NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

SUBSIDIARY MATHEMATICS

SMT - 02

BLOCK - 1

DIFFERENTIAL CALCULUS

প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোনও বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়ণের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে — যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এই সব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোনো শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ-ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক — অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

২৭তম পুনর্মুদ্রণ : জুলাই, 2018

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau
of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় : সহায়ক গণিতবিদ্যা **স্নাতক পাঠক্রম**

পাঠক্রম : S M T : 02 : 01

অন্তরকলন গণিত

একক	রচনা	সম্পাদনা
1—5	অধ্যাপক প্রণব অধিকারী	অধ্যাপক সুবীর মুখোপাধ্যায়
6—11	অধ্যাপক সুবীর মুখোপাধ্যায়	অধ্যাপক অভয়পদ বৈষ্ণব

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

S M T – 02

পর্যায়
1

একক 1 ❒ বাস্তব সংখ্যা ও বিভিন্ন ধর্ম (Real number and different properties)

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা

বাস্তব রাশি হ'ল সেই বুনিয়াদী উপকরণ যাকে মূলধন করে যুক্তিশাস্ত্রের সাহায্যে গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্বের অবতারণা করা হয়। বিশ্লেষণ তত্ত্বের স্বাভাবিক অভিমুখীনতা অনুযায়ী প্রথমে Peano's Axioms বা পীয়ানো স্বতঃসিদ্ধের সাহায্যে স্বাভাবিক সংখ্যাগুলিকে চিত্রিত করা, তার পর বীজগাণিতিক পদ্ধতির মাধ্যমে স্বাভাবিক সংখ্যা থেকে মূলদ সংখ্যা গঠন করা এবং সর্বশেষে Dedekind Cut বা অনুরূপ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে বাস্তব সংখ্যার গঠনই বিধেয়। কিন্তু এই প্রক্রিয়া অনুসরণের ক্ষেত্রে যে সূক্ষ্মাতিসূক্ষ্ম গাণিতিক যুক্তিবিন্যাসের প্রয়োজন পড়ে, সেটি সময়ের বিচারে ও কলনবিদ্যার প্রথম পর্বের পাঠক পাঠিকাদের ক্ষেত্রে পরিহার করাই বাস্তব সম্মত। সেই হিসাবে এই এককে বাস্তব রাশির কিছু গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম ও প্রক্রিয়ার উল্লেখ করা হ'ল, যা পরবর্তী এককগুলির ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হ'বে।

1.2 সেটের কিছু আলোচনা

সেট (Set) ঃ সেট হলো কোন নির্দিষ্ট নিয়মের ভিত্তিতে সুসংজ্ঞাত বস্তুর সংগ্রহ। বস্তুগুলিকে সেটের পদ বলা হয়। সেট সাধারণত A, B, ... X, Y, ... প্রভৃতি দিয়ে নির্দেশ করা হয় এবং পদগুলি সাধারণত a, b, ... x, y, ... প্রভৃতি দিয়ে নির্দেশ করা হয়। সেট সাধারণত দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে লেখা হয়।

উদাহরণ ঃ (1) মৌলানা আজাদ কলেজের প্রথম বর্ষের ছাত্ররা একটা সেট তৈরী করে। এখানে বস্তুগুলি হল "ছাত্র" এবং নিয়ম হলো "মৌলানা আজাদ কলেজের প্রথম বর্ষ"।

(2) পৃথিবীর সেই সমস্ত মানুষদের সংগ্রহ যাদের বয়স 200 বছরের বেশী"।

এখানে বস্তু হলো "মানুষ" এবং নিয়ম হলো" বয়স 200 বছরের বেশী"।

সংজ্ঞানুযায়ী, এটা একটা সেট কিন্তু এই সংগ্রহে অর্থাৎ সেটে একটিও মানুষ (বস্তু) পাওয়া যাবে না। এরকম সেটকে শূন্য সেট বা নাল (null) বা ভয়েড্ (void) সেট বলা হবে।

সার্বিক বা ইউনিভার্সাল সেট (Universal set) ঃ কোন সেটের আলোচনায়, যে বস্তুর সংগ্রহ বলা হয়েছে নিয়ম বাদে বিশ্বের সমস্ত ঐ বস্তুর সংগ্রহকে ইউনিভার্সাল সেট বলা হয়। ইউনিভার্সাল সেট সাধারণত U দ্বারা সূচিত করা হয়।

শূন্য সেট (Void or Empty set) ঃ যে সেটে কোন পদের অস্তিত্ব থাকে না তাকে শূন্য সেট বলা হয়। Φ চিহ্ন দ্বারা শূন্য সেট সূচিত করা হয়। উপরে 2 নং উদাহরণ একটি শূন্য সেটের উদাহরণ।

সিঙ্গালটোন সেট (Singletone set) ঃ যে সেটে একটি এবং কেবলমাত্র একটি পদ আছে তাকে সিঙ্গালটোন সেট বলা হয়। যেমন [0] একটি সিঙ্গালটোন সেট।

সাব-সেট (Sub-set) বা উপসেট ঃ A এবং B দুটি সেট। B সেটকে A সেটের সাবসেট বা উপসেট বলা হবে যদি B সেটের প্রতিটি পদ A সেটের পদ হয়। চিহ্নের দ্বারা লেখা হয় $B \subset A$, এক্ষেত্রে A কে বলা হবে B এর সুপার সেট।

উদাহরণ ঃ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = (1, 2, 3, 4, 6, 7)$; $A \subset B$, $B \not\subset A$

সসীম ও অসীম সেট ঃ সেট S কে সসীম সেট বলা হইবে যদি S শূন্য সেট হয় অথবা যদি সেট S-এ সসীম সংখ্যক সদস্য থাকে। অন্যথায় সেটটিকে অসীম সেট বলা হয়।

সেটের সমতা ঃ দুটি সেট A এবং B পরস্পর সমান হবে অর্থাৎ $A = B$ হবে, যদি $A \subset B$ এবং $B \subset A$ হয়।

ইউনিয়ন্ (সংযোগ) (Union) ঃ A এবং B সেট-এর ইউনিয়ন $A \cup B$ একটি সেট যার পদগুলি হয় A-এর পদ বা B-এর পদ অথবা উভয়ের পদ। অর্থাৎ $A \cup B = \{x/x \in A$ অথবা $x \in B\}$, $A \cup \phi = A$, $A \cup A = A$, $A \cup U = U$, $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$।

ইন্টারসেকশন (Intersection) ঃ A এবং B সেটের ইন্টারসেকশন একটি সেট যার পদগুলি A এবং B উভয় সেটে থাকবে।

$A \cup B = \{x/x \in A$ এবং $x \in B\}$

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}\right\}, B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right\}, C = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$$

$$A \cap B = \left\{\frac{1}{2}\right\},\ A \cap C = \phi$$

কিছু তথ্য ঃ $A \cap \phi = A \cap A = A$, $A \cap U = A$

$A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$

সেটসমূহের কার্তিয় গুণফল ঃ A ও B অশূন্য সেট হইলে $A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$

বিচ্ছিন্ন সেট (Disjoint set) ঃ

A এবং B কে বিচ্ছিন্ন সেট বলা হবে যদি $A \cap B = \phi$।

উদাহরণ ঃ $S = \{p, q, r, s\}$, $T = \{a, b, c\}$ যেখানে S-এর কোন সদস্য T-এর সদস্য নয় $\Rightarrow S \cap T = \phi$।

পূরক সেট (Complement of a set) ঃ

U যদি সার্বিক সেট হয় এবং A যদি ঐ সার্বিক সেটের একটি সাবসেট হয় তবে A সেটের পূরক সেট হবে একটি সেট যার পদগুলি U-এর পদ হবে কিন্তু A-এর পদ হবে না। পূরক কেট A' (বা A^C) দ্বারা লেখা হয়।

$A^C = [x/x \in U,\ x \notin A\} = A'$

কিছু তথ্য ঃ $A \cup A^C = U$; $A \cap A^C = \phi$; $\Phi^C = U$, $U^C = \phi$

De-Morgan-এর নিয়ম ঃ $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

1.3 স্বাভাবিক সংখ্যা

গণন প্রক্রিয়ার স্বাভাবিক নিয়মে আমরা 1, 2, 3, ... ইত্যাদি চিহ্নগুলি পাই, যেগুলিকে স্বাভাবিক

সংখ্যা বলে অভিহিত করা হয়। ঐ স্বাভাবিক সংখ্যাগুলি নিয়ে যে সেট গঠিত হয়, তাহাকে N দ্বারা সূচিত করা হয়। N = (1, 2, 3, ...) সেটটি অসীম সেট। যেখানে $n \in N$ হইলে $n+1 \in N$ হবে।

যদি $M \subset N$ এবং (i) $1 \in M$ (ii) $n \in M$ হলে $n + 1 \in M$ হয়, তবে $M = N$।

যে কোন দুটি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল সব সময় স্বাভাবিক সংখ্যা, কিন্তু যে কোন দুটি স্বাভাবিক সংখ্যার বিয়োগফল সবসময় স্বাভাবিক সংখ্যা হয় না। স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির ঋণাত্মককে ঋণাত্মক সংখ্যা হিসাবে অভিহিত করা হয়।

এই পর্য্যায়ে সেট N-এর মধ্যে স্বাভাবিক সংখ্যার ঋণাত্মক রূপ এবং 0 (শূন্য) অন্তর্ভুক্ত করে আমরা পেলাম পূর্ণ সংখ্যার সেট Z অর্থাৎ, Z গঠিত হলো সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যার (ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা), স্বাভাবিক সংখ্যার ঋণাত্মক রূপ (ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা) এবং শূন্য দ্বারা

$Z = \{.......... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \}$

আবার, পূর্ণসংখ্যাগুলির মধ্যে গুণ প্রক্রিয়ার দ্বারা উৎপন্ন ফল একটি পূর্ণসংখ্যা বা শূন্য হবে কিন্তু Z-এর যে কোন দুটি সংখ্যার মধ্যে ভাগ প্রক্রিয়ার সমস্ত ফল কিন্তু পূর্ণসংখ্যা হয় না। যেমন $3 \div 2$, $7 \div 5$ ইত্যাদি। তখনই সৃষ্টি হলো মূলদ সংখ্যা (p/q আকার, $q \neq 0$), উল্লেখ্য 0 (শূন্য) দ্বারা ভাগ অসংজ্ঞাত। সুতরাং মূলদ সংখ্যা বলিতে বুঝায় $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যা যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা, $q \neq 0$।

Z-সেটের মধ্যে মূলদ সংখ্যাগুলি অন্তর্গত করে আমরা পেলাম মূলদ সংখ্যার সেট Q।

1.3.1 মূলদ সংখ্যার বীজগাণিতিক ধর্ম (Algebraic properties of Q)

বীজগাণিতিক ধর্মগুলি হল ঃ

A1) যে কোন $a, b \in Q$ এর জন্য $a + b \in Q$

A2) যে কোন $a, b, c \in Q$ এর জন্য

$(a + b) + c = a + (b + c)$

A3) যে কোন $a \in Q$, $a + 0 = a$; $0 \in Q$

A4) যে কোন $a \in Q$ এর ক্ষেত্রে $-a \in Q$ পাওয়া যায়, যার জন্য $a + (-a) = 0$ হবে

A5) যে কোন $a, b \in Q$ এর জন্য $a + b = b + a$

M1) যে কোন $a, b \in Q$ এর জন্য $a \cdot b \in Q$

M2) যে কোন $a, b, c \in Q$ এর জন্য $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

M3) $1 \in Q$ এবং যে কোন $a \in Q$ এর জন্য $a \cdot 1 = a$

M4) যে কোন $a \in Q$, $a \neq 0$ এর জন্য Q-এ $\frac{1}{a}$ আকারের সংখ্যা পাওয়া যাবে, যাতে $a.\frac{1}{a} = 1.$

M5) যে কোন $a, b \in Q$ এর জন্য $a \cdot b = b \cdot a$

D) যে কোন $a, b, c \in Q$ এর জন্য $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

1.3.2 Q-এর ক্রম ধর্ম (Order properties of Q)

ধর্মগুলি হলো ঃ

(1) যে কোন দুটি সংখ্যা a, b$\in$Q-এর জন্য,

হয় $a < b$, বা $a = b$ নতুবা $b < a$ (law of trichotomy)

(2) যে কোন তিনটি সংখ্যা a, b, c$\in$Q-এর জন্য

(i) $a < b$ এবং $b < c \Rightarrow a < c$

(ii) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

(iii) $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ যখন $c < 0$

1.3.3 Q-এর ঘনত্ব ধর্ম (Density property of Q)

ধর্মটি হলো ঃ

"a, b$\in$Q এবং $a < b$ হলে অপর একটি সংখ্যা c$\in$Q পাওয়া যাবে যাতে $a < c < b$ হয়।"
এই ধর্মের সাহায্যে সহজেই জানা যায়, "যে কোন দুটি মূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা আছে।"

1.3.4 Q-এর আর্কিমিডিয়ান (Archimedean) ধর্ম

যে কোন দুটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা a, b $\in$ Q, $a < b$-এর জন্য সর্বদা একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n পাওয়া যায়, যাহার ক্ষেত্রে $n.a > b$.

1.4 মূলদ সংখ্যার জ্যামিতিক রূপায়ণ (Geometrical representation of rational numbers)

xx′ একটি সরলরেখা। xx′ এর উপর 0 একটি বিন্দু। 0 বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া 0-এর ডান এবং বাম দিককে যথাক্রমে ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দিক হিসাবে গণ্য করা হল। নির্দিষ্ট স্কেলে OU কে এক একক ধরা হল। OU = 1 এমন মূলদ সংখ্যা r কে xx′ এর উপরে সেই বিন্দু দ্বারা সূচিত করা হল যাহার দূরত্ব 0 বিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে OU-এর r গুণ এবং $-r$ $(r > 0)$ কে 0 বিন্দু থেকে ঋণাত্মক দিকে OU এর r গুণ দূরত্বের বিন্দু দ্বারা সূচিত করা হবে।

$\frac{p}{q}$ $(p < q)$ মূলদ সংখ্যাকে বিন্দু দ্বারা সূচিত করার ক্ষেত্রে প্রথমে OU কে সমান q সংখ্যক অংশে ভাগ করা হল। এই q সংখ্যক অংশগুলির প্রতিটির দৈর্ঘ্য $\frac{1}{q}$। এখন 0 বিন্দু থেকে $\frac{1}{q}$ দৈর্ঘ্যের পরপর p সংখ্যক অংশ যে বিন্দুতে শেষ হবে সেই বিন্দুটিই $\frac{p}{q}$ কে সূচিত করবে।

এভাবে, সমস্ত মূলদ সংখ্যাগুলিকে xx′ সরলরেখার উপরস্থ বিন্দু দ্বারা সূচিত করা যাবে।

1.5 অমূলদ সংখ্যা

উদাহরণ ঃ প্রমাণ করুন, $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নহে।

ধরা যাক, $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

$\therefore\ \sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $(q \neq 0)$; p, q পূর্ণসংখ্যা এবং পরস্পর মৌলিক।

বা, $p^2 = 2q^2$, একটি জোড় সংখ্যা। এখন p^2 একটি জোড় সংখ্যা হলে p অবশ্যই জোড় সংখ্যা।

ধরুন, $p = 2m$, যেখানে m পূর্ণসংখ্যা

$\therefore\ 4m^2 = p^2 = 2q^2$

বা, $q^2 = 2m^2$

$\therefore\ q^2$ একটি জোড় সংখ্যা। সুতরাং q-একটি জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ দেখা যাচ্ছে, 2 সংখ্যাটি p এবং q-এর একটি সাধারণ উৎপাদক। কিন্তু, p এবং q পরস্পর মৌলিক।

$\therefore\ \sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নহে।

অমূলদ সংখ্যা ঃ

যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$, (যেখানে, $q \neq 0$, p এবং q পূর্ণসংখ্যা) আকারে প্রকাশ করা যায় না তাকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়। যেমন $\sqrt{3}+\sqrt{2}, \sqrt[3]{7}$ ইত্যাদি।

1.6 বাস্তব সংখ্যা

মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যাগুলিকে নিয়ে যে সেট তৈরী হয় তাকে বাস্তব সংখ্যার সেট বলে। বাস্তব সংখ্যার সেটকে R দ্বারা সূচিত করা হয়।

বাস্তব সংখ্যা
(Real number)

- মূলদ (Rational)
  - পূর্ণসংখ্যা (Integer)
    - ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (স্বাভাবিক সংখ্যা) (Positive Integer : Natural Number
    - শূন্য (zero)
    - ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা (স্বাভাবিক সংখ্যার ঋণাত্মক রূপ) (Negative Integer : Negative form of Natural Number)
  - ভগ্নাংশ (Fraction)
- অমূলদ (Irrational)

বাস্তব সংখ্যার ধর্ম ঃ

বাস্তব সংখ্যাগুলির কিছু গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম আলোচনা করা হলো।

1.6.1. বাস্তব সংখ্যার বীজগাণিতিক ধর্ম (Algebraic properties of R)

A_1. $a + b \in R$; $\forall a, b \in R$

A_2. $a + b = b + a$; $\forall a, b \in R$

A_3. $(a + b) + c = a + (b + c)$; $\forall a, b, c \in R$

A_4. $0 \in R$ এমন যে কোন $a \in R$-এর জন্য $a + 0 = a$

A_5. প্রতিটি $a \in R$-এর জন্য R-এর মধ্যে অপর একটি সংখ্যা $-a$ পাওয়া যাবে যাতে $a + (-a) = 0$

M_1. $a \cdot b \in R$; $\forall a, b \in R$

M_2. $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in Q$

M_3. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; $\forall a, b, c \in R$

M_4. $1 \in R$ যে কোন $a \in R$ এর জন্য $a \cdot 1 = a$

M_5. প্রতিটি $a \in R$—[0] এর জন্য R-এর মধ্যে অপর একটি সংখ্যা $\frac{1}{a} \in R - [0]$ পাওয়া যাইবে,

$$a.\frac{1}{a} = 1$$

D_1. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $\forall a, b, c \in R$

D_2. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$; $\forall a, b, c \in R$

1.6.2 বাস্তব সংখ্যার ক্রম ধর্ম (Order properties of R)

0.1. যে কোন দুটি বাস্তব সংখ্যা $a, b \in R$ এর ক্ষেত্রে হয় $a < b$ বা $a = b$ নতুবা $b < a$.

0.2. $a, b, c \in R$, $a < b$ এবং $b < c \Rightarrow a < c$.

0.3. $a, b, c \in R$, $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

0.4. $a, b, c \in R$, $a < b \Rightarrow \begin{cases} ac < bc & \text{যদি } 0 < c \text{ হয়।} \\ bc < ac & \text{যদি } c < 0 \text{ হয়।} \end{cases}$

1.6.3 বাস্তব সংখ্যার ঘনত্ব ধর্ম (Density property of R)

D_1. যদি x, y দুটি বাস্তব সংখ্যা হয় এবং $x < y$ তখন একটি মূলদ সংখ্যা r পাওয়া যাবে যাতে $x < r < y$.

D_2. যদি x, y দুটি বাস্তব সংখ্যা হয় এবং $x < y$ তখন একটি অমূলদ সংখ্যা s পাওয়া যাবে যাতে $x < s < y$.

1.6.4 আর্কিমিডিয়ান ধর্ম (Archimedean property of R)

যদি $x, y \in R$ এবং $x > 0$, তখন একটি স্বাভাবিক সংখ্যা n পাওয়া যাবে যাতে, $nx > y$.

1.7 সীমাবদ্ধ সেট

বাস্তব সংখ্যার সেট S ($\subset$ R)-কে ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ সেট বলা হইবে যদি $K \in R$-এর অস্তিত্ব থাকে যাহার ক্ষেত্রে $x < K$ (বা $x \leq K$), সকল $x \in S$-এর জন্য। ফলে যে কোন সসীম সেট ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ সেট। $S = \{x|x \in R,\ 10 \leq x \leq 20\}$ ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ অসীম সেট।

সেট S-কে অধঃ-সীমাবদ্ধ সেট বলা হইবে যদি $p \in R$-এর অস্তিত্ব থাকে যাহার ক্ষেত্রে $x > p$ (বা $x \geq p$), সকল $x \in S$-এর জন্য।

ফলে যে কোন সসীম সেট অধঃ-সীমাবদ্ধ। $S = \{x|x \in R,\ 10 \leq x \leq 20\}$ অধঃ-সীমাবদ্ধ অসীম সেট। সেট S-কে সীমাবদ্ধ সেট বলা হইবে যদি উহা অধঃ ও ঊর্ধ্ব উভয় ধরণের সীমাবদ্ধ সেট হয়।

উদাহরণ ঃ (1) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N-এর অধঃসীমা আছে। কিন্তু ঊর্ধ্বসীমা নেই।

(2) সেট Z, Q এবং R প্রত্যেকে সীমাহীন সেট্।

ঊর্ধ্বসীমার সংজ্ঞানুযায়ী, কোন বাস্তব সংখ্যার সেটের একটি ঊর্ধ্বসীমা থাকিলে ঐ ঊর্ধ্বসীমা থেকে বড় সকল বাস্তব সংখ্যা ঐ সেটের ঊর্ধ্বসীমা হইবে।

ঠিক একইভাবে, বাস্তব সংখ্যার সেটের একটি অধঃসীমা থাকিলে ঐ অধঃসীমা থেকে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা ঐ সেটের অধঃসীমা হইবে।

1.7.1 লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা সম্পর্কিত স্বতঃসিদ্ধ

বাস্তব সংখ্যার সেট R-এর প্রতিটি অশূন্য ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ উপসেটের লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা আছে। এই স্বতঃসিদ্ধকে (Completeness Axion) বা 'পূর্ণতার স্বতঃসিদ্ধ' বলা হয়। মন্তব্য—উক্ত লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমাটি সংশ্লিষ্ট উপসেটের সদস্য হইতে পারে, না-ও হইতে পারে।

লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমার সংজ্ঞা

অশূন্য ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ উপসেট S ($\subset$ R)-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা M হইবে যদি (i) $x \leq M$, সকল $x \in S$-এর জন্য এবং (ii) $\in$ যদি যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা হয়, তবে ঐ $\in$-এর অনুসঙ্গী অন্তত একটি $y \in S$ পাওয়া যাইবে যাহার ক্ষেত্রে $y > M - \in$ হইবে।

মন্তব্য ঃ (i) ইহার অর্থ M-এর চেয়ে ছোট কোন বাস্তব সংখ্যা ঐ সেট S-এর ঊর্ধ্বসীমা হইতে পারিবে না

উদাহরণের সাহায্যে y-এর $\in$-নির্ভরতা ব্যাখ্যা

মনে করি $S = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in N\right\}$, 2 এই সেটের লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা।

মনে করি $0 < \in < 1$, যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা। $1 + \frac{1}{n} > 2 - \in$ হয় অর্থাৎ যদি $n < \frac{1}{1-\in}$ হয়।

ধরি $\in = \frac{1}{15}, n < \frac{15}{14} \Rightarrow n = 1.$

ধরি $\in = \frac{5}{6}, n < \frac{1}{1-\frac{5}{6}}$ অর্থাৎ $n < 6 \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 5.$

গরিষ্ঠ অধঃসীমা (বা নিম্নসীমা) Infimum) ঃ

বাস্তব সংখ্যা m একটি সেট S-এর গরিষ্ঠ অধঃসীমা হবে যদি (i) $x \in S$, $x \geq m$ এবং (ii) $\varepsilon > 0$ যদৃচ্ছ ধনসংখ্যার ক্ষেত্রে, $y \in S$ পাওয়া যাবে যার জন্য $y < m + \varepsilon$ হবে।

মন্তব্য ঃ লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমার স্বতঃসিদ্ধ হইতে ঐ গরিষ্ঠ অধঃসীমার অস্তিত্ব প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণ ঃ নীচের সেটগুলির লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা ও গরিষ্ঠ অধঃসীমা নির্ণয় করো ঃ

(i) $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\ldots, -\frac{1}{n}, \ldots\right\}$ (উত্তর ঃ 0, –1)

(ii) $S = \left\{\frac{(-1)^n}{n}, n \in N\right\}$ (উত্তর ঃ $\frac{1}{2}, -1$)

প্রশ্নাবলী ঃ কোনটি ঠিক দেখুন ঃ

(1) পূর্ণ-সংখ্যার সেটটি

(a) ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত, (b) সীমাহীন, (c) অধঃসীমা যুক্ত।

(2) S = {1, 2, 3, 4, 5,}-এর গরিষ্ঠ অধঃসীমা।

(a) নেই, (b) 1, (c) বোঝা যাচ্ছে না।

(3) $S = \left\{a - \frac{1}{n} : n \in N\right\}$-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা।

(a) S-এর একটি পদ, (b) S-এর পদ নহে, (c) বুঝা যাচ্ছে না।

1.7.2 বাস্তব সংখ্যার সেট R-এর অনন্য ধর্ম

(1) R হইল ক্রমধর্ম (1.6.2) সমন্বিত, পূর্ণতার স্বতঃসিদ্ধ (1.7.1) সম্বলিত সেট। কিন্তু R-এর উপসেট Q (মূলদ সংখ্যার সেট), Z (পূর্ণসংখ্যার সেট) ঐ যুগ্ম ধর্ম সমন্বিত নয়।

(2) ক্রমধর্মটি R-এ প্রযোজ্য, কিন্তু জটিল সংখ্যার সেট C-তে প্রযোজ্য নহে।

1.8 বাস্তব সংখ্যার পরমমান (Absolute value)

কোন বাস্তব সংখ্যা a-এর পরমমানকে সূচিত করা হয় |a| দ্বারা,

$|a| = a$, যদি $a > 0$

$= 0$, যদি $a = 0$

$= -a$, যদি $a < 0$

পরমমানের কিছু ধর্ম নীচে দেওয়া হইল ঃ

(i) $|ab| = |a|\ |b|$

(ii) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$

(iii) $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

(iv) যদি $a \geq 0$ হয়, $|x| \leq a$ হইবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $-a \leq x \leq a$ হয়।

1.9 অন্তরাল ও সামীপ্য

1.9.1 অন্তরালের সংজ্ঞা

মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব রাশি এবং $a \leq b$।

বন্ধ অন্তরাল $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

মুক্ত অন্তরাল $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$

বামমুক্ত, ডানবন্ধ অন্তরাল $(a, b) = \{x \in R : a < x \leq b\}$

ডানমুক্ত, বামবন্ধ অন্তরাল $(a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$

1.9.2 বিন্দুর সামীপ্য

যদি $a \in S$ হয়, δ-সামীপ্য $N(a, \delta) = \{x \in R : a - \delta < x < a + \delta\}$। এটিকে $|x - a| < \delta$ হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

a বিন্দুর a-বর্জিত δ-সামীপ্য বলিতে $N(a, \delta) - \{a\}$ বুঝাবে। এটিকে $0 < |x - a| < \delta$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

1.9.3 প্রতীক চিহ্ন ∞, $-\infty$

এই অংশে আমরা দুইটি প্রতীক চিহ্ন ∞ ও $-\infty$ সংযোজিত করব, যা নিম্নে উল্লিখিত কন্‌ভেন্‌শন্‌গুলি মেনে চলবে ঃ

(1) যদি x কোন বাস্তব রাশি হয়, তবে $-\infty < x < \infty$

(2) $R = (-\infty, \infty)$

(3) $a \in R$ হইলে $(a, \infty) = \{x : x > a\}$, $(a, \infty) = \{x : x \geq a\}$, $(-\infty, a) = \{x : x < a\}$, $(-\infty, a) = \{x : x \leq a\}$। এগুলিকে অসীম অন্তরাল বলা হবে।

(4) $a \in R$ হলে, $a + \infty = \infty + a = \infty$, $a - \infty = -\infty + a = -\infty$, $a > 0$ হলে $a.\infty = \infty.a = \infty$, $a.(-\infty) = (-\infty)a = -\infty$, $(-a).\infty = \infty.(-a) = -\infty$, $(-a).(-\infty) = (-\infty).(-a) = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty.\infty\ (-\infty).(-\infty) = \infty$, $(-\infty).\infty = (\infty).(-\infty) = -\infty$.

(5) যদি সেট S ($\subset$R) ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ না হয়, তবে S-এর ঊর্ধ্বসীমাটিকে ∞ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে। যদি S ($\subset$R) অধঃসীমাবদ্ধ না হয়, তবে S-এর অধঃসীমাটিকে $-\infty$ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে।

1.9.4 ক্যান্টর ডেডেকাইন্ড (Cantor-Dedekind) স্বতঃসিদ্ধ

প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা x-এর জন্য বাস্তব অক্ষে একটি অনন্য বিন্দু P পাওয়া যাবে এবং বিন্দু P ঐ বাস্তব সংখ্যা x-কে সূচিত করবে।

1.10 বাস্তব সংখ্যাকে দশমিকে প্রকাশ ঃ (Decimal Representation of Real Numbers)

ধরা যাক, বাস্তব রেখার উপর P একটি বিন্দু। এখন P বিন্দু, যে বাস্তব সংখ্যা সূচিত করে তার দশমিক রূপ আমরা দেখব। ধরা যাক্, P বিন্দুটি মূলবিন্দু 0 (যেটি বাস্তব সংখ্যা 0 সূচিত করে)-এর ধনাত্মক দিকে অবস্থিত।

যে বিন্দুগুলি পূর্ণসংখ্যার সহিত জড়িত, বাস্তব রেখার উপর তাদের এমনভাবে সূচিত করা হল যাহাতে পাশাপাশি যে কোন দুটি সূচক (marked point)-এর মধ্যে দূরত্ব এক একক হয়। যদি, বাস্তব সংখ্যা নিরূপক বিন্দু P ঐ পূর্ণসংখ্যা নিরূপক বিন্দুর সহিত সমান হয়, তাহলে আর প্রমাণের প্রয়োজন নেই। অন্যথায় P বিন্দুটি, পূর্ণসংখ্যা নিরূপক a, a + 1 বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। এখন, [a, a + 1] অন্তরালকে 10টি সমান ভাগে ভাগ করলে নতুন 10টি উপ-অন্তরালের প্রতিটির দৈর্ঘ্য $\frac{1}{10}$ একক। এই ভাগের বিন্দুগুলি হবে, $a, a+\frac{1}{10}, a+\frac{2}{10}, \ldots, a+\frac{9}{10}, a+1$। যদি P এই বিন্দুগুলির মধ্যে কোন একটি হয়, তখন P একটি মূলদ সংখ্যা সূচিত করে। যদি P ঐ বিন্দুর কোনটি না হয় তাহলে P অবশ্যই ঐ বিন্দুগুলির মধ্যে পাশাপাশি যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যে থাকবে এবং ধরা যাক, $P, a+\frac{a_1}{10}, a+\frac{a_1+1}{10}$ বা, $a.a_1$, $a.(a_1 + 1)$-এর মধ্যে আছে যেখানে, a_1-টির মান 0, 1, 2, ... 9-এর মধ্যে একটি।

আবার, উপ-অন্তরাল $\left[a+\frac{a_1}{10},\ a+\frac{a_1+1}{10}\right]$-কে দশটি সমান ভাগে ভাগ করা হল যাহাতে প্রতিটির দৈর্ঘ্য $\frac{1}{10^2}$ একক। এই দশটি ভাগের বিন্দুগুলি যথাক্রমে,

$$a+\frac{a_1}{10}, a+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10^2}, a+\frac{a_1}{10}+\frac{2}{10^2}, \ldots, a+\frac{a_1}{10}+\frac{9}{10^2}, a+\frac{a_1+1}{10}$$

এখন P বিন্দুটি হয় ঐ বিন্দুগুলির মধ্যে কোন একটি বিন্দু নতুবা P ঐ বিন্দুগুলির মধ্যে পাশাপাশি যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যে থাকবে।

এই পদ্ধতিতে এগিয়ে গেলে n-ধাপের পর আমরা যে ভাগগুলি পাবো তাদের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য $\frac{1}{10^n}$ একক এবং n যত বড় হবে উপ-অন্তরালের দৈর্ঘ্যগুলিও ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর হবে। P বিন্দুটি

$$a+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_n}{10^n}<P<a+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n+1}{10^n}$$

বা, $a.a_1a_2 \,\ldots\ldots\, a_n < P < a.a_1a_2 \ldots (a_n + 1)$.

যখন $n \to \infty$ তখন, P বিন্দুটি যে সংখ্যাটি প্রকাশ করে তার দশমিক রূপ হবে

$$a.a_1\ a_2 \ldots\ldots\ a_n \ldots\ldots$$

$\therefore$ যে কোনো বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম দশমিক রূপ পাওয়া যায়। বিপরীত দিক থেকে ধরা যাক,

$$a.a_1a_2a_3 \ldots\ldots$$

একটি অসীম দশমিক সংখ্যা।

আমরা $[a,\ a + 1]$, $[a.a_1,\ a.(a_1 + 1)]$, $[a.a_1a_2,\ a.a_1(a_2 + 1)]$, ...

অন্তরালগুলি গঠন করলে দেখা যায় প্রতিটি অন্তরাল তার আগের অন্তরালের মধ্যে সম্পূর্ণ অবস্থিত। এখন, অন্তরাল-এর সংখ্যা ক্রমশ বাড়ালে উহাদের দূরত্ব ক্রমশ কমে যাচ্ছে। বাস্তবরেখার উপর বিন্দুগুলি সন্তত। $\therefore$ $n \to \infty$ করলে ঐ অন্তরালগুলির মধ্যে একটি এবং মাত্র একটি সাধারণ বিন্দু পাওয়া যাবে যার দ্বারা সূচিত বাস্তব সংখ্যাটি হবে—

$$a.a_1a_2a_3 \ldots\ldots$$

মন্তব্য ঃ প্রতিটি দশমিক সংখ্যা (সসীম বা অসীম) মূলদ হবে যদি দশমিক সংখ্যাটি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার পর শেষ হয় অথবা দশমিক সংখ্যার একটি অংশের বারবার পুনরাবৃত্তি না হয়, অন্যথায় সংখ্যাটি অমূলদ হবে।

উদাহরণ ঃ 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt[3]{2}$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $1^3 = 1 < 2$ এবং $2^3 = 8 > 2$

$$\Rightarrow\ 1<\sqrt[3]{2}<2$$

[1, 2] অন্তরালটিকে সমান দশটি ভাগে ভাগ করলে যে সংখ্যাগুলি পাই তা হলো,

$1,\ 1{\cdot}1,\ 1{\cdot}2,\ 1{\cdot}3,\ \ldots\ldots,\ 1{\cdot}9,\ 2.$

সংখ্যাগুলির মধ্যে,

$(1{\cdot}2)^3 = 1{\cdot}728 < 2$ এবং $(1{\cdot}3)^3 = 2{\cdot}197 > 2$

$\Rightarrow\ 1{\cdot}2 < \sqrt[3]{2} < 1{\cdot}3$

আবার, [1·2, 1·3]-কে দশটি সমান ভাগে ভাগ করা হলে,

1·2, 1·21, 1·22, ..., 1·29, 1·3 সংখ্যাগুলি পাই, যাদের মধ্যে

$(1{\cdot}25)^3 = 1{\cdot}953125 < 2 < 2{\cdot}000376 = (1{\cdot}26)^3$

$\therefore\ 1{\cdot}25 < \sqrt[3]{2} < 1{\cdot}26.$

আবার, [1·25, 1·26]-কে দশটি সমান ভাগে ভাগ করা হল এবং ঐ দশটি ভাগের সংখ্যাগুলি, 1·25, 1·251, 1·252, 1·253, ..., 1·259, 1·26

এখানে, $(1{\cdot}259)^3 < 2 < (1{\cdot}26)^3$

আবার, [1·259, 1·26]-কে দশটি সমান ভাগে ভাগ করা হল।

1·2590, 1·2591, 1·2592, 1·2593, ..., 1·2599, 1·26

যেখানে, $(1{\cdot}2599)^3 < 2 < (1{\cdot}26)^3$ বা, $1{\cdot}2599 < \sqrt[3]{2} < 1{\cdot}26$

অনুরূপে, $1{\cdot}25992 < \sqrt[3]{2} < 1{\cdot}25993$

$\therefore\ \sqrt[3]{2} = 1{\cdot}2599$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)

1.11 উদাহরণ

1. কোন মূলদ সংখ্যার অস্তিত্ব পাওয়া যাবে না যার ত্রিঘাত (cube) হবে 2.

সমাধান ঃ যদি সম্ভব হয় ধরি একটি মূলদ সংখ্যা $\frac{p}{q}$ পাওয়া যায় যাতে, $\frac{p^3}{q^3} = 2$ যেখানে, p এবং q পূর্ণসংখ্যা এবং p ও q পরস্পর পরস্পরের মৌলিক। যেহেতু, $1^3 = 1$ and $2^3 = 8$;

$$1 < \frac{p}{q} < 2, q \neq 1$$

$$\therefore\ \frac{p^3}{q} = 2q^2$$

দেখা যাচ্ছে, একটি ভগ্নাংশ $\left(\frac{p^3}{q}\right)$ একটি পূর্ণসংখ্যা ($2q^2$) সমান। কিন্তু, বাস্তবে ইহা সম্ভব নয়।

∴ এমন কোন মূলদ সংখ্যা পাওয়া যাবে না যার ত্রিঘাত 2.

2. যদি r এবং s দুটি মূলদ সংখ্যা হয়, $r + s$, $r - s$, rs এবং r/s, $s \neq 0$, মূলদ সংখ্যা হইবে।

সমাধান ঃ r এবং s মূলদ সংখ্যা।

$\therefore\ r = \frac{p}{q}$ and $s = \frac{1}{m}$ যেখানে, $q \neq 0$, $m \neq 0$

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{1}{m} = \frac{pm + ql}{qm}\ ; qm \neq 0$$

p, q, m, l প্রত্যেকে পূর্ণসংখ্যা। ∴ pm + ql এবং qm পূর্ণসংখ্যা এবং qm ≠ 0. ∴ r + s একটি মূলদ সংখ্যা।

অনুরূপে $r - s, rs, \frac{r}{s} (s \neq 0)$ মূলদ সংখ্যা হইবে।

3. প্রমাণ করা যায়,

$e = 1 + \frac{1}{\underline{\lfloor 1}} + \frac{1}{\underline{\lfloor 2}} + \frac{1}{\underline{\lfloor 3}} + \cdots\cdots$, মূলদ নহে।

সমাধান ঃ

যদি সম্ভব হয় e একটি মূলদ এবং $e = \frac{p}{q}$, p, q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

এখন, $\frac{p}{q} \cdot \underline{\lfloor q} = \underline{\lfloor q} \left[1 + \frac{1}{\underline{\lfloor 1}} + \frac{1}{\underline{\lfloor 2}} + \frac{1}{\underline{\lfloor 3}} + \cdots + \frac{1}{\underline{\lfloor q}}\right] + \left[1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\cdots\right]$

কিন্তু $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\cdots$

$$< \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots\cdots$$

$$< \frac{1}{q}$$

∴ $p.\underline{\lfloor (q-1)} = \underline{\lfloor q} \cdot \left(1 + \frac{1}{\underline{\lfloor 1}} + \frac{1}{\underline{\lfloor 2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\underline{\lfloor q}}\right) +$ একটি বিশুদ্ধ ভগ্নাংশ।

∴ পূর্ণসংখ্যা = অন্য একটি পূর্ণসংখ্যা + একটি বিশুদ্ধ ভগ্নাংশ, ইহা অসম্ভব।

∴ e একটি মূলদ সংখ্যা নয়।

4. নীচের উক্তিগুলির সত্যতা যাচাই কর ঃ

(a) একটি মূলদ এবং একটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল ও বিয়োগফল মূলদ সংখ্যা হতে পারে না।

(b) α এবং β একটিও শূন্য নয় এমন মূলদ সংখ্যা এবং একটি অমূলদ সংখ্যা হলে, $\alpha\beta$ এবং β/α মূলদ নহে।

সমাধান ঃ (a) ধরা যাক্, r এবং x যথাক্রমে একটি মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা, যদি সম্ভব হয় ধরা যাক্ r + x = একটি মূলদ সংখ্যা = s (ধরুন)

$\therefore$ $x = s - r$, দুটি মূলদ সংখ্যার বিয়োগফল একটি অমূলদ সংখ্যা, ইহা সম্ভব নহে।

$\therefore$ একটি মূলদ এবং একটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল মূলদ হতে পারে না।

একইভাবে মূলদ এবং অমূলদের বিয়োগফল মূলদ নয়।

(b) যদি, সম্ভব হয়,

$\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$ (ধরা যাক্, γ একটি মূলদ সংখ্যা)

$\therefore$ $\beta = \alpha.\gamma$; ($\because$ দুটি মূলদ সংখ্যার গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা)

$\therefore$ অমূলদ সংখ্যা = মূলদ সংখ্যা—ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ $\frac{\beta}{\alpha}$ কখনই মূলদ সংখ্যা নহে।

অনুরূপে, α, β মূলদ নয়।

5. প্রমাণ করতে হবে, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান ঃ যদি সম্ভব হয় ধরি, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা,

$\therefore$ $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ একটি মূলদ সংখ্যা,

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

এখন, $\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right\}$

আমরা আগেই দেখেছি, $\sqrt{2}$ অমূলদ।

$\therefore$ অমূলদ সংখ্যা = একটি মূলদ সংখ্যা—ইহা সম্ভব নহে।

$\therefore$ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

6. $\log_{10}{}^5$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান ঃ ধরা যাক্, $\log_{10}{}^5$ একটি মূলদ সংখ্যা।

ধরা যাক্, $\log_{10}{}^5 = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$

অতএব $10^p = 5^q$ বা $2^p = 5^{q-p}$ ইহা সর্বত্র সম্ভব নহে।

1.12 অনুশীলনী

1. মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যার সংজ্ঞা দিন। উদাহরণ দিয়ে দেখান যে দুটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল এবং গুণফল একটি মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা হতে পারে।

2. দেখাও যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

3. a, b মূলদ সংখ্যা। এখন যদি $a\sqrt{2}+b\sqrt{5}=0$ হয় তবে, দেখান $a = b = 0$

4. দেখাও যে, $\log_2{}^{10}$ মূলদ নহে কিন্তু $5\log_2{}^2$ একটি মূলদ সংখ্যা।

5. দেখাও যে, $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

6. দেখাও যে, $\log_{100}{}^{10}$ একটি মূলদ সংখ্যা এবং যুক্তি দ্বারা বল $10\log_{100}{}^{10}$ মূলদ না অমূলদ।

7. নীচের বাক্যগুলির (statements) যুক্তির দ্বারা সত্যতা/অসত্যতা পরীক্ষা কর ঃ

   (i) অমূলদ সংখ্যার বর্গ সর্বদা একটি অমূলদ সংখ্যা।

   (ii) মূলদ সংখ্যার বর্গমূল সর্বদা একটি অমূলদ সংখ্যা।

   (iii) 0 একটি অমূলদ সংখ্যা কিন্তু $(\sqrt{2})^0$ একটি মূলদ সংখ্যা।

   (iv) যে কোন দুটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল এবং গুণফল সর্বদা অমূলদ সংখ্যা।

   (v) r এবং s দুটি মূলদ সংখ্যা হলে r^s সর্বদা একটি অমূলদ সংখ্যা।

8. দেখান যে একটি এবং কেবলমাত্র একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা x আছে যে, $x^2 = 5$ হয়।

1.13 সারাংশ

এই এককে বাস্তব সংখ্যা সম্বন্ধে প্রাথমিক কিছু আলোচনা করা হয়েছে। বীজগাণিতিক ধর্ম ছাড়াও বাস্তব সংখ্যার ক্রম ধর্ম, ঘনত্ব ধর্ম, আর্কিমিডিয়ান ধর্ম এবং সর্বোপরি লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা সম্পর্কিত স্বতঃসিদ্ধর মত গুরুত্বপূর্ণ যে সব ধর্ম বিশ্লেষণ তত্ব ও কলন বিদ্যার সঙ্গে ওতঃপ্রোতভাবে জড়িত সেগুলি চিহ্নিত করার প্রয়াস রয়েছে এই প্রথম অধ্যায়ে।

1.14 সহায়ক গ্রন্থ এবং ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ

সহায়ক গ্রন্থ ঃ একক-5 এর শেষে দেখুন।

সেট—Set

শূন্য সেট—Empty set (or, void set)

সিঙ্গলটোন সেট—Singletone set

উপ/সাব সেট—Sub-set

ইউনিয়ন (সংযোগ)—Union

ইন্টারসেকশন—Intersection

বিচ্ছিন্ন সেট—Disjoint set

পূরক সেট—Complement of a set
সীমাবদ্ধ সেট—Bounded set
ঊর্ধ্বসীমা—Upper bound
নিম্নসীমা—Lower bound
লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা—Supremum
গরিষ্ঠ অধঃসীমা—Infimum
স্বাভাবিক সংখ্যা—Natural number
পূর্ণসংখ্যা—Integer
মূলদ সংখ্যা—Rational number
অমূলদ সংখ্যা—Irrational number
ঘনত্ব ধর্ম—Density property
বাস্তব সংখ্যা—Real number
কমপ্লিটনেস (পূর্ণতা) ধর্ম—Completeness property
পরমমান—Absolute value
অন্তরাল—Interval
সামীপ্য—Neighbourhood

একক 2 ❐ বাস্তব রাশির অনুক্রম/সিকুয়েন্স (Sequence)

গঠন

2.1 অপেক্ষক বা চিত্রণ (Function or Mapping)

অপেক্ষক হল, দুটি সেট A এবং B-এর মধ্যে একটি সম্পর্ক যাতে সেট A-এর প্রতিটি পদ x-এর জন্য সেট B-এর একটি একটি এবং কেবলমাত্র একটি পদ পাওয়া যায়। A-কে বলা হয় সংজ্ঞার অঞ্চল (Domain) এবং B-কে বলা হয় সহ-অঞ্চল (Codomain)।

$$f : A \to B$$

যাতে প্রতিটি $x \in A$-এর জন্য একটি এবং কেবলমাত্র একটি $f(x) \in B$ থাকে। $f(x)$-কে বলা হবে x-এর বিম্ব এবং সেট $\{f(x) \mid x \in A]$-কে বলা হয় বিস্তার (Range)।

2.2 বাস্তব রাশির অনুক্রম

বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম বলতে বুঝায় একটি অপেক্ষক বা চিত্রণ f, যাহার সংজ্ঞার অঞ্চল হইল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এবং সহ-অঞ্চল বলিতে বুঝায় বাস্তব সংখ্যার সেট R বা তাহার কোন উপসেট, $f : N \to R$। প্রতি $n \in N$-এর জন্য অনুষঙ্গী হিসাবে সহ-অঞ্চলে যদি a_n $(\in R)$ পাওয়া যায়, তবে আমরা লিখিব $n \to a_n$ এবং অনুক্রমটিকে $\{a_n\}_n$ দ্বারা চিহ্নিত করা হইবে। এই ধরণের a_n-গুলির সেট হইবে অনুক্রমের বিস্তার S $(\subset R)$।

অনুক্রমের (সিকুয়েন্স-এর) উদাহরণ ঃ

(1) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অনুক্রম (সিকুয়েন্স)। $\{S_n \mid S_n = n,\ n \in N\}$.

(2) O এবং 1-এর মধ্যবর্তী মূলত সংখ্যাগুলি একটি অনুক্রম (সিকুয়েন্স)।

(3) $\{S_n \mid S_n = (-1)^n,\ n \in N\}$ একটি সসীম অনুক্রমের (সিকুয়েন্স-এর) উদাহরণ।

(4) $\{S_n\}_n$ যেখানে, $S_n = S_{n-1},\ S_{n-2},\ n \geq 3,\ S_1 = 1$ এবং $S_2 = 1$.

অর্থাৎ, $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, ...\}$

একটি অনুক্রম (সিকুয়েন্স)। এই অনুক্রমের (সিকুয়েন্স-এর) কিছু গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার আছে। এই অনুক্রমের (সিকুয়েন্স-এর) পরিচিতি Fibonacci's Sequence নামে।

(5) $\{S_n\}_n$ যেখানে $S_n = K$ (ধ্রুবক), $n \varepsilon N$ একটি অনুক্রম (সিকুয়েন্স)।

2.3 সীমাবদ্ধ অনুক্রম (Bounded Sequence)

বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম $\{a_n\}_n$-কে সীমাবদ্ধ বলা হইবে যদি ঐ অনুক্রমের বিস্তার সেট সীমাবদ্ধ হয়।

একটি অনুক্রমকে $\{x_n\}_n$ সীমাবদ্ধ বলা হবে যদি কোন বাস্তব সংখ্যা $K > 0$ পাওয়া যায় যাতে $|x_n| \leq K,\ \forall n \in N$.

একক-1 থেকে ঊর্ধ্বসীমা, নিম্নসীমা, লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা এবং গরিষ্ঠ অধঃসীমা বা নিম্নসীমা দেখুন।

উদাহরণ :

(1) $\left\{\frac{n-1}{2n}\right\}_n$ অনুক্রমটি (সিকুয়েন্স) সীমাবদ্ধ

$$\left|\frac{n-1}{2n}\right| < \frac{1}{2}\ \forall n \in N$$

(2) যে কোন সসীম অনুক্রম (সিকুয়েন্স) সীমাবদ্ধ।

(3) $\{x_n\}_n, xn = (-1)^n$ অনুক্রমটি (সিকুয়েন্স) সীমাবদ্ধ।

$|x_n| \leq 1$.

এখানে $\{-1, 1, -1, 1, ...\}$ অনুক্রমটির ভিন্নপদ সংখ্যা দুই। সুতরাং ইহা একটি সসীম অনুক্রম।

(4) $\{x_n\}_n$, যেখানে, $x_n = \forall n \in N$.

এরকম অনুক্রমের ক্ষেত্রে কোন বাস্তব সংখ্যা K পাওয়া যাবে না যাতে,

$|x_n| \leq K,\ \forall n \in N$ হয়।

অর্থাৎ, $\{x_n\}_n$ সীমাবদ্ধ নহে।

কিন্তু, এখানে, $x_n \geq 1,\ \forall n \in N$.

অর্থাৎ $\{x_n\}_n$-এর প্রতিটি পদ 1-এর থেকে বড় বা সমান,

এক্ষেত্রে, $\{x_n\}_n$ অনুক্রমটি নিম্নসীমাবদ্ধ।

(5) $\{x_n\}_n$, যেখানে, $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in N$ অনুক্রমের ক্ষেত্রে, $0 < x_n \leq 1$, $\forall n \in N$.

এখানে, 0 এবং 1 যথাক্রমে নিম্ন এবং ঊর্ধ্বসীমা।

$\therefore$ $\{x_n\}_n$ সীমাবদ্ধ অনুক্রম।

একটি বাস্তব সংখ্যা M-কে অনুক্রম $\{a_n\}_n$-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা বলা হইবে যদি (ক) প্রতিটি $n \in N$-এর জন্য $a_n \leq M$ হয় (খ) যেকোন $\varepsilon > 0$-এর জন্য অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা K পাওয়া যাইবে। যাহার জন্য $aK > M - \varepsilon$ হইবে। (Sup $\{a_n\}_n = M$) যদি $\{a_n\}_n$ ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ না হয়, তবে Sup $(a_n)_n = \infty$.

একটি বাস্তব সংখ্যা m-কে অনুক্রম $\{a_n\}_n$-এর গরিষ্ঠ অধঃসীমা বলা হইবে যদি (ক) প্রতিটি $n \in N$-এর জন্য $a_n \geq m$-হয় (খ) যে কোন $\varepsilon > 0$-এর জন্য অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা K-পাওয়া যাইবে যাহার জন্য $aK < m + \varepsilon$ হইবে। (Inf $\{a_n\}_n = m$) যদি $\{a_n\}_n$ নিম্ন সীমাবদ্ধ না-হয়, তবে Inf $\{a_n\}_n = -\infty$.

2.4 ক্রমান্বয়ী অনুক্রম (Monotone Sequence)

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমকে ক্রমবর্ধমান (Monotonically Increasing) বলা হয় যখন

$x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in N$.

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমকে যথার্থ ক্রমবর্ধমান (Strictly monotonically increasing) বলা হবে।

যদি, $x_n < x_{n+1}$, $\forall$ $n \in N$.

ক্রমবর্ধমান অনুক্রমের একটি নিম্নসীমা (বা একটি অধঃসীমা) সবসময় x_1.

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমকে ক্রমক্ষীয়মান (Monotonically Decreasing) বলা হয় যখন

$x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in N$.

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমকে যথার্থ ক্রমক্ষীয়মান (Strictly monotonically increasing) বলা হবে যদি

$x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in N$.

ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম $\{x_n\}_n$-এর ঊর্ধ্বসীমাটি সবসময় x_1.

উদাহরণ : (1) $\{x_n\}_n$, $x_n = n^2$ একটি, ক্রমবর্ধমান অনুক্রম।

(2) $\{x_n\}_n, x_n = \frac{3n+1}{n+2}$ একটি, ক্রমবর্ধমান অনুক্রম।

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3n+4}{n+3} - \frac{3n+1}{n+2} = \frac{5}{(n+3)(n+2)} > 0 \text{ সকল } n \in N\text{-এর জন্য।}$$

অতএব $x_{n+1} > x_n$ সকল n-এর জন্য ও অনুক্রমটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান।

(3) অনুক্রম $\{x_n\}n$, যেখানে $x_n = \frac{1}{n}$ একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম (সিকুয়েন্স),

(4) $x_n = \frac{4^{3n}}{3^{4n}}, n \in N$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4^{3n+3}}{3^{4n+4}} \times \frac{3^{4n}}{4^{3n}} = \frac{4^3}{3^4} = \frac{64}{81} < 1$$ সকল $n \in N$-এর জন্য

অতএব $x_{n+1} < x_n$ সকল n-এর জন্য ও অনুক্রমটি যথার্থ ক্রমহ্রাসমান।

(5) $x_n = \dfrac{1.3.\cdots.(2n-1)}{2.4.\cdots.2n}$, $n \in N$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1.3\cdots.(2n-1).(2n+1)}{2.4.\cdots.2n(2n+2)} \times \frac{2.4.\cdots.2n}{1.3.\cdots.(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$ সকল n-এর জন্য

অতএব $x_{n+1} < x_n$ সকল n-এর জন্য ও অনুক্রমটি যথার্থ ক্রমহ্রাসমান।

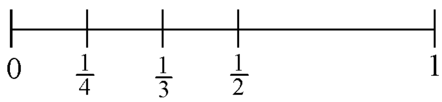
2.5 অনুক্রম-এর সীমা (Limit of a Sequence)

আমরা জানি যে, N সেটটি ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত নহে। ফলে স্বাভাবিকভাবেই প্রশ্ন আসে যে n-এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে a_n-এর প্রকৃতি কি ধরণের হইবে?

$\left\{\frac{1}{n}\right\}_n$ অনুক্রমটি বিবেচনা করা যাক্। প্রতিটি পদ ধনাত্মক, $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}$ ইত্যাদি।

n-এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে x_n

অর্থাৎ $\frac{1}{n}$-এর মান হ্রাস পাচ্ছে—



$\frac{1}{n}$-এর অনুসঙ্গী বিন্দুটি ক্রমশই বাম দিকে শূন্য অভিমুখে অগ্রসর হচ্ছে কিন্তু কোন অবস্থাতেই '0' বিন্দুতে সমাপতিত হচ্ছে না, শূণ্যের বাম দিকে যাচ্ছে না—শুধুমাত্র n-এর মান বৃদ্ধিরসঙ্গে $\left|\frac{1}{n} - 0\right|$ হ্রাস পাচ্ছে।

অপরদিকে $\{n^2\}_n$ অনুক্রমটির ক্ষেত্রে n-এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে n^2-এর অনুষঙ্গী বিন্দুটি ক্রমশই বাস্তব অক্ষ বরাবর ডান দিকে সরিয়া যাইতেছে এবং দুইটি পরপর অনুষঙ্গী বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব বৃদ্ধি পাচ্ছে।

এই দুই উদাহরণ থেকে পরিষ্কার যে কোনক্ষেত্রে অনুক্রমের অনুষঙ্গী বিন্দুগুলি ঐ রেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে ধাবিত হয় আবার কোন ক্ষেত্রে তার বিপরীতটি ঘটে। অনুক্রমের এ ধরণের প্রকৃতির প্রেক্ষাপটে অনুক্রমের সীমার নিম্ন ধারণাটি প্রণিধানযোগ্য।

একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা l-কে $\{x_n\}_n$ অনুক্রমের সীমা বলা হবে যদি কোন যথেচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা $\varepsilon > 0$ (যত ছোটই হোক না কেন)-এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যায় যাতে

$$|x_n - l| < \varepsilon, \ \forall \ n > K, \ n \in N$$

অর্থাৎ, $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon, \ n > K, \ n \in N$

সংক্ষেপে লেখা হবে, $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.

উদাহরণ : $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n$ অনুক্রমের সীমা 0.

ধরি, $\varepsilon > 0$ একটি যথেচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা।

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$$

এখন, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ যখন, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ বা, $n > \frac{1}{\varepsilon}$

ধরি, $K = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (integral part of $\frac{1}{\varepsilon}$)

$\therefore \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ যখন, $n > K$.

অথবা $n \geq \lambda$ যেখানে $\lambda = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$a_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}, n \in N$$

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \to 1 \text{ যখন } n \to \infty$$

যেকোনো $\varepsilon > 0$ ধরা যাক্।

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n^2 - n + 1 - 2}{n^2 + 1}\right| = \frac{n}{n^2 + 1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ যখন}$$

$$n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \text{ অর্থাৎ } K = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

মনে করি, $\varepsilon = \frac{3}{100}$ সুতরাং $K = \left[\frac{100}{3}\right] + 1 = 34$

মনে করি, $\varepsilon = \frac{5}{1378}$ সুতরাং $K = \left[\frac{1378}{5}\right] + 1 = 276$

অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যা K অবশ্যই ε-এর উপর নির্ভরশীল।

2.6 অনুক্রমের অভিসারিত্ব (Convergence of a Sequence)

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমকে একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা l অভিমুখে অভিসারী বলা হবে যদি কোন যথেচ্ছ (arbitrary) $\varepsilon > 0$-এর অনুষঙ্গী একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যায় যাতে

$| x_n - 1 | \varepsilon$ যখন, $n > K$ (বা $n \geq K$)

অর্থাৎ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

উদাহরণ ঃ $\left\{\dfrac{n^2+3n}{2n^2+n-1}\right\}_n$ অভিসারী অনুক্রম এবং ইহার লিমিট $\dfrac{1}{2}$.

সমাধান ঃ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n}{2n^2+n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}.$

একটি বিশেষ ধরণের অভিসারী অনুক্রম—নাল অনুক্রম (Null sequence) বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম $\{x_n\}_n$-কে নাল অনুক্রম (Null sequence) বলা হবে যদি $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ হয়।

$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_n$ একটি নাল অনুক্রম।

2.6.1 উপপাদ্য

অভিসারী অনুক্রম এর একটি মাত্র সীমা বর্তমান।

প্রমাণ : যদি সম্ভব হয় ধরা যাক, $\{x_n\}_n$ অভিসারী অনুক্রম $\{x_n\}_n$-এর দুটি সীমা l_1 এবং l_2 বর্তমান যেখানে, $l_1 \neq l_2$.

ধরা যাক্, $0 < \varepsilon < \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$

যেহেতু, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_2$

উক্ত ε-এর অনুষঙ্গী দুটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা K_1 এবং K_2 পাওয়া যাইবে যাহাতে,

$|x_n - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall n > K_1$ এবং $|x_n - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall n > K_2$

ধরুন, K = সর্বোচ্চ | K_1, K_2 |

$\therefore$ $|x_n - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ এবং $|x_n - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ যখন, $n > K$.

$$|l_1 - l_2| \leq |x_n - l_1| + |x_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n,\ n > K$$

$\therefore$ $|l_1 - l_2| < \dfrac{1}{2}|l_1 - l_2|$ বা, $\dfrac{1}{2}|l_1 - l_2| < 0$

এটি সম্ভব নয় $\therefore\ l_1 = l_2$.

$\therefore$ যে কোন অভিসারী অনুক্রমের একটি মাত্র সীমা বর্তমান।

2.6.2 উপপাদ্য

অভিসারী সিকুয়েন্স $(x_n)_n$ সীমাযুক্ত কিন্তু বিপরীতটি সত্য নয়।

প্রমাণ :

ধরা যাক্, $\{x_n\}_n$ একটি অভিসারী অনুক্রম এবং ইহার সীমা l.

ধরা যাক্, $\varepsilon = 1$ সংজ্ঞানুযায়ী, এই ε এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যাবে যাতে,

$$|x_n - l| < 1,\ \forall\ n \in N,\ n > K.$$

বা, $l - 1 < x_n < l + 1,\ \forall n \in N,\ n > K$.

ধরা যাক্, $m =$ সর্বনিম্ন $\{x_1, x_2, \ldots, x_K, l - 1\}$

$M =$ সর্বোচ্চ $\{x_1, x_2, \ldots, x_K, l + 1\}$

এখন, $m \le x_n \le M,\ \forall n \in N$

$\therefore$ $\{x_n\}_n$ অভিসারী অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ।

উপপাদ্যের বিপরীত দিকটির অসত্যতা প্রমাণের জন্য একটি উদাহরণ দেওয়া হল।

$\{x_n\}_n$ একটি অনুক্রম যেখানে $x_n = 1 + (-1)^n$

$\therefore$ অনুক্রমটি হলো $\{0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots\}$

অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ (অধঃসীমা (বা নিম্নসীমা) = 0 এবং ঊর্দ্ধসীমা = 2) কিন্তু অভিসারী নয়।

2.7 অপসারী অনুক্রম (Divergent Sequence)

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমটিকে অপসারী (divergent) বলা হবে যদি প্রতিটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা G-এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যায় যাতে $|x_n| > G,\ \forall n > K$. এক্ষেত্রে $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\alpha$.

উদাহরণ : (1) দেখুন, $\{x_n\}_n$, $x_n = \log_e\left(\frac{1}{n}\right)$ একটি অপসারী সিকুয়েন্স।

সমাধান : সহজেই দেখা যাচ্ছে, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \log_e\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$

ধরা যাক্, G একটি বড় ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

এখন, $\left|\log_e\left(\frac{1}{n}\right)\right| > G$ বা, $|\log_e n| > G$ বা, $\log_e n > G$ যখন, $n > e^G$.

ধরুন, $K = [e^G] + 1$

$\therefore\ \left|\log_e\left(\frac{1}{n}\right)\right| > G$ যখন $n > K$

$\therefore\ \left\{\log_e\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_n$ একটি অপসারী অনুক্রম।

মন্তব্য : (1) অভিসারী অনুক্রম মাত্রেই সীমাবদ্ধ, অপসারী অনুক্রম মাত্রেই সীমাবদ্ধ নহে। $\{n^2\}_n$ অপসারী অনুক্রম—ঊর্ধ্বসীমা নেই, $\{-n^2\}_n$ অপসারী অনুক্রম—নিম্নসীমা নেই।

(2) সীমাবদ্ধ অনুক্রম কিন্তু অভিসারী নহে, এমন অনুক্রম বিদ্যমান—যেমন $\{1 + (-1)^n\}_n$। ইহাদের অভিসারী নয় এমন সীমাবদ্ধ অনুক্রম বলা হইবে।

2.7.1 উপপাদ্য :

বাস্তব সংখ্যার ক্রমবর্ধমান অনুক্রম যদি উর্ধ্বসীমাবদ্ধ হয় তবে অনুক্রমটি অভিসারী হবে এবং সীমাটি হইবে ইহার লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা (সুপ্রিমাম্)। যদি ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ না-হয়, তবে অনুক্রমটি অপসারী হবে।

প্রমাণ : $(x_n)_n$ একটি ক্রমবর্ধমান ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ অনুক্রম।

ধরা যাক, $(x_n)_n$-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা (সুপ্রিমাম্) = M.

সুতরাং (i) $x_n \leq M,\ \forall\ n \in N$

এবং (ii) যেকোন $\varepsilon > 0$ এর জন্য অনুক্রমের অন্ততঃ একটি পদ x_p পাওয়া যাবে যাতে,

$$x_p > M - \varepsilon$$

এখন $x_p \leq x_{p+1} \leq \ldots\ldots \leq x_{p+k} \leq \ldots\ldots$

$\therefore\ x_n > M - \varepsilon,\ \forall\ n \geq p$

$\therefore\ M - \varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon,\ \forall n \leq p$

$\therefore\ |x_n - M| < \varepsilon,\ \forall\ n \geq p$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$ সুপ্রিমাম্ $\{x_n\}_n$

$\therefore\ \{x_n\}_n$ একটি অভিসারী অনুক্রম এবং ইহার সীমা M

মনে করি, $\{x_n\}_n$ ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ নয়। ফলে যত বড়ই বাস্তব সংখ্যা G (> 0) নেওয়া যাক্ না কেন, অনুক্রমের অন্তত একটি পদ x_k থাকবে যাহার জন্য $x_k > G$ হবে।

অনুক্রমটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান সুতরাং সকল $n > k$-এর জন্য $x_n > x_k > G$ হবে অর্থাৎ $G > 0$ যত বড় সংখ্যাই হোক্-না-কেন তাহার অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা k পাওয়া যাবে যাতে $x_n < G$ $\forall\ n > k$ হয়. সুতরাং $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ হইবে।

2.7.2 উপপাদ্য :

ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম যদি নিম্নসীমাবদ্ধ হয় তবে, অনুক্রমটি অভিসারী হবে এবং সীমাটি হবে ইহার গরিষ্ঠ নিম্নসীমা (ইমাফিমাম)। যদি নিম্নসীমাবদ্ধ না-হয়, তবে ইহা অপসারী হবে।

প্রমাণ : $\{x_n\}_n$ একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম।

ধরা যাক্, $\{x_n\}_n$ এর গরিষ্ঠ নিম্নসীমা (ইনফিমাম) = m

সুতরাং (i) $x_n \geq m,\ \forall\ n \in N$

এবং (ii) যেকোন $\varepsilon > 0$ এর জন্য অনুক্রমের অন্ততঃ একটি পদ x_q পাওয়া যাবে যাতে,

$$x_q < m + \varepsilon.$$

এখন $x_q \geq x_{q+1} \geq x_{q+2} \geq \ldots\ldots$

$\therefore\ x_n < m + \varepsilon,\ \forall\, n \in N,\ n \geq q$

$\therefore\ m - \varepsilon < m \leq x_n < m + \varepsilon,\ \forall\, n \in N,\ n \geq q$

$\therefore\ |x_n - m| < \varepsilon,\ \forall\, n \in N,\ n \geq q$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = m$ ইন্‌ফিমাম $\{x_n\} < n$

$\therefore\ \{x_n\}_n$ একটি অভিসারী এবং ইহার সীমা m.

যদি $\{x_n\}_n$ নিম্ন সীমাবদ্ধ না-হয় তবে $\mathrm{Inf}\,\{x_n\}_n = -\infty$, $G < 0$ নিলে তার অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা K পাওয়া যাবে যার জন্য $x_k < -G$.

