎ চমকের সময় খুব অল্পক্ষণের জন্য (1 সেকেন্ডের $\frac{1}{10^6}$ ভাগ সময়) প্রচণ্ড তাপের সৃষ্টি হয়। এই সময়ে উষ্ণতা বেড়ে হয় 15000°C (সূর্যের উষ্ণতার প্রায় আড়াই গুণ)। বিদ্যুৎ চমকের বিস্তার ঘটে মোটামুটি 20 cm চওড়া বলয় জুড়ে। এই স্থানে উষ্ণতা অত্যন্ত বৃদ্ধি পাওয়ায় বায়ুকণিকাগুলি খুব দ্রুত পরিবর্তন করতে থাকে ফলে প্রচণ্ড শব্দের সৃষ্টি হয়। একেই বলা হয় বজ্র। যখন এই শব্দ মেঘ, পাহাড় অথবা অন্য কোন বাধা দ্বারা প্রতিফলিত হতে থাকে তখনই আমরা মেঘ-গর্জন শুনতে পাই।

প্রকৃতির এই বিস্ময় উদ্রেককারী ব্যাপারের মূলে আছে তড়িৎ শক্তি সঞ্চারণ ও মোক্ষণের ঘটনা। তড়িৎ আধানগুলির পরস্পরের মধ্যে বলের মান খুব বেশি। এই বলকে বলা হয় স্থির তড়িৎ বল (বা তড়িৎ বল)। নিউক্লিয়াসের সঙ্গে ইলেকট্রন মিলে পরমাণু সৃষ্টির মূলে এই তড়িৎ বলের প্রভাব কাজ করে। এই স্থির তড়িৎ বলের কারণে কয়েকটি পরমাণু মিলে একটি অণু তৈরি হয়।

এই এককে আপনারা তড়িৎ আধানের প্রকৃতি এবং আধানগুলির পরস্পরের মধ্যে স্থির তড়িৎ বলের সম্বন্ধে জানতে পারবেন। প্রতিটি তড়িতাহিত বস্তুর চারিপাশে একটি অঞ্চল (ক্ষেত্র) আছে যেখানে এই তড়িৎ বলটি অনুভূত হয়। এই অঞ্চলটিকে বলা হয় তড়িৎ ক্ষেত্র। আপনারা বিভিন্ন আধান বিন্যাসের জন্য (configuration) তড়িৎ ক্ষেত্র (তড়িৎ ক্ষেত্র প্রাবল্য বা তীব্রতা) নির্ণয় করতে শিখবেন।

2.1.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে আপনারা

- দুই প্রকারের আধানের মধ্যে প্রভেদ করতে পারবেন।
- দেখাতে সক্ষম হবেন যে, একটি বিচ্ছিন্ন তন্ত্রে মোট তড়িৎ আধান সংরক্ষিত থাকে।
- বুঝতে পারবেন যে, যে কোন তড়িৎ আধানের মান একটি ইলেকট্রনের আধানের পূর্ণ গুণিতক হয়।
- কুলম্বের সূত্র ব্যবহার করে দুটি আধানের মধ্যে (স্থির) তড়িৎ বল নির্ণয় করতে পারবেন।
- বলের উপরিপাতের সূত্র জানতে পারবেন এবং এটি প্রয়োগ করে দুই এর অধিক আধানের জন্য লব্ধি বল নির্ণয় করতে পারবেন।
- ইচ্ছামত বন্টিত কতকগুলি আধানের জন্য লব্ধি তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করতে পারবেন।
- তড়িৎ বলরেখা অঙ্কনে প্রথম হবেন।

2.2 তড়িৎ আধানের ধর্ম

ইংরেজি ভাষায় 'electricity' বা 'electric' শব্দটি গ্রীক শব্দ 'elecktron' থেকে উদ্ভূত। গ্রীক ভাষায় 'elecktron' এর অর্থ অ্যামবার (Amber - একধরনের রজন বা resin)।

খ্রিস্টপূর্ব 600 অব্দে গ্রীক দার্শনিক Thales আবিষ্কার করেন যে, একটি এ্যামবার দণ্ডকে পশম দিয়ে ঘষার পর এটি ছোট ছোট বস্তু কণিকাকে আকর্ষণ করার ক্ষমতা অর্জন করে। 1600 খ্রিস্টাব্দ পর্যন্ত এই আবিষ্কার নিয়ে কোন চিন্তাভাবনা হয়নি।

1600 খ্রিস্টাব্দে গিলবার্ট (Gilbert) দেখালেন যে, কিছু কিছু বস্তুকে যেমন — কাচ, এবোনাইট বা রজনকে সিল্ক,পশম বা ফ্লানেল দিয়ে ঘষা হলে এগুলি ছোট ছোট কাগজ বা শোলার টুকরোকে আকর্ষণ করার ক্ষমতা অর্জন করে। শুকনো চুল আঁচড়াবার পরে সাধারণ প্লাস্টিকের চিরুনি দিয়ে এই পরীক্ষা সহজেই করে দেখানো যায়।

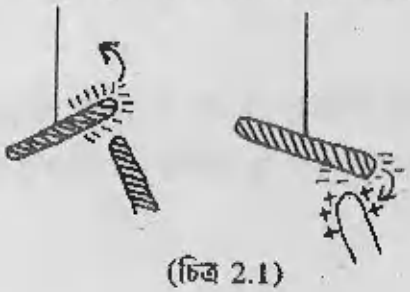
ঘর্ষণের ফলে কাচ, রজন বা এবোনাইট দণ্ডের উপর তড়িৎ আধানের সৃষ্টি হয়। অর্থাৎ ঐ বস্তুগুলি তড়িতাহিত (electrified) হয়। দণ্ডের উপর সৃষ্ট তড়িৎ আধান, কাগজ বা শোলার মধ্যে অবস্থিত আধানের উপর বল প্রয়োগ করতে পারে এবং এইটিই ঐ আকর্ষণের কারণ।

এইভাবে ঘর্ষণের দ্বারা যে ধরণের তড়িৎ সৃষ্টি হয় তাকে ঘর্ষণ তড়িৎ (frictional electricity) বলে। এই তড়িৎ যে বস্তুতে সৃষ্টি হয়, তার মধ্যেই স্থির (বা আবদ্ধ) থাকে বলে তাকে স্থির তড়িৎ (Statical Electricity) বলা হয়।

এখন আমরা আপনাদের পূর্বে পঠিত কিছু অংশের প্রধান বৈশিষ্ট্যগুলির সংক্ষেপে পুনরালোচনা করব।

2.2.1 আধানের প্রকার :—

অভিজ্ঞতা থেকে আমরা বুঝতে পারি যে, তড়িৎ দুই প্রকারের হতে পারে। একটি সরল পরীক্ষা দ্বারা এটি সহজেই প্রমাণ করা যায়। দুটি এবোনাইট দণ্ডকে ফ্লানেল দিয়ে ঘষে একটি করে রেশমী সুতো দিয়ে ঝোলানো হল। এখন অন্য এবোনাইট দণ্ডটি প্রথমটির কাছে আনলে দেখা যাবে যে প্রথম দণ্ডটি দূরে সরে যাচ্ছে অর্থাৎ বিকর্ষিত হচ্ছে। এবার একটি শুকনো কাচ দণ্ডকে রেশম দিয়ে ঘষে ঝোলানো এবোনাইট দণ্ডের কাছে ধরলে এবোনাইট দণ্ডটি আকৃষ্ট হয়ে কাচ দণ্ডটির কাছে আসবে (চিত্র 2.1)।



(চিত্র 2.1)

এবোনাইট দণ্ডদুটিতে স্পষ্টতই একপ্রকার আধান সৃষ্ট হয়েছিল। সুতরাং আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, দুটি সমধর্মী আধান পরস্পরকে বিকর্ষণ করে। আবার কাচ-দণ্ডের আধান যেহেতু আকৃষ্ট হল, ঐ আধান অবশ্যই বিপরীতধর্মী। অতএব এই পরীক্ষা থেকে আমরা বুঝতে পারছি যে, আধান দুই প্রকার এবং স্থির তড়িতের মূলসূত্রটিও এই পরীক্ষা থেকে স্পষ্ট হয়। সূত্রটি হল যে ' সম তড়িতাহিত বস্তু পরস্পরকে বিকর্ষণ করে এবং বিষম তড়িতাহিত বস্তু পরস্পরকে আকর্ষণ করে।

এই দুই প্রকার তড়িতাধান সৃষ্টির কারণ নিম্নরূপ—

পূর্ববর্তী পাঠ থেকে আপনারা নিশ্চই জেনে গেছেন যে, একটি পরমাণুর কেন্দ্রে ধনাত্মক তড়িতাধানযুক্ত একটি নিউক্লিয়াস আছে এবং তার চারিদিকে বিভিন্ন কক্ষপথে ঋণাত্মক তড়িতাধান যুক্ত ইলেকট্রন ভ্রমণ করছে। নিউক্লিয়াস প্রোটন এবং নিউট্রন দিয়ে গঠিত। (এর মধ্যে প্রোটন ধনাত্মক তড়িতাধান যুক্ত এবং নিউট্রন তড়িৎবিহীন)। প্রোটনের ধনাত্মক তড়িতাধান এবং ইলেকট্রনের ঋণাত্মক তড়িতাধানের মান সমান। নিউক্লিয়াসের মধ্যে প্রোটন এবং নিউট্রন পরস্পরের সঙ্গে খুব দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ থাকে। এই আকর্ষণ বল এত প্রবল যে প্রোটনের পক্ষে নিউক্লিয়াস ছেড়ে যাওয়া প্রায় অসম্ভব; তুলনামূলকভাবে ইলেকট্রন এবং নিউক্লিয়াসের মধ্যে বলের মান খুবই কম। কাজেই প্রোটনের চেয়ে ইলেকট্রনের, পরমাণুর আকর্ষণ ছেড়ে যাওয়ার সম্ভাবনা অনেক বেশি।

দুটি বিভিন্ন বস্তুকে যখন পরস্পরের সঙ্গে ঘর্ষণ করা হয় তখন একটি বস্তু থেকে ইলেকট্রন (তুলনামূলকভাবে মুক্ত) অন্য বস্তুতে চলে যায়। অন্য বস্তুর অপেক্ষা কিছু কিছু বস্তু তাদের ইলেকট্রনগুলিকে দৃঢ়ভাবে ধরে রাখতে চেষ্টা করে। সেজন্য ঘর্ষণশীল দুটি বস্তুর মধ্যে কোনটি ইলেক্ট্রন ত্যাগ করবে এবং কোনটি ইলেকট্রন গ্রহণ করবে তা নির্ভর করবে বস্তু দুটির উপর এবং দুটি নির্দিষ্ট বস্তুর জন্য এই ইলেকট্রন পরিবহনের দিকও নির্দিষ্ট। উদাহরণ স্বরূপ বলা যায় যে, একটি প্লাস্টিকের স্কেলকে উলের একটি টুকরো দিয়ে ঘষলে ইলেকট্রন উল থেকে প্লাস্টিকে চলে যাবে। ফলে প্লাস্টিকে ইলেকট্রনের আধিক্য ঘটবে এবং উলে সমান সংখ্যক ইলেকট্রনের ঘাটতি ঘটবে। এজন্য প্লাস্টিক ঋণাত্মক তড়িতাধান এবং উল সমমানের ধনাত্মক তড়িতাধান লাভ করবে।

নিচে বিভিন্ন পদার্থের একটি তালিকা দেওয়া হল। এই তালিকাবদ্ধ যেকোন দুটি পদার্থকে পরস্পরের সঙ্গে ঘষলে ক্রমিক সংখ্যা অনুসারে যে পদার্থটি ঐ তালিকায় প্রথমে আছে সেটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক তড়িতাহিত হবে।

1. পশম (Fur)
2. ফ্লানেল (Flannel)
3. গালা (Shellac)
4. মোম (Sealing wax)
5. কাগজ (Paper)
6. রেশম (Silk)
7. মানবদেহ (Human body)
8. কাঠ (Wood)
9. ধাতব পদার্থ (Metals)
10. রাবার (Indian rubber)
11. রজন (Resin)
12. অ্যামবার (Amber)
13. গন্ধক (Sulphur)
14. এবোনাইট (Ebonite)
15. গাটা পার্চা (Gutta percha)

প্রশ্নাবলি — 1

X এবং Y দুটি তড়িতাহিত বস্তু পরস্পরকে আকর্ষণ করে। X একটি তৃতীয় বস্তু Z কে বিকর্ষণ করে। Z, Y কে আকর্ষণ করবে না বিকর্ষণ করবে?

2.2.2 আধানের একক

আধানের SI এককের নাম কুলম্ব (চিহ্ন C)। 1 কুলম্বের সংজ্ঞা তড়িৎপ্রবাহের একক অ্যাম্পিয়ারের সাপেক্ষে দেওয়া হয়।

একটি তারের প্রস্থচ্ছেদের ভিতর দিয়ে 1 অ্যাম্পিয়ার তড়িৎপ্রবাহ সেকেন্ড ধরে প্রবাহিত হলে যে পরিমাণ তড়িৎ আধানের সৃষ্টি হয় তাকে বলা হয় কুলম্ব। অর্থাৎ

$$q = It \qquad \ldots (2.1)$$

এখানে I কে অ্যাম্পিয়ারে (A) এবং t কে সেকেন্ডে (S) প্রকাশ করলে q এর একক হবে কুলম্ব (C)।

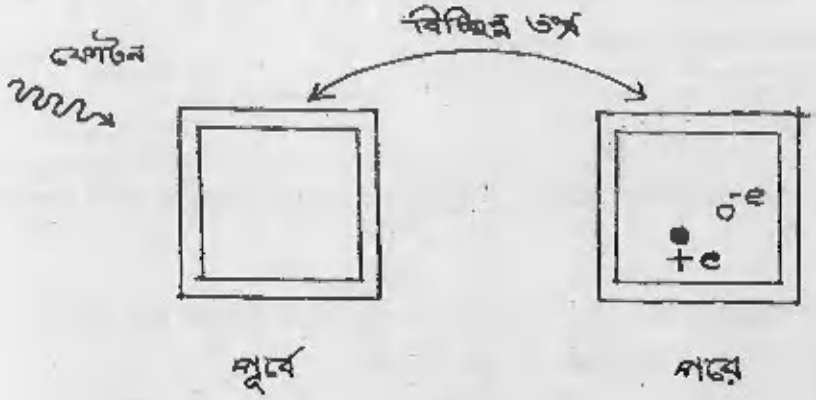
2.2.3 আধানের সংরক্ষণ

পূর্বের উদাহরণে আমরা দেখেছি যে, উলের কাপড় দিয়ে প্লাস্টিকের স্কেলকে ঘষার ফলে নতুন কোন আধানের সৃষ্টি হয় না। প্রত্যেক প্রকার আধানের বীজগাণিতিক যোগফল অর্থাৎ মোট আধানের পরিমাণ অপরিবর্তিত থাকে। এটি কী করে সম্ভব হয় দেখা যাক। ঘর্ষণের পূর্বে প্লাস্টিক এবং উল উভয়ই তড়িৎহীন ছিল। অর্থাৎ মোট আধান শূন্য ছিল। ঘর্ষণের পরে প্লাস্টিক স্কেলটি ঋণাত্মক এবং উলের কাপড় সমপরিমাণ ধনাত্মক তড়িতে আহিত হয়। প্লাস্টিক এবং উলের সমপরিমাণ বিপরীত তড়িতাধানের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য। কাজেই ঘর্ষণের পরেও মোট আধানের পরিমাণ শূন্যই হবে।

উপরের তথ্য থেকে বোঝা যাচ্ছে যে, তড়িতাধান একটি সংরক্ষিত রাশি (conserved quantity)। আধানের সংরক্ষণের অর্থ হচ্ছে যে, কোন বিচ্ছিন্ন তন্ত্রে মোট আধানের পরিমাণ অপরিবর্তিত থাকে। (এখানে বিচ্ছিন্ন তন্ত্র বলতে এমন একটি তন্ত্র বোঝায় যার সীমা অতিক্রম করে কোন ভরের আদান প্রদান সম্ভব নয়)। এর অর্থ এই নয় যে মোট ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক আধানের মান আলাদাভাবে নির্দিষ্ট থাকবে, এই উক্তির অর্থ এই যে, প্রতিটি অতিরিক্ত ধনাত্মক আধান সৃষ্টির সঙ্গে সঙ্গে সমান মানের ঋণাত্মক আধানের সৃষ্টি হবে। ফলে, দুই প্রকার আধানের বীজগাণিতিক যোগফলের কোন পরিবর্তন হবে না।

আধান সংরক্ষণের তথ্য 'যুগল উৎপাদনের' (Pair Production) পরীক্ষা দ্বারা সহজেই বোঝান যায়। (চিত্র 2.2)।

এই পরীক্ষায় একটি পাতলা দেওয়াল (thin-walled) বাক্সকে শূন্য মাধ্যমে রাখা হয়। এটিকে একটি বিচ্ছিন্ন তন্ত্র হিসাবে গণ্য করা যায়।



চিত্র (2.2)

এখানে একটি γ রশ্মির ফোটন একটি ইলেকট্রন (ঋণাত্মক আধান সম্পন্ন -e অক্ষর দিয়ে চিহ্নিত) এবং একটি পজিট্রনে (ইলেকট্রনের সমান ভর কিন্তু ধনাত্মক আধান সম্পন্ন +e অক্ষর দিয়ে চিহ্নিত) পরিবর্তিত হয়েছে।

উচ্চশক্তি সম্পন্ন গামা রশ্মির ফোটনকে (তড়িৎবিহীন) এই বাক্সের ভিতর দিয়ে যেতে দিলে দেখা যায়, যে প্রতিটি ফোটন থেকে একটি ইলেকট্রন এবং একটি পজিট্রন (Positron) যুগ্মের সৃষ্টি হয়েছে। পরীক্ষা করে দেখা গিয়েছে যে, ইলেকট্রন এবং পজিট্রনের তড়িৎ আধানের পরিমাণ সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন সম্বলিত এবং এই দুটি কণিকার ভরও সমান। এই দুটিকে কণিকা ও বিপরীত কণিকা বলা হয়। কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, যদিও প্রতিটি ফোটন থেকে দুটি করে তড়িতাহিত কণার উদ্ভব হচ্ছে কিন্তু কণাদুটির আধান সমান ও বিপরীত হওয়ায় বাক্সের ভিতরের মোট আধানের পরিমাণ শূন্যই থাকছে।

অতএব আধান সংরক্ষণের সূত্রকে নিম্নরূপে লেখা যায়— একটি বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের মধ্যে যেকোন সময় অবস্থিত মোট ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক আধানের বীজগাণিতিক যোগফল কখনো পরিবর্তিত হয় না।

প্রশ্নবলি — 2

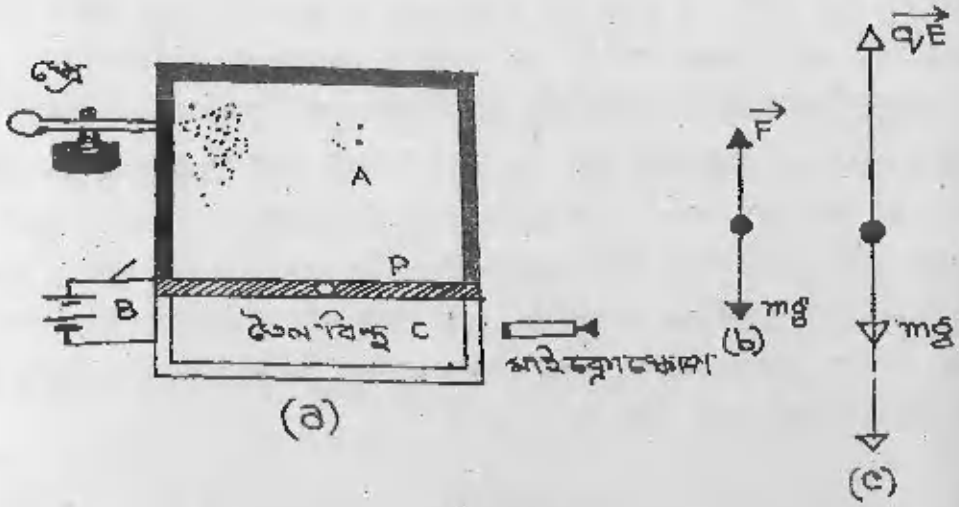
আধানের সংরক্ষণ নীতি অনুসরণ করে নিচের সমীকরণটির সমাধান করুন। এই সমীকরণে ব্যবহৃত সাংকেতিকগুলির অর্থ এইরূপ — $_ZX^A$ এখানে X মৌলের রাসায়নিক প্রতীক, Z এটির পারমাণবিক সংখ্যা (ইলেকট্রনের সংখ্যা) এবং A এটির ভর সংখ্যা (প্রোটন + নিউট্রনের সংখ্যা)

(i) $_{92}U^{238} \rightarrow {}_{90}Th^{234} + {}_{2}He^{4}$ (তেজস্ক্রিয় ক্ষয়)

(ii) $_{20}Ca^{44} + {}_{1}P^{1} \rightarrow {}_{21}Sc^{44} + {}_{0}n^{1}$ (পরমাণু বিক্রিয়া)

2.2.4 আধানের কোয়ান্টিকরণ (Quantization of charges)

ইলেকট্রন অথবা পজিট্রনের আধানই আধানের সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র মান। এই মানকে 'e' অক্ষর দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। মিলিকান (Milikan) তাঁর বিখ্যাত 'তৈলবিন্দু'র পরীক্ষার (oil drop experiment) সাহায্যে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র এবং বাহিরের থেকে প্রযুক্ত বিদ্যুৎ ক্ষেত্রের মিলিত ক্ষেত্রে একটি আহিত তৈলবিন্দুর গতি অধ্যয়ন করে 'e' এর মান নির্ণয় করেন।



চিত্র (2.3)

(a) 'e' এর মান নির্ধারণের জন্য তৈলবিন্দু (oil drop) যন্ত্র

(b) একটি তৈলবিন্দু ক্ষেত্রমুক্ত (field free) স্থানে v প্রান্তিক বেগ নিয়ে নিচে নামছে। এর ওজন ঊর্ধ্বমুখী সান্দ্রতাজনিত বল (drag) $\vec{F}$ দিয়ে প্রশমিত হচ্ছে।

(c) একটি তড়িৎক্ষেত্রজনিত বল তৈলবিন্দুটির ওপর কাজ করছে এবং সেইজন্য বিন্দুটি v প্রান্তিক বেগ নিয়ে উপরের দিকে উঠছে। এক্ষেত্রে সান্দ্রতাজনিত বল $\vec{F}$ (যেটি সবসময়ে বেগের বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে) এর দিকে নিম্নাভিমুখী।

চিত্র (2.3a) তে এই পরীক্ষা ব্যবস্থা দেখানো হয়েছে। একটি স্প্রে করার যন্ত্রের সাহায্যে ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক আধানে আহিত তৈলবিন্দুগুলিকে A কক্ষে প্রবেশ করানো হল।

এদের মধ্যে একটি তৈলবিন্দুকে নেওয়া যাক। ধরা যাক এই বিন্দুটি A এবং C কক্ষের সংযোগস্থলের কাচের প্লেট P_1 - এর মধ্যের একটি ফুটোর ভিতর দিয়ে C প্রকোষ্ঠে পৌঁছচ্ছে।

তড়িৎক্ষেত্রের অনুপস্থিতিতে এই তৈলবিন্দুটির উপর দুটি বল ক্রিয়া করে— নিম্নাভিমুখী ওজন mg এবং ঊর্ধ্বাভিমুখী সান্দ্রতাজনিত বল $\vec{F}$ (চিত্র 1.4b)। $\vec{F}$ এর মান নিম্নাভিমুখী পতনশীল তৈলবিন্দুর বেগের সমানুপাতিক। যখন মাধ্যাকর্ষণজনিত বল, সান্দ্রতাজনিত বল দ্বারা প্রশমিত হয় তখনই বিন্দুটি একটি স্থির প্রান্তিক দ্রুতি v প্রাপ্ত হয়। তড়িৎক্ষেত্রের উপস্থিতিতে একটি তৃতীয় বল $q\vec{E}$ বিন্দুটির উপর ক্রিয়া করে। q যদি ঋণাত্মক হয় তাহলে এই বল ঊর্ধ্বমুখী হবে এবং বিন্দুটি উপর দিকে উঠবে। নতুন সান্দ্রতাজনিত বলের দিক এখন নিম্নাভিমুখী (কারণ সান্দ্রতাজনিত বল সবসময় বিন্দুর গতির বিপরীত দিকে কাজ করে) এবং এর মান $\vec{F}$। যখন ঊর্ধ্বগামী তড়িৎক্ষেত্রজনিত বল, নিম্নাভিমুখী ওজন mg এবং সান্দ্রতাজনিত বল $\vec{F}'$ দ্বারা প্রশমিত হয় তখন তৈলবিন্দুটি একটি নতুন প্রান্তিক দ্রুতি v' প্রাপ্ত হয়। পরীক্ষা দ্বারা v এবং v' নির্ণয় করে আধানের মান q পাওয়া যায়। মিলিকান (Milikan) অনেকগুলি তৈলবিন্দু নিয়ে পর্যবেক্ষণ করেন এবং আবিষ্কার করেন যে, বিভিন্ন তৈলবিন্দুর আধান বিভিন্ন হলেও সেগুলি সবগুলির মানই একটি সর্বনিম্ন মানের পূর্ণগুণিতক। এই মানটি হচ্ছে 1.6×10^{-19} c, যেটি একটি ইলেকট্রনের আধানের (e) সমান। 'e' এর কম আধানযুক্ত কোনও কণিকা পাওয়া যায়নি। কোন একটি আহিত বস্তুর (যেমন কোন আহিত গোলক) অথবা একটি আহিত কণার আধানের পরিমাণ নির্ণয় করা হলে দেখা যাবে যে আধানের মান হয় e না হয় e এর পূর্ণগুণিতক 2e, 3e, 4e... হবে। কোন আধানের মানই 'e' এর ভগ্নাংশ :— যথা .7e অথবা 2·5e হবে না। এই তথ্যটি শুধু ঋণাত্মক আধানের ক্ষেত্রেই সত্য নয় ধনাত্মক আধানের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। গাণিতিক ভাবে লেখা যায়

$$q = ne \qquad \ldots (2.2)$$

যেখানে n = ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার মান। অতএব আমরা বলতে পারি যে, আধানগুলি গুচ্ছাকারে অবস্থান করে (in packets)। যখনই কোন ভৌতিক রাশির মান ক্রমপরিবর্তনশীল

অবস্থায় (continuous values) না থেকে বিচ্ছিন্ন (discrete) অবস্থায় থাকে তখনই বলা হয় ভৌতিক রাশিটি কোয়ান্টাইজড্ (quantized)। সুতরাং তড়িৎ আধানও কোয়ান্টাইজড্ অবস্থায় থাকে।

টিকা :— বর্তমানে কোয়ার্কের আবিষ্কার হওয়া সত্ত্বেও আধানের কোয়ান্টিকরণ তত্ত্বের কোন পরিবর্তন হয়নি। কোয়ার্কের আধানের পরিমাণ $\frac{e}{3}$। এর ফলে আধানের ন্যূনতম মূল এককের মান e এর পরিবর্তে $\frac{e}{3}$ হবে এবং অন্যান্য আহিত বস্তুর আধানের মান $\frac{e}{3}$ এর পূর্ণগুণিতক হবে।

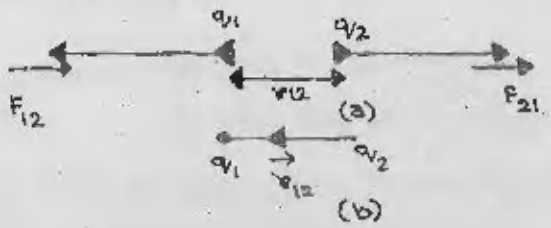
প্রশ্নাবলি — 3

একটি পরিবাহী আধানের পরিমাণ 3.2×10^{-17}C এটিতে কতকগুলি ইলেকট্রন কম বা বেশি আছে?

2.3 কুলম্বের সূত্র

আমরা দেখেছি যে সমধর্মী (Like) আধান পরস্পরকে বিকর্ষণ করে এবং বিপরীতধর্মী আধান পরস্পরকে আকর্ষণ করে। ফরাসি বৈজ্ঞানিক কুলম্ব (Coulomb) প্রথম 1785 সালে দুটি বিন্দু আধানের মধ্যের আকর্ষণ বা বিকর্ষণ বলের গাণিতিক বিশ্লেষণ করেন।

তিনি লক্ষ্য করেন যে, স্থিরতড়িৎ বল (electrostatic force) তড়িতাধানের মানের উপর নির্ভর করে। এছাড়াও এই বল আধান দুটির পরস্পরের দূরত্বের উপরও নির্ভরশীল। প্রকৃতপক্ষে এই তড়িৎবল আধানদুটির মধ্যের দূরত্বের বর্গের ব্যাস্তানুপাতিক।



চিত্র (2.4)

কুলম্বের সূত্রে ব্যবহৃত বল ও অন্যান্য রাশি

গাণিতিক উপায়ে কুলম্বের সূত্রকে প্রকাশ করার জন্য ধরা যাক দুটি আধান q_1 এবং q_2 পরস্পরের থেকে r_{12} দূরত্বে অবস্থান করছে (চিত্র 2.4)। কুলম্বের সূত্র অনুযায়ী q_2 আধানের জন্য q_1 আধানের উপরে প্রযুক্ত বল $\vec{F}_{12}$ কে নিম্নরূপে লেখা যায়।

$$\left|\vec{F}_{12}\right| \propto \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \qquad (2.3)$$

যেখানে $\left|\vec{F}_{12}\right| = \vec{F}_{12}$ বলের মান এবং r_{12} = বিন্দু আধান দুটির মধ্যের দূরত্ব।

(2.3) সমীকরণকে ভেক্টর সমীকরণরূপে লেখা যায় কেননা এই সমীকরণে বাম দিকে 'বল' রাশিটি রয়েছে। যেটি একটি ভেক্টর। ডানদিকের রাশিকেও ভেক্টর হিসাবে দেখাতে হলে আমাদের একটি দূরত্ব নির্দেশক একক ভেক্টর পদ $\hat{r}_{12}$ র অবতারণা করতে হবে। এই ভেক্টরটি একক মানের এবং এটির দিক নির্দেশ করা হয় দ্বিতীয় আধান q_2 থেকে আরম্ভ করে প্রথম আধান q_1 কে যুক্ত করা ভেক্টরের দ্বারা।

অতএব গাণিতিকভাবে $\vec{r}_{12}$ যদি একটি ভেক্টর হয় যেটি দ্বিতীয় আধানের অবস্থান থেকে শুরু হয়ে প্রথম আধানের অবস্থায় শেষ হয়েছে (চিত্র 2.4b) তাহলে

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{\left|\vec{r}_{12}\right|}$$

যেখানে $\left|\vec{r}_{12}\right|$, $\vec{r}_{12}$ ভেক্টরের মান নির্দেশ করছে।

এই একক ভেক্টর চিহ্নের সাহায্যে আমরা (2.3) কে লিখতে পারি

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \qquad ...(2.4)$$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ একটি ধ্রুবক। ε_0 কে বলা হয় শূন্য মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতা। SI এককে $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ এর মান $9\times10^9 Nm^2c^{-2}$ এই ধ্রুবকটির মান কী একক পদ্ধতি ব্যবহার করা হবে তার উপর নির্ভর করে। CGS একক পদ্ধতিতে এই ধ্রুবকের মান একক নেওয়া হয়।

(2.4) সমীকরণে ব্যবহৃত $\hat{r}_{12}$ একক ভেক্টরটি শুধু দিক নির্দেশের জন্য ব্যবহৃত হয়েছে, ফলে এই সূত্রটিকে ভেক্টর চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। দুটি আধানের মধ্যের দূরত্ব r_{12}। $\vec{F}_{21}$, q_2 আধানের উপর q_1 আধান কর্তৃক প্রযুক্ত বল (চিত্র 2.5a)। x, y এবং z অক্ষাভিমুখী একক ভেক্টরকে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

প্রশ্নাবলি - 4

বল $\vec{F}_{21}$ এর জন্য (1.4) সমীকরণের অনুরূপ সমীকরণটি লিখুন।

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ রাশিটি যথেষ্ট গুরুত্বপূর্ণ। আধান দুটি যদি নানাপ্রকার মাধ্যমে রাখা হয় তাহলে দেখা যায় যে (1.4) নং সমীকরণের আনুপাতিক ধ্রুবকের (permittivity) মান মাধ্যমের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় কিন্তু অন্যান্য রাশিগুলি অপরিবর্তিত থাকে। দেখা যায় যে, শূন্য মাধ্যমে নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত দুটি আধানের মধ্যে বলের মান সর্বাধিক। শূন্য মাধ্যমের পরিবর্তে অন্য কোন মাধ্যম ব্যবহার করলে এই বলের মান হ্রাস পায়। এই ঘটনার থেকে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যে, শূন্য মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতার মান সর্বাপেক্ষা কম। কোন মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতা ও শূন্য মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতার অনুপাতকে ঐ মাধ্যমের পরাতড়িৎ ধ্রুবক (অথবা ডাইলেক্ট্রিক ধ্রুবক বা Dielectric Constant) বা আপেক্ষিক আবেশ্যতা (Specific Inductive Capacity) বলা হয়। বায়ু মাধ্যমের জন্য এই অনুপাতের মান ≈ 1.005 কুলম্বের সূত্রকে লেখা যায়

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \qquad ....(2.5)$$

যেখানে $\varepsilon =$ মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতা।

আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতার হিসাবে উপরের সমীকরণকে লেখা যায়

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

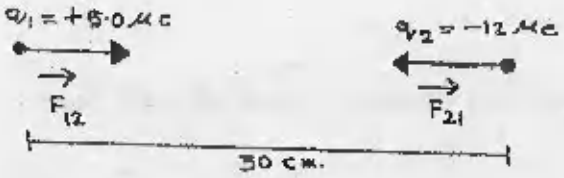
যেখানে $\varepsilon_r =$ মাধ্যমের আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা

$$= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\text{মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতা}}{\text{শূন্য মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতা}}$$

আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা ও পরাবিদ্যুৎ ধ্রুবক সমার্থক। কুলম্বের সূত্রের সাহায্য নিয়ে একটি সমস্যার সমাধান করা যাক।

উদাহরণ - 1

একটি আধান $q_1 = 5.0\mu c$ অপর একটি আধান $q_2 = -12\mu c$ এর পশ্চিম দিকে 30 cm দূরে অবস্থিত। ধনাত্মক আধানটি ঋণাত্মক আধানের উপর কী পরিমাণ বল প্রয়োগ করবে? ঋণাত্মক আধানের জন্য ধনাত্মক আধানের উপর বলও নির্ণয় করুন।



চিত্র (2.5)

(2.5) নং চিত্র অনুযায়ী কুলম্ব সূত্র ব্যবহার করে ধনাত্মক আধানের উপর বল

$$\bar{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}_{21}$$

$$= \frac{\left(9\times10^9 Nm^2c^{-2}\right)\left(5\times10^{-6}c\right)\left(-12\times10^{-6}c\right)}{(0.30m)^2}\hat{i}$$

$$= -6\hat{i}N$$

এখানে আমরা $\hat{r}_{21}$ এর পরিবর্তে $\hat{i}$ লিখেছি কারণ ঋণাত্মক আধান q_1 থেকে ধণাত্মক আধান q_2 পর্যন্ত একটি একক ভেক্টর x অক্ষের ধনাত্মক (পজিটিভ) দিক নির্দেশ করে। বলের ঋণাত্মক মানের অর্থ এই যে, বলের দিক x অক্ষের ঋণাত্মক (নেগেটিভ) অর্থাৎ পশ্চিম দিকে। এর অর্থ এই যে, বলটি একটি আকর্ষণ বল।

আবার ঋণাত্মক আধানের জন্য ধনাত্মক আধানের উপর বল

$$\bar{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}_{12}$$

$$= \frac{\left(9\times10^9 Nm^2c^{-2}\right)\left(5\times10^{-6}c\right)\left(-12\times10^{-6}c\right)}{(0.30m)^2}\left(-\hat{i}\right)$$

$$= 6\hat{i}N$$

এখানে $\hat{r}_{12}$ এর পরিবর্তে $-\hat{i}$ বসানো হয়েছে কেননা ধনাত্মক আধান q_2 থেকে ধনাত্মক আধান q_1 পর্যন্ত একটি একক ভেক্টর x অক্ষের ঋণাত্মক (নেগেটিভ) দিক নির্দেশ করে। এখানে বলের চিহ্ন ধনাত্মক অর্থাৎ এটি x অক্ষের ধনাত্মক দিক অথবা পূর্বদিক বরাবর কাজ করছে। অর্থাৎ এক্ষেত্রেও বলটি আকর্ষণ বল।

সুতরাং উপরের উদাহরণ থেকে নিউটনের তৃতীয় সূত্রের সত্যতা যাচাই হয়ে গেল যে, দুটি আধান একে অন্যের উপর সমান কিন্তু বিপরীত বল প্রয়োগ করে।

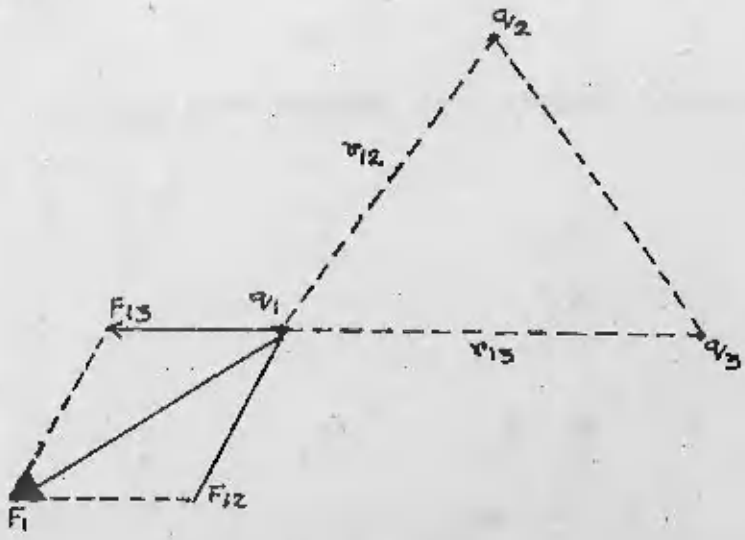
প্রশ্নমালা - 5

দুটি বিন্দু আধান q_1 এবং q_2 পরস্পরের থেকে 3cm দূরে অবস্থিত এবং তাদের মোট আধান $20\mu c$। একটি আধান দ্বারা 0·075N বল দ্বারা বিকর্ষিত হয় তাহলে আধান দুটির মান কত?

2.4 উপরিপাতের নীতি

এ পর্যন্ত আমরা দুটি আধান q_1 এবং q_2 র কথা আলোচনা করেছি এবং আধান দুটির মধ্যে স্থির তড়িৎ বলও নির্ণয় করেছি।

মনে করা যাক কোন ক্ষেত্রে দুটির বেশি আধান (ধরা যাক তিনটি আধান q_1, q_2, q_3) আছে। এক্ষেত্রে আধান q_1 এর উপর অন্য দুটি আধান q_2, q_3 - র জন্য বল নির্ণয় করতে হলে দুটি আধানের একটি যুগ্ম নিয়ে বিভিন্ন আধান যুগ্মের মধ্যের বল কুলম্বের সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করতে হবে। ফলে q_1 এর উপর লব্ধ বল — স্বতন্ত্রভাবে নির্ণীত q_1 এর উপর q_2 এর জন্য বল এবং q_1 এর উপর q_3 এর জন্য বলের ভেক্টর যোগফলের সমান হবে। তড়িৎ বলগুলির লব্ধি ভেক্টর যোগফলের দ্বারা পাওয়া যায়। এটিই উপরিপাতের নীতি।



চিত্র (2.6)

উপরিপাতের নীতির উদাহরণ হিসাবে চিত্র (2.6) দেখুন। আধান q_1 থেকে q_2 এবং q_3 যথাক্রমে r_{12} এবং r_{13} দূরত্বে অবস্থিত। q_2 আধানের প্রভাবে q_1 এর উপর বলের প্রতিরূপ $\bar{F}_{12}$। q_1 এবং q_2 সমধর্মী তড়িৎসম্পন্ন বলে এই বলটি বিকর্ষণ বল হবে এবং q_1, q_2 এর সংযোগকারী সরলরেখা বরাবর

q_2 থেকে q_1 এর দিকে প্রসারিত হবে। একইভাবে $\vec{F}_{13}$ (q_3র প্রভাবে q_1এর উপর বল), q_1 এবং q_3 যুক্ত করে যে সরলরেখাটি পাওয়া যায় সেটি বরাবর ক্রিয়া করবে এবং এর দিক হবে q_3 থেকে q_1 পর্যন্ত।

উপরিপাতের নীতি অনুসারে q_1 এর লব্ধি বল $\vec{F}_1$, $\vec{F}_{12}$ এবং $\vec{F}_{13}$ এর ভেক্টর যোগফলের সমান। [$\vec{F}_{12}$ এবং $\vec{F}_{13}$ দ্বারা একটি সামন্তরিক অঙ্কন করে লব্ধি $\vec{F}_1$ নির্ণয় করা যায় (চিত্র 2.6)]। অতএব গাণিতিক উপায়ে q_2 (r_{12} দূরত্বে অবস্থিত এবং q_3 r_{13} দূরত্বে অবস্থিত) আধানের প্রভাবে q_1 এর উপর লব্ধি বল

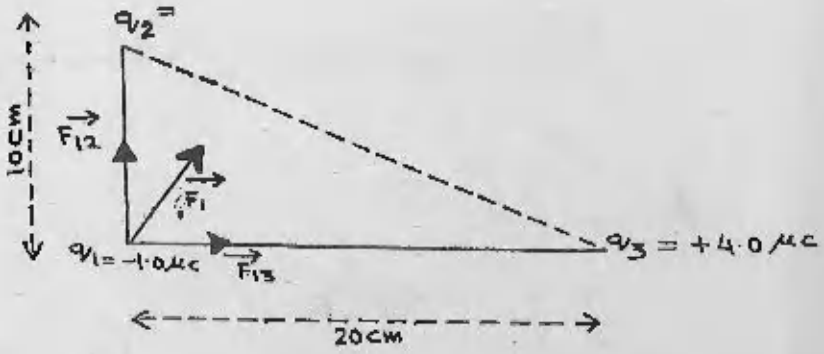
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

$$\therefore \quad \vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13}\right] \qquad .....(2.6)$$

এখানে $\hat{r}_{12}$ এবং $\hat{r}_{13}$র দিকে যথাক্রমে q_2 থেকে q_1 এবং q_3 থেকে q_1 পর্যন্ত অঙ্কিত রেখার দিক নির্দেশ করবে।

এই নীতিকে ভালোভাবে বোঝার জন্য নিচের উদাহরণটির সাহায্য নেওয়া যেতে পারে।

উদাহরণ - 2



চিত্র (2.7)

চিত্রে তিনটি আধান $q_1 = -1\cdot0\mu c, q_2 = 2\cdot0\mu c$ এবং $q_3 = 4\cdot0\mu c$ এর অবস্থান দেখানো হয়েছে।

অন্যদুটি আধানের প্রভাবের ফলে q_1 এর উপর স্থিরতড়িৎ বল নির্ণয় করুন। দেওয়া আছে $r_{12} = 10cm$ এবং $r_{13} = 20cm$

আপনার উত্তর একক ভেক্টরের চিহ্ন দ্বারা এবং মান ও দিক (direction) উভয়ের সাপেক্ষে প্রকাশ করুন।

উত্তর —

উপরের সমস্যাটির সমাধান করতে হলে উপরিপাতের নীতি প্রয়োগ করতে হবে।

q_1 এর উপর q_2 র জন্য বল

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} = \frac{\left(9\times10^9 Nm^2c^{-2}\right)\left(-1\times10^{-6}c\right)\left(2\times10^{-6}c\right)}{(0\cdot01cm)^2}\left(-\hat{j}\right)$$

$$= +1\cdot8\hat{j}N$$

একক ভেক্টর $\hat{r}$ এখানে $-\hat{j}$ হবে কেননা এটির দিক q_2 থেকে q_1 (y অক্ষের ঋণাত্মক দিকে) বলের ধনাত্মক মানের অর্থ, y অক্ষের ধনাত্মক দিকে $\vec{F}_{12}$ ক্রিয়া করছে; অর্থাৎ এটি আকর্ষণ বল।

অনুরূপভাবে, q_3 র প্রভাবে q_1 এর উপর বল

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13}$$

$$= \frac{\left(9\times10^9 Nm^2c^{-2}\right)\left(-1\times10^{-6}c\right)\left(4\times10^{-6}c\right)}{(0.20m)^2}\left(-\hat{i}\right)$$

$$= 0\cdot90\hat{i}N$$

$\vec{F}_{13}$, x অক্ষের ধনাত্মক দিকে ক্রিয়া করছে। কাজেই বলটি আকর্ষণ বল। বলের উপরিপাতের নীতি অনুসারে q_1 এর উপর লব্ধি বল $\vec{F}_1$ কে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

অথবা $\vec{F}_1 = \left(0\cdot90\hat{i} + 1\cdot8\hat{j}\right)N$

$\vec{F}_1$ বলের মান $= \sqrt{(0\cdot90)^2 + (1\cdot8)^2} = 2.01N$

এবং এটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1.8}{0.9} = \tan^{-1} 2 = 63.5^\circ$$ কোণ করে ক্রিয়া করছে।

2.5 তড়িৎক্ষেত্র

কোন তড়িতাধানের চারিদিকে যতটা অঞ্চল জুড়ে আধানের আকর্ষণ বা বিকর্ষণ বল অনুভূত হয় তাকে ঐ আধানের তড়িৎক্ষেত্র বলে। তাত্ত্বিক অর্থে একটি আধানের তড়িৎক্ষেত্র অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। তবে কার্যত কিছুটা সীমিত দূরত্বের পরে এই বল এতই দুর্বল হয়ে পড়ে যে, আধানের জন্য বিশেষ কোন বল অনুভূত হয় না। এই ক্ষেত্রের মান জানা থাকলে তড়িতাধানের উপর বল নির্ণয় করা যায় এবং এর পরে নিউটনের সূত্র ব্যবহার করে তড়িৎ আধানের গতির সম্বন্ধে জানা যায়। সব বস্তুতেই তড়িতাহিত কণিকা বর্তমান, সেজন্য তড়িৎক্ষেত্রের জ্ঞান আমাদের বস্তুর গঠন এবং ধর্ম সম্বন্ধে জানতে সাহায্য করে।

এই অংশে আমরা একটি বিন্দু আধানের জন্য তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করতে শিখব। অতঃপর কয়েকটি আধানের সমষ্টি এবং সবশেষে আধানের নিরবচ্ছিন্ন বন্টনের (Continuous distribution) জন্য তড়িৎক্ষেত্রের মান নির্ণয় করব।

এর পর তড়িৎক্ষেত্রের পূর্ণ চিত্র পাওয়ার জন্য তড়িৎ বলরেখার ধারণা উপস্থাপিত করা হবে।

2.5.1 তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য

পূর্ববর্তী (2.3) অংশে আপনারা দুটি আধান q_1 এবং q_2র মধ্যে তড়িৎ বলের কথা জেনেছেন। এর মধ্যে একটি আধান (ধরা যাক q_2) যদি একটি একক আধান হয় তবে অপর আধান q_1 এর প্রভাবে এই একক আধান যে বল অনুভব করে, তাকে ঐ একক আধানের অবস্থান বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য বা তীব্রতা বলা হয়।

কোন তড়িৎক্ষেত্রে একটি বিন্দুতে অবস্থিত একটি পরীক্ষাধীন আধান (Test Charge) q $\vec{F}$ বল অনুভব করলে সংজ্ঞা অনুসারে ঐ বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের $(\vec{E})$ মান হবে।

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \text{ অথবা } \vec{F} = q\vec{E} \qquad \text{.... (2.7)}$$

যেকোন স্থানে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য (তীব্রতা) নির্ণয়ের জন্য ঐ স্থানে একটি পরীক্ষাধীন আধান রেখে তার উপরের বল নির্ণয় করতে হবে। যে আধানগুলির প্রভাবে তড়িৎক্ষেত্র সৃষ্টি হয় সেই আধানগুলিকে পরীক্ষাধীন আধান প্রভাবিত করতে পারে। কাজেই নীতিগতভাবে পরীক্ষাধীন আধানটিকে

এত ছোট কল্পনা করা হয় যাতে এর প্রভাবে তড়িৎক্ষেত্র সৃষ্টিকারী আধানগুলির বিন্যাস অপরিবর্তিত থাকে।

(2.7) সমীকরণ অনুযায়ী তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের একক নিউটন কুলম্ব $^{-1}$। $\vec{F}$ ভেক্টর রাশি হওয়ায় $\vec{E}$ ও ভেক্টর রাশি হবে। q ধনাত্মক আধান হলে $\vec{E}$ এর দিক আধানের উপর বল যে দিকে কাজ করে সেই দিকমুখীই হবে। q ঋণাত্মক আধান হলে $\vec{E}$ এর দিক আধানের উপর বল যে দিকে কাজ করে তার বিপরীতমুখী হবে।

বিন্দু আধানের জন্য তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য নির্ণয় করা খুবই সহজ। কুলম্বের সূত্র থেকে আমরা জানি যে, একটি বিন্দু আধান q_1 অপর একটি বিন্দু আধান q থেকে r দূরত্বে অবস্থান করলে q_1 কর্তৃক অনুভূত বল হবে

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q}{r^2}\hat{r} \qquad ....(2.8)$$

যেখানে $\hat{r}$ = একক ভেক্টর, এটির দিক q_1 থেকে q এর অবস্থানের দিকে বিস্তৃত। সংজ্ঞা অনুযায়ী একক আধানের উপর বলকে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য বলা হয়। সুতরাং, q_1 এর অবস্থান বিন্দুতে q এর জন্য প্রাবল্য নির্ণয় করতে হলে (2.8) নং সমীকরণের বলের $(\vec{F})$ প্রতিরূপকে q_1 দিয়ে ভাগ করতে হবে। অর্থাৎ

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad ....(2.9)$$

উপরের সমীকরণটি বিন্দু আধান q এর জন্য r দূরত্বের কোন বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য নির্দেশ করছে। একক ভেক্টর $\hat{r}$ এর দিক q থেকে শুরু হয়ে যে বিন্দুতে প্রাবল্য নির্ণয় করা হচ্ছে সেই পর্যন্ত বিস্তৃত।

উপরিপাতের নীতির সাহায্য নিয়ে দুই বা ততোধিক আধানের জন্য তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য নির্ণয় করা সম্ভব। কারণ তড়িৎ বল উপরিপাতের নীতি মেনে চলে এবং তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য যেহেতু প্রতি একক আধান দ্বারা অনুভূত বল হিসাবে প্রকাশ করা হয় সেই কারণে প্রাবল্য নির্ণয়ের ক্ষেত্রেও উপরিপাতের নীতি প্রযোজ্য হবে।

অতএব একাধিক আধানের জন্য কোন বিন্দুতে প্রাবল্য, প্রতিটি আধানের জন্য ঐ বিন্দুতে প্রাবল্যের ভেক্টর যোগফল হবে।

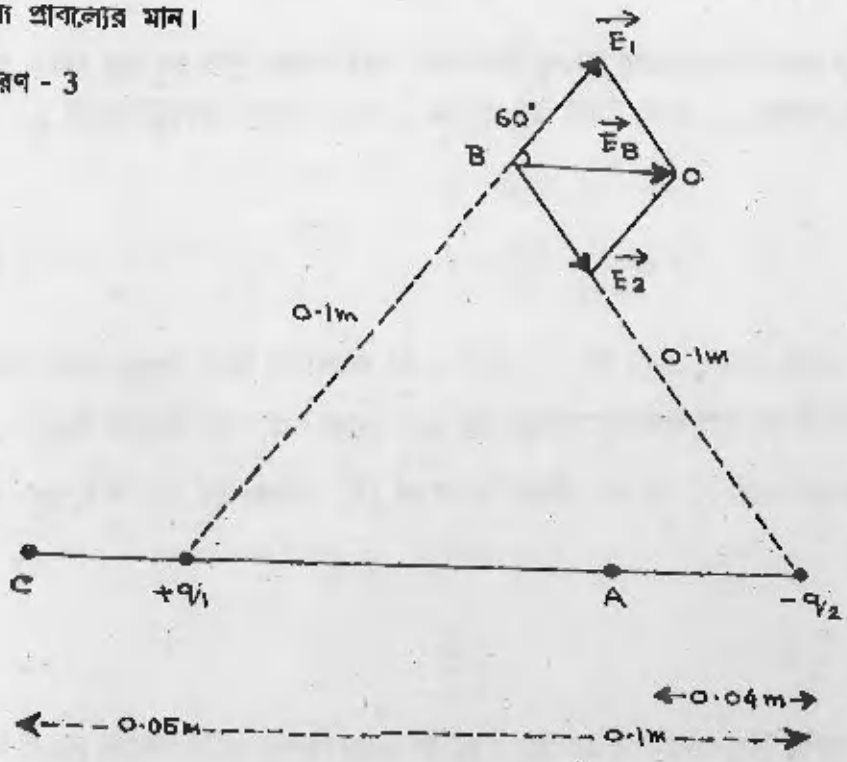
(2.9) নং সমীকরণ একটি আধানের জন্য প্রাবল্য নির্দেশ করছে।

অতএব nটি আধানের জন্য প্রাবল্য $\bar{E}$ কে লেখা যায়

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 \ldots + \bar{E}_n = \sum_{j=1}^{n} \bar{E}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{r_j^2} \hat{r}_j \qquad \ldots(2.10)$$

$\bar{E}_j =$ যে বিন্দুতে তড়িৎ প্রাবল্য নির্ণয় করা হচ্ছে সেই বিন্দু থেকে r_j দূরত্বে অবস্থিত আধান q_j-র জন্য প্রাবল্যের মান।

উদাহরণ - 3



চিত্র (2.8)

চিত্র (2.8) অনুসারে দুটি আধান q_1 এবং q_2 যেখানে $q_1 = -q_2 = 12 \times 10^{-9}$c পরস্পরের থেকে 1 মি. দূরত্বে অবস্থিত। এই দুটি আধানের জন্য A এবং B বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য নির্ণয় করুন।

উত্তর — (1) A বিন্দুতে q_1 এর জন্য প্রাবল্য

$$\bar{E}_1 = \frac{\left(9 \times 10^9 \mathrm{Nm^2c^{-2}}\right)\left(12 \times 10^{-9}\mathrm{c}\right)\hat{i}}{\left(0 \cdot 06\mathrm{m}^2\right)}$$

$$= \frac{(9\times10^{9}Nm^{2}c^{-2})(12\times10^{-9}c)\hat{i}}{36\times10^{-4}m^{2}}$$

$= 3\times10^{4}\hat{i}Nc^{-1}$ (নিউটন কুলম্ব$^{-1}$)

q_2 আধানের জন্য Aতে প্রাবল্য

$$\vec{E}_2 = \frac{(9\times10^{9}Nm^{2}c^{-2})(-12\times10^{-9}c)}{(0\cdot04m)^{2}}(-\hat{i})$$

$$= \frac{(9\times10^{9}Nm^{2}c^{-2})(-12\times10^{-9}c)}{4\times10^{-4}m^{2}}\hat{i}$$

$= 6\cdot75\times10^{4}\hat{i}Nc^{-1}$

$\therefore$ A তে লব্ধি প্রাবল্য

$E_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (3+6\ 75)\times10^{4}\hat{i}\ Nc^{-1}$

$= 9\cdot75\times10^{4}\hat{i}\ Nc^{-1}$

(ii) B বিন্দুতে q_1 এর জন্য প্রাবল্য

$$\vec{E}_1 = \frac{(9\times10^{9}Nm^{2}c^{-2})(12\times10^{-9}c)}{(0.1m)^{2}}(\hat{r}_+)$$

$= 1\cdot08\times10^{4}\hat{r}_+Nc^{-1}$

(এখানে একক ভেক্টর $\hat{r}_+$ ডাইনে কোনাকুনি উপরাভিমুখে দিক নির্দেশ করছে)

$\vec{E}_1$ এবং $\hat{r}_+$ একই দিকে ক্রিয়া করছে।

অনুরূপভাবে, B বিন্দুতে q_2 আধানের জন্য প্রাবল্য

$$\vec{E}_2 = \frac{(9\times10^{9}Nm^{2}c^{-2})(-12\times10^{-9}c)}{(0\cdot1m)^{2}}(\hat{r}_-)$$

$= -1\cdot08\times10^{4}\hat{r}_-Nc^{-1}$

এখানে একক ভেক্টর $\hat{r}$_ যাদের কোনাকুনিভাবে উপরাভিমুখে) দিক নির্দেশ করছে।

$\vec{E}_2$ এর ঋণাত্মক চিহ্নের অর্থ এখানে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য ডাইনে কোনাকুনি ভাবে নিচের অভিমুখে ক্রিয়া করছে। (চিত্র 2.8) এখানে আমাদের বলদুটির ভেক্টর যোগফল করতে হবে। $\vec{E}_1$ এবং $\vec{E}_2$ র x এবং y অক্ষ বরাবর উপাংশ নেওয়ার পর দেখা যাবে যে $\vec{E}_1$ এবং $\vec{E}_2$ - র y উপাংশের মান সমান এবং বিপরীতমুখী হওয়ায় পরস্পরকে প্রশমিত করবে। শুধু x অক্ষ বরাবর উপাংশগুলি যুক্ত হবে $(B\vec{O})$। x অক্ষ এবং $\vec{E}_1$ অথবা $\vec{E}_2$ ভেক্টরের মধ্যের কোণের পরিমাণ $60°$ (কেননা B, q_1 এবং q_2 কে যুক্ত করে একটি সমবাহু ত্রিভুজ তৈরি হয়েছে যার প্রতিটি কোণের মান $60°$।

অতএব লব্ধি বল BO বরাবর ক্রিয়া করবে এবং এটির মান

$$E_B = \left(1\cdot08\times10^{+4}\cos60° + 1\cdot08\times10^{4}\cos60°\right)Nc^{-1}$$

$$= 1\cdot08\times10^{4}Nc^{-1}$$

প্রশ্নমালা - 6

(2.8) নং চিত্রের C বিন্দুতে (q_1 থেকে 0.05m দূরে অবস্থিত) প্রাবল্য নির্ণয় করুন।

এ পর্যন্ত আমরা একটি স্বতন্ত্র আধান এবং দুটি অথবা তার বেশি সংখ্যক আধানের সমষ্টির জন্য প্রাবল্যের মান নির্ণয় করেছি। এখন আমরা আলোচনা করব এমন একটি স্থানের অথবা বস্তুর কথা যেখানে আধান নিরবচ্ছিন্ন ভাবে (Continuous distribution) (চিত্র 2.9) বন্টিত। এর উদাহরণ আমাদের প্রাত্যহিক জীবনে দেখা যায়। যখন কোন ধাতব পদার্থকে তড়িতাহিত করা হয় তখন তড়িৎ আধানগুলি সমস্ত পদার্থটিতে ছড়িয়ে পড়ে।

এই নিরবচ্ছিন্ন ভাবে বন্টিত আধানের প্রভাবে P বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করার জন্য আমরা আহিত বস্তুটি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র তড়িতাধান dq এর সমষ্টি বলে মনে করব। এই আধানের আয়তন এতই ছোট যে এটির প্রত্যেকটি বিন্দু P থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত। প্রত্যেকটি আধান dq, নিচের সমীকরণ অনুসারে

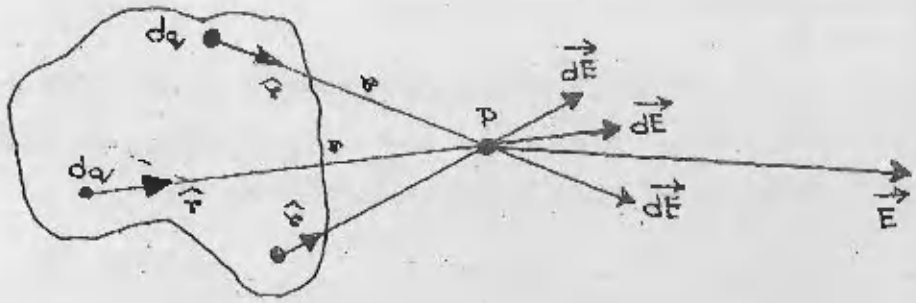
P বিন্দুতে একটি ক্ষুদ্র তড়িৎক্ষেত্র $\vec{dE}$ সৃষ্টি করবে।

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r} \qquad ...(2.11)$$

এবার (2.10) সমীকরণের ন্যায় সমস্ত $\vec{dE}$ পদগুলিকে ভেক্টর যোগফল করলে তড়িতাহিত বস্তুর প্রভাবে P বিন্দুতে সৃষ্ট প্রাবল্য $\vec{E}$ পাওয়া যাবে। এখানে আমরা ধরে নিয়েছি যে ক্ষুদ্র আধান dqগুলি যুক্ত করে তড়িতাহিত বস্তুটি পাওয়া যাবে। কিন্তু নিরবচ্ছিন্ন আধান পেতে গেলে আমাদের dq এর মান অত্যন্ত ক্ষুদ্র করতে হবে এবং ভেক্টর যোগফলের পরিবর্তে সমাকলন করতে হবে।
অতএব যখন

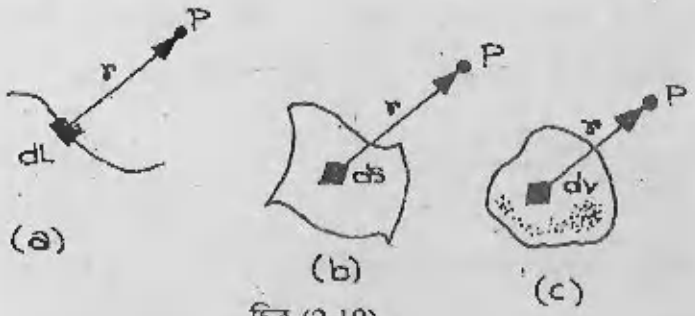
$$\vec{E} = \int \vec{dE} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r} \qquad \ldots (2.12)$$

যে স্থান জুড়ে আধান বিস্তৃত আছে সেই পুরো স্থানটি যাতে অন্তর্ভুক্ত হয় সেইভাবে সমাকলনের সীমা নির্দিষ্ট করা হয়। যে অঞ্চল জুড়ে আধান বিস্তৃত সেটি রেখা হতে পারে অথবা তল (বা ক্ষেত্র) অথবা ত্রিমাত্রিক ঘনতল (বা আয়তন) হতে পারে। এই স্থানে আমরা আধানের পরিবর্তে আধান ঘনত্বের



চিত্র (2.9)

(density of charges) কথা বলি। রৈখিক আধান ঘনত্বকে λ দ্বারা তলীয় আধান ঘনত্বকে 6 দ্বারা এবং আয়তনিক ঘনত্বকে



চিত্র (2.10)

ρ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। (চিত্র 2.10)। এই রাশিগুলি যথাক্রমে প্রতি একক দৈর্ঘ্যে আধান (একক cm^{-1}), প্রতি একক ক্ষেত্রফলে আধান (একক cm^{-2}) এবং প্রতি একক আয়তনে আধান (একক cm^{-3}) নির্দেশ করে।

চিত্র (2.10a) তে আধানগুলি একটি রেখা বরাবর বিস্তৃত। এই রেখার একটি ক্ষুদ্র অংশ dl নেওয়া হল। এই অংশের আধান $dq = \lambda dl$। এখন (2.12) সমীকরণে dq এর পরিবর্তে λdl লিখলে একটি রৈখিক আধানের প্রভাবে P বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের রূপ হবে

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{r}}{r^2}\lambda dl \qquad ....(2.13)$$

(2.10b) - চিত্রে দেখা যাচ্ছে আধানগুলি একটি তলের উপর বিস্তৃত। তলের একটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্র dS কে নেওয়া হল।

এই অংশের আধানের পরিমাণ $dq = \sigma ds$। (2.12) সমীকরণে dq এর পরিবর্তে σds লিখলে একটি তলীয় আধানের প্রভাবে P বিন্দুতে প্রাবল্যের রূপ হবে

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{r}}{r^2}\sigma ds \qquad ...(2.14)$$

অনুরূপে (2.10c) চিত্রে আধানগুলি একটি ত্রিমাত্রিক আধানের উপর বিস্তৃত। একটি ক্ষুদ্র আয়তন dv কে নেওয়া হলে dv র আধান হবে $dq = \rho dv$। এখন (2.12) সমীকরণে dq এর পরিবর্তে ρdv লিখলে একটি আয়তনিক আধানের প্রভাবে P বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের রূপ হবে

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{r}}{r^2}\rho dv \qquad ...(2.15)$$

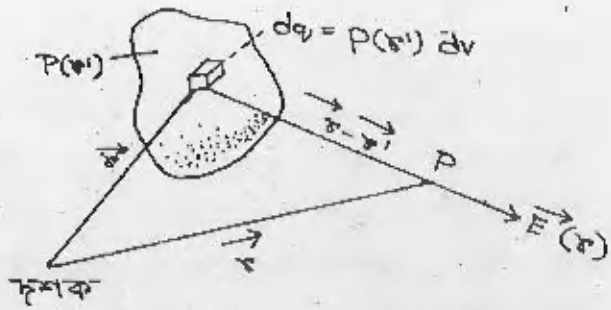
(2.13), (2.14) এবং (2.15) এর ভেক্টর সমাকলনগুলিকে (Integral) রৈখিক সমাকলন (line Integral), তলীয় সমাকলন (Surface Integral) এবং আয়তনিক সমাকলন (Volume Integral) বলা হয়।

এখানে উল্লেখ্য যে, আধান ঘনত্ব λ, σ অথবা ρ স্থির সংখ্যা (constant) নয়। এগুলি অবস্থানের উপরও নির্ভরশীল হতে পারে। উদাহরণ স্বরূপ — একটি আয়তন v' এর উপর আয়তনিক আধান ঘনত্বের $\rho(\vec{r}')$ প্রভাবে P বিন্দুতে (চিত্র 2.11) তড়িৎক্ষেত্রের রূপ হবে

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv' \qquad ...(2.16)$$

এখানে $\vec{r}' \rightarrow$ দর্শকের অবস্থান থেকে আধানের দূরত্ব

$\vec{r}' =$ দর্শকের অবস্থান থেকে P বিন্দুর (যে বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করা হবে) দূরত্ব

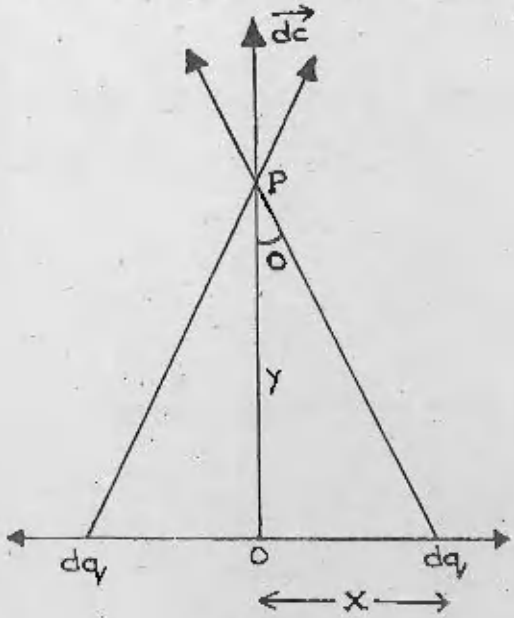


চিত্র 2.11

P বিন্দুতে আয়তনিক আধান ঘনত্বের $[\rho(r')]$ জন্য তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য নির্ণয়। $\vec{r}'$ ভেক্টরের মান সমাকলনের সময় পরিবর্তিত হয় কিন্তু $\vec{r}$ এর মান স্থির থাকে।

উদাহরণ - 4

একটি সুসম তড়িতাহিত অসীম দৈর্ঘ্যের দণ্ড x অক্ষ বরাবর বিস্তৃত (চিত্র 2.12)। এই দণ্ডের আধানের রৈখিক ঘনত্বের মান $\lambda\,\mathrm{cm}^{-1}$ হলে y অক্ষে অবস্থিত বিন্দু Pতে তড়িৎক্ষেত্রের মান নির্ণয় করুন।



চিত্র (2.12)

সমাধান --- ধরা যাক P বিন্দুটি দণ্ডটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর y দূরত্বে অবস্থিত। কেন্দ্রবিন্দু O এর দক্ষিণদিকে x দূরত্বে দণ্ডের একটি ক্ষুদ্র অংশ dx নেওয়া হল।

$\therefore$ dx অংশের আধান $dq = \lambda dx$

এই ক্ষুদ্র আধান dq এর জন্য P বিন্দুতে প্রাবল্যের মান

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

P বিন্দুতে মোট ক্ষেত্র নির্ণয় করার জন্য আমরা dE কে x এবং y উপাংশের ভিত্তিতে প্রকাশ করে, প্রত্যেকটি উপাংশকে দণ্ডটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্যের জন্য সমাকলন করতে হবে। মনে রাখতে হবে যে, কেন্দ্র বিন্দুর ডানদিকে অবস্থিত প্রতিটি dq আধানের জন্য কেন্দ্রবিন্দু থেকে বামদিকে সমান দূরত্বে অবস্থিত আর একটি dq আধান আছে। সুতরাং, প্রত্যেক জোড়া dq আধানের জন্য প্রাবল্যের x উপাংশ পরস্পরকে প্রশমিত করবে এবং y উপাংশ দুটি সমান হবে। dE - র y উপাংশের মান

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{y}{r} \qquad \left[\because r^2 = x^2 + y^2\right]$$

সুতরাং $d\vec{E}_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ydq}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{j}$

$\therefore$ দুটি dq আধানের জন্য Pতে মোট তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য $d\vec{E}$ দুটি সমান y উপাংশ $d\vec{E}_y$ - র যোগফলের সমান হবে

$$\therefore d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ydq}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{j} \qquad \text{(A)}$$

$\therefore$ দণ্ডটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্যের জন্য P বিন্দুতে লব্ধি প্রাবল্য

$$\bar{E} = \int d\bar{E} = \int_{x=0}^{x=\infty}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{ydq}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{j}$$

দণ্ডটির দৈর্ঘ্য $-\alpha$ থেকে $+\alpha$ পর্যন্ত বিস্তৃত তথাপি সমাকলনটির সীমা O থেকে α (দণ্ডটির দৈর্ঘ্যের

অর্ধেক) পর্যন্ত নেওয়া হয়েছে। কেননা প্রাবল্যের প্রতিরূপ Ⓐ টি একজোড়া আধান dq - এর জন্য নির্ণয় করা হয়েছে। কাজেই লব্ধি প্রাবল্য নির্ণয় করতে হলে এটিকে দণ্ডের অর্ধেক দৈর্ঘ্যের জন্য সমাকলন করতে হবে।

dq এর স্থানে λdx বসিয়ে আমরা পাই

$$\vec{E} = \frac{\lambda y}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\alpha}\frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{j}$$

$x = y\tan\theta$ বসিয়ে আমরা লিখতে পারি

$$dx = y\sec^2\theta\, d\theta$$

দণ্ডটি খুব লম্বা হওয়ায় $x-0$ থেকে α পর্যন্ত বিস্তৃত হলে θর মান O থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত হবে।

সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$\vec{E} = \frac{\lambda y}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{y\sec^2\theta\, d\theta}{\left(y^2\tan^2\theta+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{j}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda y}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{y\sec^2\theta\, d\theta}{y^3\sec^3\theta}\hat{j} \qquad \left(\because 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta\right)$$

$$= \frac{\lambda y}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\ \ d\theta\hat{j}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\hat{j} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\hat{j}$$

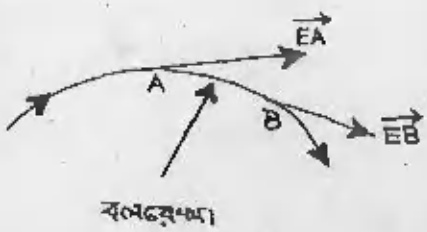
অসীম দৈর্ঘ্যের ধনাত্মক আধানে আহিত একটি দণ্ডের জন্য প্রাবল্যের দিক দণ্ডটির থেকে বাইরের দিকে প্রসারিত এবং প্রাবল্যের মান দণ্ডের থেকে দূরত্বের ব্যস্তানুপাতিক।

পূর্বে বর্ণিত কঠিন উপায় ছাড়াও নিরবচ্ছিন্ন আধান বন্টনের জন্য প্রাবল্য নির্ণয়ের একটি সহজ উপায় সম্বন্ধে আমরা জানব।

2.5.2 তড়িৎ বলরেখা

পূর্বের অংশে আপনারা বিভিন্ন আধান বন্টনের জন্য কোন বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের মান এবং দিক নির্ণয় করতে শিখেছেন। কিন্তু সম্পূর্ণ তড়িৎক্ষেত্রের একটি চিত্র পাওয়ার জন্য তড়িৎ বলরেখা ব্যবহার করা হয়।

কোন তড়িৎক্ষেত্রে বলরেখা বলতে এমন একটি রেখা বোঝায় যেটির যেকোন বিন্দুতে স্পর্শক টানলে সেই স্পর্শক ঐ বিন্দুতে ক্ষেত্রের প্রাবল্যের দিক নির্দেশ করে। বলরেখার উপর অবস্থিত একটি ধনাত্মক মুক্ত আধান যে দিকে বল অনুভব করবে সে দিকই ঐ বলরেখার ধনাত্মক (পজিটিভ) দিক নির্দেশ করে।



চিত্র (2.13) একটি তড়িৎ বলরেখা

তড়িৎ বলরেখার উপর নিম্নলিখিত ধর্মগুলি আরোপ করা হয় :—

(i) বলরেখাগুলি ধনাত্মক তড়িৎ পরিবাহী অথবা অসীম দূরত্ব থেকে শুরু হয় এবং ঋণাত্মক তড়িৎ পরিবাহী অথবা অসীম দূরত্বে শেষ হয়।

(ii) বলরেখাগুলি পরিবাহীতলকে লম্বভাবে স্পর্শ করে। কোন বলরেখা একই পরিবাহীতে শুরু ও শেষ হয় না। ফলে কোন ফাঁপা পরিবাহীর অভ্যন্তরে কোন বলরেখা থাকতে পারে না।

(iii) প্রত্যেকটি বলরেখার দুই প্রান্তে সম-পরিমাণ বিপরীত আধান থাকে। কোন আধানে যে সংখ্যক বলরেখা আরম্ভ বা শেষ হয় তাহা আধানের পরিমাণের সমানুপাতী।

(iv) বলরেখাগুলি বিতত স্থিতিস্থাপক সূতার (Stretched elastic threads) মতো আচরণ করে। উহারা দৈর্ঘ্য বরাবর সঙ্কুচিত হতে চেষ্টা করে। একদিকগামী হলে উহারা পাশ বরাবর পরস্পরকে বিকর্ষণ করে। বলরেখাদের এই ধর্ম থেকে দুটি আহিত বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বা বিকর্ষণকে সহজেই ব্যাখ্যা করা যায়।

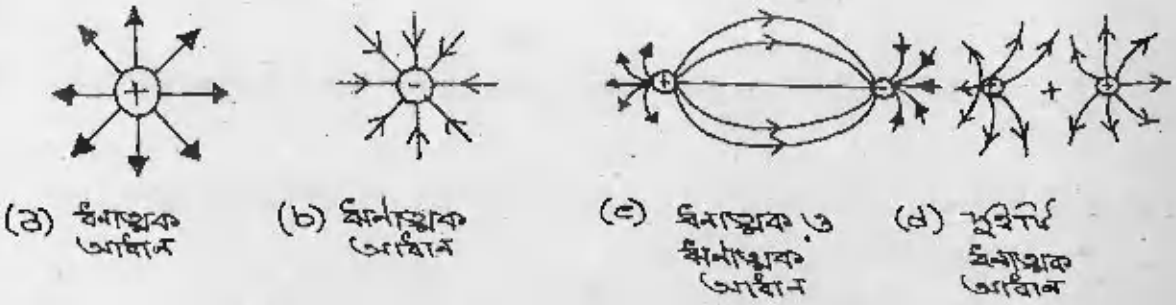
(v) দুটি বলরেখা কখনো পরস্পরকে ছেদ করে না; কারণ তা হলে দুটি বলরেখার ছেদবিন্দুতে বলরেখার উপর দুইটি স্পর্শক টানা যাবে, অর্থাৎ তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের দুটি দিক থাকবে। এটি অসম্ভব।

(vi) তড়িৎক্ষেত্রফলের কোন অঞ্চলে বলরেখাগুলির ঘনত্ব (অর্থাৎ আড়াআড়িভাবে একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে যতগুলি বলরেখা চলে যায়) ঐ অঞ্চলে তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রাবল্যের মান নির্দেশ করে।

বলরেখার সংজ্ঞা নিম্নরূপেও দেওয়া যায় —

কোন তড়িৎক্ষেত্রে একটি মুক্ত ধনাত্মক বিন্দু আধানের রৈখিক পথকে তড়িৎ বলরেখা বলা হয়। এজন্য বলরেখার উপর তীরচিহ্ন দেওয়া থাকে। এই তীর চিহ্ন ধনাত্মক আধানের গতির দিক নির্দেশ করে (2.13 চিত্র দ্রষ্টব্য)

মনে রাখা প্রয়োজন যে, বলরেখাগুলির বাস্তব অস্তিত্ব নেই তড়িৎক্ষেত্রে ধারণা পাওয়ার জন্যই বলরেখাগুলির সাহায্য নেওয়া হয়।



চিত্র (2.14) কয়েকটি ক্ষেত্রে বলরেখার চিত্র

2.6 সারাংশ

আধান দুই প্রকার ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক। সমপ্রকারের আধান পরস্পরকে বিকর্ষণ করে, বিপরীত আধান পরস্পরকে আকর্ষণ করে।

