NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

SUBSIDIARY MATHEMATICS

SMT - 02

BLOCK - 2

DIFFERENTIAL CALCULUS

প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠ্যক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমত কোনও বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে— যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। ইন্দিরা গান্ধী মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ও রবীন্দ্র মুক্ত বিদ্যালয়ের কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ-কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থীও এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশকিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

তৃতীয় পুনর্মুদ্রণ : এপ্রিল, 2017

ভারত সরকারের দূরশিক্ষা পর্ষদের বিধি অনুযায়ী এবং অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Council, Government of India

পরিচিতি

বিষয় : সহযোগী গণিতবিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

[পাঠক্রম : SMT-2]
পর্যায় : 2
সমাকলন বিদ্যা ও সাধারণ অবকল সমীকরণ

বিভাগ - ক

একক	রচনা	সম্পাদনা
1—7	ড. উমেশ চন্দ্র পান	ড. শ্যামাপদ দাস

বিভাগ - খ

একক	রচনা	সম্পাদনা
8—9	ড. যুথিকা সেনগুপ্তা	ড. দীপক চ্যাটার্জী
10—12	ড. যুথিকা সেনগুপ্তা	ড. উমেশ চন্দ্র পান

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

SMT - 02

পর্যায়
2

বিভাগ-ক : সমাকলন বিদ্যা

বিভাগ-খ : সাধারণ অবকল সমীকরণ

SYLLABUS FOR SUBSIDIARY MATHEMATICS (SMT)

দ্বিতীয় পত্র

পর্যায় : দুই

বিভাগ-ক : স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (মান—35)

দ্বি-মাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি :

1. স্থানাঙ্কের রূপান্তর ঃ চলন, ঘূর্ণন, লম্ব রূপান্তর ও অপরিবর্তিতা।
2. x ও y-এর সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ, শঙ্কুচ্ছেদের সমীকরণের প্রামাণ্য আকারে প্রকাশ, শঙ্কুচ্ছেদের শ্রেণীবিভাজন।

   যুগ্ম সরলরেখা ঃ সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ যুগ্ম সরলরেখা সূচনা করার শর্ত, সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু এবং মধ্যবর্তী কোণ, কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ।
3. বহিঃস্থবিন্দু থেকে একটি কণিকের উপর অঙ্কিত যুগ্ম স্পর্শক ; স্পর্শবিন্দুগ জ্যা, অভিলম্ব ; সাধারণ কণিকের মেরু বিন্দু ও মেরুরেখা। অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত, বৃত্ত ও পরাবৃত্তের সাপেক্ষে আলোচনা।
4. সরলরেখা ও বৃত্তের মেরু সমীকরণ ঃ নাভিকে মেরু ধরে কণিকের মেরু সমীকরণ। জ্যা, স্পর্শক ও অভিলম্বের মেরু সমীকরণ।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি :

1. ত্রিমাত্রিক কার্তিয় স্থানাঙ্ক ঃ দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব। একটি রেখাকে প্রদত্ত অনুপাতে অন্তঃবিভাজন ও বহির্বিভাজন। একটি সরলরেখার দিগ-কোসাইন, দিগ-অনুপাত। একটি সরলরেখার উপর অন্য একটি সরলরেখার অভিক্ষেপ, দুটি সরলরেখার মধ্যস্থ কোণ।
2. সমতলের সমীকরণ ঃ সাধারণ আকার, ছেদিতাংশ ও লম্ব-আকার। দুটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ। একটি তল থেকে একটি বিন্দুর চিহ্নিত দিক, দুটি তলের মধ্যেকার কোণের সমদ্বিখণ্ডক।
3. সরলরেখার সমীকরণ ঃ সাধারণ ও প্রতিসম রূপ, একটি সরলরেখা থেকে একটি বিন্দুর দূরত্ব, সামতলিক সরলরেখা, দুটি নৈকতলীয় রেখার (Skew line) ন্যূনতম দূরত্ব।
4. গোলক ও তার স্পর্শতল ; লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু।

বিভাগ-খ : ভেক্টর বীজগণিত (মান—15)

1. ভেক্টর : প্রাথমিক ধারণা, সমরেখ ও সামতলিক ভেক্টর।

2. ভেক্টরের গুণন ও জ্যামিতিক প্রয়োগ : দুটি ভেক্টরের স্কেলার ও ভেক্টর গুণন, তিনটি ভেক্টরের স্কেলার ও ভেক্টর গুণফল ; জ্যামিতিতে ভেক্টরের প্রয়োগ—সরলরেখা ও সমতলের সমীকরণ ও সংশ্লিষ্ট বিভিন্ন উপাদানের প্রমাণ।

একক 1 ❑ কয়েকটি বিশেষ গঠনের অনির্দিষ্ট সমাকল (Some Indefinite Ingegrals)

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা ঃ

উচ্চমাধ্যমিক পর্যায়ে আপনারা অনির্দিষ্টও নির্দিষ্ট সমাকলের সমাকলন সম্পর্কিত প্রাথিমিক পর্বের বেশ কিছু অংশ পাঠ করেছেন। সেখানে দেখেছেন কোন সমাকলন যোগ্য অপেক্ষক $f(x)$-এর জন্য অন্য এমনএকটি অপেক্ষক $\phi(x)$ থাকে যা

$$\frac{d}{dx}\phi(x)=f(x)$$

সম্পর্কে আবদ্ধ এবং যে সম্পর্কটি $\int f(x)dx=\phi(x)+c$

এই আকারেও প্রকাশ করা যায়। উপরোক্ত সম্পর্কের $\int f(x)dx$ -কে অনির্দিষ্ট সমাকল, $f(x)$-কে সমাকলজ বা ইনটিগ্রাণ্ড (Integrand) এবং c-কে সমাকলের ধ্রুবক বলা হয়।

এই এককে উক্ত সংজ্ঞা অনুযায়ী আরও কয়েকটি বিশেষ গঠনের সমাকলের সমাকল পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করা হবে।

1.2 উদ্দেশ্য ঃ

এই একক পাঠ করে আপনি

$\frac{1}{a+b\cos x}, \frac{l\sin x + m\cos x}{n\sin x + p\cos x}$ আরও অন্যান্য মূলদ অপেক্ষক সমূহের সমাকলন পদ্ধতি সম্পর্কে অবহিত হবেন।

1.3 কয়েকটি বিশেষ আকারের সমাকল নির্ণয়ের পদ্ধতি ঃ

(ক) $I = \int \frac{dx}{a+b\cos x}$ আকারের সমাকল ঃ প্রথমে $a + b\cos x$ কে $a\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)$ এইভাবে অংশ কোণের মাধ্যমে প্রকাশ করে লব ও হরকে $\sec^2\frac{x}{2}$ দ্বারা গুণ করে

$$\mathrm{I} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{(a-b)\tan^2\frac{x}{2} + (a+b)}$$

আকারের প্রকাশ করতে হবে। এরপর $\tan\frac{x}{2} = z$ ধরে $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dz$ রূপান্তরের মাধ্যমে সমাকলটিকে

$$\mathrm{I} = \int \frac{2dz}{(a-b)z^2 + (a+b)}$$

এইরূপে পরিবর্তিত করতে হবে। এখন এই সমাকলটির সমাকলনের জন্য নিম্নলিখিত দুটি উপায়ে অগ্রসর হওয়া যায় ঃ

(i) যখন $a > b$: $\mathrm{I} = \frac{2}{a-b}\int \frac{dz}{z^2 + \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2} = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,.z\right) + c$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + c$$

(ii) যখন $a < b$: $\quad \mathrm{I}=\frac{2}{b-a}\int \frac{dz}{\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right)^2-z^2}=\frac{2}{b-a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\log\left|\frac{\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}+z}{\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}-z}\right|+c$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left|\frac{\sqrt{b+a}+\tan\frac{x}{2}\cdot\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}-\tan\frac{x}{2}\cdot\sqrt{b-a}}\right|+c$$

আবার যখন a = b হবে তখন

$$\mathrm{I} = \int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{1}{b}\int\frac{dx}{1+\cos x} \quad [\ a\text{এর স্থানে } b \text{ বসিয়ে }]$$

$$=\frac{1}{b}\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2b}\int\sec^2\frac{x}{2}dx=\frac{1}{b}\tan\frac{x}{2}+c$$

প্রান্তলিপি - 1. (i) $\int\frac{dx}{a+b\sin x}$ (ii) $\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$ (iii) $\int\frac{dx}{a+bcoshx}$

(iv) $\int\frac{dx}{a+b\sinh x}$ (v) $\int\frac{dx}{a+b\cosh x+c\sinh x}$

এই আকারের সমাকলগুলি নির্ণয়ের জন্যও উপরোক্ত পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে।

প্রান্তলিপি - 2. (i) $\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}$ সমাকলটি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে উপরোক্ত পদ্ধতি অবলম্বন করা যায়, অথবা $a = r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$ বা $a=r\sin\theta$, $b=r\sin\theta$ ধরে এবং সমাকলটিতে প্রয়োজনীয় পরিবর্তন ঘটিয়েও অগ্রসর হওয়া যায়।

প্রত্যেক প্রকারের অঙ্ক অনুশীলনীতে আলোচনা করা আছে; সেগুলি অনুসরণ করলে পদ্ধতিগুলি আরও পরিস্কার ভাবে বোঝা যাবে।

অনুশীলনী - 1

উদাহরণ 1. সমাকল করুন $\int\frac{dx}{3+4\cos x}$

সমাধান ঃ $I=\int\frac{dx}{3+4\cos x}=\int\frac{dx}{3\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+4\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$

$$= \int \frac{dx}{7\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{7 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$ [লব ও হরকে $\sec^2 \frac{x}{2}$ দিয়ে গুণ করে]

$$= \int \frac{2dz}{(\sqrt{7})^2 - z^2}$$ $[\because \tan\frac{x}{2} = z \Rightarrow \sec^2 \frac{x}{2} dx = 2dz]$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} \log \left| \frac{\sqrt{7} + z}{\sqrt{7} - z} \right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \log \left| \frac{\sqrt{7} + \tan\frac{x}{2}}{\sqrt{7} - \tan\frac{x}{2}} \right| + c$$

উদাহরণ 2. সমাকল করুন ঃ $\int \frac{dx}{2 - 7\sinh x}$

সমাধান ঃ $I = \int \frac{dx}{2 - 7\sinh x} = \int \frac{dx}{2\left(\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}\right) - 7.2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{\sec h^2 \frac{x}{2} \; dx}{-2\tanh^2 \frac{x}{2} - 14\tanh\frac{x}{2} + 2}$$ [লব ও হরকে $\sec h^2 \frac{x}{2}$ দিয়ে গুণ করে]

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{2dz}{z^2 + 7z - 1}$$ $\left[\because \tanh\frac{x}{2} = z \Rightarrow \sec h^2 \frac{x}{2} dx = 2dz\right]$

$$= -\int \frac{dz}{\left(z + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{53}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{53}}{2}} \log \left| \frac{z + \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{53}}{2}}{z + \frac{7}{3} + \frac{\sqrt{53}}{2}} \right| + c$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{53}} \log \left| \frac{2\tanh\frac{x}{2} + 7 - \sqrt{53}}{2\tanh\frac{x}{2} + 7 + \sqrt{53}} \right| + c$$

উদাহরণ 3. সমাকল করুন ঃ $\int \frac{dx}{2 + \cos x + 2\sin x}$

সমাধান ঃ $\quad I = \int \frac{dx}{2\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{dx}{3\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+3} \qquad \left[\text{ লব ও হরকে } \sec^2\frac{x}{2} \text{ দিয়ে গুণ করে }\right]$$

$$= \int \frac{2dz}{z^2+2z+3} \qquad \left[\tan\frac{x}{2}=z \text{ ধরে }\right]$$

$$= 2\int \frac{dz}{(z+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}(z+1)+c$$

$$= \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

উদাহরণ 4. সমাকল করুন ঃ $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x}$

সমাধান ঃ $\quad I = \int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x} = \int \frac{dx}{r\cos\theta\sin x+r\sin\theta\cos x}$

[$2 = r\cos\theta$, $3 = r\sin\theta$ ধরে $r=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}, \theta=\tan^{-1}\frac{3}{2}$]

$$= \frac{1}{r}\int \frac{dx}{\sin(x+\theta)} = \frac{1}{r}\int \operatorname{cosec}(x+\theta)dx$$

$$= \frac{1}{r}\log|\tan\frac{x+\theta}{2}|+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{2}\right)\right|+c$$

প্রশ্নাবলী - 1

সমাকল করুন ঃ

1. $\int \frac{dx}{4+5\cos x}$

2. $\int \frac{dx}{4+5\cos^2 x}$

3. $\int \frac{dx}{13+3\cos x+4\sin x}$

4. $\int \frac{dx}{2+3\cosh x}$

প্রশ্নাবলী 1 এর উত্তর

1. $\frac{1}{3}\log\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+c$

2. $\frac{1}{18}\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\tan x\right)+c$

3. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{5\tan\frac{x}{2}+2}{6}\right)+c$

4. $\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tanh\frac{x}{2}\right)+c$

(খ) $\mathbf{I=\int \frac{l\sin x+m\cos x}{n\sin x+p\cos}dx}$ **আকারের সমাকল ঃ**

এই সমাকলটি নির্ণয়ের জন্য

সমাকলজটির লব = a × হর + b × হরের অবকল সহগ, এই আকারের প্রকাশ করার পর উভয়পক্ষের $\sin x$ এবং $\cos x$এর সহগগুলি সমান করে প্রাপ্ত সমীকরণগুলি থেকে a ও b এর মান l, m, n ও p এর মাধ্যমে নির্ণয় করতে হবে। পরে, a ও b এর প্রাপ্ত মান বসিয়ে লবটিকে উপরের নির্ধারিত আকারে প্রকাশ করে সমাকলের লবটি পরিবর্তন করতে হবে। তাহলে পরিবর্তিত অবস্থায় পাওয়া যায়

$$I = \int \frac{.a \times \text{হর} + b \times \text{হরের অবকল সহগ}}{\text{হর}}\,dx$$

[এক্ষেত্রে a ও b স্থানে উহাদের প্রাপ্ত মান বসাতে হবে]

$$= a\int dx + b\int \frac{\text{হরের অবকল সহগ}}{\text{হর}}\,dx$$

$$= ax + b.\ \log\ |\ \text{হর}\ |\ +c$$

প্রান্তলিপি - 1. (i) $\int \frac{e+m\cos x}{n+p\cos x}dx$ (ii) $\int \frac{l+m\sin x}{n+p\sin x}dx$

(iii) $\int \frac{l+m\,cox+n\sin x}{p+q\cos x+r\sin x}dx$

এই সকল গঠনের সমাকলগুলি নিরূপণের জন্য সমাকলগুলির সমাকলজের লব = a×হর + b × হরের অবকল সহগ + c

এই আকারের নিয়ে উভয় পক্ষের sin$x$ ও cos$x$-এর সহগ এবং ধ্রুবকপদ সমান করে প্রাপ্ত সমীকরণগুলি থেকে a, b ও c এর মান নির্ণয় করে সমাকলের লবকে উপরোক্ত আকারে পরিবর্তিত করে (খ) এর পদ্ধতি অনুসরণ করে (তিনটি সমাকলে বিভক্ত করে) পূর্ববর্তী নিয়মে সমাকলন করতে হবে।

অনুশীলনী - 2

উদাহরণ 1. সমাকল করুন ঃ $\mathrm{I}=\int \frac{3\sin x+5\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$

সমাধান ঃ ধরাযাক $3\sin x + 5\cos x = a(2\sin x+3\cos x)+b(2\cos x-3\sin x)$

$$\left[\because \frac{d}{dx}(2\sin x+3\cos x)=2\cos x-3\sin x\right]$$

উভয়পক্ষের $\sin x$ ও $\cos x$ এর সহগগুলি তুলনা করে পাই

$$3 = 2a - 3b \text{ এবং } 5 = 3a + 2b$$

সমাধান করে $a=\frac{21}{13}$, $b=\frac{1}{13}$

$$\therefore \mathrm{I} = \int \frac{\frac{21}{13}(2\sin x+3\cos x)+\frac{1}{13}(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}dx$$

$$=\int \frac{21}{13}dx+\int \frac{1}{13}\,\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$$

$$=\frac{21}{13}\int dx+\frac{1}{13}\int \frac{dz}{z}$$ [দ্বিতীয় সমাকলে $2\sin x + 3\cos x = z$ ধরে]

$$=\frac{21}{13}x+\frac{1}{3}\log|z|+c$$

$$=\frac{21}{13}x+\frac{1}{3}\log|2\sin x+3\cos x|+c$$

উদাহরণ 2. সমাকল করুন ঃ $\mathrm{I}=\int \frac{1+3\cos x+2\sin x}{2+4\cos x+3\sin x}dx$

সমাধান ঃ ধরাযাক্

$$1+3\cos x+2\sin x=a(2+4\cos x+3\sin x)+b(-4\sin x+3\cos x)+c$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}(2+4\cos x+3\sin x)=-4\sin x+3\cos x\right]$$

উভয়পক্ষে $\sin x$ ও $\cos x$ এর সহগগুলি এবং ধ্রুবকপদ তুলনা করে পাওয়া যায়
$2 = 3a - 4b,\ 3 = 4a + 3b,\ 1 = 2a + c,$

সমাধান করে $a = \frac{18}{25},\ b = \frac{1}{25},\ c = \frac{-11}{25}$

প্রদত্ত সমাকল $$I = \int \frac{\frac{18}{25}(2 + 4\cos x + 3\sin x) + \frac{1}{25}(-4\sin x + 3\cos x) - \frac{11}{25}}{2 + 4\cos + 3\sin x} dx$$

$$= \int \frac{18}{25} dx + \int \frac{1}{25} \frac{-4\sin x + 3\cos x}{2 + 4\cos x + 3\sin x} dx + \int \left(-\frac{11}{25}\right) \frac{1}{2 + 4\cos + 3\sin x} dx$$

$$= \frac{18}{25} \int dx + \frac{1}{25} \int \frac{\frac{d}{dx}(2 + 4\cos x + 3\sin x)}{2 + 4\cos x + 3\sin x} dx - \frac{11}{25} \int \frac{dx}{2 + 4\cos x + 3\sin x}$$

$$= \frac{18}{25}\ \mathrm{I}_1\ + \frac{1}{25}\mathrm{I}_2 - \frac{11}{25}\mathrm{I}_3$$ (ধরি) .... (i)

এখন $I_1 = \int dx = x + c_1,\ I_2 = \log|2 + 4\cos + 3\sin x| + c_2$

এবং $$\mathrm{I}_3 = \int \frac{dx}{2 + 4\cos + 3\sin x}$$

$$= \int \frac{dx}{2\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right) + 4\left(\cos^2 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) + 3.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{dx}{-2\sin^2 \frac{x}{2} + 6\cos^2 \frac{x}{2} + 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{\tan^2 \frac{x}{2} - 3\tan\frac{x}{2} - 3}$$ [লব ও হরকে $\sec^2 \frac{x}{2}$ দিযে গুণ করে]

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{2dz}{\left(z - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2}$$ [$\tan\frac{x}{2} = z$ ধরে]

$$= -\frac{1}{2 \,.\, \frac{\sqrt{21}}{2}} \log \left| \frac{z - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}}{z - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}} \right| + c_3$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{21}} \log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2} - 3 - \sqrt{21}}{2\tan\frac{x}{2} - 3 + \sqrt{21}}\right| + c_3$$

$$\therefore \text{ I } = \frac{18}{25}x + \frac{1}{25}\log|2 + 4\cos x + 3\sin x| + \frac{11}{25\sqrt{21}}\log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2} - 3 - \sqrt{21}}{2\tan\frac{x}{2} - 3 + \sqrt{21}}\right| + c$$

যখন $c = c_1 + c_2 + c_3$

প্রশ্নাবলী—2

সমাকল করুন 1. $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$ 2. $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 4\cos x} dx$

প্রশ্নাবলী-2 এর উত্তর

1. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log|\sin x - \cos x| + c$ 2. $\frac{18}{25}x + \frac{1}{25}\log|3\sin x + 4\cos x| + c$

(গ) মূলদ সমাকলজ (বীজগনিতীয়)-যুক্ত সমাকল ঃ

$f(x)$ ও $g(x)$ এই দুটি x-এর রাশিমালার অনুপাত $\frac{f(x)}{g(x)}$ যখন কোনো সমাকলের সমাকলজ হয় তখন বিশেষ কয়েকটি ক্ষেত্রে পৃথক পৃথক নিয়মে $\frac{f(x)}{g(x)}$ কে কতকগুলি সহজ এবং পূর্বনিয়মে সমাকলন যোগ্য ভগ্নাংশে ভেঙে সমাকলন করা হয়।

(I) যখন $f(x)$ রাশিমালার ঘাত $g(x)$-এর ঘাতের থেকে কম ঃ

এক্ষেত্রে $g(x)$-কে বাস্তব উৎপাদক সমূহে বিশ্লেষিত করতে হবে। a, b ও c ধ্রুবক এবং n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ধরে উৎপাদকগুলি $ax + b$, $(ax+b)^n$, ax^2+bx+c এবং $(ax^2+bx+c)^n$ এই চারপ্রকার হতে পারে ধরে $g(x)$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার পর $\frac{f(x)}{g(x)}$-কে কতকগুলি সহজ সমাকলনযোগ্য রাশিমালার ভগ্নাংশের বীজগনিতীয় যোগফল আকারে নিম্নলিখিত নিয়মগুলি অণুসরণকরে প্রকাশ করতে হবে।

(i) প্রত্যেক $ax + b$ আকারের উৎপাদকের জন্য $\frac{A}{ax+b}$ এইরূপ সহজ ভগ্নাংশ লিখতে হবে;

(ii) প্রত্যেক $(ax+b)^n$ আকারের উৎপাদকের জন্য

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots\cdots+\frac{An}{(ax+b)^n}$$

এইরূপ nটি সহজ ভগ্নাংশের বীজগনিতীয় যোগফল হিসাবে লিখতে হবে;

(iii) প্রত্যেক ax^2+bx+c আকারের উৎপাদকের জন্য $\frac{A_1x+A_2}{ax^2+bx+c}$ এইরূপ সহজ ভগ্নাংশ হিসাবে লিখতে হবে, এবং (iv) প্রত্যেক $(ax^2+bx+c)^n$ আকারের উৎপাদকের জন্য

$$\frac{A_1\ x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+Bx+c)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

এইরূপ nটি সহজ ভগ্নাংশের বীজগণিতীয় যোগফল হিসাবে লিখতে হবে। এখান A; A_1, A_2 .... An; B_1, B_2, ... B_n সকলেই ধ্রুবক।

(II) যখন $f(x)$ এর ঘাত $g(x)$ এর ঘাতের থেকে বেশী ঃ

এক্ষেত্রে প্রথমে f(x) কে $g(x)$ দ্বারা ভাগ করে

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\phi(x)+\frac{\Psi(x)}{g(x)}$$

এই আকারে সমাকলজ $\frac{f(x)}{g(x)}$ কে প্রকাশ করতে হবে, যেখানে $\phi(x)$ ভাগফল এবং $\Psi(x)$ ভাগশেষ। এখানে $\Psi(x)$ এর ঘাত অবশ্যই $g(x)$ এর ঘাতের থেকে কম। সুতরাং $\Psi(x)$-কে উপরের (I) নং প্রদর্শিত নিয়মে সহজ ভগ্নাংশ সমূহের বীজগণিতীয় যোগফল আকারে লিখে সমাকলন সম্ভব হবে এবং $\phi(x)$ কেও সহজেই সমাকল করা যাবে।

অনুশীলনীর অঙ্গগুলি অনুধাবন করলে নিয়মগুলি সম্পর্কে সাম্যক উপলব্ধি করতে পারবেন।

অনুশীলনী - 3

উদাহরণ 1. সমাকল করুন ঃ $\int\frac{3x^2+2x+1}{x^3+3x^2-4x-12}dx$

সমাধান ঃ এখানে হর $=x^3+3x^2-4x-12 \quad =x^2(x+3)-4(x+3)$

$$=(x+3)(x^2-4) \qquad =(x+3)(x+2)(x-2)$$

ধরাযাক $\frac{3x^2+2x+1}{x^3+3x^2-4x-12}=\frac{A_1}{x+3}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{A_3}{x-2}$

$\therefore\ 3x^2+2x+1=A_1\,(x+2)(x-2)+A_2(x+3)(x-2)+A_3(x+3)(x+2)$

এখন, $x = 2$ বসিয়ে পাই $17 = A_3 \, . \, 5. \, 4 \Rightarrow A_3 = \frac{17}{20}$

$x = -2$ বসিয়ে পাই $9 = A_2 \, . \, 1. \, (-4) \Rightarrow A_2 = -\frac{9}{4}$

$x = -3$ বসিয়ে পাই $22 = A_1 \, . \, (-1)(-5) \Rightarrow A_1 = \frac{22}{5}$

প্রদত্ত সমাকল $= \int \left(\frac{\frac{22}{5}}{x+3} + \frac{\frac{-9}{4}}{x+2} + \frac{\frac{17}{20}}{x-2} \right) dx$

$$= \frac{22}{5} \int \frac{dx}{x+3} - \frac{9}{4} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{17}{20} \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= \frac{22}{5} \log|x+3| - \frac{9}{4} \log|x+2| + \frac{17}{20} \log|x-2| + c$$

উদাহরণ 2. সমাকল করুন ঃ $\int \frac{3x^2 - 1}{(x+2)^2 (x^2+1)}$

সমাধান ঃ ধরাযাক $\frac{3x^2 - 1}{(x+2)^2 (x^2+1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3 x + A_4}{x^2+1}$

$\therefore \; 3x^2 + 1 = A_1 (x+2)(x^2+1) + A_2 (x^2+1) + (A_3 x + A_4)(x+2)^2$

উপরের সম্পর্কিটিতে $x = -2$ বসিয়েপাই $11 = A_2 \; 5 \Rightarrow A_2 = \frac{11}{5}$ (i)

$x = 0$ বসিয়ে পাই $-1 = 2A_1 + A_2 + 4A_4$

বা, $A_1 + 2A_4 = -\frac{8}{5}$ .... (ii) [(iiii) থেকে]

উভয়পক্ষে x^2-এর সহগ তুলনা করে পাই, $3 = 2A_1 + A_3 + A_4 + 2A_3$

বা, $2A_1 + 2A_3 + A_4 = 3 - \frac{11}{5} = \frac{4}{5}$ .... (iii) [(i) থেকে]

উভয়পক্ষে x^3-এর সহগ তুলনা করে পাই

$$0 = A_1 + A_3 \text{......................(iv)}$$

(i) থেকে A_2 এবং (ii), (iii), (iv) নং সমীকণগুলি থেকে A_1, A_3, A_4 এর জন্য সমাধান করে পাই

$$A_1 = -\frac{16}{5}, A_2 = \frac{11}{5}, \; A_3 = \frac{16}{5}, \; A_4 = \frac{4}{5}$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $= \int\left(\frac{\frac{-16}{5}}{x+2} + \frac{\frac{11}{5}}{(x+2)^2} + \frac{\frac{16}{5}x + \frac{4}{5}}{x^2+1}\right)dx$

$$= -\frac{16}{5}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{11}{5}\int\frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{8}{5}\int\frac{2x+\frac{1}{2}dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{-16}{5}\log|x+2| - \frac{11}{5}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{8}{5}\left[\log|x^2+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x\right] + c$$

$$== \frac{-16}{5}\log|x+2| - \frac{11}{5}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{8}{5}\cdot\log|x^2+1| + \frac{4}{5}\tan^{-1}x + c$$

উদাহরণ 3. সমাকল করুন ঃ $\int\frac{dx}{(x^2+2)(x^2+5)}$

সমাধান ঃ $\int\frac{dx}{(x^2+2)(x^2+5)} = \int\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+5}\right]dx$

$$= \frac{1}{3}\left[\int\frac{dx}{x^2+(\sqrt{2})^2} - \int\frac{dx}{x^2+(\sqrt{5})^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}\right] + c$$

উদাহরণ 4. সমাকল করুন ঃ $\int\frac{x^5+3x^4+3x^3+x^2+5x+1}{(x+1)^3}$

সমাধান ঃ লবকে হর দিয়ে ভাগ করে, $\frac{\text{লব}}{\text{হর}} = \text{ভাগফল} + \frac{\text{ভাগশেষ}}{\text{হর}}$

এই আকারে লিখলে পাওয়া যায়

$$\frac{x^5+3x^4+3x^3+x^2+5x+1}{(x+1)^3} = x^2 + \frac{5x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

আবার, $\frac{5x+1}{(x+1(x^2-x+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2x+A_3}{x^2-x+1}$ ধরে পাওয়া যয়

$$5x+1 = A_1(x^2-x+1) + (A_2x+A_3)(x+1)$$

এখন, $x = -1$ বসিয়া পাই, $-4 = A_1\ 3 \Rightarrow A_1 = -\frac{4}{3}$ ...... (i)

x^2 এর সহগতুলনা করে পাই, $0 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{4}{3}$ .... (ii) [(i) থেকে]

x -এর সহগ তুলনা করে পাই, $5 = -A_1 + A_2 + A_3$

বা, $A_3 = \frac{7}{3}$ .... (iii) [(i) ও (ii) থেকে]

\ প্রদত্ত সমাকল $= \int \left\{ x^2 + \frac{5x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \right\} dx$

$$= \int x^2 dx + \int \frac{-\frac{4}{3}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}}{x^2 - x + 1} dx$$

$$= \int x^2 dx - \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{(2x-1) + \frac{9}{2}}{x^2 - x + 1} dx$$

$$= \int x^2 dx - \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} \log|x+1| - \frac{2}{3} \log|x^2 - x + 1 + \frac{6}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + c$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} \log|x+1| - \frac{2}{3} \log|x^2 - x + 1| + 2\sqrt{3} \tan^{-1} \frac{(2x-1)}{\sqrt{3}} + c$$

প্রশ্নাবলী – 3

সমাকল করুন ঃ 1. $\int \frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)}$ 2. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

3. $\int \frac{x^3\,dx}{(x+1)(x+2)^2}$ 4. $\int \frac{x^3\,dx}{(1+x)(1+x^2)}$

প্রশ্নাবলী -3 এর উত্তর

1. $\frac{a}{a-b}\log|x+a|+\frac{b}{b-a}\log|x+b|+c$

2. $x+\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}\log|x-a|+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}\cdot\log|x-b|+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}\log|x-c|+k$

3. $\log|x+1|+\frac{4}{(x+2)}+c$

4. $-\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{4}\log|x^2+1|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$

1.4 সারাংশ ঃ

1.1.2 (ক) অনুচ্ছেদ অনুযায়ী

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+c, \text{ যখন } a>b$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left|\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}\right|+c, \text{ যখন } a<b$$

$$=\frac{1}{b}\tan\frac{x}{2}+c$$

2. (ক) $\int\frac{dx}{a+b\sin x}$ (খ) $\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$, (গ) $\int\frac{dx}{a+b\cosh x}$

(ঘ) $\int\frac{dx}{a+b\sinh x}$ (ঙ) $\int\frac{dx}{a+b\cosh x+c\sinh x}$

এই সমাকলগুলি নির্ণয়ের জন্য 1.2 (ক) অনুচ্ছেদের $\int\frac{dx}{a+b\cos x}$ নির্ণয়ের পদ্ধতি অনুসরণ করতে হবে।

3. $\int\frac{l\sin x+m\cos x}{n\sin x+p\cos x}dx$ এই আকারের সমাকল নির্ণয়ের জন্য প্রথমে

সমাকলজের লব = $a\times$ হর + $b\times$ হরের অবকল সহগ

এইভাবে প্রকাশ করার পর উভয়পক্ষের $\sin x$ এবং $\cos x$-এর সহগ তুলনা করে প্রাপ্ত সমীকরণদুটি থেকে

a ও b এর মান নির্ণয় করতে হবে। তারপরে উপরের সম্পর্কটিতে a ও b এর মান বসিয়ে সমাকলজের লবটিকে প্রতিস্থাপিত করে এবং সমাকলটিকে দুটি সমাকলে ভেঙে অগ্রসর হতে হবে।

4. (ক) $\int \frac{l+m\cos x}{n+p\sin x}dx$ (খ) $\int \frac{l+m\sin x}{n+p\cos x}dx$ (গ) $\int \frac{l+m\cos x+n\sin x}{p+q\cos x+r\sin x}dx$

এই আকারের সমাকলগুলি নির্ণয়ের জন্য

সমাকলজের লব = a × হর + b × হরের অবকল সহগ + c এইভাবে লিখে উভয়পক্ষের $\sin x$ ও $\cos x$ এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে প্রাপ্ত সমীকরণ তিনটি থেকে a, b ও c এর মান নির্ণয় করে এবং সেই মানগুলি উপরের সম্পর্কে বসিয়ে লবটিকে পরিবর্তন করে অগ্রসর হতে হবে।

5. সমাকলজ যদি $\frac{f(x)}{g(x)}$ এইরূপ দুটি x-এর রাশিমালার অনুপাত হয় তবে $f(x)$ ও $g(x)$ এর বিভিন্ন রূপের জন্য 1.3 (গ) অনুচ্ছেদ আলোচিত নিয়মনগুলি মেনে অগ্রসর হতে হবে।

1.5 বিষয়মুখী ছোট প্রশ্নাবলী ঃ

নিম্নের সমাকলগুলির পাশে দেওয়া উত্তরগুলির মধ্য থেকে সঠিক উত্তরটি নির্ণয় করুন (MCQ) ঃ

1. (ক) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ **উত্তরঃ** (i) $\tan\frac{x}{2}$ (ii) $\tan\frac{x}{2}+c$ (iii) $\cot\frac{x}{2}+c$

(খ) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$ **উত্তরঃ** (i) $\frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}}+c$ (ii) $\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}+c$ (iii) $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}+c$

(গ) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ **উত্তরঃ** (i) $\log|\tan\frac{x}{2}+1|+c$ (ii) $\log\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+c$

(iii) $\log|\sec x - tamx|+c$

(ঘ) $\int \frac{dx}{\sinh x+\cosh x}$ **উত্তরঃ** (i) $\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}+c$ (ii) $\frac{-2}{\tanh\frac{x}{2}+1}+c$ (iii) $\frac{\sinh\frac{x}{2}+\cosh\frac{x}{2}}{\sinh\frac{x}{2}}+c$

2. (ক) $\int \frac{\cos x dx}{\cos x-\sin x}$ **উত্তরঃ** (i) $\frac{1}{2}\{x-\log|\cos x-\sin x|\}+c$ (ii) $\frac{1}{2}\{x+\log|\sin x-\cos x|\}+c$

(iii) $\frac{1}{2}\{x^2-\log(\cos x-\sin x)\}+c$

(খ) $\int \frac{\sin x dx}{3\cos x-2\sin x}$ **উত্তরঃ** (i) $\frac{1}{13}\{2x+3\log(3\cos x+\sin x)\}+c$ (ii) $\frac{1}{13}\log\frac{2x}{3\cos x+2}+c$

(iii) $\frac{2}{13}x-\frac{3}{13}\log|3\cos x+2\sin x|+c$

(গ) $\int\frac{5-3\sin x+\cos x}{2+\sin x+3\cos x}dx$ **উত্তরঃ**

(i) $-\frac{5}{\sqrt{6}}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{6}}{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{6}}\right|+c$ (ii) $\frac{5\sqrt{6}}{6}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-(1-\sqrt{6})}{\tan\frac{x}{2}+(1-\sqrt{6})}\right|+c$

(iii) $\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+(1-\sqrt{6})}{\tan\frac{x}{2}-(1-\sqrt{6})}\right|^{-\frac{5}{\sqrt{6}}}+c$

3. (ক) $\int\frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)}$ **উত্তরঃ** (i) $\frac{1}{a-b}\log|(x-a)^a.(x-b)^b|+c$ (ii) $\frac{1}{a-b}\log\left|\frac{(x-a)^a}{(x-b)^b}\right|+c$

(iii) $\frac{ab}{a-b}\log\left|\frac{(x-a)}{(x-b)}\right|+c$

(খ) $\int\frac{x^2dx}{x^4-1}$ **উত্তরঃ** (i) $\frac{1}{2}\left\{\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\tan^{-1}x\right\}+c$ (ii) $-\frac{1}{4}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$

(iii) $-\frac{1}{4}\log|1+x|-\frac{1}{4}\log|1-x|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$

(গ) $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+e^x-2}$ **উত্তরঃ** (i) $\frac{1}{3}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{3}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+2}\right|+c$ (iii) $3\log\left|\frac{e^x+2}{e^x-1}\right|+c$

(ঘ) $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ **উত্তরঃ** (i) $\frac{1}{b^2-a^2}\left\{\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right\}+c$

(ii) $\frac{1}{b^2-a^2}\left\{\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right\}+c$

(iii) $\frac{1}{b^2-a^2}\left\{\tan^{-1}\frac{x}{b}-\tan^{-1}\frac{x}{a}\right\}+c$

1.5.1 বিষয়মুখী ছোট প্রশ্নাবলীর উত্তর ঃ

1. (ক) (ii) (খ) (i) (গ) (i) (ঘ) (ii)
2. (ক) (i) (খ) (iii) (গ) (i)
3. (ক) (ii) (খ) (ii) (গ) (ii) (ঘ) (ii)

1.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী ঃ

1. সমাকল করুন ঃ (ক) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$ (খ) $\int \frac{dx}{\cos\alpha+\cos x}$ (α একটি ধ্রুবক)

(গ) $\int \frac{dx}{1+\cos\alpha\cos x}$ (α একটি ধ্রুবক) (ঘ) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+4}$

(ঙ) $\int \frac{dx}{4+3\sinh x}$ (চ) $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$ [$3=r\cos\theta,\ 4=r\sin\theta$ ধরুন]

2. সমাকল করুন ঃ (ক) $\int \frac{3\cos x-5\sin x}{4\cos x+3\sin x}dx$ (খ) $\int \frac{\cos x\,dx}{2\sin x+3\cos x}$ (গ) $\int \frac{6+3\sin x+14\cos x}{3+4\sin x+5\cos x}dx$

(ঘ) $\int \frac{2+3\cos x}{4+5\cos x}dx$

3. সমাকল করুন ঃ (ক) $\int \frac{7x+6}{(x+3)(x^2-4)}dx$ (খ) $\int \frac{dx}{2e^{2x}+3e^x+1}$

(গ) $\int \frac{dx}{1+x^3}$ (ঘ) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ (ঙ) $\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}$

(চ) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x(3+2\cos x)}$ [$\cos x = z$ ধরুন] (ছ) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+2e^x-3}$ [$e^x = z$ ধরুন]

1.6.1 সর্বশেষ প্রশ্নাবলীর উত্তর ঃ

1. (ক) $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\tan\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\right)+c$ (খ) $\frac{1}{\sin\alpha}\log\frac{\cos\frac{1}{2}(x-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(x+\alpha)}+c$

(গ) $\frac{2}{\sin\alpha}\tan^{-1}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{x}{2}\right)+c$ (ঘ) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left\{\frac{\tan\frac{x}{2}+2}{\sqrt{3}}\right\}+c$ (ঙ) $\frac{1}{6}\log\frac{1+2\tan h\frac{x}{2}}{4-2\tan h\frac{x}{2}}+c$

(চ) $\frac{1}{5}\log\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)+c$

2. (ক) $-\frac{3}{25}x+\frac{29}{25}\log|4\cos x+3\sin x|+c$ (খ) $\frac{3}{13}x+\frac{2}{13}\log|2\sin x+3\cos x|+c$

(গ) $2x+\log|3+4\sin x+5\cos x|+c$ (ঘ) $\frac{3}{5}x-\frac{2}{15}\log\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+c$

3. (ক) $-3\log|x+3|+2\log|x+2|+\log|x-2|+c$ (খ) $x+\log|1+e^x|-2\log|1+2e^x|+c$

(গ) $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\log\frac{(1+x)}{1-x+x^2}+c$ (ঘ) $\frac{1}{2}\log\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

(ঙ) $\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$ (চ) $\frac{1}{3}\log\left|\frac{2\cos x+3}{2\cos x}\right|+c$

(ছ) $\frac{1}{4}\log|(e^x-1)(e^x+3)^5|+c$

অতিরিক্ত পাঠ
(Selected Readings)

1. Edwards, D; Integral Calculus.]
2. Das, B. & B. Mukherjee; Integral Calculus, UNDhur 2006
3. apostol, T.M. ; Calculus Vol. I, Walthein, 1967
4. Shanti Narayan; Integral Calculus, S. Chand, 2005
5. Mc. Shane, E.J.; Integration, O.U.P., 1961.

একক 2 ❑ নির্দিষ্ট বা সীমিত সমাকলের মান নির্ণয় (Evaluation of Definite Integrals)

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

আগের এককে কয়েকটি বিশেষ গঠনের অনির্দিষ্ট সমাকলের নির্ণয় পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা হয়েছে। সেখানে যে নীতির উপর নির্ভর করে সমাকলন করা হয়েছে তা হল যদি $\frac{d}{dx}\{\phi(x)\} = f(x)$ হয় তবে $\int f(x)\,dx = \phi(x) + c$ হয়। এখন যদি $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ সসীম অন্তরালে সংজ্ঞায়িত, সীমাবদ্ধ ও সমাকলনযোগ্য হয় তবে এই এককে

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\phi(x) + c]_a^b = \{\phi(b) + c\} - \{\phi(a) + c\} = \phi(b) - \phi(a)$$

এই নীতি অনুসরণ করা হবে। এক্ষেত্রে সমাকলের ধ্রুবক c-এর কোন ভূমিকা থাকছে না। $\int_a^b f(x)\,dx$-

কে নির্দিষ্ট বা সীমিত সমাকল (Definite integral), a-কে সমাকলের নিম্নসীমা (lower limit) এবং b-কে সমাকলের উর্ধ্বসীমা (upper limit) বলা হয়। উপরোক্ত সূত্রটি (সমাকলের মৌলিক উপপাদ্য) পরবর্তী এককে প্রমাণ করা হবে এবং আলোচনা করা হবে কি কি শর্তে $[a, b]$ অন্তরালে $\phi'(x) = f(x)$ শর্তটি সিদ্ধ হয়।

2.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করে আপনি

- নির্দিষ্ট সমাকলের মান নির্ণয় পদ্ধতি সম্পর্কে অবহিত হবেন।
- নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি ধর্ম এবং সেগুলির প্রয়োগ সম্বন্ধেও জানতে পারবেন।

2.3 নির্দিষ্ট সমাকল সমূহের নির্ণয় পদ্ধতি

যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $[a,b]$ সসীম অন্তরালে সন্তত (continuous) হয় তবে অবশ্যই উহা উক্ত অন্তরালে সমাকলযোগ্য হয়। এই এককে সন্তত সমাকলজ (integrand) যুক্ত নির্দিষ্ট সমাকল নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচিত হবে। সমাকলজ সন্তত না হলেও বিশেষ বিশেষ শর্তে তা সমাকলযোগ্য হতে পারে ; পরবর্তী পর্যায়ে সুযোগ পেলে তা আলোচনা করা হবে।

অনুশীলনী—1

উদাহরণ-1 : $\int_3^6 x^2 dx = \left[x^3/3\right]_3^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 72 - 9 = 63.$

উদাহরণ-2 : $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1} x\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan^{-1} 0$

$= \frac{\pi}{6} - 0$ [আলাদা করে কিছু বলা না থাকলে বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের মুখ্যমাণ বসাতে হবে]

$= \pi/6$

উদাহরণ-3 : $\int_2^3 \frac{dx}{x+1} = \left[\log|x+1|\right]_2^3 = \log|3+1| - \log|2+1|$

$= \log 4 - \log 3 = \log\frac{4}{3}.$

উদাহরণ-4 : $\int_0^1\left(4x^3+\frac{3}{2}x^{1/2}\right)dx=\left[x^4+x^{3/2}\right]_0^1=(1+1)-(0+0)=2$

2.3.1 সমাকলের কিছু প্রাথমিক নিয়ম

যদি $f(x)$ ও $g(x)$ অপেক্ষক দুটি $[a,b]$ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য হয় তবে

(ক) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$, যখন $a<c<b.$

(খ) $\int_a^b\{k_1 f(x)\pm k_2 g(x)\}dx=k_1\int_a^b f(x)\,dx\pm k_2\int_a^b g(x)\,dx$, যখন $k_1,\ k_2$ ধ্রুবক।

অনুশীলনী—2

উদাহরণ-1 : দেখান যে $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\,dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^2 x\,dx$

সমাধান : বামপক্ষ : $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$

$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}dx-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\pi/2}-\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2}$

$=\left\{\frac{1}{2}\cdot\pi/2-\frac{1}{2}\cdot 0\right\}-\left\{\frac{1}{4}\cdot\sin\pi-\frac{1}{4}\sin 0\right\}$

$=\frac{\pi}{4}$

আবার ডানপক্ষ $=\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\,dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^2 x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2x)dx+\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1-\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)_0^{\pi/4}+\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)_{\pi/4}^{\pi/2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\pi/2\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right\}+\left\{\left(\pi/2-\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(\pi/4-\frac{1}{2}\sin\pi/2\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-0\right\}+\left\{\pi/2-\left(\pi/4-\frac{1}{2}\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]=\pi/4.$$

$\therefore$ বামপক্ষ $=\pi/4$ = ডানপক্ষ।

উদাহরণ-2 : $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2 x/2\right)+2Sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\;dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx=\left(\frac{-\cos\frac{x}{2}}{1/2}+\frac{\sin\frac{x}{2}}{1/2}\right)_0^{\pi/2}$$

$$=\left(-2\cos\pi/4+2\sin\pi/4\right)-\left(-2\cos 0+2\sin 0\right)$$

$$=\left(-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(-2+0)=2$$

বিকল্প পদ্ধতি : $\int\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx$

$$=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+c$$

$$\therefore\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin x}\,dx=\left(-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right)_0^{\pi/2}=\left(-2\cos\pi/4+2\sin\pi/4\right)-\left(-2\cos 0+2\sin 0\right)$$

$= 2\left[\because \cos\pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\pi/4\right]$

উদাহরণ-3 : $\int_{-1}^{2}[x]dx,$ যখন $[x]$ হল x অপেক্ষা বৃহত্তম নয় এমন বৃহত্তম পূর্ণ সংখ্যা।

$= \int_{-1}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{1}0\,dx + \int_{1}^{2}1\,dx$

[যেহেতু $-1 < 0 < 1 < 2$ এবং

$[x] = -1,$ যখন $-1 \leq x < 0$

$= 0,$ যখন $0 \leq x < 1$

$= 1,$ যখন $1 \leq x < 2$]

$= [-x]_{-1}^{0} + 0 + [x]_{1}^{2}$

$= -1 + 0 + 1 = 0$

উদাহরণ-4 : $\int_{0}^{2}\sin h^2 x\,dx = \int_{0}^{2}\frac{1}{2}(\cos h 2x - 1)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin h 2x}{2} - x\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} - x\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\left(\frac{e^4 - e^{-4}}{4} - 2\right) - \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{4} - 0\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^4 - e^{-4}}{4} - 2\right)$$

2.3.2 সমাকলের চলরাশির পরিবর্তন

যদি $\int f(x)\,dx$ সমাকলটি নিরূপণের জন্য সরাসরি আদর্শ সূত্র প্রয়োগ করা না যায় তাহলে $x = \phi(z)$

এই রূপান্তর ঘটিয়ে চেষ্টা করতে হবে যাতে রূপান্তরের পর পরিবর্তিত সমাকলটিতে সরাসরি সূত্র প্রয়োগ করা যায়। এক্ষেত্রে অবশ্যই $\phi(z)$ অপেক্ষকটিকে সন্তত ও অবকলনযোগ্য হতে হবে এবং বিপরীত অপেক্ষক $z=\phi^{-1}(x)$-এর অস্তিত্ব থাকতে হবে।

যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $[a,b]$ অন্তরালে সন্তত হয়, $x=\phi(z)$ অপেক্ষকটি $[c,d]$ অন্তরালে সন্তত ও অবকলনযোগ্য হয় এবং $z=\phi^{-1}(x)$ সংজ্ঞাত হয় তখন $\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d f\{\phi(z)\}\cdot\phi'(z)\,dz$

যখন $x=\phi(z)\Rightarrow dx=\phi'(z)\,dz$ এবং $\phi^{-1}(a)=c$ ও $\phi^{-1}(b)=d.$

দ্রষ্টব্য : $\int f(x)\,dx$ সমাকলটিতে যদি $g(x)=z$ ধরে সরাসরি সমাকলনযোগ্য করা হয় তাহলে সেক্ষেত্রে $g'(x)\,dx=dz$ অর্থাৎ $dx=\dfrac{dz}{g'(x)}$ হওয়ায় $\dfrac{f(x)}{g'(x)}$ কে z-এর অপেক্ষককে রূপান্তরিত করার সময় অবশ্যই $g'(x)$-এর মান যেন O না হয় তা দেখতে হবে।

অনুশীলনী—3

উদাহরণ-1 : মান নির্ণয় করুন : $\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

সমাধান : প্রদত্ত সমাকলে $1+\sin^2 x=z$ ধরে পাওয়া যায়

$2\sin x\cos x\,dx=dz;\quad x=0\Rightarrow z=1$ এবং $x=\pi/2\Rightarrow z=2$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int_1^2\dfrac{\frac{1}{2}dz}{z}$ [রূপান্তরের পর]

$$=\frac{1}{2}[\log|z|]_1^2=\frac{1}{2}(\log 2-\log 1)$$

$=\dfrac{1}{2}\log 2$ [$\therefore$ log | 2 | = log 2, log 1 = 0 ইত্যাদি]

বিকল্প পদ্ধতি : $\int\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\int\dfrac{\frac{1}{2}dz}{z}$ ($1+\sin^2 x$ = z ধরে]

$$=\frac{1}{2}\log|z|+c=\frac{1}{2}\log\left|1+\sin^2 x\right|+c$$

$$\therefore\ \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\left[\log\left|1+\sin^2 x\right|\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\log\left|1+\sin^2\frac{\pi}{2}\right|-\log\left|1+\sin^2 0\right|\right\}^0$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\log|2|-\log|1|\right\}=\frac{1}{2}\log 2 \qquad [\therefore \log 1=0]$$

উদাহরণ-2 : $\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\tan\left(\sin^{-1}x\right)}=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dz}{\tan z}$, $\sin^{-1}x=z$ ধরে $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=dz,$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow z=\frac{\pi}{4}$ এবং $x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z=\frac{\pi}{3}$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\cot z\,dz=\left[\log|\sin z|\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\log\sin\frac{\pi}{3}-\sin\pi/4$$

$$=\log\frac{\sqrt{3}}{2}-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\log\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

উদাহরণ-3 : $\int_0^a\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{a\sin\theta\cdot a\cos\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}},$ যখন $x=a\sin\theta,$

$dx=a\cos\theta\, d\theta, x=0\Rightarrow\theta=0$

এবং $x=a\Rightarrow\theta=\pi/2$

$$=a\int_0^{\pi/2}\sin\theta\, d\theta=a[-\cos\theta]_0^{\pi/2}$$

$$=a\left[-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right]=a.$$

উদাহরণ-4 : $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

ধরা যাক $x=\cos^2\theta+2\sin^2\theta$ অতএব $dx=(-2\cos\theta\sin\theta+4\cos\theta\sin\theta)d\theta$

$$=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta,$$

$\sqrt{(x-1)(2-x)}=\sqrt{\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta}=\sin\theta\cos\theta,\ x=1\Rightarrow\theta=0$ এবং $x=2\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$

অতএব প্রদত্ত সমাকলন $=\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\int_0^{\pi/2}d\theta$

$$=2[\theta]_0^{\pi/2}=2\left[\pi/2-0\right]=\pi$$

উদাহরণ-5 : $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{(2+\sin x)(3+\sin x)}$

$=\int_0^1\frac{dz}{(2+z)(3+z)}$, $\sin x=z$ ধরে $\cos x\,dx=dz,\quad x=0$

হলে $z=0$ এবং $x=\pi/2$ হলে $z=1$

$=\int_0^1\left(\frac{1}{2+z}-\frac{1}{3+z}\right)dz=\left[\log|2+z|-\log|3+z|\right]_0^1$

$=(\log 3-\log 4)-(\log 2-\log 3)=2\log 3-\log 2^2-\log 2$

$=2\log 3-2\log 2-\log 2=2\log 3-3\log 2$

$=\log 3^2-\log 2^3=\log 9-\log 8=\log\frac{9}{8}.$

2.3.3 আংশিক সমাকলন

পূর্বপাঠের জের টেনে বলা যায় অনির্দিষ্ট সমাকলের ক্ষেত্রে যেরকম নিয়ম প্রযোজ্য হয় তা নির্দিষ্ট সমাকলের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত ভাবে পরিবর্তিত হয়ে প্রযোজ্য হয় :

$$\int_a^b f(x)\cdot g^{'}(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f^{'}(x)\,g(x)\,dx$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f^{'}\cdot(x)g(x)\,dx$$

এখানে $f(x)$ ও $g(x)$ অপেক্ষক দুটি $[a,b]$ অন্তরালে অবকলনযোগ্য এবং $f^{'}(x)$ ও $g^{'}(x)$ সন্তত।

দ্রষ্টব্য : 1. দুটি অপেক্ষকের গুণফলের সমাকল করার সময় কোনটিকে $f(x)$ এবং কোনটিকে $g^{'}(x)$ ধরতে হবে তা অপেক্ষক দুটির উপর নির্ভর করে। যা ধরলে সমাকলের সুবিধা হবে সেই ভাবেই $f(x)$ ও $g^{'}(x)$ বেছে নিতে হবে। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষণীয়।

2. $f(x)$ ও $g^{'}(x)$ অপেক্ষকদ্বয় $[a,b]$ অন্তরালে অবকলনযোগ্য এবং $f^{'}(x), g^{'}(x)$ একই অন্তরালে কেবলমাত্র সমাকলনযোগ্য হলেও উপরোক্ত সূত্র ব্যবহার করা যায়।

অনুশীলনী—4

উদাহরণ-1 : $\int_0^1 x^2\cdot e^x dx = \left[x^2e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\cdot e^x dx$ [$f(x)=x^2$ এবং $g^{'}(x)=e^x$ ধরে]

$$=(e-0)-2\left\{\left(xe^x\right)_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x dx\right\}$$

$$=e-2\left\{e-\left(e^x\right)_0^1\right\}$$

$$=e-2\left\{e-(e-1)\right\}$$

$$=e-2$$

উদাহরণ-2 : $\int_2^3 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int_2^3 e^x \cdot \frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx$

$$= \int_2^3 e^x \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx \text{.............(i)}$$, ইহা $\int_a^b e^x \left\{ f(x) + f'(x) \right\} dx$

এই প্রকৃতির।

এখন $\int_2^3 e^x f(x)\,dx = \int_2^3 e^x \cdot \frac{1}{x+1}dx$

$$= \left[\frac{1}{x+1} \cdot e^x \right]_2^3 - \int_2^3 \left\{ -\frac{1}{(x+1)^2} \right\} \cdot e^x dx \text{......... (ii)}$$ [আংশিক সমাকলের সূত্র অনুযায়ী]

$$= \left[\frac{e^x}{x+1} \right]_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{(x+1)^2} \cdot e^x dx$$

অতএব (i) নং থেকে পাই

$$\int_2^3 \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}dx = \left[\frac{e^x}{x+1} \right]_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{(x+1)^2} \cdot e^x dx - \int_2^3 e^x \cdot \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= \left[\frac{e^x}{x+1} \right]_2^3 = \frac{e^3}{4} - \frac{e^2}{3}.$$

বিকল্প পদ্ধতি : $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int e^x \left\{ \frac{x+1-1}{(x+1)^2} \right\} dx$

$$= \int e^x \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx = \int e^x \cdot \frac{1}{x+1}dx - \int e^x \cdot \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{x+1}\cdot e^x-\int\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}e^x dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}\cdot e^x dx$$ [প্রথমটিকে আংশিক সমাকল করে]

$$=\frac{e^x}{x+1}+\int\frac{1}{(x+1)^2}\cdot e^x dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}\cdot e^x dx$$

$$=\frac{e^x}{x+1}+c$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকলন $=\left[\frac{e^x}{x+1}\right]_2^3=\frac{e^3}{4}-\frac{e^2}{3}.$

উদাহরণ-3 : $\int_1^e(\log x)^3 dx=\int_1^e(\log x)^3\cdot 1dx$

$$=\left[(\log x)^3\int 1\cdot dx\right]_1^e-\int_1^e\left[\frac{d}{dx}(\log x)^3\cdot\int 1\cdot dx\right]dx$$ [এখানে $f(x)=(\log x)^3$ এবং $g'(x)=1$]

$$=\left[(\log x)^3\cdot x\right]_1^e-\int_1^e 3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$

$$=e-3\int_1^e(\log x)^2\cdot 1dx$$ $[\therefore \log e=1,\ \log 1=0]$

$$=e-3\left[\left\{(\log x)^2\cdot x\right\}_1^e-\int_1^e 2\log x\cdot\frac{1}{x}\cdot x\,dx\right]$$

[একইভাবে আংশিক সমাকলের সাহায্যে]

$$=e-3\left[e-2\int_1^e(\log x)\cdot 1dx\right]$$

$$=-2e+6\left[\left\{(\log x)\cdot x\right\}_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot x\,dx\right]$$ [আবার আংশিক সমাকল করে]

$$=-2e+6\left[e-(x)\right]_1^e=-2e+6e-6(e-1)$$

$$=-2e+6$$

প্রশ্নাবলী—1

নিম্নলিখিত সমাকলগুলির মান নির্ণয় করুন :

1. (ক) $\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)}\,dx$ (খ) $\int_0^{\pi/2}\sin x\sin 2x\,dx$

(গ) $\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx$

2. (ক) $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos^3 x\,dx$ (খ) $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

(গ) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3dx}{x^4+3x^2+2}$

3. (ক) $\int_0^1\frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}dx$ (খ) $\int_2^e\left\{\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right\}dx$

(গ) $\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$

প্রশ্নাবলী—1 এর উত্তর

1. (ক) 2. [সংকেত : $I=\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)\,dx=..........]$$

(খ) $\frac{2}{3}$. [সংকেত : $\sin A\sin B=\frac{1}{2}\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$ এই সূত্র ধরে অগ্রসর হোন।]

(গ) $\frac{1}{2}\pi a^2$ [সংকেত : $\sqrt{2ax-x^2}=\sqrt{a^2-(x-a)^2}$ লিখে অগ্রসহর হোন]

2. (ক) $\frac{2}{15}$ [সংকেত : $\sin x=z$ ধরুন] (খ) $\tan^{-1}e-\pi/4$ (গ) $\log\frac{5}{4}$.

3. (ক) $\frac{\pi}{4}-\log 2$ (খ) $e-\frac{2}{\log 2}$ (গ) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ [$f(x)=\tan^{-1}x,\ g'(x)=x$ ধরুন]

2.4 নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি ধর্ম

এখানে প্রতি ক্ষেত্রে সমাকলজ সমাকলে উল্লিখিত সীমার মধ্যে সমাকলনযোগ্য ধরা হয়েছে এবং তার প্রিমিটিভ্ (পূর্বসূরী) আছে তাও ধরা হয়েছে।

ধর্ম- (i) : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz$

মৌলিক উপপাদ্য অনুযায়ী,

বামপক্ষ $= \int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$, যখন $\phi'(x) = f(x)$

অর্থাৎ যখন $f(x)$ এর প্রিমিটিভ $\phi(x)$.

একইভাবে ডানপক্ষ $= \int_a^b f(z)\,dz = \phi(b) - \phi(a)$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

ধর্ম-(ii) : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

ধরা যাক $\phi'(x) = f(x)$. অতএব মৌলিক উপপাদ্য অনুযায়ী,

বামপক্ষ = $\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$

এবং ডানপক্ষ $= -\int_b^a f(x)\,dx = -\{\phi(a) - \phi(b)\} = \phi(b) - \phi(a)$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

ধর্ম-(iii) : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ ফলে $a < c < b$.

যদি $\phi'(x) = f(x)$ হয় তবে মৌলিক উপপাদ্য অনুযায়ী,

বামপক্ষ $= \int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a) = \{\phi(c) - \phi(a)\} + \{\phi(b) - \phi(c)\}$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

= ডানপক্ষ.

দ্রষ্টব্য : যদি $a < c_1 < c_2 <........< c_n < b$ হয় তাহলে উপরের ধর্মানুসারে দেখা যাবে

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx +........+ \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx.$$

ধর্ম-(iv) : $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

ডানপক্ষে $a - x = z$ ধরে $dx = -dz,\ \ x = 0 \Rightarrow z = a$ এবং $x = a \Rightarrow z = 0$ হয়। তখন

ডানপক্ষ $= \int_0^a f(a-x)\,dx = \int_a^0 f(z)\cdot(-dz) = -\int_a^0 f(z)\,dz$

$= \int_0^a f(x)\,dx$ [ধর্ম (i) ও (ii) অনুযায়ী]

= বামপক্ষ

ধর্ম-(v) : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

বামপক্ষ $= \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$ [ধর্ম (iii) অনুযায়ী, $\therefore 0 < a < 2a$]

এখন দ্বিতীয় সমাকলে $x = 2a - z$ ধরে $dx = -dz,\ \ x = a \Rightarrow z = a$ এবং $x = 2a \Rightarrow z = 0$ হয়। অতএব

বামপক্ষ $= \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^0 f(2a-z)(-dz)$

$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-z)dz$ [ধর্ম (ii) অনুযায়ী]

$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a (2a-x)\,dx$ [ধর্ম (i) অনুযায়ী]

= ডানপক্ষ।

ধর্ম-(vi) : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$ যখন $f(2a-x) = f(x)$

$= 0,$ যখন $f(2a-x) = -f(x)$

এই ধর্মটি ধর্ম-(v) এর অনুসারী।

ধর্ম-(vii) : $\int_0^{na} f(x)\,dx = n\int_0^a f(x)\,dx,$ যখন $f(x) = f(a+x).$

যেহেতু $0 < a < 2a < .... < (n-1)a < na$ অতএব ধর্ম (iii)

থেকে পাওয়া যায়

$$\int_0^{na} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx + ... + \int_{(n-1)a}^{na} f(x)\,dx .....(1)$$

এখন ডান পক্ষের দ্বিতীয় সমাকলে $x = z + a$ বসিয়ে $dx = dz,\ x = a \Rightarrow z = 0$ এবং $x = 2a \Rightarrow z = a$ হয়

$$\therefore \int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(z+a)\,dz = \int_0^a f(x+a)\,dx$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx \qquad [\because \text{ প্রদত্ত শর্তে } f(x) = f(a+x)]$$

অনুরূপে দেখান যায় $\int_{2a}^{3a} f(x)\,dx = \int_a^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)\,dx,$

$\int_{3a}^{4a} f(x)\,dx = \int_{2a}^{3a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx,$ ইত্যাদি।

অতএব (1) নং সম্পর্ক থেকে পাই

বামপক্ষ $= \int_0^{na} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx + ...n$ তম পদ পর্যন্ত।

$= n\int_0^a f(x)\,dx$ = ডানপক্ষ।

ধর্ম-(viii) : $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}dx$

বামপক্ষ $= \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$ [ধর্ম (iii) অনুযায়ী]

$$= \int_a^0 f(-z)(-dz) + \int_0^a f(x)\,dx$$

[প্রথম সমাকলে $x = -z$ ধরে $dx = -dz,\ x = -a \Rightarrow z = +a$ এবং $x = 0 \Rightarrow z = 0$]

$= \int_0^a f(-z)\,dz + \int_0^a f(x)\,dx$ [ধর্ম (ii) থেকে]

$= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$ [ধর্ম (i) থেকে]

$= \int_0^a \{f(-x) + f(x)\}\,dx =$ ডানপক্ষ।

দ্রষ্টব্য : ধর্ম (viii) কে নিম্নলিখিত উপায়েও প্রকাশ করা যায় :

$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0,$ যখন $f(-x) = -f(x)$ অর্থাৎ যখন $f(x)$ অযুগ্ম অপেক্ষক

$= 2\int_0^a f(x)\,dx,$ যখন $f(-x) = f(x)$ অর্থাৎ যখন $f(x)$ যুগ্ম অপেক্ষক।

অনুশীলনী—5

উদাহরণ-1 : $\mathrm{I} = \int_0^\pi \cos^5 x\,dx = \int_0^\pi \cos^5(\pi - x)\,dx$ $\left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$

$= \int_0^\pi (-\cos x)^5\,dx = -\int_0^\pi \cos^5 x\,dx = -\mathrm{I}$

$\therefore \quad 2\mathrm{I} = 0 \Rightarrow \mathrm{I} = 0$

উদাহরণ-2 : $\mathrm{I} = \int_0^\pi \sin x \cos^7 x\,dx = \int_0^\pi \sin(\pi - x)\cos^7(\pi - x)\,dx$

$\left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$

$= \int_0^\pi \sin x \cdot (-\cos x)^7\,dx = -\int_0^\pi \sin x \cos^7\,dx = -\mathrm{I}$

$\therefore \quad 2\mathrm{I} = 0 \Rightarrow \mathrm{I} = 0.$

উদাহরণ-3 : $\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x(\sin x + \cos x)\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\pi/2 - x\right)\left\{\sin\left(\pi/2 - x\right) + \cos\left(\pi/2 - x\right)\right\}dx$

$\left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$

$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x(\cos x + \sin x)\,dx$

$$\therefore \quad 2\mathrm{I} = \mathrm{I} + \mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x(\sin x + \cos x)\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x(\sin x + \cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)\,dx$$

$$= [-\cos x + \sin x]_0^{\pi/2} = \left\{\left(-\cos \pi/2 + \sin \pi/2\right) - (-\cos 0 + \sin 0)\right\}$$

$$= 2 \quad \Rightarrow \mathrm{I} = 1.$$

উদাহরণ-4 : $\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \left(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \left\{a^2 \cos^2\left(\pi/2 - x\right) + b^2 \sin^2\left(\pi/2 - x\right)\right\} dx$

$$\left[\therefore \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)dx\right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\right)dx$$

$$\therefore \quad 2\mathrm{I} = \mathrm{I} + \mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \left(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x\right) + \int_0^{\pi/2} \left(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left\{a^2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) + b^2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\right\} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(a^2 + b^2\right)dx = \left(a^2 + b^2\right)\int_0^{\pi/2} dx$$

$$= \left(a^2 + b^2\right)[x]_0^{\pi/2} = \left(a^2 + b^2\right) \cdot \pi/2$$

$$\therefore \quad \mathrm{I} = \left(a^2 + b^2\right) \cdot \frac{\pi}{4}.$$

উদাহরণ-5 : $\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \log \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \log \sin\left(\pi/2 - x\right)dx \left[\therefore \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx\right]$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \cos x\,dx$$

$$\therefore \quad 2\mathrm{I} = \mathrm{I} + \mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \log \sin x\,dx + \int_0^{\pi/2} \log \cos x\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\log\sin x + \log\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) dx = \int_0^{\pi/2} \log\sin 2x\, dx - \int_0^{\pi/2} \log 2\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin z\, dz - \log 2.(x)_0^{\pi/2} \qquad \text{[প্রথম সমাকলে } 2x = z \text{ ধরে]}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin x\, dx - \log 2.\left(\pi/2 - 0\right) \qquad \left[\because \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(z) dz\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx - \pi/2 \log 2 \qquad \left[\because \int_0^{2a} f(x) dx = 2\int_0^a f(x)\, dx \text{ যখন } f(2a - x) = f(x)\right]$$

$$= \mathrm{I} - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$\therefore \quad \mathrm{I} = -\frac{\pi}{2}\log 2 = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$$

প্রশ্নাবলী—2

1. দেখান যে (ক) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x\, dx = 0$ (খ) $\int_a^b f(kx)\, dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x)\, dx$

(গ) $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$ যখন $f(x)$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক।

(ঘ) $\int_0^{\pi/2} \log\tan x dx = 0$ (ঙ) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}} dx = \pi/4.$

2. মান নির্ণয় করুন।

(ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ (খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$ (গ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

(ঘ) $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ ($x = \sin\theta$ ধরুন এবং উদাহরণ –5 অনুযায়ী অগ্রসর হোন)।

(ঙ) $\int_0^{\pi} x\cos^4 x\, dx$

প্রশ্নাবলী—2 এর উত্তর

1. **সংকেত** : নির্দিষ্ট সমাকলের ধর্মগুলি প্রয়োজন মত কাজে লাগান।

2. (ক) $\frac{\pi}{4}$ (খ) 0 (গ) $\sqrt{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$ (ঘ) $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$

(ঙ) $\frac{3}{16}\pi^2$ [সংকেত : $I=\int_0^{\pi} x\cos^4 x\,dx=\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos^4(\pi-x)\,dx$

$=\int_0^{\pi}\pi\cos^4 x\,dx-I\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi}\cos^4 x\,dx$, এখন $\cos^4 x$ কে গুণিতক কোণের অপেক্ষকে প্রকাশ করে অগ্রসর হতে হবে।]

2.5 সারাংশ

1. যদি $f(x)$ অপেক্ষক $[a,b]$ সসীম অন্তরালে সংজ্ঞায়িত, সীমাবদ্ধ ও সমাকলনযোগ্য হয় তবে $\int_a^b f(x)\,dx=\phi(b)-\phi(a)$, যখন $\phi'(x)=f(x)$.

2. **প্রাথমিক নিয়ম** : যখন $f(x)$ ও $g(x)$ উভয়েই $[a,b]$ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য তখন

(ক) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)\,dx$, যখন $a<c<b$

(খ) $\int_a^b\{k_1 f(x)\pm k_2 g(x)\}dx=k_1\int_a^b f(x)\,dx\pm k_2\int_a^b g(x)\,dx$, যখন k_1,k_2 ধ্রুবক।

3. **চলরাশির পরিবর্তন** : যদি $f(x)$ অপেক্ষক $[a,b]$ অন্তরালে সন্তত হয়,

$x=\phi(z)$ অপেক্ষক $[c,d]$ অন্তরালে সন্তত ও অবকলনযোগ্য হয় এবং $z=\phi^{-1}(x)$ সংজ্ঞাত হয় তবে

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d f\{\phi(z)\}\cdot\phi'(z)dz,$$

যখন $\phi^{-1}(a)=c$ ও $\phi^{-1}(b)=d$.