$\{x_n\}_n$ ক্রমহ্রাসমান, অতএব $n \geq K$-এর জন্য

$x_n \leq x_k < -G$ অর্থাৎ $n \geq K$-এর জন্য $x_n < -G$ হবে।

অতএব $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

মন্তব্য : উপরের উপপাদ্যদ্বয় থেকে সহজেই বোঝা যায়, ক্রমান্বয়ী (Monotone) অনুক্রম হয় কোন নির্দিষ্ট মানে অভিসারী হবে নতুবা $+\infty$ বা $-\infty$ এর দিকে ধাবিত হবে বা অপসারী হবে। এই ধরণের অনুক্রম দোদুল্যমান (Oscillatory) হবে না।

উদাহরণ : $\{x_n\}_n, x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ অনুক্রমটি অভিসারী।

সমাধান : $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots.1}{n!}\frac{1}{n^n}$

$$= 1 + 1\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots.$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad \ldots..(1)$$

অনুরূপে, $x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots..$

$$\ldots..+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \qquad \ldots..(2)$$

যেহেতু, $1 - \frac{k}{n+1} > 1 - \frac{k}{n}, \forall k = 1,2,\ldots.,n-1$

$\therefore\ x_{n+1} > x_n + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$> x_n$

$\therefore \quad x_{n+1} > x_n, \ \forall \, n \in N.$

$\therefore \quad \{x_n\}_n$ একটি ক্রমবর্ধমান অনুক্রম।

(i) নং থেকে, xn > 2, $\forall \, n \in N.$

আবার, $x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}(n \geq 2)$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$\left[\because \left(1-\frac{1}{n}\right) < 1; i = 1, 2, \ldots, n-1\right.$ এবং

$n! = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots 3.2.1 > 1.2.2 \ldots 2 = 2^{n-1}$ যখন, $n \geq 2.]$

$$\therefore \quad x_n < 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

$\therefore \quad 2 < x_n < 3; \ \forall \, n \in N.$

$\therefore \quad \{x_n\}_n$ ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ এবং ক্রমবর্ধমান অনুক্রম।

$\therefore \quad \{x_n\}_n$ একটি অভিসারী অনুক্রম।

2.8 অভিসারী অনুক্রমের বীজগণিত

উপপাদ্য 2.8.1 : $\{x_n\}_n$ এবং $\{y_n\}_n$ দুটি অভিসারী অনুক্রম $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = m.$

সেক্ষেত্রে $\{x_n \pm y_n\}_n, \{x_n \cdot y_n\}_n$ এবং $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_n$ অনুক্রমগুলিও অভিসারী, যদিও $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_n$ ক্ষেত্রে $m \neq 0$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = l \pm m, \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = l.m, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}, (m \neq 0)$

যদি $\{x_n\}_n$ অনুক্রমটির সীমা শূন্য হয় এবং $\{y_n\}_n$ অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ হয়, তবে $\{x_n y_n\}_n$ শূন্য অভিমুখে অভিসারী হইবে।

মন্তব্য : এই সূত্রগুলি সসীম সংখ্যক অনুক্রমের জন্য প্রযোজ্য।

প্রমাণ : $\because$ xn $\to l$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore$ যে কোন $\varepsilon > 0$ এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N_1 পাওয়া যাবে

যাতে, $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, n > N_1$ .... (1)

$\because \quad y_n \to m$ যখন, $n \to \infty$

ঐ একই $\varepsilon > 0$-এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N_2 পাওয়া যায়।

যাতে, $|y_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, n > N_2$ .... (2)

ধরা যাক, K = সর্বোচ্চ $\{N_1, N_2\}$

$\therefore \ |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ এবং $|y_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, n > K$

$|(x_n \pm y_n)(l \pm m)| \le |x_n - l| + |y_n - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 6 \, \forall n, n > K$

$\therefore \ \lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = l.\pm m$

$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = l.m$ এর প্রমাণটি নিম্নরূপ :

$x_n y_n = (x_n - l)(y_n - m)| + l(y_n - m) + m(x_n - l) + lm$

মনে করি $\varepsilon > 0$ যেকোন প্রদত্ত সংখ্যা।

ঐ ε-এর অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা n_1 ও n_2-এর অস্তিত্ব আছে

যাহার জন্য $|x_n - l| < \sqrt{\varepsilon}$ যখন $n \ge n_1$ এবং $|x_n - m| < \sqrt{\varepsilon}$ যখন $n \ge n_2$

মনে করি, n_0 = সর্বোচ্চ $\{n_1, n_2\}$। সুতরাং $n \ge n_0$-এর জন্য

$|(x_n - l)(y_n - m)| = |x_n - l||y_n - m| < \varepsilon$ হবে। অতএব $(x_n - l)\ (y_n - m) \to 0$ হবে।

শর্ত অনুযায়ী $x_n - l \to 0$, $y_n - m \to 0$ অতএব $x_n y_n \to l_m$ হবে।

এরপর $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m} (m \ne 0)$-এর প্রমাণ নিম্নরূপ :

সকল $n \in N$-এর জন্য

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m(x_n - l) - l(y_n - m)}{my_n}\right| \le \frac{|m||x_n - l| + |l||y_n - m|}{|m||y_n|}$$

যেহেতু $\lim_{n\to\infty} y_n = (\ne 0)$ স্বাভাবিক সংখ্যা p_1-এর অস্তিত্ব আছে

যার জন্য $|y_n - m| < \frac{|m|}{2}, \forall n \ge p_1$

অতএব $n \ge p1$-এর জন্য $|m| - |y_n| \le |y_n - m| < \frac{|m|}{2}$

ফলে $|y_n| > \frac{|m|}{2}. n \ge p_1$

সুতরাং $n \ge p_1$ হইলে

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{l}{m}\right| < \frac{2}{|m|}|x_n - l| + \frac{2|l|}{|m|^2}|y_n - m|$$

মনে করি $\varepsilon > 0$ যেকোন সংখ্যা। এই ε-এর অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা p_2, p_3 বিদ্যমান যার জন্য $\left|x_n - l\right| < \frac{\varepsilon|m|}{4}$ যখন $n \geq p_2$ এবং $\left|y_n - m\right| < \frac{|m|^2 \varepsilon}{4(|l|+1)}$ যখন $n \geq p_3$

মনে করি, p = সর্বোচ্চ $\{p_1, p_2, p_3\}$

অতএব $n \geq p$-এর জন্য

$$\left|\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m}\right| < \frac{2}{|m|} \cdot \frac{\varepsilon|m|}{4} + \frac{2|l|}{|m|^2} \cdot \frac{|m|^2 \varepsilon}{4(|l|+1)} \text{ হইবে}$$

ইহা হইতে পাই $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$ যখন $n \geq p$

সুতরাং $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m}$

শেষাংশ $\{y_n\}_n$ সীমাবদ্ধ বলিয়া বাস্তব সংখ্যা $\lambda > 0$ এর অস্তিত্ব যার জন্য $|y_n| < \lambda$ সকল $n \in N$-এর জন্য হবে।

মনে করি $\varepsilon > 0$ যেকোন সংখ্যা। ε-এর অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা m পাওয়া যাবে যাতে $\left|x_n - 0\right| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$ যখন $n \geq m$ হবে। ফলে $n \geq m$-এর জন্য $\left|x_n y_n - 0\right| < \varepsilon$ হবে।

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n y_n = 0$ হবে।

2.8.2 উপপাদ্য : $\{x_n\}_n$ এবং $\{y_n\}_n$ দুটি অভিসারী অনুক্রম। যদি $x_n < y_n$ হয় $n \geq p$ (p স্বাভাবিক সংখ্যা)-এর জন্য, তবে

$$\lim_{n \to \infty} x_n \leq \lim_{n \to \infty} y_n$$

প্রমাণ :

মনে করি, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a, \lim\limits_{n \to \infty} y_n = b.$

যদি সম্ভব হয়, মনে করি $a > b$. মনে করি, $\varepsilon = \frac{a-b}{10}$

ঐ ε-এর অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা m_1 ও m_2, উভয়েই উক্ত p অপেক্ষা বৃহত্তর, পাওয়া যাবে যাতে $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$ যখন $n \geq m_1$ এবং $\left|y_n - b\right|$ যখন $n \geq m_2$

মনে করি, m = সর্বোচ্চ $\{m_1, m_2\}$

সুতরাং $n \geq m$-এর জন্য $\left|x_n - a\right| < \varepsilon, \left|y_n - b\right| < \varepsilon$ হবে।

$n \geq m$ এর জন্য $a - \varepsilon < x_n < y_n < b + \varepsilon$

অর্থাৎ $2\varepsilon > a - b$ ফলে $2\varepsilon > 10\varepsilon$—ইহা অসম্ভব যেহেতু $\varepsilon > 0$। সুতরাং $a > b$ হবে না—$a \leq b$ হবে।

উদাহরণ : মনে করি $x_n = \frac{1}{1+n}$ এবং $y_n = \frac{1}{n}$।

এখানে, n-এর প্রতিটি মানের জন্য $x_n < y_n$.

কিন্তু, $y_n - x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2.8.3 উপপাদ্য :

$\{x_n\}_n$, $\{y_n\}_n$, $\{z_n\}_n$ তিনটি অভিসারী অনুক্রম এবং $n \geq p$ (p স্বাভাবিক সংখ্যা) প্রতিটি মানের জন্য $x_n < y_n < z_n$.

যদি, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ হয় তবে $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$.

প্রমাণ — পূর্বের ন্যায়

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = l$$

2.9 কশি অণুক্রম (Cauchy Sequence)

একটি অনুক্রম $\{x_n\}$n-কে কশি অনুক্রম বলা হবে যদি কোন যথেচ্ছ (arbitrary) $\varepsilon > 0$ (যত ছোটই হোক না কেন) এর জন্য একটি অনুষঙ্গী ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k পাওয়া যায় যাতে

$|x_n - x_m| < \varepsilon,\ \forall\ n, m,\ n > k$ এবং $m > k$.

উদাহরণ : $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n$ একটি কশি অনুক্রম।

সমাধান : ধরা যাক্, $\varepsilon > 0$, যথেচ্ছ

$n, m \in N$ এবং $m > n$

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}$$

এখন, $|x_m - x_n| < \varepsilon$ যদি, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ i.e., $n > \frac{1}{\varepsilon}$

ধরা যাক্ k একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যেটি $\frac{1}{\varepsilon}$ থেকে বড়

$\therefore |x_m - x_n| < \varepsilon$ যখন, $m, n > k$

$\therefore \{x_n\}_n$ একটি কশি অনুক্রম।

2.9.1 উপপাদ্যের বিবৃতি :

বাস্তব সংখ্যার প্রতিটি কশি অনুক্রম অভিসারী অনুক্রম এবং প্রতিটি অভিসারী অনুক্রম একটি কশি অনুক্রম অর্থাৎ, কশি অনুক্রম $\Leftrightarrow$ অভিসারী অনুক্রম।

2.9.2 কোন অনুক্রমের অভিসারিতার জন্য কশির সাধারণ সূত্র (Cauchy's General Principle of Convergence)

বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম $\{x_n\}$-এর অভিসারিতার জন্য প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত হল যে কোন $\varepsilon > 0$, যত ছোটই হোক না কেন, তার অনুষঙ্গী একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k পাওয়া যাবে যাতে $|x_m - x_n| < \varepsilon$, m, n ε N এবং n, m > k.

অথবা, $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon, n > k, p \,\varepsilon\, n$

উদাহরণ :

$$\{x_n\}_n, x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

একটি কশি অনুক্রম < 1

ধরা যাক, m > n

$$|x_m - x_n| = \left|\underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m}}_{(m-n)\text{পদ}}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) - \ldots\ldots\right|$$

$$< \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ যদি, } n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ অর্থাৎ } n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

$\therefore$ $|x_m - x_n| < \varepsilon$ যখন, $m, n > k, k = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$\therefore$ $\{x_n\}_n$ একটি কশি অনুক্রম।

$\therefore$ কশির অভিসারিতার সাধারণ সূত্র থেকে বলা যায় $\{x_n\}_n$ একটি অভিসারী অনুক্রম।

2.10 উদাহরণ ও অনুশীলনী

উদা : 1. নীচের অনুক্রমগুলির বৃহত্তম পদ, ক্ষুদ্রতম পদ, লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা এবং গরিষ্ঠ অধঃসীমা যদি থাকে নির্ণয় কর :

(i) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3} \ldots\ldots$

(ii) $2 - 1, 2 + \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{4}, \ldots\ldots$

সমাধানের সংকেত :

(i) $x_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ যখন, n অযুগ্ম,

$= -\frac{1}{3^{n-1}}$ যখন, n যুগ্ম,

(ii) $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ যখন, n অযুগ্ম,

$= 2 + \frac{1}{n}$ যখন, n যুগ্ম,

উদা : 2. একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k নির্ণয় কর যাতে,

$$\left|\frac{2n+5}{6n-11} - \frac{1}{3}\right| < 0.001, \forall n > k$$

সমাধান : $\left|\frac{2n+5}{6n-11} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{26}{3(6n-11)}\right| < 0.001 = \frac{1}{1000}$

এখন $\frac{3(6n-11)}{26} > 1000$, (যখন, $n \geq 2$)

বা, $n > \frac{26033}{18} = 1446.28$ (প্রায়)

$k = 1447.$

$\therefore$ $\left|\frac{2n+5}{6n-11} - \frac{1}{3}\right| < 0.001$ যখন, $n > 1447.$

উদা : 3. নীচের অনুক্রমগুলির অভিসারিতা আলোচনা কর :

(i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$

(ii) 5, 5, 5, ..., 5, ...

(iii) $\frac{5}{4}, \left(\frac{5}{4}\right)^2, \left(\frac{5}{4}\right)^3, \ldots \left(\frac{5}{4}\right)^n, \ldots$

(iv) $2^2, 4^2, 6^2, \ldots, (2n)^2, \ldots$

সমাধান : (i) এখানে, $x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore$ $\{x_n\}_n$ অভিসারী এবং সীমা 1।

(ii) এখানে, $x_n = 5, \forall n \in N$

$\therefore$ $x_n \to 5$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore$ $\{x_n\}_n$ অভিসারী এবং সীমা 5.

(iii) এখানে, $x_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$ এটি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে এবং সাধারণ অনুপাত $= \frac{5}{4} > 1$

$\therefore$ $x_n \to \infty$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore$ $\{x_n\}_n$ অভিসারী নয়।

(iv) এখানে, $x_n = (2n)^2 \to \infty$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore$ $\{x_n\}_n$ অভিসারী নয়।

উদা. 4. দেখাও যে $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}=1$

সমাধান : মনে করি, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ এবং $v_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\therefore$ $u_n < x_n < v_n, \forall n, n \geq 2.$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

$\therefore$ $1 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$

উদা : 5. কশির শর্ত দ্বারা দেখাও $\{x_n\}_n$ একটি অভিসারী অনুক্রম। যেখানে,

$$x_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

সমাধান : $\frac{1}{n!} = \frac{1}{2.3.4.\dots.n} < \frac{1}{2^{n-1}}$

$\therefore \quad |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{m!}\right|$ যখন $m > n$

$< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}$

$= \frac{1}{2^n}\left\{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right\}$

$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right]$

$< \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$ যখন, $n \to \infty$

ধরা যাক্, $\varepsilon > 0$ একটি যথেচ্ছ সংখ্যা তখন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k পাওয়া যাবে যাতে,

$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon, \forall n > k$

$\therefore \quad |x_m - x_n| < \varepsilon, \forall n > k$ and $m > n$

কশির শর্ত অনুযায়ী অনুক্রমটি অভিসারী।

উদা : 6. দেখাও যে, $\{x_n\}_n, x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ অভিসারী অনুক্রম নয়।

সমাধান : ধরা যাক্, $m = 2n$ এবং $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$|x_m - x_n| = |x_{2n} - x_n|$

$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$

$> n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

$\because \quad \{x_n\}_n$ কশি অনুক্রম নয়।

$\therefore$ $\{x_n\}_n$ অভিসারী অনুক্রম নয়।

উদা : 7. $\left\{\frac{3+(-1)^n}{2}\right\}_n$ অনুক্রমের অভিসারিতা যাচাই কর।

সমাধান : $x_n = \frac{3+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1, \text{ যখন } n\text{-অযুগ্ম} \\ 2, \text{ যখন } n\text{-যুগ্ম} \end{cases}$

অর্থাৎ, অনুক্রমটি $\{1, 2, 1, 2, \ldots\ldots\}$

এই অনুক্রমের কোন নির্দিষ্ট একটি সীমা নেই।

অভিসারী অনুক্রমের একটি এবং কেবলমাত্র একটি সীমা থাকে।

$\left\{\frac{3+(-1)^n}{2}\right\}_n$ অভিসারী নয়।

উদা : 8. দেখাও যে, $\left\{\frac{3n+1}{n+1}\right\}_n$ একটি সীমাবদ্ধ অনুক্রম।

উদা : 9. দেখাও যে, $\left\{\frac{1}{5+6n}\right\}_n$ একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম। এই অনুক্রমের অভিসারিতা সম্বন্ধে যুক্তি দিয়া দেখাও।

উদা : 10. দেখাও যে, $\left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}_n$ ক্রমক্ষীয়মান নয়। যুক্তি দিয়া ইহার অভিসারিতা আলোচনা কর।

উদা : 11. একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k বাহির কর যাতে,

(i) $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < 0.001$, যেখানে, $n > k$

(ii) $\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right| \leq 0.1$, যেখানে, $n \geq k$

উদা : 12. সীমার সংজ্ঞা ব্যবহার করে দেখাও যে,

$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_n$ এবং $\left\{\frac{2n+2}{2n+1}\right\}_n$

অনুক্রমগুলির সীমা 1।

উদা : 13. নীচের অনুক্রমগুলি সীমাবন্ধ (bounded), ক্রমবর্ধমান, ক্রমক্ষীয়মান কিনা যাচাই কর এবং সীমার অস্তিত্ব থাকলে বাহির কর।

(i) $\{0.2,\ 0.23,\ 0.233,\ 0.2333,\ ......\}$

(ii) $\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{n+n}\right\}$

(iii) $\{-1,\ -1,\ -2,\ -2,\ -3,\ -3,\ .....\}$

উদা : 14. নিম্নলিখিত, অনুক্রমগুলির বৃহত্তম পদ (greatest member), ক্ষুদ্রতম পদ (least member). সুপ্রীমাম্ এবং ইনফিমাম্ বাহির কর। প্রতিটির অভিসারিতাও যাচাই কর :

(i) $\left\{1.-\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},-\frac{1}{3^3},......\right\}$

(ii) $\left\{2-1,\ 2+\frac{1}{2},\ 2-\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{4},.......\right\}$

উদা : 15. নিম্নলিখিত অনুক্রমের সীমা বাহির কর :

(i) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right\}_n$

(ii) $\left\{\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\frac{3^3}{n^4}+....+\frac{n^3}{n^4}\right\}_n$

উদা : 16. কশির সাধারণ সূত্র-এর সাহায্যে প্রমাণ কর

$$\left\{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....\frac{1}{n!}\right\}_n$$

একটি অভিসারী অনুক্রম।

2.11 সারাংশ

কলনবিদ্যা ও গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্ব বুঝতে ও প্রয়োগ করতে গেলে বাস্তব সংখ্যার অসীম শ্রেণী ও অনুক্রমের গুরুত্ব রয়েছে। এই অধ্যায়ে বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম—তার সীমাবদ্ধতা, অভিসারী/অপসারী অনুক্রমের সংজ্ঞা এবং সে বিষয়ে সিদ্ধান্তে উপনীত হবার প্রাথমিক বিষয় আলোচনা করেছি।

সহায়ক গ্রন্থ :

একক 5-এর শেষে দেখো।

ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ :

অনুক্রম/সিকুয়েন্স — Sequence
বাস্তব অক্ষ — Real axis
শ্রেণী/সিরিজ — Series
অভিসারী/কনভার্জ — Convergent
অভিসারিতা — Convergence
অপসারী/ডাইভার্জ — Divergent
অপসারিতা — Divergence
অপেক্ষক, চিত্রণ — Function
সংজ্ঞাঞ্চল — Domain
সহ-সংজ্ঞাঞ্চল — Co-domain
বিম্ব — Image
বিস্তার — Range
ক্রমভিত্তিক সেট — Ordered set
সীমা — Bound
ঊর্ধ্বসীমা — Upper bound
লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা/সুপ্রিমাম — Supremum
গরিষ্ঠ নিম্নসীমা/ইনফিমাম — Infimum
সামীপ্য — Neighbourhood
সসীম — Finite
অসীম — Infinite
দোদুল্যমান — Oscillatory
ক্রমবর্ধমান — Monotonically increasing
ক্রমক্ষীয়মান — Monotonically decreasing
ক্রমান্বয়ী — Monotonic, Monotone
সীমা — Limit
যথেচ্ছ — Arbitrary
নাল সিকুয়েন্স — Null sequence

একক 3 ❒ অসীম শ্রেণি (Infinite Series)

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

প্রাথমিক গণিতে বাস্তব সংখ্যার যে যোগফল বা বিয়োগফলের ধারণা আমরা পেয়েছি, সেটি সবসময়েই সসীম সংখ্যক বাস্তব সংখ্যার যোগফল বা বিয়োগফলের জন্য। ধরা যাক্‌, সমান্তর শ্রেণি বা গুণোত্তর শ্রেণির বিষয়টি—আমরা n সংখ্যক পদের যোগফল সম্পর্কে অবহিত আছি। কিন্তু এই শেষোক্ত দুটি শ্রেণির ক্ষেত্রে এবং এই ধরনের আরো যোগফলের ক্ষেত্রে যদি পদসংখ্যা বেঁধে না দেওয়া হয়, তবে সেইসব শ্রেণির যোগফল বা বিয়োগফল অবশ্যই বিশেষ কৌতুহলের উদ্রেক করে। এই এককে আমরা এই ধরনের অসীম শ্রেণি সম্পর্কে আলোচনা করব।

3.2 বাস্তব সংখ্যার অসীম শ্রেণি এবং ইহার অভিসারিতা ও অপসারিতা

$\{x_n\}_n$ বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম। এর বিস্তার হল অসীম সেট।

$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n + \ldots\ldots$ শ্রেণিটিকে বলা হবে অসীম শ্রেণি। (1)

ধরা যাক, $S_n = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$

S_n কে বলা হবে অসীম শ্রেণির প্রথম পদ থেকে পরপর n-টি পদের যোগফল।

অর্থাৎ, S_n হলো (1) এর প্রথম n সংখ্যক পদের আংশিক যোগফল (partial sum)।

$S_1 = x_1$ (প্রথম পদ)

$S_2 = x_1 + x_2$ (প্রথম ও দ্বিতীয় পদের যোগফল)

....

....

$S_n = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$ (প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল)।

....

এভাবে, $\{S_n\}_n$ অনুক্রম গঠন করা হলো। এখন যদি $\{S_n\}_n$ অভিসারী হয় এবং এর সীমা হয় S তাহলে, $\sum\limits_n x_n$ কে অভিসারী শ্রেণি বলা হবে এবং সীমা

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n)$$

$$= x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n + \ldots\ldots\ldots \infty$$

এখানে, S-কে বলা হবে অসীম শ্রেণি (1) এর যোগফল। গাণিতিক ভাষায়, যে কোন $\in > 0$ এর জন্য যদি একটি অনুশঙ্গী ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $< k$ পাওয়া যায় যাতে

$$|S_n - S| < \in \text{ যখন } n < k$$

তখন অসীম শ্রেণি (1) একটি অভিসারী শ্রেণি হবে।

এক্ষেত্রে,

$S = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n + \ldots\ldots\ldots$

যদি, $S_n \to \infty$ বা, $S_n \to \infty$ বা, $\{S_n\}_n$-এর সীমা না থাকে যখন, $n \to \infty$ হয় তবে, (1) কে বলা হবে অপসারী (divergent) অসীম শ্রেণি।

উদাহরণ ঃ (1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\infty$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to 2 \text{ যখন } n \to \infty$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = 2$

$\therefore$ অসীম শ্রেণিটি অভিসারী এবং তার যোগফল = 2

$\therefore 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots\infty$

গুণোত্তর অসীম শ্রেণি ঃ

$a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots$ $(a > 0)$ একটি গুণোত্তর অসীম শ্রেণি।

(i) শ্রেণিটি অভিসারী হবে যখন $|r| < 1$ এবং এর যোগফল হবে $a/(1 - r)$;

(ii) শ্রেণিটি অপসারী হবে (অর্থাৎ যোগফল $+\infty$ হবে) যদি $r \geq 1$;

(iii) $r = -1$ হলে শ্রেণিটি অভিসারী হবে না।

প্রমাণ ঃ $a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots$ (1), $(r \neq 1)$

$S_n = a + ar \ldots\ldots + ar^{n-1} = a\frac{(r^n - 1)}{r - 1}$

(i) যদি, $|r| < 1$ হয়, $r^n \to 0$ যখন $n \to \infty$ এক্ষেত্রে (1) এর যোগফল $S = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$

(ii) যদি $r > 1$ হয়, $r^n \to \infty$ যখন $n \to \infty$ এক্ষেত্রে $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

গুণোত্তর শ্রেণিটি অপসারী।

(iii) যদি, $r = 1$ হয়,

$$S_n = n.a \to \infty \text{ যখন, } n \to \infty$$

এক্ষেত্রে, গুণোত্তর শ্রেণিটি অপসারী (divergent)।

(iv) যদি $r < -1$ হয়, $\lim_{n\to\infty} S_n$ এর অস্তিত্ব নেই।

(v) যদি $r = 1$ হয়,

$$S_n = \underbrace{a - a + a - \ldots\ldots}_{n\text{-পদ}} = 0, \ n \text{ যখন যুগ্ম,}$$
$$a, \ n \text{ যখন অযুগ্ম,}$$

এক্ষেত্রে শ্রেণিটি নির্দিষ্ট ভাবে দোদুল্যমান, অভিসারী নয়।

$\therefore$ দেখা গেল গুণোত্তর অসীম শ্রেণিটি—

অভিসারী যদি $|r| < 1$ এবং অভিসারী নয় যদি $|r| \geq 1$ হয়।

উদাহরণ ঃ

(1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots.$ অভিসারী। (এখানে $1 = \frac{1}{2} < 1$)

(2) $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots\ldots\ldots$ অপসারী। (এক্ষেত্রে, $r = 3 > 1$)

3.3 অভিসারী শ্রেণির কয়েকটি ধর্ম

(1) যদি $\sum_n u_n$ অসীম শ্রেণিটি অভিসারী হয় এবং যোগফল S হয় তবে $\sum_n Cu_n$ শ্রেণিটি অভিসারী

হবে এবং এর যোগফল হবে CS যেখানে, C একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা।

(2) $\sum_n u_n$ এবং $\sum_n v_n$ দুটি অসীম অভিসারী শ্রেণি যাদের যোগফল যথাক্রমে S এবং T এখন $\sum_n (u_n + v_n)$ অসীম শ্রেণিটিও একটি অভিসারী শ্রেণি হবে এবং যোগফল হবে S + T।

(3) একটি শ্রেণির প্রথম দিকে সসীম সংখ্যক পদ যোগ দিলে বা সসীম সংখ্যক পদ বাদ দিলে শ্রেণিটির অভিসারিত্ব বা অপসারিত্ব বদল হয় না।

3.4 অসীম শ্রেণির অভিসারিতার জন্য কশির শর্ত (Cauchy's Principle on Convergence of an infinite series)

বাস্তব সংখ্যার অসীম শ্রেণি $\sum_n u_n$-এর অভিসারিতার জন্য প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত হল যে কোন $\in > 0$-এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যাবে যাতে,

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots u_m| < \in, \forall m, n \in N, m, n > k$$

বা, $|S_m - S_n| < \in, \forall n, m > k.$ ....(1)

অথবা $|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \in$ এখন, $n > K$, $p \in N$......(2)

(2) নং শর্তটিও কশির শর্তের অন্য রূপ।

উদাহরণ-1 ঃ $\sum u_n = \sum_n \frac{1}{n}$ শ্রেণিটি অভিসারী নয়।

সমাধান ঃ

ধরি, $\in = \frac{1}{2}$ এবং $p = n$ তখন,

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$
$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n}$$
$$= \frac{1}{2}$$

$\therefore$ কশির শর্ত অনুযায়ীর এটি একটি অপসারী অসীম শ্রেণি।

উদাহরণ-2 ঃ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots$ একটি অভিসারী অসীম শ্রেণি।

সমাধান ঃ অসীম শ্রেণিটি $\sum_1 v_n$ যেখানে $u_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

ধরি, $\in > 0$ একটি সংখ্যা

এখন, $|S_{n+p} - S_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right|$

$$= \left|\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots\ldots\right|$$

$$< \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ যখন, $\frac{1}{n} < \varepsilon$

অর্থাৎ, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ হয়।

ধরা যাক, $K = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$

এখন, $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ যখন, $n \geq K$ এবং $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

উদাহরণ-3. কশির শর্ত দ্বারা দেখাও যে $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor n}$ একটি অভিসারী অসীম শ্রেণি।

সমাধান ঃ $\frac{1}{\lfloor n} = \frac{1}{1,2,3,\ldots\ldots n} \leq \frac{1}{1,2,2,\ldots.2} = \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\therefore \quad \left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{\lfloor n}\right| = \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{\lfloor n} \leq \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2n}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{2^{p-1}}\right] = \frac{1}{2^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$< 2.\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0 \text{ যখন, } n \to \infty$$

$\therefore$ যে কোন $0 < \varepsilon < 1$ এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যাবে যাতে, সকল $n > K$ এর জন্য $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ বা, $2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}$ বা, $n - 1 > \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}$ অর্থাৎ $n > \left[\frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}\right] + 1$

ধরা যাক, $K = \left[\frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}\right]$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

$\because \quad \left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ যখন, $n > K$ এবং $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots.$

m $\therefore \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor n}$ একটি অভিসারী শ্রেণি

উদাহরণ-4 ঃ কশির শর্ত-এর সাহায্যে দেখাও যে, $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1}$ একটি অসীম অভিসারী শ্রেণি।

সমাধান ঃ $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots..$

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots.. + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+p+1)} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \to 0 \text{ যখন, } n \to \infty$$

যে কোন $\varepsilon > 0$ এর জন্য, একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যাবে, যাতে সকল n > K-এর জন্য $\frac{1}{n} < \varepsilon$ যখন, $n < \frac{1}{\varepsilon}$ **বা,** $n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

ধরা যাক, $K = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$\therefore \left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ যখন, n > K, p = 1, 2, ...

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অসীম শ্রেণি অভিসারী হলে $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ হবে।

$\left[\text{Necessary condition for the convergence of a series} \sum u_n is \lim_{n\to\infty} u_{n=0}\right]$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ একটি অভিসারী অসীম শ্রেণি। কশির শর্ত অনুযায়ী যে কোন $\varepsilon > 0$ **এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা** K পাওয়া যাবে যাতে,

$$\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon \text{ যখন } n \geq K \text{ এবং } p = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

এখন, p = 1 ধরলে,

$\left|u_{n+1}\right| < \varepsilon,\ n \geq K$-এ সমস্ত মানের জন্য,

$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

বি. দ্র. ঃ বিপরীত দিকটি সর্বদা সত্য নয়।

$u_n + \frac{1}{n}$ এবং $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ কিন্তু $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ অসীম শ্রেণিটি অভিসারী নহে।

3.5 ধনাত্মক সংখ্যার অসীম শ্রেণি (Series of Positive Terms)

একটি অসীম শ্রেণি $\sum_1^\infty u_n$ কে ধনাত্মক পদের অসীম শ্রেণি বলা হবে যদি $n \in N$-এর প্রতিটি মানের জন্য u_n একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়।

উপপাদ্য ঃ একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার অসীম শ্রেণি $\sum_1^\infty u_n$ অভিসারী শ্রেণি হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি অনুক্রম $\{S_n\}_n$ ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত হয়, যেখানে, $S_n = \sum_1^\infty u_n$

প্রমাণ ঃ $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

এখন, $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} > 0,\ n \in N,$

$\therefore\ \{S_n\}_n$ একটি ক্রমবর্ধমান অনুক্রম।

$\{S_n\}_n$ অণুক্রমটি অভিসারী হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি অণুক্রমটি ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত হয়।

উদাহরণ ঃ $\sum_n \frac{1}{n^2}$ অভিসারী শ্রেণি

উত্তর ঃ $a_n = \frac{1}{n^2} > 0$ সকল $n \in N$-এর জন্য।

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} < 1 + \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r(r-1)}$$

$$S_n < 1 + \sum_{r=2}^{n}\left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\right)$$

$$S_n < 1 + \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$S_n \le 2$ সকল $n \in N$-এর জন্য।

অতএব $\{S_n\}_n$ ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত অণুক্রম এবং ক্রমবর্ধমান।

ফলে $\{S_n\}_n$ অভিসারী এবং শ্রেণি $\sum_n a_n$ অভিসারী শ্রেণি।

ধনাত্মক সংখ্যার শ্রেণির গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম ঃ

একটি ধনাত্মক সংখ্যার শ্রেণির ক্ষেত্রে বন্ধনী যুক্ত করলে অথবা বাদ দিলে শ্রেণির অভিসারিত্ব বা অপসারিত্ব পরিবর্তিত হবে না যদি না ক্রমবিন্যাস পরিবর্তিত হয়।

3.6 ধনাত্মক শ্রেণির অভিসারিতার পরীক্ষা

3.6.1 তুলনার মাধ্যমে পরীক্ষা (Comparison Test)

মনে করা যাক্ $\sum\limits_n a_n$ ধনাত্মক পদবিশিষ্ট প্রদত্ত শ্রেণি। যদি $\sum\limits_n c_n$ অভিসারী শ্রেণি হয় এবং সকল $n \geq m$ (নির্দিষ্ট)-এর জন্য $a_n \leq c_n$ হয়, তবে $\sum\limits_n a_n$ শ্রেণিটি অভিসারী হবে। যদি $\sum\limits_n d_n$ অপসারী শ্রেণি হয় এবং সকল $n \geq m$ নির্দিষ্ট-এর জন্য $a_n \geq d_n$ হয়, তবে শ্রেণিটি অপসারী হবে।

উদাহরণ ঃ (1) $\sum\limits_n \frac{2+\cos 3x}{3^n}$, নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা।

$\left|\frac{2+\cos 3x}{3^n}\right| \leq \frac{1}{3^{n-1}}, n \in N \sum\limits_n \frac{1}{3^{n-1}}$ একটি গুণোত্তর শ্রেণি যার সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{3} < 1$।

ফলে $\sum\limits_n \frac{1}{3^{n-1}}$ অভিসারী।

সুতরাং, $\sum\limits_n \frac{2+\cos 3x}{3^n}$ শ্রেণিটি অভিসারী হবে।

উদাহরণ ঃ (2) $\sum\limits_n \frac{1}{n^p}, p > 0$

এটি একটি ধনাত্মক পদ বিশিষ্ট অসীম শ্রেণি।

(ক) $p \geq 1$ হলে $\sum\limits_n \frac{1}{n^p}$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{15^p}\right) + \ldots$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{8^p}\right) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \ldots$$

এটি একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণি যাহার সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{2^{p-1}} < 1$ $(\because p > 1)$ অর্থাৎ এটি অভিসারী শ্রেণি।

সুতরাং তুলনার মাধ্যমে বলা যায়, $p \geq 1$ হলে প্রদত্ত শ্রেণিটি অভিসারী হবে।

(খ) p < 1 হলে, সকল $n \in N$ এর জন্য $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{p}$ **এবং** $\sum_n \frac{1}{n}$ হল একটি অপসারী শ্রেণি।

ফলে $\sum_n \frac{1}{n^p}$ অপসারী যখন P < 1।

3.6.2. তুলনা পদ্ধতির সীমা আকার ঃ

$\sum_1^\infty u_n$ এবং $\sum_1^\infty v_n$ দুটি ধনাত্মক পদের অসীম শ্রেণি। যদি $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < \infty$, হয় তবে হয় উভয় শ্রেণিই অভিসারী নতুবা উভয় শ্রেণিই অপসারী হবে।

উদাহরণ ঃ $\sum_{n=1}^\infty u_n \cdot u_n = \sqrt{\frac{2^n - 1}{3^n - 1}}$ অসীম শ্রেণির অভিসারিতা যাচাই করো।

সমাধান ঃ $u_n = \sqrt{\frac{2^n - 1}{3^n - 1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{(1 - 2^n)/(1 - 3^{-n})}$

ধরা যাক, $\sum_1^\infty v_n$, যেখানে $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}} > 0, \forall n$

এবং $u_n > 0, \ \forall n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

$$\therefore 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < \infty$$

এখন, $\sum_1^\infty v_n$ একটি গুণোত্তর শ্রেণি, যার সাধারণ অনুপাত $= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < 1$

$\therefore \sum_1^\infty v_n$ একটি অভিসারী শ্রেণি।

$\therefore$ তুলনা পদ্ধতির সীমা আকার অনুযায়ী,

$\sum_{n=1}^\infty u_n$, যেখানে, $u_n = \sqrt{\frac{2^n - 1}{3^n - 1}}$, একটি অভিসারী শ্রেণি।

3.6.3. ডি. এলেমবার্ট-এর অনুপাত পরীক্ষা ঃ (D. Alembert's ratio Test)

$\sum\limits_{n} u_n$ একটি ধনাত্মক পদের অসীম শ্রেণি।

ধরা যাক্ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$, তবে

(i) $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ অভিসারী হবে যদি $p < 1$ হয়।

(ii) $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ অপসারী হবে যদি $p > 1$ হয়।

এবং (iii) $p = 1$ হলে অভিসারিতা সম্পর্কিত কোন তথ্য দেওয়া সম্ভব নয়।

উদাহরণ ঃ

ডি. এলেমবার্ট-এর অনুপাত-এর মাধ্যমে নিম্নলিখিত শ্রেণিগুলির অভিসারিতা যাচাই করো।

(i) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, (ii) $\sum \frac{1}{n}$, (iii) $\sum \frac{1}{n^2}$, (iv) $\sum\limits_{n} \frac{(n+1)!}{2^n . n!}$

সমাধান ঃ

(i) $u_n = \frac{n}{2^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}, \text{ যখন } n \to \infty$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{1}{2} = 1.$$

$\therefore$ অনুপাত পদ্ধতির মাধ্যমে, $\sum \frac{n}{2^n}$ একটি অভিসারী শ্রেণি।

(ii) $u_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{1} = \frac{n}{1+n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1, \text{ যখন } n \to \infty$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

কিন্তু আমরা আগেই দেখেছি $\sum \frac{1}{n}$ একটি অপসারী শ্রেণি, $\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\right.$, শ্রেণির ক্ষেত্রে p = 1 নিলে শ্রেণিটি হবে $\left.\sum \frac{1}{n}\right)$

(iii) $u_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{u_n + 1}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \to 1 \text{ যখন } n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

কিন্তু, আমরা দেখেছি $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ শ্রেণিটি অভিসারী যদি, p > 1 এবং অপসারী যদি $p \leq 1$

$\therefore \sum \frac{1}{n^2}$ অভিসারী শ্রেণি।

(ii) এবং (iii)-এর ক্ষেত্রে, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

কিন্তু (ii) অপসারী এবং (iii) অভিসারী শ্রেণি 1

(iv) $a_n = \frac{(n+1)!}{2^n . n!} = \frac{n+1}{2^n}$

$$\frac{a_n + 1}{a_n} = \frac{n+2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n+1} = \frac{1}{2} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}(< 1) \text{ যখন } n \to \infty$$

ফলে D.Alembart-এর পরীক্ষা অনুযায়ী $\sum_{n} a_n$ অভিসারী হবে।

3.6.4. কশির রুট পরীক্ষা (Cauchy's root test) ঃ

মনে করি $\sum_{1}^{\infty} u_a$ ধনাত্মক পদের অসীম শ্রেণি। যদি $u_n > 0$ এবং $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = p$ হয় তবে,

(i) $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অভিসারী হবে যদি p < 1,

(ii) $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অপসারী হবে যদি $P > 1$ হয়।

এবং (iii) $p = 1$ হলে ঐ শ্রেণি সম্বন্ধে কোন তথ্য দেওয়া সম্ভব নয়।

উদাহরণ ঃ কশির রূট পরীক্ষার মাধ্যমে

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n+1}\right)^n$

শ্রেণিদ্বয়ের অভিসারিতা যাচাই করো।

সমাধান ঃ (i) $\sum_{1}^{\infty} u_n, u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

এখন, $\lim_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+1/n}\right) = \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ কশির রূট পরীক্ষার দ্বারা বলা যায় $\sum u_n$ শ্রেণিটি অভিসারী।

(ii) $\sum_{n}\left(\frac{n}{2^n+1}\right)^n$

$a_n = \left(\frac{n}{2^n+1}\right)^n > 0$ সকল n-এর জন্য

$a_n^{1/n} = \frac{n}{2^n+1} = b_n$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}+1} \times \frac{2^n+1}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}}\right] \to \frac{1}{2}(<1)$$

সুতরাং $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (অনুক্রমের ধর্ম থেকে)

$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} < 1$ এবং শ্রেণিটি অভিসারী হবে।

মন্তব্য ঃ সাধারণত, অনুপাতের মাধ্যমে পরীক্ষা কশির রুটের মাধ্যমে পরীক্ষার চেয়ে সহজ। অনেক ক্ষেত্রে অনুপাতের মাধ্যমে পরীক্ষায় শ্রেণি সম্বন্ধে কোন নির্দিষ্ট ধারণা পাওয়া যায় না কিন্তু কশির রুটের মাধ্যমে পরীক্ষার দ্বারাই শ্রেণির অভিসারিতা সম্বন্ধে ধারণা দেয়।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক, অসীম শ্রেণিটি $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ যখন, $u_n = 2^{-n-(-1)^n}$

এখন, $\cup_n^{\frac{1}{n}} = \left\{2^{-n-(-1)^n}\right\}^{\frac{1}{n}} = 2^{-1\frac{(-1)^n}{n}} \to 2^{-1} = \frac{1}{2}$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ কশির রুট পরীক্ষায়, অসীম শ্রেণিটি অভিসারী।

আবার, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^2}} = 2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}} + n + (-1)^n$

$= 2^{-1+(-1)^n-(-1)^{n+1}} = \begin{cases} 2, & \text{যখন } n \text{ জোড় পূর্ণসংখ্যা} \\ \frac{1}{8} & \text{যখন } n \text{ বিজোড় পূর্ণসংখ্যা} \end{cases}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ এর কোন নির্দিষ্ট নাম নেই।

$\therefore$ অনুপাত পরীক্ষার মাধ্যমে শ্রেণিটি অভিসারিতা কিনা জানা গেল না।

উপপাদ্য ঃ $\sum_{1}^{\infty} u_n$ শ্রেণির যদি $u_n > 0$ হয় এবং $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ এর একটি নির্দিষ্ট লিমিট থাকে যখন $n \to \infty$ তাহলে, $u_n^{1/n}$-এরও একই লিমিট থাকবে যখন $n \to \infty$।

3.6.5. র‍্যাবির পরীক্ষা ঃ (Raabe's Test)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ একটি ধনাত্মক পদের অসীম শ্রেণি এবং

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = p$ হয় তবে,

(i) $\sum_{1}^{\infty} u_n$ শ্রেণিটি অভিসারী হবে যদি $p < 1$ হয়,

(ii) $\sum_{1}^{\infty} u_n$ শ্রেণিটি অপসারী হবে যদি $p < 1$ হয়,

এবং (iii) $p = 1$ হলে শ্রেণিটির অভিসারিতা সম্বন্ধে কোন কিছু জানা সম্ভব নয়।

উদাহরণ ঃ

র‍্যাবির পরীক্ষা দ্বারা $1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ldots\ldots$ শ্রেণির অভিসারিতা যাচাই কর।

সমাধান ঃ প্রথম পদ বাদ দেওয়া হল। $u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5-(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 5-2n(2n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right\} = \frac{3}{2} > 1$$

$\therefore$ র‍্যাবির পরীক্ষা থেকে বলা যায় শ্রেণিটি অভিসারী।

3.7 অল্টারনেটিং শ্রেণি এবং ইহার অভিসারিতা (Alternating Series and its Convergence)

যদি কোন শ্রেণির পরপর দুটি পদের চিহ্ন পর্যায়ক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হয় তখন ঐ শ্রেণিকে অল্টারনেটিং শ্রেণি বলা হবে। $\sum_n (-1)^{n-1} a_n, a_n > 0$ সকল n-এর জন্য হল এই শ্রেণির সাধারণ আকার।

যেমন— $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$ শ্রেণিটি একটি অল্টারনেটিং শ্রেণি।

লিব্‌নিজের পরীক্ষা (Leibnitz's Test) ঃ

যদি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম $\{u_n\}_n$ ক্রমক্ষীয়মান এবং $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ হয় তখন, অল্টারনেটিং শ্রেণি $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ টি অভিসারী হবে।

অল্টারনেটিং শ্রেণি,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots\ldots$$

-এর পদগুলি একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম গঠন করে এবং $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

$\therefore$ লিব্‌নিজ্-এর পরীক্ষার মাধ্যমে বলা যায় $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ শ্রেণিটি অভিসারী।

এই অল্টারনেটিং শ্রেণির পদগুলির ধনাত্মক মান নিয়ে গঠিত $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ শ্রেণিটি অভিসারী নয় কিন্তু অল্টারনেটিং শ্রেণিটি $\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ অভিসারী।

আবার $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ অল্টারনেটিং শ্রেণির পদগুলির ধনাত্মক মান নিয়ে শ্রেণিটি $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ অভিসারী এবং লিব্‌নিজ্ পরীক্ষার মাধ্যমে $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ শ্রেণিটি অভিসারী।

উপরের উদাহরণ লক্ষ্য করে পরিষ্কার,

(1) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ শ্রেণিটি অভিসারী কিন্তু $\sum_{n}\frac{1}{n}$ শ্রেণিটি অপসারী (অর্থাৎ, অভিসারী নয়)।

(2) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ বা $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ শ্রেণিটিও অভিসারী।

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে অভিসারী শ্রেণির কিছু ক্ষেত্রে শ্রেণির পদগুলির পরম (absolute) মানগুলি নিয়ে যে শ্রেণি হয় সেটাও অভিসারী আবার কিছু ক্ষেত্রে নয়।

3.8 পরম অভিসারী এবং শর্তসাপেক্ষে অভিসারী (Absolute and Conditional Convergence)

$\sum u_n$ শ্রেণিটি পরম (absolutely) অভিসারী যখন $\sum|u_n|$ অভিসারী।

$\sum u_n$ শ্রেণিটি যদি অভিসারী হয় কিন্তু $\sum|u_n|$ অভিসারী নয় তখন $\sum u_n$ শ্রেণিটিকে বলা হয় শর্তসাপেক্ষে (conditionally) অভিসারী।

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots.$ শ্রেণিটি শর্তসাপেক্ষে অভিসারী কারণ ঐ শ্রেণিটি লিব্‌নিজ এর নিয়মে অভিসারী কিন্তু $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$ শ্রেণিটি অভিসারী নয়।

আবার, $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\ldots\ldots\ldots.$ শ্রেণিটি পরম অভিসারী কারণ, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots\ldots$ একটি p-শ্রেণি যেখানে, $p = 2 > 1$

ধর্ম ঃ যে কোন পরম অভিসারী শ্রেণি অবশ্যই অভিসারী হইবে।

3.9 ঘাত শ্রেণি (Power Series)

$\sum_{1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ বা $\sum a_n x^n$ আকারের শ্রেণিকে ঘাত শ্রেণি (power series) বলা হবে, যখন

$a_n \in R$ এবং $n \in N$। এখন যে x-এর মানের জন্য ঘাত শ্রেণিটি অভিসারী হবে সেই সমস্ত মানের সেটকে ঐ শ্রেণির অভিসারী অঞ্চল (region of convergence) বলা হবে।

উদাহরণ ঃ (1) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\ldots$-এর অভিসারী অঞ্চল বাহির কর।

সমাধান ঃ অনুপাত পরীক্ষার মাধ্যমে,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| \to 0 > \text{ যখন } n \to \infty$$

$\therefore$ শ্রেণিটি x-এর সকল মানের জন্য পরম অভিসারী এবং অভিসারী হবে।

(2) $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ শ্রেণির ক্ষেত্রে

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = (n-1)|x| \to \infty > \text{ যখন } n \to \infty$$

$\therefore$ $x = 0$ ছাড়া অন্য মানের জন্য শ্রেণিটি অপসারী।

3.10 বিভিন্ন উদাহরণ

উদা. 1. $1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots\ldots$ শ্রেণিটি অভিসারী।

সমাধান ঃ প্রথম পদ বাদ দেওয়া হল। এখানে $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right\}$

$$\therefore\ S_n = \sum_{n=1}^{n} u_n = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left\{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \to \frac{1}{2}, \text{ যখন } n \to \infty$$

$\therefore$ শ্রেণিটি অভিসারী এবং শ্রেণিটির যোগফল $= \frac{1}{2}$। সুতরাং প্রদত্ত শ্রেণিটিও অভিসারী এবং এর যোগফল $= 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

উদা. 2. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots\ldots\ldots\ldots$ শ্রেণির অভিসারিতা যাচাই কর।

সমাধান ঃ $Sn = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)!}$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)} \text{ (যখন } n > 4)$$

$$= 1+1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$= 1+1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$= 3-\frac{1}{n-1} < 3$$

$\therefore$ $\{Sn\}$ একটি ক্রমবর্ধমান অণুক্রম এবং ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ। অতএব শ্রেণিটি অভিসারী।

উদা. 3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ শ্রেণিটি অভিসারী নয়।

সমাধান ঃ ধরা যাক, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > 0$ এবং $v_n = \frac{1}{n} > 0$

এখন, $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} \to 1$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore$ $\sum u_n$ এবং $\sum v_n$ উভয়েই হয় অভিসারী শ্রেণি অথবা উভয়েই অপসারী শ্রেণি।

$\because$ $\sum v_n$ শ্রেণিটি অভিসারী নয়।

$\therefore$ $\sum u_n$ শ্রেণিটিও অভিসারী নয়।

উদা. 4. $\frac{1\cdot 2}{3}+\frac{2\cdot 3}{5}+\frac{3\cdot 4}{7}+\ldots\ldots$ অভিসারী নয়।

সমাধান ঃ $u_n = \frac{n(n+1)}{2n+1} > 0$ এবং $v_n = n > 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ $\sum_{1}^{\infty} v_n$ অপসারী শ্রেণি, $\sum_{1}^{\infty} u_n = \sum_{1}^{\infty}\frac{n.(n+1)}{2n+1}$ শ্রেণিটিও অপসারী।

উদা. 5. $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$ শ্রেণির অভিসারিতা পরীক্ষা কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক, $u_n = \frac{1}{\log n}$ এবং $v_n = \frac{1}{n}$

$\because \log n < n,\ n > 1$ এর সমস্ত মানের জন্য,

$\therefore \dfrac{1}{\log n} > \dfrac{1}{n} \forall n > 2 \, (\because \log 1 = 0)$

এখন, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ একটি অপসারী শ্রেণি,

$\therefore \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\log n}$ একটি অপসারী শ্রেণি।

উদা. 6. $\dfrac{1+2}{2^3} + \dfrac{1+2+3}{3^3} + \dfrac{1+2+3+4}{4^3} + \ldots\ldots$ শ্রেণির অভিসারিতা পরীক্ষা করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক, $\dfrac{1+2+\ldots+(n+1)}{(n+1)^3} = \left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right) \Big/ (n+1)^3$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)^2}$$

এবং $v_n = \dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{2(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

u_n এবং v_n তুলনা করলে, যেহেতু $\sum v_n$ অভিসারী নয়, $\sum u_n$ -ও অভিসারী হবে না।

উদা. 7. $\dfrac{1^2}{2} + \dfrac{2^2}{2^2} + \dfrac{3^2}{2^3} + \ldots\ldots + \dfrac{n^2}{2^n} + \ldots\ldots$ একটি অভিসারী শ্রেণি।

সমাধান ঃ এখানে, $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2} < 1 \text{ **যখন,** } n \to \infty$$

$\therefore$ D. Alembert's-এর অনুপাত পরীক্ষার দ্বারা, $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ একটি অভিসারী শ্রেণি।

উদা. 8. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$ শ্রেণির অভিসারিতা পরীক্ষা কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক্, $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ যখন, } n \to \infty$$

$e > 1, (\because 2 < e < 3)$

D. Alembert's-এর অনুপাত মাধ্যমে, $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অভিসারী নয়।

উদা. 9. $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ শ্রেণিটির অভিসারী কিনা পরীক্ষা কর।

সমাধান ঃ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{x^n}\right| = |x| \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to |x|$ যখন, $n \to \infty$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ অভিসারী যদি, $|x| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < x < 1$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ অপসারী যদি $|x| > 1$

$x = 1$ এর জন্য $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ অভিসারী এবং

$x = -1$ এর জন্য শ্রেণিটি অল্টারনেটিং (Alternating) শ্রেণি। এক্ষেত্রে শ্রেণিটির পদগুলি, ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম তৈরী করে এবং $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

লিবনিজ্-এর পরীক্ষার মাধ্যমে বলা যায়, $x = -1$-এর জন্য প্রদত্ত শ্রেণি

$-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots\ldots$ শ্রেণিটি অভিসারী।

উদা. 10. $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \ldots\ldots.$ শ্রেণিটি অভিসারী।

সমাধান ঃ এখানে, $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

$$\therefore \quad u_n^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2} \text{ যখন } n \to \infty$$

$\therefore$ কশির রুট পরীক্ষার মাধ্যমে বলা যায়

$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots\ldots..$ শ্রেণিটি অভিসারী।

উদা. 11. $\sum_{1}^{\infty} u_n$, যেখানে, $u_n = \dfrac{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots\ldots 3n}{7 \cdot 10 \cdot 13 \ldots\ldots (3n+4)}$ শ্রেণিটির অভিসারিতা যাচাই করুন।

সমাধান ঃ $u_n = \dfrac{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots\ldots 3n}{7 \cdot 10 \cdot 13 \ldots\ldots (3n+4)}$

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} = \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{3n+7}{3n+3} - 1\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\left(3+\frac{3}{n}\right)} = \frac{4}{3} > 1$$

$\therefore$ র‍্যাবির পরীক্ষার মাধ্যমে প্রমাণ করা গেল $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অভিসারী।

উদা. 12. নিম্নলিখিত শ্রেণি দুটির অভিসারিতা পরীক্ষা করো ঃ

(i) $\dfrac{1}{1+a^2} - \dfrac{1}{2+a^2} + \dfrac{1}{3+a^2} - \ldots\ldots, a \in R$

(ii) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots\ldots$

সমাধান ঃ (i) ধরা যাক্, $u_n = \dfrac{1}{n+a^2}$

এখন, $\dfrac{1}{(n+1)+a^2} < \dfrac{1}{n+a^2}$ i. e. $u_{n+1} < u_n \; \forall n, n = 1, 2, \ldots\ldots$

$\therefore$ $\{u_n\}_n$ একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম।

আবার, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+a^2} = 0$

$\therefore$ লিবনিজের পরীক্ষানুযায়ী, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+a^2}$ একটি অভিসারী শ্রেণি।

(ii) প্রথম পদ বাদ দিলে $u_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}$

$$u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3.5 \ldots\ldots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n \cdot (2n+2)} \; (\because 2n+2 > 2n+1)$$

$$< \frac{1 \cdot 3.5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n} = u_n, \; \forall n, \; n = 1, 2, \ldots\ldots (\because 2n+2 > 2n+1)$$

$\therefore$ $\{u_n\}$ একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম, যেখানে $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

$\therefore$ লিবনিজে্র পরীক্ষানুযায়ী, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}$ শ্রেণিটি ওডিসারী

3.11 প্রশ্নাবলী ও উত্তরমালা

1. দেখাও যে p শ্রেণি $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ অভিসারী হবে যখন $p > 1$; অন্যথায় এটি একটি অপসারী শ্রেণি।

2. তুলনার মাধ্যমে (Comparison Test) দেখাও যে, $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ অভিসারী।

3. $\frac{1}{2^2}+\frac{\sqrt{2}}{3^2}+\frac{\sqrt{3}}{4^2}+\ldots\ldots$ শ্রেণিটির অভিসারিতা পরীক্ষা করুন।

4. D. Alembert's-এর অনুপাত পরীক্ষার দ্বারা দেখাও যে,

   $1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots\ldots$ একটি অভিসারী শ্রেণি।

5. D' Alembert's এর অনুপাত পরীক্ষার দ্বারা

   $\frac{4}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{4^3}{3!}+\ldots\ldots+\frac{4^n}{n!}+\ldots\ldots\ldots$

   এর অভিসারিতা যাচাই কর।

6. কশির রুট পরীক্ষার দ্বারা দেখাও যে

   $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots\ldots$

   একটি অভিসারী শ্রেণি।

7. কশির রুট পরীক্ষার মাধ্যমে $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$ শ্রেণির অভিসারিতা যাচাই করো।

8. র‍্যাবি-এর পরীক্ষার মাধ্যমে দেখাও যে,

   $1+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}+\ldots\ldots\ldots$

   শ্রেণিটি অভিসারী।

9. কশির সাধারণ সূত্র প্রয়োগ করে নীচের শ্রেণিগুলির অভিসারিতা যাচাই করো।

   (i) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\ldots$

   (ii) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots\ldots\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots\ldots\ldots$

10. অল্টারনেটিং (alternating) শ্রেণি কখন অভিসারী হবে? নীচের শ্রেণিগুলির অভিসারিতা পরীক্ষা করো ঃ

(i) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots\ldots\ldots$

(ii) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

(iii) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots.$

11. নীচের শ্রেণিগুলির অভিসারিতা যাচাই করো ঃ

(i) $2+\frac{3}{8}+\frac{4}{27}+\ldots\ldots+\frac{n+1}{n^3}+\ldots\ldots.$

(ii) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{3}{5\cdot7}+\ldots\ldots+\frac{n}{(2n-1).(2n+1)}+\ldots\ldots.$

(iii) $\frac{1}{1\cdot2^2}+\frac{1}{2\cdot3^2}+\frac{1}{3\cdot4^2}+\ldots\ldots.+\frac{n}{n(n+1)^2}+\ldots..$

(iv) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots.+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots\ldots.$

12. নীচের শ্রেণিগুলির অভিসারী অঞ্চল (Region of Convergence) বাহির করো ঃ

(i) $1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots.$

(ii) $1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{7}+\ldots\ldots.$

(iii) $1+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^4}+\frac{x^3}{2^6}+\ldots\ldots.$

(iv) $\frac{x}{1\cdot2}+\frac{x^2}{3\cdot4}+\frac{x^3}{5\cdot6}+\frac{x^4}{7\cdot8}+\ldots\ldots.$

(v) $x+\frac{2x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{4x^4}{4!}+\ldots\ldots\ldots$

3.12 সারাংশ

বাস্তব সংখ্যার অসীম শ্রেণিসমূহের অভিসারিত্বের ধারণা আনার পাশাপাশি ধনাত্মক পদ বিশিষ্ট কিছু শ্রেণির এবং একটি বিশেষ ধরনের শ্রেণির অভিসারিত্ব পরীক্ষা যাচাইয়ের শর্তাবলী এই অধ্যায়ে বিবৃত হয়েছে। ঘাত শ্রেণি ও তার অভিসারিত্বের অঞ্চলের ধারণা ভবিষ্যতে অপেক্ষকতত্ত্ব বিশ্লেষণের সহায়ক হবে।

3.13 সহায়ক গ্রন্থ এবং এককে ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ

সহায়ক গ্রন্থ ঃ একক-5 এর শেষে দ্রষ্টব্য।

ব্যবহৃত শব্দ ঃ

শ্রেণি—Series
অসীম—Infinite
সসীম—Finite
আংশিক যোগফল—Partial sum
অভিসারী—Convergent
অপসারী—Divergent
অভিসারিতা—Convergence
দোদুল্যমান বা অক্সিলেটরী—Oscillatory
গুণোত্তর অসীম শ্রেণি—Geometric infinite series
কশির শর্ত—Cauchy's condition
হারমোনিক শ্রেণি (p-শ্রেণি)—Harmonic Series (p-series)
ক্রমবর্ধমান—Increasing
ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত—Bounded above
নিম্নসীমা (অধঃসীমা) যুক্ত—Bounded below
লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা—Least upper bound (Supremum)
গরিষ্ঠ নিম্নসীমা—Greatest lower bound (Infimum)
তুলনার মাধ্যমে পরীক্ষা—Comparison Test
অল্টারনেটিং শ্রেণি—Alternating series
পরম অভিসারী—Absolutely convergent
শর্তসাপেক্ষে অভিসারী—Conditional convergent
অভিসারী অঞ্চল—Region of convergence

একক 4 ❐ একচলের বাস্তব অপেক্ষক এবং ইহার সন্ততা (Single Variable Function and its Continuity)

গঠন ঃ

4.1 প্রস্তাবনা

আমরা পাটীগণিত ও বীজগণিতের চারটি মৌলিক প্রক্রিয়া যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ সম্পর্কে অবহিত আছি। কিন্তু গণিতশাস্ত্র ও গাণিতিক বিজ্ঞানের সব প্রশ্নের সমাধান ঐ চারটি প্রক্রিয়ার দ্বারা সম্ভব নয়। এই এককে আমরা বাস্তব এক চলরাশির বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক এবং অপেক্ষকের ধর্ম, বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমা ও সান্তত ও সংশ্লিষ্ট বিষয়সমূহ আলোচনা করব। এই সীমা নির্ধারণের প্রক্রিয়াকে সাধারণভাবে পঞ্চম প্রক্রিয়া বলে অভিহিত করা হয়। এই প্রক্রিয়ার মাধ্যমে গণিতশাস্ত্র ও গাণিতিক বিজ্ঞানের বহু প্রশ্নের সমাধান সম্ভব হবে।

4.2 বাস্তব একচল রাশির বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক (Real valued function of a Single real variable)

ধরা যাক্ বাস্তর সংখ্যার সেট R এর A এবং B দুটি অশূন্য উপ সেট। সেট A এবং B এর মধ্যে একটি সুনির্দিষ্ট সম্পর্ক f কে অপেক্ষক বলা হবে যদি সেট A-এর প্রতিটি পদ x-এর জন্য সম্পর্ক f-এর ভিত্তিতে B -এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি পদ y পাওয়া যায়। প্রতীক-এর মাধ্যমে,

$f : A \rightarrow B$

যাতে প্রতিটি $x \in A$ এর জন্য $y \in B$ হয় এবং $y = f(x)$.

y বা f(x) কে বলা হবে f-এর মাধ্যমে x-এর বিম্ব (Image).

সেট A-কে বলা হবে f-এর সংজ্ঞাঞ্চল (Domain) এবং

সেট B-কে বলা হয় f-এর সহ সংজ্ঞাঞ্চল (Co-domain).

সেট $\{f(x): \forall x \in b\}$ –কে বলা হবে বিম্বাঞ্চল বা বিস্তার (Range),

সংজ্ঞা থেকে পরিষ্কার, $f(A) \subseteq B$.

কার্যত অপেক্ষক একটি ত্রয়ী $f : D_f \rightarrow R_f$ যেখানে D_f হইল অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল এবং R_f হইল অপেক্ষকের বিস্তার। $D_f, R_f \subset R$। অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল একটি অন্তরাল, অন্তরাল সমূহের যোগ, বিচ্ছিন্ন বিন্দু সমূহের সেট (Discrete point set) সেট ইত্যাদি হতে পারে। কয়েকটি বাস্তব চলের অপেক্ষক, সংজ্ঞার অঞ্চল (D_f) ও ক্ষেত্রবিশেষে বিস্তার Rf দেওয়া হল ঃ

1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$f : A \to B$ যেখানে $f(x) = 2x + 1,\ x \in A$

$f(A) = \{3, 5, 7, 9\} \subset B$

2) $A = \{x \mid 1 \le x < 2\}, B = R$

$f: A \to B, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, অপেক্ষক নয় কেননা, $x = 1$ বিন্দুতে f সংজ্ঞাত নয়।

3) $f(x) = |x|\ ;\ D_f = R,\ R_f = [0, \infty)$

4) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}, D_f = R - \{0\}, R_f = \{-1, 1\}$

5) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, D_f = R - \{0\}$

6) $f(x) = \sqrt{\sin^{-1}\log_2 x},\ D_f = [1, 2], R_f = [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \ldots\ldots.$

(7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[(1-x)(x-2)]}}, D_f = (1, 2)$

মন্তব্য ঃ (1) অপেক্ষকদ্বয় $h_1(x): x \to \dfrac{x^2}{x}$ এবং $h_2(x) : x \to x$ এক নয়, $D_{h_1} = R - \{0\}$.

$D_{h_2} = R$

(2) অপেক্ষকদ্বয় $g_1(x) : x \to \sqrt{(1-x)}$ এবং $g_2(x) : x \to \sqrt{(1-x^2)}$ এক নয়।

$D_{g_1} = [-\infty, 1],\ D_{g_2} = [-1, 1]$

অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চলটি বিচার্য বিষয়।

4.3 অনুশীলনী-I

I. অপেক্ষকগুলির সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় করো ঃ

(1) $f_1(x) = \sqrt{\log_e \dfrac{5x - x^2}{4}}$

(2) $f_2(x) = \log_e \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4x + 6}$

(3) $f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\{|x| - x\}}}$

(4) $f_4(x) = \cos^{-1}\dfrac{3}{4 + 2\sin x}$

(5) $f_5(x) = \sqrt{\cos(\sin x)} + \sin^{-1}\dfrac{2x}{1 + x^2}$

(6) $f_6(x) = \dfrac{2x - 3}{\sqrt{(x^2 + 2x + 3)}}$

II. অপেক্ষকগুলির বিস্তার নির্ণয় করো।

(1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{2 - \cos 3x}$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

4.4 অপেক্ষকের কয়েকটি ভাগ

সম্পর্ক f টি কেমন, তার উপর নির্ভর করে অপেক্ষককে বিভিন্ন শ্রেণিতে ভাগ করা হয়।

$f : A \to B(A, B \subset R)$

(i) ধ্রুবক অপেক্ষক ঃ

f-কে ধ্রুবক অপেক্ষক বলা হবে যদি প্রতিটি $x \in A$-এর জন্য $f(x)$ = ধ্রুবক হয়।

$A = \{x \mid x$-বাস্তব সংখ্যা, $-1 < x < 1\}$

$B = R$

$f : A \to B$ যাতে, $f(x) = 0,\ x \in A$।

(ii) অভেদ অপেক্ষক ঃ f অপেক্ষকের অভেদ অপেক্ষক বলা হবে যদি, প্রতিটি $x \in A$ এর জন্য $f(x) = x$ হয়। উপরের A এবং B নিয়ে, $f : A \to R,\ f(x) = x,\ \forall x \in A$।

(iii) একৈক অপেক্ষক ঃ f অপেক্ষককে একৈক সম্বন্ধযুক্ত অপেক্ষক (one-to-one function) বলা হবে যদি যে কোন $x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$। এই অপেক্ষককে **ইনজেক্টিভ্** অপেক্ষকও বলা হয়।

$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{100}\},\ B = R$

$f : A \to R,\ f(x_i) = i,\ i = 1, 2, \ldots, 100.$

(iv) উপরিচিত্রণ অপেক্ষক ঃ অপেক্ষক $f : A \to B$-কে অনটু অপেক্ষক বলা হবে যদি যে কোন $y \in B$ এর জন্য A- একটি পদ x পাওয়া যায় যাতে, $y = f(x)$। এই অপেক্ষককে সারজেক্টিভ্ অপেক্ষকও বলা হয়।

$A = \{a, b, c, d\},\ B = \{1, 2, 3, 4\}$

$f : A \to B$ যাতে, $f(a) = 1,\ f(b) = 2,\ f(c) = 3,\ f(d) = 4.$

(v) বাইজেক্টিভ্ অপেক্ষক ঃ f-কে বাইজেক্টিভ অপেক্ষক বলা হবে যদি f অপেক্ষক 1-1 এবং অনটু অপেক্ষক হয়।

বাইজেক্টিভ্ = ইনজেক্টিভ্ + সারজেক্টিভ্।

(iv)-এর উদাহরণটি একটি বাইজেক্টিভ অপেক্ষক।

4.4.1 সংযোজক অপেক্ষক (Composite function)

ধরা যাক, $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow D$ দুটি অপেক্ষক এবং $f(A) \subset C$। এখন A এবং D এর মধ্যে একটি সম্পর্ক h পাওয়া যায় যেটি একটি অপেক্ষক হবে এবং f ও g-এর দ্বারা প্রকাশ করা যাবে,

$h : A \rightarrow D$

যাতে, $\forall x \in A$ এর জন্য, $h(x) = g(f(x))$ $(\because f(A) \subset C) = g.f(x)$

এক্ষেত্রে, $h = g.f$ অর্থাৎ, h-কে f ও g এর সংযোজক অপেক্ষক বলা হবে।

মনে করা যাক, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$C = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $D = R$

$f : A \rightarrow B$ যাতে, $f(x) = 2x + 1$, $\forall x \in A$

$g : C \rightarrow D$ যাতে, $g(x) = x^2$, $\forall x \in C$

এখন,

$f(A) = \{3, 5, 7, 9\} \subset C$

$g(C) = \{4, 9, 25, 49, 81, 121\}$

$\therefore$ $h : A \rightarrow D$ $(\equiv R)$

যাতে, $h(x) = (2x + 1)^2$, $\forall x \in A$

$\therefore$ $h(1) = 9 = 3^2 = g(3) = g(f(1))$; $h(2) = 25 = 5^2 = g(5) = g(f(2))$,

$h(3) = 49 = 7^2$

$=$ $g(7) = g(f(3))$, $h(4) = 81 = 9^2 = g(9) = g(f(4))$.