- SI পদ্ধতিতে আধানের একক কুলম্ব (C)।
- মোট আধান সবসময়ে সংরক্ষিত থাকে। অর্থাৎ, একটি বিচ্ছিন্ন এবং বদ্ধ তন্ত্রে মোট আধানের বীজগাণিতিক যোগফল অপরিবর্তিত থাকে।
- তড়িৎ আধান কোয়ান্টাইজড্ অবস্থায় অর্থাৎ গুচ্ছাকারে থাকে।

- দুটি আধানের মধ্যের বল আধান দুটি মানের গুণফলের সমানুপাতিক আধান দুটির মধ্যের দূরত্বের বর্গের ব্যাস্তানুপাতিক।

  ∴ দুটি আধানের সংযোগকারী সরলরেখা বরাবর কার্যকরী বলের রূপ

  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ এর মান $9 \times 10^9 Nm^2c^{-2}$

- দুটি অথবা তার বেশি আধানের উপস্থিতিতে অন্য একটি আধানের উপর বল, প্রতিটি আধানের জন্য বলের ভেক্টর যোগফলের সমান হবে। এই নীতির নাম বলের উপরিপাতের নীতি।

- তড়িৎক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে একটি একক ধনাত্মক আধান থাকলে সেটি যে বল অনুভব করে তাকে ঐ বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য বা তীব্রতা বলে $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$

- একটি বিন্দু আধান q এর জন্য তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য

  $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

  $\hat{r}$ = একক ভেক্টর। এটির দিক q আধান থেকে যে বিন্দুতে প্রাবল্য নির্ণয় করে হচ্ছে সেদিক পর্যন্ত বিস্তৃত।

- অনেকগুলি আধানের সমষ্টির জন্য প্রাবল্য, প্রত্যেকটি আধানের জন্য আলাদাভাবে প্রাবল্য নির্ণয় করে সেগুলির ভেক্টর যোগফলের সমান

  $$\vec{E} = \sum_n \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_n}{r_n^2} \hat{r}_n$$

  আধানের বন্টন অবিচ্ছিন্ন হলে যোগফলের পরিবর্তে সমস্ত বন্টিত আধানের জন্য সমাকলন করতে হবে

  অর্থাৎ $\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$

  উদাহরণস্বরূপ v' আয়তনের উপর আয়তনিক আধান ঘনত্ব $\rho(\vec{r}')$ এর জন্য প্রাবল্যের প্রতিরূপ

  $$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dv'$$

2.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(i) দুইটি ধনাত্মক আধান $q_1 = +4e$ এবং $q_2 = +e$ পরস্পর থেকে 'a' দূরত্বে অবস্থিত। এই দুইটি আধানের সংযোগকারী সরলরেখার উপর একটি তৃতীয় আধান q এমনভাবে অবস্থিত যাতে q সাম্যে থাকে। q এর অবস্থান নির্ণয় করুন। কোন অবস্থায় এই সাম্য সুস্থির (stable) হবে এবং কোন অবস্থায় অস্থির (unstable) হবে নির্ণয় করুন।

(ii) ABCD একটি বর্গক্ষেত্র যাহার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 0·04ml। এটির A, C এবং D বিন্দুতে যথাক্রমে 16×10^{-9}c, -16×10^{-9}c এবং 32×10^{-9}c মানের আধান অবস্থিত আছে। B বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য নির্ণয় করুন।

2.8 উত্তরমালা

প্রশ্নমালা — 1

z y কে আকর্ষণ করবে

প্রশ্নমালা — 2

আধান সংরক্ষণের নীতি অনুযায়ী তেজস্ক্রিয় ক্ষয় অথবা যে কোন পরমাণু বিক্রিয়ার পূর্বের মোট আধান বিক্রিয়ার পরের মোট আধানের সমান হবে।

প্রথম সমীকরণে ক্ষয়ের পূর্বের আধান 92 e এবং ক্ষয়ের পরের আধানের পরিমাণ 2e, কাজেই প্রথম সমীকরণটি হবে

$$_{92}U^{238} \rightarrow {}_{90}Th^{234} + {}_{2}He^{4}$$

দ্বিতীয় সমীকরণটি হবে

$$_{20}Ca^{44} + {}_{1}P^{1} \rightarrow {}_{21}Sc^{44} + {}_{0}n^{1}$$

প্রশ্নমালা — 3

পরিবাহীটি ধনাত্মক আধানে আহিত অর্থাৎ এটিতে ইলেকট্রনের সংখ্যা কম।

ধরা যাক এটিতে n সংখ্যক ইলেকট্রনের ঘাটতি আছে

আমরা জানি q = ne

এখানে $q = 3 \cdot 2 \times 10^{-17}$c এবং $e = 1 \cdot 6 \times 10^{-19}$c

$$\therefore \quad n = \frac{q}{e} = \frac{3\cdot2\times10^{-17}c}{1\cdot6\times10^{-19}c} = 200$$

অতএব পরিবাহীতে 200 ইলেকট্রন কম আছে।

প্রশ্নমালা — 4

q_2 এর উপর বল নির্ণয় করতে হলে প্রতিটি পদাঙ্ক (Subscript) 2 এর স্থানে এবং 1 এর স্থানে 2 লিখতে হবে

$$\therefore \text{ বল } \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_1}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$$

যেখানে $\hat{r}_{21} \rightarrow q_1$ থেকে q_2 এর দিকে নির্দেশক একক ভেক্টর

প্রশ্নমালা — 5

এক্ষেত্রে $q_1 + q_2 = 20\mu c$ অথবা $q_2 = (20 - q_1)\mu c$ আধানদুটির মধ্যে বিকর্ষণ বল ক্রিয়া করছে। সুতরাং আধানদুটি সমধর্মী।

কুলম্বের সূত্র অনুসারে

$$0\cdot075N = \left(9\times10^9 Nm^2c^{-2}\right)\times\frac{q_1q_2}{(3m)^2}$$

অথবা $q_1q_2 = 75\times10^{-12}c^2$

অথবা $q_1q_2 = 75\times\left(10^{-6}c\right)^2$

অথবা $q_1q_2 = 75\mu c^2$

q_2 এর মান বসিয়ে পাই

$q_1(20 - q_1) = 75$

অথবা $q_1^2 - 20q_1 + 75 = 0$

অথবা $q_1 = 5$ এবং 15

সুতরাং আধানদুটির মান $5\mu c$ এবং $15\mu c$

q_1 এর জন্য c বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য

$$\bar{E}_1 = 4\cdot03\times10^4\left(-\hat{i}\right)Nc^{-1}$$

q_2 এর জন্য c বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য

$$\bar{E}_2 = \cdot48\times10^4\left(-\hat{i}\right)Nc^{-1}$$

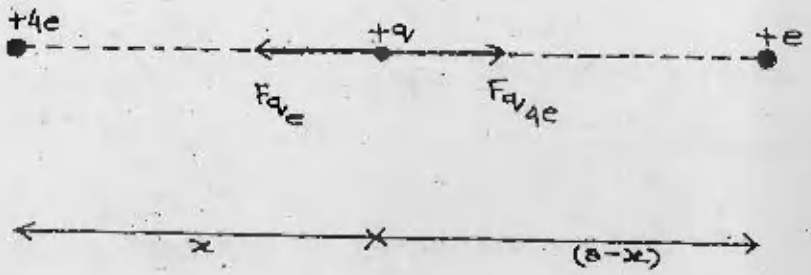
প্রাবল্য দুটি বিপরীতমুখী সুতরাং c বিন্দুতে লব্ধি প্রাবল্য $\bar{E}_c$ এর মান

$$E_c = (4\cdot03-0\cdot48)\times10^4 Nc^{-1}$$

$= 3\cdot55\times10^4 Nc^{-1}$ এবং এটি x অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর ক্রিয়া করবে।

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(i)



মনে করা যাকে q একটি ধনাত্মক আধান। উপরের চিত্র অনুযায়ী $q+4c$ আধানের দক্ষিণে x দূরত্বে অবস্থিত; অতএব q এবং অপর আধান $+e^{\prime\prime}$র মধ্যের দূরত্ব (a - x)। সুতরাং +e আধানের জন্য q এর উপর বল

$$\bar{F}_{qe} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{exq}{(a-x)^2}\left(-\hat{i}\right)$$

$(-\hat{i})$ = একক ভেক্টর এবং এটির দিক +e থেকে q এর দিকে অর্থাৎ -x অক্ষের দিকে

+4e আধানের জন্য q এর উপর বল

$$\vec{F}_{q4e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4exq}{(x)^2}\hat{i}$$

$(\hat{i})$ = একক ভেক্টর এবং এটির দিক +4e থেকে q এর দিকে অর্থাৎ +x অক্ষের দিকে।

q এর সাম্যের জন্য এই বলদুটি পরস্পরকে প্রশমিত করবে অর্থাৎ

$$\vec{F}_{qe} + \vec{F}_{q4e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{exq}{(a-x)^2}(-\hat{i}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4exq}{x^2}(\hat{i}) = 0$$

অর্থাৎ $\frac{4}{x^2} = \frac{1}{(a-x)^2}$

অথবা $4(a-x)^2 = x^2$ অথবা $2(a-x) = \pm x$ ।

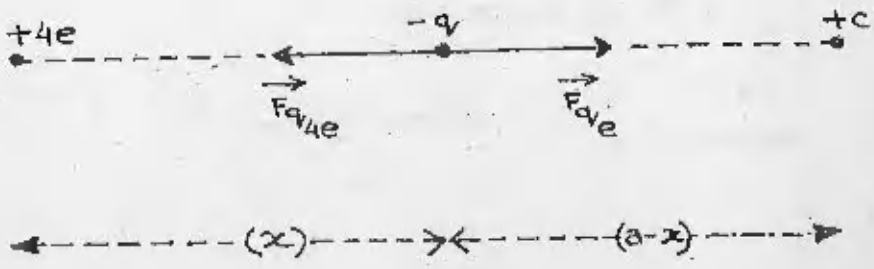
ধনাত্মক চিহ্নের জন্য $x = \frac{2a}{3}$ ঋণাত্মক চিহ্নের জন্য $x = 2a$

এখানে x এর সম্ভাব্য মান $\frac{2a}{3}$ কারণ q +4e র দক্ষিণে অবস্থিত এবং $x < a$ (কাজেই x কখনোই a অপেক্ষা বড় হতে পারে না)

$\therefore$ সাম্যাবস্থায় q +4e আধানের দক্ষিণে $\frac{2a}{3}$ দূরত্বে থাকবে।

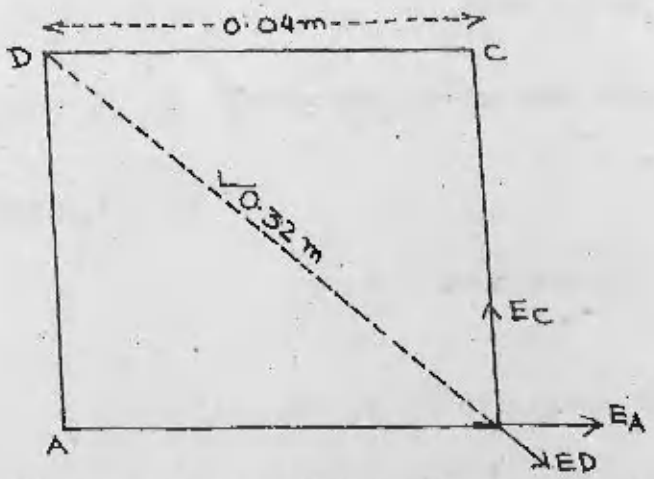
আমরা qকে ধনাত্মক হিসাবে নিয়েছি। এখন qকে যদি একদিকে (ধরা যাক দক্ষিণ দিকে) সামান্য সরানো যায় তাহলে $\vec{F}_{q4e}$ এর মান হ্রাস পাবে এবং $\vec{F}_{qe}$ এর মান বৃদ্ধি পাবে। (কারণ স্থির তড়িৎ বল আধানদুটির মধ্যের দূরত্বের বর্গের ব্যাস্তানুপাতিক)। অতএব একটি লব্ধি বল $(\vec{F}_{qe} - \vec{F}_{q4e})$ q এর উপর ক্রিয়া করবে যে জন্য আধানটি আবার তার সাম্যাবস্থায় ফিরে আসবে। কাজেই q এর সাম্যাবস্থা সুস্থির (Stable)।

যদি q ঋণাত্মক আধান হয় তবে $\vec{F}_{q4e}$ এবং $\vec{F}_{qe}$ আকর্ষণ বল হবে



এস্থানেও q আধানটি সাম্যাবস্থায় +4e আধান থেকে $\frac{2a}{3}$ দূরত্বে থাকবে। এখন এই আধানটিকে যদি দক্ষিণ দিকে সামান্য সরানো যায় তখন $\vec{F}_{q4e}$ এর মান হ্রাস পাবে এবং $\vec{F}_{qe}$ র মান বৃদ্ধি পাবে। অতএব দক্ষিণ দিকমুখী একটি লব্ধি বল $\left(\vec{F}_{qe} - \vec{F}_{q4e}\right)$, $-q$ এর উপর ক্রিয়া করবে, ফলে $-q$ আরও দক্ষিণে সরে যাবে। অতএব $-q$ এর সাম্যাবস্থা অস্থির (unstable)।

(ii)



চিত্রানুসারে A, C, D বিন্দুতে আধানের জন্য B বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যকে $\vec{E}_A, \vec{E}_C$ এবং $\vec{E}_D$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। অতএব B বিন্দুতে লব্ধি প্রাবল্য $\vec{E}$ এই তিনটি প্রাবল্যের ভেক্টর যোগফলের সমান হবে।

$\therefore$ $\vec{E}$ ভেক্টরের মান $E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{\left(9\times10^9 Nm^2c^{-2}\right)\left(16\times10^{-9}c\right)}{(0\cdot04m)^2}$

$= 9 \times 10^4 Nc^{-1}$

E_A -র দিক AB সরলরেখা বরাবর।

অনুরূপভাবে, $E_C = \dfrac{(9 \times 10^9 Nm^2c^{-2})(-16 \times 10^{-9}c)}{(0.04m)^2}$

$= 9 \times 10^4 Nc^{-1}$

E_Cর দিক BC সরলরেখা বরাবর।

অনুরূপে, $E_D = \dfrac{(9 \times 10^9 Nm^2c^{-2})(32 \times 10^{-9}c)}{(32 \times 10^{-4} m^2)}$

$= 9 \times 10^4 Nc^{-1}$

E_Dর দিক DB বরাবর।

$\therefore$ x অক্ষ বরাবর প্রাবল্যের উপাংশের লব্ধি $= E_A + E_D \cos 45°$

এবং y " ", " " " $= E_C - E_D \sin 45°$

$\therefore$ B বিন্দুতে লব্ধি প্রাবল্য $\vec{E}$ এর মান

$$E = \left[(E_A + E_D \cos 45°)^2 + (E_C - E_D \sin 45°)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[E_A{}^2 + E_D{}^2 + E_C{}^2 + 2E_D(E_A \cos 45° - E_C \sin 45°)\right]^{\frac{1}{2}}$$

আমরা জানি $\cos 45° = \sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad E = \sqrt{3}E_A = 9\sqrt{3} \times 10^4 Nc^{-1}$

E এবং অনুভূমিক রেখার মধ্যের কোণের মান θ হলে

$$\tan\theta = \frac{E_C - E_D \sin 45^\circ}{E_A + E_D \cos 45^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 0 \cdot 171$$

$\theta = \tan^{-1}(0 \cdot 171) \quad \therefore \theta = 9 \cdot 45'$

$\therefore$ লব্ধি প্রাবল্য অনুভূমিক রেখার সঙ্গে $9 \cdot 45'$ কোণ করে ক্রিয়া করে।

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

3.2 গাউসের সূত্র সম্পর্কিত তথ্য

তড়িৎ বলরেখার গণনা

তড়িৎ ফ্লাক্স্

3.3 গাউসের সূত্র

3.4 কয়েকটি ক্ষেত্রে গাউসের সূত্রের প্রয়োগ

(গোলীয় প্রতিসাম্য (spherical symmetry)

রৈখিক প্রতিসাম্য

একটি বিচ্ছিন্ন (isolated) আহিত পরিবাহী

3.5 গাউসের সূত্রের অবকল রূপ (differential form)

3.6 সারাংশ

3.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

3.8 উত্তরমালা

3.1 প্রস্তাবনা

বিজ্ঞানী মাইকেল ফ্যারাডে তড়িৎক্ষেত্রের রূপ নিরূপণের জন্য একটি পরীক্ষা করেছিলেন। একটি বড় ধাতু নির্মিত বাক্সকে অন্তরক পদার্থের উপর স্থাপন করে তিনি নিজে সেই বাক্সে প্রবেশ করে বাক্সটিকে অত্যন্ত শক্তিশালী একটি জেনারেটার দিয়ে আহিত করিয়েছিলেন। তৎসত্ত্বেও তড়িৎক্ষেত্রের কোন প্রভাব তিনি অনুভব করেননি এবং সম্পূর্ণ নিরাপদে ছিলেন। এই অদ্ভুত ঘটনার ব্যাখ্যা দেওয়ার জন্যই এই এককের অবতারণা। কেননা এই ঘটনার ব্যাখ্যা দিতে গাউসের উপপাদ্যের প্রয়োজন এবং এই গাউসের উপপাদ্যই এই এককের পাঠ্যবস্তু।

কুলম্বের সূত্রের পরিণামকেই গাউসের সূত্র বলা চলে। এই উপপাদ্য থেকে কোন অতিরিক্ত তথ্য পাওয়া যায় না তবে কলম্বের সূত্রের থেকে অনেক সুবিধাজনকভাবে এই সূত্রের গাণিতিক রূপের সাহায্যে

তড়িৎক্ষেত্র সংক্রান্ত বহু সমস্যার সমাধান করা যায়। পূর্বের এককে আপনারা জেনেছেন যে, তড়িৎক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে অবস্থিত একটি একক ধনাত্মক আধানের উপর অনুভূত বলকে সেই বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য বলা হয়। এই এককে আমরা তড়িৎক্ষেত্রের ফ্লাক্স্ কাকে বলে জানব এবং সেই ধারণা থেকে গাউসের সূত্র স্থাপন করব।

উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে আপনারা বুঝতে সক্ষম হবেন যে,

- একটি বদ্ধ স্থানছেদকারী বলরেখার সংখ্যা সেই স্থানের মধ্যে অবস্থিত তড়িৎ আধানের সমানুপাতিক।
- যে কোন তলভেদকারী তড়িৎ ফ্লাক্স এর এবং (i) সেই তলের তড়িৎক্ষেত্রের তীব্রতা (প্রাবল্য), (ii) সেই তলের ক্ষেত্রফল এবং (iii) তড়িৎক্ষেত্রের সাপেক্ষে ঐ তলের দিকবিন্যাস (orientation) নির্ণয়ে সক্ষম হবেন।
- তলভেদকারী তড়িৎ ফ্লাক্স্ এবং তলের দ্বারা আবদ্ধ আধানের মধ্যে সম্বন্ধ লিখতে পারবেন।
- তড়িৎক্ষেত্রের ভিতরের যেকোন আবদ্ধ তলের ভেদকারী তড়িৎ ফ্লাক্স্ নির্ণয় করতে পারবেন।
- গাউসের সূত্র ব্যবহার করে বৃত্তীয়, রৈখিক এবং তলীয় প্রতিসাম্যের ক্ষেত্রে তড়িৎ প্রাবল্য নির্ণয় করতে পারবেন।
- গাউসের উপপাদ্যের সাহায্যে একটি অসীম দৈর্ঘ্য সম্পন্ন রৈখিক পরিবাহীর জন্য প্রাবল্য, পূর্বের এককে বর্ণিত উপায়ের থেকে অনেক সহজে নির্ণয় করতে পারবেন।
- একটি তড়িতাহিত পরিবাহীর আধানগুলি পরিবাহীর পৃষ্ঠতলে বিরাজ করে এবং একটি বদ্ধ ধাতব বাক্সের ভিতর কোন তড়িৎক্ষেত্র থাকে না এই তথ্যটির ব্যাখ্যা দিতে সক্ষম হবেন।
- গাউসের সূত্রকে তড়িৎক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সের (Divergence) সাপেক্ষে প্রকাশ করতে সক্ষম হবেন।

3.2 গাউসের সূত্র সম্পর্কিত তথ্য

পূর্বের এককে আপনারা জেনেছেন যে, বন্টিত আধানের (Charge distribution) জন্য সৃষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্র চারিদিকে বিস্তৃত হয়। গাউসের সূত্র এই আধান এবং সৃষ্ট তড়িৎক্ষেত্রের মধ্যের সম্পর্ক প্রতিষ্ঠিত করে। আপনারা এও জেনেছেন যে, এই উৎপন্ন তড়িৎক্ষেত্রকে তড়িৎ বলরেখা দ্বারা প্রদর্শিত করা যায়। এই বলরেখা সংখ্যা এবং আধানের পরিমাণের মধ্যে সম্পর্ক আছে। কিন্তু বলরেখার সংখ্যা নির্দিষ্ট করে জানা সম্ভব নয়

(কেননা বলরেখা প্রাবল্যের সমানুপাতিক অর্থাৎ প্রাবল্য বৃদ্ধি পেলে বলরেখার সংখ্যা বৃদ্ধি পাবে এই তথ্যটুকুই জানা আছে)। সেইজন্য বলরেখার মাধ্যমেই ধারণা পাওয়া যায় এইরূপ একটি নতুন রাশি — তড়িৎক্ষেত্রের ফ্লাক্স্ (flux) এর সংজ্ঞা পড়ব — যেটি গাণিতিকভাবে অত্যন্ত সঠিক।

অতএব আমরা দেখতে পাচ্ছি যে, তড়িৎক্ষেত্রের চিত্র পাওয়ার জন্য যেমন বলরেখার ধারণার প্রয়োজন সেইরূপ তড়িৎক্ষেত্র সম্পর্কিত বিভিন্ন সংজ্ঞা ও সূত্র নির্ণয়ের জন্য ফ্লাক্সের ধারণার প্রয়োজন।

3.2.1 তড়িৎ বলরেখার গণনা

চিত্র 3.1 এ দুটি তলে আধান বন্টন দেখানো হয়েছে। এই দুটি তলই বদ্ধতল (বদ্ধতলের একটি আবদ্ধ আয়তন এবং নির্দিষ্ট সীমারেখা আছে অর্থাৎ এই তলের মধ্যস্থিত বিন্দুর থেকে তলের বাইরের বিন্দুকে পৃথক করা যায়)।

(চিত্র 3.1)

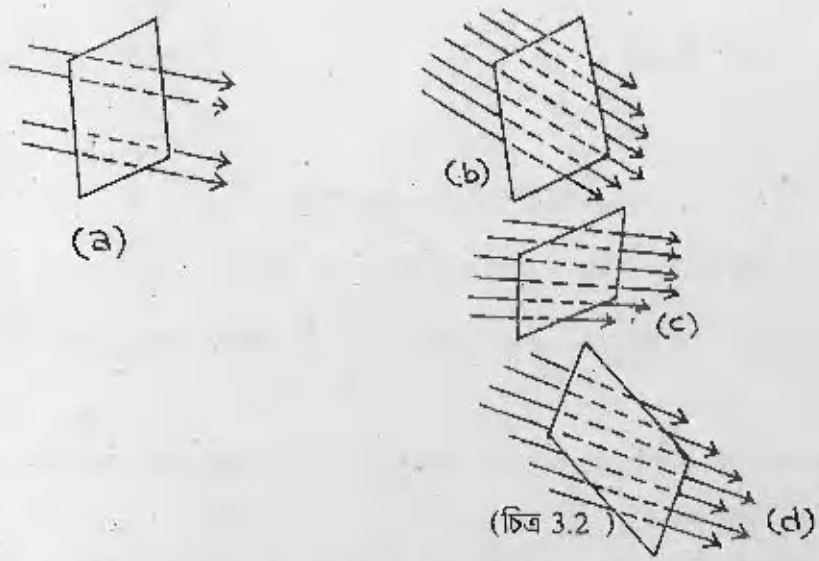
এই তল দুটির ক্ষেত্রে বলরেখা অঙ্কনের জন্য কয়েকটি নিয়ম মেনে চলা হয়েছে। (i) যে বলরেখা তলের ভিতর দিক থেকে বাইরের দিকে যায় সেটিকে ধনাত্মক (বা পজিটিভ) এবং যেটি বাহির থেকে তলের ভিতরে প্রবেশ করে সেটিকে ঋণাত্মক (বা নেগেটিভ) হিসাবে গণ্য করা হয়েছে। (ii) প্রত্যেকটি q আধান থেকে 8 টি বলরেখার উদ্ভব হয়েছে। অর্থাৎ 2q টি আধান থেকে 16টি বলরেখার সৃষ্টি হয়েছে। (3.1a) চিত্রে 1 এবং 2 তল প্রত্যেকে q আধানকে বেষ্টন করে রয়েছে এবং ৩ নং তল $q + q = 2q$ আধানকে বেষ্টন করে আছে। সুতরাং 1 এবং 2 তলের প্রত্যেকটিকে 8টি বলরেখা ছেদ করেছে এবং এরা একমুখী। 3 নং তলকে ছেদ

করেছে 16 টি বলরেখা। 4 নং তল কোন আধানকে বেষ্টন করে নেই। সেই হেতু এই তলে যে কটি বলরেখা প্রবেশ করেছে সেই কটি বলরেখাই এই তলকে ছেড়ে গেছে। অর্থাৎ মোট বলরেখা ছেদের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য।

আধানের বিভিন্ন বিন্যাসের জন্য কোন তল ছেদকারী বলরেখা গণনার উপরের সহজ উপায় থেকে তড়িৎক্ষেত্রের ধর্মের সম্বন্ধে আমরা জানতে পারলাম যে কোন বদ্ধতলকে খণ্ডনকারী তড়িৎ বলরেখার সংখ্যা ঐ তলের সীমারেখার মধ্যে অবস্থিত মোট আধানের সমানুপাতিক। তড়িৎ বলরেখার এই ধর্মকে যথাযথভাবে বোঝার জন্য তড়িৎ ফ্লাক্সের ধারণার প্রয়োজন।

3.2.2 তড়িৎ ফ্লাক্স্

পূর্বের অংশে আমরা একটি বদ্ধ তলের কথা আলোচনা করেছি। এবার একটি মুক্ত তলের ক্ষেত্র আলোচনা করা যাক। ধরা যাক একটি পাতলা পাতকে (ক্ষেত্রফল S) একটি সুষম তড়িৎক্ষেত্র $\bar{E}$ তে রাখা হল। এই সুষম তড়িৎক্ষেত্র $\bar{E}$ 4টি বলরেখা দ্বারা নির্দেশিত হয়েছে। (চিত্র 3.2a)

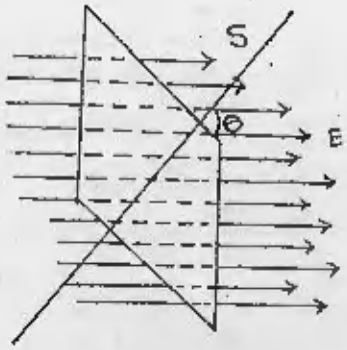


(চিত্র 3.2)

দ্বিতীয় একটি সুষম তড়িৎক্ষেত্র $2\bar{E}$ নিলে পূর্বের নিয়ম অনুযায়ী এটি 8টি বলরেখা দ্বারা নির্দেশিত হবে। উপরের এই পাতটিকে এই তড়িৎক্ষেত্রে নিয়ে এলে দেখা যাবে 8 টি বলরেখা পাতটিকে খণ্ডন করেছে। (3.2.C) চিত্রে তড়িৎক্ষেত্রের মান (3.2b) চিত্রের ন্যায় কিন্তু পাতের ক্ষেত্রফল অর্ধেক হওয়ায় পাতের মধ্যে দিয়ে অর্ধেক সংখ্যক (অর্থাৎ 4টি) বলরেখা গেছে। প্রথম পাতটিকে ঘুরিয়ে (3.2d) চিত্রে প্রদর্শিত স্থানে রাখা হলে দেখা যাচ্ছে যে পাতটি বলরেখার সঙ্গে লম্বভাবে নেই। ফলে পাতের মধ্যে ছেদকারী বলরেখার সংখ্যা কমে যাবে।

অতএব আমরা দেখছি যে কোন তলের মধ্যে দিয়ে ছেদকারী বলরেখার সংখ্যা তিনটি বিষয়ের উপর নির্ভর করে — তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য বা তীব্রতা E, তলের ক্ষেত্রফল S এবং তড়িৎক্ষেত্রের সাপেক্ষে তলের দিগ্‌বিন্যাস (orientation)।

তড়িৎক্ষেত্রের দিকের সঙ্গে তলের অবস্থানের দিক নির্ণয় করার জন্য তলের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করা হয়। তড়িৎক্ষেত্র এবং লম্বের মধ্যে কোণের মান θ হয় (চিত্র 3.3)।



(চিত্র 3.3)

তবে তলছেদকারী বলরেখার সংখ্যা θ এর মানের উপর নির্ভর করে।

$\theta = 0^\circ$ হলে তলকে ছেদকারী বলরেখার সংখ্যার সর্বাপেক্ষা অধিক হবে।

$\theta = 90^\circ$ হলে তলকে ছেদকারী বলরেখার সংখ্যা সর্বাপেক্ষা কম হবে অর্থাৎ কোন বলরেখা তলকে অতিক্রম করবে না।

অতএব যেকোন তলছেদকারী বলরেখার সংখ্যা সেই তলের লম্বের উপর তড়িৎক্ষেত্রের অভিক্ষেপের সমানুপাতিক (অর্থাৎ $\cos\theta$ সমানুপাতিক)।

সুতরাং কোন তলছেদকারী বলরেখার সংখ্যা $\propto ES\cos\theta$

স্কেলার গুণফলের রূপে (ডট গুণফল) প্রকাশ করলে

কোন তল ছেদকারী বলরেখার সংখ্যা $\alpha \vec{E}.\vec{S}$ (3.1)

(দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর ডট্ গুণফলের (স্কেলার গুণফল) রূপ $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ যেখানে $\theta = \vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের মধ্যের কোণের মান)

এখানে $\vec{E}$ = তড়িৎক্ষেত্র ভেক্টর এবং $\vec{S} \rightarrow$ একটি ভেক্টর যেটির মান তলের (surface) ক্ষেত্রফলের সমান এবং দিক (direction) তলের উপর লম্বের দিকে।

(3.1) নং সমীকরণের বাম দিকের রাশিটির মান অনির্দিষ্ট কেননা আমরা কোন তড়িৎক্ষেত্রে ইচ্ছামত বলরেখা অঙ্কন করতে পারি। কিন্তু সমীকরণের ডান দিকের রাশিটির মান নির্দিষ্ট এবং এই রাশিটিকেই তড়িৎ ফ্লাক্স বলা হয়। তড়িৎ ফ্লাক্স্‌কে ϕ অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত করা হয়,

$$\phi = \vec{E}.\vec{S} \tag{3.2}$$

(3.2) সমীকরণ অনুযায়ী ফ্লাক্স্ দুটি ভেক্টর $\vec{E}$ এবং $\vec{S}$ এর স্কেলার গুণফল সুতরাং এটি একটি স্কেলার রাশি। $\vec{E}$ এর একক NC^{-1}, কাজেই ফ্লাক্সের SI একক Nm^2C^{-1}।

কোন আবদ্ধ তলছেদকারী মোট ফ্লাক্স্ নির্ণয় করার জন্য আবদ্ধ তলটি সুষম নয় এমন একটি তড়িৎ ক্ষেত্রে রাখা হল। এরপর তলটিকে ক্ষুদ্র অংশে এরূপে বিভক্ত করা হল যাতে প্রতিটি অংশে তড়িৎক্ষেত্রকে সুষম বলে ধরে নেওয়া যায়। (3.2) সমীকরণ অনুযায়ী প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশছেদকারী ফ্লাক্স্ $d\phi$ এর মান হবে

$$d\phi = \vec{E}.\vec{ds} \tag{3.3}$$

এখানে $\vec{E}$ ক্ষুদ্র অংশে তড়িৎক্ষেত্র

$\vec{ds} = ds$ মানের ভেক্টর যেটির দিক তলের উপর বহির্মুখী (outwardly) লম্ব বরাবর।

সুতরাং তলছেদকারী মোট ফ্লাক্সের মান এই ক্ষুদ্র অংশগুলির ছেদকারী ফ্লাক্সের যোগফলের সমান হবে। ক্ষুদ্র অংশগুলিকে অতি ক্ষুদ্র ধরে নেওয়া হলে এবং এই অতি ক্ষুদ্র অংশগুলির সংখ্যা অতি বৃহৎ হলে যোগফলের পরিবর্তে তলমাত্রিক সমাকলন দ্বারা মোট ফ্লাক্স্ নির্ণয় করতে হবে।

$$\therefore \phi = \iint \vec{E}.\vec{ds}$$

বদ্ধ তলের জন্য উপরের সমাকলনের রূপ হবে,

$$\phi = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \oint \vec{E}.\vec{ds} \tag{3.4}$$

সমাকলন চিহ্নের উপর বৃত্তের চিহ্নের অর্থ সমাকলনটি সম্পূর্ণ বদ্ধতলটির উপর করতে হবে (surface integral) গাউসের উপপাদ্য নির্ণয়ের পূর্বে তলমাত্রিক সমাকলের অর্থ কী তা বোঝা প্রয়োজন।

S তলের উপর যেকোন ভেক্টর আপেক্ষক (function) F এর তলমাত্রিক সমাকল নির্ণয়ের জন্য S কে

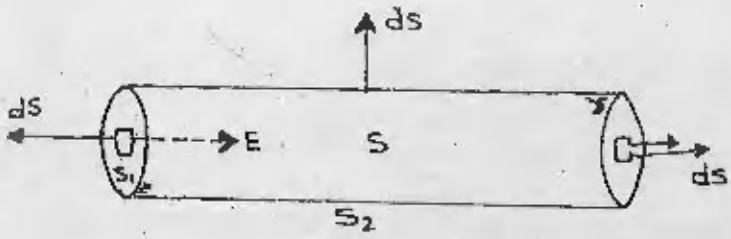
ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র মৌল তল $\vec{ds}$ এ (surface elements) বিভক্ত করা হয়। প্রতিটি অংশ একটি ভেক্টর যেটির মান ক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফলের সমান এবং বহির্দিকে অঙ্কিত লম্ব বরাবর দিক নির্দেশ করে। প্রতিটি অংশের জন্য $\vec{ds}$ এবং $\vec{E}$ এর স্কেলার গুণফল নির্ণয় করে সেগুলিকে যোগ করা হল। অংশগুলি খুব ক্ষুদ্র হলে অর্থাৎ $\vec{ds} \to 0$ সীমাতে যোগ চিহ্নের পরিবর্তে সমাকল চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। এই সমাকলই তলমাত্রিক সমাকল।

(3.4) সমীকরণকে যে কোন বদ্ধ তলাচ্ছেদকারী বলরেখা নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করা যায়।

একটি উদাহরণের সাহায্যে উপরের বক্তব্যকে পরিস্ফুট করা যাক।

উদাহরণ — 1

(3.4) চিত্রে বদ্ধতল হিসাবে একটি সিলিন্ডার নেওয়া হয়েছে.



(চিত্র 3.4)

সিলিন্ডারটির দুই প্রান্তে দুটি ঢাকনা দেওয়া আছে। সিলিন্ডারের তলীয় ক্ষেত্রফল S এবং ব্যাসার্ধ R। সিলিন্ডারটিকে একটি সুষম তড়িৎক্ষেত্র $\vec{E}$ এর মধ্যে রাখা হল। সিলিন্ডারের অক্ষ তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের দিক বরাবর। এই তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবে সিলিন্ডারটিকে ছেদকারী ফ্লাক্স্ ϕ এর মান নির্ণয় করুন।

উত্তর — S তল ছেদকারী মোট ফ্লাক্স্ তিনটি সমাকলের সমষ্টির সমান হবে। প্রথম সমাকলটি S_1 ঢাকনার জন্য। দ্বিতীয় সমাকলটি বেলনাকার তল (cylindrical surface) S_2 র জন্য এবং তৃতীয় সমাকলটি S_3 ঢাকনার জন্য।

সুতরাং (2.4) সমীকরণ থেকে লেখা যায়, $\phi = \oint_S \vec{E}.\vec{ds} = \int_{S_1} \vec{E}.\vec{ds} + \oint_{S_2} \vec{E}.\vec{ds} + \oint_{S_3} \vec{E}.\vec{ds}$

বাম দিকের ঢাকনার সমস্ত বিন্দুর জন্যই $\theta = 180^\circ$, $\vec{E}$ এর মান স্থির এবং $\vec{ds}$ ভেক্টরগুলির দিক পরস্পরের সমান্তরাল। কাজেই $\int_S \vec{E}.\vec{ds} = \int E\cos 180^\circ ds = -E\int ds = -\pi ER^2$

এখানে πR^2 = ঢাকনার ক্ষেত্রফল।

অনুরূপে ডানদিকের ঢাকনার জন্য $\int_{S_3} \vec{E}.\vec{ds} = \pi ER^2$ (এস্থলে $\vec{E}$ এবং $\vec{ds}$ এর অন্তর্বর্তী কোন $\theta = 0^\circ$)

সবশেষে বেলনাকার তল S_2 এর জন্য $\int_{S_2} \vec{E}.\vec{ds} = 0$ (S_2 র উপর সব বিন্দুর জন্য $\vec{E}$ এবং $\vec{ds}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90^\circ$)

সুতরাং সিলিন্ডার S ছেদকারী মোট ফ্লাক্সের মান $-\pi ER^2 + 0 + \pi ER^2 = 0$

অতএব এই বদ্ধতলকে ছেদ করে মোট বহির্মুখী ফ্লাক্সের পরিমাণ শূন্য।

3.3 গাউসের সূত্র

পূর্বের অংশে আমরা দুটি সহজ তথ্য সম্বন্ধে জেনেছি (i) কোন বদ্ধ তলকে ছেদকারী মোট বলরেখার সংখ্যা তল দ্বারা আবদ্ধ আধানের সমানুপাতিক। (ii) বলরেখার ধারণাকে গাণিতিক রূপ দেওয়ার জন্য ফ্লাক্সের ধারণার সাহায্য নেওয়া হয়।

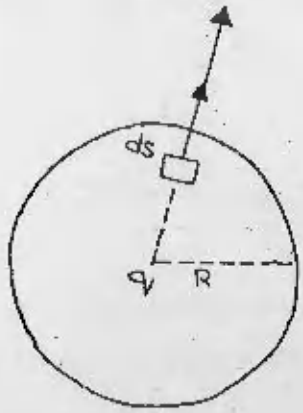
এই দুটি তথ্যের ফল হিসাবে বলা যায় যে কোন বদ্ধতল ছেদকারী মোট তড়িৎ ফ্লাক্স্ তলদ্বারা আবদ্ধ তড়িৎ আধানের সমানুপাতিক।

গাণিতিক রূপে $\phi \propto q$ অন্তর্গত অথবা $\phi = kq$ (3.5)

যেহেতু $\phi = \int \vec{E}.\vec{ds}$

সুতরাং আমরা বলতে পারি $\int \vec{E}.\vec{ds} = kq$ (3.6)

(3.6) সমীকরণে ধ্রুবকটি নির্ণয় করার জন্য মুক্ত তলে একটি বিন্দু আধান q নেওয়া হল এবং q কে কেন্দ্র করে R ব্যাসার্ধের একটি গোলক কল্পনা করা হল (চিত্র 3.5)। এই গোলকের উপর যে কোন ক্ষুদ্রতল $\vec{ds}$ ছেদকারী ফ্লাক্স্ (2.4 সমীকরণ অনুসারে)



(চিত্র 3.5)

$$\phi = \int \vec{E}.\vec{ds} \int E ds \cos\theta \qquad (3.7)$$

যেখানে θ তড়িৎক্ষেত্র এবং তলের উপর অঙ্কিত বহির্মুখী লম্বের মধ্যের কোণ।

আমরা জানি যে, একটি বিন্দু আধান q এর প্রভাবে R দূরত্বে তড়িৎক্ষেত্রের (প্রাবল্য) প্রতিরূপ

$$\vec{E} = \frac{1}{4\nu\varepsilon_o}\frac{q}{R^2}$$

যেখানে ε_o শূন্যস্থানের বিদ্যুৎশীলতা ক্ষেত্রের প্রাবল্য ব্যাসার্ধ বরাবর বাইরের দিকে নির্দেশ করছে অর্থাৎ তড়িৎক্ষেত্র সর্বত্র গোলকের তলে অঙ্কিত লম্বের সমান্তরাল। অতএব $\theta = 0°$ এবং $\cos\theta = 1$

(3.7) সমীকরণে $\vec{E}$ এবং $\cos\theta$ র মান বসিয়ে $\phi = \int_{\text{গোলক}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R^2} ds$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\int_{\text{গোলক}} ds$$

q কে সমাকল চিহ্নের বাইরে নিয়ে আসা হয়েছে কেননা গোলকের তলের সর্বত্র q এর মান সমান

এবং $\int_{\text{গোলক}} ds = 4\pi R^2$ কেননা গোলক তলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi R^2$

সুতরাং ফ্লাক্সের মান হবে, $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (3.8)

(3.8) এবং (3.5) সমীকরণের তুলনা করলে দেখা যাবে যে ধ্রুবকটির মান $\frac{1}{\varepsilon_0}$, যেখানে

$$\varepsilon_0 = 8\cdot 85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$$

অতএব (3.6) সমীকরণকে আমরা লিখতে পারি,

$$\phi = \int \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q \text{ অন্তর্গত (enclosed)}}{\varepsilon_0} \quad (3.9)$$

উপরের সমীকরণটিই গাউসের সূত্রের গাণিতিক রূপ। এই সূত্র অনুসারে গোলককে ভেদ করে তড়িৎ ফ্লাক্সের পরিমাণ গোলকের ভিতরের আধানের সমানুপাতিক কিন্তু গোলকের ব্যাসার্ধের উপর নির্ভর করে না।

যে কোন বদ্ধ তলের জন্য গাউসের উপপাদ্য প্রমাণ করা যায় কিন্তু তৎপূর্বে ঘনকোণের (solid angle) সংজ্ঞা জানা প্রয়োজন।

কোন শঙ্কুর শীর্ষবিন্দুকে কেন্দ্র করে একক ব্যাসার্ধের একটি গোলক অঙ্কিত করলে শঙ্কু গোলকের যে অংশটি ছেদ করে সেই গোলকাকার ক্ষেত্রফলকে O বিন্দুতে ঘনকোণের মান বলা যায়। একটি শঙ্কু আকৃতি তলের শীর্ষবিন্দুকে কেন্দ্র করে যে কোন ব্যাসার্ধ R নিয়ে একটি গোলক অঙ্কন করা হল (চিত্র 3.6a)। সেই গোলক থেকে শঙ্কু আকৃতি তলটি S ক্ষেত্রফলের গোলক ছেদ করে নিলে O বিন্দুতে শঙ্কুর ঘনকোণের মান $\Omega = \frac{S}{R^2}$ (ঘনকোণ একটি সংখ্যা। এটিকে স্টেরাডিয়ানে (steradian) প্রকাশ করা হয়।

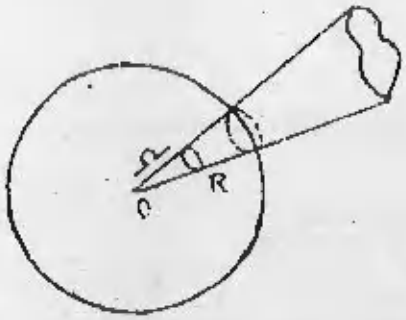
যখন $R = 1$, $\Omega = S$

একটি গোলকের সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi R^2$

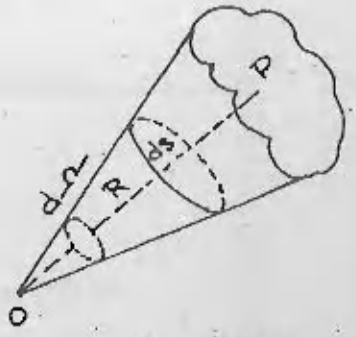
অতএব একটি বিন্দুর চারিদিকের সম্পূর্ণ ঘনকোণের মান $= 4\pi$ স্টেরাডিয়ান।

ঘনকোণের মান ক্ষুদ্র হলে তলের ক্ষেত্রফলকে ds নিতে পারি। সেক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি

$d\Omega = \frac{ds}{R^2}$ (চিত্র 3.6b)



(চিত্র 3.6a)



(চিত্র 3.6b)

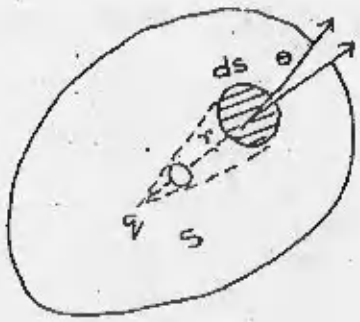
কোন কোন ক্ষেত্রে ds তলটি OP রেখার সঙ্গে লম্বভাবে থাকে না। ds এর উপর লম্ব N, OP র সঙ্গে θ কোণে অবস্থিত আছে। অতএব OP র লম্বতলে ds ক্ষেত্রের একটি অভিক্ষেপ নেওয়া প্রয়োজন। এই অভিক্ষেপের মান $ds' = ds\cos\theta$।

কাজেই সেক্ষেত্রে $d\Omega = \frac{ds\cos\theta}{R^2}$

অতএব ঘনকোণের মান তলের আকৃতি নয় ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে।

ধরা যাক S একটি বদ্ধতল এবং এই তলের ভিতর q একটি আধান অবস্থিত (চিত্র 3.7) এই তলের প্রতি বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র $\vec{E}$ এর দিক আধান থেকে তলের দিকে বহির্মুখে অঙ্কিত ব্যাসার্ধের দিকে বিস্তৃত। ৲

এর উপর একটি ক্ষুদ্র তল কেটে নেওয়া হল এবং এই তলের উপর বহির্মুখী অঙ্কিত লম্ব এবং $\vec{E}$ এর মধ্যের কোণের মান θ হলে (3.3) সমীকরণ অনুযায়ী ds ক্ষেত্রছেদকারী ফ্লাক্সের মান $d\phi = \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$



(চিত্র 3.7)

S তলছেদকারী মোট ফ্লাক্স্ নির্ণয়ের জন্য উপরের সমীকরণটিকে সম্পূর্ণ বদ্ধতলের জন্য সমাকল করতে হবে। $\therefore \oint d\phi = \oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega$

কোন বিন্দুর চারিদিকে মোট ঘনকোণের মান 4π

$$\therefore \phi = \oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

উপরের সমীকরণটি এবং (3.9) সমীকরণ অভিন্ন। (3.9) সমীকরণটি একটি গোলকের কেন্দ্রে অবস্থিত আধানের জন্য প্রযোজ্য। কাজেই বলা যায় যে (3.9) সমীকরণটি কোন বদ্ধ তলের মধ্যে আধানের যে কোন অবস্থানের জন্য প্রযোজ্য।

প্রশ্নমালা — 1

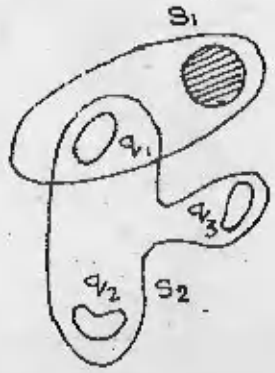
(3.2) চিত্রের তলের ক্ষেত্রে গাউসের সূত্র কি প্রযোজ্য? কারণ সহ বিশ্লেষণ করুন।

লক্ষণীয় (3.9) সমীকরণে q রাশিটি আধানের বীজগাণিতিক লব্ধি নির্দেশ করে। সমপরিমাণ ধনাত্মক

এবং ঋণাত্মক আধান যদি একটি তল দ্বারা আবৃত হয় তাহলে ঐ তলকে ছেদকারী মোট ফ্লাক্সের পরিমাণ শূন্য হবে।

প্রশ্নমালা — 2

(3.8) চিত্রে তিনটি আহিত বস্তু এবং আহিত নয় এরূপ একটি ধাতব চাকতি দেখানো হয়েছে। আহিত বস্তুগুলির আধানের পরিমাণ যথাক্রমে $q_1 = +3\cdot 1nc$, $q_2 = -5\cdot 9nc$ এবং $q_3 = -3\cdot 1nc$ ($1nc = 10^{-9}$ কুলম্ব)। এছাড়া দুটি তল $\vec{S_1}$ এবং $\vec{S_2}$ এর প্রস্থচ্ছেদ দেখানো হয়েছে। প্রতিটি তলছেদকারী তড়িৎক্ষেত্রের ফ্লাক্সের মান নির্ণয় করুন।



(চিত্র 3.8)

মনে করা যায় বদ্ধতলের ভিতর বন্টিত বিন্দু আধানগুলির পরিবর্তে আধানগুলি অবিচ্ছিন্নভাবে সমস্ত তলের আয়তন জুড়ে বিস্তৃত আছে। আধান ঘনত্ব ρ এবং ক্ষুদ্র আয়তন dv নেওয়া হলে dv আয়তনে আধানের পরিমাণ ρdv । কাজেই সম্পূর্ণ আয়তন v এর মোট আধান $\iiint \rho dv$ সেক্ষেত্রে গাউসের সূত্রের রূপ হবে

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho dv$$

অথবা $$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dv \qquad (3.10)$$

(বহু সমাকল চিহ্নের পরিবর্তে আমরা আয়তন V এর জন্য একটি সমাকল চিহ্ন ব্যবহার করব।)

যেখানে $\int_V \rightarrow$ চিহ্ন, তল দ্বারা আবদ্ধ সমগ্র আয়তন V এর জন্য আয়তন সমাকল বোঝায়।

(3.10) সমীকরণকে গাউসের সূত্রের সমাকল রূপ বলা হয়।

এই সমীকরণটির গাণিতিক সমাধান করা কঠিন, তবে এই রূপ থেকে সূত্রটির তাত্ত্বিক অর্থটি ব্যাখ্যা

করা সহজ। গাউসের সূত্রের আর একটি অবকল রূপ (differential form) বহু সমস্যার সমাধানের জন্য ব্যবহার করা হয়। আমরা এই এককেরই (3.5) অংশে সেই রূপটি নির্ণয় করব। তৎপূর্বে আমরা জ্যামিতিক প্রতিসাম্য যুক্ত কয়েকটি বস্তুর তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের ক্ষেত্রে গাউসের সূত্র ব্যবহার করব।

3.4 গাউসের সূত্রের কয়েকটি ব্যবহার

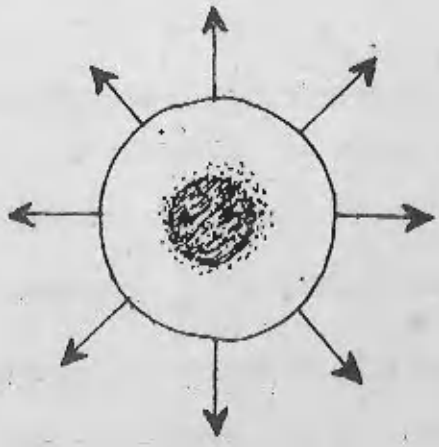
কোন বন্টিত আধানের চারিদিকে কাল্পনিক বদ্ধতলের (গাউসীয় তল) ক্ষেত্রে গাউসের সূত্র ব্যবহার করা যায়। শুধু যে বদ্ধ তলটি কল্পনা করা হয় (সেখানে আধান বন্টনে প্রতিসাম্য যদি থাকে তাহলে তলমাত্রিক অবকল নির্ণয় করা সহজ হবে। সেক্ষেত্রে কুলম্বের সূত্রের তুলনায় গাউসের সূত্রের সাহায্যে সমস্যার অনেক সহজে সমাধান করা যায়।

গাউসের সূত্র কোন কাল্পনিক বদ্ধতলের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য কাজেই বদ্ধতলটি আমরা এমনভাবে কল্পনা করতে পারি যাতে এটির মধ্যের আধান বন্টনের প্রতিসাম্য এবং বন্টিত আধানের প্রতিসাম্য সমান। এতে তলমাত্রিক সমাকল নির্ণয় করা সম্ভব হবে।

আমরা তিনটি উদাহরণের আলোচনা করব।

3.4.1 গোলীয় প্রতিসাম্য

কোন আধান বন্টন গোলীয় প্রতিসাম্যে আছে বলতে বোঝায় যে কোন বিন্দুতে আধান ঘনত্ব (প্রতি একক আয়তনে আধানের পরিমাণ) একটি কেন্দ্রবিন্দু (সাম্যের কেন্দ্র) থেকে সেই বিন্দুর দূরত্বের উপর কেবলমাত্র নির্ভর করে। এইরূপ একটি গোলীয় প্রতিসাম্যে থাকা আধান বন্টন চিত্র (3.9) দেখানো হয়েছে।



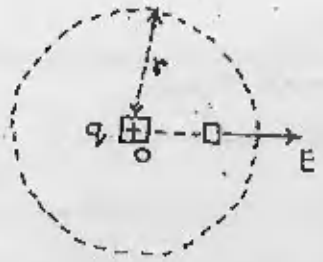
(চিত্র 3.9)

এখানে দেখা যাচ্ছে যে কেন্দ্রে আধান ঘনত্ব সর্বাপেক্ষা অধিক কিন্তু r এর অধিক দূরত্বে ঘনত্ব শূন্য। এই ধরনের আধান বন্টনের ক্ষেত্রে তড়িৎক্ষেত্রের মানও কেন্দ্র থেকে দূরত্বের উপর নির্ভর করে এবং ক্ষেত্রের দিক অরীয় (radial) — ধনাত্মক আধানের ক্ষেত্রে বহির্মুখী এবং ঋণাত্মক আধানের ক্ষেত্রে অন্তর্মুখী গোলীয় প্রতিসাম্যে আধান বন্টনের তিনটি উদাহরণ হল —

(i) বিন্দু আধান (ii) সুষম তড়িতাহিত গোলক এবং (iii) সুষম তড়িতাহিত গোলীয় খোলক (spherical shell)

(i) একটি বিন্দু আধানের জন্য তড়িৎক্ষেত্র :—

O বিন্দুতে অবস্থিত q একটি ধনাত্মক বিন্দু আধান (চিত্র 3.10)



(চিত্র 3.10)

গাউসের সূত্রের সাহায্যে এই আধানের প্রভাবে r দূরত্বে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের জন্য O বিন্দুকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধযুক্ত একটি গোলক (গাউসীয় তল) অঙ্কন করা হল। আমার জানি যে তড়িৎক্ষেত্র $\vec{E}$ এর দিক ব্যাসার্ধ বরাবর বহির্মুখী হবে। গাউসীয় তলটিকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ক্ষেত্র ds এ বিভক্ত করা হলে $\vec{E}$ এবং $\vec{ds}$ উভয়েই তলের সঙ্গে সমকোণে অবস্থিত হবে। কাজেই $\vec{E}$ এবং $\vec{ds}$ মধ্যের অন্তর্বর্তী কোণের (θর) মান শূন্য হবে। সুতরাং, $\vec{E}.\vec{ds}$ রাশিটি এখানে হবে E ds এবং গাউসের সূত্রের রূপ হবে, $\varepsilon_0 \oint \vec{E}.\vec{ds} = \varepsilon_0 \oint Eds = q$। গাউসীয় তলের প্রত্যেক বিন্দুর জন্য E এর মান অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং E কে অবকল চিহ্নের বাইরে নিয়ে আসা যায়।

$$\therefore \varepsilon_0 E \oint ds = q \qquad (3.11)$$

(3.11) এর সমাকলটি গোলকটির ক্ষেত্রফল নির্দেশ করছে, যার মান $\oint ds = 4\pi r^2$

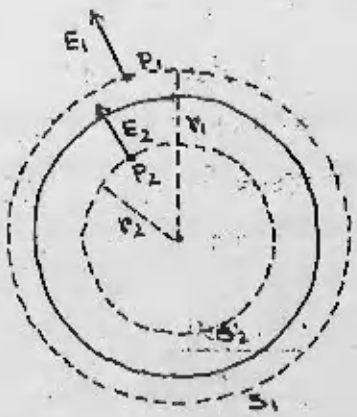
সুতরাং (3.11) কে লেখা যায়

$$\varepsilon_0 E 4\pi r^2 = q \text{ অথবা } E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (3.12)$$

এটিই কুলম্বের সূত্রের একটি রূপ। কাজেই আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে, গাউসের সূত্র এবং কুলম্বের সূত্র দুটি নিরপেক্ষ (স্বতন্ত্র) ভৌত সূত্র নয় বরঞ্চ একটি সূত্রেরই দুটি বিভিন্ন রূপ।

(ii) গোলীয় আধান বন্টনের জন্য তড়িৎক্ষেত্র $\vec{E}$.

মনে করি R ব্যাসার্ধের একটি গোলকের সর্বত্র Q আধান সমানভাবে বিস্তৃত (চিত্র 3.11) এই আধানের জন্য R ব্যাসার্ধের বাইরের P_1 বিন্দুতে এবং R ব্যাসার্ধের ভিতরের P_2 বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের জন্য গাউসের সূত্র প্রয়োগ করা যায়।



(চিত্র 3.11)

(a) P_1 বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য $\vec{E}_1$ নির্ণয়ের জন্য P_1 এর মধ্য দিয়ে r_1 ব্যাসার্ধের একটি কাল্পনিক গাউসীয় গোলক অঙ্কন করা হলে গোলীয় প্রতিসাম্যের জন্য গাউসীয় তলের উপর সব বিন্দুর জন্য তড়িৎক্ষেত্রের মান সমান হবে। ধরা যাক এই তড়িৎক্ষেত্রের মান E_1 এবং এই ক্ষেত্রের দিক তলের উপর বহির্মুখী লম্বের দিকে (radial) অর্থাৎ অরীয় সুতরাং $\cos\theta = 1$। (এখানে ধরা হয়েছে যে গোলকটি ধনাত্মক আধানে আহিত। ঋণাত্মক আধান হলে ক্ষেত্রের দিক অন্তর্মুখী লম্বের দিকে হল এবং $\cos\theta$ এর মান -1)। অতএব গাউসীয় গোলক ছেদকারী ফ্লাক্সের মান

$$\phi = \oint \vec{E}_1 . \vec{ds_1} = \oint E_1 \cos\theta ds_1 = E_1 \oint ds_1$$

$$= 4\pi r_1^2 E_1 \text{ (যেহেতু } \oint ds_1 = 4\pi r_1^2 \text{)} \qquad (3.13)$$

গাউসের সূত্র অনুসারে গোলক S_1 ছেদকারী ফ্লাক্সের মান $\frac{Q}{\varepsilon_0}$, যেখানে Q= গোলকের অন্তর্বর্তী মোট আধানের মান। অতএব (3.13) কে লেখা যায়,

$$4\pi r_1^2 E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\text{অথবা } E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_1^2} \qquad (3.14)$$

উপরের সমীকরণ থেকে এই সিদ্ধান্তে আসা যায় যে S_1 তলের পৃষ্ঠের সব বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের মান, মোট আধান তলের কেন্দ্রে পুঞ্জীভূত (concentrated at the centre) থাকলে ক্ষেত্রের যে মান হত, সেই মানের সমান হবে।

(b) বন্টিত আধানের মধ্যে বিন্দুর জন্য তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের জন্য তড়িৎ আধানগুলি কী ভাবে বন্টিত আছে সেটি দেখা প্রয়োজন। P_2 বিন্দুটি (চিত্র 3.11), যেখানে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করতে হবে সেই আধানগুলির মধ্যে অবস্থিত। P_2 র মধ্য দিয়ে r_2 ব্যাসার্ধযুক্ত একটি গাউসীয় গোলক অঙ্কন করা হল। তড়িৎক্ষেত্রের মান E_2 হলে গোলক S_2 এর ভিতরের জন্য ফ্লাক্সের রূপ (2.9) সমীকরণ অনুযায়ী

$$\phi = \int \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q \text{ অন্তর্গত}}{\varepsilon_0}$$

এখানেও প্রযোজ্য। কিন্তু এক্ষেত্রে গোলকের অন্তর্গত আধানের পরিমাণ মোট আধান Q এর একটি অংশ। আহিত গোলকটির আয়তন $\frac{4}{3}\pi R^3$ এবং এটির মোট আধান Q।

গোলকটির সর্বত্র আধান সমভাবে বিস্তৃত আছে। অতএব আধানের আয়তন ঘনত্ব (volume charge density) ρ সর্বত্র সমান এবং $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$।

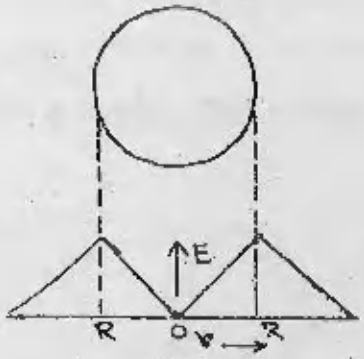
সুতরাং গোলকের অভ্যন্তরের আধানের পরিমাণ হবে

$$q_{\text{অন্তর্গত}} = \frac{4}{3}\pi r \frac{3}{2} \times \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q\frac{r_2^3}{R^3}$$

(2.9) সমীকরণ থেকে পাই, $E_2 4\pi r_2^2 = \frac{Qr_2^3}{R^3}$

$$\text{অথবা } E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Qr_2}{R^3} \qquad (3.15)$$

বন্টিত আধানের অন্তর্গত কোনো বিন্দুর ক্ষেত্রের প্রাবল্য কেন্দ্রবিন্দু থেকে দূরত্বের সমানুপাতিক হারে বৃদ্ধি পায় $(E \alpha r)$ এবং আধান বিস্তারের বাইরের বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র কেন্দ্র বিন্দু থেকে দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক ভাবে হ্রাস পায় $\left(E \alpha \frac{1}{r^2}\right)$।



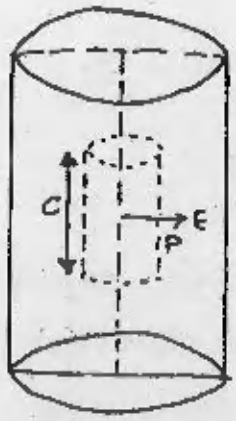
(চিত্র 3.12)

চিত্র (3.12) তে গোলকের ভিতরের এবং বাইরের বিন্দুগুলিতে তড়িৎক্ষেত্রের মানের অবস্থা দেখানো হয়েছে।

(iii) একটি পাতলা গোলকীয় F_2 খোলকের (thin spherical shell) জন্য তড়িৎক্ষেত্র।

R ব্যাসার্ধযুক্ত একটি পাতলা গোলকীয় খোলকের উপরের তলে Q আধান সমানভাবে বন্টিত আছে (চিত্র 3.13)। যেহেতু এই আধান বন্টন গোলীয় প্রতিসাম্যে আছে (spherically symmetric) আমরা জানি যে, খোলকের বাইরের তড়িৎক্ষেত্র (3.14) সমীকরণ অনুযায়ী খোলকের কেন্দ্রে অবস্থিত Q আধান জনিত ক্ষেত্রের সমান হবে।

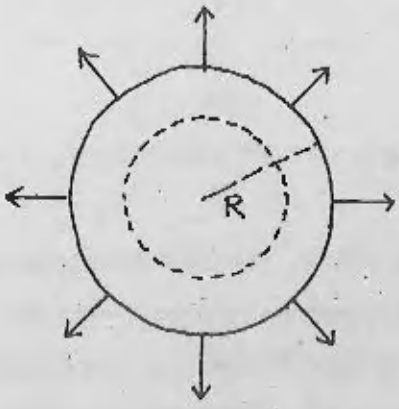
খোলকের মধ্যে একটি গাউসীয় গোলক অঙ্কন করা হয়। যেহেতু এই গোলকের অভ্যন্তরে কোন আধান নেই সেইহেতু ফ্লাক্সের পরিমাণ শূন্য এবং (3.13) সমীকরণের রূপ হবে $4\pi r^2 E = 0$



(চিত্র 3.13)

যেহেতু $r \neq 0$ অতএব খোলকের মধ্যের সর্বত্র তড়িৎক্ষেত্রের মান শূন্য। মনে রাখা প্রয়োজন খোলকের ভিতর তড়িৎক্ষেত্রের শূন্য মান কেবলমাত্র খোলকের মধ্যে আধানের অনুপস্থিতির কারণেই নয়; আধানের গোলীয় প্রতিসাম্যের জন্যই এটি সম্ভব হয়েছে। (3.13) সমীকরণ দ্রষ্টব্য)।

একটি দ্বিপোলের (dipole) চারিদিকে একটি গোলীয়তল S কল্পনা করা হল (চিত্র 3.14)।



(চিত্র 3.14)

এখানে গোলীয় তলের ভিতরের মোট আধানের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য কিন্তু তড়িৎক্ষেত্রের মান শূন্য নয়। কারণ এখানে আধান বন্টন সুষম নয় (দ্বিপোল হওয়ায়)। কাজেই (3.13) সমীকরণ এখানে প্রযোজ্য হবে না (যদিও গাউসীয় তল S কে ছেদকারী মোট ফ্লাক্সের পরিমাণ শূন্য)।

উপরের উদাহরণগুলি থেকে আমরা বুঝতে পারলাম যে, তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের জন্য গাউসের সূত্রকে ব্যবহার করতে হলে নিচের উপায়গুলি অবলম্বন করতে হবে।

(i) আধানের প্রতিসাম্য দেখার জন্য একটি গাউসীয় তল (যেটির উপর তড়িৎক্ষেত্রের মান এবং তল সাপেক্ষে দিক অপরিবর্তিত থাকে) অঙ্কন করা সম্ভব কিনা পরীক্ষা করে দেখতে হবে। যদি অঙ্কন সম্ভব না হয় তাহলে সে ক্ষেত্রে গাউসের সূত্র সত্য হলেও এই সূত্র ব্যবহার করে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য নির্ণয় করা কঠিন। গাউসীয় তল একটি বদ্ধতল, এই তলের রূপ যে কোন প্রকার হতে পারে।

(ii) ফ্লাক্স্ নির্ণয় করতে হবে। গাউসীয় তলের ধর্ম অনুযায়ী $E\cos\theta$ রাশিটির মান স্থির অতএব এটিকে সমাকল চিহ্নের বাইরে নিয়ে আসা যায় এবং সমাকল চিহ্নের অন্তর্গত পদটি তলের ক্ষেত্রফলের সমান।

(iii) গাউসীয় তলের অন্তর্ভূক্ত আধানের পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে। গাউসীয় তলটি যদি বন্টিত আধানের ভিতরে থাকে তবে তলের অন্তর্ভূক্ত আধানের পরিমাণ মোট আধানের সমান হবে না।

(iv) নির্ণেয় ফ্লাক্সের মান $\frac{q_{\text{অন্তর্গত}}}{\varepsilon_0}$ এর সমান হবে। ফ্লাক্সের মান থেকে E নির্ণয় করা সম্ভব। E এর দিক আধানের পরিসাম্যের থেকে নির্ণয় করতে হবে।

3.4.2 রৈখিক প্রতিসাম্য

একটি আধান বন্টনের বেলনাকার প্রতিসাম্য (cylindrical symmetry) আছে তখনই বলা হয় যখন এটির দৈর্ঘ্য অসীম এবং আধান ঘনত্বের মান একটি রৈখিক প্রতিসাম্য অক্ষ থেকে দূরত্বের উপর কেবল নির্ভর করে। (চিত্র 3.15)। প্রতিসাম্যের কারণে তড়িৎক্ষেত্র প্রতিসাম্য অক্ষ থেকে অরতঃ বহির্মুখী (radially outwards) হবে এবং এর মান অক্ষ থেকে লম্ব দূরত্বের উপর কেবল নির্ভরশীল হবে (এখানে আমরা ধনাত্মক আধান কল্পনা করেছি, ঋণাত্মক আধান হবে ক্ষেত্রের দিক অন্তর্মুখী হবে)।

একটি রৈখিক আধানের (একটি তার) থেকে r দূরত্বে তড়িৎক্ষেত্র E নির্ণয় করার জন্য r ব্যাসার্ধযুক্ত l দৈর্ঘ্যের একটি গাউসীয় তল অঙ্কন করা হল। এই তলের দুটি প্রান্ত অক্ষের লম্বতলে অঙ্কিত দুটি বৃত্তাকার ঢাকনা দিয়ে বদ্ধ। তড়িৎ ফ্লাক্স্ নির্ণয় করার সময় লক্ষণীয় যে আধানের ন্যায় তড়িৎক্ষেত্রও বেলনাকার প্রতিসাম্যাবস্থায় রয়েছে। অর্থাৎ যে কোন বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের মান প্রতিসাম্য অক্ষ থেকে বিন্দুটির লম্ব দূরত্বের উপর কেবল নির্ভর করে এবং এটি অরতঃ বহির্মুখী ক্রিয়া করে।

(চিত্র 3.15)

বেলনাকার তলছেদকারী ফ্লাক্সের রূপ

$$\phi = \int \vec{E}.\vec{ds} = \int Eds = E\int ds = 2\pi r\ell E \qquad (3.16)$$

এখানে $2\pi r\ell$ = বক্রতলের ক্ষেত্রফল। সিলিন্ডারের (বেলনের) দুই প্রান্তের ঢাকনাছেদকারী ফ্লাক্সের পরিমাণ শূন্য কারণ তড়িৎক্ষেত্র ঢাকনার সমান্তরাল তল বরাবর ক্রিয়া করছে গাণিতিক হিসাবে $\vec{E}$ এবং $\vec{ds}$ ভেক্টর পরস্পরের সঙ্গে লম্ব অর্থাৎ ডট গুণফল $\vec{E}.\vec{ds}$ এ $\cos\theta$ পদটির মান শূন্য. অতএব বেলনাকার গাউসীয় তলছেদকারী মোট ফ্লাক্সের মান (3.16) সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত মানের সমান।

গাউসের সূত্র অনুসারে ফ্লাক্স্ গাউসীয় সিলিন্ডারের অন্তর্গত আধানের সমানুপাতিক, অর্থাৎ

$$2\pi r\ell E = \frac{q_{\text{অন্তর্গত}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{সুতরাং } E = \frac{q_{\text{অন্তর্গত}}}{2\pi\varepsilon_0 r\ell} \qquad (3.17)$$

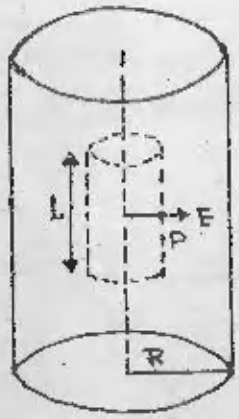
মনে করি রৈখিক আধান ঘনত্ব $= \lambda$

সুতরাং ℓ দৈর্ঘ্যের গাউসীয় সিলিন্ডারের অন্তর্গত আধানের মান $= \lambda\ell$ (3.17) সমীকরণে $q_{\text{অন্তর্গত}}$ র স্থানে $\lambda\ell$ লিখে আমরা পাই,

$$E = \frac{\lambda l}{2\pi\varepsilon_0 r l} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (3.18)$$

তারের ভিতরের তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের জন্য আমরা দুটি সম্ভাবনার কথা বিচার করব,

(i) ধরা যাক তারের আধান সমভাবে বন্টিত আছে এবং আধান ঘনত্ব $= \rho$, এবং তারের ব্যাসার্ধ $= R$। তারের মধ্যে অক্ষের থেকে r দূরত্বে P বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র E নির্ণয় করতে হলে r ব্যাসার্ধ যুক্ত এবং l দৈর্ঘ্যের একটি গাউসীয় সিলিন্ডার P বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কন করা হল (চিত্র 3.16)।



(চিত্র 3.16)

আমরা জানি একটি সিলিন্ডারের ফ্লাক্স্ শুধু সিলিন্ডারের বক্রতলের জন্য হয়। অতএব গাউসের সূত্র অনুসারে $\int \vec{E}.\vec{ds} = E2\pi r\ell = \frac{q^1}{\varepsilon_0}$

এখানে $q^1 =$ গাউসীয় তলের অন্তর্গত আধান

$= \pi r^2 \rho \ell$

অতএব $E2\pi r\ell = \frac{\pi r^2 \rho \ell}{\varepsilon_0}$ অথবা $E = \frac{r\rho}{2\varepsilon_0}$ (3.19)

সুতরাং অসীম দৈর্ঘ্যের কোন আহিত তারের ভিতরের কোন বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের দিক অরতঃ বহির্মুখী এবং মান তারের অক্ষ থেকে বিন্দুর দূরত্বের সমানুপাতিক

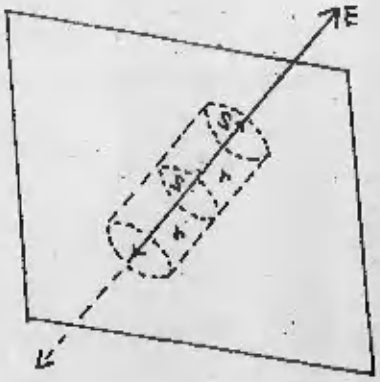
(ii) ধরা যাক তারের তড়িৎ আধান তারের উপরের তল বরাবর বিস্তৃত। এ অবস্থায় তারের মধ্যের

একটি বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করার জন্য এই বিন্দুর মধ্য দিয়ে একটি গাউসীয় তল অঙ্কন করা হল। সেই তলের অন্তর্গত আধানের মান শূন্য হবে। অতএব সেই বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের মানও শূন্য।

সমীকরণ (3.18) এবং (3.19) থেকে দেখা যায় যে একটি আহিত তার বা সিলিন্ডারের জন্য কোন বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের মান সেই তার বা সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধের উপর নির্ভর করে না। সুতরাং বলা যায় যে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের জন্য তার বা সিলিন্ডারের পরিবর্তে এদের রৈখিক অক্ষ বরাবর আধান বন্টিত হচ্ছে কল্পনা করে নির্দিষ্ট বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করলে দুটির মান সমান হবে।

3.4.3 তলীয় প্রতিসাম্য

যখন আধান ঘনত্ব একটি তলের লম্বদূরত্বের উপর নির্ভর করে, তখন আধানের বন্টন তলীয় প্রতিসাম্যে আছে বলা হয়। (চিত্র 3.17) এ একটি সমতল পাত (plane sheet) দেখানো আছে। এই পাতটিকে ধনাত্মক



(চিত্র 3.17)

আধানে আহিত করা হল যাতে তড়িৎক্ষেত্র এই পাতটির লম্ব অভিমুখে ক্রিয়া করে। পাতটির সম্মুখে। কোন একটি বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করতে ঐ বিন্দুর মধ্য দিয়ে 2r দৈর্ঘ্য এবং s প্রস্থচ্ছেদযুক্ত একটি গাউসীয় সিলিন্ডার অঙ্কন করা হল। এই সিলিন্ডারটির পার্শ্বদেশ প্রতিসাম্য তলের লম্ব এবং দুটি সীমাতল প্রতিসাম্য তলের সমান্তরাল। যেহেতু কোন তড়িৎ বলরেখা সিলিন্ডারের পার্শ্বতল ছেদ করে না সুতরাং সিলিন্ডারের পার্শ্বদেশ ছেদকারী ফ্লাক্সের মান শূন্য। কিন্তু সিলিন্ডারের দুটি সীমাতলকে ফ্লাক্স্ লম্বভাবে ছেদ করে। ফলে $\bar{E}$ ভেক্টর এবং প্রস্থচ্ছেদ ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল কাজেই দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী $\cos\theta = 1$।

∴ গাউসীয় তলছেদকারী মোট ফ্লাক্সের মান

$$\phi = \int E\, ds = 2ES \quad (\because \text{উভয় সীমাতলের ক্ষেত্রফল} = 2s)$$

গাউসের সূত্র অনুযায়ী

$$2ES = \frac{q_{\text{অন্তর্গত}}}{\varepsilon_0}$$

এখন যদি σ = তলমাত্রিক আধান ঘনত্ব (Surface charge density) হয়

তবে সিলিন্ডারের অন্তর্গত মোট আধানের মান $= \sigma s$

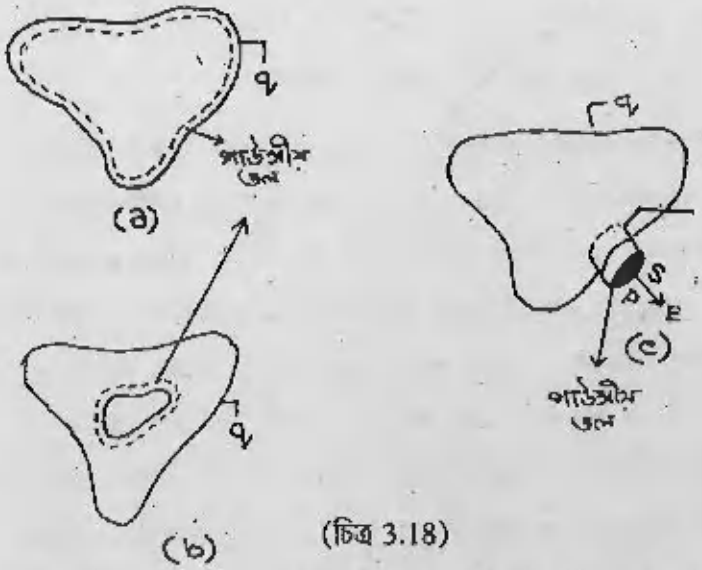
$$\therefore E \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

3.4.4 একটি বিচ্ছিন্ন (isolated) আহিত পরিবাহী

গাউসের সূত্রের সাহায্যে বিচ্ছিন্ন পরিবাহী সম্পর্কিত নিম্নের প্রয়োজনীয় সূত্র প্রমাণ করা যায়। সূত্রটি হল :