4. **আংশিক সমাকলন** :

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

যখন $[a,b]$ অন্তরালে $f(x)$ ও $g(x)$ অবকলনযোগ্য এবং $f'(x)$ ও $g'(x)$ সন্তত।

5. **কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম** : প্রতিক্ষেত্রে সমাকলজ সমাকলনযোগ্য হলে

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz$ (ii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx$ যখন $a < c < b.$

(iv) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(v) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

(vi) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$ যখন $f(2a-x) = f(x)$

$= 0,$ যখন $f(2a-x) = -f(x).$

(vii) $\int_0^{na} f(x)\,dx = n\int_0^a f(x)\,dx,$ যখন $f(x) = f(a+x).$

(viii) $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}\,dx = 0,$ যখন $f(-x) = -f(x)$

$= 2\int_0^a f(x)dx,$ যখন $f(-x) = f(x).$

2.6 বিষয়মুখী ছোট প্রশ্নাবলী (MCQ)

নিম্নের সমাকলগুলির পাশে দেওয়া উত্তরগুলির মধ্য থেকে সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত করুন (M C Q) :

1. (ক) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}dx$ (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) ∞ (iii) $\frac{\pi}{4}$.

(খ) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$ (i) 0 (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) 1

(গ) $\int_0^{\pi/4} \sec x(\sec x - \tan x)dx$ (i) $2+\sqrt{2}$ (ii) $2-\sqrt{2}$ (iii) $-2+\sqrt{2}$

(ঘ) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$ (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) 0

(ঙ) $\int_0^2 |1-x|dx$ (i) 1 (ii) 0 (iii) – 1

(চ) $\int_0^3 [x]dx$, যখন $[x] = x$ অপেক্ষা বৃহত্তর নয় এমন পূর্ণসংখ্যা (i) 0 (ii) 2 (iii) 3

(ছ) $\int_{-1}^1 x|x|dx$ (i) 0 (ii) 2 (iii) 1

2. (ক) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^3}$ (i) $\frac{1}{3}\log 2$ (ii) $\frac{1}{2}\log 2$ (iii) $\frac{1}{4}\log 2$

(খ) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2-1}}$ (i) $\frac{1}{2}(\sqrt{7}+1)$ (ii) $\frac{1}{2}(\sqrt{7}-1)$ (iii) 2

(গ) $\int_0^1 \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (i) $e^{\frac{\pi}{2}}$ (ii) $e^{\frac{\pi}{2}}-1$ (iii) $e^{\frac{\pi}{2}}+1$

(ঘ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan 2x}}{\sin 2x}dx$ (i) 0 (ii) 1 (iii) –1

(ঙ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx$ (i) 0 (ii) 1 (iii) 2

(চ) $\int_1^e \frac{dx}{x+x\log x}$ (i) e (ii) 1 (iii) log2

3. (ক) $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$ (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$

(খ) $\int_0^1 x\sin hx\,dx$ (i) e (ii) $\frac{1}{e}$ (iii) $e+\frac{1}{e}$

(গ) $\int_1^2 \log x\, dx$ (i) $2\log 2-1$ (ii) $2\log 2+1$ (iii) $\log\frac{2}{e}$

(ঘ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\text{see}^2 x\, dx$ (i) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$ (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) 0

(ঙ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos x\, dx$ (i) 0 (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{\pi}{8}$

4. দেখান যে

(ক) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^{b-a} f(x+a)\,dx$ (খ) $\int_{-a}^{a} x f(x^4)\,dx=0$ (গ) $\int_{-a}^{a}\frac{xe^{x^2}}{1+x^2}=0$

(ঘ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\frac{\pi}{4}$

2.6.1 বিষয়মুখী ছোট প্রশ্নাবলীর উত্তর

1. (ক) (iii) (খ) (ii) (গ) (ii) (ঘ) (i) (ঙ) (i) (চ) (iii) (ছ) (i)

2. (ক) (i) (খ) (ii) (গ) (ii) (ঘ) (ii) (ঙ) (iii) (চ) (iii)

3. (ক) (iii) (খ) (ii) (গ) (i) (ঘ) (i) (ঙ) (iii)

4. সংকেত ঃ নির্দিষ্ট সমাকলের ধর্মগুলি প্রয়োজনমত প্রয়োগ করুন।

2.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

মান নির্ণয় করুন (1–3) :

1. (ক) $\int_0^1 \frac{\left(x-x^2\right)^3}{\sqrt[3]{x^5}}dx$ (খ) $\int_1^2 \frac{16^{1-\frac{x}{2}}-2^x}{4^{2-x}}dx$

(গ) $\int_{-2}^{3}\left|1-x^2\right|dx$ [সংকেত ঃ $\left|1-x^2\right|=\begin{cases}1-x^2, \text{যখন } x^2<1, \text{অর্থাৎ যখন } -1<x<1\\ x^2-1, \text{অন্যত্র}\end{cases}$]

(ঘ) $\int_0^{1.5}\left[x^2\right]dx,$ যখন $\left[x^2\right]$ হল x^2 অপেক্ষা বৃহত্তর নয় এমন বৃহত্তম পূর্ণ সংখ্যা।

[সংকেত : $\left[x^2\right]=0,$ যখন $0\le x<1$

$= 1,$ যখন $1\le x\angle\sqrt{2}$

$=2,$ যখন $\sqrt{2}\le x\angle 1\cdot 5$]

(ঙ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\cdot\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}dx$ [সংকেত : $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\frac{1-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\sec x-\tan x$]

(চ) $\int_0^1\frac{x\,dx}{(1+x^2)(1+x)}$ (ছ) $\int_0^{\pi}\sin 10x\sin 3x\,dx$ (জ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x+\cos x}$

(ঝ) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ (ঞ) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx, n$ স্বাভাবিক সংখ্যা।

(ট) $\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\,dx,$ যখন $m,\ n$ উভয়েই ধনাত্মক বিভিন্ন স্বাভাবিক সংখ্যা

(ঠ) $\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx,$ যখন m,n উভয়েই ধনাত্মক বিভিন্ন স্বাভাবিক সংখ্যা

(ড) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx,$ যখন m,n স্বাভাবিক সংখ্যা

2. (ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{2\cos^2 x+3\sin^2 x}dx$ (খ) $\int_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$ [$x=\sin\theta$ ধরুন]

(গ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4+5\sin x}$ (ঘ) (i) $\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ (ii) $\int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$

[সংকেত : (ঘ) (i) ও (ii) তে $x=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta$ ধরুন]

(ঙ) $\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$ (চ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cos x}\right)dx$ (ছ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,dx$

(জ) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x + a^2} (0 < a < 1)$.

3. (ক) $\int_1^{2} x\log x\, dx$ (খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x} dx$ (গ) $\int_0^{1} \frac{x\tan^{-1} x}{\left(1+x^2\right)^2} dx$ (ঘ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \cos x\, dx$

(ঙ) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} x\, dx$ (চ) $\int_0^{1} \frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3} dx$ (ছ) $\int_0^{1} \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$ (জ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$

4. দেখান যে (ক) $\int_0^{a} f(x)\, dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\, dx + \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)\, dx$

(খ) $\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^{a} \{f(x) + (2a-x)\} dx$

5. মান নির্ণয় করুন :

(ক) $\int_0^{a} \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ [$x = a\sin\theta$ ধরুন] (খ) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx$

(গ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)\, d\theta$ (ঘ) $\int_0^{1} \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$ [$x = \tan\theta$ ধরুন]

(ঙ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\, dx}{2+\sin x + \cos x}$ (চ) $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ (ছ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot x}\, dx$

(জ) $\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\mathrm{see}\, x + \tan x} dx$ (ঝ) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

6. দেখান যে $\int_0^{\pi} x\log\sin x\, dx = \frac{1}{2}\pi^2 \log\frac{1}{2}$.

2.7.1 সর্বশেষ প্রশ্নাবলীর উত্তর

1. (ক) $\frac{243}{7280}$ (খ) $1-\frac{7}{6\log 2}$ [সংকেত : (ক) ও (খ) এর সমাকলজ কে প্রথমে সরল করে ছোট

আকারে প্রকাশ করুন] (গ) $\frac{28}{3}$ (ঘ) $2-\sqrt{2}$ (ঙ) $2-\sqrt{2}$ (চ) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\log 2$ (ছ) 0 (জ) $\sqrt{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$

(ঝ) $\frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}}-1\right)$ (ঞ) 0, যখন $n>0$; 2π, যখন $n=0.$ (ট) 0 (ঠ) 0 (ড) 0, যখন $m\neq n$; π, যখন $m=n>0$; 2π যখন $m=n=0.$

2. (ক) $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$ [সংকেত : $2\cos^2 x+3\sin^2 x=z$ ধরুন]

(খ) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

[সংকেত : $x=\sin\theta$ ধরে $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta+\tan^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{see}^2\theta d\theta}{2\tan^2\theta+1}, \sqrt{2}\tan\theta=z$ ধরুন]

(গ) $\frac{1}{3}\log 2$ (ঘ) (i) π (ii) $(b-a)\cdot\frac{\pi}{8}$ (ঙ) $\frac{\pi}{3}$ [সংকেত : $I=\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta\tan\theta}d\theta$ ($x-1=\sec\theta$ ধরে) $=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{3}$]

(চ) $\sqrt{2}\pi$ [সংকেত : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{0\sqrt{\frac{1}{2}\left[1-(\sin x-\cos x)^2\right.}}$,

এখন $\sin x-\cos x=z$ ধরুন]

(ছ) $\frac{8}{15}$ [সংকেত : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\cdot\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos x dx,\ \sin x=z$ ধরুন]

(জ) $\frac{\pi}{1-a^2}$ [সংকেত : $I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\left(1+a^2\right)-2a\cos x}$, এবারে $\int\frac{dx}{c-d\cos x}$ এর নিয়মে কষুন]

3. (ক) $2\log 2-\frac{3}{4}$ (খ) $\frac{\pi}{2}-\log 2$ [সংকেত : $I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x\,\text{see}^2\frac{x}{2}dx=\left[x\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}dx$

$=\frac{\pi}{2}-\left[2\log\left|\sec\frac{x}{2}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-2\log\sqrt{2}=\frac{\pi}{2}-\log 2.\Big]$ (গ) $\frac{1}{8}$ (ঘ) $\frac{1}{10}\left[e^{\frac{3\pi}{2}}-3\right]$

(ঙ) $\frac{\pi}{12}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

(চ) $\frac{e}{4}-1$

[সংকেত : সমাকলজ $=\frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3}=e^x\left\{\frac{(x+1)-2}{(x+1)^3}\right\}=e^x\left\{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}\right\}, f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

হলে ইহা $e^x\left\{f(x)+f'(x)\right\}$ এই প্রকারের; উদাহরণ-2 দেখুন]

(ছ) $\frac{e}{2}-1$ [সংকেত : সমালজ $\frac{xe^x}{(x+1)^2}=e^x\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$ ইহা $e^x\left\{f(x)+f'(x)\right\}$ এই প্রকারের যখন $f(x)=\frac{1}{x+1}\Big]$

(জ) $e^{\frac{\pi}{2}}$ [সংকেত : $e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)=e^x\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=e^x\left(\frac{1}{2}\text{see}^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right),$

$f(x)=\tan\frac{x}{2}$ ধরলে ইহা $e^x\left\{f(x)+f'(x)\right\}$ এই প্রকারের উদাহরণ 2 দেখুন]

5. (ক) $\frac{\pi}{4}$ (খ) π [সংকেত : $\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{1+\sin(\pi-x)}dx$ (ধর্ম (iv)] $=\pi\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin x}-\mathrm{I}$, ইত্যাদি]

(গ) $\frac{\pi}{8}\log 2$ [সংকেত : $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}d\theta$ (ধর্ম (iv)] $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left\{1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right\}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\frac{2}{1+\tan\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log 2\,d\theta-\mathrm{I}.$

$\therefore\ 2\mathrm{I}=\log 2.[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}\Rightarrow \mathrm{I}=\frac{1}{2}\log 2.\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}\log 2\Big]$

(ঘ) $\frac{\pi}{8}\log 2$ (ঙ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cot^{-1}\left(2\sqrt{2}\right)$ [সংকেত : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{2+\cos x+\sin x}dx \quad \therefore 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{2+\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$ ইত্যাদি।]

(চ) $\frac{\pi^2}{2ab}$ [সংকেত : (iv) নং ধর্ম প্রয়োগ করে $I=\pi\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}-I$

$\therefore \quad 2I=\pi\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$, ধর্ম (vi) প্রয়োগ করে

বা, $I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{see}^2 x\,dx}{a^2+b^2\tan^2 x}$, এখন $b\tan x=a\tan\theta$ ধরুন]

(ছ) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ [সংকেত : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}dx$

$\therefore \quad 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\cot x}+\sqrt{\tan x}\right)dx$, এবার 2(b) এর সংকেত দেখুন।]

(জ) $\frac{\pi}{2}(\pi-2)$ (ঝ) $\frac{1}{4}\pi^2$

6. সংকেত : প্রথমে ধর্ম (iv) প্রয়োগ করুন তারপর উদাহরণ-5 অনুসরণ করুন।

অতিরিক্ত পাঠ

(Selected Readings)

1. Edwards D—Integral Calculus
2. Des, B & B. Mukherjee–Integral Calculus, UN Dhar
3. Apostol, T.M. ; Calculus VOl I. Walthein, 1967
4. Shanti Narayan, Integral Calculus, S. Chand, 2005
5. MC Shane, E.J. ; Integration, OUP, 1961.

একক 3 ❑ যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকল (Integration as a Limit of a sum)

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা :

আগের এককে নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি নির্ণয় পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে। এই এককে যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা ও তার জ্যামিতিক ব্যাখ্যার মধ্য দিয়ে নির্দিষ্ট সমাকলের সাথে বিশেষভাবে পরিচিত হওয়ার সুযোগ থাকছে। জ্যামিতিতে এবং বাস্তবে এর প্রয়োগ যথেষ্ট পরিমানে বিদ্যামান। নির্দিষ্ট সমাকলের প্রয়োগে এক বা একাধিক বক্র দ্বারা বেষ্ঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, বক্রের দৈর্ঘ্য, গানিতিক তলবেষ্ঠিত বস্তুর আয়তন, ভারকেন্দ্র, জাড্য ভ্রামক ইত্যাদি নিরূপন করা যায়।

3.2 উদ্দেশ্য :

এই একক পাঠকরে আপনি

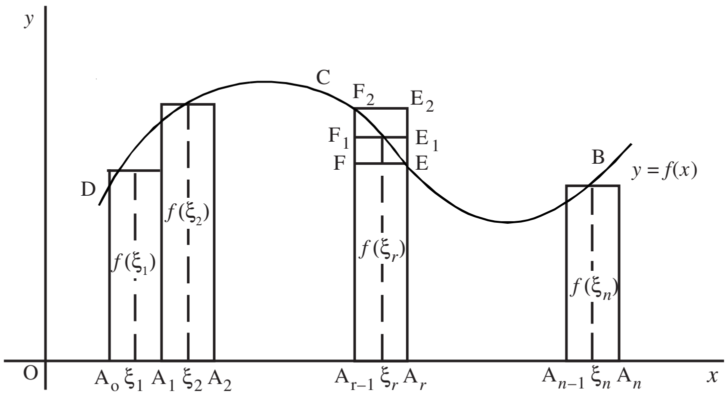
- নির্দিষ্ট সমাকল যে একটি যোগফলের সীমা (limit) তা জানতে পারবেন।
- নির্দিষ্ট সমাকলের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা পাবেন।

● সমাকলের মৌলিক উপপাদ্যের প্রমাণ পাবেন।

3.3 যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা :

পুরোপুরি বিশ্লেষণ মূলক গানিতিক উপায়ে এবং জ্যামিতির সাহায্য নিয়ে এই দুই উপায়ে যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা বা ব্যাখ্যা দেওয়া যায়। তবে চিত্র সহযোগে অগ্রসর হয়ে নির্দিষ্ট লক্ষে পৌঁছালে বোঝার সুবিধা হবে এই মনেকরে প্রথমে জ্যামিতিক উপায়ে ওপরে বিশ্লেষনাত্মক উপায়ে বিষয়টির উপস্থাপনা করা হবে।

3.3.1 জ্যামিতিক ব্যাখ্যা :



জ্যামিতিক ব্যাখ্যার সুবিধার্থে $a \le x \le b$ অর্থাৎ $[a,b]$ সসীম অন্তরালে সংজ্ঞায়িত একটি বাস্তব মানের অপেক্ষক $f(x)$ -কে সন্তত (সুতরাং সীমাবদ্ধ) এবং ধনাত্মক ধরে নেওয়া হল। চিত্রে A_o ও A_n বিন্দুদ্বয় সথাক্রমে $x=a\ (=x_o)$ ও $x=b\ (=x_n)$ বিন্দু এবং বক্ররেখাটি $y=f(x)$ দ্বারা সূচিত। এখন A_o ও A_n এর মধ্যে x_1, x_2....x_{r-1} x_r,......, x_{n-1} অর্থাৎ যথাক্রমে A_1, A_2....A_{r-1} A_r,......, A_{n-1} বিন্দুগুলিকে যথেচ্ছভাবে স্থাপন করে [a, b] অন্তরালকে n টি ভাগে বা উপঅন্তরালে ভাগ করা হল (ভাগগুলি অসমান বা সমান যেকোন দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট হতে পারে)। অতএব মোট অন্তরালটির দৈর্ঘ্য $A_0A_n= b-a$ এবং উপঅন্তরাল গুলির দৈর্ঘ্য $A_0\ A_1=\delta_1= X_1-X_0$, $A_1A_2=\delta_2=\ X_2-X_1$,..........,$A_{r-1}A_r=\delta_r=X_r-X_{r-1}$,......, $A_{n-1}A_n=\delta_n=x_n-x_{n-1}$ ইত্যাদি; সংক্ষেপে $\delta_r= X_r-X_{r-1}$, r =1,2......,n; r-তম উপঅন্তরালটিকেও δ_r দ্বারা সূচিত করা হয় যখন r=1,2,.....n, যদি r- তম উপঅন্তরালে f(x) এর সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মান যথাক্রমে m_r ও M_r হয় তবে

$m_r \le f(\xi_r) \le M_r$ যখন δ_r উপঅন্তরালের মধ্যে যেকোন একটি বিন্দু ξ_r

$$\therefore m_r\,\delta_r \le f(\xi_r)\delta_r \le M_r\delta_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

এখন $r = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$ এর জন্য অনুরূপ অসমীকরণ সমষ্ঠি নিয়ে পাই

$$\sum_{r=1}^{n} m_r\,\delta_r = \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\delta_r \le \sum_{r=1}^{n} M_r\delta_r \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

অসমীকরণ (i)-এ চিত্রনুযায়ী

$m_r\delta_r = m_r$ দৈর্ঘ্য এবং δ_r প্রস্থ যুক্ত আয়তক্ষেত্র $A_r EF A_{r-1}$-এর ক্ষেত্রফল

$f(\xi_r)\delta_r = f(\xi_r)$ দৈর্ঘ্য এবং δ_r প্রস্থ যুক্ত আয়তক্ষেত্র $A_r E_1 F_1 A_{r-1}$-এর ক্ষেত্রফল

এবং $M_r\delta_r = M_r$ দৈর্ঘ্য এবং δ_r প্রস্থ যুক্ত আয়তক্ষেত্র $A_r E_2 F_2 A_{r-1}$-এর ক্ষেত্রফল বোঝায়।

সুতরাং অসমীকরণ (ii) -তে একই ধারণা অনুসারে $\sum_{r=1}^{n} m_r\delta_r, \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\delta_r$ ও $\sum_{r=1}^{n} M_r\delta_r$

অনুরূপ আয়তক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্ঠিগুলিকে বোঝায়।

আবার চিত্র থেকে এবং উপরোক্ত ক্ষেত্রগুলির ধারণা থেকে বলা যায়—

$$\sum_{r=1}^{n} m_r\delta_r \leq \text{ক্ষেত্রফল } A_o A_n BCD \leq \sum_{r=1}^{n} M_r\delta_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

যদি $\sum_{r=1}^{n} m_r\delta_r$ ও $\sum_{r=1}^{n} M_r\delta_r$ কে যথাক্রমে s ও S দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। তাহলে বলা যায় [a, b] অন্তরালের মধ্যে আরও নতুন নতুন বিন্দু স্থাপন করে উপঅন্তরালের সংখ্যা n এর মান বাড়ান যায় তাহলে s এর মান বাড়তে থাকে এবং S এর মান কমতে থাকে। এই প্রকারে উপঅন্তরালগুলির সংখ্যা যদি এমন ভাবে বাড়ান যায় যাতে δ_r গুলির মধ্যে দীর্ঘতম δ এর মান ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতম হতে হতে শূন্যর নিকটবর্তী হতে থাকে (অর্থাৎ $n \to \infty$ হলে $\delta \to 0$ হয়) তখন $f(x)$ সন্তত বলে s এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে একটি সসীম সীমা মানের দিকে অভিসারী (Convergent) হয় এবং S এর মানও হ্রাস পেতে পেতে একটি সসীম সীমামানের দিকে অভিসারী হয়।

আবার $\delta \to 0$ হলে যে কোন উপঅন্তরালে

$M_r - m_r < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ ধরাযাবে, যখন $\varepsilon > 0$ একটি ইচ্ছামত ছোট সংখ্যা।

$\therefore \delta \to 0$ হলে,

$$S - s = \sum_{r=1}^{n} M_r\delta_r - \sum_{r=1}^{n} m_r\delta_r = \sum_{r=1}^{n} (M_r - m_r)\delta_r < \sum_{r=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\delta_r$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{r=1}^{n}\delta_r = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(x_n - x_o) = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon$$

অতএব, $\lim S = \lim s$, যেহেতু $\varepsilon > 0$ একটি ইচ্ছামত ছোট সংখ্যা।

$\delta \to o \quad \delta \to o$

সুতরাং (ii) এবং (iii) -এ যেহেতু $\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\delta_r$ এবং ক্ষেত্রফল A_oA_nBCD' উভয়েই s এবং S এর মধ্যে অবস্থিত। অতএব বলা যায় $\delta \to o$ হলে তাহারা উভয়েই s ও S এর সাধারন (common) সীমামানের দিকে অভিসারী হবে।

$$\lim_{\substack{n\to\alpha \\ \delta\to 0}} \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\delta_r = \text{ক্ষেত্রফল } A_oA_nBCD$$

এই সমীকরনটির বামপক্ষের যোগফলের সীমাটিকে $\int_a^b f(x)dx$ দ্বারা সূচিত করা হয়। সংগত কারনেই $\int_a^b f(x)dx$ নির্দিষ্ট সমাকলটি জ্যামিতিক ভাবে A_oA_nBCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অর্থাৎ $y = f(x)$ বক্র, $x = a$ ও $x = b$ কোটিদ্বয় এবং x -অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বোঝায়।

প্রান্তলিপি ঃ $f(x)$ অপেক্ষক সন্তত না হয়েও কেবলমাত্র সীমাবদ্ধ হলেই কিছু শর্ত সাপেক্ষে সসীম অন্তরাল [a, b] -তে সমাকলনযোগ্য হতে পারে এবং $f(x)$ সর্বদা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বা কখনও ধনাত্মক কখনও ঋণাত্মক হতে পারে। এবিষয়ে বিশদ আলোচনা এই পুস্তকে করা হল না।

3.3.2 নির্দিষ্ট সমাকলের বিশ্লেষণ মূলক সংজ্ঞা

ধরাযাক্ সসীম অন্তরাল $[a,b]$-তে সংজ্ঞায়িত $f(x)$ অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ (Bounded)। $[a,b]$ অন্তরালটিকে যথেচ্ছ ভাবে (Arbitrarily) $a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{r-1}, x_r, \ldots\ldots\ldots, x_{n-1}, x_n = b$ বিন্দুগুলি দ্বারা $(x_{r-1} < x_r)n$ -টি উপঅন্তরালে বিভাজিত করা হল। এই উপঅন্তরাল গুলিকে এবং উহাদের দৈর্ঘ্যগুলিকে সাধারণ (Common) চিহ্ন $\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_r, \ldots\ldots, \delta_n$ দ্বারা এবং উহাদের মধ্যে দীর্ঘতমটিকে δ দ্বারা সূচিত করা হলে $\delta_1 = x_1 - x_0, \delta_2 = x_2 - x_1, \ldots\ldots, \delta_r = x_r - x_{r-1}, \ldots\ldots, \delta_n = x_n - x_{n-1}$ হয়। এই উপঅন্তরালগুলির মধ্যের যে কোন স্থানে যথাক্রমে $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_r, \ldots\ldots, \xi_n$ বিন্দুগুলির অবস্থান হলে এবং $\lim_{\substack{n\to\alpha \\ \delta\to 0}} \left[f(\xi_1)\delta_1 + f(\xi_2)\delta_2 + \ldots\ldots + f(\xi_r)\delta_r + \ldots\ldots + f(\xi_n)\delta_n \right]$ এই সীমার অস্তিত্ব থাকলে তাকে $\int_a^b f(x)dx$ এই নির্দিষ্ট সমাকল দ্বারা সূচিত করা হয়। a -কে সমাকলের নিম্নসীমা (Lower bound), b -কে সমাকলের উর্দ্ধসীমা (Upper bound) এবং $f(x)$ কে সমাকলন (Integrand) বলা হয়।

3.3.3 নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞার বিশেষ রূপ

যদি উপরোক্ত সংজ্ঞায় $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_r, \ldots\ldots\ldots, \xi_n$ বিন্দুগুলি তাদের নিজস্ব উপঅন্তরালগুলির ডানদিকের প্রান্তবিন্দুগুলি হয় এবং সকল উপঅন্তরালগুলির সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট হয় যাদের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য $h = \dfrac{b-a}{n}$ তাহলে সংজ্ঞাটি নিম্নলিখিত ভাবে রূপান্তরিত হয় :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\left[f(x_1)\cdot h + f(x_2)h + \ldots\ldots + f(x_r)\cdot h + \ldots\ldots + f(x_n)\cdot h\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_r) + \ldots\ldots + f(x_n)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(x_r) = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(x_o + rh)$$

যখন $x_0 = a$ এবং $x_r = x_0 + rh$

যেহেতু $h = \dfrac{b-a}{n}$ অতএব $h \to 0$ হলে $n \to \infty$ হয়, সুতরাং উপরোক্ত সংজ্ঞাটিকে অন্যরূপে নিম্নলিখিত ভাবেও প্রকাশ করা যায়।

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a + r\cdot\frac{b-a}{n}\right)$$

দ্রষ্টব্য : যদি $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots\ldots, \xi_r, \ldots\ldots\ldots, \xi_n$ বিন্দুগুলি স্বীয় উপঅন্তরালগুলির বামদিকের প্রান্তবিন্দু হয় এবং উপঅন্তরালগুলি সমান দৈর্ঘ্য $h = \dfrac{b-a}{n}$ বিশিষ্ট হয় তাহলে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh)$$

বা অন্যভাবে $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{r=0}^{n-1} f\left(a + r\cdot\frac{b-a}{n}\right)$

প্রান্তলিপি ঃ যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $[a,b]$ অন্তরালে আংশিক ধনাত্মক ও আংশিক ঋণাত্মক হয় তাহলে $\int_a^b f(x)dx$ এর মান যেকোন চিহ্ন বিশিষ্ঠ হতে পারে। কারণ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা অনুয়ায়ী $\int_a^b f(x)dx$ সমাকলটি $y = f(x), x = a\, x = b$ ও x-অক্ষ দ্বারা সীমাবন্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হওয়ায় যে অংশে $f(x)$ ধনাত্মক সেখানে

এইরূপে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ধনাত্মক এবং যে অংশে $f(x)$ ঋণাত্মক সেখানে এইরূপে প্রাপ্ত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয় এবং $\int_a^b f(x)dx$ এর মান উক্ত ক্ষেত্রফলগুলির বীজগণিতীয় যোগফল।

অনুশীলনী—1

উদাহরণ -1 সংজ্ঞা থেকে মান নির্ণয় করুন :

(ক) $\int_2^3 4dx$ (খ) $\int_2^3 3x\,dx$ (গ) $\int_2^3 (3x+4)dx$

সমাধান : আমরা জানি $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{r=1}^{n} f(a+rh), h = \dfrac{b-a}{n}$

(ক) এখানে $f(x)=4,\ a=2, b=3$

$\therefore \int_2^3 4\,dx = \lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{r=1}^{n} 4 = \lim\limits_{h\to 0} h$ (4+4+........n তম পদ পর্যন্ত)

$$= \lim_{h\to 0} h(4n) = \lim_{h\to 0} 4(3-2)\ [\because\ nh = b-a = 3-2]$$

$$= \lim_{h\to 0} 4 = 4$$

(খ) এখানে $f(x)=3x,\ a=2\ b=3$

$\therefore \int_2^3 3x\,dx = \lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{r=1}^{n} 3(2+rh)$

$$= \lim_{h\to 0} h\{(6+3\cdot 1\cdot h)+(6+3\cdot 2\cdot h)+..........+(6+3\cdot n\cdot h)\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\ h\{6n+3h(1+2+.........+n)\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\ h\left\{6n+3h\frac{n(n+1)}{2}\right\} = \lim_{h\to 0}\left\{6nh+\frac{3}{2}nh(nh+h)\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{6\cdot 1+\frac{3}{2}\cdot 1\cdot(1+h)\right\}\ [\because\ nh = 3-2 = 1]$$

$$= 6+\frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

(গ) এখানে $f(x)=3x+4, a=2, b=3$

$$\therefore \int_2^3 (3x+4)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}\{3(2+rh)+4\} = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(10+3rh)$$

$$= \lim_{h\to 0} h\{(10+3h\cdot 1)+(10+3h\cdot 2)+.....+(10+3h\cdot n)\}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\{10\cdot n + 3h(1+2+......+n)\}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left\{10n + 3h\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{10nh + \frac{3}{2}nh(nh+h)\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{10\cdot 1 + \frac{3}{2}\cdot 1\cdot (1+h)\right\}, [\therefore nh = 3-2 = 1]$$

$$= 10 + \frac{3}{2} = \frac{23}{2}$$

দ্রষ্টব্য ঃ উপরের অঙ্ক তিনটি থেকে দেখা গেল

$$\int_2^3 (3x)dx + \int_2^3 4\,dx = \frac{15}{2} + 4 = \frac{23}{2} = \int_2^3 (3x+4)dx$$

উদাহরণ-2. সংজ্ঞা থেকে $\int_a^b e^{kx}dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $f(x) = e^{kx}, nh = b-a$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh) = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} e^{k(a+rh)}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\cdot e^{ka}\sum_{r=1}^{n} e^{krh} = e^{ka}\cdot \lim_{h\to 0} h\left(e^{kh}+e^{2kh}+e^{3kh}+.....+e^{nkh}\right)$$

$$= e^{ka}\lim_{h\to 0} h\left(e^{kh}\frac{e^{nkh}-1}{e^{kh}-1}\right) \quad \left[\therefore a+ar+ar^2+.....+ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, \text{ যখন } r\neq 1\right]$$

$$= e^{ka}\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{kh}{e^{kh}-1}\cdot e^{kh}\left\{e^{k(b-a)}-1\right\}\right][\therefore nh = b-a]$$

$$= e^{ka} \cdot \frac{1}{k} \cdot 1 \cdot e^0 \left\{ e^{k(b-a)} - 1 \right\} \left[\because \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right]$$

$$= \frac{1}{k}\left(e^{kb} - e^{ka}\right)$$

উদাহরণ-3. সংজ্ঞা থেকে $\int_1^3 a^x dx \, (a > 0)$ সমাকলটির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $f(x) = a^x$, $nh = 3 - 1 = 2$

$$\therefore \int_1^3 a^x dx = \lim_{h \to 0} h \sum_{r=1}^{n} a^{1+rh} = \lim_{h \to 0} h \cdot a \cdot \left(a^{1 \cdot h} + a^{2 \cdot h} + \dots\dots\dots + a^{n \cdot h}\right)$$

$$= a \lim_{h \to 0} \left\{ h \cdot a^h \cdot \frac{a^{nh} - 1}{a^h - 1} \right\}$$

$$= a \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{\log a} \cdot \frac{h \log a}{e^{h \log a} - 1} \cdot a^h \left(a^2 - 1\right) \right\} [\because nh = 3 - 1 = 2]$$

$$= \frac{a\left(a^2 - 1\right)}{\log a} \cdot \lim_{h \to 0} a^h \cdot \lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} \quad [\text{ যখন } h \log a = z \,]$$

$$= \frac{a\left(a^2 - 1\right)}{\log a} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{a\left(a^2 - 1\right)}{\log a}$$

উদাহরণ-4. সংজ্ঞা থেকে $\int_a^b x^m \, dx$ সমাকলটির মান নির্ণয় করূন, যখন m একটি মূলদ সংখ্যা এবং $0 < a < b$

সমাধান : এই সমাকলটির মান নির্ণয়ের জন্য $[a,b]$ অন্তরালটিকে সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট উপঅন্তরালে বিভক্ত না করে গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি দ্বারা উহাকে n টি উপঅন্তরালে বিভক্ত করা হল:

$x_0 = a, x_1 = ar, x_2 = ar^2, \dots\dots, x_{r-1} = ax^{r-1}, x_r = ax^r, \dots\dots, x_{n-1} = ar^{n-1}, x_n = b = ar^n$ অতএব

$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ এবং $n \to \infty$ হলে $r \to 1$ হয়। আরও দেখা যাচ্ছে সেক্ষেত্র উপঅন্তরালের দৈর্ঘ্যগুলি

$a(r-1), ar(r-1), ar^2(r-1), \dots\dots, ar^{n-1}(r-1)$ প্রত্যোকেই $\to 0$ হয়। এখন এই অঙ্কটিকে $m \neq -1$ এর জন্য এবং $m = -1$ এর জন্য পৃথক ভাবে উপস্থাপিত করা হবে।

(ক) যখন $m \neq -1$ [যে পদ্ধতিতে এই অংশটি সমাধান করা হবে তাকে Walli's method বলা হয়]

k-তম উপঅন্তরাল δ_k -এর বামপ্রান্তের বিন্দুটিকে ς_k এবং উপঅন্তরাল সমূহের মধ্যে দীর্ঘতমটির দৈর্ঘ্য $\delta \to 0$ ধরে পাওয়া যায়।

$$\int_a^b x^m\,dx=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\varsigma_k)^m\cdot\delta_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(ar^{k-1}\right)^m\cdot ar^{k-1}\cdot(r-1),$$

($\because\ \varsigma_k=ar^{k-1},\delta_k=ar^k-ar^{k-1}=ar^{k-1}(r-1)$ এবং $\delta\to 0$ হলে $n\to\infty$)

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a^{m+1}(r-1)\left(r^{k-1}\right)^{m+1}$$

$$=\lim_{r\to 1}a^{m+1}(r-1)\left\{1+r^{m+1}+r^{2(m+1)}+.......+r^{(n-1)(m+1)}\right\}$$ ($\because n\to\infty$ হলে $r\to 1$)

$$=a^{m+1}\lim_{r\to 1}(r-1)\frac{\left(r^{m+1}\right)^n-1}{r^{m+1}-1}$$ ($m+1\neq 0$ হওয়ায় সীমাটি নির্ণেয়)

$$=a^{m+1}\lim_{r\to 1}\frac{r-1}{r^{m+1}-1}\left\{\left(r^n\right)^{m+1}-1\right\}$$

$$=a^{m+1}\lim_{r\to 1}\frac{r-1}{r^{m+1}-1}\cdot\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1\right\}\qquad\left[\therefore\ r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$=a^{m+1}\cdot\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1\right\}\cdot\lim_{r\to 1}\frac{r-1}{r^{m+1}-1}=\left(b^{m+1}-a^{m+1}\right)\cdot\frac{1}{m+1}$$

$$\left[\because\ \lim_{r\to 1}\frac{r-1}{r^{m+1}-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{r\to 1}\frac{1}{(m+1)r^m}=\frac{1}{m+1}\right]$$

(খ) যখন $m=-1$

এক্ষেত্রে প্রদত্ত সমাফল $=\int_a^b\frac{1}{x}dx=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\varsigma_k}\cdot\delta_k$ [4 (ক) অনুযায়ী]

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ar^{k-1}}\cdot ar^{k-1}(r-1)$$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(r-1)=\lim_{n\to\infty}$ { $(r-1)+(r-1)+..........n$ সংখ্যাক পদ পর্যন্ত।}

$$=\lim_{n\to\infty}\{n(r-1)\}=\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}\right]\left[\therefore\ r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}\log\left(\frac{b}{a}\right)}-1}{\frac{1}{n}\cdot\log\left(\frac{b}{a}\right)}\cdot\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= \log\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}$$ [যখন $z=\frac{1}{n}\log\left(\frac{b}{a}\right)$ এবং তখন $n\to\infty$ হলে $z\to o$]

$$= \log\left(\frac{b}{a}\right)\cdot 1 = \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

উদাহরণ -5. সংজ্ঞা থেকে $\int_2^5\sqrt{x}\,dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $f(x)=\sqrt{x},\, a=2,\, b=5$ অতএব Walli's পদ্ধতি অনুযায়ী $m=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \int_2^5\sqrt{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\varsigma_k)^{\frac{1}{2}}\cdot\delta_k$$

$$= \lim_{r\to 1}\sum_{k=1}^{n}\left(2\cdot r^{k-1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2r^{k-1}(r-1)$$ [যখন $r=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, \delta\to 0$ হলে $n\to\infty$ এবং $r\to 1$]

$$= \lim_{r\to 1} 2^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n} r^{\frac{3}{2}(k-1)}\cdot(r-1)$$

$$= \lim_{r\to 1} 2^{\frac{3}{2}}\frac{r-1}{r^{\frac{3}{2}}}\left\{r^{\frac{3}{2}}+r^{\frac{3}{2}\cdot 2}+r^{\frac{3}{2}\cdot 3}+\ldots\ldots\ldots+r^{\frac{3}{2}\cdot n}\right\}$$

$$= 2^{\frac{3}{2}}\lim_{r\to 1}\left[(r-1)\left\{1+r^{\frac{3}{2}}+r^{2\cdot\frac{3}{2}}+\ldots\ldots\ldots+r^{(n-1)\cdot\frac{3}{2}}\right\}\right]$$

$$= 2^{3/2}\lim_{r\to 1}(r-1)\cdot\frac{\left(r^{3/2}\right)^n-1}{r^{3/2}-1}$$

$$= 2^{3/2} \lim_{r\to 1} \frac{r-1}{r^{3/2}-1} \cdot \left\{ \left(\frac{5}{2}\right)^{3/2} - 1 \right\} \qquad \left[\therefore r^n = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} \left\{ \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} \cdot \frac{2}{3} \qquad \left[\therefore \lim_{r\to 1} \frac{r-1}{r^{\frac{3}{2}}-1} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{r\to 1} \frac{1}{\frac{3}{2}r} = \frac{2}{3} \right]$$

$$= \left(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) \cdot \frac{2}{3}$$

উদাহরণ -6. সংজ্ঞা থেকে $\int_0^1 x^3 dx$ সমাকলটির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান সংজ্ঞা থেকে পাওয়া যায়

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=1}^{n} (rh)^3, \quad \text{যখন } nh = 1 - 0 = 1$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[l^3h^3 + 2^3h^3 + 3^3h^3 + ...+ n^3h^3 \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h^4 \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ n^3 \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} h^4 \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = \lim_{h\to 0} \frac{(nh)^2 (nh+h)^2}{4}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1^2 \cdot (1+h)^2}{4} \qquad [\ \therefore nh = 1\ ]$$

$$= \frac{(1+0)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

প্রশ্নাবলী—1

1. সংজ্ঞা থেকে মান নির্ণয় করুন ও প্রতিক্ষেত্রে জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিন।

(ক) $\int_2^3 e^x dx$ (খ) $\int_a^b x^2 dx$ (গ) $\int_3^5 2^x dx$ (ঘ) $\int_0^1 (x^3+1) dx$ (ঙ) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

প্রশ্নাবলী—1 এর উত্তর

1. (ক) $e^3 - e^2$, ব্যাখ্যা : $y = e^x$ বক্র, $x = 2$ ও $x = 3$ কোটিদ্বয় এবং x-অক্ষ দ্বারা বেষ্ঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= e^3 - e^2$

(খ) $\frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$; ব্যাখ্যা : 1 (ক) -এর অনুরূপ (গ) $\frac{2^3\left(2^2 - 1\right)}{\log 2}$; ব্যাখ্যা : 1 (ক) এর অনুরূপ (ঘ) $\frac{5}{4}$; ব্যাখ্যা : 1 (ক) -এর অনুরূপ [সংকেত : উদাহরণ-6 অনুসরণ করুন] (ঙ) 2 [সংকত : Walli's পদ্ধদি অনুসরণ করুন এবং জ্যামিতিক ব্যাখ্যা পূর্ববৎ]

3.4 সমাকলন বিদ্যার মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Integral Calculus) :

যদি $f(x)$ অপেক্ষক $[a,b]$ অন্তরালে সীমাবদ্ধ (Bounded) ও সমাকলনযোগ্য (Intergrble) হয় এবং অন্য একটি অপেক্ষক $\phi(x)$ এমন ভাবে বিদ্যমান থাকে যেন একই অন্তরাল $[a,b]$-তে $\phi'(x) = f(x)$ হয়, তাহলে $\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$ হবে।

প্রমান : ধরাযাক্ $[a,b]$ অন্তরালটিকে যথেচ্ছভাবে (Arbitrarily) নেওয়া $a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{r-1}, x_r, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n = b$ বিন্দুগুলি দ্বারা সসীম সংখ্যক n-টি উপঅন্তরালে বিভক্ত করা হল যেখানে $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_{r-1} < x_r < \ldots\ldots < x_{n-1} < x_n$ এবং সুবিধার্থে δ_r দ্বারা উপঅন্তরাল $[x_{r-1}, x_r]$ এবং তার দৈর্ঘ্য $x_r - x_{r-1}$ উভয়কেই বোঝানো হলো। প্রদত্ত শর্তানুযায়ী $[a,b]$ অন্তরালে $\phi'(x)$ বিদ্যমান বলে একই অন্তরালে $\phi(x)$ সন্তত, অতএব $[a,b]$ অন্তরালে $\phi(x)$ অপেক্ষকটি অন্তরকলন বিদ্যার লাগরাঞ্জের গড় মান উপপাদ্যের (Lagrange's Mean Value Theorem) শর্তগুলি সিদ্ধ করে। আবার যেহেতু δ_r অন্তরালটি $[a,b]$-এর একটি অংশ অতএব δ_r অন্তরালে $\phi(x)$ এর উপর উক্ত উপপাদ্যটি প্রয়োগ করা যাবে এবং তা প্রয়োগ করে পাওয়া যায়

$$\phi(x_r) - \phi(x_{r-1}) = (x_r - x_{r-1})\phi'(\varsigma_r), \text{ যখন } x_{r-1} < \varsigma_r < x_r \quad (\therefore \delta_r = [x_{r-1}, x_r])$$

$$= \phi'(\varsigma_r)\delta_r$$

এই সম্পর্কটিতে $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ বসিয়ে প্রাপ্ত সম্পর্ক গুলিকে যোগ করে পাওয়া যায়

$$\sum_{r=1}^{n}\{\phi(x_r) - \phi(x_{r-1})\} = \sum_{r=1}^{n}\phi'(\varsigma_r)\delta_r, \text{ যখন } x_{r-1} < \varsigma_r < x_r,\ r = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

এখন $\sum_{r=1}^{n}\{\phi(x_r)-\phi(x_{r-1})\}=\{\phi(x_1)-\phi(x_0)\}+\{\phi(x_2)-\phi(x_1)\}+..........+\{\phi(x_n)-\phi(x_{n-1})\}$

$=\phi(x_n)-\phi(x_0)=\phi(b)-\phi(a)$

অতএব $\sum_{r=1}^{n}\phi'(\varsigma_r)\delta_r=\phi(b)-\phi(a)=>\lim_{\delta\to o}\sum_{r=1}^{n}\phi'(\varsigma_r)\delta_r=\lim_{\delta\to 0}\{\phi(b)-\phi(a)\}$

যখন $\delta_1,\delta_2,.......,\delta_n$ দৈর্ঘ্য গুলির মধ্যে দীর্ঘতমটি δ

বা $\int_a^b\phi'(x)dx=\phi(b)-\phi(a)$ [বামপক্ষের পরিবর্তন নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা থেকে এবং ডান পক্ষধ্রুবক বলে]

বা $\int_a^b f(x)dx=\phi(b)-\phi(a)$ [$\therefore\ \phi'(x)=f(x)$, শর্তানুসারে]

প্রান্তলিপি ঃ এখানে যেহেতু $[a,b]$ আন্তরালে $\phi'(x)=f(x)$ অতএব $\phi(x)$-কে

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad a\le x\le b$$

এই নির্দিষ্ট সমাকলের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

$\phi(x)$-কে $f(x)$ এর প্রিমিটিভ (Primitive) বা অনির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়।

3.5 সমাকলের সাহায্যে শ্রেণীর সমষ্ঠি নির্ণয় :

আমরা নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা থেকে জানি

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{h\to 0}h\sum_{r=1}^{n}f(a+rh)..........................(i)$$

এবং $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}r\right).......(ii)$

উপরোক্ত সংজ্ঞাতে $a=0$ এবং $b=1$ ধরলে পরিবর্তিত রূপ হয়

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{h\to 0}h\sum_{r=1}^{n}f(rh)..........................(iii)$$

এবং $\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}f\left(\frac{r}{n}\right)..........................(iv)$

শেষের সূত্রদুটি কাজে লাগিয়ে আমরা বেশকিছু শ্রেণীর সমষ্টি সমাকলের সাহায্যে নির্ণয় করতে পারি।

প্রান্তলিপি ঃ নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা থেকে আমরা আরও জানি

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(v)$$

এবং $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}r\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(vi)$$

এই দুটি সূত্রে $a=0$, $b=1$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(rh)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(vii)$$

এবং $$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{r}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(vii)$$

শেষের এই দুটি সূত্রও শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়ে কাজে লাগে।

অনুশীলনী—1

উদাহরণ-1 মান নির্ণয় করুন :

(ক) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+2p}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n+np}\right]$, $p\neq 0$

(খ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$

(গ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^{13}+2^{13}+3^{13}+\ldots\ldots\ldots\ldots+n^{13}}{n^{14}}\right]$

(ঘ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2}{n^2}}\cdot\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)^{\frac{4}{n^2}}\cdot\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)^{\frac{6}{n^2}}\ldots\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)^{\frac{2n}{n^2}}\right]$

সমাধান (ক) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+2p}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n+np}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{n}}{1+p\cdot\frac{1}{n}}+\frac{\frac{1}{n}}{1+p\cdot\frac{2}{n}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\frac{1}{n}}{1+p\cdot\frac{n}{n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+p\cdot\frac{r}{n}}$$

$$= \int_0^1\frac{dx}{1+px} = \left[\frac{1}{p}\log(1+px)\right]_0^1 = \left[\frac{1}{p}\log(1+p\cdot 1)-\frac{1}{p}\log(1+p\cdot 0)\right]$$

$$= \frac{1}{p}\log(1+p)$$

(খ) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{r}{n}\right)^2}$$

$$= \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx = \left[\tan^{-1}x\right]_0^1 = \tan^{-1}1-\tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4}$$

(গ) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^{13}+2^{13}+3^{13}+\ldots\ldots\ldots\ldots+n^{13}}{n^{14}}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{13}+\left(\frac{2}{n}\right)^{13}+\left(\frac{3}{n}\right)^{13}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^{13}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)^{13} = \int_0^1 x^{13}dx = \left[\frac{x^{14}}{14}\right]_0^1 = \frac{1}{14}$$

(ঘ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2}{n^2}}\cdot\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)^{\frac{4}{n^2}}\cdot\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)^{\frac{6}{n^2}}\cdots\cdots\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)^{\frac{2n}{n^2}}\right]$

ধরাযাক্ $p=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2}{n^2}}\cdot\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)^{\frac{4}{n^2}}\cdot\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)^{\frac{6}{n^2}}\cdots\cdots\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)^{\frac{2n}{n^2}}$

$$\therefore\ \log p=\frac{2}{n^2}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{4}{n^2}\log\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\frac{6}{n^2}\log\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)+\cdots\cdots+\frac{2n}{n^2}\log\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}2\left(\frac{r}{n}\right)\log\left\{1+\left(\frac{r}{n}\right)^2\right\}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\log p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}2\cdot\left(\frac{r}{n}\right)\log\left\{1+\left(\frac{r}{n}\right)^2\right\}$$

বা, $\log\left(\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}\right)=\int_0^1 2x\log(1+x^2)dx$

$=\int_1^2\log z\,dz$ [$1+x^2 = z$ ধরে]

$=\left[(\log z).z\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{z}.z\,dz$ [আংশিক সমাকলের সাহায্যে]

$=(2\log 2-1.\log 1)-[z]_1^2$

$=2\log 2-1=\log 4-\log e=\log\frac{4}{e}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}=\frac{4}{e}$

অর্থাৎ প্রদত্ত সীমার মান $=\frac{4}{e}$

উদাহরণ 2. মান নির্ণয়ের করুন ঃ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{3n}\right]$

সমাধান ঃ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{3n}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}\right\}+\left\{\frac{1}{n+(n+1)}+\frac{1}{n+(n+2)}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+(n+n)}\right\}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left\{\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right\}+\left\{\frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}+\frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}+\cdots\cdots+\frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{n}{n}}\right\}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{r}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{r}{n}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx+\int_0^1\frac{1}{2+x}dx$$

$$= \left[\log(1+x)\right]_0^1+\left[\log(2+x)\right]_0^1$$

$$= (\log 2-\log 1)+(\log 3-\log 2)=\log 3$$

উদাহরণ 3. দেখান যে $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\theta}{n}+\sin\frac{2\theta}{n}+\cdots\cdots+\sin\frac{(n-1)\theta}{n}\right]=\frac{1-\cos\theta}{\theta}$

সমাধান ঃ $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\theta}{n}+\sin\frac{2\theta}{n}+\cdots\cdots+\sin\frac{(n-1)\theta}{n}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\theta}{n}+\sin\frac{2\theta}{n}+\cdots\cdots+\sin\frac{(n-1)\theta}{n}+\sin\frac{n\theta}{n}\right]$$

$$\left[\because \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\theta}{n}= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{n}=0\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\sin\frac{r}{n}\cdot\theta$$

$$= \int_0^1 \sin\theta x\ dx=\left[\frac{-\cos\theta x}{\theta}\right]_0^1$$

$$= \frac{-\cos\theta}{\theta}+\frac{\cos 0}{\theta}=\frac{-\cos\theta}{\theta}+\frac{1}{\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\theta}$$

প্রশ্নমালা –2

নিম্নের শ্রেণীগুলির মান নির্ণয় করুন ঃ

1. $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

2. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{n+r}{n^2+r^2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{3^2}{n^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

5. দেখান যে $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left[\sin^2\frac{\pi}{2n}+\sin^2\dfrac{2\pi}{2n}+\sin^2\dfrac{3\pi}{2n}+\cdots\cdots+\sin^2\dfrac{n\pi}{2n}\right]=\dfrac{1}{2}$

প্রশ্নমালা 2 এর উত্তর

1\. 2. 2. $\dfrac{\pi}{2}$ 3. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\log 2$ 4. $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$ [সংকেত : ধরাযাক্

প্রদত্ত সীমা = P. $\therefore\ \log P=\log\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\log\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right)=\int_0^1\log(1+x^2)dx$$

$$=[x\log(1+x^2)]_0^1-\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\cdot xdx=\cdots\cdots=\log\left(2e^{\frac{\pi}{2}-2}\right)$$ ইতাদি।]

5\. সংকেত প্রদত্ত সীমা $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{r=1}^{n}\sin^2\left(\dfrac{r}{n}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)=\int_0^1\sin^2\dfrac{\pi x}{2}dx$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}(1-\cos\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

3.6 সারাংশ ঃ

1\. জ্যামিতিক ব্যাখ্যা ঃ $\int_a^b f(x)dx$ সমাকলটি জ্যামিতিকভাবে $y=f(x)$ বক্র; $x=a$ ও $x=b$ কোটিদ্বয় এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবন্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

2. **সংজ্ঞা** : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\,\delta_r$ যখন $f(x)\,[a,b]$-তে সীমাবদ্ধ $\delta_r, r=1,2,\cdots$

উপঅন্তরালগুলির মধ্যে দীর্ঘতমটি δ এবং δ_r উপঅন্তরালের অন্তর্গত যেকোন বিন্দু ξ_r

3. ξ_1 , ξ_2, ... ξ_n, বিন্দুগুলিকে স্বীয় অন্তরালের ডানপ্রান্তের বিন্দু ধরে এবং উপঅন্তরাল গুলি সমান দৈর্ঘ্য h বিশিষ্ট ধরে পরিবর্তিত সংজ্ঞা হয়।

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=n}^{n} f(x_0+rh) \text{ যখন } x_0 = a$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a + r\cdot\frac{b-a}{n}\right), \text{ যেহেতু } b-a = nh.$$

4. সমাকলনবিদ্যার মৌলিক উপপাদ্য : যদি $f(x)$ ফাংশনটি $[a,b]$ অন্তরালে সীমাবদ্ধ ও সমাকলনযোগ্য হয় এবং অন্য একটি অপেক্ষক $\phi(x)$ এমনভাবে বিদ্যমান থাকে যেন এই অন্তরাল $[a,b]$-তে $\phi'(x) = f(x)$ হয়, তাহলে

$$\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a).$$

5. $\phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ যখন $a \le x \le b$ এবং এই অন্তরালে $\phi'(x) = f(x)$.

6. নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞায় $a = 0, b = 1$ ধরে

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{h} f(rh)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)., \text{ যেহেতু } nh = 1-0 = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{n}.$$

3.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. যোগ ফলের পদ্ধতিতে বা সংজ্ঞা থেকে নিম্নলিখিত সমাকলনগুলির মান নির্ণয় করুন।

(ক) $\int_0^1 \left(x^2+3\right)dx$ (খ) $\int_0^1 \left(ax^2+bx+c\right)dx$ (গ) $\int_2^5 a^x\,dx$ (ঘ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ (ঙ) $\int_a^b e^{-x}dx$

(চ) $\int_0^1 x e^x dx$ (ছ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

2. ওয়ালির পদ্ধতিতে নিম্নের সমাকলগুলির মান নির্ণয় করুন।

(ক) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ (খ) $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (গ) $\int_a^b \frac{1}{x^2}dx$ (ঘ) $\int_a^b x^4 dx$

3. মান নির্ণয় করুন :

(ক) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{(n+2)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}+.........+\frac{(n+n)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}$

(খ) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\left(1^k+2^k+3^k+........+n^k\right), k>-1.$

(গ) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2^2}+\frac{n+3}{n^2+3^2}+.........+\frac{n+n}{n^2+n^2}\right\}$

(ঘ) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{4}{n}}+e^{\frac{6}{n}}+.......+e^{2\frac{n}{n}}\right\}$

(ঙ) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+..........+\frac{1}{4n}\right]$

(চ) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{2n}\frac{r}{\sqrt{n^2+r^2}}$

(ছ) (i) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!}{n^n}\right]^{\frac{1}{n}}$ (ii) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n}}$

4. দেখান যে $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\cos\frac{\theta}{n}+\cos\frac{2\theta}{n}+\cos\frac{3\theta}{n}+........+\cos\frac{(n-1)\theta}{n}\right\}$

$$=\frac{\sin\theta}{\theta}.$$

3.7.1 সর্বশেষ প্রশ্নাবলীর উত্তর

1. (ক) $\frac{10}{3}$ (খ) $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c$ (গ) $\frac{a^2\left(a^3-1\right)}{\log a}$ (ঘ) 1 [সংকেত : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}\cos(0+rh)$

$$=\lim_{h\to 0} h\left(\cos h+\cos 2h+\cos 3h+\ldots\ldots\ldots\ldots+\cos nh\right)$$

$$=\lim_{h\to 0} h\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(h+\frac{n-1}{2}h\right),$$ এর পর

$nh=b-a=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$ বসিয়ে অগ্রসর হোন]

(ঙ) $e^{-a}-e^{-b}$ (চ) 1 (ছ) 1 [সংকেত :

$$\sin x+\sin(x+h)+\sin(x+2h)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\sin\{x+(n-1)h\}=\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{n-1}{2}h\right)$$

সূত্রটি ব্যবহার করুন]

2. (ক) $\frac{2}{3}$ (খ) 4 (গ) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ (ঘ) $\frac{1}{5}\left(b^5-a^5\right)$

3. (ক) $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$ [সংকেত : প্রদত্ত লিমিট্ $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\int_0^1(1+x)^{\frac{1}{2}}dx,$ ইত্যাদি]

(খ) $\frac{1}{k+1}$ (গ) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$ [সংকেত : প্রদত্ত সীমা $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1+\frac{r}{n}}{1+\left(\frac{r}{n}\right)^2}$

$$=\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}dx=\ldots\ldots\Bigg]$$

(ঘ) $\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$ $\left[\text{সংকেত : প্রদত্তলিমিট্ } =\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}e^{2\cdot\frac{r}{n}}=\int_0^1 e^{2x}dx=\ldots\ldots\right]$

(ঙ) $2\log 2$ $\Bigg[$ সংকেত : প্রদত্ত লিমিট্

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n+n}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n+n}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{3n+n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)+\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\ldots\ldots+\frac{1}{2+\frac{n}{n}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3+\frac{1}{n}}+\frac{1}{3+\frac{2}{n}}+\ldots\ldots+\frac{1}{3+\frac{n}{n}}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{r}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{r}{n}}+\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{3+\frac{r}{n}}.$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx+\int_0^1\frac{1}{2+x}dx+\int_0^1\frac{1}{3+x}dx=\ldots\ldots\Bigg]$$

(চ) $\sqrt{5}-1$ [সংকেত : প্রদত্ত সীমা $=\lim_{p\to\infty}\dfrac{2}{p}\sum_{r=1}^{p}\dfrac{r}{\left\{\left(\frac{p}{2}\right)^2-r^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$, যখন $2n=p$

$$= 2\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p} \frac{2\cdot\frac{r}{p}}{\left\{1+4\left(\frac{r}{p}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} = 2\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}dx,$$ এর পর

$1+4x^2 = z^2$ ধরে অগ্রসর হোন]

(ছ) (i) $\frac{1}{e}$ [সংকেত : $p = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\cdots\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\therefore \log p = \frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\cdots\frac{n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\log\frac{1}{n} + \log\frac{2}{n} + \log\frac{3}{n} + \cdots\cdots + \log\frac{n}{n}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \log p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\log\left(\frac{r}{n}\right)$$

বা $\log\left(\lim_{n\to\infty} p\right) = \int_0^1 \log x\,dx = \left[x\log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$$= -[x]_0^1 = -1 = -1\cdot\log e = \log e^{-1}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} = e^{-1}$.]

(ii) $\frac{4}{e}$ [সংকেত : উভয় পক্ষে log নিয়ে অনুশীলনীর অঙ্কের মত বা 3 ছ (i)-এর মত অগ্রসর হোন]

4. সংকেত : প্রদত্ত সীমা $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\cos\frac{\theta}{n} + \cos\frac{2\theta}{n} + \cdots\cdots + \cos\frac{(n-1)\theta}{n} + \cos\frac{n\theta}{n}\right\}$

$$\left(\text{যেহেতু } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\theta}{n}=0\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\cos\frac{r}{n}\theta=\int_0^1\cos\theta x\,dx$$

$$=\left[\frac{\sin\theta x}{\theta}\right]_{x=0}^{1}=\frac{1}{\theta}\left(\sin\theta-\sin 0\right)=\frac{1}{\theta}\sin\theta.$$

অতিরিক্ত পাঠ

(Seleeted Readings)

1. Apostol, T.M. : Calculus. Vol. I.

2. Mcshane, E.J. : Integration, OUP.

3. Zannen. A.C : Integration, Nooth Holland.

4. Hardy, G.H. A Course of Pure Mathematics, Cambridge.

5. Shanti Narayan. Mathematical Analysis., S. Chand & Co.

একক 4 ❑ লঘুকরণের সূত্রাবলী (Reduction Formulae)

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা ঃ

গণিত শাস্ত্রে সূত্রের ব্যবহার বহুল প্রচলিত এবং অনেকক্ষেত্রে অপরিহার্য। সূত্রপ্রয়োগকরে অনেক গাণিতিক সমস্যা সরাসরি সমাধান করা যায়। সমাকলনবিদ্যাতেও এরূপ অনেক সূত্র আছে যা আমরা এযাবৎ জেনেছি।

অন্যদিকে, এমন অনেক সমাকলজ (Integrand) আছে যেগুলিকে সরাসরি অর্থাৎ একবার মাত্র সূত্র প্রয়োগকরে সমাকলন করা যায় না। কিন্তু একই পদ্ধতি বারবার প্রয়োগকরে তা সমাকলন করা যায়। যে পদ্ধতিটি বারবার প্রয়োগ করতে হবে সেটি একবার প্রয়োগকরে যদি একটি সূত্রে উপনীত হওয়া যায় তাহলে পরে ঐ পদ্ধতিটির পুনরাবৃত্তি করার সময় সূত্রটি ব্যবহার করা যায় এবং সূত্রটি বারবার প্রয়োগকরে সমাধানে পৌঁছানো সম্ভব হয়। এই জাতীয় সূত্রকে **লঘুকরণ সূত্র** বলা হয়। এই এককে কেবলমাত্র কয়েকটি অপেক্ষকের জন্য লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় করা হবে এবং সংশ্লিষ্ট কিছু অপেক্ষকের ক্ষেত্রে তার প্রয়োগ করে সমাকলন করা হবে। এই লঘুকরণের সূত্র নির্ণয়ের জন্য আংশিক সমাকলনের সূত্র ও চলরাশির পরিবর্তন পদ্ধতি বেশী ক্ষেত্রেই ব্যবহার করা হয়।

4.2 উদ্দেশ্য ঃ

এই একক পাঠ করে আপনি

- কয়েকটি সমাকলের লঘুকরণ সূত্র সম্বন্ধে অবহিত হবেন।
- সংশ্লিষ্ট সমাকল সমূহের লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় করতে পারবেন।
- লঘুকরণ সূত্র প্রয়োগকরে অনেক সমস্যা সহজে সমাধান করতে পারবেন।

4.3 লঘুকরণের কয়েকটি সূত্র নির্ণয় ঃ

যখন m ও n ঋনাত্মক নয় এমন পূর্নসংখ্যা (Intergers) হলে $\int \sin^m x\cos^n x dx, \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx$ এবং $\int \tan^n x dx$ সমাকলগুলির লঘুকরনের সূত্র নির্ণয় করা হবে এবং এগুলি দ্বারা কিছু সমস্যা (Problems) বা অঙ্ক সূত্র প্রয়োগে সমাধান করা হবে।

4.3.1. $\int \mathrm{Sin}^m x\ \mathrm{Cos}^n x\ dx$ (যখন m, n উভয়েই 1 অপেক্ষা বৃহত্তম পূর্নসংখ্যা)-এর লঘুকরণের সূত্র।

ধরাযাক্ $I_{m,n} = \int \mathrm{Sin}^m x\ \mathrm{Cos}^n x\ dx$

$\therefore\ I_{m,n} = \int \mathrm{Cos}^{n-1} x(\mathrm{Sin}^m x\ \mathrm{Cos} x)dx$

$$= \mathrm{Cos}^{n-1} x\int \mathrm{Sin}^m x\ \mathrm{Cos}\ x\ dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{n-1}x\int \mathrm{Sin}^m x\ \mathrm{Cos}\ x\ dx\right\}dx$$

[আংশিক সমাকলের সূত্রানুযায়ী]

$$= \mathrm{Cos}^{n-1}x\frac{\mathrm{Sin}^{m+1}x}{m+1} - (n-1)\int \mathrm{Cos}^{n-2}x\cdot(-\mathrm{Sin}\ x)\cdot\frac{\mathrm{Sin}^{m+1}x}{m+1}\ dx$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(\mathrm{Sin}^{m+1}x\ \mathrm{Cos}^{n-1}x\right) + \frac{n-1}{m+1}\int \mathrm{Cos}^{n-2}x\cdot\mathrm{Sin}^2 x\cdot\mathrm{Sin}^m x\ dx$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x\right) + \frac{n-1}{m+1}\int\cos^{n-2}x\left(1-\cos^2 x\right)\sin^m x\,dx$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(\mathrm{Sin}^{m+1}x\ \mathrm{Cos}^{n-1}x\right) + \frac{n-1}{m+1}\int \mathrm{Sin}^m x\ \mathrm{Cos}^{n-2}x\ dx - \frac{n-1}{m+1}\int \mathrm{Sin}^m x\ \mathrm{Cos}^n x\ dx$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(\mathrm{Sin}^{m+1}x\ \mathrm{Cos}^{n-1}x\right) + \frac{n-1}{m+1}\ I_{m,n-2} - \frac{n-1}{m+1}\ I_{m,n}$$

$$\therefore \left(1+\frac{n-1}{m+1}\right) I_{m.n} = \frac{1}{m+1}\left(\mathrm{Sin}^{m+1}x\ \mathrm{Cos}^{n-1}x\right) + \frac{n-1}{m+1}\ I_{m,n-2}$$

$$\therefore I_{m.n} = \frac{1}{m+n}\left(\text{Sin}^{m+1}x \cdot \text{Cos}^{n-1}x\right) + \frac{n-1}{m+n}\ I_{m,n-2} \cdots\cdots(i)$$

লক্ষ্যনীয় যে $m = 0$ হলেও উপরোক্ত সম্পর্কটি সত্য হয়।

আবার অন্যভাবে,

$$I_{m,n} = \int \text{Sin}^m x\ \text{Cos}^n x\ dx = \int \text{Sin}^{m-1}x\left(\text{Cos}^n x\ \text{Sin}\ x\right)dx$$

এইভাবে লিখে ও আংশিক সমাকলের সাহায্য নিয়ে উপরের অংশের মত অগ্রসর হয়ে দেখানো যায়

$$I_{m,n} = -\frac{\text{Sin}^{m-1}x\ \text{Cos}^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+1}\ I_{m-2,n} \cdots(ii)$$

উপরের (i) এবং (ii) সূত্র দুটি $\int \text{Sin}^m x\ \text{Cos}^n x\ dx$ সমাধানের লঘুকরণ সূত্র।

প্রান্তলিপি: উপরের লঘুকরণ সূত্র ব্যবহার করে

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^m\ x\ \text{Cos}^n x\ dx$$

যখন m,n উভয়ই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর পূর্নসংখ্যা, এই নির্দিষ্ট সমাকলনটির লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় করা যায়।

ধরা যাক $J_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^m x\ \text{Cos}^n x\ dx$

$\therefore$ (i) নং সূত্র ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$J_{m,n} = \left[\frac{\text{Sin}^{m+1}x\ \text{Cos}^{n-1}x}{m+n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{m+n}\ J_{m,n-2}$$

$$= 0 + \frac{n-1}{m+n}\ J_{m,n-2} = \frac{n-1}{m+n}\ J_{m,n-2} \cdots\cdots(iii)$$

আবার (ii) নং সূত্র ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$J_{m,n} = \left[\frac{-\text{Sin}^{m-1}x\ \text{Cos}^{n+1}x}{m+n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{m-1}{m+n}\ J_{m-2,n}$$

$$= \frac{m-1}{m+n}\ J_{m-2,n} \cdots(iv)$$

এই (iii) এবং (iv) নং সূত্র দুটি $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^m x\ \text{Cos}^n x\ dx$ এর লঘুকরণ সূত্র ।

অনুশীলনী—1

উদাহরণ - 1 সমাকল করন: $\int \text{Sin}^2 x\ \text{Cos}^4 x\ dx$

সমাধান : প্রদত্ত সমাকল $I_{2,4} = \int \text{Sin}^2 x\ \text{Cos}^4 x\ dx$

$\therefore\ I_{2,4} = -\frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}^5 x}{6} + \frac{1}{6}\ I_{0,4}$ [(ii) নং সূত্রানুযায়ী]

$= \frac{-\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}^5 x}{6} + \frac{1}{6}\left[\frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}^3 x}{4} + \frac{3}{4}\ I_{0,2}\right]$ [(i) নং সূত্রানুসারে]

$= -\frac{1}{6} \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}^5 x + \frac{1}{24} \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}^3 x + \frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x}{2} + \frac{1}{2} I_{0,0}\right]$ [(i) নং সূত্রানুসারে]

$= -\frac{1}{6} \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}^5 x + \frac{1}{24} \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}^3 x + \frac{1}{16} \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x + \frac{1}{16} x + c,$

[যেহেতু $\frac{1}{16}\ I_{0,0} = \frac{1}{16}\int \operatorname{Sin}^0 x \operatorname{Cos}^0 x\, dx = \frac{1}{16}\int dx = \frac{1}{16} x + c$]

উদাহরণ– 2. মান নির্ণয় করুন: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^4 x \operatorname{Cos}^3 x\, dx$

সমাধান: প্রদত্ত সমাধান $J_{4,3} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^4 x \operatorname{Cos}^3 x\, dx$

$\therefore\ J_{4,3} = \frac{2}{7}\ J_{4,1}$ [(iii) নং সূত্রানুযায়ী]

$= \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ J_{2,1}$ [(iv) নং সূত্রানুযায়ী]

$= \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\ J_{0,1}$

আবার $J_{0,1} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^0 x \operatorname{Cos} dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Cos} x\, dx$

$= [\operatorname{Sin} x]_0^{\pi/2} = \operatorname{Sin} \pi/2 - \operatorname{Sin} 0 = 1$

$\therefore\ J_{4,3} = \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{35}$