$h(A) = \{9, 25, 49, 81\}$.

4.4.2. বিপরীত অপেক্ষক (Inverse function)

$f : A \rightarrow B$ একটি 1-1 এবং অনটু অপেক্ষক হলে, একটি অপেক্ষক $g : B \rightarrow A$ পাওয়া যাবে যাতে $g(y) = x \in A$, যেখানে, $y \in B$ এবং $y = f(x)$.

$\therefore$ $g(f(x)) = x$ বা, $g.f(x) = x$, $\forall x \in A$

এখানে, g.f একটি অভেদ-অপেক্ষক এবং g অপেক্ষককে বলা হবে f অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক।

4.4.3 ক্রমবর্ধমান, ক্রমক্ষীয়মান, ক্রমান্বয়ী অপেক্ষক (Monotonically increasing, Monotonically decreasing, Monotonic function) :

$f : A \rightarrow B$ অপেক্ষকটি

(i) ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক যদি, $x_1, x_2 \in A$,

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

যথার্থ ক্রমবর্ধমান যদি, $x_1, x_2 \in A$,

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

(ii) ক্রমক্ষীয়মান অপেক্ষক যদি, $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

যথার্থ ক্রমক্ষীয়মান যদি, $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

(iii) ক্রমান্বয়ী অপেক্ষক যদি অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান বা ক্রমক্ষীয়মান হয়।

$f(x) = \sin x$ অপেক্ষকটি $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ অন্তরালে যথার্থ ক্রমবর্ধমান এবং $g(x) = \cos x$ অপেক্ষকটি $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ অন্তরালে যথার্থ ক্রমক্ষীয়মান অপেক্ষক।

4.4.4 যুগ্ম ও অযুগ্ম অপেক্ষক (Even and odd functions)

$f(x)$ অপেক্ষককে যুগ্ম অপেক্ষক বলা হবে যখন, $f(-x) = f(x),\ \forall x \in$ সংজ্ঞাঞ্চল।

$f(x) = \cos x$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক

$f(x)$ অপেক্ষককে অযুগ্ম অপেক্ষক বলা হবে যখন, $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in$ সংজ্ঞাঞ্চল।

$f(x) = \sin x$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

4.4.5 পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক (Periodic function)

অপেক্ষক f-কে পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক বলা হইবে যদি এমন কোন $T > 0$-এর অস্তিত্ব থাকে যাহার জন্য $f(x + T) = f(x),\ x + T \in D_f$, সিদ্ধ হবে। এই ধরনের T-এর অস্তিত্ব থাকিলে তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম T-কে অপেক্ষকের পর্যায়কাল বলা হয়। যেমন—$\sin x$, $\cos x$ হলো দুটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক যাদের পর্যায়কাল 2π, $\tan x$-এর পর্যায়কাল π, $\sin^4 x + \cos^4 x$-এর পর্যায়কাল $\pi/2$।

4.4.6 বহুপদ রাশি অপেক্ষক (Polynomial function)

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n,\ a_0 \neq 0$ একটি বহুপদ রাশির অপেক্ষক, যেখানে $a_0, a_1, \ldots, a_n$ সকলেই বাস্তব রাশি এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

4.5 সীমাবদ্ধ অপেক্ষক

$f : A \rightarrow R$ একটি অপেক্ষক, সংজ্ঞাঞ্চল $A \subset R$। অপেক্ষক f-কে সংজ্ঞাঞ্চলে সীমাবদ্ধ (bounded) বলা হবে যদি দুটি বাস্তব সংখ্যা m ও M পাওয়া যায় যাতে,

$$m \leq f(x) \leq M,\ \forall x,\ x \in A$$

m এবং M-কে যথাক্রমে $f(x)$-এর একটি নিম্ন ও ঊর্ধ্ব সীমা বলা হবে।

সংজ্ঞা থেকে পরিষ্কার, m-এর চেয়ে ছোট যে কোন বাস্তব সংখ্যা $f(x)$-এর নিম্নসীমা এবং M-এর

চেয়ে বড় যে কোন বাস্তব সংখ্যা f(x)-ঊর্ধ্বসীমা। f(x)-এর সমস্ত নিম্নসীমার মধ্যে বৃহত্তম এবং সমস্ত ঊর্ধ্বসীমার মধ্যে ক্ষুদ্রতম সীমার কথা ভাবা যায়।

অপেক্ষকের বৃহত্তম নিম্নসীমা (Greatest lower bound) ঃ বাস্তব সংখ্যা m-কে গরিষ্ঠ নিম্নসীমা বলা হবে যদি m অপেক্ষা বড় কোন নিম্নসীমা না থাকে।

(i) $f(x) \geq m$ সকল $x \in A$-এর জন্য

এবং (ii) যে কোন ধনাত্মক $\in > 0$-এর জন্য অণুষঙ্গী অন্তত একটি $x^1 \in A$ পাওয়া যাবে যাতে, $f(x^1) < m + \in$

অপেক্ষকের ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Least upper bound) ঃ

বাস্তব সংখ্যা M কে ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা বলা হবে যদি M অপেক্ষা ছোট কোন ঊর্ধ্বসীমা না থাকে।

(i) $f(x) \leq M$ যখন $x \in A$-এর জন্য

এবং (ii) যে কোন ধনাত্মক $\in > 0$-এর জন্য অন্তত একটি $x^1 \in A$ পাওয়া যাবে যাতে, $f(x^1) > M - \in$.

উদাহরণ ঃ

$$\begin{aligned} f(x) &= x,\ 0 \leq x < 2 \\ &= -1,\ x = 2 \\ &= x + 1,\ 2 < x \leq 3 \end{aligned}$$

এখানে, $f : [0, 3] \to R$ অপেক্ষকের বৃহত্তম নিম্নসীমা -1 এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা 4।

4.6 কোন বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমা-প্রারম্ভিক ধারণাসমূহ

একটি চলরাশি x যখন বাস্তব সংখ্যা a-এর খুব কাছাকাছি যায় কিন্তু কখনই a সমান হয় না তখন আমরা লিখি $x \to a$ (অর্থাৎ, "x tends to a") যেহেতু বাস্তব সংখ্যাগুলি একটি সরলরেখার বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাই চলরাশি x-এর a-এর দিকে চলন দুরকম হবে।

(i) x চলরাশিটি a থেকে ছোট মান নিয়ে a-এর দিকে যেতে পারে, যেটি সংকেতে $x \to a-$ এবং (ii) x চলরাশিটি a থেকে বড় মান নিয়ে a-এর দিকে যেতে পারে, যেটি সংকেতে $x \to a+$ লেখা হয়। এই দু ধরনের সীমাকে যথাক্রমে বামপক্ষীয় এবং ডানপক্ষীয় সীমা বলা হয়।

$y = f(x)$ অপেক্ষক-এ x স্বাধীন চলরাশি এবং y অধীন (x-এর উপর নির্ভরশীল) চলরাশি। তাই, x-এর মানের পরিবর্তনের সাথে y-এর মানের পরিবর্তন হবে। x-এর মানের পরিবর্তনের ফলে y-এর পরিবর্তন-এর ধরন বিশ্লেষণ করাটাই অবকলন শাস্ত্রের বিষয়বস্তু।

$\lim\limits_{x \to 2-}(x+2)$: { x যখন 2-এর বাম দিক থেকে 2-এর দিকে যাচ্ছে তখন (x + 2) এর মান 4-এর দিকে যাচ্ছে অর্থাৎ, $\lim\limits_{x \to 2-}(x+2) = 4$, ধরি $f(x) = x + 2$

x :	1·9	1·99	1·999	1·9999 $\longrightarrow$ 2
f(x) :	3·9	3·99	3·999	3·9999 $\longrightarrow$ 4

$\lim\limits_{x \to 2+}(x+2)$: $\left\{ \begin{array}{l} x \text{ যখন 2-এর ডান দিক থেকে 2-এর দিকে যাচ্ছে তখন } (x + 2) \text{ এর মান} \\ \text{4-এর দিকে যাচ্ছে অর্থাৎ, } \lim\limits_{x \to 2+}(x+2) = 4, \text{ ধরি } f(x) = x + 2 \end{array} \right.$

x :	2·001	2·0001	2·00001 $\longrightarrow$ 2
f(x) :	4·001	4·0001	4·00001 $\longrightarrow$ 4

এখানে, $\lim\limits_{x \to 2-}(x+2) = 4 = \lim\limits_{x \to 2+}(x+2)$

এক্ষেত্রে, বলা হবে $\lim\limits_{x \to 2}(x+2)$ এর অস্তিত্ব আছে

এবং $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

4.6.1 কোন বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমার সংজ্ঞা

মনে করি p একটি বাস্তব সংখ্যা এবং $1 = (p - \delta, p + \delta)$, p-এর একটি সামীপ্য (অবশ্যই $\delta > 0$ হবে)। মনে করি, $1 - \{p\}$, f-এর সংজ্ঞার অঞ্চলভুক্ত। তবে p বিন্দুতে f-কে সংজ্ঞাত করা যেতেও পারে।

আমরা বলি যে স্বাধীন চলরাশি x উক্ত p-এর দিকে ধাবিত হলে $(x \to p)$ f(x)-এর সসীম সীমা l থাকবে, যদি যদৃচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা $\in$-এর জন্য অনুষঙ্গী $\delta > 0$ পাওয়া যায় যে $l - \in < f(x) < l + \in$ হবে যখন $p - \delta < x < p$ ও $p < x < p + \delta$ হবে। অর্থাৎ $|f(x) - l| < \in$ হবে যখন $0 < | x - p | < \delta$ হবে। একে $\lim\limits_{x \to p} f(x) = l$ দ্বারা ব্যক্ত করা হয়।

এর অর্থ যদি $p - \delta < x < p$-এর ক্ষেত্রে $| f(x) - l_1| < \in$ হয় এবং $p < x < p + \delta$-এর ক্ষেত্রে $| f(x) - l_2 | < \in$ হয়, তবে $\lim\limits_{x \to p}$ f(x)-এর অস্তিত্বের জন্য $l_1 = l_2$ হতে হবে।

এক্ষেত্রে $\lim\limits_{x \to p-0} f(x) = l_1$ কে বামপক্ষীয় সীমা এবং $\lim\limits_{x \to p+0} f(x) = l_2$ কে ডানপক্ষীয় সীমা বলা হয়।

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ যদি f-এর সংজ্ঞার অঞ্চল বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল [a, b] হয় অর্থাৎ $f : [a, b] \to R$ হয়—

(ক) $\lim\limits_{x \to a}$ f(x)-এর অস্তিত্ব থাকবে যদি $\lim\limits_{x \to a+0}$ f(x)-এর অস্তিত্ব থাকে।

(খ) $\lim\limits_{x \to b}$ f(x)-এর অস্তিত্ব থাকবে যদি $\lim\limits_{x \to b-0}$ f(x)-এর অস্তিত্ব থাকে।

(গ) $a < c < b$ হলে $\lim\limits_{x \to c} f(x)$-এর অস্তিত্ব থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = \lim\limits_{x \to c+0} f(x)$ হয়।

উদাহরণ 1 ঃ $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

সমাধান ঃ ধরা যাক্ $\in > 0$ যে কোন একটি সংখ্যা।

$\because \ x \to 3 \Rightarrow x - 3 \neq 0$, বা, $|x - 3| > 0$ .... (i)

$\left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| = |x + 3 - 6| = |x - 3| > 0$ ((i) হইতে)

এখন, $\left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| < \in$ যদি, $|x - 3| < \in$ হয়।

এখানে, $\delta = \in$ পাওয়া গেল যাতে,

$\left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| < \in, \ \forall x, \ 0 < |x - 3| < \delta$

$\therefore \ \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

উদাহরণ-2 ঃ $\lim_{x \to 0} \times \sin \frac{1}{x} = 0$

সমাধান ঃ ধরা যাক্ $\in > 0$ যে কোন একটি সংখ্যা।

$x \to 0 \Rightarrow x \neq 0$ i.e., $|x| > 0$

এখন, $\left|x \sin \frac{1}{x} - 0\right| < \in$ যদি, $|x| < \in$ হয়।

$\therefore \ \in > 0$ এর জন্য একটি সংখ্যা $\delta > 0$ (এখানে $\delta = \in$) পাওয়া গেল যাতে,

$\left|x \sin \frac{1}{x} - 0\right| < \in, \ \forall x, \ 0 < |x| < \delta$

$\therefore \ \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

উদাহরণ 3 ঃ $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \ 0 \leq x < 1 \\ 4x + 1, 1 < x < 2 \\ 7x, x > 2 \end{cases}$

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে $\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} (2x + 3) = 5$ এবং $\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0}$ $(4x + 1) = 5$। মনে করি $\in$ যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা।

$|2x + 3 - 5| = 2|x - 1| = 2(1 - x) < \in$ অর্থাৎ $1 - x < \frac{\in}{2}$ অর্থাৎ

$1 - \frac{\in}{2} < x < 1$ হবে যখন $1 - \delta < x < 1, \ \delta = \frac{\in}{2}$ হয়।

$|4x+1-5| = 4|x-1| = 4(x-1) < \in$ অর্থাৎ $1 < x < 1+\frac{\in}{4}$ হইবে যখন $1 < x < 1+\delta$,

$\delta = \frac{\in}{4}$ হয়।

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 5 = \lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ এবং

এক্ষেত্রে $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} (4x+1) = 9$ এবং $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} 7x = 14$, অসমান। $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$-এর অস্তিত্ব নেই।

মনে করি $\in$ যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা।

$|4x + 1 - 9| = |4(x-2)| = 4(2-x) < \in$ অর্থাৎ $2 - x < \frac{\in}{4}$ অর্থাৎ $2-\frac{\in}{4} < x < 2$ হইবে যখন $2 - \delta < x < 2$, $\delta = \frac{\in}{4}$ হয়।

$|7x - 14| = 7(x-2) < \in$ অর্থাৎ $2 < x < 2 + \frac{\in}{7}$ হইবে যখন $2 < x < 2 + \delta$, $\delta = \frac{\in}{7}$ হয়।

4.6.2 অন্যান্য ক্ষেত্রে অপেক্ষকের সীমার গাণিতিক সংজ্ঞা

(I) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \text{ এবং } \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty\right)$ ঃ

যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা G, যত বড় হোক না কেন তার অণুষঙ্গী $\delta > 0$ সংখ্যা পাওয়া যাবে যার জন্য $|f(x)|\ G$, $\forall x$, $0 < |x-a| < \delta$.

$\Big[\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$-এর ক্ষেত্রে, $f(x) > G$, $\forall x$, $0 < |x-a| < \delta$ এবং $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$-এর ক্ষেত্রে, $-f(x) > G$, $\forall x$, $0 < |x-a| < \delta$ অর্থাৎ $f(x) < -G$, $0 < |x-a| < \delta\Big]$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} = \infty$ এবং $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} = \infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ কিন্তু, $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$-এর অস্তিত্ব নেই।

(II) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$

যে কোন $\in > 0$, যত ছোট হোক না কেন, এরজন্য একটি ধনাত্মক সংখ্যা M পাওয়া যাবে যাতে, $| f(x) - l | < \in, \ \forall x, \ x > M$

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (ii) $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

(III) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

যে কোন $\in > 0$, যত ছোট হোক না কেন, এর জন্য একটি ধনাত্মক সংখ্যা M পাওয়া যাবে যাতে, $| f(x) - l | < \in, \ \forall x, \ -x > M$ বা, $x < -M$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

অনুরূপে, (IV) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, (V) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, (VI) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ এবং (VII) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

সীমাগুলিরও গাণিতিক সংজ্ঞা পাওয়া যাবে।

4.7 বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমার বিভিন্ন ধর্ম

4.7.1 অপেক্ষকের সীমার বিভিন্ন ধর্ম

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = l$ হলে ‘a’-এর a-বর্জিত সামীপ্যের অস্তিত্ব থাকবে যেখানে f সীমাবদ্ধ অপেক্ষক হবে।

প্রমাণ ঃ ঐ সীমার অস্তিত্বের জন্য $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যার জন্য $| f(x) - l | < 1$ হবে যখন $0 < | x - a | < \delta$

ফলে $| f(x) | < 1 + | l |, \ 0 < | x - a | < \delta$

$1 + | l |$ একটি সসীম, সুনির্দিষ্ট সংখ্যা এবং $0 < | x - a | < \delta$ সামীপ্যে f(x) সীমাবদ্ধ।

(2) যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $\lim_{x\to a} g(x) = m$ হয় এবং ‘a’ বিন্দুর a-বর্জিত δ সামীপ্যে $f(x) < g(x)$ হয়, দেখাও যে, $l \le m$ হবে।

প্রমাণ ঃ যদি সম্ভব হয় মনে করি $l > m$ এবং $0 < \in < \frac{l - m}{2}$ ঐ $\in$-এর জন্য অণুষঙ্গী হিসাবে δ_1 ও δ_2, যেখানে $0 < \delta_1 < \delta$, $0 < \delta_2 < \delta$, পাওয়া যাবে যাতে

$| f(x) - l | < \in, \ 0 < | x - a | < \delta_1$ এবং $| g(x) - m | < \in, \ 0 < | x - a | < \delta_2$ হবে।

মনে করি, $\eta =$ অবম $\{\delta_1, \delta_2\}$। ফলে $0 < \eta < \delta$ এবং

$|f(x) - l| < \in, |g(x) - m| < \in$ যখন $0 < |x - a| < \eta$

অতএব $0 < |x - a| < \eta$-তে $l - \in < g(x) < f(x) < m + \varepsilon$ এবং ফলে $l - m < 2\varepsilon$— ইহা সম্ভব নয়। অতএব $l \leq m$

মন্তব্য ঃ $f(x) = 1 - x, x > 0$ এবং $g(x) = 1 + x, x > 0$

এক্ষেত্রে $f(x) < g(x)$ যখন $x > 0$, কিন্তু $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0+} g(x)$

সীমার অস্তিত্ব থাকলে একটি সমতার প্রশ্ন আছে।

(3) স্যাণ্ডুইচ ধর্ম ঃ মনে করি $f(x) < g(x) < h(x)$ যখন $0 < |x - a| < \delta$

$\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$ হলে $\lim_{x\to a} g(x) = l$ হবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি, $\varepsilon > 0$ যদৃচ্ছ সংখ্যা। ε-এর অণুষঙ্গী δ_1 ও δ_2, $0 < \delta_1, \delta_2 < \delta$ পাওয়া যাবে যার জন্য $|f(x) - l| < \varepsilon$ যখন $0 < |x - a| < \delta_1$, $|h(x) - l| < \varepsilon$ যখন $0 < |x - a| < \delta_2$

মনে করি $\eta =$ অবম $[\delta_1, \delta_2]$ অতএব $0 < |x - a| < \eta$-তে

$l - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < l + \varepsilon$ হবে।

সুতরাং $0 < |x - a| < \eta$ তে $|g(x) - l| < \varepsilon$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = l$ হইবে।

4.7.2 সীমার বীজগণিত ঃ

যদি, $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ হয় (l এবং m অবশ্যই সুনির্দিষ্ট সংখ্যা), তাহলে

(i) $\lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = l + m$

(ii) $\lim_{x\to a}\{f(x) - g(x)\} = l - m$

(iii) $\lim_{x\to a}\{f(x) \times g(x)\} = l \times m$

এবং (iv) $\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{l}{m}, m \neq 0$

প্রমাণ ঃ

(i) দেওয়া আছে $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ ধরি $\varepsilon > 0$ পূর্বনির্দিষ্ট যে কোন সংখ্যা। এই $\varepsilon > 0$-এর অণুষঙ্গী দুটি সংখ্যা $\delta_1 > 0$ এবং $\delta_2 > 0$ পাওয়া যাবে যাতে,

$|f(x) - l| < \varepsilon/2$, যখন, $0 < |x - a| < \delta_1$

$|g(x) - m| < \varepsilon/2$, যখন $0 < |x - a| < \delta_2$

ধরা যাক, $\delta =$ অবম (Min) $\{\delta_1, \delta_2\}$

$\therefore\ |f(x) - l| < \varepsilon/2$, এবং $|g(x) - m| < \varepsilon/2, \forall x, 0 < |x - a| < \delta$ (*)

এখন, $|\{f(x) + g(x)\} - (l + m)|$

$\leq |f(x) - l\} + |g(x) - m| < \varepsilon, \forall x, 0 < |x - a| < \delta.$

$\therefore \lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = l + m$

(ii) (i)-এর প্রমাণের (*) পর্যন্ত এক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

$|\{f(x) - g(x)\} - (l - m)| \leq |f(x) - l| + g(x) - m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \in, \forall x,$ $0 < |x - a| < \delta$

$\therefore \lim_{x\to a} \{f(x) - g(x)\} = l - m$

(iii) $|f(x)\, g(x) - l\, m| = |g(x)\, \{f(x) - l\} + l\{g(x) - m\}$

$\leq |g(x)|\, |f(x) - l| + |l|\, |g(x) - m|$ .... (1)

যেহেতু $\lim_{x\to a} g(x)$-এর অস্তিত্ব আছে, সুতরাং $\delta_1 > 0$-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য g অপেক্ষক $0 < |x - a| < \delta_1$-এ সীমাবদ্ধ হবে অর্থাৎ $k > 0$ থাকবে যার জন্য

$|g(x)| < k, 0 < |x - a| < \delta_1$ .... (2) হয়

মনে করি, $\in$ যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা। $\in$-এর অণুষঙ্গী হিসাবে $\delta_2 > 0$ পাওয়া যাবে যার ফলে $|f(x) - 1| < \frac{\in}{2k}, 0 < |x - a| < \delta_2$ ..... (3) উক্ত $\in$-এর অণুষঙ্গী হিসাবে $\delta_3 > 0$ পাওয়া যাবে যার ফলে

$|g(x) - m| < \frac{\in}{2(|1| + 1)}, 0 < |x - a| < \delta_3$ .... (4) হয়।

মনে করি, $\delta =$ অবম $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ । $0 < |x - a| < \delta$-এর জন্য, (2), (3) ও (4) সিদ্ধ হবে। সেক্ষেত্রে (1) থেকে পাই,

$|f(x)g(x) - lm| < k\frac{\in}{2k} + |l|\frac{\in}{2(|l| + 1)}, \forall x$ যাতে $0 < |x - a| < \delta$ হয়

অর্থাৎ যখন $0 < |x - a| < \delta$, $|f(x)\, g(x) - lm| < \in$ হবে।

অতএব $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = lm$ হবে।

(iv) $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| = \left|\frac{mf(x) - lg(x)}{mg(x)}\right| \leq \frac{|m||f(x) - 1| + 1||g(x) - m|}{|m||g(x)|}$ ...... (1)

যেহেতু $\lim_{x\to a} g(x) = m$, $\delta_1 > 0$-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য

$|g(x) - m| < \frac{|m|}{2}$ যখন $0 < + |x - a| < \delta_1$

অর্থাৎ $\frac{|m|}{2} < |g(x)| < \frac{3|m|}{2}$ হয় যখন $0 < |x - a| < \delta_1$ .... (2)

মনে করি, $\in$ যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা। ঐ $\in$-অণুষঙ্গী হিসাবে $\delta_2 > 0$ ও $\delta_3 > 0$ পাওয়া যাবে যার জন্য

$|f(x) - l| < \frac{\in|m|}{4}$, যখন $0 < |x - a| < \delta_2$ .... (3)

$|g(x) - m| < \frac{\in|m|^2}{4(|m|+1)}$, যখন $0 < |x - a| < \delta_3$ .... (4)

মনে করি, δ = অবম $[\delta_1, \delta_2, \delta_3]$।

ফলে $0 < |x - a| < \delta$-এর ক্ষেত্রে (2), (3), (4) সিদ্ধ হবে।

সেক্ষেত্রে $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| < \frac{\varepsilon|m|}{4|m|} + \frac{|l|,2}{|m|^2} \cdot \frac{\varepsilon|m|^2}{4(|m|+1)}$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon, \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m} \text{ হবে।}$$

(v) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ ও g সীমাবদ্ধ অপেক্ষক হলে $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = 0$ হবে।

প্রমাণ ঃ g সীমাবদ্ধ বলিয়া $\lambda\varepsilon R^+$-এর অস্তিত্ব আছে যাহাতে

$|g(x)| < \lambda$, সকল $x\varepsilon D_g$-এর জন্য।

মনে করি, ε যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা। ইহার অণুষঙ্গী $\delta > 0$ আছে যাহার জন্য $|f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$ হয় যখন $0 < |x - c| < \delta$, $x\varepsilon D_f$ সুতরাং $|f(x)\, g(x)| < \lambda. \frac{\varepsilon}{\lambda}$ যখন $0 < |x - c| < \delta$, $x\varepsilon D_f \cap D_g \Rightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) = \varepsilon$.

(vi) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$-এর অস্তিত্ব থাকলে, $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যার জন্য সকল $x \in N'(c, \delta) \cap d_f$-এর ক্ষেত্রে f সীমাবদ্ধ হবে ($N'(c, \delta)$ বলতে $0 < |x - c| < \delta$ বোঝায়)।

প্রমাণ ঃ এখন $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যার জন্য

$|f(x) - l|\ 1,\ 0 < |x - c| < \delta$ ও $x\varepsilon D_f$ $\left(\lim\limits_{x\to c} f(x) = l \text{ ধরা আছে}\right)$

$|f(x)| \le |f(x) - l| + |l|, < 1 + |l|,\ 0 < |x - c| < \delta,\ x\varepsilon D_t$। সুতরাং f উক্ত সামীপ্যে সীমাবদ্ধ।

উপপাদ্য ঃ $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ $(A, B, C \subset R)$ দুটি অপেক্ষক। যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

এবং $\lim\limits_{x\to a} g(y) = \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right) = g(b)$

প্রমাণ ঃ যেহেতু f-এর সহ-সংজ্ঞাঞ্চল এবং g-এর সংজ্ঞাঞ্চল একই সুতরাং g(f(x)) অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত।

$\because \lim\limits_{y \to b} g(y) = g(b)$, পূর্বনির্ধারিত যে কোন $\varepsilon > 0$-এর জন্য একটি $\delta_1 > 0$ পাওয়া যাবে যাতে,

$| g(y) - g(b) | < \varepsilon$ যখন, $0 < | y - b | < \delta_1$ .... (1)

আবার, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$-এর ক্ষেত্রে ঐ $\delta_1 > 0$-এর জন্য একটি $\delta_2 > 0$ পাওয়া যাবে যাতে,

$| f(x) - b | < \delta_1$ যখন, $0 < | x - a | < \delta_2$ .... (2)

এখানে, δ_2 সংখ্যাটি δ_1 তথা ε-এর উপর নির্ভরশীল।

$\therefore$ যে কোন, x, $0 < | x - a | < \delta_2$-এর জন্য

$| f(x) - b | < \delta_1 \Rightarrow | g(f(x)) - g(b) | < \in$

$\therefore \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)$

4.8 সীমার অস্তিত্বের ক্ষেত্রে কশির শর্ত (Cauchy's Criterion for the existence of a limit of a function) :

$x \to a$-এর জন্য একটি অপেক্ষক f(x) এর সীমার অস্তিত্বের যথেষ্ট এবং প্রয়োজনীয় (necessary and sufficient) শর্ত হলো যে কোন পূর্বনির্দিষ্ট $\varepsilon > 0$ (যত ছোট হোক না কেন) এর অনুষঙ্গী একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে, যার ক্ষেত্রে

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \ \forall x_1, x_2 \varepsilon D_f$ যেখানে, $0 < |x_1 - a| < \delta$ এবং $0 < |x_2 - a| < \delta$.

উদাহরণ 1 ঃ (i) কশির শর্ত অনুসারে দেখাও, $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$-এর অস্তিত্ব নেই।

সমাধান ঃ $\varepsilon > 0$ একটি যথেচ্ছ সংখ্যা। উক্ত সীমার অস্তিত্ব থাকলে $\varepsilon > 0$-এর অণুষঙ্গী একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে

যার ক্ষেত্রে $\left|\sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\right| < \varepsilon, \ \forall x_1, x_2 \varepsilon D_f, \ 0 < | x_1 - 0 | < \delta$ এবং $0 < | x_2 - 0 | < \delta$.

ধরুন, $\varepsilon = 1$ এবং খুব বড় n-এর জন্য—

$x_1 = \frac{2}{(4n-1)\pi}$ এবং $x_2 = \frac{2}{(4n+1)\pi}$

$\therefore x_1 \to 0$ এবং $x_2 \to 0$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore$ একটি $\delta_1 > 0$ পাওয়া যাবে, যাতে, $0 < | x_1 - 0 | < \delta_1$ এবং $0 < | x_2 - 0 | < \delta_1$.

এখন, $\left|\sin\frac{1}{x^2} - \sin\frac{1}{x_1}\right| = \left|\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi - \sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right|$

$= 2 > \varepsilon\ (= 1)$

$\therefore\ \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$-এর অস্তিত্ব নেই।

উদাহরণ 2 ঃ সংজ্ঞার দ্বারা দেখাও, $\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$

সমাধান ঃ $\varepsilon > 0$ একটি যে কোন সংখ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে এই ε-এর জন্য একটি $\delta > 0$ আছে যার ক্ষেত্রে

$|x^2 - 4|\ \varepsilon,\ \forall x,\ 0 < |x - 2| < \delta$

বা, $4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon,\ \forall x,\ 2 - \delta < x < 2 + \delta\ ;\ (x \neq 2)$

বা, $+\sqrt{4-\varepsilon} < x < +\sqrt{4+\varepsilon},\ \forall x,\ 2 - \delta < x < 2 + \delta\ ;\ (x \neq 2)$

ধরা যাক্, $2 - \delta = +\sqrt{4-\varepsilon}$ যার দ্বারা, $\delta = 2 - \sqrt{4-\varepsilon}$

এবং $2 + \delta = +\sqrt{4+\varepsilon}$ যার দ্বারা, $\delta = -2 + \sqrt{4+\varepsilon}$

$\therefore\ \delta =$ অবম (Min) $\left\{2 - \sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon} - 2\right\}$ হলে উপরের সত্যতা বিচার করা যায়।

উদাহরণ 3 ঃ দেখাও যে, $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ এর অস্তিত্ব নেই।

সমাধান ঃ $\varepsilon > 0$ একটি যে কোন সংখ্যা। যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে সেক্ষেত্রে এই ε-এর জন্য একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে, যার ক্ষেত্রে $0 < |x| \leq \delta$-**কে সিদ্ধ করে এমন দুটি** x-এর মান x_1, x_2-এর জন্য $\left|\cos\frac{1}{x_1} - \cos\frac{1}{x_2}\right| < \varepsilon$ হবে।

δ যাই হোক না কেন, খুব বড় ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য $x_1 = \frac{1}{2n\pi}$ এবং $x_2 = 1/(2n+1)\pi\ (n\varepsilon N)$ পাওয়া যাবে যাহারা $0 < |x| \leq \delta_1$-কে সিদ্ধ করে। কিন্তু

$$\left|\cos\frac{1}{x_1} - \cos\frac{1}{x_2}\right| = |\cos 2n\pi - \cos(2n+1)\pi| = 2$$

$\varepsilon = 1$ ধরিলে, $\left|\cos\frac{1}{x_1} - \cos\frac{1}{x_2}\right| > \varepsilon,\ \forall x,\ 0 < |x| \leq \delta_1$

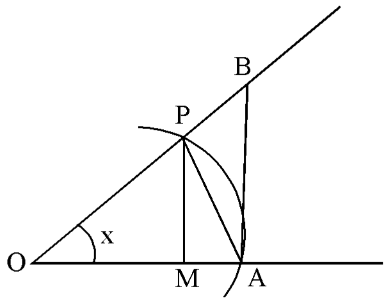
$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$-এর অস্তিত্ব নেই।

4.9 কয়েকটি স্ট্যান্ডার্ড সীমা

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

O বিন্দুকে কেন্দ্র ও 1 একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল।

$\angle AOP = x, \ O < x < \pi/2$



ΔOAP-এর ক্ষেত্রফল < ক্ষেত্র OAP-এর ক্ষেত্রফল $\angle$ ΔOAB-এর ক্ষেত্রফল

$\dfrac{1}{2}.1.1 \sin x < \dfrac{1}{2}.1.x < \dfrac{1}{2}.1.\tan x$ (যেহেতু OA = OP = 1 একক)

অতএব $\sin x < x < \tan x$

অর্থাৎ $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

যখন $x \to 0+, \ 1 \leq \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$

সুতরাং $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

মনে করি, $x < 0$, ধরি $x = -y, \ y > 0$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin y}{y} = 1$$

সুতরাং $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e (x \in R)$

সমাধান ঃ ধরা যাক, x-একটি ধনাত্মক সংখ্যা। প্রতিটি x-এর ক্ষেত্রে দুটি পরপর (consecutive) ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n, n + 1 পাওয়া যাবে, যার জন্য

$$n \leq x < n + 1$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

প্রত্যেকটি পদ > 1 এবং যেহেতু $n + 1 > x \geq n$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

যখন, $x \to \infty$ তখন $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$ এবং n, n + 1 ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$ (একক 2-এ প্রমাণ)।

$\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1, \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \to 1$ যখন $n \to \infty$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \geq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}$$

$$\therefore \quad e \leq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq e$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \text{..................} \text{(A)}$$

আবার ধরা যাক্, $x = -p$, যেখানে p ধনাত্মক বড় সংখ্যা।

$p \to \infty$ যখন, $x \to -\infty$.

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1+\frac{1}{(-p)}\right)^{(-p)} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} = \left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p}$$

$$= \left(1+\frac{1}{q}\right)^{q+1} \text{ (যেখানে, } q = p - 1)$$

$$= \left(1+\frac{1}{q}\right)^{q} . \left(1+\frac{1}{q}\right)$$

এখন, $p \to \infty$ হলে, $q \to \infty$

$$\therefore \quad \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{q\to\infty}\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q} . \left(1+\frac{1}{q}\right) = e.1 = e \text{ .... (B)}$$

(A) এবং (B) হতে,

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \text{ .... (C)}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (C)-এ $x = \frac{1}{y}$ বসালে, যখন, $x \to \pm\infty$ তখন $y \to 0$

$$\therefore \quad \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

(3) $\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = n.a^{n-1}$

সমাধান ঃ যখন, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n - a^n}{x-a}\right) = \lim_{x\to a}\underbrace{(x^{n-1} + x^{n-2}.a + \cdots + x.a^{n-2} + a^{n-1})}_{n\text{পদ}}$$

$$= n.a^{n-1}$$

যখন n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

ধরা যাক্ n = – m, m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n - a^n}{x-a}\right) = \lim_{x\to a}(-1)\left(\frac{x^m - a^m}{x^m.a^m(x-a)}\right) = \frac{-\lim_{x\to a}\frac{x^m - a^m}{x-a}}{\lim_{x\to a}x^m.a^m}$$

$$= \frac{-m.a^{m-1}}{a^{2m}} = -ma^{-m-1} = na^{n-1}$$

যখন n মূলদ ভগ্নাংশ।

ধরা যাক, $n = p/q$, $q \neq 0$, ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং p একটি পূর্ণসংখ্যা,

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{x^{p/q} - a^{p/q}}{x-a} = \frac{y^p - b^p}{y^q - b^q} \quad (\text{যেখানে, } x^{1/q} = y \text{ এবং } a^{1/q} = b)$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{y\to b}\frac{y^p - b^p}{y^q - b^q} \quad \text{যখন, } x \to a \text{ তখন, } y \to a^{1/q} = b$$

$$= \frac{\lim_{y\to b}\frac{y^p - b^p}{y-b}}{\lim_{y\to b}\frac{y^q - b^q}{y-b}} = \frac{p.b^{p-1}}{q.b^{q-1}} = \frac{p}{q}.b^{p-q}$$

$$= \frac{p}{q}.\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{q\left(\frac{p}{q}-1\right)} = \frac{p}{q}.a^{\frac{p}{q}-1} = n.a^{n-1}$$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1+x) = 1, (x > -1)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \log\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right\} = \log e = 1$$

$$= \log e = 1$$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

সমাধান ঃ ধরা যাক্ $e^x = 1 + z$ $\quad\therefore\;$ $x = \log(1+z)$, যখন $x \to 0$, তখন $z \to 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\log(1+z)}{z}} = \frac{1}{1} = 1$$

(6) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n, (x > -1)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{\log(1+x)}, \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{\log(1+x)}, \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

(যেহেতু দুটি সীমারই অস্তিত্ব আছে)

ধরা যাক্,

$(1 + x)^n - 1 = y$

$\therefore\; (1 + x)^n = 1 + y$

বা, $n \log(1 + x) = \log(1 + y)$

যখন, $x \to 0$ তখন $y \to 0$

এখন, $= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{\log(1+x)} = \lim_{y\to 0} \frac{n.y}{\log(1+y)}$

$$= n.\frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y}} = n$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$$

(7) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a (a > 0)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_e(y+1)}\log_e a$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\log_e a}{\left(\frac{\log(1+y)}{y}\right)} = \log_e a$$

$y = a^x - 1$ ধরে

যখন, $x \to 0$ তখন

$y \to 0$

$a^x = 1 + y$

$\therefore\ x = \frac{\log e^{(1+y)}}{\log e^a} = \log e^a$

(8) $\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - x}\right)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2-x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{+x}{x\left\{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right\}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{+1}{1\left\{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right\}} = +\frac{1}{2} \quad \left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0\right)$$

(9) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

(10) $\lim_{x\to\infty}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$

সমাধান ঃ

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = \lim_{\theta\to 0}\theta.\tan\left\{\frac{\pi}{2}(1-\theta)\right\} \begin{bmatrix}1-x=\theta\\ x\to 1,\ \theta\to 0\end{bmatrix}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\theta\cot\frac{\theta\pi}{2} = \lim_{\theta\to 0}\theta.\frac{\cos\frac{\pi\theta}{2}}{\sin\frac{\pi\theta}{2}}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \cot\frac{\pi}{2}\theta . \lim_{\theta\to 0} . \frac{\frac{\pi}{2}\theta}{\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi\theta}{2}\right)}$$ (যেহেতু দুটি সীমারই অস্তিত্ব আছে)

$$= \lim_{\theta\to 0} \cos\frac{\pi\theta}{2} . \lim_{\theta\to 0} \left\{ \frac{2}{\pi} . \frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi\theta}{2}}{\frac{\pi\theta}{2}}} \right\}$$

$$= 1 . \frac{2}{\pi} . 1 = \frac{2}{\pi}$$

(11) (i) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$, (ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

সমাধান : $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}}{3^n\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}}{\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}} = 3$$

$\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\text{যেহেতু } \frac{2}{3} < 1\right)\right]$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{x}{x^2} + \sqrt{\frac{x}{x^4}}}}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = \frac{1}{1} = 1 \left(\because \frac{1}{x} \to 0\right).$$

(12) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

সমাধান : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}}$ $\left[\begin{array}{l}\cos x = t^6 \text{ ধরা হলো} \\ \text{যখন, } x\to 0, \text{ তখন, } t\to 1\end{array}\right.$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^2(t-1)}{-\left(t^{12}-1\right)}=-\frac{\lim\limits_{t\to 1}t^2}{\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^{12}-1}{t-1}}$$

$$=-\frac{1}{12(1)^{12-1}}=-\frac{1}{12}\left(\because \lim_{t\to 1}\frac{t^{12}-1}{t-1}-12.1^{12-1}=12\right)$$

4.10 অনুশীলনী–II

1. $f: A\to B$ যেখানে, $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞাঞ্চল ও বিম্বাঞ্চল নির্ণয় কর ঃ
2. $f(x)=\log \sin x$, $\phi(x)=\log\cos x$ হলে প্রমাণ কর $e^{2f(x)}+e^{2\phi(x)}=1$
3. $\phi(x)=m\frac{x-l}{m-l}+l\frac{x-m}{l-m}$ হলে দেখাও যে $\phi(l)+\phi(m)=\phi(l+m)$
4. যদি $f(x)-\frac{|x|}{x}$ এবং $c\neq 0$ যে কোন বাস্তব সংখ্যা, দেখাও যে $|f(c)-f(-c)|=2$
5. নীচের সীমাগুলির অস্তিত্ব আছে কিনা বিচার কর :

   (i) $\lim_{x\to 2}[x]$ যেখানে, $[x]$ বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা যা x থেকে বড় নয়।

   (ii) $\lim_{x\to 1}\left\{x^2+\sqrt{x-1}\right\}$

   (iii) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\tan x}-1}{e^{\tan x}+1}$

   (iv) $\lim_{x\to 0}\left[\sin\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}+x^2\sin\frac{1}{x}\right]$
6. দেখাও যে,

   (i) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$, (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}=\frac{2}{3}$

   (iii) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=-\frac{1}{3}$, (iv) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-[x]}{x}=0$

[(iv)-এর সংকেত : $|[x] - x| < 1$, কারণ, $[x] - x$ **সর্বদা** $x > 0$ ক্ষেত্রে 0 এবং -1 এর মধ্যবর্তী হবে।]

7. দেখাও যে, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin x} = 1$ কিন্তু, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sin \frac{1}{x}}$ এর অস্তিত্ব নেই।

8. $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{(3x)} - 3}{\sqrt{(2x-4)} - \sqrt{2}}$

9. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{1}{4-x^2} \right)$

10. $\lim_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$

11. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(1+x) - \sin(1-x)}{x}$

12. $\lim_{x \to 0} x.\sqrt{\cot x}$

4.11 অপেক্ষক-এর সন্ততি

আমরা এখন এক বিশেষ সীমা $\lim_{x \to a} f(x) = l$-এর আলোচনা করব যেখানে a বিন্দুটি f(x)-এর সংজ্ঞাঞ্চলে থাকবে এবং $l = f(a)$ হবে অর্থাৎ, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ হবে। এক্ষেত্রে, f(x)-কে a বিন্দুতে সন্তত বলা হবে। এখন আমরা অপেক্ষক একটি বিন্দুতে এবং অন্তরালে সন্তত কিনা এবং সন্তত হলে বিশেষ কোন ধর্ম আছে কিনা আলোচনা করব।

4.11.1 একটি বিন্দুতে সন্ততি :

অপেক্ষক f(x) কে উহার সংজ্ঞার অঞ্চলভুক্ত $x = a$ বিন্দুতে সন্তত বলা হবে যদি $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ হয়।

অর্থাৎ, f(x) অপেক্ষক $x = a$ তে সন্তত হবে যদি যে কোন সংখ্যা $\in > 0$ এর জন্য এমন একটি সংখ্যা $\delta > 0$ পাওয়া যায় যে, $|f(x) - f(a)| < \in$ হয়, যখন $|x - a| < \delta$, (এখানে δ-এর মান a এবং $\in$ এর উপর নির্ভরশীল)।

উদাহরণ 1 : $f(x) = 3x + 1$, অপেক্ষকটি $x = 1$ বিন্দুতে সন্তত। কারণ, $f(1) = 4$ এবং $\lim_{x \to 1} f(x) = 3.1 + 1 = 4 = f(1)$

মন্তব্য :

অসন্তত : একটি অপেক্ষক f(x), x = a বিন্দুতে অসন্তত হবে যদি অপেক্ষকটি x = a বিন্দুতে সন্তত না হয়।

(1) $f : [0, 3] \to R$ নিম্নভাবে সংজ্ঞা আছে :

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & 0 \le x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ 4x+1, & 1 < x \le 2 \\ 2x+8, & 2 < x < 3 \\ 15, & x = 3 \end{cases}$$

এক্ষেত্রে $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} (3x+2) = 5$

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} (4x+1) = 5$

$f(1) = 5$

অতএব $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = f(1)$ এবং x = 1 বিন্দুতে f সন্তত।

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} (4x+1) - 9,\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} (2x+8) = 12$

সুতরাং সীমা দুটি অসমান, ফলে $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$-এর অস্তিত্ব নেই এবং f, x = 2 বিন্দুতে অসন্তত।

$\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-} (2x+8) + 14 \ne f(3,)$ সুতরাং x = 3 বিন্দুতে f সন্তত নয়।

(2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x \ne 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$

মনে করি ε যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা।

$|f(x) - f(0)| = \left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| \le |x| < \in$ যখন $|x| < \delta$, $\delta = \varepsilon$; সুতরাং f(x) অপেক্ষকটি x = 0 বিন্দুতে সন্তত।

(3) $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ ও $f(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \infty, x = 0$ বিন্দুতে f সন্তত নয়।

4.11.2 অন্তরালে অপেক্ষকের সন্ততি

মনে করি $f : [a, b] \to R$ সংজ্ঞাত আছে।

$f(x)$ অপেক্ষককে $[a, b]$ তে সন্তত বলা হবে, যদি নিচের শর্তগুলি একসাথে পূরণ হয় ঃ

(i) প্রতিটি $a < c < b$-এর ক্ষেত্রে $\lim_{x \to c-0} f(x) = \lim_{x \to c+0} f(x) - f(c)$ হয়

(ii) $f(x)$, $x = a$ তে ডানদিক থেকে সন্তত হয় অর্থাৎ, $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ এবং

(iii) $f(x)$, $x = b$ তে বামদিক থেকে সন্তত হয় অর্থাৎ, $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

4.12 একটি বিন্দুতে সন্তত অপেক্ষকের বীজগাণিতিক ও অন্য কিছু ধর্ম

ধর্ম-1. $f(x)$ এবং $g(x)$ অপেক্ষকদ্বয় $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হলে (i) $f(x) + g(x)$, (ii) $f(x) - g(x)$. (iii) $f(x).\ g(x)$. এবং (iv) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ অপেক্ষকগুলি $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হবে, যদিও একমাত্র (iv)-এর ক্ষেত্রে $g(a) \neq 0$ শর্ত আবশ্যিক।

প্রমাণ : যেহেতু $f(x)$ এবং $g(x)$ অপেক্ষয়দ্বয় $x = a$ বিন্দুতে সন্তত,

$\therefore\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ এবং $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$

এখন সীমার বীজগাণিতিক ধর্ম থেকে,

(i) $\lim_{x \to a}\{f(x) + g(x)\} = f(a) + g(a)$,

(ii) $\lim_{x \to a}\{f(x) - g(x)\} = f(a) - g(a)$,

(iii) $\lim_{x \to a}\{f(x), g(x)\} = f(a), g(a)$

এবং (iv) $g\ (a) \neq 0$ হলে, $\lim_{x \to a}\{f(x), g(x)\} = f(a), g(a)$

মন্তব্য : উক্ত ধর্মগুলি সসীম সংখ্যক সন্তত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে প্রয়োজ্য হবে।

ধর্ম-2. $y = f(x)$ অপেক্ষকটি $x = a$ তে সন্তত এবং $z = g(y)$ অপেক্ষকটি $y = b$ তে সন্তত। যদি $b = f(a)$ হয়, $z = g\ \{f(x)\}$ অপেক্ষকটি $x = a$ তে সন্তত হবে।

প্রমাণ : $z = g\ (y)$, $y = b$ তে সন্তত।

যে কোন $\in > 0$ এর জন্য একটি $\delta' > 0$ পাওয়া যায় যাতে,

$|g(y) - g(b)| < \in$ যখন, $|y - b| < \delta'$ ....(1)

আবার, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = b$

উক্ত $\delta' > 0$ এর জন্য একটি $\delta'' > 0$ পাওয়া যাবে, যাতে

$|f(x) - b| < \delta'$ যখন $|x - a| < \delta''$

অর্থাৎ, $|y - b| < \delta'$ যখন $|x - a| < \delta''$ ....(2)

$\therefore$ (1) এবং (2) হতে, $|g(y) - g(b)| < \in$ যখন, $|x - a| < \delta''$

বা, $|g(f(x)) - g(f(a))| < \in$ যখন, $|x - a| < \delta''$

$$\therefore \lim_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a))$$

$\therefore$ $z = g(f(x))$, $x = a$ তে সন্তত।

উদাহরণ :

$y = f(x) = \sin x$, $z = g(y) = e^y$

$y = \sin x$, যে কোন বাস্তব x-এ সন্তত।

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sin x = \sin a$$

আবার, $z = e^y$, যে কোন বাস্তব y-এ সন্তত।

$$\therefore \lim_{y \to \sin a} g(y) = e^{\sin a}$$

$$\therefore \lim_{x \to a} g\{f(x)\} = \lim_{x \to a} e^{f(x)} = \lim_{x \to a} e^{\sin x} = e^{\sin a}$$

ধর্ম-3. যদি অপেক্ষক $f(x)$, c বিন্দুতে সন্তত হয় এবং $f(c) \neq 0$ তাহলে একটি $\delta > 0$ এবং c-এর একটি সামীপ্য $(c - \delta, c + \delta)$ আছে যার সকল x-এর জন্য $f(x)$ ও $f(c)$-এর চিহ্ন একই হবে।

প্রমাণ : $f(x)$, $x = c$ তে সন্তত।

$\therefore$ যে কোন বাস্তব $\in$, $0 < \in < \dfrac{|f(c)|}{2}$, $f(c) \neq 0$ এর জন্য একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে, যাহাতে $f(c) - \in < f(x) < f(c) + \in$ যখন, $c - \delta < x < c + \delta$.

মনে করি $f(c) > 0$

$\therefore$ $\frac{1}{2} f(c) < f(x) < \frac{3}{2} f(c)$ যখন, $c - \delta < x < c + \delta$.

$\therefore$ $f(c) < 0$, $\therefore f(x) > 0$, $\forall x$, $c - \delta < x < c + \delta$.

আবার যদি, $f(c) < 0$ হয়,

$\frac{3}{2} f(c) < f(x) < \frac{1}{2} f(c)$ যখন, $c - \delta < x < c + \delta$

কিন্তু, $f(c) < 0$, $\therefore f(x) < 0$ যখন, $x \in (c - \delta, c + \delta)$

$\therefore$ $f(x)$, c বিন্দুতে হওয়ার জন্য c-এর একটি সামীপ্যে $f(x)$, $f(c)$ এর চিহ্ন ধরে রাখে।

ধর্ম-4. $f(x)$, $x = a$ তে সন্তত হলে $|f(x)|$, $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হবে।

প্রমাণ : $\in > 0$ এর জন্য একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যাতে,

$|f(x) - f(c)| < \in$ যখন, $|x - a| < \delta$

$||f(x)| - |f(a)|| \le |f(x) - f(a)| < \in$ যখন, $|x - a| < \delta$

$\therefore \lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|$

4.13 বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে সন্তত অপেক্ষকের ধর্ম

প্রমাণ ছাড়া ধর্মগুলি শুধু উল্লেখ করা হল ঃ

1. বোলজানোর (Bolzano's) উপপাদ্য ঃ

যদি অপেক্ষক $f(x)$, $[a, b]$ তে সন্তত এবং $f(a).f(b) < 0$ হয় তখন অন্তত একটি বিন্দু ξ, $a < \xi < b$ পাওয়া যাবে যেখানে $f(\xi) = 0$.

উদাহরণ : $f(x) = x^2 + x - 6$ অপেক্ষকটি $[0, 3]$ অন্তরালে সন্তত এবং $f(0).\ f(3) < 0$ এখানে, $\xi = 2$ এখন যে $f(\xi) = 0$.

2. অপেক্ষক f, $[a, b]$-তে সন্তত এবং $f(a) \neq f(b)$ হলে, যদি $f(a) < k < f(b)$ হয়, সেক্ষেত্রে অন্তত একটি বিন্দু $c \in (a, b)$ থাকবে যার জন্য $f(c) = k$ হবে।

3. $f(x)$ অপেক্ষক $[a, b]$ তে সন্তত হলে $f(x)$ অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ হবে এবং ঐ অন্তরালে অপেক্ষকটি তার ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা এবং বৃহত্তম নিম্নসীমার মান ধারণ করবে।

উদাহরণ : $f(x) = |x|$, $[-1, 1]$ তে সন্তত।

আবার, $[-1, 1]$ তে সমস্ত x-এর জন্য $0 \le |x| \le 1$, এখানে, $f(x)$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা হল যথাক্রমে O এবং 1, এখন, $f(0) = 0$, $f(1) = 1 = (f-1)$

4. যদি অপেক্ষক $f(x)$, $[a, b]$ তে সন্তত হয় এবং $f(a)$ ও (b) এর মধ্যবর্তী মানগুলি অপেক্ষক $f(x)$এর মান আকারে একবার মাত্র পাওয়া যায়, তাহলে অপেক্ষকটি $[a, b]$ অন্তরালে যথার্থ ক্রমান্বয়ী (Strictly Monotonic) অপেক্ষক হবে।

4.14 বিপরীত অপেক্ষকের অস্তিত্ব এবং সন্ততি

যদি সন্তত অপেক্ষক $f(x)$ বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে যথার্থ ক্রমবর্ধমান (বা ক্রমক্ষীয়মান) হয় তখন y

= f(x) সংজ্ঞায়িত করে একটি বিপরীত অপেক্ষক $x = \phi(y)$ যেটি $[f(a), f(b)]$ অন্তরালে সন্তত এবং যথার্থ ক্রমবর্ধমান (বা, ক্রমক্ষীয়মান) হবে।

উদাহরণ : $x = \sin y$ অপেক্ষকটি y-এর সকল বাস্তব মানের জন্য সন্তত এবং ইহার মান $[-1, 1]$ এর মধ্যে থাকে। বিপরীত অপেক্ষকটি $y = \sin^{-1} x$, x-এর প্রতিটি মানের জন্য y-এর অসংখ্য মান পাওয়া যায় যাতে, $x = \sin y$ হয়। $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ সংজ্ঞাঞ্চলটি বিবেচনা করা হলো। এই সংজ্ঞাঞ্চলে x সন্তত এবং y-এর যথার্থ ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক যাতে সন্তত, যথার্থ ক্রমবর্ধমান একটি বিপরীত অপেক্ষক $y = \sin^{-1} x$ পাওয়া যায়।

4.15 অপেক্ষকের অসন্ততির প্রকার ভেদ

কোন বিন্দুতে অপেক্ষকের অসন্ততিতে মূলত দুটি ভাগ ভাগ করা যায় ঃ

1) বামপক্ষীয় সীমা $\lim\limits_{x \to c-0} f(x)$ ও ডানপক্ষীয় সীমা $\lim\limits_{x \to c+0} f(x)$ উভয়েরই অস্তিত্ব আছে, কিন্তু

(ক) সীমা দুটি অসমান ঃ $x = c$ বিন্দুতে অপেক্ষকের উল্লম্ফন অসন্ততি (Jump discontinuity) আছে বলা হয়।

(খ) সীমা দুটি পরস্পর সমান কিন্তু ঐ সীমার মান f(c)-এর সঙ্গে সমান নয় : $x = c$ বিন্দুতে অপেক্ষকের দূরণীয় অসন্ততি (Removable discontinuity) আছে বলা হয়।

এই দুই ধরনের অসন্ততিকে এককথায় প্রথম প্রকারের অসন্ততি বলা হয়।

4.11-এর উদাহরণ 1-এ $x = 2$ বিন্দুতে অপেক্ষকের উল্লম্ফন অসন্ততি এবং $x = 3$ বিন্দুতে অপেক্ষকের দূরণীয় অসন্ততি আছে।

(2) বামপক্ষীয় সীমা বা ডানপক্ষীয় সীমা দুটিরই অথবা কোন একটির অস্তিত্ব নেই—এগুলিকে দ্বিতীয় প্রকারের অসন্ততি বলা হয়।

যদি সীমাটি $+\infty$ বা $-\infty$ হয়, তবে সংশ্লিষ্ট বিন্দুতে অসীম অসন্ততি আছে বলা হয়। 4.11-এর উদাহরণ 3-এ $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকের অসীম অসন্ততি আছে।

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ বিন্দুতে দ্বিতীয় প্রকারের অসন্ততি আছে কেননা $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ ও $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ কোনটিরই অস্তিত্ব নাই, কিন্তু অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ।

4.16 কয়েকটি বিশেষ ধরনের অপেক্ষকের প্রকৃতি

1) বহুপদরাশি $x \to a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ সকল $x \in R$-এর জন্য সন্তত $(a_0, a_1 \ldots a_n \in R)$

2) মূলদ অপেক্ষক $x \to \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + bm}$, x-এর সেই সমস্ত বাস্তব মানের জন্য সন্তত যাহাদের ক্ষেত্রে $b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots b_m \neq 0$, সকল সহগ বাস্তব।

3) sinx, cosx অপেক্ষকদ্বয় সকল $x \in R$ -এর জন্য সন্তত। tanx, secx সকল $x \neq (2n-1)\frac{\pi}{2} (n \in z)$ -এর জন্য সন্তত। cotx, cosecx সকল $x \neq n\pi$ $(n \in z)$-এর জন্য সন্তত।

4) $x \to a^x$, $a > 0$ সকল $x \in R$-এর জন্য সন্তত। $x \to e^x$ সকল $x \in R$-এর জন্য সন্তত।

5) $x \to \log_e x$, $\cos^{-1}x$ অপেক্ষকটি $0 < x < 00$ -এর জন্য সম্ভব।

6) $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1} x$ অপেক্ষকদ্বয় $[-1, 1]$-এ সন্তত।

$\tan^{-1}x$, $\sec^{-1} x$ অপেক্ষকদ্বয় $(-\infty, \infty)$-এ সন্তত।

$\cot^{-1}x$, $\mathrm{cosec}^{-1} x$ অপেক্ষকদ্বয় $(-\infty, \infty)$-এ সন্তত।

7) ক্রমান্বয়ী অপেক্ষক সন্তত ও অসন্তত উভয়ই হতে পারে। কিন্তু ক্রমান্বয়ী অপেক্ষকের কোন বিন্দুতে অসন্ততি থাকলে তা কখনোই দ্বিতীয় প্রকারের অসন্ততি হবে না।

4.17 সন্তত অপেক্ষকের উদাহরণ

উদা.-1. অপেক্ষক $f(x) = x$ যখন $0 < x < 1$

$= 2 - x$ যখন $1 \leq x \leq 2$

$= x - \frac{1}{2}x^2$ যখন $x > 2$

$x = 2$ তে সন্তত।

সমাধান : $f(2) = 2 - 2 = 0$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (2-x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2)$$

$\therefore$ f(x), $x = 2$ তে সন্তত।

মনে করি, $\varepsilon > 0$ যদৃচ্ছ সংখ্যা। $|f(x) - f(2)| = |2 - x - 0| = 2 - x < \varepsilon$ যখন $0 < 2 - x < \delta$, $\delta = \varepsilon$

অতএব, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = 0$

$$\left|f(x) - f(2)\right| = \left|x - \frac{x^2}{2} - 0\right| = \frac{x}{2}(x-2) < \frac{3}{2}(x-2) < \in$$

যখন $2 < x <$ অবম $\left\{\frac{3}{2}, \frac{2\in}{3}\right\} + 2$

উদা.-2. $f(x) = \dfrac{x^4 + 4x^2 + 2x}{\sin x}, x \neq 0$

$= 0 \qquad x = 0.$

অপেক্ষকটি $x = 0$ তে অসন্তত।

সমাধান : $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{x^4 + 4x^3 + 2x}{\sin x} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^3 + 4x^2 + 2}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x^4 + 4x^3 + 2x}{\sin x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^3 + 4x^2 + 2}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 \neq f(0)$

$\therefore$ $f(x)$, $x = 0$-তে সন্তত নহে।

উদা.-3. $f(x) = x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right), x \neq 0, f(0)$ এর মান কত হলে অপেক্ষকটি $x = 0$ তে সন্তত হবে।

সমাধান : এখানে $f(x) = x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right). x \neq 0$

x-এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য, $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1$

যখন $x > 0$, $-x \leq x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq x$

বা, $0=\lim_{x\to 0+}(-x)\le \lim_{x\to 0+} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\le \lim_{x\to 0+} x=0$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0+} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=0$$

যখন, $x<0, x\le x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\le -x$

বা, $0=\lim_{x\to 0-} x\le \lim_{x\to 0-} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\le \lim_{x\to 0-}(-x)=0$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0-} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=0$$

$x=0$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটি সন্তত হবে, যদি, $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=0-f(0)$

$\therefore$ $f(0)=0$ হলে, $f(x)$, $x=0$ -তে সন্তত হবে।

উদা.-4. যে বিন্দুগুলিতে অপেক্ষক $f(x)=\frac{1}{\log|x|}$ অসন্তত, সেগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান : $x=0$-তে অপেক্ষক সংজ্ঞায়িত নয়। $\therefore$ $x=0$-তে $f(x)$ অসন্তত।

আবার, $\log|x|=0$ যখন, $x=\pm 1$. $\therefore$ $x=-1$ এবং 1-তে $f(x)$ অসন্তত।

$\therefore$ $x=-1$, 0 এবং 1 বিন্দুগুলিতে $f(x)$ অসন্তত।

4.18 অনুশীলনী–III

1. $f(x)=\frac{x^4+3x^3+5x^2}{\sin x}, x\ne 0$

$\quad = 0 \qquad , x=0$

এবং $g(x)=\frac{x^4+3x^3+5x^2+4x}{\sin x}, x\ne 0$

$\quad = 0 \qquad , x=0$

দেখাও যে, $f(x)$, $x=0$ তে সন্তত কিন্তু $g(x)$ সন্তত নহে।

2. $f(x)=\frac{\sin(a^2x^2)}{x}, x \neq 0, a \neq 0$

$\quad = k \qquad\qquad , x = 0$

k-এর মান নির্ণয় কর যাতে f(x), x = 0 তে সন্তত হয়।

3. $f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}, x \neq 0$

$\quad = e^2 \qquad , x = 0$

দেখাও যে, f(x), x = 0 তে সন্তত।

4. $f(x) = [x] + [-x]$, x = 0-তে সন্তত কিনা পরীক্ষা কর।

5. দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 3x + 1$, x-এর যেকোন মানে সন্তত।

সন্ততার ধর্ম থেকে প্রমাণ কর $x^2 - 3x + 1 = 0$-এর একটি বীজ 1 এবং 2-এর মধ্যে অবস্থিত।

6. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}, x \neq 0$

$\quad = 9 \qquad , x = 0$

দেখাও যে, f(x), x = 0 বিন্দুতে অসন্তত। এই অসন্ততটি কোন শ্রেণীভুক্ত।

7. $f(x)=\frac{x^3+2x+5}{x^2-8x+12}$ অপেক্ষকের অসন্তত বিন্দুগুলি নির্ণয় কর। [উত্তর : 2 এবং 6]

4.19 সহায়ক গ্রন্থ এবং ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ

ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ :

একচল — Single variable

বাস্তব সংখ্যা — Real number

অপেক্ষক — Function

সংজ্ঞাঞ্চল — Domain

সহ-সংজ্ঞাঞ্চল — Co-domain

বিস্তার/বিম্বাঞ্চল — Range

ধ্রুবক — Constant

অভেদ — Identity

উপরিচিত্রণ/অনুট অপেক্ষক — Onto function

ইনটু অপেক্ষক — Into function

বাইজেক্‌টিভ্‌ অপেক্ষক — Bijective function

সংযোজক — Composite

একৈক/ইনজেক্‌টিভ — Injective

সারজেক্‌টিভ — Surjective

বিপরীত অপেক্ষক — Inverse function

ক্রমবর্ধমান — Monotone increasing

ক্রমক্ষীয়মান — Monotone decreasing

ক্রমান্বয়ী — Monotonic/Monotone

যথার্থ ক্রমান্বয়ী — Strictly Monotonic

যুগ্ম অপেক্ষক — Even function

অযুগ্ম অপেক্ষক — Odd function

পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক — Periodic function

বহুপদ রাশি অপেক্ষক — Polynomial function

অপেক্ষক-এর সীমা — Bounds of a function

বৃহত্তম নিম্নসীমা — Greatest lower bound

ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা — Least upper bound

সীমা — Limit

বামপক্ষীয় সীমা — Left hand limit

ডানপক্ষীয় সীমা — Right hand limit

যদৃচ্ছ — Arbitrary

বর্জিত সামীপ্য — Deleted neighbourhood

স্যান্ডুইচ উপপাদ্য — Sandwich Theorem

সন্ততি — Continuity

সন্তত — Continuous

অসন্ততি — Discontinuity

দূরনীয়/অপসারণযোগ্য অসন্ততি — Removable discontinnuity

উল্লম্ফন অসন্ততি — Jumps discontinuity

সসীম অসন্ততি — Finite discontinuity

সীমাবদ্ধ — Bounded

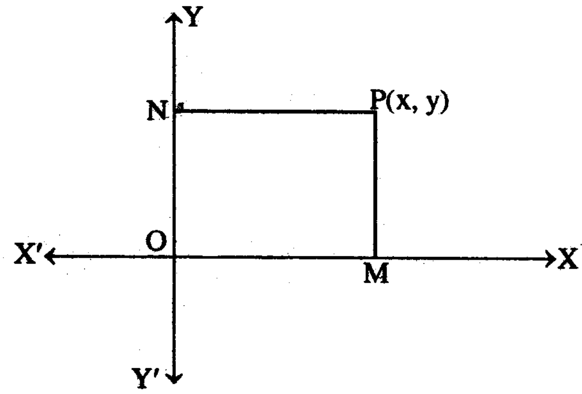
সহায়ক গ্রন্থ

Differential Calculus — Shantinarayan

Calculus of One Variable — Maron (CBS Publishers)

4.20 পরিশিষ্ট ঃ লেখচিত্র

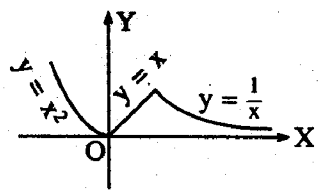
মনে করি, f(x) অপেক্ষকটি [a, b] অন্তরালে সংজ্ঞাত আছে। [a, b] অন্তরালের প্রতিটি x-এর জন্য বাস্তব সংখ্যা f(x) পাওয়া যায়। অপেক্ষকটিকে লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করিবার জন্য দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা X′OX ও Y′OY নেওয়া হ'ল, যাদের স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় দ্বারা অভিহিত করা যায়।



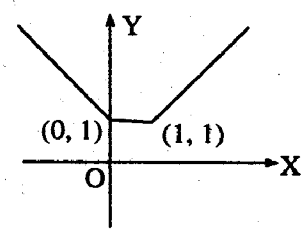
OMPN আয়তক্ষেত্রের P বিন্দুটি (x, f(x)) বা (x, y)-কে নির্দিষ্ট করে। [a, b] অন্তরালে x-এর সম্ভাব্য সকল মানের জন্য (x, y) বিন্দুগুলির সেটকে উক্ত অপেক্ষক f-এর লেখচিত্র বলা হয়।

কয়েকটি অপেক্ষকের লেখচিত্র :

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2, x < 0 \\ x, 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}, x > 1 \end{cases}$

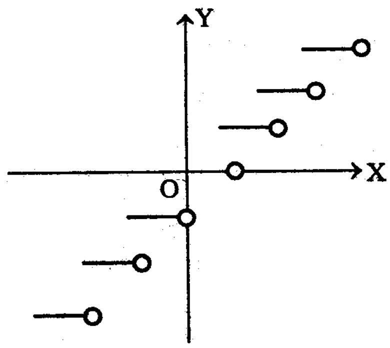


(2) $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, -\infty < x \le 0 \\ 1, 0 < x \le 1 \\ 2x - 1, 1 < x < \infty \end{cases}$



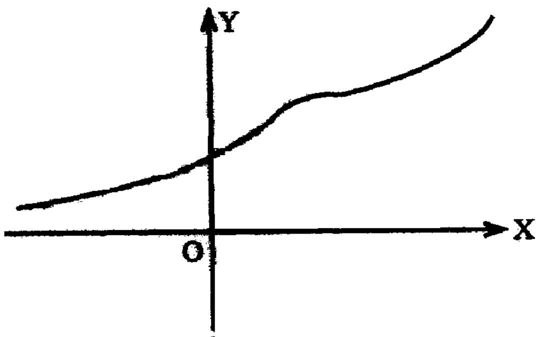
(3) $f(x) = [x],\ x \geq 0$

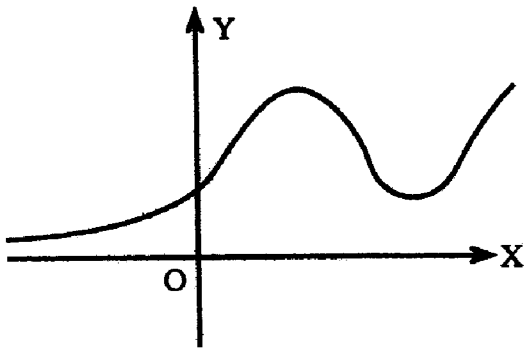
$$f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, 1 \leq x < 2 \\ 2, 2 \leq x < 3 \\ 3, 3 \leq x < 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$



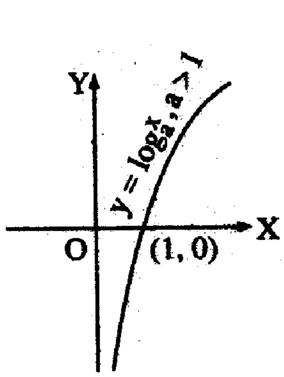
দক্ষিণ প্রান্তস্থ 0 চিহ্নিত বিন্দুগুলি লেখচিত্রের উপরিস্থ নয়।

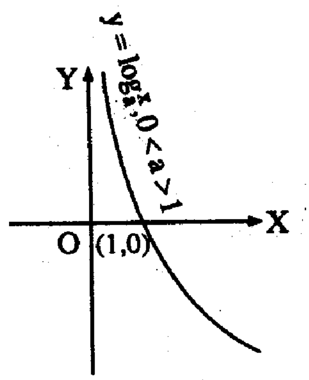
(4) একৈক অপেক্ষকের লেখচিত্র : $y = f(x)$ আকারের অপেক্ষকটি একৈক হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাগুলি অপেক্ষকের লেখচিত্রকে একের বেশি সংখ্যক বিন্দুতে ছেদ না করে।



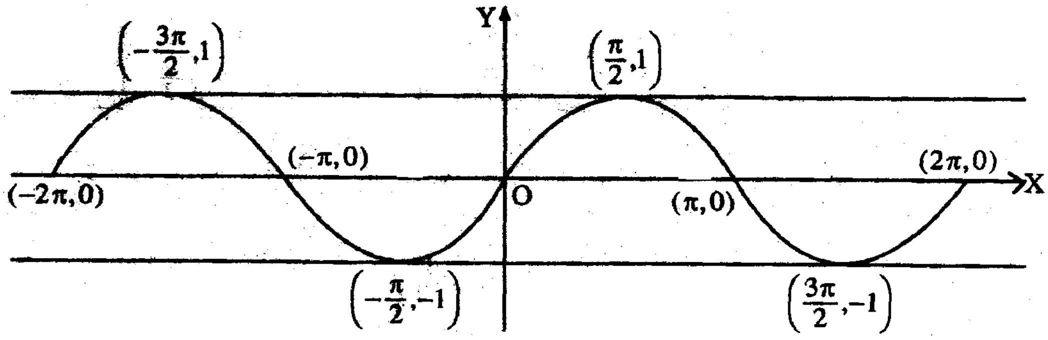


(5) $x \rightarrow \log_a x,\ a > 0.$

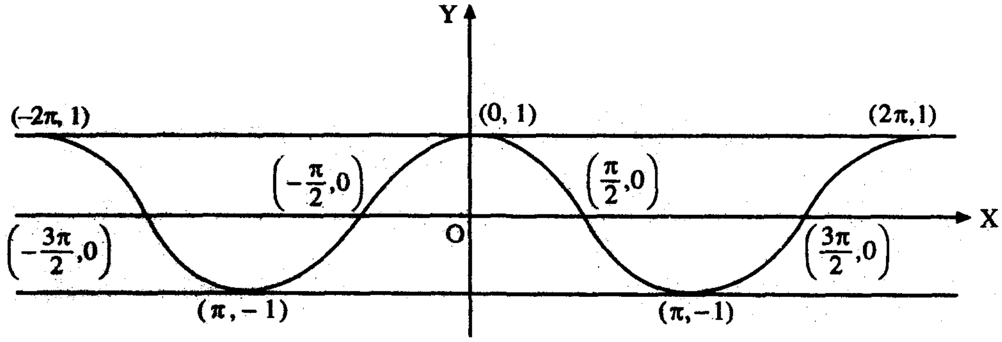




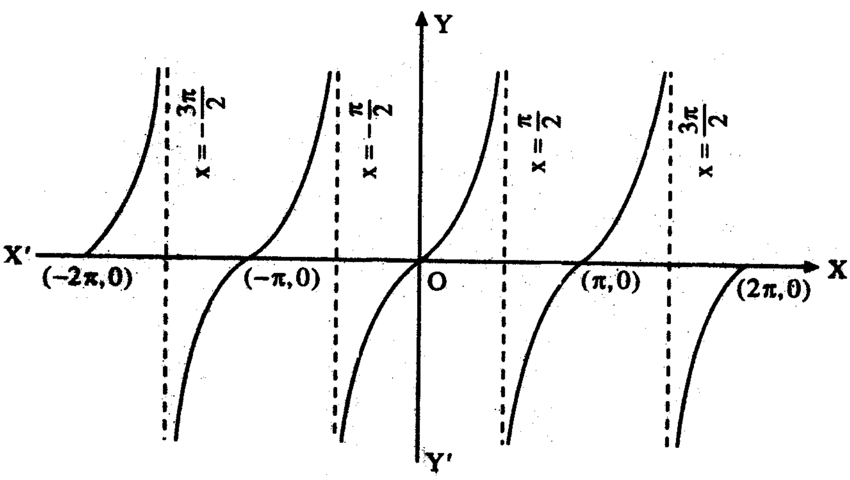
(6) $x \to \sin x$, সংজ্ঞাঞ্চল R, বিস্তার বা বিম্বাঞ্চল $[-1, 1]$.