স্থির তড়িৎ দ্বারা অসম (unbalanced) ভাবে আহিত কোন পরিবাহীর আধান উহার বহিঃতলের উপর অবস্থান করে।

উপরের সূত্র প্রমাণ করার জন্য q আধান সম্বলিত একটি নিরেট ধাতব পরিবাহী নেওয়া হল (চিত্র 3.18a)



(চিত্র 3.18)

কাটা লাইন (dotted line) দ্বারা অঙ্কিত গাউসীয় তলটি পরিবাহীর তলের ঠিক নিচেই। সূত্রটি প্রমাণ করার পূর্বে আমাদের জানা প্রয়োজন যে আহিত ধাতব পদার্থটির মধ্যে তড়িৎক্ষেত্রের মান সর্বত্র শূন্য। এর

কারণ ব্যাখ্যা করার জন্য মনে করা যাক যদি ধাতব পদার্থটির মধ্যে তড়িৎক্ষেত্র বর্তমান থাকে তাহলে ধাতব পরিবাহীর ভিতরের মুক্ত ইলেকট্রনগুলি তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবে গতিপ্রাপ্ত হয়ে পরিবাহীর ভিতরে তড়িৎপ্রবাহ সৃষ্টি করবে। কিন্তু পরিবাহীকে আধান দ্বারা আহিত করার সময় অত্যন্ত স্বল্প সময়ের জন্য ছাড়া কোন তড়িৎপ্রবাহ লক্ষ্য করা যায় না; তড়িৎপ্রবাহ বজায় রাখার জন্য শক্তির সরবরাহের প্রয়োজন। কাজেই এই সিদ্ধান্তে আসা যায় যে একটি বিচ্ছিন্ন পরিবাহীর ভিতরে কোন তড়িৎক্ষেত্র থাকতে পারে না।

পরিবাহীর মধ্যে তড়িৎক্ষেত্র থাকে না কাজেই গাউসীয় তল, যেটি পরিবাহীর সীমারেখার মধ্যে অঙ্কিত হয়েছে, সেই তলের উপরেও তড়িৎক্ষেত্রের মান শূন্য। কাজেই গাউসের সূত্র অনুসারে গাউসীয় তলের মধ্যে আধানের মান শূন্য হবে।

যেহেতু কোন নিরেট পরিবাহীর ভিতর কোন অসম (unbalanced) আধান থাকতে পারে না অতএব পরিবাহীর ভিতর থেকে কিছু অংশ তুলে নিলে পরিবাহীর ভিতর একটি শূন্য গহ্বরের সৃষ্টি হবে (চিত্র 3.18h)। এই শূন্যস্থানের চারিপাশে, কিন্তু পরিবাহীর ভিতর একটি গাউসীয় তল অঙ্কন করা হল। এই নতুন গাউসীয় তলচ্ছেদকারী ফ্লাক্সের মান শূন্য, কেননা পরিবাহীর ভিতর $\vec{E} = O$। কাজেই গাউসের সূত্র অনুসারে এই নতুন গাউসীয় তলের অন্তর্গত আধানের মান শূন্য। সুতরাং, আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে পরিবাহীর ভিতরের শূন্য গহ্বরের দেওয়ালে কোন আধান নেই, সম্পূর্ণ আধান পরিবাহীর পৃষ্ঠতলে অবস্থান করে।

উপরের পর্যবেক্ষণ আমাদের ব্যবহারিক কাজে অত্যন্ত প্রয়োজনে আসে। কোন বস্তুকে তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাব থেকে রক্ষা করতে হলে বস্তুটিকে একটি পরিবাহী পাত দিয়ে আবৃত করলে ঐ পরিবাহীর ভিতর কোন তড়িৎক্ষেত্র থাকতে পারবে না এবং বস্তুটি তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবমুক্ত হবে।

আহিত বস্তুর নিকটস্থ বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র — আহিত পরিবাহীর নিকট একটি বিন্দু P কল্পনা করা হল এবং ধরা যাক এই বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের মান E। চিত্র (3.18c) এর ন্যায় একটি গাউসীয় সিলিন্ডার অঙ্কন করা হল যাতে বিন্দুটি সিলিন্ডারের এক প্রান্তের ঢাকনার উপর এবং অপর প্রান্তের ঢাকনাটি পরিবাহীর অভ্যন্তরে অবস্থিত হয় এবং এই ঢাকনা দুটি পরিবাহী তলের সমান্তরাল হয়। মনে করি প্রত্যেকটি ঢাকনার ক্ষেত্রফল S। সিলিন্ডারের পার্শ্বতলগুলি পরিবাহীর উপর লম্বভাবে অবস্থিত এবং বিচ্ছিন্ন আহিত পরিবাহীর ঠিক বাইরে তড়িৎক্ষেত্র পরিবাহীর উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে। পরিবাহীর বাইরে অবস্থিত গাউসীয় সিলিন্ডারের ঢাকনাছেদকারী ফ্লাক্সের পরিমাণ ES কিন্তু পরিবাহীর অভ্যন্তরে অবস্থিত ঢাকনা ছেদকারী ফ্লাক্সের পরিমাণ শূন্য (যেহেতু পরিবাহীর অভ্যন্তরের যে কোন বিন্দুতে $\vec{E} = 0$) সিলিন্ডারের পার্শ্বতলছেদকারী ফ্লাক্সের মানও শূন্য। এক্ষেত্রে $\vec{E}$ তলের সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করে কাজেই ফ্লাক্স এই তল ছেদ করতে পারে না।

গাউসীয় তলের অন্তর্গত আধানের মান হবে $= \sigma S$

যেখানে $\sigma =$ যে বিন্দুতে তড়িৎ ক্ষেত্র নির্ণয় করতে হবে তার নিকটস্থ স্থানের তলমাত্রিক আধান ঘনত্ব।

অতএব আমরা দেখলাম গাউসীয় সিলিন্ডারছেদকারী মোট ফ্লাক্সের মান $= ES$ এবং সিলিন্ডারের অন্তর্গত মোট আধান $= \sigma S$

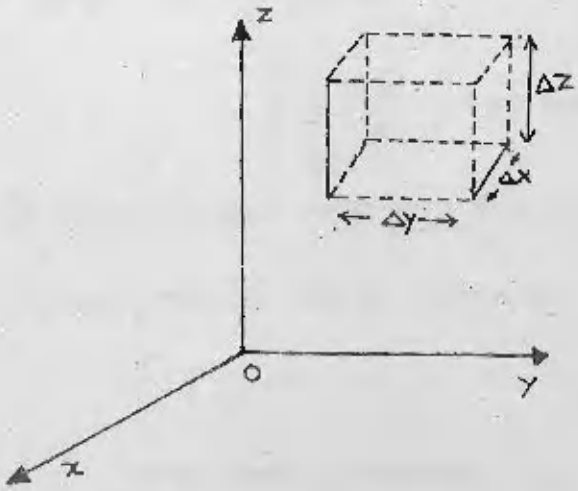
সুতরাং গাউসীয় সূত্র অনুসারে $\phi = \dfrac{q_{\text{অন্তর্গত}}}{\varepsilon_0}$ অথবা $E_s = \dfrac{\sigma s}{\varepsilon_0}$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (3.21)$$

এ পর্যন্ত আমরা গাউসের সূত্র সমাকলের রূপে প্রকাশ করেছি (সমীকরণ 3.10)। এই উপপাদ্যের একটি অবকল রূপও আছে।

3.5 গাউসের সূত্রের অবকল রূপ (Differential form)

একটি অতিক্ষুদ্র আয়তনের অংশ Δv নেওয়া হল। Δv র বাহুগুলি x, y এবং z অক্ষের সমান্তরাল এবং এই বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে Δx, Δy এবং Δz (চিত্র 3.19)



(চিত্র 3.19)

ধরা যাক Δv র মধ্যবিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র $\vec{E}$ এবং x, y, z অক্ষ বরাবর এই ক্ষেত্রের উপাংশের মান যথাক্রমে E_x, E_y এবং E_z। Δv র y অক্ষের উপর লম্ব দুটি প্রান্তে দুটি তল নেওয়া হল। এই তলদুটির

প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফল $\Delta x \quad \Delta z$। ডানদিকের তলের মাঝখানে (তলটি Δv র মধ্যবিন্দু থেকে $\frac{\Delta y}{2}$ দূরত্বে অবস্থিত) তড়িৎক্ষেত্রের সন্নিহিত (approximate) মান $E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)$

Δv র আয়তন খুব ছোট কাজেই এটির প্রতিটি তলের ক্ষেত্রফলও খুব ছোট হওয়ায় উপরের মানটিকে আমরা সম্পূর্ণ তলের তড়িৎক্ষেত্রের মান হিসাবে গ্রহণ করতে পারি।

উপরের মানটি নির্ণয় করতে আমরা টেলরের উপপাদ্যের সাহায্য নিয়েছি। ধরা যাক $f(x) = x$ এর অপেক্ষক। x এর ক্ষুদ্র পরিবর্তন dx হলে অপেক্ষকের রূপ হবে $f(x+dx)$ যেটিকে টেলরের শ্রেণীর সাহায্যে প্রকাশ করা যায় $f(x+dx) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}(dx) + \frac{1}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2}(dx)^2 + \ldots..$

dx খুব ক্ষুদ্র বলে এটির দ্বিতীয় এবং উচ্চতর ঘাত (power) গুলিকে অগ্রাহ্য করা যায়। সেক্ষেত্রে

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}(dx)$$

$f(x)$ এর স্থানে E_y, $\frac{df(x)}{dx}$ এর স্থানে $\frac{\partial Ey}{\partial y}$ এবং dx এর স্থানে $\frac{\Delta y}{2}$ বসিয়ে দক্ষিণ দিকের তলে তড়িৎক্ষেত্রের মান পাওয়া যায় $E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)$

(এটি লক্ষণীয় যে আমরা এখানে আংশিক অবকলের চিহ্ন (partial differentiation) ব্যবহার করেছি। কারণ E_y, x, y এবং z এর অপেক্ষক; এই স্থানে x এবং z কে স্থির রেখে E_y কে কেবলমাত্র y এর সাপেক্ষে অবকলন করতে হবে।)

অনুরূপভাবে Δv র বামদিকের তলে তড়িৎক্ষেত্রের মান

$$= E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}\left(-\frac{\Delta y}{2}\right)$$

সুতরাং y অক্ষ বরাবর দক্ষিণতল ছেদকারী ফ্লাক্স্

$$= \left[E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\right](\Delta x \Delta z)$$

এবং y অক্ষ বরাবর বামতল ছেদকারী ফ্লাক্স্

$$= \left[E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}\left(-\frac{\Delta y}{2}\right)\right](\Delta x \Delta z)$$

অতএব Δv কে ছেদকারী y অক্ষ বরাবর বর্হিমুখী ফ্লাক্সের মান

$$\left[E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\right](\Delta x\ \Delta z) - \left[E_y - \frac{\partial E_y}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\right](\Delta x\ \Delta z)$$

$$= \frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta x\ \Delta y\ \Delta z \qquad (3.22)$$

অনুরূপে x অক্ষের লম্ব বরাবর Δv র দুই প্রান্তের তলের জন্য মোট বহির্মুখী ফ্লাক্সের মান

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x\ \Delta y\ \Delta z \qquad (3.23)$$

এবং z অক্ষের উপর লম্ব বরাবর উপর ও নিচের তল দুটির জন্য বহির্মুখী ফ্লাক্সের মান

$$= \frac{\partial E_z}{\partial z}\Delta x\ \Delta y\ \Delta z \qquad (3.24)$$

সুতরাং সম্পূর্ণ আয়তন Δv কে ছেদকারী মোট ফ্লাক্সের মান (3.22), (3.23) এবং (3.24) প্রতিরূপ তিনটির যোগফল হবে অর্থাৎ মোট ফ্লাক্স্

$$= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta v \qquad (3.25)$$

আপনারা নিশ্চয় জানেন যে একটি রাশি f যদি x এর অপেক্ষক হয় তবে x এর অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তনের ফলে f এর পরিবর্তনের হার $\frac{df}{dx}$ কে x এর সাপেক্ষে f এর অবকল গুণাঙ্ক বলা হয়। এখন f রাশিটি যদি x, y, z তিনটি রাশির অপেক্ষক হয় তবে আংশিক অপেক্ষকের নিয়ম অনুসারে df কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz \qquad (3.26)$$

উপরের সমীকরণটি (x, y, z) বিন্দু থেকে অতি ক্ষুদ্র দূরত্ব (dx, dy, dz) গেলে f এর পরিবর্তনের রূপ। এখন dx, dy, dz কে একটি ভেক্টর $\vec{dl}$ এর x, y, z অক্ষ বরাবর উপাংশের মান বলে ধরে নেওয়া হলে (3.26) সমীকরণকে একটি ডট গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায় অর্থাৎ

$$df = \left(\frac{df}{dx}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\right)\bullet\left(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}\right)$$

$$= \left(\vec{\Delta} f\right)\bullet\left(\vec{dl}\right) \quad \text{যেখানে } \vec{\nabla}\ (\text{ডেল}) = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (3.27)$$

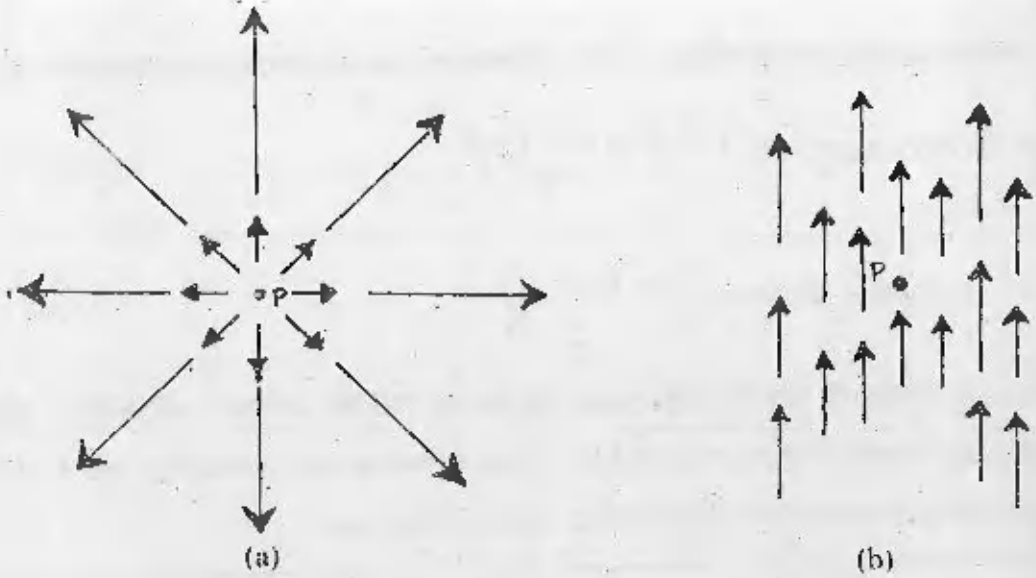
$\vec{\nabla}$ একটি ভেক্টর সংকারক (operator) যেটি স্কেলার বা ভেক্টর অপেক্ষকের উপর ডট অথবা ক্রস (cross) গুণফলের মাধ্যমে ক্রিয়া করে।

যদি $\vec{\nabla}$ সংকারক একটি ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{E}$ এর উপর ডট গুণফলের মাধ্যমে ক্রিয়া করে তবে $\vec{\nabla}$ এর সংজ্ঞা অনুযায়ী (3.27 সমীকরণ)।

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{K}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \qquad (3.28)$$

$\vec{\nabla}.\vec{E}$ কে বলা হয় $\vec{E}$ ভেক্টরের ডাইভারজেন্স (divergence)। এই রাশিটিকে div $\vec{E}$ রূপেও লেখা হয়। একটি ভেক্টর অপেক্ষকের (এই স্থানে তড়িৎক্ষেত্র $\vec{E}$) ডাইভারজেন্স একটি স্কেলার রাশি। এই রাশিটি নির্দিষ্ট কোন বিন্দু থেকে ভেক্টরের (এখানে $\vec{E}$) বিস্তৃতির পরিমাপ করে। $\vec{E}$ ভেক্টরটির যে কোন বিন্দুতে ডাইভারজেন্সের মান যদি ধনাত্মক এবং যথেষ্ট বড় হয় (চিত্র 3.20a) তবে এই ভেক্টরটি বাইরের দিকে ছড়িয়ে পড়বে। (তীর চিহ্ন ভিতরমুখী হলে ডাইভারজেন্সের মান ঋণাত্মক হবে।) অপরদিকে যদি $\vec{E}$ এর P বিন্দুতে শূন্য ডাইভারজেন্স থাকে (চিত্র 3.20b) তবে তড়িৎক্ষেত্র একেবারেই ছড়িয়ে পড়বে না।



(চিত্র 3.20)

অতএব (3.28) সমীকরণ ব্যবহার করে আমরা (3.25) সমীকরণকে নিম্নের ন্যায় লিখতে পারি:

Δv আয়তন ছেদকারী মোট তড়িৎ ফ্লাক্স্ $= \left(\text{div}\bar{E}\right)\Delta v$ (3.29)

ফ্লাক্সের সংজ্ঞা (3.4 সমীকরণ) অনুসারে (3.30)

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \Delta V \text{div}\bar{E}$$

এখন ρ যদি আধানের আয়তন ঘনত্ব হয় তবে Δv আয়তনের অন্তর্গত মোট আধান $q = \rho dv$

(3.31)

(3.9) সমীকরণে আমরা পেয়েছি

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q_{\text{অন্তর্গত}}}{\varepsilon_0}$$

(3.30) এবং (3.31) সমীকরণ থেকে $\oint \vec{E}.\vec{ds}$ এবং $q_{\text{অন্তর্গত}}$ এর মান বসিয়ে আমরা পাই,

$$\Delta\gamma \text{ div } \bar{E} = \frac{\rho\Delta v}{\varepsilon_0} \text{ অথবা } \text{div } \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3.32)$$

উপরের সমীকরণটিই গাউসের সূত্রের অবকল রূপ। একক আয়তন থেকে নির্গত ফ্লাক্সের পরিমাণকেই ডাইভারজেন্স দিয়ে প্রকাশ করা হয়। কোন তলে আধান শূন্য হলে সে স্থানে div $\bar{E}$ এর মান শূন্য হবে।

গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য — (3.32) সমীকরণকে S তল দ্বারা আবদ্ধ যে কোন আয়তন V এর জন্য সমাকলন করলে আমরা পাই $\int_V \text{div}\,\vec{E}\,dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dv$ (3.33)

(3.10) সমীকরণ ব্যবহার করে $\int_V \text{div}\,\vec{E}\,dv = \int_S \vec{E}.\vec{ds}$ (3.34)

(3.34) সমীকরণটি গাউসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য (বা গাউসের উপপাদ্য)। এই সমীকরণ দ্বারা একটি তলমাত্রিক সমাকলকে আয়তন সমাকলে অথবা আয়তন সমাকলকে তলমাত্রিক সমাকলে পরিবর্তন করা সম্ভব। গাউসের সূত্রের অবকল রূপ কঠিনতর সমস্যা সমাধানের কাজে আসে।

3.6 সারাংশ

এই এককটি পড়ে আপনারা জানতে পারলেন যে

- একটি আবদ্ধতল ছেদকারী বলরেখার সংখ্যা সেই তলের অন্তর্গত আধানের সমানুপাতিক।
- কোনো তলছেদকারী বলরেখার গাণিতিক রূপই তড়িৎ ফ্লাক্স্। একটি তলের উপর তড়িৎক্ষেত্র $\vec{E}$ এর তলমাত্রিক সমাকলকে তড়িৎ ফ্লাক্স্ দ্বারা প্রকাশ করা যায় $\phi = \int \vec{E}.\vec{ds}$

এখানে $\vec{ds}$ একটি অতি ক্ষুদ্র ভেক্টর রাশি যেটির মান ক্ষুদ্র তলটির ক্ষেত্রফলের সমান এবং তলের উপর অঙ্কিত বহির্মুখী লম্বের দ্বারা এই ভেক্টরের দিক নির্দেশিত হয়।

- গাউসের সূত্র এবং কুলম্বের সূত্র উভয়েই আধান এবং তড়িৎক্ষেত্রের সম্পর্কের দুটি বিভিন্ন রূপ। গাউসের সূত্রের সাহায্যে কুলম্বের সূত্রে উপনীত হওয়া যায় কিন্তু কুলম্বের সূত্রের সাহায্যে গাউসের সূত্র নির্ণয় করা যায় না। কাজেই গাউসের সূত্র কুলম্বের সূত্রের সম্পূর্ণ প্রতিরূপ নয়।
- গাউসের সূত্রের গাণিতিক রূপ $\int \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

যেখানে q = একটি কল্পিত বদ্ধ তলের (গাউসীয় তল) অন্তর্গত মোট আধান।

ε_0 = শূন্য মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতা

গাউসের সূত্র তড়িৎক্ষেত্রের একটি বিশেষ ধর্মের বর্ণনা করে। কিন্তু গাউসের সূত্র সব ক্ষেত্রে তড়িৎ ক্ষেত্রের মান নির্ণয়ের জন্য যথেষ্ট নয়।

- গাউসের সূত্রের সমাকল রূপ $\int \vec{E}.\vec{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dv$

যেখানে $dv =$ অতি ক্ষুদ্র আয়তন এবং $\rho =$ আয়তন ঘনত্ব

- R ব্যাসার্ধের এবং q আধানের একটি গোলীয় প্রতিসাম্যযুক্ত খোলকের বাইরে তড়িৎক্ষেত্র অরতঃ বহির্মুখী (directed radially outwards) এবং ক্ষেত্রের মান $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\ (r > R)$

q আধান খোলকের তলে কেন্দ্রীভূত থাকলে E এর মান উপরের মানের সমান।

- গোলীয় প্রতিসাম্যযুক্ত খোলকের ভিতরে তড়িৎক্ষেত্রের মান শূন্য $E = 0\ (r < R)$

- একটি অসীম দৈর্ঘ্যের সুষম বন্টিত আধান সমষ্টির (প্রতি একক দৈর্ঘ্যে আধানের মান λ) জন্য তড়িৎক্ষেত্র ঐ দৈর্ঘ্যের লম্ব অভিমুখে ক্রিয়া করে এবং এই ক্ষেত্রের মান

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0^r}$$

- একটি আহিত অসীম পাতের (infinite sheet) জন্য তড়িৎক্ষেত্র ঐ পাতের লম্ব অভিমুখে ক্রিয়া করে এবং এই ক্ষেত্রের মান $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ যেখানে $\sigma =$ তলমাত্রিক আধান ঘনত্ব।

- সাম্যাবস্থায় একটি অন্তরিত পরিবাহীর অতিরিক্ত আধান পরিবাহীর উপরের পৃষ্ঠে অবস্থান করে।
- একটি আহিত পরিবাহীর তলের নিকটে তড়িৎক্ষেত্র তলের উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে এবং তড়িৎক্ষেত্রের মান $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

- গাউসের সূত্রের অবকল রূপ $\text{div}\,\vec{E}\,\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

- গাউসের উপপাদ্যের গাণিতিক রূপ $\int_V \text{div}\,\vec{E}\,dv = \int_S \vec{E}.\vec{ds}$

3.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(1) কোনো একটি তলের তড়িৎ ক্ষেত্রের রূপ $\vec{E} = 200\,\hat{i}$। এই তলে $\vec{A}$ একটি ক্ষেত্র নেওয়া হল। এখন $\vec{A}$ ক্ষেত্র ছেদকারী ফ্লাক্সের মান নির্ণয় করুন, যখন

a) $\bar{A}$ ক্ষেত্রটি XY তলে অবস্থিত

b) $\bar{A}$ ক্ষেত্রটি XZ তলে অবস্থিত

c) $\bar{A}$ ক্ষেত্রটি YZ তলে অবস্থিত

(2) একটি গোলীয় গাউসীয় তলের কেন্দ্রে একটি বিন্দু আধান আছে। নিম্নে বর্ণিত ক্ষেত্রগুলিতে ফ্লাক্সের পরিবর্তন হবে কিনা লিখুন —

(a) তলটির পরিবর্তে সম আয়তনের ঘনক নেওয়া হল।

(b) গোলকটির পরিবর্তে এক দশমাংশ আয়তনের একটি ঘনক নেওয়া হল।

(c) আধানটিকে কেন্দ্র থেকে সরিয়ে পরিবাহী গোলকের অন্তর্গত অন্য কোন বিন্দুতে রাখা হল।

d) আধানটিকে পরিবাহী গোলকের বাইরে সীমার কাছে রাখা হল।

(e) দ্বিতীয় একটি আধানকে পরিবাহী গোলকের বাইরে সীমার কাছে রাখা হল।

(f) দ্বিতীয় একটি আধানকে গাউসীয় তলের ভিতর রাখা হল।

(3) ধরা যাক একটি গাউসীয় তলের অন্তর্গত মোট আধানের মান শূন্য

(a) গাউসের সূত্র অনুসারে তলের সর্বত্র $\bar{E}$ এর মানও কি শূন্য?

(b) বিপরীতভাবে যদি তলের উপর সর্বত্র $\bar{E}$ এর মান শূন্য হয় তাহলে গাউসের সূত্র অনুসারে তলের অন্তর্গত আধানের মানও কি শূন্য হবে?

(4) একটি সমতল পাতের (ক্ষেত্রফল 50 cm^2) তলমাত্রিক আধান ঘনত্ব σ। পাতের কেন্দ্র থেকে 1.5 cm দূরে অবস্থিত একটি ইলেকট্রনের উপরের পাত থেকে বহির্মুখী 1.8×10^{-12}N মানের একটি বল অনুভূত হয়। পাতের উপর মোট আধানের মান নির্ণয় করুন।

(5) একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিন কোণে তিনটি সমমানের আধান আছে। এই তিনটি আধানের প্রভাবে তড়িৎক্ষেত্রের মান কি গাউসের সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব? কারণ সহ ব্যাখ্যা করুন।

3.8 উত্তরমালা

প্রশ্নমালা — 1

গাউসের সূত্র এক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যাবে না। কেননা গাউসের সূত্র কেবলমাত্র বদ্ধ তলের জন্য প্রযোজ্য। চিত্রের তলটি বদ্ধতল নয়।

প্রশ্নমালা — 2

S_1 তল দ্বারা মোট আবদ্ধ আধানের মান q_1। আহিত নয় ধাতব চাকতিটির জন্য ফ্লাক্সের কোনো পরিবর্তন হবে না (যদিও এই চাকতিটি তড়িৎক্ষেত্রের ভিতর থাকার দরুন এর মধ্যে উপস্থিত ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক আধান পরস্পর থেকে পৃথক হওয়া সম্ভব।) q_2 এবং q_3 আধান S_1 তলের বাইরে অবস্থিত। (3.8) সমীকরণ থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$\phi = \frac{q_{\text{অন্তর্গত}}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{+3.1\times10^{-9}\,C}{8.85\times10^{-12}\,C^2N^{-1}m^{-2}} = +350\,Nm^2C^{-1}$$

ধনাত্মক চিহ্নের অর্থ এই যে তলের অন্তর্গত আধান ধনাত্মক এবং মোট ফ্লাক্স্ বহির্মুখী।

S_2 তলের দ্বারা আবদ্ধ আধানের মান $q_1+q_2+q_3$ কাজেই এই ক্ষেত্রে

$$\phi = \frac{q_{\text{অন্তর্গত}}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1+q_2+q_3}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{+3.1\times10^{-9}\,C - 5.9\times10^{-9}\,C - 3.1\times10^{-9}\,C}{8.85\times10^{-12}\,C^2N^{-1}m^{-2}}$$

$$= -670\,N\,m^2C^{-1}$$

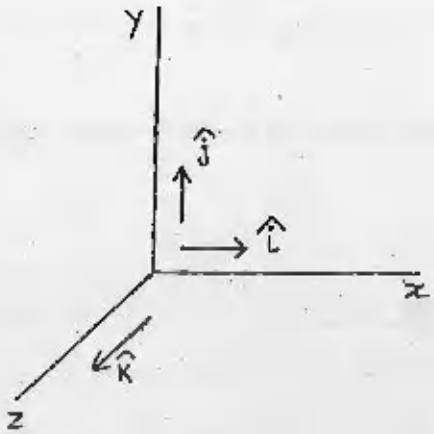
ঋণাত্মক চিহ্নের অর্থ এই যে তলের মোট আধান ধনাত্মক এবং মোট ফ্লাক্স্ অন্তর্মুখী।

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1) চিত্র (3.21) অনুসারে

(a) $\phi = \vec{E}.\vec{A} = 200A\left(\hat{i}.\hat{k}\right) = 0$

$d\vec{A}.\hat{j}$ র দিক বরাবর



(চিত্র 3.2.1)

(b) $\phi = \vec{E}.\vec{A} = 200A(\hat{i}.\hat{j}) = 0$

(c) $\phi = \vec{E}.\vec{A} = 200A(\hat{i}.\hat{i}) = 200A$

2 (a) হবে না, (b) হবে না, (c) হবে না, (d) হবে, (e) হবে না, (f) হবে ।

সবগুলির কারণ হিসাবে বলা যায় যে যেহেতু ফ্লাক্স্

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

অতএব ফ্লাক্স কেবলমাত্র তলের অন্তর্গত আধানের উপরেই নির্ভর করে, আধানের অবস্থানের উপর নির্ভর করে না। তলের বাইরের আধানের প্রভাবে তলের মধ্যে যত ফ্লাক্স্ তলে প্রবেশ করে ততগুলিই তল ত্যাগ করে সেই কারণে মোট ফ্লাক্সের পরিমাণ শূন্য।

3. (a) যখন গাউসীয় তলের অন্তর্গত মোট আধানের পরিমাণ শূন্য তখন গাউসের সূত্রের রূপ $\vec{E}.\vec{ds} = 0$ । ইহার অর্থ $\vec{E} = 0$ নয়। এই স্থানে $\vec{E}$ এবং $\vec{ds}$ পরস্পরের লম্ব তলে অবস্থান করতে পারে।

4. পাতের মধ্যবিন্দু থেকে 1·5 cm সামনে এবং পাতের দুই প্রান্ত থেকে অনেক দূরে বিন্দুটির কাছে পাতটি অসীম বলে মনে হবে। কাজেই তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের জন্য আমরা (3.20) সমীকরণ ব্যবহার করতে পারি। তড়িৎক্ষেত্রের সংজ্ঞা অনুসারে ইলেকট্রন দ্বারা অনুভূত বল $F = -eE$ যেখানে $e =$ ইলেকট্রনের আধান

অতএব $F = -eE = -e\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = -\frac{eq}{2\varepsilon_0 A}$ (এখানে $\sigma = \frac{q}{A}$)

সুতরাং $q = -\frac{2\varepsilon_0 AF}{e} = \frac{2\left(8\cdot9\times10^{-12}C^2N^2m^{-2}\right)(0\cdot50m)^2\left(1\cdot8\times10^{-12}N\right)}{-1\cdot6\times10^{-19}C}$

$= -50\mu C$

ঋণাত্মক চিহ্নের অর্থপাতের আধান ঋণাত্মক ।

5. গাউসের সূত্র এই স্থানে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করতে ব্যবহার করা যাবে না, কেননা একটি প্রতিসাম্যযুক্ত তল (যে তলের উপর সর্বত্র তড়িৎক্ষেত্রের মান সমান) অঙ্কন করা এক্ষেত্রে কঠিন এবং তল অঙ্কন সম্ভব না হলে সমাকলনটি নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

একক 4 ❑ তড়িৎ বিভব

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

4.2 গাণিতিক পূর্বকথা

স্কেলারের গ্রেডিয়েন্ট (Gradient)

ভেক্টরের লাইন সমাকল (Line integral)

4.3 আধানের সরণের জন্য কৃতকার্য

তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের লাইন সমাকল

তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের লাইন সমাকলের পথ নিরপেক্ষতা (path in dependence)

4.4 তড়িৎ বিভব

আধান সমষ্টির জন্য বিভব

বিভব প্রভেদ

4.5 তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য এবং তড়িৎ বিভবের সম্পর্ক

4.6 তড়িৎ দ্বিমেরুর (dipole) র জন্য তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য এবং তড়িৎ বিভব নির্ণয়

4.7 তড়িৎক্ষেত্রে দ্বিমেরু

4.8 কয়েকটি ক্ষেত্রে তড়িৎ বিভব নির্ণয়

রৈখিক আধান বিন্যাস

আহিত বৃত্তীয় চাকতি (charged circular disc)

4.9 সমবিভব তল (Equipotential Surface)

4.10 তড়িৎ স্থিতিশক্তি (Electrostatic potential Energy)

4.11 স্থির তড়িৎ বলের রূপ

4.12 সারাংশ

4.13 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

4.14 উত্তরমালা

4.1 প্রস্তাবনা

আপনারা জেনেছেন দুটি আধানের মধ্যের বলকে কুলম্বের সূত্র দ্বারা প্রকাশ করা যায়। তড়িৎক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে একটি একক ধনাত্মক আধান কর্তৃক অনুভূত বলকে সেই বিন্দুতে ক্ষেত্রের প্রাবল্য $\vec{E}$ বলা হয়। $\vec{E}$ এর মান নির্ণয়ের জন্য গাউসের সূত্রের ব্যবহার করতে আপনারা শিখেছেন।

স্থির তড়িৎ বিজ্ঞানে আমাদের মুখ্য উদ্দেশ্য $\vec{E}$ নির্ণয় করা। কিন্তু $\vec{E}$ একটি ভেক্টর রাশি হওয়ায় বিভিন্ন দিকে এটির প্রত্যেকটি উপাংশ নির্ণয় করতে হয়। ফলে গাণিতিক জটিলতা এড়াতে অনেক সময়ে প্রথমে তড়িৎ বিভব নামে একটি স্কেলার রাশি নির্ণয় করা হয় এবং পরে $\vec{E}$ ও এর মধ্যের একটি সহজ সম্পর্কের দ্বারা $\vec{E}$ নির্ণয় করা হয়। একটি স্কেলার রাশি হওয়ায় এটি নির্ণয় করা সহজ। তড়িৎ বিভব এর ধারণা থাকা অত্যন্ত জরুরি। তড়িৎ আধান দ্বারা কৃতকার্য এবং তড়িৎক্ষেত্রে আধানের শক্তি নির্ণয়ের জন্য তড়িৎ বিভবের সাহায্য গ্রহণ করতে হয়। তড়িৎ বিভব দুটি বিন্দুর ভিতর বিভব পার্থক্য এবং $\vec{E}$ ও বিভবের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় এই এককের প্রধান উদ্দেশ্য। এইজন্য সর্বপ্রথমে আমরা দুটি নতুন গাণিতিক ধারণা প্রতিষ্ঠা করব। সে দুটি হল (i) একটি স্কেলার অপেক্ষকের গ্রেডিয়েন্ট এবং (ii) ভেক্টরের লাইন সমাকল।

সবশেষে আমরা নিরবচ্ছিন্ন আধান বন্টনের কিছু বিশেষ ক্ষেত্রের কথা আলোচনা করব এবং সমবিভব তল কাকে বলে জানব ও তড়িৎ স্থিতিশক্তি নির্ণয় করব।

(আমরা $\bar{E}$ কে বারবার তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য না লিখে তড়িৎক্ষেত্র লিখব)

উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে আপনারা

- একটি আধান q কে এক বিন্দু থেকে অপর একটি বিন্দুতে নিয়ে যাওয়ার জন্য প্রয়োজনীয় কার্যের পরিমাণ নির্ণয় করতে পারবেন।
- দেখাতে সক্ষম হবেন যে একটি বদ্ধ পথের উপর তড়িৎক্ষেত্রের লাইন সমাকলের মান শূন্য।
- একটি আধানের প্রভাবে একটি বিন্দুতে তড়িৎ বিভব নির্ণয় করতে পারবেন।
- তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য এবং তড়িৎ বিভবের সম্পর্ক নির্ণয় করে কোন একটি বিন্দুতে জ্ঞাত তড়িৎ বিভব থেকে তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য নির্ণয় করতে পারবেন।
- একটি দ্বিমেরু বা ডাইপোলের জন্য তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করতে পারবেন।
- একটি সুষম তড়িৎক্ষেত্রে অবস্থিত তড়িৎ দ্বিমেরু বা ডাইপোলের উপর টর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।
- অবিচ্ছিন্ন নিরবচ্ছিন্ন আধান বন্টনের জন্য বিভব নির্ণয় করতে পারবেন।
- সমবিভব তলের জ্ঞান থেকে তড়িৎ বলরেখা অঙ্কন করতে সক্ষম হবেন।
- একটি আধান বন্টনের জন্য স্থির তড়িৎ স্থিতিশক্তি নির্ণয় করতে সক্ষম হবেন।
- দেখাতে সক্ষম হবেন যে স্থির তড়িৎ বল সংরক্ষী বল।

4.2 গাণিতিক পূর্বকথা

এই এককের ভৌতরাশিগুলি নির্ণয় করতে হলে স্কেলার অপেক্ষকের গ্রেডিয়েন্ট এবং ভেক্টরের লাইন সমাকলের ধারণা থাকা প্রয়োজন। সেই কারণে আমরা প্রথমে এই দুটি গাণিতিক প্রক্রিয়া সম্বন্ধে আলোচনা করব।

4.2.1 স্কেলারের গ্রেডিয়েন্ট

আমাদের জানা আছে যে, একটি ভেক্টরের তিনপ্রকারের গুণফল হয় :— একটি ভেক্টর $\bar{A}$ কে একটি স্কেলার দ্বারা গুণ করা $(K\bar{A})$, দুটি ভেক্টরের স্কেলার অথবা ডট গুণফল $(\bar{A}.\bar{B})$ এবং দুটি ভেক্টরের ভেক্টর অথবা ক্রশ গুণফল $(\bar{A} \times \bar{B})$। অনুরূপে ভেক্টরের অনেক ভাবে অবকল নির্ণয় করা যায়।

যথা ব্যাসার্ধ $\vec{r}$ (অরীয় ভেক্টর, radial vector) এর সময়ের (স্কেলার) সময়ের সাপেক্ষে অবকল করণ $\frac{d\vec{r}}{dt}$। আর একটি রূপ ভেক্টরের অবকল সংকারক (operator) ∇।

আমরা দেখেছি $\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ (4.1)

∇ একটি ভেক্টর এবং সঙ্গে সঙ্গে এটি একটি সংকারক যেটিকে একটি স্কেলার $f(x, y, z)$ এর উপর ক্রিয়া করালে x, y, z এর সাপেক্ষে অবকল গুণাঙ্কের মান পাওয়া যায়। একটি স্কেলার ক্ষেত্রের (যথা বিভব ϕ) গ্রেডিয়েন্ট একটি ভেক্টর ক্ষেত্র যেটির প্রতিরূপ

$$\nabla \phi = \hat{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (4.2)$$

∇ এর তলমাত্রিক (spatial) পরিবর্তনের হারের সর্বাধিক মান $\nabla\phi$ এর মানের সমান। $\nabla\phi$ এর দিক ϕ এর সর্বাধিক পরিবর্তনের দিক নির্দেশ করবে। যে তলে ϕ এর মান স্থির থাকে $\nabla\phi$ সবসময়ে সেই তলের লম্বদিকে থাকে।

গ্রেডিয়েন্টের অর্থ বোঝার জন্য একটি উদাহরণের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে। ধরা যাক, একটি ঘরের একদিকে সূর্যকিরণ এসে পড়ছে। সেই ঘরের বিভিন্ন স্থানের উষ্ণতার মান বিভিন্ন হবে এবং উষ্ণতাকে স্থানাংক (x, y, z) এর অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা যাবে। (x_0, y_0, z_0) একটি বিন্দু নেওয়া হল। এই বিন্দু থেকে $\Delta\vec{r}$ দূরত্বে উষ্ণতার পার্থক্য ΔT এর মান বিভিন্ন দিকে বিভিন্ন হবে। $\Delta\vec{r}$ এর মান ক্ষুদ্র হলে আমরা টেলরের উপপাদ্য (তিনটি চলের জন্য) ব্যবহার করে উষ্ণতার পার্থক্য নির্ণয় করতে পারব।

আমরা লিখতে পারি,

$$T(x_0 + \Delta\vec{x}, y_0 + \Delta\vec{y}, z_0 + \Delta\vec{z}) = T(x_0, y_0, z_0) + \Delta\vec{x}\frac{\partial T}{\partial x_0}(x_0, y_0, z_0)$$

$$+\Delta\vec{y}\frac{\partial T}{\partial Y_0}(x_0, y_0 z_0) + \Delta\vec{z}\frac{\partial T}{\partial z_0}(x_0, y_0, z_0)$$

(4.3)

$\Delta\vec{x}$, $\Delta\vec{y}$, $\Delta\vec{z}$ এর মান খুবই ছোট হওয়ায় উচ্চতার ঘাতের রাশিগুলিকে অগ্রাহ্য করা যায়।

লক্ষণীয় যে $\Delta\vec{x}$, $\Delta\vec{y}$, $\Delta\vec{z}$ সরণ ভেক্টর (displacement vector) $\Delta\vec{r}$ এর ভেক্টর উপাংশ।

সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$T(x_0+\Delta\bar{x},\ y_0+\Delta\bar{y},\ z_0+\Delta\bar{z}) = T(x_0,\ y_0,\ z_0)+\Delta\bar{r}.\nabla T(x_0, y_0, z_0)$$

$$[\text{ যেখানে } \nabla T = \hat{i}\frac{\partial T}{\partial x_0}+\hat{j}\frac{\partial T}{\partial Y_0}+\hat{k}\frac{\partial T}{\partial z_0}]$$

$$\text{কিংবা } T\left(\bar{r}_0+\Delta\bar{r}\right) = T\left(\bar{r}_0\right)-\Delta\bar{r}\cdot\nabla T\left(\bar{r}_0\right) \qquad (4.4)$$

∇T জানা থাকলে যে কোন স্থানে তাপমাত্রার পরিবর্তনের মান নির্ণয় করা যায়।

উপরের সমীকরণ থেকে আমরা গ্রেডিয়েন্টের দিকের কথা খুব সহজেই বুঝতে পারব। (4.4) সমীকরণ থেকে আমরা দেখছি যে তাপের পরিবর্তন $\nabla T = T\left(\bar{r}_0+\Delta\bar{r}\right)-T\left(\bar{r}_0\right)$ সর্বাপেক্ষা বেশি যখন $\Delta\bar{r}$, ∇T এর সমান্তরাল (অর্থাৎ $\cos\theta = 1$)। সুতরাং যে দিকে T এর পরিবর্তন সবচেয়ে বেশি ∇T সেই দিক নির্দেশ করে। গ্রেডিয়েন্টের আর একটি বৈশিষ্ট্য উপরের উদাহরণ থেকে পরিষ্কার হবে। আমরা ঘরের মধ্যে এমন তল কল্পনা করতে পারি যে তলের সর্বত্র উষ্ণতা সমান। যেমন $\bar{r}_0$ মধ্য দিয়ে একটি তল অঙ্কন করতে পারি যে তলের উপর সব বিন্দুতে উষ্ণতার মান স্থির ($\bar{r}_0$ তে উষ্ণতার সমান) এই প্রকার তলকে সাধারণভাবে বলা হয় সমবিভব তল (উষ্ণতার ক্ষেত্রে এইরূপ তলের নাম সমোষ্ণতল; চাপের ক্ষেত্রে বলা হয় সমপ্রেষতল)। এখন সংজ্ঞা অনুযায়ী কোন তল বরাবর ∇T এর যে কোন দিকে উপাংশের মান শূন্য। যেহেতু সমবিভব তলের জন্য $\nabla T = \Delta\bar{r}_0.\nabla T = 0$ এবং সমবিভব তলটি $\bar{r}_0$ তল বরাবর নেওয়া হয়েছে। সুতরাং ∇T অবশ্যই সমবিভব তলের উপর লম্ব হবে।

একটি উদাহরণ দ্বারা স্কেলার অপেক্ষকের গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয়ে পদ্ধতি দেখানো যায়

উদাহরণ — 1

$\phi = Ax^2yz^3$ হলে grad ϕ নির্ণয় করুন (A একটি ধ্রুবক)।

উত্তর —

$$\text{grad}\,\phi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(Ax^2yz^3\right)$$

অথবা grad $\phi = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(Ax^2yz^3\right) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(Ax^2yz^3\right) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(Ax^2yz^3\right)$

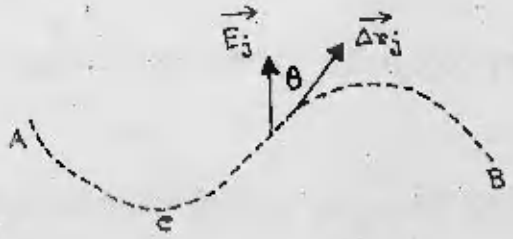
$\therefore \nabla\phi = 2Axyz^3\hat{i} + Ax^2z^3\hat{j} + 3x^2yz^2\hat{k}$

$\nabla\phi$ একটি ভেক্টর।

4.2.2 একটি ভেক্টরের লাইন সমাকল

ভেক্টর লাইন সমাকলের অর্থ, একটি লাইন অথবা বক্ররেখা বরাবর সমাকলন। কোন তলমাত্রিক অর্থাৎ এ স্থানে কোন বক্ররেখা বরাবর যাওয়ার জন্য একটি মাত্র চরের (variable) পরিবর্তনের প্রয়োজন হয়।

ধরা যাক কোন তলের উপর C একটি বক্ররেখা। এই রেখার উপর A এবং B দুটি বিন্দুর মধ্যে তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রাবল্য $\vec{E}$ এর লাইন সমাকল নির্ণয় করতে হবে। (চিত্র 4.1)। এজন্য C বক্ররেখাকে অনেকগুলি ক্ষুদ্র



(চিত্র 4.1)

ক্ষুদ্র অংশ $\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2$ ..... $\Delta\vec{r}_n$ এ বিভক্ত করা হল। $\Delta\vec{r}$ ভেক্টরগুলির দিক C বক্ররেখার উপর সেই বিন্দুগুলিতে অঙ্কিত স্পর্শক বরাবর। এখন প্রতিবিন্দুতে $\vec{E}$ এবং সেই বিন্দুর সরণ ভেক্টর $\Delta\vec{r}$ এর স্কেলার গুণফল নিয়ে সেগুলিকে সমগ্র বক্ররেখার জন্য যোগ করলে আমরা পাই,

$$\vec{E}(r_1).\Delta\vec{r}_1 + \vec{E}(r_2).\Delta\vec{r}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \vec{E}(r_n).\Delta\vec{r}_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \vec{E}(\vec{r}_j).\Delta \vec{r}_j \qquad (4.5)$$

এখানে বক্ররেখা C অবিচ্ছিন্ন (continuous) হওয়ায় যদি $n \to \alpha$ এবং $\left|\Delta \vec{r}_j\right| \to 0$ নেওয়া হয় তাহলে উপরের রূপটির সীমা মানকে (Limiting value) $\vec{E}$ ভেক্টর ক্ষেত্রের C রেখা বরাবর লাইন সমাকল বলা হয়।

$$\text{অর্থাৎ} \quad \int_{CA}^{B} \vec{E}.\vec{dr} = \underset{n \to \alpha \quad \Delta r_j \to o}{\text{Limit}} \sum_{j=1}^{n} \vec{E}(\vec{r}_j).\Delta \vec{r}_j \qquad (4.6)$$

$$\text{অতএব} \quad \int_{CA}^{B} \vec{E}.d\vec{r} = \int_{CA}^{B} \left|\vec{E}\right| \left|d\vec{r}\right| \cos\theta$$

উপরের লাইন সমাকলটির মান $\vec{E}$ এবং $d\vec{r}$ এর মধ্যের অন্তর্বর্তী কোণের উপর নির্ভর করে। $\vec{E}$ এবং $d\vec{r}$ সর্বত্র পরস্পরের সমান্তরাল হলে $\theta = 0°$। সেক্ষেত্রে লাইন সমাকলের মান $\int_{CA}^{B} \left|E\right| \left|d\vec{r}\right|$ । আবার $\vec{E}$ এবং $d\vec{r}$ সর্বত্র পরস্পরের সঙ্গে লম্ব $\theta = 90°$। সেক্ষেত্রে লাইন সমাকলের মান $\int_{CA}^{B} \vec{E}.d\vec{r} = 0$।

প্রশ্নাবলি — 1

একটি বিন্দুর আধানের জন্য তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য $\vec{E}$ তে দুটি বিন্দু A এবং B নেওয়া হল। দেখান যে $\vec{E}$ প্রাবল্য A থেকে B এর লাইন সমাকলের মান, B থেকে A'র লাইন সমাকলের ঋণাত্মক মানের সমান।

$$\text{অর্থাৎ} \quad \int_{B}^{A} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{A}^{B} \vec{E}.d\vec{r} \qquad (4.7)$$

লাইন সমাকলের সর্বাপেক্ষা বেশি ব্যবহার হয় একটি বল $\vec{F}$ দ্বারা কৃতকার্যের মান নির্ণয়ের সময়।

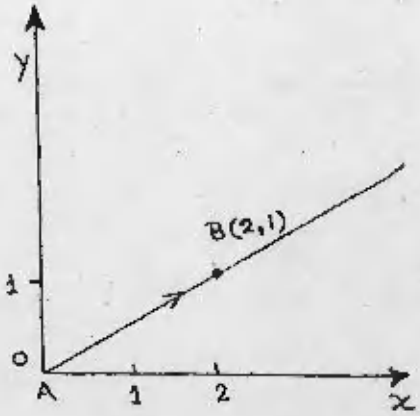
কোন বস্তুকে একটি বিন্দু C থেকে অপর একটি বিন্দু D তে নিয়ে যেতে কোন বল $\vec{F}$ দ্বারা কৃতকার্যের মান

$$W = \int_C^D \vec{F}.d\vec{r}$$

আপনারা পরবর্তী আলোচনায় এ সম্বন্ধে আরও বিশদ জানতে পারবেন।

উদাহরণ — 2

একটি বস্তুকে xy তলে একটি সরলরেখার A (0, 0) বিন্দু থেকে B (2, 1) বিন্দুতে সরণের জন্য $F = \left(2y\hat{i} + 6xy\hat{j}\right)$ বল দ্বারা কৃতকার্যের মান নির্ণয় করুন। (চিত্র 4.2)।



(চিত্র 4.2)

উত্তর — আমরা জানি যে

$$\text{কৃতকার্য } W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$$

$$= \int_A^B \left(2y\,\hat{i} + xy\,\hat{j}\right).\left(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}\right)$$

এখানে $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\,\hat{j}$ (কার্টেজীয় স্থানাঙ্কে)

$$\therefore W = \int_A^B (2ydx + xydy)$$

যেহেতু $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = 1$ এবং $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 0$

AB র ভিতর দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখার নতি (slope)

$\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ $y = \frac{x}{2}$

$$\therefore dy = \frac{dx}{2}$$

dy, dx এর মান বসিয়ে কৃতকার্যের মান

$$W = \int_A^B \left(xdx + \frac{x^2}{4}dx \right) = \int_0^2 \left(xdx + \frac{x^2}{4}dx \right)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^2$$

অথবা $W = 2 + \frac{2}{3} = 2 \cdot 67\ J$

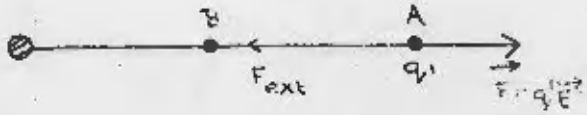
প্রশ্নমালা — 2

একটি বস্তুকে A (0, 0) বিন্দু থেকে B (2, 1) বিন্দুতে অধিবৃত্তাকার পথ $y = \frac{x^2}{4}$ ধরে সরণের জন্য $\vec{F} = xy\,\hat{i} - y^2\,\hat{j}$ বল দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

4.3 একটি আধানের সরণের জন্য কৃতকার্য

আমরা জানি যে একটি আধানের (বা আধান সমষ্টির) কাছে একটি তড়িৎক্ষেত্রের সৃষ্টি হয়। কোন বিন্দুতে একটি একক ধনাত্মক আধান কর্তৃক অনুভূত বলকে সেই বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য (বা তড়িৎ

ক্ষেত্র) $\vec{E}$ বলা হয়। একক ধনাত্মক আধানের পরিবর্তে যদি q^1 আধান নেওয়া হয় তাহলে $\vec{E}$ তড়িৎক্ষেত্রে প্রাবল্যে q^1 আধান কর্তৃক অনুভূত বলের প্রতিরূপ হবে $\vec{F} = q\vec{E}$ ।



(চিত্র 4.3)

এই বলের বিরুদ্ধে q^1 আধানকে A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে ক্ষুদ্র দূরত্ব $(d\vec{r})$ স্থানান্তরিত করতে হলে (চিত্র 4.3) বলের বিরুদ্ধে কাজ করতে হবে। তখন কৃতকার্যের রূপ হবে

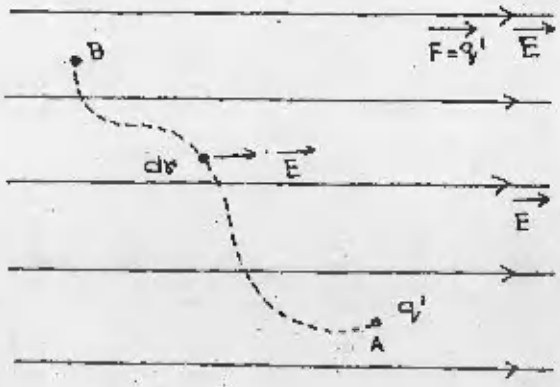
$$dw = -\vec{F}.d\vec{r} = -\left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\theta \qquad (4.8)$$

$$\text{সুতরাং } W = -\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$$

এখানে সরণ $d\vec{r}$ বরাবর $\vec{F}$ এর উপাংশ $F\cos\theta$ । লক্ষণীয় যে অন্য একটি আধান কর্তৃক সৃষ্ট বল $\vec{F}$ এর বিরুদ্ধে q^1 আধানকে স্থানান্তরিত করতে বাইরের থেকে একটি বল $\vec{F}_{ext}$ প্রয়োগ করা প্রয়োজন। $\vec{F}_{ext}$ এর মান $\vec{F}$ এর সমান কিন্তু এটি $\vec{F}$ এর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে অর্থাৎ $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}$ ।

4.3.1 তড়িৎক্ষেত্রের লাইন সমাকল

পূর্বের আলোচনা থেকে q^1 আধানকে A থেকে B তে (4.4) চিত্রে প্রদর্শিত বক্ররেখা বরাবর স্থানান্তরিত করার জন্য প্রয়োজনীয় কার্যের পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে।



(চিত্র 4.4)

AB বক্ররেখাটি তড়িৎক্ষেত্র $\bar{E}$ এর মধ্যে অবস্থিত। এই বক্রপথটিকে অনেকগুলি ছোট ছোট সমদৈর্ঘ্যে বিভক্ত করা হল। প্রত্যেকটি ভাগের দৈর্ঘ্য dr। $d\bar{r}$ ভেক্টরটি ঐ ক্ষুদ্র ভাগের দৈর্ঘ্য এবং দিক নির্দেশ করে। dr দূরত্বে q' আধানকে স্থানান্তরিত করার জন্য কৃতকার্য হবে বল $\bar{F}$ এবং সরণ $d\bar{r}$ এর স্কেলার গুণফলের ঋণাত্মক মান $-\bar{F}.d\bar{r}$ ।

এইরূপ A এবং B র মধ্যের প্রত্যেকটি ক্ষুদ্র দূরত্বের জন্য কার্যগুলির সমষ্টি নিলে q' কে A থেকে B তে স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্য পাওয়া যাবে। এই ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য (dr) গুলির সংখ্যা যদি অসীম হয় সেই সীমাস্থ মানে আমরা যোগ চিহ্নের পরিবর্তে সমাকল চিহ্ন ব্যবহার করব এবং q' আধানকে A থেকে B তে স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্যের রূপ হবে

$$W = -\int_A^B \bar{F}.d\bar{r} = -q'\int_A^B \bar{E}.d\bar{r} \qquad (4.10)$$

এখন q' আধানের পরিবর্তে যদি একটি একক আধান নেওয়া হয় তাহলে কৃতকার্যের রূপ হবে,

$$W' = \frac{W}{q} = -\int_A^B \bar{E}.d\bar{r} \qquad (4.11)$$

সমীকরণের ডান দিকের সমাকলটিকে তড়িৎ প্রাবল্যের লাইন সমাকল বলা হয়। অতএব একটি পথ

বরাবর কোন তড়িৎক্ষেত্রের লাইন সমাকল সেই পথে একটি একক ধনাত্মক আধানকে স্থানান্তরিত করার জন্য কৃতকার্যের মানের সমান।

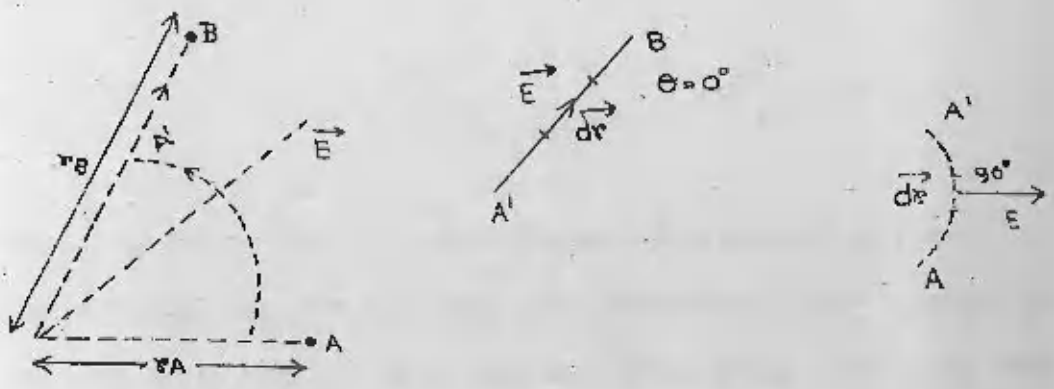
(4.11) সমীকরণটির মান A থেকে B তে যাওয়ার পথের উপর নির্ভরশীল কিনা দেখা প্রয়োজন।

4.3.2 তড়িৎ প্রাবল্যের লাইন সমাকলের পথ নিরপেক্ষতা

প্রথমে আমরা একটি আধান q এর জন্য তড়িৎক্ষেত্রের কথা আলোচনা করব। q আধান থেকে r_A এবং r_B দূরত্বে দুটি বিন্দু A এবং B নেওয়া হল। এখন একটি একক ধনাত্মক আধানকে A থেকে B তে তীর চিহ্ন অঙ্কিত রেখা বরাবর নিয়ে যাওয়া হলে (চিত্র 4.5) (4.11) সমীকরণের রূপ এক্ষেত্রে হবে

$$W' = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = -\int_A^{A'} \vec{E}.d\vec{r} - \int_{A'}^{B} \vec{E}.d\vec{r} \qquad (4.12)$$

4.12 সমীকরণের ডান দিকের প্রথম সমাকলটি একটি একক ধনাত্মক আধানকে r_A ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তের একটি বৃত্তচাপ AA′ বরাবর নিয়ে যাওয়ার জন্য কৃতকার্যের মান। দ্বিতীয় সমাকলটি ঐ একই আধানকে একটি বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর A′ থেকে B বিন্দুতে নিয়ে যাওয়ার জন্য কৃতকার্যের মান। প্রথম সমাকলটির



(চিত্র 4.5)

কাজ শূন্য কেননা এখানে $\vec{E}$ এবং $d\vec{r}$ পরস্পরের উপর লম্ব। দ্বিতীয় সমাকলটির মান $\int_{A'}^{B} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{A'}^{B} |E||d\vec{r}|$

যেহেতু A'B বরাবর $\vec{E}$ এবং $d\vec{r}$ পরস্পরের সমান্তরাল।

আপনাদের জানা আছে যে q আধানের প্রভাবে r দূরত্বে তড়িৎক্ষেত্র $\vec{E}$ এর প্রতিরূপ

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad (\hat{r} \rightarrow \text{ এর দিকে একক ভেক্টর})$$

এছাড়া আমরা $d\vec{r}$ কে লিখতে পারি $\hat{r}\,dr$।

সুতরাং এখন দ্বিতীয় সমাকলটি হবে

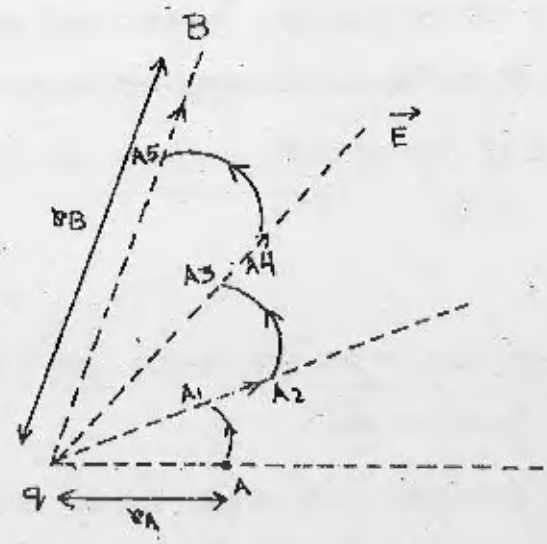
$$-\int_{A'}^{B'} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{r_{A'}}^{r_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}.\hat{r}}{r^2}(dr) = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} \left(\because r_A = r_{A'}\right)$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

অতএব (4.12) সমীকরণ অনুযায়ী চিত্র (4.5) নির্দেশিত পথে A থেকে B তে যেতে কৃতকার্য

$$W' = -\int_{A}^{B} \vec{E}.d\vec{r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{R_B}\right] \qquad (4.13)$$

এখন একই তড়িৎক্ষেত্রে একটি ধনাত্মক তড়িৎ আধানকে A থেকে B তে একটি অন্যপথে নিয়ে যাওয়া হল (চিত্র 4.6)। পূর্বের ন্যায় আমরা একই উপায়ে কৃতকার্য নির্ণয় করব। একক আধানটি কিছু দূরত্ব একটি বৃত্তচাপ বরাবর, তৎপর কিছু দূরত্ব একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর, পরে আবার বৃত্তচাপ বরাবর এবং তৎপর ব্যাসার্ধ বরাবর তীর চিহ্ন পথে অগ্রসর হচ্ছে।



(চিত্র 4.6)

আমরা জানি যে যখনই আধানটি বৃত্তচাপ বরাবর অগ্রসর হচ্ছে তখনই কৃতকার্যের পরিমাণ শূন্য। যখন আধানটি ব্যাসার্ধ বরাবর যায় তখনই কাজ করা হয়। সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$-\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{A_1}^{A_2} \vec{E}.d\vec{r} - \int_{A_3}^{A_4} \vec{E}.d\vec{r} - \int_{A_5}^{B} \vec{E}.dr$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{A_2}}\right] - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_{A_2}} - \frac{1}{r_{A_4}}\right] - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_{A_4}} - \frac{1}{r_B}\right]$$

(4.13 সমীকরণ অনুসারে)

এখানে $r_{A_1} = r_A$

$r_{A_3} = r_{A_2}$

$r_{A_5} = r_{A_4}$

$$\therefore \text{ কৃতকার্য } W = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad (4.15)$$

4.13 এবং 4.15 সমীকরণের তুলনা করলে দেখা যায় যে একটি একক আধানকে তড়িৎক্ষেত্রের এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে দুটি ভিন্ন ভিন্ন পথে নিয়ে গেলেও মোট কৃতকার্যের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

উপরের উদাহরণ দুটি থেকে এই সিদ্ধান্তে আসা যায় যে কোন দুটি বিন্দু A ও B এর মধ্যে তড়িৎ প্রাবল্যের লাইন সমাকল পথ নিরপেক্ষ।

প্রশ্নমালা -- 3

একটি একক ধনাত্মক আধানকে কোন সুষম তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য $\bar{E}$ এর মধ্যে ক্ষেত্রের সমান্তরাল d দূরত্ব নিয়ে যেতে কৃতকার্যের মান নির্ণয় করুন।

আমরা দেখলাম যে তড়িৎক্ষেত্রে একটি একক আধানকে তড়িৎ বলের বিরুদ্ধে এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্য বিন্দু দুটির মধ্যের পথের উপর নির্ভর করে না। 4.11 এবং 4.15 সমীকরণ ব্যবহার করে একক আধানের পরিবর্তে q^1 আধানকে অন্য একটি আধান q এর তড়িৎক্ষেত্রের A থেকে B বিন্দুতে স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্য হিসাবে লিখতে পারি

$$W^1 = -\int_A^B q^1\bar{E}.d\bar{r} = \frac{qq^1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

অথবা $W^1 = U_B - U_A$

এখানে $U = -\frac{qq^1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)$ (4.16)

U কে বলা হয় (স্থির) তড়িৎ স্থিতিশক্তি। এখানে কৃতকার্যকে দুটি স্থিতিশক্তির অন্তর হিসাবে প্রকাশ করা হয়েছে। কোনো তড়িৎক্ষেত্রে তড়িৎ সৃষ্টিকারী আধানের সাপেক্ষে একটি আধানের অবস্থানের দরুণ যে শক্তি আধানটির মধ্যে সঞ্চিত থাকে তাকেই ঐ আধানের স্থিতিশক্তি বলে। এই স্থিতিশক্তি সম্বন্ধে পরে আমরা বিস্তারিত জানব।

4.4 তড়িৎ বিভব

পূর্বের অংশে আমরা দেখেছি একটি একক ধনাত্মক আধানকে তড়িৎক্ষেত্রে কোন দুটি বিন্দু A ও B এর মধ্যে স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্য A ও B র মধ্যের পথের উপর নির্ভর করে না, কেবলমাত্র A ও B এর অবস্থানের উপরই নির্ভর করে। সুতরাং এই কার্যকে আমরা দুটি স্কেলার রাশির পার্থক্য হিসাবে প্রকাশ করতে

পারি। 4.15 সমীকরণ থেকে দেখা যায় এই সংখ্যা দুটি যথাক্রমে $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}\right)$ এবং $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}\right)$। সংখ্যা দুটিকে ϕ_B এবং ϕ_A লিখলে, এদের পার্থক্যের মান ϕ_{BA} কে লেখা যায়

$$\phi_{BA} = \phi_B - \phi_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} \qquad (4.17)$$

এখন প্রথম বিন্দু A যদি অসীম দূরত্বে অবস্থিত হয় তবে আমরা লিখতে পারি,

$$\phi_{BA} = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = -\int_A^B \frac{q\,\hat{r}.\hat{r}\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{(4.13 সমীকরণের পূর্বের আলোচনা অনুযায়ী)}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\alpha^B \frac{dr}{r^2} = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_\alpha}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = \phi_B \qquad (4.18)$$

4.18 সমীকরণে $\phi_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$ সংখ্যাটিকে q আধান থেকে r_B দূরত্বে একটি একক আধানের তড়িৎ বিভব বলা হয়। আমরা জানি যে, একটি একক আধানকে কোন তড়িৎ প্রাবল্যে একবিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে স্থানান্তরের জন্য প্রয়োজনীয় কার্য ঐ দুটি বিন্দুর মধ্যের তড়িৎ প্রাবল্যের লাইন সমাকলের ধনাত্মক মানের সমান। কাজেই কোন বিন্দুতে বিভবের সংজ্ঞা হিসাবে আমরা বলতে পারি যে একটি একক ধনাত্মক আধানকে অসীম দূরত্ব থেকে অপর একটি q আধান থেকে r_B দূরত্বে অবস্থিত ঐ বিন্দু পর্যন্ত নিয়ে আসার জন্য প্রয়োজনীয় কার্যই ঐ বিন্দুতে তড়িৎ বিভব। অতএব বিভবের একক জুল/কুলম্ব। এই এককটির একটি বিশেষ নাম দেওয়া হয়েছে — ভোল্ট (v)। অতএব q আধানের জন্য r দূরত্বে বিভব

$$\phi_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (4.19)$$

আপনারা নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে, ধনাত্মক আধানের জন্য বিভব ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক আধানের জন্য বিভব ঋণাত্মক। কারণ ধণাত্মক আধানের ক্ষেত্রে একটি একক ধনাত্মক আধানকে অসীম দূরত্ব থেকে ধনাত্মক আধানের বিকর্ষক বলের বিরুদ্ধে আনতে কাজ করতে হবে। সেইজন্য এই কার্য ধনাত্মক। ঋণাত্মক আধানের ক্ষেত্রে একক ধনাত্মক আধান নিয়ে আসার কার্য তড়িৎক্ষেত্র দ্বারা হয়। সেইজন্য এই কার্য ঋণাত্মক।

এই আলোচনা থেকে এটিও বোঝা গেল যে যখন কোন বলের (এইস্থানে তড়িৎক্ষেত্র) বিরুদ্ধে কার্য করা হয় তখন সেই তন্ত্রের স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি পায়।

4.4.1 একটি আধান সমষ্টির জন্য বিভব

একটি আধানের পরিবর্তে একটি আধান সমষ্টির জন্য বিভব। উপরিপাতের নীতির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। q_1, q_2.....q_n ইত্যাদি N সংখ্যক আধান সমষ্টির জন্য একটি বিন্দু P তে বিভব প্রত্যেকটি আধানের জন্য পৃথকভাবে বিভব নির্ণয় করে তাদের সমষ্টির সমান হবে। মনে করি P বিন্দু থেকে q_1, q_2.....q_n আধানের দূরত্ব যথাক্রমে r_1, r_2.....r_N। অতএব P বিন্দুতে বিভবের মান

$$\phi_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \ldots\ldots + \frac{q_N}{4\pi\varepsilon_0 r_N}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i} \qquad (4.20)$$

একটি উদাহরণের সাহায্য নেওয়া যাক —

উদাহরণ — 3

x অক্ষ বরাবর কয়েকটি আধান রাখা আছে। প্রথম আধানটির মান $q_2 = -2\mu c$, এটি x=20cm দূরত্বে আছে। দ্বিতীয় আধানটির মান $q_2 = -3\mu c$ এবং এটি x=30cm দূরত্বে আছে এবং তৃতীয় আধানটির মান $q = -4\mu c$ এবং এটি x=40cm দূরত্বে আছে। x অক্ষের বরাবর x= 0 বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করুন।

উত্তর —

আমরা জানি বিভবের মান $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{r_i}$. q_i এবং r_i এর মান বসিয়ে

$$\phi = 9\times10^9 Nm^2C^{-2}\left[\frac{2\times10^{-6}C}{0\cdot20m} - \frac{3\times10^{-6}C}{0\cdot30m} - \frac{4\times10^{-6}C}{0\cdot40m}\right]$$

$$= 9\times10^9 Nm^2c^{-2}\left[10^{-5}cm^{-1} - 10^{-5}cm^{-1} - 10^{-5}cm^{-1}\right]$$

$$= -9\times10^4 Nmc^{-1} = -9\times10^4 V$$

আধান বণ্টন যদি অবিচ্ছিন্ন হয় (একটি আহিত গোলকের তলের উপরের ন্যায়) তাহলে 4.20 সমীকরণের যোগচিহ্নের পরিবর্তে সমাকল চিহ্ন ব্যবহৃত হবে। সেক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি

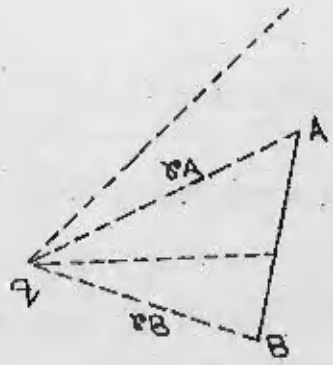
$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho dv}{r} \quad (V = \text{আয়তন})$$

যেখানে ρ = আয়তন ঘনত্ব dv = আয়তনের ক্ষুদ্র অংশ r = যে বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করা হবে সে বিন্দু থেকে ক্ষুদ্র আয়তনটির প্রত্যেক বিন্দুর দূরত্ব।

4.4.2 বিভব পার্থক্য

আমরা বিভবের সংজ্ঞা জেনেছি এখন দুটি বিন্দুর মধ্যে বিভব পার্থক্য কাকে বলে জানা প্রয়োজন।

আমরা জানি একটি একক ধনাত্মক আধানকে অসীম থেকে A তে (q আধান দ্বারা প্রভাবিত তড়িৎ ক্ষেত্রে) স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্য (চিত্র 4.7)।



(চিত্র 4.7)

$$\phi_A = +W_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$

এবং B তে স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্য $\phi_B = W_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$

উপরের দুটি রাশির পার্থক্য $(\phi_B - \phi_A)$ অর্থাৎ A থেকে B তে একটি একক আধানকে স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্যকে B এবং A বিন্দুর মধ্যের বিভব পার্থক্য বলা হয়। অতএব আমরা লিখতে পারি

$$\phi_{BA} = \phi_B - \phi_A = W_2 - W_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad (4.22)$$

একটি একক আধানের পরিবর্তে যদি q' আধানকে A থেকে B তে স্থানান্তরিত করা হয়, তাহলে কৃতকার্য হবে $W = q'\phi_{BA} = q'(\phi_B - \phi_A)$ (4.23)

বিভব পার্থক্যের ধারণা তড়িৎ বিজ্ঞানের বহু সমস্যা সমাধানের কাজে লাগে। কোন তড়িৎ বর্তনীর যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যে (রোধের মান জানা থাকলে) বিভব পার্থক্যের সাহায্যে বিন্দু দুটির মধ্যে তড়িৎ প্রবাহ নির্ণয় করা সম্ভব।

প্রশ্নমালা — 4

একটি 12 ভোল্ট ব্যাটারির পজিটিভ প্রান্ত থেকে নেগেটিভ প্রান্তে একটি ইলেকট্রনকে স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

4.5 তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য ও তড়িৎ বিভবের মধ্যের সম্পর্ক

4.17 **সমীকরণে আমরা দেখেছি যে তড়িৎ বিভব** ϕ কে তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য $\vec{E}$ এর লাইন **সমাকল** রূপে প্রকাশ করা যায়। কাজেই তড়িৎ প্রাবল্য জানা থাকলে, লাইন সমাকল দ্বারা সেই বিন্দুতে তড়িৎ বিভব নির্ণয় করা সম্ভব। আমরা বিপরীত পদ্ধতিটি অর্থাৎ ϕ জানা থাকলে কী উপায়ে $\vec{E}$ নির্ণয় করা যায় সেটি নির্ধারণের চেষ্টা করব।

আমরা জানি যে q আধানের সৃষ্ট তড়িৎক্ষেত্রে দুটি বিন্দু B এবং A র মধ্যে বিভব পার্থক্যের মান (4.22 সমীকরণ)

$$\phi_{BA} = \phi_B - \phi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

উপরের সমীকরণের ডানদিকের রাশিটি, (3.15) সমীকরণ অনুসারে B এবং A র মধ্যের তড়িৎ প্রাবল্য $\vec{E}$ এর লাইন সমাকলের ঋণাত্মক মানের সমান। অর্থাৎ $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$

অথবা $\phi_{BA} = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$ (4.24)

এখন 4.8 সমীকরণ ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি পরস্পর থেকে $d\vec{r}$ দূরত্বে অবস্থিত দুটি বিন্দুর মধ্যে বিভব পার্থক্য $d\phi$ এর মান $d\phi = -\vec{E}.d\vec{r}$

অথবা $d\phi = -E\cos\theta\left|d\vec{r}\right|$

$$\therefore -E\cos\theta = \frac{d\phi}{\left|d\vec{r}\right|}$$

$\cos\theta$ রাশিটির উপস্থিতির জন্য আমরা দেখছি যে, তড়িৎ প্রাবল্য $\vec{E}$ বিভব পার্থক্যের একটি বিশেষ ধরণের অবকলজ (derivative)। এটিকে আমরা বলতে পারি দিশাত্মক অবকলজ (directional derivative)।

(4.2.1) অংশে আপনারা জেনেছেন যে গ্রেডিয়েন্ট সংকারকের (operator) সাহায্যে একটি ঘরের বিভিন্ন দিকে বিভিন্ন স্থানে কীভাবে উষ্ণতা নির্ণয় করা সম্ভব। একইভাবে আমরা তড়িৎ ক্ষেত্রের মধ্যের দুটি নিকটবর্তী বিন্দুর ভিতর বিভব পার্থক্য $d\phi$ কে একটি গ্রেডিয়েন্ট সংকারকের রূপে প্রকাশ করতে পারি। এর পরে এটির সঙ্গে $\vec{E}$ এর সম্পর্ক নির্ণয় করা সম্ভব।

আমরা লিখতে পারি,

$$d\phi = \phi(x+dx, y+dy, z+dz) - \phi(x, y, z)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right).\left(\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz\right).$$

$$= \nabla\phi.d\vec{r} \qquad (4.27)$$

4.25 সমীকরণ থেকে

$$-\vec{E}.d\vec{r} = \nabla\phi.d\vec{r}$$

অথবা $\bar{E} = -\nabla\phi = -\left(\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$ (4.28)

x, y, z অক্ষ বরাবর $\bar{E}$ এর উপাংশ

$$\left(E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{4.29}$$

সুতরাং কোন বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র (প্রাবল্য) সেই বিন্দুতে তড়িৎ বিভব ϕ এর গ্রেডিয়েন্টের ঋণাত্মক মানের সমান। গ্রেডিয়েন্টের অর্থ নতি। সুতরাং কোন তড়িৎক্ষেত্র বরাবর বিভব পরিবর্তনের হার নির্ণয় করে সেই তড়িৎ প্রাবল্যের মান নির্ণয় করা যায়। যেহেতু $\bar{E}$ একটি ভেক্টর এবং ϕ একটি স্কেলার, আমরা লিখতে পারি $\text{curl}\,\bar{E} = \nabla \times \bar{E} = \nabla \times (-\nabla\phi) = 0$

অর্থাৎ তড়িৎক্ষেত্র কার্লমুক্ত অঘূর্ণীয় (irrotational field)

উদাহরণ — 4

কোন বিন্দুতে তড়িৎ বিভবের মান $\phi = Ax + By - Cz$ (A, B এবং C তিনটি ধ্রুবক)। ঐ বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