উদাহরণ – 3. $\int \operatorname{Sin}^n x\, dx$ এর লঘুকরণের সূত্র নির্ণয় করুন এবং তা ব্যবহার করে $\int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^n x\, dx$ এর মান নির্ণয় করুন, যখন n সংখ্যাটি 1 অপেক্ষা বৃহত্তর পূর্ণ সংখ্যা।

সমাধান : $I_{n,0} = \int \operatorname{Sin}^n x \operatorname{Cos}^0 x\, dx = \int \operatorname{Sin}^n x\, dx =$ প্রদত্ত সমাকল।

$\therefore\ I_{n,0} = \int \operatorname{Sin}^n x\, dx = \frac{-\operatorname{Sin}^{n-1} x \operatorname{Cos} x}{n} + \frac{n-1}{n}\ I_{n-2,0}$ [(ii) নং সূত্রানুসারে]

$I_n = \frac{-\operatorname{Sin}^{n-1} x \operatorname{Cos} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, ইহাই নির্ণেয় সূত্র। [$I_{n,0} = I_n$ লিখে]

$J_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^n x\, dx = \left[\frac{-\operatorname{Sin}^{n-1} x \operatorname{Cos} x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\ J_{n-2}$ [উপরের সূত্র থেকে]

$= 0 + \frac{n-1}{n}\ J_{n-2}$

$\therefore$ লঘুকরনের সূত্র

$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$

লঘুকরণের এই সূত্রটি বারবার প্রয়োগকরে পাওয়া যায় –

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^n x\, dx = J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} J_{n-4}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdot J_{n-6}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{2}{3} I_1 \text{ যখন } n \text{ অযুগ্ম}$$

এবং $J_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{1}{2} I_0$, যখন n যুগ্ম।

আবার $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 1.$

এবং $I_0 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^0 x\, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \left[x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore J_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{2}{3} \cdot 1$ যখন n অযুগ্ম।

$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ যখন n যুগ্ম।

উদাহরন: – 4. যদি $I_n = \int x^n \sqrt{1-x^2}\, dx$ হয় তাহলে

দেখান যে $I_n = \frac{-x^{n-1}\left(1-x^2\right)^{3/2}}{n+2} + \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$

সমাধান: $I_n = \int x^n \sqrt{1-x^2}\, dx$

$$= \int \operatorname{Sin}^n\theta \sqrt{1-\operatorname{Sin}^2\theta} \cdot \operatorname{Cos}\theta\, d\theta \quad [\, x = \operatorname{Sin}\theta \text{ ধরে }]$$

$$= \int \operatorname{Sin}^n\theta \operatorname{Cos}^2\theta\, d\theta = \frac{-\operatorname{Sin}^{n-1}\theta \cdot \operatorname{Cos}^3\theta}{n+2} + \frac{n-1}{n+2} \int \operatorname{Sin}^{n-2}\theta \operatorname{Cos}^2\theta\, d\theta \text{ [সূত্র (ii) নং অনুযায়ী]}$$

$$= \frac{-(\operatorname{Sin}\theta)^{n-1}\left(\operatorname{Cos}^2\theta\right)^{3/2}}{n+2} + \frac{n-1}{n+2} \cdot I_{n-2} \qquad \left[\because I_n = \int \operatorname{Sin}^n\theta \operatorname{Cos}^2\theta\, d\theta\right]$$

$$= \frac{-x^{n-1}\left(1-x^2\right)^{3/2}}{n+2} + \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$$

প্রশ্নাবলী – 1

1. মান নির্ণয় করুন।

(ক) $\int \operatorname{Sin}^4 x \operatorname{Cos}^2 x\, dx$ (খ) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^2 x \operatorname{Cos}^6 x\, dx$ (গ) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^7 x\, dx$

2. দেখান যে $I_n = \int \operatorname{Cos}^n x\, dx = \frac{\operatorname{Cos}^{n-1} \operatorname{Sin} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

এবং $J_n = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Cos}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} J_{n-2}, n > 1$

প্রশ্নাবলী I এর উত্তর

1. (ক) $-\frac{\mathrm{Sin}^3 x\,\mathrm{Cos}^3 x}{6} - \frac{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}^3 x}{8} + \frac{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x}{16} + \frac{x}{16} + C$ (খ) $\frac{5\pi}{256}$ (গ) $\frac{16}{35}$

2. সংকেত 4.3.1 অনুচ্ছেদের (i) নং সূত্রে $m = 0$ বসিয়ে অগ্রসর হোন।

4.3.2. $\int \frac{\mathrm{Sin}^m x}{\mathrm{Cos}^n x} dx$ এর লঘুকরনের সূত্র, যখন m, n, উভয়েই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর পূর্ণসংখ্যা।

ধরাযাক্ $I_{m,n} = \int \frac{\mathrm{Sin}^m x}{\mathrm{Cos}^n x} dx = \int \mathrm{Sin}^m x\,\mathrm{Cos}^{-n} x\, dx \cdots\cdots(i)$

আমরা জানি $I_{p,q} = \int \mathrm{Sin}^p x\,\mathrm{Cos}^q x\, dx$

$$= \frac{\mathrm{Sin}^{p+1} x\,\mathrm{Cos}^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} I_{p,q-2}$$ [4.3.1 অনুচ্ছেদের (i) নং সূত্রানুসারে]

$$\therefore I_{p,q+2} = \frac{\mathrm{Sin}^{p+1} x\,\mathrm{Cos}^{q+1} x}{p+q+2} + \frac{q+1}{p+q+2} I_{p,q}$$ [q কে q+2 দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে]

$$\Rightarrow I_{p,q} = \frac{-\mathrm{Sin}^{p+1} x\,\mathrm{Cos}^{q+1} x}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1} I_{p,q+2}$$ যখন $q + 1 \neq 0$....... (ii)

উপরের সূত্রটিতে $p = m$, $q = -n$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$I_{m,n} = \frac{1}{n-1} \frac{\mathrm{Sin}^{m+1} x}{\mathrm{Cos}^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} I_{m,n-2}, n \neq 1 \cdots\cdots(iii)$$

ইহাই $\int \frac{\mathrm{Sin}^{-m} x}{\mathrm{Cos}^n x} dx = I_{m,n}$ এর লঘুকরনের সূত্র।

প্রান্তলিপি: উপরের (ii) নং সূত্রে p ও q কে যথাক্রমে -m ও -n দ্বারা প্রতিস্থাপিত করলে

$$\int \mathrm{Sin}^{-m} x\,\mathrm{Cos}^{-n} x\, dx = \frac{-\mathrm{Sin}^{-m+1} x\,\mathrm{Cos}^{-n+1} x}{-n+1} + \frac{-m-n-2}{-n+1} I_{-m,-n+2}$$

বা $$I'_{m,n} = \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}^m x\,\mathrm{Cos}^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\mathrm{Sin}^{m-1} x\,\mathrm{Cos}^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1} I'_{m,n-2}, n \neq 1$$

ইহাও একটি বিশেষ সমাকলের লঘুকরণের সূত্র।

প্রান্তলিপি: 2 $\int \frac{\mathrm{Cos}^n x}{\mathrm{Sin}^m x} dx = U_{m,n}$ ধরলে দেখা যায় যে

$$U_{m,n} = -\frac{1}{m-1} \frac{\mathrm{Cos}^{n+1} x}{\mathrm{Sin}^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1} U_{m-2,n}, \quad m \neq 1,$$

প্রমান: 4.3.1 অনুচ্ছেদের (ii) নং সূত্রটি

$$I_{p,q}=-\frac{\text{Sin}^{p-1}x\,\text{Cos}^{q+1}x}{p+q}+\frac{p-1}{p+q}I_{p-2,q}$$

$$\therefore I_{p+2,q}=-\frac{\text{Sin}^{p+1}x\,\text{Cos}^{q+1}x}{p+q+2}+\frac{p+1}{p+q+2}I_{p,q}$$ [p কে p + 2 দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে]

$$\therefore I_{p,q}=\frac{\text{Sin}^{p+1}x\,\text{Cos}^{q+1}x}{p+1}+\frac{p+q+2}{p+1}I_{p+2,q}$$

এখন p ও q কে -m ও n দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে পাওয়া যায়,

$$U_{m,n}=\int\frac{\text{Cos}^n x}{\text{Sin}^m x}dx=-\frac{1}{m-1}\,\frac{\text{Cos}^{n+1}x}{\text{Sin}^{m-1}x}-\frac{n-m+2}{m-1}\,U_{m-2,n},\,m\neq 1$$

অনুশীলনী—2

উদাহরণ 1 : লঘুকরণের সূত্র ব্যবহার করে $\int\frac{\text{Sin}^3 x}{\text{Cos}^6 x}dx$ এর সমাকল করুন।

সমাধান:

এক্ষেত্রে লঘুকরণের সূত্রটি $I_{m,n}=\int\frac{\text{Sin}^m x}{\text{Cos}^n x}\,dx=\frac{1}{n-1}\,\frac{\text{Sin}^{m+1}x}{\text{Cos}^{n-1}x}-\frac{m-n+2}{n-1}I_{m,n-2},\quad n\neq 1$

$\therefore$ এখানে $I_{3,6}=\frac{1}{5}\frac{\text{Sin}^4 x}{\text{Cos}^5 x}+\frac{1}{5}I_{3,4},I_{3,4}=\frac{1}{3}\frac{\text{Sin}^4 x}{\text{cos}^3 x}-\frac{1}{3}\;I_{3,2}$

$I_{3.2}=\frac{\text{Sin}^4 x}{\text{Cos}\,x}-\frac{3}{1}\;I_{3,0}$ এবং $I_{3.0}=\int\text{Sin}^3 x\,dx=-\text{Cos}\,x+\frac{1}{3}\;\text{Cos}^3 x+C$

$$\therefore\int\frac{\text{Sin}^3 x}{\text{Cos}^6 x}\;dx=\frac{1}{5}\frac{\text{Sin}^4 x}{\text{Cos}^5 x}+\frac{1}{15}\frac{\text{Sin}^4 x}{\text{Cos}^3 x}-\frac{1}{15}\frac{\text{Sin}^4 x}{\text{Cos}\,x}+\frac{1}{5}\left(-\text{Cos}\,x+\frac{1}{3}\;\text{Cos}^3 x+C\right)$$

উদাহরণ – 2. লঘুকরণের সূত্র ব্যবহার করে $\int\frac{\text{Cos}^4 x}{\text{Sin}^2 x}dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এক্ষেত্রে লঘুকরনে সূত্র

$$U_{m,n}=\int\frac{\text{Cos}^n x}{\text{Sin}^m x}dx=-\frac{1}{m-1}\frac{\text{Cos}^{n+1}x}{\text{Sin}^{m-1}x}-\frac{n-m+2}{m-1}U_{m-2,n}m\neq 1$$

$$\therefore\;U_{2,4}=-\frac{1}{1}\frac{\text{Cos}^5 x}{\text{Sin}\,x}-\frac{4}{1}U_{0,4},U_{0,4}=\int\text{Cos}^4 x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\text{Cos}^3 x\,\text{Sin}\,x+\frac{3}{8}\text{Cos}\,x\,\text{Sin}\,x+\frac{3}{8}x+C$$

[অনুশীলনী -1এর উদাহরন –3 দেখুন]

$$\therefore\int\frac{\text{Cos}^4 x}{\text{Sin}^2 x}dx=-\frac{\text{Cos}^5 x}{\text{Sin}\,x}-\text{Cos}^3 x\,\text{Sin}\,x-\frac{3}{2}\text{Cos}\,x\,\text{Sin}\,x-\frac{3}{2}x-4C$$

4.3.3. $I_n = \int \tan^n x\, dx$ এর লঘুকরনের সূত্র, যখন n>1 একটি পূর্নসংখ্যা।

$$I_n = \int \tan^n x\, dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\, dx = \int \tan^{n-2} x\left(\mathrm{Sec}^2 x - 1\right) dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x\, \mathrm{Sec}^2 x\, dx - \int \tan^{n-2} x\, dx$$

$= \int Z^{n-2} dz - I_{n-2}$ [প্রথম সমাকলে $\tan x = Z$ ধরে]

$$= \frac{Z^{n-2+1}}{n-2+1} - I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় লঘুকরনের সূত্র $I_n = \dfrac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$

প্রান্তলিপি: $J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$ এর লঘুকরনের সূত্র, যখন n>1একটি পূর্নসংখ্যা।

উপরের ফল ব্যবহার করে পাওয়া যায়।

$$J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx = \left[\frac{\tan^{n-1} x}{n-1}\right]_0^{\pi/4} - J_{n-2} = \frac{1}{n-1} - J_{n-2}$$

$\therefore$ লঘুকরণের সূত্রটি হল $J_n = \dfrac{1}{n-1} - J_{n-2}$

অনুশীলনী—3

উদাহরন: 1. মান নির্ণয় করুন:

(ক) $\int \tan^6 x\, dx$ (খ) $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x\, dx$

সমাধান: (ক) $I_6 = \int \tan^6 x\, dx = \dfrac{\tan^5 x}{5} - I_4$ [লঘুকরনের সূত্রানুসারে]

$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \left(\frac{\tan^3 x}{3} - I_2\right)$$

$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan x}{1} - I_0$$

$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + C \qquad \left[\because I_0 = \int \tan^0 x\, dx = \int dx = x + C\right]$$

(খ) লঘুকরনের সূত্র: $J_n = \dfrac{1}{n-1} - J_{n-2}$ বারবার ব্যবহার করে পাওয়া যায়।

$$J_6 = \frac{1}{5} - J_4 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} - J_2\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{1} - J_0$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4} \qquad \left[\because J_0 = \int_0^{\pi/4} \tan^0 x\, dx = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}\right]$$

উদাহরণ –2. প্রথমে দেখান যে $I_n = \int \mathrm{Cot}^n x\, dx = -\dfrac{\mathrm{Cot}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$

এবং সেখান থেকে দেখান যে $J_n = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \mathrm{Cot}^n x\, dx = -\dfrac{1}{n-1} - J_{n-2}$

সমাধান: $I_n = \int \text{Cot}^n x\, dx = \int \text{Cot}^{n-2} x \cdot \text{Cot}^2 x\, dx$

$$= \int \text{Cot}^{n-2} x\left(\text{Cosec}^2 x - 1\right)dx = \int \text{Cot}^{n-2} x \cdot \text{Cosec}^2 x\, dx - \int \text{Cot}^{n-2} x\, dx$$

$$= -\int Z^{n-2} \cdot\ dz\ - I_{n-2} \quad [\text{ প্রথম সমাকলে } \cot x = Z \text{ ধরে }]$$

$$= -\frac{Z^{n-2+1}}{n-2+1} - I_{n-2} = -\frac{\text{Cot}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$

দ্বিতীয় অংশ: $J_n = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \text{Cot}^n x\, dx = \left[-\frac{\text{Cot}^{n-1} x}{n-1}\right]_{\pi/2}^{\pi/4} - \int_{\pi/2}^{\pi/4} \text{Cot}^{n-2} x\, dx$

[উপরের সূত্র ব্যবহার করে]

$$= -\frac{\text{Cot}^{n-1}\frac{\pi}{4}}{n-1} + \frac{\text{Cot}^{n-1}\frac{\pi}{2}}{n-1} - J_{n-2} = -\frac{1}{n-1} - J_{n-2}$$

উদাহরন: 3. মান নির্ণয় করুন: $\int \cot^5 x\, dx$ এবং $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \cot^5 x\, dx$

সমাধান: লঘুকরনের সূত্র $I_n = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$ বারবার ব্যবহার করে পাওয়া যায়।

$$I_5 = \int \cot^5 x\, dx = -\frac{\cot^4 x}{4} - I_3 = -\frac{\cot^4 x}{4} - \left(-\frac{\cot^2 x}{2} - I_1\right)$$

$$= -\frac{\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} + \log|\sin x| + c \qquad \left[\because I_1 = \int \cot x\, dx = \log|\sin x| + c\right]$$

দ্বিতীয় অংশ : $J_n = -\frac{1}{n-1} - J_{n-2}$ এই লঘুকরণের সূত্রটি বারবার ব্যবহা করে পাওয়া যায়।

$$J_5 = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \cot^5 x\, dx = -\frac{1}{4} - J_3 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2} - J_1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi/4} \cot x\, dx$$

$$= \frac{1}{4} + \left[\log|\sin x|\right]_{\pi/2}^{\pi/4} = \frac{1}{4} + \log\sin\frac{\pi}{4} - \log\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \log\frac{1}{\sqrt{2}} - \log 1 = \frac{1}{4} + \log 2^{-1/2} - 0$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log 2.$$

প্রশ্নাবলী – 2

1. মান নির্ণয় করুন: (ক) $\int \tan^5 x\, dx$ এবং (খ) $\int_0^{\pi/4} \tan^5 x\, dx$

2. দেখান যে $I_n = \int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}$ এবং এই লঘুকরণের সূত্র ব্যবহার করে $\int x^3 e^{2x} dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

3. দেখান যে $I_n = \int \sec^n x\, dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$ যখন $n > 1$ একটি পূর্ণসংখ্যা এবং এই সূত্র কাজে লাগিয়ে $\int \sec^7 x\, dx$ এর সমাকল করুন।

4. দেখান যে $I_n = \int \cos ec^n x\, dx = -\frac{\cos ec^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$ যখন $n > 1$ একটি পূর্ণসংখ্যা এবং সেখান থেকে দেখান যে $\int \cos ec^6 x\, dx = -\frac{1}{5}\operatorname{cosec}^4 x \cot x - \frac{4}{15}\operatorname{cosec}^2 x \cot x - \frac{8}{15}\cot x + c$

5. দেখান যে $I_n = \int \left(x^2 + a^2\right)^n dx = \frac{x\left(x^2 + a^2\right)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$

প্রশ্নাবলী –2 এর উত্তর

1. (ক) $\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \log|\sec x| + c$ (খ) $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2$

2. **সংকেত:** $I_n = x^n \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int n\, x^{n-1} \cdot \frac{e^{ax}}{a} dx$ (আংশিক সমাকলের সাহায্যে)

$= \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}$ এবং উপরের সূত্রটি বারবার ব্যবহার করে পাওয়া যায়।

$I_3 = \int x^3 e^{2x} dx = x^3 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} I_2 = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\left(x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{2}{2} I_1\right)$

$= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}\left(x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} I_0\right)$

$= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x} + c \qquad \left[\because I_0 = \int e^{2x} dx\right]$

3. **সংকেত:** $I_n = \int \sec^n x\, dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\, dx$

$= \sec^{n-2} x \tan x - \int (n-2)\sec^{n-3} x \cdot \sec x \tan x \cdot \tan x\, dx$

[আংশিক সমাকলের সাহায্যে]

$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x\left(\sec^2 x - 1\right) dx$

$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\left(I_n - I_{n-2}\right)$

$\therefore \{1 + (n-2)\} I_n = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2} \Rightarrow I_n = \cdots\cdots$

এবং $I_7 = \int \sec^7 x\, dx = \frac{\sec^5 x \tan x}{6} + \frac{5}{6} I_5$

$I_5 = \frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3}{4} I_3,\ I_3 = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} I_1$

$I_1 = \int \sec x\, dx = \log|\sec x + \tan x| + c_1$

$\therefore I_7 = \frac{\sec^5 x \tan x}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\log|\sec x + \tan x| + c$

4. **সংকেত:** $I_n = \int \cos ec^n x\, dx = \int \cos ec^{n-2} x \cos ec^2 x\, dx$ এরপর 3 এর সংকেত অনুযায়ী অগ্রসর হোন।

5. **সংকেত:** $I_n = \int (x^2+a^2)^n dx = \int (a^2 \tan^2\theta + a^2)\cdot a\sec^2\theta\, d\theta$, যখন $x = a\tan\theta$

$= \int a^{2n}\cdot \sec^{2n}\theta \cdot a\sec^2\theta\, d\theta = a^{2n+1}\int \sec^{2n}\theta\cdot\sec^2\theta\, d\theta$

$= a^{2n+1}\left[\sec^{2n}\theta\cdot\tan\theta - \int 2n\cdot\sec^{2n-1}\theta\cdot\sec\theta\tan\theta\cdot\tan\theta\, d\theta\right]$ (আংশিক সমাকলের সাহায্যে)

$= a^{2n+1}\sec^{2n}\theta\cdot\tan\theta - 2n\cdot a^{2n+1}\int \sec^{2n}\theta(\sec^2\theta - 1)\, d\theta$

$= (a^{2n}\sec^{2n}\theta)\cdot(a\tan\theta) - 2na^{2n+1}\left[\int \sec^{2n}\theta\sec^2\theta\, d\theta - \int \sec^{2n}\theta\, d\theta\right]$

$= (a^{2n}\sec^{2n}\theta)\cdot(a\tan\theta) - 2n\left(a^{2n+1}\int\sec^{2n}\theta\sec^2\theta\, d\theta\right) + 2na^2\left(a^{2(n-1)} + 2na^2\left(a^{2n-1}\int\sec^{2n}\theta\, d\theta\right)\right)$

$= (a^2 + a^2\tan^2\theta)^n(a\tan\theta) - 2n\, I_n + 2na^2 I_{n-1}$

$\left[\because I_n = a^{2n+1}\int\sec^{2n}\theta\cdot\sec^2 \Rightarrow I_{n-1} = a^{2(n-1)+1}\int\sec^{2(n-1)}\theta\sec^2\theta\, d\theta = a^{2n-1}\int\sec^{2n}\theta\, d\theta\right]$

$\therefore (2n+1)I_n = (a^2+x^2)^n\cdot x + 2n\, a^2\, I_{n-1}$

$$\therefore I_n = \frac{x(a^2+x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$$

4.4 সারাংশ :

1. $I_{m,n} = \int \sin^m x\cos^3 x\, dx, J_{m,n} = \int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\, dx$, যখন m, n উভয়েই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর পূর্ণসংখ্যা।

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

$$= \frac{-\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$$

$J_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} J_{m-2,n}$ $J_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} J_{m,n-2}$

$$I_{n,0} = \frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \int\sin^n x\, dx = I_n$$

$$J_{n,0} = J_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

$J_{n,0} = J_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$, যখন n অযুগ্ম।

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$, যখন n যুগ্ম।

$$I_{0,n} = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \int \cos^n x\, dx = I_n$$

$$J_{0,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n} J_{n-2} = J_{n,0} = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$$

2. $I_{m,n} = \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx$ m, n উভয়েই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর পূর্নসংখ্যা;

$I_{-m+n} = I'_{m,n}, I'_{-m,-n} = U_{m,n}$ হলে

$$I_{m,n} = \frac{1}{n-1} \frac{\sin^{m+1} x}{\cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} I_{m,n-2}, n \neq 1$$

$$I'_{m,n} = \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{n-1} \frac{1}{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m-n+2}{n-1} I'_{m,n-2}, n \neq 1$$

$$U_{m,n} = \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} dx = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos^{n+1} x}{\sin^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1} U_{m-2}, n.\ m \neq 1$$

3. $I_n = \int \tan^n x\, dx, J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx,$ যখন $n > 1$ পূর্ণসংখ্যা হলে

$$I_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}, J_n = \frac{1}{n-1} - J_{n-2}$$

$U_n = \int \cot^n x\, dx, V_n = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \cot^n x\, dx$, $n > 1$ পূর্ণসংখ্যা হলে

$$U_n = -\frac{\cot^{n-1}}{n-1} - U_{n-2}, V_n = -\frac{1}{n-1} - J_{n-2}$$

4.5 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী ঃ

1. $J_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx$ হলে দেখান যে $J_{m,n} = J_{n,m}$ যখন m ,n ঋনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

2. লঘুকরনের সূত্র ব্যবহার করে মান নির্ণয় করুন:

(ক) $\int \sin^5 x \cos^3 x\, dx$ (খ) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^3 x\, dx$

3. দেখান যে $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ যখন n যুগ্ম

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$ যখন n অযুগ্ম।

4. লঘুকরনের সূত্র প্রয়োগকরে প্রমান করুন যে

$$J_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx$$

$$= \frac{1.\,3.\,5\ldots\ldots(m-1)1.\,3.\,5\ldots\ldots(n-1)}{2.\,4.\,6\ldots\ldots(m+n)} \cdot \frac{\pi}{2}$$, যখন m, n উভয়েই যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা

$$= \frac{2.\,6.\,4\ldots\ldots(m-1)}{(n+1)(n+3)\ldots\ldots(m+n)}$$ যখন m অযুগ্ম এবং n যুগ্ম বা অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা।

5. দেখান যে $\int \sin^8 x \cos^2 x \, dx$

$$= \frac{1}{512}\left(\frac{1}{10}\sin 10x - \frac{3}{4}\sin 8x + \frac{13}{6}\sin 6x - 2\sin 4x - 7\sin 2x + 14x\right) + c$$

6. মান নির্ণয় করুন:

(ক) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^6 x \, dx$ (খ) $\int_0^1 x^4\left(1-x^2\right)^{7/2} dx$ ($x = sin\,\theta$ ধরুন)

7. দেখান যে $\int \sin^5 x \, dx = -\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x - \frac{4}{15}\sin^2 x \cos x - \frac{8}{15}\cos x + c$

8. দেখান যে (ক) $\int_0^{\pi/2} \sin^9 x \, dx = \frac{384}{945} = \int_0^{\pi/2} \cos^9 x \, dx$ (খ) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx = \frac{105}{384} \cdot \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \cos^8 x \, dx$

9. মান নির্ণয় করুন: $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$

10. $\int_0^{\pi} \cos^n x \, dx$ সমাকলটির মান n এর বিভিন্নমানের জন্য নির্ণয় করুন।

11. লঘুকরনের সূত্র ব্যবহার করে দেখান যে

(ক) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3}\frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} - \frac{1}{3}\frac{\sin^4 x}{\cos x} - \frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + c$

(খ) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos^6 x}{\sin x} - \cos^4 x \sin x - \frac{4}{3}\cos^2 x \sin x - \frac{8}{3}\sin x + c$

12. লঘুকরনের সূত্র ব্যবহার করে মান নির্ণয় করুন:

(ক) $\int \tan^7 x \, dx$ (খ) $\int_0^{\pi/4} \tan^7 x \, dx$

13. যদি $J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$ হয় তবে লঘুকরনের সূত্র

অনুসরন করে প্রমাণ করুন যে $n\left(J_{n+1} + J_{n-1}\right) = 1$.

14. লঘুকরণের সূত্র অনুসরণ করে দেখান যে $\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x \cot x + \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

15. $I_n = \int (1+x^2)^n dx$ হলে দেখান যে

$$I_n = \frac{x(1+x^2)^n}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

16. $U_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx, V_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx$, যখন n পূর্ণসংখ্যা, হলে দেখান যে $U_{n+1} = U_n = \frac{\pi}{2}, V_{n+1} - V_n = U_{n+1}$ এবং V_n এর মান নির্ণয় করুন।

17. $I_n = \int_0^1 x^n \tan^{-1} x\, dx$, $n > 2$ পূর্ণসংখ্যা, হলে প্রমান করুন যে

$$(n+1)I_n + (n-1)I_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$$

18. $U_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x\, dx$,যখন $n > 1$পূর্নসংখ্যা, হলে দেখান যে

$$U_n + n(n-1)U_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$

19. যদি $U_n = \int x^n \cosh x\, dx$ এবং $V_n = \int x^n \sinh x\, dx$ হয়
তবে প্রমান করুন যে $U_n = x^n \sinh x - n V_{n-1}$
এবং $V_n = x^n \cosh x - n U_{n-1}$

4.5.1 সর্বশেষ প্রশ্নাবলীর উত্তর ঃ

1. **সংকেত:** $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x) dx$ এই ধর্ম কাজে লাগান।

2. (ক) **সংকেত:** $I_{5,3} = \frac{-\sin^4 x \cos^4 x}{8} + \frac{4}{8} I_{3,3}$ (4.3.1এর (ii) নং সূত্র অনুযায়ী)

$$= \frac{-\sin^4 x \cos^4 x}{8} + \frac{1}{2}\left\{\frac{-\sin^2 x \cos^4 x}{6} + \frac{2}{6} I_{1,3}\right\} \quad (\text{,,})$$

$$= \frac{-\sin^4 x \cos^4 x}{8} - \frac{\sin^2 x \cos^4 x}{12} + \frac{1}{6}\left\{\frac{\sin^2 x \cos^2 x}{4} + \frac{2}{4} I_{1,1}\right\}$$

(4.3.1এর (ii) নং সূত্র অনুযায়ী)

$$= \frac{-\sin^4 x \cos^4 x}{8} - \frac{\sin^2 x \cos^4 x}{12} + \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{24} - \frac{1}{48} \cos 2x + c$$

$$\left[\because I_{1,1} = \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + c_1\right]$$

2. (খ) **সংকেত:** $J_{5,3} = \frac{4}{8} J_{3,3}$ (4.3.1এর (iv) নং সূত্র অনুযায়ী)

$= \frac{4}{8}\cdot\frac{2}{6} J_{1,3}$ („)

$= \frac{4}{8}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{4}\cdot J_{1.1}$ (4.3.1এর (iii) নং সূত্র অনুযায়ী)

$$= \frac{4}{8}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{8} \left(\because J_{1,1} = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \left[-\frac{1}{4}\cot 2x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\right)$$

$= \frac{1}{96}.$

3. **সংকেত:** $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx \quad \left(\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right)$

$= \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$,ইহা অনুশীলনী এর উদাহরণ 3

4. **সংকেত:** যখন m,n যুগ্ম : $J_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} J_{m-2,n} = \frac{m-1}{m+n}\cdot\frac{(m-2)-1}{(m-2)+n} J_{m-4,n}$

$$= \frac{m-1}{m+n}\cdot\frac{m-3}{m+n-2}\cdot\frac{m-5}{m+n-4}\cdot J_{m-6,n} = \cdots\cdots = \frac{m-1}{m+n}\cdot\frac{m-3}{m+n-2}\cdot\frac{m-5}{m+n-4}\cdots\cdots\frac{1}{n+2} J_{0,n}$$

$$= \frac{m-1}{m+n}\cdot\frac{m-3}{m+n-2}\cdot\frac{m-5}{m+n-4}\cdots\cdots\frac{1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{m-4}\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

($\because J_{0,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$, ইহা এই প্রশ্নাবলীর 3নং অঙ্ক।)

এই অঙ্কের দ্বিতীয় ফল পেতে হলে m কে অযুগ্ম ধরে ঠিক উপরের অংশের মত অগ্রসর হোন।

6. (ক) $\frac{2}{63}$ (খ) $\frac{7\pi}{2048}$ 7. এবং 8. এর সংকেত : লঘুকরণের সূত্র প্রয়োগকরুন।

9. $\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$, যখন n অযুগ্ম।

এবং $\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, যখন n যুগ্ম।

[সংকেত: $x = sin\,\theta$ বসান এবং অনুশীলনী 1-এর উদাহরণ 3 কে অনুসরণ করুন।

10. $\begin{cases} 0 \text{ , যখন n অযুগ্ম} \\ 2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ , যখন n যুগ্ম} \end{cases}$

এবং

[সংকেত $\therefore cos^n x = \begin{cases} -\cos^n(\pi - x) \text{ , যখন n অযুগ্ম।} \\ \cos^n(\pi - x) \text{ , যখন n যুগ্ম।} \end{cases}$

$\therefore$ n অযুগ্ম হলে, $J_n = \int_0^{\pi} \cos^n x dx = \int_0^{\pi} \cos(\pi - x) dx = -\int_0^{\pi} \cos^n x dx = -J_n.$

$\Rightarrow 2 J_n = 0, J_n = 0$

এবং n যুগ্ম হলে: $J_n = \int_0^{\pi} \cos^n x\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ ইত্যাদি]

12. (ক) $\frac{1}{6}\tan^6 x - \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x - \log\sec x + c$

(খ) $\frac{5}{12} - \frac{1}{2}\log 2$

13. **সংকেত :** $J_n = \frac{1}{n-1} - J_{n-2}$ সূত্রে n এর স্থানে n + 1 বসিয়ে পাওয়া যায়

$J_{n+1} = \frac{1}{n} - J_{n-1} \Rightarrow J_{n+1} + J_{n-1} = \frac{1}{n}$ বা $n\,(J_{n+1} + J_{n-1}) = 1$

15. **সংকেত:** প্রশ্নাবলী 2 এর 5 নং অঙ্কে a=1 বসান এবং সংকেত দেখুন।

16. **সংকেত:** $U_{n+1} - U_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x} dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos nx \sin x}{\sin x} dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos 2n\, x\, dx$$

$$= 2\left(\frac{\sin 2nx}{2}\right)_0^{\pi/2} = (\sin\pi - \sin 0) = 0$$

$\therefore U_{n+1} = U_n \Rightarrow U_n = U_{n-1} \Rightarrow U_{n-1} = U_{n-2}$

$\therefore U_{n+1} = U_n = U_{n-1} \cdots = U_1 = \frac{\pi}{2} \quad \left(\because U_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x} dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}\right)$

$$V_{n+1} - V_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x \cdot \sin x}{\sin^2 x} dx \qquad [\because \sin(A+B)\cdot\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B]$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = U_{n+1}$$ **প্রমানিত**

আবার উপরের সূত্র থেকে $V_n - V_{n-1} = U_n = \frac{\pi}{2}$ অনুরুপে $V_{n-1} - V_{n-2} = \frac{\pi}{2}, \cdots, V_2 - V_1 = \frac{\pi}{2}$

যোগ করে পাওয়া যায় $V_n - V_1 = (n-1)\cdot\frac{\pi}{2}$

কিন্তু $V_1 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ $\therefore V_n = (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{n\pi}{2}$

17. **সংকেত:** অংশিক সমাকলকরে পাওয়া যায়

$$I_n = \left[\tan^{-1} x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^2} dx \cdots\cdots (i)$$

$$\therefore I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n-1} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^2} dx \cdots\cdots (ii)$$ [n এর স্থানে n - 2 বসিয়া]

$$\therefore (n+1)I_n + (n-1)I_{n-2} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx + \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^2} dx$$ [(i) ও (ii) থেকে]

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^{n-1}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x^{n-1}\left(x^2+1\right)}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 x^{n-1}\, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$$

18. **সংকেত:** $\mathrm{U}_n = \left[x^n(-\cos x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x^{n-1}(-\cos x)dx$ [আংশিক সমাকলের সাহায্যে]

$$= 0 + n\int_0^{\pi/2} x^{n-1} \cos x \, dx$$

$$= n\left[\left\{x^{n-1} \cdot \sin x\right\}_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1)x^{n-2} \sin x \, dx\right]$$

$$= n\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - (n-1)\, \mathrm{U}_{n-2}\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{U}_n + n(n-1)\mathrm{U}_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$

19. **সংকেত:** আংশিক সমাকল করুন।

অতিরিক্ত পাঠ
(Selected Readings)

1. Edwards - Integral Calculus.
2. Das & Mukherjee- Integral Calculus
3. Maity & Ghosh- Integral Calculus, Central
4. Shanti Narayan - Integral Calculus, S. Chand
5. Mc. Shane, E.J. Integration, OUP., 1961

একক 5 ❑ অযথার্থ সমাকল (Improper Integrals)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

নির্দিষ্ট সমাকল $\int_a^b f(x)dx$ সংজ্ঞায়িত করার সময়

(i) $[a,b]$ অন্তরালটি সসীম,

এবং (ii) $f(x)$ সীমাবদ্ধ;

এই শর্তগুলি আরোপিত হয়েছে। কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে এমন অনেক নির্দিষ্ট সমাকলের নিরূপণ প্রয়োজন হয় যেখানে সমাকলের অন্তরালটি অসীম অথবা সমাকলজটির উক্ত অন্তরালের এক বা একাধিক বিন্দুতে অসীম অসন্ততি (Infinite Discontinuity) আছে (অর্থাৎ ঐ বিন্দুগুলিতে সমাকলজটির সীমামান অসীম) অথবা এই দুই ব্যতিক্রমই বিদ্যমান। শেষের এই সমস্ত সমাকলগুলিকে **অযথার্থ সমাকল** (Improper Integral) বলা হয়।

5.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করে আপনি

- অযথার্থ সমাকল, তার অভিসারিত্ব, সমাকলন পদ্ধতি ইত্যাদি সম্পর্কে অবহিত হবেন।
- গণিত শাস্ত্রে বিশেষ প্রয়োজনীয় বিটা ফাংশন ও গামা ফাংশন সম্বন্ধে কিছু ধারণা করতে পারবেন।
- অযথার্থ সমাকলের বাস্তব উপযোগীতার কিছুটা উপলব্ধি করতে পারবেন।

5.3 অযথার্থ সমাকলের শ্রেণী বিভাগ

অযথার্থ সমাকলগুলিকে মোটামুটি যে তিনভাগে বিভক্ত করে তাদের সম্পর্কে আলোচনা করা হবে সেগুলি হল

(ক) সমাকলের অন্তরালটি অসীম,

(খ) ফাংশনটির অসীম অসন্ততি আছে,

এবং (গ) উপরোক্ত দুই ধর্মই [(ক) ও (খ)] বিদ্যমান।

আলোচনার সময় উপরোক্ত বিভাগগুলিকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় শ্রেণীর সমাকল হিসাবে চিহ্নিত করা হবে।

5.3.1 প্রথম শ্রেণীর অযথার্থ সমাকল

(ক) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ এই প্রকার অযথার্থ সমাকলকে $\lim_{A\to\infty}\int_a^{A} f(x)\,dx$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়, যখন A একটি বাস্তব সংখ্যা এবং $[a,A]$ অন্তরালে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য।

(খ) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ এই প্রকার অযথার্থ সমাকলকে $\lim_{B\to-\infty}\int_B^{b} f(x)\,dx$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়, যখন B একটি বাস্তব সংখ্যা এবং $[B,b]$ অন্তরালে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য।

(গ) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ এই প্রকার অযথার্থ সমাকলনকে

$$\lim_{A\to-\infty}\int_A^{C} f(x)\,dx+\lim_{B\to\infty}\int_C^{B} f(x)\,dx$$

দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয় A, B, C বাস্তব সংখ্যা, A < C < B এবং [A, C] ও [C, B] অন্তরালদ্বয়ে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য।

উপরোক্ত ক্ষেত্রগুলিতে যদি সীমাগুলির সসীম মান থাকে তবে সমাকলগুলিকে **অভিসারী (Convergent)** বলা হয়; যদি অসীম মান থাকে তবে উহাদিগকে **অপসারী (Divergent)** বলা হয় এবং যদি কোন নির্দিষ্ট সীমামান না থাকে তবে উহাদিগকে **দোলনশীল (Oscillatory)** বলা হয়।

অনুশীলনী—1

অভিসারিত্বের বিচার করুন।

1. (ক) $\int_0^{\infty}\cos x\,dx$ (খ) $\int_2^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (গ) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x-2)(x-3)}$

2. (ক) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}$ (খ) $\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2}dx$ (গ) $\int_{-\infty}^{2}\frac{x}{x^4+1}dx$

3. (ক) $\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\,dx$ (খ) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$

সমাধান : 1. (ক) $\int_0^{\infty}\cos x\,dx=\lim_{A\to\infty}\int_0^{A}\cos x dx=\lim_{A\to\infty}(\text{Sin}\,A)$

সীমাটির কোনো অস্তিত্ব নাই; কারণ মানটি –1 ও +1 এর মধ্যে দোলনশীল।

$\therefore \int_0^{\infty} \cos x\, dx$ দোলনশীল।

(খ) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A\to\infty} \int_2^{A} x^{\frac{-1}{2}} dx = \lim_{A\to\infty} \left(2\sqrt{A} - 2\sqrt{2}\right) = \infty$

$\therefore \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ সমাকলনটি অপসারী।

(গ) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx = \lim_{A\to\infty} \left[\log\frac{A-3}{A-2} - \log\frac{3}{2}\right]$

$= \log\left(\lim_{A\to\infty} \frac{1-\frac{3}{A}}{1-\frac{2}{A}}\right) - \lim_{A\to\infty} \log\frac{3}{2}$ [$\therefore$ $\log x$ সন্তত অপেক্ষক]

$= \log 1 - \log\frac{3}{2} = \log\frac{2}{3}$, সসীম মান।

$\therefore$ সমাকলটি অভিসারী।

সমাধান : 2. (ক) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{B\to-\infty} \int_B^{0} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{B\to-\infty} \left[\tan^{-1} x\right]_B^0$

$= \lim_{B\to-\infty} \left(-\tan^{-1} B\right) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, সসীম মান।

$\therefore$ সমাকলটি অভিসারী।

(খ) $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx = \lim_{B\to-\infty} \int_B^{0} xe^{-x^2} dx = \lim_{B\to-\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_B^0$

$= \lim_{B\to-\infty} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-B^2}\right] = -\frac{1}{2}$, সসীম মান।

$\therefore$ সমাকলটি অভিসারী।

(গ) $\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^4+1} dx = \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{2}\int_B^{1} \frac{2xdx}{x^4+1} = \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{2}\int_{B^2}^{1} \frac{dz}{z^2+1}$ ($x^2 = z$ ধরে)

$$=\frac{1}{2}\lim_{B\to-\infty}\left[\tan^{-1}1-\tan^{-1}B^2\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$=-\frac{\pi}{8}$, সসীম মান।

$\therefore$ সমাকলটি অভিসারী।

সমাধান ঃ 3. (ক) $\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\,dx=\int_{-\infty}^{0}\sin x\,dx+\int_{0}^{\infty}\sin x\,dx$

$$=\lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{0}\sin x\,dx+\lim_{A\to\infty}\int_{0}^{A}\sin x\,dx$$

$=\lim_{B\to-\infty}(\cos B-1)+\lim_{A\to\infty}(1-\cos A)$, উভয় সীমাই সসীমভাবে দোলনশীল। সুতরাং প্রদত্ত সমাকলটি দোলনশীল।

(খ) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+2^2}+\lim_{A\to\infty}\int_{0}^{A}\frac{dx}{(x+1)^2+2^2}$

$$=\lim_{B\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{2}\right]_{B}^{0}+\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{2}\right]_{0}^{A}$$

$$=\lim_{B\to-\infty}\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}-\tan^{-1}\frac{B+1}{2}\right)+\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{A+1}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$, সসীম মান।

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী।

5.3.2 দ্বিতীয় শ্রেণীর অযথার্থ সমাকল

(ক) যদি $f(x)\to\infty$ যখন $x\to a$ অর্থাৎ যদি কেবল a বিন্দুতে $f(x)$ অসীমভাবে অসন্তত (Infinitely discontinuous) হয়, তখন $\int_a^b f(x)\,dx$ কে $\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx$, $(0<\varepsilon<b-a)$,

দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়, যখন $[a+\varepsilon,b]$ অন্তরালে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য।

(খ) যদি কেবল b বিন্দুতে $f(x)$ অসীমভাবে অসন্তত হয় তখন $\int_a^b f(x)$ -কে

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \left(0<\varepsilon<b-a\right),$$

দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়, যখন $[a,b-\varepsilon]$ অন্তরালে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য।

(গ) যদি a ও b উভয় বিন্দুতেই $f(x)$ অসীমভাবে অসন্তত হয় তখন প্রথমে

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ a<c<b$$

এই আকারে লেখা হয় যার প্রথম সমাকলটি (ক)-এর এবং দ্বিতীয় সমাকলটি (খ)-এর অনুরূপ।

অতএব $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^c f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0+}\int_c^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx$

এইভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

দ্রষ্টব্য-1. (গ)-এর সংজ্ঞায় সাধারণভাবে $\varepsilon \neq \varepsilon'$ নেওয়া হয়।

যদি $\varepsilon = \varepsilon'$ ধরে ডানপক্ষের কোনো সসীম মান পাওয়া যায় তবে ঐমানটিকে **মুখ্যমান (Principal Value)** বলা হয়।

দ্রষ্টব্য-2. কোনো কোনো ক্ষেত্রে (গ) বিভাগের সমাকলটিকে

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \varepsilon'\to 0+}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx$$

দ্বারাও সংজ্ঞায়িত করা হয়। এই সীমাটির অস্তিত্বের উপর অযথার্থ সমাকলটির অস্তিত্ব নির্ভরশীল।

(ঘ) যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি কেবলমাত্র c বিন্দুতে $\left(a<c<b\right)$ অসীমভাবে অসন্তত হয় তখন

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

এইভাবে লেখা হয় যার প্রথম সমাকলটি (খ) এর এবং দ্বিতীয় সমাকলটি (ক) এর অনুরূপ।

আবার, c_1, c_2,.........c_n বিন্দুগুলিতে $\left(a \le c_1 < c_2 <.......< c_n \le b\right)$ যদি $f(x)$ অসীমভাবে অসন্তত হয় তখন

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c2} f(x)\,dx + ... + \int_{c_n}^b f(x)\,dx$$

এইভাবে প্রকাশ করা হয়, যার ডানপক্ষের সমাকলগুলি বিচার করার পদ্ধতি এবং নিরূপনযোগ্য কিনা তা আগে আলোচিত হয়েছে।

এখন (ক) ও (খ)-এর ক্ষেত্রে সীমাগুলির সসীম মান থাকলে $\int_a^b f(x)\,dx$ কে অভিসারী বলা হবে এবং (গ) ও (ঘ)-এর ডানদিকের সবগুলি সমাকল অভিসারী হলে তবেই এই দুই ক্ষেত্রে $\int_a^b f(x)\,dx$-কে অভিসারী বলা হবে, অন্যথায় উহাকে অভিসারী বলা যাবে না।

অনুশীলনী—2

অভিসারীত্বের বিচার করুন : (1–4) :

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^3}dx$ 2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 3. $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$ 4. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{3/2}}dx$

5. দেখান যে $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$ এই অযথার্থ সমাকলের মূখ্যমান 0.

সমাধান :

1. এখানে সমাকলজ $\frac{1}{x^3}$, 0 বিন্দুতে অসীমভাবে অসন্তত এবং [0,1] অন্তরালের বাকী সব বিন্দুতে সন্তত।

অতএব $\int_0^1 \frac{1}{x^3}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-3}dx, (0<\varepsilon<1).$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon^2}\right) = \propto \qquad \left[\because \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\varepsilon^2} = \propto\right]$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী নয়।

2. এক্ষেত্রে $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ সমাকলজটির [0,1] অন্তরালের কেবলমাত্র 1 বিন্দুতে অসীম অসন্ততি আছে। অতএব

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\sin^{-1}x\right]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\sin^{-1}(1-\varepsilon) = \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2},$$ মানটি সসীম।

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী

3. এখানে [0,1] অন্তরালের উভয় প্রান্ত বিন্দুতেই $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x}}$ এর অসীম অসন্ততি আছে।

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} + \lim_{\varepsilon'\to 0+}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon'} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|\right]_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} + \lim_{\varepsilon'\to 0+}\left[\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|\right]_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon'}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\log\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right| - \log\left|\frac{\sqrt{1-\varepsilon}-1}{\sqrt{1-\varepsilon}+1}\right|\right] + \lim_{\varepsilon'\to 0+}\left[\log\left|\frac{\sqrt{\varepsilon'}-1}{\sqrt{\varepsilon'}+1}\right| - \log\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right|\right]$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\log\left|\frac{\sqrt{1-\varepsilon}-1}{\sqrt{1-\varepsilon}+1}\right| + \lim_{\varepsilon'\to 0+}\log\left|\frac{\sqrt{\varepsilon'}-1}{\sqrt{\varepsilon'}+1}\right|,$$ ইহার সসীম মান নাই।

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী নয়।

4. এখানে $\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ সমাকলজটি [–1,1] অন্তরালের মধ্যবর্তী o বিন্দুতে অসীমভাবে অসন্তত।

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-1}^{0-\varepsilon} x^{\frac{-3}{2}}dx + \lim_{\varepsilon'\to 0+}\int_{0+\varepsilon'}^{1} x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{-2}{\sqrt{x}}\right)_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to 0+}\left(\frac{-2}{\sqrt{x}}\right)_{\varepsilon'}^{1}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{+2i}{\sqrt{\varepsilon}} - 2i\right) + \lim_{\varepsilon'\to 0+}\left(-2 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon'}}\right),$$

উভয় সীমারই কোনো অস্তিত্ব নাই; সুতরাং প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী নয়।

5. $x=0$ বিন্দুতে $\frac{1}{x}$ এর অসীম অসন্ততি আছে।

$$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx \quad \text{এবং}$$

মুখ্যমান $=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x}dx+\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx\right]$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_{1}^{\varepsilon}\frac{dz}{z}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right] \qquad [\text{প্রথম সমাকলে } x=-z \text{ ধরে}]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right] \qquad \left[\therefore \int_{a}^{b}f(z)\,dz=\int_{a}^{b}f(x)\,dx\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(0)=0$$

5.3.3 তৃতীয় শ্রেণীর অযথার্থ সমাকল

এই শ্রেণীর সমাকলের বিশেষত্ব হল সমাকলের অন্তরালটি অসীম এবং উক্ত অন্তরালে সমাকলজের অসীম অসন্ততি আছে। এই ধরনের সমাকলের মান নির্ণয় বা অভিসারিত্বের বিচার করতে হলে সমাকলটিকে প্রয়োজনমত অর্থাৎ প্রথম ও দ্বিতীয় শ্রেণীভুক্ত কয়েকটি সমাকলের যোগফল আকারে লিখে আগের জানা নিয়ম অনুযায়ী অগ্রসর হতে হবে।

উদাহরণ স্বরূপ : $\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx$ সমাকলে কেবল a বিন্দুতে $f(x)$ এর অসন্ততি থাকলে সমাকলটি তৃতীয় শ্রেণীভুক্ত হয়; তখন $\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{a}^{c}f(x)\,dx+\int_{c}^{\infty}f(x)\,dx,$ যখন c সসীম এবং $c>a,$ এই আকারে প্রকাশ করে অগ্রসর হতে হবে, যেখানে প্রথমটি দ্বিতীয় শ্রেণীর ও দ্বিতীয়টি প্রথম শ্রেণীর সমাকল।

উদাহরণ : $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x-1}dx$ সমাকলটির অভিসারিত্বের বিচার করুন।

সমাধান : ইহা তৃতীয় শ্রেণীভুক্ত, কারণ সমাকলের বিস্তার $[1,\infty]$ একটি অসীম অন্তরাল এবং $\frac{1}{x-1}$ সমাকলজটির 1 বিন্দুতে অসীম অসন্ততি আছে।

$$\therefore \int_{1}^{\infty}\frac{1}{x-1}dx=\int_{1}^{c}\frac{dx}{x-1}+\int_{c}^{\infty}\frac{dx}{x-1} \qquad (c>1 \text{ একটি সসীম বাস্তব সংখ্যা})।$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^{c}\frac{dx}{x-1}+\lim_{A\to\infty}\int_{c}^{A}\frac{dx}{x-1}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\Big[\log|x-1|\Big]_{1+\varepsilon}^{c}+\lim_{A\to\infty}\Big[\log|x-1|\Big]_{c}^{A}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\Big[\log|c-1|-\log|\varepsilon|\Big]+\lim_{A\to\infty}\big[\log|A-1|-\log|c-1|\big]$$

$$=\log|c-1|-\lim_{\varepsilon\to 0+}\log|\varepsilon|+\lim_{A\to\infty}\log|A-1|-\log|c-1|$$

$=\lim_{A\to\infty}\log|A-1|-\lim_{\varepsilon\to 0+}\log|\varepsilon|$, কোনও সসীম মান নাই।

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকলটি অপসারী (Divergent)।

প্রশ্নাবলী—1

নিম্নলিখিত সমাকলগুলির অভিসারিত্বের বিচার করুন এবং সম্ভব হলে মান নির্ণয় করুন।

1. $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 2. $\int_{-\infty}^{0}e^{2x}dx$ 3. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 4. $\int_{0}^{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx$ 5. $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

প্রশ্নাবলী—1 এর উত্তর

1. অভিসারী, 2; 2. অভিসারী, $\frac{1}{2}$; 3. অভিসারী, π; 4. অভিসারী, $3\sqrt{2}$; 5. অভিসারী, π.

5.4 অযথার্থ সমাকলের অভিসারিত্বের পরীক্ষা

5.4.1 উপপাদ্য (কসির পরীক্ষা)

$\int_{a}^{\infty}f(x)dx$ সমাকলটি অভিসারী হওয়ার প্রয়োজনীয় এবং পর্যাপ্ত (Necersary and sufficient) শর্ত হল পূর্বনির্ধারিত যেকোন ধনাত্মক ε এর জন্য যদি সর্বদাই আর একটি ধনাত্মক সংখ্যা X_0 পাওয়া যায় যার জন্য

$$\left|\int_{X_1}^{X_2}f(x)\,dx\right|<\varepsilon \text{ যখন } X_1, X_2 > X_0 \text{।}$$

দ্রষ্টব্য : $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ সমাকলকে **চরমভাবে অভিসারী (Absolutely Conuergent)** বলা হয় যদি $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ সমাকলটি অভিসারী হয়।

উদাহরণ : দেখান যে $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ অভিসারী।

সমাধান : যেহেতু $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, অতএব বলা যায় 0 বিন্দুতে $\frac{\sin x}{x}$ সমাকলজটির কোনো অসীম অসন্ততি নাই।

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{1} \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

এইভাবে প্রকাশ করে দেখা গেল ডানপক্ষের প্রথম সমাকলটি যথার্থ এবং দ্বিতীয়টি অযথার্থ। এই দ্বিতীয় সমাকলটির উপর প্রদত্ত সমাকলটির অভিসারিত্ব নির্ভরশীল।

ধরা যাক্, যে কোন ধনাত্মক ε এর জন্য x_1, x_2 এমন দুটি সংখ্যা নেওয়া হল যাদের প্রত্যেকেই $\frac{2}{\varepsilon}$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

এখন $$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot (-\cos x) dx$$

$$= \frac{\cos x_1}{x_1} - \frac{\cos x_2}{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$\therefore \quad \left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x} dx\right| \le \left|\frac{\cos x_1}{x_1} - \frac{\cos x_2}{x_2}\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos x}{x^2} dx\right|$$

$$\le \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^2} dx \qquad [\because |\cos x| \le 1 \text{ এবং } |a-b| \le |a| + |b|]$$

$$< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

অতএব কসির পরীক্ষা অনুযায়ী $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ অভিসারী; সুতরাং $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ অভিসারী।

5.4.2 প্রথম শ্রেণীর সমাকলগুলির জন্য অভিসারিত্বের পরীক্ষা

(ক) **উপপাদ্য ঃ** যদি $x \geq a$-এর জন্য $f(x)$ একটি অঋণাত্মক ও সমাকলনযোগ্য হয় এবং a অপেক্ষা বৃহত্তর প্রত্যেক A-এর জন্য $\int_a^A f(x)dx$ উপর দিকে সীমাবদ্ধ (Bounded above) হয় তাহলে $\int_a^\infty f(x)dx$ অভিসারী হবে; অন্যথায় ইহা অসীম অভিমুখে অপসারী হবে।

(খ) **অভিসারিত্বের তুলনামূলক পরীক্ষার উপপাদ্য ঃ** যদি $x \geq a$-এর জন্য $f(x)$ ও $g(x)$ সমাকলনযোগ্য এবং $0 \leq f(x) \leq g(x)$ হয়, তবে

(i) $\int_a^\infty f(x)dx$ অভিসারী হবে যদি $\int_a^\infty g(x)dx$ অভিসারী হয় এবং

(ii) $\int_a^\infty g(x)dx$ অপসারী হবে যদি $\int_a^\infty f(x)dx$ অপসারী হয়।

দ্রষ্টব্য : উপপাদ্যগুলির প্রমাণ এই পুস্তকে দেওয়া হল না।

(গ) **একটি প্রয়োজনীয় সমাকল** : $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu}$, যখন $a > 0$

পূর্ব আলোচনা অনুযায়ী $$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu} = \lim_{A\to\infty}\int_a^A \frac{dx}{x^\mu} = \begin{cases} \frac{1}{1-\mu}\lim_{A\to\infty}\left[A^{1-\mu} - a^{1-\mu}\right], \text{যখন } \mu \neq 1 \\ \lim_{A\to\infty}[\log A - \log a], \text{ যখন } \mu = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(\mu-1)a^{\mu-1}}, \text{যখন } \mu > 1 \\ \infty \quad , \text{ যখন } \mu \leq 1 \end{cases}$$

অতএব প্রদত্ত সমাকলটি $\mu > 1$-এর জন্য অভিসারী এবং $\mu \leq 1$-এর জন্য অসীম অভিমুখে অপসারী।

(ঘ) **অভিসারিত্বের μ-পরীক্ষার উপপাদ্য** : যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $x \geq a$-এর জন্য সমাকলনযোগ্য হয় তবে $\int_a^\infty f(x)dx$ সমাকলটি

(i) অভিসারী হবে যদি $\lim_{x\to\infty} x^\mu f(x) = \lambda$ হয়, যখন $\mu < 1$ এবং λ একটি সসীম বাস্তব সংখ্যা।

(ii) অপসারী হবে যদি $\lim_{x\to\infty} x^{\mu} f(x)=\lambda$ হয়, যখন $\mu \geq 1$ এবং λ শূন্য নয় এমন একটি সসীম বাস্তব সংখ্যা অথবা $\pm\infty$.

অনুশীলনী—3

উদাহরণ-1. তুলনামূলক পরীক্ষার দ্বারা অভিসারিত্ব বিচার করুন।

(ক) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ (খ) $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

সমাধান : 1 (ক) ধরা যাক্ $f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}$ এবং $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

এখন যেহেতু $\cos x \leq 1$, $f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}=g(x)$

আবার, $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A\to\infty}\tan^{-1}A=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ অর্থাৎ $\int_0^\infty g(x)dx$ অভিসারী

অতএব তুলনামূলক পরীক্ষার সাহায্যে বলা যায় যে

$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ অভিসারী।

(খ) যেহেতু $\sin x \leq 1$, অতএব $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$;

আবার $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ অভিসারী $\left[\int_a^\infty \frac{dx}{x^{\mu}} \text{ অনুযায়ী}\right]$

সুতরাং $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$ এবং $g(x)=\frac{1}{x^2}$ ধরে তুলনামূলক পরীক্ষার সাহায্যে বলা যায় যে $\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty \frac{\sin x^2 x}{x^2}$ অভিসারী।

উদাহরণ-2. μ-পরীক্ষার দ্বারা অভিসারিত্বের বিচার করুন।

(ক) $\int_1^\infty e^{-x}x^n dx$ (খ) $\int_0^\infty \frac{x^{\frac{8}{3}}}{7x^3+1}dx$

সমাধান : 2 (ক) $f(x)=e^{-x}x^{n}$ ধরে

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x)=\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}x^{n}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+2}}{e^{x}}$$

$$=0,\quad \forall n,\ \text{যখন}\ \mu=2>1.$$

$\therefore$ μ-পরীক্ষার দ্বারা বলা যায় $\int_1^\infty e^{-x}x^n dx$ অভিসারী।

(খ) $f(x)=\dfrac{x^{\frac{8}{3}}}{7x^3+1}$ ধরে

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}}{7x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{7x^3+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{7+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{7},\quad \text{যখন}\ \mu=\frac{1}{3}<1$$

$\therefore$ μ-পরীক্ষার দ্বারা বলা যায় $\int_0^\infty \dfrac{x^{\frac{8}{3}}}{7x^3+1}dx$ অপসারী।

5.4.3 দ্বিতীয় শ্রেণীর সমাকলগুলির জন্য অভিসারিত্বের পরীক্ষা

(ক) **উপপাদ্য** : যদি $a<x\le b$ অন্তরালে অ-ঋণাত্মক একটি অপেক্ষক $f(x)$ সমাকলনযোগ্য হয়, কেবল a বিন্দুতে অপেক্ষকটির অসীম অসন্তুতি থাকে এবং $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,\ (0<\varepsilon<b-a)$, সমাকলটি উপরের দিকে সীমাবধ্ধ হয় তাহলে $\int_a^b f(x)\,dx$ অভিসারী হবে; অন্যথায় সমাকলটি অসীমের দিকে অপসারী হবে।

(খ) **অভিসারিত্বের তুলনামূলক পরীক্ষার উপপাদ্য :**

যদি $f(x)$ ও $g(x)$ অপেক্ষক দুটির $[a,b]$অন্তরালের কেবল a বিন্দুতে অসীম অসন্তুতি থাকে, উহারা $[a+\varepsilon,b]$ অন্তরালে $(0<\varepsilon<b-a)$ সমাকলনযোগ্য হয়, এবং $0\le f(x)\le g(x)$ হয় তাহলে

(i) $\int_a^b f(x)dx$ অভিসারী হবে যদি $\int_a^b g(x)dx$ অভিসারী হয়, এবং

(ii) $\int_a^b g(x)dx$ অপসারী হবে যদি $\int_a^b f(x)dx$ অপসারী হয়।

(গ) **একটি প্রয়োজনীয় সমাকল** : $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu}, (a<b)$

যখন $\mu \le 0,$ তখন সমাকলটি যথার্থ; অন্যথায় সমাকলজটির কেবল a বিন্দুতে অসীম অসন্ততি থাকায়

$\mu \ne 1$এর জন্য, $$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\mu}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{1-\mu}\left\{(b-a)^{1-\mu} - \varepsilon^{1-\mu}\right\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu}, & \text{যখন } 0<\mu<1 \\ \propto & \text{, যখন } \mu>1 \end{cases}$$

আবার $\mu = 1$ এর জন্য, $$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a}.$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \{\log(b-a) - \log\varepsilon\} = \propto.$$

অতএব, সমাকলটি $0<\mu<1$এর জন্য অভিসারী এবং $\mu \ge 1$এর জন্য অপসারী।

দ্রষ্টব্য : অনুরূপে দেখান যায়

$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\mu}$ সমাকলটি $\mu<1$ এর জন্য অভিসারী এবং $\mu \ge 1$এর জন্য অপসারী।

(খ) **অভিসারিত্বের μ পরীক্ষার উপপাদ্য** : যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $[a,b]$ অন্তরালের a বিন্দুতে অসীমভাবে অসন্তত হয় এবং $0<\varepsilon<b-a$ এর জন্য $[a+\varepsilon, b]$ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য হয়

তখন $\int_a^b f(x)dx$ সমাকলটি

(i) অভিসারী হবে যদি $\lim_{x\to a+}(x-a)^{\mu} f(x)=\lambda$ যখন $0<\mu<1$ এবং λ একটি সসীম বাস্তব সংখ্যা।

(iii) অপসারী হবে যদি $\lim_{x\to a+}(x-a)^{\mu} f(x)=\lambda,$ যখন $\mu\geq 1$ এবং λ শূন্য নয় এমন একটি সসীম বাস্তব সংখ্যা অথবা $\pm\infty$.

প্রান্তলিপি : যদি $[a,b]$ অন্তরালে $f(x)$ ফাংশনের কেবলমাত্র b বিন্দুতে অসীম অসন্ততি থাকে তবে $\int_a^b f(x)\,dx$ সমাকলটির অভিসারিত্বের পরীক্ষাগুলি অনুরূপ উপায়ে সম্পাদন করা যাবে। অঙ্কের মাধ্যমে উপায়গুলি আলোচিত হবে।

অনুশীলনী—4

উদাহরণ-1. তুলনামূলক পরীক্ষার দ্বারা অভিসারিত্ব বিচার করুন।

(ক) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}(1+x^2)}$ (খ) $\int_a^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ $(0<a<1)$

সমাধান : 1. (ক) ধরা যাক্ $f(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$ এবং $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ ।

আবার [0,1] অন্তরালের কেবল O বিন্দুতে $f(x)$ এর অসীম অসন্ততি আছে। সুতরাং $0<\varepsilon<1$ এর জন্য $[\varepsilon,1]$ অন্তরালে $f(x),\, g(x)$ উভয়েই সমাকলনযোগ্য এবং $0<f(x)<g(x)$ ।

এখন $\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx=\int_0^1 \frac{dx}{(x-0)^{\frac{1}{3}}}$ সমাকলটিকে $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাওয়া যায়

$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}dx$ অভিসারী $[\because \mu=\frac{1}{3}<1]$ ।

অতএব তুলনামূলক পরীক্ষার দ্বারা বলা যায় প্রদত্ত অপেক্ষকটি অভিসারী।

(খ) ধরা যাক্ $f(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ এবং $g(x)=\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ ।

এখানে সমকলের বিস্তারে $x=1$ বিন্দুটি $f(x)$ এর একমাত্র অসীম অসন্ততির বিন্দু; অতএব $0<\varepsilon<1-a$ এর জন্য $[a,1-\varepsilon]$ অন্তরালে $f(x),g(x)$ সমাকলনযোগ্য এবং $f(x)>g(x)>0$ ।

আবার $\int_a^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ সমাকলটিতে $\mu = \frac{1}{2} <$। হওয়ায় $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\mu}}$

এর সঙ্গে তুলনা করে বলা যায় উহা অভিসারী।

অতএব তুলনামূলক পরীক্ষার সাহায্যে মন্তব্য করা যায় প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী।

উদাহরণ-2 μ-পরীক্ষার দ্বারা অভিসারিত্বের বিচার করুন।

(ক) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\log x} dx$ (খ) $\int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}}(4-x)^{\frac{1}{3}}}$

সমাধান : 2 (ক) $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$ সমাকলজটির কেবল $x=1$ বিন্দুতে অসীম অসন্ততি আছে।

আবার $\lim_{x\to 1+} (x-1)^1 \frac{\sqrt{x}}{\log x}$ (ইহা $\frac{0}{0}$ গঠনের) $= \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-½}}{\frac{1}{x}} = 1,$ সসীম বাস্তব সংখ্যা এবং $\mu = 1$

সুতরাং μ-পরীক্ষার দ্বারা মন্তব্য করা যায় প্রদত্ত সমাকলটি অপসারী।

(খ) এখানে $\int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}}(4-x)^{\frac{1}{3}}} = \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}}(4-x)^{\frac{1}{3}}} + \int_3^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}}(4-x)^{\frac{1}{3}}},$

লিখে দেখা যাচ্ছে প্রথম সমাকলটিতে 2 এবং দ্বিতীয় সমাকলটিতে 4 সমাকলজের অসীম অসন্ততির বিন্দু।

$\therefore$ প্রথম সমাকলের জন্য $\lim_{x\to 2^+} (x-2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}} \cdot (4-x)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{n\to 2^+} \frac{1}{(4-x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}},$

সসীম বাস্তব সংখ্যা এবং $\mu = \frac{1}{2} < 1.$ এবং

দ্বিতীয় সমাকলের জন্য $\lim_{x\to 4-} (4-x)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}(4-x)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to 4-} \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}},$

সসীম বাস্তব সংখ্যা এবং $\mu = \frac{1}{3} < 1.$

সুতরাং μ-পরীক্ষা অনুযায়ী উভয় সমাকলই অভিসারী।

অতএব প্রদত্ত সমাকলটিও অভিসারী।

প্রশ্নাবলী—2

অভিসারিত্বের বিচার করুন (1–5) :

1. $\int_0^\infty \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2x^3+3}dx$ 2. $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$ 3. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^{\frac{1}{3}} x}$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$ সমাকলটির অভিসারিত্ব নিয়ে আলোচনা করুন।

প্রশ্নাবলী—2 এর উত্তর

1. অপসারী [সংকেত : $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^3+3} = \frac{1}{2}; \mu = \frac{1}{2} < 1$]

2. অভিসারী [সংকেত : $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = ... = 0; \mu = \frac{3}{2} > 1$]

3. অভিসারী [সংকেত : $\lim_{x\to 0+} (x-0)^{\frac{4}{5}} f(x) = \lim_{x\to\infty+} \frac{\log x}{x^{-\frac{3}{10}}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{10}x^{-\frac{7}{10}}}$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{10}}\right) = 0; \mu = \frac{4}{5} < 1]$$

4. অভিসারী [সংকেত : $\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1; \mu = \frac{1}{2} < 1$]

5. অভিসারী [সংকেত : $\frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অসীম অসন্ততি। $\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^{\frac{1}{3}}x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{3}}=1;\ \mu=\frac{1}{3}<1\ ]$$

6. **সংকেত** : $x=0$ সমাকলজের একমাত্র অসন্ততির বিন্দু। আবার $0<\mu<1$এর জন্য

$$\lim_{x\to 0+} x^{\mu}\log\sin x=\lim_{x\to 0+} x^{\mu}\log\left(x\cdot\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0+}\left\{x^{\mu}\log x+x^{\mu}\log\frac{\sin x}{x}\right\}=0$$

$$\because \lim_{x\to 0+} x^{\mu}\log x=\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{x^{-\mu}}\left(\tfrac{\infty}{\infty}\text{ গঠনের}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{\mu-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{-x^{\mu}}{\mu}=0$$

এবং $\lim_{x\to 0+} x^{\mu}\log\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+} x^{\mu}\cdot\lim_{x\to 0+}\log\frac{\sin x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0+} x^{\mu}\left\{\log\left(\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}\right)\right\}=0\cdot\log 1=0]$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী কারণ $\mu<1$ (এখানে $\mu\geq 1$ নেওয়া যাবে না)।

5.5 গামা ফাংশন, বিটা ফাংশন; তাদের ধর্ম ও প্রয়োগ

এই বাস্তব মান বিশিষ্ট (Read valued) ফাংশনদ্বয় সমাকলের মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত। গামা ফাংশন ও বিটা ফাংশনকে যথাক্রমে $\Gamma(n)$ ও $\mathrm{B}(m,n)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। যেখানে m,n সংখ্যাগুলি চালকের ভূমিকায় থাকে। গণিত শাস্ত্র, পদার্থবিদ্যা, অর্থনীতি, পরিসংখ্যান বিদ্যা ইত্যাদি বহু বিষয়ে এই অপেক্ষক গুলির প্রয়োগ যথেষ্ট পরিমানে বিদ্যমান।

5.5.1 গামা ফাংশন ও তার কিছু ধর্ম

$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx,\ n > 0;$ —এই ফাংশনটিকে গামা ফাংশন বলে।

সমাকলের মাধ্যমে প্রকাশিত এই $\Gamma(n)$ ফাংশনটি আসলে n এর ফাংশনে x-এর নয় এবং $n > 0$ ফাংশনটির সংজ্ঞাঞ্চল। এই অযথার্থ সমাকলটি $n > 0$ সংজ্ঞাঞ্চলে অভিসারী।

গামা-ফাংশনের কয়েকটি ধর্ম :

(i) $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n).$

প্রমাণ : $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{(n+1)-1} dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x} x^n dx$

$$= \lim_{A\to\infty} \left\{ \left[x^n \left(-e^{-x}\right) \right]_0^A - \int_0^A n x^{n-1} \left(-e^{-x}\right) dx \right\}$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{-A^n}{e^A} \right) + n \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

$$= -0 + n\Gamma(n) \quad \left[\therefore \lim_{A\to\infty} \frac{A^n}{e^A} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \ldots\ldots = \lim_{A\to 0} \frac{n!}{e^A} = 0 \right]$$

$$\therefore\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

দ্রষ্টব্য : এই ধর্ম থেকে দেখান যায় $\Gamma(n+1) = n!$ যদি n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয়।

প্রমাণ : $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n \cdot (n-1)\Gamma(n-1) = \ldots\ldots = n(n-1)\ldots.2.1.\Gamma(1)$

$$= n(n-1)\ldots 2.1 \cdot 1 \left[\therefore \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \right]$$

$$= n!$$

(ii) $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{n}}} dx$

প্রমাণ : $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx=\int_0^\infty e^{-y^{1/n}}\cdot\frac{1}{n}dy$ [$x^n=y$ ধরে]

$\therefore\ \int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{n}}}dx=n\,\Gamma(n)=\Gamma(n+1).$

5.5.2 বিটা ফাংশন ও তার কিছু ধর্ম

$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx,\ m>0,\ n>0$ এই ফাংশনটিকে বিটা ফাংশন বলা হয়। বিটা ফাংশনের চালক m ও n এবং সংজ্ঞাঞ্চল $m\geq 0,\ \ n\geq 0$। যখন $m\geq 1$ এবং $n\geq 1$ তখন সমাকলটি যথার্থ; কিন্তু $m<1$ হলে $x=0$ এবং $n<1$ হলে $x=1$ সমাকলজের অসীম অসন্ততির বিন্দু হয়। সেই কারণে সমাকলটিকে অযথার্থ সমাকল হিসাবেই ধরা হয়।

বিটা ফাংশনের কয়েকটি ধর্ম :

(i) $B(m,n)=B(n,m)$

প্রমাণ : $B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\int_1^0(1-y)^{m-1}y^{n-1}(-dy)$ [$x=1-y$ ধরে]

$$=\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}dy=B(n,m).$$

(ii) $B(m,n)=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx=\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}}dx.$

প্রমাণ : $B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$

$$=\int_\infty^0\left(\frac{1}{1+y}\right)^{m-1}\cdot\left(1-\frac{1}{1+y}\right)^{n-1}\left\{-\frac{1}{(1+y)^2}\right\}dy \qquad \left[x=\frac{1}{1+y}\text{ ধরে}\right]$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^{m-1}}\cdot\frac{y^{n-1}}{(1+y)^{n-1}}\cdot\frac{1}{(1+y)^2}dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx \qquad \left[\because \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(x)\,dx\right]$$

আবার, $$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = \int_\infty^0 \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{1}{z}\right)^{m+n}}\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz \qquad \left[x = \frac{1}{z} \text{ ধরে}\right]$$

$$= \int_0^\infty \frac{z^{1-n}\cdot z^{m+n}}{z^2\cdot(1+z)^{m+n}}\,dz = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}}{(1+z)^{m+n}}\,dz$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx \qquad \left[\because \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(x)\,dx\right]$$

(iii) $$B(m,n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

প্রমাণ : $$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx \qquad \text{[ধর্ম (ii) অনুযায়ী]}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = I_1 + I_2 \quad \text{(ধরি)}$$

এখন দ্বিতীয় সমাকলে $x = \frac{1}{y}$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$I_2 = \int_1^0 \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{m-1}}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{m+n}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy = \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

$$\therefore\ B(m,n) = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

(iv) $B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta$

প্রমাণ : $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(m-1)}\theta \cos^{2(n-1)}\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \qquad [x = \sin^2\theta \text{ ধরে}]$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta$$

দ্রষ্টব্য : $m = \frac{1}{2} = n$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(v) $B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

গামা ও বিটা ফাংশনের ইহা একটি মূল্যবান সম্পর্ক। ধর্মটির প্রমাণ এই পুস্তকে দেওয়া হল না।

দ্রষ্টব্য : উপরের সম্পর্কে $m = \frac{1}{2} = n$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} \qquad \text{বা, } \pi = \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(1)}$$

বা, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ $\qquad [\because \Gamma(1) = 1]$

অনুশীলনী—5

উদাহরণ-1. দেখান যে $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

সমাধান : 5.5.1 অনুচ্ছেদের ধর্ম (ii) অনুযায়ী $\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{n}}} dx = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

এখানে $n = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাওয়া যায়—

$$\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} \qquad \left[\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right]$$

উদাহরণ-2. দেখান যে $\mathrm{B}(m,n) = \mathrm{B}(m+1,n) + \mathrm{B}(m,n+1)$.