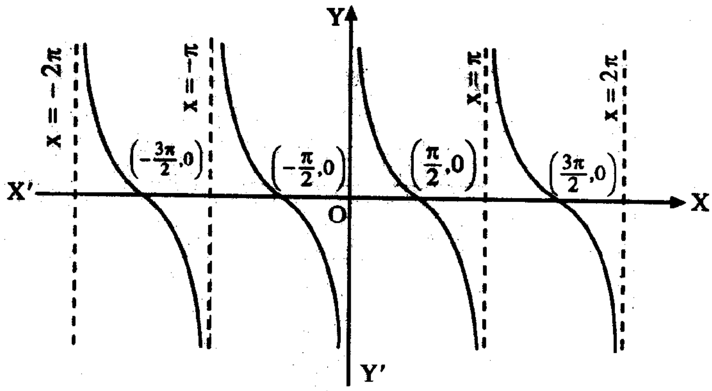
(7) $x \to \cos x$, সংজ্ঞাঞ্চল R, বিস্তার $[-1, 1]$



(8) $x \to \tan x$, সংজ্ঞাঞ্চল $R - \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \ldots\ldots\right\}$, বিস্তার $(-\infty, \infty)$.

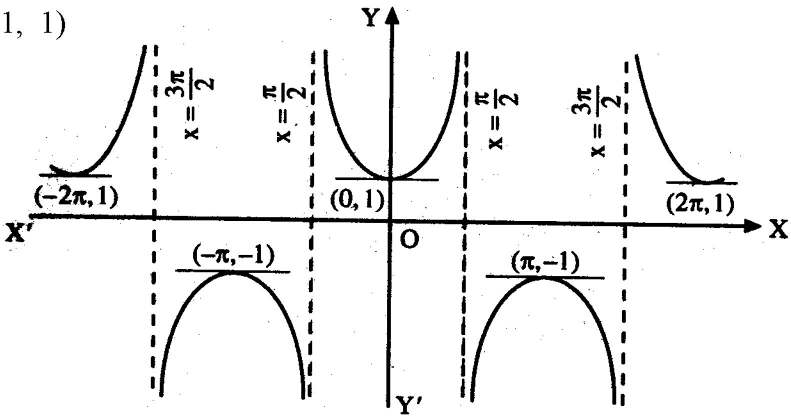


(9) $x \to \cot, x$, সংজ্ঞাঞ্চল $R - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, ...\}$ বিস্তার $(-\infty, \infty)$.

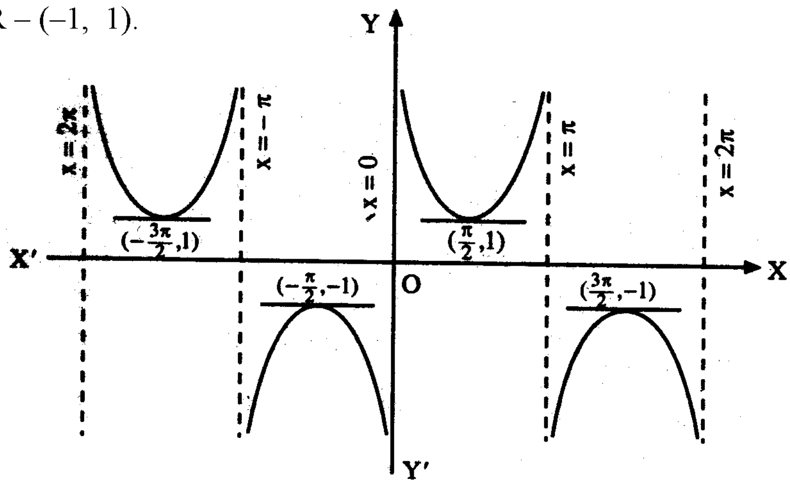


(10) $x \to \sec x$, সংজ্ঞাঞ্চল $R - \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, ...\right\}$ বিস্তার $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

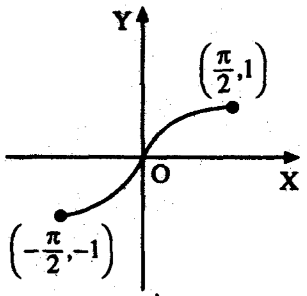
অর্থাৎ $R - (-1, 1)$



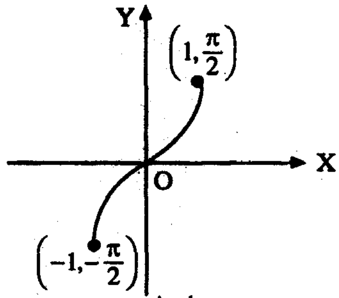
(11) $x \to \text{cosec}, x$, সংজ্ঞাঞ্চল $R - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, ...\}$ বিস্তার $(-\infty, -1] \cup$
$[1, \infty)$ বা $R - (-1, 1)$.



(12) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ হইতে পাই $x = \sin^{-1} y$, $y \in [-1, 1]$.

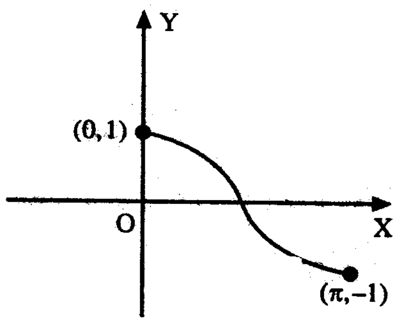


$y = \sin x$

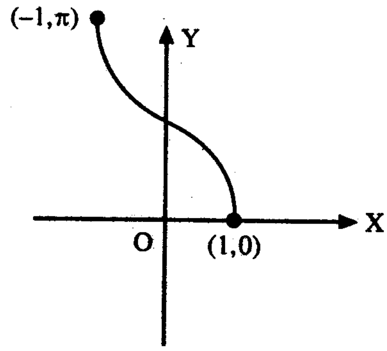


$y = \sin^{-1} x$

(13) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \cos x \Leftrightarrow x = \cos^{-1} y;\ x \in [0, \pi],\ y \in [-1, 1]$.

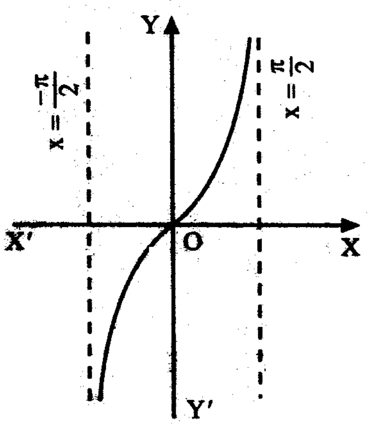


$y = \cos x$

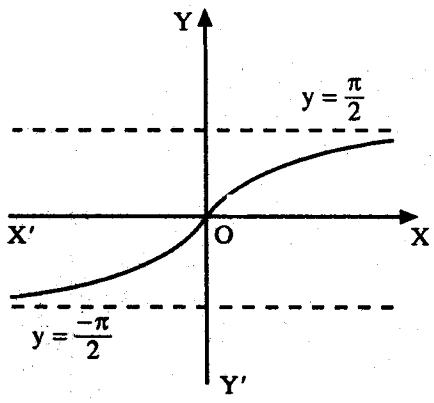


$y = \cos^{-1} x$

(14) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \tan x \Leftrightarrow x = \tan^{-1} y;\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ y \in (-\infty, \infty)$.

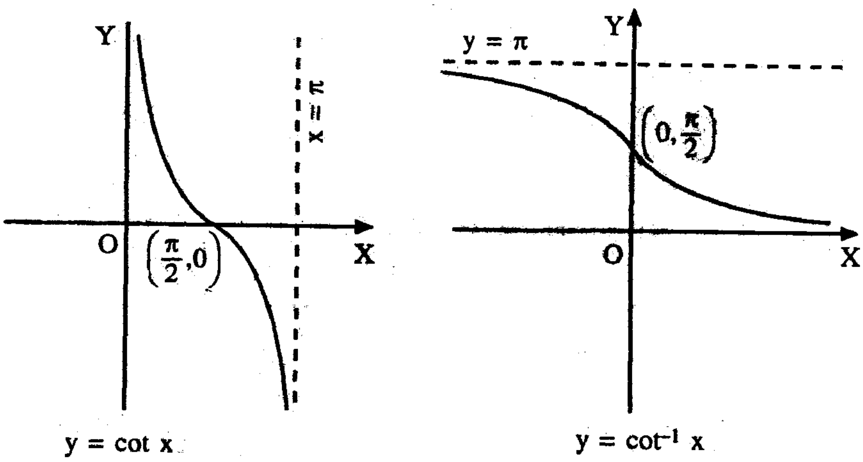


$y = \tan x$

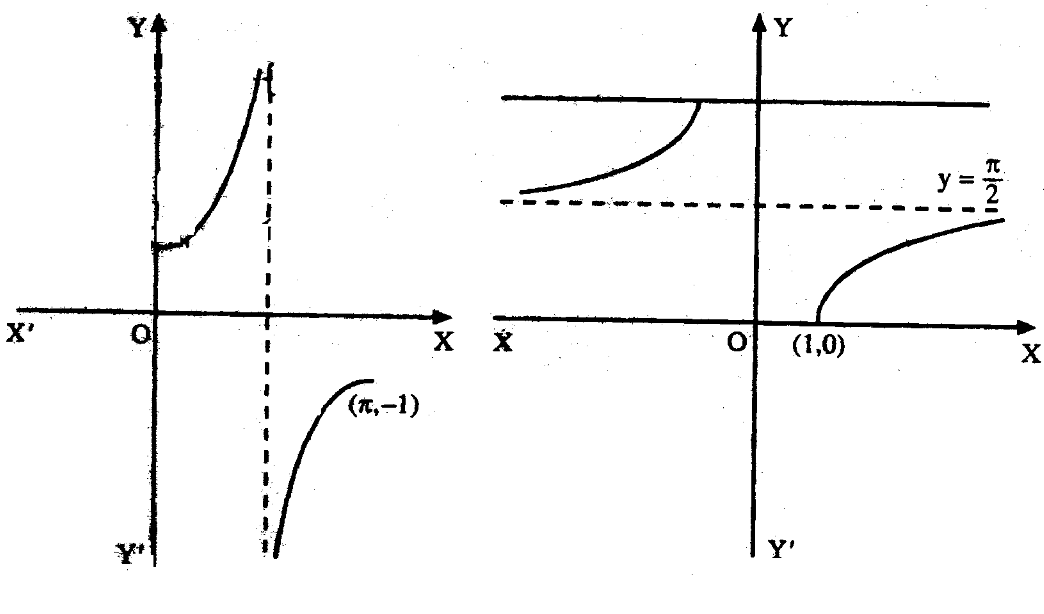


$y = \tan^{-1} x$

(15) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \cot x \Leftrightarrow x = \cot^{-1} y$; $x \in (0, \pi)$, $y \in (-\infty, \infty)$.

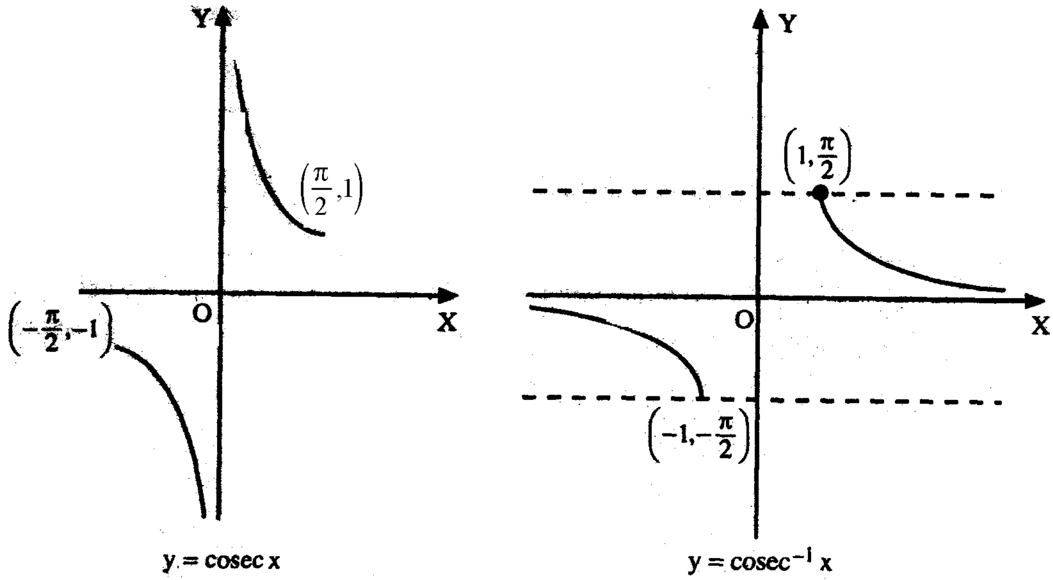


(16) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \sec x \Leftrightarrow x = \sec^{-1} y$; $\in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $y \in R - (-1, 1)$.

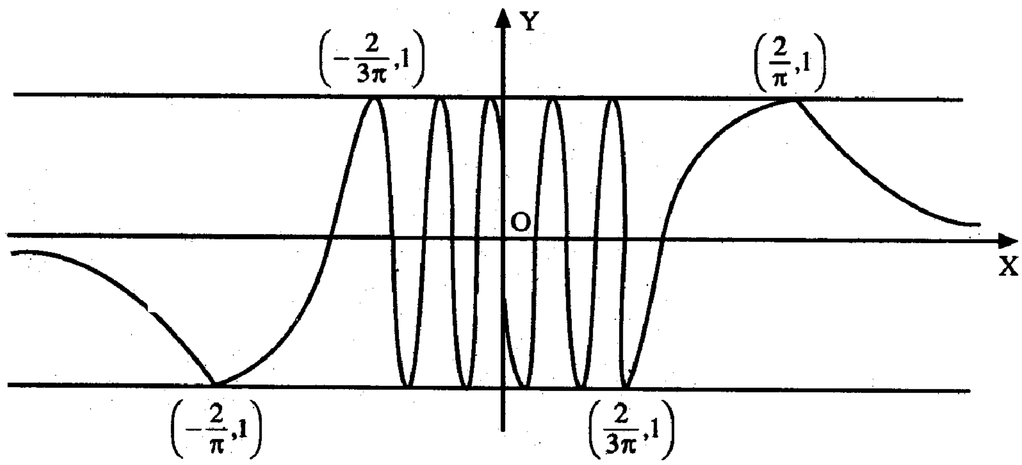


(17) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \operatorname{cosec} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cosec}^{-1} y$;

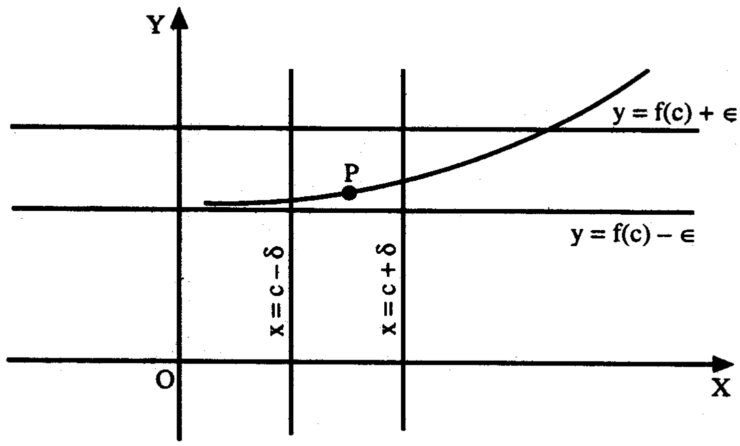
$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}, y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



(18) $y = \sin\frac{1}{x}$



(19) সংজ্ঞাঞ্চলের অন্তর্ভুক্ত c বিন্দুতে সন্তত অপেক্ষকের লেখচিত্র :



4.21 সারসংক্ষেপ

কলনবিদ্যার ও গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্বের অন্যতম মূল স্তম্ভ হ'ল অপেক্ষকের সীমা ও সন্ততি। এই অধ্যায়ে সেই বিষয়গুলি আলোচনা করা হয়েছে এবং সন্তত অপেক্ষকের যে ধর্মগুলির সাহায্যে অপেক্ষকের প্রকৃতি নির্ধারণ করা যায় সেগুলি ব্যাখ্যার চেষ্টা করা হয়েছে।

একক 5 ❐ অন্তরকলজ ও অন্তরকল (Derivative and differential)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

অন্তরকলজের ধারণার মূলে রয়েছে দুটি সুপ্রাচীন গাণিতিক সমস্যা—একটি হল কোন বক্ররেখার

উপরিস্থ কোন বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন এবং অপরটি হল অসম গতিবেগ সম্পন্ন বস্তুকণার গতির হার নির্ণয়। প্রাচীন কাল থেকেই গণিতজ্ঞরা এই দুই সমস্যা ছাড়াও কোন বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের মত মৌলিক সমস্যা নিরসনে ব্রতী হয়েছিলেন। এ ব্যাপারে দুই বিশিষ্ট গণিতজ্ঞ আই নিউটন (১৬৪৩-১৭২৪) এবং ডি ডব্ল্যু লাইবনিৎস (১৬৪৬-১৭১৬) (বা লিবনিজ) অপেক্ষকের অন্তরকলন ও সমাকলনের গুরুত্বপূর্ণ ধারণা এনেছিলেন। তবে এই তত্ত্বের বিকাশে আর এক গণিতজ্ঞ এ কশির নাম-ও বিশেষ উল্লেখের দাবি রাখে।

5.2 অন্তরকলজের সংজ্ঞা

মনে করি $f : s \to R$ প্রদত্ত অপেক্ষক যেখানে $S \subset R$। মনে করি c, S-এর অন্তর্বিন্দু। আমরা $h \neq 0$ এমন মান নিলাম যার জন্য $c + h$ বা $c - h$ ঐ S-এর মধ্যে থাকবে। ফলে স্বাধীন চলরাশির h-মান পরিবর্তনের জন্য অপেক্ষকের মান পরিবর্তিত হয় $[f(c + h) - f(c)]$ বা $[f(c - h) - f(c)]$। আমরা এই পরিবর্তনকে $f(x) - f(c)$ হিসাবে চিহ্নিত করতে পারি।

$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ কে বলা হবে অপেক্ষকের মানের পরিবর্তনের গড় হার। যদি $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$-এর সসীম, সুনির্দিষ্ট মান থাকে তবে ঐ সীমাকে f-এর c বিন্দুতে অন্তরকলজ বলা হবে।

$Rf'(c) = \lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে,

$Lf'(c) = \lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে।

যেহেতু c, সংজ্ঞার অঞ্চল S-এর অন্তর্বিন্দু, ফলে $f'(c)$এর অস্তিত্ব থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $Rf'(c) = Lf'(c)$ হয়।

যদি f-এর সংজ্ঞার অঞ্চল বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল [a, b] হয়, সেক্ষেত্রে

(i) যদি $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$-এর সসীম, সুনির্দিষ্ট মান থাকে, তবে $f'(a) = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(ii) যদি $\lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$-এর সসীম, সুনির্দিষ্ট মান থাকে, তবে $f'(b) = \lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$

(iii) যদি $a < c < b$ হয়, তবে $f'(c)$-এর অস্তিত্ব থাকবে যদি $Rf'(c) = Lf'(c)$ হয়।

উদাহরণ : $f(x) = \begin{cases} x, 0 \le x < 1 \\ 2 - x, 1 \le x \le 2 \\ -2 + 3x - x^2, x > 2 \end{cases}$

$x = 1$ ও $x = f$ বিন্দুদ্বয়ে f'-এর অস্তিত্ব পরীক্ষা কর।

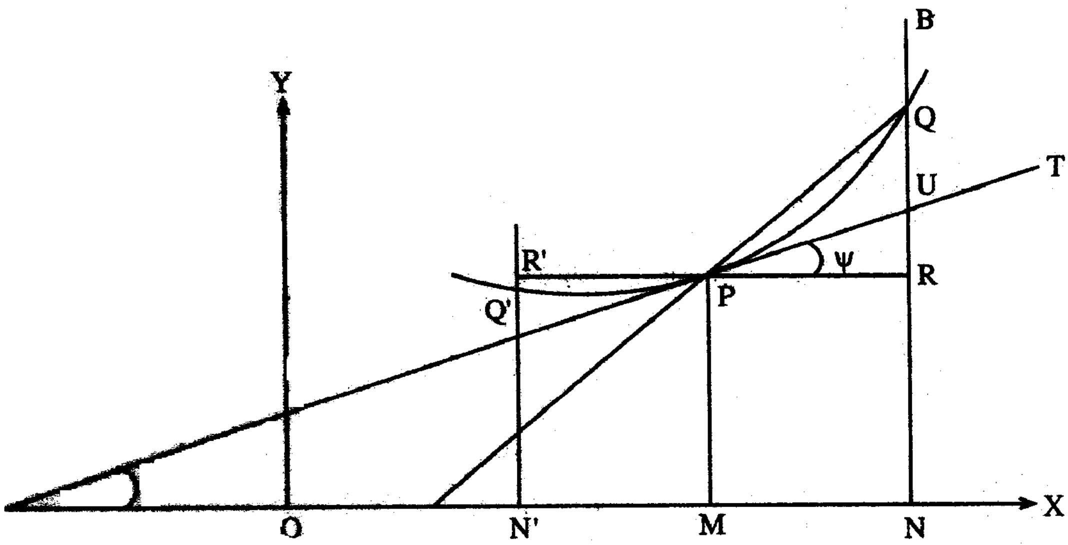
$\lim\limits_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\frac{x-1}{x-1}=1 \quad \therefore\ Lf'(1)=1$ $Lf'(1)\neq Rf'(1)$ অতএব $x=1$

$\lim\limits_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\frac{2-x-1}{x-1}=-1 \quad \therefore\ Rf'(1)=-1$ বিন্দুতে f'-এর অস্তিত্ব নেই

$\lim\limits_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2-}\frac{2-x-0}{x-2}=-1 \quad \therefore\ Lf'(2)=-1$

$\lim\limits_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+}\frac{-2+3x-x^2-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+}(1-x)=-1 \quad \therefore\ Rf'(2)=1$

সুতরাং $Lf'(2)=Rf'(2)=-1$ অতএব $f'(2)$-এর অস্তিত্ব আছে।



5.3 অন্তরকলজের জ্যামিতিক তাৎপর্য

P বিন্দুটি f(x) সংজ্ঞার অঞ্চলে একটি বিন্দু, P (c, f(c))

$OM = c,\ ON = OM + MN = c + h,\ PM = f(c),\ QN = f(c + h)$

$\therefore\ QR = QN - NR = QN - PM = f(c + h) - f(c)$

এখন, $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{QR}{MN}=\frac{QR}{PR}=\tan\angle QPR = PQ$-এর প্রবণতা।

$h \to 0+$ অর্থাৎ, বক্ররেখা বরাবর $Q \to P$ হলে, জ্যা PQ-এর অন্তিম অবস্থান হল P বিন্দুতে

স্পর্শক PT, এবং $\tan \angle QPR \to \tan \psi$ যেখানে ψ হল স্পর্শক PT, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যে কোণে নত।

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{Q\to P} \tan \angle QPR = \tan \angle TPR = \tan \psi$$

যদি, $h < 0$ হয় যেহেতু অন্তরকলজ আছে অতএব (চিত্র থেকে)

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{-Q'R'}{-N'M} = \tan \angle Q'PR'$$

$\therefore\ h \to 0-$, অর্থাৎ $\theta' \to P$

অর্থাৎ θ' যখন রেখা বরাবর P-এর দিকে যায়,

তখন, $\lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = \tan \psi$ হবে।

অতএব একটি বিন্দুতে $y = f(x)$-এর অন্তরকলজ থাকলে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহার tangent হল $\dfrac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$.

5.4 সংজ্ঞার সাহায্যে কিছু অপেক্ষক-এর অন্তরকলজ নির্ণয়

1. $f(x) = x^n$

সমাধান : (i) ধরুন, n-একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\left\{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}.x + \ldots + x^{n-1}\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}.x + \ldots + x^{n-1}\right\} \ (\because h \neq 0)$$

$$= nx^{n-1}$$

(ii) ধরুন n-একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এখানে, $x \neq 0$ কারণ, $n < 0$ তে, x^n অসংজ্ঞাত। ধরুন, $n = -m$, যেখানে, $m > 0$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{-m} - x^{-m}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^m - (x+h)^m}{hx^m (x+h)^m}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m - x^m}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{x^m(x+h)^m}$$

$$= -m.\,x^{m-1}.\frac{1}{x^m.\,x^m} = -m.\,x^{-m-1} = nx^{n-1}$$

যখন n-ভগ্নাংশ, $n = \frac{p}{q}, q \neq 0$ এবং ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, p পূর্ণসংখ্যা।

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{h}$$

[যেখানে, $(x+h)^{\frac{1}{q}} = z + k \text{ and } z = x^{\frac{1}{q}}$

এখন, $h \to 0$ হলে $k \to 0$]

$$= \lim_{k\to 0}\frac{\left\{(z+k)^{p-zp}\right\}/k}{\left\{(z+k)^{q-zq}\right\}/k}$$

$$= \frac{p.\,z^{p-1}}{q.\,z^{q-1}} = n.\,z^{p-q}$$

$$= n.\,x^{\frac{p}{q}-1} = n.\,x^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}x^n = n.\,x^{n-1}$$

অতএব সবক্ষেত্রেই $\frac{d}{dx}x^n = n.\,x^{n-1}$.

2. f(x) = logc x (x > 0)

সমাধান : $\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h) - \log_e x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x.\frac{h}{x}}$ $\left[\text{যেহেতু} \lim_{\frac{h}{x}\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = 1\right]$

$$= \frac{1}{x}\left(\because h \to 0 \Rightarrow \frac{h}{x} \to 0\right).$$

3. f(x) = e^x

সমাধান : $\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x.\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x$ $\left(\text{যেহেতু} \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1\right)$

4. f(x) = sin x $(x \in R)$

সমাধান : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x\left(\text{যেহেতু }\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1\right)$

5. $f(x) = \cos x \ (x \in R)$

সমাধান : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$

$=-\lim\limits_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

$=-\sin x.$

6. $f(x) = a^x \ (a > 0)$

সমাধান : $\dfrac{d}{dx}e^x\log_e a=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{(x+h)}\log_e a-e^x\log_e a}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^x\log_e a\left(e^h\log_e a-1\right)\times\log_e a}{h\log_e a}$

$=a^x.\log_e a.\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{e^h\log_e a-1}{h}\right)=a^x.\log_e a.$

7. $f(x)=\tan x, x\in R-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}:n\in z\right\}$

সমাধান : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h.\cos x.\cos(x+h)}$

$=\dfrac{1}{\cos x}.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\cos(x+h)}$

$=\sec^2 x.$

8. $f(x)=\cot x, x\in R-\{n\pi, n\in z\}$

সমাধান : $\dfrac{d}{dx}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cot(x+h)-\cot x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(-h)}{h.\sin x.\sin(x+h)}$

$$= -\frac{1}{\sin x}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h)}\right\} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

9. $f(x) - \sec x, x \in R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in z\right\}$

সমাধান : $\frac{d}{dx}\sec x = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}.\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h.\cos x.\cos(x+h)}$

$= \sec\ x.\ \tan\ x.$

10. $f(x) = \operatorname{cosec}x, x \in R - \{n\pi, n \in z\}$

সমাধান : $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{cosec}(x+h)-\operatorname{cosec} x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h.\sin x.\sin(x+h)}$

$= -\ \operatorname{cosec}\ x\ \cot\ x.$

5.5 ব্যাপক ব্যবহৃত কিছু অপেক্ষক-এর অন্তরকলজের মান

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$

$\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}(x > 0)$

$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_e a(x > 0)$

$\frac{d}{dx}a^x = a^x\log_e a, x \in (-\infty, \infty), a > 0$

$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, x \in R$

$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, x \in R$

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, x \in R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in z\right\}$

$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}(|x| > 1)$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}(|x| > 1)$

$\frac{d}{dx}\sin hx = \cos hx, x \in R$

$\frac{d}{dx}\cos hx = \sin hx, x \in R$

$\frac{d}{dx}\tan hx = \sec h^2 x, x \in R$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} hx = -\operatorname{cosec} hx.\cot hx, x \in R$

$\frac{d}{dx}\sec hx = -\sec hx.\tan hx, x \in R$

$\frac{d}{dx}\cot hx = -\operatorname{cosec} h^2 x, x \in R$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x, x \in R - \{n\pi : n \in z\}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, x \in R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in z\right\}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x, x \in R - \{n\pi : n \in z\}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (|x| < 1)$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (|x| < 1)$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$$

5.6 অন্তরকলজের অস্তিত্ব এবং অপেক্ষকের সন্ততি (Continuity-এর মধ্যে সম্পর্ক

উপপাদ্য : যদি, $y = f(x)$ অপেক্ষক এর $x = a$ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে তবে $f(x)$, $x = a$ বিন্দুতে সন্তত। কিন্তু বিপরীত বিবৃতিটি সত্য নয়।

অন্তরকলজের অস্তিত্ব $\Rightarrow$ অপেক্ষকের সন্ততি কিন্তু অন্তরকলজের $\Rightarrow$ অস্তিত্ব,

প্রমাণ : ধরা যাক, $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষক-এর অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে অর্থাৎ,

$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$-এর একটি নির্দিষ্ট মান আছে,

এখন, $\lim\limits_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\} = \lim\limits_{h\to 0}\left[\left\{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right\}\times h\right]$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times\lim_{h\to 0} h$$

$$= f'(a) \times 0 = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

$\therefore$ $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = a$ তে সন্তত।

এবার ধরা যাক্, $f(x) = |x|$

এখন, $|f(x) - f(0)| = ||x| - 0| = |x|$

পূর্বনির্দিষ্ট যেকোন $\in > 0$, যত ছোট হোক না কেন, একটি $\delta > 0$ (এখানে $\delta < \in$) পাওয়া যাবে যাতে, $|f(x) - f(0)| < \in$ যখন $|x| < \delta$

$\therefore$ $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = 0$ তে সন্তত।

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

$\lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = -1$ (কারণ, $h \to 0-$, $h < 0$, $\therefore$ $|h| = -h$)

এবং $\lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = 1$

$\therefore$ $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ এর অস্তিত্ব নেই।

$\therefore$ $f(x)$ এর $x = 0$ তে অন্তরকলজ নেই।

[**মন্তব্য :** এখান থেকে পরিষ্কার যদি $x = c$ তে $f(x)$ অসন্তত হয় তাহলে $f'(c)$ এর অস্তিত্ব থাকবে না।]

5.7 অন্তরকলজের বীজগাণিতিক ধর্ম

যদি $f(x)$ এবং $g(x)$-এর অন্তরকলজ থাকে তবে,

(i) $\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$

(ii) $\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$

(iii) $\frac{d}{dx}\{f(x).g(x)\} = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x).\frac{d}{dx}f(x)$

(iv) $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \dfrac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\{g(x)\}^2}$, এখানে $g(x) \neq 0$.

প্রমাণ : (i) $\lim_{h\to 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$ (যেহেতু অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে)

$$= \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

সুতরাং $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}$-এর অস্তিত্ব আছে।

(ii) $$\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-g(x+h)\}-\{f(x)-g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

সুতরাং $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}$-এর অস্তিত্ব আছে।

(iii) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\{g(x+h)-g(x)\}+g(x)\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(x+h).\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}+\lim_{h\to 0}g(x).\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$$

$$= f(x).\frac{d}{dx}g(x)+g(x).\frac{d}{dx}f(x)$$

অতএব $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}$-এর অস্তিত্ব আছে।

(iv) যেহেতু $g'(x)$-এর অস্তিত্ব আছে, অতএব $g(x)$ সন্তত।

আবার, $g(x) \neq 0$. $\therefore$ x-এর একটি সামীপ্য পাওয়া যাবে যেখানে, অপেক্ষকটি অশূন্য হবে।

$$\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\{f(x+h)-f(x)\}-f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h.\,g(x+h).\,g(x)}$$

$$= \frac{1}{g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}\left[\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\{f(x+h)-f(x)\}}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{\{g(x)^2\}}\left[g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x).\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

অতএব $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$-এর অস্তিত্ব আছে।

5.8 কিছু বিশেষ অপেক্ষক-এর অন্তরকলজ নির্ণয়ের পদ্ধতি

5.8.1 'অপেক্ষকের অপেক্ষক'-এর অন্তরকলজ নির্ণয় (Differentiation of a function of function) :

উপপাদ্য : চেইন রুল (Chain rule) :

ধরুন, $u = \phi(x)$, $y = f(u)$ দুটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক।

অপেক্ষক ϕ-এর বিস্বাঞ্চল অপেক্ষক f-এর সংজ্ঞাঞ্চলের সাব্‌সেট্‌। তাহলে সংযোজক অপেক্ষক $f\{\phi(x)\}$ অন্তরকলনযোগ্য এবং $\frac{d}{dx}f\{\phi(x)\} = \frac{d}{d\phi(x)}f\{\phi(x)\}.\frac{d}{dx}\phi(x)$

প্রমাণ : মনে করি x-এর Δx পরিবর্তন-এর জন্য u-এর পরিবর্তন হল Δu. আবার, এই Δu পরিবর্তনের জন্য y-এর পরিবর্তন হয় ধরি Δy.

$u + \Delta u = \phi(x + \Delta x)$ এবং $y + \Delta y = f(u + \Delta u)$

$\because$ ϕ এবং f অন্তরকলন যোগ্য, ϕ এবং f সন্তত।

$\therefore$ যখন $\Delta x \to 0$ তখন $\Delta u \to 0$ আবার, একই যুক্তিতে $\Delta u \to 0$ হলে $\Delta y \to 0$

[এখানে, $\phi'(x) \neq 0$ ধরে, ফলে $\Delta u \neq 0$ ধরে প্রমাণ করা হচ্ছে।]

এখন, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}$

উভয়পক্ষ $\Delta x \to 0$ নিলে,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \begin{bmatrix} \because \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0 \\ \Delta u \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

মন্তব্য : যদি y, x-এর অপেক্ষক হয় এবং x-কে y-এর অপেক্ষক রূপে দেখা যায় এবং $\frac{dy}{dx} \neq 0$ হয় তবে,

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1$$

উদাহরণ : 1. $u = \sin x$, $y = e^u$; $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{du}{dx} = \cos x, \frac{dy}{du} = e^u$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u . \cos x = \cos x . e^{\sin x}$$

উদাহরণ : 2. $y = \sin^{-1} x$ যেখানে, $|x| \leq 1, \frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = \sin^{-1} x$ বা, $x = \sin y$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \cos y$$

দেখান, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ যখন, $|x| < 1$.

উদাহরণ : 3. $y = \tan^{-1} x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = \tan^{-1} x \quad \therefore \quad x = \tan y, \frac{dx}{dy} = \sec^2 y$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

5.8.2 প্রাচলিক অপেক্ষক-এর অন্তরকলন :

মনে করি $x = \phi(t)$ এবং $y = \psi(t)$, যেখানে t একটি প্রচল (Parameter) যার অঞ্চল $t_1 \leq t \leq t_1$. $\phi(t)$ এবং $\psi(t)$-এর t-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ আছে। এখানে, $y = \psi(t)$ এবং $x = \phi(t)$-এর মধ্যে t অপনয়ন করলে x এবং y এর মধ্যে একটি সম্পর্ক পাওয়া যাবে।

এক্ষেত্রে, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}}$

উদাহরণ : $x = at^2$, $y = 2at$ যেখানে, t একটি প্রচল। $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(2at)}{\frac{d}{dt}(2at^2)} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$.

5.8.3 লগারিদিমিক অন্তরকলজ (Logarithmic differentiation) :

যদি কোন অপেক্ষকের ঘাত আর একটি অপেক্ষক হয় অথবা কোন অপেক্ষক অন্য কিছু অপেক্ষক-এর গুণফল আকারে থাকে তাহলে, অন্তরকলজ নির্ণয় করার আগে অপেক্ষকটির লগারিদম্ নেওয়া হয় এবং তারপর সেটির অন্তরকলন করা হয়।

উদাহরণ : $y = e^{e^x}$

সমাধান : $y = e^{e^x}$ $\quad \therefore \log_e y = e^x \log_e e = e^x$

$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = e^x \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = e^{e^x} . e^x.$

5.8.4 অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষক-এর অন্তরকলজ :

$f(x, y) = 0$ সমীকরণকে সমাধান করে যদি $y = \phi(x)$ বা $x = \psi(y)$ আকারে অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব পাওয়া যায়, সেক্ষেত্রে এই ধরনের অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয়ের পদ্ধতি নিম্নরূপ:

$f(x, y) = 0$ সমীকরণের প্রতিটি পদকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করতে হবে। এক্ষেত্রে y-কে x-এর অপেক্ষক ধরা হবে।

উদাহরণ : $x^3 + y^3 = 3axy$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^3 + y^3 = 3axy$ উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$\because \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, যেখানে $y^2 - ax \neq 0$.

5.9 অন্তরকলজের চিহ্ন (Sign) সংক্রান্ত আলোচনা

$f(x)$ অপেক্ষক এর $x = c$ তে অন্তরকলজ থাকলে অবশ্যই $f'(c)$ এর একটি সুনির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে। এই $f'(c)$-এর মান 0 বা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। যদি $f'(c) = 0$ হয় তবে নিচের এই সম্ভাবনাগুলি থাকে। $f'(c) = 0$ যদি (i) c-এর সামীপ্যে অপেক্ষকটি ধ্রুবক অথবা (ii) $f(x)$ অপেক্ষক এর অনুষঙ্গী লেখচিত্রের c বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore$ $f'(c) = 0$ হলে c বিন্দুর সামীপ্যে $f(x)$ এর নির্দিষ্ট কোন গঠন বলা সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে c বিন্দুটিকে স্টেশনারী (stationary) বিন্দু বলা হবে। কিন্তু, $f'(c) > 0$ বা < 0 হলে c-এর সামীপ্যে $f(x)$ এর গঠন জানা যায়।

ধর্ম : যদি, $f'(c)$ এর অস্তিত্ব থাকে এবং $f'(c) > 0$ হয় তখন c বিন্দুর একটি সামীপ্য পাওয়া যাবে যেখানে, $f(x)$ ক্রমবর্ধমান হবে। যদি $f'(c) < 0$ হয় তখন c বিন্দুর একটি সামীপ্য পাওয়া যাবে যেখানে $f(x)$ ক্রমক্ষীয়মান হবে।

প্রমাণ : $f'(c)$ বিদ্যামান।

ধরি, $0 < \in < |f'(c)|$, এই $\in$-এর অনুষঙ্গী $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যাহার ক্ষেত্রে

$\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h} - f'(c)\right| < \in$ যখন, $0 < |h| < \delta$

$f'(c) - \in < \frac{f(c+h)-f(c)}{h} < f'(c) + \in$ ......(1)

যখন $0 < |h| < \delta$ বা, $-\delta < h < \delta$, $h \neq 0$

$f'(c) > 0$ হলে $0 < \in < f'(c)$

$\because$ $f'(c) - \in > 0$ এবং $f'(c) + \in > 0$

(1) $\Rightarrow \frac{f(c+h)-f(c)}{h} 0$ যখন $-\delta < h < \delta$, $h \neq 0$

এখন, $-\delta < h < 0$ হলে, $f(c + h) - f(c) < 0$ বা, $f(c + h) < f(c)$

এবং $0 < h < \delta$ হলে, $f(c + h) - f(c) > 0$ বা, $f(c + h) > f(c)$

$\therefore$ $f(x)$ অপেক্ষক $(c - \delta, c + \delta)$, তে c-সামীপ্যে ক্রমবর্ধমান,

আবার, $f'(c) < 0$ হলে $0 < \in < -f'(c)$

$\therefore$ $f'(c) + \in < 0$ এবং $f'(c) - \in < 0$

$\therefore$ (1) হতে, $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$ যখন, $-\delta < h < \delta$, $h \neq 0$

$\therefore$ $-\delta < h < 0$ হলে, $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$ বা, $f(c+h) - f(c) > 0$ বা, $f(c + h) > f(c)$

এবং $0 < h < \delta$ হলে, $f(c + h) - f(c) < 0$ বা, $f(c + h) < f(c)$.

$\therefore$ $f(x)$ অপেক্ষক c-সামীপ্যে, $(c - \delta, c + \delta)$-তে ক্রমক্ষীয়মান।

উদাহরণ : $f(x) = x^2$ অপেক্ষকটি অন্তরকলজের দ্বারা কোথায় ক্রমবর্ধমান বা ক্রমক্ষীয়মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $f(x) = x^2$ $\quad \therefore \quad f'(x) = 2x$

$x > 0$ তে অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান, যেহেতু $f'(x) > 0$ যখন $x > 0$

$x < 0$ তে অপেক্ষকটি ক্রমক্ষীয়মান, যেহেতু $f'(x) < 0$ যখন $x < 0$

5.10 অন্তরকলজ এর উদাহরণ, অনুশীলনী ও উত্তরমালা

5.10.1 উদাহরণ

(1) $y = \dfrac{(1-x)^4}{(1+x)^5}$ এর 'x' সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = \dfrac{(1-x)^4}{(1+x)^5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{(1-x)^4}{(1+x)^5}\right\} = \frac{(1+x)^5 \frac{d}{dx}(1-x)^4 - (1-x)^4 \frac{d}{dx}(1+x)^5}{\left\{(1+x)^5\right\}^2}$$

$$= \frac{(1+x)^5.4(1-x)^3.(-1) - (1-x)^4.5(1+x)^4}{\left\{(1+x)^5\right\}^2}$$

$$= \frac{(1-x)^3(1+x)^4(x-9)}{(1+x)^{10}}$$

(2) $y = \sqrt{[(1+x)/(1-x)]}$ এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি $y = \sqrt{u}$ যেখানে, $u = \dfrac{1+x}{1-x}$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1-x).1-(1+x).(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^2}}$$

(3) $\sin^{-1}x$-এর সাপেক্ষে $e^{\cos^{-1}x}$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান : ধরুন, $y = e^{\cos^{-1}x}$ এবং $z = \sin^{-1}x$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dz}{dx}} = \frac{e^{\cos^{-1}x}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{-\frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= -e^{\cos^{-1}x} = -y$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = -y$$

(4) $f(x) = 1$ যখন, $x < 0$

$= 1 + \sin x$ যখন, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$

$= 2 + \left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^2$ যখন, $x \ge \frac{\pi}{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ বিদ্যমান কিন্তু $f'(0)$ বিদ্যমান নয়।

সমাধান : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h}$

এখন, $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{2+h^2-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} h = 0 \quad (\because h \ne 0)$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \left\{\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot h\right\}$$

$= 0$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-2}{h} = 0$$

$$\therefore \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1+\sin h-1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{1-1}{h} = 0 \neq \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-1}{h}$$

$\therefore$ $f'(0)$ বিদ্যমান নয়।

(5) $x^y = y^x$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

সমাধান : $x^y = y^x$ বা, $y \log_e x = x = x \log_e y$

উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাওয়া যায়

$$y\frac{d}{dx}\log_e x + \log_e x\frac{dy}{dx} = x.\frac{d}{dx}\log_e y + \log_e y$$

বা, $\frac{y}{x} = \log_e x.\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log_e y$

বা, $\left(\log_e x - \frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \log y - \frac{y}{x} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y(x\log_e y - y)}{x(y\log_e x - x)}$

(6) $f(x) = x \;; \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$

$\qquad = 1-x;\ \frac{1}{2} < x \le 1$

দেখাও যে, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$এর অস্তিত্ব নেই, যদিও $f(x), x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে সন্তত।

সমাধান : $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}-} x = \frac{1}{2}$

এবং $\lim_{x\to\frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}-} (-x) = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \quad f(x),\ x = \frac{1}{2}$ তে সন্তত।

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\frac{1}{2}+h-\frac{1}{2}}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1-\left(\frac{1}{2}+h\right) - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{-h}{h} = -1$$

$\therefore \quad f'\left(\frac{1}{2}\right)$-এর অস্তিত্ব নেই।

5.10.2. অনুশীলনী

(1) সংজ্ঞার সাহায্যে f(x)-এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর, যেখানে, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

(2) $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(a) $y = \tan^{-1}\left(\frac{a}{x}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)$

(b) $y = \log_e\left\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\}$

(c) $y = (xx)^x$,

(d) $y = x^{xx}$

(e) $y = x^{xxx}$

(f) $y = (\tan x)\cot_x + (\cot x)\tan_x$

(3) $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(a) $x = a(2\cos t + \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$

(b) $x = a\left(\cot b + \log_e \tan\frac{1}{2}t\right),\ y = a\sin t$

(4) $\cos^{-1}x^2$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$ -এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(5) যদি, $x^y + y^x = a^6$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} + y^x \log y}{x^y \log x + xy^{x-1}}$

(6) যদি, $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ হলে, প্রমাণ করো, $f'(0) = \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}\left(2\log\frac{a}{b} + \frac{b^2-a^2}{ab}\right)$

(7) $f(x) = 2 + x, \ x \geq 0$

$\quad = 2 - x, \ x < 0$

দেখাও যে, $f(x)$, $x = 0$ তে সন্তত কিন্তু $f'(x)$-এর অস্তিত্ব নেই।

(8) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$-এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(9) যদি, $x = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}$ এবং $y = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1}{1+t^2}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}$ -এর মান t-এর উপর নির্ভরশীল নয়।

5.10.3. উত্তরমালা

1. সংকেত : $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{x+h} - \frac{\sin x}{x}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{-2x\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h(x+h).x} + \frac{\cos x.\sin h}{h(x+h)} - \frac{\sin x}{x(x+h)}\right]$$

$$= \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

2. (a) $\frac{a^2}{x^2 + a^2\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)^2}\left\{\frac{-1}{A}\tan^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2+x^2}\right\}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

(c) $x^{(x^2+1)}\log(ex^2)$, (d) $x^{x-1}\{1 + x\log x, \log(ex)\}$, (e) $\frac{y^2}{x(1-y\log x)}$

(f) (tan x)cotx {cosec^{2}x (1–log tan x)}+(cot x)tanx {sec^{2}x(log cotx^{-1})}.

3. (a) $-\tan\frac{1}{2}t$, (b) $\tan t$

4. $-\frac{1}{2}$

8. সংকেত : $x = \tan\theta$ বসান

উত্তর : 1

9. সংকেত : $t = \tan\theta$ ধরুন।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

5.11 একচল অপেক্ষক-এর অন্তরকলন যোগ্যতার ধারণা এবং অন্তরকল সমূহ (Concepts of differentiability of a function of single variable and differentials)

সংজ্ঞা : ধরা যাক অপেক্ষক $f(x)$, $[a, b]$-তে সংজ্ঞায়িত। $x \in [a, b]$ সামান্য পরিবর্তন Δx-এর জন্য $x + \Delta x \in [a, b]$। অপেক্ষক $f(x)$-কে x বিন্দুতে অন্তরকলযোগ্য (differentiable) বলা হবে যদি

$$f(x + \Delta x) - f(x) - A.\Delta x + \in \Delta x$$

হয়, যেখানে, A, Δx-এর উপর নির্ভরশীল নয় কিন্তু $\in \to 0$. যখন, $\Delta x \to 0$.

A. Δx-কে বলা হয় $f(x)$ অপেক্ষক-এর x বিন্দুতে অন্তরকল অথবা অবকল (differential) এবং $df(x)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\in.\Delta x$-কে বলা হয় ভ্রম (Error)

$f(x)$ অপেক্ষক x বিন্দুতে অন্তরকলযোগ্য হলে,

$f(x + \Delta x) - f(x) = A.\Delta x + \in.\Delta x$, যেখানে A, Δx-এর উপর নির্ভরশীল নয় কিন্তু $\in \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$.

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = A + \in$$

বা, $f'(x) = A$, ($\because \in \to 0$ যখন, $\Delta x \to 0$)

$\therefore$ $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \in \Delta x$

$f(x)$-এর অন্তরকল, $df(x) = f'(x).\Delta x$

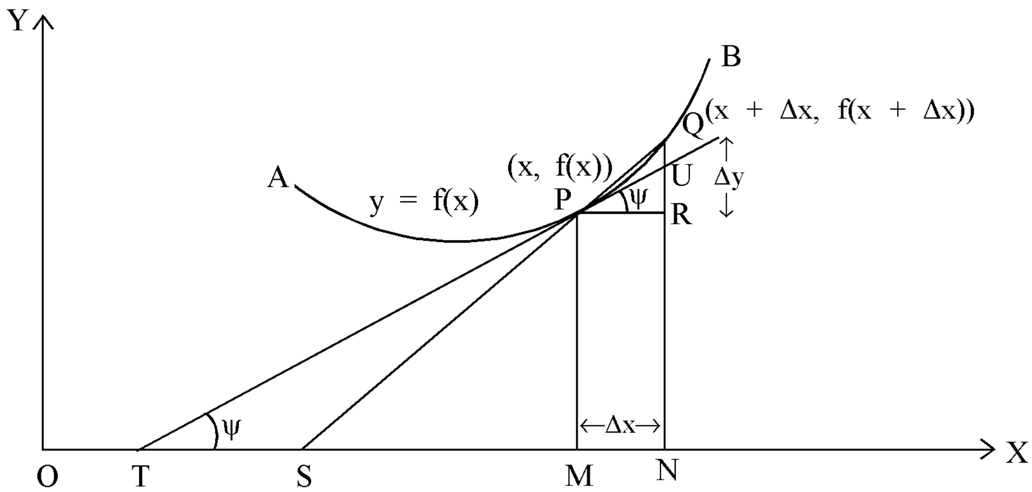
এখন ধরি $f(x) = x$, তাহলে দেখা যাবে, $f'(x) = 1$ এবং $dx = 1.\ \Delta x = \Delta x$

অতএব, স্বাধীন চল x-এর ক্ষেত্রে Δx এবং dx সমান। সাধারণভাবে, $y = f(x)$ হলে

$$dy = df(x) = f'(x).dx = \frac{dy}{dx}.dx$$

$\therefore$ dy এই অন্তরকল হল Δy-এর একটি আসন্ন মান যখন, স্বাধীন চলরাশির পরিবর্তন Δx খুবই সামান্য।

5.12 অপেক্ষক-এর অন্তরকলের জ্যামিতিক তাৎপর্য (Geometrical significance of the differential)



ধরি, $OM = x$, $ON = x + \Delta x$

$\therefore$ $PM = f(x)$, $QN = f(x + \Delta x)$

যদি, $y = f(x)$, তবে $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\therefore$ $f(x + \Delta x) - f(x) = QN - PM = RQ = RU + UQ = PR.\tan\psi + UQ$ $(\because \angle RPU = \psi)$

$$= MN.\tan\psi + \frac{UQ}{PR}.MN \quad (\because PR = MN)$$

$$= f'(x).\Delta x + \in\Delta x$$ (যেখানে, $\in = \frac{UQ}{PR}$ এবং $f'(x) = \tan\psi$)

যখন, $\Delta x \to 0$ অর্থাৎ, $Q \to P$ তখন $UQ \to 0$ অর্থাৎ $\in \to 0$

$$\therefore \; df(x) = \frac{df(x)}{dx}.dx$$

দেখুন, RQ = f(x + Δx) − f(x), f(x)-এর পরিবর্তন-এর মান এবং RU, f(x)-এর অবকলনে। m কখনই, RQ = RU হবে না। কিন্তু খুব ছোট Δx পরিবর্তন-এর জন্য Δf-এর আসন্ন (Approximate) মান হিসাবে df-কে ধরা হয় অর্থাৎ, RQ ≈ RU.

$\therefore$ x-এর সামান্য মান Δx পরিবর্তনের জন্য f(x)-এর পরিবর্তিত আসন্ন মান = $\frac{df(x)}{dx}.dx$. (যেখানে, dx = Δx).

5.13 অপেক্ষক-এর আসন্ন মান নির্ণয় ও ত্রুটি (Calculation of approximate value and error)

ধরা যাক, y = f(x) এখানে, x-এর মান যখন x + Δx, তখন f(x + Δx) বা, y + Δy-এর মান নির্ণয় করতে হবে।

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

সুতরাং, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ এবং $f'(x)$-এর মান সমান নয় এবং এদের অন্তর অত্যন্ত ক্ষুদ্র।

ধরা যাক্, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\in$, যেখানে, $\in\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$

$\therefore\ \Delta y = f'(x).\Delta x+\in.\Delta x$

বা, $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x).\Delta x+\in.\Delta x$

বা, $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x).\Delta x+\in.\Delta x$

এখন, Δx যদি যথেষ্ট ক্ষুদ্র হয়, তবে $\in$ যথেষ্ট ক্ষুদ্র হবে।

সুতরাং, $\in.\Delta x$ ক্ষুদ্রতর হবে এবং এই ক্ষুদ্র রাশিকে অগ্রাহ্য করলে, f(x + Δx) এবং f(x)+f'(x).Δx-এর মান প্রায় সমান ধরা যেতে পারে।

$\therefore$ x-এর মানের Δx বৃদ্ধির জন্য y বা f(x)-এর আসন্ন মান f(x) + f'(x).Δx বা, f(x + Δx) ≈ f(x) + f'(x).Δx.

আবার Δy হল x-এর মান নির্ণয়-এ Δx ত্রুটির জন্য y-এর মান নির্ণয়-এ ত্রুটি।

সুতরাং, Δy = f'(x).Δx + $\in$.Δx সম্পর্কে $\in$.Δx ক্ষুদ্রতর রাশিকে অগ্রাহ্য করলে, y-এর মান নির্ণয়ে ত্রুটি f'(x).Δx + df(x).

অপেক্ষক ত্রুটি ও শতকরা ত্রুটি (Relative error and percentage error) :

যদি, x-এর মান নির্ণয়ে Δx ত্রুটি হয়, তবে $\frac{\Delta x}{x}=\frac{dx}{x}$ কে x-এর মান নির্ণয়-এ আপেক্ষিক ত্রুটি এবং $\frac{\Delta x}{x}\times 100$-কে x-এর মান নির্ণয়-এ শতকরা ত্রুটি বলা হয়।

x-এর Δx বা dx ত্রুটির জন্য y-এর মানে ত্রুটি dy।

$\frac{dy}{y}$ এবং $\frac{dy}{y} \times 100$ হইল y-এর মান নির্ণয়-এ যথাক্রমে আপেক্ষিক এবং শতকরা ত্রুটি।

5.14 অপেক্ষকের অন্তরকল ও আসন্নমান নির্ণয়-এর উদাহরণ, প্রশ্নাবলী ও উত্তরমালা

5.14.1 উদাহরণ

(1) $f(x) = x^2 + x + 1$-এর x-এর মান 2 হইতে 1.98-এ পরিবর্তিত হলে f(x)-এর বৃদ্ধি এবং অন্তরকল df(x) নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $f(x) = x^2 + x + 1$; $f'(x) = 2x + 1$

$f(2) = 7$, এখানে, x-এর বৃদ্ধি $\Delta x = 1.98 - 2 = -0.02$

$f(1.98) = 6.9004$

$\therefore$ f(x)-এর বৃদ্ধি $= f(1.98) - f(2) = 6.9004 - 7 = -0.0996$

$\therefore$ অন্তরকলন, $df(x) = f'(x).\Delta x = 4.96 \times (-0.02) = 0.0992$

(2) নিচের অপেক্ষকগুলির অন্তরকল নির্ণয় করো :

(i) $y = \sqrt{2-x}$, (ii) $y = \log(\log x)$

সমাধান ঃ (i) $y = \sqrt{2-x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \times (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$

$\therefore dy = \frac{dy}{dx} \times dx = \frac{1}{2\sqrt{2-x}}.dx$

(ii) $y = \log(\log x)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x}.\frac{1}{x}$

$\therefore dy = \frac{dy}{dx} \times dx = \frac{1}{x\log x}.dx$

(3) $\sqrt{5.76} = 2.4$ হলে $\sqrt{5.82}$-এর আসন্নমান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ ধরা যাক্, $f(x) = \sqrt{x}$, $x + \Delta x = 5.82$ এবং $x = 5.76$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ এবং $\Delta x = 5.82 - 5.76 = 0.06$

$\therefore f(5.82) = f(5.76) - f'(5.76) \times 0.06 = 2.4 + \left(\frac{1}{4.8} \times 0.06\right)$

$= 2.4125.$

(4) মান নির্ণয় কর :

(i) $\log_e 100.2$ (ধরে নাও $\log_e 10 = 2.303$)

(ii) $\log_{10} 100.3$ (ধরে নাও $\log_{10} e = 0.4343$)

সমাধান : (i) ধরা যাক্, $f(x) = \log_e x$, $x + \Delta x = 100.2$, $x = 100$

$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \therefore \Delta x = 0.2$

$f(100) = 2 \log_e 10 = 4.606$

$\therefore \quad \log_e 100.2 = f(100 + 0.2) = f'(100).\Delta x + f(100)$

$= 4.606 + \frac{1}{100} \times 0.2 = 4.608$

(ii) ধরা যাক, $f(x) = \log_{10} x$, $f'(x) = \frac{1}{x} \times \log_{10} e = \frac{0.4343}{x}$

$x = 100$, $x + \Delta x = 100.3$. $\Delta x = 0.3$

$f(100) = 2$, $f'(100) = \frac{0.4343}{100} = 0.004343$

$\therefore \quad \log_{10} 100.3 = f(100 + 0.3) = f(100) + f'(100).\Delta x$

$= \quad 2 + 0.004343 \times 0.3 = 2.0013029.$

(5) $\sin 60° = 0.86603$ হলে $\sin 64°$-এর মান নির্ণয় কর। ($1° = 0.0175$ রেডিয়ান)

সমাধান : ধরা যাক্, $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

$x = 60°$, $x + \Delta x = 64°$, $\Delta x = 4° = 4 \times 0.0175 = 0.07$

$\sin 64° = f(60° + 4°) = f(60°) + f'(60°) \times \Delta x$

$= 0.86603 + \frac{1}{2} \times 0.07$

$= 0.90103.$

(6) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধ 7 সেমি। ব্যাসার্ধ পরিমাপে 0.2 মিমি ভ্রান্তি (ত্রুটি) হলে, বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের পরিমাপে কত ভ্রান্তি হবে?