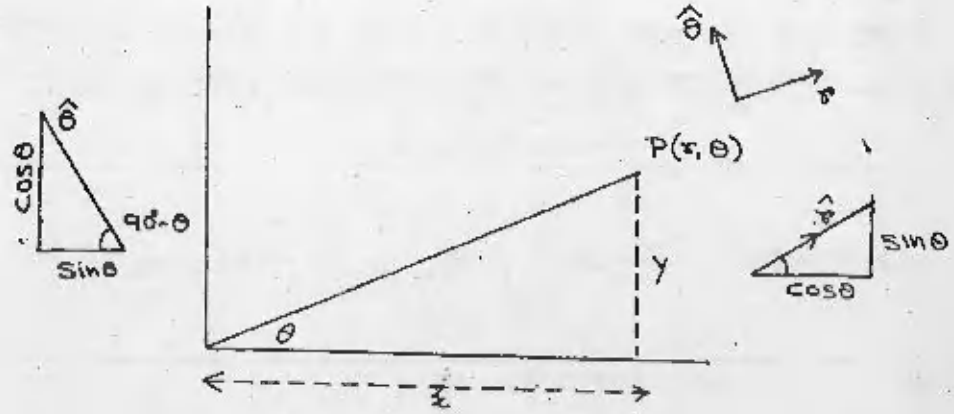
উত্তর —

$$\phi = Ax + By - Cz$$

আমরা জানি $\bar{E} = -\left(\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$$\therefore \bar{E} = -\left[A\hat{i} + B\hat{j} - C\hat{k}\right]$$

কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কের পরিবর্তে কোন কোন ক্ষেত্রে পোলার নির্দেশাঙ্ক (Polar Coordinates) ব্যবহার করা হয়। সমতল পোলার তন্ত্রে (Plane Polar system) r এবং θ নির্দেশাঙ্ক ব্যবহৃত হয়। দ্বিমেরুর (dipole) তড়িৎ প্রাবল্য নির্ণয়ের জন্য এই নির্দেশাঙ্কের প্রয়োজন। অতএব তড়িৎ প্রাবল্য নির্ণয়ের পূর্বে আমরা এই নির্দেশাঙ্কের সাহায্যে গ্রেডিয়েন্ট (ডেল) সংকারকের রূপ নির্ণয় করব।



(চিত্র A 1)

কার্টেজীয় পদ্ধতিতে প্রকাশিত একটি বিন্দু P (x, y) কে পোলার নির্দেশাঙ্কে r, θ দ্বারা প্রকাশ করা হয় (চিত্র A 1)

এখানে r = মূলবিন্দু 0 থেকে P বিন্দুর দূরত্ব

θ = x অক্ষের ধনাত্মক দিক এবং OP রেখার অন্তবর্তী কোণ।

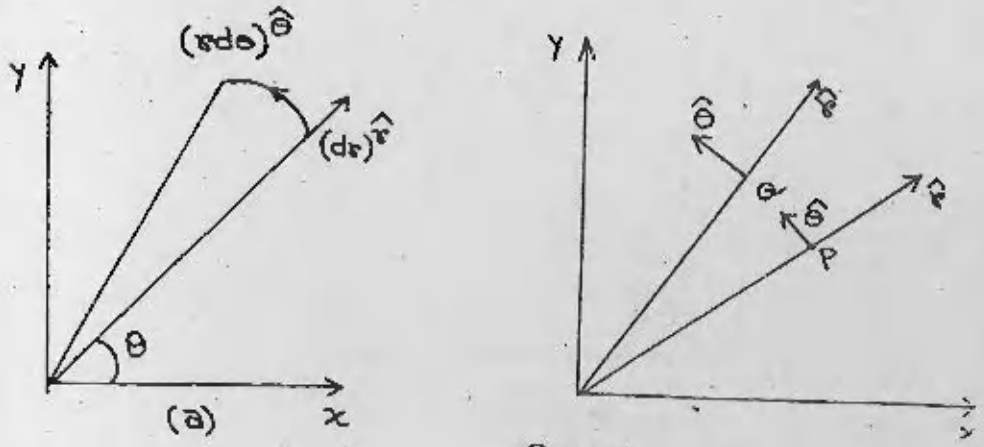
OP কে P বিন্দুর স্থান ভেক্টর (position vector) বলা হয় x, y এবং r, θ র মধ্যে সম্পর্ক

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$\overrightarrow{OP}$ $(= \bar{r})$ ভেক্টরটিকে দুটি ভেক্টরের যোগফল হিসাবে লেখা যায়

$$\bar{r} = \hat{i}\, x + \hat{j}\, y$$



(চিত্র A 2)

$\hat{r}$ এবং $\hat{\theta}$ দুটি একক ভেক্টর r এর বৃদ্ধি এবং θ র বৃদ্ধির দিকে নেওয়া হল। ($\hat{r}$ এবং $\hat{\theta}$ পরস্পরের উপর লম্ব এবং এই দুটি ভেক্টরকে এদের x ও y উপাংশের সমষ্টি হিসাবে প্রকাশ করা যায়,

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

(A2) চিত্র অনুযায়ী P এবং Q বিন্দুতে $\hat{\theta}$ এবং $\hat{r}$ এর দিক পরিবর্তিত হচ্ছে।

$$\hat{r}.\hat{\theta} = 0 \quad \hat{r}.\hat{r} = \hat{\theta}.\hat{\theta} = 1$$

$\hat{\theta}$ এবং $\hat{r}$ কে θ এর সাপেক্ষে আংশিক অবকল করলে

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta = \hat{\theta}$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\left(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta\right) = -\hat{r}$$

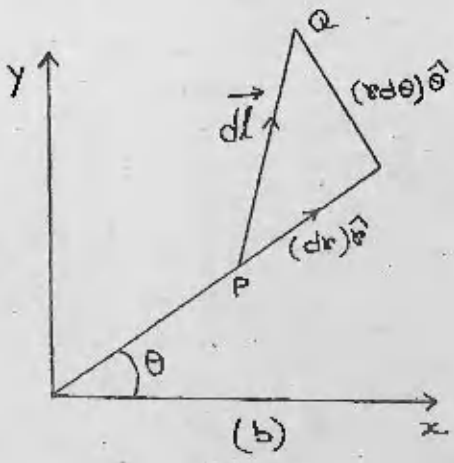
কোন ভেক্টর $\vec{A}$ কে (x, y) স্থানাঙ্ক সাপেক্ষে নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা যায়

$$\vec{A} = -\hat{i}A_x + \hat{j}A_y$$

এবং (θ, r) সাপেক্ষে নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা যায়

$$\vec{A} = \hat{r}A_r + \hat{\theta}A_\theta$$

∇ সংকারক নির্ণয় করতে হলে r এবং θ এর দিকে অতি অল্প পরিবর্তন নির্ণয় করতে হবে (চিত্র A3a)। r এর স্বল্প পরিবর্তন $\hat{r}$ এর দিকে dr এবং $\hat{\theta}$ এর দিকে θ র স্বল্প পরিবর্তন $rd\theta$ ।



(চিত্র A3)

একটি অতিক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য $d\vec{\ell}$ কে (x, y) স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে লেখা যায় $d\vec{\ell} = \hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy$ এবং (r, θ) স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে (চিত্র A3b) লেখা যায় $d\vec{\ell} = \hat{r}dr + \hat{\theta}\,(rd\theta)$

একটি স্কেলার অপেক্ষক ϕ নেওয়া হল। $p(r_1, \theta_1)$ বিন্দুতে এটির মান $\phi_1(r_1, \theta_1)$ এবং $Q(r_2, \theta_2)$ বিন্দুতে এটির মান $\phi_2(r_2, \theta_2)$। সুতরাং PQ কে অতি ক্ষুদ্র সরণ ধরলে ϕ এর পরিবর্তন

$$d\phi = \phi_2(r_2, \theta_2) - \phi_1(r_1, \theta_1)$$

(r_2, θ_2) এবং (r_1, θ_1) বিন্দু দুটি খুব কাছাকাছি অবস্থিত হওয়ায় আমরা লিখতে পারি,

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}.\partial r + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}.\partial\theta$$

$$= (\nabla\phi).d\vec{\ell}$$

$\nabla\phi$ কে (r, θ) স্থানাঙ্কের সাপেক্ষে লিখে

$$(\nabla\phi) = \hat{r}\,(\nabla\phi)_r + \hat{\theta}\,(\nabla\phi)_\theta$$

$(\nabla\phi)_r$ এবং $(\nabla\phi)_\theta$, $\nabla\phi$ এর r এবং θ উপাংশ

সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$d\phi = (\nabla\phi).d\vec{\ell} = \left[\hat{r}(\nabla\phi)_r + \hat{\theta}(\nabla\phi)_\theta\right].\left(\hat{r}\,dr + \hat{\theta}\,rd\theta\right)$$

$$= (\nabla\phi)_r\,dr + (\nabla\phi)_\theta\,rd\theta$$

উপরের সমীকরণটিকে

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)dr + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)d\theta$$ সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে আমরা পাই

$$(\nabla\phi)_r = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) \text{ এবং } (\nabla\phi)_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

অতএব পোলার স্থানাঙ্কে ডেল সংকারকের রূপ (del operator)

$$\nabla = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

ডেল সংকারকের রূপ নির্ণয় করার পর দ্বিমেরুর জন্য তড়িৎক্ষেত্র এবং বিভব নির্ণয় করার সহজ হবে।

3.6 তড়িৎ দ্বিমেরুর জন্য তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য এবং বিভব নির্ণয়

পরস্পর থেকে $\bar{a}$ (ভেক্টর) দূরত্বে অবস্থিত দুটি সমান এবং বিপরীতধর্মী আধান $\pm q$ কে দ্বিমেরু (dipole) বলা হয়। $\bar{a}$ ভেক্টরটিকে দ্বিমেরুর অক্ষ বরাবর ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক আধান অভিমুখে আঁকা হয়। ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আয়নযুক্ত একটি অণু দ্বিমেরুর উদাহরণ। একটি পরমাণুর ভিতর সমান পরিমাণ ধনাত্মক আধান থাকে এবং আধানগুলি সমকেন্দ্রিক। সাধারণভাবে পরমাণুর বাইরের কোন বিন্দুর কাছে এটি নিস্তরিত। কিন্তু তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবে পরমাণুর অন্তর্গত ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আধান পরস্পরের থেকে পৃথক হয়ে যায় এবং তখন এটি দ্বিমেরুতে পরিবর্তিত হয়। দ্বিমেরুর নিকটবর্তী তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য এবং তড়িৎ বিভব নির্ণয় আমাদের তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবে ডাইলেকট্রিকের আচরণ বুঝতে সাহায্য করে।

সুতরাং আমরা প্রথমে একটি দ্বিমেরুর জন্য তড়িৎ প্রাবল্য ও তড়িৎ বিভব নির্ণয় করব—

(a) দ্বিমেরুর অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দুতে তড়িৎ প্রাবল্য নির্ণয় :—

মনে করি P বিন্দু এবং দ্বিমেরুর মধ্যবিন্দুর মধ্যে দূরত্ব r (চিত্র 4.8)।

(চিত্র 4.8)

+q আধানের জন্য P তে তড়িৎ প্রাবল্য

$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{\left(r-\frac{a}{2}\right)^2}$$

এবং −q আধানের জন্য P তে তড়িৎ প্রাবল্য

$$\vec{E} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{\left(r + \frac{a}{2}\right)^2}$$

$\therefore$ P বিন্দুতে লব্ধ প্রাবল্য

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{a}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{q\hat{r}2a^r}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2}$$

$$\therefore E = \frac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \text{ যখন } r >> a \qquad (4.30)$$

এখানে আমরা r^2 এর তুলনায় $\frac{a^2}{4}$ কে অগ্রাহ্য করেছি কারণ বাস্তব ক্ষেত্রে $a << r$

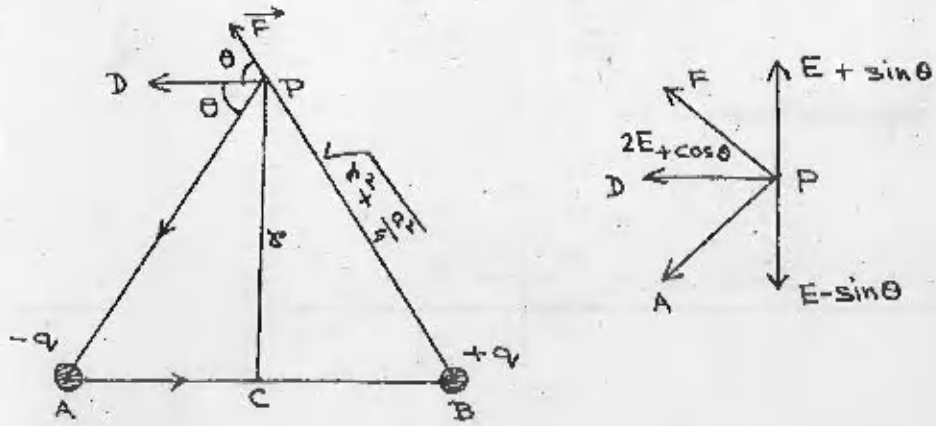
(4.30) সমীকরণে $qa\hat{r}$ এর পরিবর্তে $\vec{p}$ লেখা হয়েছে অর্থাৎ $\vec{p} = qa\hat{r}$। $\vec{p}$ কে বলা হয় দ্বিমেরু ভ্রামক (dipole moment)।

(b) দ্বিমেরুর অক্ষের লম্বদ্বিখণ্ডকের (perpendicular bisector) উপর অবস্থিত P বিন্দুতে তড়িৎ প্রাবল্য নির্ণয় :—

মনে করি দ্বিমেরুর মধ্যবিন্দু থেকে P বিন্দুর দূরত্ব r (চিত্র 4.9)।

+q আধানের জন্য P বিন্দুতে তড়িৎ প্রাবল্য PF এর দিকে ক্রিয়া করছে এবং তড়িৎ প্রাবল্যের মান

$$E+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{r^2 + \frac{a^2}{4}}\right)\right]$$



(চিত্র 4.9)

আবার $-q$ আধানের জন্য P বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য PA দিকে ক্রিয়া করছে এবং তড়িৎ প্রাবল্যের

মান $E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^2 + \frac{a^2}{4}}\right]$

এই দুটি ক্ষেত্রের লব্ধি নির্ণয়ের জন্য PC র উপর PD লম্ব আঁকা হল। দুটি তড়িৎ প্রাবল্য E_+ এবং E_- এর PD বরাবর এবং PD র লম্ব বরাবর উপাংশ নিলে PD র লম্ব বরাবর উপাংশ দুটি $E_+ \sin\theta$ এবং $E_- \sin\theta$ পরস্পর সমান ও বিপরীতমুখী হওয়ায় এদের লব্ধ মান শূন্য হবে। কিন্তু PD বরাবর উপাংশদুটি $E_+ \cos\theta$ এবং $E_- \cos\theta$ একদিক বরাবর হওয়ায় এই দুটি যোগ হবে। এই দুটি উপাংশের মান সমান হওয়ায় P তে লব্ধ তড়িৎ প্রাবল্য PD বরাবর হবে এবং তড়িৎ প্রাবল্যের মান হবে

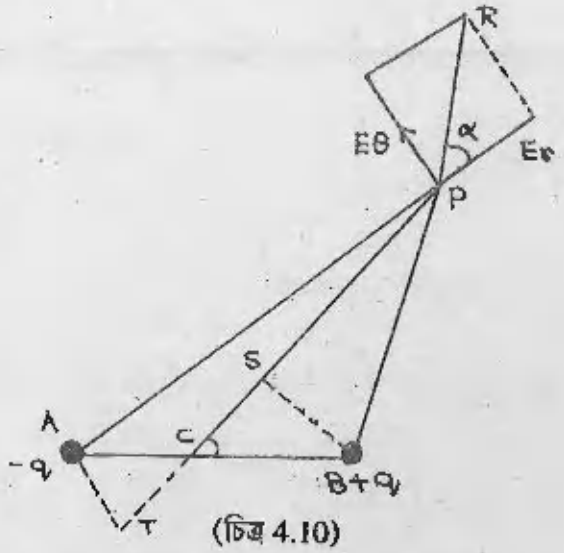
$$2E_+ \cos\theta = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\cos\theta}{\left(r^2 + \frac{a^2}{4}\right)}\right]$$

চিত্র অনুসারে $\cos\theta = \dfrac{\frac{a}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}}$

P তে লব্ধ ক্ষেত্র প্রাবল্য PD অভিমুখে ক্রিয়া করছে এটি $\bar{p}$ এর বিপরীত দিকে, অতএব ভেক্টর ক্ষেত্র

প্রাবল্য $\bar{E} = -\dfrac{\bar{p}}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\left(r^2+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{\bar{p}}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^3}$ যখন $r >> a$ (4.31)

(c) দ্বিমেরুর তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবে কোন বিন্দুতে বিভব তড়িৎ বিভব ϕ এর জ্ঞান থেকেও তড়িৎ ক্ষেত্র প্রাবল্য নির্ণয় করা যায়।



(চিত্র 4.10)

সেইজন্য প্রথমে AB দ্বিমেরুর মধ্যবিন্দু C থেকে r দূরত্বে P একটি বিন্দু নেওয়া হল। PC রেখা এবং $\bar{a}$ র মধ্যের কোণের মান θ। (চিত্র 4.10)।

$-q$ এবং $+q$ থেকে P এর দূরত্ব যথাক্রমে AP এবং BP। চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে $BP = SP = CP - CS = r - \frac{a}{2}\cos\theta$ এবং $AP = TP = CP + CT = r + \frac{a}{2}\cos\theta$।

4.19 সমীকরণের সাহায্যে $-q$ এবং $+q$ আধানের জন্য আলাদাভাবে P তে বিভব নির্ণয় করে দুটিকে যোগ করলে Pতে মোট বিভবের মান পাওয়া যাবে।

$\therefore$ p তে বিভব $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{r-\frac{a}{2}\cos\theta}\right)-\frac{1}{\left(r+\frac{a}{2}\cos\theta\right)}\right]$

অথবা $\phi = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2-\frac{a^2}{4}\cos^2\theta\right)}$

p বহুদূরে অবস্থিত হলে $r^2 >> \frac{a^2}{4}\cos^2\theta$ । কাজেই r^2 এর তুলনায় $\frac{a^2}{4}\cos^2\theta$ কে অগ্রাহ্য করা যায় এবং আমরা লিখতে পারি $\phi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\because \vec{p}.\vec{r} = q\vec{a}\,\hat{r}.\hat{r} = qa\cos\theta\right]$

p তে তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য নির্ণয়ের জন্য আমরা পোলার স্থানাঙ্কে গ্রেডিয়েন্ট সংকারকের রূপ ব্যবহার করব $\vec{E} = -\nabla\phi = -\left[\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\phi$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[\hat{r}(2\cos\theta)+\hat{\theta}\sin\theta\right] \qquad (4.33)$$

লব্ধ ক্ষেত্র প্রাবল্য $\vec{E}$ pr বরাবর ক্রিয়া করবে এবং $\vec{E}$ এর মান

$$E = \sqrt{E_r^2+E_\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2+\left(\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{3\cos^2\theta+1}$$

এখানে E_r এবং E_θ অরীয় (radial) এবং কৌণিক (azimuthal) উপাংশের মান।

$\vec{E}$, $\hat{r}$ এর সঙ্গে α কোণে ক্রিয়া করে এবং θ ও α কোণের মধ্যে সম্পর্ক

$$\tan\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}\tan\theta \qquad (4.34)$$

$\theta = 0$ হলে p বিন্দু দ্বিমেরুর অক্ষের উপর অবস্থিত হবে। কাজেই সেখানে E এর অরীয় উপাংশই কেবল উপস্থিত থাকবে এবং E এর মান 4.30 সমীকরণের সমান হবে।

$\theta = \frac{\pi}{2}$ হলে P বিন্দু দ্বিমেরুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত হবে। তখন E এর অরীয় উপাংশের মান শূন্য হবে কারণ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ এবং E এর মান (4.31) এর সমান হবে কেননা $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ এবং θ এই বিন্দুতে $\vec{p}$ এর বিষমান্তরাল (antiparallel)।

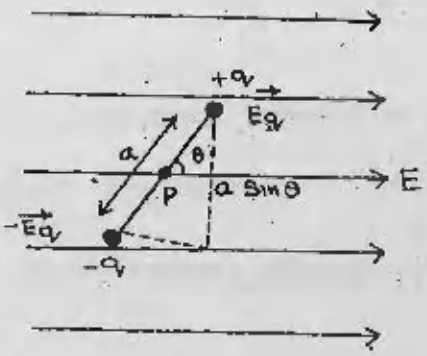
উপরের আলোচনা থেকে আমরা নিম্নের সিদ্ধান্তগুলিতে আসতে পারি —

(1) দ্বিমেরুর তড়িৎ বিভব $\frac{1}{r^2}$ এবং তড়িৎক্ষেত্র $\frac{1}{r^3}$ হারে পরিবর্তিত হয়; কিন্তু একটি বিন্দু আধানের জন্য তড়িৎ বিভব $\frac{1}{r}$ এবং তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য $\frac{1}{r^2}$ হারে পরিবর্তিত হয়। অর্থাৎ বিন্দু আধানের অপেক্ষা দ্বিমেরুর জন্য তড়িৎ বিভব এবং তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য r এর সাপেক্ষে অনেক দ্রুতহারে হ্রাস পায়।

(2) দ্বিমেরুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত বিন্দুগুলিতে বিভবের মান শূন্য। সুতরাং কোন পরীক্ষণ আধানকে (test charge) এই রেখা বরাবর নিয়ে যেতে কৃতকার্যের মানও শূন্য।

4.7 তড়িৎক্ষেত্র দ্বিমেরু

পূর্ব অংশে আমরা একটি দ্বিমেরুর প্রভাবে সৃষ্ট তড়িৎক্ষেত্র এবং তড়িৎ বিভবের কথা আলোচনা করেছি। এই অংশে একটি দ্বিমেরু কি ভাবে তড়িৎক্ষেত্রের দ্বারা প্রভাবিত হয় দেখব।



(চিত্র 4.11)

মনে করা যাক একটি সুষম তড়িৎক্ষেত্র (যে তড়িৎক্ষেত্রের সব বিন্দুতে দিক ও মান সমান) E র ভিতরে একটি দ্বিমেরু আছে। এই দ্বিমেরুর ভ্রামক $\bar{p}$ এর অক্ষ এবং তড়িৎক্ষেত্রের দিকের মধ্যবর্তী কোণের মান θ। এই বহিঃস্থ ক্ষেত্র দ্বারা +q আধানের উপর বল $\bar{F} = \bar{E}q$ এবং $-q$ আধানের উপর সমান এবং বিপরীতমুখী বল $-\bar{F} = -\bar{E}q$ প্রযুক্ত হচ্ছে। তড়িৎক্ষেত্র সুষম হওয়ায় দ্বিমেরুর উপর লব্ধ বল শূন্য অর্থাৎ

$$\bar{F}_{\text{সম্পূর্ণ}} = \bar{E}q - \bar{E}q = 0 \qquad (4.35)$$

সুতরাং লব্ধ বল শূন্য হওয়ায় তড়িৎক্ষেত্রের কোন প্রভাব দ্বিমেরুর রৈখিক সরণের উপর নেই।

কিন্তু দুটি সমান ও বিপরীতমুখী বল দুটি বিভিন্ন বিন্দুতে ক্রিয়া করার জন্য দ্বিমেরুটির উপর একটি টর্ক ক্রিয়া করবে। এই টর্কটির মান (চিত্র 4.11) $|\bar{F}|a\sin\theta = q|\bar{E}|a\sin\theta|$ এই টর্কের ঘূর্ণনের দিক দক্ষিণাবর্তী সুতরাং এটিকে লেখা যায় টর্ক $= \tau = \bar{P} \times \bar{E}$ (4.36)

টর্কের একক নিউটন-মিটার (Nm)। টর্কের প্রভাবে দ্বিমেরুটি ঘুরে তড়িৎক্ষেত্রের দিক বরাবর স্থাপিত হবে এবং দ্বিমেরু ভ্রামক ভেক্টর $\bar{P}$, $\bar{E}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। এই অবস্থায় দ্বিমেরুর উপর কোন টর্ক ক্রিয়া করবে না। তন্ত্রটি সুস্থিত অবস্থায় আছে, কাজেই এই অবস্থায় দ্বিমেরুর স্থিতিশক্তির মান সর্বাপেক্ষা কম। বাইরের কোন বল দ্বারা দ্বিমেরুটিকে এই অবস্থা থেকে ঘূর্ণিত করতে যে কাজ করতে হবে সেই শক্তি দ্বিমেরুর মধ্যে স্থিতিশক্তি হিসাবে সঞ্চিত হয়ে থাকবে।

বহিঃস্থ তড়িৎক্ষেত্রের সঙ্গে $\theta = 90^\circ$ কোণে অবস্থিত দ্বিমেরুর স্থিতিশক্তির মানকে শূন্য ধরলে θ-র অন্য যে কোন মানের জন্য স্থিতিশক্তি নির্ণয় করা সহজ হয়। এই স্থিতিশক্তির মান

$$U(\theta) = W(\theta) = \int_{90^\circ}^{\theta} |\tau| d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} PE\sin\theta\, d\theta \qquad (4.37)$$

এখানে W= দ্বিমেরুটিকে শূন্য স্থিতিশক্তির অবস্থান থেকে θ কোণে ঘুরানোর জন্য কৃতকার্য। সমাকলটির সমাধান করে লেখা যায় $U(\theta) = -pE|\cos\theta|_{90^\circ}^{\theta} = -pE\cos\theta$

ভেক্টর চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করলে দ্বিমেরুটির θ অবস্থানে স্থিতিশক্তি $U(\theta) = -\bar{P}.\bar{E}$

(4.38)

4.38 সমীকরণের সাহায্যে দেখানো যায় যে U এর মান সর্বাপেক্ষা কম (অর্থাৎ সর্বাপেক্ষা ঋণাত্মক)

যখন দ্বিমেরুটির অক্ষ তড়িৎক্ষেত্রের দিক বরাবর $(\theta = 0^\circ)$ এবং U এর মান সর্বাপেক্ষা অধিক (অর্থাৎ সর্বাপেক্ষা ধনাত্মক) যখন দ্বিমেরুর অক্ষ তড়িৎ ক্ষেত্রের বিপরীত দিকে $(\theta = 180^\circ)$

4.8 কয়েকটি ক্ষেত্রে তড়িৎ বিভব নির্ণয়

পূর্ব অংশে আপনারা তড়িৎ বিভব এবং তড়িৎক্ষেত্রের (প্রাবল্য) সঙ্গে বিভবের সম্পর্কের বিষয়ে জেনেছেন। এই দুটির একটি জানা থাকলে অপরটি নির্ণয় করা যায়। এই অংশে আমরা একটি অসীম দৈর্ঘ্যের আধান বিন্যাস এবং একটি সুষমভাবে আহিত বৃত্তীয় চাকতির কথা আলোচনা করব।

4.8.1 রৈখিক আধান বিন্যাস

আমরা এই ব্লকের ৩ নং এককে একটি অসীম দৈর্ঘ্যের আহিত তারের (রৈখিক আধান) কাছে একটি বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র (প্রাবল্য) নির্ণয় করেছি।

সমীকরণটির রূপ

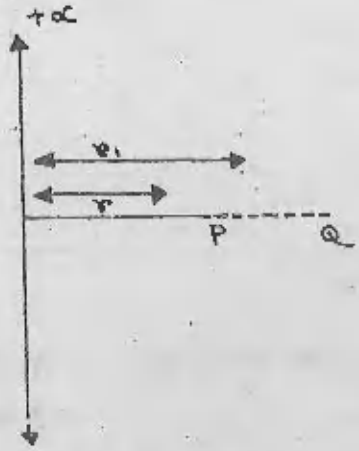
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} \qquad (4.39)$$

যেখানে $\lambda =$ তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের আধানের পরিমাণ

$r =$ তার থেকে বিন্দুটির লম্ব দূরত্ব

$\varepsilon_0 =$ মুক্তস্থানের তড়িৎশীলতা

$\hat{r} = r$ এর বর্ধমান দিকে অঙ্কিত একক ভেক্টর



(চিত্র 4.12)

এখন আমাদের এই তারের জন্য P বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করতে হবে (চিত্র 4.12)। আপনারা জানেন যে অসীম দূরত্ব এবং P বিন্দুর মধ্যের তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের লাইন সমাকলের ঋণাত্মক মানই P বিন্দুতে বিভবের মান, অর্থাৎ

$$\phi_r = -\int_{-\infty}^{r} \vec{E}.d\vec{r} \qquad (4.40)$$

উপরের সমাকলটির সমাধানের জন্য আমরা প্রথম বিন্দুটিকে অসীম দূরত্বে না নিয়ে তারটি থেকে একটি নির্দিষ্ট দূরত্ব r_1 (Q বিন্দুতে) নেওয়া হল এবং পরে এই Q বিন্দুটিকে সরিয়ে অসীম দূরত্বে নিয়ে যাওয়া হবে।

এই অবস্থায় (4.40) সমাকলটি P এবং Q এর মধ্যে নির্ণয় করা হবে এবং এটি P ও Q বিন্দুর মধ্যের বিভব পার্থক্য নির্দেশ করবে অর্থাৎ

$$\phi_r - \phi_\eta = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\eta}^{r}\frac{dr}{r}$$

4.39 সমীকরণ থেকে $\vec{E}$ এর মান বসিয়ে $\phi_r - \phi_\eta = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\eta}^{r}\frac{\hat{r}.d\vec{r}}{r}$

$\hat{r}$ এবং $d\vec{r}$ একই দিকে হওয়ায়, আমরা লিখতে পারি

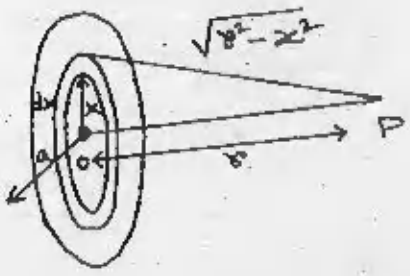
$$\phi_r - \phi_\eta = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\eta}^{r}\frac{dr}{r}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_1}{r}\right) \qquad (4.41)$$

4.8.2 আহিত বৃত্তাকার চাকতি

পূর্বের অংশে আমরা একটি আহিত তারের জন্য বিভব নির্ণয় করেছি। তারটি একটি একমাত্রিক তন্ত্র (one dimensional system)। এই অংশে আমরা একটি দ্বিমাত্রিক অবিচ্ছিন্ন আধান বন্টিত তন্ত্রের জন্য অর্থাৎ একটি আহিত বৃত্তীয় চাকতির জন্য বিভব নির্ণয় করব।

এজন্য চাকতিটিকে বহুসংখ্যক এককেন্দ্রিক গোলাকার পাতলা খণ্ডে বিভক্ত করে প্রত্যেকটি খণ্ডের জন্য স্বতন্ত্রভাবে নির্ণীত বিভবগুলির সমষ্টি নেওয়া হল।



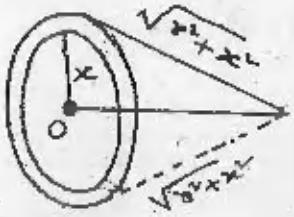
(চিত্র 4.13)

(4.13) চিত্রে একটি সুষমভাবে আহিত বৃত্তাকার চাকতি দেখানো হয়েছে। চাকতিটির ব্যাসার্ধ a এবং প্রতি একক ক্ষেত্রে আধানের পরিমাণ ρ (তলমাত্রিক আধান ঘনত্ব)। চাকতিটির অক্ষের উপর কেন্দ্র o থেকে r দূরত্বে অবস্থিত p বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করতে হবে। op রেখাটি চাকতিটির তলের উপর 90° কোণ করে অবস্থিত। বিভব নির্ণয়ের জন্য প্রথমে কেন্দ্র থেকে x দূরত্বে dx বেধযুক্ত একটি গোলাকার খণ্ড (circular strip) নেওয়া হল। এই খণ্ডের প্রভাবে p বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করার জন্য প্রথমে এই খণ্ডের আধানের মান নির্ণয় করা প্রয়োজন।

মনে করি এই খণ্ডের আধানের মান dQ

তাহলে $dQ = 2\pi x\, dx.\sigma$ (4.42)

4.42 সমীকরণে $2\pi x dx$ পদটি খণ্ডটির ক্ষেত্রফলের মান। (4.13) চিত্র থেকে এটি স্পষ্ট বোঝা যাচ্ছে যে এই বৃত্তাকার খণ্ডটির প্রতিটি অংশ P বিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত। অতএব এই খণ্ডের মোট আধানকে বহুসংখ্যক বিন্দু আধান dq_i এর সমষ্টি হিসাবে লেখা যায় $dQ = \sum_{i=1}^{n} dq_i$ যেখানে n একটি বৃহৎ সংখ্যা। এই খণ্ডের প্রতিটি বিন্দু আধান এবং P এর মধ্যের দূরত্ব $\sqrt{r^2 + x^2}$ (চিত্র 4.14)।



(চিত্র 4.14)

P বিন্দুতে dQ আধানের জন্য (অর্থাৎ সম্পূর্ণ খণ্ডটির জন্য) বিভব উপরিপাতের নীতির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

আমরা জানি একক আধানের জন্য বিভবের মান $\phi_r = \frac{q}{4\varepsilon_0 r}$

$$\text{অতএব } d\phi = \frac{\sum_{i=1}^{n} dqi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$= \frac{2\pi x\,dx\,\sigma}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} \qquad (4.43)$$

সম্পূর্ণ চাকতিটির জন্য P বিন্দুতে মোট বিভব উপরের খণ্ডের ন্যায় সমকেন্দ্রিক বহুসংখ্যক খণ্ডে চাকতিটিকে বিভক্ত করে প্রত্যেকটি খণ্ডের জন্য বিভবের সমষ্টির মানের সমান হবে। খণ্ডগুলির সংখ্যা অসীম হলে যোগফলের পরিবর্তে সমাকলন করতে হবে। সুতরাং 4.43 সমীকরণকে সকল এককেন্দ্রীক খণ্ডের জন্য সমাকলন করলে আমরা সম্পূর্ণ চাকতিটির জন্য P বিন্দুতে মোট বিভব ϕ নির্ণয় করতে পারব

$$\therefore \phi = \int d\phi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}dx \qquad (4.44)$$

4.44 সমীকরণে পাতটির জন্য σ এবং r ধ্রুবক। x এর সীমা মান কেন্দ্রে x=0 এবং পাতের সীমায় x=0

সমাকলটি নির্ণয় করার জন্য আমরা ধরে নিলাম $y = x^2 + r^2$

তাহলে $dy = 2x\,dx$

$$\therefore \int_0^a \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}dx = \int_{r^2}^{a^2+r^2} \frac{y^{-\frac{1}{2}}dy}{2} = \left[y^{\frac{1}{2}}\right]_{r^2}^{a^2+r^2} = \sqrt{a^2+r^2} - r$$

অতএব 4.44 সমীকরণে সমাকলটির মান বসিয়ে আমরা পাই,

$$\phi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{a^2+r^2} - r\right] \qquad (4.45)$$

4.45 সমীকরণে দেখা যায় যে চাকতির কেন্দ্রের কোন বিন্দুতে (অর্থাৎ r=o বিন্দুতে) বিভব $\phi = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}$

কেন্দ্র থেকে বহু দুরের বিন্দুতে (অর্থাৎ যেখানে r>>a) আমরা $\sqrt{a^2+r^2}$ কে লিখতে পারি

$$\sqrt{a^2+r^2} = r\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} = r\left(1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}+\ldots\ldots\right)$$

$$\therefore \sqrt{a^2+r^2} \approx \left(r+\frac{a^2}{2r}\right)$$

সুতরাং 4.45 সমীকরণে বসিয়ে $\phi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\left(r+\frac{a^2}{2r}\right) - r\right] = \frac{\sigma a^2}{4\varepsilon_0 r}$

হর এবং লব উভয়কে π দ্বারা গুণ করলে আমরা পাই

$$\phi = \frac{\sigma \pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (4.46)$$

এখানে চাকতির মোট আধান $= q = \sigma \pi a^2$ । (4.46) সমীকরণ থেকে আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, অক্ষের উপর বহু দূরের একটি বিন্দুতে বিভব নির্ণয়ের ক্ষেত্রে চাকতিটি তার কেন্দ্রে অবস্থিত একটি বিন্দু আধানের ন্যায় আচরণ করে। অর্থাৎ ঐ দূরের বিন্দুতে চাকতির জন্য বিভব এবং কেন্দ্রে অবস্থিত বিন্দু আধানের জন্য বিভবের মান সমান। এছাড়া এটিও লক্ষণীয় যে কোন বিন্দুতে বিভব ϕ সেই বিন্দুর দূরত্ব r এর ব্যস্তানুপাতিক।

প্রশ্নমালা — 5

4.45 সমীকরণে নির্ণীত বিভবের মানের সাহায্যে একটি আহিত গোলাকার চাকতির নিকটে তড়িৎক্ষেত্রের মান নির্ণয় করুন। অতঃপর একটি অসীম আধানের পাতের জন্য তড়িৎক্ষেত্র $(\vec{E})$ নির্ণয় করুন।

প্রশ্নমালা — 6

একটি নগণ্য বেধের আহিত গোলীয় খোলকের (ফাঁপা) ভিতর এবং বাইরের বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করুন।

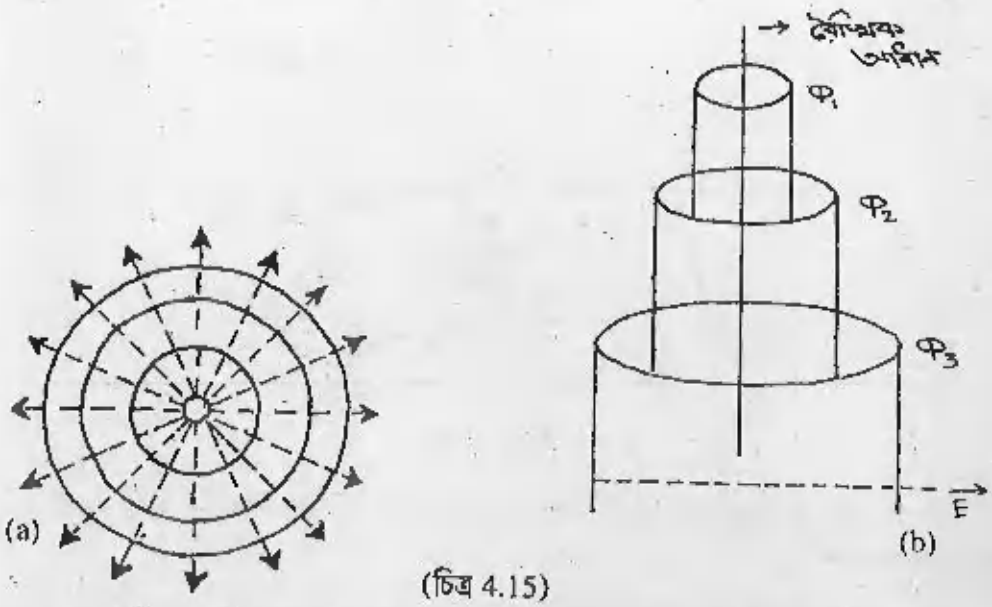
এ পর্যন্ত তড়িৎক্ষেত্র এবং তড়িৎ বিভবের কথা আলোচিত হয়েছে। এদের সাহায্যে স্থির তড়িৎ বলের গাণিতিক রূপ নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু তড়িৎ বলের প্রকৃতি জানার জন্য তড়িৎ বলরেখা এবং সমবিভব তলের ধারণা থাকা প্রয়োজন।

4.9 সমবিভব তল

একই বিভবযুক্ত বিন্দুগুলির — সঞ্চারপথকে সমবিভব তল বলা হয়। অন্য কোন আধানের প্রভাবমুক্ত একটি বিন্দু আধান q এর জন্য r দূরত্বে বিভব ϕ_r এর মান $\phi_r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)$

উপরের সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে r এর ধ্রুবক মান যুক্ত কোন তলের সর্বত্র ϕ_r এর মান সমান।

আমরা জানি যে r ব্যাসার্ধযুক্ত একটি গোলকের উপর সর্বত্র r এর মান সমান। অতএব একটি বিন্দু আধানকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধের একটি গোলক অঙ্কন করলে সেই গোলকের উপরের তল একটি সমবিভব তল হবে। এইরূপ r এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন গোলক অঙ্কন করা সম্ভব।



(চিত্র 4.15)

(4.15a) চিত্রে লক্ষণীয় যে তড়িৎ বলরেখাগুলি সর্বত্র সমবিভব তলের উপর লম্ব (অর্থাৎ ব্যাসার্ধ অভিমুখে ক্রিয়া করছে)। একটি সুষম অসীম দৈর্ঘ্যের রৈখিক আধানের জন্য রেখাটির সমদূরত্বের বিন্দুগুলির তড়িৎক্ষেত্রের মান সমান। অতএব রৈখিক আধানকে অক্ষ করে বিভিন্ন ব্যাসার্ধযুক্ত বেলনাকৃতি তল (cylinderical surface) অঙ্কন করলে সেই বেলনাকৃতি তলগুলি এক একটি সমবিভব তল হবে। (চিত্র 4.15b)। সমবিভব তলের অপর একটি উদাহরণ হল একটি পরিবাহী তল। আদর্শ পরিবাহী তলের সর্বত্র বিভব সমান হওয়া উচিত। নচেৎ বিভব প্রভেদ থাকলে আধান উচ্চ বিভব স্থল থেকে নিম্নবিভব স্থলে প্রবাহিত হবে যতক্ষণ না দুটি বিভব সমান হয়।

সমবিভব তলের সর্বত্র বিভবের মান স্থির। সুতরাং এই তলের উপরের দুটি বিন্দুর মধ্যে বিভব প্রভেদের মান শূন্য। অর্থাৎ একটি আধানকে এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্যের পরিমাণ শূন্য।

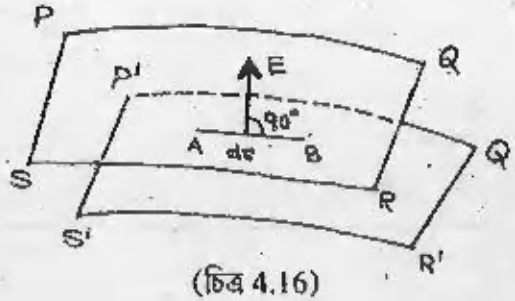
আমরা জানি যে দুটি বিন্দু A এবং B এর ভিতর বিভব প্রভেদের মানকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$\phi_A - \phi_B = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$$

সমবিভব তলে যেহেতু $\phi_A - \phi_B = 0$

$$\therefore \int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = 0 \qquad (4.47)$$

উপরের সমীকরণ থেকে স্পষ্ট বোঝা যাচ্ছে যে $\vec{E}$ এবং $d\vec{r}$ পরস্পরের উপর লম্ব হবে। যেহেতু $d\vec{r}$ এর মান অতি ক্ষুদ্র (সমবিভব তলের উপর), $\vec{E}$ এই তলের সকল বিন্দুর উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে (চিত্র 4.16)



(চিত্র 4.16)

চিত্র (4.16) — সমবিভব তলের সাপেক্ষে তড়িৎক্ষেত্র $\vec{E}$ এর দিক। PQRS এবং P'Q'R'S' সমবিভব তলের অংশ

কোন আধান সমষ্টির জন্য তড়িৎ বলরেখার দিক এবং পথ জানা থাকলে সমবিভব তল অঙ্কনের জন্য নিচের নিয়মগুলি মনে রাখা প্রয়োজন —

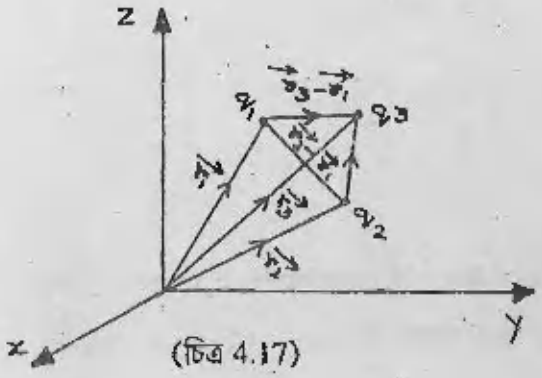
(1) সমবিভবতল সর্বদা তড়িৎ বলরেখার উপর লম্ব হয়।

(2) সমবিভবতলগুলি কখনো পরস্পরকে ছেদ করে না।

(3) দুটি সমবিভবতলের দূরত্ব সেই স্থানে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের উপর নির্ভর করে।

4.10 তড়িৎ স্থিতিশক্তি

কোন আধান সমষ্টিকে একত্রিত করতে যে পরিমাণ কার্য করতে হয় সেটিই আধানের স্থিতিশক্তি হিসাবে সঞ্চিত থাকে। মনে করি দুটি আধান q_1 এবং q_2 পরস্পর থেকে অনেক দূরে অবস্থিত। q_1 কে r_1 এ স্থির রেখে q_2 কে অসীম দূরত্ব থেকে r_2 তে আনা হল (চিত্র 4.17)।



(চিত্র 4.17)

আমরা জানি যে q_2 কে r_2 তে স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্য $= q_2 \times q_1$ আধানের প্রভাবে r_2 তে বিভবের মান অর্থাৎ $dw = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ (4.48)

অন্যভাবে বলতে গেলে 4.48 সমীকরণ দুটি আধান q_1 এবং q_2 কে r_1 এবং r_2 তে কাছাকাছি নিয়ে আসার জন্য কৃতকার্যের মান। এই শক্তি তন্ত্রের মধ্যে সঞ্চিত থাকে এবং একে দুইটি আধান সম্বলিত তন্ত্রের তড়িৎ স্থিতিশক্তি অথবা শুধু স্থিতিশক্তি বলা হয়। যদি আধান দুটিকে পরস্পরের থেকে পৃথক করে q_2 কে অসীম দূরত্বে নিয়ে যাওয়া হয় তবে সমপরিমাণ শক্তি তন্ত্রকে সরবরাহ করতে হবে। এই স্থিতিশক্তি q_1 অথবা q_2 তে আলাদাভাবে অথবা কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে সঞ্চিত থাকে না। এটি সমগ্র তন্ত্রে সঞ্চিত থাকে। q_1 এবং q_2 এর গুণফল ধনাত্মক হলে (অর্থাৎ আধান দুটি একই প্রকার হলে) স্থিতিশক্তির মান ধনাত্মক হবে। ধনাত্মক স্থিতিশক্তির অর্থ এই যে, একই ধরনের আধানের একত্র সমন্বয় করতে হলে শক্তির ব্যয়ের প্রয়োজন।

অপরদিকে q_1 এবং q_2 র গুণফলের মান ঋণাত্মক হলে (অর্থাৎ আধানদুটি বিপরীতধর্মী হলে) স্থিতি শক্তির মান ঋণাত্মক হবে। ঋণাত্মক শক্তির অর্থ এই যে, আধানগুলিকে পরস্পর থেকে বিচ্ছিন্ন করতে শক্তি ব্যয় করতে হবে। অতএব বলা যায় যে বিকর্ষক তড়িৎ বলের ক্ষেত্রে স্থিতিশক্তির মান ধনাত্মক এবং আকর্ষক তড়িৎ বলের ক্ষেত্রে স্থিতিশক্তির মান ঋণাত্মক হয়।

দুটির অধিক আধানের ক্ষেত্রে কৃতকার্য নির্ণয়ের জন্য প্রথমে তিনটি আধান নিয়ে শুরু করা যাক। ধরা যাক q_1, q_2, q_3 তিনটি আধানকে r_1, r_2, r_3 বিন্দুতে আনতে কৃতকার্যের মান নির্ণয় করতে হবে (চিত্র 4.17)। এই কার্য আমরা দুটি অংশে নির্ণয় করব। প্রথমে আমরা q_1 কে r_1 এ এবং q_2 কে r_2 তে নিয়ে আসতে কৃতকার্যের মান নির্ণয় করব। এই মানটি 4.48 সমীকরণে প্রদত্ত মানের সমান হবে। এরপর q_1 এবং q_2 এর জন্য উদ্ভূত বলের বিরুদ্ধে q_3 কে r_3 তে আনার জন্য কৃতকার্য নির্ণয় করতে হবে। সেই মানটি হবে

$$dw' = q_3 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + q_3 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \qquad (4.49)$$

কেননা q_3 এর উপর মোট বল দুটি পৃথক আধান কর্তৃক প্রদত্ত বলের যোগফলের সমান।

অতএব মোট কার্যের মান

$$W = dw + dw' = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + q_3 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + q_3 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

$$= \sum \frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}_j - \vec{r}_k\right|} j = 1.....3,\ k = 1....3 \text{ কিন্তু } j \neq k$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{3} \frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}_j - \vec{r}_k\right|} \tag{4.50}$$

4.50 সমীকরণে যোগচিহ্নের পূর্বে $\frac{1}{2}$ রাশিটি লেখার ফলে যোগফলে প্রত্যেকটি আধানযুগ্মজনিত রাশি একবারই উপস্থিত থাকবে। যেমন q_1 এবং q_2 যুগ্মের জন্য $j = 1$ $k = 2$ অথবা $j = 2$ $k = 1$ হতে পারে। $\frac{1}{2}$ রাশিটি দ্বারা এই দুটি রাশিকে একটি রাশিতে পরিবর্তিত করা হয়েছে। এছাড়া একটি আধান এবং তা - জের বল সম্বলিত রাশি যাতে না থাকে সেজন্য $j \neq k$ লেখা হয়েছে।

সাধারণভাবে r_1, r_2, r_N বিন্দুগুলিতে অবস্থিত q_1, q_2, ...q_N, N সংখ্যক বিন্দু আধানের সমন্বয়ের জন্য তড়িৎ স্থিতিশক্তির রূপ হবে,

$$\text{স্থিতিশক্তি} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{N} \frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}_j - \vec{r}_k\right|} \tag{4.51}$$

লক্ষণীয় যে j এর প্রত্যেক মানের জন্য k ঐ মানটি ছাড়া অন্য সব মান গ্রহণ করতে পারে। এটি q_j যে বিন্দুতে অবস্থিত সেই বিন্দুতে ঐ আধান ব্যতীত অন্য সব আধান জনিত বিভব নির্ণয় করার সমার্থক। q_j যে বিন্দুতে অবস্থিত সেই বিন্দুতে বিভব ϕ এর সাহায্যে 4.51 সমীকরণকে নিম্নের ন্যায় প্রকাশ করা যায়।

$$\text{স্থিতিশক্তি} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} q_j \phi_j \tag{4.52}$$

মনে করা যাক একটি বিচ্ছিন্ন পরিবাহীতে ধীরে ধীরে বিন্দু আধান যুক্ত করা হতে থাকল। এজন্য কৃতকার্য নিম্নরূপে নির্ণয় করা যায়।

মনে করা যাক কোন সময়ে পরিবাহীতে আধানের পরিমাণ q। এই আধানের জন্য বিভব ϕ এর মান আধান q এর সমানুপাতিক হবে। q এর উপর অতিরিক্ত আধান dq যুক্ত করার জন্য কার্যের পরিমাণ dw হলে $\partial w = \phi \partial q$,

আমরা লিখতে পারি, $\phi = kq$ যেখানে k= ধ্রুবক

$$\therefore \partial w = kq\, \partial q$$

ধীরে ধীরে আরও আধান যুক্ত করতে যে কার্য করতে হবে সেই সম্পূর্ণ কার্য এই আহিত পরিবাহীর স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত হয়ে থাকবে। সম্পূর্ণ কার্য নির্ণয়ের জন্য উপরের সমীকরণটির সমাকল করতে হবে। যদি আহিত বস্তুর আধান Q হয়, তবে স্থিতিশক্তির মান

$$\text{স্থিতিশক্তি} = \int dw = \int kq\, dq = k\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q$$

$$= K\frac{Q^2}{2} = \frac{Q}{2}\phi_f$$

এখানে $\phi_f = kQ$ আহিত বস্তুর বিভব।

4.52 সমীকরণের আলোচনার জের টেনে বলা যায় যে নিরবচ্ছিন্ন আধান বন্টনের ক্ষেত্রে যোগচিহ্নের পরিবর্তে সমাকল চিহ্ন ব্যবহার করতে হবে।

ধরা যাক বিন্দু আধান সম্বলিত অতিক্ষুদ্র একটি আয়তন dv, যেটির আয়তন আধান ঘনত্ব (volume charge density). ρ এবং বিভব ϕ, এক্ষেত্রে স্থিতিশক্তির রূপ হবে

$$\text{স্থিতিশক্তি} = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{আয়তন}\\(V)}} \rho\phi dv$$

কোন তলের উপর বন্টিত আধানের জন্য — যদি কোন ক্ষুদ্র তল ds এর উপর প্রতি একক ক্ষেত্রফলে আধানের পরিমাণ σ হয় তবে

$$\text{স্থিতিশক্তি} = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{তল}\\(s)}} \rho\phi ds$$

রৈখিক আধান বিন্যাসের জন্য যদি প্রতি একক দৈর্ঘ্যের আধানের পরিমাণ λ হয় তাহলে,

$$\text{স্থিতিশক্তি} = \frac{1}{2}\int_{\text{রেখা}} \lambda\phi d\ell$$

$$(\ell)$$

আমরা স্থির তড়িৎ বিভব সমবিভবতল এবং তড়িৎ স্থিতিশক্তি সম্বন্ধে আলোচন করেছি। এবার স্থির তড়িৎ বলের প্রকৃতি সম্বন্ধে জানব।

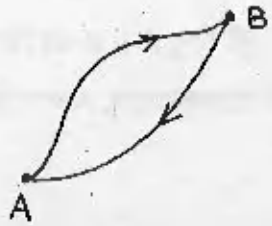
4.11 স্থির তড়িৎ বলের প্রকৃতি

আমরা দেখেছি যে - কোন তড়িৎ প্রাবল্য $\vec{E}$ তে দুটি বিন্দু A এবং B এর মধ্যে q আধানকে নিয়ে যেতে কৃতকার্য W এর মান $W = -\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = -q\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$

এখানে $\vec{F}$, q এর উপর তড়িৎ বল।

আমরা এও দেখেছি যে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের লাইন সমাকল $\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$ এর মান A এবং B এর মধ্যবর্তী পথের উপর নির্ভর করে না।

সুতরাং আমরা বলতে পারি যে তড়িৎ বলের লাইন সমাকল $\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$ এর মানও A এবং B এর মধ্যের পথের উপর নির্ভর করে না। অর্থাৎ একটি আধানকে তড়িৎবল $\vec{F}$ এর বিরুদ্ধে A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে নিয়ে যেতে কৃতকার্য A থেকে B এর মধ্যবর্তী পথের উপর নির্ভর করে না কেবল A এবং B বিন্দুর উপর নির্ভর করে। অর্থাৎ কোন লুপ বরাবর কৃতকার্যের মান শূন্য (চিত্র 4.18)। কোন তড়িৎক্ষেত্রে কৃতকার্যের পথ নিরপেক্ষতা শক্তি সংরক্ষণের উদাহরণ, মহাকর্ষীয় বলের ন্যায় স্থির তড়িৎ বলও সংরক্ষী বল এবং সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে শক্তি সংরক্ষণের সূত্র প্রযোজ্য হয়।



(চিত্র 4.18)

4.12 সারাংশ

- কোন তড়িৎ প্রাবল্য $\vec{E}$ এর লাইন সমাকলের মান $\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$, একটি একক ধনাত্মক আধানকে A থেকে B বিন্দুতে স্থানান্তরিত করার জন্য কৃতকার্যের সমান। অর্থাৎ

$$W = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$$

- কোন তড়িৎক্ষেত্রে একটি একক ধনাত্মক আধানকে একটি বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে স্থানান্তরিত করার জন্য কৃতকার্য বিন্দুদুটির মধ্যবর্তী পথের উপর নির্ভর করে না।

- কোন একক ধনাত্মক আধানকে তড়িৎ প্রাবল্যের বিরুদ্ধে অসীম দূরত্ব থেকে কোন বিন্দুতে স্থানান্তরিত করার জন্য কৃতকার্যকে ঐ বিন্দুর বিভব বলা হয়।

- একটি বিন্দু আধান q থেকে r দূরত্বে একটি বিন্দুতে বিভব ϕ_r এর মান $\phi_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

- দুটি বিন্দু B এবং A র মধ্যের বিভব পার্থক্য, একটি একক ধনাত্মক আধানকে A থেকে B তে স্থানান্তরিত করার জন্য কৃতকার্যের সমান।

q আধানকে A থেকে B তে নিয়ে যেতে কার্য $W = q\phi_{BA} = q(\phi_B - \phi_A)$

- বিভব প্রভেদের একক ভোল্ট। দুটি বিন্দু A ও B এর ভিতর একটি একক ধনাত্মক আধানকে স্থানান্তরিত করতে। জুল কার্যের প্রয়োজন হলে, A এবং B এর ভিতরের বিভবপ্রভেদের মান হবে 1V (ভোল্ট)।

- কোন বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য $\vec{E}$ সেই বিন্দুতে বিভব ϕ এর ঋণাত্মক গ্রেডিয়েন্টের সমান $\vec{E} = -\nabla\phi$

- কোন দ্বিমেরুর অক্ষের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের মান $\vec{E} = +\frac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ যখন r>>a এবং দ্বিমেরুর অক্ষের লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের মান $\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ যখন r>>a

  যেখানে $r =$ দ্বিমেরুর কেন্দ্র থেকে বিন্দুটির দূরত্ব

  $\hat{p} =$ দ্বিমেরু ভ্রামক

- দ্বিমেরুর অক্ষের সঙ্গে θ কোণে অবস্থিত কোন রেখার উপর একটি বিন্দু P তে বিভবের মান

$$\phi = \frac{\vec{p}.\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

  $\hat{r} =$ দ্বিমেরুর কেন্দ্র থেকে P বিন্দুর দিকে একক ভেক্টর।

- কোন সুষম তড়িৎক্ষেত্রে একটি দ্বিমেরু টর্ক অনুভব করে। টর্কের মান $\tau = , \times \vec{E}$ এবং দ্বিমেরুর স্থিতিশক্তি $U = -\vec{p}.\vec{E}$। এই স্থিতিশক্তির মান সর্বাপেক্ষা কম যখন $\vec{p}$, $\vec{E}$ এর সমান্তরাল।

- অসীম দৈর্ঘ্যের একটি আহিত তারের থেকে r এবং r_1, দূরে দুটি বিন্দুর ভিতর বিভবপ্রভেদের মান $\phi_r - \phi_{r_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} l_n\left(\frac{r_1}{r}\right)$। যেখানে $\lambda =$ তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের আধানের মান।

- a ব্যাসার্ধযুক্ত একটি আহিত গোলাকৃতি চাকতির অক্ষের উপর কেন্দ্র থেকে r দূরত্বের একটি বিন্দুতে বিভব ϕ এর মান $\phi = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+r^2} - r\right)$। যেখানে $\sigma =$ প্রতি একক ক্ষেত্রে আধানের মান।

- সমবিভব তল এমন একটি তল যে তলের উপর সর্বত্র বিভবের মান সমান।

- তড়িৎ প্রাবল্য $\bar{E}$ সর্বদা সমবিভব তলের উপর লম্ব হয়। তড়িৎ বিভব ϕ এর দ্রুততম হ্রাসের দিকে তড়িৎক্ষেত্র ক্রিয়া করে।

- সমবিভব তলগুলি প্রবল (strong) তড়িৎক্ষেত্রের কাছাকাছি অবস্থিত থাকে। দুর্বল তড়িৎ ক্ষেত্রে সমবিভব তলগুলির মধ্যের দূরত্ব বেশি হয়।

- কতকগুলি আধানকে অসীম দূরত্ব থেকে নিয়ে এসে সমন্বিত করতে যে কার্য করতে হয় সে শক্তি তন্ত্রটির মধ্যে স্থিতিশক্তি হিসাবে সঞ্চিত থাকে। বিকর্ষণের জন্য আধানগুলি পরস্পর থেকে বিচ্ছিন্ন হলে এই সঞ্চিত শক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়।

- একটি আধানসমষ্টির জন্য স্থির তড়িৎ স্থিতিশক্তির মান

$$\text{স্থিতিশক্তি} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} q_j\,\phi_j$$

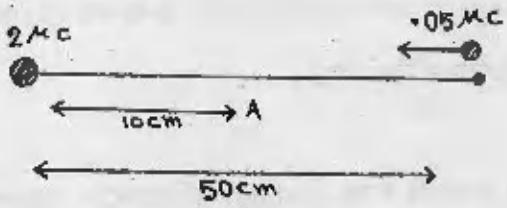
যেখানে $\phi_j = q_j$, যে বিন্দুতে অবস্থিত সেই বিন্দুতে ঐ আধান (অর্থাৎ q_j) ব্যতীত অন্য সব আধানজনিত বিভব।

- একটি আধানকে কোন বদ্ধপথে আবর্তিত করে আদি অবস্থানে নিয়ে আসার জন্য মোট বৃত্তকার্যের মান শূন্য। এর থেকে বলা যায় যে স্থির তড়িৎ বল সংরক্ষী বল।

4.13 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(1) দেখান যে একটি বদ্ধপথে তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য $\bar{E}$ এর লাইন সমাকলের মান শূন্য।

(2) 4.19 চিত্রে প্রদর্শিত একটি আধান $2\mu C$ থেকে 10 cm এবং 50 cm দূরে অবস্থিত A এবং B বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করুন। তৎপরে B থেকে A তে $.05\mu C$ মানের একটি আধানকে স্থানান্তরিত করতে কার্যের মান নির্ণয় করুন।

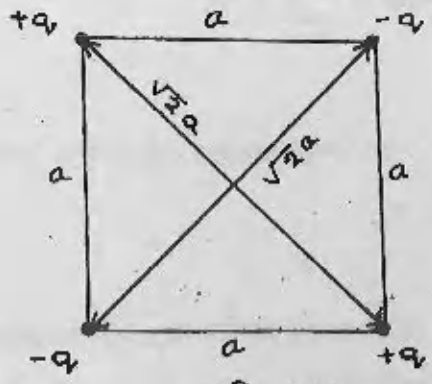


(চিত্র 4.19)

(3) কোন বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্য $\bar{E}$ এর মান শূন্য হলে, সেই বিন্দুতে তড়িৎ বিভবের মানও কি শূন্য হবে? একটি উদাহরণ দ্বারা আপনার উত্তরটি ব্যাখ্যা করুন।

(4) একটি অসীম আহিত পাতের তলমাত্রিক আধান ঘনত্ব $\sigma \times 1.0 \times 10^{-7} cm^{-2}$ (কুলম্ব মিটার $^{-2}$)। পরস্পরের মধ্যে 5 ভোল্ট বিভব পার্থক্য যুক্ত সমবিভব তলগুলির মধ্যের দূরত্ব কত?

(5) চিত্র 4.20 তে প্রদর্শিত চারটি আধানকে একত্রিত করতে কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করুন।



(চিত্র 4.20)

(6) একটি ক্ষুদ্র গোলকের ব্যাসার্ধ R এবং আধান Q। এটি দুই ভাগে বিভক্ত হয়ে R' ব্যাসার্ধযুক্ত দুটি ক্ষুদ্র গোলকে পরিণত হল এবং প্রত্যেক অংশের আধানের পরিমাণ হল $\frac{Q}{2}$ ।এই পরিবর্তনে তন্ত্রের শক্তির পরিবর্তন নির্ণয় করুন। (ধরে নিতে হবে যে বিকর্ষণ বলের জন্য ক্ষুদ্র গোলক দুটি R' এর তুলনায় অনেক বেশি দূরত্বে পরস্পর থেকে বিকর্ষিত হবে)।

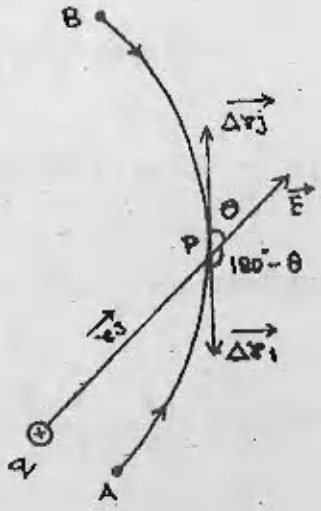
(7) দুটি আহিত গোলকের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে a এবং b। মনে করা যাক দুটি গোলককে একটি পরিবাহী তার দ্বারা যুক্ত করা হল। এই ব্যবস্থা থেকে ব্যাখ্যা করুন যে, একটি পরিবাহীর সূচীমুখ অথবা বক্রতলের আধান ঘনত্ব পরিবাহীর গোল অথবা সমতল তল অপেক্ষা বেশি হয়।

(8) তিনটি তড়িৎ আধানের পরস্পরের থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত এমন একটি সমন্বয় বর্ণনা করুন যাতে সেই সমন্বয়ের মোট স্থিতিশক্তির মান শূন্য হয়।

4.14 উত্তরমালা

প্রশ্নমালা — I

চিত্র 4.20 দ্রষ্টব্য



(চিত্র 4.21)

একটি বিন্দু আধান q এর একটি বিন্দু A থেকে অপর একটি বিন্দু B এর মধ্যের ক্ষেত্র প্রাবল্য $\vec{E}$ এর

লাইন সমাকল $\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = \underset{r_j \to 0}{n \to \alpha \text{ mit}} \sum_{j=1}^{n} \vec{E}\left(r_j\right), \Delta\vec{r}_j$

$\Delta\bar{r}_j$ গুলি A থেকে B এর মধ্যের পথের স্পর্শক বরাবর ধরা হয়েছে।

আমরা লিখতে পারি, $\bar{E}(r_j).\Delta\bar{r}_j = |\bar{E}(r_j)||\Delta\bar{r}_j|\cos\theta$

এখানে θ, $\bar{E}(r_j)$ এবং $\Delta\bar{r}_j$ এর মধ্যবর্তী কোণের মান।

B থেকে A তে লাইন সমাকলের মান নির্ণয় করতে হলে ডট গুণফলের মান হবে A থেকে B এর লাইন সমাকলের জন্য নির্ণীত ডট গুণফলের ঋণাত্মক মানের সমান। কারণ এখানে দৈর্ঘ্যের ক্ষুদ্র অংশ $\Delta\bar{r}$ গুলি $\bar{E}(r_j)$ এর সঙ্গে $(180^\circ - \theta)$ কোণ করবে (চিত্র 4.21)।

$$\text{অতএব } \int_B^A \bar{E}.d\bar{r} = -\sum_{j=1}^{n}\bar{E}(r_j).\Delta\bar{r}_j = \int_A^B \bar{E}.d\bar{r}$$

প্রশ্নমালা — 2

বল $\bar{F}$ দ্বারা কৃতকার্যের মান $\int \bar{F}.d\bar{r} = \int(xy\hat{i} - y^2\hat{j}).(\hat{i}dx + \hat{j}dy)$

$$= \int(xydx - y^2dy)$$

এই কার্য অধিবৃত্তাকার পথ $y = \frac{x^2}{4}$ ধরে (o, o) থেকে (2, 1) বিন্দুর মধ্যে সম্পন্ন হচ্ছে।

y এবং dy কে x এর সাপেক্ষে লিখলে $y = \frac{x^2}{4}$ এবং $dy = \frac{2x}{4}dx$

$$\text{কৃতকার্য} = \int_0^2\left(\frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{32}\right)dx = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{192}\right]_0^2 = \frac{2}{3}J$$

প্রশ্নমালা — 3

মনে করি $\bar{E}$ তড়িৎক্ষেত্র (প্রাবল্য) এবং $d\bar{r}$ একটি ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য। $\bar{E}$ এবং $d\bar{r}$ পরস্পরের সমান্তরাল হওয়ায় এদের মধ্যবর্তী কোণের মান শূন্য। কৃতকার্যের মান $W = -\int\bar{E}.d\bar{r} = -\int Edr$ $\therefore W = -Ed$ যেহেতু $\int dr = d$.

প্রশ্নমালা — 4

ব্যাটারির ধনাত্মক মেরু থেকে ঋণাত্মক মেরুতে যেতে ইলেকট্রন (ঋণাত্মক আধানযুক্ত কণিকা) উচ্চ বিভব থেকে নিম্নবিভবে যায়।

$q = -1.6 \times 10^{-19} C$ এবং $\phi_A - \phi_B = 12V$

$\therefore$ কৃতকার্য $W = q(\phi_A - \phi_B) = (-1.6 \times 10^{-19} C)(-12V) = 1.92 \times 10^{-18} J$

প্রশ্নমালা — 5

$$\phi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{a^2 + r^2} - r\right]$$

এবং $\vec{E} = -\text{grad}\ \phi = -\hat{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}$

$$= -\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{\sqrt{a^2 + r^2} - r\right\}\right]$$

$$= -\hat{r}\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} - 1\right\}$$

$$\therefore \vec{E} = \hat{r}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}\right]$$

একটি অসীম আধানের পাতের ক্ষেত্রে ব্যাসার্ধের মান অসীম অর্থাৎ a র মান অসীম হবে। সেক্ষেত্রে

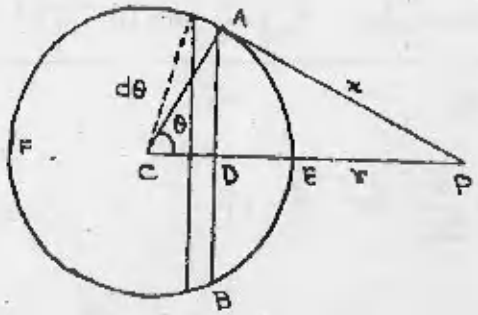
$\vec{E} = \hat{r}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ যেহেতু $a \to \alpha$ হলে $\frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \to 0$

প্রশ্নমালা — 6

মনে করি গোলীয় খোলকটির ব্যাসার্ধ 'a' এবং সুষম আধান ঘনত্ব σ (প্রতি একক ক্ষেত্রে আধানের পরিমাণ)। খোলকের বাইরে P বিন্দুতে বিভব :— খোলকের কেন্দ্র C থেকে r দূরত্বে P একটি বিন্দু নেওয়া হল (চিত্র 4.22)। বিভব নির্ণয়ের জন্য খোলকটিকে বৃহৎ সংখ্যক পাতলা বলয়ে বিভক্ত করা হল (AB)। এই বলয়টি অর্থাৎ AB র অক্ষ CP বরাবর।

AB র জন্য P বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করে অন্য সমস্ত সমান্তরাল বলয়গুলির জন্য বিভব যুক্ত করে পূর্ণ খোলকের জন্য P বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করা যায়।

AB বলয়ের বেধ $ad\theta$ এবং ব্যাসার্ধ $a\sin\theta$ (চিত্র 4.22 তে AD)।



(চিত্র 4.22)

বলয়ের তলমাত্রিক ক্ষেত্রফল (surface area) $= 2\pi(a\sin\theta)a\,d\theta$ এবং বলয়ের মোট আধানের পরিমাণ $=\left(2\pi a^2\sin\theta\,d\theta\right)\sigma$ । বলয়ের প্রত্যেকটি বিন্দুর P থেকে দূরত্ব $=x$। অতএব এই আহিত বলয়ের জন্য P বিন্দুতে বিভব $d\phi$ এর মান $d\phi = \dfrac{\left(2\pi a^2\sin\theta\,d\theta\right)\sigma}{4\pi\varepsilon_0 x}$

সম্পূর্ণ খোলকের জন্য বিভব ϕ নির্ণয় করতে হলে উপরের সমীকরণটির সমাকল করতে হবে। চিত্রে দেখা যায় যে ত্রিভুজ ACP তে $x^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$

সুতরাং $2x\,dx = 2ar\sin\theta\,d\theta$

অতএব $d\phi$ এর প্রতিরূপে $a\sin\theta\,d\theta$ র পরিবর্তে বসিয়ে পাই

$$d\phi = \frac{\sigma 2\pi a x\,dx}{4\pi\varepsilon_0 x r} = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\frac{dx}{r}$$

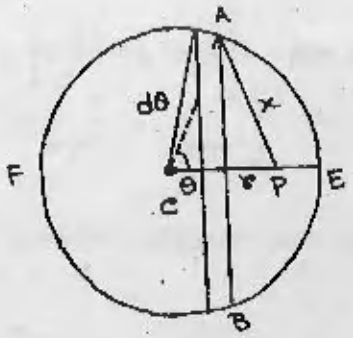
সম্পূর্ণ খোলকের জন্য উপরের সমীকরণটির সমাকল নির্ণয় করতে x এর নিম্নসীমার মান হবে $(x-a)$, E বিন্দুতে এবং x এর উর্ধ্বসীমা হবে $(x+a)$, F বিন্দুতে।

$$\therefore \phi = \int d\phi = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0^r}\int_{r-a}^{r+a} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{2a^2}{r} = \sigma\frac{a^2}{\varepsilon_0^r}$$

অথবা $\therefore \phi = \dfrac{4\pi\sigma a^2}{4\pi\varepsilon_0^r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0^r}$

Q = খোলকের মোট আধান। এই মানটি C বিন্দুতে অবস্থিত Q আধানের জন্য Pতে বিভবের মানের সমান।

খোলকের অন্তর্বর্তী P বিন্দুতে বিভব :— P যখন খোলকের মধ্যে অবস্থিত তখন x এর মান $(a - r)$ অর্থাৎ PE থেকে $(a + r)$ অর্থাৎ PF পর্যন্ত পরিবর্তিত হবে (চিত্র 4.23)।



(চিত্র 4.23)

সুতরাং এক্ষেত্রে P বিন্দুতে বিভবের মান $\phi = \dfrac{\sigma a}{2\varepsilon_0^r}\displaystyle\int_{a-r}^{a+r} dx = \dfrac{\sigma a}{\varepsilon_0} = \dfrac{4\pi a^2}{4\pi\varepsilon_0^a} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

সুতরাং আমরা বলতে পারি যে একটি গোলীয় খোলকের ভিতরের বিভব স্থির থাকে এবং এই বিভবের মান খোলকের উপরের তলের বিভবের মানের সমান।

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(1) চিত্র (4.24) অনুযায়ী একটি বদ্ধপথ কল্পনা করা হল যেটির শুরু এবং শেষ A বিন্দুতে হয়েছে। এই বদ্ধপথে B একটি বিন্দু নেওয়া হয়েছে। A এবং B বিন্দুতে বিভবের মান ϕ_A এবং ϕ_B হলে

(চিত্র 4.24)

আমরা লিখতে পারি, $-\int_{A}^{B} \bar{E}.d\bar{r} = \phi_B - \phi_A$

L পথে

আবার $-\int_{A}^{B} \bar{E}.d\bar{r} = \phi_B - \phi_A$

L^1 পথে

কিন্তু আমরা জানি $+\int_{A}^{B} \bar{E}.d\bar{r} = -\int_{B}^{A} \bar{E}.d\bar{r} = \phi_A - \phi_B$

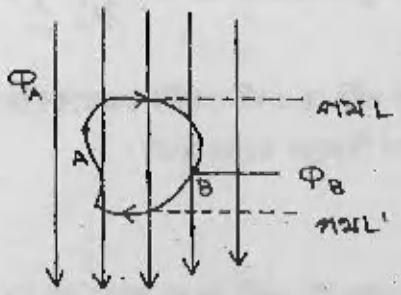
L^1 পথে L^1 পথে

সুতরাং আমরা লিখতে পারি $-\int_{A}^{B} \bar{E}.d\bar{r} = -\int_{B}^{A} \bar{E}.d\bar{r} = \phi_B - \phi_A + \phi_A - \phi_B = 0$

L^1 পথে L^1 পথে

∴ বদ্ধপথে তড়িৎক্ষেত্র প্রাবল্যের লাইন সমাকলের মান শূন্য।

(2) q আধান থেকে r দূরত্বের কোন বিন্দুতে বিভবের মান $\phi_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$



এখানে $q = 2\mu c = 2\times10^{-6}C$ $\frac{1}{4}\pi\varepsilon_0 = 9\times10^9 Nm^2c^{-2}$ এবং $r = 0{\cdot}10m$ $30{\cdot}50m$

উপরের সমীকরণের সাহায্যে লেখা যায়

$$\phi_{0\cdot10} = \left(9\times10^9 Nm^2c^{-2}\right)\frac{2\times10^{-6}C}{\cdot10m} = 1{\cdot}8\times10^5 V$$

$$\phi_{0\cdot50} = \left(9\times10^9 Nm^2c^{-2}\right)\frac{2\times10^{-6}C}{\cdot50m} = \cdot36\times10^5 V$$

কৃতকার্য $w = q'\left(\phi_{0\cdot10} - \phi_{0\cdot50}\right)$ যেখানে $q' = 0{\cdot}05\times10^{-6}C$

$$\therefore W = \left(0{\cdot}05\times10^{-6}C\right)\left(1{\cdot}8\times10^5 - 0{\cdot}36\times10^5\right)V$$

$$= 7{\cdot}2\times10^{-3}J$$

(3) আমরা জানি $\left|\vec{E}\right| = -\frac{d\phi}{dx}$ অর্থাৎ $\left|\vec{E}\right| = o$ হলে ϕ একটি স্থির সংখ্যা হবে। $\left|\vec{E}\right| = o$ হলে ϕ এর মান শূন্য নাও হতে পারে। উদাহরণ স্বরূপ পরস্পর থেকে 2a দূরত্বে অবস্থিত দুটি সমান আধান নেওয়া হল। আধান দুটির মধ্যবিন্দুতে $\left|\vec{E}\right| = 0$ কিন্তু ϕ এর মান

$$\phi = \frac{1}{2}\pi\varepsilon_0\frac{q}{a}$$ ।

(4) আমরা জানি একটি অসীম আহিত পাতের (infinite charged sheet) নিকটে তড়িৎ প্রাবল্য $\left|\vec{E}\right|$ এর মান $\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

যেখানে $\sigma =$ তলমাত্রিক আধান ঘনত্ব

$\therefore$ মান বসিয়ে

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1{\cdot}0\times10^{-7}cm^{-2}}{2\times8{\cdot}9\times10^{-12}c^2N^{-1}m^{-2}}$$

$= 5\cdot6 \times 10^3 Nc^{-1}$

সমবিভবতলগুলির মধ্যের দূরত্ব $\Delta\ell$ এর মান

$\Delta\ell = \dfrac{\Delta\phi}{|\vec{E}|}$ যেখানে দুটি সন্নিহিত সমবিভব তলের বিভব পার্থক্য $= \Delta\phi$ ।

এখানে $\Delta\phi$ এর মান $= 5\cdot0V$

$$\therefore \Delta\ell = \frac{5\cdot0V}{5\cdot6 \times 10^3 NC^{-1}} = \cdot89 \times 10^{-3} m = \cdot89mm$$

(5) চিত্রে প্রদর্শিত চারটি আধানকে একত্রিত করার জন্য কৃতকার্যই তন্ত্রের স্থিতিশক্তির সমান। এটি নির্ণয় করার জন্য দুটি করে আধানের জন্য কার্য নির্ণয় করে সবগুলি কার্যের সমষ্টি নিতে হবে।

এই কার্যের মান =

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(q)(-q)}{a} + \frac{(-q)(q)}{a} + \frac{(-q)(q)}{a} + \frac{(-q)(q)}{a} + \frac{(-q)(-q)}{\sqrt{2a}} + \frac{(q)(q)}{\sqrt{2a}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{4q^2}{a} + \frac{2q^2}{\sqrt{2^a}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-4 + \sqrt{2}\right]\frac{q^2}{a}$$

(6) ভাগ হয়ে যাওয়ার পর গোলকদুটির মোট আয়তন $= 2 \times \frac{4}{3}\pi R^3$

আদি গোলকটির আয়তন $= \frac{4}{3}\pi R^3$ উভয় আয়তন সমান হতে হবে

অতএব $2 \times \frac{4}{3}\pi R'^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\therefore R' = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}_{Rh}$$

স্থির তড়িৎ শক্তি :--- Q আধান সঞ্চালিত আদি গোলকটির $= \frac{1}{2}Q\phi = \frac{1}{2}Q.\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

এবং বিভাজনের পরে দুটি গোলকের $= 2 \times \frac{1}{2}\frac{Q}{2}\frac{\frac{Q}{2}}{4\pi\varepsilon_0 R^1} = \frac{\frac{Q^2}{2}}{8\pi\varepsilon_0 R^1} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}2^{\frac{1}{3}} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

সুতরাং বিভাজনের পর তড়িৎ শক্তির হ্রাস $= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$

(7) দুটি আহিত গোলককে একটি তার দ্বারা যুক্ত করলে আধানগুলি এমনভাবে বন্টিত হয় যাতে দুটি গোলকের বিভব সমান হয় (চিত্র 4.25) অর্থাৎ $\phi = \frac{1}{4}\pi\varepsilon_0\frac{q_1}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{b}$

(চিত্র 4.25)

এখানে a এবং b গোলকের আধান যথাক্রমে q_1 এবং q_2। উপরের সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{a}{b} \qquad \text{(a)}$$

এই দুটি গোলকের তলমাত্রিক আধান ঘনত্বের মান যথাক্রমে $\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi a^2}$ এবং $\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi b^2}$

একটিকে অপরটি দিয়ে ভাগ করলে পাই, $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{q_2}\frac{b^2}{a^2}$ (b)

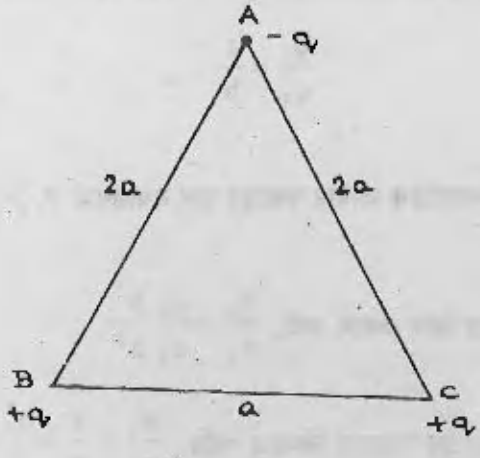
(a) এবং (b) এর সাহায্যে লিখতে পারি, $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{a}{b} \times \frac{b^2}{a^2} = \frac{b}{a}$

(চিত্র 4.26)

অর্থাৎ আধান ঘনত্ব গোলকের ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতিক। সূচীমুখের ব্যাসার্ধ অত্যন্ত কম হওয়ায় আধান ঘনত্ব অনেক বেশি। চেপ্টা তলের ব্যাসার্ধ অনেক বেশি হওয়ায় আধান ঘনত্ব কম (চিত্র 4.26)।

(৪) চিত্র 4.27 এর ন্যায় আধান তিনটিকে স্থাপিত করলে তন্ত্রের স্থিতিশক্তির মান শূন্য হবে,

$$\text{স্থিতিশক্তি} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(-q)(q)}{2a} + \frac{(-q)(q)}{2a} + \frac{(q)(q)}{a}\right] = 0$$



(চিত্র 4.27)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

5.2 ধারক কী?