সমাধান : ডানপক্ষ $= \int_0^1 x^{(m+1)-1}(1-x)^{n-1} dx + \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{(n+1)-1} dx$ [সংজ্ঞা অনুযায়ী]

$$= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\{(x)+(1-x)\}dx$$

$$= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \mathrm{B}(m,n) = \text{বামপক্ষ।}$$

5.6 সারাংশ

1. অযথার্থ সমাকলের শ্রেণীবিভাগ

(ক) সমাকলের অন্তরাল অসীম—প্রথম শ্রেণীর অযথার্থ সমাকল।

(খ) সমাকলের অন্তরালে সমাকলজের অসীম অসন্ততি আছে—দ্বিতীয় শ্রেণীর অযথার্থ সমাকল।

(গ) উপরোক্ত (ক) ও (খ) উভয় ধর্মই বিদ্যমান—তৃতীয় শ্রেণীর অযথার্থ সমাকল।

2. অযথার্থ সমাকলগুলির অভিসারিত্ব বিচার ও মান নির্ণয়ের (সম্ভব হলে) পদ্ধতির জন্য 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 অনুচ্ছেদগুলি দেখুন এবং সংশ্লিষ্ট অনুশীলনীগুলি অনুধাবন করুন।

3. অযথার্থ সমাকলের অভিসারিত্বের বিভিন্ন পরীক্ষার জন্য 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3 অনুচ্ছেদ ও সংশ্লিষ্ট অনুশীলনীগুলি অনুসরণ করুন।

4. গামা ফাংশন : $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx, n>0.$

ধর্ম : (ক) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$

(খ) $\Gamma(n+1)=n!$

(গ) $\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{n}}}dx$

(ঘ) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

5. বিটা ফাংশন : $B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx, m>0, n>0.$

ধর্ম : (ক) $B(m,n)=B(n,m)$

(খ) $B(m,n)=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx=\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$

(গ) $B(m,n)=\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$

(ঘ) $B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta$

(ঙ) $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$

(চ) $B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

5.7 বিষয়মুখী ছোট প্রশ্নাবলী

সমাকলগুলির পাশে দেওয়া উত্তরগুলির মধ্য থেকে সঠিক উত্তরটি বেছে নিয়ে অভিসারিত্বের বিচার করুন অর্থাৎ অভিসারী হলে C, অপসারী হলে D এবং দোলনশীল হলে O -কে চিহ্নিত করুন (MCQ) :

1. $\int_0^\infty e^x dx$	(i) C	(ii) D	(iii) O
2. $\int_3^\infty \frac{1}{x^5} dx$	(i) C	(ii) D	(iii) O
3. $\int_0^\infty e^{-x} dx$	(i) C	(ii) D	(iii) O
4. $\int_{-\infty}^3 e^x dx$	(i) C	(ii) D	(iii) O
5. $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$	(i) C	(ii) D	(iii) O
6. $\int_2^\infty \frac{dx}{\log x}$	(i) C	(ii) D	(iii) O
7. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$	(i) C	(ii) D	(iii) O
8. $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2} dx$	(i) C	(ii) D	(iii) O
9. $\int_a^\infty \sin x dx$	(i) C	(ii) D	(iii) O
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$	(i) C	(ii) D	(iii) O

11. সঠিক মান টিকে চিহ্নিত করুন

(ক) $\Gamma(4)$	(i) 4	(ii) 6	(iii) 12
(খ) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	(i) $\sqrt{\pi}$	(ii) $\frac{\pi}{2}$	(iii) $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
(গ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta$	(i) $\frac{8}{15}$	(ii) $\frac{\pi}{16}$	(iii) $\frac{2\sqrt{\pi}}{3}$.

5.7.1 বিষয়মুখী ছোট প্রশ্নাবলীর উত্তর

1. D	2. C	3. C	4. C	5. D	6. D
7. C	8. C	9. O	10. C		

$$[\text{সংকেত} \;:\; \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\cos^{\frac{1}{2}}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}=1;\mu=\frac{1}{2}<1]$$

11. (ক) 6 (খ) $\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ (গ) $\frac{8}{15}$.

5.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. অভিসারিত্বের বিচার করুন এবং সম্ভব হলে মান নির্ণয় করুন।

(ক) $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ (খ) $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+4}dx$ (গ) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

(ঘ) $\int_0^2 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx$ (ঙ) $\int_0^\pi \frac{\sqrt{x}}{\sin x}dx$ (চ) $\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}}dx$

(ছ) $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx$ (জ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^n}dx$

2. m ও n এর কোন মানের জন্য $\int_0^1 e^{-mx}\cdot x^n dx$ অভিসারী?

3. $\int_a^\infty \frac{dx}{x(\log x)^{n+1}}(a>1)$ সমাকলনটির n এর বিভিন্ন মানের জন্য অভিসারিত্ব বিচার করুন।

4. দেখান যে $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}dx$ সমাকলটির সাধারণ বিচারে কোনো অস্তিত্ব নাই কিন্তু কসির নীতি অনুযায়ী বিচারে মুখ্যমান আছে।

5. $\int_0^\infty \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2}$ সমাকলটির অভিসারিত্বের বিচার করুন এবং মান নির্ণয় করুন।

সমাকলগুলি অভিসারী ধরে নিয়ে মান গুলি নির্ণয় করে দেখান (6–10) :

6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

7. $\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}; a,b>0.$

8. $\int_0^\infty \frac{x^2 \ dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)} = \frac{\pi}{2\,(a+b)}, a,b>0.$

9. $\int_0^\pi e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}; a>0.$

10. $\int_0^\pi \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{1-a^2}, & \text{যখন } a<1 \\ \frac{\pi}{a^2-1}, & \text{যখন } a>1 \end{cases}$

11. দেখান যে $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x\,dx, (p>-1),$

এবং সেখান থেকে দেখান যে

(ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\,dx = \frac{128}{315}$

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx = \frac{3\pi}{16}$

12. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ মান ধরে দেখান যে

(ক) $\int_0^\infty e^{-4x} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{128}$

(খ) $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$

13. $\Gamma(m)\Gamma(1-m)=\pi\operatorname{cosec} m\pi,\quad 0<m<1,$ ধরে নিয়ে দেখান যে

(ক) $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (খ) $\Gamma\left(\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(\frac{2}{9}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{16\pi^4}{3}$

14. বিটা ও গামা ফাংশনের ধর্ম কাজে লাগিয়ে দেখান যে

(ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{32}$ (খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^6 x\,dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)=\frac{3\pi}{512}$

(গ) $\int_0^1 x^3\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}dx=\frac{2}{63}.$

15. দেখান যে $\int_0^\infty\frac{x^8\left(1-x^6\right)}{(1+x)^{24}}dx=0$

5.8.1 সর্বশেষ প্রশ্নাবলীর উত্তর

(সংকেতে যা আলোচনা করা হয়েছে তা সমাকল গুলির নিজস্ব বিস্তারে)

1. (ক) অভিসারী (খ) অপসারী (গ) অভিসারী, log2 (ঘ) অভিসারী, $\frac{3\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2}$

(ঙ) অপসারী, [সংকেত : $\int_0^\pi\frac{\sqrt{x}}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sin x}.$ এখানে প্রথম সমাকলটি যথার্থ; সুতরাং অভিসারী। কিন্তু $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ অন্তরালে $\frac{\sqrt{x}}{\sin x}\geq\frac{1}{\sin x}$ এবং $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sin x}dx=\left[\log\tan\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\infty\Rightarrow$ তুলনামূলক পরীক্ষার সাহায্যে দ্বিতীয় সমাকলটি অপসারী। অতএব প্রদত্ত সমাকলটি অপসারী] (চ) অভিসারী, [সংকেত : 0 ও 2 অসীম অসন্ততির বিন্দু।

$\therefore\ \int_0^2\frac{\log x}{\sqrt{2-x}}dx=\int_0^c+\int_c^2\frac{\log x}{\sqrt{2-x}}dx.$ এখন $\lim_{x\to 0+}x^{\frac{1}{2}}\frac{\log x}{\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{\sqrt{\frac{2}{x}-1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}-1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0+}\left\{-\sqrt{x(2-x)}\right\}=0\Rightarrow$$ প্রথম সমাকলটি অভিসারী।

আবার $=\lim_{x\to 2^-}(2-x)^{\frac{1}{2}}\dfrac{\log x}{(2-x)^{-\frac{1}{2}}}=\log 2\Rightarrow$ দ্বিতীয় সমাকলটি অভিসারী।

অতএব প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী এবং মান log2.]

(ছ) অভিসারী, 0, [**সংকেত** : $\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}dx=\lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{0}xe^{-x^2}dx+\lim_{A\to\infty}\int_{0}^{A}e^{-x^2}dx$

$$=\lim_{B\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_B^0+\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^A$$

$$=\lim_{B\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-B^2}\right]+\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-A^2}+\frac{1}{2}\right]=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0;$$

যেহেতু উভয় সীমা মানই শূন্য নয় এমন সসীম সংখ্যা, সুতরাং উহারা অভিসারী। অতএব প্রদত্ত সমাকলটিও অভিসারী। আবার প্রদত্ত সমাকলটির মান = উহাদের মানদ্বয়ের সমষ্টি =0.]

(জ) [**সংকেত** : $n\le 1$ হলে সমাকলটি যথার্থ, $n>1$ হলে একমাত্র অসন্ততির বিন্দু 0. এখন

$\dfrac{\sin x}{x^n}=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{x^{n-1}}\le\dfrac{1}{x^{n-1}}\left(\because\dfrac{\sin x}{x}\le 1\right)$; এবং $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{x^{n-1}}dx$ সমাকলটি $n-1<1$ অর্থাৎ $n<2$ এর জন্য অভিসারী। অতএব তুলনামূলক পরীক্ষায় মন্তব্য করা যায় প্রদত্ত সমাকলটি $n<2$ এর জন্য অভিসারী এবং $n\ge 2$ এর জন্য অপসারী]

2. **সংকেত** : ধরা যাক্ c এক অপেক্ষা বৃহত্তর এমন একটি বাস্তব সংখ্যা যা m এর সকলমানের জন্য $e^{-m}<c$।

অতএব [0,1] অন্তরালে $e^{-mx}x^n\le cx^n$; আবার $\int_0^1 x^n dx=\int_0^1\dfrac{dx}{x^{-n}}$ সমাকলটি $-n<1$ i.e. $n>-1$ এর জন্য অভিসারী। অতএব m এর যে কোন মানের জন্য প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী হবে যদি $n>-1$ হয়।

3. **সংকেত** : $\log x=z$ বসলে প্রদত্ত সমাকল $=\int_{\log a}^{\infty}\dfrac{dz}{z^{n+1}}$, যা $n+1>1$

অর্থাৎ $n>0$ এর জন্য অভিসারী এবং $n+1\le 1$ অর্থাৎ $n\le 0$ এর জন্য অপসারী।

4. **সংকেত** : এখানে 0 একমাত্র অসন্ততির বিন্দু। অতএব প্রদত্ত সমাকল

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0+}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^3}+\lim_{\varepsilon_2\to 0+}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^3}=\lim_{\varepsilon_1\to 0+}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)_{-1}^{-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0+}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)_{\varepsilon_2}^{1}$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0+}\left(-\frac{1}{2\varepsilon_1^2}\right)+\lim_{\varepsilon_2\to 0+}\left(\frac{1}{2\varepsilon_2^2}\right),$$ উভয় সীমারই কোনো সসীম মান নাই এবং সেই কারণে প্রদত্ত সমাকলটির কোনো অস্তিত্ব নাই।

কিন্তু কসির মুখ্য মানের জন্য যদি $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ ধরা হয় তখন উপরের ন্যায় অগ্রসর হলে পাওয়া যায়

প্রদত্ত সমাকল $=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon^2}\right)\right]=\lim_{\varepsilon\to 0+}0=0.;$

ইহাই মুখ্যমান।

5. **সংকেত** : সমাকলজটির 0 এবং ∞ উভয় প্রান্তেই অসীম অসন্ততি আছে। অতএব প্রদত্ত সমাকল

$$=\int_0^1+\int_1^\infty\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A\to 0+}\int_A^1+\lim_{B\to\infty}\int_1^B\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=-\lim_{A\to 0+}\int_{\tan^{-1}A}^{\frac{\pi}{4}}(\log\sin\theta+\log\cos\theta)d\theta-\lim_{B\to\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}B}(\log\sin\theta+\log\cos\theta)d\theta$$

[$x=\tan\theta$ ধরে]

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\log\sin\theta+\log\cos\theta)d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\log\sin\theta+\log\cos\theta)d\theta=.....=-\pi\log 2,$$

সসীম মান। অতএব প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী।

11. **সংকেত** : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p_x}\cos^o x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\left(\frac{p+1}{2}\right)-1}x\cos^{2\left(\frac{0+1}{2}\right)-1}x\,dx$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{0+1}{2}\right)\quad\text{[ধর্ম (iv)]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\frac{1}{2}\right)} \qquad [\text{ধর্ম (v)}]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)} \qquad \left[\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right]$$

13. (খ) **সংকেত :** প্রদত্ত সম্পর্কটিতে $m=\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{3}{9},\frac{4}{9}$ বসিয়ে প্রাপ্ত সম্পর্কগুলিকে গুণ করে পাওয়া যায়

$$\Gamma\left(\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(\frac{2}{9}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{9}\right)\Gamma\left(\frac{3}{9}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{9}\right)\Gamma\left(\frac{4}{9}\right)\Gamma\left(1-\frac{4}{9}\right)$$

$$=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{9}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{9}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{9}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{4\pi}{9}}$$

বা $\Gamma\left(\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(\frac{2}{9}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{\pi^4}{\frac{16}{9}}$

[$\therefore$ ত্রিকোণমিতির ফল অনুসারে $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{16}{9}$.]

14. (গ) **সংকেত :** $x=\sin\theta$ ধরে সমাকলটির পরিবর্তন ঘটিয়ে বিটা ও গামা ফাংশনের ধর্ম কাজে লাগান।

15. **সংকেত :** $\int_0^\infty \frac{x^8\left(1-x^6\right)}{(1+x)^{24}}\,dx=\int_0^\infty \frac{x^8}{(1+x)^{24}}\,dx-\int_0^\infty \frac{x^{14}}{(1+x)^{24}}\,dx$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{9-1}}{(1+x)^{9+15}}\,dx-\int_0^\infty \frac{x^{15-1}}{(1+x)^{15+9}}\,dx$$

$$=B(9,15)-B(15,9) \qquad [\text{B } (m,n) \text{ এর ধর্ম থেকে}]$$

$= 0 \ \left[\therefore \mathrm{B}(m,n) - \mathrm{B}(n,m)\right]$

অতিরিক্ত পাঠ

(Selected Readings)

1. Das & Mukherjee–Integral Claculus.
2. Maity & Ghosh–Integral Calculus.
3. Chatterjee, D; Integral Calculus & Differntial Equations, Tata McGrw Hill
4. Shanti Narayan–Mathematical Analysis. S. Chand
5. Apostol, F.M ; Calculus, Vol I.

একক 6 ❑ রেখাসমাকল ও চাপের দৈর্ঘ্য (Line Indegral and Length of Plane curves)

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা ঃ

যেসমস্ত বাস্তব ক্ষেত্রে কলনবিদ্যার প্রয়োগ আছে চাপের দৈর্ঘ্য (Arc length) নির্ণয় তার মধ্যে একটি। জ্যামিতির সাহায্যে কয়েকটি বিশেষ বক্রের চাপের দৈর্ঘ্য সম্বন্ধে ধারনা করা যায়। এই এককে সেগুলি এবং তার বাইরে অনেক প্রয়োজনীয় বক্রের চাপের দৈর্ঘ্য সমাকলের মাধ্যমে নির্ণয় পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

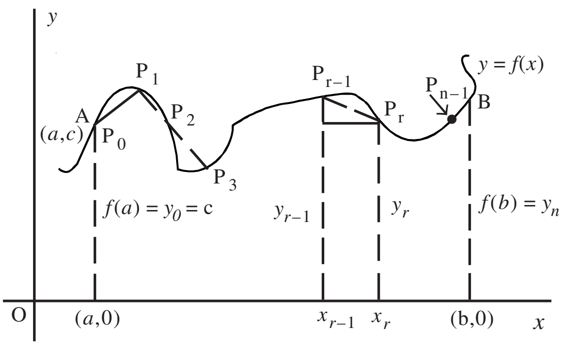
6.2 উদ্দেশ্য ঃ

এই একক পাঠ করে আপনি

- কলনবিদ্যার প্রয়োগে কিভাবে সমতলিক বক্ররেখার (Plane curve) সমগ্র বা নির্দিষ্ট অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায় তা জানতে পারবেন।
- অনেক নতুন বক্ররেখার সঙ্গে পরিচিত হবেন।

6.3 সমতলিক বক্ররেখার চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ঃ

ধরাযাক্ $y = f(x)$ একটি বক্রের কার্তেসীয় (cartesian) সমীকরণ যা পার্শ্ববর্তী চিত্রে প্রদর্শিত; $f(x)$ ফাংশনটি $[a\ b]$ অন্তরালে সন্তত এবং উক্ত অন্তরালের প্রত্যেক বিন্দুতে $f'(x)$ এর অস্তিত্ব আছে। বক্রচাপটির উপর $A[a,f(a)]$ এবং $B\ [b,\ f(b)]$ দুটি বিন্দু। যদি A থেকে B পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্যকে $\overset{\frown}{AB} = s$ দ্বারা সূচীত করা হয়। এবং $\overset{\frown}{AB}$ চাপের উপর Pr $[x_r,\ f(x_r)]$, যখন r = 1, 2, ..., n–1 অর্থাৎ P_1, P_2, P_3 ...., P_{r-1}, P_r, ..., P_{n-1} বিন্দুগুলি স্থাপনকরে উহাকে nটি অংশে বিভক্ত করা হয় তাহলে



জ্যাগুলির দৈর্ঘ্য সমষ্টি $= \overline{AP_1} + \overline{P_1P_2} + \cdots\cdots \overline{P_{r-1}P_r} + \cdots\cdots \overline{P_{n-1}B} \neq s$ হয়। কিন্তু যদি বিভাজন সংখ্যা n এমনভাবে বাড়ানো যায় যাতে দীর্ঘতম জ্যাটির দৈর্ঘ্য (δ) শুন্যের নিকটবর্তী হয় (অর্থাৎ $n \to \infty$ হলে $\delta \to 0$ হয়)

তখন $s = \overset{\frown}{AB} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r-1}^{n} \overline{P_{r-1}P_r}$ যখন $A = P_0,\ x_0 = a,\ P_n = B,\ x_n = b$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_r)^2 + (\Delta y_r)^2}$$ যখন $\Delta x_r = (x_r - x_{r-1})$ এবং $\Delta y_r = (y_r - y_{r-1})$; $y_r = f(x_r)$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_r}{\Delta x_r}\right)^2} \cdot \Delta x_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

আবার যেহেতু $f(x)$ ফাংশনটি $[a,b]$ অন্তরালে সন্তত এবং অবকলনযোগ্য এবং $[x_{r-1}, x_r] \subset [a,b]$ কাজেই $[x_{r-1}, x_r]$ অন্তরালে অবকলনবিদ্যার গড়মান উপপাদ্য (M.V.T) প্রয়োগ করা যায়।

$$\therefore\ y_r - y_{r-1} = f(x_r) - f(x_{r-1}) = (x_r - x_{r-1})\, f'(\xi_r),$$

যখন $x_{r-1} < \xi_r < x_r$

বা, $\Delta y_r = \Delta x_r f'(\xi_r)$

বা, $\dfrac{\Delta y_r}{\Delta x_r} = f'(\xi_r)$

$\therefore$ (i) নং থেকে পাওয়া যায়

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \sqrt{1+\{f'(\xi_r)\}^2}\ \Delta x_r$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad \text{....................} \quad \text{(ii)}$$

প্রান্তলিপি–1. যদি বক্রের সমীকরণটি $x = g(y)$ হয় A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যাথাক্রমে (a, c) ও (b, d) হয় তাহলে

$$s = \overset{\frown}{AB} = \int_c^d \sqrt{1+\{g'(y)\}^2}\,dy = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \text{..............} \quad \text{(iii)}$$

অবশ্যই এখানে $\dfrac{dx}{dy}$ এর অস্তিত্ব থাকতে হবে।

প্রান্তলিপি—2. যদি বক্রটির সমীকরণ $x = \phi(t)$, $y = \Psi(t)$ এই প্রাচলিক রূপে (Parametric Form) প্রকাশিত থাকে এবং নির্ণেয় দৈর্ঘ্যের জন্য নির্ধারিত চাপটির প্রান্তিক বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে t_1 ও t_2-এর অনুসঙ্গী হয় তাহলে

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \Big/ \dfrac{dx}{dt}$ এবং উপরে (iii) নং সূত্র অনুসরণ করে লেখা যায়

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt \quad \text{............} \quad \text{(iv)}$$

প্রান্তলিপি—3. যদি পোলার স্থানাঙ্কে বক্রের সমীকরণ $r = f(\theta)$ দ্বারা নির্দেশিত থাকে তাহলে যেহেতু $x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$, $y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$ এবং নির্ণেয় নির্দিষ্ট চাপটির প্রান্তবিন্দুদ্বয় θ_1, θ_2 দ্বারা নির্ধারিত হয় তাহলে (iv) নং সূত্র অনুযায়ী

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\}^2 + \{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\}^2\, d\theta}$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\{f(\theta)\}^2 + \{f'(\theta)\}^2}\, d\theta \quad \text{.....................} \quad \text{(v)}$$

প্রান্তলিপি—4. বক্রটি যদি পেডাল (Pedal) সমীকরণ $p = f(r)$ -এ প্রকাশিত থাকে তবে $r = r_1$ থেকে $r = r_2$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{dr}\,dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - p^2}}\,dr, \quad \text{...................} \quad \text{(vi)}$$

যখন p-কে $f(r)$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা যায় এবং

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{\cos\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{r^2}}} \quad (\because p = r\sin\phi)$$

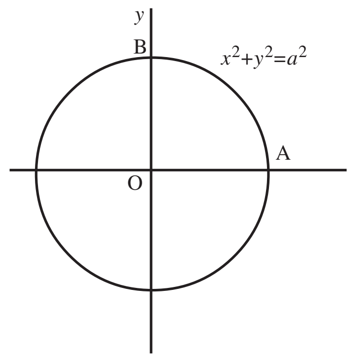
$$= \frac{r}{\sqrt{r^2 - p^2}}$$

অনুশীলনী—1

উদাহরণ 1. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটির পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ কে x-এর সাপেক্ষে অবকল করে পাওয়া যায় $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$



বৃত্তটির প্রথমপাদে ছেদিত চাপ $\overset{\frown}{AB}$ মোট পরিধির এক চতুর্থাংশ, কারণ বৃত্তিটি x-অক্ষ ও y-অক্ষের সাপেকেক্ষ প্রতিসম (symmetric) এবং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$

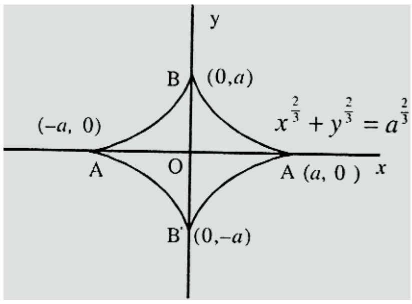
অতএব বৃত্তিটির পরিধি $= 4\,.\overset{\frown}{AB} = 4\,.\int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$$= 4\,.\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx = 4.\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = 4.a\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= 4a\,.\frac{\pi}{2} = 2\pi a \text{ একক।}$$

উদাহরণ 2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ এ্যাসট্রয়েড (Astroid)-টির পরিসীমা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ - কে x এর সাপেক্ষে অবকল করে পাওয়া যায়



$$\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+\frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

বা, $$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=-\frac{\sqrt{y^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$=-\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

এখন বক্রটির প্রথমপাদের অংশ $\overset{\frown}{AB}=\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$$=\int_0^a\sqrt{1+\left(-\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx$$

$$=a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx=a^{\frac{1}{3}}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_0^a=\frac{3}{2}a$$ একক।

যেহেতু বক্রটি x ও y উভয় অক্ষের সাপেক্ষেই প্রতিসম এতএব নির্ণেয় পরিসীমা $=4\,.\overset{\frown}{AB}=4.\frac{3a}{2}=6a$ একক।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ বক্রটি $x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$ এই প্রাচলিক রূপে প্রকাশ করা যায়। যেহেতু বক্রটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষেই প্রতিসম অতএব

পরিসীমা $=4\,.\overset{\frown}{AB}=4.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$$=4.3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^4\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta=6a.1=6a$$ একক

উদাহরণ 3. $y=\log\sec x$ বক্রটির x=0 থেকে $x=\dfrac{\pi}{3}$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে $y = \log\ \sec x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sec x}\cdot\sec x\tan x = \tan x$

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\tan^2 x}\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec x dx$

$$=[\log|\sec x+\tan x|]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\log\left|\sec\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{3}\right|-\log|\sec 0+\tan 0|$$

$=\log(2+\sqrt{3})$ একক।

উদাহরণ 4. $x=e^{\theta}\sin\theta,\ y=e^{\theta}\cos\theta$ বক্রটির $\theta=0$ থেকে $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণ করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে $\dfrac{dx}{d\theta}=e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta}=e^{\theta}\cos\theta+e^{\theta}(-\sin\theta)$

$$=e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta) \qquad\qquad =e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)$$

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

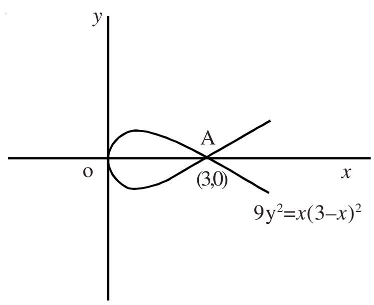
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{e^{2\theta}\left\{(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2\right\}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}.e^{\theta}d\theta=\sqrt{2}\left[e^{\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{0}\right)$$

$=\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$ একক।

উদাহরণ 5. $x=t^2,\ y=t-\dfrac{1}{3}t^3$ বক্রদ্বারা গঠিত লুপ (loop) টির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ t আপনয়ন করার জন্য দ্বিতীয়টি থেকে



$$(y)^2=\left(t-\frac{1}{3}t^3\right)^2=t^2\left(1-\frac{1}{3}t^2\right)^2$$

$=x\left(1-\dfrac{1}{3}x\right)^2$ [প্রথমটি থেকে]

বা, $9y^2=x(3-x)^2$

সমীকরণটিতে $y=0$ বসালে পাওয়া যায় $x=0,\ 3$; y-চলের ঘাত জোড় সংখ্যা $x \not< 0$, কারণ $x<0$ হলে y কাল্পনিক হতে হয়। উপরের লক্ষণগুলি থেকে চিত্রে প্রদর্শিত লুপটি পাওয়া যায় যা x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে (0, 0) থেকে (3, 0) পর্যন্ত বিস্তৃত।

এখন বক্রের সমীকরণকে x-এর সাপেক্ষে অবকল করে পাই

$$18y\cdot\frac{dy}{dx}=(x-3)^2+2x(x-3)=(x-3)(x-3+2x)$$

$$=3(x-3)(x-1)$$

$$\therefore\ 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{9(x-3)^2(x-1)^2}{18^2y^2}=1+\frac{(x-3)^2(x-1)^2}{4x(3-x)^2}$$

$$=1+\frac{(x-1)^2}{4x}=\frac{(x+1)^2}{4x}$$

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = 2 × x-অক্ষের উপরের দিকের $\overset{\frown}{\mathrm{OA}}$ চাপের দৈর্ঘ্য

$$=2.\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\,.\int_0^3\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$=\int_0^3\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^3$$

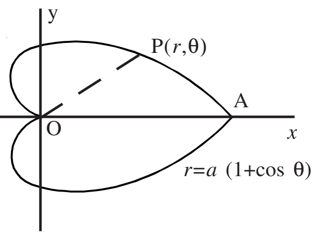
$$=\frac{2}{3}\,.\,3^{\frac{1}{2}}+2.\,3^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{3}\ \text{একক।}$$

উদাহরণ 6. $r=a(1+\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েড (Cardioide) টির পরিসীমা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $r=a(1+\cos\theta)$ বক্রটির A বিন্দুতে $\theta=0$ এবং 0 বিন্দুতে $\theta=\pi$ ইহা প্রাথমিক রেখা ox-এর সাপেক্ষে প্রতিসম এবং OA = $2a$

আবার $\dfrac{dr}{d\theta}=-a\sin\theta$

$$\Rightarrow r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta$$



$$=a^2\left\{\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2+\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\right\}$$

$$=4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

এখন P বিন্দুর মেরুস্থানাঙ্ক (r,θ) হলে $\overset{\frown}{AP}$ চাপের দৈর্ঘ্য

$$=\int_0^{\theta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\theta}2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=2a\left[\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\theta}=4a\sin\frac{\theta}{2} \text{ একক।}$$

$\therefore$ বক্রটির উপরের অর্ধের দৈর্ঘ্য $=4a\sin\frac{\pi}{2}$ [0 বিন্দুতে $\theta=\pi$]

$= 4a$ একক

সুতরাং বক্রটির মোট দৈর্ঘ্য = $2\times 4a$ = $8a$ একক।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $r=a(1+\cos\theta), \tan\phi=r\frac{d\theta}{dr},\ p=r\sin\phi$

এই তিনটি সম্পর্ক থেকে θ এবং ϕ অপনয়ন করলে পেডাল $(p,\ r)$ সমীকরণ পাওয়া যায় এবং তা হল $2ap^2=r^3$

[ইহা অবকলনবিদ্যার বিষয়

$$p=r\sin\phi=\frac{r}{\operatorname{cosec}\phi}=\frac{r}{\sqrt{1+\cot^2\phi}}=\frac{r}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2}} \qquad \left(\because\ \tan\phi=\frac{rd\theta}{dr}\right)$$

$$=\frac{r^2}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}=\frac{r^2}{\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}} \qquad \left(\because \frac{dr}{d\theta}=-a\sin\theta\right)$$

$$=\frac{r^2}{a\sqrt{2(1+\cos\theta)}}=\frac{r^2}{a\sqrt{\frac{2r}{a}}}\Rightarrow p^2=\frac{r^4}{2ar} \text{ বা, } \qquad 2ap^2=r^3]$$

এখন A বিন্দুতে $\theta=0\Rightarrow r=2a$ এবং 0 বিন্দুতে $\theta=\pi\Rightarrow r=0$

$\therefore$ উপরের উর্ধ্বচাপের দৈর্ঘ্য $=\int_{2a}^{0}\frac{rdr}{\sqrt{r^2-p^2}}=\int_{2a}^{0}\frac{rdr}{\sqrt{r^2-\frac{r^3}{2a}}}$

$$=\sqrt{2a}\int_{2a}^{0}\frac{dr}{\sqrt{2a-r}}=2.\sqrt{2a}\left[-\sqrt{2a-r}\right]_{2a}^{0}=2\sqrt{2a}\left(-\sqrt{2a}\right)=-4a$$

দৈর্ঘ্য ঋণাতক হতে পারেনা; সেজন্য উপরিঅর্ধের দৈর্ঘ্য $4a$ ধরতে হবে।

$\therefore$ মোট দৈর্ঘ্য = $2\times 4a$ = $8a$ একক।

প্রশ্নমালা —1

1. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু থেকে নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দু পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
2. $x=2\cos\theta, y=2\sin\theta$ বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় করুন।

3. $r = 1 - \cos\theta$ বক্রটির পরিসীমা নির্ণয় করুন।

4. $p^2 = ar$ অধিবৃত্তটির $r = a$ থেকে $r = 2a$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

প্রশ্নমালা—1 এর উত্তর

1. $a\left\{\sqrt{2} + \log\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}$ একক। 2. 4π একক 3. 8 একক।

4. $a\left\{\sqrt{2} + \log\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}$ একক।

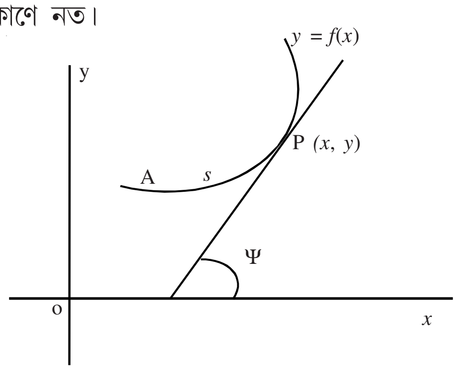
6.4 বক্ররেখার স্বকীয় সমীকরণ (Intrinsic equation) :

কোন বক্ররেখার উপরে একটি স্থির বিন্দু A থেকে অন্য একটি চলমান বিন্দু P পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য কে s এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ψ দ্বারা চিহ্নিত করা হলে s ও ψ কে যে সম্পর্কে আবদ্ধ করা যায় তাকে **স্বকীয় সমীকরণ** (Intrinsic equation) বলা হয়।

এই অনুচ্ছেদে বক্রের সমীকরণের বিশেষ কয়েকটি রূপের ক্ষেত্রে স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয়ের পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

(ক) **বক্রের কার্তেসীয় সমীকরণ থেকে উহার স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি :**

$y = f(x)$ বক্রের উপর A একটি স্থির বিন্দু এবং চলমান বিন্দুটির যেকোন একটি অবস্থান $p(x, y)$ বিন্দু। P-তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে ψ কোণে নত।



$$\therefore \quad \tan\psi = \frac{dy}{dx} = f'(x) \ldots\ldots\ldots(i)$$

আবার $s = \text{AP} = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$ যখন

A ও P বিন্দুর ভুজ

(Abscissa) যথাক্রমে a ও x.

$$\therefore \; s \quad = \int_a^x \sqrt{1 + \left\{f'(x)\right\}^2}\, dx = \phi(x) \quad \text{(ধরা হল)} \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) এর মধ্যে x অপনয়ন করলে s ও ψ এর যে সম্পর্ক পাওয়া যাবে উহাই $y = f(x)$ বক্রের স্বকীয় সমীকরণ।

(খ) **বক্রের প্রাচলিক সমীকরণ থেকে উহার স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি :**

$x = f(t), \quad y = g(t)$ বক্রের উপর স্থির বিন্দু A এবং চলমান বিন্দু P-তে প্রচল t এর মান যথাক্রমে

t_1 ও t হলে $\tan\psi = \frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = h(t)$ (ধরা হল)..........(iii)

আবার, $s = \overset{\frown}{AP} = \int_{t_1}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_{t_1}^{t}\sqrt{\left\{f'(t)\right\}^2 + \left\{g'(t)\right\}^2}\,dt$

$= \phi(t)$ (ধরা হল)..............................(iv)

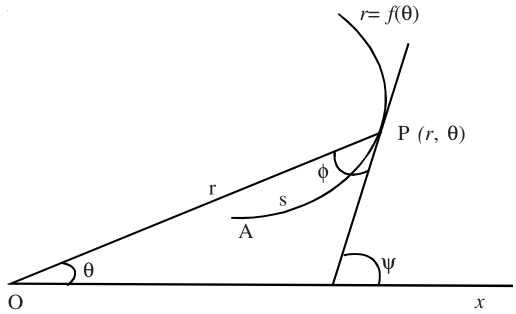
(iii) এবং (iv) এর মধ্যে t অপনয়ন করলে নির্ণেয় স্বকীয় সমীকরণ পাওয়া যাবে।

(গ) **বক্রের মেরু সমীকরণ থেকে উহার স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি :**

$r = f(\theta)$ বক্রের উপর A (a,α) এবং $P(r,\theta)$ দুটি বিন্দু। P-তে অঙ্কিত স্পর্শক প্রাথমিক রেখা $0x$ এর সহিত ψ এবং রেডিয়াস ভেক্টর (Radius vector) $r = OP$-এর সহিত ϕ কোণে নত।

$\therefore\ \tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$..........$(v)$

$\psi = \theta + \phi$.............(vi)



এবং $s = \overset{\frown}{AP} = \int_{\alpha}^{\theta}\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$= \int_{\alpha}^{\theta}\sqrt{\left\{f(\theta)\right\}^2 + \left\{f'(\theta)\right\}^2}\,d\theta = g(\theta)$ (ধরা হল).........(vii)

(v), (vi) এবং (vii) থেকে θ এবং ϕ অপনয়ন করলে s এবং ψ এর যে সম্পর্ক পাওয়া যাবে উহাই প্রদত্ত বক্রের স্বকীয় সমীকরণ।

(ঘ) **বক্রের পেডাল সমীকরণ থেকে উহার স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি :**

ধরা যাক্ $p = f(r)$ পেডাল সমীকরণ যে বক্রকে সূচিত করে তার উপর A স্থির বিন্দুটি $r = a$ এবং P চলমান বিন্দুটি r দ্বারা চিহ্নিত। অতএব সূত্রানুসারে

$s = \overset{\frown}{AP} = \int_a^r \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - p^2}} = \int_a^r \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - \left\{f(r)\right\}^2}} = g(r)$ (ধরা হল).............(viii)

বক্রতা ব্যাসার্ধ $\rho = \frac{ds}{d\psi} = r\frac{dr}{dp} = \frac{r}{f'(r)}$......................$(ix)$

(viii) ও (ix) থেকে r অপনয়ন করে নিম্নলিখিত গঠনের অবকল সমীকরণ পাওয়া যায় :

$$\frac{ds}{d\psi} = h(s).$$

উপরের সম্পর্কটিকে সমাকলন করলে s ও ψ এর সম্পর্ক পাওয়া যাবে যা প্রদত্ত বক্রটির স্বকীয় সমীকরণ।

অনুশীলনী—2

উদাহরণ 1. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ এ্যাসট্রয়েডটির স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় করুন যখন $x = a$ বিন্দুটি স্থির বিন্দু।

সমাধান : বক্রটির প্রাচলিক সমীকরণ $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ এবং $x = a$ স্থির বিন্দুটি $t = 0$ দ্বারা চিহ্নিত।

$$\therefore \quad \tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t$$

$$= \tan(-t)$$

$$\Rightarrow \psi = -t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

আবার $s = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^t \sqrt{\left(-3a\cos^2 t\cdot\sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\, dt$

$$= \int_0^t 3a\sin t\cos t\, dt = 3a\frac{\sin^2 t}{2} \ldots\ldots(ii)$$

(i) ও (ii) থেকে t অপেনয়ন করে পাওয়া যায়

$$s = \frac{3}{2}a\sin^2(-\psi) = \frac{3}{2}a(-\sin\psi)^2 = \frac{3}{2}a\sin^2\psi$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্বকীয় সমীকরণ $s = \frac{3}{2}a\sin^2\psi.$

উদাহরণ-2. $x = a(\theta + \sin\theta),\ \ y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডের স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় করুন যখন শীর্ষবিন্দু $\theta = 0$ স্থির বিন্দু এবং শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্থির সরলরেখা।

সমাধান : $s = \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^\theta \sqrt{\{a(1+\cos\theta)\}^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta$

$$= a\int_0^{\theta}\sqrt{4\cos^4\frac{\theta}{2}+4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$= a\int_0^{\theta}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2},.............(i)$$

এবং $\tan\psi = \dfrac{dy}{d\theta}\Big/\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \tan\dfrac{\theta}{2}$

$\therefore\quad \psi = \dfrac{\theta}{2}$..........................(ii)

(i) ও (ii) থেকে θ অপনয়ন করে পাওয়া যায়—

$$s = 4a\sin\psi,$$

ইহাই নির্ণেয় স্বকীয় সমীকরণ।

উদাহরণ-3. $r = a(1+\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডের $\theta = 0$ কে স্থির বিন্দু ধরে উহার স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : 6·3 অনুচ্ছেদের উদাহরণ-6 অনুযায়ী বক্রটির $\theta = 0$ থেকে θ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য

$s = 4a\sin\dfrac{\theta}{2}$..............$(i)$

আবার $\tan\phi = r\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{a(1+\cos\theta)}{-a\sin\theta} = \dfrac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$$= -\cot\frac{\theta}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$\therefore\quad \phi = \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$..............$(ii)$

এবং $\psi = \theta + \phi$................(iii)

(ii) ও (iii) থেকে পাওয়া যায়

$$\psi = \theta + \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2}+\frac{3\theta}{2}$$

$\therefore\quad \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{3}\left(\psi - \dfrac{\pi}{2}\right)$

এই মানটি (i) নং-এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$s=4a\sin\left\{\frac{1}{3}\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=-4a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\psi}{3}\right)$, ইহাই নির্ণেয় স্বকীয় সমীকরণ।

উদাহরণ-4. কোন একটি বক্রের স্বকীয় সমীকরণ $s=c\tan\psi$ হলে দেখান যে উহার কার্তেসীয় সমীকরণ $y=c\cosh\frac{x}{c}$; প্রদত্ত শর্ত $\psi=0$ যখন $x=0,\ \ y=c.$

সমাধান : $s=c\tan\psi$ -কে x-এর সাপেক্ষে অবকল করে পাই $\frac{ds}{dx}=c\cdot\sec^2\psi\frac{d\psi}{dx}$

বা, $\sec\psi=c\sec^2\psi\frac{d\psi}{dx}$ $\left[\therefore\frac{dx}{ds}=\cos\psi\right]$

বা, $dx=c\cdot\sec\psi\,d\psi$

সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$x=c\log|\sec\psi+\tan\psi|+k_1$$

কিন্তু $x=0$ যখন $\psi=0$ হওয়ায় $k_1=0$

$\therefore\ \ x=c\log|\sec\psi+\tan\psi|$

$\Rightarrow\ \ \sec\psi+\tan\psi=e^{\frac{x}{c}}$................$(i)$

আবার, $\mathrm{cos}ec\psi=\frac{ds}{dy}=c\sec^2\psi\frac{d\psi}{dy}$

$dy=c\sec\psi\tan\psi d\psi$

সমাকল করে ; $y=c\sec\psi+k_2$

কিন্তু প্রাথমিক শর্তানুসারে $y=c$ যখন $\psi=0$; সুতরাং $k_2=0.$

$$\therefore\ \ y=c\sec\psi.................(ii)$$

(i) নং থেকে পাওয়া যায় $\sec\psi-\tan\psi=e^{-\frac{x}{c}}$......$(iii)$

(i) ও (iii) যোগ করে পাওয়া যায়

$$2\sec\psi=e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}$$

বা, $\frac{y}{c}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)$ [(ii) থেকে]

$$=\cos h\frac{x}{c}$$

$\therefore \quad y = c\cosh\frac{x}{c}$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

6.5 সারাংশ ঃ

1. $y = f(x)$ বক্রের $x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left\{f'(x)\right\}^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

2. $x = \phi(t), \quad y = \psi(t)$ বক্রের t_1 ও t_2 বিন্দুর মধ্যেকার চাপের দৈর্ঘ্য $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

3. $r = f(\theta)$ বক্রের উপর θ_1 ও θ_2 দ্বারা নির্ধারিত বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী চাপের দৈর্ঘ্য

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left\{f(\theta)\right\}^2 + \left\{f'(\theta)\right\}^2}\, d\theta$$

4. $p = f(r)$ পেডাল সমীকরণ যুক্ত বক্রের $r = r_1$ থেকে $r = r_2$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{dr} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - \left\{f(r)\right\}^2}} dr.$$

5. **স্বকীয় সমীকরণ (Intrinsic equation) :** কোন বক্ররেখার উপর একটি স্থির বিন্দু A থেকে অন্য একটি চলমান বিন্দু P পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য কে s এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ψ দ্বারা চিহ্নিত করা হলে s ও ψ কে যে সম্পর্কে আবদ্ধ করা যায় তাকে স্বকীয় সমীকরণ বলে।

6. বক্রের কার্তেসীয় সমীকরণ থেকে, প্রাচলিক সমীকরণ থেকে, মেরু সমীকরণ থেকে ও পেডাল সমীকরণ থেকে স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতির জন্য 6·4 অনুচ্ছেদের যথাক্রমে (ক), (খ), (গ) ও (ঘ) অংশগুলি দেখুন।

6.6 বিষয়মুখী ছোট প্রশ্নাবলী ঃ

নিম্নের প্রতি ক্ষেত্রে পাশের উত্তর গুলি থেকে সঠিক উত্তর টিকে চিহ্নিত করুন (M C Q) :

1. $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্তের প্রথম পাদে যে অংশটি আছে তার দৈর্ঘ্য (i) $\frac{1}{4}\pi a^2$ (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{\pi}{4}$.

2. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের $x = \frac{a}{2}$ এবং $x = a$ কোটিদ্বয়ের মধ্যবর্তী চাপের দৈর্ঘ্য

(i) $\frac{1}{3}\pi a$ (ii) $\frac{1}{2}\pi a$ (iii) $\frac{2a\pi}{3}$

3. $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের শীর্ষ বিন্দু থেকে নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দু পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য

(i) $\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)$ (ii) $\frac{1}{2}\log 2$ (iii) $\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$

4. $r = 2a\cos\theta$ বক্রের পরিসীমা (i) $\frac{1}{3}\pi a$ (ii) $\frac{2\pi a}{3}$ (ii) $2\pi a$

5. $r = \theta^2$ বক্রের $\theta = 0$ থেকে $\theta = \sqrt{5}$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য (i) 6 (ii) $\frac{19}{3}$ (iii) $\sqrt{5}$

6.6.1 বিষয়মুখী ছোট প্রশ্নাবলী উত্তর ঃ

1. $\frac{\pi}{2}$ একক 2. $\frac{\pi a}{3}$ একক 3. $\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)$ একক

4. $2\pi a$ একক [সংকেত : বক্রটি মেরুগামীবৃত্ত যার কেন্দ্র প্রাথমিক রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore\ s = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = 2\cdot 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta = 4a\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi a$ একক] 5. $\frac{19}{3}$ একক।

6.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী ঃ

1. (ক) $y^2 = x$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু থেকে যে বিন্দুতে $x = 1$ বক্রটিকে প্রথমপদে ছেদ করে তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

(খ) $x^2 = 4y$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু থেকে যে বিন্দুর কোটি $x = 2$ সেই বিন্দু পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

2. শীর্ষ বিন্দু (0,0) থেকে $\left(x_1, y_1\right)$ বিন্দু পর্যন্ত $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}\right)$ ক্যাটিনারী (catcnary) টির চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

3. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ হাইপোসাইক্লয়েডটির পরিসীমা কত?

4. $x = a(\cos\theta+\theta\sin\theta),\ y = a\left(\sin\theta-\theta\cos\theta\right)$ বক্রের $\theta = 0$ থেকে $\theta = \theta_1$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

5. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডের একটি চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

6. $x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $y = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ বক্রটির পরিসীমা নির্ণয় করুন।

7. নিম্নের বক্রগুলি দ্বারা গঠিত লুপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

(ক) $3ay^2 = x(x - a)^2$ (খ) $9y^2 = (x + 7)(x + 4)^2$

8. $x^2\left(a^2 - x^2\right) = 8a^2y^2$ বক্রের মোট দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

9. $r = 4(1 - \cos\theta)$ বক্রের মোট দৈর্ঘ্য কত?

10. দেখান যে $r = a(1 - \cos\theta)$ বক্রটির উপরি অর্ধের চাপ $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

11. $r = a(1 + \cos\theta)$ বক্রের ক্ষেত্রে দেখান যে $s^2 + 9\rho^2 = 16a^2$, যখন s হ'ল $\theta = 0$ থেকে যেকোন বিন্দু θ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য এবং ρ হ'ল θ বিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্ধ।

12. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ বক্রের জন্য দেখান যে (ক) $s \alpha x^{\frac{2}{3}}$ (খ) $4s^2 + \rho^2 = 6as$

যেখানে বক্রটির যে বিন্দুতে $x = 0$ সেখান থেকে যেকোনো বিন্দু x পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য $= s$.

13. নিম্নলিখিত বক্রগুলির স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় করুন ; স্থির বিন্দু গুলি প্রত্যেক বক্রের জন্য নির্ধারিত আছে।

(ক) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত; শীর্ষবিন্দু (0,0)

(খ) $ay^2 = x^3$ অধিত্রিঘাত অধিবৃত্ত; কাস্প (0,0)

(গ) $y = c\cosh\dfrac{x}{c}$ ক্যাটিনারী; শীর্ষবিন্দু (0,0)

(ঘ) $x = e^{\theta}\sin\theta$, $y = e^{\theta}\cos\theta$; $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

(ঙ) $r = a(1 - \cos\theta)$ কার্ডিঅয়েড ; মেরুবিন্দু (0,0)

(চ) $r = e^{\theta\cot\alpha}$ ধ্রুবককোণী কুন্ডলী; $(a,0)$ বিন্দু

14. নিম্নের বক্রগুলির স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় করুন

(ক) $p^2 = r^2 - a^2$ (খ) $p = r\sin\alpha$.

6.7.1 সর্বশেষ প্রশ্নাবলীর উত্তর ঃ

1. $\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)$ একক 2. $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}}-e^{-\frac{x_1}{a}}\right)$ একক

3. $\frac{4\left(a^2+ab+b^2\right)}{a+b}$ একক [**সংকেত** : বক্রটির সমীকরণ $x=a\cos^3\phi$, $y=b\sin^3\phi$, প্রথমপাদে ϕ এর মান 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত পরিবর্তিত হয় এবং বক্রটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষেই প্রতিসম।

$\therefore\ s=4\times$ প্রথম পাদের চাপের দৈর্ঘ্য

$$=4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-3a\cos^2\phi\sin\phi\right)^2+\left(3b\sin^2\phi\cos\phi\right)^2}\,d\phi$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}\cdot\cos\phi\sin\phi\,d\phi$$

$$=12\int_a^b\frac{z\cdot 2zdz}{2\left(b^2-a^2\right)}\qquad [a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi=z^2 \text{ ধরে}]$$

$$=\frac{12}{b^2-a^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_a^b=\frac{4}{b^2-a^2}\cdot\left(b^3-a^3\right)=.....\Big]$$

4. $\frac{1}{2}a\theta_1$ একক 5. $8a$ একক [**সংকেত** : শীর্ষবিন্দু $\theta=0$ থেকে যে কোন বিন্দু θ পর্যন্ত দৈর্ঘ্য

$$s_1=\int_0^\theta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^\theta 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta=4a\sin\frac{\theta}{2}.$$

অতএব উপরি অর্ধের দৈর্ঘ্য ($\theta=0$ থেকে $\theta=\pi$ পর্যন্ত) $=4a\sin\frac{\pi}{2}=4a$

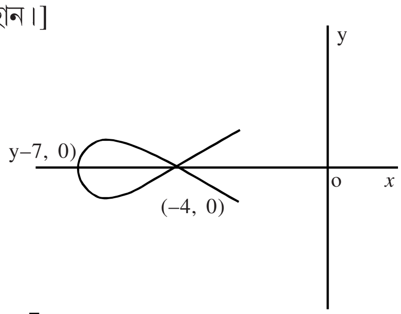
$\therefore$ প্রতি সমতার জন্য মোট দৈর্ঘ্য = $2\times4a$ = $8a$ একক।]

6. 2π একক [**সংকেত** : $t=\tan\phi$ বসালে পরিবর্তিত সমীকরণ

$x=\cos 2\phi,\quad y=\sin 2\phi$ i.e. $x^2+y^2=1$ বৃত্ত।]

7. (ক) $\frac{4a}{\sqrt{3}}$ একক [**সংকেত** : উদাহরণ-5 এর মত অগ্রসর হোন।]

(খ) $4\sqrt{3}$ একক [**সংকেত** : লুপটি $(-4, 0)$, $(-7,0)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত এবং x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।



$$\therefore \quad s = 2\int_{-7}^{-4}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \ldots\ldots\ldots$$

$$= 2\int_{-7}^{-4}\frac{x+8}{2\sqrt{x+7}}\,dx = 2\int_{-7}^{-4}\left\{\sqrt{x+7}+\frac{1}{\sqrt{x+7}}\right\}dx = \ldots\ldots\Big]$$

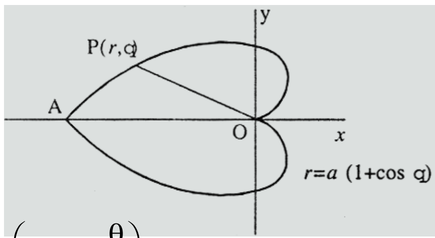
8. $\pi a\sqrt{2}$ একক [**সংকেত** : বক্রটি বন্ধ (closed) এবং $(-a, 0)$ থেকে $(0,0)$ পর্যন্ত একটি এবং $(0,0)$ থেকে $(a,0)$ পর্যন্ত অন্য একটি এই মোট দুটি লুপ দ্বারা গঠিত। বক্রটি x-অক্ষ ও y-অক্ষ উভয়ের সাপেক্ষেই প্রতিসম।

$$\text{অতএব নির্ণেয় চাপ } = 4\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 4\int_0^a\sqrt{1+\frac{\left(a^2-2x^2\right)^2}{8a^2\left(a^2-x^2\right)}}\,dx$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{2}a}\int_0^a\frac{3a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{a}\int_0^a\left\{2\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right\}dx \text{ ইত্যাদি]}$$

9. 32 একক

10. **সংকেত** : $\theta = 0$ থেকে যে কোন বিন্দু θ পর্যন্ত দৈর্ঘ্য



$$s = \int_0^\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^\theta\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^\theta 2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$\therefore$ উপরি অর্ধের দৈর্ঘ্য $s_1 = 4a\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad(\theta = \pi$ বসিয়ে$)$ $= 4a$ একক।

আবার $\theta = \frac{2\pi}{3}$ পর্যন্ত দৈর্ঘ্য $s_2 = 4a\left(1-\cos\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad\left(\theta = \frac{2\pi}{3}\text{ বসিয়ে }\right)$

$$= 4a\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) = 2a \text{ একক}$$

$\therefore$ উপরের দুটি সম্পর্ক থেকে বলা যায় $s_2 = \frac{1}{2}s_1$.

11. **সংকেত** : উদাহরণ-6. অনুযায়ী $s = 4a\sin\frac{\theta}{2}$.........$(i)$

আবার $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{a(1+\cos\theta)}{-a\sin\theta} = -\cot\frac{\theta}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$

$\therefore\ \phi = \frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$.......$(ii)$

জ্যামিতি থেকে $\psi = \theta + \phi$.......(iii)

(ii) ও (iii) থেকে পাওয়া যায় $\psi = \theta + \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2}+\frac{3\theta}{2}$.....$(iv)$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{ds}{d\theta}\Big/\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{2a\cos\frac{\theta}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{4a}{3}\cos\frac{\theta}{2}......(v)$$

$\therefore$ (i) ও (v) থেকে : $s^2 + 9\rho^2 = \left(4a\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(4a\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$

$$= 16a^2.$$

12. **সংকেত (ক ও খ একত্রে)** : বক্রটি $x = a\sin^3\phi,\quad y = a\cos^3\phi;\quad x=0$ হলে $\phi = 0$

$$\therefore\quad s = \int_0^\phi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}\,d\phi = ...= \int_0^\phi 3a\sin\phi\cos\phi\, d\phi$$

$$= \frac{3a}{2}\sin^2\phi = \frac{3a}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \left[\therefore x = a\sin^3\phi\right]$$

$$= \frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow s\,\alpha\, x^{\frac{2}{3}}$$

আবার $\rho = \frac{\left(x_1^2+y_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x_1y_2 - y_1x_2}\left(x_1 \equiv \frac{dx}{d\phi}, x_2 = \frac{d^2x}{d\phi^2}\ \text{ইত্যাদি}\right)$

= ....

$$=\frac{\left(9a^2\sin^2\phi\cos^2\phi\right)^{\frac{3}{2}}}{9a^2\sin^2\phi\cos^2\phi}=3a\sin\phi\cos\phi$$

$$\therefore\quad (2s)^2+\rho^2=\left(3a\sin^2\phi\right)^2+\left(3a\sin\phi\cos\phi\right)^2$$

$$=9a^2\sin^2\phi=9a^2\cdot\frac{2s}{3a}=6as.$$

13. (ক) **সংকেত** : বক্রটির প্রাচলিক সমীকরণ $x=at^2,\quad y=2at.$

অতএব $\tan\psi=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{2a}{2at}=\frac{1}{t}$.......$(i)$

$\therefore\quad x=at^2=a\cot^2\psi$ [(i) থেকে]

এবং $y=2at=2a\cot\psi$ [(i) থেকে]

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু (0,0) তে $\psi=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore s=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi}\left\{\left(-2a\cot\psi\operatorname{cosec}^2\psi\right)^2+\left(-2a\operatorname{cosec}^2\psi\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}_{d\psi}$$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi}\left(-2a\operatorname{cosec}^3\psi\right)d\psi$ [বর্গমূলের ঋনাত্মক চিহ্ন নিয়ে]

$$=2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi}\operatorname{cosec}\psi\left(-\operatorname{cosec}^2\psi\right)d\psi$$

$$=2a\left[\operatorname{cosec}\psi\cot\psi+\log\left(\operatorname{cosec}\psi+\cot\psi\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\psi}$$

$$=2a\left[\operatorname{cosec}\psi\cot\psi+\log\left(\operatorname{cosec}\psi+\cot\psi\right)\right]$$

13. (ক) **সংকেত ঃ** বক্রটির প্রাচলিক সমীকরণ $x=at^2, y=at^3$

অতএব $\tan\psi=\frac{dy}{dx}=\frac{3at^2}{2at}=\frac{3t}{2}$..........(i)

$\therefore$ বক্রের সমীকরণ $x=\frac{4a}{9}\tan^2\psi, y=\frac{8}{27}\tan^3\psi$ [(i), থেকে]

এবং (0, 0) বিন্দুতে t = 0 এবং $\psi=0$.

$$\therefore s=\int_0^t\sqrt{(2at)^2+\left(3at^2\right)^2}\,dt=a\int_0^t\left(4+9t^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot t\,dt$$

$$=a\int_0^{\psi}(4+4\tan^2\psi)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}\tan\psi\cdot\frac{2}{3}\sec^2\psi d\psi \quad [\because t=\frac{2}{3}\tan\psi]$$

$$=\frac{8a}{9}\int_0^{\psi}\sec^2\psi.\sec\psi\tan\psi d\psi=\frac{8a}{27}\quad[\sec^3\psi]_0^{\psi}$$

$$=\frac{8a}{27}\left(\sec^3\psi-1\right)$$

13. (গ) **সংকেত ঃ** $\tan\psi=\dfrac{dy}{dx}=\sinh\dfrac{x}{c}$ ....(i)

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^x\cosh\frac{x}{c}\,dx=c\sinh\frac{x}{c} \quad ....\ \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) থেকে পাওয়া যায় $s=c\tan\psi$

13. (ঘ) $se^{-\frac{\pi}{4}}+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\cosh\psi-\sinh\psi\right)$

13. (ঙ) সংকেত ঃ $\tan\phi=r\dfrac{d\theta}{dr}=\dfrac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}=\tan\dfrac{\theta}{2}$

$\therefore\ \ \phi=\dfrac{\theta}{2}$, অতএব $\psi=\theta+\phi=\theta+\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3\theta}{2}$ .... (i)

$$s=\int_0^{\theta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=2\int_0^{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=4a\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$=4a\left(1-\cos\dfrac{\psi}{3}\right)$ [(i) থেকে]

13. (চ) সংকেত ঃ $\tan\phi=r\dfrac{d\theta}{dr}=\cdots\cdots=\tan\alpha$

$\therefore\phi=\alpha$, অতএব $\psi=\theta+\phi=\theta+\alpha$..........(i)

$$s=\int_a^r\frac{ds}{dr}\,dr=\int_a^r\sec\alpha\,dr=\sec\alpha\,[r]_a^r$$

$=(r-a)\sec\alpha=a\sec\alpha\left(e^{\theta\cot\alpha}-1\right)$ [(i) থেকে]

14. (ক) সংকেত, $p^2=r^2-a^2\Rightarrow\rho=r\dfrac{dr}{dp}=p$ .... (i)

$$s=\int_{r_1}^{r_2}\frac{rdr}{\sqrt{r^2-p^2}}=\int_a^r\frac{rdr}{a}=\frac{1}{2a}\left(r^2-a^2\right)=\frac{p^2}{2a}$$ [বক্রের সমীকরণ থেকে]

$$=\frac{\rho^2}{2a}$$ [(i) থেকে]

$$\therefore \rho=\sqrt{2as}\Rightarrow\frac{ds}{d\psi}=\sqrt{2as}$$

বা, $s^{-\frac{1}{2}}ds=\sqrt{2a}\,d\psi$

সমাকলকরে পাওয়া যায় $2\sqrt{s}=\sqrt{2a}\,.\,\psi+c$

কিন্তু $s=0,\ \psi=0$ হলে $c=0$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $s=\frac{1}{2}a\psi^2$

14. (খ) সংকেত ঃ $p=r\sin\alpha$ বক্রের সমীকরণ। আবার $p=r\sin\phi$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত।

$\therefore\ \sin\alpha=\sin\phi\Rightarrow\phi=\alpha$

$$s=\int\frac{rdr}{\sqrt{r^2-r^2\sin^2\alpha}}=\int_0^r\frac{dr}{\cos\alpha}=r\sec\alpha \quad .... \text{(i)}$$

$\rho=r\dfrac{dr}{dp}=r\operatorname{cosec}\alpha$ $\quad[\because p=r\sin\phi$ এবং $\phi=\alpha$]

$=s\cot\alpha$ [(i) থেকে]

$$\therefore\frac{ds}{d\psi}=\rho=s\cot\alpha$$

বা, $\dfrac{ds}{s}=\cot\alpha\, d\psi$

সমাকল করে পাওয়া যায়, $\log s=\psi\cot\alpha+\log c$

$\Rightarrow s=ce^{\psi\cot\alpha}$, ইহাই সমীকরণ।

অতিরিক্ত পাঠ
(Selected Readings)

1. Edwards D ; Integral Calculus
2. Das, B. & B.N Mukherjee; Integral Calculus.
3. Shanti Narayan; Integral Calculus
4. Mc. Shane E.J; Integration
5. Maity K & R K. Ghosh, Integral Calculus.