সমাধান : ধরা যাক্, বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে A (বর্গ সেমি) ও r সেমি।

$\therefore \ A = \pi r^2 \ \therefore \ \frac{dA}{dr} = 2\pi r$

এক্ষণে যদি r-এর ΔR বৃদ্ধির জন্য A-র পরিবর্তন ΔA হয়, তবে $dA = \frac{dA}{dr}.\Delta r$

$r = 7$ সেমি, $\Delta r = 0.2$ মিমি $= .02$ সেমি

$\therefore$ বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল পরিমাপের ভ্রান্তি

$= dA = \frac{dA}{dr}.\Delta r = 2.\pi.7 \times 0.02$

$= 0.88$ বর্গ সেমি।

5.14.2 প্রশ্নাবলী ও উত্তরমালা

(1) নিচের অপেক্ষক-এর অন্তরফল নির্ণয় কর :

(i) $y = \log_{10}x$, (ii) $y = e^{2x}$

[**উত্তর** : (i) $0.4343\dfrac{dx}{x}$, (ii) $2e^{2x}.dx$]

(2) অন্তরকলের মাধ্যমে (i) $\sqrt{83}$ এবং (ii) $\sqrt{6.26}$-এর মান নির্ণয় করো।

[**উত্তর** : (i) 9.1, (ii) 2.502]

(3) $\log_{10}x = 0.4343 \log_e x$ এবং $\log_{10}4 = 0.6021$ হলে $\log_{10}404$-এর আসন্নমান নির্ণয় কর।

[**উত্তর** : 2.606344]

(4) $1^\circ = 0.0175$ রেডিয়ান ও $1' = 0.00029$ রেডিয়ান হলে

(i) $\cos 32^\circ$ এবং (ii) $\tan 45^\circ 58'$–এর আসন্নমান নির্ণয় কর।

[**উত্তর** : (i) 0.848, (ii) 1.034]

(5) একটি গোলকের ব্যাসার্ধ মাপিয়া দেখা গেল 20 সেমি। ব্যাসার্ধের মাপে ত্রুটি 0.05 সেমি দেখা দিলে গোলকটির তলের ক্ষেত্রফলের ত্রুটি কত হবে নির্ণয় কর।

[**উত্তর** : 251.3 বর্গ সেমি]

5.15 উচ্চতর ঘাতের উত্তরোত্তর অন্তরকলন

যদি, একটি অপেক্ষক $f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে $f(x)$-এর অন্তরকলজ $f'(x)$ একটি x-এর অপেক্ষক। এখন $f'(x) = \phi(x)$ অপেক্ষকটি অন্তরকলনযোগ্য হলে $\phi(x)$-এর অন্তরকলজকে $f(x)$-এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ বলা হয় এবং নিচের যেকোন একটি প্রতীক দ্বারা লেখা হয় :

$$f''(x), f^2(x), \frac{d^2}{dx^2}f(x), D^2f(x) \qquad D \equiv \frac{d}{dx}$$

আবার, দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজটি অন্তরকলনযোগ্য হলে তৃতীয় ক্রমের অন্তরকলজ পাওয়া যায়। এইভাবে ধাপে ধাপে এগিয়ে আমরা n-তম ক্রমের অন্তরকলজ পাবো যেটি,

$$f''(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f^{n-1}(x+h) - f^{n-1}(x)}{h}$$

ধর্ম : **1.** $\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x) \pm g(x)\} = \dfrac{d^n}{dx^n}f(x) \pm \dfrac{d^n}{dx^n}g(x)$

প্রমাণ : দেখুন, $\dfrac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} = \dfrac{d}{dx}f(x) \pm \dfrac{d}{dx}g(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)\right\} = \frac{d^2}{dx^2}f(x) \pm \frac{d^2}{dx^2}g(x)$$

মনে করি ধর্মটি n = k-এর জন্য সত্য।

$$\therefore \quad \frac{d^k}{dx^k}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d^k}{dx^k} f(x) \pm \frac{d^k}{dx^k} g(x) \ldots (*)$$

* কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^k}{dx^k} f(x) \pm \frac{d^k}{dx^k} g(x)\right\}$$

$$= \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} f(x) \pm \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} g(x)$$

$\therefore$ উপপাদ্যটি n = k + 1-এর জন্য সত্য।

অর্থাৎ, উপপাদ্যটি n = k-এর জন্য সত্য হলে n = k + 1-এর জন্যও সত্য হবে।

যেহেতু, n = 1 সত্য, সুতরাং গাণিতিক আরোহন পদ্ধতিতে উপপাদ্যটি যেকোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার জন্য সত্য।

5.16 লাইবনিৎস্-এর উপপাদ্য (Leibnitz's Theorem)

বিবৃতি : যদি u এবং v, x-এর অপেক্ষক, উভয়ই n-বার অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = u_n v + n_{c_1} u_{n-1} \cdot v_1 + n_{c_2} u_{n-2} \cdot v_2 + \ldots + n_{c_r} u_{n-r} \cdot v_r + \ldots + uv_n$$

যেখানে, $u_r = \dfrac{d^r u}{dx^r}$, $v_r = \dfrac{d^r v}{dx^r}$

প্রমাণ : আমরা জানি,

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} = u_1 v + uv_1$$

$\therefore$ উপপাদ্যটি n = 1-এর জন্য সত্য।

n = 2 ধরলে,

$$\frac{d^2}{dx^2}(uv) = \frac{d}{dx}(vu_1 + uv_1) = \frac{d}{dx}(vu_1) + \frac{d}{dx}(uv_1)$$

$$= vu_2 + v_1 u_1 + uv_2 + u_1 v_1 = vu_2 + 2_{c_1} v_1 u_1 + uv_2$$

$\therefore$ n = 2-এর জন্য উপপাদ্য সত্য।

ধরা যাক্, n = m-এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য।

$$\therefore \quad \frac{d^m}{dx^m}(uv) = u_m v + m_{c_1} u_{m-1}, v_1 + m_{c_2} u_{m-2} \cdot v_2 + \ldots$$

$$\ldots + m_{c_r} u_{m-r} \cdot v_r + \ldots + uv_m \qquad \ldots (1)$$

x-র সাপেক্ষে (1)-কে অন্তরকলন করে

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(uv) = \frac{d}{dx}(u_m v) + \frac{d}{dx}(m_{c_1} u_{m-1} v_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{d}{dx}(m_{c_r} u_{m-r} v_r) + \ldots + \frac{d}{dx}(uv_m)$$

$$= (u_{m+1}v + u_m v_1) + m_{c_1}(u_m v_1 + u_{m-1}v_2) + \ldots$$

$$\ldots + m_{c_r}(u_{m-r+1}v_r + u_{m-r}v_{r+1}) + \ldots + (u_1 v_m + u.\, v_{m+1})$$

$$= u_{m+1}v + (1 + m_{c_1})u_m v_1 + (m_{c_1} + m_{c_2})u_{m-1}v_2 + \ldots$$

$$\ldots + ({}^m c_{r-1} +^m c_r)u_{m-r+1}v_r + \ldots + uv_{m+1}$$

$$= u_{m+1}v +^{(m+1)} c_1 u_{(m+1)-1}v_1 +^{(m+1)} c_2 u_{(m+1)-2}v_2 + \ldots$$

$$\ldots + {}^{(m+1)}c_r u_{(m+1)-r} . v_r + \ldots + uv_{m+1}$$

(যেহেতু, ${}^m c_r +^m c_{r-1} =^{(m+1)} c_r, r = 1, 2, \ldots, m$)

$\therefore$ দেখা গেল উপপাদ্যটি $n = m + 1$-এর জন্য সত্য।

যেহেতু, $n = 1$-এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য, সুতরাং গাণিতিক আরোহণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রমাণিত হ'ল উপপাদ্যটি যেকোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য সত্য।

5.16.1 উদাহরণ

(1) $y = x^n$, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা y-এর m-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করো $(m \le n)$।

সমাধান : $y = x^n$

$$\therefore \quad y_1 = nx^{n-1} \frac{dy}{dx} = n.\, x^{n-1}$$

$$y_2 = \frac{d}{dx} y_1 = n(n-1)x^{n-2}$$

....

....

ধরা যাক, $y_k = \frac{d^k y}{dx^n} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}, k \le x$

$$\therefore \quad y_{k+1} = \frac{d}{dx} y_k = n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)x^{n-k-1}$$

$$\therefore \quad y_m = n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}$$

মন্তব্য : $y_n = n!$, $y_{n+k} = 0$, যেখানে $k \ge 1$.

(2) $y = (ax + b)^m$, m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ; y_m-নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $y_1 = ma(ax + b)^{m-1}$

$y_2 = m(m-1)a^2 (ax + b)^{m-2}$

....

....

$y_k = m(m-1) \ldots (m-k+1)a^k (ax + b)^{m-k}, \ k \le m$

$\therefore \quad y_m = m_! \, a^m.$

(3) $y = e^{ax}$, n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

সমাধান : $y_n = a^n e^{ax}$

(4) $y = \dfrac{1}{x+a}$, n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রমাণ করতে হবে যে, $y_n = (-1)^n . n!/ (x+a)^{n+1}$

$$y_1 = -\frac{1}{(x+a)^2} = (-1)^1 . \frac{1}{(x+a)^{1+1}}$$

$$y_2 = (-1)^2 2! . \frac{1}{(x+a)^{2+1}}$$

....

....

মনে করি, $y_m = (-1)^m m! . \dfrac{1}{(x+a)^{m+1}}$

$$y_{m+1} = (-1)^m . \frac{m!(-m-1)}{(x+a)^{m+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}(m+1)!}{(x+a)^{m+2}}$$

আরোহ পদ্ধতিতে y_n পাই। $(x > -a)$

(5) $y = \log_e (x + a)$; n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

সমাধান : $y_1 = \dfrac{1}{(x+a)}$,

$\therefore$ উদা. (4) থেকে, $y_n = \dfrac{(-1)^{n-1}.(n-1)!}{(x+a)^n}$.

(6) $y = \sin (ax + b)$, n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

সমাধান : $y_1 = a \cos (ax + b) = a \sin \left\{\dfrac{\pi}{2} + ax + b\right\}$

$$y_2 = a^2 \cos\left\{\frac{\pi}{2} + ax + b\right\} = a^2 \sin\left\{\frac{2\pi}{2} + ax + b\right\}$$

....

....

মনে করি, $y_m = a^m \sin\left(\frac{m\pi}{2} + ax + b\right)$

$$y_{m+1} = a^m . a \cos\left(\frac{m\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$= a^{m+1} \sin\left\{\frac{(m+1)\pi}{2} + ax + b\right\}$$

$y_n = a^n \sin\left\{n.\frac{\pi}{2} + ax + b\right\}$ (গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে)

(7) $y = \cos(ax + b)$, n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

সমাধান : **উদা**. (6)-এর মতো করো,

$$y_n = a^n \cos\left\{\frac{n\pi}{2} + ax + b\right\}$$

(8) যদি, $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ হয়, তবে প্রমাণ কর,

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0, |x| < 1$$

সমাধান : $y = \sin(m \sin^{-1}x)$

$$\therefore y_1 = \cos(m \sin^{-1}x). \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}}$$

বা, $\sqrt{1 - x^2} . y_1 = m. \cos(m \sin^{-1} x)$

আবার, x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই,

$$\sqrt{1 - x^2} . y_2 - \frac{xy_1}{\sqrt{1 - x^2}} = - \frac{m^2}{\sqrt{1 - x^2}} \sin(m \sin^{-1} x)$$

বা, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2 \sin(m \sin^{-1}x) = 0$

বা, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$

এখন, লাইবনিৎসের উপপাদ্য-এর দ্বারা (i)-এর n-তম অন্তরকলজ নিলে

$$\{(1 - x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - n(n-1)y_n\} - \{xy_{n+1} + xy_n\} + m^2 y_n = 0$$

বা, $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0.$

(9) যদি, $y = \tan^{-1} x$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 + x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$

এবং $(1 + x^2)y_{n+2} + (n + 1)xy_{n+1} + n(n + 1)y_n = 0.$

সমাধান : $y = \tan^{-1}x$-কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$y_1 = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{বা, } (1 + x^2)y_1 = 1$$

আবার, x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই,

$$(1 + x^2)y_2 + 2xy_1 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{(i)}$$

এখন লাইবনিৎস-এর উৎপাদকের সাহায্যে (i)-এর উভয়পক্ষের n-তম অন্তরকলজ নিলে পাই,

$$\{(1+x^2)y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n\} + 2\{xy_{n+1} + ny_n\} = 0$$

বা, $(1+x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$

(10) যদি, $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$, $(x > 0)$, তবে দেখাও যে,

$$x^2y_2 + xy_1 + y = 0 \text{ এবং } x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

সমাধান : $y = a \cos(\log_e x) + b \sin(\log_e x)$

$\therefore\; y_1 = -\frac{a}{x}\sin(\log_e x) + \frac{b}{x}\cos(\log_e x)$

বা, $xy_1 = -a \sin(\log_e x) + b \cos(\log_e x)$

উভয়পক্ষের x-সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$xy_2 + y_1 = -\frac{a}{x}\cos(\log_e x) - \frac{b}{x}\sin(\log_e x)$$

বা, $x^2y_2 + xy_1 = -[a\cos(\log_e x) + b\sin(\log_e x)]$

বা, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

এখন লাইবনিৎসের উপপাদ্যের সাহায্যে n-তম অন্তরকলজ করলে

$$x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$$

বা, $x^2y_{n+2} + (2n+1)y_{n+1}x + (n^2+1)y_n = 0$

(11) $p^2 = a^2 \text{cas}^2\theta + b^2 \sin^2\theta$, হলে দেখাও যে $p + \frac{d^2p}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{p^3}$

সমাধান : $p^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$

θ–এর সাপেক্ষে উভয়পক্ষ অন্তরকলন করে পাই,

$$p\frac{dp}{d\theta} = (b^2 - a^2)\sin\theta\cos\theta$$

আবার, θ-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই,

$$p\frac{d^2p}{d\theta^2} + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2 = (b^2 - a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= (b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) - p^2$$

$$\therefore \quad p.\frac{d^2p}{d\theta^2} + p^2 = (b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) - \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2$$

$$= (b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) - \frac{(b^2 - a^2)^2\sin^2\theta.\cos^2\theta}{p^2}$$

$$= \frac{a^2b^2}{p^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = \frac{a^2b^2}{p^2}$$

$$\therefore \frac{d^2p}{d\theta^2} + p = \frac{a^2b^2}{p^3}.$$

(12) যদি, $U = \dfrac{Lx + M}{x^2 - 2Bx + C}$ হয়, যেখানে $L, M, B, C \in R$;

দেখাও যে,

$$\frac{x^2 - 2Bx - C}{(n+1)(n+2)}U_{n+2} + \frac{2(x-B)}{(n+1)}U_{n+1} + U_n = 0$$

চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থবহ।

সমাধান : $(x^2 - 2Bx + c)\ U = Lx + M$

x-এর সাপেক্ষে পরপর দুইবার অন্তরকলন করে পাই,

$$2(x - B)U + (x^2 - 2Bx + C)U_1 = L$$

$$2U + 2(x - B)U_1 + 2(x - B)U_1 + (x^2 - 2Bx + C)U_2 = 0$$

$$(x^2 - 2Bx + C)U_2 + 4(x - B)U_1 + 2U = 0$$

লাইবনিৎস তত্ত্ব প্রয়োগে x-এর সাপেক্ষে অবকলনে পাই,

$$(U_2)_n(x^2 - 2Bx + c) +^n c_1.\frac{d}{dx}(x^2 - 2Bx + C)(U_2)_{n-1} +^n c_2.\frac{d^2}{dx^2}(x^2 - 2Bx + C)(U_2)_{n-2}$$

$$+4\left[(U_1)_n(x - B) +^n c_1.(U_1)_{n-1}.\frac{d}{dx}(x - B)\right] + 2U_n = 0$$

$$(x^2 - 2Bx + C)U_{n+2} + U_{n+1}[2(x - B)n + 4(x - B)] + U_n[n(n-1) + 4n + 2] = 0$$

$$\frac{(x^2 - 2Bx - C)}{(n+1)(n+2)}U_{n+2} + \frac{2(x-B)}{n+1}U_{n+1} + U_n = 0$$

(13) যদি $f(x) = \tan x$ হয়, দেখাও যে

$$f^n(0) - {}^nc_2f^{n-2}(0) + {}^nc_4f^{n-4}(0) \ldots. = \sin\frac{n\pi}{2}$$

সমাধান ঃ $f(x)\cos x = \sin x$

লাইবনিৎস তত্ত্বের সাহায্যে

$$f^n(x)\cos x + {}^nc_1f^{n-1}(x)(-\sin x) + {}^nc_2f^{n-2}(x)(-\cos x) + {}^nc_3f^{n-3}(x)(\sin x)$$

$$+ {}^nc_4 f^{n-4}(x)(\cos x) + \cdots = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

$x = 0$ বসিয়ে $f^n(0) - {}^nc_2 f^{n-2}(0) + {}^nc_2 f^{n-4}(0) \ldots\ldots = \sin\frac{n\pi}{2}$

(14) দেখাও যে $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)$-এর মান $x = 0$ বিন্দুতে 0 হবে যদি n যুগ্ম হয় এবং $-\underline{\lfloor n}$ হবে যদি n অযুগ্ম হয় এবং 1-এর চেয়ে বড় হয়।

সমাধান ঃ $\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right]$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right) = \frac{(-1)^n . n!}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right], n \geq 2$$

$x = 0$ বিন্দুতে পাই, $\frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{1^{n+1}} + \frac{1}{(-1)^{n+1}}\right] = \begin{cases} -\underline{\lfloor n}, n \text{ অযুগ্ম } (> 1) \\ 0, n \text{ যুগ্ম} \end{cases}$

(15) $y = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, y_n নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $y = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$

$x^2 + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$

$x = 1 \Rightarrow A = 1,\ x = 2 \Rightarrow B = -5,\ x = 3 \Rightarrow C = 5$

$\therefore \quad y = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$

অতএব $y_n = \frac{(-1)^n . n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{5}{(x-2)^{n+1}} + \frac{5}{(x-3)^{n+1}}\right]$

(16) $y = \frac{1}{x^2+16}$, y_n নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y = \frac{1}{8i}\left[\frac{1}{x-4i} - \frac{1}{x+4i}\right]$

$$y_n = \frac{(-1)^n . n!}{8i}\left[(x-4i)^{-(n+1)} - (x+4i)^{-(n+1)}\right]$$

$x = r\cos\theta,\ 4 = r\sin\theta$

$y_n = \frac{(-1)^n . n!}{8i} . r^{-(n+1)}[\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta - \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta]$

(De Moiver উপপাদ্যের সাহায্যে)

$$= \frac{(-1)^n . n! \sin(n+1)\theta}{4r^{(n+1)}} \text{ যেখানে } r = \sqrt{(x^2+16)}, \theta = \tan^{-1}\frac{4}{x}$$

5.17 প্রশ্নাবলী

(1) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$ হলে দেখাও যে $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

(2) $\sin y = x \sin(a+y)$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

(3) যদি, $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\text{etc. to } \infty}}}$ হয় তবে, প্রমাণ করো, $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$

(4) $y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ হলে $\frac{d^n y}{dx^n}$ নির্ণয় করো।

(5) $\log_{10}e = 0.4343$ হইলে (i) $\log_e 10.1$ ও (ii) $\log_{10}10.1$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

(6) $1° = 0.0175$ রেডিয়ান ও $1' = 0.00029$ রেডিয়ান হলে, (i) $\text{cosec}^2 46°$, (ii) $\cos 32°$. (iii) $\tan 45°58'$-এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

(7) যদি, $y = (\sin^{-1}x)^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2 y_n = 0.$$

(8) যদি, $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$$

(9) $y = x^{n-1}\log_e x$ হলে প্রমাণ কর $y_n = \frac{\lfloor(n-1)}{x}$

(10) $y = \cos(10\cos^{-1}x)$ হলে দেখাও যে, $(1-x^2)y_{12} = 21xy_{11}$

(11) $y = x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ হলে প্রমাণ কর, $y_n = (-1)^n(n-2)!\left[\frac{x-n}{(x-1)^n} - \frac{x+n}{(x+1)^n}\right]$

(12) $y = \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}$, y_n নির্ণয় করো।

(13) যদি $\cos^{-1}\frac{y}{b} = \left(\log\frac{x}{n}\right)^n$ হয়, প্রমাণ করো যে,

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$$

(14) $y = \left[x + \sqrt{1 + x^2}\right]^m$ হলে দেখাও যে $(1 + x^2)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$ এবং এটি থেকে $x = 0$ বিন্দুতে y_n নির্ণয় করো।

5.18 সহায়ক গ্রন্থ এবং ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ

একক 1 থেকে একক 5-এর সহায়ক পুস্তক :

1. Introduction to Real Analysis—Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert (John Wiley & Sons, INC)
2. Real analysis—B. K. Lahiri, K. C. Roy (World Press Pvt. Ltd., Calcutta)
3. Differential Calculus—Shanti Narayana. (Shyamlal Charitable Trust, New-Delhi)
4. Differential Calculus—B. C. Das, B. N. Mukherjee (U. N. Dhur and Sons Pvt. Ltd., Kolkata)
5. A Course of Mathematical Analysis—Shanti Narayan, (S. Chand & Co. Ltd. New Delhi)

ব্যবহৃত শব্দ :

অন্তরকলজ—Derivative

অন্তরকল—Differential

অন্তরকলনযোগ্য—Differentiability

অপেক্ষক—Function

অন্তরাল—Interval

সামীপ্য—Neighbourhood

সন্ততি—Continuity

প্রাচলিক অপেক্ষক—Parametric Function

5.19 সারাংশ

অপেক্ষকের অন্তরকলজের ধারণা এই অধ্যায়ের আলোচ্য বিষয়। অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয়ের বিবিধ পদ্ধতি এবং উত্তরোত্তর অন্তরকলজের সংজ্ঞা ও তার বীজগণিত এখানে আলোচনা করা হয়েছে।

একক 6 ❑ রোলের উপপাদ্য, মধ্যমান উপপাদ্যসমূহ ও লপিতার নিয়ম

গঠন ঃ

6.1 প্রস্তাবনা

ফরাসী গণিতজ্ঞ মাইকেল রোল (১৬৫২-১৭১৯)-ই প্রথম বহুপদরাশি এবং ঐ বহুপদরাশির অন্তরকলনের মাধ্যমে প্রাপ্ত বহুপদরাশির বীজের মধ্যেকার সম্পর্ক নিয়ে গুরুত্বপূর্ণ তত্ত্ব উপস্থিত করেন। পরে ঐ তত্ত্ব বাস্তবমান বিশিষ্ট একচল বাস্তব চলের অপেক্ষকের ক্ষেত্রেও প্রসারিত হয় এবং অন্তরকলন বিদ্যার ক্ষেত্রে ঐ তত্ত্বের সুদূরপ্রসারী প্রভাব পরিলক্ষিত হয়।

6.2 প্রারম্ভিক ধারণাসমূহ

(ক) $f : [a, b] \to R$ অপেক্ষকটি বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে সন্তত হবে যদি

$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$

এবং $a < c < b$ এর ক্ষেত্রে $\lim_{x \to c-0} f(x) = \lim_{x \to c+0} f(x) = f(c)$ হয়

(খ) উক্ত f মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য হবে যদি প্রতিটি c, $a < c < b$-এর ক্ষেত্রে $\lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ হয়।

(গ) বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে সন্তত অপেক্ষক সবসময়েই সীমাবদ্ধ হবে এবং ঐ অন্তরালের দুটি বিন্দুতে অপেক্ষকের মান ঊর্ধ্বসীমা ও অধঃসীমার সমান হবে।

(ঘ) $f : [a, b] \to R$ এবং $a < c < b$।

যদি $f'(c) > 0$ হয়, তবে $\delta > 0$-এর অস্তিত্ব থাকবে

যার জন্য f(x), $(c - \delta, c + \delta)$-এ ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক হবে।

যদি $f'(c) < 0$ হয়, তবে $\eta < 0$-এর অস্তিত্ব থাকবে

যার জন্য f(x), $(c - \eta, c + \eta)$-এ ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক হবে।

6.3 রোলের উপপাদ্য

বিবৃতি : $f : [a, b] \to R$ এরূপ একটি অপেক্ষক যা

(ক) বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে সন্তত

(খ) মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য

(গ) $f(a) = 0 = f(b)$।

তবে মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তত একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব থাকবে যার জন্য $f'(c) = 0$ হবে।

প্রমাণ : যেহেতু f, বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে সন্তত, সুতরাং f, [a, b]-তে সীমাবদ্ধ অপেক্ষক। যদি M, m অন্তরাল [a, b]-তে f-এর ঊর্ধ্বসীমা ও অধঃসীমা হয়, তবে উক্ত অন্তরালে দুটি c, d-এর অস্তিত্ব থাকবে যার জন্য $f(c) = M$, $f(d) = m$ হবে।

মনে করা যাক্ $M = m$

যেহেতু সকল $x \in [a, b]$-এর জন্য $m \le f(x) \le M$, সুতরাং f(x) ধ্রুবক-অপেক্ষক ও $f'(x) = 0$, $a < x < b$.

মনে করা যাক্ $M \neq m$

যেহেতু $f(a) = f(b)$, সুতরাং f(c) ও f(d) উভয়েই f(a) ও f(b)-এর সমান হতে পারে না। মনে করি $f(c) \neq f(a)$, $f(c) \neq f(b)$। অতএব $a < c < b$ এবং ফলে $f'(c)$-এর অস্তিত্ব আছে।

যদি $f'(c) > 0$ হয়, তবে $\delta > 0$-এর অস্তিত্ব থাকবে যার জন্য $f(x) > f(c)$, $c < x < c + \delta$ হবে অর্থাৎ $f(x) > M$ হবে যা অসম্ভব। সুতরাং $f'(c) \not> 0$।

যদি $f'(c) < 0$ হয়, তবে $\eta > 0$-এর অস্তিত্ব থাকবে যার জন্য $f(x) > f(c)$, $c - \eta < x < c$ হবে অর্থাৎ $f(x) > M$ হবে যা অসম্ভব। সুতরাং $f'(c) \not< 0$।

অতএব $f'(c) = 0$ হবে।

মন্তব্য ঃ (১) তৃতীয় শর্ত $f(a) = 0 = f(b)$-টি $f(a) = f(b) =$ যেকোন অশূণ্য সংখ্যার ক্ষেত্রেও সত্য।

মনে করা যাক্ $f(a) = f(b) = K\ (\in R)$

$\phi : [a, b] \to R$ অপেক্ষকটি গঠন করা হল এইভাবে যে $\phi(x) = f(x) - K$

সুতরাং ϕ, $[a, b]$ তে সন্তত, (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য এবং $\phi(a) = \phi(b) = 0$। সুতরাং, $c \in (a, b)$-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $\phi'(c) = 0$ অর্থাৎ $f'(c) = 0$ হবে।

অতএব তৃতীয় শর্তটি $f(a) = f(b)$ গ্রহণযোগ্য।

(২) রোলের উপপাদ্যে বিবৃত শর্তগুলি পর্যাপ্ত কিন্তু আবশ্যিক নয়।

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x},\ 1 < x < 2$$

লক্ষনীয় অপেক্ষকটি $x = 1$ ও $x = 2$ বিন্দুদুটিতে সংজ্ঞাত নয়। তবে $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$। সুতরাং মুক্ত অন্তরাল $(1, 2)$-এর একটি অন্তর্বিন্দুতে $f'(x)$ শূন্য যদিও রোলের শর্তাবলী f পূরণ করছে না।

(৩) রোলের উপপাদ্যের শর্তগুলিকে লঘু করা যায় না।

(ক) $f(x) = |x|,\ a \le x \le b$

কোন বিন্দুতেই $f'(x)$ শূন্য নয়। এখানে $f(a) = f(b)$ হবে না।

(খ) $f(x) = 1 - |x|,\ -1 \le x \le +1$

$$= \begin{cases} 1 + x, & -1 \le x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1 - x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1,\ \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

সুতরাং $Rf'(0) \ne Lf'(0)$ এবং $x = 0$ বিন্দুতে f'-এর অস্তিত্ব নেই। অন্তরালের কোন বিন্দুতেই $f'(x)$ শূন্য নয়।

(৪) রোলের উপপাদ্যের প্রমাণ সূচিত করেছে যে যদি f অপেক্ষককে মুক্ত অন্তরাল (a, b)-এর পরিবর্তে বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে অন্তরকলনযোগ্য ধরা হয়, সেক্ষেত্রেও উক্ত c-বিন্দুটি অন্তরালের অন্তর্বিন্দুই হবে, প্রান্তবিন্দু হবে না।

(৫) রোলের উপপাদ্যকে নিম্নভাবেও বিবৃত করা যায় :

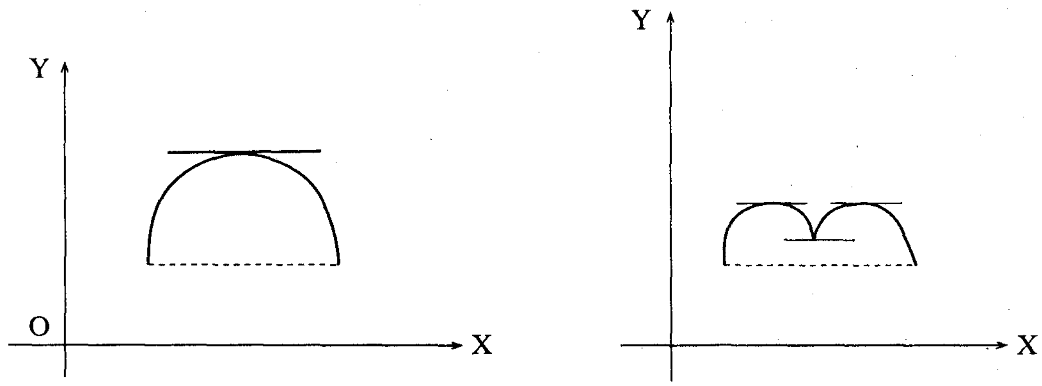
(ক) মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অপেক্ষক f অন্তরকলনযোগ্য

(খ) a ও b বিন্দুতে f সন্তত

(গ) $f(a) = f(b)$ হইলে (a, b)-অন্তরালে $f'(x) = 0$-এর একটি বীজ থাকবে।

(৬) মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে রোলের উপপাদ্য প্রযুক্ত হবে যদি $\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x)$ হয়।

6.4 রোলের উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্য



কোন সন্তত অপেক্ষকের লেখচিত্রের দুটি প্রান্তবিন্দু যদি একই অনুভূমিক রেখায় থাকে এবং ঐ লেখচিত্রের প্রান্তবিন্দুদ্বয় বাদে যদি অপর বিন্দুগুলিতে স্পর্শক অঙ্কন করা যায়, সেক্ষেত্রে লেখচিত্রের উপরে অন্তত একটি বিন্দু থাকবে যে বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সমান্তরাল হবে।

6.5 ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য অথবা অন্তরকলনবিদ্যার প্রথম মধ্যমান উপপাদ্য

প্রস্তাবনা ঃ

ফরাসী গণিতজ্ঞ যোশেফ লুই ল্যাংরাঞ্জ (১৭৩৬-১৮১৩) এই উপপাদ্যটি উপস্থাপিত করেন। পরবর্তীকালে বাস্তব চলের অপেক্ষক তত্ত্ব ও ফলিত গণিতের বহু শাখায় এর প্রয়োগতত্ত্বের সূচনা হয়।

বিবৃতি $f : [a, b] \rightarrow R$

(ক) বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে সন্তত।

(খ) মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তত এমন একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$ হবে।

প্রমাণ : অপেক্ষক $\phi : [a, b] \rightarrow R$ গঠন করা হল এরূপভাবে যে

$\phi(x) = f(x) + A.x$ যেখানে $\phi(b) = \phi(a)$ দ্বারা ধ্রুবক A-এর মান নির্ণীত হবে।

অতএব $A = -\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

এখন $f(x)$, A, x প্রত্যেকেই $[a, b]$-তে সন্তত, সসীম সংখ্যক সন্তত অপেক্ষক সমূহের যোগফল ও গুণফল সন্তত বলে ϕ অপেক্ষকটি $[a, b]$-তে সন্তত।

(a, b) অন্তরালে f'-এর অস্তিত্ব আছে বলে ঐ অন্তরালে ϕ'-এরও অস্তিত্ব আছে। সুতরাং ϕ অপেক্ষকটি

[a, b] অন্তরালে রোলের উপপাদ্যর সর্ব শর্ত পূরণ করে। ফলে রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী, (a, b)-তে অন্তত এমন একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $\phi'(c) = 0$ হবে অর্থাৎ $-A = f'(c)$ হবে।

সুতরাং $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ হবে।

মন্তব্য : (১) ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যের শর্তগুলি পর্যাপ্ত, কিন্তু আবশ্যিক নয়।

$f : [0, 3] \to R$ এরূপভাবে সংজ্ঞাত যে

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ 0 \le x < \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ \frac{2x}{3} + 1, \ \frac{3}{2} < x \le 3 \end{cases}$$

f অপেক্ষকটি $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে সন্তত নয়, কেননা $f\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 0, f\left(\frac{1}{2} + 0\right) = 1$

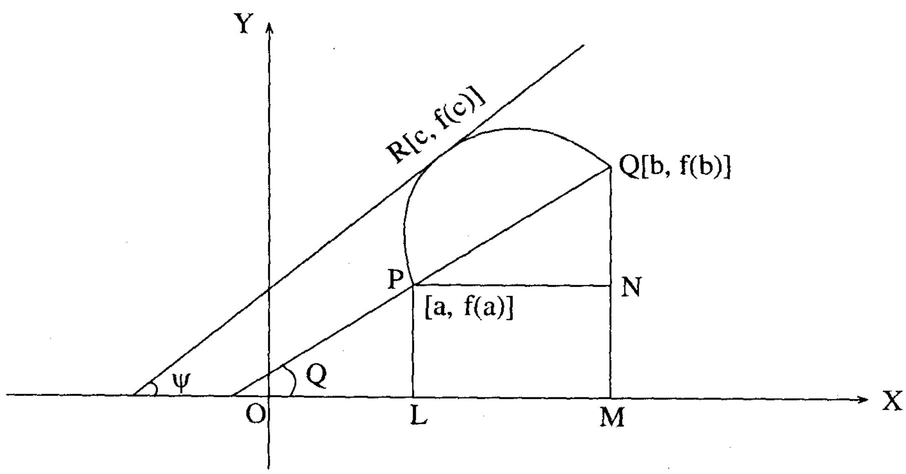
কিন্তু $x = \frac{3}{4}$ বিন্দুতে $\dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'\left(\frac{3}{4}\right)$ হয়।

(২) রোলের উপপাদ্যের ন্যায় এখানেও শর্তগুলিকে লঘু করা যায় না।

(৩) f অপেক্ষকটি বদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে অন্তরকলনযোগ্য হলেও উক্ত c বিন্দুর অবস্থানের কোন বদল হবে না।

(৪) c-এর বিকল্প রূপ : এমন $\theta \in (0, 1)$ থাকবে যার জন্য $c = a + \theta(b - a)$ হবে।

6.6 মধ্যমান উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্য



এখানে $\tan\theta = \frac{QN}{PN} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\tan\psi = f'(c) = R$ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা

সুতরাং $\tan\theta = \tan\psi$

সন্তত অপেক্ষকের লেখচিত্রের প্রান্তবিন্দুদ্বয় ছাড়া অন্য সব বিন্দুতে স্পর্শক আঁকা গেলে ঐ লেখচিত্রের উপর অন্তত একটি বিন্দু থাকবে যে বিন্দুতে স্পর্শকটি প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী জ্যা-এর সমান্তরাল হবে।

6.7 কশি-র মধ্যমান উপপাদ্য

প্রস্তাবনা : ফরাসী গণিতজ্ঞ অগাস্টিন-লুই কশি (১৭৮৯-১৮৪৭) নিম্ন উপপাদ্যটি উপস্থাপিত করেন। ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যটিকে এটি থেকে নির্ণয় করা যায় এবং সেজন্য কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যকে ল্যাংরাঞ্জের উপপাদ্যের বিস্তৃত আকার হিসাবে গণ্য করা হয়। অপেক্ষকসমূহের বিশেষ আকারের বীজগাণিতিক বিন্যাসের সীমা নির্ধারণের ক্ষেত্রে এই উপপাদ্যের প্রভূত অবদান রয়েছে।

বিবৃতি : অপেক্ষকদ্বয় $f, g : [a, b] \to R$

(ক) বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে সন্তত

(খ) মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য

(গ) $g'(x) \neq 0,\ a < x < b$

সেক্ষেত্রে (a, b) অন্তরালে অন্তত একটি বিন্দু c থাকবে

যার জন্য $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ হবে।

প্রমাণ : এখানে $g(b) = g(a)$ প্রযোজ্য নয়।

কেননা $g(b) = g(a)$ হলে (ক) ও (খ)-তে অপেক্ষক g-এর উপর বিবৃত শর্তাবলীর সাহায্যে দেখানো যায় যে (a, b)-তে অন্তত একটি বিন্দু c থাকবে যাতে $g'(c) = 0$ হইবে—ইহা (গ)-এর পরিপন্থী। সুতরাং $g(b) \neq g(a)$.

অপেক্ষক $\phi : [a, b] \to R$ নিম্নভাবে গঠন করা হল :

$$\phi(x) = f(x) + A.g(x)$$

যেখানে $\phi(b) = \phi(a)$ দ্বারা ধ্রুবক A-কে নির্ণয় করা যাবে।

শর্ত (ক) অনুযায়ী ও সন্তত অপেক্ষকের বীজগণিত অনুযায়ী ϕ, $[a, b]$-তে সন্তত হবে। শর্ত (খ) অনুযায়ী, (a, b)-তে ϕ'-এর অস্তিত্ব আছে। ফলে ϕ, $[a, b]$-তে রোলের সব শর্ত পূরণ করে। সুতরাং রোলের শর্ত অনুযায়ী, (a, b)-তে অন্তত একটি বিন্দু c থাকবে যার ক্ষেত্রে $\phi'(c) = 0$ হবে।

$\phi'(c) = 0$ হতে পাই $-A = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

$\phi(b) = \phi(a)$ হতে পাই $-A = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

সুতরাং $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

মন্তব্য : (ক) $g(x) = x,\ a \le x \le b$, হলে ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য পাওয়া যায়।

(খ) কশির উপপাদ্যটি সরাসরি f ও g-এর উপর ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাওয়া যায় না। $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ অন্তত একটি $c \in (a, b)$-এর জন্য এবং

$g(b) - g(a) = (b - a)\ g'(d)$ অন্তত একটি $d \in (a, b)$-এর জন্য। এখানে $c = d$-এর নিশ্চয়তা নাই।

(গ) কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের প্রথম দুটি শর্তের ভিত্তিতে নিম্ন ফল পাওয়া যায় :

$$\{f(b) - f(a)\}\ g'(c) = \{g(b) - g(a)\}f'(c)$$

$\phi : [a, b] \to R$ নিম্নভাবে গঠন করা হল :

$$\phi(x) = \{f(b) - f(a)\}\ g(x) - \{f(b) - g(a)\}\ f(x)$$

সেক্ষেত্রে ϕ, [a, b]-তে সন্তত ও (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য হবে। $\phi(b) = \phi(a)$ হবে। ফলে রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী (a, b)-তে অন্তত একটি বিন্দু c থাকবে যার জন্য $\phi'(c) = 0$ হবে। ফলে

$$\{f(b) - f(a)\}g'(c) - \{g(b) - g(a)\}f'(c) = 0 \text{ হবে।}$$

6.8 উদাহরণ

(1) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$

$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ অন্তরালে রোলের উপপাদ্য প্রযুক্ত হতে পারে কিনা পরীক্ষা কর। যদি ঐ প্রয়োগ সম্ভব হয়, তবে যথাযথ মধ্যবর্তী মান বা মানগুলি নির্ণয় করো।

উত্তর : প্রদত্ত অপেক্ষকটি বহুপদরাশি এবং x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য সন্তত। ফলে f, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$-তে সন্তত হবে $f'(x) = 6x^2 + 2x - 4$-এর অস্তিত্ব $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$-আছে। $f(\sqrt{2}) = 0 = f(-\sqrt{2})$. অতএব ওই অন্তরালে f-এর ক্ষেত্রে রোলের উপপাদ্যটি প্রযুক্ত হবে।

$f'(x) = 0$ থেকে পাই, $x = \dfrac{2}{3}, -1 \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

(2) $f : [0, 2] \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & 0 \le x < 1 \\ 3 + x, & 1 \le x < 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$$

রোলের উপপাদ্যের তিনটি শর্ত পূরণ হয় কিনা পৃথক পৃথক ভাবে পরীক্ষা কর।

উত্তর : $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}(3+x) = 5, f(2) = 5, x = 2$ বিন্দুতে সন্তত।

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}(x^2+3) = 4,\ \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}(3+x) = 4$$

$f(1-) = f(1+) = 4 = f(1)$, সন্তত হবে $x = 1$ বিন্দুতে।

f, [0, 1] ও (1, 2)-তে ও সন্তত। সুতরাং f, [0, 2]-তে সন্তত।

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{x^2+3-4}{x-1} = \lim_{x\to 1-}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\frac{3+x-4}{x-1} = \lim_{x\to 1+}(x-1)/(x-1) = 1$$

$Lf'(1) \neq Rf'(1)$ অতএব $x = 1$ বিন্দুতে f'-এর অস্তিত্ব নেই।

$f(0) = 3$, $f(2) = 5$, অতএব $f(0) \neq f(2)$

রোলের উপপাদ্যের দ্বিতীয় ও তৃতীয় শর্ত f পূরণ করে না।

(3) দেখাও যে $3x^5 + 15x - 8 = 0$ সমীকরণটির একটি মাত্র বাস্তব বীজ থাকবে।

উত্তর : $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ অপেক্ষকটি বহুপদরাশি বলে x-এর সরল বাস্তব মানের জন্য সন্তত। $f(0) = -8$, $f(1) = 10$ এবং ফলে $f(0)\, f(1) < 0$ হবে। সন্তত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে বোলজানো (Bolzano) উপপাদ্য অনুযায়ী (0, 1) মুক্ত অন্তরালে $f(x) = 0$ এর অবশ্যই বাস্তব বীজ থাকবে।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি x_1 ও x_2 উক্ত অন্তরাল (0, 1)-এ $f(x) = 0$-এর দুইটি ভিন্ন বাস্তব বীজ অর্থাৎ $f(x)_1 = 0 = f(x_2)$। রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী, (x_1, x_2)-এ $f'(x) = 0$ এর অন্তত একটি বাস্তব বীজ থাকবে।

$f'(x) + 15(x^4 + 1)$-কিন্তু x-এর কোন বাস্তব মানের জন্য $f'(x) = 0$ হতে পারে না।

সেকারণে $f(x) = 0$ এর বাস্তব বীজটি অনন্য।

(4) $f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{\pi}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করে দেখাও, মুক্ত অন্তরাল (0, 1)-এ অসীম সংখ্যক বিন্দুতে $f'(x) = 0$ হবে।

উত্তর : প্রদত্ত অপেক্ষকটি সকল $x \geq 0$-এর জন্য সন্তত।

$x > 0$ হলে $f'(x) = \sin\dfrac{\pi}{x} - \dfrac{\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x}$

সুতরাং মুক্ত অন্তরালে (0, 1)-এর প্রতিটি বিন্দুতে f'-এর অস্তিত্ব আছে।

$\sin\dfrac{\pi}{x} = 0$ সম্ভব হবে যদি $x = \dfrac{1}{k}$ যেখানে k যেকোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

উপরোক্ত আলোচনা অনুসারে k-এর সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যক মানের জন্য $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$-অন্তরালে $f'(x) = 0$ অন্তত একটি মানের জন্যও সন্তত হবে। যেহেতু স্বাভাবিক সংখ্যার সেটটি অসীম সেট, সুতরাং (0, 1)-এর অসীম সংখ্যক বিন্দুতে $f'(x) = 0$ হবে।

(5) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2,\ 0 \le x \le 1$

ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যটি প্রযুক্ত হবে কি?

উত্তর : f অপেক্ষকটি বহুপদরাশি বলে অন্তরাল [0, 1]-এ সন্তত। $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$-এর অস্তিত্ব অন্তরাল (0, 1)-এ আছে। অতএব ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যটি ঐ অন্তরালে প্রযোজ্য।

(6) ল্যাংরাঞ্জের উপপাদ্য প্রয়োগ করে $y = x^3$ বক্ররেখার উপর এমন বিন্দু নির্ণয় কর যে বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি ওই বক্ররেখার উপরিস্থ (–1, –1) ও (2, 8) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী জ্যা-এর সমান্তরাল হবে।

উত্তর : $f(x) = x^3$ অপেক্ষকটি [–1, 2] বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে সন্তত এবং $f'(x) = 3x^2$-এর (–1, 2)-তে অস্তিত্ব আছে। অতএব ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য অনুযায়ী (–1, 2)-তে এমন একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $f(2) - f(-1) = 3f'(c)$ হবে।

অর্থাৎ $8 + 1 = 9c^2 \Rightarrow c = \pm 1$

$c = -1$ মুক্ত অন্তরাল (–1, 2)-এর অন্তর্বিন্দু নয়, অতএব $c = 1$

ল্যাংরাঞ্জের উপপাদ্যর জ্যামিতিক তাৎপর্য অনুযায়ী (1, 1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি উক্ত জ্যা-এর সমান্তরাল হবে।

(7) দেখাও যে $x^2 - 2x + 3$ এবং $x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ অপেক্ষক দুটি বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল [1, 4]-এ কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের শর্তগুলি পূরণ করে। অতঃপর যথাযথ বিন্দুটি নির্ণয় কর।

উত্তর : $f(x) = x^2 - 2x + 3,\ g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ বহুপদরাশি বলিয়া f ও g উভয়েই, [1, 4]-এ সন্তত।

$f'(x) = 2x - 2,\ g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$

(1, 4)-এ f' ও g' উভয়ের অস্তিত্ব আছে।

$g'(x) = 0$ যখন $x = \dfrac{14 \pm \sqrt{196 - 240}}{6} \notin (1, 4)$

সুতরাং (1, 4)-এ $g'(x) \neq 0$

অতএব কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যটি এক্ষেত্রে প্রযোজ্য। কশি-র মধ্যমান উপপাদ্য অনুযায়ী (1, 4)-এ অন্তত একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য

$\dfrac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ হবে।

$\frac{11-2}{27-9} = \frac{2(c-1)}{3c^2-14c+20}$ অর্থাৎ $3c^2 - 14c + 20 = 4c - 4$

$c = 2, 4$ এদের মধ্যে একমাত্র $c = 2$ বিন্দুটি $(1, 4)$-এর অন্তর্বিন্দু।

(8) $f(x) = e^x$ ও $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ অপেক্ষক দুটি কি $[-3, 3]$ অন্তরালে কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের শর্ত পূরণ করে?

উত্তর : উভয় অপেক্ষকই $[-3, 3]$ অন্তরালে সন্তত হবে।

$f'(x) = e^x, g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, x = 0$ $(-3, 3)$-তে $g'(x) = 0$

কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের শর্ত পূরণ করে না।

(9) কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে f অপেক্ষকটি বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে $(b > a > 0)$ সন্তত এবং মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য হইলে (a, b)-তে অন্তত একটি বিন্দু c থাকবে যার ক্ষেত্রে

$f(b) - f(a) = cf'(c) \log \frac{b}{a}$ হবে।

উত্তর : ধরা যাক $g(x) = \log x,\ 0 < a \leq x \leq b$

অপেক্ষক g, $[a, b]$-তে সন্তত, $g'(x) = \frac{1}{x}$-এর অস্তিত্ব (a, b)-তে আছে এবং $g'(x) \neq 0$।

সুতরাং কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যটি f ও g-এর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। ফলে অন্তত একটি বিন্দু $c \in (a, b)$ থাকবে যার ক্ষেত্রে

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ হবে।

অর্থাৎ $f(b) - f(a) = cf'(c) \log \frac{b}{a}$ হবে।

(10) $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ হইলে দেখাও যে $\tan^{-1}x_2 - \tan^{-1}x_1 < x_2 - x_1$ হবে।

উত্তর : $f(x) = \tan^{-1}x$ অপেক্ষকটি $[x_1, x_2]$-তে সন্তত ও (x_1, x_2)-তে অন্তরকলনযোগ্য। ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে $\xi \in (x_1, x_2)$-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য

$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$ হবে

অর্থাৎ $\tan^{-1} x_2 - \tan^{-1} x_1 = \frac{x_2 - x_1}{1+\xi} < x_2 - x_1$

6.9 অনুশীলনী

(1) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$, $0 \le x \le 4$

রোলের উপপাদ্যটি কি উক্ত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে ঐ অন্তরালে প্রযোজ্য? যুক্তিসহ উত্তর দাও।

(2) $y = x^2$ অধিবৃত্তের উপর $A(1, 1)$ ও $B(3, 9)$ দুটি বিন্দু। AB-এর সমীকরণ নির্ণয় না করে ঐ অধিবৃত্তের উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করো যে বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি AB-এর সমান্তরাল হবে

(3) $x^2 + 2$ ও $x^2 - 1$ অপেক্ষক দুটির ক্ষেত্রে $[1, 2]$ বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে কশি-র মধ্যমান উপপাদ্য প্রযুক্ত হতে পারে কিনা যুক্তিসহ বল।

(4) $y = \ln \sin x$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$-এ রোলের উপপাদ্যটি প্রযুক্ত হবে কিনা যুক্তিসহ বল।

(5) যুক্তি দাও : বাস্তব সহগ বিশিষ্ট সমীকরণ

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots a_{n-1}\, x = 0$-এর একটি ধনাত্মক বীজ x_0 থাকলে

$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$ সমীকরণের একটি বীজ আছে যা x_0-এর চেয়ে ছোট।

(6) $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$ যেখানে m ও n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $f'(x) = 0$ সমীকরণটি সমাধান না করেই দেখাও যে $f'(x) = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ মুক্ত অন্তরাল $(0, 1)$-এ থাকবে।

(7) দেখাও যে c বাস্তব ধ্রুবক সংখ্যা হলে $x^3 - 3x + c = 0$ সমীকরণটির $(0, 1)$ মুক্ত অন্তরালে দুটি ভিন্ন বীজ থাকতে পারে না।

(8) ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে $\frac{a-b}{a} \le \ln\frac{a}{b} \le \frac{a-b}{b}$ যেখানে $0 < b \le a$ হবে।

(9) ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও যে

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \le \tan\alpha - \tan\beta \le \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}, 0 < \beta \le \alpha < \frac{\pi}{2}$$

(10) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ অপেক্ষক দুটি কি $[a, b]$ অন্তরালে $\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right)$ কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের শর্ত পূরণ করে? শর্তটি পূরণ হলে যথাযথ বিন্দুটি নির্ণয় কর।

(11) দেওয়া আছে যে $f(a + h) = f(a) + hf(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$, $a = 0$, $h = 3$ এবং $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$, θ-এর মান নির্ণয় করো।

(12) দেওয়া আছে $f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$, $0 < \theta < 1$ যেখানে $f(x) = \sin x$। দেখাও যে, $\lim_{h\to 0+} \theta = \frac{1}{2}$

6.10 অন্তরালে অপেক্ষকের ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান চরিত্র নির্ধারণে মধ্যমান উপপাদ্যের প্রয়োগ

প্রারম্ভিক ধারণা

পাঠকদের জানা আছে যে $f : [a, b] \rightarrow R$ অপেক্ষকটিকে ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক বলা হবে যদি যে কোন ভিন্ন বিন্দুযুগল x_1 ও x_2, $a \le x_1 < x_2 \le b$-এর ক্ষেত্রে $f(x_1) \le f(x_2)$ হয়। f-কে যথার্থ ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক বলা হবে যদি $a \le x_1 < x_2 \le b$-এর ক্ষেত্রে $f(x_1) < f(x_2)$ হয়।

অনুরূপভাবে, $a \le x_1 < x_2 \le b$-এর ক্ষেত্রে যদি $f(x_1) \ge f(x_2)$ হয়, তবে অপেক্ষকটিকে ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক এবং $f(x_1) > f(x_2)$ হলে যথার্থ ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক বলা হবে।

$\sin x$ অপেক্ষকটি $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-তে ক্রমবর্ধমান ও $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$-তে ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক।

সুতরাং 'অপেক্ষক f ক্রমবর্ধমান' কিংবা 'অপেক্ষক f ক্রমহ্রাসমান' এই বক্তব্যটি নিরর্থক। এক্ষেত্রে অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল উল্লেখ আবশ্যক।

একটি অপেক্ষক একটি অন্তরালে কোন্ শর্তে ক্রমবর্ধমান কিংবা ক্রমহ্রাসমান হবে সেটি ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যর সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

বিবৃতি : মনে কর f অপেক্ষকটি বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে সন্তত এবং মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে f-এর সসীম অন্তরকলজের অস্তিত্ব রয়েছে।

যদি (ক) (a, b)-এর সর্বত্র $f'(x) \ge 0$ হয়, f অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক হবে ($f'(x) > 0$) হলে f অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক হবে।

(খ) (a, b)-এর সর্বত্র $f'(x) \le 0$ হয়, f অপেক্ষকটি ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক হবে $f'(x) < 0$ হলে f অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক হবে।

(গ) (a, b)-এর সর্বত্র $f'(x) = 0$ হয়, f ধ্রুবক অপেক্ষক হবে।

প্রমাণ : f অপেক্ষকটি [a, b] অন্তরালে ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যর সব শর্ত পূরণ করে বলে $[x_1, x_2]$-তেও সব শর্ত পূরণ করবে। সুতরাং ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য অনুযায়ী (x_1, x_2) অন্তরালে অন্তত একটি বিন্দু c থাকবে যার জন্য

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \text{ হবে}$$

অতএব $f'(c) \ge 0$ হলে $f(x_2) \ge f(x_1)$

$f'(c) > 0$ হলে $f(x_2) > f(x_1)$

$f'(c) \le 0$ হলে $f(x_2) \le f(x_1)$

$f'(c) < 0$ হলে $f(x_2) < f(x_1)$

$f'(c) = 0$ হলে $f(x_2) = f(x_1)$

এই সম্পর্কগুলি প্রতিটি ভিন্ন বিন্দুযুগল x_1 ও x_2, $x_1 < x_2$-এর জন্য প্রযোজ্য।

6.11 উদাহরণ

(1) $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

উত্তর : f অপেক্ষকটি $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-তে সন্তত এবং $f'(x) = \cos x - \sin x$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$-এর ক্ষেত্রে $f'(x) > 0$ ও অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান।

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$-এর ক্ষেত্রে $f'(x) < 0$ ও অপেক্ষকটি ক্রমহ্রাসমান।

(2) $f(x) = 2x^2 - \ln x,\ x > 0$

উত্তর : সকল $x > 0$-এর জন্য f সন্তত এবং $f'(x) = 4x - \frac{1}{x}$–এর অস্তিত্ব রয়েছে।

$f'(x) \ge 0$ (বা > 0) হবে যদি $x \ge \frac{1}{2}$ হয় $\left(\text{বা } x > \frac{1}{2}\right)$ এবং $f'(x) \le 0$ (বা < 0) হবে যদি $x \le \frac{1}{2}$ $\left(\text{বা } x < \frac{1}{2}\right)$ হয়।

(3) সহগ p-এর কোন্ মানগুলির জন্য $x^3 - px$ সর্বত্র যথার্থ ক্রমবর্ধমান হবে?

উত্তর : $f(x) = x^3 - px$ অপেক্ষকটি x-এর সকল মানের জন্য সন্তত ও অন্তরকলনযোগ্য। $f'(x) = 3x^2 - p$ একমাত্র $p < 0$ হলে x-এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য $f'(x) > 0$ হবে।

(4) $f(x) = \sin x - bx + c$; $b, c \in R$। b-এর কোন্ মানগুলির জন্য f(x) সর্বত্র যথার্থ ক্রমহ্রাসমান হবে?

উত্তর : f অপেক্ষকটি সকল x-এর জন্য সন্তত এবং $f'(x) = \cos - b$-এর অস্তিত্ব রয়েছে। যেহেতু $|\cos x| \le 1$ সুতরাং $b > 1$ হলে সর্বত্রই $f'(x) < 0$ হবে ও ফলে f(x) সর্বত্র ক্রমহ্রাসমান হবে।

(5) প্রমাণ কর যে $0 < x < 1$ হলে

$$x - \frac{x^3}{3} < \tan^{-1} x < x - \frac{x^3}{6}$$

উত্তর : মনে করি $f(x)\ \tan^{-1} x - x + \frac{x^3}{6},\ 0 \le x \le 1$ উক্ত f অপেক্ষকটি [0, 1]-এ সন্তত এবং $f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 1)}{2(1 + x^2)}$-এর অস্তিত্ব (0, 1)-এ রয়েছে। $f'(x) < 0$ যখন $0 < x < 1$। ফলে অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমহ্রাসমান এবং $x > 0$-এর ক্ষেত্রে $f(x) < f(0)$

$$\tan^{-1} x - x + \frac{x^3}{6} < 0 \text{ অর্থাৎ } \tan^{-1} x < x - \frac{x^3}{6}$$

মনে করি, $g(x) = \tan^{-1} x - x - \frac{x^3}{3}$, $0 \le x \le 1$

g অপেক্ষক উক্ত অন্তরালে সন্তত এবং $g'(x) = \frac{x^4}{1+x^2}$-এর অস্তিত্ব আছে ও $g'(x) > 0$। সুতরাং g অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান। অতএব $x > 0$ হল $g(x) > g(0)$ এবং $\tan^{-1}x > x - \frac{x^3}{3}$

(6) দেখাও যে $\frac{x}{x+1} < \log(1+x) < x$, $x > 0$

উত্তর : মনে করি, $f(x) = x - \log(1+x)$, $x \ge 0$

f অপেক্ষকটি সন্তত এবং $f'(x) = \frac{x}{1+x} > 0$ যখন $x > 0$

সুতরাং f অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান এবং

$x > 0$-এর জন্য $f(x) > f(0)$ অর্থাৎ $x - \log(1+x) > 0$

মনে করি $g(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$, $x \ge 0$

g অপেক্ষকটি সন্তত এবং $g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$ যখন $x > 0$। সুতরাং $x > 0$-এর জন্য $g(x) > g(0)$ অর্থাৎ $\log(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0$

(7) দেখাও যে $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$ যখন $0 < x < \frac{\pi}{2}$

উত্তর : অপেক্ষক $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ নিম্নভাগে গঠন করা হল :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

f অপেক্ষকটি সন্তত। $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ -এর অস্তিত্ব আছে।

মনে করি, $g(x) = x\cos x - \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

g সন্তত এবং $g'(x) = -x\sin x < 0$। সুতরাং $x > 0$, $g(x) < g(0) = 0$ ফলে $f'(x) < 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$। সুতরাং f যথার্থ ক্রমহ্রাসমান এবং $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(x) < f(0)$.