5.2.1 ধারকের কার্য

5.3 বিভিন্ন আকৃতির ধারক

5.4 আহিত ধারকের শক্তি

5.5 সচরাচর ব্যবহৃত কয়েক ধরনের ধারক

5.6 সারাংশ

5.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

5.8 উত্তরমালা

5.1 প্রস্তাবনা

এই পর্যায়ে আগের এককে আপনি দেখেছেন যে কোন একটি পরিবাহী আহিত হলে সেটি পৃথিবীর সাপেক্ষে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বিভব লাভ করে। গোলকাকৃতি পরিবাহীর ক্ষেত্রে আপনি এই বিভবের মানও নির্ণয় করেছেন। কোন একটি পরিবাহীকে নীতিগতভাবে যথেচ্ছ পরিমাণ তড়িৎ আধান দেওয়া যেতে পারে অর্থাৎ সেটিকে ইচ্ছামত উচ্চ বিভবে রাখা যেতে পারে। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে এটি সম্ভব হয় না, কেননা পরিবাহীটিকে উপযুক্তভাবে অন্তরিত রাখা ক্রমশই শক্ত হয়ে পড়ে এবং তড়িৎক্ষরণ অন্তরকের ধ্বংসপ্রাপ্তি প্রভৃতির ফলে আধান পরিবাহীতে আবদ্ধ থাকে না। অথচ অনেক সময় আমাদের এমন একটি ব্যবস্থার প্রয়োজন হয় যার দ্বারা বিভবের মান সীমিত রেখেও অনেক বেশি পরিমাণ আধান সঞ্চিত রাখা যায়। এর মূল উপায়টি হল দুটি পরিবাহীকে যথাসম্ভব কাছাকাছি রেখে সেদুটিতে সমমানের ও বিপরীত চিহ্নের আধান যুক্ত করা। এতে একটি পরিবাহী অন্য পরিবাহীটির বিভবের মান কমিয়ে দেয় এবং পরিবাহীদুটির বিভব প্রভেদ অল্প রেখেও সেগুলির উপর একটির ক্ষেত্রে পজিটিভ ও অন্যটির ক্ষেত্রে নেগেটিভ আধান সঞ্চিত রাখা যায়।

বৈদ্যুতিক মোটর, পাওয়ার সাপ্লাই, নানাবিধ ইলেকট্রনিক বর্তনীতে ধারক একটি গুরুত্বপূর্ণ

ভূমিকা পালন করে। আপনি এ সম্বন্ধে ইলেকট্রনিকস সম্বন্ধীয় পাঠক্রমে বিশদভাবে জানতে পারবেন। বর্তমান এককটিতে ধারক সম্বন্ধে প্রয়োজনীয় কিছু প্রাথমিক আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

ধারক সম্বন্ধীয় এই এককটি পড়লে আপনি যেগুলি করতে পারবেন সেগুলি হল :

- ধারকের সংজ্ঞা দিতে পারবেন।
- ধারকের কার্যগুলি বিবৃত করতে পারবেন।
- নানা ধরনের ধারকের বর্ণনা দিতে পারবেন এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে সেগুলির ধারকত্বের গণনা করতে পারবেন।
- আহিত ধারকের শক্তির মান নির্ণয় করতে পারবেন এবং এর সঙ্গে সংশ্লিষ্ট কয়েকটি বলবিদ্যা সংক্রান্ত রাশির গণনা করতে পারবেন।
- বর্তনীতে ব্যবহৃত, বাণিজ্যিকভাবে লভ্য কয়েক ধরনের ধারকের গঠন বর্ণনা করতে পারবেন।

5.2 ধারক কী?

ধরে নিন, আপনি R_1 ব্যাসার্ধের একটি ধাতব গোলককে অন্য সমস্ত বস্তু থেকে অনেক দূরে বিচ্ছিন্ন অবস্থায় রেখে তাতে $+Q$ পরিমাণ আধান দিয়েছেন। আপনি জানেন যে, গোলকটি এখন পৃথিবীর তুলনায় $V^+ = Q/4\pi\varepsilon_0 R_1$ বিভবে থাকবে। যদি R_2 ব্যাসার্ধের আর একটি ধাতব গোলককে একইভাবে বিচ্ছিন্ন অবস্থায় রেখে তাতে $-Q$ পরিমাণ আধান দেন, তবে এই গোলকটির বিভব হবে $V^- = -Q/4\pi\varepsilon_0 R_2$

দুটি গোলকের মধ্যে বিভব প্রভেদ

$$V = V^+ - V^- = Q\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Big/4\pi\varepsilon_0$$

লক্ষ্য করুন যে, বিভব প্রভেদ V এবং যে কোন গোলকের আধানের মান Q সমানুপাতী। সমানুপাত ধ্রুবক $\frac{Q}{V}$ কে গোলকদুটির মিলিত তন্ত্রের ধারকত্ব বলা হয় এবং তন্ত্রটিকে বলা হয় একটি ধারক। এই ধারকের ধারকত্ব $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 \Big/ \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2 / R_2 + R_1$ বিভব প্রভেদ

অল্প রেখে Q এর মান বৃদ্ধি করতে হলে ধারকত্ব C কে বাড়াতে হবে। আপনি R_1 ও R_2 এর মান বৃদ্ধি করে C এর মান বাড়াতে পারেন। কিন্তু এর একটি সহজ উপায় আছে। সেটি হল ধাতব গোলকদুটিকে পরস্পরের আরও কাছে আনা। এতে নেগেটিভ আধানযুক্ত গোলকটি পজিটিভ আধানের গোলকের বিভব শূন্যের দিকে নামিয়ে আনবে এবং নতুন মান হবে V_1^+ ; $V_1^+ (< V^+)$ । আবার পজিটিভ আধানের গোলক অন্য গোলকটির বিভব বাড়িয়ে শূন্যের দিকে আনবে এবং সেটির বিভব বেড়ে হবে $V_1^- (< V^-)$। দুই গোলকের মধ্যে বিভব প্রভেদ হবে $V_1 = V_1^+ - V_1^-$ । যা নিঃসন্দেহে V এর চেয়ে কম। যেহেতু প্রতি গোলকে আধানের মান সমান আছে, ধারকত্ব $C_1 = \frac{Q}{V_1}$ এর মান C অপেক্ষা বেশি।

এইভাবে যখন দুটি পরিবাহীকে পরস্পরের কাছাকাছি রেখে তাদের একক বিভবপ্রভেদ পিছু আধানধারণের ক্ষমতা বা ধারকত্ব বাড়ানো হয় তখন তাদের মিলিতভাবে একটি ধারক বলা হয়। তবে কখনো কখনো আমরা একটিমাত্র পরিবাহীর ধারকত্বেরও উল্লেখ করি। তখন ধরে নেওয়া হয় যে অন্য একটি পরিবাহী যেন অসীম দূরত্বে শূন্য (অর্থাৎ পৃথিবীর) বিভবে রয়েছে এবং ধারকত্ব বলতে বাস্তব ও কল্পিত। উক্ত দুই পরিবাহী মিলিতভাবে যে ধারক গঠন করে তার ধারকত্বকেই বোঝায়।

বাস্তবে যে সব ধারক ব্যবহৃত হয় সেগুলির পরিবাহীগুলি দুটি সমান্তরাল ধাতব পাত, দুটি সমকেন্দ্রিক পরিবাহী গোলক বা দুটি সমাক্ষ পরিবাহী নির্মিত বেলন হতে পারে। তেমনি পরিবাহীদুটির মধ্যে অন্তরক হিসাবে বায়ু, মোম মাখানো কাগজ, অভ্রের পাত, অ্যালুমিনিয়াম অক্সাইড স্তর বা কোন সেরামিক (ceramic) পদার্থ ব্যবহৃত হতে পারে। এই এককে আপনি কয়েকটি প্রচলিত ধরনের ধারকের পরিচয় লাভ করবেন। তবে তার আগে আমাদের জানা দরকার, কোন্ কোন্ কাজে ধারকের ব্যবহার হয়।

5.2.1 ধারকের কার্য

বৈদ্যুতিক ও ইলেকট্রনিক বর্তনীতে নানা উদ্দেশ্যে ধারক ব্যবহৃত হয়। ধারকের প্রধান কাজগুলি নিম্নরূপ :

- ধারকের সাহায্যে নির্দিষ্ট প্রাবল্যের তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন করা যায়। বিশেষত, সমান্তরাল পাত ধারকের দুই পাতের মধ্যে সুষম তড়িৎক্ষেত্র পাওয়া যায়।

- ধারকের ধারকত্ব পাতের মধ্যবর্তী অন্তরকের আপেক্ষিক বিদ্যুতশীলতার সমানুপাতী। সুতরাং, ধারকত্বের পরিমাপ দ্বারা দুটি অন্তরকের আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতার তুলনা করা যায়। এমনকী, ধারকের উপর বিভিন্ন কম্পাঙ্কের পরবর্তী তড়িৎ বিভব প্রয়োগ করে কম্পাঙ্কের সঙ্গে আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতার পরিবর্তন লক্ষ্য করা যায়।

● ধারককে আহিত করে তাতে তড়িৎশক্তি সঞ্চিত রাখা যায় এবং প্রয়োজনমত ধারকটির ক্ষরণ ঘটিয়ে অতি অল্প সময়ের মধ্যে ঐ শক্তি মুক্ত করা যায়। ইলেকট্রনিক ফ্ল্যাশ ধারকের এরূপ ব্যবহারের একটি উদাহরণ।

● ধারক দিষ্ট তড়িৎপ্রবাহ সম্পূর্ণ রুদ্ধ করে এবং পরিবর্তী প্রবাহের ক্ষেত্রে কম্পাঙ্ক যত বেশি হয় ধারকের কার্যকরী রোধ তত কম হয়। ইলেকট্রনিক বর্তনীতে তাই পরিবর্তী প্রবাহকে প্রচলিত (bypass) করার জন্য এবং দিষ্ট প্রবাহের পথরোধ করার জন্য ধারক ব্যবহৃত হয়। একই কারণে ধারকের সাহায্যে পাওয়ার-সাপ্লাই দ্বারা উৎপন্ন তড়িৎবিভবে দ্রুত ওঠানামা দূর করতে ফিল্টার হিসাবে ধারকের ব্যবহার করা হয়।

● রেডিও রিসিভার প্রভৃতি যন্ত্রে পরিবর্তনযোগ্য ধারকত্বের ধারকের সাহায্যে গ্রাহক বর্তনীর কম্পাঙ্ক গ্রহণীয় তরঙ্গের কম্পাঙ্কের সঙ্গে মোলানো হয়।

ধারকের ব্যবহার এত ব্যাপ্ত ও বিচিত্র যে নানা মানের ধারকত্ব ও বিভব সহন ক্ষমতা বিশিষ্ট বিভিন্ন আকার ও আকৃতির ধারক বাণিজ্যিকভাবে উৎপন্ন হয়ে থাকে। এবার আমরা বিভিন্ন আকৃতির ধারকের সম্বন্ধে তত্ত্বগত আলোচনা করব।

5.3 বিভিন্ন আকৃতির ধারক

(i) সমান্তরাল পাত (parallel plate) ধারক

ধরা যাক, দুটি সমতল, সমান আকারের পরিবাহী পাত P ও Q, d ব্যবধানে পরস্পর সমান্তরাল ভাবে রয়েছে (চিত্র 5.1)। পাত দুটির প্রতিটির ক্ষেত্রফল A এবং সেগুলির একটি পজিটিভ ও অন্যটি নেগেটিভ আধানে আহিত। পাত দুটির আধানের তলঘনত্ব যথাক্রমে σ ও $-\sigma$। পাতের মধ্যে ব্যবধান d সেগুলির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তুলনায় ক্ষুদ্র হলে সেগুলির প্রান্ত অঞ্চলে তড়িৎক্ষেত্রে অসমতা বা প্রান্তীয় ত্রুটি (end error) উপেক্ষা করা যায়, অর্থাৎ ধরে নেওয়া যায়, তাদের মাঝখানে তড়িৎক্ষেত্র সুষম ও তার মান $\sigma/\varepsilon_0 \varepsilon_r$, যেখানে ε_r = পাতদুটির মধ্যেকার মাধ্যমের আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা। Q পাতটি যদি z = o লগ্ন স্থানাঙ্কে ভূসংলগ্ন অবস্থায়, অর্থাৎ শূন্য বিভবে আছে বলে ধরা যায়, তবে P এর বিভব, z = d স্থানাঙ্কে,

(চিত্র 5.1)

$$V = -\int_{Q}^{P} E dz = \int_{z=0}^{d} \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} . dz$$ (কেননা E z এর বিপরীতমুখী)

$$= \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

অন্যদিকে, p পাতের উপর আধান σA এবং Q পাতের উপর আধান $-\sigma A$। সুতরাং সমান্তরাল পাত ধারকটির ধারকত্ব

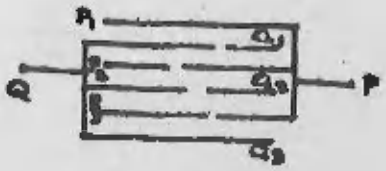
$$C = \frac{q}{v} = \frac{\sigma A}{\sigma d / \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} \qquad (5.1a)$$

ধারকটির মাধ্যম যদি বায়ু বা শূন্য হয় তবে $\varepsilon_r = 1$ লেখা যায়।

সেক্ষেত্রে $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ (5.1b)

লক্ষণীয় বিষয় :

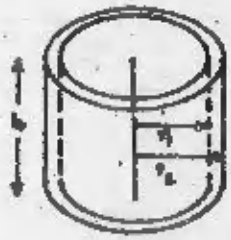
(i) একটি সমান্তরাল পাত ধারকে দুই -এর অধিক সংখ্যক পাত থাকতে পারে। 5.2 চিত্রে দেখানো ধারকে উপর থেকে P_1, P_2 ও P_3 পাতগুলি P প্রান্তের সঙ্গে এবং Q_1, Q_2 ও Q_3 পাতগুলি Q প্রান্তের সঙ্গে যুক্ত আছে। $P_1 - Q_1$, $Q_1 - P_2$, $P_2 - Q_2$, $Q_2 - P_3$, $P_3 - Q_3$, পাতযুগ্মগুলি এক একটি ধারক রচনা করে; সেগুলির প্রতিটির পাতের ক্ষেত্রফল A এবং ব্যবধান d হলে ধারকত্ব 5.1 সূত্র অনুযায়ী $\varepsilon_0 \varepsilon_r A/d$। যেহেতু পাঁচটি ধারক সমান্তরালে আছে। মোট ধারকত্ব $C = 5\varepsilon_0 \varepsilon_r A/d$।



(চিত্র 5.2)

(ii) ধারকের পাতগুলি সমতল না হয়ে বক্রতল হলেও যদি পাতগুলির ব্যবধান সমান থাকে এবং

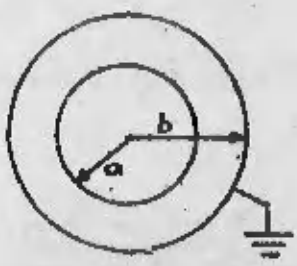
তা পাতের উচ্চাবচতার তুলনায় ক্ষুদ্র হয় তবে ধারকটিকে সমান্তরাল পাত ধারক হিসাবে ধরা যায়। উদাহরণ হিসাবে h উচ্চতা ও r_1, r_2 ব্যাসার্ধের দুটি সমাক্ষ ধাতুপাতের তৈরি বেলন কল্পনা করুন। বেলন দুটির মধ্যের ফাঁক যদি বায়ুপূর্ণ থাকে আর তার বেধ $(r_2 - r_1)$ যদি r_1 বা r_2 এর তুলনায় খুব ছোট হয় তবে বেলন দুটি একটি সমান্তরাল পাত ধারক তৈরি করবে যার ধারকত্ব হবে $\frac{2\pi r_1 h \varepsilon_0}{r_2 - r_1}$ (চিত্র 5.3)।



(চিত্র 5.3)

(ii) গোলকাকৃতি ধারক

(ক) যখন বাইরের গোলক ভূসংলগ্ন: এবার আমরা a ও b (>a) ব্যাসার্ধের দুটি সমকেন্দ্রিক পরিবাহী গোলক কল্পনা করব যার বাইরেরটি ভূসংলগ্ন, অর্থাৎ যার বিভব V = 0 (চিত্র 5.4) ভিতরের গোলকটিতে q আধান দিলে ঐ আধান গোলকের উপর সমভাবে বিন্যস্ত হবে এবং ঐ আধানের ফলে দুই গোলকের মধ্যবর্তী অঞ্চলে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য হবে



(চিত্র 5.4)

$$\vec{E} = \frac{q.\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

যেখানে ε_r = মাধ্যমের আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা।

যেহেতু $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dv}{dr}\hat{r}$, $\frac{dv}{dr} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

$$\therefore V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

সুতরাং গোলকযুগ্মের ধারকত্ব $C = \frac{q}{v} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \Big/ \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r . ab}{b-a} \qquad (5.2a)$$

গোলকদুটির মধ্যে ফাঁকটি যদি বায়ুপূর্ণ হয়, তবে $\varepsilon_r = 1$ লিখে পাবেন

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \qquad (5.2b)$$

বাইরের গোলকটির ব্যাসার্ধ অসীম ধরলে কেবলমাত্র a ব্যাসার্ধের একটি বিচ্ছিন্ন গোলকের ধারকত্ব পাওয়া যাবে ঃ

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a \qquad (5.2c)$$

(খ) **যখন ভিতরের গোলক ভূসংলগ্ন ঃ** বাইরের গোলকটি $(r = b)$ অন্তরিত রেখে সমকেন্দ্রিক ভিতরের গোলকটিকে $(r = a)$ ভূসংলগ্ন করলে একটি ভিন্ন পরিস্থিতির সৃষ্টি হয়। বাইরের গোলকটির ধারকত্ব আপনি আগেই দেখেছেন (5.2c অনুযায়ী)

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 b \qquad (5.3a)$$

এখানে অসীম দূরত্বে শূন্য বিভবে একটি ভূসংলগ্ন গোলক রয়েছে বলে ধরে নেওয়া হয়েছে।

ভিতরের ভূসংলগ্ন গোলকটি বাইরের গোলকটির সঙ্গে মিলে আর একটি ধারক তৈরি করে যার ধারকত্ব 5.2b অনুযায়ী $C_2 = 4\pi\varepsilon_0 . \frac{ab}{b-a}$ (5.3b)

C_1 ও C_2 ধারকত্ব সমান্তরালে থাকায় মোট ধারকত্ব

$$C_1 + C_2 = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a} + b\right) = 4\pi\varepsilon_0 \frac{b^2}{a-b} \qquad (5.4a)$$

এখানে গোলক দুটির মধ্যবর্তী অংশ বায়ুপূর্ণ ধরা হয়েছে। বাইরের গোলকটির স্থানে যদি একটি সমকেন্দ্রিক গোলক কল্পনা করা হয়, যার ভিতরের তলের ব্যাসার্ধ b এবং বাইরের ব্যাসার্ধ C, তবে 5.3a সমীকরণটি দাঁড়াবে

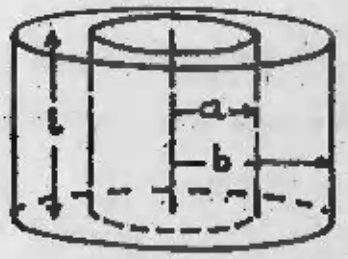
$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 c$$

এবং মোট ধারকত্ব হবে

$$C_1 + C_2 = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a} + c\right) \qquad (5.4b)$$

(iii) বেলনাকৃতি (cylindrical) ধারক

এই প্রকার ধারক দুটি সমাথা বেলন দিয়ে গঠিত হয়। ধরা যাক ভিতরের বেলনের ব্যাসার্ধ a, বাইরের বেলনের ব্যাসার্ধ b (>a) এবং বেলন দুটির মধ্যবর্তী অঞ্চলে যে মাধ্যম আছে তার আপেক্ষিক - বিদ্যুৎশীলতা ε_r (চিত্র 5.5)। বেলন দুটি যথেষ্ট দীর্ঘ হলে প্রান্তীয় ত্রুটি উপেক্ষণীয় হয়।



(চিত্র 5.5)

ধরে নিন ভিতরের বেলনটিতে একক দৈর্ঘ্যে পিছু λ পরিমাণ আধান দেওয়া হল এবং বাইরের বেলনটি ভূসংলগ্ন করা হল। বেলন দুটির মাঝখানের অঞ্চলে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য

$$\bar{E} = \lambda\hat{r}/2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r \qquad (5.5)$$

এবং দুটির মধ্যে বিভব প্রভেদ $V = -\int \vec{E}.\vec{dr}$

$$-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ell n\left(\frac{b}{a}\right)$$

এখন যদি বেলন দুটির ℓ দৈর্ঘ্যের কথা ভাবা যায় তবে ঐ দৈর্ঘ্যের মধ্যে ভিতরের বেলনের উপর আধান $q = \ell\lambda$ । সুতরাং বেলনযুগ্মের ঐ দৈর্ঘ্যের ধারকত্ব

$$C = \frac{q}{v} = \ell\lambda \Big/ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ell n\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\ell/\ell_n\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (5.6)$$

লক্ষ্য করুন ধারকত্ব C দৈর্ঘ্যের সমানুপাতী। একক দৈর্ঘ্য পিছু ধারকত্ব $C = \frac{C}{\ell} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r/\ell_n\left(\frac{b}{a}\right)$

যদি বাইরের বেলনটির ব্যাসার্ধ ভিতরের বেলনের তুলনায় সামান্য বড় হয়, অর্থাৎ যদি $(b-a) << a$ হয় তবে

$$\ell_n\left(\frac{b}{a}\right) = \ell_n\left(1+\frac{d}{a}\right) \cong \frac{d}{a} \quad (\text{এখানে } d = b-a)$$

$\therefore C = \frac{2\pi a\varepsilon_0\varepsilon_r}{d} = \frac{A\varepsilon_0\varepsilon_r}{d}$ যেখানে $A = 2\pi a =$ একক দৈর্ঘ্য পিছু বেলনের ক্ষেত্রফল। (5.1a) সূত্রের সঙ্গে এই সূত্রের তুলনা করলে বুঝতে পারবেন যে, বেলনের তল বক্রতল হওয়া সত্ত্বেও এক্ষেত্রে ধারকটি সমান্তরাল পাত ধারক হিসাবে কাজ করছে। এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দেওয়ার সময় হয়েছে। আপনার ব্যবহারের জন্য দেওয়া হল :

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\, C^2/Nm^2$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\, Nm^2/C^2$$

অনুশীলনী — 1

(i) দুটি অ্যালুমিনিয়াম পাতের মধ্যে অন্তরক হিসাবে মোমে ভেজানো কাগজ ($\varepsilon_r = 3.0$) রেখে $1\mu F$ ধারকত্বের একটি ধারক তৈরি করতে হবে। পাতগুলির প্রতিটির ক্ষেত্রফল কত হওয়া প্রয়োজন? দুটি পাতের মধ্যে ব্যবধান 0·5 mm ধরে নিন।

(ii) 2 cm ব্যাসার্ধের একটি গোলকের সঙ্গে সমকেন্দ্রিকভাবে একটি ধাতব খোলক রয়েছে যার ভিতরের ও বাইরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 2.2 cm ও 2.5 cm। গোলকটি ভূসংলগ্ন করে বাইরের খোলকটিকে 500 V বিভবে আহিত করলে সেটিতে কত আধান থাকবে?

(iii) একটি সমাক্ষ (co-axial) কেব্‌ল্ 3 mm ব্যাসার্ধের তামার তার ও তার সঙ্গে 5 mm ব্যাসার্ধের অ্যালুমিনিয়ামের তারজালি দিয়ে তৈরি। মিটার পিছু এই কেব্‌লের ধারকত্ব কত? তারজালি ও তারের মধ্যবর্তী অন্তরকের আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা = 2.0 দেওয়া আছে।

5.4 আহিত ধারকের শক্তি.

একটি ধারককে যখন আহিত করা হয় তখন বাইরের কোন উৎস থেকে তাতে শক্তি সরবরাহ করা প্রয়োজন হয়। কেন এই শক্তি সরবরাহের প্রয়োজন ঘটে তা বোঝার জন্য কল্পনা করুন যে ধারকটি প্রথমে অনাহিত অবস্থায় আছে। এখন অল্প পরিমাণ আধান Δq একটি পরিবাহী থেকে অপর পরিবাহীতে স্থানান্তরিত করা হল। এতে প্রথম পরিবাহীটির আধান দাঁড়াল Δq, দ্বিতীয় পরিবাহীর আধান $+\Delta q$ এবং পরিবাহী দুটির বিভব প্রভেদ $\frac{\Delta q}{c}$ (C = ধারকত্ব) $= \Delta V$। এখন যদি আরও Δq পরিমাণ আধান নেগেটিভ পরিবাহী থেকে পজিটিভ পরিবাহীতে পাঠানো হয় তবে তার জন্য $\Delta q.\Delta v$ পরিমাণ কার্য করতে হবে। এতে পরিবাহী দুটির মধ্যে বিভব প্রভেদও বৃদ্ধি পাবে, যার ফলে আরও Δq পরিমাণ আধান আগের মতো স্থানান্তরিত করতে কার্যের পরিমাণ আরও বেশি হবে। ধারকটিকে এইভাবে আহিত করতে যে শক্তি ব্যয়িত হবে তা ধারকের স্থিতিশক্তি হিসাবে সঞ্চিত থাকবে। এখন এই শক্তির পরিমাণ নির্ণয় করা যাক।

ধরুন, যেকোন সময়ে ধারকটির পরিবাহীদ্বয়ের মধ্যে বিভব প্রভেদ V এবং এই অবস্থায় dq পরিমাণ আধান নেগেটিভ থেকে পজিটিভ পরিবাহীতে আনা হল। এজন্য যে কার্য করা হবে তার মান

$$dW = vdq = \frac{q}{c}dq \quad \text{কেননা } q = Cv \text{ ।}$$

সমাকলন করে মোট Q পরিমাণ আধান স্থানান্তরণ করতে কার্য

$$W = \int dw = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = Q^2/2C \qquad (5.7a)$$

ধারকটির চরম বিভব প্রভেদ V হলে

যেহেতু $Q = CV$, $W = \frac{1}{2}CV^2$ (5.7b)

$$= \frac{1}{2}Q.V \qquad (5.7c)$$

আহিত ধারকের শক্তির রাশিমালা 5.7 কে টান দেওয়া স্প্রিং -এর স্থিতিশক্তির রাশিমালায়, অর্থাৎ $\frac{1}{2}kx^2$ এর তুলনা করা যায় (k = স্প্রিং ধ্রুবক, x = স্প্রিং -এর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি)। লক্ষ্য করুন, আধান Q এর সঙ্গে তুলনীয় স্প্রিং -এর প্রসারণ এবং ধারকত্বের সঙ্গে তুলনীয় স্প্রিং -এর ধ্রুবকের অনোন্যক রাশি $\frac{1}{k}$।

শক্তির অবস্থান

শক্তির পরিমাণটি জানার পর আপনি প্রশ্ন করতে পারেন যে, এই স্থিতিশক্তি ধারকের কোথায় সঞ্চিত থাকে? আপনি দেখেছেন যে, প্রত্যেক ধারকেই সেটি আহিত হওয়ার ফলে অন্তরকটির মধ্যে একটি তড়িৎক্ষেত্রের সৃষ্টি হয়। ধারকের শক্তি এই তড়িৎক্ষেত্রের শক্তি হিসাবেই সঞ্চিত থাকে বলে ধরা যায়। সমান্তরাল পাত ধারকের উদাহরণটি নেওয়া যাক।

সমান্তরাল পাত ধারকের শক্তি

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0\varepsilon_r A} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon A}\left(\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r\right) = \frac{\sigma^2 Ad}{2\varepsilon} \quad (\text{কেননা } Q = \sigma A)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon E^2.Ad \; (\therefore E = \sigma/\varepsilon)$$

প্রান্তীয় ত্রুটি উপেক্ষা করলে ধারকটির দুই পাতের মধ্যে অন্তরকের আয়তন = $A.d$।

$\therefore$ শক্তির ঘনত্ব অর্থাৎ একক আয়তনে সঞ্চিত শক্তি $e = \frac{W}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$ (5.8)

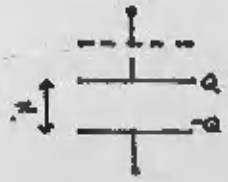
সমান্তরাল পাত ধারকের ক্ষেত্রে E এর মান পাত দুটির মধ্যে সর্বত্র সমান হওয়ায় শক্তির ঘনত্বও সমান থাকে। অন্য ধরনের ধারকে E এর মান অসমান হওয়ায় শক্তির ঘনত্ব e-ও সমান থাকে না। সেক্ষেত্রে ধারকের মোট শক্তি $\int e d\tau = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 d\tau$ রাশির সমান হয়, যেখানে সমাকলনটি ধারকের অন্তরকের সমগ্র আয়তনের উপর নেওয়া হয়।

সমান্তরাল পাত ধারকের পাত দুটির মধ্যে আকর্ষণ ঃ আমরা দেখেছি একটি আহিত ধারকের দুই পাতে বিপরীত চিহ্নের তড়িৎ আধান থাকে। স্বভাবতই পাত দুটি পরস্পরকে আকর্ষণ করে। সমান্তরাল পাত ধারকের ক্ষেত্রে পাতগুলির উপর আকর্ষণী বলের পরিমাণ সহজেই নির্ণয় করা যায়। তবে এক্ষেত্রে দুটি ভিন্ন অবস্থা বিবেচনা করা প্রয়োজন। পাতদুটির ব্যবধান অল্প পরিমাণ বৃদ্ধি করলে ধারকত্বও পরিবর্তিত হয়। ফলে আধান স্থির রাখলে বিভব প্রভেদে এবং বিভব প্রভেদ স্থির রাখল আধানে পরিবর্তন ঘটে। এই দুই ক্ষেত্রে ধারকের শক্তির পরিবর্তন ভিন্ন হয়, ফলে যে আকর্ষণী বলের বিরুদ্ধে কার্য করতে হয় তাও এক হয় না। এইজন্যই দুটি অবস্থার পৃথক পর্যালোচনা দরকার।

যখন আধান সমান থাকে ঃ ধারকটিকে আহিত করার পর পাতদুটি বিচ্ছিন্ন করে রাখলে আধান Q এবং তার তল ঘনত্ব σ স্থির থাকবে। ধারকের পাতদুটির ব্যবধান x হলে, ধারকটির শক্তি $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\varepsilon A}$ (5.1a অনুযায়ী, $C = \frac{\varepsilon A}{x}$) আকর্ষণী বল F_1 হলে পাতের ব্যবধান Δx পরিমাণে বাড়াতে $F_1\Delta x$ পরিমাণ কার্য করতে হবে। সুতরাং

$$F_1\Delta x = \Delta W = \frac{Q^2}{2\varepsilon A}.\Delta x$$

বা $$F_1 = \frac{Q^2}{2\varepsilon A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}.A = \frac{1}{2}\varepsilon E^2.A$$



(চিত্র 5.6 a)

$\therefore$ ধারকের একক ক্ষেত্রফল পিছু বল $= \frac{F_1}{A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$ 5.9

আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে, পাতের ব্যবধান বাড়ার ফলে ধারকটির স্থিতিশক্তি ΔW পরিমাণ বৃদ্ধি পেয়েছে। এখানে F বলের বিরুদ্ধে কৃতকার্য ধারকে স্থিতিশক্তি হিসাবে সঞ্চিত হয়েছে।

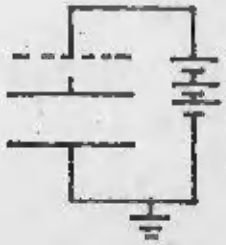
যখন বিভব প্রভেদ সমান থাকে : বিভব প্রভেদ সমান রাখতে হলে ধারকের পাত দুটি ব্যাটারির দুই প্রান্তের সঙ্গে যোগ করে রাখতে হবে। ধারকটির শক্তি $W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon A}{x}V^2$

$\therefore$ x এর Δx পরিবর্তন ঘটলে শক্তির পরিবর্তন

$$\Delta W = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon A}{x^2}V^2\Delta x$$

এখানে নেগেটিভ চিহ্নের অর্থ শক্তির হ্রাস। তবে কি স্থিতিশক্তির হ্রাস ঘটানোর জন্য ধারকের পাতদুটির ব্যবধান নিজে থেকেই বেড়ে যাবে? না, তা নয়। লক্ষ্য করুন যে, x এর বৃদ্ধির ফলে ধারকত্বের পরিবর্তন

$$\Delta C = \Delta\left(\frac{\varepsilon A}{x}\right) = -\frac{\varepsilon A}{x^2}\Delta x$$



(চিত্র 5.6b)

অর্থাৎ ধারকত্বের $\frac{\varepsilon\Delta}{x^2}\Delta x$ পরিমাণ হ্রাস ঘটে। এর ফলে $\Delta Q = \frac{\varepsilon AV}{x^2}\Delta x$ পরিমাণ আধান ব্যাটারিতে ফিরে যাবে, এবং তার জন্য $V\Delta Q = \varepsilon AV^2\Delta x/x^2$ পরিমাণ কার্য করতে হবে। সুতরাং আকর্ষণী বল F_2 হলে ধারকের পাতের ব্যবধান Δx পরিমাণ বাড়াতে মোট কার্য

$$F_2\Delta x = \Delta W + V\Delta Q$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon AV^2\Delta x/x^2 + \varepsilon AV^2\Delta x/x^2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon AV^2\Delta x/x^2$$

সুতরাং পাতদুটির মধ্যে আকর্ষণী বল $F_2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon AV^2}{x^2} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2.A$ এবং ধারকের একক ক্ষেত্রফল পিছু বল $= \frac{F_2}{A} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$ (5.10)

একটি উদাহরণ আপনাকে বিষয়টি বুঝতে সাহায্য করবে।

উদাহরণ — ধরা যাক একটি সমান্তরাল পাত ধারকের পাতের ক্ষেত্রফল $A = 100cm^2$ ব্যবধান $x = 1mm$ এবং তার অন্তরকটি বায়ু $(\varepsilon_r = 1)$

$$\therefore \text{ ধারকত্ব } C = \frac{\varepsilon_0 A}{x} = 8.854 \times 10^{-12} \times \frac{100 \times 10^{-4}}{10^{-3}}$$

$$= 88 \cdot 54 p^F$$

একটি ধারকটিকে 100V বিভবে আহিত করে বিচ্ছিন্ন রাখলে প্রতি পাতে আধানের পরিমাণ হবে $Q = 88 \cdot 5 \times 10^{-12} \times 100 = 8 \cdot 854 \times 10^{-9} C$

এবং তলঘনত্ব $\sigma = Q/A = 8 \cdot 85 \times 10^{-9}/10^{-2} = 8 \cdot 85 \times 10^{-7} cm^{-2}$ আধান স্থির থাকলে পাতের উপর আকর্ষণী বল $\frac{\sigma^2}{26}.A$

$$= \left(8 \cdot 85 \times 10^{-7}\right)^2 \times 10^{-2}/2 \times 8 \cdot 85 \times 10^{-12}$$

$$= 4 \cdot 43 \times 10^{-4} N$$

অপরপক্ষে, ধারকটিকে ব্যাটারির সঙ্গে যুক্ত রেখে বিভব স্থির রাখলেও পাতের উপর একই আকর্ষণী বল ক্রিয়া করবে।

এবার ধারকের শক্তির হিসাব করা যাক। ধরে নিন ধারকের পাত অন্তরিত রেখে একটি পাতকে 0·01 mm দূরত্ব টেনে আনা হল, যাতে ধারকদুটির ব্যবধান দাঁড়ায় 1·01 mm।

পাতটি সরানোর আগে ধারকটির শক্তি $\frac{Q^2}{2C} = \frac{\left(8 \cdot 854 \times 10^{-9}\right)^2}{2 \times 88 \cdot 54 \times 10^{-12}}$

$$= \cdot 4427 \mu J$$

পাতটি সরানোর পর ধারকত্ব $= 8\cdot854\times10^{-12}\times10^{-2}/\cdot00101$

$= 87\cdot62\text{pF}$

এবং ধারকটির শক্তি $= \dfrac{\left(8\cdot854\times10^{-9}\right)^2}{2\times87\cdot62\times10^{-12}} = \cdot4473\mu J$

লক্ষ্য করুন, আধান এক থাকায় এখন বিভব বেড়ে হয়েছে 101V । এবং পাতটি সরাতে কার্য করতে হয়েছে $0\cdot0046\mu J$ । অপরপক্ষে ধারকটি ব্যাটারির সঙ্গে যুক্ত রেখে একটি পাতকে 0·01mm টেনে পাতের ব্যবধান 1·01 mm করলে ধারকের প্রতি পাতে আধানের পরিমাণ দাঁড়াবে

$$87\cdot62\text{pF}\times100\text{V} = 8\cdot762\times10^{-9}\text{C}$$

অর্থাৎ $(8\cdot854-8\cdot762)\cdot10^{-9} = 0\cdot092\times10^{-9}\text{C}$ পরিমাণ

আধান ব্যাটারিতে ফিরে যাবে। এর জন্য যে কার্য করতে হবে তা হল $0\cdot092\times10^{-9}\text{C}\times100\text{V} = \cdot0092\mu J$ কিন্তু এখন ধারকের শক্তি $\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\times87\cdot62\times10^{-12}\times100^2$

$= 0\cdot4381\mu J$

অর্থাৎ ধারকটির শক্তি $0\cdot4427-0\cdot4381 = 0\cdot0046\mu J$ পরিমাণ হ্রাস পেয়েছে। সুতরাং ধারক ও ব্যাটারির শক্তি যৌথভাবে $\cdot0092-\cdot0046 = \cdot0046\mu J$ বৃদ্ধি পেয়েছে। সুতরাং ধারকের পাতটি ·01mm সরাতে এই পরিমাণ কার্য করতে হয়েছে।

ধারকে অন্তরকের ভূমিকা : আপনি আগে দেখেছেন সমান্তরাল পাত ধারকের ধারকত্ব $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{d}$ এবং শক্তি $W = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0\varepsilon_r A}$, যখন আধান Q সমান থাকে। এই দুটি সূত্র থেকে বোঝা যায় যে যখন বায়ু দ্বারা অন্তরিত সমান্তরাল পাত ধারকে বায়ুর জায়গায় ε_r আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতার কোন অন্তরক প্রবেশ করানো হয় তখন ধারকত্ব ε_r গুণ বর্ধিত হয় এবং ধারকের আধান সমান থাকলে শক্তি ε_r গুণ হ্রাস পায়। এই দুটি ঘটনার ভৌত কারণ অনুসন্ধান করা যাক।

5.7(a) চিত্রে একটি আহিত ধারক দেখানো হয়েছে, যার পাতগুলি অন্তরিত আছে। এখন পাতদুটির মধ্যে একটি অন্তরক ফলক প্রবেশ করানো হলে (চিত্র 5.7b) ফলকটির দুই তলে ধারকের পাতের বিপরীত

চিহ্নের আধান আবিষ্ট হবে। এর ফলে দুই পাতের মধ্যে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য ও বিভব প্রভেদ হ্রাস পাবে। যেহেতু ধারকত্ব বলতে আধান ও বিভব প্রভেদের অনুপাতকে বোঝায়, এতে ধারকত্ব বৃদ্ধি পাবে।

অন্তরকটি প্রবেশ করানোর ফলে ধারকের শক্তির হ্রাস হয় কেন? 5.7(c) চিত্রে দেখানো তড়িৎ বলরেখাগুলি লক্ষ করলে বুঝতে পারবেন যে, অন্তরক ফলকটি প্রবেশ করানোর সময় ধারকের পাতের আধান ও ফলকের আবিষ্ট আধানের মধ্যে কুলম্ব আকর্ষণ ক্রিয়া করে। এই আকর্ষণী বল কার্য করার ফলে ধারক-ফলক সমন্বয়ের স্থিতিশক্তির ক্ষয় হয় এবং এজন্যই ধারকের শক্তি হ্রাস পায়।

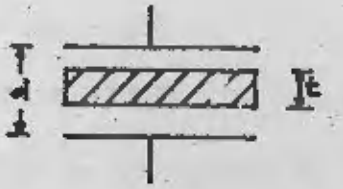
(চিত্র 5.7(a))

(চিত্র 5.7(b))

(চিত্র 5.7(c))

অনুশীলনী — 2

একটি সমান্তরাল পাত ধারকের পাতের ক্ষেত্রফল A, দুই পাতের মধ্যে ব্যবধান d এবং তাদের মধ্যে t বেধের একটি অন্তরক ফলক ঢোকানো আছে (চিত্র 5.8)। ধারকটিকে V বিভবে আহিত করে তার পাতগুলি অন্তরিত করা হল। এখন ফলকটিকে টেনে বার করতে কী পরিমাণ কার্য করতে হবে? অন্তরকটির আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা $= \varepsilon_r$।



(চিত্র 5.8)

5.5 সচরাচর ব্যবহৃত কয়েক ধরনের ধারক

বৈদ্যুতিক ও ইলেকট্রনিক বর্তনীতে ধারক একটি অতি প্রয়োজনীয় উপাংশ। ইতিমধ্যে 5.2.1 অংশে আপনি ধারকের নানা ব্যবহারের পরিচয় পেয়েছেন। গবেষণাগারে কাজের সুবাদে আপনাকেও বিভিন্ন ধরনের ধারক ব্যবহার করতে হবে। এই অংশে যে সব ধরনের ধারক বাণিজ্যিকভাবে পাওয়া যায় এবং বর্তনীতে ব্যবহৃত হয়, সেগুলি সম্বন্ধে আমরা সংক্ষিপ্ত আলোচনা করব। অন্তরক হিসাবে কী ধরনের বস্তু ব্যবহৃত হয় তার উপর নির্ভর করে ধারকের শ্রেণীবিভাগ করা হয়।

(i) কাগজ ও প্লাস্টিক-পর্দার ধারক : কাগজ ধারকে দুটি পাতলা টিনের পাতের মধ্যে টিসু কাগজ বা মোম মাখানো কাগজ থাকে। টিনের পাত ও কাগজ একত্রে পাকিয়ে প্লাস্টিকের আধারে ভরা হয় (চিত্র 5.9)। টিনের পাতের সংলগ্ন দুটি লীড্ (lead) তার আধার থেকে বেরিয়ে থাকে এবং সেগুলির সাহায্যে ধারকটিকে বর্তনীতে সংযুক্ত করতে হয়। কাগজের পরিবর্তে পলিয়েস্টার, মাইলার প্রভৃতি প্লাস্টিক পদার্থের পর্দাও ব্যবহৃত হয়।

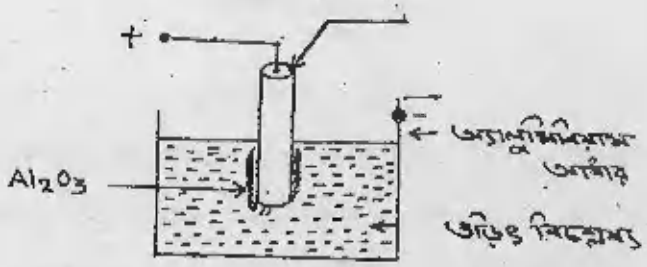
(চিত্র 5.9)

এ জাতীয় ধারক ·001μF থেকে কয়েক μF পর্যন্ত ধারকত্বের হয়ে থাকে। এগুলি প্রায় 2000V পর্যন্ত বিভব প্রভেদে কাজ করতে পারে। পরিবর্তী বিভবে ব্যবহৃত হলে কাগজ ধারকে অত্যধিক শক্তিক্ষয় হয় এবং কয়েক মেগাহার্ৎস্ -এর অধিক কম্পাঙ্কে এগুলি ব্যবহার করা যায় না। প্লাস্টিক পর্দার ধারকে অন্তরকের রোধ অপেক্ষাকৃত অধিক এবং শক্তিক্ষয় অপেক্ষাকৃত কম হয়।

(ii) অভ্রধারক (mica capcitors) : এই ধারকে পর পর রাখা কিছু সংখ্যক ধাতুর পাত মাঝখানে অভ্রের পাতলা পাত দিয়ে অন্তরিত অবস্থায় রাখা থাকে। একটি অন্তর ধাতুর পাতকে সংযুক্ত করে লীডের সঙ্গে যুক্ত করা হয় এবং সমগ্র ধারকটি প্লাস্টিক বা বেকেলাইটির আধারে আবদ্ধ থাকে। অভ্রধারকের ধারকত্ব সাধারণত 100 pF থেকে 0·05μF পর্যন্ত হয়ে থাকে। তবে এগুলি 500V পর্যন্ত বিভব প্রভেদে কাজ করে এবং এগুলিতে শক্তিক্ষয়ও কম হয়।

(iii) সেরামিক (ceramic) ধারক : সেরামিক হল কাচজাতীয় পদার্থ, যা অধাতব ও অজৈব পদার্থকে অতি উচ্চ উষ্ণতায় রেখে তৈরি করা হয়। সেরামিক বস্তুটিকে পাতলা চাকতি অথবা ফাঁপা নলের আকৃতিতে নিয়ে তার দুপাশে রূপার প্রলেপ দেওয়া হয়। এগুলিই ধারকের পাতের কাজ করে। এগুলির সঙ্গে লীড্ তারের সংযোগ করে সমগ্র ধারকটিকে জলনিরোধক আধারে আচ্ছাদিত রাখা হয়। টাইটানিয়াম ডাইঅক্সাইড (TiO_2) বা বেরিয়াম টাইট্যানেট ($BaTiO_3$) এর মতো যে সব সেরামিক পদার্থ ধারকের অন্তরক হিসাবে ব্যবহৃত হয় সেগুলির আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা খুব বেশি (100-1000) হয়, ফলে আকারে ছোট হলেও এ ধরনের ধারকের ধারকত্ব বেশি হয়। চাকতি আকৃতির সেরামিক ধারকের ধারকত্ব $0{\cdot}01\mu F$ পর্যন্ত এবং নলাকৃতির ধারকের ধারকত্ব 500 pF পর্যন্ত হয়ে থাকে। উপরন্তু, সেরামিক ধারকের শক্তিক্ষয় খুব কম হয় এবং এগুলি অতি উচ্চ বিভব সহ্য করতে পারে।

(iv) ইলেকট্রোলিটিক ধারক (electrolytic capacitor) : এ জাতীয় ধারকে পজিটিভ পাতটি একটি অ্যালুমিনিয়ামের চাদর এবং নেগেটিভ পাত হিসাবে থাকে অ্যালুমিনিয়াম বোরেট -এর একটি তড়িৎ বিশ্লেষ্য দ্রবণ। অ্যালুমিনিয়ামের পজিটিভ পাতের উপর মাত্র 10^{-6}cm এর মত বেধের একটি অ্যালুমিনিয়াম অক্সাইডের স্তর তৈরি হয় এবং এটিই ধারকের অন্তরক হিসাবে কাজ করে। তড়িৎবিশ্লেষ্যের সংলগ্ন অন্য একটি অ্যালুমিনিয়ামের পাত বা আধার নেগেটিভ পাতের সঙ্গে সংযোগ ঘটাতে ব্যবহার করা হয়। 5.10 চিত্রে এ ধরনের ধারকের গঠনটি দেখতে পাবেন।

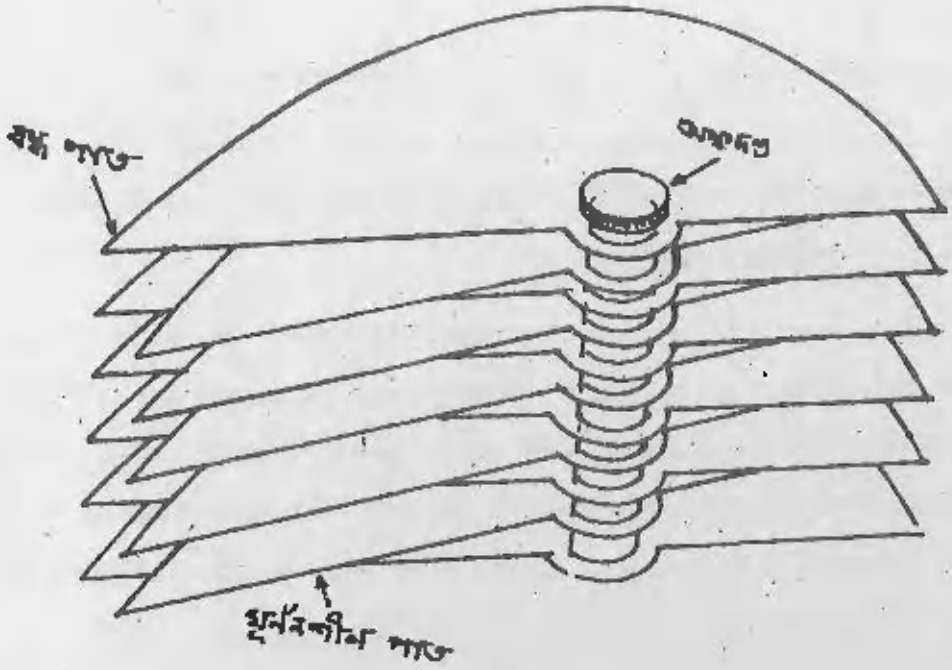


(চিত্র 5.10)

পজিটিভ পাতের উপর যে অক্সাইড স্তর থাকে তার রোধ খুব বেশি হলেও পাত দুটির বিভবের রদবদল ঘটলে অনেক কম হয়। এজন্য ইলেকট্রোলিটিক ধারক কেবলমাত্র একমুখী বিভব প্রভেদের ক্ষেত্রেই ব্যবহার করা যায়, অর্থাৎ পজিটিভ পাতটি সবসময় পজিটিভ বিভবে এবং নেগেটিভ পাতটি নেগেটিভ বিভবে রাখতে হয়। এ জাতীয় ধারকের আর একটি অসুবিধা এই যে এর ধারকত্বের মান সুস্থির থাকে না। অপরপক্ষে, ইলেকট্রোলিটিক ধারকের অন্তরকটি অত্যন্ত পাতলা হওয়ায় এগুলির ধারকত্ব খুব বেশি হয়।

এর মান $1\mu F$ থেকে প্রায় $10,000\mu F$ পর্যন্ত হতে পারে। এগুলি প্রায় 1000V পর্যন্ত বিভব প্রভেদে কাজ করতে পারে। এজন্য ভোল্টেজের অল্প ওঠানামা অপনয়নের জন্য এ জাতীয় ধারক মসৃণকারক (smoothing) ফিল্টার হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

(v) উপযোজনযোগ্য ধারক (Variable capacitor) : এ জাতীয় ধারকের ধারকত্ব অবিচ্ছিন্নভাবে উপযোজন (adjust) করা যায়। এগুলিতে পরস্পর সংযুক্ত একপ্রস্থ বদ্ধ ধাতব পাত এবং এই পাতগুলির অন্তর্বর্তী ফাঁকগুলির মধ্য দিয়ে চলাচলকারী আর একপ্রস্থ ঘূর্ণনশীল ধাতব পাত থাকে। ঘূর্ণনশীল পাতগুলি একটি অক্ষদণ্ডের সাহায্যে একত্রে ঘোরানো যায়। বাস্তবে এই ধারকটি অনেকগুলি সমান্তরাল পাত ধারকের সমান্তরাল সমবায় এবং ঘূর্ণনশীল পাতগুলিকে বদ্ধ পাতগুলির ফাঁকে ঢুকিয়ে ও বার করে ধারকগুলির পাতের ক্ষেত্রফল বাড়ানো কমানো যায়। পাতগুলির মধ্যেকার বায়ুই ধারকের অন্তরক হিসাবে কাজ করে।



(চিত্র 5.11)

রেডিও সেটের কম্পাঙ্ক উপযোজনে (tuning) এবং পরিবর্তী প্রবাহে ব্যবহৃত ব্রিজে উপযোজনযোগ্য ধারক ব্যবহৃত হয়। এগুলির ধারকত্ব সাধারণত যে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের মধ্যে উপযোজন করা যায় তাদের মধ্যে দশগুণের পার্থক্য থাকে (যেমন 50-500pF)।

এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী — 3

নিচের উক্তিগুলি সঠিক না ভুল তা পাশের জায়গায় লিখুন।

ক) ইলেকট্রোলিটিক ধারকের একটি পাত সর্বদা পজিটিভ ও অন্যটি সর্বদা নেগেটিভ রাখতে হয়।

খ) উচ্চ কম্পাঙ্কের পরিবর্তী বিভবে কাগজ ধারক ব্যবহার করা যায়।

গ) কোন কোন সেরামিক পদার্থের আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা খুব বেশি হওয়ায় সেগুলি ধারকের অন্তরক হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

ঘ) অভ্রধারকের ধারকত্ব সাধারণত ইলেকট্রোলিটিক ধারকের তুলনায় বেশি হয়।

ঙ) রেডিও রিসিভারে এক একটি স্টেশনের সম্প্রচার ধরার জন্য একটি উপযোজনযোগ্য ধারকের ধারকত্ব কমবেশি করতে হয়।

5.6 সারাংশ

এখন আপনি ধারক সম্বন্ধীয় এই এককটির শেষভাগে পৌঁছেছেন। এই এককে কী কী জানতে পারলেন সেগুলি একবার আলোচনা করে নেওয়া যাক।

প্রথমেই আমরা ধারক কাকে বলে এবং সাধারণভাবে ধারকের কার্য কী সেগুলি আলোচনা করেছি। ধারক বিভিন্ন আকৃতির হতে পারে। তার মধ্যে সমান্তরাল পাত, গোলকাকৃতি এবং বেলনাকৃতিই প্রধান। এই তিন আকৃতির ধারকের ক্ষেত্রে আমরা নির্দিষ্ট আধানের ফলে যে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য উৎপন্ন হয় তার রাশিমালাকে ধারকের এক পাত থেকে অন্য পাত পর্যন্ত পথ বরাবর সমাকলন করে দুই পাতের মধ্যে বিভব প্রভেদ নির্ণয় করেছি। আধান ও বিভব প্রভেদের অনুপাত থেকে ধারকের ধারকত্ব নির্ণয় করা হয়েছে।

আহিত ধারকে কিছু পরিমাণ স্থিতিশক্তি সঞ্চিত থাকে। এখানে এই স্থিতিশক্তির মান নির্ণয় করা হয়েছে এবং তার সাহায্যে সমান্তরাল পাত ধারকের দুই পাতের মধ্যে আকর্ষণের রাশিমালাটিও বার করা হয়েছে।

শেষে বৈদ্যুতিক ও ইলেকট্রনিক বর্তনীতে ব্যবহৃত হয় এমন কয়েক ধরনের ধারকের গঠন ও কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্মের বিবরণ দেওয়া হয়েছে।

5.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(i) ধারক কাকে বলে? একটিমাত্র পরিবাহীর ধারকত্ব বলতে কী বোঝায়? ধারকত্বের সঙ্গে অন্তরক মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতার সম্পর্ক কিরূপ?

(ii) একটি সমান্তরাল পাত ধারকের ধারকত্ব নির্ণয় করুন। আপনার গণনায় যে অঙ্গীকারটি স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে সেটির উল্লেখ করুন।

(iii) একটি গোলকাকৃতি ধারকে সমকেন্দ্রিক পরিবাহীদুটির ব্যাসার্ধ a ও b (b>a)। বাইরের গোলকটি ভূসংলগ্ন আছে। ধারকটির ধারকত্ব নির্ণয় করুন।

(iv) একটি গোলকাকৃতি ধারকের পরিবাহীদুটির ব্যাসার্ধ 3.9 cm ও 4.1 cm এবং তাদের মধ্যবর্তী অন্তরকের আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা 9.0। 5.2a সূত্র ব্যবহার করে ধারকত্ব নির্ণয় করুন। এবার ধারকটিকে সমান্তরাল পাত ধারক হিসাবে কল্পনা করে 5.1a সূত্র অনুযায়ী ধারকত্ব নির্ণয় করে কত শতাংশ ত্রুটি হয় সেটি বার করুন।

(v) একটি বেলনাকৃতি ধারকের ধারকত্ব নির্ণয় করুন। এরূপ একটি ধারকের দৈর্ঘ্য l, ব্যাসার্ধদ্বয় a ও b এবং অন্তরকের আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা $\varepsilon_r = \frac{k}{r}$ (k = ধ্রুবক) হয় তবে ধারকত্বের রাশিমালাটি নির্ণয় করুন।

(vi) C_1 ও C_2 ধারকত্বের দুটি ধারককে যথাক্রমে V_1 ও V_2 বিভবে আহিত করার পর তাদের অন্তরিত করে সমান্তরাল সমবায়ে যুক্ত করা হল। এতে কী পরিমাণ আধানের হস্তান্তর ঘটবে এবং কী পরিমাণ শক্তিক্ষয় হবে তা নির্ণয় করুন।

(vii) নিচের প্রশ্নগুলির সংক্ষিপ্ত উত্তর দিন :

ক) দিষ্ট প্রবাহ ও পরিবর্তী প্রবাহের ক্ষেত্রে ইলেকট্রোলিটিক ধারকের আচরণে কী প্রভেদ হয়?

খ) বেলনাকৃতি ধারকের ধারকত্ব কোন্ উপায়ে অবিচ্ছিন্নভাবে পরিবর্তন করা যায়?

গ) ধারকের অন্তরক হিসাবে টাইটানিয়াস ডাইঅক্সাইডের মতো সেরামিক পদার্থ ব্যবহারের সুবিধা কী?

ঘ) ইলেকট্রোলিটিক ধারকের প্রধান সুবিধা কী?

5.8 উত্তরমালা

অনুশীলনী — 1

(i) $A = C\frac{d}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = 10^{-6} \times 0{\cdot}5 \times 10^{-3} / 8{\cdot}854 \times 10^{-12} \times 3{\cdot}0$

$= 18{\cdot}8 m^2$

(ii) ধারকত্ব $= 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a} + c\right)$, যেখানে

$a = 2{\cdot}0$ cm, $b = 2{\cdot}2$ cm, $c = 2{\cdot}5$ cm

$\therefore C = \frac{1}{9 \times 10^9}\left(\frac{2{\cdot}0 \times 2{\cdot}2}{2{\cdot}2 - 2{\cdot}0} + 2{\cdot}5\right) \times 10^{-2}$

$= 2{\cdot}72 \times 10^{-11}$ F বা $27{\cdot}2$ pF

$\therefore$ আধান $= 27{\cdot}2 \times 10^{-12} \times 500 = 1{\cdot}36 \times 10^{-8}$ C

(iii) মিটার পিছু ধারকত্ব $= 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r / \ell_n \frac{b}{a}$

$= \frac{\varepsilon_r}{2} . 4\pi\varepsilon_0 / \ell_n \frac{b}{a}$

$= \frac{2}{2} . \frac{1}{9 \times 10^9} / \ell_n \frac{5}{3}$

$= 56{\cdot}8 pF / m$

অনুশীলনী — 2

এই ধারকের ক্ষেত্রে বিভব প্রভেদ

$V = \int_0^{d} E dz = \frac{\sigma t}{\varepsilon_0\varepsilon_r} + \frac{\sigma(d-t)}{\varepsilon_0}$, কেননা সমাকলনটির মধ্যে t দৈর্ঘ্যের জন্য আপেক্ষিক

আবেশ্যতা $= \varepsilon_r$ বাকি $d - t$ দৈর্ঘ্যের জন্য এটির মান 1।

$$\therefore V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[d + t\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\right]$$

$$\therefore C = \frac{\sigma A}{V} = \varepsilon_0 A \Big/ \left[d + t\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\right]$$

অপরপক্ষে অন্তরক ফলকটি বার করে নেওয়ার পর ধারকত্ব $C' = \varepsilon_0 A/d$

$\therefore$ ফলকটি বার করে নেওয়ার ফলে শক্তির বৃদ্ধি

$$\Delta W = \frac{Q^2}{2C'} - \frac{Q^2}{2C}, \text{ (যেখানে } Q = CV\text{)}$$

$$= \frac{Q^2}{2}\left[\frac{d}{\varepsilon_0 A} - \frac{d + t\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)}{\varepsilon_0 A}\right]$$

$$= \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\, t\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{C^2V^2}{2\varepsilon_0 A}\, t\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

ফলকটি টেনে বার করতে এই পরিমাণ কার্য করতে হবে। এটি একটি পজিটিভ রাশি কেননা $\varepsilon_r > 1$।

অনুশীলনী — 3

(ক) ঠিক (খ) ভুল (গ) ঠিক (ঘ) ভুল (ঙ) ঠিক।

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(i) 5.2 অংশে এই প্রশ্নটির উত্তর পাবেন। লক্ষ্য করুন, বিভব প্রভেদ অন্তরকের আবেশ্যতার ব্যস্তানুপাতী, সুতরাং ধারকত্ব মাধ্যমের আবেশ্যতার সমানুপাতী।

(ii) 5.3 অংশে প্রশ্নটির উত্তর দেওয়া আছে। এখানে ধরে নেওয়া হয়েছে যে পাতগুলির ব্যবধান যথেষ্ট ক্ষুদ্র, যাতে প্রান্তীয় ত্রুটি উপেক্ষা করা যায়।

(iii) 5.3 এর (ii) অংশের এই প্রশ্নের উত্তর দেওয়া আছে। (iv) 5.2a সূত্র অনুযায়ী,

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r ab}{b-a} = \frac{1}{9\times10^9}\times 9\cdot0\times\frac{3\cdot9\times4\cdot1\times10^{-4}}{(4\cdot1-3\cdot9)\times10^{-2}}$$

$$= 7\cdot995\times10^{-10}\,F$$

সমান্তরাল পাত ধারক হিসাবে ধারকত্ব নির্ণয় করতে হলে পাতের ক্ষেত্রফল গড় ব্যাসার্ধের গোলকের তলের ক্ষেত্রফল বলে ধরা যেতে পারে। পাত দুটির ব্যবধান 4·1-3·9=0·2 সেমি।

$$\therefore \text{ ধারকত্ব } \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{d} = \frac{1}{36\pi\times10^9}\times 9\times\frac{4\pi(\cdot04)^2}{\cdot2\times10^{-2}}$$

$$= 8\times10^{-10}\,F$$

$\therefore$ ত্রুটি $= \cdot005\times10^{-10}\,F$ যা মোট ধারকত্বের ·06 শতাংশ।

(v) প্রথম অংশের উত্তর 5·3 (iii) অংশে পাবেন। আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা $\varepsilon_r = \frac{k}{r}$ বেলনাকৃতি ধারকের ক্ষেত্রে $V = -\int \vec{E}.\vec{dr}$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{\varepsilon_r r}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi k\varepsilon_0}\int_b^a dr \qquad = \frac{\lambda}{2\pi k\varepsilon_0}(b-a)$$

$\therefore$ একক দৈর্ঘ্য পিছু ধারকত্ব $C = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi k\varepsilon_0}{b-a}$

(vi) আহিত করার পর ধারকদুটির উপর আধান C_1V_1 ও C_2V_2

$\therefore$ মোট আধান $Q = C_1V_1 + C_2V_2$

ধারক দুটি সমান্তরাল সমবায়ে যোগ করার পর মোট ধারকত্ব $C_1 + C_2$। সুতরাং অন্তিম বিভব $V = Q/(C_1 + C_2) = (C_1V_1 + C_2V_2)/(C_1 + C_2)$

$\therefore$ হস্তান্তরিত আধান $\Delta Q =$ প্রথম ধারকের অন্তিম আধান —প্রাথমিক আধান

$$= C_1V - C_1V_1$$

$$= \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}.C_1 - C_1V_1$$

$$= C_1^2V_1 + C_1C_2V_2 - C_1^2V_1 - C_1C_2V_1/(C_1 + C_2)$$

$$= C_1C_2(V_2 - V_1)$$

শক্তিক্ষয়ের পরিমাণ, ΔW

= প্রাথমিক অবস্থায় মোট শক্তি — অন্তিম অবস্থায় মোট শক্তি

$$= \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2$$

$$= \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 - \frac{1}{2}(C_1V_1 + C_2V_2)^2/(C_1 + C_2)$$

$$= \frac{1}{2(C_1 + C_2)}\left[C_1^2V_1^2 + C_2^2V_2^2 + C_1C_2V_2^2 + C_1C_2V_1^2 - \left(C_1^2V_1^2 + C_2^2V_2^2 + 2C_1C_2V_1V_2\right)\right]$$

$$= \frac{C_1C_2}{2(C_1+C_2)}(V_1 - V_2)^2$$

লক্ষ্য করুন, V_1 অথবা V_2 যেটিই বড় হোক না কেন, ΔW সর্বদাই পজিটিভ।

(vii) (ক) দিষ্ট প্রবাহে পজিটিভ পাতটি যখন পজিটিভ দিকের সঙ্গে বর্তনীতে যুক্ত হয় তখন অন্তরক স্তরটি প্রকৃত তড়িৎ-অপরিবাহী হিসেবে কাজ করে এবং ধারকটি কার্যকরী থাকে। যদি দিষ্ট প্রবাহে পজিটিভ পাতটি নেগেটিভ দিকে যুক্ত হয় তখন অন্তরক স্তরের রোধ কম হয়, ধারকের মধ্য দিয়ে তড়িৎ প্রবাহ ঘটার ফলে সেটি উত্তপ্ত হয় এবং তড়িৎবিশ্লেষ্যে গ্যাস উৎপন্ন হওয়ার ফলে ধারকটি ফেটে যায়। পরিবর্তী প্রবাহেও প্রতি পর্যায়চক্রের অর্ধেক সময়ে পজিটিভ পাতটি নেগেটিভ বিভবে থাকে এবং একই কারণে ধারকটি কার্যকরী থাকে না।

(খ) বাইরের বেলনটির মধ্যে ভিতরের বেলনটি ক্রমশ ঢুকিয়ে বা বার করে ধারকত্ব বাড়ানো বা কমানো যায়। এক্ষেত্রে 5.6 সূত্রের l রাশিটির বৃদ্ধি বা হ্রাস ঘটে।

(গ) টাইট্যানিয়াস ডাইঅক্সাইড, বেরিয়াম টাইট্যানেট প্রভৃতি কিছু সেরামিক পদার্থের আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা খুব বেশি হয়। অন্তরক হিসাবে এগুলি ব্যবহার করলে ধারকের আকার ছোট রেখেও ধারকত্ব তুলনামূলকভাবে বেশি করা যায়।

(ঘ) ইলেকট্রোলিটিক ধারকের প্রধান সুবিধা এই যে, এগুলির অন্তরক স্তর অত্যন্ত পাতলা। যার ফলে এগুলির ধারকত্ব খুব বেশি হয়। এগুলির ধারকত্ব কয়েক হাজার μF হতে পারে, যা অন্য কোন শ্রেণীর ধারকের পক্ষে সম্ভব হয় না।

একক 6 ❑ অন্তরক ও তার আণুবীক্ষণিক ধর্ম

গঠন :

6.1 প্রস্তাবনা
উদ্দেশ্য

6.2 পদার্থের প্রকারভেদ

6.3 মেরুভবন

6.4 অন্তরকের উপস্থিতিতে গাউস উপপাদ্য

6.5 অন্তরকের তলে প্রযোজ্য সীমাশর্ত

6.6 অন্তরকের অভ্যন্তরে গহ্বরে তড়িৎক্ষেত্র

6.7 আণবিক ও পারমাণবিক মেরু প্রবণতা

6.8 অন্তরক পদার্থের কয়েকটি বিশেষ ধর্ম

6.9 সারাংশ

6.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

6.11 উত্তরমালা

6.1 প্রস্তাবনা

স্থির তড়িৎ সম্বন্ধীয় যে এককগুলি আপনি আগে পড়েছেন সেগুলিতে অন্তরক পদার্থের বাহ্যিক ধর্মের সঙ্গে আপনি কিছুটা পরিচিত হয়েছেন। আপনি দেখেছেন যে মাধ্যমটি শূন্য না হয়ে অন্তরক পদার্থ হলে কোন তড়িৎ আধানের ফলে উৎপন্ন তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য অপেক্ষাকৃত কম হয়। ধারকের দুই পরিবাহীর মধ্যেকার মাধ্যমটি অন্তরক পদার্থ হলে তার ফলে ধারকত্ব বেশি হয়। এই এককে আমরা তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবে অন্তরক পদার্থের মধ্যে কী ঘটে সেটির পর্যালোচনা করব। এজন্য আমাদের অন্তরক পদার্থের আণবিক গঠন ও এ জাতীয় পদার্থের অণুর মধ্যে সমপরিমাণে পজিটিভ ও নেগেটিভ তড়িৎ আধানের অবস্থানের দিকে দৃষ্টি দিতে হবে। অন্তরক পদার্থগুলিকে দ্বিতড়িতীয় বা (ইংরাজীতে dielectric) নামে উল্লেখ করা হয়। এই আলোচনার মাধ্যমে অন্তরক পদার্থকে 'dielectric' নামে অভিহিত করার কারণটি স্পষ্ট হবে। আপনি নিশ্চয়ই আগের এককে লক্ষ্য করেছেন যে আমরা সবসময়েই

তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য E রাশিটির উল্লেখ করেছি। অন্তরক পদার্থের উপর তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবে তার মধ্যে আণবিক স্তরে যে পরিবর্তন হয় তাকে আমরা মেরুভবন বা পোলারাইজেশন (Polarisation) বলি। এই এককে আমরা অন্তরকের মধ্যে মেরুভবন ও আবদ্ধ আধানের উদ্ভব সম্বন্ধে আলোচনা করব এবং গাউসের উপপাদ্যের সরলীকরণের জন্য একটি নূতন তড়িতীয় ভেক্টর রাশি $\vec{D}$, তড়িতীয় বিচ্যুতি (displacement) ভেক্টর-এর উপস্থাপনা করব।

এছাড়া এই এককে দুই বিভিন্ন মাধ্যমের সীমায় তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য ও বিচ্যুতি যে সীমাশর্তগুলি পালন করে সেগুলির আলোচনা করা হবে। পরবর্তী এককগুলিতে এই সীমাশর্তগুলি আপনার কাজে লাগবে।

উদ্দেশ্য :

এই এককটির মাধ্যমে আপনি অন্তরক পদার্থের আণুবীক্ষণিক ও সামগ্রিক ধর্মের সঙ্গে পরিচিত হবেন। এর ফলে আপনি

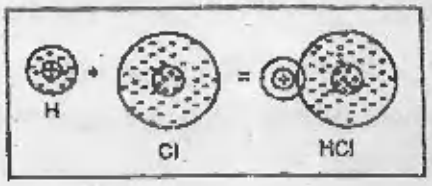
- পোলার ও অ-পোলার অন্তরকের মধ্যে পার্থক্য নির্দেশ করতে পারবেন।
- মেরুভবন ঘটনাটির ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং মেরুভবনের ফলে উদ্ভূত আবদ্ধ আধানের অস্তিত্ব গাণিতিকভাবে দেখাতে পারবেন।
- তড়িতীয় বিচ্যুতি (Electric displacement) ভেক্টরটির ধারণা প্রস্ফুটিত করতে পারবেন এবং এই ভেক্টর রাশির মাধ্যমে অন্তরকের ক্ষেত্রে গাউসীয় উপপাদ্য বিবৃত করতে পারবেন।
- দুই অন্তরকের সীমান্ততলে প্রযোজ্য সীমাশর্তগুলি নির্ণয় করতে পারবেন।
- অন্তরক পদার্থের মধ্যে বিভিন্ন আকৃতির গহ্বরে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য নির্ণয় করতে পারবেন।
- আণবিক মেরুপ্রবণতার সঙ্গে আপেক্ষিক আবেশ্যতার সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন এবং
- অন্তরক পদার্থের কয়েকটি বিশেষ ধর্মের বিবরণ দিতে পারবেন।

6.2 পদার্থের প্রকারভেদ

আমরা প্রতিদিনের অভিজ্ঞতায় যে সব বস্তুর সংস্পর্শে আসি সেগুলির অধিকাংশকেই দুটি শ্রেণীতে ভাগ করা যায়। এগুলি হল পরিবাহী ও অন্তরক। পরিবাহীর মধ্যে এমন অসংখ্য ইলেকট্রন থাকে যেগুলি কোন বিশেষ পরমাণুর মধ্যে আবদ্ধ নয়। এগুলি সমগ্র পরিবাহী বস্তুটির মধ্যে যথেচ্ছভাবে ঘুরে বেড়ায়। সমস্ত ধাতুই এই ধরনের আচরণ করে এবং ধাতুর মধ্যে পরমাণু পিছু একটি বা দুটি এজাতীয় মুক্ত ইলেকট্রন থাকে। অন্তরক পদার্থ এ দিক দিয়ে একেবারেই আলাদা। অন্তরকের মধ্যে কোন ইলেকট্রনই মুক্ত নয়, প্রতি ইলেকট্রনই নিজ নিজ অণু বা পরমাণুর সঙ্গে আবদ্ধ। তবে অন্তরকের মধ্যে ইলেকট্রনগুলি অণুর মধ্যে অল্পস্বল্প নড়াচড়া করতে পারে, যার ফলে অন্তরক পদার্থের মোট নেগেটিভ আধান পজিটিভ আধানের সাপেক্ষে অল্পপরিমাণে বিচ্যুত হতে পারে। আবার কোন কোন অন্তরকের অণুগুলি মোটের উপর আধানহীন হলেও সেগুলির পজিটিভ ও নেগেটিভ আধানের কেন্দ্র একই বিন্দুতে থাকে না, ফলে অণুগুলি এক একটি তড়িৎ-দ্বিমেরুর (electric dipole) মত আচরণ করে। অণুর ধর্ম অনুযায়ী আমরা অন্তরকের শ্রেণীবিভাগ করে থাকি। এগুলি হল পোলার (polar) ও অপোলার (non-polar) অন্তরক। এবার এগুলি সম্বন্ধে সংক্ষিপ্ত আলোচনা করা যাক।