একক 7 ❑ দ্বি-সমাকল এবং ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় ঃ (Evaluation of Double Integrals, Volumes & Surface Areas)

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা ঃ

আগের একক গুলিতে আলোচিত সাধারণ বা একমাত্রিক সমাকলের পর এই এককে দ্বিমাত্রিক সমাকল সম্পর্কে ধারণা, নির্ণয় পদ্ধতি ও প্রয়োগ বিষয়ে আলোচনা করা হবে। তাছাড়া জ্যামিতিক ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট সমাকলের সার্থক প্রয়োগ করে কিভাবে ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করা যায় তাও বিশদভাবে দেখান হবে। বাস্তব সমস্যাবলির সাথে সমাকলগুলি কিভাবে যুক্ত হতে পারে এবং সেগুলি সমাধানে সাহায্য করতে পারে তাও অনুশীলনীর মাধ্যমে উপস্থাপন করা হবে।

7.2 উদ্দেশ্য ঃ

এই একক পাঠ করে আপনি

- সমাকল সম্পর্কে লব্ধ ধারণার প্রসার ঘটিয়ে দ্বিমাত্রিক সমাকলের সহিত পরিচিত হবেন।
- নির্দিষ্ট সমাকলের যথার্থ প্রয়োগ করে কোনো সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও ত্রিমাত্রিক দেশে বদ্ধ অঞ্চলের আয়তন নির্ণয় করতে পারবেন।

7.3 দ্বি-সমাকলের সংজ্ঞা (আয়তাকার ক্ষেত্রের উপর) ঃ

ধরা যাক্ $x=a,\ x=b,\ y=c,\ y=d$ সরলরেখাগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ আয়তক্ষেত্রটি $\mathrm{R}:[a,b;c,d]$ বা $\mathrm{R}:[a\le x\le b;\le y\le d]$ দ্বারা চিহ্নিত এবং এই R ক্ষেত্রে $f(x,y)$ এই দ্বিচল বিশিষ্ঠ অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ। আরও ধরা যাক্ $x=x_i,\ (i=1,2,\ldots\ldots,n-1)$ এবং $y=y_j;\ (j=1,2\ldots\ldots,m-1)$ সরলরেখাগুলি দ্বারা R-কে $m\times n$ সংখ্যক উপ আয়তক্ষেত্রে বিভাজিত করা হল যেখানে

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

এবং $c=y_0<y_1<y_2<\ldots\ldots<y_{j-1}<y_j<\ldots\ldots<y_{m-1}<y_m=d$

উপ আয়তক্ষেত্র $[x_{i-1},x_i;\,y_{j-1},y_j]$ এবং উহার ক্ষেত্রফল উভয়কেই Δ_{ij} ; দ্বারা সূচিত করা হল যখন ক্ষেত্রফল $\Delta_{ij}=(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$

এখন Δ_{ij} উপআয়তক্ষেত্রে $f(x,y)$ -এর নিম্নসীমা ও উর্ধ্বসীমা যথাক্রমে m_{ij} ও M_{ij} ধরে নিম্নলিখিত যোগফল গুলি গঠন করা হল :

$$s=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}\Delta_{ij} \quad \text{এবং} \quad S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{M}_{ij}\Delta_{ij}$$

যদি R আয়তক্ষেত্রে $f(x, y)$-এর নিম্নসীমা ও ঊর্ধ্বসীমা যথাক্রমে m ও M হয় তাহলে

$$m(b-a)(d-c) \leq s \leq S \leq M(b-a)(d-c).......(i)$$

উপরের বিভাজনে $x_i, (i=1,2,.......,n-1); y_j, (j=1,2,.......,m-1)$ বিন্দুগুলি যেভাবে নেওয়া হয়েছে সেগুলির স্থান ও সংখ্যা বদল করে R-এর অনেক নতুন বিভাজন গঠন করা যায় এবং প্রতি বিভাজনের জন্যই উপরের (i) নং শর্তটি সত্য হয়। আবার, R-এর বিভিন্ন বিভাজনের জন্য s এবং S এর যে বিভিন্ন মানগুলি পাওয়া যায় তাদের একত্রিত করে $\{s\}$ ও $\{S\}$ সেট্ দুটি গঠন করা যায় এবং সেট্ দুটির প্রত্যেকটি সদস্য (i) নং সম্পর্ক সিদ্ধ করায় অর্থাৎ প্রত্যেক সদস্য উভয় দিকে সীমাবদ্ধ হওয়ায় সেট্ দুটিও উভয়দিকে সীমাবদ্ধ থাকে। এই $\{s\}$-সেটের ঊর্দ্ধ সীমা মান (supre mum)-কে **নিম্নসমাকল** (Lower iutegral) বলা হয় এবং

তাকে $$I = \underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy$$

দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং $\{S\}$ সেটের নিম্নসীমা মান (Infimum)-কে **ঊর্দ্ধ সমাকল** (upper integral) বলা হয় এবং তাকে $J = \overline{\iint_R} f(x, y)\, dxdy$

$I = J$ হলে $f(x, y)$ কে R এর উপর সমাকলনযোগ্য বলা হয় এবং তাকে $\iint_R f(x, y) dxdy$

দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং তখন $I = \underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy = J = \overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(x, y)\, dxdy$

প্রান্তলিপি-1 বিকল্প সংজ্ঞা : উপরের বিভাজনের Δ_{ij} উপ আয়তক্ষেত্রের মধ্যে যেকোন বিন্দু (ξ_{ij}, η_{ij})-তে $f(x, y)$ এই অপেক্ষকের মান $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ এবং Δ_{ij}-এর কর্ণ (Diiagonal)-গুলির মধ্যে বৃহত্তমটিকে

Δ ধরা হলে $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta_{ij} = \iint_R f(x, y)\, dxdy,$ [এখানে $\Delta \to 0 \Rightarrow m \to \infty,\ n \to \infty$]

এইভাবেও অর্থাৎ যোগফলের সীমামান হিসাবেও দ্বিসমাকলের সংজ্ঞা দেওয়া যায় যদি অবশ্য (ξ_{ij}, η_{ij})-এর সকল অবস্থানের জন্য উপরোক্ত সীমার অস্তিত্ব থাকে। এখানে Δ কে উক্ত বিভাজনের **নর্ম** (Norm) বলা হয়।

প্রান্তলিপি-2. দ্বিসমাকলের সমাকলনযোগ্যতার শর্ত : একটি সীমাবদ্ধ ফাংশন $f(x, y)$-কে R ক্ষেত্রের উপর সমাকলনযোগ্য বলা হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি প্রত্যেক $\varepsilon > 0$ এর জন্য অপর এমন একটি সংখ্যা $\delta > 0$ পাওয়া যায় যা R এর প্রত্যেক বিভাজনের জন্য নর্ম $\Delta < \delta$ হয় এবং যে কোন বিভাজনের জন্য সমষ্ঠি অন্তর (osullatory sum) $S - s < \varepsilon$ হয়।

প্রান্তলিপি-3. দ্বিসমাকলের কতিপয় ধর্ম : যদি f, f_1, f_2 ফাংশনগুলি R ক্ষেত্রে সংজ্ঞাত x, y চলরাশিদ্বয়ের সমাকলনযোগ্য ফাংশন হয় তাহলে

(i) $\iint_R kf\, dxdy = k\iint_R f\, dxdy,$ যখন k একটি ধ্রুবক।

(ii) $\iint_R (f_1 + f_2)dxdy = \iint_R f_1\, dxdy + \iint_R f_2\, dxdy$

(iii) $f_1 f_2$ এই গুণফলের ফাংশনটিও একই ক্ষেত্র R-এর উপর সমাকলনযোগ্য

(iv) f_1/f_2 এই ভাগফলের ফাংশনটিও একই ক্ষেত্র R-এর উপর সমাকলনযোগ্য যখন $|f_2| \geq k > 0.$

(v) যদি R ক্ষেত্রে f সমাকলনযোগ্য হয় তাহলে $|f|$ ফাংশনটিও একই ক্ষেত্রে সমাকলন যোগ্য হবে এবং

$$\left|\iint_R f\, dxdy\right| \leq \iint_R |f|\, dxdy$$

7.3.1 ক্রমান্বয়ী সমাকল (Repeated integrals) :

উপপাদ্য (Fubini's theorem) : যদি $R:[a,b;c,d]$ আয়তক্ষেত্রটির উপর দ্বিসমাকল $I = \iint_R f(x,y)\, dxdy$ -এর অস্তিত্ব থাকে এবং $[a,b]$ অন্তরালে x এর প্রত্যেক স্থির মানের জন্য $\int_c^d f(x,y)\, dy$ এর অস্তিত্ব থাকে তাহলে $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\, dy$ বা $\int_a^b \left\{\int_c^d f(x,y)\, dy\right\} dx$ এই **ক্রমান্বয়ী সমাকলটিরও** অস্তিত্ব থাকে এবং

$$I = \iint_R f(x,y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\, dy.$$

অনুরূপে , দেখা যায় উপরের R-তে I এর অস্তিত্ব থাকলে এবং $[c,d]$ অন্তরালে y এর প্রত্যেক স্থির মানের জন্য $\int_a^b f(x,y)\, dx$ এর অস্তিত্ব থাকলে ক্রমান্বয়ী সমাকল $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\, dx$

বা $\int_c^d \left\{\int_a^b f(x,y)\, dx\right\} dy$ -এর ও অস্তিত্ব থাকবে এবং $I = \iint_R f(x,y)\, dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\, dx$

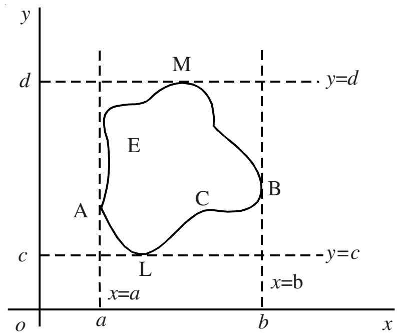
প্রান্তলিপি : দ্বি-সমাকলের সংজ্ঞায় $f(x,y)$ -কে কেবল সীমাবদ্ধ ধরা হয়েছিল। কিন্তু $f(x,y)$ সন্তত হলে উহা সীমাবদ্ধ হয়। অতএব যদি $R:[a,b;c,d]$ আয়তক্ষেত্রে $f(x,y)$ সন্তত হয় তাহলে ঐ ক্ষেত্রে f অবশ্যই সমাকলনযোগ্য।

আবার R-তে f সন্তত হলে উভয় ক্রমান্বয়ী সমাকলের মান সমান হবে। সুতরাং R-ক্ষেত্রে f সন্তত হলে

$$\iint_R f\, dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f\, dx.$$

7.3.2 আয়তক্ষেত্র ব্যতীত অন্য কোন আবদ্ধ ক্ষেত্রের উপর দ্বিসমাকল নির্ণয় ঃ

ধরা যাক্ চিত্রে প্রদর্শিত E ক্ষেত্রটি C বক্ররেখা দ্বারা এমনভাবে আবদ্ধ যে ঐ ক্ষেত্রগামী এবং যে কোন অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল সরলরেখাগুলি বক্রটিকে সবথেকে বেশী দুবার ছেদ করে।



ধরা যাক্ $x=a, x=b$ সরলরেখাদ্বয় C বক্রকে A ও B-তে এবং $y=c, y=d$ সরলরেখাদ্বয় C-কে L ও M-তে স্পর্শ করে। তাহলে E ক্ষেত্রটি $\mathrm{R}:[a,b;c,d]$ আয়তক্ষেত্রের ভিতরে অবস্থিত। যদি ALB এবং AMB রেখাশদ্বয়ের সমীকরণ $y=\phi(x)$ এবং $y=\psi(x)$ হয়; $\phi(x)$ ও $\psi(x)$ ফাংশনদ্বয় $[a,b]$- তে সন্তত হয়; $\phi(x)\le\psi(x)$ হয় এবং $f(x,y)$ ফাংশন E-ক্ষেত্রে সন্তত হয় তাহলে

$$\iint_{\mathrm{E}} f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left\{\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right\}dx$$

অন্যরূপে, যদি LAM ও MBL রেখাংশদ্বয়ের সমীকরণ $x=g(y)$ ও $x=h(y)$; $[c,d]$ অন্তরালে উহারা সন্তত; $g(y)\le h(y)$ এবং $f(x,y)$ ফাংশন E ক্ষেত্রে সন্তত হয় তাহলে

$$\iint_{\mathrm{E}} f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left\{\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\right\}dy$$

প্রান্তলিপি : দ্বিসমাকলের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা : $\iint_{\mathrm{E}} f(x,y)\,dx\,dy$ -কে জ্যামিতিক ভাবে ত্রিমাত্রিক দেশে xy-তলে অবস্থিত E ক্ষেত্র, E-এর সীমারেখার প্রত্যেক বিন্দুতে z-অক্ষের সমান্তরালে অঙ্কিত সরলরেখাসমূহ ও $z=f(x,y)$ বক্রতল দ্বারা বেষ্ঠিত বেলনের আয়তন বোঝায়।

7.3.3 দ্বিসমাকলে চলরাশির রূপান্তর (Transformation) ঃ

অনেক ক্ষেত্রে চলরাশির রূপান্তর ঘটিয়ে সমাকলন প্রক্রিয়াকে সহজতর করা যায়। ধরা যাক্ $\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dxdy$ সমাকলটি নিরূপনের জন্য $x=\phi(u,v),\ \ y=\psi(u,v)$ এই রূপান্তর ঘটানো হল, যেখানে $\phi(u,\nu),\psi(u,\nu)$ ফাংশনদ্বয় $u-v$ তলে R' থেকে $x-y$ তলে R ক্ষেত্রে ঐকিক সম্পর্ক (one to one correspondence)

বজায় রেখে রূপান্তর ঘটায় এবং $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$

জ্যাকোবিয়ান (Jocobian)-এর চিহ্ন R'-এর অভ্যন্তরে অপরিবর্তিত থাকে যদিও R' এর সীমারেখার উপর কতিপয় বিন্দুতে মান শূন্য হতে পারে। তাহলে সমাকলটি নিম্নরূপে রূপান্তরিত হয় :

$$\iint_{R} f(x,y)\,dxdy = \iint_{R'} f\{\phi(u,v),\psi(u,v)\}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv......(i)$$

অনুশীলনী—1

উদাহরণ-1. মান নির্ণয় করুন : $\iint_{R} xy(x^2+y^2)\,dxdy,$ যখন $R:[0,a;0,b]$

সমাধান : যেহেতু $xy\left(x^2+y^2\right)$ ফাংশনটি R-ক্ষেত্রে সন্তত, অতএব

$$\iint_{R} xy\left(x^2+y^2\right)dxdy = \int_0^a\left\{\int_0^b xy\left(x^2+y^2\right)dy\right\}dx = \int_0^a\left(\frac{x^3y^2}{2}+\frac{xy^4}{4}\right)_0^b dx$$

$$=\int_0^a\left(\frac{b^2x^3}{2}+\frac{b^4x}{4}\right)dx = \frac{b^2}{2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{b^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

$$=\frac{b^2}{2}\left(\frac{a^4}{4}+\frac{b^2a^2}{4}\right)=\frac{a^2b^2}{8}\left(a^2+b^2\right)$$

উদাহরণ-2. $\iint_{R}\sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy$ -এর মান নির্ণয় করুন যখন R ক্ষেত্রটি $x = 1$, $y = 0$, $y = x$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ।

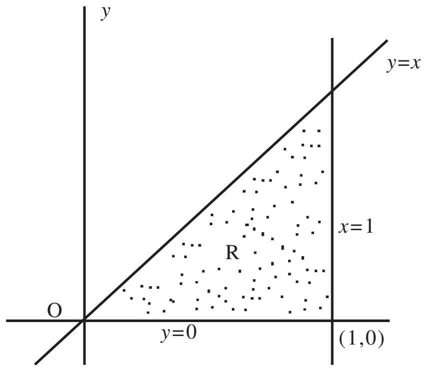
সমাধান : এখানে চিহ্নিত ত্রিভুজটি R ক্ষেত্র যেখানে x-এর বিস্তার 0 থেকে 1 বিন্দু y এর বিস্তার 0 থেকে x পর্যন্ত।

অতএব নির্ণেয় সমাকল

$$=\int_0^1\left\{\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}\,dy\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{y}{2}\cdot\sqrt{4x^2-y^2}+\frac{4x^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2x}\right]_0^x dx.$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x^2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right\}dx$$



$$=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{\pi}{6}\right)x^2dx=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right).$$

উদাহরণ-3. মান নির্ণয় করুন : $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\cos(x+y)\,dxdy$

সমাধান : প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\pi}\cos(x+y)\,dx\right\}dy$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(x+y)]_0^{\pi}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(\pi+y)-\sin(0+y)]dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin y-\sin y)dy=2[\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left[\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right]$$

$$=-2.$$

উদাহরণ-4. মান নির্ণয় করুন : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2(1+\cos\theta)}r\,dr\,d\theta$

সমাধান : প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{2(1+\cos\theta)}r\,dr\right\}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2(1+\cos\theta)}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4(1+\cos\theta)^2}{2}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=2[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}+4\cdot[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}+[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi+4+\frac{\pi}{2}+0=\frac{3\pi}{2}+4.$$

উদাহরণ-5. মান নির্ণয় করুন : $\iint_R x^2y^2\,dx\,dy$

যখন (ক) $R:\left\{x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\right\}$ (খ) $R: x^2+y^2\leq 1$

সমাধান : (ক) এক্ষেত্রে R হল $x^2+y^2=1$ বৃত্তের যে ক্ষেত্রাংশটি প্রথমপাদে অবস্থিত। অতএব প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^1 x^2\left\{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy\right\}dx$ [$\therefore$ প্রথম পাদে x এর মান 0 থেকে 1 এবং y এর মান 0 থেকে $y=\sqrt{1-x^2}$ পর্যন্ত]

$$=\int_0^1 x^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^4\theta\, d\theta \qquad [x=\sin\theta \text{ ধরে}]$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{2+1}{2},\frac{4+1}{2}\right)=\frac{1}{6}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3\cdot 2\cdot 1} \qquad \left[\therefore \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\right]$$

$$=\frac{\pi}{96} \qquad \left[\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right]$$

(খ) যেহেতু বৃত্তটি x-অক্ষ ও y-অক্ষ উভয়ের সাপেক্ষেই প্রতিসম এবং যেহেতু সমাকলজ $f(x,y)=x^2y^2$ উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

অতএব, সমগ্র বৃত্তই যখন সমাকলের ক্ষেত্র তখন

প্রদত্ত সমাকল $=4\times\frac{\pi}{96}=\frac{\pi}{24}$.

উদাহরণ-6. মান নির্ণয় করুন : $\iint_R xy(x+y)dxdy$ যখন R ক্ষেত্রটি $y=x^2$ এবং $y=x$ দ্বারা সীমাবদ্ধ।

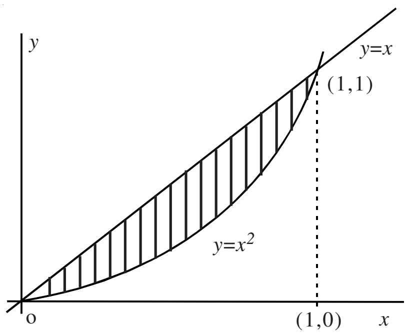
সমাধান : প্রদত্ত রেখাদ্বয় (0,0) ও (1,1) বিন্দুতে ছেদ করে; সুতরাং $x=0$ থেকে $x=1$ পর্যন্ত; y এর মান $y=x^2$ থেকে $y=x$ পর্যন্ত বিস্তৃত। অতএব প্রদত্ত সমাকল

$$=\int_0^1\left\{\int_{x^2}^{x}\left(xy^2+x^2y\right)dy\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left[x\frac{y^3}{3}+x^2\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x}dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^4}{3}+\frac{x^4}{2}-\frac{x^7}{3}-\frac{x^6}{2}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{5}{6}x^4-\frac{x^7}{3}-\frac{x^6}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{5}{6}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3}\frac{x^8}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^7}{7}\right]_0^1=16-\frac{1}{24}-\frac{1}{14}=\frac{9}{168}=\frac{3}{56}.$$



উদাহরণ-7. প্রথম পাদে $x=0,\ \ x+y=2,\ \ y^2=4x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র R এর উপর $\iint_R(1+x)y\,dxdy$ এর মান নির্ণয় করুন।

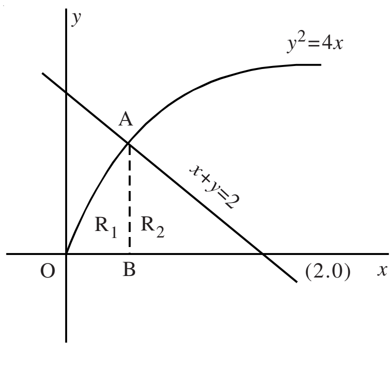
সমাধান : চিত্রানুযায়ী $x+y=2$ ও $y^2=4x$ রেখা দুটি $A\left(4-2\sqrt{3},-2+2\sqrt{3}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে। ঐ বিন্দুর কোটি BA দ্বারা সমাকলের ক্ষেত্র R কে দুটি ক্ষেত্র R_1 ও R_2 তে বিভক্ত করা হল।

$\therefore\ R = R_1 + R_2$

এবং R_1 ক্ষেত্রে x এর মান 0 থেকে $4-2\sqrt{3}$ ও y এর মান 0 থেকে $\sqrt{4x}$ পর্যন্ত এবং R_2 ক্ষেত্রে x এর মান $4-2\sqrt{3}$ থেকে 2 ও y-এর মান 0 থেকে $2-x$ পর্যন্ত বিস্তৃত।

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\iint_R(1+x)y\,dxdy+\iint_{R_2}(1+x)y\,dxdy$

$$=\int_0^{4-2\sqrt{3}}(1+x)\left\{\int_0^{2\sqrt{x}}y\,dy\right\}dx+\int_{4-2\sqrt{3}}^2(1+x)\left\{\int_0^{2-x}y\,dy\right\}dx$$



$$=\int_0^{4-2\sqrt{3}}(1+x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2\sqrt{x}}dx+\int_{4-2\sqrt{3}}^2(1+x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x}dx$$

$$=\int_0^{4-2\sqrt{3}}(1+x)2x\,dx+\frac{1}{2}\int_{4-2\sqrt{3}}^2(1+x)(2-x)^2\,dx$$

$$=2\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^{4-2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-3\cdot\frac{x^3}{3}+4x\right]_{4-2\sqrt{3}}^2$$

$$=2\left[\frac{1}{2}\left(4-2\sqrt{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(4-2\sqrt{3}\right)^3\right]+\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{16}{4}-8+8\right\}-\left\{\frac{16}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)^4-8\left(2-\sqrt{3}\right)^3+4\left(4-2\sqrt{3}\right)\right\}\right]$$

$$=\left[\left(7-4\sqrt{3}\right)+\left(\frac{52}{3}-10\sqrt{3}\right)\right]+\left[2-\left\{2\left(97-56\sqrt{3}-4\left(26-15\sqrt{3}\right)+4\left(2-\sqrt{3}\right)\right\}\right]$$

$$=\left(\frac{73}{3}-14\sqrt{3}\right)+\left(168\sqrt{3}-288\right)=154\sqrt{3}-\frac{791}{3}$$

উদাহরণ-8. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের প্রথম পাদের ক্ষেত্রাংশ R হলে

$\iint_{\mathrm{R}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $x=au,\quad y=bv$ রূপান্তর ধরে

$\mathrm{J}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}=ab.$ এবং পরিবর্তিত সমাকলের ক্ষেত্র R' : $u^2+v^2=1, u\text{-}v$ তলে একটি বৃত্ত।

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\iint_{\mathrm{R}^1}\left(1-u^2-v^2\right)\cdot(ab)\,dudv$

$=ab\iint_{\mathrm{R}''}\left(1-r^2\right)rdrd\theta$ [$u=r\cos\theta, v=r\sin\theta$ রূপান্তর করে R'' : r এর মান 0 থেকে 1 এবং θ এর মান 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত; $\mathrm{J}=r$]

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r-r^2)\,r\,dr=ab[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1$$

$$=ab\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=ab\cdot\frac{\pi}{8}.$$

উদাহরণ-9. দেখান যে $\iint_R x^{m-1}y^{n-1}(1-x-y)^{l-1}dxdy = \dfrac{\Gamma(l)\cdot\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}$; যখন $l, m, n > 0$ এবং R ক্ষেত্রটি $x=0,\ \ y=0,\ \ x+y=1$ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ।

সমাধান : $x+y=u,\ \ x=uv$ অর্থাৎ $x=uv,\ \ y=u(1-v)$ রূপান্তর ঘটালে R রূপান্তরিত হয়ে u-v তলে R' ; [0,1; 0,1] ক্ষেত্রে পরিণত হয় কারণ $x=0 \Rightarrow u=0, v=0;$

$$y=0 \Rightarrow u=0, v=1$$

এবং $x+y=1 \ \ \Rightarrow u=1.$

আবার $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & 1-v \\ u & -u \end{vmatrix} = -u$

$$\Rightarrow |J| = u.$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $= \iint_{R'} (uv)^{m-1}\{u(1-v)\}^{n-1}(1-u)^{l-1}\cdot u \cdot dudv$

$$= \int_0^1 u^{m+n-1}(1-u)^{l-1}du \cdot \int_0^1 v^{m-1}(1-v)^{n-1}dv$$

$$= B(m+n, l)\cdot B(m,n)$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)\Gamma(l)}{\Gamma(l+m+n)}\cdot\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)}$$

প্রশ্নাবলী—1

মান নির্ণয় করুন :

1. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx$ 2. $\iint_R \sin(x+y)dx\,dy,\ R: \left[0,\frac{\pi}{2};0,\frac{\pi}{2}\right]$ 3. $\int_0^{\log 2}\left\{\int_{-1}^1 ye^{xy}dy\right\}dx$

4. $\iint_R (x^2+y^2)dxdy\ \ R:\{(x,y): 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\}$

5. রূপান্তরের সাহায্যে $\iint_E \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy$ এর মান নির্ণয় করুন যখন E ক্ষেত্রটি $x^2+y^2-2ax=0$ বৃত্তের উপরি ভাগ।

প্রশ্নাবলী—1 এর উত্তর

1. $\frac{1}{8}$, 2. 2, 3. $\frac{3}{2\log 2}-2$, 4. $\frac{8}{3}$.

5. **সংকেত** : $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ দ্বারা রূপান্তরিত করলে E'-তে r এর মান 0 থেকে $2a\cos\theta$ এবং θ এর মান 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত বিস্তৃত হয়।

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $= \iint_{E^1} \sqrt{4a^2 - r^2} \cdot r \cdot dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2 - r^2}\, r dr \right\} d\theta$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(4a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2a\cos\theta} d\theta = -\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3\theta - 1\right) d\theta$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{4a^3}{9}(3\pi - 4).$$

7.4 সমতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় (Quadrature) :

একক-3 তে নির্দিষ্ট সমাকলের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা অনুযায়ী $\int_a^b f(x)dx$ সমাকল কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের x-y তলে, x-অক্ষ, $x = a$ ও $x = b$ সরলরেখাদ্বয় এবং $y = f(x)$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে সূচিত করে। এই এককে উক্ত ব্যাখ্যার প্রয়োগ করে বিভিন্ন ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b y\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots.(i)$$

নির্দিষ্ট সমাকলের সাহায্যে নির্ণয় করা হবে।

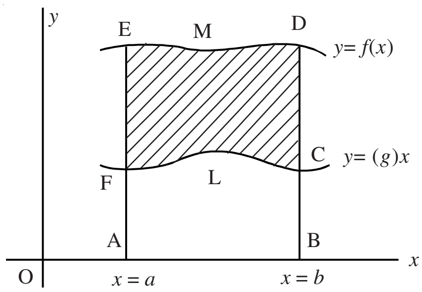
দ্রষ্টব্য : যদি $x = \phi(y)$ ফাংশনটি $[c,d]$ অন্তরালে সন্তত হয় তাহলে y-অক্ষ, $y = c$, $y = d$ এবং $x = \phi(y)$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_c^d \phi(y)dy$

প্রান্তলিপি-1. ক্ষেত্রফলের চিহ্ন : নির্দি,ট সমাকলের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দেওয়ার সময় $b > a$ এবং $[a,b]$

অন্তরালে $f(x)>0$ ধরা হয়েছিল। এই দুই শর্তই যদি কোন ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার সময় প্রযুক্ত থাকে তাহলে উৎপন্ন ক্ষেত্রফলটি **ধনাত্মক চিহ্ন** বিশিষ্ট হবে। অন্যথায় ক্ষেত্রফলের চিহ্ন ঋণাত্মক নির্নীত হবে।

দ্রষ্টব্য : x বৃদ্ধির দিকে বক্র বরাবর গতিশীল হলে নির্ণেয় ক্ষেত্রটি যদি ডানদিকে পড়ে তাহলে (i) নং সূত্রদ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্রফল ধনাত্মক নির্নীত হয়।

প্রান্তলিপি-2. দুটি বক্রের মধ্যবর্তী ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :



ধরা যাক্ $x=a, \quad x=b, \quad y=f(x), \quad y=g(x)$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের (চিত্রে প্রদর্শিত) ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

তখন নির্ণেয় ক্ষেত্রফল (CDMEFLC)

= ক্ষেত্রফল ABDMEA – ক্ষেত্রফল ABCLFA

$=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx,$ যখন $g(x)\le f(x)\,\forall\, x\,\varepsilon[a,b]$

এই সূত্র ব্যবহার করে নির্ণয় করতে হবে।

7.4.1 বক্রের সমীকরণের বিভিন্ন রূপের জন্য ক্ষেত্রফলের সূত্র ঃ

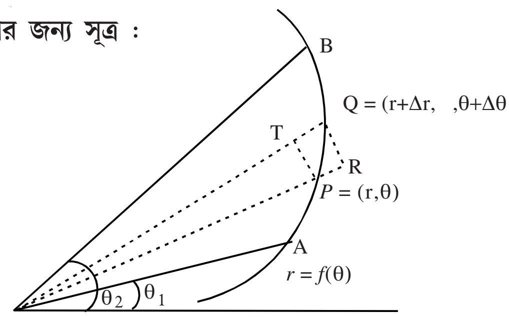
(ক) প্রাচলিক রূপে প্রকাশিত বক্রের সমীকরণের জন্য সূত্র :

যখন বক্রের সমীকরণ $x=\phi(t), \quad y=\psi(t)$ এই প্রাচলিক রূপে প্রকাশিত থাকে তখন (i) নং সূত্রে y-কে $\psi(t)$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে এবং $dx=\phi'(t)\,dt$ বসিয়ে সূত্রটির পরিবর্তি রূপ পাওয়া যায় :

ক্ষেত্রফল $=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\phi'(t)\,dt, \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$

যেখানে $x=\phi(t)$-তে $x=a$ হলে $t=t_1$ এবং $x=b$ হলে $t=t_2$.

(খ) মেরুস্থানাঙ্ক আকারে প্রকাশিত বক্রের সমীকরণের জন্য সূত্র :



ধরা যাক্ APQB বক্রের সমীকরণ $r=f(\theta),$ যেখানে $f(\theta)$ ফাংশন (θ_1,θ_2) অন্তরালে সসীম, এক মান বিশিষ্ঠ ও সন্তত। আরও ধরা যাক্ OA ও OB সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $\theta=\theta_1$ ও $\theta=\theta_2$ এবং $p(r,\theta)$ বিন্দু AB বক্রাংশের যে কোন স্থানে অবস্থিত। এখন OAPO ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল s ধরা হলে অবশ্যই উহা θ-এর ফাংশন।

আবার $Q(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$ বিন্দু P এর খুব কাছে ধরে

OPQO ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল Δs ধরা হল।

চিত্রানুসারে বৃত্তচাপ ধরে OPTO < প্রদত্ত বক্রচাপ ধরে OPQO < বৃত্তচাপ ধরে ORQO

বা, $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta < \Delta s < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta$

বা, $\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2 < \frac{\Delta s}{\Delta\theta} < \frac{1}{2}\{f(\theta+\Delta\theta)\}^2$

$\therefore \lim_{\Delta\theta\to 0}\left[\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2\right] < \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\theta} < \lim_{\Delta\theta\to 0}\left[\frac{1}{2}\{f(\theta+\Delta\theta)\}^2\right]$

$\Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2$ [$\therefore \lim_{\Delta\theta\to 0} f(\theta+\Delta\theta) = f(\theta)$, কারণ $f(\theta)$ সন্তত।]

সমাকল করে পাওয়া যায় $\int_0^s ds = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{f(\theta)\}^2 d\theta$

যখন P বিন্দুর অবস্থান A তখন $s = 0$, $\theta = \theta_1$ এবং P এর অবস্থান B তখন $s = S$, $\theta = \theta_2$

$$\left.\begin{aligned} &\text{বা } S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{f(\theta)\}^2 d\theta \\ &\text{বা, } S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta \end{aligned}\right\} \text{.............(iii)}$$

প্রান্তলিপি-1. $r_1 = f_1(\theta)$, $r_2 = f_2(\theta)$ বক্রদ্বয় ও $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ সরলরেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(r_2^2 - r_1^2\right)d\theta .....(iv)$

প্রান্তলিপি-2. সূত্র (iii)-কে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক x, y এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

যখন $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ তখন $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ ।

$\therefore r^2 d\theta = \left(x^2+y^2\right)d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$

$= \left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{xdy - ydx}{x^2} = xdy - ydx$

$\Rightarrow r^2\frac{d\theta}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$, যখন x,y উভয়েই t এর ফাংশন।

A ও B বিন্দুতে t এর মান t_1 ও t_2 হলে (iii) নং সূত্র অনুযায়ী

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt ......(v)$$

দ্রষ্টব্য : সীমারেখা বরাবর যে দিকে অগ্রসর হলে t এর মান বর্ধিত হয় সেই দিকে যাওয়ার সময় ক্ষেত্রটি বামদিকে অবস্থিত হলে (v) এর মান ধনাত্মক নির্ণীত হয়।

অনুশীলনী—2

উদাহরণ-1. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

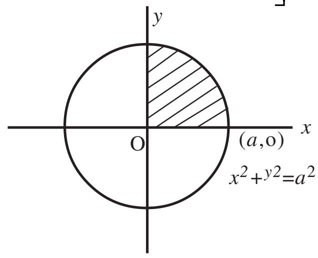
সমাধান : প্রথম পাদে প্রদত্ত বৃত্তের এক চতুর্থাংশ বিদ্যমান। অতএব

বৃত্তের ক্ষেত্রফল = 4× প্রথমপাদের বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল

$= 4 \times \int_0^a y\,dx$ [$\therefore x$ এর মান 0 থেকে a পর্যন্ত]

$= 4 \times \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ $\left[\therefore x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}\right]$

$= 4 \cdot \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$



$= 4 \cdot \frac{a^2}{2}\sin^{-1} 1 = 2a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2$ বর্গএকক।

উদাহরণ-2. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত এবং উহার নাভিলম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

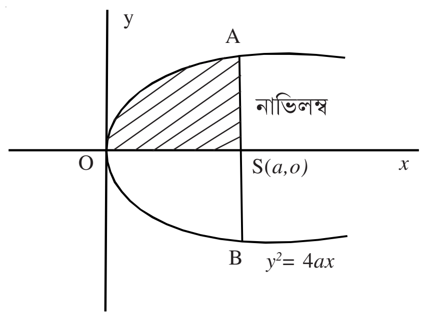
সমাধান : অধিবৃত্তটি x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম, $S(a,0)$ নাভি এবং ASB নাভিলম্ব।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল OBSAO = 2× OSAO

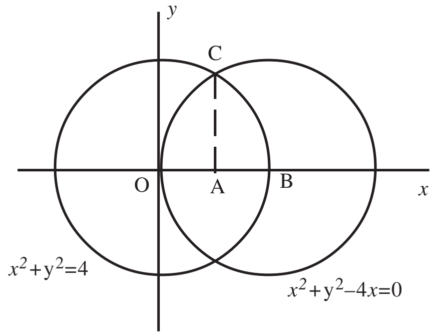
$= 2\int_0^a y\,dx$ [$\therefore x$ এর মান 0 থেকে a পর্যন্ত]

$= 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$ $\left[\therefore y^2 = 4ax\right]$

$= 4\sqrt{a}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{8}{3}a^2$ বর্গ একক।



উদাহরণ-3. প্রথমপাদে $x^2+y^2=4$ এবং $x^2+y^2-4x=0$ বৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।



সমাধান : প্রথম বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্দ্ধ 2; ইহা দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র B (2,0) গামী। বৃত্তদ্বয় প্রথমপাদে C$(1,\sqrt{3})$ বিন্দুতে ছেদ করে। x-অক্ষের উপর CA লম্ব, অতএব A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1,0)।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = OABCO = OACO + ABCA

$$=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx+\int_1^2\sqrt{4x-x^2}\,dx \qquad [\therefore \text{ প্রথম বৃত্তে } y=\sqrt{4-x^2} \text{ এবং দ্বিতীয় বৃত্তে } y=\sqrt{4x-x^2}\,]$$

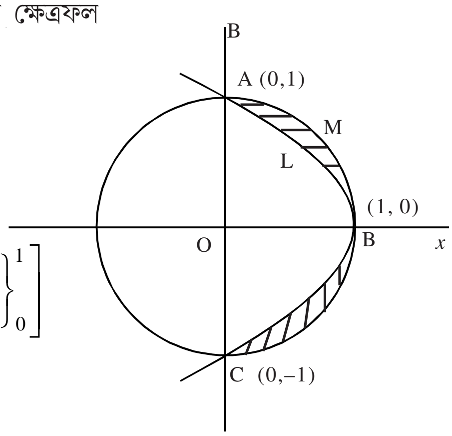
$$=\int_0^1\sqrt{2^2-x^2}\,dx+\int_1^2\sqrt{2^2-(x-2)^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1+\left[\frac{(x-2)}{2}\sqrt{4x-x^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{(x-2)}{2}\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{\pi}{6}\right]+\left[-\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{3}+2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]=\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3} \text{ বর্গএকক}$$

উদাহরণ-4. $y^2=1-x$ অধিবৃত্তের বাহিরের দিকে ও $x^2+y^2=1$ বৃত্তের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান : বক্রদ্বয়ের সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যায় ছেদ বিন্দু গুলি A(0,1), B(1,0) এবং C(0,–1)। আবার উভয় বক্রই x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম; অতএব নির্ণেয় ক্ষেত্রফল



$$= 2\ [\text{OBMAO} - \text{OBLAO}]$$

$$=2\left[\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx-\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx\right]$$

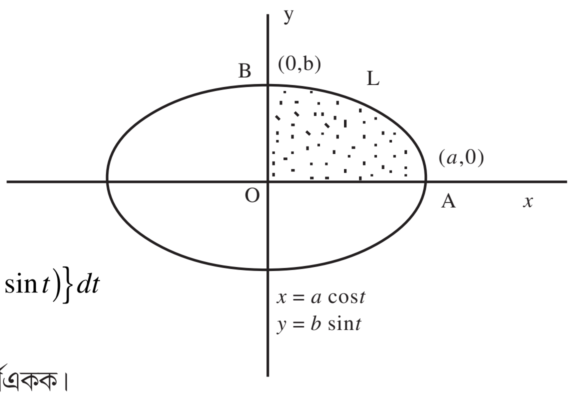
$$=2\left[\left\{\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x\right\}_0^1-\left\{\frac{-2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right\}_0^1\right]$$

$$=2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right]=\pi-\frac{4}{3} \text{ বর্গএকক।}$$

উদাহরণ-5. $x = a\cos t,\quad y = b\sin t$ উপবৃত্তের প্রথমপাদে অবস্থিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : উপবৃত্তটির A বিন্দুতে $x = a$; অতএব $\cos t = 1 \;\Rightarrow t = 0$ এবং B বিন্দুতে $y = b$,

অতএব $\sin t = 1 \;\Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}.$

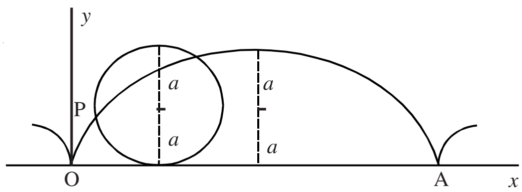


$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল OALBO

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t(-a\sin t)\}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\,dt = \frac{ab}{2}[t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}$$ বর্গএকক।



সংজ্ঞা : একটি বৃত্তকে একটি সরলরেখা বরাবর যদি গড়িয়ে (না ঘসে) দেওয়া যায় তাহলে বৃত্তের পরিধির উপর চিহ্নিত কোন বিন্দু P যে বক্র বরাবর গতিশীল হয় সেই বক্রটিকে সাইক্লয়েড বলা হয় এবং বৃত্তটিকে নিয়ামক বৃত্ত বলা হয়। $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta)$ হল উক্ত সাইক্লয়েডটির সমীকরণ।

উদাহরণ-6. $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডটির একটি আর্চ ও x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন এবং দেখান যে ক্ষেত্রফলটি উহার নির্ণায়ক বৃত্তের ক্ষেত্রফলের তিন গুন।

সমাধান : এখানে $y = a(1 - \cos\theta)$ এবং O ও A বিন্দুতে $y = 0.$

অতএব $\cos\theta = 1$ অর্থাৎ $\theta = 0,\ 2\pi$, আবার $x = a(\theta - \sin\theta)$ হওয়ায় O বিন্দুতে $x = a(0 - \sin 0) = 0$ এবং A বিন্দুতে $x = a(2\pi - \sin 2\pi) = 2a\pi$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^{2a\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta)\cdot a(1 - \cos\theta)d\theta$

$x = a(\theta - \sin\theta) \Rightarrow dx = a(1 - \cos\theta)d\theta$ এবং

$x = 0 \Rightarrow \theta = 0; x = 2a\pi \Rightarrow \theta = 2\pi$]

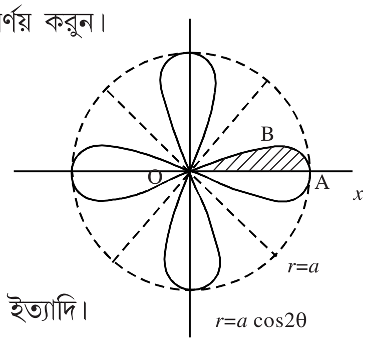
$$= a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos\theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(3 - 4\cos\theta + \cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[3\theta - 4\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$ বর্গ একক।

উদাহরণ-8 নিম্নলিখিত বক্ররেখাগুলি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

(ক) $r = a\cos 2\theta$, চার দলীয় গোলাপ (Four-leaved rose)

(খ) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, লেমনিস্কেট (Lemniscate)



সমাধান : (ক) পার্শ্ববর্তী চিত্রানুযায়ী $\theta = 0,\ \pi, \frac{\pi}{2}$ ও $\frac{3\pi}{2}$ এর জন্য $r = \pm a$ এবং $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ ও $\frac{7\pi}{4}$ এর জন্য $r = 0$, ইত্যাদি।

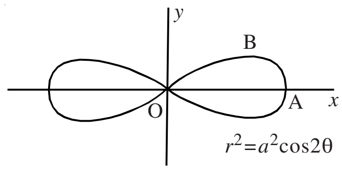
সুতরাং বক্রটি চারটি প্রতিসম লুপ দ্বারা গঠিত এবং $r = a$ বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ সমগ্র ক্ষেত্রফল $= 8\times$ OABO

$$= 8 \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta \ \ [\therefore \text{A-তে } r = a,\ \theta = 0 \text{ এবং } \theta = 0 \text{-তে } r = 0,\ \theta = \frac{\pi}{4}]$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos^2\theta d\theta = 4a^2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\pi a^2 \text{ বর্গএকক।}$$

(খ) বক্রের সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় $\theta = 0 \Rightarrow r = a$; $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = 0$, কিন্তু $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ হলে $r^2 < 0$, যা অবাস্তব; আবার $\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow r = 0$; $\theta = \pi \Rightarrow r = -a$; $\theta = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow r = 0$ ইত্যাদি। সুতরাং বক্রটি প্রাথমিক রেখা ox-এর সাপেক্ষে প্রতিসমম দুটি লুপ যুক্ত।



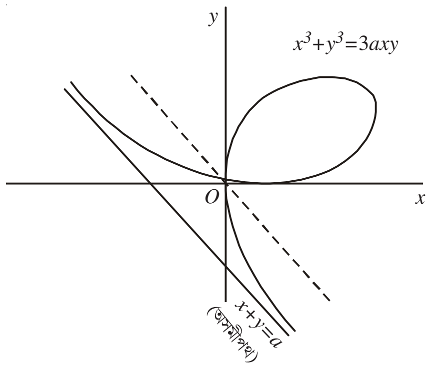
$\therefore$ সমগ্র ক্ষেত্রফল $= 4 \times \text{OABO} = 4 \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta = 2a^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \text{ বর্গএকক।}$$

উদাহরণ-9. $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্র (Falium of Descartes) দ্বারা গঠিত লুপের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণে $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ রূপান্তর ঘটিয়ে পাওয়া যায়

$$r = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}, \text{ ইহা বক্রটির মেরুসমীকরণ।}$$



এই সমীকরণে θ-এর মান O থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত বর্ধিত করলে r এর মান O থেকে বর্ধিত হয়ে সর্বাপেক্ষা বেশী

$\frac{3a}{\sqrt{2}}$ মানে ($\theta=\frac{\pi}{4}$ -তে) পৌঁছে আবার কমে 0 তে ফিরে আসে।

সুতরাং বক্রটি প্রথম পাদে একটি লুপ গঠন করে এবং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\left(\sin^3\theta+\cos^3\theta\right)^2}d\theta$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{\left(1+\tan^3\theta\right)^2}d\theta$$ [লব ও হরকে $\cos^6\theta$ দিয়ে ভাগ করে]

$$=\frac{3a^2}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}dt$$ [$1+\tan^3\theta=t$ ধরে]

$$=\frac{3a^2}{2}\lim_{B\to\infty}\int_1^{B} t^{-2}dt=\frac{3a^2}{2}\lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{B}+1\right)$$

$$=\frac{3a^2}{2}(0+1)=\frac{3a^2}{2}$$ বর্গএকক।

উদাহরণ-10. দ্বিসমাকলের সাহায্যে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : যেহেতু বৃত্তটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষেই প্রতিসম এবং প্রথমপদে x এর মান 0 থেকে a এবং y এর মান 0 থেকে $\sqrt{a^2-x^2}$ পর্যন্ত বিস্তৃত, অতএব নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$4\int_0^a\left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\right\}dx=4\int_0^a[y]_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx=4\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a=\pi a^2$$

বর্গএকক।

প্রশ্নাবলী—2

1. প্রথমপদে $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
2. $y=x^2$ এবং $x=y^2$ চক্রদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
3. $y^2=x^2\left(4-x^2\right)$ চক্রটি যে লুপ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
4. $x=a\cos t(1-\cos t),\ \ y=a\sin t(1-\cos t)$ বক্র দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?
5. $r=a\sin\theta(a>0)$ বক্রদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
6. দ্বি-সমাকলের সাহায্যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

প্রশ্নাবলী—2 এর উত্তর

1. 3π বর্গএকক 2. $\frac{1}{3}$ বর্গ একক 3. **সংকেত :** $y=0 \Rightarrow x=0,\pm 2$; x ও y উভয়েরই ঘাত যুগ্ম হওয়ায় বক্রটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষেই প্রতিসম এবং মূলবিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় $y=\pm 2x$. সুতরাং $x=0$ থেকে $x=2$ এর মধ্যে একটি লুপ আছে।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=2\int_0^2 y\,dx = 2\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta\, d\theta \qquad [x=\sin\theta \text{ ধরে}]$$

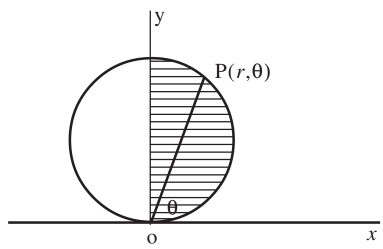
$$=16\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3} \text{ বর্গএকক।}$$

4. **সংকেত :** $t=0$ ও 2π উভয় মানের জন্যই x ও y এর মান পৃথকভাবে শূন্য হয়। সুতরাং ইহা একটি বদ্ধ বক্ররেখা এবং t-এর মান 0 থেকে 2π পর্যন্ত পরিবর্তিত হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt = \ldots\ldots = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt$

$$=\frac{3\pi a^2}{2} \text{ বর্গএকক।}$$

5. **সংকেত :** বক্রটি চিত্রে প্রদর্শিত একটি বৃত্ত, যা y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং প্রথম পাদে θএর মান 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত বিস্তৃত।



$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\pi a^2 \text{ বর্গএকক।}$$

6. **সংকেত :** উপবৃত্তটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষেই প্রতিসম এবং প্রথম পাদে x-এর মান 0 থেকে a এবং y এর মান 0 থেকে $\frac{a}{b}\sqrt{a^2-x^2}$ পর্যন্ত বিস্তৃত।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=4\times\int_0^a\left\{\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right\}dx = 4\times\int_0^a [y]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

$$=4\times\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4\cdot\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 4\cdot\frac{b}{a}\left[\frac{x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = 4\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

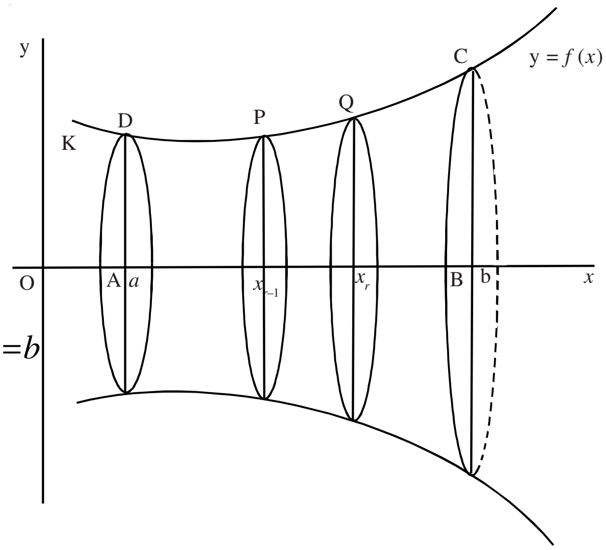
$= \pi ab$ বর্গএকক।

7.5 আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর আয়তন ও উপরিতলের ক্ষেত্রফল ঃ

ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় ঃ ধরা যাক্ ছেদহীন অর্থাৎ সন্তত বক্র $y = f(x)$, $x = a$ ও $x = b$ কোটিদ্বয় এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ABCQPD ক্ষেত্রটিকে x-অক্ষের চারিদিকে আবর্তিত করে যে ঘনবস্তু সৃষ্টি হল তাকে x_1, x_2...... x_{r-1}, x_r,......., x_{n-1} বিন্দুগামী x-অক্ষের সহিত লম্ব তলগুলি দ্বারা n টি অংশে বিভক্ত করা হল যেখানে

$x_0 = a < x_1 < x_2 < .. < x_{r-1} < x_r < ... < x_{n-1} < x_n = b$

এই বিভাজনের r-তম অংশটি $y = f(x)$ বক্রের PQ চাপ, $x = x_{r-1}$ ও $x = x_r$ কোটিদ্বয় এবং x-অক্ষ দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে x-অক্ষের চারিদিকে আবর্তনের ফলে উদ্ভূত আয়তনকে



ΔV_r এবং $[x_{r-1}, x_r]$ অন্তরালে $f(x)$ এর নিম্নসীমা ও উর্ধ্বসীমা যথাক্রমে m_r ও M_r ধরে পাওয়া যায়

$\pi m_r^2\,\Delta x_r \;\le \Delta V_r \;\le \pi M_r^2 \Delta x_r$, যখন $\Delta x_r = x_r - x_{r-1}$.

$\therefore\; \sum_{r=1}^{n}\pi m_r^2\,\Delta x_r \;\le V \le \sum_{r=1}^{n} M_r^2\,\Delta x_r$, যখন $\sum_{r=1}^{n}\Delta V_r = V =$ নির্ণেয় আয়তন।

এখন উপরোক্ত বিভাজনে n এর মান এমনভাবে বৃদ্ধি করা হয় যে সমস্ত $\Delta x_r, (r = 1, 2, ..., n)$ গুলির মধ্যে বৃহত্তম দৈর্ঘ্য $\delta \to 0$ হয় তাহলে (i) নং অসমীকরণের $\sum_{r=1}^{n}\pi m_r^2\,\Delta x_r$ ও $\sum_{r=1}^{n}\pi M_r^2\,\Delta x_r$ একটি সাধারণ মানে সমাপতিত হয়।

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \pi m_r^2 \, \Delta x_r = \mathrm{V} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \pi \mathrm{M}_r^2 \, \Delta x_r,$$

আবার, যেহেতু $m_r \le f(\xi_r) \le \mathrm{M}_r$.

$$\mathrm{V} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \pi \{f(\xi_r)\}^2 \Delta x_r \qquad [\therefore\ y = f(x) \text{ বক্র ছেদহীন অর্থাৎ সন্তত}]$$

$$= \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx, \qquad \text{(সংজ্ঞানুসারে)}$$

$$= \pi \int_a^b y^2 dx \qquad \text{.........(ii)}$$

উপরিতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় : ধরা যাক্ উপরের $y = f(x)$ বক্রের উপর একটি স্থির বিন্দু k থেকে যে কোন বিন্দু P পর্যন্ত চাপের দূরত্ব s এবং $\mathrm{PQ} = \Delta s.$ তাহলে PQ চাপকে x-অক্ষের চারিদিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন ছিন্ন শঙ্কু আকৃতি বিশিষ্ট তলের ক্ষেত্রফল

$\Delta s_r = \pi \times$ প্রান্ত তলদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমষ্ঠি $\times$ তীর্যক উচ্চতা

$= \pi(y_{r-1} + y_r) \times \overline{\mathrm{PQ}}$, যখন $y_r = f(x_r)$, $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ চাপের জ্যা $\overline{\mathrm{PQ}}$, ইত্যাদি।

$= \pi(y_{r-1} + y_r)\sqrt{(\Delta x_r)^2 + (\Delta y_r)^2}$, যখন $\Delta x_r = x_r - x_{r-1}$, $\Delta y_r = y_r - y_{r-1}.$

$$= 2\pi \frac{y_{r-1} + y_r}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_r}{\Delta x_r}\right)^2} \cdot \Delta x_r \text{..........}(iii)$$

এখন যদি $y = f(x)$ বক্র $[a,b]$-তে সন্তত এবং (a,b)-তে অবকলযোগ্য হয় তবে r-তম উপঅন্তরালেও তা প্রযোজ্য হবে।

সুতরাং $\dfrac{y_{r-1} + y_r}{2} = f(\xi_r)$, যখন (x_{r-1}, x_r) এর মধ্যবিন্দু ξ_r এবং কলনবিদ্যার মধ্যমান উপপাদ্য অনুযায়ী

$$f(x_r) - f(x_{r-1}) = (x_r - x_{r-1}) f'(\eta_r), \text{ যখন } x_{r-1} < \eta_r < x_r.$$

বা $\dfrac{\Delta y_r}{\Delta x_r} = f'(\eta_r).$

$\therefore$ (iii) নং থেকে পাওয়া যায় $\Delta s_r = 2\pi f'(\xi_r) \cdot \sqrt{1 + \{f'(\eta_r)\}^2} \cdot \Delta x_r$, $r = 1, 2, \ldots\ldots, n$

$\therefore$ সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $S = \lim_{n\to\infty} \sum \Delta S_r$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} 2\pi f(\xi r)\sqrt{1+\left\{f'(\eta_r)\right\}^2}\,\Delta x_r$$

$$= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left\{f'(x)\right\}^2}\,dx \text{ (সংজ্ঞানুসারে)}$$

$$\left.\begin{aligned} &= 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left\{\frac{dy}{dx}\right\}^2}\,dx \\ &= 2\pi\int y\,ds, \text{ যখন } \overset{\frown}{PQ} = ds \end{aligned}\right\} \text{.........(iv)}$$

প্রান্তলিপি-1. $x = \phi(y)$ বক্র, $y = c$ ও $y = d$ ভুজদ্বয় এবং y-অক্ষদ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে y-অক্ষের চারিদিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন আয়তন $V = 2\pi\int_c^d \{\phi(y)\}^2 dy = \pi\int_c^d x^2 dy$ ....(v)

আবার $y = c$ ও $y = d$ -এর মধ্যবর্তী $x = \phi(y)$ বক্রের চাপ y অক্ষের চারিদিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন তলের ক্ষেত্রফল $S = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi\int x\,ds$ ....(vi)

প্রান্তলিপি-2. যখন বক্রের সমীকরণ $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ তখন (ii) ও (v) থেকে পাওয়া যায়

$V = \pi\int_{t_1}^{t_2} \{\psi(t)\}^2 \phi'(t)\,dt$, যখন $x = a$ হলে $t = t_1$ এবং $x = b$ হলে $t = t_2$.

এবং $V = \pi\int_{t_1^1}^{t_2^1} \{\phi(t)\}^2 \psi'(t)\,dt$, এবং $y = t$ হলে $t = t_1'$ এবং $y = d$ হলে $t = t_2'$.

আবার (iv) ও (vi) থেকে উদ্দিষ্ট তলের ক্ষেত্রফল $S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\cdot\frac{ds}{dt}\cdot dt.$

এবং $S = 2\pi\int_{t_1^1}^{t_2^1} x\frac{ds}{dt}\cdot dt.$

প্রান্তলিপি-3. যেকোন সরলরেখার চারিদিকে আবর্তন :

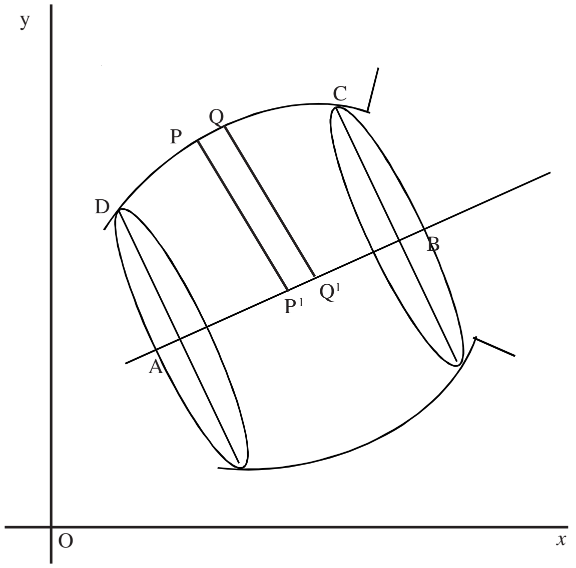
ধরা যাক $y = f(x)$ বক্রের DC অংশটি ঐ তলে অবস্থিত AB সরলরেখার চারিদিকে আবর্তিত করা হল। CD বক্রাংশের উপর P ও Q $\left(\overset{\frown}{PQ} = \Delta s\right)$ থেকে AB এর উপর লম্ব PP' ও QQ' হলে, ঘূর্ণনের ফলে

$\overset{\frown}{PQ}$ চাপের জন্য উৎপন্ন আয়তন $=\pi\left(PP'\right)^2 \cdot P'Q'$ [$\overset{\frown}{PQ}$ দৈর্ঘ্য এতই ছোট যে উহাকে সরলরেখাংশ ধরা যায়]

$\therefore$ উৎপন্ন মোট আয়তন

$=\int_0^{AB}\pi\left(PP'\right)^2 d\left(AP'\right)$

[$P'Q'=d\left(AP'\right)$ ধরে]



আবার, PQ চাপের ঘূর্ণনের জন্য উৎপন্ন তলের ক্ষেত্রফল $=2\pi\cdot PP'\cdot \overset{\frown}{PQ}$

$\therefore$ সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল

$S=2\pi\int PP' ds.$

এখানে প্রদত্ত বক্রের সমীকরণ, AB, PP', AP' ও ds একটি চলরাশির অপেক্ষক রূপে প্রকাশ করা গেলে A ও B বিন্দুর জন্য ঐ চলরাশির মান দুটি উপরের সমাকলের সীমামান ধরতে হবে।

প্রান্তলিপি-4. পাপাস (Pappus)-এর উপপাদ্য :

একটি বন্ধ বক্র দ্বারা উদ্ভূত তলকে যদি ঐ বক্রের সমতলে অবস্থিত কিন্তু বক্রটিকে ছেদ করে না এমন একটি সরলরেখার চারিদিকে কোন একটি কোণে আবর্তিত করা হয় তাহলে

(i) উদ্ভূত ঘনবস্তুটির আয়তন, ঘূর্ণনরত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ক্ষেত্রটির ভরকেন্দ্র যে চাপ বরাবর গতিশীল হয় তার দৈর্ঘ্যের গুণফলের সমান।

(ii) উদ্ভূত ঘনবস্তুটির উপরিতলের ক্ষেত্রফল, ঘূর্ণনরত ক্ষেত্রটির পরিসীমা এবং পরিসীমার ভরকেন্দ্র যে চাপ বরাবর গতিশীল হয় তার দৈর্ঘ্যের গুণফলের সমান।

অনুশীলনী—3

উদাহরণ-1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে উহার পরাক্ষ (Major axis)-এর চারিদিকে আবর্তিত করলে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয় তার আয়তন ও উপরিতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত উপবৃত্তের পরাক্ষ x-অক্ষ এবং উপবৃত্তটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষেই প্রতিসম। সুতরাং উপরি অর্ধকে পরাক্ষের চারিদিকে আবর্তিত করলেই নির্ণেয় ঘনবস্তু পাওয়া যায়।

সুতরাং নির্ণেয় আয়তন V = 2× প্রথমপাদে উপবৃত্তের অংশের আবর্তনের ফলে উদ্ভূত ঘনবস্তুর আয়তন।

$$=2\int_0^a \pi y^2 dx \qquad [\therefore x \text{ এর মান প্রথমপাদে } 0 \text{ থেকে } a \text{ পর্যন্ত বিস্তৃত।}]$$

$$= 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{4}{3}\pi a b^2 \text{ ঘন একক।}$$

আবার, নির্ণেয় ক্ষেত্রফ $S = 2\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$$= 4\pi\int_0^a y\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}\,dx \qquad \left[\because \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}\,dx = \frac{4\pi}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4b^2\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)+b^4x^2}\,dx$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4 - \left(a^2-b^2\right)x^2}\,dx = \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a \sqrt{\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2}\cdot\sqrt{a^2-b^2}\left[\frac{x}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^4}{a^2-b^2}-x^2}+\frac{1}{2}\frac{a^4}{a^2-b^2}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}}\right]_0^a$$

$$= \frac{2\pi b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\left[a\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}}+\frac{a^4}{a^2-b^2}\sin^{-1}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right]$$

$$= \frac{2\pi b}{a^2}\left[a^2b + \frac{a^4}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}e\right]$$

$$= 2\pi ab\left[\frac{b}{a}+\frac{1}{e}\sin^{-1}e\right] \text{ বর্গএকক।}$$

উদাহরণ-2. $x = a\cos^2\theta,\ \ y = a\sin^3\theta$ এ্যাসট্রয়েড x-অক্ষের চারিদিকে আবর্তিত হলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার আয়তন ও উপরিতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : বক্রটির কার্তেসীয় সমীকরণ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ এবং উহা উভয় অক্ষের সাপেক্ষেই প্রতিসম। অতএব নির্ণেয় আয়তন V = 2× প্রথমপাদে ছিন্ন ক্ষেত্রের x-অক্ষের চারিদিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন।

$$= 2\times\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\pi\left(a\sin^3\theta\right)^2\left(-3a\sin^2\theta\sin\theta\right)d\theta$$

$$[\because\ \ x=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2};\ x=a\Rightarrow\theta=0\ \text{ এবং }\ \frac{dx}{d\theta}=-3a\cos^2\sin\theta\,]$$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^2\theta\,d\theta = 6\pi a^3\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7+2+2}{2}\right)}$$

$$= 3\pi a^3\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} = \frac{3\pi a^3\cdot(3\cdot2\cdot1)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{32}{105}\cdot\pi a^3 \text{ ঘন একক।}$$

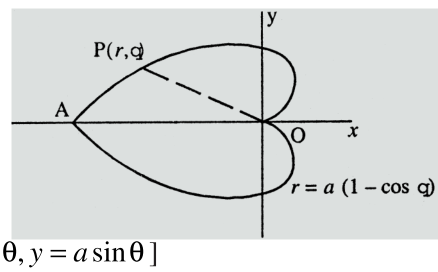
এবং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $S = 2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi\cdot a\cos^3\theta\cdot\sqrt{\left(-3a\cos^2\theta\sin\theta\right)^2+\left(3a\sin^2\theta\cos\theta\right)^2}\,d\theta$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta = 12\pi a^2\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\Gamma(1)}{\sqrt{\frac{4+1+2}{2}}}$$

$$= 6\pi a^2\cdot\frac{3}{2}\cdot\Big/\left\{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\right\} = \frac{12}{5}\pi a^2 \text{ বর্গএকক।}$$

উদাহরণ-3. প্রাথমিক রেখার চারিদিকে $r = a(1-\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডকে আবর্তিত করলে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয় তার আয়তন ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : কার্ডিঅয়েডটি প্রাথমিক রেখা ox-এর সাপেক্ষে প্রতিসম বলে উপরি অর্ধকে নির্দেশ মত আবর্তিত করলেই নির্ণেয় ঘনবস্তু পাওয়া যায়।



এখন, O বিন্দুতে $r=0\Rightarrow\theta=0$ এবং

A-বিন্দুতে $r=2a\Rightarrow\theta=\pi$

$\therefore$ নির্ণেয় আয়তন $=\int_\pi^0\pi(r\sin\theta)^2\,d(r\cos\theta)$

$$[V = \int\pi y^2dx \ \text{ সূত্রে } \ x=a\cos\theta, y=a\sin\theta\,]$$

$$= \pi a^3 \int_{\pi}^{0} (1-\cos\theta)^2 \sin^2\theta \, d\{(1-\cos\theta)\cdot\cos\theta\} \qquad [r = a(1-\cos\theta) \text{ বসিয়ে}]$$

$$= \pi a^3 \int_{\pi}^{0} (1-\cos\theta)^2 \sin^2\theta(-\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_{-1}^{1} (1-t)^2 (1-t^2)(1-2t)\,dt \qquad [\cos\theta = t \text{ ধরে}]$$

$$= \frac{8}{3}\pi a^3 \text{ ঘন একক।}$$

এবং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\pi \int_{\pi}^{0} r\sin\theta \sqrt{dr^2 + (rd\theta)^2} \quad \left[\therefore y = r\sin\theta, ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2}\right]$

$$= 2\pi \int_{\pi}^{0} a(1-\cos\theta)\sin\theta \sqrt{(a\sin\theta d\theta)^2 + a^2(1-\cos\theta)^2(d\theta)^2}$$

$$= 2\pi a^2 \int_{\pi}^{0} (1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}} \sin\theta \, d\theta$$

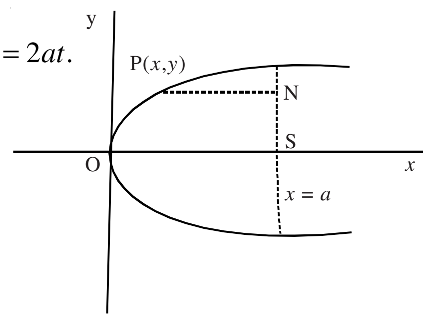
$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_{2}^{0} z^{\frac{3}{2}} dz \qquad [1-\cos\theta = z \text{ ধরে}]$$

$$= -\frac{32}{5}\pi a^2$$

এখানে θ-এর মান কমছে এমন দিকে সীমারেখা বরাবর যাওয়ার ফলে ক্ষেত্রটি ডানদিকে পড়ছে বলে মানটি ঋনাত্মক চিহ্ন বিশিষ্ট হয়েছে।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{35}{5}\pi a^2$ বর্গএকক (ঋণাত্মক চিহ্ন বাদ দিয়ে)।

উদাহরণ-4 $y^2 = 4ax$ এবং নাভিলম্ব দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে নাভিলম্বের চারিদিকে আবর্তিত করলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার ঘনফল নির্ণয় করুন।



সমাধান : প্রদত্ত অধিবৃত্তের প্রাচলিক সমীকরণ $x = at^2$, $y = 2at$.

অধিবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু P (x,y) থেকে নাভিলম্ব $x = a$ সরলরেখার উপর লম্বদৈর্ঘ্য PN $= a - x = a - at^2$ এবং অধিবৃত্তটি x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম; সুতরাং

নির্ণেয় আয়তন $= 2 \times \int_{x=0}^{a} \pi(\text{PN})^2 dy$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} a^2 (1-t^2)^2 d(2at) \qquad [\therefore x = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ এবং } x = a \Rightarrow t = 1]$$

$$= 4\pi a^3 \int_0^1 \left(1-t^2\right)^2 dt = 4\pi a^3 \left[\frac{t^5}{5} - 2\cdot\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1$$

$$= 4\pi a^3 \cdot \frac{8}{15} = \frac{32}{15}\pi a^3 \text{ ঘন একক।}$$

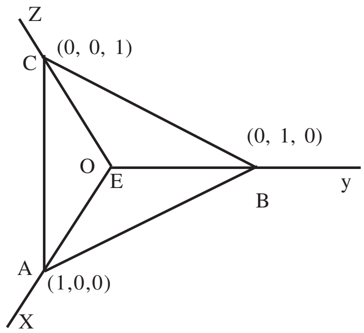
উদাহরণ-5. দেখান যে $x = a\cos\theta,\ \ y = b\sin\theta$ উপবৃত্তকে $x = 2a$ সরলরেখার চারিদিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন কত?

সমাধান : পাপাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

নির্ণেয় আয়তন = উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল × উহার ভরকেন্দ্র কর্তৃক অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য।

$= (\pi ab)\times(2\pi\cdot 2a)$ [$\therefore$ উপবৃত্তের ভরকেন্দ্র অর্থাৎ উহার কেন্দ্র $2a$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার পথ পরিভ্রমণ করে]

$= 4\pi^2 a^2 b$ ঘন একক।



উদাহরণ-6. দ্বিসমাকলের সাহায্যে $x + y + z = 1$, $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0$ তল গুলি দ্বারা আবদ্ধ ঘনের আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধান : যেহেতু OAB ত্রিভুজ (E ক্ষেত্র) $x = 0$, $y = 0,\ \ x + y = 1$ দ্বারা বেষ্ঠিত,

অতএব $V = \iint_E z\,dxdy$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy = \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\,dx = \frac{1}{6}$$

ঘন একক।

7.6 সারাংশ ঃ

1. R : [a, b ; c, d] আয়তক্ষেত্রকে $m \times n$ সংখ্যক উপআয়তক্ষেত্র $\Delta_{ij}, (i = 1,2......n; j = 1,2,......m)$ সমূহে বিভাজিত করা হল এবং উহাদের মধ্যে (ξ_{ij}, η_{ij}) এইরূপ একটি করে বিন্দু নেওয়া হল।

তখন R ক্ষেত্রে $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\Delta_{ij} = \iint\limits_R f(x,y)\,dxdy,$ যখন উক্ত বিভাজনের নর্ম Δ

এবং (ξ_{ij}, η_{ij}) এর যেকোন অবস্থানের জন্য যোগফলের সীমা মানের অস্তিত্ব থাকে; এইভাবে সীমাবদ্ধ অপেক্ষক $f(x,y)$ এর জন্য দ্বিসমাকলের সংজ্ঞা দেওয়া হয়।

2. যদি R : $[a,\ b\ ;\ c,\ d]$ ক্ষেত্রে $\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dx\,dy$ -এর এবং $[a,b]$-তে x-এর প্রত্যেক স্থির মানের জন্য $\int_c^d f(x,y)\,dy$ -এর অস্তিত্ব থাকে তাহলে $\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$ এই ক্রমান্বয়ী সমাকলটিরও অস্তিত্ব থাকবে এবং তখন $\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)\,dy\right\}dx.$

3. আয়তক্ষেত্র ব্যতীত অন্য ক্ষেত্রের উপর দ্বিসমাকলের পদ্ধতি জানার জন্য 7.3.2 অনুচ্ছেদ দেখুন।

4. $\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathrm{R}'} f\{\phi(u,v),\psi(u,v)\}\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du dv,$

যখন $x=\phi(u,v), y=\psi(u,v)$ ফাংশনদ্বয় u-v তলে R' ক্ষেত্রে সন্তত এবং R' থেকে R-এ রূপান্তরের সময় ঐকিক সম্পর্ক বজায় রাখে।

5. (ক) x-y তলে x-অক্ষ, $x=a,\ x=b$ ও $y=f(x)$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $=\int_a^b f(x)\,dx$

(খ) $x=a, x=b, y=f(x), y=g(x)$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$, যখন $[a,b]$ অন্তরালে $g(x)\le f(x).$

(গ) $y=0, x=a, x=b$ এবং $x=\phi(t), y=\psi(t)$ বক্র দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\phi'(t)\,dt$, যখন $x=a$ ও b মানের জন্য $t=t_1$ ও t_2

(ঘ) $\theta=\theta_1,\ \theta=\theta_2$ সরলরেখাদ্বয় ও $r=f(\theta)$ বক্র দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\dfrac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{f(\theta)\}^2 d\theta$

(ঙ) $=\dfrac{1}{2}\int\{(\theta)\}^2 d\theta$ বা $\dfrac{1}{2}\int r^2 d\theta$ দ্বারা প্রকাশিত ক্ষেত্রফলের সূত্রকে $\dfrac{1}{2}\int\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right)dt$ দ্বারাও প্রকাশ করা যায় [7.4.1 অনুচ্ছেদের প্রান্তলিপি-2 অনুযায়ী]

6. $y=f(x)$ বক্র; $x=a,\ x=b$ কোটিদ্বয় এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তিত করার ফলে উৎপন্ন ঘনের আয়তন $=\pi\int_a^b y^2 dx$

এবং ঘনের উপরিতলের ক্ষেত্রফল $=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

এছাড়াও এই সংক্রান্ত বিভিন্ন সূত্রের জন্য 7·5 অনুচ্ছেদের প্রান্তলিপি গুলি দেখুন।

7.7 বিষয়মুখী ছোট প্রশ্নাবলী ঃ

1. নিম্নের সমাকলগুলির সঠিক মানটি নির্বাচন করুন (MCQ) :

(ক) $\iint_R xy\,dx\,dy$, যখন R : [a,b; c,d] (i) $\dfrac{(b-a)(d-c)}{2}$ (ii) $\dfrac{(b^2-a^2)(d^2-c^2)}{4}$

(iii) $\dfrac{a^2b^2}{2}$

(খ) $\iint_R \dfrac{1}{xy}dx\,dy$, যখন R : [1, e ; 1,5] (i) log5 (ii) $\dfrac{1}{5e}$ (iii) $\dfrac{e-1}{5}$

(গ) $\iint_R x^3y\,dx\,dy$, যখন R : [0,1 ; 1,4] (i) 4 (ii) 0 (iii) $\dfrac{15}{8}$

(ঘ) $\iint_R x\,dx\,dy$, যখন R:$\{(x,y): x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 2\}$ (i) $\dfrac{4}{3}$ (ii) 2 (iii) $\dfrac{8}{3}$

(ঙ) $\int_1^2\int_0^1 (x+y)\,dy\,dx$ (i) 2 (ii) 1 (iii) 0

2. নিম্নের ক্ষেত্রগুলির সঠিক ক্ষেত্রফলটি নির্বাচন করুন (MCQ) :

(ক) $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ দ্বারা বদ্ধক্ষেত্র। (i) $\dfrac{1}{2}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) 1.