অর্থাৎ $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

মন্তব্য : উদাহরণ 5, 6 ও 7-এ সংশ্লিষ্ট অপেক্ষকগুলিকে বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে গঠন করতে হবে।

অপেক্ষকের ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ধর্মটি যেহেতু ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য নির্ভর, সুতরাং বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে অপেক্ষকের গঠন গাণিতিক নিরিখে অত্যাবশ্যক। উদাহরণ 7-এ অপেক্ষকটিকে $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত করার জন্য $f(0) = 1$ ধরা হয়েছে।

6.12 অনুশীলনী

(1) দেখাও যে $x - \frac{x^2}{2} < ln(1+x) < x, x > 0$

(2) দেখাও যে $\tan x > x + \frac{x^2}{3}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(3) দেখাও যে $x < \log\frac{1}{1-x} < \frac{x}{1-x}, 0 < x < 1$

(4) দেখাও যে $\cos x + x \sin x > 1,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(5) দেখাও যে $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1, x > 0$

(6) কোন্ কোন্ অন্তরালে $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান হবে নির্ণয় কর।

6.13 অনির্ণেয় সীমা ও লপিতার নিয়ম

প্রস্তাবনা : দুই বা ততোধিক অপেক্ষকের মধ্যে বীজগণিতিক প্রক্রিয়ার মাধ্যমে প্রাপ্ত অপেক্ষক-রাশির সীমা নির্ধারণের ক্ষেত্রে কিছু ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত আকারগুলি পাওয়া যায় : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0\cdot\infty, 0^\circ, 1^\infty$

উদাহরণস্বরূপ : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}\left(\frac{0}{0}\right), \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\log\sin 2x}{\log\sin x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{a}{x} - \cot\frac{x}{a}\right)(\infty - \infty), \lim\limits_{x\to 0+} x\,lnx(0\times\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0} x^x(0^\circ), \lim\limits_{x\to\infty}(3x^2 + 2x + 1)^{1/x}(\infty^\circ), \lim\limits_{x\to 0+}(\cos x)^{1/x^2}(1^\infty)$

স্ট্যান্ডার্ড সীমা বলে পরিচিত সীমা ভিন্ন অন্যান্য অনির্ণেয় সীমার অস্তিত্ব ও মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ফরাসী গণিতজ্ঞ উইলাউমে ফ্রাঙ্কোয়া অ্যান্টনি মার্কুইস ডি লপিতা (১৬৬১-১৭০৪) কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে গুরুত্বপূর্ণ সূত্র উদ্ভাবন করেছেন। ঐ সূত্র $\frac{0}{0}$ ও $\frac{\infty}{\infty}$ আকারের সীমা নির্ধারণের ক্ষেত্রে প্রযুক্ত হবে। অপর অনির্ণেয় সীমাগুলি বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ার মাধ্যমে ঐ দুই রূপের কোন-না-কোন রূপে পরিবর্তন করা যায়।

$\frac{0}{0}$ আকারে সীমা

স্মরণ করা যেতে পারে, যদি $\lim_{x\to a} f(x)$ ও $\lim_{x\to a} g(x)$ উভয়ের অস্তিত্ব থাকে এবং $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ হয়, তবে $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$-এর অস্তিত্ব আছে। কিছু ক্ষেত্রে $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ সত্বেও $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$-এর অস্তিত থাকবে।

লপিতার নিয়ম

যদি $[a, a+\delta]$-তে $f(x), g'(x)$-এর অস্তিত্ব থাকে, $g'(x) \neq 0$ হয় এবং $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ হয় ও যদি $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ হয়, তবে $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ হবে।

প্রমাণ : প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী কশির উপপাদ্যটি f ও g উভয়ের ক্ষেত্রে $[a, a+\delta]$-এ প্রযোজ্য। ফলে অন্তত একটি বিন্দু $c \in (a, x)$ $(a < x < a+\delta)$ থাকবে যার ক্ষেত্রে

$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ হইবে।

যখন $x \to a+$, $c \to a+$ এবং আমরা পাই $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$। অনুরূপভাবে $x \to a$-এর ক্ষেত্রেও প্রয়োজনীয় শর্তাধীনে দেখানো যায় যে $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ হবে।

মন্তব্য (ক) যতক্ষণ পর্যন্ত সীমার অনির্ণেয় আকার $\left(\frac{0}{0}\right)$ থাকবে ততক্ষণ পর্যন্ত ঐ সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

(খ) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \lim_{x\to} \frac{x^n - a^n}{x-a}$

আকারের স্ট্যান্ডার্ড সীমাগুলিতে লপিতার নিয়ম প্রযুক্ত নয়। কেননা লপিতার নিয়ম প্রয়োগ করতে হলে লব ও হরের অন্তরকলজ নির্ধারণ করতে হবে—আর ঐ অন্তরকলজ নির্ধারণের ক্ষেত্রে ঐ স্ট্যান্ডার্ড সীমাগুলিকেই ব্যবহার করতে হবে—এই প্রক্রিয়া যুক্তিগ্রাহ্য নয়।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি হয়, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$ হয় তবে

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, যদি ডানপক্ষের সীমার অস্তিত্ব থাকে।

ধরি $F(x) - f\left(\frac{1}{x}\right), G(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to 0+} G(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)$$

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right), G'(x) = -\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

সুতরাং $\dfrac{F'(x)}{G'(x)} = \dfrac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}$

অতএব $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\frac{\infty}{\infty}$ আকারের সীমার ক্ষেত্রে লপিতার নিয়মের বিবৃতি

$\displaystyle\lim_{x\to a+} f(x) = \infty, \lim_{x\to a+} g(x) = \infty$ হলে এবং

$\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ হলে $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ হবে।

মন্তব্য : যতক্ষণ না $\frac{\infty}{\infty}$ আকার অপসৃত হবে, ঐ সূত্র বারবার প্রয়োগ করা যাবে।

6.14 অনির্ণেয় সীমা ও লপিতার নিয়ম

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\displaystyle= \lim_{x\to 0+} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right)$ (লপিতার নিয়মে)

$\displaystyle= \lim_{x\to 0+} \frac{2\sec^2 x \tan x}{\sin x}$ (ঐ)

$\displaystyle= \lim_{x\to 0+} \frac{2}{\cos^3 x} = 2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1 + e^{2x})}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ (লপিতার নিয়মে)

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}} = 2 \quad (\text{ঐ})$$

(3) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) (\infty - \infty)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \quad (\text{লপিতার নিয়মে})$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0$$

(4) $\lim_{x \to 0} x \log \sin^2 x (0 \times \infty)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\log \sin^2 x}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \cot x}{\frac{1}{x^2}} \quad (\text{লপিতার নিয়মে})$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ (-2x) \frac{x}{\sin x} . \cos x \right\} = 0$$

(5) $\lim_{x \to 0} x^x (0^\circ)$

$y = x^x \qquad \therefore \quad \log y = x \log x$

$$\lim_{x \to 0+} \log y = \lim_{x \to 0+} \log x (0 \times \infty)$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \left(- \frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} (-x^2) \quad (\text{লপিতার নিয়মে})$$

$$= \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$$

$$= \lim_{x \to 0+} \log y = \log \lim_{x \to 0+} y = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0+} y = e^0 = 1$$

(6) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} (\infty^0)$

$$y = x^{\frac{1}{x}} \qquad \therefore \log y = \frac{\log x}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \log y = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \text{ (লপিতার নিয়মে) } = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1$$

(7) $\lim_{x\to 0}(\cos mx)^{\frac{n}{x^2}} (1^\infty)$

$$y = (\cos mx)^{\frac{n}{x^2}} \quad \therefore \lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{n \log \cos mx}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-mn}{2} \cdot \frac{\sin mx}{x \cos mx} \text{ (লপিতার নিয়মে)}$$

$$= -\frac{m^2 n}{2}$$

সুতরাং $\lim_{x\to 0} y = e^{-m^2 n/2}$

(8) $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}$ (m ও n স্বাভাবিকসংখ্যা,সকল i-এর জন্য $a_i > 0, b_i > 0$)

(ক) **m > n**

লপিতার সূত্র n বার প্রয়োগ করে পাই

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 m(m-1)\ldots(m-n)x^{m-n}}{b_0 . n!}$$

(খ) **m < n**

লপিতার সূত্র m বার প্রয়োগ করে পাই

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{ধ্রুবক}}{(n-m) \text{ মাত্রার বহুপদরাশি}} = 0$$

(গ) **m = n**

লপিকার সূত্র m (অথবা n বার) প্রয়োগ করে সীমা হল $\frac{a_0}{b_0}$

(9) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\ (1^\infty)$

$$y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\log y = \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{2x}\ \text{(লপিতার নিয়মে)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^2\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2x^2\cos x + 4x\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)\ \text{(ঐ)}$$

$$= -\frac{1}{6}\ \text{(পরপর দু'বার লপিতার নিয়ম প্রয়োগ করে)}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{6}}$$

6.15 অনুশীলনী

(1) সীমা নির্ণয় কর :

(ক) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax} - e^{bx}}{\log(1 + px)};\ a, b, p > 0$

(খ) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^p},\ p > 0$

(গ) $\lim_{x\to 0}(1 + \sin x)^{\cot x}$

(ঘ) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

(ঙ) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{a}{x} - \cot\frac{x}{a}\right), a \in R$

(চ) $\lim_{x \to 1-} x^{1/(1-x)}$

(ছ) $\lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt{x^2 + 4} - x\right)$

(2) যদি $\lim_{x \to 0} \frac{x(1 + a\cos x) - b\sin x}{x^3} = 1$ হয়, a ও b-এর মান নির্ণয় কর।

6.16 সহায়ক গ্রন্থ

1. Differential Calculus — Shantinarayan
2. Problems of Calculas of One Variable—I.A. Maron (CBS Publishers)

একক 7 ❑ টেলরের উপপাদ্য, অপেক্ষকের অসীমবিস্তৃতি এবং চরম ও অবম মান

গঠন ঃ

7.1 প্রস্তাবনা

বৃটিশ গণিতজ্ঞ ব্রুক টেলর (১৬৮৫-১৭৩১) গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্বের একটি বুনিয়াদী সূত্র উদ্ভাবন করেন, যা পরবর্তীকালে শুধু গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্বে নয়, গাণিতিক বিজ্ঞানের বহু শাখায় গুরুত্বপূর্ণ অবদান রেখেছে। এই প্রসঙ্গে আর এক বৃটিশ গণিতজ্ঞ কলিন ম্যাকলরিন (১৬৯৮-১৭৪৬)-এর মান ও উল্লেখ্য।

উল্লিখিত উক্ত বুনিয়াদী সূত্রটি রোলের উপপাদ্য নির্ভর। ঐ সূত্রের অনুসারী হিসাবে একচলের বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক সমূহের বিস্তৃতি গাণিতিক বিজ্ঞানের বহু ক্ষেত্রে বহুল পরিমাণে ব্যবহৃত হয়ে থাকে।

7.2 টেলরের উপপাদ্য

বিবৃতি : $f : [a, b] \to R$ এরূপ যে

(ক) $(n-1)$ তম অন্তরকলজ f^{n-1}, $[a, b]$-তে সন্তত

(খ) n তম অন্তরকলজ f^n-এর অস্তিত্ব (a, b)-তে আছে। সেক্ষেত্রে (a, b) মুক্ত অন্তরালে অন্তত একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + R_n$$

যেখানে R_n, n-সংখ্যক পদের পরে অবশেষে নিম্ন আকারগুলি পরিগ্রহ করতে পারে ঃ

(1) $R_n = \frac{(b-a)^p(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^n(c)$, p ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, $1 \le p \le n$

(2) $R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c)$, (ল্যাংরাঞ্জের আকার)

(3) $R_n = \frac{(b-a)(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(c)$, (কশির আকার)

প্রমাণ : F : [a, b] $\to$ R নিম্নভাবে গঠন করা হল :

$$F(x) = f(x) + (b-x)\,f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + \lambda(b-x)^p,$$

যেখানে F(b) = F(a) দ্বারা λ নির্ণীত হবে এবং p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

সুতরাং $F(b) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \lambda(b-a)^p$

শর্ত (ক) অনুযায়ী f, f′, ..., f^{n-1} অপেক্ষকসমূহ [a, b]-তে সন্তত, b – x, $(b-x)^2$, ..., $(b-x)^p$ সন্তত। অতএব F, [a, b]-তে সন্তত।

$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x) - \lambda p(b-x)^{p-1}$ -এর অস্তিত্ব (a, b)-তে বিদ্যমান।

আবার F(b) = F(a)।

সুতরাং রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তত একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য F′(c) = 0 হবে। অর্থাৎ $\lambda = \frac{(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^n(c)$

সুতরাং $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + R_n$

যেখানে $R_n = \frac{(b-c)^{n-p}(b-a)^p}{(n-1)!\,p} f^n(c)$ [স্ক্ল-মিল্চ-এর আকার]

p = n বসিয়ে পাই $R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c)$ [ল্যাংরাঞ্জের আকার]

p = 1 বসিয়ে পাই $R_n = \dfrac{(b-c)^{n-1}(b-a)}{(n-1)!} f^n(c)$ [কশির আকার]

মন্তব্য : (1) n = 1-এর জন্য ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য পাওয়া যায়।

(2) $c = a + \theta(b - a)$, $\theta \in (0, 1)$-এর জন্য।

(3) b = a + h বসিয়ে

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + R_n$$

যেখানে $R_n = \dfrac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^n(a + \theta h)$ [স্কমিল্চ-এর আকার]

$R_n = \dfrac{h^n}{n!} f^n(a + \theta h)$ [ল্যাংরাঞ্জ-এর আকার]

$R_n = \dfrac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a + \theta h)$ [কশি-র আকার]

(4) যদি x, (a, a + h)-এর কোন বিন্দু হয়

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + R_n,$$

যেখানে R_n, (3) হতে নির্ণয় করা যায়।

(5) a = 0

$$f(x) + f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + R_n,$$

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!\,p}(1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x)$$

এই সসীম শ্রেণীকে ম্যাক্লরিনের সসীম শ্রেণী বলা হয়।

7.3 প্রদত্ত বিন্দুর সামীপ্যে একটি অপেক্ষকের অসীম শ্রেণীতে বিস্তৃতি

বেশ কিছু অপেক্ষক আছে যাদের যে কোন ক্রমের অন্তরকলজের অস্তিত্ব রয়েছে এবং অন্তরকলজগুলি সন্তত। ফলে এ ধরনের অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্রে ম্যাক্লরিনের উক্ত শ্রেণীকে আরও বিস্তৃত করা সম্ভব কিনা এ আলোচনা প্রাসঙ্গিক।

জানা আছে যে বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম শ্রেণী $\sum_n a_n$ অভিসারী কিংবা অপসারী হতে পারে। যদি $S_n = \sum_{r=1}^{n} a_r$ হয় এবং অণুক্রম $\{S_n\}_n$ অভিসারী হয়, তবে শ্রেণীটিও অভিসারী হবে।

মনে করি অন্তরাল [a, a + h]-এ f-এর যেকোন ক্রমের সন্তত অন্তরকলজ রয়েছে।

$f(a + h) = S_n + R_n$ যেখানে $S_n = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a)$

যদি $\lim_{x \to \infty} R_n = 0$ হয় তবে সেক্ষেত্রে $S_n = f(a + h) - R_n$ থেকে পাই যে $\lim_{x \to \infty} S_n$-এর অস্তিত্ব আছে এবং ঐ সীমা হল f(a + h)। সুতরাং

$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \dots$ শ্রেণীটির অভিসারিত্ব এবং (f(a + h) অভিমুখে অভিসারী হবার শর্ত হল $\lim_{x \to \infty} R_n = 0$

ঐ অসীম শ্রেণী বিস্তৃতিকে টেলরের অসীম শ্রেণী বিস্তৃতি বলা হয়। যদি [0, h] অন্তরালে f অপেক্ষকের সকল ক্রমের অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে ও অন্তরকলজগুলি সন্তত হয় এবং যদি $\lim_{x \to \infty} R_n = 0$ হয় তবে সেক্ষেত্রে

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \dots$$

এই অসীম শ্রেণী বিস্তৃতিকে f(x)-এর শূন্যের সামীপ্যে ম্যাক্লরিনের অসীম শ্রেণী-বিস্তৃতি বলা হয়। এ ধরনের অসীম শ্রেণীকে ঘাত শ্রেণী $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ বলা হয় যেখানে $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}; n = 0,1,2,\dots$

7.4 কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ অপেক্ষকের ম্যাক্লরিন শ্রেণী বিস্তৃতি

(1) $f(x) = e^x,\ x \in R$

প্রতি $x \in N$-এর জন্য $f^n(x) = e^x$ এবং প্রতি f^n সন্তত।

ল্যাংরাঞ্জের আকারে $R_n = \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, 0 < \theta < 1$ $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ এবং $e^{\theta x} < e^x$ বলে $f^n(\theta x)$ সীমাবদ্ধ অপেক্ষক ও $\lim_{x \to \infty} R_n = 0$

অতএব $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0)+.....+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+.......$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{n^2}{n!}+.....,x \in R$$

$x = 1$

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!}+......$$

(2) $f(x) = \sin x,\ x \in R$

$f^n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right), n \in N, x \in R$ এবং প্রতি f^n সন্তত।

$\lim\limits_{x\to\infty} R_n = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x) = 0$ যেহেতু $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ এবং $\left|f^n(\theta x)\right| \le 1 (x \in R)$ ও f^n একটি সীমাবন্ধ অপেক্ষক।

$$f(x) = f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+......+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+......$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+....+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+.....$$

যেখানে $x \in R$

(3) একইভাবে দেখানো যায় যে

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+.....+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+.....$$

যেখানে $x \in R$

(4) $f(x) = \log_e(1+x),\ -1 < x \le 1$

$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, -1. < x \le 1$ প্রতি f^n সন্তত।

(ক) $0 < x \le 1$

ল্যাংরাঞ্জের আকারে $R_n = \frac{x^n}{n!}f^n(\theta x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$ যেহেতু $0 < x \le 1,$

$0 < \theta < 1$ সুতরাং $0 < \frac{x}{1+\theta x} < 1$ এবং ফলে $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n \to 0$ হবে। $\frac{1}{n} \to 0$ যখন $n \to \infty$ হবে। যখন $n \to \infty$ অতএব $\lim_{x\to\infty} R_n = 0$

(খ) $-1 < x < 0$

এক্ষেত্রে $\frac{x}{1+\theta x}$-এর সাংখ্যমান 1-এর চেয়ে ছোট হবে কি হবে না সে বিষয়ে স্থির সিদ্ধান্তে আসা যায় না।

ধরা যাক $x = -\frac{3}{4}, \theta = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{1+\theta x} = \frac{-24}{20}$ এবং $\left|\frac{x}{1+\theta x}\right| > 1$

ধরা যাক $x = -\frac{3}{4}, \theta = \frac{1}{4}$

$\frac{x}{1+\theta x} = -\frac{12}{13}$ এবং $\left|\frac{x}{1+\theta x}\right| < 1$

সুতরাং এই অংশের জন্য আমরা কশি-র আকারে R_n বিবেচনা করব। সেক্ষেত্রে

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x), 0 < \theta < 1$$

যেহেতু $|x| < 1, 0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ এবং $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} \to 0$ যখন $n \to \infty$

যেহেতু $-1 < x < 0,\ 0 < \theta < 1$, সুতরাং $\frac{1}{1+x\theta} < \frac{1}{1-|x|}$

যেহেতু $|x| < 1,\ x^n \to 0$

সুতরাং $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$

ফলে $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} \ldots (-1 < x \le 1)$

$x = 1$ বসিয়ে $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}.\frac{1}{n} + \ldots\ldots$

শ্রেণীটি পালাক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পদবিশিষ্ট শ্রেণী এবং লাইবনিৎস পরীক্ষা অনুযায়ী এটি অভিসারী।

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots\ldots$$

(5) $f(x) = (1 + x)^m$, m যেকোন বাস্তব সংখ্যা।

m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে ঐ অপেক্ষকের বিস্তৃতি সসীম হবে। সুতরাং আমরা m-কে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বাদে আর যেকোন বাস্তব সংখ্যা হিসাবে বিবেচনা করব।

প্রতি $n \in N$-এর জন্য $f^n(x) = m(m-1) \ldots (m-n+1)(1+x)^{m-n}$, $|x| < 1$, সন্তত হবে।

কশি-র আকারে $R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x) \quad (0 < \theta < 1)$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} (1+\theta x)^{m-1}$$

যেহেতু $|x| < 1$ ও $0 < \theta < 1$, $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ এবং $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} = 0$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ (যেহেতু $|x| < 1$)

যদি $m - 1$ ধনাত্মক হয়, $0 < (1+\theta x)^{m-1} < 2^{m-1}$

যদি $m - 1$ ঋণাত্মক হয়, $\theta x > -1$ $|x|$ বলে

$$(1+\theta x)^{m-1} < (1-|x|)^{m-1}$$

অর্থাৎ যেকোন ক্ষেত্রেই $(1+\theta x)^{m-1}$ সীমাবদ্ধ হবে।

ফলে $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$ হইবে।

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \ldots\ldots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots\ldots$$

যেখানে $|x| < 1$ হইবে।

7.5 অনুশীলনী

(1) দেখাও যে, সকল $x \in R$-এর জন্য

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\ldots$$

(2) '0'-এর সামীপ্যে $\sin^2 x$-এর ঘাত শ্রেণী নির্ণয় কর।

(3) বিস্তৃতির সম্ভাব্যতা ধরে নিয়ে x^6 পদ পর্যন্ত $\tan x$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

7.6 একচল রাশির অপেক্ষকের আপেক্ষিক বা স্থানীয় চরম-অবম মান

সংজ্ঞা : এক চলরাশির বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক f এর $x = c$ বিন্দুতে আপেক্ষিক বা স্থানীয় **চরম মান (অবম মান)** থাকবে যদি এমন $\delta > 0$-এর অস্তিত্ব থাকে যার জন্য $x \in (c - \delta, c + \delta) \subset D_f$-এর ক্ষেত্রে $f(c) \geq f(x)$. $(f(c) \leq f(x))$ হবে (D_f বলতে f-এর সংজ্ঞার অঞ্চল বুঝাবে)।

আপেক্ষিক বা স্থানীয় চরম ও অবম মানকে একত্রে আপেক্ষিক বা স্থানীয় **শীর্ষমান (Extremum)** বলা হয়।

উদাহরণ : (1) $f(x) = |x|$-এর $x = 0$ বিন্দুতে অবম মান রয়েছে।

(2) $f(x) = x^3$-এর $x = 0$ বিন্দুতে চরম বা অবম মান নেই। কেননা যখন $o < x < o + \delta$, $f(x) > f(0)$ এবং যখন $0 - \delta < x < 0$, $f(x) < f(0)$।

7.7 ফার্মাটের উপপাদ্য

ফরাসী গণিতজ্ঞ পিয়েরে ডে ফার্মাট (১৬০১-১৬৬৫)-এর একটি উপপাদ্য এ বিষয়ে প্রণিধানযোগ্য।

বিবৃতি : যদি অপেক্ষক f-এর সংজ্ঞার অঞ্চলের অন্তর্বিন্দু c-তে স্থানীয় চরম বা অবম মান থাকে এবং যদি c বিন্দুতে f-এর অন্তরকলজ থাকে তবে $f'(c) = 0$ হবে।

প্রমাণ : মনে করা যাক্ c বিন্দুতে f-এর চরম মান আছে। শর্ত অনুযায়ী

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

যেহেতু c-তে f-এর চরম মান আছে, সুতরাং $\delta > 0$-এর অস্তিত্ব আছে যে $x \in (c - \delta, c + \delta)$ হলে $f(c) \geq f(x)$ হইবে। $\Delta x > 0$ হইলে $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ এবং সেক্ষেত্রে $f'(c) \leq 0$। আবার $\Delta x < 0$ হলে $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$ এবং সেক্ষেত্রে $f'(c) \geq 0$। অতএব $f'(c) = 0$ হবে।

মন্তব্য : (1) পূর্বে উল্লিখিত $|x|$ অপেক্ষকের উদাহরণ দেখিয়ে দিয়েছে যে চরম/অবম মান যে বিন্দুতে আছে সেই বিন্দুতে অপেক্ষকের অন্তরকলজের অস্তিত্ব না-ও থাকিতে পারে।

(2) পূর্বে উল্লেখিত x^3 অপেক্ষকের উদাহরণ দেখিয়ে দিয়েছে যে ফার্মাটের উপপাদ্যর বিপরীতটি সত্য নয়—কেননা ঐ x^3-এর ক্ষেত্রে $x = 0$ বিন্দুতে অন্তরকলজ শূন্য হবে।

7.8 কোন বিন্দুতে অপেক্ষকের চরম বা অবম মানের পর্যাপ্ত শর্তের বিবৃতি

c অপেক্ষক f-এর সংজ্ঞার অঞ্চলের অর্ন্তবিন্দু এবং $f'(c) = f''(c) = ... = f^{n-1}(c) = 0$, $f^n(c) \neq 0$।

যদি উক্ত n অযুগ্ম হয়, c বিন্দুতে f-এর কোন চরম বা অবম মান থাকবে না।

যদি ঐ n যুগ্ম হয়, তবে c বিন্দুতে চরম বা অবম মান থাকবে। $f^n(c) < 0$ থাকলে ঐ c বিন্দুতে f-এর চরম মান থাকবে এবং $f^n(c) > 0$ হলে ঐ c বিন্দুতে f-এর অবম মান থাকবে।

মন্তব্য : এই বিবৃতির প্রমাণ সহজেই টেলরের উপপাদ্য ইয়ং-আকার (Young's form of Taylor's Theorem)-এর সাহায্যে করা যায়।

7.9 উদাহরণ

(1) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$

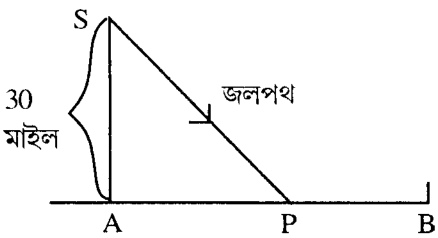
উত্তর : প্রদত্ত অপেক্ষকটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক এবং পর্যায়কাল 2π। সুতরাং আমরা $[0, 2\pi]$ অন্তরালে অপেক্ষকের প্রকৃতি অনুধাবন করব।

$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$ হতে পাই $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

$f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0, f''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0, f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0$ সুতরাং $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ বিন্দু দুটিতে চরম মান এবং $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3\pi}{2}$ বিন্দু দুটিতে অবম মান থাকবে।

(2) একটি জাহাজ S সরলরৈখিক উপকূল চর হতে ত্রিশ মাইল দূরে নোঙ্গার করল। উপকূল চরে S-এর নিকটতম বিন্দু হল A। উপকূল চর বরাবর পঞ্চাশ মাইলের একটি সোজা রাস্তা A থেকে B পর্যন্ত গিয়েছে। একজন চোরাচালাকারী ঘণ্টায় পঁচিশ মাইল গতিসম্পন্ন মোটর লঞ্চ নিয়ে উপকূল চরে যায়, সেখান থেকে ঘণ্টায় পঁয়ষট্টি মাইল গতিসম্পন্ন গাড়ি নিয়ে B বিন্দুতে যায়। সবচেয়ে কম সময়ে B বিন্দুতে পৌঁছাতে গেলে ঐ চোরাচালানাকারীকে কোন্ পথে যেতে হবে তাহা নির্ণয় কর।



উত্তর : মনে করি AP = x মাইল

$$PS = \sqrt{[x^2 + 900]} \text{ মাইল}$$

মোটর লঞ্চে S থেকে P পর্যন্ত সময় লাগবে $\frac{\sqrt{x^2+900}}{25}$ ঘণ্টা

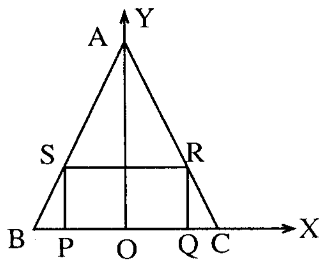
স্থলপথে গাড়িতে P থেকে B পর্যন্ত সময় লাগবে $\frac{50-x}{65}$ ঘণ্টা

$f(x) = \frac{50-x}{65} + \frac{\sqrt{(x^2+900)}}{25}$ অতএব $f'(x) = -\frac{1}{65} + \frac{\sqrt{x}}{25\sqrt{(x^2+900)}}$

$f'(x) = 0$ হতে পাই $x = \frac{25}{2}$। $f''\left(\frac{25}{2}\right) > 0$

জলপথে A থেকে দক্ষিণে $12\frac{1}{2}$ মাইল দূরে নামতে হবে।

(3) দশ সে.মি. ভূমি ও দশ সে.মি. উচ্চতাসম্পন্ন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরে সবচেয়ে বৃহৎ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য-প্রস্থ নির্ণয় কর।



উত্তর : সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC = 10 সে.মি.। ভূমি BC-র মধ্যবিন্দুগামী লম্বরেখা শীর্ষবিন্দু A দিয়া যায়। 0 কে মূলবিন্দু, OC রেখা বরাবর x-অক্ষের ধনাত্মক দিক ও OA রেখা বরাবর y-অক্ষের ধনাত্মক দিক লওয়া হইল। PQRS নির্ণেয় আয়তক্ষেত্র।

AC রেখার সমীকরণ $2x + y = 10$. R(h, k) হইলে $2h + k = 10$. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ধর্ম অনুযায়ী SR, OA দ্বারা দ্বিখণ্ডিত এবং SR || BC. আয়তক্ষেত্র PQRS এর ক্ষেত্রফল $2hk = (10 - k)\, k = f(k)$।

$f''(k) = 0$ হতে পাই $k = 5$. $f''(k) = -2 < 0$

সুতরাং ঐ বৃহৎ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রে $k = 5,\ h = \frac{5}{2}$

সুতরাং দৈর্ঘ্য = 5 সে.মি. = প্রস্থ।

(4) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

উত্তর : $f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2}\right]$ সুতরাং $f'(x) = 0$ হতে পাই $x = e$

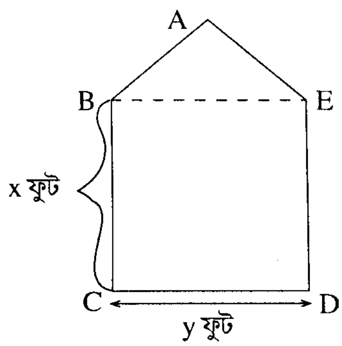
$f''(x) = f'(x)\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2}\right] + f(x)\left[-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^3} + \frac{2\log x}{x^3}\right]$

$f''(e) = f(e)\left[-\frac{1}{e^3}\right] < 0$

f(x) সর্বোচ্চ যখন $x = e$ এবং অপেক্ষকের চরম মান হল $e^{\frac{1}{e}}$

(5) একটি জানালার পরিসীমা p ফুট। এর তলার অংশ আয়তাকার এবং তার উপরের অংশ একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। জানালাটি দিয়ে সর্বাদিক আলো আনার জন্য ঐ জানালার বাহুগুলি ও উক্ত সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : আয়তাকার অংশের দৈর্ঘ্য x ফুট, প্রস্থ y ফুট, $\angle BAE = 90°$.



সুতরাং $AB = AE = \frac{y}{\sqrt{2}}$ ফুট

পরিসীমা $p = 2x + y + 2\frac{y}{\sqrt{2}} = 2x + y\left(1+\sqrt{2}\right)$

$$y = \frac{p-2x}{\sqrt{2}+1}$$

সর্বাধিক আলো আনার উক্ত শর্ত পূরণ করার জন্য জানালার ক্ষেত্রফলকে সর্বোচ্চ করতে হবে।

$$\text{ক্ষেত্রফল } A = xy + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \sin 90° = xy + \frac{y^2}{4}$$

$$= \frac{x(p-2x)}{\sqrt{2}+1} + \frac{(p-2x)^2}{4\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = f(x)$$

$f'(x) = \frac{p-4x}{\sqrt{2}-1} = \frac{2x}{\sqrt{2}+1} - \frac{p-2x}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = 0$ হইতে পাই $x = \frac{p}{4+\sqrt{2}}$

$$f''\left(\frac{p}{4+\sqrt{2}}\right) = \frac{-2-4\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} < 0$$

সুতরাং $x = \frac{p}{4+\sqrt{2}}$ এর জন্য f(x) সর্বোচ্চ।

তখন $y = \frac{p\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির সমান দুই বাহুর দৈর্ঘ্য $= \frac{p}{4+\sqrt{2}}$ = আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য।

(6) সরলরেখায় গতিশীল একটি বস্তুকণার t সময়ে স্থির বিন্দু হতে দূরত্ব হল

$x = t^4 - 10t^3 + 24t^2 + 36t + 12$

ঐ বস্তুকণা কখন সবচেয়ে আস্তে চলবে?

উত্তর : গতিবেগ $v = \frac{dx}{dt} = 4t^3 - 30t^2 + 48t + 36 = f(t)$

f(t)-এর অবম মানের পরীক্ষা করতে হবে।

$f'(t) = 12t^2 - 60t + 48 = 0$ হতে পাই $t = 1, 4$ সেকেন্ড

$f''(t) = 24t - 60$ এবং $f''(4) > 0$

সুতরাং যাত্রাশুরুর 4 সেকেন্ড পরে সবচেয়ে আস্তে চলবে।

(7) 2p পরিসীমা বিশিষ্ট কোন্ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সর্বোচ্চ হবে?

উত্তর : ত্রিভুজটি লম্ব ও ভূমির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x একক ও y একক হলে

$$x + y + \sqrt{(x^2 + y^2)} = 2p \quad ..... \ (1)$$

ক্ষেত্রফল $A = \frac{1}{2}xy \quad ..... \ (2)$

(1) হতে $\sqrt{(x^2 + y^2)} = 2p - x - y$ বর্গ করে পাওয়া যায়

$$y = \frac{2p^2 - 2px}{2p - x}$$

$$A = \frac{x(p^2 - px)}{2p - x} = f(x) \text{ এবং } f'(x) = \frac{2p^3 - 4p^2x + px^2}{(2p - x)^2}$$

$f'(x) = 0$ করে পাই $x = p(2 \pm \sqrt{2})$

$f''(p(2 - \sqrt{2})) < 0$ অতএব $x = p(2 - \sqrt{2})$-এর জন্য f(x) সর্বোচ্চ এবং সেক্ষেত্রে $y = p(2 - \sqrt{2})$। অতএব x = y হবে। সমকোণী ত্রিভুজটিকে সমদ্বিবাহু এবং উক্ত বাহু বিশিষ্ট হতে হবে।

(8) 18 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গাকার কার্ডবোর্ডের চারটি কোন্ থেকে চারটি বর্গাকৃতি অংশ মুড়ে দিয়ে একটি মুখখোলা বাক্সে পরিণত করা হল যাতে ঐ বাক্সের আয়তন সর্বোচ্চ হতে পারে। কেটে নেওয়া বর্গাকৃতি অংশের বাহুগুলি নির্ণয় কর।

উত্তর : মনে করি ঐ বাহুগুলি x সে.মি. বিশিষ্ট।

সুতরাং মুখখোলা বাক্সের আয়তন = (18 – 2x) (18 – 2x) x ঘনসেমি = f(x)

$f'(x) = 0$ হতে পাই $x = 9$ সে.মি. এবং 3 সে.মি.

$f''(x) = 24x - 144$. সুতরাং $f''(3) < 0$

$x = 3$ সে.মি. হলে আয়তন সর্বোচ্চ হবে।

7.10 অনুশীলনী

(1) $f(x) = \frac{(x+1)(x+4)}{(x-1)(x-4)}$: চরম ও অবম মানের অস্তিত্ব পরীক্ষা কর।

(2) $x + y = k$ হলে $x^m y^n$-এর চরম মান নির্ণয় কর (m, n, k সকলেই ধনাত্মক সংখ্যা)। এথেকে দেখাও যে

$$a^m b^n < \left(\frac{ma + nb}{m+n}\right)^{m+n}, a > 0, b > 0, a \neq b$$

(3) দেখাও যে $\theta = \pi$ বিন্দুতে $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$-এর চরম মান আছে (y কে x-এর অপেক্ষক ধরে নাও)।

(4) $x^3 - 6x^2 + 14x + 9$-এর চরম কিংবা অবম মান নেই—এই বক্তব্য সঠিক কিনা যাচাই কর।

(5) 'a' একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের মধ্যে সবোচ্চ পরিসীমা বিশিষ্ট আয়তাকারের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

(6) 18-কে এমন দুইটি অংশে ভাগ কর যাহাতে একটি অংশের বর্গ ও অপর অংশের ত্রিঘাতের গুণফল সর্বোচ্চ হয়।

(7) একটি জানালার পরিসীমা p ফুট। জানালার তলার অংশ আয়তাকার এবং এর উপরের অংশ অর্ধবৃত্তাকার। জানালাটি দিয়ে সর্বাধিক আলো আনার জন্য ঐ জানালার তলার অংশের বাহুগুলি ও অর্ধবৃত্তাকারের ব্যাসের মধ্যেকার সম্পর্ক নির্ণয় কর।

7.11 সহায়ক গ্রন্থ

1. Differential Calculus—Shantinarayan
2. Differential Calculus—B.C. Das & B. N. Mukherjee

একক 8 ❐ বহুচল অপেক্ষকের অন্তর কলনবিদ্যা

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

শ্রেণীকক্ষে কতজন ছাত্রছাত্রী বসিতে পারবে, গুদামঘরে কি পরিমাণ মাল মজুত রাখা সম্ভব হবে— এগুলি কোন একটি নির্দিষ্ট চলরাশির উপর নির্ভরশীল নয়, এগুলি সাধারণত একাধিক চলরাশির উপর নির্ভরশীল। প্রথমোক্তটি দুটি চলরাশি ও দ্বিতীয়টি তিনটি চলরাশির উপর নির্ভরশীল। প্রাত্যহিক জীবনের এ ধরনের আরও বহু বিষয় জানা ও সমস্যা সমাধানের জন্য তাই বহুসংখ্যক চলরাশির অপেক্ষক, তাদের ধর্ম ও আনুষঙ্গিক বিষয় সম্পর্কে কিছু ধারণা থাকা দরকার।

8.2 প্রারম্ভিক ধরণাসমূহ

(1) মনে করি, $R^2 = \{(x, y) | x, y \in R\}$ এবং এখানে একটি দূরত্বের ধারণা অন্তর্নিহিত রয়েছে। যদি $X_1 = (x_1, y_1)$ ও $X_2 = (x_2, y_2)$ ঐ সেটের দুইটি বিন্দু হয় তবে উক্ত দূরত্ব অপেক্ষক $d(X_1, X_2) = \sqrt{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]}$ এবং

এই $d(X_1, X_2)$ কয়েকটি ধর্ম মেনে চলে :

(ক) $d(X_1, X_2) = 0$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $X_1 = X_2$

(খ) $d(X_1, X_2) = d(X_2, X_1)$

(গ) $d(X_1, X_3) \le d(X_1, X_2) + d(X_2, X_3)$, যেখানে $X_1, X_2, X_3 \in \mathbf{R}^2$.

(2) মনে করি $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

(a, b) বিন্দুর সামীপ্য $N((a, b), \partial) = \left\{(x, y) \in R^2 | (x - a)^2 + (y - b)^2 < \partial^2\right\}$ এবং (a, b) বিন্দু বর্জিত সামীপ্য $N'((a, b), \partial) = \left\{(x, y) \in R^2 | 0 < \sqrt{\left[(x - a)^2 + (y - b)^2\right]} < \partial^2\right\}$

অর্থাৎ $N'((a, b), \partial) = N((a, b), \partial) - \{(a, b)\}$

(3) মনে করি, A, $\mathbf{R}^2$-এর কোন উপসেট ($A \subset \mathbf{R}^2$)। $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ কে সেট A-র সীমাবিন্দু বলা হবে যদি প্রতিটি $\partial > 0$-এর ক্ষেত্রে $N'((a, b), d) \cap A$ একটি অ-শূন্য সেট হয়। (a, b) বিন্দুটি সেট A-তে না-ও থাকতে পারে।

(4) একটি সেট S ($\subset \mathbf{R}^2$)কে মুক্ত সেট বলা হবে যদি ঐ সেটের প্রতিটি বিন্দুর সামীপ্যর অস্তিত্ব থাকে যা ঐ সেটের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত আছে অর্থাৎ প্রতিটি বিন্দু হল সেটের অন্তর্বিন্দু।

8.3 দুইটি স্বাধীন চলরাশির অপেক্ষকের ধারণা

ধরা যাক্ স্পেসে x, y ও z আয়তাকার স্থানাঙ্ক অক্ষত্রয় সূচিত করছে। যদি xy-তলের কিছু অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দু (x, y)-এর জন্য নির্দিষ্ট নিয়ম অনুযায়ী z-এর একটিমাত্র সুনির্দিষ্ট মান থাকে, তবে z-কে আমরা স্বাধীন চলরাশি x ও y এর অপেক্ষক বলব। এই অপেক্ষককে $z = f(x, y)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। এই অপেক্ষক স্পেসে একটি সঞ্চারপথকে সূচিত করে এবং ঐ অপেক্ষক z-এর জ্যামিতিক তাৎপর্য এটাই।

উদাহরণ : (1) $z = \sqrt{(4 - x^2 - y^2)}$

অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল হল $x^2 + y^2 \le 4$ অর্থাৎ xy তলে মূলবিন্দুকে কেন্দ্র ও 2 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের পরিধিস্থ ও অভ্যন্তরীণ অঞ্চলটিই ঐ অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল।

(2) $Z = \dfrac{1}{\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}}$

xy-তলে মূলবিন্দুকে কেন্দ্র ও 2 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের অভ্যন্তরীণ অঞ্চলটি এই অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল।

(3) $9z^2 = 144 - 16y^2 - 9x^2$ অপেক্ষকটিকে $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$ অঞ্চলে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

মন্তব্য : (1) দুই চলরাশির অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল বলিতে একটি মুক্ত সেট বোঝাবে, যাহার অভ্যন্তরে যে কোন দুইটি বিন্দুর যোগযোগকারী রেখাসমূহ ঐ সেটেই থাকে।

(2) অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল যদি S ($\subset \mathbf{R}^2$) হয়, তবে অপেক্ষকগুলি হল $S \to R$

(3) একইভাবে তিনটি স্বাধীন চলরাশির অপেক্ষকের সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

8.4 দুইটি স্বাধীন চলরাশির অপেক্ষকের সীমা ও সান্তত্য সম্পর্কে ধারণা

মনে কর $f : S \to R$ যেখানে $S \subset R^2$ এবং (a, b) সেট S-এর সীমাবিন্দু।

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$ (l একটি সুনির্দিষ্ট বাস্তব রাশি) হবে যদি প্রদত্ত যে কোন $\varepsilon > 0$-এর জন্য $\partial > 0$ পাওয়া যায় যাহাতে $0 < \sqrt{\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}} < \partial$ ভুক্ত প্রতিটি (x, y)-এর ক্ষেত্রে $|f(x, y) - l| < \varepsilon$ হয়। স্মরণ রাখা দরকার, $(x, y) \to (a, b)$-এর ক্ষেত্রে (x, y) কিন্তু (a, b) অভিমুখে

বহুপথে অগ্রসর হতে পারে—যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে তবে (x, y) যে পথেই ধাবিত হোক না কেন, সীমার মান একই থাকবে।

উদাহরণ : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0$

মনে করি $(x, y) \to (0, 0)$, $y = mx$ রেখা বরাবর। আমরা $y = mx$ প্রতিস্থাপনে পাই $\dfrac{m}{1+m^2}$ যা ভিন্ন ভিন্ন m-এর জন্য ভিন্ন ভিন্ন মান দেয়। অতএব $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$-এর অস্তিত্ব নেই।

যদি (a, b) সেট S-এর সীমাবিন্দু ও অর্ন্তবিন্দু হয় এবং $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ হয়, তবে f-কে (a, b) বিন্দুতে সন্তত বলা হবে। এক্ষেত্রে প্রতিটি $\varepsilon > 0$-এর জন্য $\partial > 0$ পাওয়া যাবে যাতে $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$ যখন $\sqrt{\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]} < \partial$

উদাহরণ : (1) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} + y\sin, & xy \neq 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, y = 0 \\ y\sin\dfrac{1}{y}, & x = 0, y \neq 0 \\ 0, & x = 0 = y \end{cases}$

মনে করি $\varepsilon > 0$ যে কোন সংখ্যা।

$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|x\sin\dfrac{1}{x} + y\sin\dfrac{1}{y}\right| \leq |x| + |y| < \varepsilon$

যখন $|x - 0| < \partial$, $|y - 0| < \partial = \dfrac{\varepsilon}{2}$

সুতরাং f, (0, 0) বিন্দুতে সন্তত।

(2) $f(x, y) = |x| + |y|$ অপেক্ষকটি (0, 0) বিন্দুতে সন্তত।

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

অপেক্ষকটি (0, 0) বিন্দুতে অসন্তত।

8.5 প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজ

মনে করি $f : S \to R$ এবং $S \subset \mathbf{R}^2$

মনে করি বিন্দু (a, b)-এর একটি সামীপ্য S- অন্তর্ভুক্ত আছে।

যদি $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$-এর একটি সসীম, সুনির্দিষ্ট মান হিসাবে অস্তিত্ব থাকে, তবে (a, b) বিন্দুতে x-এর সাপেক্ষে f-এর প্রথম আংশিক অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে এবং ঐ সীমার মান-ই উক্ত আংশিক অন্তরকলজ হিসাবে গণ্য হবে। ইহাকে $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|(a,b)$ বা f_x (a, b) দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। অনুরূপভাবে

$f_y(a,b)=\lim\limits_{y\to b}\dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$, যদি অস্তিত্ব থাকে। সাধারণভাবে সংজ্ঞার অঞ্চলের যে কোন বিন্দু (x, y) -তে প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি নিম্নভাবে সংজ্ঞাত বলা যায় :

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},\ \text{যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে}$$

$$f_y(x,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k},\ \text{যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে}$$

উদাহরণ : (1) $f(x,y)=|x|+|y|$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$-এর অস্তিত্ব নেই।

সুতরাং (0, 0) বিন্দুতে f_x-এর অস্তিত্ব নেই।

একইভাবে f_x-এর অস্তিত্ব (0, 0) বিন্দুতে নেই।

লক্ষণীয়, অপেক্ষকটি (0, 0) বিন্দুতে সন্তত।

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$ অতএব $f_x(0,\ 0)\ =\ 0$

$\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{0-0}{k}=0$ অতএব $f_y(0,\ 0)=0$ গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হল, অপেক্ষকটি (0, 0) বিন্দুতে সন্তত নয় কিন্তু ঐ বিন্দুতে প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজদ্বয়ের অস্তিত্ব আছে।

মন্তব্য : এক চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে যদি কোন অপেক্ষকের প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ কোন

বিন্দুতে বিদ্যমান হয়, তবে অবশ্যই অপেক্ষকটি ঐ বিন্দুতে সন্তত হয়। একাধিক চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে ঐ তত্ত্বটি সত্য নহে।

প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজের জ্যামিতিক তাৎপর্য :

প্রদত্ত অপেক্ষক $z = f(x, y)$, যাহার প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজদ্বয় z_x ও z_y, (a, b) বিন্দুতে বিদ্যমান।

এক্ষেত্রে $y = b$ তলটি $z = f(x, 1y)$ দ্বারা সূচিত বক্রতলকে একটি বক্ররেখায় ছেদ করবে। ঐ বক্ররেখার উপর $x = a$ তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যদি θ কোণে নত হয়, তবে $\tan\theta$ হবে ঐ আংশিক অন্তরকলজ f_x বা z_x-এর জ্যামিতিক তাৎপর্য।

অনুরূপভাবে f_y বা z_y-এর জ্যামিতিক তাৎপর্য ব্যাখ্যা করা যায়।

উদাহরণ : মনে করি $z = f(x, y) = \dfrac{4x^2 + 9y^2}{18}$ (1)

ধরি $x = 3$, $y = 2$ এবং ফলে $z = 4$। (3, 2) বিন্দুতে $z_x = \frac{4}{3}, z_y = 2$, $y = 2$ তলটি (1)-কে অধিবৃত্ত $2x^2 = 9(z - 2)$, $y = 2$-তে ছেদ করে। একতলীয় বক্ররেখা হিসাবে p (3, 2, 4)-এ স্পর্শকের প্রবণতা $= z_x\big|_{x=3} = \frac{4}{3}$

অনুরূপভাবে $x = 3$ তলটি (1)-কে অধিবৃত্ত $y^2 - 2(z - 2)$, $x = 3$-তে ছেদ করে। এক্ষেত্রে উক্ত প্রবণতা $= \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=2} = 2$

8.6 উদাহরণ

(1) যদি $z(x + y) = x^2 + y^2$ হয়, দেখাও যে

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4\left(-1\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

উত্তর : প্রদত্ত সম্পর্ককে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$z_x.\ (x + y) + z.1 = 2x$ অতএব $z_x = \dfrac{2x - z}{x + y}$

অনুরূপভাবে $z_y = \dfrac{2y - z}{x + y}$

এ থেকে $\left(z_x - z_y\right)^2 = \dfrac{4(x-y)^2}{(x+y)^2}$ = বামপক্ষ

$z_x + z_y = \dfrac{2(x+y-z)}{x+y}$ এবং $4\left(1 - z_x - z_y\right) = 4\left[\dfrac{2z - x - y}{x+y}\right]$

$4\left(1 - z_x - z_y\right) = \dfrac{4(x-y)^2}{(x+y)^2}$ (z-এর মান বসিয়ে)

= ডানপক্ষ

(2) যদি $\theta = t^n e^{-r^2/4t}$ হয়, তবে n-এর মান নির্ণয় কর যার জন্য $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial\theta}{\partial r}\right) = \dfrac{\partial\theta}{\partial t}$ হবে।

উত্তর : $\dfrac{\partial\theta}{\partial t} = e^{-r^2/4t}.\left[nt^{n-1} + \dfrac{1}{4}r^2t^{n-2}\right]$ (1)

$\dfrac{\partial\theta}{\partial r} = t^n.\left(-e^{-r^2/4t}\right).\dfrac{2r}{4t}$ । অতএব $r^2\dfrac{\partial\theta}{\partial r} = -\dfrac{1}{2}r^3t^{n-1}.\,e^{-r^2/4t}$

$\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\theta}{\partial r}\right) = -\dfrac{t^{n-1}}{2}\left[3r^2e^{-r^2/4t} + r^3\left(-e^{-r^2/4t}\right).\dfrac{2r}{4t}\right]$

$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\theta}{\partial r}\right) = -\dfrac{3}{2}t^{n-1}e^{-r^2/4t} + \dfrac{r^2}{4}e^{-r^2/4t}t^{n-2}$ (2)

প্রশ্নানুসারে (1) ও (2) হতে পাই, $n = -\dfrac{3}{2}$

(3) যদি $u = f(ax^2 + 2hxy + by^2)$, $v = \phi(ax^2 + 2hxy + by^2)$ হয়

দেখাও যে $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$

উত্তর : $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2(ax+hy)\varphi', \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2(hx+by)\varphi'$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = 2(hx+by).\,f'.\,v_x + u[2h.\varphi' + 2(ax+hy).2(hx+by)\varphi'']$

$= 4(hx+by)(ax+hy)f'\varphi' + u[2h\varphi' + 4(ax+hy)(hx+by)\varphi'']$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 2(ax+by).f'.v_y + u[2h.\varphi' + 2(hx+by).2(ax+hy)\varphi'']$$

$$= 4(ax+hy)(hx+by)f'\varphi' + u[2h\varphi' + 4(ax+hy)(hx+by)\varphi'']$$

অতএব বামপক্ষ = ডানপক্ষ

8.7 দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজ

$$f_{xx}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(x+h,y)-f_x(x,y)}{h},$$ যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে

$$f_{yy}(x,y) = \lim_{k\to 0}\frac{f_y(x,y+k)-f_y(x,y)}{k},$$ যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে

$$f_{xy}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(x+h,y)-f_y(x,y)}{h},$$ যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে

$$f_{yx}(x,y) = \lim_{k\to 0}\frac{f_x(x,y+k)-f_x(x,y)}{k},$$ যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে

মন্তব্য : (1) f_{xy} ও f_{yx} দুটিকে মিশ্র অন্তরকলজ বলা হয়।

ঐ দুই অন্তরকলজের সংজ্ঞার ক্ষেত্রে দুটি 'কনভেনশন' অনুসৃত হয়। ফরাসী গণিতজ্ঞরা $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x)$ ও $f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y)$ এবং বৃটিশ গণিতজ্ঞরা $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y)$ ও $f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x)$ লিখে থাকেন। যেকোন একটি 'কনভেনশন' অনুসরণ করা যেতে পারে, কিন্তু যেটিই অনুসৃত হোক্ বরাবরের জন্য অনুসরণ করতে হবে। উপরে বর্ণিত বৃটিশ 'কনভেনশন' আমরা সর্বত্র অনুসরণ করব।

(2) মিশ্র অন্তরকলজগুলি কোন বিন্দুতে সমান না-ও হতে পারে।

8.8 উদাহরণ

(1) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

দেখাও যে $f_{xy}\ (0,\ 0) \neq f_{yx}\ (0,\ 0)$

উত্তর : $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$ $\therefore f_x(0,0)=0$

$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$ $\therefore f_y(0,0)=0$

$\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{hk^2}{h^2+k^2}=0$ $\therefore f_y(h,0)=0$

আবার, $\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k^3}{h^2+k^2}=k$ $\therefore f_x(0,k)=k$

$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$ $\therefore f_{xy}(0,0)=0$

$\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k-0}{k}=1$ $\therefore f_{yx}(0,0)=1$

অতএব $f_{xy}(0,0), \neq f_{yx}(0,0)$

(2) $f(x,y)=\begin{cases} xy, & \text{যদি } |x|\geq|y| \text{ হয়} \\ -xy, & \text{যদি } |x|<|y| \text{ হয়}\end{cases}$ $\left|\begin{array}{c}\text{দেখাও যে} \\ f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)\end{array}\right\}$

উত্তর : $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h.0-0}{h}=0$ [এখানে $x=h\neq 0,\ y=0$

অতএব $f_x(0,0)=0$ সুতরাং $|x|>|y|$]

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-hk-0}{h}=-k$ [এখানে $h\to 0,\ k\to 0$

অতএব, $f_x(0,k)=-k$ সুতরাং $|h|<|k|$]

$\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k}=-1$ সুতরাং $f_{yx}(0,0)=-1$

$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$ সুতরাং $f_y(0,0)=0$

$\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{hk-0}{k}=h$ [এখানে $k\to 0,\ h\to 0$ সুতরাং $|h|>|k|$]

সুতরাং $f_y\ (h,\ 0) = h$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$ সুতরাং $f_{xy}\ (0,\ 0) = 1$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ দেখাও যে $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$

উত্তর : $$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$ $\therefore\ f_x\ (0,\ 0) = 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hk^2}{h^2+k^2}=0$$ $\therefore\ f_x\ (0,\ k) = 0$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$ $\therefore\ f_{yx}\ (0,\ 0) = 0$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=0$$ $\therefore\ f_y\ (0,\ 0) = 0$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}=0$$ $\therefore\ f_y\ (h,\ 0) = 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$ $\therefore\ f_{xy}\ (0,\ 0) = 0$ অতএব $f_{xy}\ (0,\ 0)$

$= f_{yx}\ (0,\ 0)$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\log\ (x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

দেখাও যে $f_{xy}\ (0,\ 0) = f_{yx}\ (0,\ 0)$

উত্তর : $$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}(h\log h^2)\,(ox-\infty)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log h^2}{\frac{1}{h}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{h}}{-\frac{1}{h^2}}$$ (লপিতার নিয়মে)

$$= \lim_{h\to 0}(-2h) = 0 \qquad \therefore\ f_x\ (0,\ 0) = 0$$

প্রদত্ত অপেক্ষকে x ও y-এর সাদৃশ্য বিচার করে পাই $f_y\ (0,\ 0) = 0$

$$f_y\ (h,\ 0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k},$$ যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে

$$= \lim_{k\to 0}\frac{(h^2+k^2)\log(h^2+k^2)-h^2\log h^2}{k}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{2k\log(h^2+k^2)+(h^2+k^2).\dfrac{2k}{(h^2+k^2)}}{1}$$ (লপিতার নিয়মে)

$$= 0$$

$$f_x\ (0,\ k) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h},$$ যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(h^2+k^2)\log(h^2+k^2)-k^2\log(k^2)}{h}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h\log(h^2+k^2)+(h^2+k^2).\dfrac{2h}{(h^2+k^2)}}{1}$$ (লপিতার নিয়মে)

$$= 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(0-0)}{h} = 0 \qquad \therefore\ f_{xy}\ (0,\ 0) = 0$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{(0-0)}{k} = 0 \qquad \therefore\ f_{yx}\ (0,\ 0) = 0$$

8.9 মিশ্র অন্তরকলজদ্বয়ের ক্রম সংক্রান্ত বিষয়

পূর্বের উদাহরণগুলি ও সংজ্ঞা হইতে স্পষ্ট যে কোন বিন্দুতে মিশ্র অন্তরকলজদ্বয় সমান হতে পারে, সমান না-ও হতে পারে। জার্মান গণিতজ্ঞ এইচ্ কে এ সোয়ার্জ (১৮৪৩-১৯২১) এই দুই মিশ্র অন্তরকলজদ্বয়ের মান কোন বিন্দুতে সমান হবার পর্যাপ্ত শর্ত বিবৃত করেছিলেন। তাঁর প্রণীত উপপাদ্যটি নিম্নরূপ :

(ক) অপেক্ষকটির দুটি প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ f_x ও f_y সংশ্লিষ্ট বিন্দু (a, b)-এর সামীপ্যে সংজ্ঞাত আছে (খ) দুইটি দ্বিতীয় ক্রমের মিশ্র অন্তরকলজ f_{xy} ও f_{yx} -এর মধ্যে একটি সংশ্লিষ্ট বিন্দু (a, b) তে সন্তত হলে অপর মিশ্র অন্তরকলজটির অস্তিত্ব ঐ বিন্দুতে থাকবে এবং ঐ বিন্দুতে দুই মিশ্র অন্তরকলজের মান সমান হবে।

মন্তব্য (1) সোয়ার্জের উক্ত শর্ত পর্যাপ্ত, আবশ্যিক নয়। উদাহরণ (3) ও (4)-এ (0, 0) বিন্দুতে মিশ্র অন্তরকলজদ্বয় সমান কিন্তু মিশ্র অন্তরকলজ দুটির কোনটিই (0, 0) বিন্দুতে সন্তত নয়।

(2) সোয়ার্জের শর্তকে লঘু করা যায় না অর্থাৎ দুইটি দ্বিতীয় ক্রমের মিশ্র অন্তরকলজের মধ্যে একটির ঐ বিন্দুতে সন্তত হওয়ার শর্তকে বাদ দেওয়া যায় না—উদাহরণ (1) ও (2) এর পরিচয় বহন করছে।

(3) f_{xy} ও f_{yx} উভয়েই সংশ্লিষ্ট বিন্দুতে সন্তত হলে ঐ বিন্দুতে $f_{xy} = f_{yx}$ হবে।

(4) প্রসঙ্গত উল্লেখ্য, আর এক গণিতজ্ঞ ইয়ং (Young)-ও ঐ মিশ্র অন্তরকলজদ্বয়ের কোন বিন্দুতে সমান হবার আর একটি শর্ত উপস্থাপিত করেছেন, যাহা ইয়ং-এর উপপাদ্য হিসাবে অভিহিত আছে। ইয়ং-এর শর্তগুলিও পর্যাপ্ত কিন্তু আবশ্যিক নয়। অতএব সোয়ার্জের তত্ত্ব কোন অনন্য তত্ত্ব নয়।

8.10 অনুশীলনী

(1) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

দেখাও যে $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

(2) $$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

দেখাও যে $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

(3) যদি $Z = \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}$ হয়,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ সঠিক কিনা পরীক্ষা কর।

(4) যদি $u(x, t) = A \sin(a\lambda t + \theta) \sin \lambda x$ হয়

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ সঠিক কিনা পরীক্ষা কর।

(5) যদি $z = xy + xe^{y/x}$ হয়, দেখাও যে

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

8.11 প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে আংশিক অন্তরকলজ নির্ণয়

এক চলরাশির অপেক্ষকসমূহের ক্ষেত্রে কোন অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ধারণে অনেকসময়েই প্রতিস্থাপন পদ্ধতির সাহায্য নিতে হয়। একইভাবে একাধিক চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রেও বিশেষ শর্তাধীনে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি অনুসৃত হয়ে থাকে। এখানে সেই সম্পর্কিত তত্ত্ব ও কার্য্যপ্রণালী বিবৃত হল :

মনে করি $f : S \to R$ $(S \subset R^2)$, $Z = f(x, y)$ এরূপ যে প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি S-এ সন্তত। মনে করি $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্রে $(u, v) \in T\ (\subset R^2)$ এবং সেটদ্বয় T ও S এর মধ্যে সম্পর্ক এরূপ যে সংযোজক-অপেক্ষক।

$z = f'[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = F(u, v)$ সংজ্ঞাত আছে। u ও v-এর সাপেক্ষে x ও y-এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত। সেক্ষেত্রে

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}\right\}$$

যদি x ও y উভয়েই একচলরাশি t-এর অপেক্ষক হয় ও অন্তরকলজগুলি সন্তত হয়, তবে

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$ হবে।

মন্তব্য : এক চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$ -এর সূত্র পেয়েছি ও অন্তরকলজ নির্ধারণে আমরা প্রয়োগ করেছি। দুই চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে তার স্বাভাবিক সম্প্রসারণ ঘটেছে। কিন্তু একটি সূত্রের ক্ষেত্রে ব্যতিক্রম লক্ষণীয়। এক চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = 1\Big/\left(\frac{dx}{dy}\right), \frac{dx}{dy} \neq 0$ সূত্র আমরা পেয়েছি। দুই চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে এটি সম্ভব নয়।

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \ \therefore r^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta = \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta = \frac{\partial y}{\partial r}$$

ফলে $\frac{\partial r}{\partial x} \neq 1 \Big/ \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)$ হচ্ছে।

এই অ-সমতাটি আংশিক অন্তরকলজ নির্ধারণের ক্ষেত্রে হিসাবের মধ্যে রাখতে হবে।

8.12 উদাহরণ

(1) $z = \frac{x}{y}, x = e^t, y = \ln t$ হইলে $\frac{dz}{dt}$ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y} . e^t - \frac{x}{y^2} . \frac{1}{t} = \frac{e^t(t\ln t - 1)}{t(\ln t)^2}$

(2) $u = x, v = \frac{y}{x}$ হলে $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$ সমীকরণটিকে নতুন স্বাধীন চলরাশি u ও v এবং তাহাদের অপেক্ষকের আকারে প্রকাশ কর (z_x, z_y সন্তত ধরে নাও)।

উত্তর : মনে করি ঐ প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে z(x, y) অপেক্ষকটি w (u, v)-তে রূপান্তরিত হল।

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = w_u.1 + w_v \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = w_u.0 + w_v \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = xw_u - w = uw_u - w$$

ফলে প্রদত্ত সমীকরণটি $uw_u - w = 0$ সমীকরণে রূপান্তরিত হল।

(3) $u = x, v = x^2 + y^2$ হইলে $y\frac{\partial x}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ সমীকরণটিকে নতুন স্বাধীন চলরাশি u ও v এবং তাহাদের অপেক্ষকের আকারে প্রকাশ কর (z_x, z_y সন্তত ধরে নাও)।

উত্তর : মনে করি ঐ প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে z (x, y) অপেক্ষকটি w (u, v)-তে রূপান্তরিত হল।

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = w_u.1 + w_v.2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = w_u.0 + w_v.2y$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = yw_u$$

সুতরাং $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ সমীকরণটি $yw_u = 0$

অর্থাৎ $w_u = 0$-তে রূপান্তরিত হল।

(4) যদি $u = x^2 + y^2, v = 2xy$ হয় দেখাও যে, $y\frac{\partial \varphi}{\partial x} - x\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{(y^2 - x^2)^3}{xy}$ সমীকরণটি $\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{u^2 - v^2}{v}$ সমীকরণটি -তে রূপান্তরিত হবে। প্রদত্ত আছে φ_x, φ_y সন্তত।

উত্তর : φ (x, y) অপেক্ষকটি চলরাশির পরিবর্তনে $\psi(u, v)$-তে রূপান্তরিত হয়েছে।

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \psi_u.2x + \psi_v.2y$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \psi_u.2y + \psi_v.2x$$

$$y\varphi_x - x\varphi_y = 2(y^2 - x^2).\psi_v$$

$$= \frac{(y^2 - x^2)\left[(y^2 + x^2)^2 - 4x^2y^2\right]}{xy} \text{ (দেওয়া আছে)}$$

সুতরাং $2\psi_v = \frac{u^2 - v^2}{\frac{v}{2}} = \frac{2(u^2 - v^2)}{v}$

অতএব $\psi_v = \frac{u^2 - v^2}{v}$ নির্ণেয় সমীকরণ।

(5) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a \in R - \{0\})$ সমীকরণটিকে নতুন স্বাধীন চলরাশি α ও β, $\alpha = x - at$, $\beta = x + at$ এবং তাহাদের অপেক্ষকের আকারে প্রকাশ কর (সমস্ত দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজ সন্তত ধরে নাও)।

মনে করি, $u(x, t) = v(\alpha, \beta)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} = 1.\, v_{\alpha} + 1.\, v_{\beta}$$

আমরা বলব $\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}$

সুতরাং $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) = v_{\alpha\alpha} + v_{\alpha\beta} + v_{\beta\alpha} + v_{\beta\beta}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial t} = -a\frac{\partial v}{\partial \alpha} + a\frac{\partial v}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv -a\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial}{\partial \beta}$$

সুতরাং $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(-a\frac{\partial}{\partial \alpha} + a\frac{\partial}{\partial \beta}\right)\left(-a\frac{\partial v}{\partial \alpha} + a\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)$

$$= a^2 v_{\alpha\alpha} - a^2 v_{\alpha\beta} - a^2 v_{\beta\alpha} + a^2 v_{\beta\beta}$$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই $v_{\alpha\beta} = 0$ কেননা এক্ষেত্রে $v_{\alpha\beta} = v_{\beta\alpha}$।

(6) $u = xy,\ v = \frac{x}{y}$ এই দুই নতুন স্বাধীন চলরাশির দ্বারা $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{d^2 z}{dy^2} = 0$ সমীকরণটিকে রূপান্তরিত কর (দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত ধরে নাও)।

উত্তর : মনে করি $z(x,\ y)$ অপেক্ষকটি $w(u,\ v)$-তে রূপান্তরিত হল।

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = w_u\cdot y + w_v\cdot\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = w_u . x + w_v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(yw_u + \frac{1}{y}w_v\right) = y.\frac{\partial}{\partial x}(w_u) + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(w_v)$$

$$= y\left[\frac{\partial}{\partial u}(w_u).\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}(w_u).\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{1}{y}\left[\frac{\partial}{\partial u}(w_v).\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}(w_v).\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$= y^2 w_{uu} + w_{vu} + w_{uv} + \frac{1}{y^2} w_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xw_u = \frac{x}{y^2} w_v \right) = x\frac{\partial}{\partial y}(w_u) + \frac{2x}{y^3} w_v - \frac{x}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}(w_v)$$

$$= x\left[\frac{\partial}{\partial u}(w_u).\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}(w_u).\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{2x}{y^3} w_v - \frac{x}{y^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(w_v).\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}(w_v).\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$= x^2 w_{uu} + \frac{2x}{y^3} w_v + \frac{x^2}{y^4} w_{vv} - \frac{2x^2}{y^2} w_{uv}$$

অতএব $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0$-তে বসিয়ে পাই,

$$x^2 y^2 w_{uu} + x^2 w_{vu} + x^2 w_{uv} + \frac{x^2}{y^2} w_{vv}$$

$$-x^2 y^2 w_{u\mu} - \frac{2x}{y} w_v - \frac{x^2}{y^2} w_{vv} + 2x^2 u_{uv} = 0$$

$$4x^2 w_{uv} = \frac{2x}{y} w_v \quad (\text{এখানে } w_{uv} = w_{vu})$$

অতএব $w_{uv} = \dfrac{1}{2u} w_v$

(7) $x = \frac{1}{2}(u + v)$ ও $y^2 = uv$ এই প্রতিস্থাপনের দ্বারা f(x, y) অপেক্ষকটি g(u, v)-তে রূপান্তরিত হল। দেখাও যে

$$g_{uv} = \frac{1}{4}\left\{ f_{xx} + \frac{2x}{y} f_{xy} + f_{yy} + \frac{1}{y} f_y \right\}$$

(দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত ধরে নাও)

উত্তর : $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} = f_x \cdot \dfrac{1}{2} + f_y \cdot \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{2} f_x + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} . f_y\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(f_x).\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}(f_x).\frac{\partial y}{\partial u}\right] +$$

$$\frac{1}{4\sqrt{uv}} f_y + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(f_y).\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}(f_y).\frac{\partial y}{\partial u}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f_{xx}\cdot\frac{1}{2} + f_{yx}\cdot\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}\right] + \frac{1}{4\sqrt{uv}}.f_y + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\left[f_{xy}\cdot\frac{1}{2} + f_{yy}\cdot\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[f_{xx} + f_{yx}\left(\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} + \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right) + f_{yy} + \frac{1}{\sqrt{uv}}.f_y\right] \quad (\text{এখানে } f_{xy} = f_{yx})$$

$$= \frac{1}{4}\left[f_{xx} + \frac{2x}{y}f_{xy} + f_{yy} + \frac{1}{y}f_y\right]$$

8.13 অনুশীলনী

(1) $z(x, y)$ অপেক্ষকের স্বাধীন চলরাশিদ্বয় x ও y-এর ক্ষেত্রে $x = e^u + e^{-v}$, $y = e^{-u} - e^v$ হলে দেখাও যে

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$$ (প্রথম ক্রমের আংশিক আন্তরকলজগুলি সন্তত ধরে নাও)

(2) $z = f(x, y)$-এ $x = (u + v)^2$, $y = (u - v)^2$ এবং সমস্ত প্রথমক্রমের আংশিক অন্তরকলজ সন্তত হলে দেখাও যে, $u\frac{\partial z}{\partial u} + v\frac{\partial z}{\partial v} = 2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

(3) $v = v(x, y)$-এ $x = e^u \cos t$, $y = e^u \sin t$ এবং সমস্ত প্রথমক্রমের আংশিক অন্তরকলজ সন্তত হলে দেখাও যে $\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = (x^2 + y^2)\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}$

(4) $u = f(x, y)$ এবং $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (সব অন্তরকলজ সন্তত)

(i) $u_x^2 + u_y^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\theta^2$ (ii) $u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_\theta^2$

(5) $w = f(x, y)$; $z = u \cos h\ v$, $y = u \sin h\ v$ ও অন্তরকলজ সন্তত হলে

$$w_x^2 - w_y^2 = w_u^2 - \frac{1}{u^2}w_v^2$$

8.14 সমঘাতী অপেক্ষক ও অয়লারের উপপাদ্য

প্রস্তাবনা : সেন্ট পিটার্সবুর্গ একাডেমী অব সায়েন্সেস-এর সদস্য, গণিতজ্ঞ ও থিওরিটিক্যাল মেকানিক্স্-এর বিশেষজ্ঞ লিওনার্দ অয়লার (১৭০৭-১৭৮৩) গণিতের বিভিন্ন শাখায় গুরুত্বপূর্ণ অবদান রেখেছেন। জন্মসূত্রে সুইজারল্যান্ডের হলেও জীবনের বেশিরভাগ সময় রাশিয়ায় অতিবাহিত করেছেন। গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্ব তাঁর প্রচুর অবদান আছে—সমঘাতী অপেক্ষক সম্পর্কিত তাঁর তত্ত্বটি নিম্নে বিবৃত হল।

সংজ্ঞা : মনে করি $f : S \to R$ যেখানে $S \subset R^2$

f অপেক্ষককে S-এ n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক বলা হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি প্রতিটি $(x, y) \in S$, প্রতিটি ধনাত্মক সংখ্যা λ যাতে $(\lambda x, \lambda y) \in S$-এর ক্ষেত্রে $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ হয়।

উদাহরণ : (i) $f(x, y) = \sin^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{y}{x}, xy \neq 0$

$f(tx, ty) = f(x, y)$ এবং ফলে '0' মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

(ii) $f(x, y) = x^{1/3}y^{-5/6}\log\frac{y}{x}$

$f(tx, ty) = t^{-1/2}f(x, y)$ প্রতিটি $t > 0$, $(tx, ty) \in D_f$-এর জন্য

অতএব $f, -\frac{1}{2}$ মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

অয়লারের উপপাদ্য : যদি f(x, y) সংজ্ঞার অঞ্চল S-এ n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক হয় এবং অপেক্ষকের প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি S-এ সন্তত হয়, তবে $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$

প্রমাণ : n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক বলে

$$f(tx, ty) = \pi^n f(x, y) \text{ যেখানে } (tx, ty) \in S$$

$$\frac{\partial f}{\partial(tx)}\cdot\frac{d}{dt}(tx) + \frac{\partial f}{\partial(ty)}\cdot\frac{d}{dt}(ty) = nt^{n-1}f(x, y)$$

$$x\frac{\partial f}{\partial(tx)} + y\frac{\partial f}{\partial(ty)} = nt^{n-1}f(x, y)$$

$t = 1$ বসিয়ে $xf_x + yf_y = nf(x, y)$

মন্তব্য ঃ (1) উক্ত উপপাদ্যে বর্ণিত শর্ত ছাড়াও যদি f-এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক আন্তরকলজগুলি সন্তত হয়, তবে

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n(n-1)f(x,y)$$

প্রমাণ : $\frac{\partial}{\partial x}\left(xf_x+yf_y\right)=\frac{\partial}{\partial x}(nf)$ এবং $\frac{\partial}{\partial y}\left(xf_x+yf_y\right)=\frac{\partial}{\partial y}(nf)$

সুতরাং $xf_{xx}+yf_{xy}=(n-1)f_x$ এবং $xf_{yx}+yf_{yy}=(n-1)f_y$

ফলে $x(xf_{xx}+yf_{xy})+y(xf_{yx}+yf_{yy})=(n-1)(xf_x+yf_y)$

অতএব $x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}=n(n-1)f(x,y)$

[এখানে সোয়ার্জের উপপাদ্য অনুযায়ী $f_{xy}=f_{yx}$ হবে]

(2) অয়লারের উপপাদ্যের বিপরীতটি সত্য : যদি কোন অপেক্ষক $f : S \to R$ ($S \subset R^2$)-এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজদ্বয় সন্তত হয় এবং $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=n.f(x,y)$ হয় তবে f, n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক হবে।

প্রমাণ : মনে করি (x_0, y_0) S-এর যে কোন বিন্দু।

মনে করি λ-এর সম্ভাব্য সকল ধনাত্মক মানের জন্য

$$f(\lambda x_0, \lambda y_0)=\varphi(\lambda)((\lambda x_0, \lambda y_0)\in S)$$

$$\varphi'(\lambda)=x_0f_1(\lambda x_0, \lambda y_0)+y_0f_2(\lambda x_0, \lambda y_0)$$

(f_1 ও f_2 যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় চলরাশির সাপেক্ষে অন্তরকলজ)

$nf(\lambda x_0, \lambda y_0)=\lambda x_0f_1(\lambda x_0, \lambda y_0)+\lambda y_0f_2(\lambda x_0, \lambda y_0)$

সুতরাং $\lambda\varphi'(\lambda)=n\varphi(\lambda)$

এখন $\frac{d}{d\lambda}[\lambda^{-n}\varphi(\lambda)]=\lambda^{-n-1}[\lambda\varphi'(\lambda)-n\varphi(\lambda)]=0$

অতএব $\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^n}=$ ধ্রুবক C

$\lambda=1$ বসালে $C=\varphi(1)=f(x_0, y_0)$

সুতরাং $f(\lambda x_0, \lambda y_0)=\lambda^n f(x_0, y_0)$

এই সম্পর্ক প্রতিটি $(x_0, y_0)\in$ S-এর জন্য সত্য।

অতএব f হল n-মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

8.15 উদাহরণ

(1) $e^u=\frac{x^2+y^2}{x+y}=f(x,y)$

উত্তর : f(tx, ty) = tf(x, y), অতএব f একমাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক এবং প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত। অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=1, f(x,y)$

অতএব $x\frac{\partial}{\partial x}(e^u)+y\frac{\partial}{\partial y}(e^u)=n.\,e^u=1.\,e^u$