6.2.1 পোলার অন্তরক

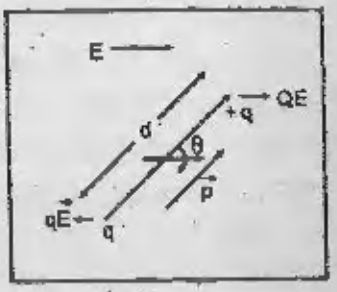
যে অন্তরক পদার্থ কোন তড়িৎক্ষেত্রে না থাকলেও তার অণুর একটি স্থায়ী তড়িতীয় দ্বিমেরু ভ্রামক (electric dipole moment) থাকে সেগুলিকে পোলার অন্তরক বলে। একটি উদাহরণের সাহায্যে এটি বুঝে নেওয়া যাক। একটি হাইড্রোজেন পরমাণু বা একটি ক্লোরিন পরমাণুতে যথাক্রমে একটি ও সতেরোটি ইলেকট্রন থাকে। দুই পরমাণুতে ইলেকট্রনের বিন্যাস এমন, যে নিউক্লিয়াসের পজিটিভ আধান এবং ইলেকট্রনের নেগেটিভ আধানের কেন্দ্র একই বিন্দুতে অবস্থিত হয় (চিত্র ৬.১)। কিন্তু পরমাণু দুটি যখন যুক্ত হয়ে হাইড্রোক্লোরিক অ্যাসিডের অণু $HC\ell$ গঠন করে তখন হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রনটি ক্লোরিন পরমাণুর আশপাশে চলে যায়। $HC\ell$ অণুর হাইড্রোজেন প্রান্তটি পজিটিভ আধানে এবং ক্লোরিন প্রান্তটি নেগেটিভ আধানে আহিত হয় এবং অণুটি একটি তড়িৎ-দ্বিমেরুতে পরিণত হয়। পোলার অণুর আরও কয়েকটি উদাহরণ হল জল (H_2O), অ্যামোনিয়া (NH_3), হাইড্রোজেন সালফাইড (H_2S) ও কার্বন ডাইসালফাইড (CS_2)। বিভিন্ন পোলার অণুর দ্বিমেরু ভ্রামক $(1-20) \times 10^{-30}$ c.m এর মত হয়ে থাকে।



চিত্র 6.1

তড়িৎক্ষেত্রে পোলার অণু :

পোলার অণুকে সুষম তড়িৎক্ষেত্রে ($\vec{E}$) রাখা হলে উহার অক্ষকে তড়িৎক্ষেত্র বরাবার স্থাপিত করে। এই সাম্যাবস্থা উহার দুই প্রান্তের আধান $+q$ ও $-q$ এর উপর সমান ও বিপরীত মুখী বল $+qE$ ও $-qE$ এর জন্য (6.2a)। এখন পোলার অণুর অক্ষ তড়িৎ ক্ষেত্র $\vec{E}$ এর সঙ্গে θ কোণে থাকলে উহার প্রান্তীয় আধান $+q$ ও $-q$ এর প্রযুক্ত বল $+qE$ ও qE সমান, সমান্তরাল ও বিপরীতমুখী। ইহার ফলে পোলার অণুর উপর মোট বল শূন্য হলেও একটি যুগ্মবল ক্রিয়া করে যার ভ্রামক ঐ অণুকে তড়িৎ ক্ষেত্রের দিক বরাবর প্রতিস্থাপিত করার চেষ্টা করে। এই যুগ্ম বলের বাহুদৈর্ঘ্য $d \sin\theta$ (চিত্র 6.2b)। 'd' আধানদ্বয় $+q$ ও $-q$ এর মধ্যে দূরত্ব।



চিত্র 6.2

$\therefore$ যুগ্মবলের ভ্রামকের মান $\tau = qE \cdot d \sin\theta = pE \sin\theta$

যেখানে $p = qd$

ভেক্টর চিহ্নে $\tau = \vec{p} \times \vec{E}$ ------ (6.1)

অর্থাৎ $\vec{p}$ রাশিটি একটি ভেক্টর রাশি যাহার দিক $-q$ ও q সংযোজক রেখা বরাবর এবং ইহাকে দ্বিমেরু ভ্রামক বলা হয়।

তড়িৎক্ষেত্রের মধ্যে অণুটির স্থিতিশক্তির মান নির্ণয় করা যাক। যখন $\theta \frac{\pi}{2}$, তখন স্থিতিশক্তির মান শূন্য ধরে নিলে স্থিতিশক্তি

$$U = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} pE \sin\theta \, d\theta = -pE\cos\theta = -\vec{P} \cdot \vec{E} \quad \text{.....} \quad (6.2)$$

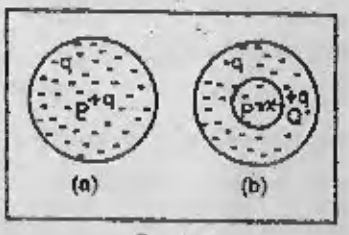
পোলার অণুকে তড়িৎক্ষেত্রে রাখলে কী ঘটে সেটি এবার আপনি বুঝতে পারবেন। অণুটির উপর কার্যকরী বলযুগ্ম সেটিকে তড়িৎক্ষেত্র বরাবর অভিমুখী করার চেষ্টা করে। তবে অণুর তাপজ এলোমেলো গতির ফলে এই অভিমুখীকরণ কখনই সম্পূর্ণ হয় না। তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য যত বেশি এবং উষ্ণতা যত কম হয়, অণুগুলি তত বেশি তড়িৎক্ষেত্র অভিমুখী হয়ে থাকে। মোটের উপর এই অভিমুখীকরণের ফলে সমগ্র অন্তর তড়িৎ দ্বিমেরুতে পরিণত হয়, যার দ্বিমেরু ভ্রামক আণবিক দ্বিমেরুগুলির ভ্রামকের তড়িৎক্ষেত্র বরাবর উপাংশগুলির যোগফল।

এই প্রসঙ্গে যেটি মনে রাখা দরকার তা হল তড়িৎক্ষেত্র প্রয়োগের পর পোলার অণুগুলির অভিমুখীকরণ স্থির অবস্থায় পৌঁছাতে কিছুটা সময় লাগে। আবার তড়িৎক্ষেত্রটি অপসারণ করলেও অভিমুখীকরণ সম্পূর্ণ তিরোহিত হতে কিছুটা সময় নেয়। এর ফলে অতি উচ্চকম্পাঙ্কের পরিবর্তী তড়িৎক্ষেত্র প্রয়োগ করলে পোলার অন্তরকের অণুগুলি সমতালে ঘূর্ণিত হতে পারে না। এজন্য অন্তরকের সামগ্রিক আচরণও প্রভাবিত হয়।

6.2.2 অ-পোলার অন্তরক

যে সব অন্তরকের অণুর কোন স্থায়ী দ্বিমেরু ভ্রামক নেই, সেগুলিকেই আমরা অ-পোলার অন্তরক বলি। তড়িৎক্ষেত্রের অনুপস্থিতিতে এ ধরনের অন্তরকের কোন দ্বিমেরু ভ্রামক না থাকলেও তড়িৎক্ষেত্রে স্থাপিত হলে এর অণুগুলি এবং সমগ্র অন্তরকটি দ্বিমেরুতে পরিণত হয়। এর কারণ একটি সহজ চিত্র থেকে বোঝা যাবে। অপোলার অন্তরকের উদাহরণ H_2, N_2, CO_2 ও $CC\lambda_4$।

ধরুন একটি পরমাণুতে +q আধানের নিউক্লিয়াস a ব্যাসার্ধের ও – q আধানের ইলেকট্রন-মেঘের কেন্দ্রস্থলে P বিন্দুতে আছে (চিত্র 6.3a)। পজিটিভ ও নেগেটিভ আধান বণ্টনের কেন্দ্র দুটি একই বিন্দুতে থাকায় এক্ষেত্রে পরমাণুটির কোন দ্বিমেরুত্ব নেই। পরমাণুটিকে E প্রাবল্যের তড়িৎক্ষেত্রে রাখা হলে (চিত্র 6.3b) ধরে নিন, নিউক্লিয়াসটি নেগেটিভ আধান বণ্টনের কেন্দ্র P বিন্দুর সাপেক্ষে x পরিমাণ বিচ্যুত হয়ে Q বিন্দুতে গেল। ধরে নেওয়া যাক, নেগেটিভ আধান – q ইলেকট্রন মেঘের মধ্যে সমভাবে বণ্টিত আছে। P বিন্দুকে কেন্দ্র করে PQ = x ব্যাসার্ধ নিয়ে যদি একটি গোলক কল্পনা করা যায় তবে নিউক্লিয়াসটি এই গোলকের উপর অবস্থিত হবে। গোলকের বাইরে যে গোলকটি থাকবে তার নেগেটিভ আধান নিউক্লিয়াসের উপর কোন বল প্রয়োগ করবে না। কিন্তু গোলকের মধ্যস্থ আধান নিউক্লিয়াসকে P বিন্দুর দিকে আকর্ষণ করবে। এই বলের পরিমাণ বার করা যাক।



চিত্র 6.3

ইলেকট্রন মেঘের আধান-ঘনত্ব $\rho = -q / \frac{4}{3}\pi a^3$

গোলকের মধ্যস্থ আধান $= \rho . \frac{4}{3}\pi x^3 = -qx^3/a^3$

$\therefore$ নিউক্লিয়াসের উপর আকর্ষণী বল $= (q^2x^3/a^3)/4\pi\epsilon_0 x^2$

$= q^2x/4\pi\epsilon_0 a^3$

এই বল তড়িৎপ্রাবল্য E থেকে উৎপন্ন qE বল দ্বারা প্রতিমিত হয়, সুতরাং $qE = q^2x/4\pi\epsilon_0 a^3$

বা $qx = 4\pi\epsilon_0 a^3 E$ 6.3

পরমাণুর পজিটিভ ও নেগেটিভ কেন্দ্রদ্বয় পরস্পরের সাপেক্ষে বিচ্যুত হওয়ার ফলে তার দ্বিমেরু ভ্রামক উৎপন্ন হয়। যার মান আধান × বিচ্যুতি $= p_a = qx$ ।

∴ 6.3 থেকে, $P_a = 4\pi\epsilon_0 a^3 E$

লক্ষ্য করুন, পরমাণুর দ্বিমেরু ভ্রামক তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের সমানুপাতী। একক প্রাবল্যে উৎপন্ন দ্বিমেরু ভ্রামক, অর্থাৎ

$$\alpha = p_a / E = 4\pi\epsilon_0 a^3 \qquad 6.4$$

রাশিটিকে পারমাণবিক মেরু প্রবণতা (atomic polarisability) বলা হয়।

মোটের উপর পোলার অন্তরক এবং অ-পোলার অন্তরক, এই দুই ধরনের অন্তরকের উপর তড়িৎক্ষেত্র আরোপিত হলে কোন প্রক্রিয়ায় সেগুলির মধ্যে দ্বিমেরুত্ব উৎপন্ন হয়, তা আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন। এবার আমরা দ্বিমেরুত্ব আরোপের ফলে অন্তরকের সার্বিক ভৌত আচরণ কেমন হয় সেটি আলোচনা করব।

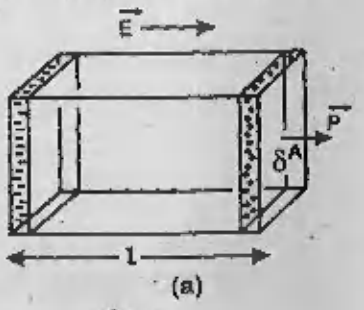
6.3 মেরুভবন (Polarisation)

কোন অন্তরক পদার্থকে যখন তড়িৎক্ষেত্রের মধ্যে রাখা হয় তখন তার প্রতিটি অণু-ই দ্বিমেরুতে পরিণত হয়। উপরন্তু পদার্থটি পোলার অন্তরক হলে অণুগুলি কিছুটা তড়িৎক্ষেত্র অভিমুখী হয়। এই দুই প্রক্রিয়ার ফলে তড়িৎক্ষেত্র $\vec{E}$ অভিমুখে প্রত্যেক অণুর যে গড় দ্বিমেরু ভ্রামক উৎপন্ন হয় তাকে আমরা আণবিক মেরুভবন বলি ও $\vec{p}$ দ্বারা নির্দেশ করি। যদি একক আয়তনে n সংখ্যক অণু থাকে তবে

$$\vec{P} = n\vec{p}$$

রাশিটি একক আয়তনপিছু অন্তরকের দ্বিমেরু ভ্রামক বোঝায়। এই রাশিটিকে আমরা অন্তরকের মেরুভবন বলি। আপনি সহজেই দেখাতে পারবেন যে মেরুভবনের একক c/m^2 $(c.m/m^3)$ ।

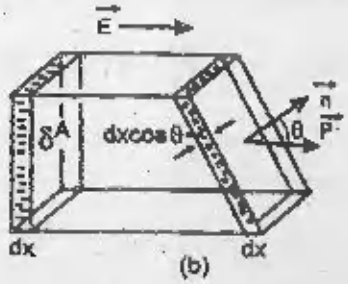
মেরুভবনের এককটি থেকে আপনার মনে হতে পারে যে এই রাশির সঙ্গে আধানের তল ঘনত্বের কোন সম্পর্ক আছে। আপনার সন্দেহ অমূলক নয়। দেখা যাক, মেরুভবনের ফলে অন্তরকের উন্মুক্ত তলে কী পরিমাণ আধান দেখা দেয়। ধরা যাক l দৈর্ঘ্য ও δA প্রস্থচ্ছেদের একটি আয়তফলককে সেটির দৈর্ঘ্য বরাবর $\vec{E}$ তড়িৎক্ষেত্রে রাখা হল (চিত্র 6.4a)। মেরুভবনের ফলে আয়তফলকের দুই প্রান্তে তড়িৎক্ষেত্রের অভিলম্ব তল দুটিতে $+\sigma_b$ ও $-\sigma_b$ তল ঘনত্বের আবিষ্ট আধান দেখা দেবে। তবে অন্তরকের অভ্যন্তরে পজিটিভ ও নেগেটিভ আধান পরস্পরকে প্রশমিত করবে। দুই প্রান্তে মোট আধান যথাক্রমে $\sigma_b \delta A$ ও $-\sigma_b \delta A$ এবং তাদের ব্যবধান l, সুতরাং আয়তফলকের দ্বিমেরু ভ্রামক $\sigma_b \delta Al$। আবার, যেহেতু আয়তফলকের আয়তন Al, তার মোট দ্বিমেরু ভ্রামক $P\delta Al$। সুতরাং



চিত্র 6.4a

$$\sigma_b \delta Al = p\delta Al, \text{ বা } \sigma_b = P, \text{ অর্থাৎ,}$$

তড়িৎক্ষেত্রের অভিলম্বতলে আবিষ্ট আধানের তলঘনত্বের মান মেরুভবন ভেক্টরের মানের সমান। লক্ষ্য করুন, যে অন্তরকের নেগেটিভ ও পজিটিভ আধানগুলির পারস্পরিক সরণ যদি δx হয় তবে $\sigma_b\ \delta A = \rho\ \delta x \delta A$, যেখানে ρ = আধানের আয়তন ঘনত্বের মান। এর থেকে বোঝা যায় যে $\sigma_b = \rho\ \delta x$।



চিত্র 6.4b

প্রশ্ন উঠতে পারে, δA তলটি $\vec{p}$ এর অভিলম্ব না হলে মেরুভবনের দরুন আধানের ঘনত্ব কত হবে। 6.4b চিত্রে $\vec{p}$ এবং δA তলের অভিলম্বের মধ্যে কোণ θ। এক্ষেত্রে তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবে অন্তরকের পজিটিভ ও নেগেটিভ আধানের পারস্পরিক সরণ δx হলেও $\delta A \times \delta x \cos\theta$ আয়তনের অন্তর্গত আধানগুলি অন্তরকের উন্মুক্ততলে দেখা দেবে। এই আধানের মান $\rho\ .\ \delta A \delta x \cos\theta = \sigma_b \cos\theta\ .\ \delta A$। অর্থাৎ মেরুভবনজনিত আধানের তলঘনত্ব $\sigma \cos\theta$ বা $P \cos\theta$।

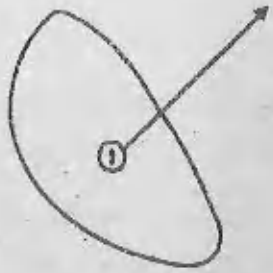
সহজেই বোঝা যায় যে δA তলের উপর $\vec{p}$ মেরুভবনের ফলে যে আধান দেখা দেয় তার মান $\vec{p}\ .\ \delta\vec{A}$ এবং এই আধানের তল ঘনত্ব $\sigma_b = \vec{p}.\vec{n}$ যেখানে $\vec{n}$ হল $\delta\vec{A}$ এর অভিলম্ব একক ভেক্টর।

মেরুভূত অন্তরকের দ্বারা উৎপন্ন তড়িৎক্ষেত্র :

আরোপিত তড়িৎক্ষেত্রের ফলে কোন অন্তরকে যখন মেরুভবন ঘটে তখন ঐ অন্তরকটির মধ্যে দ্বিমেরু উৎপন্ন হয়। এই দ্বিমেরুগুলি নিশ্চয়ই একটি নিজস্ব তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন করে। এই তড়িৎক্ষেত্রের বিভবের মান নির্ণয়ের চেষ্টা করা যাক।

আপনি জানেন যে $\vec{p}$ দ্বিমেরু ভ্রামকের একটি তড়িৎ দ্বিমেরু মূলবিন্দুতে অবস্থিত হলে $\vec{r}$ অবস্থানে Q বিন্দুতে যে বিভব উৎপন্ন হয় তার মান

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{\hat{r}.\vec{p}}{r^2} \qquad 6.5$$



চিত্র 6.5

যেহেতু অন্তরকের মধ্যে S বিন্দুতে অতিক্ষুদ্র আয়তন $d\tau$ মেরু ভবনের ফলে $\vec{p}d\tau$ দ্বিমেরু ভ্রামক লাভ করে, সমগ্র অন্তরকের জন্য তড়িৎ বিভব

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \int_\tau \frac{\vec{p}.\hat{r}}{r^2}\, d\tau \qquad 6.6$$

যেখানে সমাকলনটি অন্তরকের সমগ্র আয়তনের ওপর নেওয়া হয়েছে। কিন্তু লক্ষ্য করুন যে

$$\nabla = \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\hat{r}}{r^2},$$

যেখানে ∇ অপারেটরের অন্তর্গত অবকলনগুলি S বিন্দুর স্থানাঙ্কগুলির সাপেক্ষে নেওয়া হয়েছে। এই সূত্র ব্যবহার করে 6.6 থেকে পাওয়া যায় :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\tau \vec{p} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_\tau \nabla \cdot \left(\frac{\vec{p}}{r}\right) d\tau - \int_\tau \frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{p} \right] d\tau$$

$$\left[\text{কেননা } \nabla \cdot \frac{\vec{p}}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)(\nabla \cdot \vec{p}) + \vec{p} \cdot \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{r} \vec{p} \cdot d\vec{S} - \int_\tau \frac{1}{r} (\nabla \cdot \vec{p}) \, d\tau \qquad 6.7$$

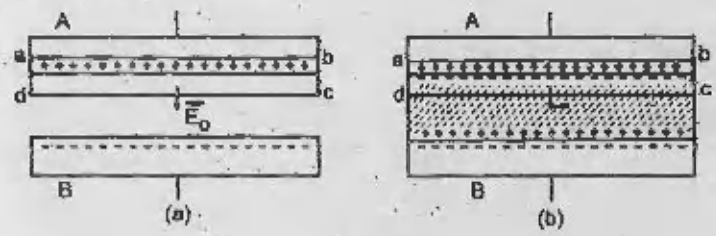
এখানে প্রথম সমাকলনটি অন্তরকের বাইরের তলের উপর নিতে হবে। আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে এখানে আমরা ডাইভারজেন্স্ উপপাদ্যের সাহায্য নিয়ে আয়তন সমাকলনকে তল-সমাকলনে রূপান্তরিত করেছি। V এর রাশিমালায় যে দুটি পদ রয়েছে তার প্রথমটি $\sigma_b = \vec{p} \cdot \hat{n}$ তল ঘনত্বের আধান থেকে উদ্ভূত বিভব। এর পরিচয় আপনি আগেই পেয়েছেন। কিন্তু দ্বিতীয় পদটি অন্তরকের সমগ্র আয়তনে বিস্তৃত $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{p}$ আয়তন ঘনত্বের আধান থেকে উৎপন্ন। এই আয়তনীয় আধানটি আমাদের নজর এড়িয়ে গিয়েছিল কেননা আমরা $\vec{p}$ এর মান অন্তরকের মধ্যে সর্বত্র সুষম ধরেছিলাম, যার ফলে অন্তরকের বহিস্তল ছাড়া অন্যত্র $+\rho$ ও $-\rho$ আয়তন ঘনত্বের আধান পরস্পরকে প্রশমিত করেছিল। এক্ষেত্রে $\nabla \cdot \vec{p}$ এর মানও অন্তরকের মধ্যে সর্বত্র শূন্য হয়।

আবদ্ধ আধান (Bound charge) :

আমরা লক্ষ্য করেছি, মেরুভবনের ফলে অন্তরকের মধ্যে এবং বহিস্তলে কিছু আধান দেখা দেয়। এই আধানগুলি নিজ নিজ পরমাণু বা অণুর সঙ্গে বদ্ধ অবস্থায় থাকে, অন্তরকের মধ্যে ইতস্তত ঘুরে বেড়াতে পারে না, যার জন্য এই আধানগুলি কোন স্থির তড়িৎপ্রবাহ উৎপন্ন করতে পারে না। এজন্য এই আধানগুলিকে আবদ্ধ আধান বলা হয়। পরিবাহীর মধ্যে যে মুক্ত আধানগুলি যত্রতত্র ভ্রমণ করে তড়িৎপ্রবাহ সৃষ্টি করতে পারে সেগুলি থেকে আবদ্ধ আধানগুলি ভিন্ন চরিত্রের। আরোপিত তড়িৎক্ষেত্রটি সরিয়ে নিলে আবদ্ধ আধানগুলি সাধারণত অতিক্রান্ত পজিটিভ ও নেগেটিভ আধানের মিলন দ্বারা অপসৃত হয়।

6.4 অন্তরকের উপস্থিতিতে গাউস উপপাদ্য

আপনি এর আগেই গাউসের উপপাদ্যের সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন। এবার আমরা অন্তরক মাধ্যমে গাউসের উপপাদ্যের প্রয়োগ করব। 6.6 (a) ও (b) চিত্র দুটিতে একটি সমান্তরাল পাত ধারক দেখানো হয়েছে। A ও B ধারকটির দুটি পাত, প্রতিটির ক্ষেত্রফল S।



চিত্র 6.6

(a) চিত্রে ধারকের পাত দুটির মধ্যবর্তী মাধ্যম শূন্য কিন্তু (b) চিত্রে মাধ্যমটি একটি অন্তরক। ধরা যাক উভয় ক্ষেত্রেই ধারকটি আহিত করার ফলে পজিটিভ ও নেগেটিভ পাতে যথাক্রমে + q ও – q আধান জমা হয়েছে। পজিটিভ পাতের আধান + q কে বেষ্টন করে একটি গাউসীয় তল abcd নেওয়া হল যার ab ও cd তল ধারকের পাতের সমান্তরাল এবং অন্য তলগুলি পাতের অভিলম্ব।

ধারকের মাধ্যমটি যখন শূন্য (চিত্র a) তখন দুই পাতের মধ্যে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য E_0 হলে abcd তলে গাউসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাওয়া যায়

$$\int \vec{E}_0 \, d\vec{S} = q/\epsilon_0$$

বা

$$E_0 \cdot S = q/\epsilon_0 \qquad \ldots 6.8$$

লক্ষ্য করুন যে কেবলমাত্র cd তলেই গাউসীয় সমাকলনটির অ-শূন্য মান পাওয়া যায়।

ধারকের পাত দুটির মধ্যে যখন একটি অন্তরক রাখা হয়েছে (চিত্র b) তখন মেরুভবনের ফলে অন্তরকের পাত সংলগ্ন দুই প্রান্তে আবদ্ধ আধান উৎপন্ন হবে। ধরা যাক ধারকের পজিটিভ পাতের সংলগ্ন প্রান্তে মোট আবদ্ধ আধান $-q'$। এক্ষেত্রে অন্তরকের মধ্যে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য $\vec{E}$ হল পূর্বের মত abcd তলে গাউসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পারেন

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S = (q - q')/\epsilon_0 \qquad \ldots 6.9$$

6.8 ও 6.9 থেকে

$$E = q/\epsilon_0 S - q/\epsilon_0 S$$

$$= E_0 - q/\epsilon_0 S \qquad \ldots 6.10$$

অর্থাৎ অন্তরকের উপর আধান q ধারকের পাতদুটির মধ্যে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যে হ্রাস ঘটিয়েছে। যদি অন্তরক ছাড়া এবং অন্তরকের উপস্থিতিতে ধারকের বিভবপ্রভেদ যথাক্রমে Vo ও V হয় তবে $\frac{E_0}{E} = \frac{V_0}{V}$ = অন্তরকের আপেক্ষিক আবেশ্যতা k। যেহেতু E <Eo, k রাশির মান 1 অপেক্ষা বড়।

যেহেতু $E = E_0/k = q/k\epsilon_0 . S$

6.10 থেকে $q/k\epsilon_0 . S = q/\epsilon_0 S - q'/\epsilon_0 S$

বা, $q' = q\,(1 - 1/k)$ ... 6.11

লক্ষ্য করুন q' এর মান q এর চেয়ে ছোট।

6.9 সমীকরণটিকে এখন লিখতে পারেন

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q - q' = q/k$$

বা $\epsilon_0 \oint k\vec{E}\cdot d\vec{S} = q$ 6.12

অন্তরকের মধ্যে প্রয়োগ করার জন্য 6.12 সমীকরণটিই গাউসের উপপাদ্যের সুবিধাজনক রূপ। এখানে k রাশিটিকে সমাকলের অন্তর্ভুক্ত করার ফলে সমীকরণটির ডানদিকে অন্তরকে আবিষ্ট আবদ্ধ আধানগুলিকে লিখতে হয়নি। $\epsilon_0 k$ রাশিটিকে অন্তরক মাধ্যমে আবেশ্যতা (permittivity) বলা হয় এবং ϵ দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

আগের অনুচ্ছেদে অন্তরকের দুই তলে যে $-q'$ ও q' আধানের কথা বলা হয়েছে সেগুলির তলঘনত্ব যথাক্রমে $-\sigma_b = -p$ এবং $\sigma_b = p$ অর্থাৎ $q' = p \cdot S$। সুতরাং 6.10 সমীকরণ থেকে

$$E = kE - p/\epsilon_0$$

বা $$\epsilon_0 kE = \epsilon_0 E + p$$

E এবং P রাশিগুলি আসলে ভেক্টর রাশি। সুতরাং সমীকরণটিকে লেখা যায় :

$$\epsilon_0 k\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}\ ।$$ ... 6.13

6.13 সমীকরণের ডানদিকের ভেক্টর রাশিটিকে ম্যাক্সওয়েল তড়িতীয় বিচ্যুতি (electric displacement), বা, $\vec{D}$ নামে অভিহিত করেন। 6.12 সমীকরণটিকে এখন লিখতে পারেন :

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S} = q$$

লক্ষ্য করুন, সাধারণভাবে $q = \oint_v \rho_f dV$, যেখানে ρ_f = মুক্ত আধানের আয়তন ঘনত্ব এবং সমাকলনটি সমগ্র গাউসীয় আয়তনের উপর নেওয়া হয়েছে। তলীয় সমাকলনটিকে $\int \nabla \cdot \vec{D} \cdot d\tau$ হিসাবে লিখে আপনি দেখাতে পারেন

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$ ... 6.14

যেটি অন্তরকের মধ্যে গাউস উপপাদ্যের ভেক্টর রূপ।

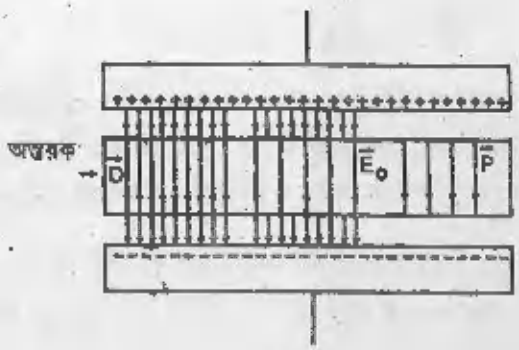
6.13 সমীকরণকে এভাবেও লেখা যায় :

$$\vec{P} = \epsilon_0 (k-1)\vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}\hat{A}$$ ... 6.15

যেহেতু $k > 1$, $\chi = k - 1$ রাশিটি ধনাত্মক। এটিকে তড়িতীয় প্রবণতা (susceptibility) বলা হয়।

6.13 সমীকরণটিকে $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ রূপে লিখলে, $\vec{D}$, $\vec{E}$ ও $\vec{P}$ রাশি তিনটির পারস্পরিক সম্পর্ক সুস্পষ্ট হয়। তড়িতীয় বিচ্যুতি $\vec{D}$-এর মান কেবলমাত্র মুক্ত আধানের উপর নির্ভর করলেও $\vec{E}$ ও $\vec{P}$ ভেক্টরগুলি মুক্ত ও আবদ্ধ দুই ধরনের আধানের উপরই নির্ভর করে। 6.7 চিত্রে একটি আহিত সমান্তরাল পাত ধারক দেখানো হয়েছে যার অন্তর্বর্তী মাধ্যমটি আংশিকভাবে একটি অন্তরক দ্বারা পূর্ণ। চিত্রে তীরচিহ্নযুক্ত রেখার সাহায্যে $\vec{D}$, $\epsilon_0\vec{E}$ ও $\vec{P}$ ভেক্টরগুলির দিক ও মান বোঝানো হয়েছে। সমদৈশিক অন্তরকের ক্ষেত্রে মেরুভবন ভেক্টর $\vec{P}$ ও তড়িতীয় বিচ্যুতি ভেক্টর $\vec{D}$ উভয়ই প্রাবল্য $\vec{E}$ এর সমান্তরাল। অর্থাৎ $\vec{D} = k\vec{E}$, k রাশিমালাটি একটি স্কেলার রাশি। কোয়ার্জ বা

ঐ জাতীয় অসমদৈশিক অন্তরকের ক্ষেত্রে সাধারণত $\vec{D}$, $\vec{P}$, ও $\vec{E}$ সমান্তরাল হয় না। সেক্ষেত্রে k একটি টেনসর রাশিমালা হয়।



চিত্র 6.7

অনুশীলনী 1

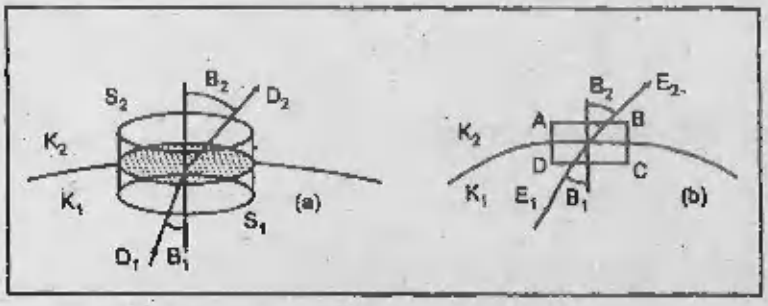
i) অ্যামোনিয়া গ্যাসের (NH_3) অণুর H - N - H কোণটি 107°। এর থেকে অ্যামোনিয়া গ্যাস পোলার না অ-পোলার তা বোঝা যায় কি?

ii) অন্তরক মাধ্যমের ক্ষেত্রে গাউস উপপাদ্যে $\vec{E}$ ভেক্টরের পরিবর্তে $\vec{P}$ ভেক্টর ব্যবহার করার সুবিধা কী?

6.5 অন্তরকের তলে প্রযোজ্য সীমাশর্ত

দ্বিতীয় তড়িৎবিদ্যার আলোচনায় আপনি এমন অবস্থার সম্মুখীন হতে পারেন, যেখানে শূন্য মাধ্যম বা একটি অন্তরক অন্য অন্তরকের সংলগ্ন অবস্থায় আছে। দুই মাধ্যমের মধ্যবর্তী সীমান্তে $\vec{E}$ এবং $\vec{D}$ ভেক্টরের উপাংশগুলি কেমন আচরণ করে, ভৌত অবস্থার বিশ্লেষণের জন্য তা আমাদের জানা দরকার।

(i) ধরা যাক পরস্পর সংলগ্ন দুই অন্তরকের আপেক্ষিক আবেশ্যতা k_1 ও k_2। মাধ্যমদ্বয় আলাদাভাবে সুষম ও সমদৈশিক। অন্তরক দুটির সীমান্ততলে δS একটি অতি ক্ষুদ্র তল। ক্ষুদ্র হওয়ার ফলে সীমান্ততলটি বক্র হলেও δS কে সমতল ধরা যেতে পারে। δS এর দুই পাশে তড়িতীয় বিচ্যুতির মান $\vec{D}_1$ ও $\vec{D}_2$ এবং δS এর অভিলম্বের সঙ্গে $\vec{D}$ ভেক্টরের কোণ যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 ধরা যাক।



চিত্র 6.8

এবার অত্যন্ত অল্প উচ্চতার এমন একটি বেলন কল্পনা করুন যেটি সীমান্ততলকে δS তলে ছেদ করে। বেলনের উপর ও নীচের সমতল প্রান্তগুলি δS এর সমান্তরাল এবং সেগুলির ক্ষেত্রফল δS এর সমান। উচ্চতা অতি অল্প হওয়ার ফলে বেলনের বক্রতলটির ক্ষেত্রফল উপেক্ষা করা যায়। এখন আমরা বেলনের তলগুলির উপর গাউসের উপপাদ্য প্রয়োগ করব :

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

(কেননা বক্রতলের উপর সমাকলনের মান শূন্য)

$$= -D_1\,\delta S\cos\theta_1 + D_2\delta S\cos\theta_2$$

$= 0$, কেননা δS তলে বা বেলনের মধ্যে অন্যত্র কোন মুক্ত আধান নেই।

সুতরাং $D_1\cos\theta_1 = D_2\cos\theta_2$ অর্থাৎ $D_{1n} = D_{2n}$ ... 6.16

যেখানে D_{1n}, D_{2n}, হল $\vec{D}_1$ ও $\vec{D}_2$ এর অভিলম্বীয় উপাংশ। 6.16 শর্তটির অর্থ এই যে অন্তরকের সীমান্ততলে কোন মুক্ত আধান না থাকলে বিচ্যুতি ভেক্টর $\vec{D}$ এর অভিলম্ব উপাংশ সীমান্ততলে সন্তত থাকে।

(ii) এবার আমরা তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য সংক্রান্ত সীমাশর্ত নির্ণয় করব। এজন্য Δl দৈর্ঘ্য ও অতি অল্প প্রস্থের একটি আয়তাকার পথ ABCD কল্পনা করা যাক, যার AB ও CD বাহুগুলি সীমান্ততলের সমান্তরাল এবং AD ও BC ঐ তলের অভিলম্ব। E_1 ও E_2 প্রথম ও দ্বিতীয় মাধ্যম তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য এবং θ_1 ও θ_2 সীমান্ততলের অভিলম্বের সঙ্গে সেগুলির কোণ।

এখন যদি একটি একক মানের আধানকে ABCDA পথে চালনা করা হয় তবে মোট যে কার্য করা হবে তা হল

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = E_2\sin\theta_2\cdot\Delta\ell - E_1\sin\theta_1\cdot\Delta\ell$$

$$= (E_2\sin\theta_2 - E_1\sin\theta_1)\cdot\Delta\ell$$

কিন্তু বলক্ষেত্রটি সংরক্ষী হওয়ায় বদ্ধ পথে এই কার্যের মান শূন্য। সুতরাং

$$E_1\sin\theta_1 = E_2\sin\theta_2$$

বা $E_{1t} = E_{2t}$ ... 6.17

যেখানে E_{1t} ও E_{2t} যথাক্রমে E_1 ও E_2 এর স্পার্শক উপাংশ। এর অর্থ, অন্তরকের সীমান্ততলে তড়িৎ প্রাবল্যের স্পার্শক উপাংশ সন্তত থাকে।

এখানে মনে রাখা প্রয়োজন যে ABCDA পথের সঙ্গে যদি কোন পরিবর্তনশীল চৌম্বক ক্ষেত্রের ফ্লাক্স শৃঙ্খলিত থাকে তাহলে তন্ত্রটি সংরক্ষী থাকে না এবং 6.17 সূত্রটি সেক্ষেত্রে সত্য হয় না। এক্ষেত্রে আমরা এই প্রভাব অনুপস্থিত বলে ধরে নিয়েছি।

তড়িৎ বলরেখার প্রতিসরণ :

6.16 ও 6.17 সূত্রটিকে একত্রিত করে আপনি তড়িৎ বলরেখার প্রতিসরণের সূত্র পেতে পারেন।

6.16 থেকে $D_1\cos\theta_1 = D_2\cos\theta_2$

বা $k_1\epsilon_0 E_1\cos\theta_1 = k_2\epsilon_0 E_2\cos\theta_2$

বা $k_1 E_1\cos\theta_1 = k_2 E_2\cos\theta_2$ ... 6.18 (a)

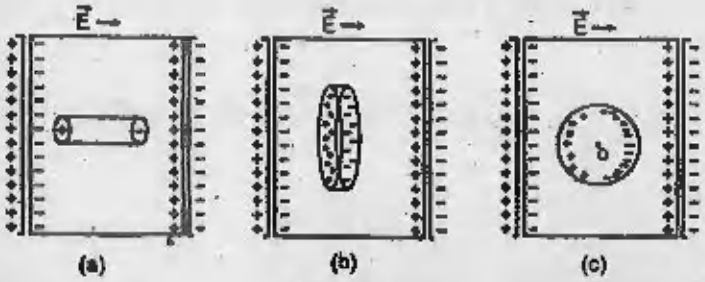
আবার 6.17 থেকে $E_1\sin\theta_1 = E_2\sin\theta_2$ ... 6.18 (b)

6.18(a) থেকে সমীকরণের দুই দিককে 6.18(b) সমীকরণের দুই দিক দিয়ে ভাগ করে,

$$k_1 \cot\theta_1 = k_2 \cot\theta_2 \qquad \ldots 6.19$$

এটিই তড়িৎ বলরেখার প্রতিসরণের সূত্র। লক্ষ্য করুন, $k_2 > k_1$ হলে $\cot\theta_1 > \cot\theta_2$, বা $\theta_2 > \theta_1$। অর্থাৎ দ্বিতীয় মাধ্যম প্রথম মাধ্যম অপেক্ষা অধিক আবেশ্যতা বিশিষ্ট হলে বলরেখাগুলি দ্বিতীয় মাধ্যমে সীমান্ততলের অভিলম্ব থেকে দূরে সরে যাবে। আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে এটি আলোকরশ্মি প্রতিসরণ থেকে বিপরীত চরিত্রের।

6.6 অন্তরকের অভ্যন্তরে গহ্বরে তড়িৎক্ষেত্র



চিত্র 6.9

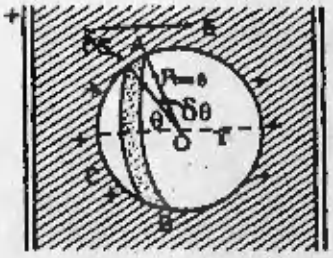
আগের অনুচ্ছেদগুলি থেকে আপনি অন্তরকে মেরুভবনের প্রভাব সম্বন্ধে ধারণা লাভ করেছেন। তড়িৎক্ষেত্রে রাখা অন্তরকের মধ্যে তড়িৎক্ষেত্রের অনুসন্ধান করার জন্য আমরা প্রথমে অন্তরকের অভ্যন্তরে একটি এমন গহ্বর কল্পনা করব যার আকার অন্তরক বস্তুটির তুলনায় অতিক্ষুদ্র। আবার অন্তরকের অণুর তুলনায় অতি বৃহৎ। দেখা যায় যে এ জাতীয় গহ্বরের মধ্যে তড়িৎক্ষেত্রের মান গহ্বরের আকৃতির উপর নির্ভর করে। আমরা এখানে তিন ধরনের আকৃতির গহ্বরের কথা বিবেচনা করব — সূচী-আকৃতি, চাকতি আকৃতি ও বর্তুল আকৃতি।

সূচী - আকৃতি গহ্বর : ধরে নিন সুষম তড়িৎক্ষেত্রে রাখা একটি অন্তরকের মধ্যে একটি সূচী আকৃতির গহ্বরে রয়েছে [চিত্র 6.9(a)] যার দৈর্ঘ্য তড়িৎক্ষেত্রের সমান্তরাল এবং ব্যাস দৈর্ঘ্যের তুলনায় অতি অল্প। $\vec{E}$ তড়িৎক্ষেত্রে অন্তরকটির মেরুভবনের ফলে গহ্বরটির প্রান্তে A ও B তলে আবদ্ধ আধান আবিষ্ট হবে। কিন্তু ঐ তলদুটির ক্ষেত্রফল অত্যন্ত ক্ষুদ্র হওয়ায় আবদ্ধ আধানের পরিমাণ এবং সেগুলির জন্য গহ্বরের মধ্যে উৎপন্ন তড়িৎক্ষেত্র নগণ্য হবে। আবার C তলটি যেহেতু তড়িৎক্ষেত্রের সমান্তরাল, ঐ তলে কোন আধান আবিষ্ট হবে না। মোটের উপর সূচী আকৃতি গহ্বরের ভিতর অন্তরকের মেরুভবনের ফলে কোন বাড়তি তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন হবে না এবং গহ্বরের মধ্যে তড়িৎক্ষেত্র E_c বাইরের তড়িৎক্ষেত্রের সমান, অর্থাৎ $\vec{E}$ হবে।

চাকতি - আকৃতির গহ্বর : এবার ধরুন অন্তরকের মধ্যে গহ্বরটি চাকতি আকৃতির, অর্থাৎ তার ব্যাসের তুলনায় বেধ অত্যন্ত ক্ষুদ্র [চিত্র 6.9(b)]। গহ্বরের সমতল প্রান্ত A ও B বাইরের তড়িৎক্ষেত্র $\vec{E}$ এর অভিলম্ব। বক্রতলটি তড়িৎক্ষেত্রে সমান্তরাল হওয়ায় সেটির উপর কোনও আধান আবিষ্ট হবে না। কিন্তু A ও B প্রান্তে যথাক্রমে + p ও − p তলঘনত্বের আধান আবিষ্ট হবে। এই পর্যায়েই আপনি দেখেছেন যে কোন একটি সমতলে σ তলঘনত্বের আধান থাকলে সমতলের খুব কাছে $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ পরিমাণের তড়িৎ প্রাবল্য উৎপন্ন হয়। এক্ষেত্রেও গহ্বরের মধ্যে কোন

বিন্দুতে A তলে আবিষ্ট আধানের জন্য $\frac{P}{2\epsilon_o}$ এবং B তলে আবিষ্ট আধানের জন্য $\frac{P}{2\epsilon_o}$ তড়িৎ প্রাবল্য উৎপন্ন হবে। যেগুলি উভয়ই $\vec{E}$ এর অভিমুখে হবে। সুতরাং গহ্বরের মধ্যে তড়িৎক্ষেত্রের মোট প্রাবল্য হবে

$$\vec{E}_c = \vec{E} + \frac{\vec{p}}{2\epsilon_o} + \frac{\vec{p}}{2\epsilon_o} = \vec{E} + \vec{p}/\epsilon_o$$



(d)

চিত্র 6.9 (d)

সুতরাং গহ্বরের মধ্যে তড়িৎ বিচ্যুতি $\vec{D} = \epsilon_o \vec{E}_c = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$ ...6.20

6.13 সমীকরণে আপনি দেখেছেন যে অন্তরকের মধ্যে তড়িৎ বিচ্যুতির মান-এর সমান।

বর্তুলাকৃতি গহ্বর : অন্তরকের মধ্যে r ব্যাসার্ধের একটি বর্তুলাকৃতি গহ্বর করা যাক যার কেন্দ্র O [চিত্র 6.9c]। গহ্বরের আকার অন্তরক বস্তুর তুলনায় ক্ষুদ্র হলেও অন্তরকের অণুর তুলনায় খুবই বড়। অন্তরকের মধ্যে তড়িতের ক্ষেত্র প্রাবল্য E. সেক্ষেত্রে O বিন্দুতে একটি একক ধনাত্মক আধান বসাইলে উহার উপর বল E' অর্থাৎ ঐ বিন্দুতে প্রাবল্য $E' = E + E_p$.

E_p = গহ্বরের ভিতরের তলে আবিষ্ট আধানের জন্য তড়িৎ প্রাবল্য।

Ep নির্ণয়ের জন্য 6.9(d) চিত্রের মত একটি গোলীয় নির্দেশ তন্ত্র কল্পনা করা যাক যাহার A বিন্দুতে একটি অনুতল ds। $\vec{P}$ মেরু ভরন ভেক্টর হইলে অন্তরকের প্রান্ততলে যে আবদ্ধ আধান আবিষ্ট হয় তার তলঘনত্ব $\sigma = \vec{p} \cdot \hat{n}$ যেখানে $\hat{n}$ = তলের অভিলম্ব ভেক্টর [6.3 অনুচ্ছেদ]। অতএব ds অণুতলে আবিষ্ট আধানের পরিমাণ

$$dq = \sigma\, ds = \vec{p} \cdot \hat{n}\, ds = p ds \cos\theta$$

এই আধানের জন্য O বিন্দুতে তড়িৎ প্রাবল্য

$$dE'_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{P ds \cos\theta}{r^2}$$

আমরা অবশ্য এর সেই উপাংশটি নেব যেটি $\vec{E}$ এর সমান্তরাল, কেননা প্রতিসাম্যের ফলে $\vec{E}$ এর অভিলম্ব উপাংশগুলির যোগফল শূন্য হবে। সমান্তরাল উপাংশটি হল :

$$dE_p = dE'_p \cos\theta = \frac{p ds \cos^2\theta}{4\pi\epsilon_o r^2}$$

$d\vec{s}$ অণুতলটি গহ্বরের তলে O বিন্দু সাপেক্ষে θ ও θ + dθ কোণের মধ্যে ধরে নিলে $ds = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta$

অর্থাৎ $dE_p = \frac{P \cdot 2\pi r^2 \sin\theta \cdot \cos^2\theta\, d\theta}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{P}{2\epsilon_o} \sin\theta \cos^2\theta\, d\theta.$

dE_p রাশিকে $\theta = O$ থেকে $\theta = \pi$ সীমায় সমাকলন করে

$$E_p = \frac{P}{2\epsilon_o}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta = \frac{P}{2\epsilon_o}\cdot\frac{2}{3} = \frac{P}{3\epsilon_o} \qquad \ldots 6.21$$

সুতরাং গহ্বরের কেন্দ্রে মোট প্রাবল্য $E' = E + E_p$

$$= E + P/3\epsilon_o \qquad \ldots 6.22$$

সাধারণ ভাবে অন্তরকটিকে একটি সমান্তরাল পাত ধারকের মধ্যে রাখলে, অন্তরকের মধ্যস্থিত গহ্বরের কেন্দ্রে তড়িৎ ক্ষেত্র প্রাবল্য

$$E_m = E_o + E_i + E_p$$

যেখানে E_o = সমান্তরাল পাত ধারকের দুটি পাতকে আহিত করে পাওয়া তড়িৎ ক্ষেত্র প্রাবল্য।

E_i = অন্তরকের বাহিরের তলে যে আবদ্ধ আধান আবিষ্ট হল তার জন্য তড়িৎ প্রাবল্য

E_p = গহ্বরের ভিতরের তলে আবিষ্ট আধানের জন্য ক্ষেত্রপ্রাবল্য। পাত ধারকের আধানের জন্য সৃষ্ট তড়িৎপ্রাবল্য E_o-এর জন্য অন্তরকের মধ্যে $\vec{P}$ মেরুভবন ঘটবে এবং তার দুই প্রান্ততলে $-P$ ও $+P$ তল ঘনত্বের আবিষ্ট আধান দেখা দেবে। এর ফলে উৎপন্ন তড়িৎপ্রাবল্য $E_i = -p/\epsilon_o$ 6.23

সুতরাং অন্তরকের মধ্যে লব্ধ প্রাবল্য

$$E = E_o + E_i = E_o - p/\epsilon_o \quad \ldots\ldots \qquad 6.24$$

এই E 6.22 সমীকরণে ব্যবহৃত E । সুতরাং গহ্বরের কেন্দ্রে তড়িৎপ্রাবল্য অন্তরকের বাহিরের প্রাবল্য E_o অপেক্ষা কম হইলেও অন্তরকের মধ্যের প্রাবল্য E অপেক্ষা বড়।

6.7 আণবিক ও পারমাণবিক মেরুপ্রবণতা

এবার আমরা একটিমাত্র অণু বা পরমাণুর মেরু প্রবণতার (6.2 অনুচ্ছেদ দেখুন) সঙ্গে অন্তরকের আপেক্ষিক আবেশ্যতার সম্পর্ক নির্ণয়ের চেষ্টা করব।

ধরা যাক অন্তরকের মধ্যে r ব্যাসার্ধের গোলকের কেন্দ্র O বিন্দুতে একটি অণু রয়েছে। গোলকের মধ্যবর্তী অঞ্চল শূন্য হলে, অর্থাৎ O বিন্দুটি r ব্যাসার্ধের বর্তুলাকৃতি গহ্বরের কেন্দ্র হলে সেখানে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য $\vec{E}_m$ কত হবে তা আপনি 6.23 সূত্র থেকে আগেই জেনেছেন। এখন আমাদের দেখতে হবে r ব্যাসার্ধের অন্তরক গোলকটির জন্য O বিন্দুতে তড়িৎ প্রাবল্য কত হবে।

অন্তরকের মেরুভবনের সঙ্গে সঙ্গে গোলকটির মধ্যে অবস্থিত প্রত্যেকটি অণুই এক একটি তড়িৎ-দ্বিমেরুতে পরিণত হবে। এবং প্রতিটি অণুর জন্যই গোলকের কেন্দ্রে একটি তড়িৎ প্রাবল্য উৎপন্ন হবে। কিন্তু গোলকের মধ্যেকার সবগুলি দ্বিমেরু কেন্দ্রে যে তড়িৎপ্রাবল্য উৎপন্ন করে, দ্বিমেরুগুলির বণ্টনের প্রতিসাম্যের ফলে তার ভেক্টর যোগফল শূন্য হয়। এর ফলে '$\vec{E}_m$' ই অন্তরকের মধ্যে O বিন্দুতে অবস্থিত অণুর উপর কার্যকরী তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য।

আমরা জানি $\vec{D} = k\epsilon_0 \vec{E}_d = \epsilon_0 \vec{E}_d + \vec{p}$ (6.13 সূত্র থেকে)

সুতরাং $\vec{p} = (k-1)\epsilon_0 \vec{E}_d$

বা, 6.24 থেকে, $\vec{E}_m = \vec{E}_d = \frac{k-1}{3}\vec{E}_d = \frac{k+2}{3}\vec{E}_d$

বা $\vec{E}_d = \frac{3}{k+2}\vec{E}_m$

$$\therefore \quad \vec{p} = (k-1)\epsilon_0 \cdot \frac{3}{k+2}\vec{E}_m$$

$$= \frac{3(k-1)}{k+2}\epsilon_0 \vec{E}_m \qquad \ldots 6.25$$

E_m মানের তড়িৎ প্রাবল্যে অন্তরকের অণুর দ্বিমেরু ভ্রামক যদি p_m হয় তবে একক প্রাবল্য পিছু দ্বিমেরু ভ্রামককেই আমরা আণবিক মেরুপ্রবণতা α বলি। অর্থাৎ $\alpha = p_m/E_m$।

প্রতি একক আয়তনে n সংখ্যক অণু থাকলে pm কে ভেক্টর $\vec{p}_m$ হিসাবে লিখে :

$$\vec{p}\ n\vec{p}_m = \alpha n \vec{E}_m \qquad \ldots 6.26$$

6.25 ও 6.26 সূত্রদ্বয় থেকে পাওয়া যায় :

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{n} \cdot \frac{k-1}{k+2} \qquad \ldots 6.27$$

6.27 সূত্রটি ক্লসিয়াস - মোসোটি (Clausius Mossotti) সূত্র নামে পরিচিত। এটির গুরুত্ব এই যে এর সাহায্যে অন্তরকের একটি সামগ্রিক ধর্ম, অর্থাৎ আপেক্ষিক আবেশ্যতার মান থেকে তার আণবিক ধর্ম α এর মান নির্ণয় করা যায়।

এবার আপনি 6.2 অনুচ্ছেদের 6.4 সূত্রটি একবার দেখে নিন। যেখানে আপনি দেখেছেন আণবিক (বা পারমাণবিক) মেরুপ্রবণতা

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$$

ক্লসিয়াস-মোসোটি সূত্র ব্যবহার করে,

$$\frac{k-1}{k+2} = n\alpha/3\epsilon_0 = n.4\pi\epsilon_0 a^3/3\epsilon_0 = n.\frac{4}{3}\pi a^3 = V \qquad \ldots 6.28$$

যেখানে V = অন্তরকের একক আয়তন পিছু অণুগুলির মোট আয়তন। এখানেও k ধ্রুবকের সাহায্যে আমরা একটি আণবিক ধর্মে উপনীত হতে পারছি।

এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী 2

প্রমাণ চাপে ও 20°C উষ্ণতায় আর্গন গ্যাসের আপেক্ষিক আবেশ্যতা k = 1.000516 আর্গন অণুর (ক) আণবিক মেরুপ্রবণতা ও (খ) আয়তন নির্ণয় করুন।

6.8 অন্তরক পদার্থের কয়েকটি বিশেষ ধর্ম

আমরা এ পর্যন্ত অন্তরক পদার্থ সম্বন্ধে যে গাণিতিক আলোচনা করেছি তার বাইরেও এ জাতীয় পদার্থের কিছু ভৌত ধর্ম দেখা যায়। অন্তরক সম্বন্ধে আলোচনায় এই ধর্মগুলি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। বিশেষ করে ব্যবহারিক ক্ষেত্রে এগুলির ব্যবহারই তার কারণ। এখানে এই ধর্মগুলি সম্বন্ধে আমরা সংক্ষিপ্ত আলোচনা করব।

(ক) চাপতড়িৎ ক্রিয়া (Piezo electricity) : কোন কোন কেলাসিত পদার্থে যান্ত্রিক পীড়ন প্রয়োগ করলে পদার্থটির মেরুভবন ঘটে এবং কেলাসের যে প্রান্ততলগুলি পীড়নের অভিলম্ব, সেখানে আবদ্ধ আধান দেখা দেয়। পীড়নের চিহ্ন বিপরীত হলে, অর্থাৎ সংনমন পীড়নের পরিবর্তে প্রসারণ পীড়ন প্রয়োগ করলে আধানও বিপরীত চিহ্নের হয়। অপরপক্ষে এধরনের কেলাসে তড়িৎক্ষেত্র প্রয়োগ করলে কেলাসের সংনমন বা প্রসারণ ঘটে। তড়িৎ ক্ষেত্রটির প্রাবল্য যদি পরিবর্তী হয়, অর্থাৎ সময়ের সঙ্গে সাইন তরঙ্গের মত ওঠানামা করতে থাকে, তবে প্রাবল্যের কম্পাঙ্ক এবং কেলাসের অণুদৈর্ঘ্য কম্পনের কম্পাঙ্ক এক হয়ে অনুনাদ সৃষ্টি করতে পারে। এই কেলাসগুলিকে চাপতড়িতীয় বা পিজোইলেকট্রিক কেলাস বলা হয়।

চাপতড়িৎ ক্রিয়ার ভৌত কারণ কী ? যান্ত্রিক পীড়নের ফলে কেলাসের অণুগুলি সামান্য স্থানচ্যুত ও বিকৃত হয়। যে সব কেলাসের প্রতিসাম্য কেন্দ্র থাকে সেগুলিতে পজিটিভ ও নেগেটিভ আধানের কেন্দ্রগুলি পরস্পরের সাপেক্ষের বিচ্যুত হয় না; ফলে কেলাসে কোন মেরুভবন ঘটে না। কিন্তু কোন প্রতিসাম্য কেন্দ্র নেই, এমন কেলাসে দুই প্রকারের আধানের কেন্দ্রগুলি পরস্পর বিচ্যুত হয়ে তড়িৎ দ্বিমেরু গঠন করে। এর ফলে কেলাসের দুই প্রান্তে আবদ্ধ আধান দেখা দেয় অর্থাৎ কেলাসের মেরুভবন হয়। মেরুভবনের মান কেলাসের পীড়নের সমানুপাতী হয়।

কোয়ার্জ একটি পরিচিত চাপতড়িতীয় কেলাস। আপনি ইতিপূর্বে EPH03 পাঠক্রমে অতিশব্দ সম্বন্ধীয় এককে নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কে কম্পন উৎপাদনে কোয়ার্জ কেলাসের ব্যবহার সম্বন্ধে পড়েছেন। ইলেকট্রনিক ঘড়ি, মাইক্রোফোন প্রভৃতির নির্মাণে চাপতড়িতীয় কোয়ার্জ কেলাস ব্যবহৃত হয়।

(খ) ইলেকট্রেট (Electret) : স্থায়ী চুম্বকে যেমন আরোপিত চৌম্বক ক্ষেত্র ছাড়াও স্থায়ী চৌম্বক দ্বিমেরু দেখা যায়, তেমনই ইলেকট্রেট হল এমন একটি বস্তু যার আরোপিত তড়িৎ-ক্ষেত্র ছাড়াও স্থায়ী তড়িৎ দ্বিমেরু ভ্রামক থাকে। কোন পোলার অন্তরক বস্তুর দ্বিমেরুগুলি তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রভাবে আংশিকভাবে একমুখী হওয়ার পর তড়িৎক্ষেত্রটি অপসরণ করার সঙ্গে সঙ্গে বস্তুটির মেরুভবন দূরীভূত হয়। কিন্তু কয়েকটি বিশেষ ধরনের অন্তরকের ক্ষেত্রে তড়িৎক্ষেত্রটি অপসৃত হওয়ার পরেও মেরুভবন বিনষ্ট হয় না, অর্থাৎ বস্তুটির তড়িৎ-দ্বিমেরু ভ্রামক থেকে যায়। কিছু জৈব মোম জাতীয় বস্তু ও প্লাস্টিকের মধ্যে এই ধর্ম দেখা যায়। এগুলিকেই ইলেকট্রেট বলা হয়।

এ জাতীয় কোন অন্তরককে গলিত অবস্থায় তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবে মেরুভবন ঘটানোর পর অন্তরকটিকে জমতে দিলে আণবিক দ্বিমেরুগুলিও জমাট বেঁধে যায় এবং অন্তরকটি স্থায়ী দ্বিমেরু প্রাপ্ত হয়। এজাতীয় ইলেকট্রেটকে বলা হয় তাপীয় ইলেকট্রেট (thermoelectret)। আলোক ও তড়িৎক্ষেত্র একসঙ্গে প্রয়োগ করে ইলেকট্রেট তৈরী করা যায়। এগুলিকে বলা হয় আলোক-ইলেকট্রেট (photoelectret)।

মাইক্রোফোন, কম্পিউটার, রেডিও ও টেলিভিশন গ্রাহকযন্ত্রে ইলেকট্রেট ব্যবহৃত হয়। ফটোকপিয়ার যন্ত্রে আলোক ইলেকট্রেটের ব্যবহার হয়ে থাকে।

(গ) অয়স্তড়িতীয় বা ফেরোইলেকট্রিক(ferroelectric) কেলাস :

লোহা, নিকেল প্রভৃতি কয়েকটি ধাতু ও ধাতুসংকরের অয়শ্চৌম্বকতার সঙ্গে হয়ত আপনার পরিচয় আছে। এগুলির মধ্যে ছোট ছোট অঞ্চলে বাইরে থেকে আরোপিত চৌম্বক ক্ষেত্র ছাড়াই স্বতঃচৌম্বক-মেরুভবন দেখা যায়। অয়স্তড়িতীয় কেলাসে আরোপিত তড়িৎক্ষেত্র ছাড়াই স্বতঃ-তড়িতীয়-মেরুভবন ঘটে, অর্থাৎ স্থায়ী তড়িৎ দ্বিমেরুর সৃষ্টি হয়। আমরা জানি যে অন্তরক পদার্থে পজিটিভ ও নেগেটিভ আধান কেন্দ্রগুলি পরস্পরের সাপেক্ষে বিচ্যুত হলে তাদের মধ্যে প্রত্যানয়ক বল কাজ করে। অয়স্তড়িতীয় কেলাসে স্থানীয় তড়িৎক্ষেত্র প্রত্যানয়ক বল অপেক্ষা শক্তিশালী হয় এবং ঐ তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবেই কেলাসের মধ্যে আয়নগুলি বিচ্যুত হয়ে তড়িৎ-দ্বিমেরু সৃষ্টি করে। কেবলমাত্র কেন্দ্রীয় প্রতিসাম্যহীন কেলাসেই এই ধর্মটি দেখা যায়।

অয়স্তড়িৎ ধর্ম উষ্ণতার উপর নির্ভর করে এবং এক সঙ্কট-উষ্ণতার উপরে এই ধর্ম দেখা যায় না। তখন উষ্ণতা বৃদ্ধির সঙ্গে আপেক্ষিক আবেশ্যতা দ্রুত হ্রাস পেতে দেখা যায়। এই অবস্থাকে পরা-তড়িতীয় অবস্থা বলা হয়। সঙ্কট উষ্ণতার উপরে উষ্ণতার সঙ্গে আপেক্ষিক আবেশ্যতার পরিবর্তন একটি সূত্র দিয়ে প্রকাশ করা যায় :

$$k = \frac{C}{T - T_c} + k_o$$

এখানে Tc = সঙ্কট উষ্ণতা, C = ধ্রুবক ও ko = আপেক্ষিক আবেশ্যতায় ইলেকট্রনগুলির জন্য মেরুভবনের অবদান।

অয়স্তড়িতীয় কেলাসের কয়েকটি উদাহরণ : রশেল সল্ট বা পটাশিয়াম সোডিয়াম টারট্রেট, পটাশিয়াম ডাই হাইড্রোজেন ফস্‌ফেট ও বেরিয়াম টাইট্যানেট।

অয়স্তড়িতীয় কেলাসে চাপতড়িৎ ক্রিয়া পরিলক্ষিত হয়। তবে সব চাপতড়িতীয় কেলাসে অয়স্তড়িৎ ধর্ম দেখা যায় না।

(ঘ) অন্তরকের শ্লথন (Dielectric relaxation) ও শক্তিশোষণ :

কোন অন্তরক পদার্থের উপর তড়িৎক্ষেত্র আরোপ করলে সেটির মেরুভবন তৎক্ষণাৎ সর্বোচ্চ মানে পৌঁছায় না। এজন্য যে সময় লাগে তা বিভিন্ন অন্তরকের ক্ষেত্রে 10^{-10} সেকেন্ড থেকে কয়েক হাজার বছর হতে পারে। অন্তরকের কোন একটি অণুর উপর নিকটবর্তী অন্য অণুগুলি যে বল প্রয়োগ করে তার প্রভাবে অণুটি আরোপিত তড়িৎক্ষেত্র বরাবর সজ্জিত হতে বাধা পায়। এটিই শ্লথনের কারণ। শ্লথনের ফলে, অন্তরকটি পরিবর্তী তড়িৎক্ষেত্রে রাখা হলে মেরুভবন তড়িৎক্ষেত্রের সমানুপাতী থাকে না, বরং মেরুভবনের পরিবর্তনে হিস্‌টেরেসিস্ লক্ষ্য করা যায়। অন্তরকযুক্ত ধারককে আহিত করার পর দ্রুত ক্ষরিত করে তার পাতগুলি অন্তরিত করলে পাতগুলিকে পুনরায় আধানযুক্ত হতে দেখা যায়।

অন্তরক পদার্থের অনেক সময় অতি অল্প তড়িৎপরিবাহিতাও দেখা যায়। অন্তরকের হিস্‌টেরেসিস্ এবং তড়িৎপরিবাহিতা উভয় কারণেই অন্তরকের মধ্যে তড়িৎশক্তির ক্ষয় হয় এবং তাপ উৎপন্ন হয়। অতি উচ্চ কম্পাঙ্কে অণুগুলি তড়িৎক্ষেত্রের সঙ্গে সমতালে ঘুরতে পারে না, যার ফলে হিস্‌টেরেসিস্‌জনিত শক্তিক্ষয় হয় না।

(ঙ) **অন্তরকের বিনাশ** (Dielectric breakdown) : সব অন্তরক পদার্থই একটি নির্দিষ্ট তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য পর্যন্ত অন্তরক ধর্ম বজায় রাখে। প্রাবল্যের সর্বোচ্চ সীমা লঙ্ঘিত হলে ইলেকট্রনগুলি নিজ নিজ অণু থেকে বিচ্ছিন্ন হয় এবং তড়িৎক্ষেত্রে ত্বরিত ও শক্তিশালী হওয়ার পর অন্য অণুর সঙ্গে সংঘর্ষের মাধ্যমে আরও ইলেকট্রনকে মুক্ত করে। বিমুক্ত ইলেকট্রন ও আয়নগুলি তড়িৎপ্রবাহ সৃষ্টি করে এবং অন্তরকের অপরিবাহিতা ধর্ম বিনষ্ট হয়।

শুষ্ক বায়ু সাধারণভাবে একটি উত্তম অন্তরক। প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় শুষ্ক বায়ুর 3×10^6 V/m প্রাবল্যে অন্তরণ বিনাশ ঘটে। এই প্রাবল্য যথেষ্ট বেশি হলেও 0.1 mm ব্যাসার্ধের একটি ধাতব সূচীমুখকে পৃথিবীর সাপেক্ষে 300V বিভবে রাখলেই তার সন্নিহিত অঞ্চলের প্রাবল্য এই মানে পৌঁছে বায়ুর মধ্যে স্থির ক্ষরণ (corona discharge) বা স্ফুলিঙ্গ ক্ষরণ (spark discharge) তৈরী করতে পারে।

অনুশীলনী 3

নীচের উক্তিগুলি পড়ুন এবং সেগুলি সত্য না মিথ্যা যাচাই করুন :

(i) যে সব কেলাসের গঠনে কেন্দ্রীয় প্রতিসাম্য থাকে সেগুলিতে চাপতড়িৎক্রিয়া দেখা যায় না।

(ii) মাইক্রোফোন নির্মাণে পিজোইলেকট্রিক কেলাস ব্যবহৃত হয়।

(iii) যে অন্তরকের ক্ষেত্রে তড়িৎক্ষেত্র অপসারণ করার সঙ্গে সঙ্গে মেরুভবন বিলুপ্ত হয় তাকেই ইলেকট্রেট বলা হয়।

(iv) অয়স্তড়িতীয় বা ফেরোইলেকট্রিক কেলাসের আপেক্ষিক আবেশ্যতা চরম উষ্ণতার সমানুপাতী হয়।

(v) অন্তরকের শ্লথনের ফলে হিসটেরিসিস্ এর উৎপত্তি হয়।

(vi) প্রত্যেক অন্তরকের একটি সর্বোচ্চ সহনযোগ্য তড়িৎ প্রাবল্য থাকে, যার উপরে অন্তরণের বিনাশ ঘটে।

6.9 সারাংশ

এই এককটিতে অন্তরক পদার্থের সামগ্রিক ও আণুবীক্ষণিক ধর্মগুলি সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে।

সব পদার্থকে মোটামুটিভাবে পরিবাহী ও অন্তরক, এই দুই শ্রেণীতে ভাগ করা যায়, যার মধ্যে অন্তরক পদার্থকেও পোলার ও অপোলার, এই দুটি ভাগে ফেলা যায়। আরোপিত তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবে অন্তরকের মেরুভবন এবং দুই ধরনের অন্তরকের ক্ষেত্রে মেরুভবনের প্রক্রিয়া এখানে আলোচিত হয়েছে। অন্তরকের ক্ষেত্রে গাউসের উপপাদ্যের প্রয়োগ করা হয়েছে এবং এই প্রসঙ্গে আপনি দেখেছেন যে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য $\vec{E}$-এর পরিবর্তে তড়িৎবিচ্যুতি $\vec{D}$ ভেক্টর ব্যবহার করলে গাউসের উপপাদ্যটি কেবলমাত্র মুক্ত আধানের হিসাবে লেখা যায়, আবদ্ধ আধান সম্বন্ধে জানার প্রয়োজন হয় না।

অন্তরকের সীমান্ততলে $\vec{E}$ ও $\vec{D}$ ভেক্টরের উপাংশগুলি কয়েকটি সীমাশর্ত পালন করে। এখানে সীমাশর্তগুলি নির্ণয় করে সেগুলির সাহায্যে সীমান্ততলে তড়িৎবলরেখার প্রতিসরণের নিয়মটি দেখানো হয়েছে।

অন্তরকের সামগ্রিক ধর্মগুলি আলোচনা করার পর আমরা তার আণুবীক্ষণিক ধর্মের দিকে নজর দিয়েছি। অন্তরকের মধ্যে আণুবীক্ষণিক আকারের গহ্বরে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য নির্ণয় করার পর আপেক্ষিক-আবেশ্যতার সঙ্গে আণবিক মেরুপ্রবণতার সম্পর্ক নির্ণীত হয়েছে। এই সম্পর্ক ক্লসিয়াস মোসোটি সূত্র নামে পরিচিত।

পরিশেষে অন্তরকের কয়েকটি বিশেষ ধর্ম, যথা চাপতড়িৎক্রিয়া, অয়স্তড়িতীয় ধর্ম প্রভৃতি আলোচনা এই এককের অন্তর্ভুক্ত হয়েছে।

6.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. পোলার ও অ-পোলার অন্তরক কাকে বলে? আরোপিত তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাবে এগুলি কিরূপ আচরণ করে?

2. কোন মেরুভূত অন্তরক সন্নিহিত অঞ্চলে যে তড়িৎ-বিভব উৎপন্ন করে তার রাশিমালাটি নির্ণয় করুন এবং সেটির পদগুলি ব্যাখ্যা করুন।

3. অন্তরকের ক্ষেত্রে গাউসের উপপাদ্যটি প্রয়োগ করে দেখান যে এক্ষেত্রে উপপাদ্যটি

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{ds} = q_f \quad \text{অথবা} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

রূপে দেখা যায় যেখানে q_f = আবদ্ধ সমাকলন তলের অন্তর্গত মুক্ত আধান এবং ρ_f = মুক্ত আধানের ঘনত্ব।

4. প্রমাণ করুন যে দুই অন্তরকের সীমান্ততলে তড়িৎপ্রাবল্যের স্পার্শক উপাংশ এবং তড়িৎ বিচ্যুতির অভিলম্ব উপাংশ সন্তত থাকে।

5. তড়িৎক্ষেত্রের মধ্যে রাখা আছে এমন একটি অন্তরকের মধ্যে আণুবীক্ষণিক আকারের সূচী-আকৃতি ও চাকতি-আকৃতি গহ্বরের মধ্যে তড়িৎপ্রাবল্যের মান নির্ণয় করুন। সূচী-আকৃতি গহ্বরের দৈর্ঘ্য তড়িৎক্ষেত্রের সমান্তরাল এবং চাকতি-আকৃতি গহ্বরের সমতল প্রান্ত তড়িৎক্ষেত্রের অভিলম্বে আছে বলে ধরে নিন।

6. ক্লসিয়াস-মোসোটি সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করুন। আপেক্ষিক আবেশ্যতার মানের সঙ্গে একক আয়তনে অন্তরকের অণুগুলির মোট আয়তনের সম্পর্কটি নির্ণয় করুন।

7. অন্তরক পদার্থের নিম্নোক্ত ধর্মগুলির সংক্ষিপ্ত বিবরণ দিন : (ক) চাপতড়িৎ ক্রিয়া (খ) অয়স্তড়িৎ ধর্ম

8. অন্তরকের শ্রথন বলতে কী বোঝায়? অন্তরকের বিনাশ কাকে বলে?