(খ) (0,0), (1,0), (1,3) শীর্ষবিন্দু যুক্ত ত্রিভুজ। (i) $\dfrac{5}{2}$ (ii) 2 (iii) $\dfrac{3}{2}$

(গ) $y=x^2$, $y=0$, $x=1$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র, (i) $\dfrac{1}{3}$ (ii) $\dfrac{2}{3}$ (iii) $\dfrac{1}{2}$

(ঘ) $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$ বৃত্ত। (i) $2\pi a$ (ii) πa^2 (iii) $\dfrac{4}{3}\pi a^2$

7.7.1 বিষয়মুখী প্রশ্নাবলীর উত্তর ঃ

1. (ক) (ii) (খ) (i) (গ) (iii) (ঘ) (i) (ঙ) (i)

2. (ক) (i) (খ) (iii) (গ) (i) (ঘ) (ii)

7.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী ঃ

1. মান নির্ণয় করুন ঃ

(ক) $\iint_R \sin(x+y)\,dxdy$, যখন $R:\left[0,\frac{\pi}{2};0,\frac{\pi}{2}\right]$ (খ) $\int_0^1\int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}dy\,dx$

(গ) $\int_0^1\int_0^{1-y^2}\left[(x-1)^2+y^2\right]dxdy$ (ঘ) $\int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\right\}dx$

(ঙ) $\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta$ (চ) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(ছ) $\iint_R\left(x^2+y^2\right)dxdy$, যখন $R:\{(x,y):x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$

(জ) $\iint_R y^2\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy$, যখন $R:\left\{(x,y):x^2+y^2\leq a^2\right\}$.

2. রূপান্তরের সাহায্যে $\iint_E \frac{\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}}{\sqrt{a^2b^2+b^2x^2+a^2y^2}}dxdy$ এর মান নির্ণয় করুন যখন E ক্ষেত্রটি প্রথমপাদে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা বেষ্টিত অঞ্চল।

3. $\iint_E \frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$ -এর মান নির্ণয় করুন যখন E ক্ষেত্র (0,0), (2,0), $\left(1,\sqrt{3}\right)$ শীর্ষবিন্দু যুক্ত ত্রিভুজ।

নিম্নের ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন (4–20) :

4. $xy=c^2$ পরাবৃত্তটির যে অংশ x-অক্ষ এবং $x=a$ ও $x=b$ $(0<a<b)$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ।

5. $y^2=16x$ ও উহার নাভিলম্ব দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্র।

6. প্রথম পাদে $x=0$, $y=0$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ দ্বারা বদ্ধক্ষেত্র।

7. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ হাইপোসাইক্লয়েডের সমগ্র ক্ষেত্র (সাধারণভাবে এবং দ্বি-সমাকলের সাহায্যে)।

8. প্রথমপাদে $x^2+y^2=2ax$ বৃত্ত এবং $y^2=ax$ অধিবৃত্তের মধ্যবর্তী অংশ।

9. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ বক্র দ্বারা আবদ্ধ।

10. $y^2=x^2(x+a)$ লুপ। 11. $x=a\left(1-t^2\right)$, $y=at\left(1-t^2\right), -1\leq t\leq 1$, লুপ।

12. $x\left(x^2+y^2\right)=a\left(x^2-y^2\right)$ লুপ। 13. $x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t$ বদ্ধ বক্র।

14. $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y=\dfrac{2t}{1+t^2}$ সমগ্র ক্ষেত্র। 15. $r=a(1+\cos\theta)$ বক্রদ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র।

16. $r=2a\sin\theta,(a>0)$, বৃত্ত। 17. $r=a\sin 3\theta,(a>0)$ বক্র।

18. $r^2=a^2\sin 2\theta$ যে লুপ দুটি গঠন করে। 19. $r=a\sqrt{2}$ এবং $r=2a\cos\theta$ এর সাধারণ অংশ।

20. $y^2(a-x)=x^3$ এবং উহার অসীমপথ (Asymptote)-এর মধ্যবর্তী অংশ।

21. **দ্বিসমকলের সাহায্যে $x=0$, $y=0$, $x/a+y/b=1$ দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।**

22. **নিম্নলিখিত বক্রগুলি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রগুলিকে x-অক্ষের চারিদিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন ঘনের আয়তনগুলি নির্ণয় করুন।**

(ক) $y=x^3$, $x=0$, $x=2$ এবং x-অক্ষ।

(খ) $x=0$ ও $x=\pi$ এর মধ্যবর্তী $y=\sin x$ বক্রের অংশ। (গ) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত।

(ঘ) $y^2=4ax$, x-অক্ষ এবং $x=x_1$ সরলরেখা।

23. **নিম্নের বক্রগুলি x-অক্ষের চারিদিকে আবর্তিত হলে যে তলের সৃষ্টি হয় সেগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।**

(ক) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত। (খ) $y=\sin x$ বক্রের $x=0$ থেকে $x=\pi$ পর্যন্ত অংশ।

(গ) $y^2=4ax$ বক্র, x-অক্ষ ও $x=x_1$ সরলরেখা।

24. $x=a(\theta+\sin\theta)$, $y=a(1+\cos\theta)$ সাইক্লয়েডের একটি আর্চ উহার ভূমির (x-অক্ষ) চারিদিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন ঘনের আয়তন ও তার উপরিতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

25. $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$ বক্রের লুপটি x-অক্ষের চারিদিকে আবর্তিত হলে যে ঘন এবং তলের সৃষ্টি হয় যথাক্রমে তাদের আয়তন এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

26. $r=a(1+\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডকে তার প্রাথমিক রেখার চারিদিকে আবর্তিত করলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তার আয়তন ও উপরিতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

27. x-y তল, $x^2+y^2=2ax$ স্তম্ভক এবং $x^2+y^2=az$ অধিবৃত্তক এর মধ্যবর্তী ঘন অংশের আয়তন দ্বি-সমাকলের সাহায্যে নির্ণয় করুন।

28. $2z=\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}$ অধিবৃত্তক, $x^2+y^2=a$ স্তম্ভক এবং x-y তলের মধ্যবর্তী ঘন অংশের আয়তন নির্ণয় করুন।

7.8.1 সর্বশেষ প্রশ্নাবলীর উত্তর ঃ

1. (ক) 2 (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) $\frac{44}{105}$ (ঘ) $\frac{\pi}{6}$ (ঙ) $\frac{3}{4}\pi a^2$ (চ) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (ছ) $\frac{1}{6}$ (জ) $\frac{32}{45}a^5$.

2. **সংকেত** : $x = au,\ \ y = bv$ রূপান্তর ঘটিয়ে E-কে u-v তলের প্রথমপাদে $E^1 : \left\{(u,v) : u^2 + v^2 \le 1\right\}$ বৃত্তে পরিবর্তিত করে এবং $\mathrm{J} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$

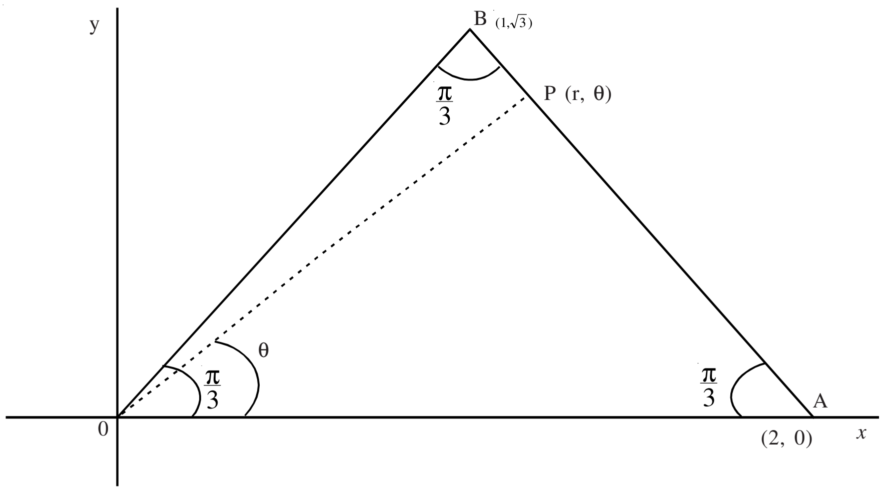
$$\therefore \text{ প্রদত্ত সমাকল } = \iint_{\mathrm{E}^1} ab \frac{\sqrt{1-u^2-v^2}}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\, du dv$$

$$= ab \iint_{\mathrm{E}''} \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1+r^2}}\, r dr d\theta \quad \Big[\text{যখন } u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta;\ \mathrm{J} = r \text{ এবং}$$

$$\mathrm{E}'' : \left\{(r,\theta) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}\Big]$$

$$= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, dr = \frac{\pi}{4} ab \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

3. **সংকেত** : শীর্ষ বিন্দু সংযোগকারী বাহুগুলি $y = 0,\ \ y = \sqrt{3}x,\ \ y = -\sqrt{3}(x-2)$. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ রূপান্তরের সাহায্যে E কে E$'$ ত্রিভুজে রূপান্তরিত করলে r এর মান 0 থেকে $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)}$ এবং θ-এর মান 0 থেকে $\frac{\pi}{3}$ পর্যন্ত বিস্তৃত হয় এবং $\mathrm{J} = r$ হয়।



[$\therefore$ চিত্রানুযায়ী $\dfrac{\text{OP}}{\sin\text{OBP}} = \dfrac{\text{OB}}{\sin\text{OPB}}$

বা $\left.\dfrac{r}{\sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}\right]$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}} \frac{r}{\left(1+r^2\right)^2}dr\right\}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[-\frac{1}{1+r^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}}d\theta$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{3+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)} = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{3\left\{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right\}+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{see^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}{3+4\tan^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}d\theta = \frac{3}{2}\int_{2\sqrt{3}}^{-2\sqrt{3}}\frac{1}{2}\frac{dz}{3+z^2}$$ $\left[2\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) = z\right.$ ধরে]

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{3}}\right]_{2\sqrt{3}}^{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\tan^{-1}(-2)-\tan^{-1}(2)\right\} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\pi-\tan^{-1}2-\tan^{-1}2\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\left\{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}2\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cot^{-1}2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}.$$

4. **সংকেত** : $s = \int_a^b \frac{c^2}{x}dx = c^2(\log b - \log a) = c^2\log\frac{b}{a}$ বর্গএকক।

5. $\frac{128}{3}$ বর্গএকক 6. $\frac{a^2}{6}$ বর্গএকক 7. $\frac{3}{8}\pi ab$ বর্গএকক 8. $a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$ বর্গএকক।

9. a^2 বর্গএকক [**সংকেত** : সমীকরণটিকে মেরুসমীকরণে রূপান্তর করলে $r^2 = a^2\cos 2\theta$ হয়; এরপর 8 (খ) উদাহরণ দেখুন]

10. **সংকেত** : $y=0$ বসালে $x=0,-a$ এবং বক্রটি x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম, অতএব লুপটি $-a$ থেকে 0 পর্যন্ত বিস্তৃত; সুতরাং ক্ষেত্রফল $= 2\int_{-a}^0 y\,dx = 2\int_{-a}^0 x\sqrt{x+a}\,dx ....= \frac{8}{15}a^{\frac{5}{2}}$ বর্গএকক।

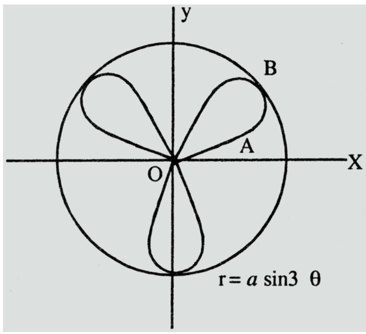
11. **সংকেত :** t অপনয়ন করে বক্রের সমীকরণ $ay^2 = x^2(a-x)$ সুতরাং লুপটি $x=0$ থেকে a পর্যন্ত x-অক্ষের সাথে প্রতিসমভাবে বিদ্যমান।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^a y\,dx = \dfrac{2}{\sqrt{a}}\int_0^a x\sqrt{a-x}\,dx .... = \dfrac{8}{15}a^2$ বর্গএকক।

12. **সংকেত :** প্রদত্ত লুপ $y^2 = \dfrac{x^2(a-x)}{a+x}$, যা $x=0$ থেকে a পর্যন্ত বিস্তৃত এবং x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^a y\,dx = ... = 2a^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$ বর্গএকক।

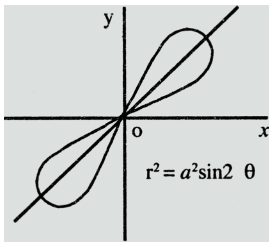
13. $\dfrac{3}{8}\pi ab$ বর্গএকক 14. π বর্গএক [**সংকেত** : $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ বসিয়ে বক্রটির কার্তেসীয় সমীকরণ $x^2+y^2=1$, একটি বৃত্ত $\Rightarrow$ ক্ষেত্রফল $= 4\int_0^1 y\,dx = ...$]



15. $\dfrac{3}{2}\pi a^2$ বর্গএকক 16. πa^2 বর্গএকক

17. **সংকেত** : ইহা $r=a$ বৃত্তের অন্তর্ভুক্ত ত্রিপত্র গোলাপ। $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ ও $\dfrac{5\pi}{6}$ এর জন্য $r=a$; $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ এর জন্য $r=-a$ ইত্যাদি।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 6\times$ OABO $= 6\cdot\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 d\theta = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 3\theta\,d\theta = ... = \dfrac{\pi a^2}{4}$ বর্গএকক।



18. **সংকেত** : $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$-এর মধ্যে একটি এবং $\pi\le\theta\le\dfrac{3\pi}{2}$ এর মধ্যে অপর একটি লুপ অবস্থিত; এবং লুপ দুটি প্রতিসম।

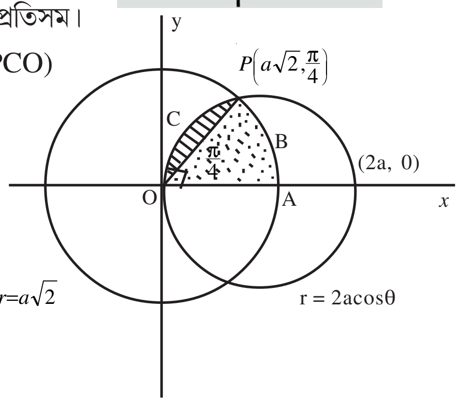
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 2\cdot\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta = ... = a^2$ বর্গএকক।

19. **সংকেত** : সাধারণ অংশটি প্রাথমিক রেখা $0x$ এর সাপেক্ষে প্রতিসম।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\times$OABPCO $= 2$ (OABPO + OPCO)

$$= 2\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(a\sqrt{2}\right)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2a\cos\theta)^2 d\theta\right\}$$

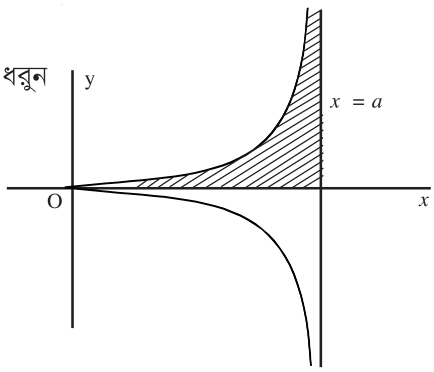
$=$ .... $= a^2(\pi-1)$ বর্গএকক।



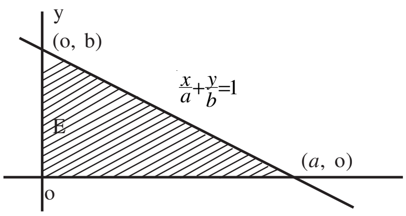
20. **সংকেত** : বক্রটির অসীমপথ $x = a$ এবং উহা x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^a y dx = 2\int_0^a \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}} dx, \quad x = a\sin^2\theta$ ধরুন

$= .... = \dfrac{3}{4}\pi a^2$ বর্গএকক।



21. **সংকেত** : যেহেতু ক্ষেত্রটি প্রথমপাদে এবং x-এর মান 0 থেকে a এবং y-এর মান 0 থেকে $b\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$ পর্যন্ত বিস্তৃত E ক্ষেত্র; অতএব $s = \iint_{\mathrm{E}} dxdy = \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy$



$= \int_0^a [y]_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dx = \int_0^a \dfrac{b}{a}(a-x)dx = \dfrac{ab}{2}$ বর্গএকক।

22. ঘন এককে; (ক) $\dfrac{128}{7}\pi$ [**সংকেত** : $\mathrm{V} = \int_0^2 \pi\left(x^3\right)^2 dx = ...$] (খ) $\dfrac{\pi^2}{2}$ (গ) $2a\pi x_1^2$

23. বর্গএককে (ক) $4\pi a^2$ (খ) $2\pi\left[\sqrt{2} + \log\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ (গ) $\dfrac{8}{3}\pi\sqrt{a}\left\{(1+x_1)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right\}$

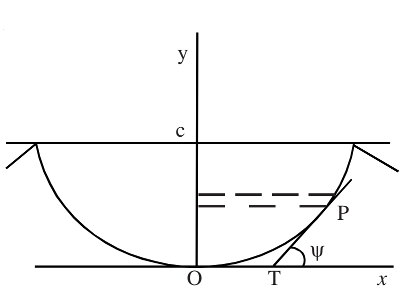
24. **সংকেত** : আর্চটির প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে $\theta = \pm\pi$ এবং তখন $x = \pm a\pi$

$\therefore \quad \mathrm{V} = \int_{-a\pi}^{a\pi} \pi y^2 dx = \pi a^2 \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\theta)^3 d\theta$

$= 8\pi a^3 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^6\dfrac{\theta}{2} = 8\pi a^3 \cdot 2\int_0^{\pi} \cos^6\dfrac{\theta}{2} d\theta$

$= 16\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \cos^6 z \cdot 2dz \quad [\dfrac{\theta}{2} = z$ ধরে]

$= 32\pi a^3 \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3$ ঘন একক।



$\mathrm{S} = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} a(1+\cos\theta)\sqrt{\{a(1+\cos\theta)d\theta\}^2 + \{-a\sin\theta d\theta\}^2} \qquad \left[\therefore \mathrm{S} = 2\pi \int y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\right]$

$= 2\pi a^2 \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\theta)\sqrt{2(1+\cos\theta)} d\theta = 8\pi a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3\dfrac{\theta}{2} d\theta = ... = \dfrac{64}{3}\pi a^2$ বর্গএকক।

25. **সংকেত :** $y^2 = t^2\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^2 = x\left(1-\frac{x}{3}\right)^2$, যাহা x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং y-অক্ষের ডানদিকে $x=0$ থেকে 3 পর্যন্ত অর্থাৎ $t=0$ থেকে $\sqrt{3}$ পর্যন্ত বিস্তৃত।

$\therefore\ \mathrm{V} = \pi\int_0^3 y^2 dx = \pi\int_0^3 x\left(1-\frac{x}{3}\right)^2 dx = ...= \frac{3\pi}{4}$ ঘন একক।

এবং $\mathrm{S} = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{3}t^3\right)\left(1+t^2\right)dt = \frac{\pi}{3}\int_0^3 (3-x)(1+x)\,dx = ...= 3\pi$ বর্গএকক।

26. **সংকেত :** কার্ডিঅয়েডটি প্রাথমিক রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম এবং উহার উপরিঅর্ধ $\theta=0$ থেকে $\theta=\pi$ পর্যন্ত বিস্তৃত। অতএব আয়তন $=\pi\int_{\theta=0}^{\pi}(r\sin\theta)^2 d(r\sin\theta)$ $\qquad \left[\therefore \mathrm{V} = \int \pi y^2 dx\right]$

$= \pi\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 \sin^2\theta\{-a\sin\theta\cos\theta - a(1+\cos\theta)\sin\theta\}d\theta$

$= -\pi a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\left(1-\cos^2\theta\right)(1+2\cos\theta)\cdot\sin\theta\, d\theta,$ এখন $\cos\theta = z$

ধরুন এবং অগ্রসর হউন $=........= \frac{8\pi}{3}a^3$ ঘনএকক।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 2\pi\int_0^{\pi} y\frac{ds}{d\theta}d\theta = 2\pi\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta\cdot\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta$

$$\left[\therefore \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\right]$$

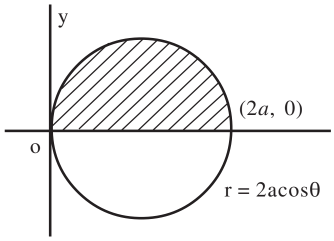
$= a^2\cdot 2\pi\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 4\pi a^2\int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}d\theta$

($\cos\frac{\theta}{2} = z$ ধরুন) $=........= \frac{32}{5}\pi a^2$ বর্গএকক।

27. **সংকেত :** নির্ণেয় আয়তন $\mathrm{V} = \iint_E z\,dxdy,$ যখন E সমাকলন ক্ষেত্রটি x-y-তল দ্বারা প্রদত্ত স্তম্ভককে ছেদিত ক্ষেত্র অর্থাৎ উহা $x^2+y^2=2ax$ বৃত্ত (যেহেতু $x^2+y^2=2ax$ স্তম্ভকে $z=0$ বসালে ইহাই হয়)। বৃত্তটিকে মেরুস্থানাঙ্কে রূপান্তরিত করে অর্থাৎ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ বসালে পাওয়া যায় $r=2a\cos\theta$ বৃত্ত।

অতএব প্রতিসাম্যের জন্য $\mathrm{V} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{2a\cos\theta}\frac{r^2}{a}\cdot rdr\right\}d\theta$ $\left[\mathrm{z} = \frac{x^2+y^2}{a} = \frac{r^2}{a}, dxdy = rdrd\theta\right.$ এবং

রূপান্তরের জন্য পরিবর্তিত সমাকলের ক্ষেত্র $r=2a\cos\theta$-তে θ এর মান 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত নিলে (অর্থাৎ অর্ধবৃত্তের জন্য) r-এর মান 0 থেকে $2a\cos\theta$ পর্যন্ত বিস্তৃত থাকে]



$$\therefore \text{V}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4a}\right]_0^{2a\cos\theta} d\theta$$

$$=\frac{1}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2a)^4\cdot\cos^4\theta d\theta=\frac{1}{2a}\cdot 16a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=8a^3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$ [$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ এর সূত্র প্রয়োগ করে]

$$=\frac{3}{2}\pi a^3$$ ঘন একক।

28. **সংকেত** : নির্ণেয় আয়তন $\text{V}=\iint_{\text{E}} Z\,dxdy=\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}\right)dxdy$

[$\therefore$ E ক্ষেত্রটি x-y তলে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত]

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}\right)dxdy=2\int_0^a\left[\frac{x^2y}{p}+\frac{y^3}{3q}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=2\int_0^a\left[\frac{x^2\sqrt{a^2-x^2}}{p}+\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3q}\right]dx$$

$$=2a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{p}+\frac{\cos^4\theta}{3q}\right\}d\theta,$$ [$x=a\sin\theta$ ধরে]

$$=\ldots\ldots=\frac{\pi a^4(p+q)}{8pq}$$ ঘন একক।

দ্রষ্টব্য : এখানে E ক্ষেত্রটি x-y তলে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত হওয়ায় উহা উভয় অক্ষের সাপেক্ষেই প্রতিসম।

অতএব $\text{V}=4\times$ প্রথমপাদের সমাকলন ক্ষেত্রের জন্য আয়তন $=4\cdot\int_0^a\left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}\right)dy\right\}dx$

ধরেও আগান যায়।

অতিরিক্ত পাঠ

(Selected Readings)

1. Integral Calculus–Das & Mukherjee, UNDhur
2. Integral Calculus (Au introduction to Analyis)–Maity & ghosh, New Central
3. Mathematical Analysis–Malik & Arora, New Age International
4. Mathematical Analysis–Shantinarayn, S. Chand.
5. Elementary Treatise on the Calculus–Geogre A. Gibson.
6. Real Aualysis–D. Chatterjee, Prentice Hall.

একক 8 ❑ সাধারণ অবকল সমীকরণ—গঠন ও সমাধান (Ordinary Differential Equation–Construction and Solution)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

বিজ্ঞান, বিশেষত: প্রকৃতিবিজ্ঞানের অগ্রগতিতে অবকল সমীকরণের একটি বিশেষ ভূমিকা আছে। অবকলন প্রক্রিয়া খুবই গুরুত্বপূর্ণ, কারণ, যে কোন অবিরত (continous) পরিবর্তনশীল রাশির, পরিবর্তনের হারই অবকল সহগের মানের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়। যেমন ধরি কোন দেশের জনসংখ্যা x, চল সময় t, তাহলে $\frac{dx}{dt}$ সেই দেশের জনসংখ্যা পরিবর্তনের হার। যদি $\frac{dx}{dt}$, ঋনাত্বক হয়, তাহলে বুঝতে হবে জনসংখ্যা ক্রমশঃ হ্রাস পাচ্ছে; যদি ধনাত্মক হয়, তার অর্থ জনসংখ্যা ক্রম বর্ধমান। এইভাবে অনেককিছুই যেমন, গতি, ত্বরণ, আমদানী রপ্তানী, বর্হিবানিজ্য, বাজারে চাহিদা ও তার মূল্যমান, শিক্ষার অগ্রগতি ইত্যাদি অবকল সহগের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়। আকাশে প্লেনের গতি পথ; ঘড়ির পেন্ডুলামের দোলন গতি, মহাকাশ যানের গতি সংক্রান্ত তথ্য সূর্যের চারিপাশে গ্রহরাজি ঘূর্ণনপথ অবকল সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। উপরোক্ত বিষয়গুলির আলোচনার জন্য আমাদের অবকল সমীকরণ ও তার সমাধান পদ্ধতি সমূহ জানা প্রয়োজন। পরবর্তী কয়েকটি এককে পাঠক্রমের অন্তর্ভূক্ত অবকল সমীকরণগুলি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। এই এককে তাদের কয়েকটি আলোচিত হল।

8.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি

● সাধারণ ও পার্শ্বিক অবকল সমীকরণ এবং তাদের ক্রম ও ঘাত সম্পর্কে অবহিত হবেন।

● অবকল সমীকরণের গঠন ও তার সমাধান এবং তাদের জ্যামিতিক প্রয়োগ ও বাস্তব সমস্যার সাথে সম্পর্ক সম্বন্ধে আংশিকভাবে পরিচিত হবেন।

● কয়েক প্রকার একমাত্রীয় অবকল সমীকরণের সমাধানের পদ্ধতি শিখতে পারবেন।

8.3 সংজ্ঞা ও প্রকারভেদ

(ক) সাধারণ অবকল সমীকরণ (Ordinary Differential Equation):

যে সমীকরনে বিভিন্ন ঘাতযুক্ত স্বাধীন ও অধীন চলরাশি এবং তাদের বিভিন্ন ক্রমযুক্ত সাধারণ অবকল সহগ, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}, \ldots\ldots$ সন্নিবিষ্ট থাকে, তাকে সাধারণ অবকল সমীকরণ বলে। যেমনঃ

(i) $x\,dy - y\,dx + 2xy\,dy = 0$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} .= -\mu^2 y$

(iii) $\frac{d^4y}{dx^4} + 2k^2\frac{d^2y}{dx^2} + k^4 y = 0$

(iv) $\dfrac{d^3y}{dx^3}+y=\left(e^x+1\right)^2$

(v) $\dfrac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+a_n(x)y=\mathrm{f}(x,y)$, ইত্যাদি (n ধনাত্মক সংখ্যা)

(খ) পার্শ্বিক অবকল সমীকরণ (Partial Differential Equation):

উপরোক্ত অবকল সমীকরণে সাধারণ অবকল সহগের পরিবর্তে বিভিন্ন ক্রম ও ঘাত যুক্ত পার্শ্বিক (partial) অবকলসহগ সন্নিবিষ্ট থাকলে, তাকে পার্শ্বিক অবকল সমীকরণ বলে (Partial Differential Equation) যেমন :

(i) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\mathrm{c}^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(ii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

(iii) $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial r^2}=4\pi t\,\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$

(iv) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

(v) $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2h\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2g\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\mathrm{f}\dfrac{\partial u}{\partial g}+cu=0$, ইত্যাদি।

(গ) সাধারণ অবকল সহ-সমীকরণ (Ordinary Simultaneous Differential Equation):

যদি একটিমাত্র স্বাধীন চলরাশির একাধিক অধীন চলরাশি থাকে তবে ওগুলি দিয়ে গঠিত সাধারণ অবকল সমীকরণগুলিকে একত্রে **সাধারণ অবকল সহ-সমীকরণ (Ordinary Simultaneous Differential Equation)** বলে।

(i) $\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}+2y-3z=x\\&\frac{dz}{dx}+2z-3y=e^{2x}\end{aligned}\right\}$

(ii) $\left.\begin{aligned}&\mathrm{D}x+y=\sin t\\&\mathrm{D}y+x=\cos t\end{aligned}\right\}\quad \mathrm{D}\equiv\dfrac{d}{dt}$

(iii) $(\mathrm{D}+2)x+3y=0; (\mathrm{D}+2)y+3x=2e^{2t}$, ইত্যাদি।

(গ) সরল ও বহুঘাত অবকল সমীকরণ (Linear and Non-Linear Oridanry Differential Equation):

যদি কোন অবকল সমীকরণে অধীন চলরাশিটি এবং তার বিভিন্ন ক্রমের অবকল সহগগুলি কেবলমাত্র একঘাতযুক্ত

হয় এবং অধীন চলরাশির ও তার অবকলসহগের কোন গুণফল না থাকে, তাহলে সেই সমীকরণকে সরল বা রৈখিক (Linear) একঘাত অবকল সমীকরণ বলে। অন্যথায় তাকে অরৈখিক (non-linaer) অবকল সমীকরণ বলে।

(i) $\frac{dy}{dx}=1+x^2y^2$ অরৈখিক (non-linear)

(ii) $\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=\mathrm{Q}$ রৈখিক (linear) P,Q, ধ্রুবক বা x এর অপেক্ষক

(iii) $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+5y=0$ রৈখিক

(iv) $\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+y=\sin x$ রৈখিক

(v) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+y=\frac{dy}{dx}$ অরৈখিক

(vi) $\frac{d^4y}{dx^4}+2k^2\frac{d^2y}{dx^2}+k^4y=0$ রৈখিক

(vii) $\sqrt{y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=1+x$ অরৈখিক

8.4 ক্রম/মাত্রা ও ঘাত (Order and Degree of Ordinary Differential Equation) :

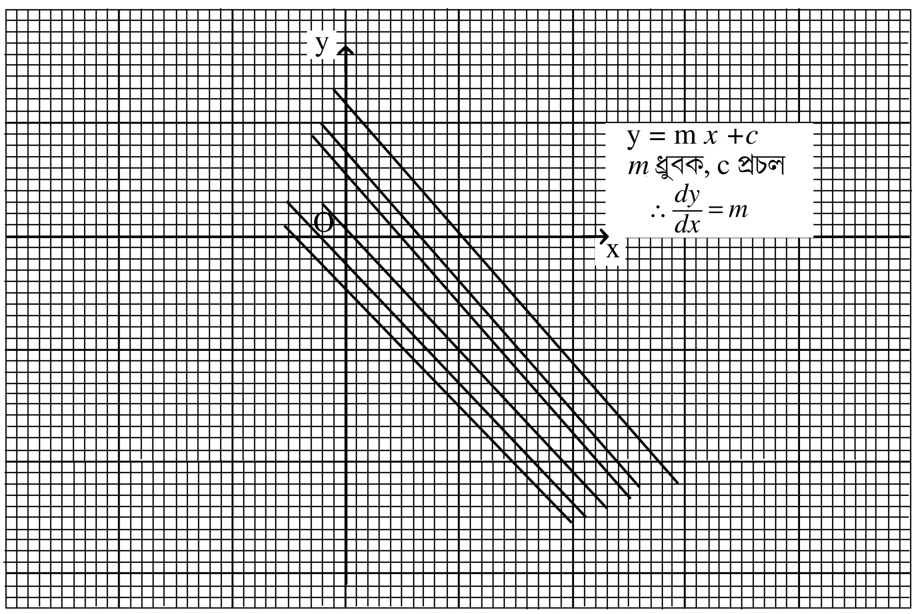
ক্রম/মাত্রা (Order) : কোন অবকল সমীকরণে যদি বিভিন্ন ক্রমযুক্ত অবকল-সহগ সন্নিবিষ্ট থাকে তাহলে সেগুলির মধ্যে সর্বোচ্চ ক্রমযুক্ত অবকল সহগটির ক্রমকেই ওই অবকল সমীকরণের 'মাত্রা' বা 'ক্রম' (Order) বলা হয়।

ঘাত (Degree): কোন অবকল সমীকরণে সন্নিবিষ্ট **সর্বোচ্চ** ক্রমযুক্ত অবকল সহগটি করণী চিহ্ন (radical sign) মুক্ত হওয়ার পর যে ঘাত পাওয়া যায়, তাহাকে ঐ সমীকরণের ঘাত বলে। যদি সমীকরণটি একঘাতযুক্ত হয়, তাহলে তাকে **একঘাত বা সরল রৈখিক অবকল সমীকরণ** বলে। আবার যদি সর্বোচ্চ ক্রমযুক্ত অবকল সহগটির ঘাত একের বেশী হয়, তাহলে সমীকরণটিকে **বহুঘাত অবকল সমীকরণ** বলে। ঐ সর্বোচ্চক্রমের ঘাতকেই ওই সমীকরণের ঘাত বলা হয় যেমন -

সমীকরণ:	মাত্রা/ক্রম	ঘাত
(i) $\left(1-x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+5y=0$	দুই	এক
(ii) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)-12=0$	এক	দুই
(iii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=5\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$	দুই	দুই
বা, $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2=5\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3$		

8.5 অবকল সমীকরণের গঠন ও মূল সমাধান : (Formation and Primitive Solution of Ordinary Diff. Equation)

যেকোন একটি প্রদত্ত সমীকরণ থেকে কিভাবে তার উপযুক্ত বা অনুসঙ্গী (Corresponding) অবকল সমীকরণ তৈরী করা যায়, এখন সেটাই আমাদের আলোচ্য বিষয়। আমরা জানি সমতলের উপর যেকোন সরল সমীকরণ সরলরেখা নির্দেশ করেঃ যেমন- $y=mx+c$। এটি একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, যদি m, c দুটিই নির্দিষ্ট থাকে; যদি

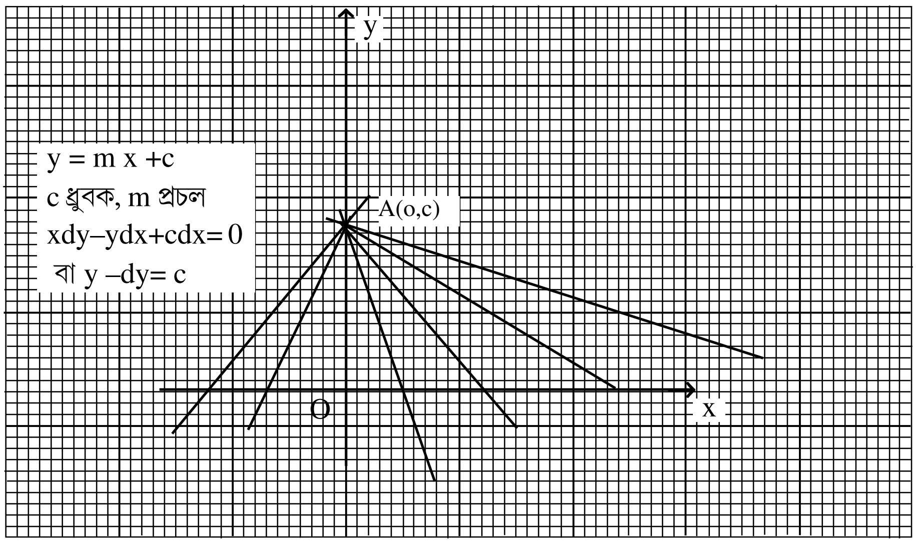


চিত্র 8.1

m নির্দিষ্ট কিন্তু c একটি পরিবর্তনশীল প্রচল হয়, তাহলে $y = mx + c$ একগুচ্ছ সমান্তরাল সরলরেখা নির্দেশ করবে। এক্ষেত্রে,

আবার যদি c নির্দিষ্ট প্রচল কিন্তু m পরিবর্তনশীল হয়, তাহলে $y = mx + c$ *(i)* হবে একগুচ্ছ সরলখো যার প্রতিটি A (0,c) বিন্দুর মধ্য দিয়ে যাবে। [চিত্র 8.1] $\frac{dy}{dx} = m$ – ই হবে উদ্দিষ্ট অবকল সমীকরণ।

[চিত্র 8.2], $y' = \frac{dy}{dx} = m$ সমীকরণ (i) থেকে m অপনয়ন করে পাই $y - xy' = \mathrm{c}$ এটি উদ্দিষ্ট অবকল সমীকরণ অর্থাৎ অবকল সমীকরণ। সৃষ্টি করতে গেলে প্রদত্ত সমীকরণটিকে অবকলন প্রক্রিয়া করে দুটির মধ্যে পরিবর্তনশীল প্রচলটিকে অপনয়ন করতে হবে। সে সমীকরণটি পাওয়া যাবে, সেটিই উদ্দিষ্ট অবকল সমীকরণ।



চিত্র 8.2

যদি প্রদত্ত সমীকরণটি একঘাত না হয়ে দ্বিঘাত বা বহুঘাত হয়, তাহলেও একই প্রক্রিয়ায় অনুষঙ্গী অবকল সমীকরণটি পাওয়া যাবে। যেমন-

উদাহরণ-1. $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$ ......(i)

এটি সম-নাভি কনিক গোষ্ঠী (system of confocal conics)। a, b নির্দিষ্ট ধ্রুবক, λ পরিবর্তনশীল প্রচল।

(i) কে x -এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$$\frac{2x}{a^2+\lambda} + \frac{2y}{b^2+\lambda} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ বা } \frac{x}{a^2+\lambda} = -\frac{yp}{b^2+\lambda} = \frac{1}{k},\ p = \frac{dy}{dx} \text{ (ধরা যাক)}$$

$\therefore a^2+\lambda = xk$.......(3), $b^2+\lambda = -$ypk.......(4)

(i) এ বসিয়ে পাই $x-\dfrac{y}{p}=k\cdots(5)$

(3), (4) এর মধ্যে λ অপনয়ন করে এবং k এর মান বসিয়ে

$$\left(a^2-b^2\right)p=(x+yp)(xp-y),\quad p=\frac{dy}{dx}$$

এটি সমনাভি কনিক্ গোষ্ঠীর (confocal conics) উদ্দিষ্ট অবকল সমীকরণ।

লক্ষ্যণীয় বক্ররেখা গোষ্ঠীর ‘‘মূল’’ (primitive) সমীকরণটি একঘাত হোক্ বা বহুঘাত হোক্, যদি পরিবর্তনশীল প্রচল সংখ্যা একটি হয়, তাহলে অনুষঙ্গী অবকল সমীকরণটি একমাত্রীয় (first order) হবে।

উদাহরণ-2. সমনাভিলম্ব এবং x -অক্ষের সঙ্গে সমান্তবাল অক্ষযুক্ত অধিবৃত্তগোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন।

উল্লিখিত অধিবৃত্তগোষ্ঠীর সমীকরণ $(y-b)^2=4\lambda(x-a)\cdots(1)$

এখানে 4λ (নাভিলম্ব) নির্দিষ্ট ধ্রুবক, a, b পরিবর্তনশীল প্রচল; কাজেই উদ্দিষ্ট অবকল সমীকরণ নির্ণয় করতে গেলে a ও b কে অপনয়ন করতে হবে।

(1) কে x - সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $(y-b)\dfrac{dy}{dx}=2\lambda\cdots\cdots(2)$

পুনরায় অবকলন করে পাই $(y-b)\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0\cdots\cdots(3)$

(2) এবং (3) থেকে (y - b) অপনয়ন করে $2\lambda\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3=0\cdots\cdots\cdots(4)$

এটি ই হলো উদ্দিষ্ট অবকল সমীকরণ।

বি:দ্র: সমীকরণ (1)-এ দুটি পরিবর্তনশীল প্রচল আছে, তাই অনুষঙ্গী অবকল সমীকরণটি (4) দ্বিমাত্রিক(2nd order) ।

উদাহরণ-3. নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ যুক্ত এবং কেন্দ্র x -অক্ষের উপর অবস্থিত এরুপ বৃত্তগোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন। ধরা যাক্ নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ r, উল্লিখিত বৃত্তগোষ্ঠীর সমীকরণ $(x-a)^2+y^2=r^2\cdots\cdots(1)$

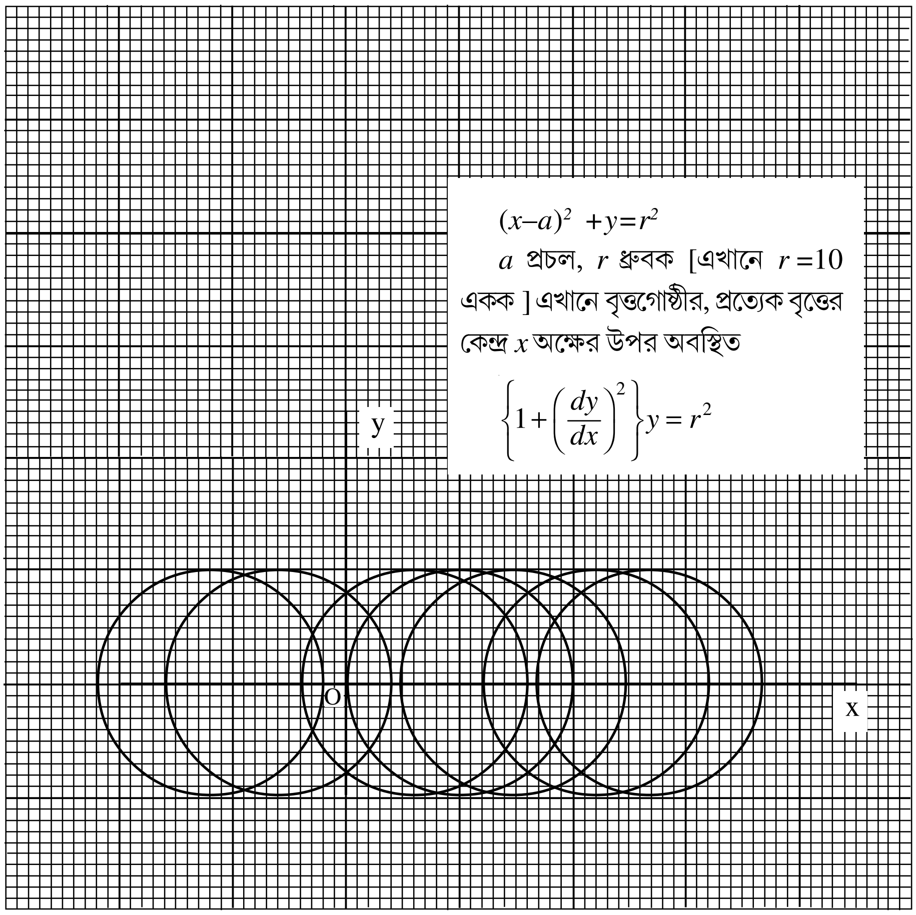
এখানে a পরিবর্তনশীল প্রচল অর্থাৎ a কে অপনয়ন করতে হবে।

(1) কে x - সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $2(x-a)+2yy'=0\cdots(2)$ $\left[y'=\dfrac{dy}{dx}\right]$

(1) এবং (2) হইতে $(x - a)$ অপনয়ন করে পাই

$\left(y\,y'\right)^2 + y^2 = r^2$ বা $\left(1 + y'^2\right)y^2 = r^2$ [চিত্র 8.3]

এটিই উদ্দিষ্ট অবকল সমীকরণ। এটি একমাত্রীয় দ্বিঘাত অবকল সমীকরণ। অবশ্যই অরৈখিক (nonlinear)



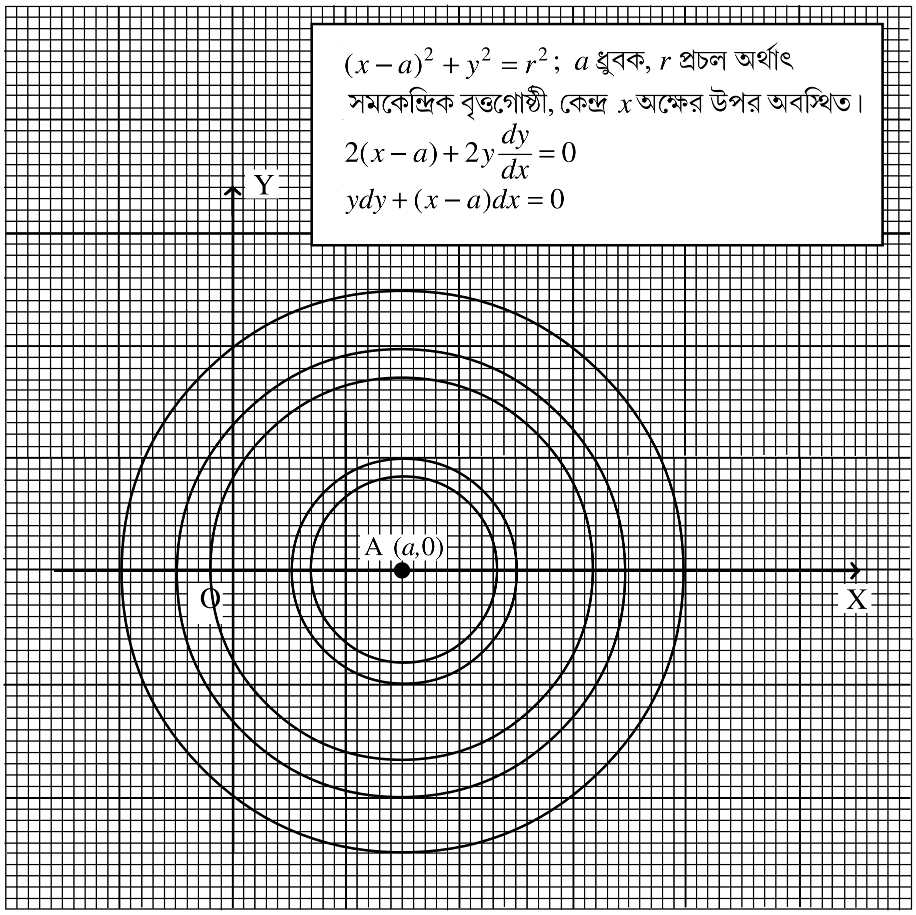
চিত্র 8.3

উদাহরণ-4. x -অক্ষের উপর অবস্থিত সম- কেন্দ্রিক বৃত্তগোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন।

উল্লিখিত বৃত্তগোষ্ঠীর সমীকরণ

$(x - a)^2 + y^2 = r^2 \cdots (1)$

কেন্দ্র (a,0) নির্দিষ্ট অর্থাৎ a নির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং r পরিবর্তনশীল চলক।



চিত্র 8.4

(1) কে x -সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$(x-a)+y\dfrac{dy}{dx}=0\cdots\cdots(2)$ [চিত্র 8.4]

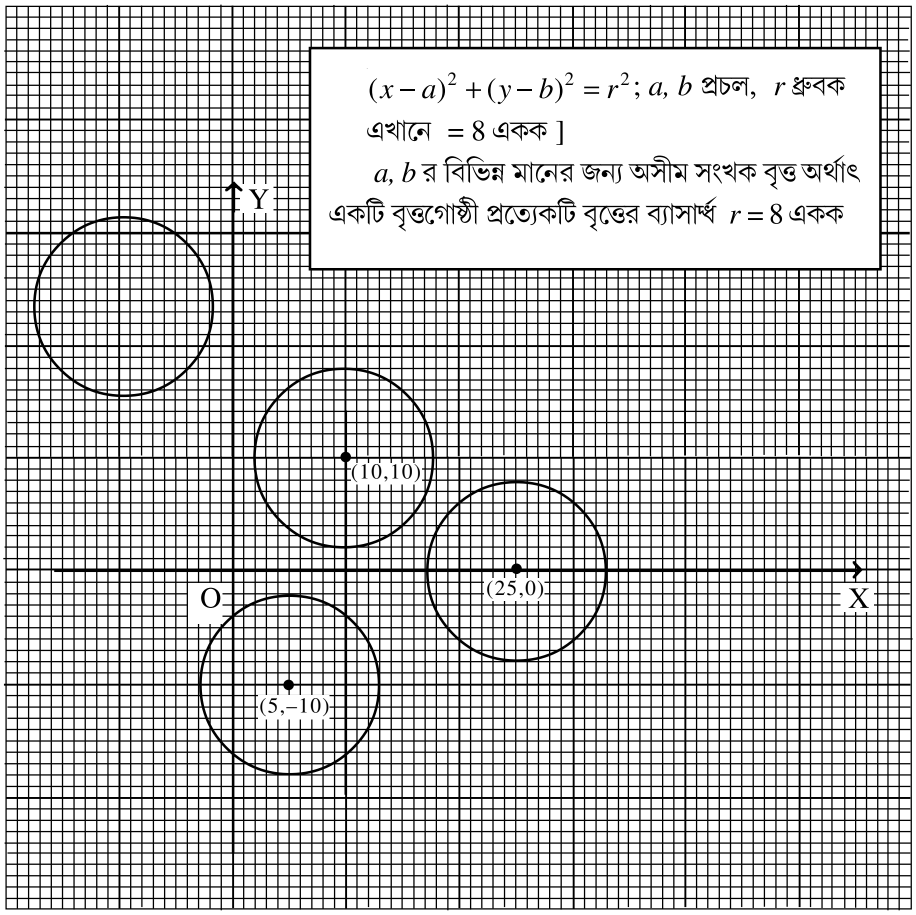
এটাই উদ্দিষ্ট অবকলন সমীকরণ।

বিপরীতক্রমে অবকল সমীকরণ (2) এর সমাধান (1) অর্থাৎ বলা যায় অবকল সমীকরণ (2), সমীকরণ (1) থেকে উৎপন্ন বা নির্মিত। সমীকরণ (1) কে সমীকরণ (2) এর ‘‘মূল সমাধান’’ (primitive solution) বলে।

উদাহরণ-5. প্রমাণ করুণ r ব্যাসার্ধের সকল বৃত্তরাজির অবকল সমীকরণ

$$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}=r\frac{d^2y}{dx^2}.$$

প্রদত্ত বৃত্তরাজি $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$



চিত্র 8.5

এখানে r ধ্রুবক এবং a, b চল-প্রচল; যেহেতু চলপ্রচলের সংখ্যা দুটি, তাই অবকল সমীকরণটি দ্বিক্রম-যুক্ত হবে। (1) কে অবকলন করে পাই $(x-a)+(y-b)\dfrac{dy}{dx}=0$ ....(2)

পুনরায় অবকল করে $1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$

$\therefore y-b=-\dfrac{1+y_1^2}{y_2}\cdots\cdots(3)$

(2) এ বসিয়ে $(x-a)=\dfrac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}\cdots\cdot(4)$

(1), (3) এবং (4) থেকে a, b অপনয়ন করে পাই $r^2 = \dfrac{y_1^2\left(1+y_1^2\right)^2 + \left(1+y_1^2\right)^2}{(y_2)^2}$

$$\therefore r^2 y_2^2 = \left(1+y_1^2\right)^3$$

$$r\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$$ এটাই নির্ণেয় অবকল সমীকরণ।

প্রশ্নাবলী ঃ

1. দেখান যে $\log(xy) = cx$ নিম্নোক্ত অবকল সমীকরণের মূল (primitive) সমাধান

$$x\frac{dy}{dx} + y = y\log(xy)$$

2. দেখান যে $y = \dfrac{a}{x} + b$ নিম্নোক্ত অবকল সমীকরণের মূল (primitive) সমাধান

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0$$

3. নিম্নোক্ত সমীকরণের অনুষঙ্গী অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন

(a) $y = (a+bx)\,e^{3x}$

(b) $ax^2 + by^2 = 1$

4. নিম্নোক্ত সমীকরণের অনুষঙ্গী অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং ভৌত-ব্যাখা (physical interpretation) করুন $x = a\cos\mu t + b\sin\mu t$

5. পর্য্যবেক্ষণ করে দেখুন $y = a\log x + b$ হলো নিম্নোক্ত অবকল সমীকরণের সমাধান

$$\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

উত্তরমালা ঃ

1. অবকল সমীকরণের মূলে যেহেতু একটি মাত্র প্রচল, অতএব অবকল সমীকরণটি সরল বা একঘাত হবে। অবকলন করে পাই $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = c$, এবার c অপনয়ন করে পাই

$y + x\frac{dy}{dx} = y\log(xy)$ $\therefore$ প্রমাণিত।

2. a, b দুইটি পরিবর্তনশীল প্রচল (variable parameter) অতএব অনুষঙ্গী অবকল সমীকরণটি দ্বিমাত্রীয় হবে। অবকল করে পাই $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2} \cdots\cdots (A)$

বা $x^2\frac{dy}{dx} + a = 0$

পুনরায় অবকল করে পাই $2x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2x}{dx^2} = 0$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0 \quad (B)$

অর্থাৎ অবকল সমীকরণ (B) এর মূল $y = \frac{a}{x} + b$

3. (a) অবকলন করে $\frac{dy}{dx} = 3(a+bx)\mathrm{e}^{3x} + b\cdot\mathrm{e}^{3x} = 3y + b\mathrm{e}^{3x}$

পুনরায় অবকলন করে $\frac{d^2y}{dx^2} = 3\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3\cdot b\cdot\mathrm{e}^{3x}$

$= 3\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3\cdot\left(\frac{dy}{dx} - 3y\right)$

সরলীকরণ করে, নির্ণেয় অবকলন সমীকরণ $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

(b) উপরোক্ত 3.(a) অংশের অনুরূপে দুটি পর্য্যায়ে অবকলন করে এবং a, b অপনয়ন করে পাওয়া যাবে

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$$

4. μ নির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং a, b কে পরিবর্তনশীল প্রচল (variable parameters) ধরে এবং দুটি পর্য্যায়ে অবকলন করে $\frac{dx}{dt} = -a\mu\sin\mu\,\mathrm{t} + b\mu\cos\mu\mathrm{t}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\mu^2\cos\mu t - b\mu^2\sin\mu\mathrm{t} = -\mu^2 x$$

প্রদত্ত সমীকরণটি একটি বিশেষ প্রকার গতিকে বর্ণনা করে যেখানে ত্বরণ মূলবিন্দুর দিকে নির্দেশিত এবং এর মান মূলবিন্দু থেকে গতিশীল কর্ণটির দূরত্বের সঙ্গে সমানুপাতী, (μ^2- অনুপাত ধ্রুবক)।

5. $y = a\log x + b \cdots\cdots (1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$ বা $x\frac{dy}{dx} = a \cdots\cdots (2)$ [x-এর সাপেক্ষে অবকল করে]

পুনরায় অবকলন করে পাই $\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

প্রমাণিত।

8.6 একমাত্রীয় অবকল সমীকরণ (First Order Differential Equation)

প্রথম ক্রম অবকল সমীকরণকে $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$ ভাবে লেখা যায়, যেখানে M এবং N উভয়েই x ও y এর অপেক্ষক। এই সমীকরণকে যথার্থ কখন বলা হবে বা যথার্থ (exact) অবকল সমীকরণের অর্থ কি? এই অবকল সমীকরণকে সবসময় সরাসরি সমাধান করা সম্ভব হয় না। এটি তখনই সমাধানযোগ্য, যখন এটিকে $d\,\phi(x, y) = 0$ হিসাবে প্রকাশ করা সম্ভব হয়। অর্থাৎ তখন সমীকরণটি সমাধান যোগ্য এবং এর সমাধান সমীকরণ বা মূল (Premitive) হবে, যখন $d\phi(x, y) = 0$ কে সমাকলণ প্রক্রিয়ায় পাওয়া যায় $\phi\,(x, y) = c$, c একটি সমাকল ধ্রুবক।

$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$ কে বিভিন্ন আকারে পাওয়া যায়। প্রকারভেদে সমীকরণ সমাধানের ও প্রক্রিয়া বিভিন্ন। এই অংশে সমাধানের বিভিন্ন প্রক্রিয়া সম্পর্কে বিশদ ভাবে আলোচনা হবে।

(ক) যদি $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$ অবকল সমীকরণকে $g(x)dx + f(y)dy = 0$ ভাবে পরিবর্তিত করা যায়, তাহলে, সরাসরি সমাধান করা সম্ভব, সমাধানটি হবে $\int g(x)dx + \int f(y)dy = \mathrm{c}$, c একটি অদৃষ্ট (abitrary) ধ্রুবক। এই প্রক্রিয়াকে চলরাশির বিভাজন বা পৃথকীকরণ প্রক্রিয়া বলা যেতে পারে (separation of variables)। খুব সঙ্গত ভাবেই প্রশ্ন হতে পারে যে $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$ কি সর্বদাই সমাধান যোগ্য?

$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$ সমাধানযোগ্য বা যথার্থ হওয়ার শর্ত হল $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$

যদি এই শর্ত পূরণ না হয়, অর্থাৎ আপাত ভাবে অবকল সমীকরণটি যথার্থ না হয়, তাহলে অনেক সময়ে দেখা যায়, অবকল সমীকরণটিকে কোন একটি রাশি দিয়ে গুণ করলে সমীকরণটি যথার্থ হয়; এরূপ রাশিকে বলে **integrating factor (সংক্ষেপে I. F.) বা সমাকলন গুণক** ; যেমন $xdy - ydx = 0$ যথার্থ নয়, কারণ

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1 \neq \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = \frac{\partial (x)}{\partial x} = 1$$

কিন্তু যদি অবকল সমীকরণটিকে $\frac{1}{x^2}$ দিয়ে গুণ করা যায়, তাহলে সেটি দাঁড়ায় $\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$, এখানে

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$\therefore$ সমাকলন গুণকটি হল $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$এবং উহাকে সমাকলন করে উদ্দিষ্ট সমাধান পওয়া যায় $\dfrac{y}{x} = \text{c.} \Rightarrow y = cx.$

আবার দেখুন ঐ একই সমীকরণকে যদি $\dfrac{1}{y^2}$ দিয়ে গুণ করা যায় আমরা পাই $\dfrac{ydx - xdy}{y^2} = 0$ বা $d\left(\dfrac{x}{y}\right) = 0$ যাকে সমাকলন করে পাই

$\dfrac{x}{y} = k$ বা $x = ky$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে সমাকল গুণক হল $\dfrac{1}{y^2}$। উপরের উদাহরণ থেকে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে একটি যথার্থ অবকল সমীকরণের একাধিক সমাকল গুণক থাকা সম্ভব। ইহা অনন্য (Unique) নয়। নীচে কিছু সমাকল গুণকের উদাহরণ দেওয়া হল।

	প্রদত্ত রাশি	সমাকল গুণক	গুণকযথার্থ অন্তরকল
1.	$dx \pm dx$	—	$d(x \pm y)$
2.	$xdx \pm ydy$	—	$\frac{1}{2} d\left(x^2 \pm y^2\right)$
3.	$xdy + ydx$	—	$d(xy)$
4.	$xdy - ydx$	$\dfrac{1}{x^2}$	$d\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{xdy - ydx}{x^2}$
5.	$xdy - ydx$	$\dfrac{1}{x^2 + y^2}$	$\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$
6.	$xdy - ydx$	$\dfrac{1}{xy}$	$\dfrac{dy}{y} - \dfrac{dx}{x} = d\left\{\log\dfrac{y}{x}\right\}$
7.	$xdx + ydy$	$\dfrac{1}{x^2 + y^2}$	$\dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \dfrac{\frac{1}{2} d\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} = d\left\{\log\left(x^2 + y^2\right)\right\}$
8.	$ydx - xdy$	$\dfrac{1}{y^2}$	$d\left(\dfrac{x}{y}\right)$
9.	$xdy + ydx$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 y^2}}$	$\sin^{-1}(xy)$

একমাত্রার সরল (একঘাত) অবকল সমীকরণ বিভিন্ন পদ্ধতিতে সমাধান করা যায়। যেগুলি হল :—

(A) চল-পৃথকীকরণ পদ্ধতি

(B) বিশেষ নিয়মে সুষম (সমঘাত) সমীকরণের সমাধান এবং বিষম সমীকরণ (nonliomogeneous)-কে সুষম সমীকরণে পরিবর্তন করেও সমাধান করা যায়।

(C) যথার্থ সমীকরণগুলি সরাসরি সমাধান যোগ্য এবং যথার্থ নয় এমন (অ-যথার্থ) বহু সমীকরণ উপযুক্ত সমাকল রাশি (I.F)র গুণনে যথার্থ সমীকরণে পরিণত করা যায়।

(D) (a) একমাত্রীয় রৈখিক (linear) সমীকরণ (Leibnitz) এবং বার্নোলি'র (Bernoulli)র সমীকরণ।

(b) একমাত্রীয় বহুখাত সমীকরণ; ক্লেরাউট (Clairout's equation) সমীকরণ; বার্নোলির সমীকরণ (Bernoulli's equation)

8.7 চলরাশির পৃথকীকরণ পদ্ধতি (Method of Separation of Variables)

উদাহরণ ঃ

সমাধান করুন ঃ

1 $\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-y^2\right)}\ dx+\sin^{-1} y\ dy=0$

বা $\sqrt{1-x^2}\,dx+\dfrac{\sin^{-1} y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy=0$ [চলরাশির বিভাজন]

সমাকলন করে পাই

$x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1} x+\left(\sin^{-1} y\right)^2=\text{c}$, c সমাকল ধ্রুবক।

2. $\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}=0$

বা $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0$ [চলরাশির বিভাজন]

সমাকলন করে

$\sin^{-1} y+\sin^{-1} x=\text{c}$, c সমাকল ধ্রুবক।

3. $\sin x\ dy+\cos y\ dx=0$

বা $\dfrac{dy}{\cos y}+\dfrac{dx}{\sin x}=0$

বা $\sec y \; dy + \frac{1}{2}\frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} dx = 0$

সমাকলন করে পাই

$\log|(\sec y + \tan y)| + \log|\tan\frac{x}{2}| = \log c$

বা, $\left(\tan\frac{x}{2}\right)(\sec y + \tan y) = \text{c}$

$\therefore \quad \sec y + \tan y = c \; \cot\frac{x}{2}$

এটাই নির্ণেয় সমাধান। c সমাকল ধ্রুবক।

4. $\sec^2 x \tan y \; dx + \sec^2 y \tan x \; dy = 0$

বা $\frac{\sec^2 x}{\tan x} dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = 0$

সমাকলন করে পাই,

$\log|\tan x| + \log|\tan y| = \log \text{c}$

$\therefore \tan x \tan y = \text{c}$ c সমাকল ধ্রুবক।

5. $e^{x-y} dx + e^{y-x} dy = 0$

বা $\frac{e^x}{e^y} dx + \frac{e^y}{e^x} dy = 0$

বা $e^{2x} dx + e^{2y} dy = 0$

সমাকলন করে পাই,

$e^{2x} + e^{2y} = \text{K},$ যেখানে k সমাকল ধ্রুবক।

প্রশ্নাবলী ঃ

চলরাশির পৃথকীকরণ পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত সাধারণ অবকল সমীকরণগুলির সমাধান করুন।

1. $\frac{dy}{dx} + 1 = e^{x+y}$

2. $\left(1+y^2\right)dx - xy\,dy = 0$, যখন $x=1, y=0$

3. $y\sqrt{1+y_1^2} = \sqrt{x^2+y^2} \qquad y_1 = \dfrac{dy}{dx}$

4. $\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)dx + xy\,dy = 0$

5. $3e^x \tan y\,dx + \left(1-e^x\right)\sec^2 y\,dy = 0$

6. $(x-y)^2 \dfrac{dy}{dx} = a^2$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \sin(x+y)$

8. $y\,dy = e^{x+2y} \sin x\,dx$

9. $\left(1-x^2\right)dy = 2y\,dx$, যখন $x=2, y=1$

10. $\left(x^2 - yx^2\right)dy + \left(y^2 + xy^2\right)dx = 0$

11. $x\cos^2 y\,dx - y\cos^2 x\,dy = 0$

12. $x\left(1+y^2\right)dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0$

13. $f(x)$ নির্ণয় করুন, যখন $f^1(x)\dfrac{\tan x}{1+2\tan^2 x}$ এবং $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} + \log\sqrt{2}$

14. $2y + \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} = 3y^2$, $y=1$ যখন $x=0$

উত্তরমালা ঃ

1. ধরি $x+y=v \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx} - 1$

$$\left(\frac{dv}{dx} - 1\right) + 1 = e^v$$

$$e^{-v}dv = dx$$

সমাকলন $-e^{v}=x+c$

$\therefore\ e^{x+y}+x+c=0$ নির্ণেয় সমাধান

2. $x^2-y^2=1$

[$\dfrac{dx}{x}-\dfrac{ydy}{1+y^2}=0\ \therefore x=c\sqrt{1+y^2}$ আবার $x=1, y=0\ \therefore\ c=1$]

3. $x^2\pm y^2=a^2,\ a^2$ যদৃচ্ছ ধ্রুবক [সরলীকরণ করে $\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{x}{y}$]

4. $y^2=1+\left(c\cdot e^{-x^2}\right)/\,x^2$

$$\left[\frac{x^2+1}{x}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0 \text{ বা } xdx+\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{2y}{y^2-1}\right)dy=0\right]$$

5. $\tan y=\mathrm{C}\left(1-e^{x}\right)^3$

$$\left[3\frac{e^x}{1-e^x}dx+\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy=0\right]$$

6. $\dfrac{a^2}{2}\log\dfrac{x-y+a}{x-y-a}+y=c$

$$\left[x-y=v,\ 1-\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx} \text{ বা } \frac{v^2}{v^2-a^2}dv=dx \text{ বা } \left(1-\frac{a^2}{v^2-a^2}\right)dv=dx\right]$$

7. $\tan(x+y)-\sec(x+y)=x+c$

$$\left[x+y=\nu \quad \frac{dv}{dx}-1=\sin\nu\ \int dx=\int\frac{(1-\sin\nu)dv}{(1+\sin\nu)(1-\sin\nu)}=\tan\nu-\sec\nu\right]$$

8. $e^{x}(\sin x-\cos x)+e^{-2y}\left(y+\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{C}$

$$\left[\mathrm{I}=\int e^x\sin x\,dx=e^x(-\cos x)+\int e^x\cos x\,dx=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx\right.$$

$$\left.\therefore\ 2\mathrm{I}=e^x(\sin x-\cos x)\right]$$

9. $3xy = x + 3y + 1$

$$\left[\log cy = 2 \cdot \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]$$

10. $\log \frac{x}{y} - \frac{x+y}{xy} = \text{C}$

$$\left[\frac{(1-y)}{y^2} dy + \frac{(1+x)}{x^2} dx = 0 \right]$$

11. $x \tan x - \log \sec x = y \tan y - \log \sec y + \text{C}$

$$\left[\int x \sec^2 x\, dx - \int y \sec^2 y\, dy = 0 \right.$$

বা $x \int \sec^2 x\, dx - \int \sec^2 x\, dx - y \int \sec^2 y\, dy + \int \sec^2 y\, dy \Big]$

12. $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) = \text{C}$

$$\left[\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2y}{1+y^2} dy = 0 \right.$$

$$\left. \log\left(1+x^2\right) + \log\left(1+y^2\right) = \log c \right]$$

13. $f(x) = \frac{1}{2} \log\left(1+\sin^2 x\right) + \sqrt{2}$

$$\left[f(x) = \int \frac{\tan x}{1+2\tan^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx \right.$$

$$\left. = \frac{1}{2} \log\left(1+\sin^2 x\right) + \text{C} \right]$$

14. $y\left(3 - e^{x^2}\right) = 2$

$\left[\frac{dy}{y(3y-2)} = \frac{dy}{x} \right.$ বা $\frac{1}{2} \frac{3y-(3y-2)}{y(3y-2)} dy = \frac{dx}{x}$ বা $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{3y-2} dy - \frac{dy}{y} \right) = xdx$