সুতরাং $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1$

(2) $u=\frac{x^{1/4}+y^{1/4}}{x^{1/5}+y^{1/5}}$

উত্তর : u(tx, ty) = $t^{1/20}$ u(x, y), সুতরাং u, $\frac{1}{20}$ মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক এবং প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত। অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{20}\cdot u(x,y)$ এবং লক্ষনীয় u-এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলিও সন্তত।

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{20}\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{20}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$xu_{xx}+yu_{xy}+u_x=\frac{1}{20}u_x,\ xu_{yx}+yu_{yy}+u_y=\frac{1}{20}u_y$$

$$x(xu_{xx}+yu_{xy}+u_x)=\frac{1}{20}xu_x,\ y(xu_{yx}+yu_{yy}+u_y)=\frac{1}{20}yu_y$$

যোগ করিয়া $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=-\frac{19}{20}(xu_x+yu_y)$ (সোয়ার্জ উপপাদ্য অনুযায়ী $u_{xy}=u_{yz}$) $=-\frac{19}{400}u(x,y)$

(3) $f(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^n}{2n(2n-1)}+xg\left(\frac{y}{x}\right)+h\left(\frac{x}{y}\right)$। দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলনগুলি সন্তত।

উত্তর : $f_1(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^n}{2n(2n-1)}$: 2n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী $x\frac{\partial f_1}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial y}=2nf_1(x,y)$

$$x.\frac{\partial}{\partial x}\left\{x\frac{\partial f_1}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial y}\right\}+y\frac{\partial}{\partial y}\left\{x\frac{\partial f_1}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial y}\right\}=2n\left[x\frac{\partial f_1}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial y}\right]$$

$$x^2f_{1_{xx}}+2xyf_{1_{xy}}+y^2f_1yy=2n(2n-1)f_1(x,y) \text{ .... } (1)$$

$f_2(x, y) = xg\left(\dfrac{y}{x}\right) : 1$ মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

$$x\frac{\partial f_2}{\partial x}+y\frac{\partial f_2}{\partial y}=1.f_1(x, y)$$

সুতরাং $x\dfrac{\partial}{\partial x}\left[x\dfrac{\partial f_2}{\partial x}+y\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right]+y\dfrac{\partial}{\partial y}\left[x\dfrac{\partial f_2}{\partial x}+y\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right]=x\dfrac{\partial f_2}{\partial x}+y\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$

অতএব $x^2f_{2_{xx}}+2xyf_{2_{xy}}+y^2f_{2_{yy}}=0$ .... (2)

$f_3(x, y) = h\left(\dfrac{x}{y}\right) : 0$ মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

$$x^2f_{3_{xx}}+2xyf_{3_{xy}}+y^2f_3yy=0 \text{ .... } (3)$$

(1) + (2) + (3) করিয়া পাই, $x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}=2n(2n-1)f=(x^2+y^2)^n$

8.16 অনুশীলনী

(1) যদি $u(x, y) = (x^2+y^2)^{2/3}$ হয়, আংশিক অন্তরকলজ নির্ণয় না করে $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ নির্ণয় করো।

(2) যদি $u(x, y) = \cos^{-1}\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ হয়, আংশিক অন্তরকলজ নির্ণয় না করে $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ নির্ণয় কর।

(3) যদি $u(x, y) = \sin^{-1}\dfrac{x}{y}+\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ হয়, তবে অন্তরকলজগুলি নির্ণয় করে $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে অয়লারের উপপাদ্যর যথার্থতা যাচাই কর।

(4) দেখাও যে, $z(x,y) = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ অপেক্ষকটি $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ $+ y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে (φ ও ψ-এর অন্তরকলজগুলি সন্তত ধরে নাও)।

(5) **যদি** $u(x,y) = \sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ হয়, তবে অন্তরকলজগুলির মান নির্ণয় না-করে $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$-এর মান নির্ণয় করো।

8.17 দুই চলরাশির অপেক্ষকের সমগ্র অবকলের ধারণা

মনে করি $z = f(x, y)$-এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত।

মনে করি $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ অর্থাৎ দুই স্বাধীন চলরাশি x ও y-এর ক্ষেত্রে যথাক্রমে Δx ও Δy পরিবর্তনের জন্য অপেক্ষকের পরিবর্তন হল Δz।

$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$-কে f অপেক্ষকের সমগ্র অবকল বলে অভিহিত করা হয় :

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

বা, $dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ । এখানে dx ও dy যথাক্রমে x ও y-এর অবকল, এদের ক্ষেত্রে $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ কিন্তু $dz \neq \Delta z$

মন্তব্য ঃ (1) $M(x, y)\,dx + N(x, y)dy$-কে যথার্থ অবকল বলা হবে যদি এমন কোন অপেক্ষক $z(x, y)$-এর অস্তিত্ব থাকে যার জন্য $dz = Mdx + Ndy$ হয়। যেমন, $2xydx + x^2dy$-কে লেখা যায় $d(x^2y)$। উক্ত রাশিটি যথার্থ অবকল কিনা যাচাই করার একটি পদ্ধতি হল $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ সিদ্ধ হয় কিনা—যথার্থ অবকল হবে যদি এবং কেবলমাত্র $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ যদি হয়।

(2) অপেক্ষকের দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত হলে দ্বিতীয় ক্রমের সমগ্র অবকল হবে।

$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$ (এখানে $d^2f = d(df)$, $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$ বোঝাবে)

উদাহরণ : (1) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4l\text{n}x - 10\ l\text{n}y$, (1, 2) বিন্দুতে df নির্ণয় কর।

উত্তর : $f_x = 2x + y - \frac{4}{x}, f_y = x + 2y - \frac{10}{y}$

(1, 2) বিন্দুতে $f_x = 0$, $f_y = 0$; অতএব $df = 0$

(2) উক্ত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে উক্ত বিন্দুতে d^2f নির্ণয় করো।

উত্তর : $f_{xx} = 2 + \frac{4}{x^2}, f_{yy} = 2 + \frac{10}{y^2}, f_{xy} = f_{yx} = 1, f_{xx}(1, 2) = 6, f_{yy}(1, 2) = \frac{9}{2}$ এবং ফলে (1, 2) বিন্দুতে, $d^2f = 6dx^2 + 2dxdy + 9dy^2$

8.18 তিন চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সম্প্রসারিত ধারণাসমূহ

(1) যদি $w = f(x, y, z)$, $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \xi(u, v, w)$ দ্বারা সংযোজক অপেক্ষক $F(u, v, w)$ সংজ্ঞাত হয় এবং প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত হয়, তবে

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} \end{aligned}\right\}$$

(2) $f(x, y, z)$-এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত হলে

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ হবে।

(3) $f(x, y, z)$ একটি n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক এবং এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত হলে $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z)$ হবে (অয়লারের উপপাদ্য) বিপরীতক্রমে, $f(x, y, z)$-এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত হলে এবং $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z)$ হলে f, n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক হবে।

উদাহরণ : (1) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$: শূন্যমাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক ও প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত।

অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=0$

(2) যদি $H = f(y - z, z - x, x - y)$ হয়, দেখাও যে $H_x + H_y + H_z = 0$

উত্তর : ধরি $y - z = p$, $z - x = q$, $x - y = r$ সুতরাং $H = f(p, q, r)$

$$H_x = H_p \cdot p_x + H_q \cdot q_x + H_r \cdot r_x = H_p .0 + H_q(-1) + H_r(1)$$
$$H_y = H_p \cdot p_y + H_q \cdot q_y + H_r \cdot r_y = H_p .1 + H_q .0 + H_r .(-1)$$
$$H_z = H_p \cdot p_z + H_q \cdot q_z + H_r \cdot r_z = H_p(-1) + H_q .1 + H_r .0$$

যোগ করে পাই, $H_x + H_y + H_z = 0$

অনুশীলনী : যদি $u = f(x^2 + 2yx, y^2 + 2zx)$ হয়, দেখাও যে

$(y^2 - xz)\frac{\partial u}{\partial x}+(x^2 - yz)\frac{\partial u}{\partial y}+(z^2 - xy)\frac{\partial u}{\partial z}=0$ হবে।

8.19 অপেক্ষক-সমীকরণ দ্বারা সংজ্ঞাত অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের ধারণা

প্রস্তাবনা : দুই চলরাশির অপেক্ষক সমীকরণ $f(x, y) = 0$ সবসময়ে y-কে একচলরাশি x-এর অপেক্ষক হিসাবে সংজ্ঞাত করে না। যেমন, $x^2 + y^2 + 1 = 0$। কিন্তু ক্ষেত্র বিশেষে $f(x, y) = 0$-ধাঁচের সমীকরণ কোন কোন বিন্দুর সামীপ্যে y-কে x-এর অনন্য অপেক্ষকরূপে সংজ্ঞাত করে। যেমন $2xy - \log(xy) = 2$ সমীকরণটি (1, 1) বিন্দুর সামীপ্যে y-কে x-এর অনন্য অপেক্ষক হিসাবে সংজ্ঞাত করে। $y = \frac{1}{x}$-এর জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। আর একটি সমীকরণ $x^2 + xy + y^2 = 1$ ধরা যাক্। y-দ্বিঘাত সমীকরণ হিসাবে এর সমাধান হল $y = \frac{-x \pm \sqrt{(4 - 3x^2)}}{2}$ যা $|x| \le \frac{2}{\sqrt{3}}$-এর জন্য প্রযোজ্য। লক্ষনীয় (1, – 1) বিন্দুর সামীপ্যে $y = \frac{-x - \sqrt{(4 - 3x^2)}}{2}$ সমাধানটি গ্রাহ্য, কিন্তু অপরটি নয়।

এই অংশে অনন্য অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব সম্পর্কে সংশ্লিষ্ট উপপাদ্যটি উপস্থাপিত করা হল :

(a, b), অপেক্ষক f-**এর সংজ্ঞার অঞ্চলে অন্তর্বিন্দু এবং (ক)** $f(a, b) = 0$ (খ) (a, b)-এর একটি সামীপ্যে f_x ও f_y সংজ্ঞাত এবং সন্তত (গ) $f_y(a, b) \neq 0$।

সেক্ষেত্রে (a, b)-কেন্দ্রিক সামীপ্য $[a - h, a + h ; b - k, b + k]$-এর অস্তিত্ব রয়েছে, যেখানে $[a - h, a + h]$ অন্তরালে x-এর প্রতিটি মানের জন্য $[b - k, b + k]$ অন্তরালে y-এর একটি

ও কেবলমাত্র একটিই মান থাকবে, যাহার সাহায্যে অনন্য অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষক $y = \theta(x)$ সংজ্ঞাত হবে যার জন্য $f(x, \theta(x)) = 0$ প্রতিটি x-এর জন্য হবে, $b = \theta(a)$ হবে। θ অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য হবে। $\theta'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$ হবে। $\frac{d^2y}{dx^2}$-এর অস্তিত্ব থাকলে।

$$y_2 = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

উদাহরণ (1) $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}$$

(2) $2xy - \log (xy) = 2$, $(1, 1)$ বিন্দুর সামীপ্যে অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব ধরে নিয়ে ঐ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

উত্তর : $f(x, y) = 2xy - \log x - \log y - 2 = 0$

$$f_x = 2y - \frac{1}{x},\ f_y = 2x - \frac{1}{y}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = -1$$

(3) $xy \sin x + \cos y = 0$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুর সামীপ্যে অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব ধরে নিয়ে উক্ত বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

উত্তর : $f(x, y) = xy \sin x + \cos y$

$f_x = y \sin x + xy \cos x,\ f_y = x \sin x - \sin y$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = \frac{y \sin x + xy \cos x}{\sin y - x \sin x}$$ এবং $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)} = 0$$

8.20 অনুশীলনী

(1) $2 \sin xy - y = 0$, $(1, 0)$ বিন্দুর সামীপ্যে অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব ধরে নিয়ে ঐ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(2) $ye^x - x = 0$, $(0, 0)$ বিন্দুর সামীপ্যে অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব ধরিয়া লইয়া ঐ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

8.21 বহুচলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে চরম ও অবম মান নির্ণয়

সংজ্ঞা : মনে করি মুক্ত সেট S $(\subset R^2)$-এ f সংজ্ঞাত আছে এবং $(a, b) \in S$.

(a, b) বিন্দুতে f-এর আপেক্ষিক বা স্থানীয় চরম (অবম) মান থাকিবে যদি $\partial > 0$-এর অস্তিত্ব থাকে যার জন্য $f(x, y) \leq f(a, b)$ $(f(x, y) \geq f(a, b))$ হবে যেখানে $(x, y) \in N((a, b), \partial) \subset S$

উদাহরণ : $f(x, y) = x^2 + y^6 - 2xy^3 + y^3 + y^2 = (x - y^3)^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$

f অপেক্ষকের $(0, 0)$ বিন্দুতে অবম মান রয়েছে।

অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ধারণের ক্ষেত্রে নিম্ন উপপাদ্য দুটি বিবৃত করা হল :

(1) $f : S \to R$ যেখানে $S(\subset R^2)$ একটি মুক্ত সেট।

মনে কর S-এ f_x ও f_y উভয়েরই অস্তিত্ব রয়েছে।

যদি f-এর $(a, b)(\in S)$ বিন্দুতে স্থানীয় চরম বা অবম মান থাকে, তবে $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$ হবে।

মন্তব্য : (ক) $f(x) = |x| + |y|$ অপেক্ষকের $(0, 0)$ বিন্দুতে অবম মান আছে। ঐ বিন্দুতে f_x ও f_y-এর অস্তিত্ব নেই। সুতরাং এক চলরাশির অপেক্ষকের মত দুই চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রেও যে বিন্দুতে চরম বা অবম মান রয়েছে, সেই বিন্দুতে আংশিক আন্তরকলজদ্বয়ের অস্তিত্ব না-ও থাকতে পারে।

(খ) $f(x, y) = x^3 + y^3$-এর $(0, 0)$ বিন্দুতে চরম বা অবম মান নেই। কিন্তু ঐ বিন্দুতে f_x ও f_y উভয়েরই মান শূন্য।

অতএব (1)-এ বিবৃত উপপাদ্যের বিপরীতটি সত্য নয়।

(2) $f : S \to R$ $(S \in R^2)$ যেখানে S একটি মুক্ত সেট।

ধরি f-এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক আন্তরকলজগুলি S-এ সন্তত।

মনে করি $(a, b) \in S$ এবং $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$

মনে করি $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$

যদি $AC - B^2 > 0$ হয়, তবে (a, b) বিন্দুতে অপেক্ষকের চরম বা অবম মান থাকবে। $A > 0$ হলে ঐ ন্দিুতে অবম মান থাকবে, $A < 0$ হলে ঐ বিন্দুতে চরম মান থাকবে। $AC - B^2 < 0$ হলে চরম বা অবম মান থাকবে না।

$AC - B^2 = 0$ হলে ঐ বিন্দুতে চরম বা অবম মান থাকতে পারে, না-ও থাকতে পারে।

মন্তব্য : এই উপপাদ্যের প্রমাণটি দুটি চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে টেলরের উপপাদ্য নির্ভর।

8.22 উদাহরণ

(1) $f(x, y) = xy(6 - x - y)$

এখানে $f_x = 6y - 2xy - y^2$, $f_y = 6y - x^2 - 2xy$

$f_x = 0 = f_y$ করিয়া চারটি বিন্দু (0, 0) (0, 6) ও (6, 0) (2, 2) পাওয়া যায়।

$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4xy - (6 - 2x - 2y)^2$

$D(0, 0) = -36 < 0$, $D(0, 6) = -(6 - 12)^2 < 0$, $D(6, 0) < 0$

$D(2, 2) = 12 > 0$ এবং $f_{xx}(2, 2) = -4 < 0$

অতএব (0, 2) বিন্দুতে অপেক্ষকের চরম মান রয়েছে।

(2) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 6y$

$f_x = 2x + y - 6$, $f_y = x + 2y - 6$

$f_x = 0 = f_y$ করে (2, 2) বিন্দু পাওয়া যায়।

$f_{xx} - f_{xy}^2 = 2(2) - 1^2 > 0$ এবং $f_{xx} > 0$

(2, 2) বিন্দুতে অবম মান রয়েছে।

8.23 তিন চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে চরম বা অবম মান নির্ণয়

$f : D \to R$ যেখানে $D \subset R^3$

পূর্বের ন্যায় f-এর উপর একই ধরণের শর্তাধীনে মনে করি (a, b, c) বিন্দুতে $f_x = f_y = f_z = 0$

ধরি ঐ বিন্দুতে $D_1 = f_{xx}, D_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$

যদি $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$ হয়, সেক্ষেত্রে (a, b, c) বিন্দুতে f-এর চরম মান থাকবে।
যদি $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$ হয়, সেক্ষেত্রে (a, b, c) বিন্দুতে f-এর অবম মান থাকবে।

উদাহরণ : $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 3xy + 8z$

$f_x = 4x - 3y$, $f_y = 6y - 3x$, $f_z = 8z + 8$

$f_x = f_y = f_z = 0$ হতে পাই $x = 0 = y$ এবং $z = -1$

$f_{xx} = 4$, $f_{yy} = 6$, $f_{zz} = 8$, $f_{xy} = f_{yx} = -3$, $f_{xz} = f_{zx} = 0$

$f_{yz} = f_{zy} = 0$

$$D_1 = 4 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} > 0$$

অতএব (0, 0, –1) বিন্দুতে অপেক্ষকের অবম মান রয়েছে।

8.24 শর্তাধীনে চরম-অবম মান নির্ণয়ে ল্যাংরাঞ্জের পদ্ধতি

ব্যবহারিক ক্ষেত্রে অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ধারণের ক্ষেত্রে অনেক সময়েই কিছু শর্ত আরোপিত হয়। উদাহরণস্বরূপ একটি নির্ধারিত গোলকের মধ্যে সর্বোচ্চ আয়তন বিশিষ্ট আয়তাকার বাক্সকে সন্নিবিষ্ট করতে হলে কিভাবে অগ্রসর হতে হবে, দুটি নদী যাদের উপকূল সরলরৈখিক নয়, তাদের মধ্যে যোগাযোগকারী খালের দৈর্ঘ্য সর্বনিম্ন ও সবচেয়ে কম খরচ করতে গেলে কিভাবে করা যাবে ইত্যাদি সমাধানের জন্য ল্যাংরাঞ্জের পদ্ধতি অনুসৃত হয়ে থাকে।

মনে করি, $z = f(x, y)$ প্রদত্ত অপেক্ষক এবং $\varphi(x, y) =$ ধ্রুবক প্রদত্ত শর্ত। ধরি $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ যেখানে λ হল ল্যাংরাঞ্জের অনির্ণেয় ধ্রুবক গুণিতক।

$dF = (f_x + \lambda\varphi_x)dx + (f_y + \lambda\varphi_y)\ dy$

চরম বা অবম মানের ক্ষেত্রে

$f_x + \lambda\varphi_x = 0 = f_y + \lambda\varphi_y$;

এখানে $\dfrac{f_x}{\varphi_x} \neq \dfrac{f_y}{\varphi_y}$

x ও y-এর মান নির্ণয়ের পর d^2F নির্ণয় করতে হবে। নির্ধারিত বিন্দুতে $d^2F < 0$ হলে চরম এবং $d^2F > 0$ হলে অবম মান থাকবে।

মন্তব্য : অপেক্ষকে চলরাশির সংখ্যা বেশি হলে এবং/অথবা চলরাশিগুলির মধ্যে 'শর্ত' একাধিক থাকলে অনুরূপভাবে ল্যাংরাঞ্জের পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হয়। অধিকসংখ্যক চলরাশি ও কমসংখ্যক শর্তাধীনে এই পদ্ধতি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ।

উদাহরণ :

(1) ধনাত্মক সংখ্যা 'a'-কে দুটি অংশ x ও y-তে ভাগ কর যাতে $f(x, y) = x^m y^n$ সর্বোচ্চ হতে পারে $(m > 0, n > 0)$.

উত্তর : $\log f = m \log x + n \log y$

$$\frac{df}{f} = \frac{m}{x}dx + \frac{n}{y}dy$$

$df = 0$ হতে পাই, $\frac{m}{x}dx + \frac{n}{y}dy = 0$

$x + y = a$ হতে পাই $dx + dy = 0$

সুতরাং $\left(\lambda\frac{m}{x} + 1\right)dx + \left(\lambda\frac{n}{y} + 1\right)dy = 0$

এর থেকে পাই, $\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = -\frac{1}{\lambda}$

অর্থাৎ $-\lambda = \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{x+y}{m+n} = \frac{a}{m+n} \quad \therefore \ \lambda = -\frac{a}{m+n}$

$x = \frac{am}{m+n}, \ y = \frac{an}{m+n}$

$$d^2f = df\left(\frac{m}{x}dx + \frac{n}{y}dy\right) + f\left\{-\frac{m}{x^2}(dx)^2 - \frac{n}{y^2}(dy)^2\right\}$$

ঐ বিন্দুতে $d^2f < 0$, সুতরাং ঐ বিন্দুতে f সর্বোচ্চ।

(2) ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে cos A cos B cos C-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করো।

উত্তর : $f(x, y, z) = \cos A \cos B \cos C + \lambda(A + B + C - \pi)$

$df = (\lambda - \sin A \cos B \sin C)\, dA + (\lambda - \cos A \sin B \cos C)\, dB$
$\quad + (\lambda - \cos A \cos B \sin C)\, dC = 0$

হতে পাই, $\lambda = \sin A \cos B \cos C = \cos A \sin B \cos C = \cos A \cos B \sin C$

অর্থাৎ $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ এবং $\lambda = \frac{3}{8}$

$d^2f = -\cos A \cos B \cos C\, [(dA)^2 + (dB)^2 + (dC)^2]$

$$d^2f\big|_{A=B=C=\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{8}[(dA)^2 + (dB)^2 + (dC)^2] < 0$$

সুতরাং $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ তে $\cos A \cos B \cos C$ সর্বোচ্চ এবং উহার মান $\frac{1}{8}$

8.25 অনুশীলনী

(1) চরম বা অবম মান নির্ণয় কর।

(ক) $y^2 + 4xy + 3x^2 + x^3$

(খ) $x^2 + xy + y^2 + ax + by \quad (a, b \in R)$

(গ) $(x + y + z)^3 - 3(x + y + z) - 24\ xyz$

(2) ল্যাংরাঞ্জের পদ্ধতির সাহায্যে $x^2 + y^2 + z^2$-এর অবম মান নির্ণয় কর যেখানে $x + y + z = 3a$।

8.26 সহায়ক গ্রন্থ

1. Differential Calculus—Shantinarayan
2. Problems in Mathematical Analysis—B. Demidovich (Mir Publishers)

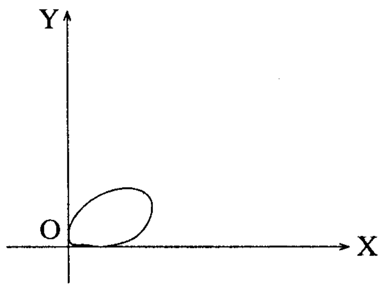
একক 9 ❐ বক্ররেখার স্পর্শক, অভিলম্ব এবং রৈখিক অসীমপথ

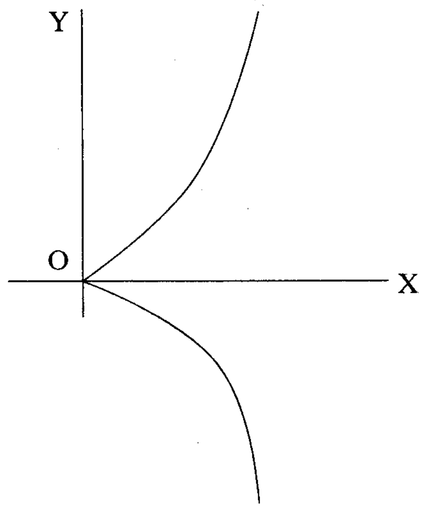
গঠন

9.1 স্পর্শক ও অভিলম্বের সংজ্ঞা

মনে করি P ও Q একটি প্রদত্ত বক্ররেখার উপর ভিন্ন বিন্দু, যেখানে Q বিন্দুকে P-এর যেকোন দিকে নিকটবর্তী বিন্দু হিসাবে লওয়া যায়। যদি Q বিন্দু P বিন্দুর দিকে বক্ররেখা বরাবর অগ্রসর হয়, জ্যা PQ-এর অবস্থান P বিন্দুগামী হয়েও পরিবর্তিত হতে থাকবে। Q বিন্দু যখন P বিন্দুর উপর প্রায় সমাপতিত হবে, তখন জ্যা PQএর সীমাস্থ অবস্থানকে P বিন্দুতে উক্ত বক্ররেখার স্পর্শক বলা হবে। স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাকে অভিলম্ব বলা হবে।

এই অবকাশে আমরা নীচের চিত্রগুলির প্রতি পাঠকদের দৃষ্টি আকর্ষণ করছি :





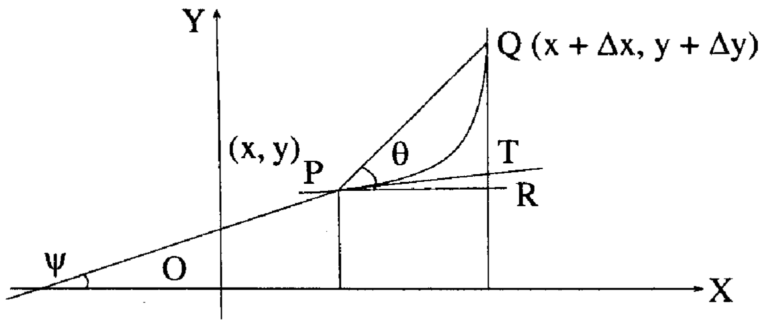
বাম দিকের চিত্রে মূলবিন্দুতে বক্ররেখার দুটি স্পর্শক, ডান দিকের চিত্রে মূলবিন্দুতে বক্ররেখার একটিই স্পর্শক। বক্ররেখার একটি বিন্দুতে একাধিক বাস্তব স্পর্শক থাকার বিষয়টি আমরা পরে আলোচনা করব।

9.2 বক্ররেখার কার্তিয় সমীকরণের ক্ষেত্রে স্পর্শক-অভিলম্বর সমীকরণ নির্ণয়

$P(x, y)$ ও $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ বক্ররেখার উপর দুইটি বিন্দু।

$$\tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

যখন Q বিন্দুটি বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হবে, $\Delta x \to 0$ হয় এবং জ্যা PQ ও x-অক্ষের মধ্যেকার কোণ θ, ψ-এর দিকে ধাবিত হয়, যেখানে ψ হল P বিন্দুতে স্পর্শক ও x-অক্ষের মধ্যেকার কোণ।



সুতরাং $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\theta \to \psi} \tan\theta$

ফলে $\frac{dy}{dx} = \tan\psi$ অর্থাৎ যে সব বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$-এর সসীম, সুনির্দিষ্ট মান রয়েছে এমন সব বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ যথাক্রমে

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \;\ldots\ldots\; (1)$$

$$(Y - y)\frac{dy}{dx} + (X - x) = 0 \;\ldots\ldots\ldots(2)$$

মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

বক্ররেখার সমীকরণটি মুলবিন্দুগামী মূলদ বীজগাণিতিক সমীকরণ যথা

$(a_1x + b_1y) + (a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) + \ldots. + (a_nx^n + \ldots. b_ny^n) = 0$

যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

সমীকরণে x ও y-এর ন্যূনতম ঘাতবিশিষ্ট পদ বা পদগুলির যোগফলকে শূন্যের সঙ্গে সমান করলে উক্ত স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়।

উদাহরণস্বরূপ, $y^2 = 4ax$-এর মূলবিন্দুতে স্পর্শক $x = 0$ অর্থাৎ y-অক্ষ। $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a \neq 0)$-এর মূলবিন্দুতে দুইটি স্পর্শক $x = 0$ ও $y = 0$ পাওয়া যায় (9.1-এ বাম দিকের চিত্র)।

$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$ $(a, b \in R;\ ab \neq 0)$-এর মূলবিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হল $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ অর্থাৎ $ax \pm by = 0$

শেষোক্ত উদাহরণ দুটির মারফৎ আমরা একটি নতুন পরিস্থিতির সম্মুখীন হয়েছি, যেখানে একটি বিন্দুতে একাধিক স্পর্শকের অস্তিত্ব আছে।

9.3 দ্বি-বিন্দু সংজ্ঞা ও তাহার প্রকৃতি

যদি বক্ররেখার উপরিস্থ কোন বিন্দু দিয়া বক্ররেখার দুটি শাখা যায়, সেই বিন্দুকে দ্বিবিন্দু বলা

হবে। দ্বিবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বাস্তব ও ভিন্ন হলে সেই বিন্দুকে (Node) নোড বা গাঁট বলা হয় এবং দ্বিবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বাস্তব ও সমাপতিত হলে সেই বিন্দুকে (Cusp) কাস্প বা স্কন্ধ বলা হয়। দ্বিবিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় কাল্পনিক হলে বিন্দুটিকে বিচ্ছিন্ন (Isolated) বিন্দু বলা হয়।

মনে করি প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ $f(x, y) = 0$

যদি বক্ররেখার উপরিস্থ কোন বিন্দুতে

(1) $f_x = 0, f_y = 0$ হয়

(2) f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}-এর মধ্যে অন্তত একটি ঐ বিন্দুতে অশূন্য হয়, তবে ঐ, বিন্দুটি বক্ররেখার দ্বিবিন্দু হবে।

যদি ঐ বিন্দুতে $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 0$ হয়, বিন্দুটি নোড বা গাঁট হবে।

সাধারণভাবে $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} > 0$ হলে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখার কাস্প বা স্কন্ধ থাকে—কিন্তু এর ব্যতিক্রম আছে। ফলে দ্বি-বিন্দু নির্ণয়ের পর কাস্প বা স্কন্ধ-এর অস্তিত্ব সম্পর্কে নিশ্চিত হতে গেলে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়ই বাস্তব পন্থা।

উদাহরণ : (1) $y^2 = ax^2 + bx^3$, $a, b \in R$, $b \neq 0$

উত্তর : $f(x, y) \equiv y^2 - ax^2 - bx^3 = 0$

$f_x = -2ax - 3bx^2$, $f_y = 2y$

(0, 0) বিন্দুতে $f_x = 0 = f_y$ এবং $f(0, 0) = 0$

$f_{xx} = -2a - 6bx$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$

(0, 0) বিন্দুতে $f_{xx} = -2a$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 2\ (\neq 0)$

সুতরাং (0, 0) বক্ররেখার উপর দ্বি-বিন্দু।

মূলবিন্দুতে স্পর্শক $y^2 - ax^2 = 0$

$a > 0$ হইলে $y^2 - ax^2$ কে দুটি রৈখিক, বাস্তব উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় এবং দুটি বাস্তব, ভিন্ন স্পর্শক পাওয়া যাবে—ফলে $a > 0$ হলে মূলবিন্দুটি নোড হবে।

$a = 0$ হলে স্পর্শক $y = 0$, বাস্তব ও সমাপতিত—ফলে মূলবিন্দুটি কাস্প হবে।

$a < 0$ হলে স্পর্শক কাল্পনিক এবং বিন্দুটি বিচ্ছিন্ন বিন্দু।

(2) $y^2 (a^2 + x^2) = x^2 (a^2 - x^2)$, $a \in R - \{0\}$

উত্তর : $f(x, y) \equiv a^2y^2 + x^2y^2 - a^2x^2 + x^4 = 0$

$f_x = 2xy^2 - 2a^2x + 4x^3$, $f_y = 2a^2y + 2x^2y$

$f_x = 0 = f_y$ হতে পাই $x = 0 = y$ এবং $f(0, 0 = 0$

$f_{xx} = 2y^2 - 2a^2 + 12x^2$, $f_{xy} = f_{yx} = 4xy$, $f_{yy} = 2a^2 + 2x^2$

(0, 0) বিন্দুতে $f_{xx} = -2a^2\ (\neq 0)$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 2a^2\ (\neq 0)$

অতএব (0, 0) বিন্দুটি দ্বি-বিন্দু। ঐ বিন্দুতে $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 4a^4 > 0$ এবং বিন্দুটি নোড।

(3) $f(x, y) \equiv x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$

দেখাও যে (3, 2) বিন্দুতে বক্ররেখার নোড আছে।

$f(3, 2) = 27 - 4 - 63 + 8 + 45 - 13 = 0$

$f_x = 3x^2 - 14x + 15,\ f_y = -2y + 4$

$f_x(3, 2) = 27 - 42 + 15 = 0,\ f_y(3, 2) = -4 + 4 = 0$

$f_{xx} = 6x - 14,\ f_{yy} = -2,\ f_{xy} = f_{yx} = 0$

(3, 2) বিন্দুতে $f_{xx} = 4,\ f_{yy} = -2,\ f_{xy} = 0$

অতএব ঐ বিন্দুতে $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 8 > 0$ এবং বিন্দুটি নোড।

(4) $\theta = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $x = 2a\cos\theta - a\cos2\theta,\ y = 2a\sin\theta - a\sin2\theta$ বক্ররেখার স্পর্শকের ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \tan\frac{3\theta}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - (2a - 0) = \tan\frac{3\pi}{4}[x - (0 + a)]$$

অর্থাৎ $y + x = 3a$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y - 2a = -\cot\frac{3\pi}{4}[x - a]$$

অর্থাৎ $x - y + a = 0$

(5) $x = \frac{2at^2}{1+t^2}, y = \frac{2at^3}{1+t^2};\ t = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{3t + t^3}{2}$ সুতরাং $\frac{dy}{dx}\Big/_{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{13}{16}$

$t = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $x = \frac{2a}{5}, y = \frac{a}{5}$। উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - \frac{a}{5} = \frac{13}{16}\left(x - \frac{2a}{5}\right)$ অর্থাৎ $13x - 16y - 2a = 0$

ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y - \frac{a}{5} = \frac{-16}{13}\left(x - \frac{2a}{5}\right)$

অর্থাৎ $13y + 16x = 9a$

(6) বক্ররেখা $c^2(x^2 + y^2) = x^2y^2$ $(c \in R - \{0\})$-এর স্পর্শকের সমীকরণটি x $\cos^3\theta + y \sin^3\theta = c$ আকারে প্রকাশ কর।

উত্তর : ঐ বক্ররেখার উপর যে কোন বিন্দুর প্যারামেট্রিক বা প্রচলিক স্থানাঙ্ক হল $(c \sec \theta, c\ \text{cosec}\theta)$

ঐ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta}\Big/\dfrac{dx}{d\theta} = -\dfrac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$

ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y - \frac{c}{\sin\theta} = -\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}\left(x - \frac{c}{\cos\theta}\right)$$

অর্থাৎ, $x \cos^3\theta + y \sin^3\theta = c$

(7) $x = a(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$, $y = a(4\sin^3\theta - 9\sin\theta)$; $a \in R - \{0\}$। দেখাও যে অক্ষদ্বয়ের মধ্যে অভিলম্বের ছেদিতাংশ ধ্রুবক।

উত্তর : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta}\Big/\dfrac{dx}{d\theta} = \cot\theta$

অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y - a(4\sin^3\theta - 9\sin\theta) = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta}\left[x - a(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\right]$$

সরলীকরণে পাওয়া যায়,

$$\frac{x}{-8a\cos\theta} + \frac{y}{-8a\sin\theta} = 1$$

অতএব অভিলম্বটি x-অক্ষকে $P(-8a\cos\theta, 0)$ ও y-অক্ষকে $Q(0, -8a\sin\theta)$ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে। $PQ^2 = 64a^2$ অর্থাৎ $PQ = 8|a|$ = ধ্রুবক।

(8) দেখাও যে $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, (a > 0)$, বক্ররেখায় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ে স্পর্শকের দ্বারা ছেদিতাংশ ধ্রুবক।

উত্তর : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}\,(a > 0$ থেকে $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

বক্ররেখার উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = -\frac{-\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

অর্থাৎ, $y.\sqrt{x_1} + x.\sqrt{y_1} = \sqrt{x_1 y_1 a}$

অথবা, $\dfrac{x}{\sqrt{ax_1}} + \dfrac{y}{\sqrt{ay_1}} = 1$

অতএব x-অক্ষ হতে স্পর্শকের ছেদিতাংশ $\sqrt{ax_1}$ এবং y-অক্ষ হতে স্পর্শকের ছেদিতাংশ $\sqrt{ay_1}$ এই দুই ছেদিতাংশের যোগফল $= \sqrt{ax_1} + \sqrt{ay_1} = a =$ ধ্রুবক।

(9) যদি $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ সরলরেখাটি $\dfrac{x^m}{a^m} + \dfrac{y^m}{b^m} = 1$ বক্ররেখার স্পর্শক হয়, দেখাও যে $p^{m/(m-1)} = (a\cos\alpha)^{m/(m-1)} + (b\sin\alpha)^{m/(m-1)}$

উত্তর : $\dfrac{x^m}{a^m} + \dfrac{y^m}{b^m} = 1$হতে পাই $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^m x^{m-1}}{a^m y^{m-1}}$

(x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{-b^m x_1^{m-1}}{a^m y_1^{m-1}}(x - x_1)$$

অর্থাৎ, $x.b^m x_1^{m-1} + y.a^m y_1^{m-1} = a^m b^m (1)$

এই রেখাটি ও $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p(2)$ রেখাটি একই।

সুতরাং, $\dfrac{b^m x_1^{m-1}}{\cos\alpha} = \dfrac{a^m y_1^{m-1}}{\sin\alpha} = \dfrac{a^m b^m}{p}$

$$x_1^{m-1} = \frac{a^m \cos\alpha}{p}, y_1^{m-1} = \frac{b^m \sin\alpha}{p}$$

$\dfrac{x_1^m}{a^m} + \dfrac{y_1^m}{b^m} = 1$-এ বসিয়ে পাই,

$$\left(\frac{a^m \cos\alpha}{p}\right)^{m/(m-1)} \cdot \frac{1}{a^m} + \left(\frac{b^m \sin\alpha}{p}\right)^{m/(m-1)} \cdot \frac{1}{b^m} = 1$$

অর্থাৎ, $(a\cos\alpha)^{m/(m-1)} + (b\sin\alpha)^{m/(m-1)} = p^{m/(m-1)}$

(10) $y = \sin x$ বক্ররেখায় (0, 0) বিন্দু হতে স্পর্শক অঙ্কিত হল। দেখাও যে স্পর্শবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ হল $x^2y^2 = x^2 - y^2$

উত্তর : বক্ররেখার উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - y_1 = \cos x_1(x - x_1)$

এটি (0, 0) বিন্দুগামী। অতএব $y_1 = x_1 \cos x_1$

সুতরাং, $x_1^2 - y_1^2 = x_1^2(1 - \cos^2 x_1) = x_1^2 \sin^2 x_1 = x_1^2 y_1^2$

অতএব, (x_1, y_1) বিন্দুর সঞ্চারপথ হল $x^2y^2 = x^2 - y^2$

9.4 অনুশীলনী

(1) $y(x - 2)(x - 3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাকে যে বিন্দুতে x-অক্ষ ছেদ করে, সেই বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(2) দেখাও যে $x = a \cos\theta + a\theta \sin\theta$, $y = a \sin\theta - a\theta \cos\theta$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব মূলবিন্দু থেকে ধ্রুবক দূরত্বে থাকবে।

(3) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ রেখাটি $x^m y^n = a^{m+n}$ বক্ররেখার স্পর্শক হলে দেখাও যে $p^{m+1} m^m n^n = (m + 1)^{m+n} a^{m+n} \sin^n \alpha \cos^m \alpha$ হবে।

(4) বক্ররেখা $x = a \cos^3\theta$, $y = b \sin^3\theta$–এর ক্ষেত্রে x_1, y_1 যথাক্রমে অক্ষদ্বয়ে স্পর্শকের ছেদিতাংশ হলে দেখাও যে, $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$ হবে।

(5) দেখাও যে, $y^2 = 4a\left(x + a \sin \dfrac{x}{a}\right)$-এর উপরিস্থ যে সব বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সমান্তরাল, সেই বিন্দুগুলি একটি অধিবৃত্তের উপরিস্থ।

9.5 বক্ররেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে কোণের পরিমাণ নির্ণয়

দুটি বক্ররেখার মধ্যেকার কোণ বলতে বোঝায় বক্ররেখা দুইটির ছেদবিন্দু অর্থাৎ সাধারণ বিন্দুতে দুটি বক্ররেখার অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যেকার কোণ। এই কোণ সমকোণ হলে বলা হয় ঐ দুই বক্ররেখা পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করেছে।

উদাহরণ (1) $ax^2 + by^2 = 1$ ও $cx^2 + dy^2 = 1(a, b, c, d \in 10 - \{0\})$ বক্ররেখা দুটি পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করলে a, b, c, d-এর মধ্যেকার সম্পর্ক নির্ণয় করো।

উত্তর : $ax^2 + by^2 = 1$ থেকে পাই $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-ax}{by}$

$cx^2 + dy^2 = 1$ থেকে পাই $-\dfrac{cx}{dy}$

মনে করি ঐ দুই বক্ররেখার ছেদবিন্দু (p, q)।

ফলে $ap^2 + bq^2 = 1$, $cp^2 + dq^2 = 1$ এবং সমাধান করে পাই,

$$p^2 = \frac{d-b}{ad-bc} \cdot q^2 = \frac{c-a}{bc-ad}$$

যেহেতু স্পর্শক দুটি সমকোণে নত, সুতরাং $\left(\frac{-ap}{bq}\right)\left(-\frac{cp}{dq}\right) = -1$

$$\frac{ac}{bd} \cdot \frac{d-b}{a-c} = -1 \text{ অর্থাৎ } \frac{d-b}{bd} = \frac{c-a}{ac}$$

বা, $\frac{1}{b} - \frac{1}{d} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c}$

(2) $x^3 + y^3 = 3axy$ ও $x^2 = ay$ $(a > 0)$-এর মধ্যেকার কোণ নির্ণয় কর।

উত্তর : দুটি সমীকরণ সমাধান করে ছেদবিন্দু পাই $(a.2^{1/3}, a.2^{2/3})$, $(0, 0)$

$$x^3 + y^3 = 3axy \text{ হতে } \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

$$x^2 = ay \text{ হতে } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{a}$$

$(a.2^{1/3}, a.2^{1/3})$ বিন্দুতে প্রথমোক্ত বক্ররেখার ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = m_1 = 0$

এবং দ্বিতীয় বক্ররেখার ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = m_2 = 2^{4/3}$

θ নির্ণেয় কোণ হলে $\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = 2^{4/3}$ অর্থাৎ $\theta = \tan^{-1}(2^{4/3})$

(3) $x^2 = 4y$ এবং $y(x^2 + 4) = 8$ বক্ররেখাদ্বয়ের মধ্যেকার কোণ নির্ণয় করো।

উত্তর : দুটি সমীকরণ সমাধান করিয়া ছেদবিন্দু পাই $(\pm 2, 1) | x^2 = 4y$ থেকে $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$ এবং (2, 1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 1 = m_1, y(x^2+4) = 8$ থেকে $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2+4}$ এবং (2, 1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} = m_2, \theta$ নির্ণেয় কোণ হলে $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 3$ এবং $\theta = \tan^{-1} 3$

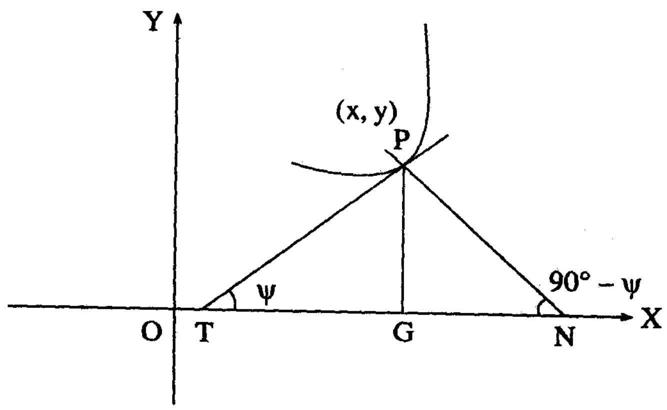
অনুশীলনী

(1) $y^2 = 4ax$ ও $x^2 = 4by$ অধিবৃত্তদ্বয়ের মধ্যে মূলবিন্দু ছাড়া অন্য ছেদবিন্দুতে কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(2) $x^2 - y^2 = 8$ ও $xy = 3$ বক্ররেখাদ্বয়ের মধ্যেকার কোণ নির্ণয় কর।

সতর্কতা : কোন কোন বক্ররেখাদ্বয়ের ক্ষেত্রে দুটির $\frac{dy}{dx}$ যথাক্রমে $\frac{x}{y}$ ও $\frac{-y}{x}$ আসতে পারে। কিন্তু এক্ষেত্রেও ছেদবিন্দুর উল্লেখ না করে দুটি $\frac{dy}{dx}$ –এর গুণফল বিবেচনা করা যাবে না। একমাত্র ছেদবিন্দুর ক্ষেত্রেই উভয় বক্ররেখার x ও y সমান হবে। ছেদবিন্দু (p, q) ধরে নিয়ে অগ্রসর হওয়া যেতে পারে।

9.6 উপ-স্পর্শক ও উপ-অভিলম্বের সংজ্ঞা ও দৈর্ঘ্য নির্ণয়



P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি x-অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বটি x-অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করে। TG হইল উপ-স্পর্শক এবং NG হইল উপ-অভিলম্ব।

$$\tan\psi = \frac{PG}{TG},\ \tan(90° - \psi) = \frac{PG}{NG}$$

ফলে উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \frac{y}{y_1}$, উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= yy_1$

স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= PT = \sqrt{(PG^2 + TG^2)} = \frac{y}{y_1}\ \sqrt{(1 + y_1^2)}$

অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= PN = \sqrt{(PG^2 + NG^2)} = y.\sqrt{(1 + y_1^2)}$

এর থেকে পাই $\frac{\text{উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য}}{\text{উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য}} = \left(\frac{\text{স্পর্শকের দৈর্ঘ্য}}{\text{অভিলম্বের দৈর্ঘ্য}}\right)^2$

উদাহরণ : $y = be^{x/a}$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে দেখাও যে উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক এবং উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য কোটির বর্গের সঙ্গে সরল ভেদে আছে।

উত্তর : $y_1 = \dfrac{b}{a} e^{x/a}$

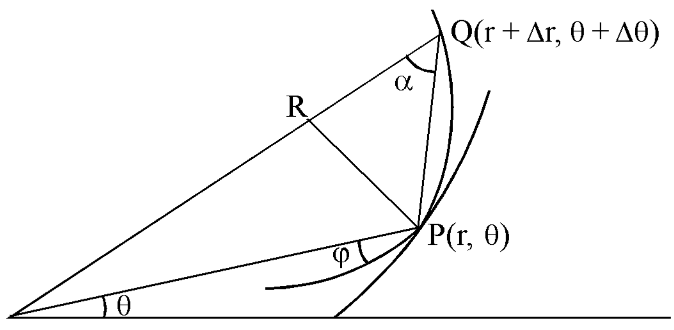
উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\dfrac{y}{y_1} = a =$ ধ্রুবক

উপঅভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= yy_1 = \dfrac{b^2}{a} e^{2x/a} = \dfrac{y^2}{a} \alpha y^2$

অনুশীলনী : (1) দেখাও যে, $x^{m+n} = k^{m-n} y^{2n}$ বক্ররেখার যেকোন বিন্দুতে উপ-স্পর্শকের m ঘাত উপ-অভিলম্বের n ঘাতের সঙ্গে সরলভেদে থাকবে।

(2) বক্ররেখা $by^2 = (x + a)^3$-এর ক্ষেত্রে দেখাও যে প্রতি বিন্দুতে উপ-স্পর্শকের বর্গ উপ-অভিলম্বের সঙ্গে সরলভেদে থাকবে।

9.7 বক্ররেখার মেরু সমীকরণের ক্ষেত্রে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি



$$\tan\alpha = \frac{PR}{QR} = \frac{r\sin\Delta\theta}{(r+\Delta r) - r\cos\Delta\theta} = \frac{r.\dfrac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\dfrac{\Delta r}{\Delta\theta} + \dfrac{r(1-\cos\Delta\theta)}{\Delta\theta}}$$

যখন Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হয়,

$\Delta\theta \to 0$ হয় এবং $\dfrac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 1. \dfrac{\Delta r}{\Delta\theta} \to \dfrac{dr}{d\theta}$ হয়,

$$\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} = 2\left\{\frac{\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}}\right\}^2 . \frac{\Delta\theta}{4} \to 0 \text{ হয়}$$

$\lim\limits_{\alpha \to \varphi} \tan\alpha = \tan\varphi = r \Big/ \frac{dr}{d\theta}$ বা, $\frac{r}{r_1}$ হয়।

স্পর্শক ψ কোণে মেরু অক্ষের সঙ্গে নত হলে $\psi = \varphi + \theta = \tan^{-1}\frac{r}{r_1} + \theta$ হবে।

উদাহরণ : $r = a(1 + \cos\theta)$–এর $\theta = 2\alpha$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\tan\varphi \quad r \Big/ \frac{dr}{d\theta} = \frac{a(1+\cos\theta)}{-a\sin\theta} = -\cot\frac{\theta}{2}$

ফলে $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ এবং $\psi = \varphi + \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}$

সুতরাং $\theta = 2\alpha$ বিন্দুতে $\psi = \frac{\pi}{2} + 3\alpha$ হইবে।

ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - a(1 + \cos 2\alpha) \sin 2\alpha = -\cot 3\alpha\ [x - a(1 + \cos 2\alpha) \cos 2\alpha]$$

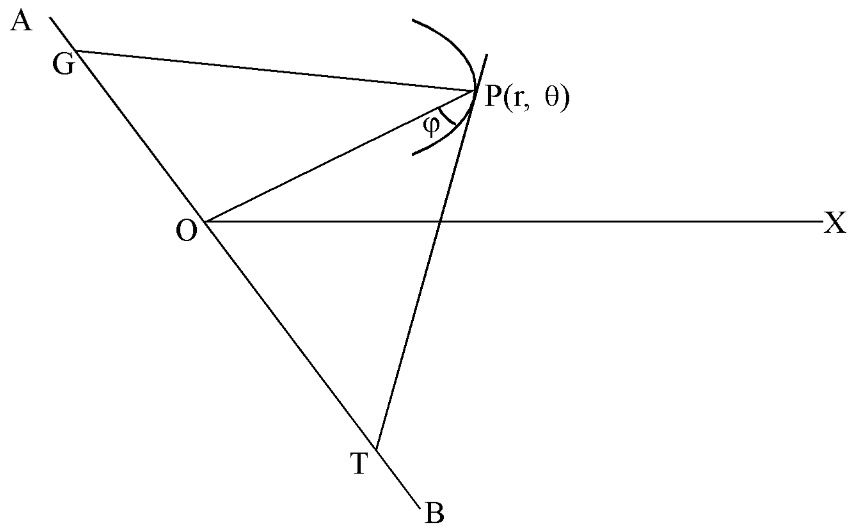
অর্থাৎ, $x \cos 3\alpha + y \sin 3\alpha = a \cos\alpha\ (1 + \cos 2\alpha)$

ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y - a(1 + \cos 2\alpha) \sin 2\alpha = \tan 3\alpha\ [x - a(1 + \cos 2\alpha) \cos 2\alpha]$$

অর্থাৎ, $x \sin 3\alpha - y \cos 3\alpha = a \sin\alpha\ (1 + \cos 2\alpha)$

9.8 মেরু উপ-স্পর্শক ও মেরু উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়



AOB সরলরেখাটি O বিন্দুতে OP -এর উপর লম্ব। P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি AOB-কে T বিন্দুতে ছেদ করল এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বটি AOB-কে G বিন্দুতে ছেদ করল। OT = উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য এবং OG = উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য। $\tan\varphi = \dfrac{OT}{OP}$ এবং $\tan(90°-\varphi) = \dfrac{OG}{OP}$.

ফলে, উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= r\tan\varphi = \dfrac{r^2}{r_1}$

উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= r\cot\varphi = r_1$

মন্তব্য : (1) $OT \times OG = r^2$ অর্থাৎ মেরু উপস্পর্শক ও মেরু উপ-অভিলম্বকে দুটি বাহু ধরিয়া অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল রেডিয়ান-ভেক্টর OP-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান।

(2) মেরু থেকে স্পর্শকের উপর লম্বদৈর্ঘ্য $p = r\sin\varphi$, ফলে $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r^4}\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$

উদাহরণ :

(1) $r = ae^{\theta\cot\alpha}$, α ধ্রুবক

এখানে $\tan\vartheta = r\Big/\dfrac{dr}{d\theta} = \tan\alpha \quad \therefore \varphi = \alpha$

উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{r^2}{r_1} = r\tan\alpha$, উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= r_1 = r\cot\alpha$

মন্তব্য : উক্ত বক্ররেখার প্রতিটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক সংশ্লিষ্ট রেডিয়ান ভেক্টরের সঙ্গে একই কোণে নত থাকে বলে ঐ বক্ররেখাকে Equiangular spiral বলা হয়।

(2) $r^m = a^m(\cos m\theta - \sin m\theta)$-এর উপরিস্থ $\theta = 0$ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর মেরু থেকে অঙ্কিত লম্বরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

উত্তর : $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{-a^m(\sin m\theta + \cos m\theta)}{r^{m-1}}$

$\tan\varphi = r\Big/\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{\sin m\theta - \cos m\theta}{\sin m\theta + \cos m\theta}$, অতএব, $\varphi = m\theta - \dfrac{\pi}{4}$

$p = r\sin\varphi$, সুতরাং $p^m = r^m\sin^m\varphi = a^m(\cos m\theta - \sin m\theta)\sin^m\left(m\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\theta = 0$ বিন্দুতে $p^m = \left|a^m\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^m\right| \qquad \therefore p = \dfrac{|a|}{\sqrt{2}}$

অনুশীলনী :

$r = a(1 + \cos\theta)$-এর উপরিস্থ $\theta = \frac{\pi}{3}$ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর মেরু থেকে অঙ্কিত লম্ব রেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

9.9 দুইটি বক্ররেখার মেরু সমীকরণের ক্ষেত্রে অন্তর্ভূক্ত কোণ নির্ণয়

মনে করি Γ_1 ও Γ_2 বক্ররেখা দুইটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে এবং 0 মেরু। প্রথমোক্ত Γ_1-এর ক্ষেত্রে রেডিয়ান ভেক্টর OP ও P বিন্দুতে স্পর্শকের মধ্যেকার কোণ φ_1 এবং দ্বিতীয়োক্ত Γ_2–এর ক্ষেত্রে রেডিয়ান ভেক্টর OP ও P বিন্দুতে স্পর্শকের মধ্যেকার কোণ φ_2 হলে নির্ণীত কোণ হবে $\varphi_1 \sim \varphi_2$.

উদাহরণ : (1) $r = 6\cos\theta$ ও $r = 2(1 + \cos\theta)$-এর মধ্যেকার কোণ নির্ণয় কর।

উত্তর : দুটি সমীকরণ সমাধান করে পাই ছেদবিন্দুতে $\theta = \frac{\pi}{3}$

$r = 6\cos\theta$ হতে $\tan\varphi = \left. r \middle/ \frac{dr}{d\theta} \right.$ করে $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$

$r = 2(1 + \cos\theta)$ হতে $\tan\varphi = \left. r \middle/ \frac{dr}{d\theta} \right.$ করে $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$-তে $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ এবং $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$

নির্ণীত কোণ $= \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$

(2) $r = a(1 - \cos\theta)$ ও $r = b(1 + \cos\theta)$ $[a, b > 0]$ পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে—প্রমাণ কর।

উত্তর : $r = a(1 - \cos\theta)$ হতে $\tan\varphi = \left. r \middle/ \frac{dr}{d\theta} \right. = \tan\frac{\theta}{2} \quad \therefore \varphi \frac{\theta}{2}$

$r = b(1 + \cos\theta)$ হতে $\tan\varphi = \left. r \middle/ \frac{dr}{d\theta} \right. = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

মনে করি (r', θ') দুটি বক্ররেখার ছেদবিন্দু। ফলে সেই বিন্দুতে $\varphi_1 = \frac{\theta'}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta'}{2}$ এবং

নির্ণীত কোণ $= \frac{\pi}{2} + \frac{\theta'}{2} - \frac{\theta'}{2} = \frac{\pi}{2}$; বক্ররেখাদুটি পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

অনুশীলনী :

(1) $\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$-এর ক্ষেত্রে মেরু উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। দেখাও যে, $p^2 = ar$।

(2) $r^2 = 16 \sin 2\theta$ ও $r^2 \sin 2\theta = 4$-এর ক্ষেত্রে অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় করো।

(3) $r^m = a^m \sec(m\theta + \alpha)$ ও $r^m = b^m \sec(m\theta + \beta)$–এর মধ্যেকার কোণ নির্ণয় কর (a, b, α, β ধ্রুবক)।

(4) $\theta = \frac{(r^2 - a^2)}{a} - \cos^{-1}\frac{a}{r}$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে দেখাও যে, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ হয়।

(5) $r = \frac{aer^{\theta}}{(1+\theta)^2}$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে p নির্ণয় কর।

(6) $r = a \sin 2\theta$ ও $r = a \cos 2\theta$ বক্ররেখা দুটির মধ্যেকার কোণ নির্ণয় কর।

(7) $r = a^{e\theta}$ এবং $r^{e\theta} = b(a, b \in R)$ পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে—প্রমাণ কর।

9.10 বক্ররেখার পাদ-সমীকরণ (Pedal Equation of a Curve) নির্ণয়

সংজ্ঞা : বক্ররেখাটি যে তলে আছে সেই তলের কোন বিন্দু 0 (ধরা যাক্) হতে ঐ বক্ররেখার উপরিস্থ যে কোন বিন্দু P -তে স্পর্শকের উপর লম্ব টানা হলে সেই লম্বের দৈর্ঘ্যকে p দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং O থেকে P বিন্দুর দূরত্বকে r দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। কোন বক্ররেখার ক্ষেত্রে এই p ও r-এর মধ্যেকার সম্পর্ককে 0 বিন্দুর সাপেক্ষে বক্ররেখার পাদ সমীকরণ বলা হয়।

মন্তব্য : 'বক্ররেখার পাদ সমীকরণ' বিবৃতিটি সতত O বিন্দু নির্ভর।

(1) বক্ররেখার কার্তিয় সমীকরণ থেকে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে পাদ-সমীকরণ নির্ণয় :

উদাহরণ (ক) কেন্দ্রের সাপেক্ষে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-এর পাদ সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$x.b \cos \theta + y.a\sin \theta - ab = 0 \quad (1)$$

কেন্দ্র অর্থাৎ মূলবিন্দু থেকে (1)-এর উপর লম্ব দূরত্ব

$$p = \left|\frac{-ab}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}}\right| \text{ অর্থাৎ } \frac{a^2b^2}{p^2} = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$

অতএব, $\frac{a^2b^2}{p^2} + r^2 = a^2 + b^2$ হল নির্ণেয় পাদ সমীকরণ।

(খ) মূলবিন্দুর সাপেক্ষে $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$-এর পাদসমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : ঐ বক্ররেখার উপর যেকোন বিন্দু $(a \cos^3\theta, a \sin^3\theta)$–তে স্পর্শকের সমীকরণ $x \sin\theta + y \cos\theta - a \sin q \cos\theta = 0$ (1) p = মূলবিন্দু থেকে (1)-এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য হলে

$$p^2 = a^2\sin^2\theta\cos^2\theta, r^2 = x^2 + y^2 = a^2(\cos^6\theta + \sin^6\theta) = a^2[1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta = a^2\left[1 - \frac{3p^2}{a^2}\right]$$

$r^2 + 3p^2 = a^2$ হল নির্ণেয় পাদসমীকরণ।

(গ) যে কোন একটি নাভির সাপেক্ষে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের পাদ-সমীকরণ নির্ণয় করো।

উত্তর : $(ae, 0)$ নাভিটিতে মূলবিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হল, অক্ষদ্বয়ের দিক অ-পরিবর্তিত রইল। উপবৃত্তের নতুন সমীকরণ হল $\frac{(x - ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং ইহার উপর যে কোন বিন্দু $P(ae + a\cos\theta, b\sin\theta)$ ঐ P বিন্দুতে স্পর্শক হল $x, b\cos\theta + y, a\sin\theta - ab(1 + e\cos\theta) = 0(1)$

P = নতুন মূলবিন্দু হতে (1)-এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য

$$= \left|\frac{-ab(1 + e\cos\theta)}{\sqrt{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}\right|$$

$$\therefore\ p^2 = \frac{a^2b^2(1 + e\cos\theta)^2}{a^2\sin^2\theta + a^2(1 - e^2)\cos^2\theta} = \frac{b^2(1 + e\cos\theta)^2}{1 - e^2\cos^2\theta}$$

সুতরাং, $\frac{b^2}{p^2} = \frac{1 - e\cos\theta}{1 + e\cos\theta}$

$r^2 = (ae + a\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta) = a^2(1 + e\cos\theta)^2 \quad \therefore\ r = a(1 + e\cos\theta)$

অতএব, $\frac{b^2}{p^2} + 1 = \frac{2a}{r}$ নির্ণেয় পাদ সমীকরণ।

(ঘ) মূল বিন্দুর সাপেক্ষে $x = 2a\cos\theta - a\cos2\theta,\ y = 2a\sin\theta - a\sin2\theta$ বক্ররেখার পাদ-সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : এক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = \tan\frac{3\theta}{2}$ এবং 'θ' বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y\ \cos\frac{3\theta}{2} - x\sin\frac{3\theta}{2} + 3a\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

p = মূলবিন্দু থেকে উক্ত স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$p^2 = 9a^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = 5a^2 - 4a^2\cos\theta = a^2 + 8a^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

θ অপনয়ন করে পাই, $9(r^2 - a^2) = 8p^2$

(2) বক্ররেখার মেরু সমীকরণ হতে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে পাদ-সমীকরণ নির্ণয়

(ক) মেরু সাপেক্ষে $r = a(1 + \cos\theta)$-এর পাদ সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\tan\theta = r\Big/\frac{dr}{d\theta} = -\cot\frac{\theta}{2}$, সুতরাং $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

$$p = r\ \sin\varphi = r\ \cos\ \frac{\theta}{2}\quad \therefore \cos\frac{\theta}{2} = \frac{p}{r}$$

$$r = a\left[1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right] = 2a.\frac{p^2}{r^2}$$

অতএব $r^3 = 2ap^2$ নির্ণেয় পাদ সমীকরণ।

(খ) মেরু সাপেক্ষে $r^2 = a^2\cos2\theta$-এর পাদ-সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : এখানে $\frac{dr}{d\theta} = \frac{-a^2\sin2\theta}{r}$ এবং $\tan\theta = r\Big/\frac{dr}{d\theta}$ থেকে

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\theta$$

$$p = r\ \sin\ \varphi = r\ \cos\ 2\theta \qquad \therefore\ \cos\ 2\theta = \frac{p}{r}$$

নির্ণেয় পাদ সমীকরণ $r^3 = a^2p$

অনুশীলনী :

(1) দেখাও যে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অধিবৃত্ত $y^2 = 4a(x + a)$-র পাদ সমীকরণ হল $p^2 = ar$

(2) দেখাও যে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে

$x = ae^{\theta}(\sin\theta - \cos\theta),\ y = ae^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)$-এর পাদ সমীকরণ হল $r^2 = 2p^2$

(3) দেখাও যে মেরু সাপেক্ষে অধিবৃত্ত $r = \dfrac{2a}{1-\cos\theta}$ -এর পাদ সমীকরণ হল $p^2 = ar$

(4) দেখাও যে মেরু সাপেক্ষে অধিবৃত্ত $r = e^{\theta}$-এর পাদ সমীকরণ হল $r^2 = 2p^2$

9.11 বক্ররেখার পাদ রেখা (Pedal of a Curve) নির্ণয়

সংজ্ঞা : বক্ররেখাটি যে তলে আছে সেই তলের কোন বিন্দুর সাপেক্ষে ঐ বক্ররেখার পাদরেখা হল বক্ররেখার উপরিস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের উপর ঐ বিন্দু হতে লম্বরেখার পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ।

উদাহরণ : (ক) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নাভির সাপেক্ষে পাদরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : অধিবৃত্তের উপরিস্থ $P(at^2, 2at)$ বিন্দুতে

স্পর্শকের সমীকরণ $x - ty + at^2 = 0$ (1)

(1)-এর উপর লম্ব ও $(a, 0)$ বিন্দুগামী রেখা হল $tx + y - ta = 0$(2)

মনে করি, (p, q) উক্ত (1) ও (2) -এর ছেদবিন্দু। অতএব

$p - tq = -at^2,\ tp + q = at$

বর্গ ও যোগ করে $(t^2 + 1)p = 0$ অতএব $p = 0$

নির্ণেয় সঞ্চারপথ হল $x = 0$

(খ) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর সাপেক্ষে পাদরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শক $x - ty + at^2 = 0$(1)

এর উপর লম্ব ও মূলবিন্দুগামী রেখা হল $tx + y = 0$ (2)

মনে করি (p, q) উক্ত (1) ও (2) -এর ছেদবিন্দু।

$p - tq + at^2 = 0,\quad tp + q = 0$

$t = -\dfrac{q}{p}$ প্রথমটিতে বসিয়ে পাই, $aq^2 + pq^2 + p^3 = 0$

সুতরাং (p, q)-এর সঞ্চারপথ হল $x(x^2 + y^2) + ay^2 = 0$

(গ) কেন্দ্রের সাপেক্ষে পরাবৃত্ত $x^2 - y^2 = a^2$-এর পাদরেখা নির্ণয় করো।

উত্তর : পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক হল $xx_1 - yy_1 = a^2$(1)

এর উপর মূলবিন্দুগামী লম্বরেখা $xy_1 + yx_1 = 0$ (2)

মনে করি (p, q) উক্ত (1) ও (2)-এর ছেদবিন্দু।

$px_1 - qy_1 = a^2$, $py_1 + qx_1 = 0$ থেকে পাই, $x_1 = \frac{a^2p}{p^2+q^2}, y_1 = \frac{-a^2q}{p^2+q^2}$

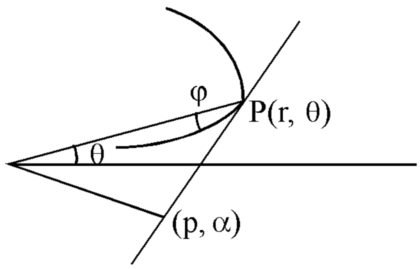
$x_1^2 - y_1^2 = a^2$ থেকে $a^2(p^2 - q^2) = (p^2 + q^2)^2$

অতএব, (p, q)-এর সঞ্চারপথ $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

(ঘ) মেরু সাপেক্ষে $r = a(1 + \cos\theta)$-এর পাদরেখা নির্ণয় কর।

উত্তর : নিম্ন সম্পর্ক দুটি ব্যবহার করা হবে :

$$\varphi + \theta - \alpha = \frac{\pi}{2}, \; p = r\sin\varphi$$



এখানে, $\tan\varphi = r\Big/\frac{dr}{d\theta}$ থেকে $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

সুতরাং, $\alpha = \frac{3\theta}{2}$

$$p = r\sin\varphi = r\cos\frac{\theta}{2} = a(1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}$$

$\alpha = \frac{3\theta}{2}$ বসিয়ে $p = a.2\cos^2\frac{\alpha}{3}$

(p, q)-এর সঞ্চারপথ হল $r = 2a\cos^3\frac{\theta}{3}$

অনুশীলনী

(1) মূলবিন্দুর সাপেক্ষে $27ay^2 = (x - 4a)^3$-এর পাদরেখা নির্ণয় কর।

(2) মেরুর সাপেক্ষে $r^2 = a^2\cos 2\theta$-এর পাদরেখা নির্ণয় করো।

(3) মূলবিন্দুর সাপেক্ষে $Ax^m + By^m = 1$ বক্ররেখার পাদরেখা নির্ণয় কর।

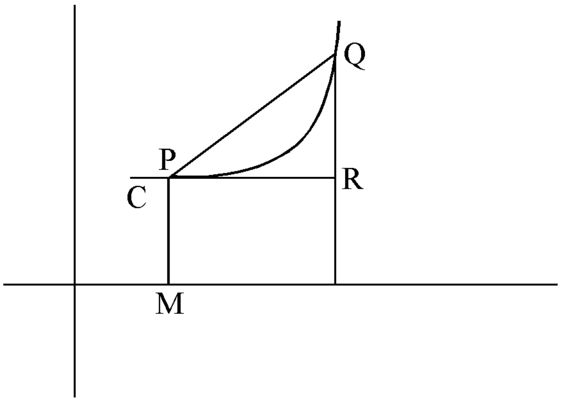
9.12 চাপ দৈর্ঘ্যের অবকল সহগ

P(x, y) এবং $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ বক্ররেখার উপরিস্থ দুটি বিন্দু। মনে করি বক্ররেখার উপরিস্থ C বিন্দু থেকে চাপ-দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা হইতেছে, চাপ CP = s, চাপ CQ = $s + \Delta s$

আমরা নিম্ন সূত্রটি ধরে নেব :

যখন Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দু অভিমুখে ধাবিত হয়, সেক্ষেত্রে $\frac{\text{জ্যা PQ}}{\text{চাপ দৈর্ঘ্য PQ}} \to 1$

$PQ^2 = PR^2 + QR^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$



$$\left(\frac{\text{জ্যা PQ}}{\Delta s}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

এবার Q, বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হলে

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$ অর্থাৎ

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$$

এখানে x-এর বৃদ্ধির সঙ্গে s-এর বৃদ্ধি হলে '+' চিহ্ন এবং অন্যথায় '–' চিহ্ন গৃহীত হবে।

আবার, $\sin \angle QPR = \frac{QR}{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta Q}$

Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হলে

$\frac{\Delta s}{PQ} \to 1$ হয় এবং ফলে $\sin\psi = \frac{dy}{ds}$, অনুরূপভাবে $\cos\psi = \frac{dx}{ds}$.