6.11 উত্তরমালা

অনুশীলনী 1

i) অ্যামোনিয়া অণুর N ও H পরমাণুগুলি একতলে থাকলে H – N – H কোণটি A 120° হত। ঐ কোণ 107° হওয়ার অর্থ তিনটি H পরমাণু যে তলে থাকে, N পরমাণু তা থেকে কিছুটা দূরে থাকে। হাইড্রোজেন পরমাণুগুলির ইলেকট্রন আংশিকভাবে নাইট্রোজেন পরমাণুর দিকে সরে যাওয়ার ফলে হাইড্রোজেন প্রান্তটি পজিটিভ ও নাইট্রোজেন প্রান্ত নেগেটিভ আধান লাভ করে এবং অণুটির দ্বিমেরু ভ্রামক তৈরি হয়। এর ফলে অ্যামোনিয়া গ্যাস পোলার হিসাবে আচরণ করে।

ii) গাউস উপপাদ্যে $\vec{D}$ ভেক্টর ব্যবহারের সুবিধা এই যে সেক্ষেত্রে কেবলমাত্র মুক্ত আধানগুলি সম্বন্ধে জানাই যথেষ্ট হয়, আবদ্ধ আধানগুলি সমীকরণে ব্যবহৃত হয় না। (6.14 সূত্র দেখুন)

অনুশীলনী 2

প্রমাণ চাপে 0°C উষ্ণতায় আর্গন (বা যে কোনও) গ্যাসের সংখ্যাঘনত্ব $n_0 = 2.687 \times 10^{25} / m^3$

$\therefore$ 20°C উষ্ণতায় সংখ্যাঘনত্ব বা $n = 2.687 \times 10^{25} \times \dfrac{273}{273 + 20}$

$$= 2.504 \times 10^{25} / m^3$$

(ক) ক্লসিয়াস মোসোটি সমীকরণ থেকে

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{n} \cdot \frac{k-1}{k+2} = \frac{3 \times 8.854 \times 10^{-12}}{2.504 \times 10^{25}} \times \frac{\cdot 000516}{3 \cdot 000516}$$

$$= 1.824 \times 10^{-40} \text{ Cool}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^3$$

(খ) 6.28 সমীকরণ থেকে অণুর আয়তন

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{1}{n} \cdot \frac{k-1}{k+2} = \frac{1}{2 \cdot 504 \times 10^{25}} \times \frac{\cdot 000516}{3 \cdot 000516}$$

$$= 6.87 \times 10^{-30} \text{ m}^3.$$

অনুশীলনী 3

i) সত্য ii) সত্য iii) মিথ্যা iv) মিথ্যা v) সত্য vi) সত্য

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. 6.2.1 ও 6.2.2 অনুচ্ছেদগুলি দেখে নিন।
2. 6.3 অনুচ্ছেদে প্রশ্নটির উত্তর পাবেন।
3. 6.4 অনুচ্ছেদটি দেখুন।
4. 6.5 অনুচ্ছেদটি দেখুন।
5. 6.6 অনুচ্ছেদটি দেখুন।
6. 6.7 অনুচ্ছেদে প্রশ্নটির উত্তর পাওয়া যাবে।

7 ও 8 6.8 অনুচ্ছেদে প্রশ্নদুটির উত্তর পাবেন।

একক 7 □ প্রতিবিম্ব পদ্ধতি (Method of Images)

গঠন :

7.1 প্রস্তাবনা
উদ্দেশ্য

7.2 উপরিপাতন ও অনন্যতার উপপাদ্য

7.3 প্রতিবিম্ব পদ্ধতির মূলনীতি

7.4 প্রতিবিম্ব পদ্ধতির প্রয়োগ—পরিবাহী পাত ও গোলক

7.4.1 অসীম ভূসংযুক্ত পরিবাহী পাতের সমীপে বিন্দুআধান

7.4.1 ভূসংযুক্ত পরিবাহী গোলকের সমীপে বিন্দু আধান

7.4.1 অন্তরিত পরিবাহী গোলকের সমীপে বিন্দু আধান

7.4.4 সুষম তড়িৎক্ষেত্রে অন্তরিত পরিবাহী গোলক

7.5 প্রতিবিম্ব পদ্ধতির প্রয়োগ — অপরিবাহী ফলক ও গোলক

7.5.1 অসীম অপরিবাহী ফলকের প্রান্তের সমীপে বিন্দু আধান

7.5.1 সুষম তড়িৎক্ষেত্রে অপরিবাহী গোলক

7.6 সারাংশ

7.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

7.8 উত্তরমালা

7.1 প্রস্তাবনা

এক বা একাধিক বিন্দু আধানের জন্য যে তড়িৎক্ষেত্রের সৃষ্টি হয় তার কোন এক বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের বিভব বা প্রাবল্য নির্ণয় করতে আপনি ইতিমধ্যেই শিখেছেন। আপনি এও দেখেছেন যে আধানের বিশেষ বিশেষ জ্যামিতিক বণ্টনের ক্ষেত্রে ঐ আধানের এক ক্ষুদ্র অংশের জন্য বিভবের সমাকলন করে মোট বিভব নির্ণয় করা যায় এবং তার থেকে প্রাবল্য নির্ণয় করাও শক্ত হয় না। এছাড়া বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে গাউসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে আমরা সরাসরি প্রাবল্যের মান নির্ণয় করেছি। আধানের কাছাকাছি কোন পরিবাহী বা অপরিবাহী বস্তু থাকলে একটি জটিলতার সৃষ্টি হয়। আধানের তড়িৎক্ষেত্র ঐ বস্তুর উপর আবিষ্ট আধানের সৃষ্টি করে, এবং ঐ আবিষ্ট আধান নিকটবর্তী তড়িৎক্ষেত্রে বিভব বা প্রাবল্যকে প্রভাবিত করে। আবিষ্ট আধানের পরিমাণ ও বণ্টন জানা না থাকায় তার জন্য উৎপন্ন তড়িৎ বিভবের মান সরাসরি জানা যায় না।

এই অবস্থায়, কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে আমরা লর্ড কেলভিন উদ্ভাবিত একটি পদ্ধতি ব্যবহার করে থাকি। এই পদ্ধতির নাম 'প্রতিবিম্ব পদ্ধতি'। এই পদ্ধতিতে আবিষ্ট আধানগুলিকে প্রকৃত বিন্দু আধানের প্রতিবিম্বস্বরূপ এক বা একাধিক প্রতিবিম্ব আধান দিয়ে প্রতিস্থাপিত করা হয়। এজন্যই এই পদ্ধতিকে প্রতিবিম্ব পদ্ধতি বলা হয়।

এই এককটি পড়ার সময় আপনি লক্ষ্য করবেন যে প্রতিবিম্ব পদ্ধতির সাহায্যে অত্যন্ত জটিল অবস্থাতেও সহজে সমাধান খুঁজে পাওয়া যায়। এই পদ্ধতি গাণিতিকভাবেও সহজ, যা আপনি এর পরের এককে লাপ্লাস সমীকরণের সমাধানের সঙ্গে তুলনা করলে বুঝতে পারবেন। মোটের উপর, প্রতিবিম্ব পদ্ধতির সরল সৌন্দর্য আপনাকে আকৃষ্ট করবে বলে আশা করা যায়।

উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে আপনি স্থির তড়িৎবিদ্যার প্রতিবিম্ব পদ্ধতির সঙ্গে পরিচিত হবেন। এর দ্বারা আপনি যে কাজগুলি করতে সক্ষম হবেন সেগুলি হল :

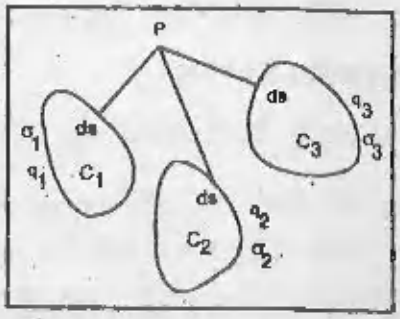
- অনন্যতা উপপাদ্যটি বিবৃত করতে পারবেন এবং এর সাহায্যে প্রতিবিম্ব পদ্ধতির বৈধতা প্রতিপন্ন করতে পারবেন।
- প্রতিবিম্ব পদ্ধতি প্রয়োগ করে পরিবাহী পাত ও পরিবাহী গোলকের সমীপে একটি বিন্দু আধান থাকলে কী ধরনের তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন হয় এবং আবিষ্ট আধানের বণ্টন কেমন হয় তা নির্ণয় করতে পারবেন।
- অপরিবাহী ফলক ও অপরিবাহী গোলকের ক্ষেত্রে যথাক্রমে সমীপস্থ বিন্দু আধান সুষম তড়িৎক্ষেত্রের প্রভাব প্রতিবিম্ব পদ্ধতির সাহায্যে নির্ধারণ করতে পারবেন।

7.2 উপরিপাতন ও অনন্যতার উপপাদ্য

স্থির তড়িৎ ক্ষেত্রে প্রতিবিম্ব পদ্ধতি প্রয়োগ করে বিভব বা প্রাবল্য নির্ণয় করতে হলে আমাদের আগেই দুটি উপপাদ্যের সঙ্গে পরিচিত হতে হবে। এগুলি হল উপরিপাতন উপপাদ্য (Theorem of Superposition) ও অনন্যতার উপপাদ্য (Uniqueness Theorem)। আমরা প্রথমেই এগুলির প্রমাণ আলোচনা করব।

উপরিপাতন উপপাদ্য

ধরুন $C_1, C_2, C_3, \ldots$ কতকগুলি পরিবাহী বস্তু, যেগুলির উপর σ তলঘনত্বের আধান ছড়ানো আছে। এর ফলে পরিবাহী বস্তুগুলির উপর যথাক্রমে q_1, q_2, q_3 প্রভৃতি মোট আধান সন্নিবেশিত আছে, যেগুলি মিলিতভাবে পরিবাহী বস্তুগুলি যথাক্রমে V_1, V_2, V_3 প্রভৃতি বিভবে রেখেছে। আপনি নিশ্চয়ই মনে রেখেছেন যে, কোন একটি পরিবাহীর উপরে ও ভিতরে বিভব সর্বত্রই সমান থাকে। এই অবস্থায় পরিবাহীগুলির উপর আধানের বন্টন সাম্যাবস্থায় আছে বলে ধরা যাক।



চিত্র 7.1

কোন একটি বিন্দু P তে পরিবাহীগুলির আধান যে বিভব উৎপন্ন করে তা হল

$$V_p = \int_{c_1} \frac{\sigma_1 ds}{r_1} + \int_{c_2} \frac{\sigma_2 ds}{r_2} + \int_{c_3} \frac{\sigma_3 ds}{r_3} + \ldots = \sum \int \frac{\sigma ds}{r} \qquad \ldots 7.1$$

এখানে σ_1, σ_2 ইত্যাদি হল C_1, C_2 প্রভৃতি পরিবাহীর উপর 'σ' এর মান, r_1, r_2 ইত্যাদি পরিবাহীগুলির তলের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশ ds থেকে P বিন্দুর দূরত্ব। সমাকলনগুলি C_1, C_2 প্রভৃতি পরিবাহীর সমগ্র তলের উপর করা হয়েছে। যোগের চিহ্নটি পরিবাহীগুলির উপর যোগফল নির্দেশ করছে।

এবার ধরে নিন σ' তলঘনত্বের অন্য একটি আধান বন্টন p বিন্দুতে V'_p বিভব সৃষ্টি করে। তাহলে আমরা 7.1 সমীকরণের মত লিখতে পারি

$$V'_p = \int_{c_1} \frac{\sigma'_1 ds}{r_1} + \int_{c_2} \frac{\sigma'_2 ds}{r_2} + \int \frac{\sigma'_3 ds}{r_3} + \ldots\ldots\ldots = \sum \int \frac{\sigma' ds}{r} \qquad \ldots 7.2$$

এখন যদি পরিবাহীগুলির উপর আধানের তলঘনত্ব $\sigma + \sigma'$ হয় (অর্থাৎ প্রথম পরিবাহীর উপর $\sigma_1 + \sigma_1'$, দ্বিতীয় পরিবাহীর উপর $\sigma_2 + \sigma_2'$, ইত্যাদি) তবে p বিন্দুতে বিভবের মান হবে

$$\phi_p = \sum \int \frac{\sigma + \sigma'}{r} ds = \sum \int \frac{\sigma ds}{r} + \sum \int \frac{\sigma' ds}{r} = V_p + V'_p \qquad \ldots 7.3$$

এবার ধরুন c_1 পরিবাহীর উপরে অবস্থিত একটি বিন্দুকেই আমরা p বিন্দু বলে নির্বাচিত করলাম। এক্ষেত্রে 7.3 সমীকরণ থেকে পাবেন

$\phi_1 = V_1 + V_1'$, এবং অনুরূপভাবে $\phi_2 = V_2 + V_2'$, $\phi_3 = V_3 + V_3'$ ইত্যাদি। পরিবাহীগুলির উপর মোট আধান প্রথম ক্ষেত্রে $q_1 = \int \sigma_1 ds$, $q_2 = \int \sigma_2 ds$ ইত্যাদি এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $q_1' = \int \sigma_1' ds$ $q_2' = \int \sigma_2' ds$ ইত্যাদি। সুতরাং এখন বলা যায় যে,

'যদি q_1, q_2, q_3 প্রভৃতি আধান পরিবাহীগুলির উপর v_1, v_2, v_3 প্রভৃতি বিভব উৎপন্ন করে এবং q_1', q_2', q_3' প্রভৃতি আধান যেগুলির উপর v_1', v_2', v_3' প্রভৃতি বিভব উৎপন্ন করে, তবে $q_1 + q_1', q_2 + q_2', q_3 + q_3'$ প্রভৃতি আধান যথাক্রমে $(v_1 + v_2')$, $(v_2 + v_2')$, $(v_3 + v_3')$ প্রভৃতি বিভব উৎপন্ন করবে।'

এটিই তড়িৎক্ষেত্রের উপরিপাতনের উপপাদ্য। এবার আমরা আর একটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য প্রমাণ করব।

অনন্যতার উপপাদ্য

এই উপপাদ্যটি দুভাবে লেখা যায়। এগুলি হল

(i) যদি কোন একটি তড়িৎক্ষেত্রের প্রত্যেকটি পরিবাহীর বিভব নির্দিষ্ট থাকে এবং সেগুলির উপর আধান সমূহ সাম্যে থাকে তবে আধানগুলির একটিমাত্র বণ্টন সম্ভব হবে।

(ii) যদি কোন তড়িৎক্ষেত্রের পরিবাহীগুলির উপর আধান নির্দিষ্ট থাকে এবং সেগুলি সাম্যে থাকে তবে আধানগুলির একটিমাত্র বণ্টন সম্ভব হবে।

এখন আপনি নিশ্চয়ই উপপাদ্যটির প্রমাণ জানতে চাইবেন।

প্রথম নির্বচন ধরুন C_1, C_2 প্রভৃতি পরিবাহীর বিভব যথাক্রমে ϕ_1, ϕ_2 ইত্যাদি। এও ধরা যাক যে σ ও σ', এই দুই আধান বণ্টনের জন্যই এই বিভবগুলি উৎপন্ন হতে পারে। σ তলঘনত্বের আধানবণ্টনের ফলে কোন এক বিন্দু p তে যে বিভব উৎপন্ন হবে তার মান $\phi_p = \sum\int\frac{\sigma ds}{r}$ (সমীকরণ 7.1 দেখুন।)

আবার σ' তলঘনত্বের আধানবণ্টনের ফলে p বিন্দুতে $\phi'_p = \sum\int\frac{\sigma' ds}{r}$ বিভব উৎপন্ন হবে। অর্থাৎ, P বিন্দুটিকে যদি C_1 পরিবাহীর উপর অবস্থিত বলে ধরা যায় তবে σ ও σ' আধানবণ্টন দুটির জন্য ঐ পরিবাহীর বিভব হবে যথাক্রমে $\phi_1 = \sum\int\frac{\sigma ds}{r}$ $3\phi'_1 = \sum\int\frac{\sigma' ds}{r}$, যেখানে r দূরত্বটি C_1 পরিবাহীর উপরের বিন্দু থেকে পরিমাপ করা হয়েছে।

এখন যদি $\sigma - \sigma'$ তলঘনত্বের একটি আধানবণ্টন কল্পনা করা যায় তবে তার জন্য C_1 পরিবাহীর বিভব হবে

$\sum\int\frac{(\sigma-\sigma')ds}{r} = \sum\int\frac{\sigma ds}{r} - \sum\int\frac{\sigma' ds}{r} = \phi_1 - \phi'_1 = 0$, কেননা নির্বচন অনুযায়ী $\phi_1 = \phi_1'$। এটি তখনই হওয়া সম্ভব যদি $\sigma = \sigma'$ হয়, অর্থাৎ আধানের তলঘনত্বের একটি অনন্য (unique) বণ্টন থাকবে। এটিই অনন্যতার উপপাদ্যের প্রথম নির্বচন।

দ্বিতীয় নির্বচন আগের মত ধরুন, C_1, C_2 প্রভৃতি পরিবাহীর মোট আধান যথাক্রমে q_1, q_2 ইত্যাদি এবং σ ও σ' এই দুই আধানবণ্টনের জন্যই এটি হওয়া সম্ভব। পরিবাহীগুলির উপর মোট আধান, σ আধানবণ্টনের ক্ষেত্রে

$q_1 = \int\sigma_1 ds_1, \quad q_2 = \int\sigma_2 ds_2$ ইত্যাদি

এবং σ' আধানবণ্টনের ক্ষেত্রে

$q_1 = \int\sigma_1' ds_1, \quad q_2 = \int\sigma_2' ds_2$ ইত্যাদি।

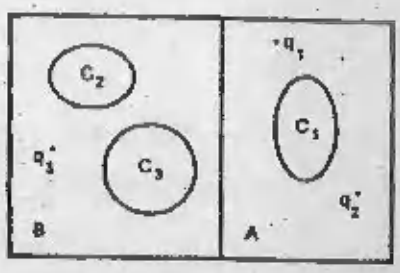
এখন যদি আমরা $\sigma - \sigma'$ আধানবণ্টনটি কল্পনা করি তবে C_1 পরিবাহীর উপর মোট আধান হবে $\int(\sigma_1 - \sigma_1')ds_1 = \int\sigma_1 ds_1 - \int\sigma_1' ds_1 = q_1 - q_1 = 0$। এইভাবে দেখানো যাবে যদি প্রতিটি পরিবাহীর মোট আধান শূন্য হবে। অবশ্য কোন একটি পরিবাহীর উপর পজিটিভ ও নেগেটিভ আধান সমপরিমাণে থাকতে পারে, অর্থাৎ পরিবাহীর উপর কোন কোন বিন্দুতে $\sigma \neq \sigma'$ হতে পারে। সেক্ষেত্রে কিছু তড়িৎ বলরেখা পরিবাহীর উপর পজিটিভ আধান থেকে শুরু হ'য়ে একই পরিবাহীর উপর নেগেটিভ আধানে শেষ হবে। কিন্তু এটি অসম্ভব কেননা বলরেখার

দুইপ্রান্তে বিভেদ পার্থক্য থাকবেই এবং পরিবাহীর উপর সর্বত্রই বিভব সমমান। এর অর্থ σ ও σ' সর্বত্র সমান হবে অর্থাৎ এক্ষেত্রেও একটিমাত্র অনন্য আধানবণ্টনই সম্ভবপর।

অনন্যতার প্রথম ও দ্বিতীয় নির্বচনকে মিলিয়ে আপনি এইভাবে লিখতে পারেন — 'যদি কোন তড়িৎক্ষেত্রে অবস্থিত কিছু সংখ্যক পরিবাহীর কতকগুলির বিভব এবং অন্যগুলির মোট আধান নির্দিষ্ট থাকে এবং সমগ্র তন্ত্রটি সাম্যে থাকে তবে আধানগুলির একটিমাত্র বণ্টন সম্ভব হতে পারে।'

7.3 প্রতিবিম্ব পদ্ধতির মূলনীতি

ধরে নিন A ও B দুটি সীমাযুক্ত অঞ্চল (চিত্র 7.2) এবং দুই অঞ্চলেই কিছু তড়িৎ-আধান ও পরিবাহী বা অপরিবাহী বস্তু রয়েছে। বস্তুগুলির বিভব অথবা যেগুলির ওপর মোট আধান নির্দিষ্ট হলেও সেগুলির উপর আধানের বণ্টন আমাদের জানা নেই। A ও B অঞ্চলের কোন একটির সীমা অসীম দূরত্বে থাকতে পারে। দুই অঞ্চলেই তড়িৎবিভব কয়েকটি সীমাশর্ত (boundary condition) পালন করে। আমরা যদি A অঞ্চলের তড়িৎক্ষেত্র নির্ধারণ করতে চাই তবে A অঞ্চলের বাইরে, ধরুন B অঞ্চলে, আমরা কিছু কাল্পনিক আধান রয়েছে বলে ধরে নিতে পারি, যাতে A অঞ্চলের প্রকৃত আধান ও B অঞ্চলের কাল্পনিক আধান মিলিতভাবে A অঞ্চলে সমস্ত সীমাশর্ত পালন করে এমন একটি তড়িৎক্ষেত্র গঠন করতে পারে। এক্ষেত্রে A অঞ্চলের পরিবাহীর বিভব নির্ণয়ে আমরা উপরিপাতনের উপপাদ্যের সরাসরি প্রয়োগ করি। এছাড়া অনন্যতার উপপাদ্যের ব্যবহার করে আমরা বলতে পারি যে আমরা A অঞ্চলে যে আধান বণ্টন ও তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করেছি সেটি ছাড়া সমস্ত সীমাশর্ত পালন করে এমন আর কোন আধানবণ্টন সম্ভব নয় এবং নির্ণীত সমাধানটি অনন্য ও সঠিক সমাধান। আপনি বিভিন্ন প্রয়োগের মধ্যে দিয়ে প্রতিবিম্ব পদ্ধতির মূলনীতিটি আরও ভালভাবে বুঝতে পারবেন।



চিত্র 7.2

এই প্রসঙ্গে স্থির তড়িৎক্ষেত্রের বিভব ϕ ও প্রাবল্য $\vec{E}$ বিভিন্ন ক্ষেত্রে যে সীমাশর্তগুলি পালন করে সেগুলি জেনে নেওয়া যাক।

(i) তড়িৎক্ষেত্রে যে বিন্দুগুলিতে কোন আধান নেই, যেখানে লাপ্লাসের সূত্র $\nabla^2\phi = 0$ পালিত হয়।

(ii) অসীম দূরত্বে ϕ এর মান ক্রমশঃ শূন্য হয় অর্থাৎ $\lim_{r \to \infty} \phi = 0$।

(iii) যে তলগুলিতে বিভব জানা আছে সেগুলির উপর $\phi = \phi_1, \phi_2$, ইত্যাদি যেখানে $\phi_1, \phi_2 \ldots$ বিভবের জ্ঞাত মান। অন্যদিকে যে আবদ্ধ তলের অভ্যন্তরস্থ মোট আধান q_1 জানা আছে তার ক্ষেত্রে গাউসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{ds} = -\oint K\nabla\phi \cdot \vec{ds} = q_1$$

যেখানে K = মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতা (permittivity) এবং সমাকলনটি সম্পূর্ণ আবদ্ধতলের উপর নেওয়া হয়েছে। শূন্য মাধ্যমে কোন বিন্দু আধান Q থাকলে সেটিকে সম্পূর্ণ বেষ্টন করে থাকা আবদ্ধ তলের উপর $\oint \nabla Q \cdot \vec{ds}$ সমাকলনের মান $-Q$ এর সমান হবে।

7.4 প্রতিবিম্ব পদ্ধতির প্রয়োগ — পরিবাহী পাত ও গোলক

প্রতিবিম্ব পদ্ধতির ভিত্তি ও মূলনীতির সঙ্গে পরিচিত হওয়ার পর এবার আমরা এই পদ্ধতির সাহায্যে কিছু ভৌত সমস্যার সমাধান নির্ণয় করব। এই অংশটিতে পরিবাহী পাত বা গোলক সংক্রান্ত সমস্যাগুলি আলোচিত হবে। আপনি আগেই জেনেছেন যে একটি পরিবাহীর সর্বত্র সাম্যাবস্থায় বিভব সমান থাকে এবং পরিবাহীটি ভূসংযুক্ত থাকলে ঐ বিভবকে শূন্য বলে ধরা হয়।

7.4.1 অসীম ভূসংযুক্ত পরিবাহী পাতের সমীপে বিন্দু আধান

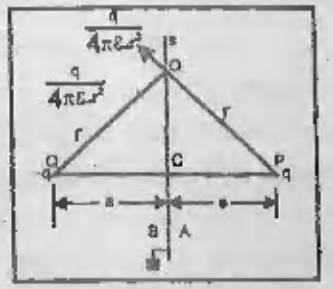
ধরা যাক S একটি অসীম পরিবাহী পাত, ভূসংযুক্ত থাকার ফলে যার প্রতিটি বিন্দুর বিভব শূন্য। পাতটি থেকে a দূরত্বে শূন্য মাধ্যমে p বিন্দুতে একটি বিন্দু আধান q অবস্থিত (চিত্র 7.3)। এক্ষেত্রে নীচের সীমাশর্তগুলি পালিত হবে

(ক) P বিন্দু ব্যতীত সর্বত্র বিভব ϕ লাপ্লাস সমীকরণ $\nabla^2\phi = 0$ পালন করবে।

(খ) অসীম দূরত্বে $Q \to 0$

(গ) S তলের প্রতি বিন্দুতে $Q_t = 0$

(ঘ) P বিন্দুকে বেষ্টন করে কোন আবদ্ধ তলের উপর $\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = q/\epsilon_0 \; (\vec{E} = \nabla\phi)$



চিত্র 7.3

প্রতিবিম্ব পদ্ধতির নিয়ম অনুযায়ী পরিবাহী পাতের ডানদিকে A অঞ্চলে তড়িৎ ক্ষেত্র নির্ণয়ের জন্য ঐ পাতের বামদিকে B অঞ্চল আমরা প্রতিবিম্ব আধান কল্পনা করতে পারি। S তলে P এর প্রতিবিম্ব Q বিন্দুতে একটি আধান q রয়েছে বলে কল্পনা করুন। এবং সেইসঙ্গে ধরে নিন যে S তলটি একটি জ্যামিতিক সমতলমাত্র। S তলের যে কোন বিন্দু O তে বিভবের মান

$$\phi_s = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 OP} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \cdot OQ} \quad (\epsilon_0 = \text{শূন্যের বিদ্যুৎশীলতা, permittivity of vacuum}) \ldots 7.4$$

Q বিন্দুতে P বিন্দুর প্রতিবিম্ব হওয়ায় PQ S তল দ্বারা লম্ব-সমদ্বিখণ্ডিত হয়। সুতরাং OPC ও OQC ত্রিভুজ দুটির OC বাহু সাধারণ, PC = QC এবং $\angle OCP$ ও $\angle OCQ$ দুটিই সমকোণ ও পরস্পর সমান। সুতরাং $\Delta OPC \equiv \Delta OQC$ এবং $OP = OQ = r$, ধরুন। 7.4 সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় $\phi_s = 0$, অর্থাৎ q ও – q আধান দুটি গ সীমাশর্তটিকে পালন করছে। প্রতিবিম্ব আধানটি B অঞ্চলে এবং সীমিত দূরত্বে থাকায় অন্য সীমাশর্তগুলিও পালিত হয়।

এখন আমরা P ও Q বিন্দু দুটিতে অবস্থিত বিন্দু আধান দুটির ফলে উৎপন্ন তড়িৎ ক্ষেত্রটি নির্ণয় করতে পারি। S তলের O বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য P ও Q বিন্দুতে অবস্থিত q ও – q আধান দুটির দ্বারা উৎপন্ন প্রাবল্যগুলির ভেক্টর যোগফল। q আধানের জন্য প্রাবল্য PO বরাবর $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ । এই প্রাবল্যের উপাংশ

S তলে লম্ব ($\hat{n}$) বরাবর $E_{1n} = -\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta$ ... 7.5a

এবং S তলের স্পর্শক ($\hat{t}$) বরাবর $E_{1t} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\sin\theta$ ... 7.5b

অনুরূপভাবে, Q বিন্দুতে আমরা যে $-q$ আধানটি কল্পনা করেছি তার জন্য O বিন্দুতে প্রাবল্য OQ বরাবর $\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ এবং এর উপাংশ

S তলে লম্ব ($\hat{n}$) বরাবর $E_{2n} = -\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta$ ... 7.6a

এবং S তলে স্পর্শক ($\hat{t}$) বরাবর $E_{2t} = -\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\sin\theta$ ... 7.6b

$\therefore$ q ও $-q$ আধান দুটির জন্য O বিন্দুতে মোট প্রাবল্য লম্ব বরাবর $E = E_{1n} + E_{2n} = -\dfrac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta$, কেননা $E_{1t} + E_{2t} = O$। এখানে বিয়োগ চিহ্নটির অর্থ, লব্ধি প্রাবল্যের দিক $\hat{n}$ ভেক্টরের বিপরীতমুখী। যেহেতু $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$

$$E = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cdot\frac{a}{r} = -\frac{qa}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad ... 7.7$$

S পরিবাহীর উপর আবিষ্ট আধানের তলঘনত্ব : আপনি আগেই জেনেছেন যে পরিবাহীর তলে আধানের তলঘনত্ব σ ও তড়িৎক্ষেত্রের লম্বমুখী প্রাবল্য E এর মধ্যে সম্পর্ক $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$। এই সূত্র অনুযায়ী S পরিবাহীর উপর আধানের ঘনত্ব

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\frac{qa}{2\pi r^3} \quad ... 7.8$$

স্পষ্টই বোঝা যায় এই তল ঘনত্বের মান সর্বাধিক হবে যখন $r = a$ ।

তল ঘনত্বের এই সর্বোচ্চ মান $\sigma_0 = -\dfrac{qa}{2\pi a^3} = -\dfrac{q}{2\pi a^2}$ ... 7.9

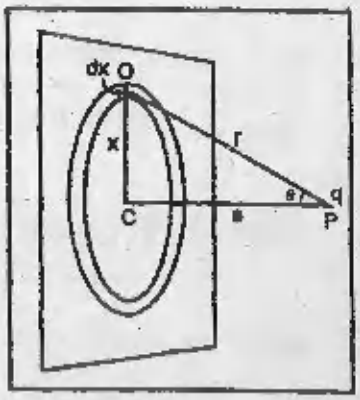
এবং $$\sigma = \sigma_0\cdot\frac{a^3}{r^3} = \sigma_0\cos^3\theta \quad 7.10$$

S পরিবাহীতে মোট আবিষ্ট আধান

7.10 রাশিমালার সাহায্যে এখন আমরা অসীম পরিবাহী তলটির উপর মোট আবিষ্ট আধানের পরিমাণ নির্ণয় করতে পারি। তলটির উপর C বিন্দুকে কেন্দ্র করে x ও x + dx ব্যাসার্ধের দুটি বৃত্ত আঁকা হল (চিত্র 7.4)। বৃত্ত দুটির মধ্যে বলয়াকার অঞ্চলের ক্ষেত্রফল $2\pi x dx$ এবং 7.10 সূত্র অনুযায়ী এই অঞ্চলে আবিষ্ট আধানের তলঘনত্ব $\sigma_0\cos^3\theta$, যেখানে $\cos\theta = a/r$। ক্ষেত্রফল $2\pi x\,dx = 2\pi.a\tan\theta.a\sec^2\theta\,d\theta = 2\pi a^2\tan\theta\sec^2\theta d\theta$

অর্থাৎ এই অঞ্চলে আবিষ্ট আধান $dq' = \sigma_o\, 2\pi a^2 \cos^3\theta \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta - \sigma_o 2\pi a^2 \sin\theta d\theta$ যেহেতু পরিবাহী পাতটি অসীম, dq' রাশিকে $\theta = o$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে সমাকলন করে, মোট আবিষ্ট আধান

$$q' = \int dq' = \sigma_o\, 2\pi a^2 \int_{\theta=o}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = -q \qquad 7.11$$



চিত্র 7.4

এ থেকে বোঝা যায় যে মোট আবিষ্ট আধান আরোপিত আধান q এর সমমান ও বিপরীত চিহ্নের। লক্ষণীয় যে আমাদের কল্পিত প্রতিবিম্ব আধানটি মোট আবিষ্ট আধানের সমান।

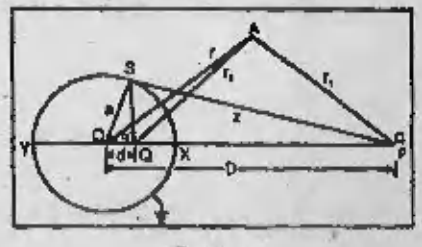
পরবর্তী অংশে যাওয়ার আগে একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী 1

আরোপিত আধান q এবং s তলে আবিষ্ট আধানের মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণী বলের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

7.4.2 ভূসংলগ্ন পরিবাহী গোলকের সমীপে বিন্দু আধান

আপনি লক্ষ্য করে থাকবেন, অসীম দূরত্ব পর্যন্ত বিস্তৃত পরিবাহী তলটিকে আমরা ভূসংযুক্ত ($\phi = o$) বলে ধরে নিয়েছিলাম। যেহেতু অসীম দূরত্বে বিভব শূন্য, পরিবাহী তলটির শূন্য ব্যতীত অন্য বিভবে থাকা সম্ভব নয়। একটি সসীম পরিবাহী গোলকের ক্ষেত্রে একথা বলা যায় না। এরূপ গোলক ভূসংযুক্ত হতে পারে; আবার অন্তরিত অবস্থায় কাছাকাছি থাকা আধানের অবস্থান ও তার নিজস্ব আধান অনুযায়ী যে কোন বিভবে থাকতে পারে। আমরা এই অবস্থাগুলি পৃথকভাবে আলোচনা করব। এই অংশে গোলকটি ভূসংযুক্ত আছে বলে ধরে নেওয়া হবে।



চিত্র 7.5

7.5 চিত্রে শূন্যে রক্ষিত a ব্যাসার্ধের একটি পরিবাহী গোলকের কেন্দ্র O এবং তার কেন্দ্র থেকে D দূরত্বে p বিন্দুতে একটি বিন্দু আধান q রয়েছে। আমরা গোলকটির বাইরে অসীম দূরত্ব পর্যন্ত বিস্তৃত অঞ্চলের প্রতি মনোনিবেশ করব।

এক্ষেত্রে প্রযোজ্য সীমাশর্তগুলি হল

(ক) P বিন্দু ব্যতীত সর্বত্র বিভব ϕ লাপ্লাস সমীকরণ $\nabla^2\phi = 0$ পালন করবে।

(খ) অসীম দূরত্বে $\phi \to 0$

(গ) S গোলকের উপর যে কোন বিন্দুতে $\phi = 0$, কেননা গোলকটি ভূসংযুক্ত।

(ঘ) P বিন্দুকে বেষ্টন করে থাকা আবদ্ধ তলের উপর $\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = q/\epsilon_o$

গোলকের উপর q আধানটি কিছু আবিষ্ট আধান উৎপন্ন করে, যার বণ্টন আমাদের অজ্ঞাত। কিন্তু আমরা গোলকটিকে একটি গোলকাকৃতি জ্যামিতিক তল দিয়ে প্রতিস্থাপিত করে গোলকের ভিতরের অঞ্চলে একটি প্রতিবিম্ব

আধান কল্পনা করতে পারি যা q আধানের সঙ্গে একযোগে উপরের সীমাশর্তগুলি প্রতিপালন করবে। প্রতিসাম্য থেকে বলা যায় যে এরূপ একটি প্রতিবিম্ব আধান OP সরলরেখার উপরেই রাখতে হবে। ধরুন আমরা OP সরলরেখার উপর Q বিন্দুতে একটি প্রতিবিম্ব আধান q' রাখলাম, যেখানে $OQ = d$। বর্ধিত OP সরলরেখা গোলকটিকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন X বিন্দুতে বিভব $\phi_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{PX} + \frac{q'}{QX}\right)$। যেহেতু $\phi_x = 0$, $q' = -q\frac{QX}{PX} = -q\frac{a-d}{D-a}$

আবার, Y বিন্দুতে বিভব $\phi_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{PY} + \frac{q'}{QY}\right)$।

যেহেতু $\phi_y = 0$, $q' = -q\frac{QY}{PY} = -q\frac{a+b}{D+a}$

q' এর দুই মানকে সমানীত করে

$$-q\frac{a-d}{D-a} = -q\frac{a+d}{D+a}, \text{ বা সমাধান করে, } d = \frac{a^2}{D} \qquad \ldots 7.12a$$

এখন আপনি সহজেই দেখাতে পারেন, $q' = -q\frac{a}{D}$ ... 7.12b

আপনার মনে হতে পারে, P ও Q বিন্দুতে যথাক্রমে q ও $q'\left(= -q\frac{a}{D}\right)$ আধান দুটি গোলকের তলে যে কোন বিন্দুতে শূন্য বিভব সৃষ্টি করে কি না। এটি পরীক্ষা করার জন্য ঐ তলে যে কোন বিন্দু S নিন। S বিন্দুতে বিভব

$$\phi_s = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot SP} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 \cdot SQ} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{SP} - \frac{a/D}{SQ}\right) \text{ (12b অনুযায়ী)}$$

লক্ষ্য করুন, ΔOQS এবং ΔOSP ত্রিভুজ দুটির $\angle SOP$ বা $\angle SOQ$

সাধারণ কোণ এবং $\frac{OQ}{OS} = \frac{d}{a} = \frac{a^2}{aD} = \frac{a}{D} = \frac{OS}{OP}$। সুতরাং

ত্রিভুজ দুটি সদৃশ এবং $\frac{SP}{SQ} = \frac{OS}{OQ} = \frac{a}{a^2/D} = \frac{D}{a}$

$\therefore SP = \frac{SQ}{a/D}$ অর্থাৎ $\phi_s = 0$ এবং বিভব ϕ (গ) সীমাশর্তকে পালন করছে। অন্যান্য সীমাশর্তগুলিও যে পালিত হচ্ছে তা আপনি সহজেই দেখে নিতে পারেন। এখন অনন্যতার উপপাদ্য ব্যবহার করে আমরা বলতে পারি যে প্রকৃত আধান q এবং প্রতিবিম্ব আধান q' গোলকের বাইরে যে তড়িৎক্ষেত্র সৃষ্টি করে এবং তার দ্বারা গোলকের উপর যে আধান বণ্টন উৎপন্ন হয় তা অনন্য এবং সঠিক।

এবার আমরা গোলকের বাইরে কোন বিন্দুতে তড়িৎ বিভব ও তড়িৎ প্রাবল্যের মান নির্ণয় করব। O বিন্দুকে কেন্দ্র এবং OP সরলরেখাকে অক্ষ ধরে একটি গোলীয় নির্দেশতন্ত্র কল্পনা করুন। ধরা যাক A বিন্দুটি (r,θ) নির্দেশাঙ্কে অবস্থিত, $OA = r$, $\angle POA = \theta$।

A বিন্দুতে বিভব ϕ_A, $AP = r_1$, $AQ = r_2$ লিখলে

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{a/D}{r_2}\right]$$

চিত্র 7.5 থেকে

$$r_1^2 = r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta$$

এবং $r_2^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta$

$$\text{বা } \frac{D}{a}r_2 = \frac{D}{a}\left(r^2 + \frac{a^4}{D^2} - 2r\cdot\frac{a^2}{D}\cos\theta\right)^{1/2}$$ [7.12a সমীকরণের সাহায্যে]

$$= \left(\frac{D^2}{a^2}r^2 + a^2 - 2rD\cos\theta\right)^{1/2}$$

$$\therefore\ \phi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left[(r^2+D^2-2rD\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} - \left(a^2+\frac{D^2}{a^2}r^2-2rd\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad \ldots 7.13$$

যখন $r = a$ অর্থাৎ A বিন্দুটি গোলকের উপর অবস্থিত তখন $\phi_a = o$, এটি আপনি মিলিয়ে দেখে নিন।

গোলকের উপর আবিষ্ট আধানের ঘনত্ব নির্ণয় করতে আমাদের গোলকের তলে প্রাবল্যের মান জানা প্রয়োজন। পরিবাহীর তলে প্রাবল্যের স্পার্শক উপাংশ শূন্য হয়, সুতরাং আমরা এক্ষেত্রে প্রাবল্যের অরীয় (radial) উপাংশটি বার করব। A বিন্দুতে এই উপাংশের মান

$$E_r = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_\theta = -\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\left[-\frac{1}{2}\frac{2(r-D\cos\theta)}{(r^2+D^2-2rD\cos\theta)^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{2\left(\frac{D^2}{a^2}r - D\cos\theta\right)}{\left(a^2+\frac{D^2}{a^2}r^2-2rD\cos\theta\right)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{r-D\cos\theta}{(r^2+D^2-2rD\cos\theta)^{3/2}} - \frac{D^2r/a^2-D\cos\theta}{(a^2+D^2r^2/a^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\right]$$

A বিন্দু যখন গোলকের তলে অবস্থিত, তখন $r = a$। এই অবস্থায়

$$(E_r)_{r=a} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{D^2/a-a}{(a^2+D^2-2aD\cos\theta)^{3/2}} \quad \ldots 7.14$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{D^2-a^2}{az^3}$$ যেখানে $z = SP$ দূরত্ব।

এখন আমরা পরিবাহী গোলকটির তলে আধানের তলঘনত্ব σ নির্ণয় করতে পারি। আমরা জানি E_r এর মান গোলকটির তলের কাছাকাছি $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, সুতরাং $\sigma = -\frac{q}{4\pi}\frac{D^2-a^2}{az^3}$, যা সর্বদাই নেগেটিভ। ...7.15

পরিবাহী গোলক ও আবেশক আধানের মধ্যে আকর্ষণ ঃ

পরিবাহী গোলকের উপর আবিষ্ট আধান নেগেটিভ হওয়ায় আধান q এবং গোলকের মধ্যে আকর্ষণী বল কাজ করবে। এই বলের পরিমাণ আপনি সহজেই নির্ণয় করতে পারেন (অনুশীলনী 1 ও তার উত্তর দেখুন) কেননা এটি আধান q ও প্রতিবিম্ব আধান q′ এর মধ্যে আকর্ষণের সমান। সুতরাং আকর্ষণী বল

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 PQ^2} = \frac{q^2a}{4\pi\epsilon_0 D(D-a^2/D)^2} = \frac{q^2aD}{4\pi\epsilon_0 (D^2-a^2)^2} \quad ...7.16$$

দুটি বিশেষ ক্ষেত্র

যখন D>>a, অর্থাৎ আধানটি গোলক থেকে গোলকের ব্যাসার্ধের তুলনায় অনেক দূরে অবস্থিত। তখন $F = \frac{q^2a}{4\pi\epsilon_0 D^3}$ অর্থাৎ আকর্ষণী বল আধান থেকে গোলকের দূরত্বের তৃতীয় ঘাতের ব্যস্তানুপাতী।

যখন আধানটি গোলকের খুবই নিকটে, অর্থাৎ $D - a << a$, তখন ধরা যায় $D = a + \delta$, $\delta << a$। যেহেতু $D^2 - a^2 = (a+\delta)^2 - a^2 \approx 2a\delta$, 7.16 সূত্র থেকে পাওয়া যায় $F \approx \frac{q^2 \cdot a \cdot a}{4\pi\epsilon_0 \cdot (2a\delta)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 \delta^2}$। এই ফলটি আপনি অনুশীলনী - 1 এর উত্তরের সঙ্গে তুলনা করে দেখতে পারেন।

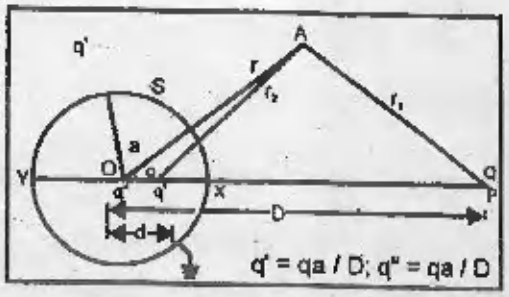
7.4.3 অন্তরিত পরিবাহী গোলকের সমীপে বিন্দু আধান

পূর্ববর্তী অংশে আমরা যে পরিবাহী গোলকের কথা আলোচনা করেছি সেটি ভূসংযুক্ত থাকায় বিভব শূন্যমানে নির্দিষ্ট ছিল কিন্তু গোলকটির আধান সুনির্দিষ্ট ছিল না। এবার আমরা গোলকটিকে অন্তরিত বলে ধরে নেব যার ফলে গোলকটির আধান সুনির্দিষ্ট হলেও বিভব নির্ভর করবে বিন্দু আধানের দূরত্ব এবং গোলকের নিজস্ব আধানের উপর। প্রথমে ধরা যাক গোলকটির নিজস্ব আধান শূন্য। গোলকের বাইরের তড়িৎক্ষেত্র 7.4.2 অংশে উল্লেখ করা ক, খ ও ঘ-এর অনুরূপ সীমাশর্ত পালন করবে। তবে গ শর্তের পরিবর্তে লিখতে হবে ঃ

(গ) S গোলকের সর্বত্র বিভব অজ্ঞাত হলেও অপরিবর্তিত থাকবে। কিন্তু গোলকটির অনাহিত হওয়ায় গোলকটিকে সম্পূর্ণ বেষ্টন করে থাকা আবদ্ধ তলের উপর সমাকলন $\oint \vec{E}.\vec{ds}$ এর মান শূন্য হবে।

7.6 চিত্রে a ব্যাসার্ধের একটি অন্তরিত গোলক এবং তার সমীপে p বিন্দুতে q বিন্দু আধান রয়েছে। পূর্বের মত গোলকের কেন্দ্র O, দূরত্ব OP = D . OQ = $d = a^2/D$। আপনি 7.4.2 অংশে দেখেছেন যে Q বিন্দুতে $q' = -qa/d$ মানের প্রতিবিম্ব আধান কল্পনা করলে সেটি q আধানের সঙ্গে মিলিতভাবে গোলকের তলে শূন্য বিভব বজায় রাখে। (কিন্তু গ-সীমাশর্তটি পালন করতে হলে গোলকাকৃতি তলের) মধ্যে কোন বিন্দুতে $q'' = qa/d$ মানের আরও একটি প্রতিবিম্ব আধান কল্পনা করতে হবে। যেহেতু গোলকের সর্বত্র সমান বিভব থাকতে হবে, এই বাড়তি প্রতিবিম্বটি একমাত্র গোলকের কেন্দ্র O বিন্দুতেই থাকা সম্ভব। আপনি আগেই জানেন যে এই আধানটি গোলকের তলে

$\frac{qa/D}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D}$ বিভব সৃষ্টি করবে। মোটের উপর P, Q ও O বিন্দুতে যথাক্রমে প্রকৃত আধান q এবং প্রতিবিম্ব আধান – qa/D ও qa/D সবগুলি সীমাশর্ত প্রতিপালন করে এবং এগুলির দ্বারা গোলকের বহিরাঞ্চলে উৎপন্ন তড়িৎক্ষেত্রই অনন্য ও সঠিক সমাধান।



চিত্র 7.6

এখন আমরা গোলকের বাইরে কোন একটি বিন্দু A-তে বিভব নির্ণয় করব। স্পষ্টতই বোঝা যায় এই বিভব

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r_1} - \frac{qa/D}{r_2} + \frac{qa/D}{r}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[(r^2+D^2-2rD\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} - \left(a^2 + \frac{D^2}{a^2}r^2 - 2rD\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{a}{rD}\right]$$

(7.13 সূত্র ব্যবহার করে) ... 7.17

উপরের রাশিমালায় r = a বসিয়ে দেখে নিতে পারেন যে ϕ_a এর মান হয় $q/4\pi\epsilon_0 D$, যেটি কোণ θ এর উপর নির্ভরশীল নয়। সুতরাং ϕ বিভবটি গোলকের উপর সর্বত্র সমমান থাকে।

পূর্বের মত, A বিন্দুতে তড়িৎপ্রাবল্যের অরীয় উপাংশ

$$E_r = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{r - D\cos\theta}{(r^2+D^2-2rD\cos\theta)^{3/2}} - \frac{D^2 r/a^2 - D\cos\theta}{(a^2+D^2r^2/a^2-2rD\cos\theta)^{3/2}} + \frac{a}{r^2D}\right]$$

যখন r = a, $(E_r)_{r=a} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{D^2/a^2 - a}{(a^2+D^2-2aD\cos\theta)^{3/2}} - \frac{1}{aD}\right]$ ... 7.18

সুতরাং পরিবাহী গোলকের তলে আবিষ্ট আধানের তল ঘনত্ব

$$\sigma = \epsilon_0 (E_r)_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a}\left[\frac{D^2 - a^2}{(a^2+D^2-2aD\cos\theta)^{3/2}} - \frac{1}{D}\right] \quad ... 7.19$$

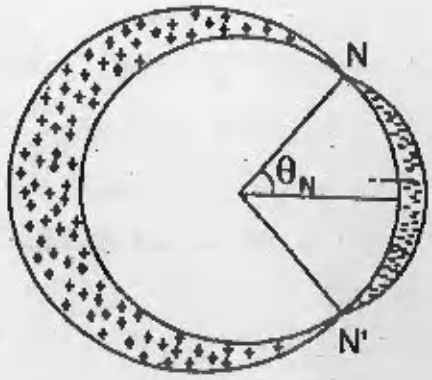
এই আবিষ্ট আধান পজিটিভ না নেগেটিভ তা কি বলতে পারেন?

যখন θ = o, $\sigma = -\frac{q}{4\pi a}\left[\frac{D^2 - a^2}{(D-a)^3} - \frac{1}{D}\right] = -\frac{q}{4\pi D}\cdot\frac{3aD - a^2}{(D-a)^2}$

এটি অবশ্যই নেগেটিভ আধান বোঝাচ্ছে। অপরপক্ষে,

যখন $\theta = \pi$, $\sigma = -\dfrac{q}{4\pi a}\left[\dfrac{D^2 - a^2}{(D+a)^3} - \dfrac{1}{D}\right] = \dfrac{q}{4\pi D} \cdot \dfrac{a + 3D}{(D+a)^2}$

যা পজিটিভ আধান ঘনত্ব বোঝায়। এর থেকে নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে আবেশক আধান q পরিবাহী গোলকে সমপরিমাণ পজিটিভ ও নেগেটিভ আধান উৎপন্ন করে এবং পজিটিভ আধানকে বিকর্ষণ করে নেগেটিভ আধানকে নিজের দিকে টেনে নেয়। চিত্র 7.7 এ আবিষ্ট আধানের বণ্টনটি দেখানো হয়েছে। গোলকের উপর θ এর কোন এক মানের জন্য এমন একটি বৃত্তাকার অঞ্চল পাওয়া যায় (NN') যেখানে কোন আধানই থাকে না। θ এর ঐ মানের জন্য 7.1 সূত্রে $\sigma = o$ হয়। তখন সহজেই দেখানো যায় যে ঐ অনাহিত বৃত্তের জন্য



চিত্র 7.7

$$\cos\theta_N = \frac{a^2 + D^2 - \{D(D^2 - a^2)\}^{2/3}}{2aD} \qquad \ldots 7.20$$

cosθ এর রাশিমালা নির্ণয় করার কাজটি আপনার জন্য রাখা হল। লক্ষ্য করুন যে $[D(D^2 - a^2)]^{2/3} \angle D^2$, সুতরাং cosθ পজিটিভ এবং θ-এর মান 90° অপেক্ষা কম।

একটি সাংখ্যিক উদাহরণ

ধরা যাক অন্তরিত ও আধানহীন পরিবাহী গোলকের ব্যাসার্ধ a = 6 cm, তার কেন্দ্র থেকে D = 36 cm দূরে q = 2μC (মাইক্রো কুলম্ব) আধান রাখা আছে। এক্ষেত্রে

$d = a^2/D = 1$ cm, $q' = -2.6/36 = -0.33C$, $q'' = 0.33C$ পরিবাহী গোলকের বিভব $q / 4\pi\epsilon_0 D = 2\times10^{-6}C/.36m \times 9 \times 10^9 Nm^2/C^2 = 50{,}000V$

$$\left(\text{কেননা } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9\ Nm^2/C^2 \right)$$

7.18 সূত্র থেকে, গোলকের তলে তড়িৎপ্রাবল্য

$$(E)r = a = -2 \times 10^{-6} \times 9 \times 10^9 \left[\frac{(\cdot 36)^2/\cdot 06 \quad - \cdot 06}{(\cdot 06^2 + \cdot 36^2 - 2\times\cdot 06\times\cdot 36\cos\theta)^{3/2}} - \frac{1}{\cdot 06 \times \cdot 36}\right]$$

$$= \left[8\cdot 33 - \frac{7\cdot 78}{(1 - \cdot 3243\cos\theta)^{3/2}}\right] \times 10^5\ N/C$$

আবার 7.20 সূত্র থেকে, অনাহিত বৃত্তের জন্য

$$\cos\theta_N = \frac{\cdot 06^2 + \cdot 36^2 - [\cdot 36\,(\cdot 36^2 - \cdot 06^2)]^{2/3}}{2\times \cdot 06\times \cdot 36}$$

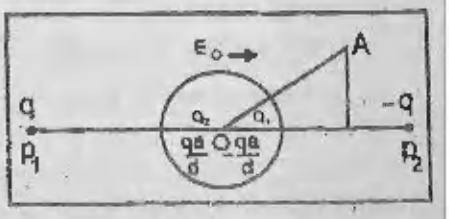
$$= 0.139\text{, অর্থাৎ } \theta_N \approx 82^\circ।$$

এ পর্যন্ত আমরা ধরেছি অন্তরিত গোলকটির নিজস্ব মোট আধান শূন্য। গোলকটির যদি নিজস্ব আধান q_0 থাকে তাহলে কীভাবে গোলকের বাইরে তড়িৎক্ষেত্রের সমাধান করবেন? এক্ষেত্রে (গ) সীমাশর্তটি পরিবর্তিত হয়ে দাঁড়াবে — গোলকটিকে সম্পূর্ণ বেষ্টন করে থাকা আবদ্ধ তলের উপর সমাকলন $\oint \vec{E}\cdot \vec{ds} = \frac{q_0}{\epsilon_0}$। আবার গোলকটির উপর বিভব সর্বত্র সমান থাকতে হবে। এই দুটি শর্ত পালন করা যাবে যদি গোলকটিকে গোলকাকৃতি জ্যামিতিক তল দিয়ে প্রতিস্থাপিত করার পর তার কেন্দ্রে q_0 প্রতিবিম্ব আধান রাখা হয়।

এই q_0 আধানের ফলে 7.17 সূত্রে ϕ_A এর রাশিমালায় $\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$ রাশিটি যুক্ত হবে। ϕ_P, $(Er)_{r\to\infty}$ এবং σ এর রাশিমালাগুলিতে কী পরিবর্তন ঘটবে তা আপনি নিজেই নির্ণয় করতে পারবেন।

7.4.4 সুষম তড়িৎক্ষেত্রে অন্তরিত পরিবাহী গোলক

আগের অংশে অন্তরিত পরিবাহী গোলকটি একটি বিন্দু আধানের তড়িৎক্ষেত্রে রয়েছে বলে ধরা হয়েছে। এই তড়িৎক্ষেত্র সুষম নয়, বরং তা বিন্দু আধান থেকে দূরত্বের উপর নির্ভরশীল। এখন আমরা a ব্যাসার্ধের পরিবাহী গোলকটির মোট আধান শূন্য এবং সেটি x অক্ষ অভিমুখী $\vec{E}_0$ (চিত্র 7.8) সুষম তড়িৎক্ষেত্রে, অর্থাৎ সর্বত্র মান E_0 ও দিক x বরাবর, এমন তড়িৎক্ষেত্রে বসানো হয়েছে বলে কল্পনা করব।



চিত্র 7.8

গোলকের বাইরের তড়িৎক্ষেত্রে বিভব ϕ দুটি ভিন্ন রাশিমালা ϕ_0 ও ϕ_1 এর সমষ্টি বলে ধরা যায়। এর মধ্যে ϕ_0 বিভবটি E_0 তড়িৎক্ষেত্র থেকে এবং ϕ_1 গোলকের উপর আবিষ্ট আধান থেকে উৎপন্ন। যেহেতু $E_0 = -\frac{\partial\phi_0}{\partial x}$, $\phi_0 = -E_0 x$ লেখা যায়। যেখানে গোলকের কেন্দ্রে $x = 0$ ও $\phi_0 = 0$ ধরা হয়েছে। যে কোন বিন্দু A-এর ক্ষেত্রে $x = r\cos\theta$ (চিত্র দেখুন), সুতরাং $\phi_0 = -E_0 r\cos\theta$। ϕ_1 এর মান নির্ণয় করতে আমাদের প্রতিবিম্ব পদ্ধতির সাহায্য নিতে হবে।

ϕ_1 বিভবটি নীচের সীমাশর্তগুলি পালন করবে

(ক) $\nabla^2\phi_1 = 0$, সর্বত্র

(খ) অসীম দূরত্বে $\phi_1 \to 0$

(গ) গোলকটি বেষ্টন করে সমাকলন করলে $\oint \nabla\phi_1 . \vec{ds} = 0$

গোলকের কেন্দ্র দিয়ে $\vec{E}_0$ এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা কল্পনা করুন এবং ধরে নিন ঐ সরলরেখার উপর গোলকের দুই পাশে P_1 ও P_2 বিন্দুতে যথাক্রমে q ও – q আধান রাখা আছে। $OP_1 = OP_2 = D$ হলে আধান দুটি

গোলকের কেন্দ্রে যে তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন করে তা P_1P_2 অর্থাৎ $\vec{E}_o$ এর সমান্তরাল এবং তার মান E ; q ও -q দ্বারা উৎপন্ন তড়িৎক্ষেত্র দ্বয়ের যোগফল। সুতরাং $E = P_1P_2$ অভিমুখে $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 D^2} - \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 D^2} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 D^2}$ যখন D>>a। তখন এই তড়িৎক্ষেত্রটি গোলকটির সর্বত্র সুষম থাকে বলে ধরা যায়। এই তড়িৎক্ষেত্র E_o এর অনুরূপ হবে যদি

$E_0 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 D^2}$, অর্থাৎ $\frac{q}{D^2} = 2\pi\epsilon_o E_o$ হয় এবং এই শর্তসাপেক্ষে $q \to \infty, D \to \infty$ ধরা যায়।

এখন আমরা E_o তড়িৎক্ষেত্রটি q ও – q আধান দ্বারা উৎপন্ন হয়েছে বলে ধরে নিতে পারি। 7.4.3 অংশের মত আমরা গোলকটিকে একটি গোলকাকৃতি জ্যামিতিক তল ধরে নিয়ে Q_1 বিন্দুতে $-q\frac{a}{D}$ এবং Q_2 বিন্দুতে $q\frac{a}{D}$ আধান কল্পনা করতে পারি, যেখানে $OQ_1 = OQ_2 = \frac{a^2}{D} = d$, ধরুন। আপনি বুঝতেই পারছেন যে Q_1 ও Q_2 বিন্দুদ্বয়ের আধান দুটি যথাক্রমে P_1 ও P_2 বিন্দুদ্বয়ের q ও – q আধানের প্রতিবিম্ব আধান।

$D \to \infty$, অর্থাৎ $d \to 0$ সীমায় Q_1 ও Q_2 বিন্দুদ্বয়ের প্রতিবিম্ব আধান দুটি একটি তড়িৎ-দ্বিমেরু (electric dipole) গঠন করবে যার ভ্রামক $M = q\frac{a}{D} \cdot Q_1Q_2 = q\frac{a}{D} \cdot 2\frac{a^2}{D} = 2q\frac{a^3}{D^2} = 4\pi\epsilon_o E_o a^3$ ...7.21

আপনার জানা আছে M দ্বিমেরু ভ্রামক বিশিষ্ট দ্বিমেরুর জন্য বিভব

$$\phi_1 = \frac{M\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

সুতরাং গোলকের বাইরে যে কোন বিন্দুতে বিভব

$$\phi_A = \phi_o + \phi_1 = -E_o r\cos\theta + \frac{M\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= -E_o r\cos\theta + E_o a^3 \cdot \frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$= E_o\cos\theta\left[\frac{a^3}{r^2} - r\right] \quad ...7.22$$

এখন আমরা সহজেই তড়িৎ প্রাবল্যের অরীয় উপাংশ নির্ণয় করতে পারি।

$$E_r = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_\theta = E_o\cos\theta\left[\frac{2a^3}{r^3} + 1\right]$$

গোলকের তলে এর মান $(E_r)_{r=a} = 3E_o\cos\theta$

সুতরাং গোলকের উপর আবিষ্ট আধানের তল ঘনত্ব

$$\sigma = \epsilon_0 (E_r)_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta \qquad \ldots 7.23$$

লক্ষ্য করুন এই আধান ঘনত্ব $\cos\theta$ এর সমানুপাতী, অর্থাৎ গোলকের অর্ধেক তলে পজিটিভ ও বাকি অর্ধেক তলে নেগেটিভ। আমরা জানি পরিবাহী দিয়ে আবদ্ধ অঞ্চলে কোন তড়িৎ প্রাবল্য থাকে না। সুতরাং $3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$ মানের আবিষ্ট আধান গোলকটির মধ্যে $-\vec{E}_0$ তড়িৎক্ষেত্র সৃষ্টি করে, যা বাইরের $\vec{E}_0$ তড়িৎক্ষেত্রটিকে প্রশমিত করে গোলকের ভিতরের অঞ্চলকে প্রাবল্যমুক্ত রাখে। এবার কয়েকটি অনুশীলনীর উত্তর দেওয়ার সময় হয়েছে।

অনুশীলনী 2

i) প্রমাণ করুন যে একটি অন্তরিত এবং শূন্য মোট আধানের পরিবাহী গোলকের সমীপে একটি বিন্দু আধান থাকলে পরস্পরের মধ্যে একটি আকর্ষণী বল ক্রিয়া করবে।

ii) 7.13 সূত্রে বিভবের মান ব্যবহার করে দেখান যে পরিবাহী গোলকের তলে তড়িৎ প্রাবল্যের স্পার্শক উপাংশের মান শূন্য হয়।

iii) ধরে নিন 7.4.3 অংশে যে অন্তরিত গোলক সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে তা একটি V_0 তড়িৎচালক বলের ব্যাটারীর পজিটিভ প্রান্তে যুক্ত এবং ব্যাটারীর নেগেটিভ প্রান্ত ভূসংযুক্ত। এই অবস্থায় কোন কোন প্রতিবিম্ব আধান মূল আবেশক আধানের সঙ্গে গোলকের বাইরে সঠিক তড়িৎক্ষেত্র উৎপাদন করবে?

iv) একটি ফাঁপা গোলকের উপর $\sigma_0 \cos\theta$ মানের তলঘনত্বের আধান থাকলে গোলকের মধ্যে কী ধরনের তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন হবে?

7.5 প্রতিবিম্ব পদ্ধতির প্রয়োগ — অপরিবাহী ফলক ও গোলক

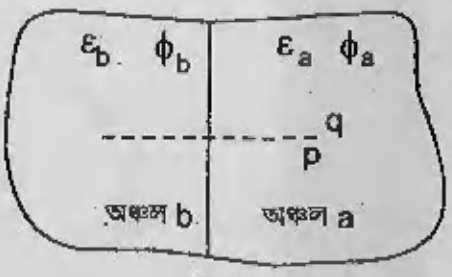
এ পর্যন্ত আপনি পরিবাহী পাত ও গোলক সংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধানে প্রতিবিম্ব পদ্ধতির প্রয়োগের কথা পড়েছেন। মাধ্যমটিকে আমরা সর্বদাই বায়ু বা শূন্য বলে ধরে নিয়েছি। এবার আমরা অপরিবাহী বা ডাইলেকট্রিক মাধ্যমের কথা বিবেচনা করব এবং আপনি লক্ষ্য করবেন যে সীমাশর্তগুলির মধ্যে বিভিন্ন মাধ্যমের বিদ্যুৎশীলতা একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা গ্রহণ করবে।

7.5.1 অসীম অপরিবাহী ফলকের প্রান্তের সমীপে বিন্দু আধান

দুটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত অপরিবাহী বা ডাইলেকট্রিক মাধ্যম কল্পনা করুন যেগুলির আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা ϵ_a ও ϵ_b এবং S সমতলটি যাদের বিভেদতল (চিত্র 7.9a)। দুটি মাধ্যমকে আমরা যথাক্রমে অঞ্চল a ও অঞ্চল b এবং ঐ দুই অঞ্চলের বিভবকে আমরা যথাক্রমে ϕ_a ও ϕ_b বলে অভিহিত করব। a অঞ্চলে p বিন্দুতে একটি বিন্দু আধান q আছে, ধরা যাক। এখন আমরা দুই অঞ্চলেই তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের চেষ্টা করব। প্রথম অঞ্চলে বিভব ϕ_a দ্বারা পালিত সীমাশর্ত

(ক) P বিন্দু ব্যতীত সর্বত্র $\nabla^2\phi_a = 0$

(খ) অসীম দূরত্বে $\phi_a \to 0$



চিত্র 7.9a

(গ) P কে বেষ্টন করে কোন আবদ্ধ তলের উপর সমাকলন করলে $\oint \nabla\phi_a . \vec{ds} = q / \epsilon_a \epsilon_o$।

দ্বিতীয় অঞ্চলে বিভব ϕ_b দ্বারা পালিত সীমাগর্ত

(ঘ) সর্বত্র $\nabla^2\phi_b = 0$

(ঙ) অসীম দূরত্বে $\phi_b \rightarrow 0$।

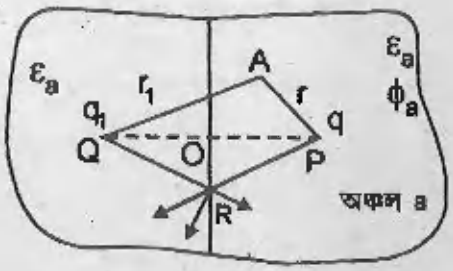
এছাড়া S বিভেদতলের উপর নিম্নোক্ত সীমাশর্তগুলি পালিত হবে :

(চ) $\phi_a = \phi_b$, যেখানে ϕ_a ও ϕ_b যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় অঞ্চলে S তলের অত্যন্ত নিকটবর্তী দুই বিন্দু।

(ছ) $\epsilon_a(\nabla\phi_a)_n = \epsilon_b(\nabla\phi_b)_n$, যেখানে n পাদাংকটি S তলের অভিলম্ব বরাবর উপাংশ বোঝাচ্ছে। এই সীমাশর্তটির অর্থ বিভেদতলে কোন মুক্ত আধান না থাকায় তড়িৎ আবেশ ($\vec{D}$) এর অভিলম্ব উপাংশ বিভেদতলে সন্তত (continuous) হবে। এখন আমাদের দুই অঞ্চলের তড়িৎক্ষেত্র আলাদাভাবে বার করতে হবে।

প্রথম অঞ্চলে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের জন্য ধরা যাক যে b অঞ্চলের মাধ্যম a অঞ্চলের ϵ_a আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতার ডাইলেকট্রিক দ্বারা প্রতিস্থাপিত হয়েছে। এবং S তলে P বিন্দুর প্রতিবিম্ব Q বিন্দুতে একটি প্রতিবিম্ব আধান q_1 রাখা হয়েছে (চিত্র 7.9b)। এখন a অঞ্চলের কোন এক বিন্দু Aতে বিভব

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\epsilon_a r} + \frac{q_1}{\epsilon_a r_1}\right)$$



চিত্র 7.9b

A বিন্দুটি যদি বিভেদতলের অত্যন্ত নিকটে (R) অবস্থিত হয় তবে

$$\phi_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_a r_o}(q+q_1) \qquad \text{... 7.24}$$

আবার R বিন্দুতে প্রাবল্যের অভিলম্ব উপাংশ $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_a r_o^2}\cdot\frac{OP}{r_o} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_a r_o^2}\cdot\frac{OP}{r_o}$

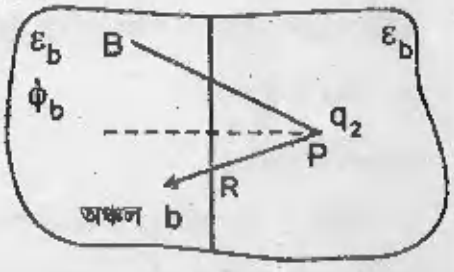
$$= \frac{OP}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_a r_0^3}(q-q_1)$$

$$\therefore \quad S \text{ তলে } \epsilon_a(\nabla\phi_a)_n = D_{an} = \frac{OP}{4\pi r_o^3}(q-q_1)$$

দ্বিতীয় অঞ্চলের ক্ষেত্রে ধরে নিন যে প্রথম অঞ্চলের মাধ্যম ϵ_b আঃ বিদ্যুৎশীলতার ডাইলেকট্রিক দ্বারা প্রতিস্থাপিত হয়েছে। এবং P বিন্দুতে q এর পরিবর্তে একটি প্রতিবিম্ব আধান q_2 রাখা হয়েছে (চিত্র 7.9c)। এখন b অঞ্চলের B বিন্দুতে বিভব $\phi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_o \epsilon_b}\cdot\frac{q_2}{r_2}$। পূর্বের মত B বিন্দুটি যদি বিভেদ তলে R এর অত্যন্ত নিকটে অবস্থিত হয় তবে $\phi_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_o \epsilon_b r_o}\cdot q_2$ ... 7.25

এবং প্রাবল্যের অভিলম্ব উপাংশে $\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_b r_0^2} \cdot \frac{OP}{r_0} = \frac{OP}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_b r_0^3} \cdot q_2$

$\therefore$ S তলে $\epsilon_b (\nabla\phi_b)_n = D_{bn} = \frac{OP}{4\pi r_0^3} \cdot q_2$



চিত্র 7.9c

7.24 ও 7.25 সমীকরণে ϕ_R এর মান সমানীত করে

$\frac{q+q_1}{\epsilon_a} = \frac{q_2}{\epsilon_b}$, বা $q + q_1 = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_b} q_2$

এবং $D_{an} = D_{bn}$, $\therefore \frac{OP}{4\pi r_0^3}(q - q_1) = \frac{OP}{4\pi r_0^3} q_2$

বা $q - q_1 = q_2$

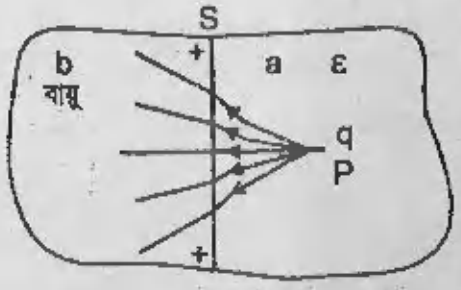
সমাধান করে, $q_1 = \frac{\epsilon_a - \epsilon_b}{\epsilon_a + \epsilon_b} \cdot q$, $q_2 = \frac{2\epsilon_b}{\epsilon_a + \epsilon_b} \cdot q$ ...7.26

q_1, q_2 জানা থাকায় দুই মাধ্যমের তড়িৎ বিভব ও প্রাবল্য সহজেই নির্ণয় করা যাবে।

দুটি বিশেষ ক্ষেত্র :

i) ধরা যাক মাধ্যম a এর আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা $\epsilon_a = \epsilon$ এবং দ্বিতীয় মাধ্যমটি বায়ু, যার $\epsilon_b = 1$। 7.26 সূত্রগুলি থেকে পাওয়া যায়

$$q_1 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} q \quad , \quad q_2 = \frac{2}{\epsilon + 1} q$$

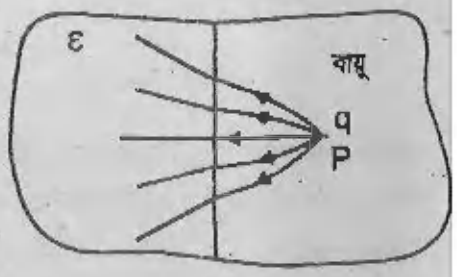


চিত্র 7.9d

7.9d চিত্রে দুই অঞ্চলের তড়িৎবলরেখাগুলি দেখানো হয়েছে। লক্ষ্য করুন, অঞ্চল a-এর বলরেখাগুলি q এবং q_1 আধান দ্বারা উৎপন্ন এবং বক্ররেখা। অঞ্চল b-এর বলরেখাগুলি সরল রেখা কেননা সেগুলি কেবলমাত্র q_2 আধান থেকে উৎপন্ন। এখানে q_1 পজিটিভ, যার অর্থ S তলে মেরুভবনজাত আধান q আধানকে বিকর্ষণ করবে।

ii) এবার ধরুন মাধ্যম 1 এর আপেক্ষিক বিদ্যুৎশীলতা $\epsilon_b = \epsilon$ এবং প্রথম মাধ্যমটি বায়ু, যার ক্ষেত্রে $\epsilon_a = 1$। 7.26 সূত্র থেকে

$$q_1 = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} q \quad , \quad q_2 = \frac{2\epsilon}{\epsilon+1} q$$

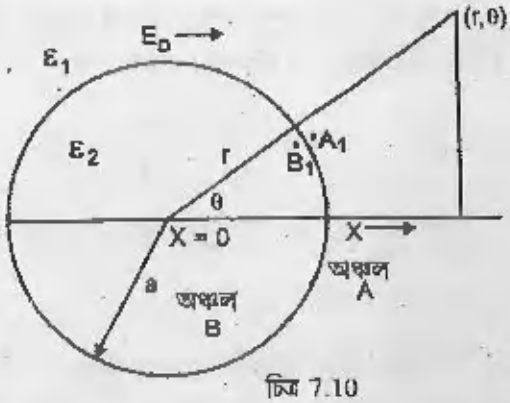


চিত্র 7.9e

এক্ষেত্রেও আগের মত অঞ্চল b এর বলরেখাগুলি সরলরেখা (চিত্র 7.9e)। কিন্তু অঞ্চল a এর বলরেখাগুলি q ও নেগেটিভ প্রতিবিম্ব

আধান $q_1 \left(= -\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}q\right)$ দ্বারা উৎপন্ন হওয়ায় বক্ররেখা। q_1 নেগেটিভ হওয়ার অর্থ S তলের আধান q আধানকে আকর্ষণ করবে।

7.5.2 সুষম তড়িৎক্ষেত্রে অপরিবাহী গোলক



চিত্র 7.10

ধরা যাক ϵ_1 তড়িৎশীলতার একটি মাধ্যমে x - দিক বরাবর $\vec{E}_0$ প্রাবল্যের তড়িৎক্ষেত্র রয়েছে। a ব্যাসার্ধের, ϵ_2 তড়িৎশীলতার অপরিবাহী নির্মিত একটি গোলক এই মাধ্যমে বসানো হল (চিত্র 7.10)। আমরা গোলকের বাইরের অঞ্চলটিকে অঞ্চল A এবং গোলকের ভিতরের অঞ্চলকে অঞ্চল B বলব। গোলকটি বসানোর পূর্বে তড়িৎক্ষেত্রের বিভবকে ϕ_0 বলা হলে

$$-\frac{\partial\phi_0}{\partial x} = E_0 \quad , \quad -\frac{\partial\phi_0}{\partial y} = -\frac{\partial\phi_0}{\partial z} = 0$$

অর্থাৎ, যদি গোলকের কেন্দ্রে $x = 0$, $\phi_0 = 0$ ধরা যায় তবে

$$\phi_0 = -E_0 x \quad (\text{কেননা সমাকলন ধ্রুবক} = 0) = -E_0 r\cos\theta$$

(পোলার নির্দেশাঙ্ক ব্যবহার করে)

7.4.4 অংশে আপনি দেখেছেন যে সুষম তড়িৎক্ষেত্রে পরিবাহী গোলকে যে আধান আবিষ্ট হয় তা একটি দ্বিমেরুর মত আচরণ করে। এক্ষেত্রেও আমরা ধরে নিতে পারি যে A অঞ্চলে তড়িৎ বিভব

$$\phi_A = \phi_0 + \frac{M\cos\theta}{4\pi\epsilon_1 r^2} = \phi_0 + \phi'_A \text{ ধরুন, যেখানে } \phi'_A = \frac{M\cos\theta}{4\pi\epsilon_1 r^2},$$

M = গোলকটির কার্যকরী দ্বিমেরু ভ্রামক। A অঞ্চলে বিভব ϕ'_A নিম্নোক্ত সীমাশর্ত পালন করবে :

ক) সর্বত্র $\nabla^2\phi'_A = 0$

খ) অসীম দূরত্বে $\phi'_A \to 0$।

গোলকের ভিতরে B অঞ্চলে বিভব $\phi_B = \phi_0 + \phi'_B$, যেখানে ϕ'_B গোলকের উপরে মেরুভবনজাত আধান থেকে উদ্ভূত বিভব। ϕ'_B যে সীমাশর্ত পালন করবে সেটি হল

গ) B অঞ্চলে সর্বত্র $\nabla^2\phi'_B = 0$।

এছাড়া A ও B অঞ্চলের বিভেদতলে, অর্থাৎ গোলকের তলে বিভব এবং তড়িৎ আবেশের অভিলম্ব উপাংশ সন্তত থাকবে। অর্থাৎ

ঘ) ϕ_A (A_1 বিন্দুতে) = ϕ_B (B_1 বিন্দুতে), যেখানে A_1 ও B_1 যথাক্রমে A ও B অঞ্চলে অতি সন্নিহিত দুই বিন্দু, এবং

ঙ) $\epsilon_1 \ (\nabla\phi_A)_n \Big]_{A_1} = \epsilon_2 (\nabla\phi_B)_n \Big]_{B_1}$ এখানে n পদাঙ্কটি A_1 ও B_1 বিন্দুতে অভিলম্ব বরাবর উপাংশে বোঝাচ্ছে।

ধরা যাক গোলকের উপরে মেরুভবনজাত আধানের ফলে B অঞ্চলে সর্বত্র তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য সুষম এবং x দিক অভিমুখে E'। প্রতিসাম্য হেতু x ছাড়া অন্য কোন দিকে E'-এর কোন উপাংশ থাকতে পারেনা।

এখন, $-\nabla\phi'_B = -\dfrac{\partial\phi'_B}{\partial x} = E'$

সুতরাং $\phi'_B = -E'x$ (গোলকের কেন্দ্রে $x = 0$, $\phi'_B = 0$ ধরলে সমাকলন ধ্রুবকটির মান শূন্য ধরা যায়)

$$= -E' r\cos\theta \qquad \ldots 7.27$$

এবার আমরা সীমাশর্তগুলি প্রয়োগ করব। (ব) সীমাশর্ত অনুযায়ী, গোলকের উপর অবস্থিত (a, θ) বিন্দুতে $\phi_A = \phi_B$, সুতরাং $\phi_o + \phi'_A = \phi_o - \phi'_B$, অর্থাৎ $\phi'_A = \phi'_B$।

$$\therefore \quad \frac{M\cos\theta}{4\pi\epsilon_1 a^2} = -E' a\cos\theta$$

যেহেতু $\cos\theta \neq 0$, $\quad M = -4\pi\epsilon_1 a^3 E'$ $\qquad \ldots 7.28$

A অঞ্চলে (a, θ) বিন্দুতে,

$$\epsilon_1 (\nabla\phi_A)_n = \epsilon_1\left(\frac{\partial\phi_A}{\partial r}\right)_\theta = \epsilon_1\left(\frac{\partial\phi_o}{\partial r}\right)_\theta + \epsilon_o\left(\frac{\partial\phi'_A}{\partial r}\right)_\theta$$

$$= \epsilon_1 \frac{\partial}{\partial r}(-E_o r\cos\theta)_\theta + \epsilon_1 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{M\cos\theta}{4\pi\epsilon_1 r^2}\right)_\theta$$

$$= -\epsilon_1 E_o\cos\theta - \frac{2M\cos\theta}{4\pi a^3} \qquad \ldots 7.29$$

অনুরূপভাবে, B অঞ্চলে (a, θ) বিন্দুতে

$$\epsilon_2 (\nabla\phi_B)_n = \epsilon_2\left(\frac{\partial\phi_B}{\partial r}\right)_\theta = \epsilon_2\left(\frac{\partial\phi_n}{\partial r}\right)_\theta + \epsilon_2\left(\frac{\partial\phi'_B}{\partial r}\right)_\theta$$

$$= \epsilon_2 \frac{\partial}{\partial r}(-E_o r\cos\theta)_\theta + \epsilon_2 \frac{\partial}{\partial r}(-E' r\cos\theta)_\theta$$

$$= -\epsilon_2 E_o\cos\theta - \epsilon_2 E'\cos\theta \qquad \ldots 7.30$$

সীমাশর্ত (ঙ) থেকে, 7.29 ও 7.30 সূত্রের সাহায্যে,

$$-\epsilon_1 E_o \cos\theta - \frac{2M\cos\theta}{4\pi a^3} = -\epsilon_2 E_o \cos\theta - \epsilon_2 E' \cos\theta$$

বা, $$(\epsilon_2 - \epsilon_1) E_o = -\epsilon_2 E' + \frac{2M}{4\pi a^3}$$

$$= \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{M}{4\pi a^3} + \frac{2M}{4\pi a^3}$$

$$= \left(2 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) \frac{M}{4\pi a^3}$$

অর্থাৎ $M = 4\pi a^3 E_o \dfrac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ এবং $E' = -\dfrac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_o$ ... 7.31

এখন আপনি সহজেই ϕ_A ও ϕ_B এর মান পেতে পারেন :

$$\phi_A = \phi_o + \phi'_A = -E_o r\cos\theta + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{E_o a^3 \cos\theta}{r^2}$$

$$\phi_B = \phi_o + \phi'_B = -E_o r\cos\theta + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot E_o r\cos\theta = -\frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_o r\cos\theta$$

এ থেকে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্যের অরীয় ও কৌণিক উপাংশগুলি পাওয়া যায় :

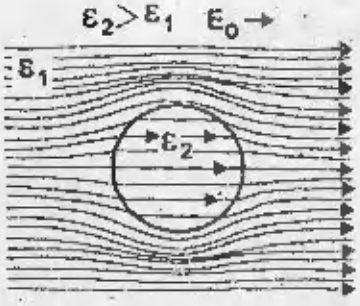
$$(E_A)_r = -\frac{\partial\phi_A}{\partial r} = E_o \cos\theta + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{2E_o a^3 \cos\theta}{r^3} \quad ...7.32(a)$$

$$(E_A)_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_A}{\partial\theta} = \left(-E_o + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{E_o a^3}{r^3}\right)\sin\theta \quad ... 7.32(b)$$

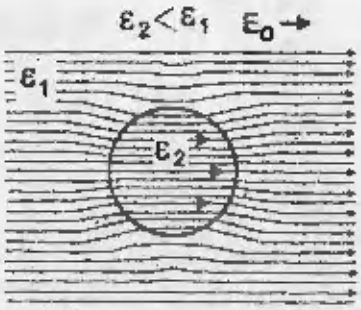
$$(E_B)_r = -\frac{\partial\phi_B}{\partial r} = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_o \cos\theta \quad ... 7.32(c)$$

$$(E_B)_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_B}{\partial\theta} = -\frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_o \sin\theta \quad ... 7.32(d)$$