সমাকলন করে $\left. \log\left\{(3y-2)/y\right\} = c + x^2 \ldots \right]$

8.8 সুষম বা সমঘাত একমাত্রীয় অবকল সমীকরণ (First Order & First Degree Homogeneous Differeutial Equation)

প্রথমে জানা প্রয়োজন সুষম বা সমঘাত অপেক্ষক কাকে বলে? যদি কোন অপেক্ষক $\phi(x, y)$ কে এমনভাবে প্রকাশ করা যায় $\phi(x,y)=x^n\,\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)$ অথবা

$\phi(x,y)=y^n\,\mathrm{G}\left(\frac{x}{y}\right)$ তাহলে তাকে সমঘাত বা সুষম (homogenous) n ঘাতযুক্ত অপেক্ষক বলা হয়, n যেকোন বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। উদাহরণ স্বরুপ ঃ—

$$\text{(i)}\quad \mathrm{f}(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x-y}=x^2\left\{\frac{1+(y/x)^3}{1-(y/x)}\right\}=x^2\,\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\therefore$ এটি একটি দ্বিঘাত সুষম (সমঘাত) অপেক্ষক।

$$\text{(ii)}\quad \mathrm{f}(x,y)=\frac{yx^{1/3}+y^{17/15}}{x^{1/5}y}=x^{2/15}\left\{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{2/15}\right\}=x^{2/15}\mathrm{F}\,(y/x)$$

$\therefore$ এই সুষম/সমঘাত অপেক্ষকটি ঘাত $\frac{2}{15}$

$$\text{(iii)}\quad \mathrm{f}(x,y)=\frac{y^3x+x^3y}{x^2y+xy^2}=\frac{y^4}{y^3}\left\{\frac{\frac{x}{y}+\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)}\right\}$$

$$=y\left\{\frac{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}{1+\frac{x}{y}}\right\}=y\,\mathrm{G}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$\therefore$ এইটি সমমাত্রীয় অপেক্ষক এবং এর ঘাত এক।

অবকল সমীকরণ $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=0$ এর M এবং N অপেক্ষক দুটি যদি একই ঘাতযুক্ত হয়, তাহলে ঐ অবকল সমীকরণটিকে সুষম (Homogeneous) অবকল সমীকরণ বলে।

এ ক্ষেত্রে অবকল সমীকরণে $y=\mathrm{v}x$ বসিয়ে (v একটি x এর অপেক্ষক) সরলীকরণ করলে v এবং x চলদুটির একটি অবকল সমীকরণ পাওয়া যেটিকে চলরাশির পৃথকীকরণ পদ্ধতিতে সহজেই সমাধান করা সম্ভব।

উদাহরণ ঃ

1. $(x+y)dy+(x-y)dx=0\cdots\cdots(1)$

ধরাযাক, $y = \mathrm{v}x$, অত:পর $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{v} + x\dfrac{d\mathrm{v}}{dx}$

(1) এ বসাইয়া পাই $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x}$

বা $\mathrm{v} + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\mathrm{v}-1}{\mathrm{v}+1}$

বা $x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{v-1}{v+1} - v = \dfrac{-(v^2+1)}{v+1}$

বা $-\dfrac{v+1}{v^2+1}dv = \dfrac{dx}{x}$

বা $-\dfrac{v}{v^2+1}dv - \dfrac{dv}{v^2+1} = \dfrac{dx}{x}$

সমাকলন করে পাওয়া যায়

$+\dfrac{1}{2}\log\left|(v^2+1)\right| + \tan^{-1}v + \log|x| = \mathrm{c}$

বা $\dfrac{1}{2}\log\left|\left(\dfrac{y^2}{x^2}+1\right)\right| + \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \log|x| = \mathrm{c}$

বা $\dfrac{1}{2}\log\left|(x^2+1)\right| - \log|x| + \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \log|x| = \mathrm{c}$

$\therefore\ \log\left|(x^2+y^2)\right| + \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \mathrm{c}$

এটাই নির্ণেয় সমাধান, যেখানে c সমাকল ধ্রুবক।

2. $(x^3\text{-}3xy^2)\ dx = (y^3\text{-}3x^2y)dy$ এটি একটি ত্রিঘাত সুষম অবকল সমীকরণ।

ধরাযাক্ $y = vx, \therefore\ \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটিতে বসাইয়া পাই $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3-3xy^2}{y^3-3x^2y}$

বা $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v-3v^2}{v^3-3v}=\frac{1-3v^2}{v\left(v^2-3\right)}$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{1-3v^2}{v\left(v^2-3\right)}-v=\frac{1-v^4}{v^3-3v}$

বা $\frac{dv}{x}=\frac{v^3-3v}{1-v^4}dv=\frac{-vdv}{1-v^2}-\frac{2v}{1+v^2}dv$

সমাকলন করে পাই $\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int\frac{(-2v)dv}{1-v^2}-\int\frac{2v}{1+v^2}dv-\log c$

বা $\log|x|+\log c=\frac{1}{2}\log\left|\left(1-v^2\right)\right|-\log\left|\left(1+v^2\right)\right|$

বা $\log|x|+\log \mathrm{c}=\frac{1}{2}\log\left|\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right)\right|-\log\left|\frac{x^2+y^2}{x^2}\right|$ $(\because y=vx)$

বা $\log|x|+\log \mathrm{c}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right|-\log|x|+2\log x$

বা $2\log \mathrm{c}=\log\left|\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right|$

$\therefore\ x^2-y^2=k\left(x^2+y^2\right)^2$

3. $x^2y\,dx-\left(x^3+y^3\right)dy=0$ এটি ত্রিঘাত সমমাত্রীয় অবকল সমীকরণ। ধরা যাক, $y = vx$

প্রদত্ত সমীকরণ: $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}$

$y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$ বসাইয়া পাই

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1+v^3}$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1+v^3}-v=\frac{-v^4}{1+v^3}$

সমাকলন করে $\therefore\ +\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{1+v^3}{v^4}dv=\int-\frac{dv}{v^4}-\int\frac{dv}{v}-\log c$

$\log|x|+\log c=\frac{1}{3v^3}-\log|v|$

$$=\frac{x^3}{3y^3}-\log|y|+\log|x|\cdots\cdots\left(\because v=\frac{y}{x}\right)$$

বা $\log\frac{y}{k}=\frac{x^3}{3y^2}$ বা $y=k\,e^{x^3/3y^2}$

এটাই নির্ণেয় সমাধান, k একটি সমাকল ধ্রুবক।

4. $\left(\frac{4x+6y+5}{3y+2x+4}\right)\frac{dy}{dx}=1$ [এটি সুষম নয়]

বা $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$

এখানে $\frac{a}{a^1}=\frac{b}{b^1}$ কারণ $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

এখানে $ax+by=v$ ধরতে হবে, অর্থাৎ $2x+3y=v$ ধরা হোক

তাহলে $2+3\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$ অর্থাৎ $3\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}-2$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই $\left\{\frac{dv}{dx}-2\right\}=3,\frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}=3\cdot\frac{v+4}{2v+5}$

$\therefore\ \frac{dv}{dx}=\frac{3v+12}{2v+5}+2=\frac{7v+22}{2v+5}$

বা, $\left(2-\frac{9}{7v+22}\right)dv=7dx$

বা, $2v-\frac{9}{7}\log(7v+22)=7x$

বা, $7\left\{2(2x+3y)-7x\right\}=9\log\left\{7(2x+3y)+22\right\}-9\log c$

বা, $7\{6y-3x\}=9\log\dfrac{(14x+21y+22)}{\text{c}}$

বা, $\log(14x+21y+22)^3=\text{c e}^{7(2y-x)}$

নির্ণেয় সমাধান।

5. $\dfrac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$

ধরি $x+y=v\Rightarrow 1+\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$

$\therefore\ \dfrac{dv}{dx}-1=\sin v+\cos v$

$\dfrac{dv}{dx}=\sin v+(1+\cos v)$

$=2\sin\dfrac{v}{2}\cdot\cos\dfrac{v}{2}+2\cos^2\dfrac{v}{2}$

$\int dx=\int\dfrac{\sec^2\frac{v}{2}\,dv}{2\left(1+\tan\frac{v}{2}\right)}$

$x=\log\left|\left(\tan\dfrac{x+y}{2}+1\right)\right|+\text{c}$

6. $\dfrac{dy}{dx}(x+y+1)=1$

$\dfrac{dx}{dy}=x+y+1$ ধরি $x+y+1=v$

$\dfrac{dv}{dy}=v+1$ $\dfrac{dx}{dy}+1=\dfrac{dv}{dy}$

সমাকলন করে $y=\int\dfrac{dv}{v+1}+c^1$

$=\log\left|(v+1)\right|+\text{c}^1$

$$= \log\left|(x+y+2)\right| - \log c$$

$\therefore\ x+y+2 = \mathrm{c}\ \ \mathrm{e}^{y}$ নির্ণেয় সমাধান।

7. $\left(\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dx - \left(\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}\right)dy = 0 \cdots\cdots (1)$

ধরি $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

(1) হইতে $v + x\frac{dv}{dx} = \dfrac{v\cos v}{\frac{1}{v}\sin v + \cos v}$

$$\therefore\ x\frac{dv}{dx} = \frac{-v\sin v}{\sin v + v\cos v}$$

$$\therefore\ \frac{\sin v + v\cos v}{v\sin v}dv + \frac{dx}{x} = 0$$

বা $\frac{dv}{v} + \frac{\cos v}{\sin v}dv + \frac{dx}{x} = 0$

সমকলন করে পাই $\log|v| + \log|\sin v| + \log|x| = \log \mathrm{c}$

$$\therefore\ \frac{y}{x}\left(\sin\frac{y}{x}\right)x = \mathrm{c}$$

$$\therefore\ y\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \mathrm{c}$$

8. $y^2dx + \left(x^2 - xy + y^2\right)dy = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2 - xy + y^2}$$

$y = vx$ ধরি, $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{v^2}{1 - v + v^2}$$

$$\therefore\ x\frac{dv}{dx} = -\left(\frac{v}{1 - v + v^2} + v\right)$$

$$=-\frac{v^2+v-v^2+v^3}{1-v+v^2}=-\frac{v\left(1+v^2\right)}{1-v+v^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1-v+v^2}{v\left(1+v^2\right)}dv=-\frac{dx}{x}$$

বা $-\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dv}{v}-\dfrac{dv}{1+v^2}$

সমাকলন করে

$$\log|v|-\tan^{-1}v+\log|x|=\text{c}$$

বা $\log|vx|-\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\text{c}$

বা $\log|y|-\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\text{c}$

9. $x\dfrac{dy}{dx}=y(\log y-\log x+1)$

বা $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\left(\log\dfrac{y}{x}+1\right)$

বা $v+x\dfrac{dv}{dx}=v(\log v+1)\quad [y=vx]$

$$\therefore \frac{dv}{v\log v}=\frac{dx}{x}$$

[$\log v=z$ বসিয়ে $\displaystyle\int\frac{dv}{v\log v}=\int\frac{dz}{z}=\log z$

$$\frac{1}{v}dv=dz$$

সমাকলন করে

$$\int\frac{dv}{v\log v}=\int\frac{dx}{x}+c'$$

$$\log|(\log v)|=\log|x/c|$$

$$\therefore v=e^{x/c}$$

বা $v = x\, e^{x/c}$

নির্ণেয় সমাকল।

10. $x\, dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2}\; dx$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$

$v + x\dfrac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 + v^2}\;\; [y = vx]$

$\int \dfrac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int \dfrac{dx}{x} + c^1$

$\log\left|v + \sqrt{1+v^2}\right| = \log cx$

$\therefore v + \sqrt{1+v^2} = cx$

$\therefore y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$

নির্ণেয় সমাধান।

11. $(x^4 + y^4)dx - 2x^3 dy = 0$

বা $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^4 + y^4}{2x^3 y}$

বা $v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1+v^4}{2v} = \dfrac{1}{2v} + \dfrac{v^3}{2}\;\; [y = vx]$

$x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{2v} + \dfrac{v^3}{2} - v = \dfrac{1 + v^4 - 2v^2}{2v}$

$= \dfrac{(v^2-1)^2}{2v}$

$\therefore \int \dfrac{dx}{x} = \int \dfrac{2v}{(v^2-1)^2} dv \log x$

$= \dfrac{-1}{v^2 - 1} + C$

$\therefore \log x + \dfrac{1}{v^2-1} = \mathrm{C}$

$\log x + \frac{x^2}{y^2 - x^2} = \mathrm{C}$ নির্ণেয় সমাধান

12. $(2x + y - 3)dy = (x + 2y - 3)dx$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}\left[\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\right]$

ধরি $x = X + h \quad y = Y + k$

$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{(X + 2Y) + (h + 2k - 3)}{(2X + Y) + (2h + k - 3)}$

h, k এমন ভাবে নির্বাচন করতে হবে যে

$$\begin{array}{l} h + 2k - 3 = 0 \\ 2h + k - 3 = 0 \end{array} \Rightarrow \; h = k = 1$$

(2) $\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X + Y}$, ইহা একটি সুষম একমাত্রীয় অবকল সমীকরণ

এবার $Y = vX$ ধরে

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1 + 2v}{2 + v}$$

$$X\frac{dv}{dX} = \frac{1 + 2v}{2 + v} - v = \frac{1 + 2v - 2v - v^2}{2 + v}$$

$$\therefore \int \frac{dX}{X} = \frac{2 + v}{1 - v^2}dv = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 + v}dv + \frac{3}{2}\int \frac{1}{1 - v}dv$$

$$\log\left|\frac{X}{c}\right| = \frac{1}{2}\log\left|(1 + v)\right| - \frac{3}{2}\log\left|(1 - v)\right| \qquad \left(v = \frac{Y}{X}\right)$$

সরলীকরণ করে পাই

$$\frac{X^2}{C^2} = \left(1 + \frac{Y}{X}\right) \Big/ \left(1 - \frac{Y}{X}\right)^3$$

$$\frac{X + Y}{(X - Y)^3} = \mathrm{C}$$

$\therefore x+y-2=C(x-y)^3 \qquad \begin{bmatrix} \because X=x-h=x-1 \\ Y=y-k=y-1 \end{bmatrix},$

ইহাই

13. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+5}{2x-2y+5}\left[\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\right]$

$x-y = v$ ধরে $1-\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

$\therefore 1-\frac{dv}{dx}=\frac{v+5}{2v+5} \Rightarrow \frac{dv}{dx}=\frac{v}{2v+5}$

$\therefore \frac{2v+5}{v}dv=dx$

সমাকলন করে

2v+5 log|v| = x+c_1

বা, $2(x-y)+5\log|x-y|=x+c_1$

$(x-y)^5-ce^{2y-x}$, ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

14. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{3x+3y+1} \qquad \left[\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\right]$

$\therefore x+y=v$ ধরি $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

$\therefore \frac{dv}{dx}=\frac{v+1}{3v+1}+1=\frac{4v+2}{3v+1}$

$\therefore \frac{3v+1}{2v+1}dv=2dx$

বা $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2v+1}\right)dv=2dx$

সমাকলন করে

$\frac{3}{2}v-\frac{1}{4}\log|2v+1|=2x+c^1$

$\therefore \log|2v+1|-6v=8c-4c^1$

বা $\log|2x+2y+1|-6(x+y)$

$=-8x+c$

[ধরি $c=-4c^1$

$\therefore \log|2x+2y+1|+2x-6y=\mathrm{c}$, ইহাই।

8.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

I. সমাধান করুন (চল পৃথকীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে)

1. $\tan x \ \sin^2 y\,dx+\cos^2 x \ \cot y\,dy=0$

2. $\dfrac{dy}{dx}=e^{2x-y}+x^3e^{-y}$

3. $4xy\,dx+\left(x^2+1\right)dy=0$

4. $(xy+x)dx=\left(x^2y^2+x^2+y^2+1\right)dy$

5. $\dfrac{dy}{dx}=x\tan(y-x)+1$ [$y-x=v$ ধরুন]

6. $\dfrac{dy}{dx}=\sin^2(x-y+1)$

7. $(x-y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2$

8. $\left(x^2+1\right)\dfrac{dy}{dx}+\left(y^2+1\right)=0$

উপরোক্ত সমীকরণটির সমাধান করুন এবং প্রমাণ করুন যে যখন $y(0)=1$, তখন $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

9. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)}$

10. $x\,y\,y^1=\left(\dfrac{1+y^2}{1+x^2}\right)\left(1+x+x^2\right)$

11. $x^3e^{2x^2+3y^2}dx-y^3e^{-x^2-2y^2}dy=0$

12. $x\sqrt{y}\,dx+(1+y)\sqrt{1+x}\,dy=0$

13. $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$

14. প্রমাণ করুন যে অবকল সমীকরণ $\left(1+y^2\right)dx = xy\,dy$ এর অনুসঙ্গী (1,0) বিন্দুগামী বক্ররেখাটি $x^2 - y^2 = 1$

II. নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণগুলির সমাধান করুন।

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+2y}{2x+y}$

2. $x^2 y\,dx - \left(x^3 + y^3\right)dy = 0$

3. $x\cos\frac{y}{x}(y\,dx + x\,dy) = y\sin\frac{y}{x}(x\,dy - y\,dx)$

4. $\left(1+e^{x/y}\right)dx + e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$

5. $\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xy\,dy = 0$, প্রদত্ত $y = 0$,যখন x=1

6. $x^3\,dx - y^3\,dy = 3xy(y\,dx - x\,dy)$

7. $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - x\,dy = 0$

8. $x\sin\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = y\sin\frac{y}{x} + x$

9. $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$

10. $\frac{dy}{dx} = \sin\frac{2y}{x} + \frac{y}{x}$; $y = \frac{\pi}{4}$, যখন x =1

8.10 উত্তরমালা

I. 1. $\frac{\tan^2 x}{2} - \frac{\cot^2 y}{2} = \mathrm{C}$

2. $e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}x^4 + C$

$\left[e^y dy = \left(e^{2x} + x^3\right)dx\right]$

3. $y\left(x^2+1\right)^2 = C$

$\left[\frac{2 \cdot 2x}{x^2+1}dx + \frac{dy}{y} = 0\right.$

বা $\frac{2 \cdot d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx + \frac{dy}{y} = 0$

$\left. 2\log\left|\left(x^2+1\right)\right| + \log|y| = \log C\right]$

4. $\log\left|\left(x^2+1\right)\right| = y^2 - 2y + 4\log|y+1| + \log C$

$\left[x(y+1)dx = \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)dy\right.$

$\left.\frac{1}{2} \cdot \frac{2x\ dx}{x^2+1} = \frac{y^2+1}{y+1}dy = \left\{\frac{(y+1)^2}{(y+1)} - \frac{2y}{y+1}\right\}dy \quad = (y+1)dy - 2dy + \frac{2}{y+1}dy\right]$

5. $\log\sin(y-x) = \frac{x^2}{2} + C$

6. $\tan(x-y+1) = x + C$

$\left[x-y+1 = v\right.$ ধরুন, $\left. 1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}\right]$

7. $a\log\left(\frac{x-y-a}{x-y+a}\right) = 2y + C$

$\left[x-y = v\right.$ ধরুন, $\left. 1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}\right]$

8. $\tan^{-1}y + \tan^{-1}x = C$

বা $\tan^{-1}\frac{y+x}{1-xy} = C$

বা $\dfrac{y+x}{1-xy}=\tan\mathrm{C}$

ধরুন $x=0,\ y=1,\ \tan\mathrm{C}=1$

$\therefore\ \dfrac{y+x}{1-xy}=1 \Rightarrow y=\dfrac{1-x}{1+x}$

9. $(x-1)(y+3)^5=\mathrm{C}\ (\mathrm{y}-1)(x+3)^5$

[$\dfrac{(y-2)}{(y-1)(y+3)}dy=\dfrac{(x-2)}{(x-1)(x+3)}dx$ উভয় পক্ষকে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করিলে এবং সমাকলন করিলে]

10. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\left(1+y^2\right)\right|=\ln|x|+\tan^{-1}x+C$

$$\left[\frac{1}{2}\frac{2y\,dy}{1+y^2}=\frac{\left(1+x^2\right)+x}{x\left(1+x^2\right)}dx=\frac{dx}{x}+\frac{dx}{1+x^2}\right]$$

11. $25\left(3x^2-1\right)e^{3x^2}+9\left(5y^2+1\right)e^{-5y^2}=\mathrm{C}$

$\left[x^3\cdot e^{2x^2}\cdot e^{x^2}dx-e^{-3y^2}y^3e^{-2y^2}dy=0\right.$

বা $\int x^3e^{3x^2}dx-\int y^3e^{-5y^2}dy=0$

সমাকলন করে

$$\left[\frac{1}{3\cdot 2}x^2\int\left(3\cdot 2xe^{3x^2}\right)dx-\frac{1}{3}\int xe^{3x^2}dx\right]+\left[\frac{1}{5\cdot 2}y^2\cdot\int\left(-5\cdot 2y\,e^{-5y^2}\right)dx-\frac{1}{5}\int ye^{-y^2}dy\ \right]\Bigg]$$

12. $(x-2)\sqrt{1+x}+(y+3)\sqrt{y}=\mathrm{K}$

$\left[\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}dx+\dfrac{1+y}{\sqrt{y}}dy=0\right.$

বা $\left.\left(\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)dx+\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{y}\right)dy=0\right]$

13. $(a+x)(1-ay)=cy$

$$\left[\left(y-ay^2\right)=(x+a)\frac{dy}{dx}\right.$$

বা $\quad \dfrac{dx}{x+a}=\dfrac{dy}{y(1-ay)}=\left(\dfrac{a}{1-ay}+\dfrac{1}{y}\right)dy$

$$\left.\log|(x+a)/c|=\log|y|-\log|(1-ay)|\right]$$

14. বক্ররেখা গোষ্ঠী, প্রদত্ত অবকল সমীকরণের অনুসঙ্গী $\log|\frac{x}{c}|=\frac{1}{2}\log|\left(1+y^2\right)|$।

বা $x=C\sqrt{1+y^2}$

(1,0) বিন্দুগামী $\therefore\ 1=c \quad \therefore\ x^2-y^2=1$ নির্ণেয় বক্ররেখা

II. 1. $y^2+4xy+x^2=c$

$$\begin{bmatrix}(x+2y)dx+(2x+y)dy=0\\ x\,dy+y\,dy+2(x\,dx+y\,dy)=0\end{bmatrix}$$

2. $\quad x^2(ydx-xdy)-y^3dy=0 \quad \Rightarrow\left(\dfrac{x}{y}\right)^2\left(\dfrac{ydx-xdy}{y^2}\right)-\dfrac{y^3dy}{y^4}=0$

বা $\quad \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 d\left(\dfrac{x}{y}\right)-\dfrac{dy}{y}=0 \ \Rightarrow\left(\dfrac{x}{y}\right)^3-\log y=c$ [সমাকলন করে]

$x^3-3y^3\log y=3cy^3$. ইহাই নির্ণয় সমাধান

3. $\sec\dfrac{y}{x}=c\,xy$ [চল বিভাজন পদ্ধতি অনুসারে]

$$\frac{y\,dx+x\,dy}{xy}=\left(\tan\frac{y}{x}\right)\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2}$$

$$d\{\log(xy)\}=d\left\{\log\left(\sec\frac{y}{x}\right)\right\} \quad]$$

4. $x+y\,e^{x/y}=c \qquad [dx+e^{x/y}dy+\left(e^{x/y}\,\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\right)y=0 \quad]$

বা $dx+e^{x/y}\,dy+yd\left(e^{x/y}\right)=0$

বা $dx + d\left\{y\, e^{x/y}\right\} = 0$

সমাকলন করে পাই

$x + y\, e^{x/y} = \mathrm{c}$]

5. $x^2 - y^2 = x$

[$y = vx$ বসালে $v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{x^2 + v^2x^2}{2x.vx}$

বা $x \cdot \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1+v^2}{2v} - v = \dfrac{1-v^2}{2v}$

বা $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{2v}{1-v^2}dv$, সমাকলন করতে হবে।]

6. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = \mathrm{c}\left(y^2 - x^2\right)$ [$y = vx$ বসাতে হবে]

7. $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2.c$

[$y = vx$ বসিয়ে সমীকরণ করে পাব $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$, সমাকলন করে

$\log|cx| = \log\left|v + \sqrt{1+v^2}\right|$]

8. $\cos\dfrac{y}{x} + \log \mathrm{c}x = 0$

[$y = vx,\ sin\ v\left(v + x\dfrac{dv}{dx}\right) = v\sin v + 1$

সরলীকরণ করে $\sin v\, dv = \dfrac{dx}{x}$]

9. $y^2 = 2x\left[y + x\log\left|(cx)\right|\right]$

10. $y = x\tan^{-1} x^2$ [$v + x\dfrac{dv}{dx} = \sin 2v + v$

বা $\dfrac{dv}{\sin 2v} = \dfrac{dx}{x}$

বা $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{1}{2\sin v\cos v}dv = \dfrac{\sec^2 v}{2\tan v}dv$]

8.11 সারাংশ

এই এককে সাধারণ অবকল সমীকরণ সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণা দেওয়া হয়েছে। সংশ্লিষ্ট বিভিন্ন সঙ্গাদি আলোচনা

করা হয়েছে। অবকল সমীকরণের মাত্রা (বা ক্রম) এবং ঘাতের ধারণা দেওয়া হয়েছে (বা ক্রম) এবং ঘাতেরধারণা দেওয়া হয়েছে। অতঃপর একমাত্রীয় একঘাত সমীকরণের সমাধানের জন্য চলরাশির পৃথকীকরণ পদ্ধতি বর্ণনা করা হয়েছে। পরিশেষে সুষম একমাত্রীয় আকারের বা ঐ আকারে পরিবর্তনযোগ্য অবকল সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি বর্ণনা করা হয়েছে।

সরল একমাত্রীয় অবকল, সমীকরণ সমাধানের বিভিন্ন পদ্ধতির মধ্যে উল্লেখযোগ্য হল

(1) চল পৃথকীকরণ পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে $g(x)dx + f(y)dy = 0$ আকারে প্রকাশ করে সরাসরি সমাকলন করতে হবে। (2) একমাত্রীয় অ-সুসম (non-homogeneous) অবকল সমীকরণ, যেমন

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

একে সুষম আকারে অবকল সমীকরণে পরিণতকরা যায়। যদি $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হয়, তাহলে এরূপ সমীকরণকে সমাধানের জন্য $x = x'+h, y = y'+k$ ধরলে অর্থাৎ মূল বিন্দু (h, k)- তে পরিবর্তন করে

$a_1h + b_1k + c_1 = 0$ এবং $a_2h + b_2k + c_2 = 0$

শর্তসাপেক্ষে h ও k এর মান নির্ণয় করা হয়।

তখন উপরোক্ত (i) নং সমীকরণটির পরিবর্তিত রূপ হয়

$$\frac{dy'}{dx'} = F\left(\frac{a_1x'+b_1y'}{a_2x'+b_2y'}\right),$$

যাহা x', y' এর সুষম অবকল সমীকরণ। ইহা সমাধানের জন্য $y' = vx'$ বসিয়ে নির্দিষ্ট নিয়মে (d8·8) অগ্রসর হতে হবে।

উপরোক্ত সমীকরণটি $\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)$ সুষম আকারে পরিবর্তনযোগ্য হয়, তবে $y=vx$ ধরে সমীকরণটির পরিবর্তিত রূপ হয় $v + x\frac{dv}{dx} = \mathrm{F}\left(\frac{a_1+b_1v}{a_2+b_2v}\right)$

v, x এর সাপেক্ষে সমাকলন করে পরে, $v = \frac{v-k}{x-h}$ বসিয়ে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যাবে

আবার, (i) নং সমীকরণে যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ হয়, তবে $a_2x + b_2y = k(a_1x + b_1y)$ তখন $a_1x + b_1y = v$ ধরতে হবে, $\frac{dv}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx}$, তখন উপরোক্ত সমীকরণ হবে, $\left(\frac{dv}{dx} - a_1\right) = b_1\mathrm{F}\left(\frac{v}{kv}\right) = \phi(v)$ এরপর চল পৃথকীকরণ পদ্ধতিতে সমাধান করা যাবে।

একক 9 □ যথার্থ একমাত্রীয় অবকল সমীকরণ (First Order Exact Differential Equation)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

পূর্বের এককে একমাত্রীয় সরল (একঘাত) অবকল সমীকরণ সমাধানের জন্য চলরাশির পৃথকীকরণ পদ্ধতির বর্ণনা এবং সমাকল গুণক সম্পর্কে ধারণা দেওয়া হয়েছে। বর্তমান এককে একমাত্রীয় সরল অবকল সমীকরণ সমাধানের অন্যান্য পদ্ধতি বর্ণনা করা হয়েছে। সমীকরণের যথার্থতা ও যথার্থ সমীকরণের সমাধান আলোচিত হয়েছে। বিভিন্ন ক্ষেত্রে সমাকল গুণক নির্ণয়ের নানা পদ্ধতি উদাহরণ সহযোগে ব্যাখ্যা করা হয়েছে। অসুষম সমীকরণকে ক্ষেত্রবিশেষ সুষম আকারে পরিণত করে সমাধান করার পদ্ধতি বর্ণনা করা হয়েছে। বার্ণোলির সমীকরণ ও তার সমাধান পদ্ধতি বর্ণনা ও সেই সংৰান্ত উদাহরণ দেওয়া হয়েছে।

9.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করে আপনি

- একমাত্রীয় অবকল সমীকরণের যথার্থতা ও সমাধানযোগ্যতার সম্বন্ধে ধারণা করতে পারবেন।
- একমাত্রীয় অবকল সমীকরণের কয়েকটি আকার ও তাদের সমাধান পদ্ধতিও জানতে পারবেন।

9.3 যথার্থ একমাত্রীয় অবকল সমীকরণ (First Order Exact Differential Equation)

একঘাত একমাত্রীয় সমীকরণের পূর্বো— আকার ব্যাতীত আরও কয়েক রকম আছে; নীচে সেগুলি আলোচিত হল।

আমরা আগেই বলেছি একঘাত একমাত্রীয় অবকল সমীকরণ $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$

সমাধানযোগ্য বা যথার্থ হবার শর্ত হল $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$; যদি এই শর্ত পূরণ হয়, তখন সমাধানটি কি পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যাবে সেটি আমরা আলোচনা করছি।

Step I : $\int \mathrm{M}dx = \phi(x, y)$

M অপেক্ষকটির মধ্যে x, y দুটি চলই রয়েছে; কিন্তু উপরের সমাকলনে, সমাকলন প্রৰিয়া x চল-এর সাপেক্ষে করতে হবে, y চলকে অপরিবর্তিত রাখতে হবে।

Step II : $\int \mathrm{N}dy = \psi(x, y)$

ঠিক একই ভাবে y চল-এর সাপেক্ষে সমাকলন করতে হবে, x চলকে অপরিবর্তিত রাখতে হবে।

Step III : $\phi(x, y)$ এবং $\psi(x, y)$ কে পর্যবেক্ষন করে দেখতে হবে কোন কোন রাশি বা পদ (term) একই রকম, সেগুলিকে সমাধানে **একবার** লিখতে হবে, এবার যে রাশি গুলি ভিন্ন সেগুলি লিখতে হবে। এইসব রাশিগুলির সমষ্টি ডানদিকে সদৃচ্ছ ধ্রুবকের সঙ্গে সমান করতে হবে; সেটাই নির্ণেয় সমাধান।

ধরাযাক $\phi(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ এবং $\psi(x, y) = f(x, y) + h(x, y)$; তাহলে নির্ণেয় সমাধান

$f(x, y) + g(x, y) + h(x, y) = \mathrm{C}$ লক্ষ্য করতে হবে যে সমাধানে $f(x, y)$ একবার মাত্র লেখা হয়েছে।

উদাহরণ ঃ সমাধান করুন :

1. $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0 \quad (i)$

এখানে,

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos y + y\cos x) = -\sin y + \cos x$$

$$\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x - x\sin y) = \cos x - \sin y$$

$\therefore \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$, $\therefore$ অবকল সমীকরণ (i) যথার্থ।

এখন

$$\int \mathrm{M}dx = \int (\cos y + y\cos x)dx = x\cos y + y\sin x$$

লক্ষ্য করুন x-এর সাপেক্ষে সমাকলন করা হয়েছে এবং y কে অপরিবর্তিত রাখা হয়েছে, আবার

$$\int \mathrm{N}dy = \int (\sin x - x\sin y)dy = y\sin x + x\cos y$$

এখানে y-এর সাপেক্ষে সমাকলন করা হয়েছে এবং x-কে অপরিবর্তিত রাখা হয়েছে,

নির্ণেয় সমাধান :

$x\cos y + y\sin x == \mathrm{c}$, c অবকল ধ্রুবক।

2. $\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right)dx + \left(2xy \cdot e^{xy^2} - 3y^2\right)dy = 0$

এখানে

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right) = 2ye^{xy^2} + 2yx\,y^2 \cdot e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xye^{xy^2} - 3y^2\right) = 2ye^{xy^2} + 2xy\,y^2 e^{xy^2}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি যথার্থ

এখন $\int \mathrm{M}dx = \int \left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right)dx = e^{xy^2} + x^4$

$$\int Ndy = \int \left(2xye^{xy^2} - 3y^2\right)dy = e^{xy^2} - y^3$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c$

প্রশ্নাবলী (উত্তরসহ) ঃ

সমাধান করুন ঃ

1. $\left[(\cos x)\log_e(2y-8) + \frac{1}{x}\right]dx + \frac{\sin x}{y-4}dy = 0$

    উঃ $(\sin x)\log(2y-8) + \log x = 0$

2. $x\cos\frac{dy}{dx} + (-x\sin x + \cos x) = 1$

3. $\left(3x^2y - \frac{y}{x}\right)dx + \left(x^3 + \ln x\right)dy = 0$

উঃ $x^3y + y\ln x + c_1 = 0$

4. $(\cos x \cos y - \cot x)dx - \sin x \sin y dy = 0$

উঃ $\sin x \cos y = \log(c \sin x)$

9.4 সমাকলন রাশি বা গুণক (I.F) নির্ণয় (Determination of Integrating Factor)

যদি $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$ অবকল সমীকরণে $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} \neq \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$ হয় তাহলে সমীকরণটি যথার্থ নয়। এখানে আমাদের উপযু— সমাকলন গুণক বা I.F এর জন্য সচেষ্ট হতে হবে; বিভিন্ন পরিৰিতি অনুসারে সমাকলন গুণক নির্ণয় করার পদ্ধতিগুলি আমরা এখন আলোচনা করব।

পদ্ধতি-I : যদি $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$ (সমমাত্রীয়) অবকল সমীকরণ হয় এবং যদি $\mathrm{M}x + \mathrm{N}y \neq 0$ হয়, তাহলে $\frac{1}{Mx + Ny}$ একটি সমাকলন গুণক হবে।

উদাহরণমালা ঃ

1. সমাধান করুন $x^2ydx - \left(x^3 + y^3\right)dy = 0$ .... (i)

এটি সমঘাত অবকল সমীকরণ, $\frac{\partial M}{\partial y} = x^2 \neq -3x^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$

আবার $Mx + Ny = x^3y - \left(x^3y + y^4\right) = -y^4$

$\therefore$ I.F $= -\frac{1}{y^4}$

(i) কে $-\frac{1}{y^4}$ দিয়ে গুণ করে পাই

$$-\frac{x^2}{y^3}dx + \left(\frac{x^2}{y^4} + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

$$\int Mdx = -\int \frac{x^2}{y^3}dx = -\frac{x^3}{3y^3}$$

$$\int Ndy = -\int\left(\frac{x^3}{y^4}+\frac{1}{y}\right)dy = -\frac{x^3}{3y^3}+\log|y|$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $-\dfrac{x^3}{3y^3}+\log\left|\dfrac{y}{c}\right| = 0$

বা $y = ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$

2. সমাধান করুন $\left[(\cos x)\log_e(2y-8)+\dfrac{1}{x}\right]dx + \dfrac{\sin x}{y-4}dy = 0$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{2\cos x}{2y-8} = \frac{\cos x}{y-4}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\cos x}{y-4} \qquad \therefore \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\therefore$ সমীকরণটি যথার্থ

$$\int Mdx = \int\left[(\cos x)\log(2y-8)+\frac{1}{x}\right]dx = (\sin x)\log(2y-8)+\log x$$

$$\int Ndy = \int\frac{\sin x}{y-4}dy = (\sin x)\log(y-4)$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$(\sin x)\log|(2y-8)|+\log|x| = c$

3. সমাধান করুন $\left(3x^2y+\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(x^2+\ln x\right)dy = 0$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = 3x^2+\frac{1}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\therefore$ সমীকরণটি যথার্থ

$$\int Mdx = \int\left(3x^2y+\frac{y}{x}\right)dx = x^3y+y\log x$$

$$\int Ndy = \int\left(x^3+\ln x\right)dy = yx^3+y\ln x$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$y\left(x^3+\ln x\right) = c$, c সমাকল ধ্রুবক।

4. $(\cos x \cos y - \cot x)dx - \sin x \sin y dy = 0$ অবকল সমীকরণটিকে সমাধান করুন।

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\cos x \sin y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

সমীকরণটি যথার্থ

$\therefore \int M dx = \int (\cos x \cos y - \cot x) dy = \sin x \cos y - \log(\sin x)$

এবং $\int N dy = -\int \sin x \sin y dy = \sin x \cos y$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হলো $\sin x \cos y = \log|c \sin x|$

5. সমাধান করুন : $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

বা, $\left(xy + y^2\right)dx - 2x^2 dy = 0$ .... (i)

$\frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y \neq 4x = \frac{\partial N}{\partial x}$ এবং এটি সমঘাত (Homogenous)

$\therefore$ I.F. $= \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{xy^2 - x^2 y} = \frac{1}{xy(y-x)}$

(i) কে I.F. দ্বারা গুণ করে পাই

$$\frac{y(x+y)}{xy(y-x)}dx - \frac{2x^2}{xy(y-x)}dy = 0$$

$$\int M dx = \int \frac{x+y}{x(y-x)}dx = \int \frac{(y-x)+2x}{x(y-x)}dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2}{y-x}dx = \log|x| - 2\log|y-x|$$

$$\int N dy = -\int \frac{2x}{y(y-x)}dy = 2\int \frac{(y-x)-y}{y(y-x)}dy$$

$$= 2\int \frac{dy}{y} - 2\int \frac{dy}{y-x} = 2\log|y| - 2\log|(y-x)|$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$\log|x| - 2\log|y-x| + 2\log|y| = \log c$

বা, $xy^2 = c(y-x)^2$

প্রশ্নাবলী (উত্তর সহ) ঃ

সমাধান করুন ঃ

1. $y^2 + x^2 \dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$

উঃ $y = ce^{\frac{y}{x}}$

2. $(x^4 + y^4)dx - xy^3 dy = 0$

উঃ $4x^4 \log x - y^4 = cx^4$

3. $\dfrac{x^3 + y^3}{xy^2} = \dfrac{dy}{dx}$

উঃ $\log x - \dfrac{y^3}{3x^3} = C$

পদ্ধতি-II : যদি $Mdx + Ndy = 0$ অবকল সমীকরণে $\dfrac{1}{N}\left[\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right] = \phi(x)$ হয় তবে $e^{\int\phi(x)dx}$ ঐ সমীকরণের সমাকলন গুণক হবে।

উদাহরণ-1. ঃ $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$ .... (1)

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = 2y \neq 0 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2y}{2y} = 1 \qquad \therefore \mathrm{I.F} = e^{\int dx} = e^x$$

(1) —কে e^x দিয়ে গুণ করে পাই

$$e^x\left(x^2 + y^2 + 2x\right)dx + 2e^x ydy = 0$$

$$\int Mdx = \int e^x(x^2 + 2x)dx + \int e^x y^2 dx$$

$$= x^2.e^x - 2\int xe^x dx + 2\int xe^x dx + y^2.e^x$$

$$= \left(x^2 + y^2\right)e^x$$

$$\int Ndy = \int e^x 2ydy = e^x.y^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $\left(x^2 + y^2\right)e^x = C$

উদাহরণ-2. ঃ $(2x\log x - xy)dy + 2ydx = 0$

$$M=2y,\ N=2x\log x-xy$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{-2\log x+y}{x(2\log x-y)}=\frac{1}{-x}=\phi(x)$$

$$\therefore\ \text{I.F.}\ =\ e^{\int\phi(x)dx}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\log x}=\frac{1}{x}$$

সমীকরণ (1) কে $\frac{1}{x}$ দ্বারা গুণ করে পাই

$$\frac{1}{x}.2ydx+\frac{1}{x}(2x\log x-xy)dy=0$$

$$\int Mdx=\int\frac{2y}{x}dx=2y\log|x|$$

$$\int \text{N}dy=\int(2\log x-y)dy=2y\log|x|-\frac{y^2}{2}$$

$\therefore$ নির্ণয় সমাধান $2y\log x-\frac{y^2}{2}=C$

উদাহরণ-3. ঃ $y\left(2x^2-xy+1\right)dx+(x-y)dx=0$ .... (1)

$$\therefore\frac{\partial M}{\partial y}=2x^2-2xy+1,\ \ \frac{\partial N}{\partial x}=1\quad\frac{\partial N}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{2x(x-y)}{x-y}=2x=\phi(x)$$

$$\therefore\ \text{I.F}\ =\ e^{\int\phi(x)dx}=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$$

(1) কে e^{x^2} দিয়ে গুণ করে পাই

$$e^{x^2}(2x^2y-xy^2+y)dx+e^{x^2}(x-y)dy=0$$

$$\therefore\ \int Mdx=\int e^{x^2}(2x^2y-xy^2+y)dx=y(e^{x^2}x-\int e^{x^2}dx)-\frac{1}{2}e^{x^2}y^2+\int ye^{x^2}dx$$

$$\int Ndy=\int e^{x^2}(x-y)dy=e^{x^2}\cdot xy-\frac{y^2}{2}e^{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2xy-y^2\right)e^{x^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $e^{x^2}(2xy - y^2) = C$

প্রশ্নাবলী (উত্তর সহ) ঃ

সমাধান করুন ঃ

1. $\left(x^3 - 2y^2\right)dx + 2xy\, dy = 0$

উঃ $x - \dfrac{y^2}{x^2} = c$

2. $\left(\dfrac{1}{3}y + y^3 + \dfrac{1}{2}x^2\right)dx + \dfrac{1}{4}\left(x + xy^2\right)dy = 0$

উঃ $\dfrac{1}{4}x^4y + \dfrac{1}{12}x^4y^3 + \dfrac{1}{12}x^6 = c$

3. $(1 - xy)dx + \left(xy - x^2\right)dy = 0$

উঃ $\log|x| - xy + \dfrac{1}{2}y^2 = c$

পদ্ধতি-III : যদি অবকল সমীকরণ $\mathbf{M}dx + \mathbf{N}dy = 0$ তে $\dfrac{1}{M}\left[\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right] = \psi(y)$ হয়, তাহলে $e^{\int \psi(y)dy}$ **ঐ সমীকরণের সমাকলন গুণক হবে।**

উদাহরণ-1. ঃ $\left(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x\right)dy = 0$ .... (1)]

$$M = y^4 + 2y, \quad N = 2y^3 + xy^4 - 4x$$

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\left[\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right] = \frac{\left(4y^3 + 2\right) - \left(y^3 - 4\right)}{y^4 + 2y}$$

$$= \frac{3(y^3 + 2)}{y(y^3 + 2)} = \frac{3}{y} = \psi(y)$$

$$\therefore \text{ I.F. } e^{-\int \psi(y)dy} = e^{-\int \frac{3}{y}dy} = e^{-3\log y} = e^{\log y^{-3}} = \frac{1}{y^3}$$

সমীকরণ (1) কে $\frac{1}{y^3}$ দিয়ে গুণ করে পাই

$$\frac{1}{y^3}(y^4+2y)dx+\frac{1}{y^3}\left(xy^3+2y^4-4x\right)dy=0$$

$$\int Mdx=\int\left(y+\frac{2}{y^2}\right)dx=yx+\frac{2x}{y^2}$$

$$\int Ndy=\int\left(x+2y-\frac{4x}{y^3}\right)dy=xy+y^2+\frac{2x}{y^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $xy+\frac{2x}{y^2}+y^2=c$

উদাহরণ-2. ঃ $(2xy+e^x)ydx-e^x dy=0$ .... (1)

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}=4xy+e^x,\ \frac{\partial N}{\partial x}=-e^x$$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}=4xy-2c^x=2(2xy+e^x)$$

$$\therefore\ \frac{1}{\mathrm{M}}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right)=\frac{2(2xy+e^x)}{y(2xy+e^x)}=\frac{2}{y}=\psi(y)$$

$$\therefore\ \mathrm{I.F}=e^{-f\psi(y)dy}=e^{-f\frac{2}{y}dy}=\frac{1}{y^2}$$

(1) কে $\frac{1}{y^2}$ দ্বারা গুণকরে পাই

$$\frac{1}{y^2}(2xy|+e^x)ydx-\frac{1}{y^2}e^x dy=0$$

$$\therefore \int Mdx=\int\left(2x+\frac{e^x}{y}\right)dx=x^2+\frac{1}{y}e^x$$

$$\therefore \int Ndy=\int-\frac{1}{y^2}e^x dy=\frac{1}{y}e^x$$

নির্ণেয় সমাধান : $x^2+\frac{1}{y}e^x=c$

উদাহরণ-3. ঃ $y\left(x^2y+e^x\right)dx-e^x dy=0$ .... (i)

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x^2y+e^x,\ \frac{\partial N}{\partial x}=-e^x \quad \therefore \frac{\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}}{\mathrm{M}}=\frac{2}{y}$$

$\therefore$ I. F. $e^{-\int \frac{2}{y}dy}=\frac{1}{y^2}$

$\therefore$ (1) কে $\frac{1}{y^2}$ দিয়ে গুণ করলে

$$\left(x^2+\frac{1}{y}e^x\right)dx-\frac{1}{y^2}e^x=0$$

$$\int Mdx=\int \left(x^2+e^x.\frac{1}{y}\right)dx=\frac{x^3}{3}+e^{\frac{x}{y}}$$

$$\int Ndy=-\int \frac{1}{y^2}e^x dy=\frac{1}{y}.e^x$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\frac{x^3}{3}+\frac{e^x}{y}=C$

প্রশ্নাবলী (উত্তর সহ)

সমাধান করুন ঃ

1. $y(1+xy)dx-xdy=0$

উঃ $\frac{y}{x}+\frac{1}{2}x^2=c$

2. $x^2y\,dx-\left(x^3+y^3\right)dy=0$

উঃ $y=ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$

3. $\left(3x^2y^4+2xy\right)dx+\left(2x^3y^3-x^2\right)dy=0$

উঃ $x^3y^2+\frac{x^2}{y}=c$

পদ্ধতি-IV : যদি কোন অবকল সমীকরণ $\mathbf{M}dx+\mathbf{N}dy=\mathbf{0}$ এমন হয় যে $\mathbf{M}=yf(xy)$, $\mathbf{N}=xg(xy)$ যখন $f(xy)\neq g(xy)$ হয়, তাহলে $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{M}x-\mathbf{N}y}$, $Mx-Ny\neq\mathbf{0}$ একটি I.F হবে।

যেমন ঃ

উদাহরণ 1. $y(xy+2x^2y^2)dx+x(xy-x^2y^2)dy=0$ এখানে $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$

আবার অবকল সমীকরণটি $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$

এই গঠনে আছে; কাজেই $\dfrac{1}{Mx-Ny}=\dfrac{1}{x^2y^2+2x^3y^3-x^2y^2+x^3y^3}=\dfrac{1}{3x^3y^3}$

সমকলন গুণক হবে। সমীকরণ (1) কে $\dfrac{1}{3x^3y^3}$ দিয়ে গুণ করলে পাই

$\left(\dfrac{1}{x^2y}+\dfrac{2}{x}\right)dx+\left(\dfrac{1}{xy^2}-\dfrac{1}{y}\right)dy=0$ বা $\dfrac{d(xy)}{(xy)^2}+2\dfrac{dx}{x}-\dfrac{dy}{y}=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

বা, $-\dfrac{1}{xy}+2\log x-\log y=C$

উদাহরণ 2. সমাধান করুন ঃ

$$y(x^2y^2+2)dx+x(2-2x^2y^2)dy=0 \quad \text{..............................} \quad (1)$$

$$M=y\,f(xy),\ N=xg(xy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x};\ Mx-Ny=xy(x^2y^2+2)-xy(2-2x^2y^2)=3x^3y^3\neq 0$$

I.F $=\dfrac{1}{Mx-Ny}=\dfrac{1}{x^3y^3}$

(i) কে $\dfrac{1}{x^3y^3}$ দিয়ে গুণ করে

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3y^2}\right)dx+\left(\frac{2}{x^2y^3}-\frac{2}{y}\right)dy=0$$

$$\therefore \int Mdx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3y^2}\right)dx=\log x-\frac{1}{x^2y^2}$$

$$\int Ndy=\int\left(\frac{2}{x^2y^3}-\frac{2}{y}\right)dy=-\frac{1}{x^2y^2}-2\log y$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\log\dfrac{x}{cy^2}-\dfrac{1}{x^2y^2}=0$ $x=cy^2e^{\frac{1}{x^2y^2}}$

উদাহরণ 3. সমাধান করুন ঃ

$$\left(x^3y^3+x^2y^2+xy+1\right)ydx+x\left(x^3y^3-x^2y^2-xy+1\right)dy=0$$

এখানে $M=yf(xy),\ \ N=xg(xy)$

$$Mx-Ny=xy(x^3y^3+x^2y^2+xy+1)-xy(x^3y^3-x^2y^2-xy+1)$$

$$=2x^2y^2(xy+1)\neq 0$$

$$\therefore \text{ I. F. }=\frac{1}{x^2y^2(xy+1)}$$

(1) কে সরলীকরণ করে

$$(xy+1)(x^2y^2+1)ydx+x(xy+1)(x^2y^2-2xy+1)dy=0$$

I.F দিয়ে গুণ করে

$$\frac{1}{x^2y}\left(x^2y^2+1\right)dx+\frac{1}{xy^2}(x^2y^2-2xy+1)dy=0$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$\displaystyle\int\left(y+\frac{1}{x^2}y\right)dx+\int\left(x+\frac{1}{x}y^2-\frac{2}{y}\right)dy$ (x বর্জিত অংশগুলি) = ধ্রুবক

বা, $xy - \frac{1}{xy} - \log\frac{y^2}{c} = 0$

বা, $y^2 = c\, e^{\left(xy - \frac{1}{xy}\right)}$

উদাহরণ 4. **সমাধান করুন ঃ**

$(xy\sin xy + \cos xy)ydx + (xy\sin xy - \cos xy)xdy = 0$

$M = yf(xy)$ এবং $N = xg(xy)$ .... (1)

এবং $\frac{\partial N}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

এখন $Mx - Ny = 2xy\cos xy \neq 0$

$\therefore$ I.F $= \frac{1}{xy\cos xy}$

(i) I.F. দিয়ে গুণ করে পাই

$$\left(y\tan xy + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\tan xy - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

$$\int Mdx = \int\left(y\tan xy + \frac{1}{x}\right)dx = +\log\sec(xy) + \log x$$

$$\int Ndy = \int\left(x\tan xy - \frac{1}{y}\right)dy = \log(\sec xy) - \log y$$

নির্ণেয় সমাধান ঃ

$$\log\sec(xy) + \log\frac{x}{y} = \log c$$

$$cy = x\sec(xy)$$

উদাহরণ 5. **সমাধান করুন ঃ** $y(1+xy)dx + x(1-xy)dy = 0$

I.F. $= \frac{1}{Mx - ny} = \frac{1}{2x^2y^2}$

নির্ণেয় সমাধান $\int\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right)dx + \int\left(\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y})dy\right)$ (x-বর্জিত অংশ)=c

$$-\frac{1}{xy} + \log x - \log y = \log c$$

$$\log\left(\frac{x}{cy}\right)=\frac{1}{xy}$$

$$x=yc\,e^{\frac{1}{xy}}$$

প্রশ্নাবলী (উত্তর সহ) ঃ

সমাধান করুন ঃ

1. $y(xy-3)dx+x\left(x^4y^4+xy-3\right)dy=0$

উঃ $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^3y^3}-\frac{3}{2}\frac{1}{x^4y^4}-\log y=c$

2. $y\left(1+2xy+3x^2y^2\right)dx+x\left(1+2xy-x^2y^2\right)dy=0$

উঃ $\frac{1}{6x^3y^3}+\frac{1}{2x^2y^2}+\frac{1}{2xy}=c$

3. $x^2y^3dx+3x^2ydy+2ydx=0$

উঃ $x(xy-2)^3=c(xy-1)^3.$

[সংকেত ঃ $xy=v$ ধরুন।

$\therefore d(xy)=dv\Rightarrow ydx+xdy=dv$ এবং $\frac{xdv-vdx}{x^2}=dy$

বা $xdy=dv-\frac{v}{x}dx$ এইভাবে সমীকরণ থেকে y অপনয়ন করে সমাধান করুন।]

পদ্ধতি-V : $x^{\alpha}y^{\beta}(mydx+nxdy)=0$

এইরূপ অবকল সমীকরণে সমাকলন গুণক হবে $x^{mk-\alpha-1}y^{nk-\beta-1}$, k এর যে কোন মানের জন্য।

যদি অবকল সমীকরণটি নিম্নরূপ হয়

$x^{\alpha}y^{\beta}(mydx+nxdy)+x^{\alpha^1}y^{\beta^1}(m^1ydx+n^1xdy)=0$

তাহলে প্রথমাংশের জন্য $\text{I.F}=x^{mk-\alpha-1}y^{nk-\beta-1}$ .... (i)

এবং দ্বিতীয়ার্দ্ধের জন্য $\text{I.F}=x^{mk-\alpha-1}y^{n^1k^1-\beta^1-1}$ .... (ii)

এখন যেহেতু প্রথমাংশ এবং দ্বিতীয়াংশ একটি অবকল সমীকরণের অন্তর্গত, I.F (i) এবং I.F (ii) অবশ্যই একই হবে।

অর্থাৎ $mk-\alpha-1=m^1k^1-\alpha^1-1$

$nk-\beta-1=n^1k^1-\beta^1-1$

এই দুটি সমীকরণ থেকে k এবং k^1 মান নির্ণয় করে যথাৰমে (i) এবং (ii) বসালে মূল অবকল সমীকরণের I.F পাওয়া যাবে, k এবং k^1 এর মান অভিন্ন হলে IF(i) এবং IF(ii) অভিন্ন হবে।

নীচে উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হল

উদাহরণ-1. **সমাধান করুন** $x^3y^3(2ydx+xdy)-(5ydx+7xdy)=0$

প্রথমে প্রথমাংশ ধরা যাক

$x^3y^3(2ydx+xdy)$

$I.F\ \ x^{2k-3-1}y^{k-3-1}=x^{2k-4}\ y^{k-4}$ এখানে $m=2, n=1,\ \alpha=3,\ \beta=3$

এবার দ্বিতীয়াংশ নেওয়া যাক

$-(5ydx+7xdy)$

$\alpha^1=0,\ \beta^1=0,\quad m^1=-5,\quad n^1=-7$

$\therefore$ I.F $x^{-5k^1-0-1}\ \ y^{-7k^1-0-1}$ ..... (ii)

I.F (i) এবং I.F (ii) একই

$\therefore\quad 2k-4=\quad -5k^1-1$ এবং $k-4=-7k^1-1$

সরলীকরণ করে, $k^1=\frac{1}{3},\ \ k=\frac{2}{3}$

$\therefore$ I. F $=x^{-\frac{8}{3}}\ y^{-\frac{10}{3}}$

এবার (i) কে I.F দিয়ে গুণ করে পাই

$$\left(2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-5x^{-\frac{8}{3}}y^{-\frac{7}{3}}\right)dx+\left(x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+7x^{\frac{5}{3}}y^{-\frac{10}{3}}\right)dy=0$$

$$\int Mdx=2.\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+5.\frac{3}{5}x^{-\frac{5}{3}}y^{-\frac{7}{3}}$$

$$\int Ndy=\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+7.\frac{3}{7}x^{-\frac{5}{3}}y^{-\frac{7}{3}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$$\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+3x^{-\frac{5}{3}}y^{-\frac{7}{3}}=C^1$$

বা, $x^3y^3+2=c.x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{7}{3}}$

উদাহরণ-2. **সমাধান করুন** $y(1+xy)dx+x(1-xy)dy=0$ .... (1)

$(ydx+xdy)+xy(ydx-xdy)=0$

প্রথমাংশ

$ydx+xdy,\ \ \alpha=0,\ \beta=0,\ m=1,\ n=1$

I.F $= x^{km-1-\alpha}y^{kn-1-\beta}=x^{k-1-0}y^{k-1-0} = x^{k-1}y^{k-1}$ ....(A)

দ্বিতীয়াংশ $xy(ydx-xdy)$

$\alpha=1,\beta=1,\ m=1,\ \ n=-1$

$\therefore$ I.F. $=x^{k^1-1-l-l}y^{k.(-1)-1-1} = x^{k^1-2}y^{-k^1-2}$ .... (B)

(A) এবং (B) অবশ্যই একই

$\therefore \quad k-1=k^1-2$

$k-1=-k^1-2$

$\therefore \quad k=-1, k^1=0$

$\therefore \quad \text{I.F}=x^{-2}y^{-2}$

(1) কে $\frac{1}{x^2y^2}$ দিয়ে গুণ করে

$$\left(\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{x}\right)dx|+\left(\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$\int\left(\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{x}\right)dx|+x$ বর্জিত $\int\left(\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{y}\right)dy=c$

বা, $\log\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{xy}=c$

বা $xy\log\left(\frac{x}{y}\right)=cxy+1$

উদাহরণ-3. সমাধান করুণ ঃ $\left(3x^2y^4+2xy\right)dx+(2x^3y^3-x^2)dy=0$ .... (1)

বা, $x^2y^3(3ydx+2xdy)+x(2ydx-xdy)=0$

প্রথমাংশ $x^2y^3(3ydx+2xdy)$

$\alpha=2,\ \beta=3,\ m=3, n=2$

I.F. $=x^{k.3-1-2}y^{k.2-1-3}$

$=x^{3k-3}y^{2k-4}$ .... (A)

দ্বিতীয়াংশ $x(2ydx-xdy)$

$\alpha=1,\ \beta=0,\ m=2,\ n=-1$

I.F $=x^{mk^1-1-\alpha}y^{nk^1-1-\beta}$

$=x^{2k^1-1-1}y^{-1.k^1-1-0}$

$=x^{2k^1-2}y^{-k^1-1}$

(A) এবং (B) অবশ্যই সমান

$\therefore$ $3k-3=2k^1-2$

$2k-4=-k^1-1$

$\therefore$ $k = 1,\ k' = 1$

$\therefore$ I.F $=x^0y^{-2}=\frac{1}{y^2}$

(1) কে $\frac{1}{y^2}$ দিয়ে গুণ করে

$$\left(3x^2y^2+\frac{2x}{y}\right)dx+\left(2x^3y-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$$x^3y^2+\frac{x^2}{y}=c$$

বা, $x^3y^3+x^2=cy$

9.5 একমাত্রীয় সরল অবকল সমীকরণ (First Order Linear Differential Equation)

এটি একটি নির্দ্দিষ্ট সন্নিবেশে থাকবে, যেমন $\frac{dy}{dx}+py=q\cdots\cdots(1)$

p, q দুটি স্বাধীন চল x - এর অপেক্ষক বা ধ্রুবক। সমীকরণ (1) সাধারণভাবে একটি

অযথার্থ (Inexact) সমীকরণ (এক্ষেত্রে $M=py-q,\ N=1,\ \therefore \frac{\partial M}{\partial y}=p\neq O=\frac{\partial N}{\partial x}$)। অর্থাৎ শুধুমাত্র $p=O$ হলে সমীকরণটি যথার্থ হবে।

সমাকলন গুণকের সাহায্যে সরল অবকল সমীকরণকে সর্বদা সমাধান করা সম্ভব।

(1) এর উভয়পক্ষকে $e^{\int pdx}$ দিয়ে গুণ করলে পাই $e^{\int pdx}\frac{dy}{dx}+e^{\int pdx}py=e^{\int pdx}\cdot\ q$

বা $\frac{d}{dx}\left\{y\,e^{\int pdx}\right\}=q\,e^{\int pdx}$

বা $d\left\{y\,e^{\int pdx}\right\}=q\,e^{\int pdx}dx$

উভয়পক্ষকে সমাকলন করে পাই $y\,e^{\int pdx}=\int q\,e^{\int pdx}\cdot dx+\mathrm{c}\cdots\cdots(2)$

এটাই সমীকরণ (1) এর সমাধান, আপনারা অবশ্যই অনুধাবন করেছেন যে $e^{\int pdx}$ সমীকরণ (1) এর I.F. বা সমাকলন গুনক (2) কে (1) এর সমাধান সূত্র হিসাবে ব্যবহার করা যেতে পারে।

উদাহরণ : 1. সমাধান করুন ঃ $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y=1$

এটি একক্রম একঘাত (linear) অবকল সমীকরণ

এখানে $p=\frac{1-2x}{x^2}$

$\therefore$ I.F. $e^{\int pdx}=e^{\int\frac{1-2x}{x^2}dx}=e^{\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)dx}$

$$=e^{-\frac{1}{x}}\cdot e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-\frac{1}{x}}\cdot e^{-2\log x}=x^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $y\cdot x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}=\int 1\cdot x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx+\mathrm{c}$

$$= + e^{-\frac{1}{x}} + \mathrm{c}$$

$$\therefore y = c \cdot x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2 = x^2\left(1 + c\, e^{1/x}\right)$$

এটাই নির্ণেয় সমাধান।

2. সমাধান করুন ঃ $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

বা $\dfrac{dy}{dx} + \sec^2 x \cdot y = \tan x \sec^2 x$

$\therefore$ I.F. $e^{\int \sec^2 x\, dx} = e^{\tan x}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $y \cdot e^{\tan x} = \int \left(\tan x \sec^2 x\right) \cdot e^{\tan x} dx + \mathrm{c}$

$\tan x = z$ ধরিয়া

$$= \int z\, e^z dz + \mathrm{c}$$

$$= ze^z - e^z + \mathrm{c}$$

$$= \tan x\, e^{\tan x} - e^{\tan x} + \mathrm{c}$$

$\therefore y = (\tan x - 1) + ce^{-\tan x}$ এটাই নির্ণেয় সমাধান।

3. সমাধান করুন ঃ $3\, e^x \tan y\, dx + \left(1 - e^x\right) \sec^2 y\, dy = 0$

বা $3\, e^x \tan y + \left(1 - e^x\right) \sec^2 y \dfrac{dy}{dx} = 0$

$\tan y = z$ বসিয়ে পাই, $\sec^2 y \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}$

$\therefore$ পরিবর্তিত সমীকরণ ঃ

$$3 \cdot e^x z + \left(1 - e^x\right) \frac{dz}{dx} = 0$$

বা, $\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{3e^x}{1 - e^x} \cdot z = 0$

বা, $\int \dfrac{dz}{z} = \int \dfrac{3e^x}{e^x - 1} dx$

বা, $\log\frac{z}{c} = 3\log\left(e^x - 1\right)$

বা, $z = c\left(e^x - 1\right)^3$

বা, $\tan y = \mathrm{c}\left(e^x - 1\right)^3$

এটি একঘাত একমাত্রা (linear) পদ্ধতিতেও করা যায়।

4. সমাধান করুণ ঃ $x\left(e^y + 4\right)dx + e^{x+y}dy = 0$

বা, $x\left(e^y + 4\right) + e^x \cdot e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ $\qquad$ $e^y = z$ বসিয়ে $e^y\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

বা, $\frac{dz}{dx} + \left(xe^{-x}\right)z = -4xe^{-x}$

I. F. $e^{\int xe^{-x}.dx} = e^{-xe^{-x} - e^{-x}} = e^{-e^{-x}(x+1)}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান।

$\mathrm{Z} \cdot e^{-e^{-x}(x+1)} = -4\int xe^{-x}e^{-e^{-x}(x+1)}dx + \mathrm{c}$

$= -4\int x\, e^{-x}e^{-e^{-x}(x+1)}dx + \mathrm{c}$ $\qquad$ ধরা যাক

$= 4\int e^{-t}dt + c$ $\qquad$ $e^{-x}(x+1) = t$

$= -4\, e^{-t} + c$ $\qquad$ $\left\{-e^{-x}(x+1) + e^{-x}\right\}dx = dt$

$= -4\, e^{-e^{-x}(x+1)} + c$ $\qquad$ বা $e^{-x}\{-x-1+1\}dx = dt$

বা $e^y = -4 + c\, e^{e^{-x}(x+1)}$ $\qquad$ বা $-x \cdot e^{-x}\, dx = dt$

বা $\log\left(e^y + 4\right) = \log\mathrm{c} + e^{-x}(x+1)$

বা $\log\left|\left(e^y + 4\right)\right| = k + e^{-x}(x+1)$

এটাই নির্ণেয় সমাধান।

9.5.1 অসুষম অবকল সমীকরণ (Non-Homogeneous Differential Equation)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + \text{c}}{a^1x + b^1y + \text{c}'}$$

এই অবকল সমীকরণটি সমমাত্রিক নয়, কিন্তু একে সমমাত্রিক সমীকরণে পরিবর্তন করা সম্ভব, যদি $\frac{a}{a^1} \neq \frac{b}{b^1}$ হয়, তাহলে $x = x^1 + h$, $y = y^1 + k$ ধরতে হবে এবং মূল সমীকরণে বসিয়ে h, k এর মান নির্ণয় করতে হবে; একটি উদাহরণের সাহয্যে নিম্নে ব্যাখ্যা করা হল;

উদাহরণ : $\frac{dy}{dx} = \frac{5x - 3y + 2}{3x + 5y + 1}$

এখানে $\frac{a}{a^1} \neq \frac{b}{b^1}$ কারণ $\frac{5}{3} \neq \frac{-3}{5}$

ধরাযাক $x = x^1 + h, y = y^1 + k$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy^1}{dx^1} = \frac{5x^1 - 3y^1 + 5h - 3k + 2}{3x^1 + 5y^1 + 3h + 5k + 1}$$

সমীকরণটি সমমাত্রিকে পরিণত করতে গেলে দরকার

$$5h - 3k + 2 = 0$$
$$3h + 5k + 1 = 0$$

অর্থাৎ $\frac{h}{-13} = \frac{k}{1} = \frac{1}{34}$

$$\therefore h = -\frac{13}{34}, k = \frac{1}{34}$$

$$\therefore \frac{dy^1}{dx^1} = \frac{5x^1 - 3y^1}{3x^1 + 5y^1}$$

এটি একটি একমাত্রীয় সরল সুষম অবকল সমীকরণ। অতএব নির্দিষ্ট নিয়মে অগ্রসর হলেই সমাধান পাওয়া যাবে।

9.6 বার্ণোলির সমীকরণ (Bernoulli's Equation)

কোন একঘাত একমাত্রীয় অবকল সমীকরণে অর্থাৎ

$$\frac{dy}{dx} + \text{P}y = Q \cdots\cdots (1)$$

পরিবর্তে $\frac{dy}{dx} + \text{P}y = Qy^n \cdots\cdots (2)$ থাকে, তাকে বার্ণোলির সমীকরণ (Bernoulli's Equation) বলা হয়।

সহজেই নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে প্রথমোক্ত ফর্ম - এ আনা যায়;

$y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+y^{1-n}\mathrm{P}=Q\cdots\cdots(3)$

ধরি $y^{1-n}=z$ তাহলে $(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}$

(3) এ বসিয়ে পাই $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)\mathrm{P}\cdot z=(1-n)Q$

$\therefore \mathrm{I.F}=e^{\int(1-n)\mathrm{P}dx}$

নির্ণেয় সমাধান $\mathrm{Z}\cdot e^{\int(1-n)\mathrm{P}\cdot dx}=\int(1-n)Q\,e^{\int(1-n)\mathrm{P}dx}dx+\mathrm{c}$

বা $y^{1-n}e^{\int(1-n)\mathrm{P}dx}=\int(1-n)Q\,e^{\int(1-n)\mathrm{P}dx}dx+\mathrm{c}$

উদাহরণ-মালা

1. সমাধান করুন ঃ $xy-\dfrac{dy}{dx}=y^3e^{-x^2}\cdots\cdots(1)$

বা $y^{-3}\dfrac{dy}{dx}-x\cdot y^{-2}=-e^{-x^2}\cdots\cdots(2)$

ধরি, $y^{-2}=z$ তাহলে, $-2\cdot y^{-3}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}$, (2) - তে বসিয়ে পাই

$\dfrac{dz}{dx}+2x\cdot z=2\,e^{-x2}$

$\therefore$ $\mathrm{I.F}=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$\mathrm{Z}\cdot e^{x^2}=\int 2e^{-x^2}\cdot e^{x^2}\cdot dx+\mathrm{c}$

বা $y^{-2}\cdot e^{x^2}=2x+\mathrm{c}$

$\therefore zxy^{-2}+\mathrm{c}y^2=e^{x^2}$

এটাই নির্ণেয় সমাধান।

2. সমাধান করুন ঃ $3\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2y}{x+1}=\dfrac{x^3}{y^2}\cdots\cdots(1)$

বা $3y^2\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x+1}\cdot y^3=x^3\cdots\cdots(2)$

ধরি $y^3 = z$ তাহলে $3y^2 \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ (2) তে বসিয়ে পাই

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x+1} \cdot z = x^3$$

I.F. $e^{\int \frac{2}{x+1} dx} = e^{2\log(x+1)} = (x+1)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$$\text{Z} \cdot (x+1)^2 = \int x^3 (x+1)^2 dx + \text{c}$$

$$= \int \left(x^5 + 2x^4 + x^3\right) dx + \text{c}$$

$$\therefore y^3 (x+1)^2 = \frac{1}{6} x^6 + \frac{2}{5} \cdot x^5 + \frac{1}{4} x^4 + \text{c}$$