মেরু স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে মূলবিন্দুকে মেরুতে ও মেরুঅক্ষকে x-অক্ষ ধরলে

$x = r \cos \theta,\ y = r \sin \theta$

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (\cos\theta dr - r\sin\theta\, d\theta)^2 + (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)^2$$
$$= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

এক্ষেত্রে $\cos\varphi = \frac{dr}{ds}, \sin\varphi = r\frac{d\theta}{ds}$

এবং $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]}, \frac{ds}{dr} = \sqrt{\left[1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2\right]}$ হবে।

উদাহরণ :

(ক) $x = a(1 - \cos\theta),\ y = a(\theta + \sin\theta)$

চাপ দৈর্ঘ্যর অবকল সহগ নির্ণয় কর।

উত্তর : $dx = a \sin\theta \, d\theta$, $dy = a(1 + \cos\theta)d\theta$

$$(dx)^2 + (dy)^2 = a^2[2(1 + \cos\theta)](d\theta)^2 = 4a^2 \cos^2\frac{\theta}{2}(d\theta)^2$$

$$ds = 2a \cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

(খ) $r^n = a^n \cos n\theta$ হলে দেখাও যে,

$$a^{2n}\frac{d^2r}{ds^2} + nr^{2n-1} = 0$$

উত্তর : $nr^{n-1}\dfrac{dr}{d\theta} = a^n(-n\sin n\theta)$

$$\tan\varphi = r\Big/\frac{dr}{d\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right) \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{2} + n\theta$$

সুতরাং $\dfrac{dr}{ds} = \cos\varphi = -\sin n\theta$

$$r\frac{d\theta}{ds} = \sin\varphi = \cos n\theta$$

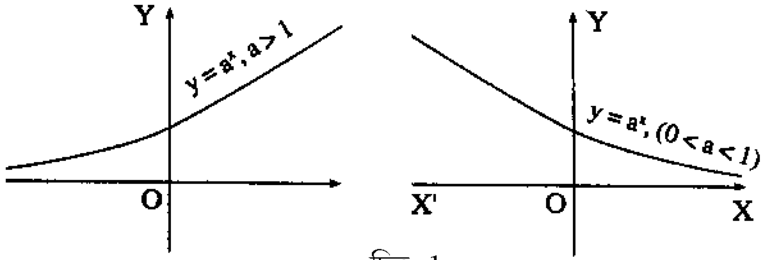
$$\frac{d^2r}{ds^2} = -n\cos n\theta . \frac{d\theta}{ds} = \frac{(-n\cos n\theta)(\cos n\theta)}{r}$$

$$= \frac{-n}{r}\left(\frac{r^n}{a^n}\right)^2 = \frac{-nr^{2n-1}}{a^{2n}}$$

অতএব, $a^{2n}\dfrac{d^2r}{ds^2} + nr^{2n-1} = 0$.

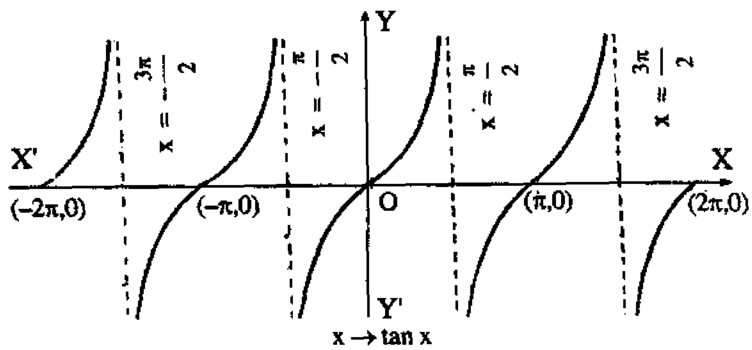
9.13 বক্ররেখার অসীম পথ

প্রস্তাবনা : বক্ররেখাগুলির মধ্যে একশ্রেণীর বক্ররেখা রয়েছে সেগুলি xy-তলে একটি সসীম অংশ জুড়ে থাকে। যেমন—বৃত্ত, উপবৃত্ত, অ্যাস্ট্রয়েড। আবার এক ধরণের বক্ররেখা রয়েছে সেগুলির উপর বিন্দু P(x, y) বিদ্যমান যেখানে $|x| \to \infty$ অথবা $|y| \to \infty$। এই শেষোক্ত গোষ্ঠীর বক্ররেখাগুলির ক্ষেত্রে আর একটি বৈশিষ্ট্য কিছু বক্ররেখার রয়েছে, যার কিছু চিত্র নীচে দেওয়া হল :



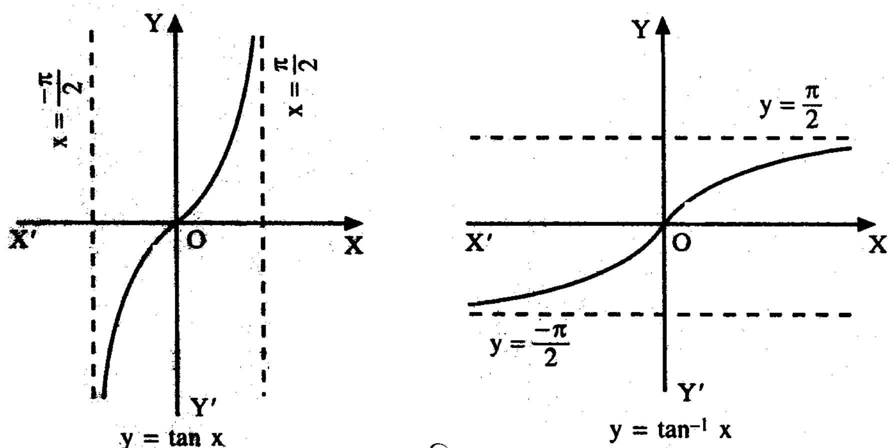
চিত্র 1

বামদিকের লেখচিত্রে যখন $a > 1$, $y = a^x$ বক্ররেখাটি x-এর সাংখ্যমান বৃদ্ধির সঙ্গো সঙ্গো x-অক্ষ অর্থাৎ $y = 0$ রেখার দিকে ধাবিত হচ্ছে অর্থাৎ $| x |$ এর মান বৃদ্ধির সাথে বক্ররেখার উপরিস্থ বিন্দু হতে $y = 0$-এর লম্ব দৈর্ঘ্য শূণ্যর দিকে ধাবিত হয়।

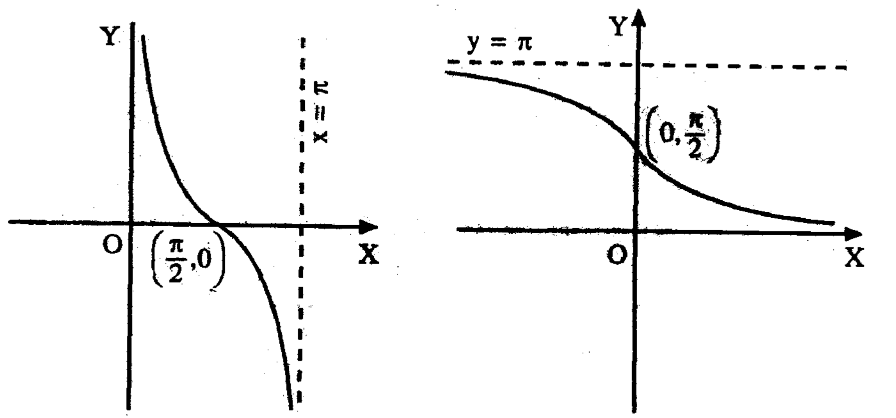


চিত্র 2

লেখচিত্রটি $y = \tan x$ অপেক্ষকের। $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$ রেখাগুলির থেকে বক্ররেখার উপরিস্থ বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $| y |$-এর মান বৃদ্ধির সঙ্গো সঙ্গো শূণ্যর দিকে ধাবিত হয়।



চিত্র 3



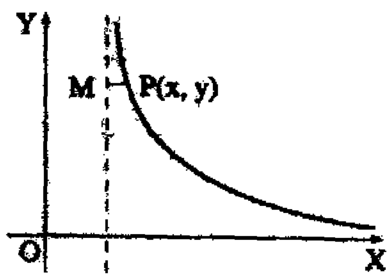
$y = \cot x$ চিত্র 4 $y = \cot^{-1} x$

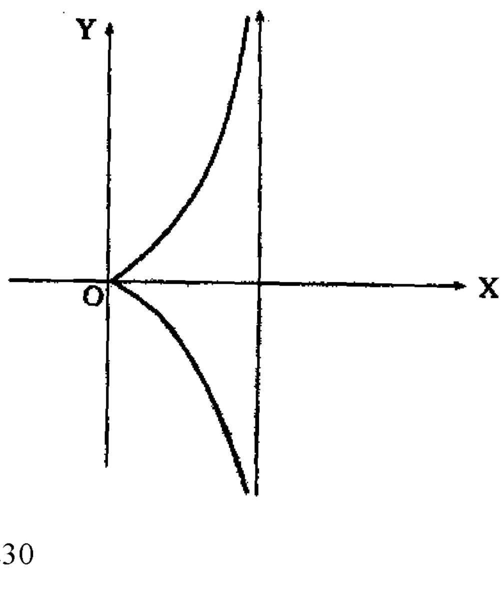
এই শেষোক্ত গোষ্ঠীভুক্ত বক্ররেখাগুলির মধ্যে যদি ঐ বক্ররেখার তলে এমন কোন সরলরেখার অস্তিত্ব থাকে যার দূরত্ব বক্ররেখার উপরিস্থ $P(x, y)$ বিন্দু থেকে শূণ্যের দিকে ধাবিত হয় যখন $|x| \to \infty$ বা $|y| \to \infty$ সেক্ষেত্রে ঐ সরলরেখাটিকে বক্ররেখাটির রৈখিক অসীমপথ বলা হয় (উপরের চিত্রগুলি প্রণিধানযোগ্য)। এই ধরণের রৈখিক অসীমপথের অস্তিত্ব থাকলে তাহা তিন ধরণের হতে পারে :

(1) y-অক্ষের সমান্তরাল (2) x-অক্ষের সমান্তরাল (3) তির্যক অসীমপথ।

y-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ :

যদি $\lim\limits_{x \to K+0} f(x)$ অথবা $\lim\limits_{x \to K-0} f(x) = +\infty$ বা, $-\infty$ হয়, তবে $x = K$ ঐ বক্ররেখার অসীমপথ হবে।





উদাহরণ :

(ক) $y = \dfrac{5x}{x-3}$

লক্ষণীয় যে $x \to 3$ হলে $|y| \to \infty$ হবে। সুতরাং $x = 3$ এর একটি অসীমপথ.

(খ) $y = \tan x$

লক্ষ্যণীয় যে $x \to (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ (n–যেকোন পূর্ণ সংখ্যা) হলে $\cos x \to 0$ ও $|y| \to \infty$ হবে।

সুতরাং ঐ বক্ররেখার অসীম সংখ্যক অসীমপথ

$x = (2n+1), \dfrac{\pi}{2} (n \in Z)$ আছে (চিত্র 2)

(গ) $y = (a-x)\tan\dfrac{\pi x}{2a}, a \in R - \{0\}$

লক্ষণীয় যে, $x \to (2n+1)a$, $(n \in z)$ হলে $\cos\dfrac{\pi x}{2a} \to 0$ হবে। কিন্তু $n = 0$ এর ক্ষেত্রে $x \to a$ হবে এবং সেক্ষেত্রে $\lim\limits_{x\to a} y$ সীমাটি $O \times \infty$ আকারের হবে। ফলে লপিতার নিয়মে সীমা নির্ধারণ করিতে হবে।

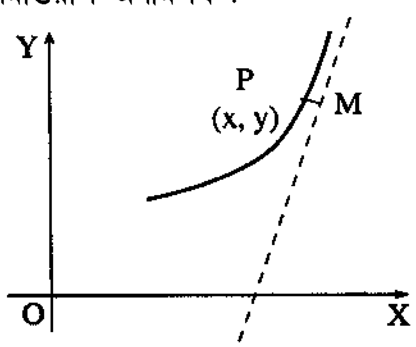
$$\lim_{x\to a}(a-x)\tan\frac{\pi x}{2a} = \lim_{x\to a}\frac{a-x}{\cot\frac{\pi x}{2a}}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{\pi}{2a}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\pi}$$, সসীম হবে।

ফলে $x = a$ অসীমপথ হতে পারে না।

নির্ণেয় অসীমপথগুলি হল $x = -a, \pm 3a, \pm 5a, \ldots$

তির্যক ও x-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ :



$y = mx + c$ একটি অসীম পথ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x}, c = \lim_{|x|\to\infty} (y - mx)$$ হয়, যেখানে m ও c উভয়েই সসীম।

যদি P(x, y) বক্ররেখার উপরিস্থ কোন বিন্দু হয়,

তবে y = mx + c সরলরেখা থেকে উক্ত বিন্দুর লম্ব দূরত্ব হবে $\left|\frac{y - mx - c}{\sqrt{(1 + m^2)}}\right|$

সরলরেখাটিকে অসীম পথ হতে হলে $P(x, y) \to \infty$

অর্থাৎ $| x | \to \infty$ হলে $d \to 0$ হতে হবে এবং সেক্ষেত্রে $c = \lim_{|x|\to\infty} (y - mx)$ হবে।

$$\frac{y}{x} - m = (y - mx). \frac{1}{x}$$

সুতরাং $|x| \to \infty$ হলে $\frac{y}{x} \to m$ হবে।

বিপরীতক্রমে $m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x}, c = \lim_{|x|\to\infty} (y - mx)$, m ও c সসীম হলে $d \to 0$ হবে।

উদাহরণ :

(ক) $y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$

উত্তর : x-এর যেকোন সসীম সীমার জন্য y-এর সীমাও সসীম হবে। সুতরাং x = a আকারের কোন অসীমপথ নেই।

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^2}{x^2 + 9} = \lim_{|x|\to\infty} \left(1 - \frac{9}{x^2 + 9}\right) = 1 = m$$

$$\lim_{|x|\to\infty} (y - mx) = \lim_{|x|\to\infty} (y - x) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{-9x}{x^2 + 9} = 0$$

অতএব, y = x হল অসীম পথ।

(খ) $x = \frac{1}{t^4 - 1}, y = \frac{t^3}{t^4 - 1}$

$t^4 - 1 = (t^2 + 1)(t + 1)(t - 1)$ এবং $t \to \pm 1$ হলে $| x | \to \infty$, $| y | \to \infty$ হবে।

$\lim_{t\to 1} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 1} t^3 = 1$ সুতরাং m = 1

$$\lim_{t\to 1}(y - mx) = \lim_{x\to 1}(y - x) = \lim_{t\to 1}\frac{t^3 - 1}{t^4 - 1} = \lim_{t\to 1}\frac{t^2 + t + 1}{(t^2 + 1)(t + 1)} = \frac{3}{4}$$

সুতরাং, $c = \frac{3}{4}$ এবং $y = x + \frac{3}{4}$ অর্থাৎ $4y = 4x + 3$ একটি অসীমপথ হবে।

$$\lim_{t\to -1}\frac{y}{x} = \lim_{t\to -1} t^3 = -1 \text{ সুতরাং } m = -1$$

$$\lim_{t\to -1}(y - mx) = \lim_{t\to -1}(y + x) = \lim_{t\to -1}\frac{t^3 + 1}{t^4 - 1} = \lim_{t\to -1}\frac{t^2 - t + 1}{(t^2 + 1)(t - 1)}$$

$$= -\frac{3}{4} = c$$

$y = -x - \frac{3}{4}$ অর্থাৎ $4y + 4x + 3 = 0$ আর একটি অসীমপথ।

অনুশীলনী :

অসীমপথ নির্ণয় কর :

(ক) $y = \frac{5x}{x - 2} + 5x$

(খ) $y = x + \ln x$

9.14 বক্ররেখার সমীকরণ F(x, y) = 0 থেকে অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল অসীমপথ নির্ণয়ের বিকল্প পদ্ধতি

(ক) $F(x, y) = 0$ সমীকরণে y-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ ধ্রুবক থাকলে y অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ থাকবে না। y-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ যদি x নির্ভর হয় কিন্তু সেই সহগকে বাস্তব, রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা না-যায় তবে y-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ থাকবে না। অন্যথায় y-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ যদি x-নির্ভর হয় ও ঐ সহগকে বাস্তব রৈখিক উৎপাদক $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... এ বিশ্লেষণ করা যায় তবে $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ ...... তার অসীমপথ হবে।

উদাহরণ :

(1) $x^2y^2 = 4(x^2 + y^2)$

y^2-এর সহগ $= x^2 - 4$ এবং $x = \pm 2$ দুটি অসীমপথ।

(2) $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$

y^3-এর সহগ ধ্রুবক। y-অক্ষের সমান্তরাল কোন অসীমপথ নেই।

(খ) $F(x, y) = 0$ সমীকরণে x-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ ধ্রুবক থাকলে x-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ থাকবে না। x-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ যদি y-নির্ভর হয় কিন্তু সেই সহগকে বাস্তব রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা না যায়, তবে x-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ থাকবে না। অন্যথায় x-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ যদি y-নির্ভর হয় ও সহগকে বাস্তব, রৈখিক উৎপাদক $g_1(y)$, $g_2(y)$, ...এ বিশ্লেষণ করা যায়, তবে $g_1(y) = 0$, $g_2(y) = 0$, ... তার অসীমপথ হবে। উক্ত উদাহরণ (1)-এর ক্ষেত্রে x^2 -এর সহগ $= y^2-4$ এবং $y = \pm 2$ দুটি অসীম পথ। উদাহরণ (2) -এর ক্ষেত্রে x^3-এর সহগ ধ্রুবক x অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ নেই।

9.15 বক্ররেখার তির্যক অসীমপথ নির্ণয়ের দুটি পদ্ধতি

মনে করি বক্ররেখার সমীকরণটি

$$(a_0y^n + a_1y^{n-1}x + a_2y^{n-2}x^2+\ldots+a_nx^n) + (b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2}x+\ldots+b_nx^{n-1}) + \ldots$$
$$+(l_{n-1}y + l_0x) + k_n = 0$$

যেখানে সহগগুলি বাস্তব রাশি।

এ ধরনের বক্ররেখার সর্বোচ্চ n সংখ্যক অসীমপথ থাকতে পারে।

পদ্ধতি I. অসীমপথের প্রবণতা m নিম্ন সমীকরণের বীজ।

$$\varphi_n(m) = a_0m^n + a_1m^{n-1}+\ldots+ a_n = 0$$

এটি থেকে m নির্ণয় কর। মনে করি বীজগুলি m_1, m_2, ..., m_n।

যদি $m = m_1$ হয়, তবে $c_1 = -\dfrac{\varphi_{n-1}(m_1)}{\varphi_n'(m_1)}$ যদি $\varphi_n'(m_1) \neq 0$ হয় সেক্ষেত্রে $y = m_1x + c_1$ নির্ণেয় অসীমপথ।

একইভাবে m_2, ..., m_n-এর ক্ষেত্রে যথাক্রমে c_2, ..., c_n নির্ণীত হবে যদি $\varphi_n'(m_2) \neq 0$, ..., $\varphi_n'(m_n) \neq 0$ হয়। কিন্তু যদি $\varphi_n'(m_1) = 0$ হয়, তার অর্থ m_1 উক্ত সমীকরণের দ্বিবীজ বা ত্রিবীজ। m_1 যদি দ্বিবীজ হয়, m_1-এর জন্য অনুসঙ্গী হিসাবে c-এর দুটি মান পাওয়া যাবে যারা $\dfrac{c^2}{2}\varphi_n''(m_1) + c\varphi_{n-1}'(m_1) + \varphi_{n-2}(m_1) = 0$ সমীকরণের বীজ হবে। এক্ষেত্রে সমান্তরাল অসীমপথ পাওয়া যাবে।

উদাহরণ : (1) $2x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + 3x^2 - 3y^2 + y - 3 = 0$

উত্তর : $\varphi_3(m) = -2m^3 - 3m^2 + 3m + 2 = 0$ সমাধান করে পাই

$m = 1, -\frac{1}{2}, -2$

$\varphi_2(m) = 3 - 3m^2, \varphi_3'(m) = -6m^2 - 6m + 3$

$m = 1$, $c = -\frac{\varphi_2(1)}{\varphi_3'(1)} = 0$ সুতরাং $y = x$ একটি অসীমপথ।

$m = -\frac{1}{2}$, $c = --\frac{\varphi_2\left(-\frac{1}{2}\right)}{\varphi_3'\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2}$

সুতরাং $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ বা $2y + x + 1 = 0$ একটি অসীমপথ।

$m = -2$, $c = -\frac{\varphi_2(-2)}{\varphi_3'(-2)} = -1$ সুতরাং $y + 2x + 1 = 0$ একটি অসীমপথ হবে।

(2) $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$

উত্তর : $\varphi_3(m) = m^3 - m^2 - m + 1 = 0$ সমাধান করে $m = 1, 1, -1$

$\varphi_3'(m) = 3m^2 - 2m - 1, \varphi_3''(m) = 6m - 2$

$\varphi_2(m) = 1 - m^2, \varphi_2'(m) = -2m, \varphi_1(m) = 0$

$m = 1$ দ্বিবীজ, c হল $\frac{c^2}{2}\varphi_3''(1) + c\varphi_2'(1) + \varphi_1(1) = 0$ সমীকরণের বীজ। অতএব $2c^2 - 2c = 0$ সুতরাং $c = 0, 1$, $y = x$ ও $y = x + 1$ সমান্তরাল অসীমপথ হবে।

$m = -1$, $c = -\frac{\varphi_2(-1)}{\varphi_3'(-1)} = 0$ $\therefore$ $y + x = 0$ একটি অসীমপথ।

মন্তব্য : (1) $\varphi_3(m, \varphi_2(m)$ ইত্যাদি গঠনের ক্ষেত্রে কোন কোন বই-তে '$x = 1, y = m$ বসাও' লেখা হয়—গাণিতিক নিরিখে এটি ভুল, কেননা $m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x}$।

(2) এই পদ্ধতিটি সূত্র নির্ভর অর্থাৎ স্মৃতি নির্ভর এবং তুলনামূলকভাবে জটিল। বিকল্প পদ্ধতি 2 লক্ষণীয়।

পদ্ধতি 2 (1) $2x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + 3x^2 - 3y^2 + y - 3 = 0$

উত্তর : সর্বোচ্চ ঘাত বিশিষ্ট পদগুলি $2x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 2y^3$

$= (x - y)(2x + y)(x + 2y)$

সম্ভাব্য অসীমপথগুলি $x - y = 0$, $2x + y = 0$, $x + 2y = 0$-এর সমান্তরাল।

$x - y = 0$-এর সমান্তরাল অসীমপথ

$$x - y + \underset{\substack{\frac{y}{x} \to 1 \\ |x| \to \infty}}{\text{lt}} \frac{3(x^2 - y^2)}{(x + 2y)(2x + y)} + \underset{\substack{\frac{y}{x} \to 1 \\ |x| \to \infty}}{\text{lt}} \frac{y - 3}{(x + 2y)(2x + y)} = 0$$

$$x - y + \underset{\substack{\frac{y}{x} \to 1 \\ |x| \to \infty}}{\text{lt}} \frac{3\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{2y}{x}\right)\left(2 + \frac{y}{x}\right)} + \underset{\substack{\frac{y}{x} \to 1 \\ |x| \to \infty}}{\text{lt}} \frac{\left(\frac{y}{x} - \frac{3}{x}\right)\frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{2y}{x}\right)\left(2 + \frac{y}{x}\right)} = 0$$

$x - y = 0$

$x + 2y = 0$-এর সমান্তরাল অসীমপথ

$$x + 2y + \underset{\substack{\frac{y}{x} \to \frac{1}{2} \\ |x| \to \infty}}{\text{lt}} \frac{3(x^2 - y^2)}{(x - y)(2x + y)} + \underset{\substack{\frac{y}{x} \to \frac{1}{2} \\ |x| \to \infty}}{\text{lt}} \frac{y - 3}{(x - y)(2x + y)} = 0$$

$$x + 2y + \underset{\substack{\frac{y}{x} \to \frac{1}{2} \\ |x| \to \infty}}{\text{lt}} \frac{3\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}{\left(1 - \frac{y}{x}\right)\left(2 + \frac{y}{x}\right)} + \underset{\substack{\frac{y}{x} \to \frac{1}{2} \\ |x| \to \infty}}{\text{lt}} \frac{\left(\frac{y}{x} - \frac{3}{x}\right)\frac{1}{x}}{\left(1 - \frac{y}{x}\right)\left(2 + \frac{y}{x}\right)} = 0$$

$x + 2y + 1 = 0$

$2x + y = 0$-এর সমান্তরাল অসীমপথ

$$2x + y + \underset{\substack{\frac{y}{x} \to -2 \\ |x| \to \infty}}{\text{lt}} \frac{3(x^2 - y^2)}{(x - y)(x + 2y)} + \underset{\substack{\frac{y}{x} \to -2 \\ |x| \to \infty}}{\text{lt}} \frac{y - 3}{(x - y)(x + 2y)} = 0$$

$$2x+y+\lim_{\substack{\frac{y}{x}\to -2\\ |x|\to\infty}}\frac{3\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{2y}{x}\right)}+\lim_{\substack{\frac{y}{x}\to -2\\ |x\to\infty|}}\frac{\left(\frac{y}{x}-\frac{3}{x}\right)\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{2y}{x}\right)}=0$$

$2x + y + 1 = 0$

(2) $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$

উত্তর : $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 = (y - x)^2 (y + x)$

সম্ভাব্য অসীমপথগুলি $y - x = 0$ ও $y + x = 0$-এর সমান্তরাল।

$y - x = 0$-এর সমান্তরাল অসীমপথ

$$(x-y)^2+(x-y)\lim_{\substack{\frac{y}{x}\to 1\\ |x|\to\infty}}\frac{x+y}{x+y}+\lim_{\substack{\frac{y}{x}\to 1\\ |x|\to\infty}}\frac{-1}{x+y}=0$$

$(x - y)^2 + (x - y) = 0$ অথাৎ $x - y = 0$, $x - y + 1 = 0$ দুটি অসীমপথ।

$y + x = 0$-এর সমান্তরাল অসীমপথ

$$y+x+\lim_{\substack{\frac{y}{x}\to 1\\ |x|\to\infty}}\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{\left(1-\frac{y}{x}\right)^2}+\lim_{\substack{\frac{y}{x}\to -1\\ |x|\to\infty}}\frac{-1}{x^2\left(1-\frac{y}{x}\right)^2}=0$$

$x + y = 0$

9.16 বিশেষ আকারের বীজগাণিতিক সমীকরণের ক্ষেত্রে পদ্ধতি

বক্ররেখার সমীকরণটি $F_n + F_{n-2} = 0$ আকারের মূলদ বীজগাণিতিক সমীকরণ, F_n হল n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক F_n-এর সব উৎপাদক বাস্তব ও রৈখিক, ভিন্ন ভিন্ন। সেক্ষেত্রে অসীমপথগুলি হবে $F_n = 0$। F_{n-1} পদ না থাকায় পূর্বে উল্লেখিত পদ্ধতি থেকে কোন ধ্রুবক পদ আসবে না।

উদাহরণ : $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + 2x - y + 1 = 0$

উত্তর : $F_3 = x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 = (x - y)(x - 2y)(x - 3y)$

প্রদত্ত সমীকরণটি $F_3 + F_1 = 0$ আকারের এবং F_3-এর উৎপাদকগুলি রৈখিক, বাস্তব ও ভিন্ন ভিন্ন।

অসীমপথগুলি হবে $x - y = 0$, $x - 2y = 0$, $x - 3y = 0$

সতর্কতা (1) মনে করে বক্ররেখাটি $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ আকারের—এটিকে বজ্রগুণণ পদ্ধতিতে $yQ(x) = P(x)$ লেখা যাবে না।

(2) বর্গ করা যাবে না—অর্থাৎ মনে কর বক্ররেখাটি $y = \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)}}$। এটিকে $y^2 = \frac{x^2}{x^2+3}$ লেখা যাবে না।

9.17 বক্ররেখার সঙ্গে অসীমপথগুলির ছেদবিন্দু ও তাহাদের সঞ্চারপথ

(ক) n ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণের ক্ষেত্রে অসীমপথগুলি যদি বক্ররেখাটিকে ছেদ করে তবে $n(n - 2)$ সংখ্যক বিন্দুতে ছেদ করবে।

(খ) যদি বক্ররেখার সমীকরণ $F_n = 0$ আকারের হয় ও অসীমপথগুলির যৌথ সমীকরণ $G_n = 0$ হয়, তবে ছেদবিন্দুগুলি সঞ্চারপথ $F_n - G_n = 0$

9.18 অনুশীলনী

(1) নিম্ন বক্ররেখাগুলির অসীমপথ নির্ণয় কর :

(ক) $y^3 - 6xy^2 + 11x^2y - 6x^3 + y^2 - x^2 + 2x - 3y - 1 = 0$

(খ) $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$

(গ) $x^4 - x^2y^2 + x^2 + y^2 - a^2 = 0$

(ঘ) $(y - x)(y + x)(y + 2x) + 3x - y + 9 = 0$

(ঙ) $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, y = \frac{t^2}{t-1}$

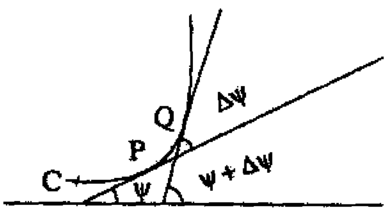
(2) দেখাও যে $2y^3 - 2x^2y - 4xy^2 + 4x^3 - 14xy + 6y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$ বক্ররেখার অসীমপথগুলির সঙ্গো ছেদবিন্দু সমূহের সঞ্চারপথ $8x + 2y + 1 = 0$

একক 10 ❒ রেখার বক্রতা

গঠন

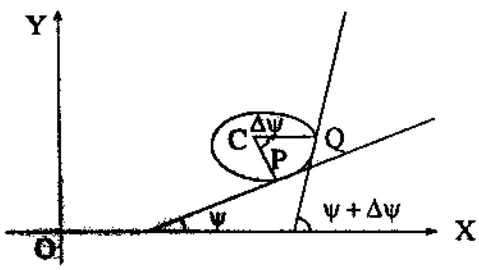
10.1 প্রস্তাবনা

সরলরেখা ও বক্ররেখার মধ্যে পার্থক্যর গাণিতির ব্যাখ্যা কি হবে কিংবা অধিবৃত্ত বা পরাবৃত্তের চাপগুলির দিক্ নির্দেশ কিভাবে স্থির হবে—এ ধরনের বহু মৌল প্রশ্নের সমাধান করিয়া বক্ররেখার বক্রতার সংজ্ঞা আনা হয়।



মনে করি, xy-তলে Γ_1 একটি বক্ররেখা। P(x, y) এর উপর যে কোন বিন্দু এবং Q(x + Δx, y + Δy) হইল P-এর সন্নিহিত বিন্দু। মনে করি বক্ররেখার উপরিস্থ C বিন্দু হইতে বক্ররেখার দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা হয়েছে।

বক্ররেখাটি P হইতে Q বিন্দু গেলে স্পর্শকটি $\Delta\psi$ কোণে ঘুরে যায়। এই $\Delta\psi$-কে মোট বক্রতা এবং $\frac{\Delta\psi}{\Delta S}$-কে গড় বক্রতা বলা হয়। চাপ CP = S, চাপ CQ = S + ΔS। Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হলে $\lim\limits_{Q\to P}\frac{\Delta\psi}{\Delta S} = \frac{d\psi}{dS}$ কে P বিন্দুতে বক্রতা κ বলা হয়।



সরলরেখার ক্ষেত্রে $\kappa = 0$

বৃত্তের উপরিস্থ বিন্দুতে বক্রতা নির্ণয় :

r একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র হল C এবং P যে কোন একটি বিন্দু ঐ বৃত্তের উপর, Q হল P-এর সন্নিহিত বিন্দু। চাপ PQ = $\Delta S = r.\Delta\psi$

অতএব $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta S} = \dfrac{1}{r}$ এবং $\lim\limits_{Q\to P} \dfrac{\Delta\psi}{\Delta S} = \dfrac{d\psi}{dS} = \dfrac{1}{r}$ সুতরাং বৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দুতে বক্রতা হল বৃত্তের ব্যাসার্ধের অনোন্যক এবং ফলে ধ্রুবক।

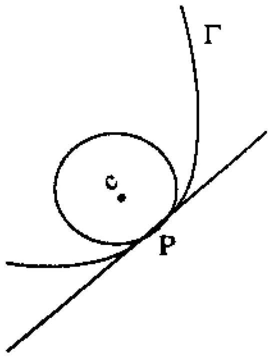
10.2 বক্রতা বৃত্ত

মনে করি xy-তলে Γ যেকোন বক্ররেখা এবং তাহার উপরিস্থ P বিন্দুতে বক্রতা $\kappa \neq 0$। $\dfrac{1}{\kappa}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন করা হল যাতে ঐ বৃত্ত

(ক) বক্ররেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে

(খ) বক্ররেখা Γ ও বৃত্ত উভয়েই P বিন্দুতে উক্ত স্পর্শকের একই দিকে থাকে।

ফলে P বিন্দুতে বৃত্তের বক্রতা = $\dfrac{1}{1/\kappa} = \kappa$



অর্থাৎ P বিন্দুতে উক্ত বৃত্ত এবং বক্ররেখা Γ-এর বক্রতা সমান।

ঐ বৃত্তকে P বিন্দুতে বক্ররেখা Γ-এর বক্রতা বৃত্ত (Circle of Curvature) বলা হয়। এই বৃত্তের ব্যাসার্ধকে P বিন্দুতে বক্ররেখা Γ-এর বক্রতা-ব্যাসার্ধ বলা হয়—এই কারণেই P বিন্দুতে বক্ররেখা Γ-এর বক্রতা-ব্যাসার্ধ হল $\dfrac{1}{\kappa}$ অর্থাৎ $\dfrac{dS}{d\psi}$। উল্লেখ্য, বক্রতার অনোন্যককে বক্রতা-বাসার্ধ বলার কারণ এটাই। P বিন্দুতে অঙ্কিত ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে বক্ররেখা Γ-এর P বিন্দুতে বক্রতা কেন্দ্র বলা হয়। এই বক্রতা কেন্দ্র কোন স্থির বা নির্দিষ্ট বিন্দু নয়—P এর অবস্থানের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে বক্রতা কেন্দ্রও পরিবর্তিত হয়। বক্রতা কেন্দ্রর সঞ্চারপথকে বক্রতা কেন্দ্রজ বা Evolute বলা হয় এবং বৃত্তের জ্যা-কে বক্ররেখার ঐ বিন্দুতে বক্রতা-জ্যা বলা হয়।

10.3 বক্রতা-ব্যাসার্ধের সূত্র নির্ণয়

(ক) y = f(x) আকারের কার্তিয় সমীকরণের ক্ষেত্রে :

আমরা জানি $\tan\psi = \dfrac{dy}{dx}$

$$\sec^2\psi \frac{d\psi}{dS} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dS} = y_2 \cdot \cos\psi$$

সুতরাং $\rho = \dfrac{ds}{d\psi} = \dfrac{\left(1+y_1^2\right)^{3/2}}{|y_2|}, y_2 \neq 0$

মন্তব্য : হরে y_2-এর ক্ষেত্রে অবশ্যই মডিউলাস চিহ্ন দিতে হবে।

(খ) $x = f(y)$ আকারের সমীকরণের ক্ষেত্রে

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x_1} \quad \text{যেখানে} \quad x_1 = \frac{dx}{dy}$$

$$\sec^2\psi = \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{x_1}\right) = -\frac{1}{x_1^2} \cdot \frac{x^2}{x_1} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{-x_2}{x_1^3}\cos\psi$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{-\frac{x_2}{x_1^3}}{\sec^3\psi} = \frac{-\frac{x_2}{x_1^3}}{\left(1+\frac{1}{x_1^2}\right)^{3/2}} = \frac{-x_2}{\left(1+x_1^2\right)^{3/2}}$$

সুতরাং $\rho = \dfrac{ds}{d\psi} = \dfrac{\left(1+x_1^2\right)^{3/2}}{|x_2|}$

মন্তব্য : হরে x_2-এর ক্ষেত্রে অবশ্যই মডিউলাস চিহ্ন দিতে হবে।

(গ) প্যারামেট্রিক সমীকরণ $x = x(t),\ y = y(t)$

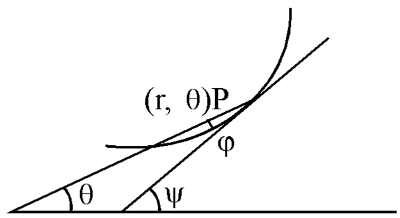
এখানে $y_1 = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'}, \left(y' = \dfrac{dy}{dt}, x' = \dfrac{dx}{dt}\right)$

$$y_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2} \cdot \frac{1}{x'}$$

সুতরাং $\rho = \dfrac{\left(1+\frac{y'^2}{x'^2}\right)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|} \cdot x'^3 = \dfrac{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|} \qquad (x'y'' - x''y' \neq 0)$

(ঘ) মেরু সমীকরণ $r = f(\theta)$-এর ক্ষেত্রে :

$$\psi = \varphi + \theta = \tan^{-1}\frac{r}{r_1} + \theta$$



$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{1}{1+\frac{r^2}{r_1^2}} \cdot \frac{d}{d\theta}\left(\frac{r}{r_1}\right) + 1$$

$$= \frac{r_1^2}{r_1^2 + r^2} \cdot \frac{r_1^2 - rr_2}{r_1^2} + 1$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r_1^2 - rr_2}{r^2 + r_1^2}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(r^2 + r_1^2\right)}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{\left(r^2 + r_1^2\right)^{3/2}}{\left|r^2 + 2r_1^2 - rr_2\right|},\ r^2 + 2r_1^2 - rr_2 \neq 0$$

(ঙ) পাদ-সমীকরণ $p = f\,(r)$-এর ক্ষেত্রে

$p = r\sin\varphi$ সুতরাং $\dfrac{dp}{dr} = \sin\varphi + r\cos\varphi\,\dfrac{d\varphi}{dr}$

$$\frac{dp}{dr} = r\frac{d\theta}{ds} + r\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{dr} = r\frac{d}{ds}(\theta + \varphi) = r\frac{d\psi}{ds}$$

সুতরাং $\rho = \dfrac{ds}{d\psi} = r\dfrac{dr}{dp}$

(চ) বক্ররেখার $f(x,\ y) = 0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে :

আমরা জানি $y_1 = -\dfrac{f_x}{f_y}, y_2 = -\dfrac{f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$

সুতরাং $\rho = \dfrac{\left(1 + y_1^2\right)^{3/2}}{|y_2|}$

$$= \frac{\left(f_x^2 + f_y^2\right)^{3/2}}{\left|f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2\right|}$$

$$f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2 \neq 0$$

মন্তব্য : মূলবিন্দুতে বক্ররেখার বক্রতা-ব্যাসার্ধ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে উপরের সূত্রগুলি সাধারণভাবে প্রযোজ্য নয়—বিকল্প পদ্ধতি পরে আলোচিত হবে।

10.4 উদাহরণ

(ক) $x = a \sin 2t\ (1 + \cos 2t),\ y = a \cos 2t\ (1 - \cos 2t)\ ;\ a > 0$

উত্তর : $\left.\begin{aligned} x' &= 2a(\cos 2t + \cos 4t \\ y' &= 2a(-\sin 2t + \sin 4t)\end{aligned}\right\} \begin{aligned} y'' &= 2a(-2\cos 2t + 4\cos 4t) \\ x'' &= -2a(2\sin 2t + 4\sin 4t)\end{aligned}$

$$\rho = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|} = 4a \cos 3t$$

(খ) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নাভিগামী জ্যা-এর দুই প্রান্তবিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্ধ ρ_1 ও ρ_2 হলে দেখাও যে

$$(\rho_1)^{-2/3} + (\rho_2)^{-2/3} = (2a)^{-2/3}, a > 0$$

উত্তর : $(at^2, 2at)$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দু।

$x = at^2,\ y = 2at$ অতএব $x' = 2at,\ x'' = 2a,\ y' = 2a,\ y'' = 0$

$$\rho = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|} = \frac{\left[4a^2\left(1 + t^2\right)\right]^{3/2}}{\left|-4a^2\right|}$$

সুতরাং $\rho^{-2/3} = \dfrac{(2a)^{-2/3}}{1 + t^2}$

মনে করি $P\left(at_1^2, 2at_1\right)$ ও $P'\left(at_2^2, 2at_2\right)$ নাভিগামী জ্যা-এর দুই প্রান্তবিন্দু। অতএব $t_1t_2 = 1$

$$\rho_1^{-2/3} + \rho_2^{-2/3} = (2a)^{-2/3}\left[\frac{1}{1 + t_1^2} + \frac{1}{1 + t_2^2}\right]$$

$$= (2a)^{-2/3}\left[\frac{2+t_1^2+t_2^2}{2+t_1^2+t_2^2}\right] \qquad (t_1t_2 = -1 \text{ বসিয়ে})$$

$$= (2a)^{-2/3}$$

(গ) ρ, ρ' যদি উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ এর দুই অনুবন্ধী ব্যাস-এর প্রান্তবিন্দু হয়, দেখাও যে $(\rho^{2/3}+\rho'^{2/3})(ab)^{2/3} = a^2 + b^2$

উত্তর : $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ ঐ উপবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দু।

$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ হইলে $x' = -a\sin\theta,\ y' = b\cos\theta$

$x'' = -a\cos\theta,\ y'' = -b\sin\theta$

$$\rho = \frac{(x'^2+y'^2)}{|x'y''-x''y'|} = \frac{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{3/2}}{ab}$$

অতএব $\rho^{2/3} = \frac{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}{(ab)^{2/3}}$

অনুবন্ধী ব্যাসের দুই প্রান্তবিন্দু $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ ও $\left(a\cos\overline{\theta+\frac{\pi}{2}}, b\sin\overline{\theta+\frac{\pi}{2}}\right)$

ফলে $\rho^{2/3}+\rho'^{2/3} = \frac{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}{(ab)^{2/3}} = \frac{a^2+b^2}{(ab)^{2/3}}$

(ঘ) $\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta$ বক্ররেখার $\theta = \pi$ বিন্দুতে ρ নির্ণয় কর, $e < 1$

উত্তর : $r - \frac{l}{1+e\cos\theta}, r_1 = \frac{r^2 e\sin\theta}{l}$

$$r_2 = \frac{e}{l}\left[2r.r_1\sin\theta + r^2\cos\theta\right]$$

$\theta = \pi$ বিন্দুতে $r = \frac{l}{1-e}, r_1 = 0,\ r_2 = \frac{-e}{l}\cdot\frac{l^2}{(1-e)^2}$

$$\rho \left| = \frac{\left(r^2 + r_1^2\right)^{3/2}}{r^2 + 2r_1^2 - rr_2} \right|_{\theta=\pi} = l$$

$$\theta = \pi$$

(ঙ) $p^2 = \dfrac{r^4}{r^2 + a^2}$, দেখাও যে $\rho = \dfrac{\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}{r^2 + 2a^2}$

উত্তর : $2p\dfrac{dp}{dr} = \dfrac{2r^5 - 4r^3a^2}{\left(r^2 + a^2\right)^2}$, অতএব $\dfrac{dp}{dr} = \dfrac{r^3\left(r^2 + 2a^2\right)}{\left(r^2 + a^2\right)^2} \cdot \dfrac{\sqrt{\left(r^2 + a^2\right)}}{r^2}$

$$= \frac{r\left(r^2 + 2a^2\right)}{\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

$$\rho = r\frac{dr}{dp} = \frac{r\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}{r\left(r^2 + 2a^2\right)} = \frac{\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}{r^2 + 2a^2}$$

অনুশীলনী :

(1) $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ বক্ররেখার $\theta = 0$ বিন্দুতে ρ নির্ণয় কর।

(2) $x = 5t$, $y = 5\log\sec t$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে ρ-এর অবম মান নির্ণয় কর।

(3) $r^n = a^n \sin n\theta$ বক্ররেখার উপর যেকোন বিন্দুতে ρ নির্ণয় কর।

(4) $x^2 + xy + y^2 = 3$ বক্ররেখার (1, 1) বিন্দুতে ρ নির্ণয় কর।

(5) অধিবৃত্ত $x = at^2$, $y = 2at$-এর উপরিস্থ সেই বিন্দু বা বিন্দুগুলি নির্ণয় কর যেখানে বক্রতা-ব্যাসার্ধ নাভিলম্বের সমান।

10.5 মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয়

সূত্র : (1) মূলবিন্দুতে $ax + by = 0$ স্পর্শক হলে

$$\rho = \frac{\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)}}{2} \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{ax + by}$$

(2) মূল বিন্দুতে y-অক্ষ স্পর্শক হলে $\rho = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^2}{2x}$

(3) মূল বিন্দুতে x-অক্ষ স্পর্শক হলে $\rho = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{2y}$

উদাহরণ : $y^2 - 3xy - 4x^2 + 5x^3 + x^4y - y^5 = 0$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে ρ নির্ণয় কর।

উত্তর : মূলবিন্দুতে স্পর্শক $y^2 - 3xy - 4x^2 = 0$ অর্থাৎ $y - 4x = 0$, $y + x = 0$, $y - 4x = 0$. স্পর্শক ধরা হলে $\rho = \frac{\sqrt{17}}{2} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 + y^2}{y - 4x}$

$$\rho = \frac{\sqrt{17}}{2} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(x + y)}{y^5 - x^4y - 5x^3} = \frac{\sqrt{17}}{2} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\left(1 + \frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)^3 . y^2 - \frac{y}{x} . x^2 - 5}$$

$= \frac{17\sqrt{17}}{2}$ [$\frac{y}{x} \to -1$ এবং ρ-এর ঋণাত্মক চিহ্ন বিপরীত দিকে বলে]

$y + x = 0$ স্পর্শক ধরা হলে $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 + y^2}{y + x}$

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(y - 4x)}{y^5 - x^4y - 5x^3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\left(\frac{y}{x} - 4\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)^3 . y^2 - \frac{y}{z} . x^2 - 5}$$

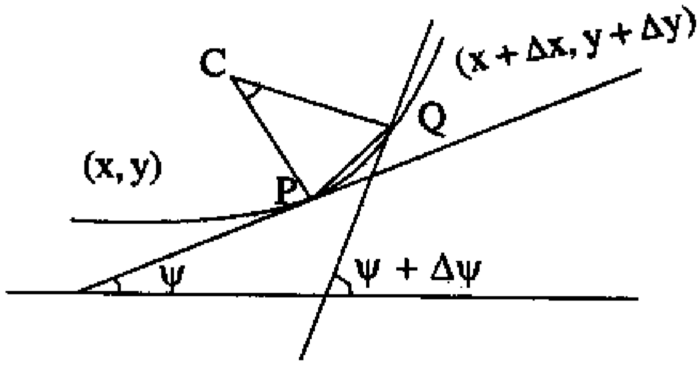
$$= \sqrt{2}$$

অনুশীলনী :

(1) $y = x^3 + 5x^2 + 6x$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

(2) $x^4 - y^4 + x^3 - y^3 + x^2 - y^2 + y = 0$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

10.6 বক্রতা-কেন্দ্র নির্ধারণ



মনে কর বক্ররেখা Γ-এর উপর $P(x, y)$ একটি বিন্দু এবং $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ হল P-এর সন্নিহিত বিন্দু।

চাপ $AP = S$, চাপ $AQ = S + AS$

ত্রিভুজ ΔCPQ হইতে পাই $\dfrac{CP}{\sin \angle CQP} = \dfrac{PQ}{\sin \angle PCQ}$

$$CP = \sin \angle CQP \ . \ \frac{PQ}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta \psi} \cdot \frac{\Delta \psi}{\sin \Delta \psi}$$

যখন Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হয়,

$$\angle CQP \to \frac{\pi}{2}, \frac{\Delta \psi}{\sin \Delta \psi} \to 1, \frac{\Delta s}{\Delta \psi} \to \frac{ds}{d\psi}, \frac{PQ}{\Delta s} \to 1$$

আমরা পাই $CP = \dfrac{ds}{d\psi} = \rho$

ফলে C বিন্দু হইল P ও Q বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত অভিলম্বদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সীমাস্থ অবস্থান যখন Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হয়।

P বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $(Y - y)\ g(x) + (X - x) = 0$ (1)

যেখানে $g(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Q বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $(Y - y - \Delta y)g(x + \Delta x) + (X - x - \Delta x) = 0$ (2)

(2) – (1) করে পাই $(Y-y)\left\{\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right\} - \frac{\Delta y}{\Delta x}.g(x+\Delta x) - 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x \to 0 \text{ হলে } Y = y + \dfrac{1+y_1^2}{y^2} \\ \text{(1)-এ বসিয়ে পাই } X - x - \dfrac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2} \end{array}\right\} \text{বক্রতা কেন্দ্র হল } (X, Y)$$

উদাহরণ :

(1) অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$-এর যেকোন বিন্দুতে বক্রতাকেন্দ্র ও বক্রতা কেন্দ্রজ নির্ণয় কর।

উত্তর : যে কোন বিন্দু $(at^2, 2at)$-এ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{2at^3}$

$$X = at^2 - \frac{\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{-\frac{1}{2at^3}} = 3at^2 + 2a$$

$$Y = 2at + \frac{1+\frac{1}{t^2}}{-\frac{1}{2at^3}} = -2at^3$$

t অপনয়ন করে $\left(\frac{X-2a}{3a}\right)^3 = \left(\frac{Y}{-2a}\right)^2$

(X, Y)-এর সঞ্চারপথ হল $4(x - 2a)^3 = 27ay^2$, এটিই হল বক্রতা কেন্দ্রজ।

(2) বক্ররেখা $y = 3x^3 + 2x^2 - 3$-এর (0, –3) বিন্দুতে বক্রতা বৃত্ত নির্ণয় কর।

উত্তর : $y_1 = 9x^2 + 4x$, $y_2 = 18x + 4$

(0, –3) বিন্দুতে $y_1 = 0$, $y_2 = 4$

বক্রতা কেন্দ্র (X, Y) হলে $X = x - \frac{y_1(1+y_1^2)}{y_2} = 0, Y = y + \frac{1+y_1^2}{y_2} = -\frac{11}{4}$

বক্রতা ব্যাসার্ধ $\rho = \frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{|y_2|} = \frac{1}{4}$

নির্ণেয় বক্রতা-বৃত্ত হল $(x-0)^2 + \left(y+\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

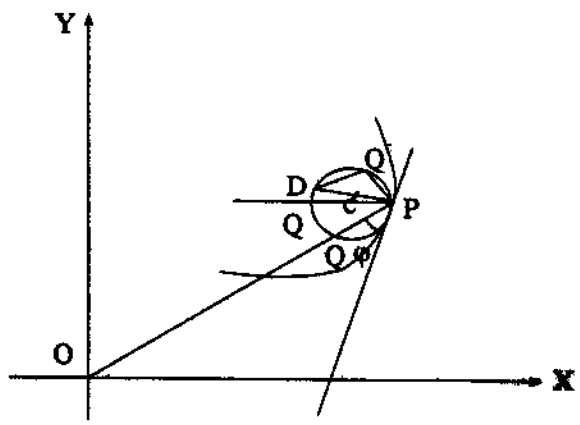
বা, $4(x^2 + y^2) + 22y - 30 = 0$

অনুশীলনী :

(1) $y = x^2$ অধিবৃত্তের (1, 1) বিন্দুতে বক্রতা বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(2) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0,$ বক্ররেখার বক্রতা-কেন্দ্রজ নির্ণয় কর।

10.7 বক্রতা জ্যা-নির্ধারণ



PD, P বিন্দুগামী বক্রতা ব্যাস ও PQ বক্রতা-জ্যা।

বক্রতা জ্যা PQ-এর দৈর্ঘ্য = $2\rho \cos\theta$, $\angle QPD = \theta$

PQ, x-অক্ষের সমান্তরাল হলে $\theta = 90° - \psi$ এবং $PQ = 2\rho\sin\psi$

PQ, y-অক্ষের সমান্তরাল হলে জ্যা PQ-এর দৈর্ঘ্য = $2\rho\cos\psi$

PQ মেরুগামী জ্যা হলে এর দৈর্ঘ্য = $2\rho\sin\varphi$

অনুশীলনী :

(1) বক্ররেখা $y = c \log \sec\left(\frac{x}{c}\right)$-এর অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(2) কার্ডিঅয়েড $r = a\ (1 + \cos\theta)$, $a > 0$-এর মেরুগামী জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

10.8 সহায়ক গ্রন্থ

1. Differential Calculus — Shantinarayan

1. Differential Calculus — Maity & Ghosh

1. Differential Calculus — H. S. Dhami

একক 11 ❑ সরলরেখা ও বক্ররেখা পরিবারের পরিস্পর্শক

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

আমরা জানি যে x ও y-এর একটি একঘাত সমীকরণ সকল সময়েই তলে একটি সরলরেখায় সূচিত করে এবং এই সরলরেখার সমীকরণকে $y = mx + c$ আকারে প্রকাশ করা যায় যেখানে m ও c-এর বিশেষ জ্যামিতিক তাৎপর্য রয়েছে। এখন মনে কর c-কে আমরা m-এর একটি অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করলাম—ধরা যাক $c = \frac{4}{m}$। সেক্ষেত্রে সরলরেখাটির সমীকরণ হইল $y = mx + \frac{4}{m}$, m-এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যাবে—ঐ সরলরেখাগুলি ভিন্ন ভিন্ন কিন্তু সরলরেখাগুলির মধ্যে সাদৃশ্যও রয়েছে—প্রথমত এদের আকার একই, দ্বিতীয়ত প্রাথমিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাহায্যে আমরা জানি যে এ ধরণের সরলরেখাগুলি সব সময়েই $y^2 = 16x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। কাজেই এই সরলরেখা সমূহের বিশেষ ধর্ম রয়েছে। আমরা এই সরলরেখাগুলিকে সরলরেখা-পরিবার বলব যেখানে m হল প্রচল। অনুরূপভাবে $y = mx + \sqrt{(4m^2 + 1)}$, m-এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যাবে। এ ধরণের সরলরেখাগুলি সব সময়েই $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে। আমরা এ ধরণের সরলরেখা সমূহকেও সরলরেখা-পরিবার বলব। ঐ সমীকরণ এক প্রচল (m) বিশিষ্ট পরিবার। আবার $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ যেখানে $a + b = 5$—একটি দুই প্রচল বিশিষ্ট সরলরেখা-পরিবার।

একইভাবে এক প্রচল ও দুই প্রচল বিশিষ্ট একতলীয় বক্ররেখা পরিবারের কথা বিবেচনা করা যায়। যেমন $(x - \alpha)^2 + y^2 = 4$-এটি α প্রচল বিশিষ্ট বৃত্ত-পরিবার। লক্ষণীয় এই বৃত্তগুলির প্রতিটিই x-অক্ষের সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা $y = \pm 2$ -কে স্পর্শ করে। $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ যেখানে $ab = 6$, দুই প্রচল (a ও b) বিশিষ্ট উপবৃত্ত পরিবার।

এই অধ্যায়ে আমরা এক প্রচলবিশিষ্ট ও দুই প্রচল প্রচলবিশিষ্ট সরলরেখা-পরিবার ও বক্ররেখা-পরিবার এবং তাদের স্পর্শ করে এমন বক্ররেখা বা সরলরেখার অস্তিত্ব নিয়ে আলোচনা করব।

এক প্রচল (α) বিশিষ্ট সরলরেখা বা বক্ররেখা পরিবারকে $f(x, y, \alpha) = 0$ দ্বারা এবং দুই প্রচল (α, β) বিশিষ্ট সরলরেখা বা বক্ররেখা পরিবারকে $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$ যেখানে $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে।

11.2 পরিস্পর্শক ও উহার নির্ণয় পদ্ধতি

(1) বক্ররেখার উপর বিন্দু P-কে সাধারণ বিন্দু বলা হবে যদি ঐ বিন্দুতে f_x ও f_y-এর মধ্যে অন্তত একটি অ-শূন্য হয়।

(2) $f(x, y, \alpha) = 0$ পরিবারের যদি কোন সাধারণ বিন্দুর ক্ষেত্রে $f(x, y, \alpha) = 0$ ও $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ সিদ্ধ হয়, তবে সেই বিন্দু বা বিন্দুগুলিকে বৈশিষ্ট্য বিন্দু বলা হয়।

(3) বক্ররেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক হচ্ছে ঐ পরিবারের বৈশিষ্ট্য বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ।

পরিস্পর্শকের বিকল্প সংজ্ঞা :

বক্ররেখা বা সরলরেখা-পরিবারের ক্ষেত্রে যদি দেখা যায় যে ঐ তলে এমনকোন সরলরেখা বা বক্ররেখার অস্তিত্ব রয়েছে যাহা উক্ত পরিবারের সকল সদস্যকে স্পর্শ করছে এবং উক্ত সরলরেখা বা বক্ররেখার যেকোন বিন্দুতে প্রদত্ত পরিবারের কোন-না-কোন সদস্য স্পর্শ করে আছে, তবে ঐ সরলরেখা বা বক্ররেখাকে উক্ত পরিবারের পরিস্পর্শক বলা হয়। কাজেই পরিস্পর্শক হইল প্রদত্ত সরলরেখা-পরিবার বা বক্ররেখা-পরিবারের প্রতিটি সদস্যকে স্পর্শ করে এমন সরলরেখা বা বক্ররেখা। এক প্রচলবিশিষ্ট পরিবারের ক্ষেত্রে $f(x, y, \alpha) = 0$ ও $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ সমীকরণ দুইটি থেকে প্রচল α অপনয়ন করিলেই পরিস্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাবে। দুই প্রচলবিশিষ্ট পরিবারের ক্ষেত্রে $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$ এবং $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ উভয় হতে $\frac{d\beta}{d\alpha}$ নির্ণয় করিয়া α, β অপনয়ন করলে পরিস্পর্শক পাওয়া যাবে।

11.3 উদাহরণ

(ক) $y = m^2 x + \frac{1}{m^2}$ (1) : সরললেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

উত্তর : $f(x, y, m) \equiv y - m^2 x - \frac{1}{m^2} = 0$ (2)

$$\frac{\partial f}{\partial m} = -2mx + \frac{2}{m^3} = 0$$ হতে পাই $m^4 = \frac{1}{x}$

(1)-এর থেকে পাই $y^2 = m^4x^2 + \frac{1}{m^4} + 2x$

$m^4 = \frac{1}{x}$ বসিয়ে $y^2 = 4x$ নির্ণেয় পরিস্পর্শক।

(খ) $x \cos\alpha + y \sin\alpha = l \sin\alpha \cos\alpha$ (1) : সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

উত্তর : $f(x, y, \alpha) \equiv x \cos\alpha + y \sin\alpha - l \sin\alpha \cos\alpha = 0$ (2)

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = - x \sin\alpha \mid y \cos\alpha - l \cos 2\alpha = 0 \quad (3)$$

(2) ও (3) সমাধান করে $x = l \sin^3\alpha,\ y = l \cos^3\alpha$

অতএব α-অপসৃত $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$ নির্ণেয় পরিস্পর্শক।

(গ) অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$-এর উপর যেকোন বিন্দু P থেকে স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর PM ও PN লম্ব টানা হল। MN সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

উত্তর : $P(at^2, 2at)$ হলে MN-এর সমীকরণ $\frac{x}{at^2} + \frac{y}{2at} = 1$ যেখানে t হল প্রচল।

$f(x, y, t) \equiv 2x + ty - 2at^2 = 0$ (1)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = y - 4at = 0 \quad (2)$$

(2) হতে $t = \frac{y}{4a}$

(1)-এ বসিয়ে t-অপসৃত $y^2 = - 16ax$ হল নির্ণেয় পরিস্পর্শক।

(ঘ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর যেখানে $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = 1$ (l ও m ধ্রুবক)

উত্তর : উপবৃত্তের সমীকরণ হতে পাই $\frac{db}{da} = \frac{b^3x^2}{a^3y^2}$

$\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=1$ হতে পাই $\frac{db}{da}=-\frac{am^2}{bl^2}$

$\frac{b^3x^2}{a^3y^2}=\frac{am^2}{bl^2}$ হতে পাই $\frac{x^2l^2}{a^4}=\frac{y^2m^2}{b^4}$

অর্থাৎ $\dfrac{\frac{x^2}{a^2}}{\frac{a^2}{l^2}}=\dfrac{\frac{y^2}{b^2}}{\frac{b^2}{m^2}}=\dfrac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}{\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}}=\frac{1}{1}=1$

সুতরাং $a^2=\pm lx, b^2=\pm my$

নির্ণেয় পরিস্পর্শক $\frac{x^2}{\pm lx}+\frac{y^2}{\pm my}=1$ অর্থাৎ $\pm\frac{x}{l}\pm\frac{y}{m}=1$

(ঙ) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর যেখানে $a^n+b^n=c^n, c$ একটি ধ্রুবক।

উত্তর : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ হতে পাই $\frac{db}{da}=\frac{-b^2x}{a^2y}$

$a^n+b^n=c^n$ হতে পাই $\frac{db}{da}=-\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}$

$-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}$ হতে পাই $\frac{x}{a^{n+1}}=\frac{y}{b^{n+1}}$

অর্থাৎ $\dfrac{\frac{x}{a}}{a^n}=\dfrac{\frac{y}{b}}{b^n}=\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{a^n+b^n}=\frac{1}{c^n}$

$a=\left(c^nx\right)^{1/(n+1)}, b=\left(c^ny\right)^{1/(n+1)}$

নির্ণেয় পরিস্পর্শক হল $\frac{x}{\left(c^nx\right)^{1/(n+1)}}+\frac{y}{\left(c^ny\right)^{1/(n+1)}}=1$

অর্থাৎ $x^{n/(n+1)}+y^{n/(n+1)}=c^{n/(n+1)}$

(চ) দেওয়া আছে যে $x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}$ $(c > 0)$ বক্ররেখাটি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$–এই দুই প্রচলবিশিষ্ট সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক। দেখাও যে $a^2 + b^2 = c^2$

উত্তর : মনে করি $a^2 + b^2 = k^2$

উদাহরণ (ঙ) হতে পাই পরিস্পর্শক $x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$। প্রদত্ত পরিস্পর্শকের সঙ্গে তুলনা করে পাই $k = c$ অতএব নির্ণেয় সম্পর্ক হল $a^2 + b^2 = c^2$

(ছ) অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$-এর দ্বি-কোটিকে ব্যাস ধরে বৃত্ত অঙ্কিত হল। বৃত্ত-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

উত্তর : মনে করি $P(at^2, 2at)$ ও $Q(at^2, -2at)$ দ্বি-কোটির দুই প্রান্তবিন্দু। PQ কে ব্যাস ধরে বৃত্তের সমীকরণ

$$(x - at^2)^2 + (y - 2at)(y + 2at) = 0$$

অর্থাৎ $x^2 + a^2t^4 - 2xat^2 + y^2 - 4a^2t^2 = 0$

$$f(x, y, t) \equiv a^2t^4 - 2at^2(x + 2a) + x^2 + y^2 = 0 \quad (1)$$

$\frac{\partial f}{\partial t} = 4a^2t^3 - 4at(x + 2a) = 0$ বা $4a^2t^3 = 4at(x + 2a)$

অর্থাৎ $t^2 = \frac{x + 2a}{a}$

(1) -এ বসিয়ে পাই

$$\frac{a^2(x + 2a)^2}{a^2} - 2(x + 2a)^2 + x^2 + y^2 = 0$$

বা, $x^2 + y^2 = (x + 2a)^2$

অর্থাৎ $y^2 = 4a(x + a)$ নির্ণেয় পরিস্পর্শক।

অনুশীলনী :

(1) $y = mx + \frac{a}{m}$ (a : ধ্রুবক) সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

(2) $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ (a, b : ধ্রুবক) সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

(3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর যেখানে $ab = 4$

(4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর যেখানে $a + b = 8$

(5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত-পরিবারের অর্ধ-অনুবন্ধী ব্যাস-যুগলের প্রান্তবিন্দুগুলির যোগাযোগকারী সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

(6) প্রদত্ত আছে $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}(a>0)$ বক্ররেখাটি দুই-প্রচল বিশিষ্ট সরলরেখা-পরিবার $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$-এর পরিস্পর্শক। দেখাও যে $p + q = a$

11.4 সহায়ক গ্রন্থ

1. Differential Calculus — Shantinarayan
1. Differential Calculus — B. C. Das & B. N. Mukherjee

মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

— *রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর*

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে, সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নূতন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

— *সুভাষচন্দ্র বসু*

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

— *Subhas Chandra Bose*

Price : ₹ 225.00

(NSOU-র ছাত্র-ছাত্রীদের কাছে বিক্রয়ের জন্য নয়)

Published by : Netaji Subhas Open University, DD-26, Sector-I, Salt Lake, Kolkata-700 064 &
Printed at : The Saraswati Printing Works, 2, Guru Prosad Chowdhury Lane, Kolkata 700 006