7.11 চিত্রে তড়িৎক্ষেত্রের বলরেখাগুলি দেখানো হয়েছে। 7.32 (c) ও (d) সমীকরণ থেকে বোঝা যায় গোলকের ভিতর তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য $\dfrac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_o = E_o - \dfrac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_o$। যদি $\epsilon_2 > \epsilon_1$ হয় তবে এই প্রাবল্যের মান E_o অপেক্ষা কম। আসলে গোলকের তলে যে মেরুভবনজাত আধানের সৃষ্টি হয় তা $\dfrac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_o$ মানের একটি বিপরীতমুখী তড়িৎক্ষেত্র উৎপাদন করে। যদি $\epsilon_2 < \epsilon_1$ হয়, তবে এর বিপরীত ঘটনা ঘটে এবং গোলকের অভ্যন্তরে তড়িৎক্ষেত্র বাইরের তুলনায় প্রবলতর হয়।



চিত্র 7.11(a)



চিত্র 7.11(b)

এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী 3. i) ধরুন বায়ুতে একটি কাঁচের ($\epsilon_r = 5$) গোলক সুষম তড়িৎক্ষেত্রে রাখা আছে। গোলকটির মেরুপ্রবণতার (একক প্রাবল্যের তড়িৎক্ষেত্রে একক আয়তনপিছু দ্বিমেরু ভ্রামক) মান নির্ণয় করুন।

7.6 সারাংশ

যখন কোন তড়িৎক্ষেত্রে স্থির তড়িৎ আধান ছাড়াও অন্য পরিবাহী বা অন্তরক পদার্থ উপস্থিত থাকে তখন তড়িৎ আধানটির প্রভাবে পরিবাহীর উপর আবিষ্ট আধান উৎপন্ন হয় অথবা অন্তরক পদার্থের মেরুভবনের ফলে তার উপরেও কিছু মেরুভবনজাত আধান দৃষ্ট হয়। এই আধানগুলির বণ্টন অজ্ঞাত হওয়ায় মোট তড়িৎক্ষেত্রটি নির্ণয় করা অসুবিধাজনক হয়ে দাঁড়ায়। কয়েকটি বিশেষ অবস্থায় এই আধানগুলিকে এক বা একাধিক কল্পিত আধান দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা যায়, যাতে যাবতীয় সীমাশর্ত পালিত হয়। অনন্যতার উপপাদ্য অনুযায়ী, যদি এমন কোন একটি তড়িৎক্ষেত্রের বণ্টন পাওয়া যায় যা সমস্ত সীমাশর্তকে পালন করে, তবে সেটি ছাড়া ভিন্ন কোন বণ্টন থাকা সম্ভব নয়। সুতরাং প্রকৃত আধান ও কল্পিত আধানের সমবায়ে যে তড়িৎক্ষেত্র পাওয়া যায় সেটিকেই উদ্দিষ্ট সমাধান বলে ধরে নেওয়া যায়। এই কল্পিত আধানগুলি প্রকৃত আধানের জ্যামিতিক প্রতিবিম্ব হতে দেখা যায় বলে এই পদ্ধতিটি প্রতিবিম্ব পদ্ধতি নামে পরিচিত।

এই এককে আমরা প্রতিবিম্ব পদ্ধতি ব্যবহার করে একটি বিন্দু আধানের সমীপে অথবা সুষম তড়িৎক্ষেত্রে পরিবাহী বা অন্তরক পদার্থ থাকলে কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে কী ধরনের তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তা নির্ণয় করেছি। আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে পদ্ধতিটি সরল হলেও অত্যন্ত শক্তিশালী, যদিও বিশেষ কিছু জ্যামিতিক অবস্থাতেই এটি প্রয়োগ করা যায়।

7.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(i) অনন্যতার উপপাদ্যটি প্রমাণ করুন এবং এই উপপাদ্যটি কেন প্রতিবিম্ব পদ্ধতির ভিত্তিস্বরূপ তার আলোচনা করুন।

(ii) ভূসংযুক্ত অবস্থায় রাখা একটি অসীম পরিবাহী পাত থেকে 'a' দূরত্বে একটি বিন্দু আধান q রাখা আছে। পাতের উপর আবিষ্ট আধানের তলঘনত্ব এবং q আধান যে বিন্দুতে আছে সেটি ছাড়া অন্য কোন বিন্দুতে (পরিবাহী পাতের সামনে) তড়িৎ বিভবের মান নির্ণয় করুন।

(iii) একটি ফাঁপা পরিবাহী গোলকের সমীপে শূন্য মাধ্যমে একটি আধান রাখা আছে। গোলকটির বাইরে ঐ আধান দ্বারা অধিকৃত বিন্দুটি ছাড়া অন্যত্র তড়িৎ বিভবের মান এবং গোলকের উপর আবিষ্ট আধানের ঘনত্ব নির্ণয় করুন, যখন (ক) গোলকটি ভূসংযুক্ত (খ) গোলকটি অন্তরিত ও আধানহীন এবং (গ) গোলকটি অন্তরিত ও ϕ_0 বিভবে রাখা আছে।

(iv) সুষম তড়িৎক্ষেত্রে একটি অন্তরিত পরিবাহী গোলক থাকলে গোলকটির বাইরে যে পরিবর্তিত তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন হবে তার মান নির্ণয় করুন।

(v) একটি অন্তরক পদার্থের ফলকের একপ্রান্ত সমতল এবং অন্য প্রান্ত অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। সমতল প্রান্তের সমীপে বায়ুমাধ্যমে একটি বিন্দু আধান রাখা আছে। অন্তরকের মধ্যে এবং বায়ুতে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

(vi) সুষম তড়িৎক্ষেত্রে একটি অপরিবাহী গোলক রাখা আছে। গোলকের বাইরে ও ভিতরে তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

অনুশীলনী 1 S তলে আবিষ্ট আধান এবং Q বিন্দুতে কল্পিত প্রতিবিম্ব আধান -q p বিন্দুতে q আধানে একই তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন করে। ফলে এই দুই ক্ষেত্রে q আধানের উপর একই বল ক্রিয়া করবে। এই বলের মান

$$F = \frac{q \cdot -q}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}$$

নেগেটিভ চিহ্নটি আকর্ষণী বল বোঝাচ্ছে।

অনুশীলনী 2 i) চিত্র 7.6 থেকে বোঝা যায় পরিবাহী গোলক ও q আধানের মধ্যে বল

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[q\cdot(-qa/D)/PQ^2 + q\cdot(qa/D)/PO^2\right]$$

$$= -\frac{q^2 a}{4\pi\epsilon_0 D}\left[\frac{1}{PQ^2} - \frac{1}{PO^2}\right] = -\frac{q^2 a}{4\pi\epsilon_0 D}\cdot\frac{PO^2 - PQ^2}{PQ^2\cdot PO^2}$$

কিন্তু $PO = D,\ PQ = PO - OQ = D - a^2/D$

$\therefore\quad PO - PQ = a^2/D,\ PO + PQ = 2D - a^2/D,\ PO^2 - PQ^2 = a^2/D\,(2D - a^2/D)$

$$\therefore\quad F = -\frac{q^2 a}{4\pi\epsilon_0 D}\cdot\frac{a^2/D\,(2D - a^2/D)}{D^2\,(D - a^2/D)^2} = -\frac{q^2 a^3}{4\pi\epsilon_0 D^3}\,\frac{2D^2 - a^2}{(D^2 - a^2)^2}$$

যেহেতু D>a, F সর্বদাই নেগেটিভ, অর্থাৎ অন্তরিত গোলক ও বিন্দু আধানের মধ্যে সর্বদাই একটি আকর্ষণী বল ক্রিয়া করবে।

ii) 7.13 সূত্র থেকে

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\cdot rD\sin\theta\left[(a^2+\frac{D^2}{a^2}r^2-2rD\cos\theta)^{-3/2}-(r^2+D^2-2rD\cos\theta)^{-3/2}\right]$$

$= 0$, যখন $r = a$

iii) 7.4.3 অংশে আমরা দেখেছি P, Q ও O বিন্দুতে যথাক্রমে q, q' ও q'' আধান থাকলে সেগুলি পরিবাহী গোলকে বিভব

$$\phi_s = \frac{q}{4\pi\epsilon_o D}$$

সৃষ্টি করে। $\phi_s = V_o$ হলে $q = 4\pi\epsilon_o DV_o$। সুতরাং Q বিন্দুতে $-qa/D$ এবং O বিন্দুতে $4\pi\epsilon_o DV_o$ পরিমাণ প্রতিবিম্ব আধান রাখা হলে যেগুলি q আধানের সঙ্গে সব সীমাশর্ত পালন করবে এবং গোলকের বাইরে সঠিক তড়িৎক্ষেত্র উৎপাদন করবে।

(iv) 7.4.4 অনুচ্ছেদে আপনি দেখেছেন, আবিষ্ট আধানের তলঘনত্ব $3\epsilon_o E_o\cos\theta$ হলে গোলকের মধ্যে $-E_o$ প্রাবল্যের তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন হয়। $3\epsilon_o E_o = \sigma_o$ ধরা হলে $\sigma_o\cos\theta$ তলঘনত্বের আধান $-E_o = -\frac{\sigma_o}{3\epsilon_o}$ প্রাবল্যের তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন করবে।

অনুশীলনী 3. 7.31 সূত্র থেকে দ্বিমেরু ভ্রামক $M = 4\pi a^3 E_o\epsilon_1\frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{2\epsilon_1+\epsilon_2}$

$\therefore$ মেরুপ্রবণতা $p = M/\frac{4}{3}\pi a^3\cdot E_o = 3\epsilon_1\frac{\epsilon_1-\epsilon_1}{2\epsilon_1+\epsilon_2}$

এখানে $\epsilon_1 = \epsilon_o$, $\epsilon_2 = 5\epsilon_o$

$\therefore\ p = 3\epsilon_o\cdot\frac{5-1}{2+5} = \frac{12}{7}\epsilon_o$ যেখানে ϵ_o = শূন্যের বিদ্যুৎশীলতা।

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

i) 7.2 অনুচ্ছেদে প্রশ্নটির উত্তর পাবেন।

ii) 7.4.1 অংশে প্রশ্নটির উত্তর পাবেন।

iii) প্রশ্নটির উত্তর 7.4.2 ও 7.4.3 অংশে পাওয়া যাবে।

iv) 7.4.4 অংশে প্রশ্নটির উত্তর পাওয়া যাবে।

v) 7.5.1 অনুচ্ছেদটি দেখুন।

vi) 7.5.2 অনুচ্ছেদটি দেখুন।

একক 8 ❑ লাপ্লাসের সমীকরণ ও তার প্রয়োগ

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা
উদ্দেশ্য

8.2 সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণ

8.3 গোলীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণ

8.4 বেলনীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণ

8.5 সারাংশ

8.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

8.7 উত্তরমালা

8.1 প্রস্তাবনা

তড়িৎ আধানের একটি স্থির বণ্টন যে তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন করে সেটি নির্ণয় করাই স্থির তড়িৎবিদ্যার মূল উদ্দিষ্ট বিষয়। আপনি ইতিমধ্যেই দুটি ভিন্ন পদ্ধতিতে এই তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করতে শিখেছেন। এর প্রথমটি হল কুলম্ব সূত্র প্রয়োগ করে তড়িৎক্ষেত্রের যে কোন বিন্দুতে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য নির্ণয়। এজন্য আমরা যে সূত্রটি ব্যবহার করি সেটি হল

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho d\tau}{r^2}\vec{r_0} \qquad \ldots 8.1$$

যেখানে $\rho = d\tau$ আয়তনে আধান ঘনত্ব, $r = d\tau$ থেকে তড়িৎক্ষেত্রে উদ্দিষ্ট বিন্দুর দূরত্ব এবং $\vec{r_0} = d\tau$ থেকে r বরাবর একক ভেক্টর। অবশ্য অনেক সময় আমরা সুবিধার জন্য প্রাবল্যের পরিবর্তে তড়িৎ বিভব নির্ণয়ের জন্য নীচের সূত্রটি ব্যবহার করি

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho d\tau}{r} \qquad \ldots 8.2$$

এবং $\vec{E} = -\nabla V$ সূত্রের সাহায্যে প্রাবল্য নির্ণয় করি।

দ্বিতীয় পদ্ধতিটি আপনি পূর্ববর্তী একক 7 এ শিখেছেন। এটিকে আমরা প্রতিবিম্ব পদ্ধতি বলে থাকি। তড়িৎক্ষেত্রে এক বা একাধিক পরিবাহী বা অন্তরক বস্তু থাকলে সেগুলির উপর কিছু আবিষ্ট তড়িৎ আধানের সৃষ্টি হয়। আবিষ্ট আধানের মান ও বণ্টন আগে থেকে জানা না থাকায় 8.1 বা 8.2 সূত্র প্রয়োগ করা সম্ভব হয় না। তখন আমরা যে অঞ্চলের তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয় করতে চাই তার বাইরে এক বা একাধিক কাল্পনিক আধান সন্নিবিষ্ট করি, যাতে আগে থেকে জানা সীমাশর্তগুলি পালিত হয়। প্রকৃত আধান এবং কাল্পনিক বা প্রতিবিম্ব আধানগুলি বিবেচনা করে আমরা যে তড়িৎক্ষেত্র পাই সেটিই হয় নির্ণেয় তড়িৎক্ষেত্র।

এই এককে আমরা তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের তৃতীয় একটি পদ্ধতি আলোচনা করব। এই পদ্ধতিটির ভিত্তি হল তড়িৎ বিভব সংক্রান্ত লাপ্লাস সমীকরণ। আমরা আগেই গাউসের উপপাদ্যটিকে ভেক্টর রূপে লিখেছি

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

আবার তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য $\vec{E}$ কে স্থির অবস্থায় তড়িৎ বিভবের মাধ্যমে প্রকাশ করলে পাওয়া যায় $\vec{E} = -\nabla V$ উপরের সমীকরণ দুটিকে একত্র করলে পাওয়া যায়

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

যেটিকে আমরা পোয়াসঁ সমীকরণ (Poisson's equation) বলে থাকি। যে সব অঞ্চলে কোন তড়িৎ আধান নেই, অর্থাৎ $\rho = 0$ সেখানে পোয়াসঁ সমীকরণটি লাপ্লাস সমীকরণে রূপান্তরিত হয়

$$\nabla^2 V = 0 \qquad 8.3$$

উপযুক্ত সীমাশর্ত প্রয়োগ করে লাপ্লাস সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করলে আমরা তড়িৎ বিভবের নির্ণেয় মানে পৌঁছাতে পারি। এবং এটিই হল তড়িৎক্ষেত্র নির্ণয়ের একটি শক্তিশালী তৃতীয় পদ্ধতি। বিভিন্ন ভৌত অবস্থায় উপযুক্ত নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণকে প্রকাশ করা এবং সীমাশর্তগুলি পালিত হয়, এমনভাবে ঐ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করাই হবে এই এককের মূল লক্ষ্য।

উদ্দেশ্য

এই এককটি আপনাকে তড়িৎক্ষেত্রের আধানহীন অঞ্চলে বিভব নির্ণয়ে লাপ্লাস সমীকরণ ব্যবহারের সামর্থ্য যোগাবে। এটি পড়লে আপনি যে কাজগুলি করতে পারবেন সেগুলি হল

- সমকোণী কার্টেজীয়, গোলীয় ও বেলনীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণটি লিখতে পারবেন,
- এই তিন নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিশেষ অবস্থায় তড়িৎ বিভব যে সীমাশর্তগুলি মেনে চলে সেগুলি চিহ্নিত করতে এবং সেগুলি গাণিতিকভাবে প্রকাশ করতে পারবেন এবং

- সীমাশর্তগুলি প্রয়োগ করে বিশেষ ক্ষেত্রে লাপ্লাস সমীকরণের সমাধানগুলি বার করতে পারবেন।

8.2 সমকোণী কার্টেজীয় লাপ্লাস সমীকরণ

8.3 সমীকরণটিকে সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কে (x,, y, z) লিখলে এটির রূপ হয়

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad \ldots 8.4$$

ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে যে কোন আধানহীন বিন্দুতে এই সমীকরণ পালিত হয়। কোন কোন বিশেষ ক্ষেত্রে তড়িৎ বিভব x, y ও z — এই তিনটি নির্দেশাঙ্কের উপর নির্ভর না করে কেবলমাত্র দুটি(x, y) বা একটি নির্দেশাঙ্কের উপর নির্ভর করতে পারে। এই অবস্থায় 8.4 সমীকরণের একটি বা দুটি রাশির মান শূন্য হওয়ায় সমীকরণটি সরলীকৃত হয়, তার সমাধানও অপেক্ষাকৃত সহজ হয়। আমরা প্রথমে এই সরলরূপগুলির সমাধান আলোচনা করব।

একমাত্রিক লাপ্লাস সমীকরণ

ধরা যাক কোন এক তড়িৎক্ষেত্রে তড়িৎবিভব কেবলমাত্র x দিক বরাবর পরিবর্তিত হতে পারে, সেটি y বা z এর উপর নির্ভর করে না। আপনি যদি y - z তলের সমান্তরাল পাত বিশিষ্ট একটি সমান্তরাল-পাত ধারক কল্পনা করেন, যার পাতগুলির মধ্যে ব্যবধান সেগুলি দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের তুলনায় অতি ক্ষুদ্র, তবে পাত দুটির মধ্যে তড়িৎবিভব এই শর্ত প্রতিপালন করবে। ধরা যাক পাতগুলি x = o ও x = d অবস্থানে রয়েছে এবং সেগুলির বিভব যথাক্রমে 0 ও V_o। যেহেতু $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$, লাপ্লাসের সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0 \qquad \ldots 8.5$$

এর সমাধান V = Ax + B, যেখানে A ও B সমাকলন ধ্রুবক। যখন x = 0, V = 0, সুতরাং B = 0। আবার যখন x = d, $V = V_o$ সুতরাং $V_o = Ad$, সুতরং $A = V_o/d$। $\therefore\ V = V_o x/d$ ... 8.6

8.1 চিত্রে এই সমাধানটির লেখচিত্র দেখতে পাবেন।

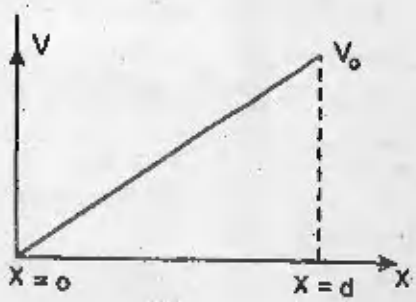
দ্বিমাত্রিক লাপ্লাস সমীকরণ

এবার ধরুন তড়িৎ বিভব V। x ও y এর উপর নির্ভরশীল কিন্তু সেটির মান z নির্দেশাঙ্কের উপর নির্ভর করে না। এক্ষেত্রে $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ এবং

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \qquad \ldots 8.6$$

z দিক বরাবর লম্বিত একটি পরিবাহী নির্মিত লম্বা নলের মধ্যে স্থির অবস্থায় এ ধরনের বিভব বণ্টন ঘটে থাকে।

8.6 সমীকরণের সমাধান করতে ধরে নেওয়া যাক বিভব V (x, y) দুটি পৃথক অপেক্ষকের গুণফল, যাদের একটি x এর এবং অন্যটি y-এর অপেক্ষক। অর্থাৎ $V(x, y) = X(x) . Y(y)$। 8.6 সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে পাওয়া যায়



8.1

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot Y + X \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

বা, XY দ্বারা উভয় দিককে ভাগ করে $\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$

লক্ষ্য করুন যে এই সমীকরণের বাম দিকের প্রথম রাশিটি কেবলমাত্র x এর এবং দ্বিতীয় রাশিটি কেবলমাত্র y এর অপেক্ষক। দুটির যোগফল শূন্য হতে পারে কেবলমাত্র তখনই, যখন দুটি রাশিই স্থির। ধরা যাক

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = C_1 \text{ এবং } \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = C_2$$

$\therefore$ $C_1 + C_2 = 0$, অর্থাৎ $C_1 = -C_2 = k^2$, ধরে নিন। এখানে C_1, C_2 ও k। সবগুলিই স্থির রাশি।

এবার x – ও y - সমীকরণগুলির সমাধান করা যাক। x সমীকরণটি হল

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = k^2 X$$

যার সমাধান $X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ (A ও B সমাকলন ধ্রুবক)।

y -সমীকরণ $\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = k^2 Y$ এর সমাধান

$Y = C \sin ky + D \cos ky$ (C ও D সমাকলন ধ্রুবক)।

সুতরাং V এর সমাধান

$$V(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky) \qquad 8.7$$

আপনি যদি $C_2 = -C_1 = k^2$ ধরে নেন তবে V এর সমাধান হবে

$$V(x, y) = (Ae^{ky} + Be^{-ky})(C \sin kx + D \cos kx) \qquad 8.8$$

8.7 ও 8.8 এর সমাধান দুটির মধ্যে কোনটি গ্রহণীয়, তা সীমাশর্তের উপর নির্ভর করবে। একটি উদাহরণ থেকে বিষয়টি আপনার কাছে স্পষ্ট হবে।

উদাহরণ 1 x - y তলে পাতের x = 0, y = 0 এবং y = a ধারগুলি শূন্য বিভবে আছে কিন্তু x = b তলটি V_o বিভবে থাকলে তলের বিভিন্ন বিন্দুতে বিভবের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

পাতের ভিতর তড়িৎ বিভবের সমীকরণ $\nabla^2 V = 0$ এখানে $V = V(x, y)$ এবং প্রযুক্ত সীমাশর্তগুলি হোল

i) $V = 0$ যখন $y = 0$ (ii) $V = 0$ যখন $y = a$

iii) $V = 0$ যখন $x = 0$ (iv) $V = 0$ যখন $x = b$

এখন $\nabla^2 V = 0$ কে দ্বিমাত্রিক কার্তেজীয় স্থানাঙ্কে লেখা যায়

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

এই সমাধানে চররাশি পৃথকীকরণ পদ্ধতি অবলম্বন করে লেখা যায়, $V = X(x)\,Y(y)$.

সেক্ষেত্রে $$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

বা $$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = k^2 \quad \text{(ধরুন)}$$

$\therefore$ X ও Y নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত হয়

$$\frac{d^2X}{dx^2} - k^2X = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k^2Y = 0$$

উহাদের সমাধান যথাক্রমে

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

এবং $$Y = C\sin ky + D\cos ky.$$

$$\therefore \quad V(x, y) = XY$$

$$= (A_1e^{kx} + B_1e^{-kx})\sin ky + (C_1e^{kx} + D_1e^{-kx})\cos ky.$$

$y = 0$, $v = 0$, $\therefore$ $0 = (C_1e^{kx} + D_1e^{-kx})$

ইহা সকল x এর জন্য প্রযোজ্য $\therefore C_1 = D_1 = 0$.

সুতরাং $$V(x, y) = (A_1e^{kx} + B_1e^{-kx})\sin ky$$

$Y = a$ তে $V = 0$ হওয়ায়, $\quad 0 = (A_1 e^{kx} + B_1 e^{-kx}) \sin ka.$

সেক্ষেত্রে $\quad \text{Sin}\, ka = 0$

বা $\quad ka = n\pi$

বা $\quad k = \dfrac{n\pi}{a} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots..$

$$V(x,y) = \Sigma\left(A_x e^{n\pi x/a} + B_x e^{-n\pi x/a}\right) \sin \frac{n\pi y}{a}$$

$x = 0,\ V = 0$ বলে, $\quad 0 = \Sigma (A_n + B_n) \sin \frac{n\pi y}{a}$

$$\therefore \quad A_n = -B_n$$

সুতরাং $\quad V(x, y) = \Sigma A_n \left(e^{n\pi x/a} - e^{n\pi x/a}\right) \text{Sin}\ \frac{n\pi y}{a}$

$= \Sigma C_n\ \text{Sin h}\ \frac{n\pi x}{a}\ \text{Sin}\ \frac{n\pi x}{a}$ [এখানে $C_n = 2A_n$]

$x = b,\ V = V_o \ \therefore\ V_o = \Sigma C_x\ \text{Sin h}\ \frac{n\pi b}{a} \cdot \text{Sin}\ \frac{n\pi y}{a}$

$$\int_0^a V_o\ \text{Sin}\ \frac{n\pi y}{a}\, dy = C_n\ \text{Sin h}\ \frac{n\pi b}{a} \int \text{Sin}^2\ \frac{n\pi y}{a}\, dy$$

$$= C_n \cdot \text{Sin h}\ \frac{n\pi b}{a} \cdot \frac{a}{2}$$

$$C_n = \frac{2V_o}{\cancel{a}\ \text{Sin h}\ \frac{x\pi b}{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{\frac{x\pi}{\cancel{a}}}\ (1 - \text{Cos}\, n\pi)$$

$$= \frac{2V_o}{n\pi\, \text{Sin h}\ \frac{n\pi b}{a}}\ (1 - \text{Cos}\, n\pi)$$

$\therefore \quad C_n\ \dfrac{4V_o}{n\pi\ \text{Sin h}\ \frac{n\pi b}{a}}\ (1 - \cos n\pi)$ যখন $n = 1, 3, 5 \ldots$

$= 0$ যখন $n = 2, 4, 6 \ldots..$

উদাহরণ 2 ধরা যাক দুটি অসীম, ভূসংযুক্ত ধাতব পাত, x - z তলের সমান্তরালে $y = 0$ এবং $y = \pi$ অবস্থানে রয়েছে। $x = 0$ তলে একটি অসীম দৈর্ঘ্যের পাত y-এর উপর নির্ভরশীল $V_o(y)$ বিভবে আছে (চিত্র 8.2)। আমরা তিনটি পাত দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলে বিভবের মান নির্ণয় করব।

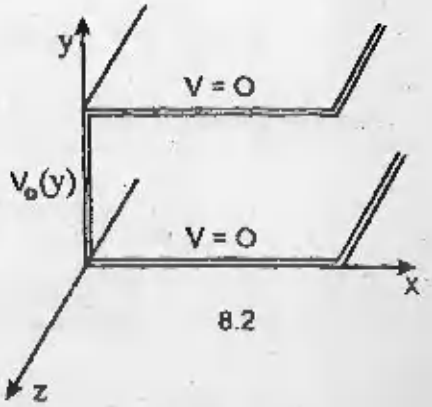
লক্ষ্য করুন এক্ষেত্রে সীমাশর্তগুলি হল ঃ

(i) যখন $y = 0, V = 0$

(ii) যখন $y = \pi, V = 0$

(iii) যখন $x = 0, V = V_o(y)$

(iv) $x \to \infty$ সীমায় $V = 0$



8.2

এক্ষেত্রে আমাদের 8.7 সমাধানটি ব্যবহার হবে কেননা 8.8 সমাধানে $x \to \infty$ সীমায় V এর মান শূন্য হবে না। উপরন্তু 8.8 সমাধানে (i) ও (ii) শর্ত প্রয়োগ করলে $A = B = 0$ হবে, ফলে V এর মান সর্বত্র শূন্য হবে।

8.7 সমাধানে (iv) সীমাশর্ত প্রয়োগ করে দেখা যায় যে $A = 0$। B ধ্রুবককে C ও D এর মধ্যে অন্তর্ভুক্ত করে নিলে সমাধানটি দাঁড়ায়

$$V(x, y) = e^{-kx} \ (C \sin ky + D \cos ky)$$

যখন $y = 0$, $V(x, o) = e^{-kx} . D = 0$ (i) শর্ত অনুযায়ী।

$$\therefore \ D = 0 \ \text{এবং} \ V(x, y) = Ce^{-kx} \sin ky \qquad 8.9$$

আবার, যখন $y = \pi$, $V(x, \pi) = Ce^{-kx} \sin k\pi = 0$, (ii) শর্ত অনুযায়ী।

$\therefore \ \sin k\pi = 0$, অর্থাৎ $k =$ পূর্ণসংখ্যা।

আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে k রাশিটি যে কোনও ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলেই 8.9 সমাধানটি আমাদের কাছে গ্রহণযোগ্য হবে। সুতরাং V (x, y) এর সাধারণ সমাধান

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-kx} \sin ky \qquad 8.10$$

এখানে C_1, C_2, C_3 ..... প্রভৃতি অজ্ঞাত ধ্রুবক, যেগুলির মান জানতে হলে শর্ত (iii) এ উল্লিখিত $V_o(y)$ এর মান জানা দরকার। যদি $V_o(y)$, অর্থাৎ $V(0, y)$ এর মান জানা থাকে, তাহলে আমরা কীভাবে C_k ধ্রুবকগুলির মান নির্ণয় করব? লক্ষ্য করুন

$$V_o(y) = V(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin ky$$

উভয় দিককে sin ny (n একটি নির্দিষ্ট পূর্ণসংখ্যা) দিয়ে গুণ করে এবং $y = 0$ ও $y = \pi$ সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\int_o^{\pi} V_o(y) \sin ny \, dy = \sum_{k=1}^{\infty} \int_o^{\pi} C_k \sin ky \sin ny \, dy$$

$$= C_n \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} V_0(y)\sin ny\,dy \qquad 8.11$$

উদাহরণ হিসাবে ধরা যাক $V_0(y) = V_0$, একটি ধ্রুবক। সেক্ষেত্রে

$$C_n = \frac{2V_0}{\pi}\int_0^{\pi}\text{Sin}\,ny\,dy = \frac{2V_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$= \quad 0$, যখন $n = 0, 2, 4$ প্রভৃতি যুগ্মসংখ্যা

এবং $= \dfrac{4V_0}{n\pi}$; যখন $n = 1, 3, 5$ প্রভৃতি অযুগ্ম সংখ্যা।

অর্থাৎ 8.10 সমীকরণ থেকে,

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-kx}\sin ky \qquad 8.12$$

নিশ্চয়ই বুঝতে পেরেছেন যে আমরা C_n ধ্রুবকের মান নির্ণয় করতে যে পদ্ধতি ব্যবহার করলাম সেটি ফুরিয়ে সহগের মান নির্ণয়ের সাধারণ পদ্ধতি ছাড়া আর কিছু নয়।

ত্রিমাত্রিক লাপ্লাস সমীকরণ

এবার আমরা ত্রিমাত্রিক 8.4 সমীকরণের সরাসরি সমাধান করব। $V(x, y, z) = X(x).Y(y).Z(z)$ লিখে 8.4 সমীকরণে প্রতিস্থাপন করলে $X.Y.Z$ দিয়ে ভাগ করে পাওয়া যায়

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

এর প্রথম রাশিটি কেবলমাত্র x-এর, দ্বিতীয় রাশিটি কেবলমাত্র y এর এবং তৃতীয়টি কেবলমাত্র z এর অপেক্ষক। সুতরাং রাশি তিনটির যোগফল শূন্য হতে হলে প্রত্যেকটিকেই ধ্রুবক হতে হবে। ধরা যাক

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = C_1,\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = C_2 \text{ এবং } \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = C_3.$$

যেখানে $\quad C_1 + C_2 + C_3 = 0$

এখন আমরা নানা ধরনের অবস্থা কল্পনা করতে পারি। এগুলি হল

i) $C_1 = C_2 = C_3 = 0$: এক্ষেত্রে $\dfrac{d^2X}{dx^2} = \dfrac{d^2Y}{dy^2} = \dfrac{d^2Z}{dz^2} = 0$

অর্থাৎ $X = Ax + B,\ Y = Cy + D,\ Z = Ez + F$

এখানে A, B, C, D, E ও F সমাকলন ধ্রুবক।

ii) C_1, C_2, ও C_3 এর একটির মান শূন্য, একটি পজিটিভ এবং আর একটি নেগেটিভ। ধরুন $C_1 = k^2$ (পজিটিভ), $C_2 = -n^2$ (নেগেটিভ) এবং $C_3 = 0$। এখন $\frac{d^2X}{dx^2} = k^2x$, $\frac{d^2Y}{dy^2} = -n^2y$ এবং $\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$। এই সমীকরণগুলির সমাধান

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

$$Y = C \sin ny + D \cos ny$$

$$Z = Ez + F$$

এখানে A, B, ... , F সমাকলন ধ্রুবক।

iii) C_1, C_2 ও C_3 এর একটির মান পজিটিভ, একটির মান নেগেটিভ এবং তৃতীয়টির মান পজিটিভ অথবা নেগেটিভ। ধরুন আগের মত $C_1 = k^2$, $C_2 = -x^2$ কিন্তু $C_3 = \pm m^2$। এক্ষেত্রে পূর্বের মত সমাধানগুলি লেখা যায়

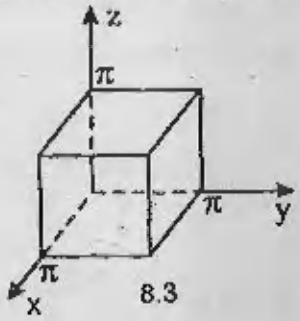
$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

$$Y = C \sin ny + D \cos ny$$

$$Z = Ee^{mz} + Fe^{-mz} \qquad (\text{যদি } C_3 = m^2 \text{ হয়})$$

অথবা $Z = E \sin mz + F \cos mz$ (যদি $C_3 = -m^2$ হয়)

উপরে ত্রিমাত্রিক লাপ্লাস সমীকরণে যে সম্ভাব্য সমাধানগুলি পাওয়া গেল তার কোনটি আপনি ব্যবহার করবেন, তা নির্দিষ্ট অবস্থার সীমাশর্তগুলির উপর নির্ভর করবে। এই সমাধানগুলির একটি প্রয়োগ আলোচনা করে নেওয়া যাক।



8.3

উদাহরণ 2. একটি ঘনকাকৃতির ধাতব পাতে নির্মিত দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ π। $x = \pi$ তলে অবস্থিত ছায়াঙ্কিত পাতটি V_0 বিভবে এবং অন্য সব পাত শূন্য বিভবে অবস্থিত। বাক্সের ভিতরে বিভববণ্টন নির্ণয় করতে হবে (চিত্র 8.3)

এখানে সীমাশর্তগুলি হল

$V = 0$, যখন $x = 0$, $y = 0$ অথবা π, $z = 0$ অথবা π

$V = V_0$ যখন $x = \pi$

যেহেতু y ও z এর দুটি করে মানের জন্য V এর মান শূন্য, Y ও Z

অপেক্ষকগুলি $Y = C \sin xy + D \cos xy$

এবং $Z = E \sin mz + F \cos mz$ নিতে হবে।

সুতরাং X অপেক্ষকটি হবে $X = Ae^{lx} + Be^{-lx}$

এবং $C_1 + C_2 + C_3 = -n^2 - m^2 + \ell^2 = 0$ বা $\ell^2 = n^2 + m^2$

এবার সীমাশর্তগুলি প্রয়োগ করে পাওয়া যায়

$X = 0$, যখন $x = 0$ $\therefore$ $A + B = 0$ $\therefore$ $B = -A$

$Y = 0$, যখন $y = 0, \pi$ $\therefore$ $D = 0$ এবং $n =$ পূর্ণসংখ্যা (পূর্বের অনুশীলনীর মত)

$Z = 0$, যখন $z = 0, \pi$ $\therefore$ $F = 0$ এবং $m =$ পূর্ণসংখ্যা

$$\therefore \quad V = X.Y.Z$$

$$= (Ae^{\ell x} - Ae^{-\ell x}) \,.\, C \sin ny \,.\, E \sin mz$$

$$= A\left(e^{\sqrt{m^2+n^2}\cdot x} - e^{-\sqrt{m^2+n^2}\cdot x}\right) C \sin ny \cdot E \sin mz$$

m এবং n উভয়ই যে কোন পূর্ণসংখ্যা হতে পারে। সুতরাং V এর সাধারণ সমাধান

$$V(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\left(e^{\sqrt{m^2+n^2}\cdot x} - e^{\sqrt{m^2+n^2}\cdot x}\right) \sin ny \sin mz \qquad \ldots 8.13$$

অবশিষ্ট আরও একটি সীমাশর্ত প্রয়োগ করে,

$$V_0 = V(\pi, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\left(e^{\sqrt{m^2+n^2}\cdot \pi} - e^{\sqrt{m^2+n^2}\cdot \pi}\right) \sin ny \sin mz$$

A_{mn} ধ্রুবকগুলির মান নির্ণয়ের জন্য আপনাকে উভয় দিককে $\sin n_1 y \sin m_1 z dy dz$ (n_1 ও m_1 হল n ও m এর বিশেষ দুটি মান) দিয়ে গুণ করে $y = 0$ থেকে π , $z = 0$ থেকে π সীমার মধ্যে সমাকলন করতে হবে

$$\int_{y=0}^{\pi}\int_{z=0}^{\pi} V_0 \, dy\, dz = \sum_{m_1,n=1}^{\infty} A_{mn}\left(e^{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot \pi} - e^{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot \pi}\right)\int_0^{\pi} \sin ny \sin n_1 y \, dy \int_0^{\pi} \sin mz \sin m_1 z \, dz$$

$$\text{বা } V_0 \pi^2 = \frac{\pi^2}{4} A_{m_1 n_1}\left(e^{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\,\pi} - e^{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\,\pi}\right)$$

বা, পদাঙ্কটি মুছে দিয়ে,

$$\text{বা } A_{mn} = 4V_0 / \left(e^{\sqrt{m^2+n^2}\,\pi} - e^{\sqrt{m^2+n^2}\,\pi}\right) \qquad \ldots 8.14$$

8.13 ও 8.14 সমীকরণ দুটিই V (x, y, z) এর সমাধান নির্দেশ করছে।

এবার

অনুশীলনী 1

i) দেখান যে কোন তড়িৎক্ষেত্রের যে অঞ্চলে কোন আধান নেই সেখানে তড়িৎবিভবের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান ঘটতে পারে না।

ii) প্রমাণ করুন যে উদাহরণ 2 তে ঘনকের ছয়টি তলই শূন্য বিভবে থাকলে তার অভ্যন্তরে সর্বত্র বিভব শূন্য হবে।

8.3 গোলীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণ

পূর্বের অংশে আপনি লক্ষ্য করেছেন যে সীমাগুলি যখন সমতল হয় তখন সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণটি লেখা সুবিধাজনক। সীমার আকৃতি যখন গোলকের মত হয় তখন এই সমীকরণটিকে গোলীয় নির্দেশাঙ্কে লেখার প্রয়োজন হয়। এই অংশে আমরা গোলীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণটি লিখে তার সমাধান করব এবং কয়েকটি ক্ষেত্রে সেটির প্রয়োগ করব।

লাপ্লাস সমীকরণ '$\nabla^2 V = 0$' কে গোলীয় নির্দেশাঙ্কে (r, θ, ϕ) লেখা যায় ঃ

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0$$

আমরা যে সব অবস্থা বিবেচনা করব সেগুলিতে দিগংশীয় প্রতিসাম্য (azimuthal symmetry) থাকবে, ধরে নেওয়া যাক। সেক্ষেত্রে বিভব V কোণ ϕ এর উপর নির্ভরশীল নয় এবং $\frac{\partial V}{\partial\phi}$ ও $\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$ এর মান শূন্য। সমীকরণটি এখন লেখা যায় (r^2 দিয়ে উভয় দিককে গুণ করে)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0 \qquad \text{...8.15}$$

আগের মত পরীক্ষামূলক সমাধান হিসাবে ধরে নিন $V_{(r,\theta)} = R_{(r)}.T_{(\theta)}$ যেখানে R ও T যথাক্রমে r ও θ এর অপেক্ষক। 8.15 সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে এবং উভয় দিককে R.T দিয়ে ভাগ করে পাওয়া যায়

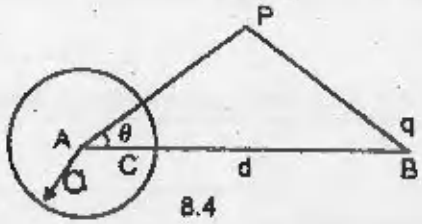
$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{T\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right)=0 \qquad \text{...8.16}$$

8.16 সমীকরণের বামদিকের প্রথম রাশিটি কেবলমাত্র r এবং দ্বিতীয় রাশিটি কেবলমাত্র θ এর উপর নির্ভরশীল। সুতরাং দুটি রাশিই ধ্রুবক হতে বাধ্য। ধরা যাক

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\ell(\ell+1) \qquad \text{...8.17a}$$

এবং $$\frac{1}{T\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right)=-\ell(\ell+1) \qquad \text{...8.17b}$$

যেখানে $\ell(\ell+1)$ একটি ধ্রুবক। ধ্রুবকটির এই বিশেষ রূপ ধরে নেওয়ার কারণ আপনি শীঘ্রই বুঝতে পারবেন।



8.4

8.17b সমীকরণে $\cos\theta = x$, $-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx}$ বসিয়ে

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dT}{dx}\right] = -\ell(\ell+1)T \qquad \ldots 8.18$$

এই সমীকরণটির সমাধান $T(\theta) = P_\ell(x)$, যখন ℓ একটি পূর্ণসংখ্যা। $P_\ell(x)$ কে লেজাঁদ্রে পলিনোমিয়াল বলা হয় এবং এটির সংজ্ঞা হল

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (x^2-1)^\ell \qquad \ldots 8.19$$

নীচে প্রথম কয়েকটি লেজাঁদ্রে পলিনোমিয়ালের রাশিমালা দেওয়া হল :

$P_0(x)$	=	1
$P_1(x)$	=	x
$P_2(x)$	=	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
$P_3(x)$	=	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
$P_4(x)$	=	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
$P_5(x)$	=	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

8.17a সমীকরণটির সমাধান

$$R_\ell(r) = A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \qquad \ldots 8.20$$

8.18 ও 8.20 সমীকরণ দুটিকে মিলিয়ে পাওয়া যায়

$$V_\ell(r,\theta) = \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_L}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

$V_\ell(r, \theta)$ সমাধানটি কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট ℓ - এর জন্য। ℓ এর বিভিন্ন মানের জন্য এরকম অসংখ্য সমাধান পাওয়া যেতে পারে এবং সেগুলির রৈখিক যোগফলই V এর সাধারণ সমাধান

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta) \qquad \ldots 8.21$$

A_ℓ ও B_ℓ ধ্রুবকগুলি অবশ্যই সীমাশর্তগুলির দ্বারা নির্ধারিত হবে। এখন আমরা লাপ্লাসের সমীকরণের গোলীয় নির্দেশাঙ্কে সমাধানের কয়েকটি প্রয়োগ আলোচনা করব।

উদাহরণ 3 : পরিবাহী গোলকের সমীপে বিন্দু আধান

ধরা যাক ϕ_0 বিভবে রাখা a ব্যাসার্ধের সমীপে গোলকের কেন্দ্র থেকে d (>a) দূরত্বে একটি বিন্দু আধান q রয়েছে (চিত্র 8.4)। গোলকটির বাইরে, q দ্বারা অধিকৃত বিন্দু B ছাড়া অন্য কোন বিন্দু 'P' তে বিভবের মান নির্ণয় করতে হবে। P বিন্দুতে বিভব ϕ দুটি রাশির যোগফল। এর প্রথমটি হল $q/4\pi\epsilon_0 r_1$, যা সরাসরি q আধানের জন্য তড়িৎ বিভব। এছাড়া পরিবাহী গোলকের উপর আবিষ্ট আধানের জন্যও অতিরিক্ত একটি বিভব উৎপন্ন হবে, যেটিকে আমরা 8.21 সূত্রের রাশিমালা দিয়ে নির্দেশ করব। এভাবে,

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta) \qquad a \le r \le \infty \qquad \ldots 8.22$$

যেহেতু $r \to \infty$ সীমায় $\phi \to 0$, $A_\ell = 0$, কেননা $A_\ell \neq 0$ হলে $A_\ell r^\ell$ রাশি মান অসীম হয়।

এছাড়া $\frac{1}{r_1}$ রাশিটিকেও আমরা অন্যভাবে প্রকাশ করব।

$$r_1^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r_1} = \left[r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 - \left(2\frac{d}{r}\cos\theta - \frac{d^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{1}{2}\left(2\frac{d}{r}\cos\theta - \frac{d^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(2\frac{d}{r}\cos\theta - \frac{d^2}{r^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

(d<r ধরে, দ্বিঘাত শ্রেণীতে পরিবর্ধিত করে)

$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\right]$$

এই শ্রেণীতে '$\frac{d}{r}$' এর সহগগুলিকে আপনি হয়ত লেজাঁদ্রে পলিনোমিয়াল বলে চিনতে পারছেন। এগুলিকে $P_\ell(\cos\theta)$ হিসাবে লিখলে,

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left[p_0(\cos\theta) + \frac{d}{r}p_1(\cos\theta) + \frac{d^2}{r^2}p_2(\cos\theta) + ----\right]$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^{\ell} p_\ell(\cos\theta).$$

∴ 8.22 সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^{\ell} p_\ell(\cos\theta) + \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{qd^\ell}{4\pi\epsilon_0} + B_\ell\right)\frac{1}{r^{\ell+1}}P_\ell(\cos\theta).$$

যখন $r < d$, তখন $\frac{1}{r_1}$ কে ভিন্নভাবে পরিবর্ধন করতে হবে

$$\frac{1}{r_1} = \left[d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta\right]^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{d}\left[1 - \left(2\frac{r}{d}\cos\theta - \frac{r^2}{d^2}\right)\right]^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{d}\left[1 + \frac{1}{2}\left(2\frac{r}{d}\cos\theta - \frac{r^2}{d^2}\right) + \frac{3}{8}\left(2\frac{r}{d}\cos\theta - \frac{r^2}{d^2}\right)^2 + ----\right]$$

($r < d$ ধরে দ্বিঘাত শ্রেণীতে পরিবর্ধিত করে)

$$= \frac{1}{d}\left[1 + \frac{r}{d}\cos\theta + \frac{r^2}{d^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + ----\right]$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{d}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta).$$

সুতরাং ' $\frac{1}{r_1}$ ' এর এই রাশিমালা ব্যবহার করে,

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{d}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta) + \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B_\ell}{r^{\ell}+1}P_\ell(\cos\theta)$$

যখন $r = a, \phi = \phi_0$ ।

$$\therefore \quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a}{d}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{a^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) = \phi_0 = \phi_0 P_0(\cos\theta)$$

বা $$\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{B_0}{a} - \phi_0\right) P_0(\cos\theta) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\left(\frac{a}{d}\right)^{\ell} + \frac{B_\ell}{a^{\ell+1}}\right] P_\ell(\cos\theta) = 0 \quad \text{... 8.23}$$

এবার আমাদের B_0, B_1, B_2 প্রভৃতি ধ্রুবকগুলির মান নির্ণয় করতে হবে। $\cos\theta = x$ লিখে 8.23 সমীকরণের উভয়দিককে $P_0(x)dx$ দিয়ে গুণ করে $x = -1$ থেকে $+1$ সীমার মধ্যে সমাকলন করলে পাওয়া যাবে

$$\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{B_0}{a} - \phi_0\right) \int_{-1}^{1} P_0^2(x)\,dx + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\left(\frac{a}{d}\right)^{\ell} + \frac{B_\ell}{a^{\ell+1}}\right] \int_{-1}^{+1} P_\ell(x) P_0(x)\,dx = 0$$

$P_\ell(x)$ পলিনোমিয়ালগুলি পরস্পর অভিলম্বীয় (orthogonal)

অর্থাৎ $$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x)\,dx = 0,$$ যদি $\ell \neq \ell'$ হয়।

অপরপক্ষে $$\int_{-1}^{1} [P_\ell(x)]^2\,dx = \frac{2}{2\ell+1}$$

সুতরাং $$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{B_0}{a} - \phi_0 = 0 \quad \text{বা} \quad B_0 = a\left(\phi_0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\right)$$

আবার 8.23 এর দুই দিককে $P_n(x)\,dx\ (n \neq 0)$ দিয়ে গুণ করে পূর্বের মত সমাকলন করে পাওয়া যাবে

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\left(\frac{a}{d}\right)^n + \frac{Bn}{a^{n+1}} = 0$$

অর্থাৎ $$Bn\ (n \neq 0) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\,\frac{a^{2n+1}}{d^n}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{qa}{d}\right)\left(\frac{a^2}{d}\right)^n$$

যদি $\frac{qa}{d} = q'$, $\frac{a^2}{d} = d'$ লেখা যায় তবে

$$B_0 = a\phi_0 - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0};\ B_n\ (n \neq 0) = -\frac{q'}{4\pi\epsilon_0}\cdot(d')^n \quad \text{... 8.24a}$$

অর্থাৎ $$\phi = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\left(\frac{r}{d}\right)^{\ell} + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right] P_\ell(\cos\theta) \qquad ...8.24b$$

যেখানে B ধ্রুবকগুলি 8.24a সূত্রগুলি দ্বারা নির্দেশিত।

আপনি হয়ত বুঝতে পারছেন যে বিভব ϕ কয়েকটি পৃথক রাশি দ্বারা গঠিত। এই রাশিগুলির উৎপত্তির অনুসন্ধান করা যাক।

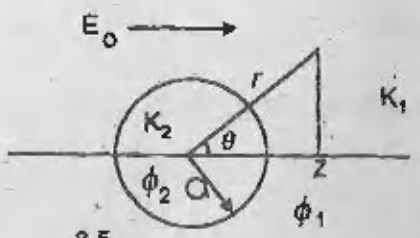
i) $= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\cdot\left(\frac{r}{d}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)$ এটি q আধান দ্বারা উৎপন্ন কুলম্ব ক্ষেত্রের বিভব।

ii) $\frac{a\phi_0}{r}$ ϕ_0 বিভবে থাকা পরিবাহী গোলকটির মোট আধান $4\pi\epsilon_0 a\phi_0$ এবং এই আধান গোলকটির কেন্দ্রে অবস্থিত বলে ধরে নেওয়া যায়। এই আধানটির জন্য P বিন্দুতে বিভব $\frac{a\phi_0}{r}$।

iii) $\sum_{\ell=0}^{\infty} -\frac{q'}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{d'^{\ell}}{r^{\ell+1}}$: এই রাশিটি গোলকের উপর আবিষ্ট আধানের দ্বারা উৎপন্ন বিভব নির্দেশ করছে।

বোঝা যায় যে এই রাশিটি যে বিভব নির্দেশ করছে তা 8.4 চিত্রে C বিন্দুতে রাখা $-q'$ আধান দ্বারা উৎপন্ন হতে পারে, যেখানে $AC = d'$।

উদাহরণ 4 সুষম তড়িৎক্ষেত্রে রাখা অন্তরক পদার্থের গোলক ধরা যাক K_1 পরা বৈদ্যুতিক মাধ্যমে কোন একটি সুষম তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য Z - দিক বরাবর E_0 এবং বিভব ϕ_0 (চিত্র 8.5)। এই তড়িৎক্ষেত্রে K_2 পরাবৈদ্যুতিক ধ্রুবকের ব্যাসার্ধের একটি গোলক রাখা আছে। গোলকটির বাইরের এবং ভিতরের তড়িৎক্ষেত্রে নির্ণয় করতে হবে।



8.5

গোলকটির বাইরে তড়িৎক্ষেত্রের প্রাবল্য দুটি পৃথক রাশির যোগফল। এর প্রথমটি হল, প্রারম্ভিক তড়িৎক্ষেত্রে $E_0 = -\frac{\partial\phi_0}{\partial z}$। গোলকটির কেন্দ্র $z = 0$ বিন্দুতে আছে ধরে নিলে $\phi_0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta)$। দ্বিতীয় তড়িৎক্ষেত্রটি গোলকের উপর আবিষ্ট আধানের দ্বারা উৎপন্ন। যেহেতু এই তড়িৎক্ষেত্রের বিভবও লাপ্লাস সমীকরণ প্রতিপালন করে, সেজন্য এই বিভবটিকে 8.21 সমীকরণের রূপে লেখা যায়। মোট বিভবটি এভাবে লেখা যায়

$$\phi_1 = -E_0 r\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta) \qquad ...8.25$$

গোলকের ভিতরের তড়িৎক্ষেত্রের বিভবটিও লাপ্লাস সমীকরণটিকে পালন করে। এই বিভবটি লেখা যায়

$$\phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A'_n r^n + \frac{B'_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta) \qquad ...8.26$$

এই বিভবটি কয়েকটি সীমাশর্ত পালন করবে। এগুলি হল

(i) গোলক থেকে অনেক দূরে, অর্থাৎ $r \to \infty$ সীমায় $\phi_1 = \phi_0$

(ii) গোলকের কেন্দ্রে বিভব ϕ_2 সসীম থাকবে

(iii) গোলকের ঠিক ভিতরে এবং ঠিক বাইরে দুই সন্নিহিত বিন্দুতে বিভব সসমান হবে, অর্থাৎ $(\phi_1)_{r=a} = (\phi_2)_{r=a}$, যখন θ সসমান।

(iv) যেহেতু গোলকের তলের মধ্য দিয়ে বাহিত তড়িৎ আবেশের প্রবহন (flux) সন্তত থাকে, অতএব

$$K_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} = K_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r}$$

সীমাশর্ত (i) প্রয়োগ করে পাওয়া যায় $A_n = 0$ এবং (ii) প্রয়োগ করে পাওয়া যায় $B'_n = 0$।

এখন সীমাশর্ত (iii) অনুযায়ী,

$$-E_0 a \cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) \qquad (A' \text{ এর স্থানে } A \text{ লিখে})$$

$P_n(\cos\theta)$ পলিনোমিয়ালগুলির অভিলম্বতা (orthogonality) ব্যবহার করে আপনি দেখাতে পারেন,

$P_1(\cos\theta)$ এর সহগগুলির তুলনা করে $-E_0 a + \frac{B_1}{a^2} = A_1 a \qquad (\because P_1(\cos\theta) = \cos\theta)$ ... 8.27(a)

$P_n(\cos\theta)$, $n \neq 1$, এর সহগগুলির তুলনা করে $B_n/a^{2n+1} = A_n$ ...8.27(b)

আবার, $$\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = -E_0 \cos\theta - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n r^{-(n+2)} P_n(\cos\theta)$$

এবং $$\frac{\partial \phi_2}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{\infty} n A_n r^{n-1} P_n(\cos\theta)$$

সীমাশর্ত (iv) অনুযায়ী

$$-K_1 E_0 P_1(\cos\theta) - K_1 \sum_{x=0}^{\infty} (x+1) B_n a^{-(n+2)} P_n(\cos\theta) = K_2 \sum_{n=0}^{\infty} n A_n a^{n-1} P_n(\cos\theta)$$

পূর্বের মত, $P_1(\cos\theta)$ এর সহগগুলির তুলনা করে,

$$-K_1 E_0 - K_1 \cdot \frac{2B_1}{q^3} = K_2 A_1 \qquad \text{... 8.27(c)}$$

এবং $P_n(\cos\theta)$, $n \neq 1$, এর সহগগুলির তুলনা করে,

$$-K_1(n+1)\ B_n a^{-(n+2)} = n K_2 A_n a^{n-1} \qquad 8.27(d)$$

8.27(a) ও (c) সমীকরণ দুটি সমাধান করে আপনি পাবেন

$$A_1 = -\frac{3K_1}{2K_1+K_2} E_0 ; \quad B_1 = \frac{K_2-K_1}{2K_1+K_2} E_0 a^3$$

আবার, 8.27(b) ও (d) সমীকরণ দুটি থেকে যখন $n \neq 1$,

$$A_n = B_n / a^{2n+1} = -\frac{K_1}{K_2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{B_n}{a^{2n+1}}$$

যেহেতু $-\frac{K_1}{K_2} \cdot \frac{n+1}{n}$ এর মান 1 হতে বাধ্য নয়, অতএব $A_n = B_n = 0$

সুতরাং $\phi_1 = -E_0 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2} P_1(\cos\theta)$

$$= -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cdot \frac{K_2-K_1}{2K_1+K_2} \cos\theta \qquad \ldots 8.28$$

এর প্রথম রাশিটি প্রারম্ভিক প্রাবল্য E_0 সূচিত করে। দ্বিতীয়টি $= E_0 a^3 \cdot \frac{K_2-K_1}{2K_1+K_2}$ দ্বিমেরু ভ্রামকবিশিষ্ট, একটি তড়িৎ-দ্বিমেরুর দ্বারা উৎপন্ন। এর থেকে বোঝা যায় যে E_0 প্রাবল্যর তড়িৎক্ষেত্রটি অন্তরক পদার্থের গোলকটিতে দ্বিমেরুত্ব আরোপ করে। দ্বিমেরু ভ্রামকটি গোলকের আয়তনের সমানুপাতী এবং একক আয়তন পিছু দ্বিমেরু ভ্রামক $\frac{3E_0}{4\pi} \cdot \frac{k_2-k_1}{2k_1+k_2}$।

গোলকের অভ্যন্তরে বিভব $\phi_2 = A_1 r P_1(\cos\theta)$

$$= -\frac{3K_1}{2K_1+K_2} E_0 r\cos\theta$$

$$= -\frac{3K_1}{2K_1+K_2} E_0 z \qquad \ldots 8.29$$

অর্থাৎ এই অঞ্চলে প্রাবল্য $-\frac{\partial\phi_2}{\partial z} = \frac{3K_1}{2K_1+K_2} E_0$।

এই প্রাবল্য z অক্ষ অভিমুখী, সুষম এবং এর মান $k_2 > k_1$ হলে E_0 অপেক্ষা কম, $k_2 < k_1$ হলে E_0 অপেক্ষা বেশী।

এবার 8.21 সমীকরণ ব্যবহার করে একটি অনুশীলনীর সমাধান করুন।

অনুশীলনী 2

দুটি সমকেন্দ্রিক ধাতব গোলকের ব্যাসার্ধ a ও b এবং বিভব যথাক্রমে V_a ও V_b। গোলক দুটির মধ্যবর্তী স্থানে বিভব নির্ণয় করুন। ধরে নিন। প্রতিসাম্য হেতু বিভব θ কোণের উপর নির্ভরশীল নয়।

8.4 বেলনীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণ

বেলনীয় নির্দেশাঙ্কে কোন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক ρ, θ, z – এই তিনটি নির্দেশাঙ্ক দিয়ে সূচিত হয়। এই নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণটির রূপ হল

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad \ldots 8.30$$

এই নির্দেশতন্ত্রে ρ = 0 অক্ষটি z দিক বরাবর লম্বিত হয় এবং বিভব z এর সঙ্গে পরিবর্তিত হয় না। এজন্য আমরা প্রথমেই $\frac{\partial V}{\partial z}$ এবং $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ কে শূন্য ধরতে পারি। বিভব V(ρ, θ) কে R(ρ) এবং T(θ) এই দুই অপেক্ষকের গুণফল বলে ধরা যেতে পারে। এখানে R কেবলমাত্র ρ এবং T কেবলমাত্র θ এর উপর নির্ভরশীল। 8.30 সমীকরণে V এর স্থানে R.T বসিয়ে,

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{R}{\rho^2}\frac{d^2T}{d\theta^2}=0$$

বা উভয়দিককে R.T দিয়ে ভাগ করে এবং ρ^2 দিয়ে গুণ করে,

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{T}\frac{d^2T}{d\theta^2}=0$$

এই সমীকরণের বামদিকের প্রথম রাশিটি কেবলমাত্র ρ এর এবং দ্বিতীয় রাশিটি কেবলমাত্র θ এর উপর নির্ভরশীল। সহজেই বোঝা যায় দুটি রাশিই ধ্রুবক। ধরা যাক,

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)=-\frac{1}{T}\frac{d^2T}{d\theta^2}=m^2 \qquad \ldots 8.31$$

প্রথমে θ - সমীকরণটি সমাধান করা যাক। $\frac{d^2T}{d\theta^2}=-m^2T$ এর সমাধান

$$T(\theta)=A_m\sin m\theta+B_m\cos m\theta$$

যেহেতু T (2π + θ) = T (θ), m একটি পূর্ণসংখ্যা, যার মান 1, 2, 3, ... হতে পারে। সুতরাং T (θ) এর সাধারণ সমাধান

$$T(\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\sin m\theta+B_m\cos m\theta) \qquad \ldots 8.32$$

আপনি প্রশ্ন করতে পারেন m^2 রাশিটি শূন্য বা নেগেটিভ হলে $T(\theta)$ এর সমাধান সম্ভব হত কিনা। $m^2 = 0$ ধরলে $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$, অর্থাৎ $T = a\theta + b$, যেখানে a ও b ধ্রুবক। কিন্তু $T(2\pi + \theta) = T(\theta)$ এই সীমাশর্ত প্রয়োগ করলে,

$$a(2\pi + \theta) + b = a\theta + b,$$

বা $a = 0$, $T(\theta) = b =$ ধ্রুবক। এই ককে আমরা R এর সমাধানের অন্তর্ভুক্ত করে নিতে পারি।

m^2 রাশিটি নেগেটিভ ধরলে, লেখা যায় $\frac{d^2T}{d\theta^2} = -m^2T = n^2T$ $(m^2 = -n^2$ ধরে)

এখানে n একটি বাস্তব রাশি। সমাধান করে,

$$T(\theta) = ae^{n\theta} + be^{-n\theta}$$

যেহেতু $T(2\pi + \theta) = T(\theta)$, $ae^{n(2\pi+\theta)} + be^{-n(2\pi+\theta)} = ae^{n\theta} + be^{-n\theta}$

$$\therefore ae^{n\theta}(e^{2\pi n} - 1) + be^{-n\theta}(e^{-2\pi n} - 1) = 0$$

একইভাবে, যেহেতু $T(4\pi + \theta) = T(\theta)$, $ae^{n\theta}(e^{4\pi n} - 1) + be^{-n\theta}(e^{-4\pi n} - 1) = 0$

এইভাবে $ae^{n\theta}$ ও $be^{-n\theta}$ এর অসংখ্য রৈখিক যোগফল লেখা যায়, যেগুলির মান শূন্য। সুতরাং a ও b ধ্রুবকগুলি পৃথকভাবে শূন্য।

এবার ρ সমীকরণটির সমাধান করা যাক। পরীক্ষামূলক সমাধান হিসাবে ধরে নিন $R(\rho) = \rho^\ell$। 8.31 সমীকরণে $R(\rho)$ এর এই সমাধান বসিয়ে,

$$\frac{\rho}{\rho^\ell}\frac{d}{d\rho}(\rho \cdot \ell\, \rho^{\ell-1}) = m^2 \qquad (m = 1, 2, 3 \ldots)$$

বা, $\ell^2 \rho^{\ell-1} = m^2 \rho^{\ell-1}$ অর্থাৎ $\ell^2 = m^2$, $\ell = \pm m$

এবং $R(\rho) = C\rho^m + D\rho^{-m}$

যেহেতু $m = 1, 2, 3 \ldots$, R এর সাধারণ সমাধান

$$R(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m \rho^m + D_m \rho^{-m}\right)$$

যদি $m = 0$ হয়, তবে 8.31 সমীকরণ থেকে

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = 0$$

অর্থাৎ $\rho\frac{dR}{d\rho} = C_0$ এবং $R = \int C_0 \frac{d\rho}{\rho} = C_0 \ln\rho + D_0$

যেখানে C_0 ও D_0 দুটি সমাকলন ধ্রুবক।

এখন আমরা V এর সম্পূর্ণ সমাধানটি লিখতে পারি

$$V(\rho,\theta) = (C_0 \ln\rho + D_0) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m\rho^m + D_m\rho^{-m}\right)(A_m \sin m\theta + B_m \cos m\theta)$$

কোন কোন অবস্থায় প্রতিসাম্য হেতু $V(\rho, \theta) = V(\rho, -\theta)$ হতে দেখা যায়। এই শর্ত পালিত হলে

$$A_m \sin m\theta + B_m \cos m\theta = A_m \sin(-m\theta) + B_m \cos(-m\theta)$$
$$= -A_m \sin m\theta + B_m \cos m\theta$$

অর্থাৎ $A_m = 0$ । B_m ধ্রুবকগুলিকে C_m ও D_m ধ্রুবকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত করে লেখা যায়

$$V(\rho,\theta) = (C_0 \ln\rho + D_0) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m\rho^m + D_m\rho^{-m}\right)\cos m\theta \qquad \ldots 8.33$$

এটিকেই আমরা V এর নির্ণেয় সমাধান হিসাবে গ্রহণ করব।

বেলনীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণের প্রয়োগের একটি উদাহরণ আলোচনা করা যাক।

উদাহরণ 5 অসীম দৈর্ঘ্যের সমভাবে আহিত বেলনাকৃতি পরিবাহীর সমীপে তড়িৎ-ক্ষেত্র

ধরা যাক, অসীম দৈর্ঘ্যের একটি গোলাকার প্রস্থচ্ছেদের বেলনাকৃতি পরিবাহীর অক্ষটি z-দিক বরাবর আছে এবং একক দৈর্ঘ্য পিছু পরিবাহীটি λ আধান বহন করছে। পরিবাহী বেলনটির বাইরে বিভব $V(\rho, \theta)$ যে সীমাশর্তগুলি পালন করবে সেগুলি হল

(i) যখন $\rho \to \infty$, তখন $\to V0$ এবং পরিবাহীর একাংশ বেষ্টন করে গাউসীয় তল কল্পনা করলে তার উপর $\int E ds = ($ বেষ্টিত আধান $\div \epsilon_0)$ এর সমান হবে।

(ii) প্রতিসাম্যের ফলে বিভব V কোণ θ-এর উপর নির্ভরশীল হবে না।

8.33 সমীকরণে দ্বিতীয় সীমাশর্তটি প্রয়োগ করলে দেখা যায় যে m এর মান শূন্য ছাড়া অন্য কিছু হতে পারে না। সুতরাং $V(\rho) = C_0 \ln\rho + D_0$

কিন্তু তড়িৎপ্রাবল্য $E = -\frac{dV}{d\rho} = -\frac{C_0}{\rho}$ । কিন্তু গাউসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে দেখানো যায় $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho}$ । তুলনা করে $C_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$ । সুতরাং এখন আমরা বিভবের মান লিখতে পারি

$$V(\rho) = D_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\rho \qquad \ldots 8.34$$

এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী 3 : কোন একটি বিভব $\rho = a$ থেকে ∞ এর মধ্যে সর্বত্র সসীম এবং কোন একটি অক্ষের সাপেক্ষে $\cos 2\theta$ এর সমানুপাতী। বিভবটির সমীকরণ নির্ণয় ক্রমশঃ।

8.5 সারাংশ

এই এককটিতে স্থির তড়িৎবিদ্যার বিভিন্ন সমস্যার সমাধানে লাপ্লাস সমীকরণের প্রয়োগ আলোচনা করা হয়েছে। লাপ্লাস সমীকরণ, $\nabla^2 V = 0$, একটি দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অবকলন সমীকরণ, যেটিকে বিভিন্ন নির্দেশাঙ্কে লেখা যায়। সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কে এটির রূপ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

গোলীয় নির্দেশাঙ্কে এটিকে লেখা যায়

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0$$

এবং বেলনীয় নির্দেশাঙ্কে

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

কোন তড়িৎক্ষেত্রে আধানবিহীন যে কোন বিন্দুতে তড়িৎবিভব লাপ্লাস সমীকরণ প্রতিপালন করে। সুতরাং, প্রযোজ্য সীমাশর্তগুলি পালন করে, লাপ্লাস সমীকরণের এমন একটি সমাধান যদি নির্ণয় করা যায় তবে সেটিই ঐ নির্দি ক্ষেত্রে তড়িৎবিভবটি বর্ণনা করবে।

এই এককে সমকোণী কার্টেজীয়, গোলীয় এবং বেলনীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণ করা হয়েছে এবং বিভিন্ন ক্ষেত্রে স্থির তড়িৎ বিভব নির্ণয়ে সেগুলির প্রয়োগ দেখানো হয়েছে।

8.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. লাপ্লাস সমীকরণটি ত্রিমাত্রিক সমকোণী কার্টেজীয়, গোলীয় ও বেলনীয় নির্দেশাঙ্কে লিখুন। প্রত্যেক ক্ষে সমীকরণটিকে ভেঙে এক একটি নির্দেশাঙ্কের জন্য এক একটি পৃথক সমীকরণ গঠন করুন।

2. দ্বিমাত্রিক সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণটি লিখুন এবং তার সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ রেখাগুলির উপর তড়িৎবিভব শূন্য হলে প্রমাণ করুন যে ঐ রেখাগুলির দ্বা আবদ্ধ অঞ্চলের সর্বত্রই বিভব শূন্য হবে।

3. সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কে ত্রিমাত্রিক লাপ্লাস সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করুন।

4. লাপ্লাস সমীকরণটি গোলীয় (r, θ, ϕ) নির্দেশাঙ্কে লিখুন এবং সেটিকে তিনটি নির্দেশাঙ্কে ভিন্ন ভিন্ন সমীকরণে বিভক্ত করুন। ϕ কোণের যে কোন মানের জন্য V একমানবিশিষ্ট হবে ধরে নিয়ে ϕ - সমীকরণটির সমাধান করুন।

5. একটি ভূসংলগ্ন পরিবাহী গোলকের বাইরে একটি বিন্দু আধান রাখা হলে সন্নিহিত অঞ্চলে তড়িৎবিভবের মান নির্ধারণ করুন।

6. কেলনীয় নির্দেশাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণটি লিখুন এবং তার সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন। এই নির্দেশাঙ্কে V এর মান $(Ae^{kz} + Be^{-kz})$ এর সমানুপাতী ধরে দেখান যে বিভব সর্বত্র সসীম থাকলে A ও B এর মান শূন্য হবে।

8.7 উত্তরমালা

অনুশীলনী 1

i) আধানহীন যে কোন বিন্দুতে $\nabla^2 V = 0$, অর্থাৎ লাপ্লাস সমীকরণটি প্রযোজ্য। সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কে এটি $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$– এই রূপে লেখা হয়। কোন বিন্দুতে তড়িৎবিভব সর্বোচ্চ হতে হলে $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ এবং $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ তিনটিই নেগেটিভ হবে। অর্থাৎ এগুলির যোগফলও নেগেটিভ হবে। সুতরাং যে বিন্দুতে লাপ্লাস সমীকরণ প্রযোজ্য সেখানে তড়িৎবিভব সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন হতে পারে না।

ii) উদাহরণ 2 দেখুন। 8.14 সূত্রে $V_0 = 0$ ধরে দেখা যায় $A_{mn} = 0$। সুতরাং 8.13 সূত্র অনুযায়ী $V(x, y, z) = 0$। সুতরাং ঘনকের সবকটি তল শূন্য বিভবে থাকলে তার মধ্যে সর্বত্রই বিভব শূন্য হবে।

অনুশীলনী 2

এক্ষেত্রে 8.24b সমীকরণের কেবলমাত্র $\ell = 0$ রাশিটি নেওয়া যেতে পারে কেননা $P_0(\cos\theta) = 1$। সুতরাং

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{B_0}{r} = A_0 + \frac{B_0}{r}$$ ধরা যাক।

যখন $r = a$, $\theta = Va$, সুতরাং $A_0 + \frac{B_0}{a} = V_a$

অনুরূপভাবে $A_0 + \frac{B_0}{b} = V_b$। সমীকরণদুটির সমাধান করে পাবেন

$$A_0 = \frac{aV_a - bV_b}{a - b}, \quad B_0 = \frac{(V_a - V_b)ab}{b - a}$$

অর্থাৎ $\phi = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(V_a - V_b)ab}{r} - (aV_a - bV_b)\right]$

অনুশীলনী 3

8.33 সূত্র থেকে $\cos 2\theta$ এর সমানুপাতী রাশিটিকে বেছে নিলে,

$$V(\rho,\theta) = \left(C_2\rho^2 + \frac{D_2}{\rho^2}\right)\cos 2\theta$$

যেহেতু $\partial \to \infty$ সীমায় V সসীম থাকে, $C_2 = 0$

সুতরাং $V(\rho,\theta) = \frac{D_2}{\rho^2}\cos 2\theta$, যেখানে D_2 একটি ধ্রুবক।

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্ক 8.2 অংশের মধ্যে এর উত্তর পাবেন। গোলীয় নির্দেশাঙ্ক ঃ ধরে নিন $V(r, \theta, \phi) = R(r) . T(\theta) . F(\phi) = R(r)\gamma(\theta, \phi)$ লাপ্লাস সমীকরণে V-এর এই রাশিমালাটি লিখলে পাবেন

$$\frac{\gamma}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\right) + \frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\gamma}{\partial\phi^2} = 0$$

R. γ দিয়ে উভয়দিককে ভাগ করে এবং r^2 দিয়ে গুণ করে,

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\gamma\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\gamma\sin^2\theta}\frac{\partial^2\gamma}{\partial\phi^2} = 0$$

যেহেতু প্রথম রাশিটি r এর উপর নির্ভরশীল এবং বাকি রাশিগুলি θ ও ϕ এর উপর নির্ভরশীল, প্রথম রাশিটি মান একটি ধ্রুবক। অর্থাৎ

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = \ell(\ell+1)$$, যেখানে ℓ একটি ধ্রুবক। (i)

অন্যদিকে $\frac{1}{\gamma\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\gamma\sin^2\theta}\frac{\partial^2\gamma}{\partial\phi^2} = -\ell(\ell+1)$

সমীকরণে $\gamma = T(\theta) . F(\phi)$ লিখে

$$\frac{F}{\gamma\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right) + \frac{T}{\gamma\sin^2\theta}\frac{d^2F}{d\phi^2} = -\ell(\ell+1)$$

বা, $$\frac{\sin\theta}{T}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right) + \frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\phi^2} + \ell(\ell+1)\sin^2\theta = 0$$

আগের মত দেখুন $\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\phi^2}$ রাশিটি কেবলমাত্র ϕ এর অপেক্ষা কিন্তু বামদিকের বাকি অংশটি θ এর অপেক্ষক। সুতরাং এই দুটি অংশই ধ্রুবক এবং আপনি লিখতে পারেন

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\phi^2} = -m^2 \qquad \text{(ii)}$$

এবং $$\frac{\sin\theta}{T}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right) + \ell(\ell+1)\sin^2\theta - m^2 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

এইভাবে আমরা লাপ্লাস সমীকরণকে(i), (ii) ও (iii) সমীকরণ তিনটিতে ভাঙতে পারি যাতে r, θ ও ϕ প্রাচলগুলি পৃথক হয়।

বেলনীয় নির্দেশাঙ্ক ঃ 8.30 লাপ্লাস সমীকরণে $V(\rho, \theta, z) = R(\rho) . T(\theta) . Z(z)$ লিখলে পাবেন

$$\frac{T\cdot Z}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{R\cdot Z}{\rho^2}\frac{d^2T}{d\theta^2} + R\cdot T\cdot\frac{d^2z}{dz^2} = 0$$

বা R . T . Z দিয়ে উভয়দিককে ভাগ করে,

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{T\rho^2}\frac{d^2T}{d\theta^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

লক্ষ্য করুন $\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$ রাশিটি কেবলমাত্র z এর অপেক্ষক এবং বামদিকে অন্য দুটি রাশি কেবলমাত্র ρ ও θ এর অপেক্ষক। সুতরাং লেখা যায়

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 \qquad (k = \text{ধ্রুবক}) \qquad \text{(i)}$$

এবং $$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{T\rho^2}\frac{d^2T}{d\theta^2} = k^2$$

ρ^2 দিয়ে উভয়দিক গুণ করে, $$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - k^2\rho^2 = -\frac{1}{T}\frac{d^2T}{d\theta^2}$$

আগের যুক্তি অনুসারে উভয়দিকই ধ্রুবক, অর্থাৎ

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{d\theta^2} = -m^2 \qquad (m^2 = \text{ধ্রুবক}) \qquad \text{(ii)}$$

এবং $$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - k^2\rho^2 - m^2 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

(i), (ii) ও (iii) সমীকরণগুলি লাপ্লাস সমীকরণের প্রাচলগুলি পৃথক করে পাওয়া গেল।

2. প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তর 8.2 অংশে পাবেন। দ্বিতীয় অংশের উত্তর অনুশীলনী 1 এর (ii) অংশের উত্তরের অনুরূপ এবং এটি আপনি নিজেই দিতে পারবেন।

3. এর উত্তরও 8.2 অংশে পাবেন।

4. প্রথম অংশের উত্তর ইতিপূর্বেই সর্বশেষ প্রশ্নাবলির প্রথম প্রশ্নের উত্তরে দেওয়া হয়েছে।

দ্বিতীয় অংশের উত্তর : $\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\phi^2} = -m^2$ সমীকরণটির সমাধান $F(\theta) = A \sin m\phi + B \cos m\phi$ ($A, B =$ ধ্রুবক) যেহেতু $F(\phi + 2\pi) = F(\phi)$, $m =$ পূর্ণসংখ্যা (0, 1, 2 .....) সুতরাং ϕ - সমীকরণের সাধারণ সমাধান $F(\phi) = \sum_m (A_m \sin m\phi + B_m \cos m\phi)$

5. প্রশ্নটির উত্তর উদাহরণ-এর আলোচনায় পাবেন। এখানে গোলকটির বিভব $\phi_0 = 0$ ধরতে হবে।

6. প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তর 8.4 অংশে দেওয়া হয়েছে।

বিভবটি সর্বত্র সসীম থাকলে $Z \to \infty$ এবং $z \to -\infty$ সীমায় V এর মান সসীম থাকবে। প্রথম শর্তটির ফলে A ধ্রুবক এবং দ্বিতীয় শর্তটির ফলে B ধ্রুবক শূন্য হবে।

NOTES

NOTES

মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাধ্য করিয়া তোলা হয়।

—রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে, সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নূতন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

— সুভাষচন্দ্র বসু

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

— Subhas Chandra Bose

Price : Rs. 225.00
(NSOU-র ছাত্রছাত্রীদের কাছে বিক্রয়ের জন্য নয়)

Published by Netaji Subhas Open University, DD-26, Sector-I, Salt Lake, Kolkata-700 064 &
Printed at Sailee Press Pvt. Ltd., 4A Manicktala Main Road, Kolkata 700 054