এটাই নির্ণেয় সমাধান।

দ্রষ্টব্য ঃ কখন কখন অবকল সমীকরণটি এখন থাকে যে y কে স্বাধীনচল এবং x কে অধীন চল হিসাবে ধরতে হয়। তখন সমীকরণটি হবে,

$$\frac{dx}{dy} + \text{P}^1 x = Q^1$$

এখানে P^1, Q^1 - Y চলটির অপেক্ষক, তখন I. F. হবে $e^{\int \text{P}^1 dy}$ এর নির্ণেয় সমাধানটি হবে

$$x\, e^{\int \text{P}^1 dy} = \left(Q^1 e^{\int \text{P}^1 dy}\right) dy + \text{c}$$

3. $\left(x^2 y^3 + 2xy\right) dy = dx \cdots\cdots (1)$

$$\frac{dx}{dy} - 2y \cdot x = y^3 x^2$$

বা $x^{-2} \frac{dx}{dy} - 2y \cdot x^{-1} = y^3 \cdots\cdots (2)$

ধরি $x^{-1} = z,\ -x^{-2} \frac{dx}{dy} = \frac{dz}{dy}$

$\therefore$ (2) তে বাসাইয়া পাই

$$+\frac{dz}{dy} + 2y \cdot z = -y^3$$

$\therefore$ I.F. $= e^{+\int 2y dy} = e^{+y^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$$Z \cdot e^{+y^2} = -\int y^3 \cdot e^{+y^2} dy + \mathrm{c}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \mathrm{t}\, e^{+t} d\mathrm{t} + \mathrm{c} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y^2 = \mathrm{t} \\ 2y\, dy = d\mathrm{t} \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{2}\left(+\mathrm{t}\, e^{\mathrm{t}} - e^{\mathrm{t}}\right) + \mathrm{c}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{y}^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{y}^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{y}^2} + \mathrm{c}$$

$$\therefore \; 2x^{-1} = 1 - y^2 + \mathrm{c}\, e^{-y^2}$$

উদাহরণ (অতিরিক্ত) ঃ

1. সমাধান করুণ ঃ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{4x}{x^2+1} y = \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^3} \cdots\cdots (1)$

$$\mathrm{P} = \frac{4x}{x^2+1}, Q = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$\therefore \; \mathrm{I.F} = e^{2\int \frac{2x}{x^2+1} dx} = e^{2\log\left(x^2+1\right)} = \left(x^2+1\right)^2$$

(1) I.F দিয়ে গুণ করে পাই $\left(x^2+1\right)^2 \dfrac{dy}{dx} + 4x\left(x^2+1\right)y = \dfrac{1}{x^2+1}$

বা $d\left\{y\left(x^2+1\right)^2\right\} = \dfrac{1}{x^2+1}.dx$

$\therefore$ সমাকলন করে পাই $y\left(x^2+1\right)^2 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} + \mathrm{c}$

$\therefore \; y\left(x^2+1\right)^2 = \tan^{-1} x + \mathrm{c}$, এটাই নির্ণেয় সমাধান

2. সমাধান করুন ঃ $1 + y^2 + \left(x - e^{-\tan^{-1} y}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \; \frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{e^{-\tan^{-1} y}}{1+y^2}$$

এখানে অধীন চল x ;

$\therefore$ I.F $e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1} y}$

নির্ণেয় সমাধান $x \cdot e^{\tan^{-1} y} = \int \frac{e^{-\tan^{-1} y}}{1+y^2} \text{x}\, e^{\tan^{-1} y} dy + \text{c}$

$$= \tan^{-1} y + \text{c}$$

3. সমাধান করুন ঃ $\frac{dy}{dx} + \frac{a}{x} y = \frac{b}{x^n}$

$\text{I. F} = e^{\int \frac{a}{x}dx} = e^{a \log x} = x^a$

প্রদত্ত সমীকরণকে x^a দ্বারা গুণ করে পাই,

$$y \cdot x^a = b\int \frac{x^a}{x^n} dx + \text{c}$$

$$= \frac{b \cdot x^{a-n+1}}{a-n+1} + \text{c}$$

$$\therefore \quad y = \frac{b}{a-n+1} \cdot x^{-n+1} + \text{c}\, x^{-a}$$

4. সমাধান করুন ঃ $\frac{dy}{dx} + y \cos x = y^n \sin 2x$

[এটি বার্নোলির সমীকরণ]

$$\therefore \quad (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} + (1-n)y^{1-n} \cos x = \sin 2x \cdot (1-n)$$

$y^{1-n} = \text{z}$ ধরি, $(1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\cos x \cdot \text{z} = (1-n) \sin 2x$$

এবার z অধীন চল, অতএব উভয় পক্ষকে I.F. দ্বারা গুণ করে এবং সমাকল করে পাই

$$z \cdot e^{\int (1-n)\cos x\, dx} = \int (1-n)\sin 2x\left(\int e^{(1-n)\cos x dx}\right)dx + c$$

বা $z \cdot e^{(1-n)\sin x} = \int (1-n)\sin 2x \cdot e^{(1-n)\sin x} dx + \mathrm{c}$

ডানপক্ষ $= 2\int (1-n)\, e^{(1-n)\sin x} \cdot \cos x \cdot \sin x \, dx + c$

$= 2\sin x \cdot e^{(1-n)\sin x} - 2\int e^{(1-n)\sin x} \cos x \, dx + c$

$= 2\sin x \cdot e^{(1-n)\sin x} - \frac{2}{1-n} e^{(1-n)\sin x} + c$

$= e^{(1-n)\sin x}\left(2\sin x - \frac{2}{1-n}\right) + c$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$y^{1-n} \cdot e^{(1-n)\sin x} = e^{(1-n)\sin x}\left(2\sin x - \frac{2}{1-n}\right) + \mathrm{c}$

$\therefore \quad y^{1-n} = 2\sin x - \frac{2}{1-n} + \mathrm{c} \cdot \mathrm{e}^{(n-1)\sin x}$

5. সমাধান করুন ঃ $x(x-1)\frac{dy}{dx} - (x-2)y = x^3(2x-1)$

বা $\frac{dy}{dx} - \frac{(x-2)}{x(x-1)} y = \frac{x^3(2x-1)}{x(x-1)}$

$\mathrm{P} = -\frac{(x-2)}{x(x-1)}, \; Q = \frac{x^2(2x-1)}{x-1}$

$\therefore \quad \mathrm{I.F} = e^{-\int \frac{x-2}{x(x-1)} dx} = e^{\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}\right) dx} = e^{\log(x-1) - 2\log x} = \frac{x-1}{x^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$y \cdot \frac{x-1}{x^2} = \int \frac{x^2(2x-1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x^2} dx + \mathrm{c}$

$= \left(x^2 - x\right) + \mathrm{c}$

$\therefore \quad y(x-1) = x^4 - x^3 + \mathrm{c}\, x^2$

6. সমাধান করুণ ঃ $y\,e^{y} = \left(y^{3} + 2x\,e^{y}\right)\dfrac{dy}{dx}$

সরলীকরণ করে

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}\cdot x = y^{2}e^{-y}$$

এখানে $\mathrm{P}^{1} = -\dfrac{2}{y}, Q^{1} = y^{2}e^{-y}$

$$\therefore \;\; \mathrm{I.F} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = \frac{1}{y^{2}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x\cdot\dfrac{1}{y^{2}} = \displaystyle\int y^{2}e^{-y}\cdot\frac{1}{y^{2}}\,dy + \mathrm{c}$

$$= -e^{-y} + \mathrm{c}$$

$$\therefore \;\; x + y^{2}e^{-y} = y^{2}\mathrm{c}$$

7. সমাধান করুণ ঃ $(1+\sin y)\dfrac{dx}{dy} = \left[2y\cos y - x(\sec y + \tan y)\right]$

$$\therefore \frac{dx}{dy} + \frac{\sec y + \tan y}{1+\sin y}x = \frac{2y\cos y}{1+\sin y}$$

বা $\dfrac{dx}{dy} + \sec y\cdot x = 2y\dfrac{\cos y}{1+\sin y}$

$$\therefore \left[\frac{\sec y + \tan y}{1+\sin y} = \frac{\dfrac{1}{\cos y} + \dfrac{\sin y}{\cos y}}{1+\sin y} = \sec y\right]$$

$$\therefore \mathrm{I.F} = e^{\int \sec y dy} = e^{\log(\sec y + \tan y)} = \sec y + \tan y$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x(\sec y + \tan y) = \displaystyle\int 2y\cdot\frac{\cos y}{1+\sin y}(\sec y + \tan y)dy + \mathrm{c}$

$$\therefore \;\; x(\sec y + \tan y) = \int 2y\,dy + \mathrm{c}$$

$$= y^{2} + \mathrm{c}$$

8. সমাধান করুণ ঃ $\sqrt{a^{2}+x^{2}}\,\dfrac{dy}{dx} + y = \left[\sqrt{a^{2}+x^{2}} - x\right]$

বা $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}y=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}-x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$\therefore \text{I.F} = e^{\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}$

$= e^{\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}$

$= \left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$$y\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)=\int\frac{\left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right)\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}{\sqrt{a^2+x^2}}dx+c$$

$$=\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}+\text{c}$$

$$\therefore\ y\cdot\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)=a^2\log\left|\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)\right|+\text{c}$$

9. সমাধান করুন ঃ $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{4}{x}\log y=\dfrac{y}{x^2}(\log y)^2$

$\log y=v,\ \ \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$

$\therefore\ y\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{y}{x}.v=\dfrac{y}{x^2}v^2$

বা, $\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{1}{x}.v=\dfrac{1}{x^2}.v^2$

এটি বার্নৌলির সমীকরণ

$v^2\dfrac{dv}{dx}+v^{-1}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x^2}$

$v^{-1}=z$ ধরি $-1\cdot v^{-2}\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{dz}{dx}$

$\therefore\ +\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}\cdot z=-\dfrac{1}{x^2}$

$\therefore \text{I.F} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$$z \frac{1}{x} = -\int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx + c$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + c$$

বা $\frac{1}{x}(\log y)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + c$ [$z = (\log y)^{-1}$ বসিয়ে]

10. সমাধান করুণ ঃ $xy(1 - xy^2)\frac{dy}{dx} = 1$

বা $\frac{dx}{dy} - yx = y^3 x^2$

[এখানে অধীন চল x, এটি x সাপেক্ষে বার্ণেলির সমীকরণ]

বা $x^{-2}\frac{dx}{dy} - x^{-1}y = y^3$

$x^{-1} = z$ ধরে, $-x^{-2}\frac{dx}{dy} = \frac{dz}{dy}$

$\therefore \frac{dz}{dy} + y.z = -y^3$

$\therefore \text{I.F} = e^{\int y dy} = e^{\frac{1}{2}y^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$$z \cdot e^{+\frac{1}{2}y^2} = -\int y^3 e^{+\frac{1}{2}y^2} dy + c$$

$$= -\int y^2 \left(+y\, e^{+\frac{1}{2}y^2} \right) dy + c$$

$$= -e^{+\frac{1}{2}y^2} y^2 + 2\int y\, e^{+\frac{1}{2}y^2} dy + c$$

$\therefore x^{-1} = -y^2 \cdot e^{+\frac{1}{2}y^2} + 2\, e^{+\frac{1}{2}y^2} + c$

$\therefore \frac{1}{x} = 2 - y^2 + c\, e^{-\frac{1}{2}y^2}$

প্রশ্নাবলী ঃ

সমাধান করুন ঃ

1. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2\cos x$

2. $(x \cos x)\frac{dy}{dx} + y(x\sin x + \cos x) = 1$

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\sin 2y = x^3 \cos^2 y \ \ [\tan y = z]$

4. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\log y = \frac{y}{x^2}(\log y)^2$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{\tan y}{1+x} = (1+x)e^x \sec y$

উত্তরমালা ঃ

1. $y = \sin x + \mathrm{c}\ (\sin x)^{-1}$

$[\mathrm{I.F} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log(\sin x)} = \sin x.$

$\sin x$ দিয়ে গুণ করে এবং সমাকলন করে পাই $\int d\left(y\sin x\right) = \int 2\sin x \cos x dx + c$ ইত্যাদি]

$[\therefore\ y\ sin\ x\ =\ 2\int \cos x \cdot \sin x\, dx + \mathrm{c}]$

2. $y = x^{-1}\sin x + \mathrm{c}\ x^{-1}\cos x$

$$\left[\frac{dy}{dx} + \left(\tan x + \frac{1}{x}\right)y = \frac{1}{x}\sec x,\ \mathrm{I.F}\ \ e^{\int\left(\tan x + \frac{1}{x}\right)dx} = e^{\log x \sec x} = x\sec x\right]$$

3. $6x^2 \tan y = x^6 + \mathrm{c}$

[ধরা যাক $\tan y = z$

$\therefore\ \sec^2 y\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$\sec^2 y\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\cdot 2\tan y = x^3$

$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}\mathrm{z} = x^3]$

4. $x = \log y\left(c\,x^2 + \frac{1}{2}\right)$

[ধরা যাক $\log y = z \;\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$\therefore \;\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x^2}z^2$

বা $z^{-2}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z^{-1} = \frac{1}{x^2}$

ধরা যাক $z^{-1} = t \Rightarrow -z^{-2}\frac{dz}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore \;\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x}\mathrm{t} = -\frac{1}{x^2}$

$t \cdot \frac{1}{x} = -\int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}dx + c = +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + c$

$\therefore \;x = \log y\left(\frac{1}{2} + cx^2\right)$]

5. $\sin y = (1+x)\,e^x + c\,(1+x)$

[ধরুন $\sin y = z,\; \cos y\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$\mathrm{I.F} = e^{-\int \frac{1}{1+x}dx} = e^{\log(1+x)} = \frac{1}{1+x}$]

9.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী ঃ

সমাধান করুন ঃ

1. $y\left(2x^2 - xy + 1\right)dx + \left(x - y\right)dy = 0$

2. $\left(x - y\right)dx - dy = 0;\; y\left(0\right) = 2$

3. $\left(3x^2y^4 + 2xy\right)dx + \left(2x^3y^3 - x^2\right)dy = 0$

4. $y(y^2 - 2x^2)dx + x(2y^2 - x^2)dy = 0$

5. $(x^2y^2+xy+1)ydx+(x^2y^2-xy+1)dy=0$

6. $2\sin(y^2)dx+xy\cos(y^2)dy=0, y(2)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

7. $(3xy-2ay^2)dx+(x^2-2axy)dy=0$

8. $(y^4+2y)dx+(xy^3+2y^4-4x)dy=0$

9. $3(x^2+y^2)dx+x(x^2+3y^2+6y)dy=0$

10. $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$

11. $(x^4+y^4)dx-xy^3dy=0$

12. $x(4ydx+2xdy)+y^3(3ydx+5xdy)=0$

13. $(2y^2+4x^2y)dx+(4xy+3x^3)dy=0$

14. $y(xy+2x^2y^2)dx+x(xy-x^2y^2)dy=0$ $[xy(ydx+xdy)+x^2y^2(2ydx-xdy)=0]$

15. $(8ydx+8xdy)+x^2y^3(4ydx+5xdy)=0$

16. $(y^3-2x^2y)dx+(2xy^2-x^3)dy=0$

17. $(y^4+2y)dx+(xy^3+2y^4-4x)dy=0$

18. $(2x\log x-xy)dy+2ydx=0$

19. $y(x^2y+e^x)dx-e^xdy=0$

20. $(x\sec^2 y-x^2\cos y)dy=(\tan y-3x^4)dx$

21. $y\log ydx+(x-\log y)dy=0$

22. $(x^2y-2xy^2)dx+(3x^2y-x^3)dy=0$

23. $(xy\cos xy+\sin xy)dx+x^2\cos xydy=0$

24. $y(2x^2y+e^x)dx-(e^x+y^3)dy=0$

25. $\left(\log y+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{x}{y}+2y\right)dy=0$

26. $\left(2xy^4e^y+2xy^3+y\right)dx+\left(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x\right)dy=0$

27. $y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0$

28. $y(xy+2x^2y^2)dx+x(xy-x^2y^2)dy=0$

29. $(x^2y^2+5xy+2)ydx+(x^2y^2+4xy+2)xdy=0$

30. $(x^3y^3+x^2y^2+xy+1)ydx+(x^3y^3-x^2y^2-xy+1)xdy=0$

বা, $(xy+1)(x^2y^2+1)ydx+(xy+1)(x^2y^2-2xy+1)xdy=0$

বা, $(x^2y^2+1)ydx+(x^2y^2-2xy+1)xdy=0 \quad xy+1\neq 0$

31. $y^2-\left(x-\dfrac{1}{y^2}\right)\dfrac{dy}{dx}=0$

32. $xy-\dfrac{dy}{dx}=y^3e^{-x^2}$

33. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x}{1-x^2}y=x\sqrt{y}$

34. $dx+x\,dy=e^{-y}\sec^2 y\,dy$

35. $x\log x\dfrac{dy}{dx}+y=2\log x$

36. $(x+y+1)\,dy=dx$

37. $\dfrac{dy}{dx}\left(1-x^2\right)-xy=1$

38. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}=\dfrac{x+\sqrt{\left(1-x^2\right)}}{\left(1-x^2\right)^2}$

39. $y^2+\left(x-\dfrac{1}{y}\right)\dfrac{dy}{dx}=0$

40. $y\,dx+\left(ax^2y^n-2x\right)dy=0$

9.8 উত্তরমালা

1. $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2 - 2xy + 1 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2x^2 - 2xy + 1 - 1}{(x-y)} = 2x = \phi(x)$$

$\therefore$ I.F $e^{\int \phi(x)dx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$

$\therefore$ $e^{x^2}[2yx^2 - xy^2 + y]dx + e^{x^2}(x-y)dy = 0$ যথার্থ

$\therefore$ $\int Mdx = \int e^{x^2}(2yx^2 - 2xy^2 + y)dx$

$$= e^{x^2}xy - \frac{1}{2}y^2.e^{x^2}$$

N$dy = \int e^{x^2}(x-y)dy = e^{x^2}xy - \frac{y^2}{2}.e^{x^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $e^{x^2}(2xy - y^2) = c$

2. $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = -1 \neq 0 = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{-1}{-1} = 1 \quad \therefore\ I.F.e^{\int dx} = e^x$

$e^x(x-y)dx - e^x dy = 0$

$\therefore$ সমাধান

$\int e^x(x-y)dx = x.e^x - e^x - ye^x$

$-\int e^x dy = -ye^x$

$\therefore (x-1)e^x - ye^x = c$

3. $x^3y^2 + \frac{x^2}{y} = c$

$$[\text{I.F. } \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=+\frac{2}{y}g(y)$$

$$\therefore IF=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=\frac{1}{y^2}-]$$

4. $x^2y^2(y^2-x^2)=C$

[উভয়েই M এবং N সুষম এবং $Mx+Ny\neq 0$

$$\therefore \text{ I.F}=\frac{1}{3xy(y^2-x^2)} \ ]$$

5. $xy-\dfrac{1}{xy}+\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=c$

[এখানে $[M=yf(xy), \quad N=xg(xy)$

$$\therefore \text{ I.F }=\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{2x^2y^2}$$

6. $x^4\sin(y^2)=16$

$$\left[\ \frac{\partial \text{M}}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2(\cos y^2).2y-y\cos(y^2)\right.$$

$$=3y\cos(y^2)$$

$$\therefore \frac{1}{N}\left(\frac{\partial \text{M}}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{3}{x} \quad \therefore \ I.F.=e^{\int\frac{3}{x}dx}=x^3$$

$\therefore$ সমাধান ঃ $x^4\sin y^2=C, \ y(2)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\Rightarrow C=16 \ ]$

7. $x^3y-ax^2y^2=C$

$$\left[\ \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{(3x-4ay)-(2x-2ay)}{x^2-2axy}=\frac{1}{x}\right.$$

$$\therefore I.F=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\log x}=x \ ]$$

8. $(y^3+2)x+y^4=cy^2$

[$\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)=\dfrac{(4y^3+2)-(y^3-4)}{y(y^3+2)}=\dfrac{2}{y}$

$\therefore$ $\text{I.F}=e^{-\int \frac{2}{y}dy}=\dfrac{1}{y^2}$]

9. $xe^y(x^2+3y^2)=c$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{6y-(3x^2+3y^2+6y)}{3(x^2+y^2)}=1$$

$\therefore$ $I.F \quad e^{\int dy}=e^y$]

10. $y=c\,e^{-\frac{x^3}{3y^3}}$

[M, N দুটিই সুষম অপেক্ষক

$$\frac{1}{Mx+Ny}=\frac{1}{x^3y+(-x^3y-y^4)}=-\frac{1}{y^4}$$

$\therefore$ $-\dfrac{x^2dx}{y^3}+\dfrac{x^3dy}{y^4}+\dfrac{dy}{y}=0$

11. $y^2=4x^4\ln|x|+cx^4$

$$\left[\text{I.F}=\frac{1}{Mx+Ny}=\frac{1}{x^5}\right]$$

12. $x^4y^2+x^3y^5=C$

[$x^{4k-1-1}y^{2k-0-1};\quad x^{3k^1-0-1}y^{5k^1-3-1}$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ 4k-2&=3k^1-1\\ 2k-1&=5k^1-4\end{aligned}\right\}\Rightarrow k=1,\ k'=1$$

$\therefore \text{I.F}=x^2y$]

13. $x^2y^4+x^4y^3=C$

[প্রদত্ত সমীকরণ $y(2ydx+4xdy)+x^2(4ydx+3xdy)=0$

I. F $= xy^2$]

14. $2\ln|x| - \ln|y| - \dfrac{1}{xy} = C$

$\left[\text{I.F} = \dfrac{1}{x^3y^3}\right]$

15. $4x^2y^2 + x^4y^5 = C$

[I.F. $= xy$]

16. $x^2y^2(x^2 - y^2) = C$

[প্রদত্ত সমীকরণ

$= y^2(ydx + 2xdy) + x^2(-2ydx - xdy) = 0$

I.F. $= xy$]

17. $x\left(y + \dfrac{2}{y^2}\right) + y^2 = c$

$$\left[\ \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{(4y^3+2)-(y^3-4)}{y(y^3+2)} = \frac{3}{y}\right.$$

$$\left.\therefore\ \text{I.F} = e^{-\int \frac{3}{y}dy} = \frac{1}{y^3}\right]$$

18. $2y\log x - \dfrac{1}{2}y^2 = C$

$$\left[\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{-2\log x + y}{2x\log x - xy} = -\frac{1}{x}\right.$$

$$\left.\therefore\ I.F = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}\right]$$

19. $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{e^x}{y} = C$

$$\left[\frac{1}{\mathrm{M}}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right) = \frac{2x^2y + e^x + e^x}{y(x^xy + e^x)} = +\frac{2}{y}\right.$$

$$\therefore\ \text{I.F} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = \frac{1}{y^2} \quad \Bigg]$$

20. $-\frac{1}{x}\tan y - x^3 + \sin|y| = c$

$$\left[\frac{1}{\text{N}}\left(\frac{\partial \text{M}}{\partial y} - \frac{\partial \text{N}}{\partial x}\right) = \frac{-2}{x}\ \therefore\ \text{I.F} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}\right]$$

21. $2x\log y = C + (\log y)^2$ $\quad\therefore\ \text{I.F} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = \frac{1}{y}\ \Bigg]$

$$\left[\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{y} \Rightarrow I.F = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = \frac{1}{y}\right]$$

22. $\frac{x}{y} + 3\log y - 2\log x = C$

[M.N. উভয়েই সুষম

$$\text{I.F} = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{(x^2y - 2xy^2)x + (3x^2y - x3)y} = \frac{1}{x^2y^2}\Bigg]$$

23. $x\sin xy = \text{C}$ [এটি যথার্থ অবকল সমীকরণ]

24. $\frac{e^x}{y} + \frac{2x^3}{3} - \frac{y^2}{2} = c$

$$\left[\text{I.F} = \frac{1}{y^2}\right]$$

25. $x\log y + \log x + y^2 = c$

[এটি যথার্থ সমীকরণ]

26. $x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C$

$$\left[\frac{1}{\text{M}}\left(\frac{\partial \text{M}}{\partial y} - \frac{\partial \text{N}}{\partial x}\right) = \frac{4}{y}\ \therefore\ \text{I.F}\quad e^{-\int \frac{4}{y}dy} = \frac{1}{y^4}\right]$$

27. $\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{x^2y^2}-2\log y=C$ $\quad\therefore$ $\left[\text{I.F }=\dfrac{1}{\text{M}x-\text{N}y}=-\dfrac{1}{x^3y^3}\right]$

28. $x^2=cye^{\frac{1}{xy}}$

$\left[\text{I.F}=\dfrac{1}{\text{M}x-\text{N}y}=\dfrac{1}{xy(xy+2x^2y^2)-xy(xy-x^2y^2)}=\dfrac{1}{3x^3y^3}\right.$

প্রদত্ত সমীকরণকে $\dfrac{1}{x^3y^3}$ দিয়ে গুণ করে সমাকলন করলে উদ্দিষ্ট সমাধান নির্ণিত হবে]

29. $x^5y^4=c\,e^{\frac{2}{xy}-xy}$

[$\dfrac{1}{Mx-Ny}=\dfrac{1}{xy\left(x^2y^2+5xy+2\right)-xy\left(x^2y^2+4xy+2\right)}=\dfrac{1}{x^2y^2}$ দ্বারা অবকল সমীকরণটিকে গুণ করে সমাকল করুন]

30. $xy-\dfrac{1}{xy}-2\log|y|=c$ $\quad$ [এখানে $\text{I.F}=\dfrac{1}{Mx-Ny}=\dfrac{1}{3x^2y^2}$]

31. $x=1+\dfrac{1}{y}+c\,e^{1/y}$

[এখানে y^2 আছে কাজেই x কে অধীন ও y কে অনধীন চল নিতে হবে;

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y^2}\cdot x=\frac{1}{y^3}$$

$$\therefore \text{I.F}=e^{\int\frac{1}{y^2}dy}=e^{-\frac{1}{y}}$$

$$\therefore x\cdot e^{-\frac{1}{y}}=\int\frac{1}{y^3}\cdot e^{-\frac{1}{y}}dy+\text{c}\,]$$

32. $\dfrac{1}{y^2}=(2x+\text{c})\,e^{-x^2}$

[এটি বার্ণোলির সমীকরণ]

$$\frac{dy}{dx}-xy=-e^{-x^2}y^3$$

$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} - x\frac{1}{y^2} = -e^{-x^2}$

$\frac{1}{y^2} = z$ বসাতে হবে $\text{I.F} = e^{x^2}$]

33. $\sqrt{y} = \text{c}(1-x^2)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}\cdot(1-x^2)$

[$y^{\frac{1}{2}} = \text{z}$ ধরুন]

34. $x = e^{-y}(\text{c} + \tan y)$

[$\frac{dx}{dy} + x = e^{-y}\sec y$; $\text{I.F}\ e^{\int 1dy} = e^{y}$]

35. $y\log x = (\log x)^2 + \text{c}$

[$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x\log x}y = \frac{2}{x}$

$\text{I.F} = e^{\int\frac{1}{x\log x}dx} = e^{\log(\log x)} = \log x$]

36. $x + y + 2 = \text{c}\cdot e^{y}$

[$\frac{dx}{dy} - x = y + 1$; $\text{I.F}\ e^{-\int dy} = e^{-y}$]

37. $y = (\sin^{-1}x + \text{c})\big/\sqrt{1-x^2}$

[$\text{I.F}\ e^{-\int\frac{x}{1-x^2}dx} = e^{\frac{1}{2}\log(1-x)} = \sqrt{1-x^2}$]

38. $y = c\cdot e^{-x/\sqrt{1-x^2}} + x\big/\sqrt{1-x^2}$

[I.F $e^{\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}} = e^{\int\frac{\cos\theta d\theta}{\cos^3\theta}} = e^{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$ $x = \sin\theta$ বসিয়ে]

39. $x - 1 = y^{-1} + c\cdot e^{\frac{1}{y}}$

[$\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1}{y^2}\cdot x=\dfrac{1}{y^3}$ I.F $e^{\int \frac{1}{y^2}dy}=e^{-\frac{1}{y}}$]

40. $ay^{n+2}\Big/(n+2)=\dfrac{y^2}{x}+\mathrm{c}$

[$\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{2}{y}x=ax^2y^{n-1}$ বা, $x^{-2}\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{2}{y}x^{-1}=ay^{n-1}$]

9.9 সারাংশ

বিভিন্ন প্রকার অবকল সমীকরণ যেমন একমাত্রীয়, দ্বিমাত্রীয় একঘাত (সরল) বা বহুঘাত ইত্যাদি সমীকরণের মধ্যে এই এককে কেবলমাত্র একমাত্রীয় অবকল সমীকরণের সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। একমাত্রীয় সরল একঘাত (Linear) সমীকরণ সমাধানের বিভিন্ন পদ্ধতি উদাহরণ সহযোগে বিশধভাবে আলোচিত হয়েছে। সেগুলি নিম্নরূপ ঃ

একমাত্রীয় একঘাত অবকল সমীকরণকে $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=0$ আকারে প্রকাশ করা যায়। অবশ্যই M, N, (x, y) এর অপেক্ষক। এই অবকল সমীকরণটি যথার্থ অর্থাৎ সমাধান যোগ্য হবার শর্ত হল (প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট) $\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}=\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$; এই শর্ত পূরণ হলে নির্ণয় সমাধান হবে $\int \mathrm{M}dx+\int \mathrm{N}dy$ (x সমন্বিত বাদে) রাশিগুলি ; যখন একটি সমাকল ধ্রুবক।

যদি, $\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\neq\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$ অর্থাৎ সমীকরণটি যদি সরাসরি যথার্থ না হয়, তাহলে উপযুক্ত সমাকল গুণক (I.F.) নির্ণেয় করে, সেটি প্রদত্ত সমীকরণে গুণ করলেই $\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}=\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$ হবে। অতঃপর সমাধান নির্ণয় করতে হবে।

সমাকল রাশি /গুনক (I.F) নির্ণয় করার কয়েকটি পদ্ধতি আছে:

(A) যদি $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=0$ সমীকরণে M, N উভয় অপেক্ষকই সুষম হয়, তাহলে $\mathrm{I.F}=\dfrac{1}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}$

$(\mathrm{M}\,x+\mathrm{N}y\neq 0)$

(B) যদি $\dfrac{1}{\mathrm{N}}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)=\mathrm{p}(x)$ হয়, তবে $\mathrm{I.F.}=e^{\int p(x)dx}$

(C) যদি $\dfrac{1}{\mathrm{M}}\left(\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}-\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right)=\psi(y)$ হয় তবে, $\mathrm{I.F.}=e^{-\int \psi(y)dy}$

(D) যদি $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy \equiv yf(xy)dx+x\,g(xy)$ আকারে হয়, তাহলে $\mathrm{I.F}=\dfrac{1}{\mathrm{M}x-\mathrm{N}y}, \mathrm{M}x-\mathrm{N}y\neq 0$

(E) যদি $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy \equiv x^{\alpha}y^{\beta}(mydx+nxdy)+x^{\alpha^1}y^{\beta^1}\left(m^1ydx+n^1xdy\right)$ হয়, তাহলে প্রথমাংশের

$$\mathrm{I.F}=x^{mk-\alpha-1}y^{nk-\beta-1}\cdots\cdots(1)$$

দ্বিতীয়ার্ধের $\mathrm{I.F}=x^{m^1k^1-\alpha^1-1}y^{n^1k^1-\beta^1-1}\cdots\cdots(2)$

দুটি I. F. অবশ্যই সমান হবে, কারণ একই সমীকরণের অংশবিশেষের I.F. এই দুটি।

$$\therefore mk-\alpha-1=m^1k^1-\alpha^1-1$$
$$mk-\beta-1=m^1k^1-\beta^1-1$$

সরলকরণ করে K অথবা K^1 যে কোন একটির মান নির্ণয় করে উপরোক্ত (1) বা (2) এ বসিয়ে I.F. নির্ণয় করা যাবে।

উপরোক্ত প্রতিটি প্রকারের সমীকরণ-ই উদাহরণের সাহায্যে দেখানো হয়েছে।

(4) এবার আসি সরল একমাত্রীয় অবকল সমীকরণ প্রসঙ্গে; এটি $\dfrac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=\mathrm{Q}$, $\mathrm{P,Q}$ x- এর অপেক্ষক; এখানে $\mathrm{I.F}$ $e^{\int \mathrm{P}dx}$ এবং সমাধান হল

$$y\cdot e^{\int Pdx}=\int\left(\mathrm{Q}\cdot e^{\int Pdx}\right)dx+\mathrm{c}$$

কখনও কখনও x কে অধীন ও y কে স্বাধীন চল হিসাবে নিতে হয়; তখন সমীকরণটির আকার $\dfrac{dx}{dy}+\mathrm{P}^1x=\mathrm{Q}^1$,P^1, Q^1 উভয়েই - y চলের অপেক্ষক। তখন $\mathrm{I.F}=e^{\int \mathrm{P}^1dy}$ এবং সমাধান $x\cdot e^{\int P^1dy}=\int\left(Q^1e^{\int P^1dy}\right)dy+k$

বার্ণোলির (Bernoulli) সমীকরণ কিঞ্চিৎ ভিন্ন আকার যা $\dfrac{dy}{dx}+Py=\mathrm{Q}\cdot y^n$ বা $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+y^{1-n}\mathrm{P}=\mathrm{Q}$, এখানে $y^{1-n}=\mathrm{z}$ বসালে $(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}$ হয় এবং উপরোক্ত সমীকরণ $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)\mathrm{z}\,\mathrm{P}=(1-\mathrm{n})\,\mathrm{Q}$ এই আকারে পরিণত হয়। এটি উপরোক্ত সরল একমাত্রীয় অবকল সমীকরণ সহজে z - x সাপেক্ষে সমাধান যোগ্য $z=y^{1-n}$; বসালে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যাবে।

একক 10 ❑ একমাত্রীয় বহুঘাত অবকল সমীকরণ (First Order Higher Degree Differential Equation)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

পূর্বের দুটি এককে একমাত্রীয় সরল (একঘাত) সমীকরণ ও তার বিভিন্ন সমাধান পদ্ধতি সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এই এককে একমাত্রীয় বহুঘাত সমীকরণ সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

10.2 উদ্দেশ্য

একমাত্রীক বহুঘাত সমীকরণের গুণসম্পর্কে আলোচনা ও তার সমাধান পদ্ধতি শিক্ষণই এই এককের উদ্দেশ্য। এই এককে ক্লরাউট পদ্ধতি সম্পর্কে বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

10.3 একমাত্রীয় ও বহুঘাত অবকল-সমীকরণ ঃ

প্রথম ক্রম ও বহুঘাতবিশিষ্ট অবকল-সমীকরণের সাধারণ রূপ

$$p^n + P_1 p^{n-1} + P_2 p^{n-2} + \cdots\cdots P_{n-1}\, p + P_n = 0 \ldots\ldots(1)$$

এখানে $p = \dfrac{dy}{dx}$, $P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$ x ও y এর অপেক্ষক বা ধ্রুবক। এই সমীকরণকে নিম্নলিখিত পদ্ধতিতে সমাধান করা যায়।

I. p-সম্বন্বিত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে।

II. y-সাপেক্ষে সমাধান করে।

III. x-সাপেক্ষে সমাধান করে।

এর প্রতিটি উদাহরণ সহযোগে ব্যাখ্যা করা হল।

I. p-সাপেক্ষে সমাধান :

ধরা যাক্ (1) নং সমীকরণকে n সংখ্যক p-এর একঘাত উৎপাদকে

$$\{p - f_1(x - y)\}\{p - f_2(x, y)\}\cdots\cdots\{p - f_n(x, y) = 0$$

এইভাবে বিশ্লেষিত করে লেখা যায়। এই উৎপাদকগুলিকে পৃথকভাবে শূন্য ধরে

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y), \frac{dy}{dx} = f_2(x, y), \cdots\cdots, \frac{dy}{dx} = f_n(x, y)$$

এই অবকল সমীকরণগুলি পাওয়া যায়। যদি উহাদের সমাধানগুলি

$\phi_1(x, y, c_1) = 0, \phi_2(x, y, c_2) = 0, \cdots\cdots\phi_n(x, y, c_n) = 0$ হয়, তাহলে

$$\phi_1(x, y, c_1).\phi_2(x, y, c_2).\cdots\cdots\phi_n(x, y, c_n) = 0$$

সম্পর্কটি (1) নং সমীকরণের সাধারণ সমীকরণ হবে। কিন্তু (1) নং সমীকরণটি একমাত্রীয় (first order) হওয়ায় উহার সমাধানে একটি মাত্র যথেচ্ছ ধ্রুবক (arbitrary constant) থাকা উচিত; সেইজন্য $c_1 = c_2 = \cdots\cdots = c_n = c$ ধরে

$$\phi_1(x, y, c).\phi_2(x, y, c).\cdots\cdots\phi_n(x, y, c) = 0$$

এইভাবে সাধারণ সমাধানকে সমীকরণটির লেখা হয়।

উদাহরণ 1. সমাধান করুন ঃ $x^2 + 2px - 3x^2 = 0$ (p সমন্বিত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে)।

বা $p^2 + 3px - px - 3x^2 = 0$

বা $(p + 3x)(p - x) = 0$

অথন $p + 3x = 0, \quad p = -3x$

বা $\frac{dy}{dx} = -3x$ বা $dy = -3x\,dx$

সমাধান করে পাই, $\int dy = -\int 3x dx + c'$

বা $y + \frac{3}{2}x^2 - c' = 0$

বা $2y+3x^2-c=0$ ——— (A)

আবার যখন $p-x=0$,

$\frac{dy}{dx}=x$ বা $dy=xdx$

বা $\left(2y-x^2-c\right)=0$, —— (B)

c. ধ্রুবক।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left(2y+3x^2-c\right)\left(2y-x^2-c\right)=0$

মন্তব্য ঃ এখন প্রশ্ন হতে পারে যে (A) এবং (B) তে কেন একই ধ্রুবক c লেখা হল? এর কারণ আমরা জানি একমাত্রার অবকল সমীকরণের সমাধানে একটি মাত্র সদৃচ্ছ ধ্রুবক থাকবে; কাজেই (A) এবং (B) সমাধান দুটি মূল একমাত্রার অবকল সমীকরণের সমাধানের অংশ বিশেষ; কাজেই (A) ও (B) সমাধানে ধ্রুবক একই হবে।

উদাহরণ-2. সমাধান করুন : $x+p^2y=p(1+xy)$

উৎপাদক বিশ্লেষণ করে পাই $(py-1)(p-x)=0$

এখন $py-1=0$ হলে $p=\frac{1}{y}$ বা $ydy=dx$

সমাকলন করে $\left(y^2-2x-c\right)=0$ ——— (A)

আবার $p-x=0$ হলে $\frac{dy}{dx}=x$

সমাকলন করে $\left(2y-x^2-c\right)=0$ ——— (B)

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হল $\left(y^2-2x-e\right)\left(2y-x^2-c\right)=0$

উদাহরণ-3. সমাধান করুন : $p^3-p\left(x^2+xy+y^2\right)+xy(x+y)=0$

এখানে বামপক্ষের রাশিমালার $p–x$ এবং $p–y$ দুটি উৎপাদক আছে। এতএব $p(p-x)(p+x)-xy(p-x)-y^2(p-x)=0$

বা $(p-x)\left(p(p+x)-xy-y^2\right)=0$

বা $(p-x)\left\{\left(p^2-y^2\right)+x(p-y)\right\}=0$

বা $(p-x)(p-y)(p+y+x)=0$

$p-x=0$ হলে $\dfrac{dy}{dx}=x$ বা $2y=x^2+c$

$p-y=0$ হলে $\dfrac{dy}{dx}=y$, $\log\dfrac{y}{c}=x$ বা $y-c\cdot e^x=0$

$x+y+p=0$ হলে $\dfrac{dy}{dx}+x+y=0.$

বা $x+y=v$ ধরি

বা $\dfrac{dv}{dx}-1+v=0$

বা $\dfrac{dv}{v-1}=-dx$

বা, $\log\dfrac{(v-1)}{c}=x$

$x+y=1=ce^{-x}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left(2y-x^2-c\right)\left(y-ce^x\right)\left(x+y-1-ce^{-x}\right)=0$

প্রশ্নাবলী (উত্তরসহ)

সমাধান করুণ ঃ

1. $p^2+2xp-3x^2=0$

উঃ $(2y-x^2+c)(2y+3x^2+c)=0$ [সংকেত ঃ $(p-x)(p+3x)=0$]

2. $p^2-p(e^x+e^{-x})+1=0$

উঃ $(y-e^x-c)\,(y+e^x-c)=0$ [সংকেত ঃ $(p-e^x)\,(p-e^{-x})=0$.]

3. $p(p-y)=x(x+y)$

উঃ $(2y+x^2-c)\,(y+x+1-ce^x)=0$

II. ***y*- সাপেক্ষে সমাধান ঃ** যখন প্রদত্ত অবকল সমীকরণটি y -এর জন্য সমাধানযোগ্য হয় তখন উহাকে

$y = f(x, p) \cdots\cdots$ (i)

এই আকারে লেখা যায়।

উক্ত সম্পর্ককে x-এর সাপেক্ষে অবকল করে পাওয়া যায়

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x, p)$$

বা, $p = \phi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$ .... (ii)

আকারের; যাহা x ও p চলরাশির অবকল সমীকরণ।

যদি (ii) অবকল সমীকরণের সমাধান

$$\psi(x, p, c) = 0 \text{ .... (iii)}$$

হয়, তাহলে (i) ও (iii)-এর p-অপনয়কই প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সমাধান।

উদাহরণ

1. সমাধান করুন ঃ $y = px + p^2 x$

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$$\frac{dy}{dx} = p \cdot + x \cdot \frac{dp}{dx} + p^2 + 2px\frac{dp}{dx}$$

বা $p = p + x\frac{dp}{dx} + p^2 + 2px\frac{dt}{dx}$

বা $x\frac{dp}{dx} + 2px\frac{dp}{dx} + p^2 = 0$

বা $\frac{dp}{dx}(1+2p)x = -p^2$

বা $-\frac{(1+2p)}{p^2}dp = \frac{dx}{x}$

বা, $\frac{1}{p} - 2\log p = \log\frac{x}{c}$

বা, $x = cp^{-2} \cdot e^{\frac{1}{p}} ....(i)$

প্রদত্ত সমীকরণ $y = px + p^2 x$

বা $y = cp^{-1}(1+p)e^{\frac{1}{p}}$ (ii) [x এর মান বসিয়ে]

(i) এবং (ii) এর p-অপনয়ক (eliminant) নির্ণেয় সমাধান।

2. সমাধান করুন ঃ $e^y - p^3 - p = 0$

$\therefore\ y = \log(p + p^3)$

x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $p = \dfrac{1+3p^2}{p+p^3}\dfrac{dp}{dx}$

বা $dx = \dfrac{1+3p^2}{p^2(1+p^2)}dp$

$$= \left[\frac{2}{1+p^2} + \frac{1}{p^2}\right]dp$$

সমাকলন করে পাই $x = 2\tan^{-1} p - \dfrac{1}{p} + e$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 2\tan^{-1} p - \dfrac{1}{p} + c$

এবং $y = \log(p + p^3)$

এই দুটির p-অপনয়কই নির্ণেয় সমাধান।

3. সমাধান করুন : $y = p\cos p - \sin p$

x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $\dfrac{dy}{dx} = (-p\sin p + \cos p - \cos p)\dfrac{dp}{dx}$

বা $p = -p\sin p\dfrac{dp}{dx}$

বা $dx = -\sin p dp$

$\therefore$ সমাকলন করে পাই $x = \cos p + c$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $x = \cos p + c$

এবং $y = p\cos p - \sin p$ এর-p-অপনয়নক

প্রশ্নাবলী (উত্তর সহ) ঃ

সমাধান করুণ ঃ

1. $y = p\sin x + \cos x$ **উঃ** $y = (x+c)\tan\dfrac{x}{2}$

2. $y = p\tan p + \log\cos p$

উঃ $x = \tan p + c$ এবং $y = p\tan p + \log\cos p$ এর p অপনয়ক

[সংকেত ঃ x-এর সাপেক্ষে অবকল করে $p = (\tan p + p\sec^2 p - \tan p)\dfrac{dp}{dx} = p\sec^2 p\,\dfrac{dp}{dx}$

3. $e^{p-y} = p^2 - 1$ $\quad\quad \Rightarrow x = \tan p + c$ (সমাকলনকরে)]

উঃ $ce^x = \dfrac{p(p+1)}{p-1}$ এবং $e^y = \dfrac{e^p}{p^2-1}$ এর p অপনয়ক।

[**সংকেত** $p = \left\{1 - \dfrac{2p}{p^2-1}\right\}\dfrac{dp}{dx} \Rightarrow dx = \left\{\dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p^2-1}\right\}dp$ ইত্যাদি]

III. ***x*-এর সাপেক্ষে সমাধান ঃ** যদি প্রদত্ত অবকলসমীকরণটি x-এর জন্য সমাধান যোগ্য হয় তখন উহাকে

$$x = f(y, p) \cdots\cdots \text{ (i)}$$

এই আকারে লেখা যায়।

এখন (i) এর উভয়পক্ষকে y -এর সাপেক্ষে অবকল করে

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} f(y, p) \Rightarrow \frac{1}{p} = \phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) \text{ .... (ii)}$$

এই আকারের y ও p চলরাশির অবকল সমীকরণ এই সমীকরণের (ii) পাওয়া যায়। যদি সমাধান

$$\psi(y, p, c) = 0 \text{ .... (iii)}$$

হয়, তাহলে (i) ও (iii)-এর p-অপনয়ক হবে প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সমাধান।

উদাহরণ

1. সমাধান করুন ঃ $x = 4p + 4p^3$

y এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $\dfrac{dx}{dy} = 4\cdot\dfrac{dp}{dy} + 4\cdot 3p^2\dfrac{dp}{dy}$

বা $\dfrac{1}{p} = 4\left(1 + 3p^2\right)\dfrac{dp}{dy}$

বা, $dy = (4p + 4\cdot 3p^2)dp$

সমাকলন করে পাই $y = 2p + 3p^4 + c$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 4p + 4p^3$ এবং $y = 2p + 3p^4 + c$ এর p অপনয়ক।

2. সমাধান করুন ঃ $p^2-2px+1=0$

প্রদত্ত সমীকরণকে x-এর জন্য সমাধান করে পাই $x=\frac{1}{2p}(p^2+1)=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}p^{-1}$ .... (i)

সমীকরণ (i) কে y-এর সাপেক্ষে অবকল করে পাই $\frac{dx}{dy}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p^{-2}\right)\frac{dp}{dy}$

বা, $\frac{1}{p}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p^{-2}\right)\frac{dp}{dy}$

বা, $dy=\frac{1}{2}pdp-\frac{1}{2}p^{-1}dp$

সমাকল করে পাই $y=\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}\log p+c$ .... (ii)

(i) ও (ii) এর p-অপনয়কটি হল নির্ণেয় সমাধান।

প্রশ্নাবলী (উত্তর সহ) ঃ

সমাধান করুন ঃ

1. $y=2px+y^2p^3$

উঃ $y^2=2cx+c^3$ [সংকেত x-এর জন্য সমাধান করে $2x=\frac{y}{p}-y^2p^2$;

y-এর সাপেক্ষে অবকলন করে এবং সরল করে $\left(\frac{1}{p}+2p^2y\right)\left(1+\frac{y}{p}\frac{dp}{dy}\right)=0$, দ্বিতীয় উৎপাদক থেকে $py=c$। প্রদত্ত সমীকরণকে $p={y}/{c}$ বসান]

2. $ayp^2+(2x-b)p-y=0$ **উঃ** $ac^2+(2x-b)\,c-y^2=0$

[সংকেত ঃ x-এর জন্য সমাধান করে পাই $x=\left(\frac{1}{2p}-\frac{a}{2}p\right)y+\frac{1}{2}$ যাকে y-এর সাপেক্ষে অবকল করে এবং সরল করে হয় $\frac{dy}{y}-\frac{dp}{p}=0 \Rightarrow py=c$ (সমাকল করে)।]

10.4 ক্লেরাউট-অবকল সমীকরণঃ সাধারণ ও বিশিষ্ট সমাধান [Clairaut's Equation : General and Singular Solution]

নিম্নোক্ত আকারের সমীকরণকে ক্লেরাউট সমীকরণ বলে

$$y = px + f(p)............(i)$$

এটিকে x-সাপেক্ষে অবকলন করলে পাই $\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dp}(f(p))\frac{dp}{dx}$

বা $p = p + \left\{x + f^{'}(p)\right\}\frac{dp}{dx}$

বা $\left\{x + f^{'}(\phi)\right\}\cdot\frac{dp}{dx} = 0$ ....(ii)

যদি $\frac{dp}{dx} = 0$ হয় $p = c$ (ধ্রুবক) .... (iii)

(i) এ বসিয়ে পাই $y = cx + f(c)$ ....(iv)

এটি ক্লেরাউট সমীকরণ (i) এর সাধারণ সমাধান ; আবার (ii) থেকে যদি $x + f^{'}(p) = 0$ ....(v) হয়, তাহলে এটিকে সমাধান করে (i) এর বিশিষ্ট সমাধান পাওয়া যাবে; পূর্বে বিশিষ্ট সমাধান কি তা ব্যাখ্য করা হয়েছে; পুনরায় উদাহরণের মাধ্যমে বিশিষ্ট সমাধান কি ভাবে পাওয়া যাবে ব্যাখ্যা করা হবে।

উদাহরণ ঃ

1. সমাধান করুন : $y - px = \frac{p}{p-1}$

বা $y = px + \frac{p}{p-1}$ .... (i)

x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $p = p\cdot 1\cdot + x\frac{dp}{dx} + \frac{1(p-1) - p\cdot 1}{(p-1)^2}\cdot\frac{dp}{dx}$

বা $\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 0.$

অর্থাৎ হয় $\frac{dp}{dx} = 0$ বা $p = c$ (ধ্রুবক) .... (ii)

নাহয় $x-\frac{1}{(p-1)^2}=0$ বা $p=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ .... (iii)

(i) এবং (iii) এর মধ্যে p অপনয়ন করে পাই $y=cx+\frac{c}{c-1}$

এটাই (i) এর সাধারণ সমাধান। আবার (i) এবং (iii) এর মধ্যে p অপনয়ন করে পাই

$$y=x\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\left(1+\sqrt{x}\right)$$

$$=\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)+\left(1+\sqrt{x}\right)$$

বা $(x-y+1)^2=4x$ এটাই (i) এর বিশিষ্ট সমাধান

2. সমাধান করুন ঃ $y=px+\sqrt{a^2p^2+b^2}$ অবকল সমীকরণটির সাধারণ সমাধান এবং বিশিষ্ট সমাধান বাহির করুন।

উত্তর : প্রদত্ত সমীকরণ $y=px+\sqrt{a^2p^2+b^2}$ ....(i)

x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $p=p+x\frac{dp}{dx}+\frac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2+b^2}}\frac{dp}{dx}$

বা, $\frac{dp}{dx}\left(x+\frac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2+b^2}}\right)=0$

$\therefore$ হয় $\frac{dp}{dx}=0$ অর্থাৎ $p=c$ (ধ্রুবক) .... (ii)

অথবা $x+\frac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2+b^2}}=0$ বা $x=-\frac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2+b^2}}$ ....(iii)

(i) এর (ii) এর মধ্যে p অপনয়ন করে পাই $y=cx+\sqrt{a^2c^2+b^2}$ এটাই (i) এর নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

(iii) ও (i) থেকে $y=-\frac{a^2p^2}{\sqrt{a^2p^2+b^2}}+\sqrt{a^2p^2+b^2}$

$$= \frac{b^2}{\sqrt{a^2p^2+b^2}} \quad ....(iv)$$

(iii) ও (iv) থেকে পাই $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{a^2p^2}{a^2p^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2p^2+b^2} = 1$

বা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এটাই নির্ণেয় বিশিষ্ট সমাধান।

3. **সমাধান করুন :** $p = \sin(y - xp)$ (সাধারণ ও বিশিষ্ট সমাধান)।

উত্তর : $y - xp = \sin^{-1} p$

বা $y = xp + \sin^{-1} p$ ....(i)

x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx}$

বা $\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\right) = 0.$

$\therefore$ হয় $\frac{dp}{dx} = 0$ বা $p = c$ (ধ্রুবক) .... (ii)

নতুবা $x + \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} = 0$ বা $p = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

বা $\int dy = \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ (সমাকলন করে)

বা $y = \int \tan^2\theta\, d\theta$ $\quad\Rightarrow x = \sec\theta$ ধরি $dx = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$= \int \sec^2\theta\, d\theta - \int d\theta$

$= \tan\theta - \theta$, $y = \sqrt{x^2-1} - \sec^{-1} x.$

এটাই বিশিষ্ট সমাধান

সমীকরণ (i) এবং (ii) থেকে p অপনয়ন করে পাই $y = cx + \sin^{-1} c$

$\therefore$ এটাই ক্লেরাউট অবকল সমীকরণ (i) এর সাধারণ সমাধান।

বি: দ্র: লক্ষ করুন প্রদত্ত ক্লেরাউট সমীকরণ $y = px + \int f(p)dp$

তে $p = c$ বসালেই সাধারণ সমাধান $y = cx + f(c)$ পাওয়া যাবে; সমাধানের সময়ে পদ্ধতিটি অবশ্যই দেখাতে হবে।

4. **সমাধান করুন :** $(y+1)p - xp^2 + 2 = 0 \,.........(i)$ (সাধারণ ও বিশিষ্ট সমাধান)।

$$y = \frac{1}{p}\left(xp^2 - 2\right) = xp - 2p^{-1}$$

x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $p = x\dfrac{dp}{dx} + p + 2p^{-2}\dfrac{dp}{dx}$

বা $\left(x + \dfrac{2}{p^2}\right)\dfrac{dp}{dx} = 0$

যখন $\dfrac{dp}{dx} = 0$ p = ধ্রুবক = c

(i) এ বসিয়ে পাই $(y+1)c - xc^2 + 2 = 0.$ .... (ii)

এটাই প্রদত্ত অবকলন সমীকরণের সাধারণ সমাধান,

যখন $x + \dfrac{2}{p^2} = 0,\ x = -\dfrac{2}{p^2}$ বা $xp^2 = -2$ মানটি (i) বসিয়ে পাই $(y+1)p = -4$

বর্গ করে পাই $(y+1)^2 p^2 = 16$

(iii) থেকে $p^2 = -\dfrac{2}{x}$ বসিয়ে পাই $(y+1)^2 + 8x = 0$ এটিও (i) এর সমাধান ; একে বলা হয় বিশিষ্ট সমাধান লক্ষ্য করুন এই সমাধানে কোন ধ্রুবক নেই এটি একটি অনন্য সমাধান ; সাধারণ সমাধানে ধ্রুবক C তে কোন বিশেষ মান বসিয়ে এই সমাধানটি পাওয়া সম্ভব নয়; এটি সম্পূর্ণ পৃথক প্রক্রিয়ায় পাওয়া গেছে; তাই এটিকে বিশিষ্ট (singular) সমাধান বলা হয়।

5. সমাধান করুন ঃ $(x-a)p^2 + (x-y)p - y = 0$ .... (i) (সাধারণ ও বিশিষ্ট সমাধান)।

$$y(1+p) = xp + (x-a)p^2$$

$$y = \frac{p}{1+p} \cdot x + (x-a)\frac{p^2}{1+p}$$

x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $p=\frac{p}{1+p}+x\cdot\frac{1(1+p)-p}{(1+p)^2}\frac{dp}{dx}+\frac{p^2}{1+p}$

$$+(x-a)\cdot\frac{2p(1+p)-p^2\cdot 1}{(1+p)^2}\cdot\frac{dp}{dx}$$

বা, $p(1+p)=p+\frac{1}{1+p}\cdot\frac{dp}{dx}+p^2+(x-a)\frac{2p+p^2}{1+p}\cdot\frac{dp}{dx}$

বা, $\frac{dp}{dx}\cdot\frac{1}{1+p}\left\{1+(x-a)\left(2p+p^2\right)\right\}=0$

$\frac{dp}{dx}=0$ হলে $p=c.$

এটি (i) বসিয়ে পাই $(x-a)c^2+(x-y)c-y=0$

এটাই সাধারণ সমাধান

আবার $1+(x-a)\left(2p+p^2\right)=0$

বা $1-2ap+2xp+(x-a)p^2=0$

বা $1+2p(x-a)+(x-a)p^2=0$

এবং $(x-a)p^2+(x-y)p-y=0$ সমীকরণদ্বয় থেকে p অপনয়ন করলে বিশিষ্ঠ সমীকরণ পাওয়া যাবে।

10.4.1 লাগরান্জের (Lagrange) সমীকরণ

$y=f(p)x+\phi(p)$ ....(i)

অবশ্যই যখন $f(p)=p,$ তখন একটি ক্লেরাউট সমীকরণ হবে।

অনুরূপ ভাবে (i) কে x-সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=p=xf'(p)\frac{dp}{dx}+\phi'(p)\frac{dp}{dx}+f(p)$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dp}=\frac{f'(p)}{p-f(p)}x+\frac{\phi'(p)}{p-f(p)}$$

অবশ্যই এটি x কে অধীন চল p কে স্বাধীন চল হিসাবে একমাত্রীয় একঘাত অবকল সমীকরণ; কাজেই সেই পদ্ধতিতে সমাধান করা যেতে পারে

উদাহরণ ঃ $y = -px + p^2$

x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $p = -p + (-x)\dfrac{dp}{dx} + 2p\dfrac{dp}{dx}$

বা $\dfrac{dx}{dp} = -\dfrac{x}{2p} + 1\cdot$ বা $\dfrac{dx}{dp} + \dfrac{1}{2p}\cdot x = 1$

$\therefore\ \text{I.F} = e^{\frac{1}{2}\int\frac{1}{p}dp} = \sqrt{p}$

$\therefore\ x\cdot\sqrt{p} = \int\sqrt{p}\,dp + c = \dfrac{2}{3}p^{\frac{3}{2}} + c$

$\therefore\ x = \dfrac{2}{3}p + \dfrac{c}{\sqrt{p}}$ ....(ক)

আবার প্রদত্ত $y = p^2 - px = p^2 - p\left(\dfrac{2}{3}p + \dfrac{c}{\sqrt{p}}\right)$

$= \dfrac{1}{3}p^2 - c\sqrt{p}$ ....(খ)

(ক) ও (খ) মধ্যে p-অপয়নক (eleminant) টি উদ্দিষ্ট সাধারণ সমাধান।

প্রশ্নাবলী (উত্তর সহ) ঃ

সমাধান করুন ঃ (সাধারণ ও বিশিষ্ট সমাধান)

1. $y = px + p - p^2$

উঃ $y = cx + c - c^2$ (সাধারণ), $4y = (x+1)^2$ (বিশিষ্ঠ)

2. $y = px - \tan^{-1} p.$

উঃ $y = cx = \tan^{-1} x$ (সাধারণ),

$y = \sqrt{x(1-x)}$.

$-\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)$ (বিশিষ্ট)

3. $y = px + \sqrt{1+p^2}$

উঃ $y = cx + \sqrt{1+c^2}$ (সাধারণ), $x^2 + y^2 = 1$ (বিশিষ্ট)

4. $y = (p+2)x + p^2$ (লাগরাঞ্জের সমীকরণ)

উঃ $x = 2(2-p) + ce^{\frac{p}{2}}$ এবং $y = 8 - p^2 + (2+p)ce^{-\frac{p}{2}}$

[অবকল করে $p = p + 2 + x\dfrac{dp}{dx} + 2p\dfrac{dp}{dx}$

বা, $\dfrac{dx}{dp} + \dfrac{1}{2}x = -p$ এখানে I.F.$= e^{\int \frac{1}{2}dp} = e^{\frac{1}{2}p}$

I.F দিয়ে গুণ করে এবং সমাকল করে $x = 2(2-p) + ce^{-\frac{p}{2}}$

আবার x-এর মান প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে y=-এর মান পাওয়া যায়]

10.5 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

অংশ (A)

সমাধান করুন ঃ

1. $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$
2. $p^3 - \left(x^2 + xy + y^2\right)p^2 + \left(x^3y + x^2y^2 + xy^3\right)p - x^3y^3 = 0$
3. $x^2p^2 + 3yxp + 2y^2 = 0$
4. $xyp^2 + \left(3x^2 - 2y^2\right)p - 6xy = 0$
5. $x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$
6. $y - \left(1+p^2\right)^{-\frac{1}{2}} - b = 0.$
7. $p^2 + 2py\cot x = y^2$

অংশ (B)

8. $y = x - a\log p$

9. $y = \sin p - p\cos p$

10. $y = p\tan p + \log\cos p$

11. $y = a\sqrt{1+p^2}$

12. $y = (x = a)p - p^2$

13. $y = 3x^4p^2 - xp$

14. $2px + \tan^{-1}xp^2 - y = 0$

অংশ (C)

15. $p^2 - xp + y = 0$

16. $xp^2 - yp - y = 0$

17. $p^2 + y - x = 0$

18. $6p^2y^2 + 3px - y = 0$

19. $y^2p^3 - y + 2px = 0$

20. $3py + 4x = p^3y$

21. $4y^2 + p^3 - 2xyp = 0$

22. $x = 4p + 4p^3$

23. $y - x = p^3$

24. $\left(x^2 + 2ax\right)\left(1 + p^2\right) = \left(x + a\right)^2$

অংশ (D)

নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণগুলির সাধারণ সমাধান ও বিশিষ্ট সমাধান বাহির করুন :

25. $py = p^2(x - b) + a$

26. $y = px + \dfrac{a}{p}$

27. $y = px + ap(1 - p)$

28. $p=\log(px-y)$

29. $y=xp-p^2$

30. $y=px+p^3$

31. $y=px+2p^2$

32. $y=3px+6p^2y^2$

33. $y=px+\dfrac{a}{2p}$

34. $y=4xp-16y^3p^2$ (কেবলমাত্র সাধারণ সমাধান)

35. $y=(1+p)x+ap^2$

36. $y=p^2x+p$

37. $2x+p^2-y+px=0$

10.6 উত্তরমালা

(A)

1. $\left(x^3y+c\right)\left(\dfrac{x^2}{y}+c\right)=0$

$\Big[\left(px+3y\right)\left(px-2y\right)=0$

$px+3y=0 \;\Rightarrow \log y+3\log x+k=0 \Rightarrow \log x^3y=\log e$

$px-2y=0 \Rightarrow \;\log y-2\log x+c=0 \;\Rightarrow\; \log\dfrac{x^2}{y}=\log e$

$\therefore\;(\log y+3\log x+c)(\log y-2\log x+c)=0$

বা $\left(x^3y-c\right)\left(\dfrac{x^2}{y}-c\right)=0\Big]$

2. $\left(x^3-3y+c\right)\left(e^{\frac{1}{2}x^2}+cy\right)(xy+yc+1)=0$

$\left[\left(p-x^2\right)(p-xy)\left(p-y^2\right)=0\right]$

3. $x^2p^2+3xyp+2y^2=0$

$[\,(xp+2y)(xp+y)=0$

$xp+2y=0\Rightarrow\left(x^2y-c\right)=0 \quad xp+y=0\Rightarrow(xy-c)=0$

$\left(x^2y-c\right)(xy-c)=0\,]$

4. $\left(y-cx^2\right)\left(y^2+3x^2+c\right)=0$

$\left[(yp+3x)(xp-2y)=0\right]$

5. $\left(\sin^{-1}\frac{y}{x}+\log cx\right)\left(\sin^{-1}\frac{y}{x}-\log cx\right)=0$

$\left[(xp-y)^2=x^2-y^2\right.$

$xp-y=\pm\sqrt{x^2-y^2}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x}\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}$ ধরি $y=vx$

বা $v+x\frac{dv}{dx}=v\pm\sqrt{1-v^2}$

বা $\frac{dx}{x}=\pm\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}=\pm\sin^{-1}v.$

$\left.\therefore \log cx=\pm\sin^{-1}\frac{y}{x}\right]$

6. $(x+c)^2+(y-b)^2=1.$

$$\left[(y-b)=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\ \therefore p=\pm\frac{\sqrt{1-(y-b)^2}}{y-b}\right.$$

$$\therefore \frac{y-b}{\sqrt{1-(y-b)^2}}dy=\pm dx.$$

$$\left.\therefore\ \sqrt{1-(y-b)^2}=\pm(x+c)\right]$$

7. $y(1\pm\cos x)=c.$

(B)

8. $x=a\log\frac{p}{p-1}+c$

$$y=c+a\log\frac{p}{p-1}-a\log p\quad =c-a\log(p-1)$$

9. $y=\sqrt{1-(c-x)^2}-(c-x)\cos^{-1}(c-x)$

$$p=\cos p\frac{dp}{dx}+p\sin p\frac{dp}{dx}-\cos p\frac{dp}{dx}$$

$\therefore dx=\sin p dp, \Rightarrow x=-\cos p+c \quad \Rightarrow \cos p=c-x$

10. $\tan p=x+c$ বা $x=\tan p-c$, $y=\tan p+\log\cos p$

$$\left[p=p\sec^2 p\frac{dp}{dx}+\tan p\frac{dp}{dx}-\frac{\sin p}{\cos p}\frac{dp}{dx}\right]$$

11. $x=a\log\left\{\frac{\sqrt{y^2-a^2}+y}{a}\right\}+c.$

$$dx=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}dp;\quad \therefore\ x=a\log\left|p+\sqrt{1+p^2}\right|+c$$

আবার $p=\frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a}$ $\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\div\theta$ p অপনয়ন করে সাধারণ সমাধান পাওয়া যাবে।]

12. $y=(x-a)c-c^2$

$\left[p=p+(x-a)\frac{dp}{dx}-2p\frac{dp}{dx},\ \frac{dp}{dx}=0 \ \Rightarrow p-c \Rightarrow\right.$ সাধারণ সমাধান

$x-a-2p=0$ থেকে বিশিষ্ট সমাধান পাওয়া যাবে; এটি $\left.(x-a)^2=4y\right]$

13. $y=3c^2-\frac{c}{x}$

$\left[\frac{dy}{dx}=p=12x^3p^2+6x^4p\frac{dp}{dx}-p-x\frac{dp}{dx}.\right.$

বা $\left(2p-12x^3p^2\right)+\left(x-6x^4p\right)\frac{dp}{dx}=0$

বা $\left(1-6x^3p\right)\left(2p+x\frac{dp}{dx}\right)=0$

$2p+x\frac{dp}{dx}=0 \ \Rightarrow \ p=\frac{c}{x^2}$, প্রদত্ত সমীকরণ থেকে $y=3x^4\left(\frac{c}{x^2}\right)^2-x\cdot\frac{c}{x^2}=3c^2-\frac{c}{x}$

$1-6x^3p=0 \ \Rightarrow \ 12x^2y+1=0$ বিশিষ্ট সমাধান]

14. $y=2\sqrt{cx}+\tan^{-1}c$, $\ y=2px+\tan^{-1}\left(xp^2\right)$

$\therefore \quad p=2p+2x\frac{dp}{dx}+\frac{1}{1+x^2p^2}\left(p^2+2px\frac{dp}{dx}\right)$

সরলীকরণ করে, $\left(p+2x\frac{dp}{dx}\right)\left(1+\frac{p}{1+x^2p^4}\right)=0$

(C)

15. $y=cx-c^2$

$\left[x=\frac{p^2+y}{p} \quad \therefore \ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{dp}{dy}+\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}\right.$

$$\frac{dp}{dy}\left(p^2 - y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = c.$$

$\therefore \quad c^2 - cx + y = 0$

16. $y = cp^2 e^p, \quad x = c(1+p)e^p$ -এর p-অপনয়নক

$$\left[x = \frac{y(1+p)}{p^2} \quad \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{1+p}{p^2} + y \cdot \frac{dp}{dy}\left(\frac{p^2 - (1+p)2p}{p^4}\right)\right.$$

বা $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{p}{2+p} \cdot \dfrac{1}{y} \Rightarrow \ln y = p + \ln p^2 + c_1$

$\left.\Rightarrow \quad y = cp^2 e^p\right]$

17. $x = c - 2\left[p + \log(p-1)\right], \quad y = c - 2\left[\frac{1}{2}p^2 + p + \log(p-1)\right]$

$$\left[\frac{dp}{dy} = \frac{1-p}{2p^2}\right]$$

18. $y^3 = 3cx + 6c^2, \quad \left[2p + y\frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow py^2 = c\right]$

19. $y^2 = 2cx + c^3 \quad \left[p + y\frac{dp}{dy} = \frac{d}{dy}(py) = 0 \Rightarrow py = c\right]$

20. $y = c\Big/\left[-\left(p^2 - 4\right)^{\frac{9}{10}} \cdot \left(p^2 + 1\right)^{\frac{3}{5}}\right]$

$$x = \frac{1}{4}cp\left(p^2 - 3\right)\Big/\left[-\left(p^2 - 4\right)^{\frac{9}{10}}\left(p^2 + 1\right)^{\frac{3}{5}}\right]$$

$$\left[\frac{dy}{y} \cdot \frac{3p\left(p^2 - 1\right)}{\left(p^2 - 4\right)\left(p^2 + 1\right)} = 0\right.$$

আবার $\dfrac{3p\left(p^2-1\right)}{\left(p^2-4\right)\left(p^2+1\right)}=\dfrac{9}{10}\left(\dfrac{1}{p+2}+\dfrac{1}{p-2}\right)+\dfrac{3}{5}\dfrac{2p}{p^2+1}\Bigg]$

21. $2y=c(c-x)^2$

22. $x=4p+4p^3,\quad y=2p^2+3p^4+c$ -এর p -অপনয়নক

23. $y=p^3+\dfrac{3}{2}p^2+3p+3\log(p-1)+c$

$x=\dfrac{3}{2}p^2+3p+3\log(p-1)+c$

$\left[\dfrac{1}{p}=1-3p^2\dfrac{dp}{dy},\quad dy=\dfrac{3p^3}{p-1}dp=\dfrac{3\left(p^3-1+1\right)}{p-1}dp\right]$

24. $y=a\log\left|\left(x+a+\sqrt{x^2+2ax}\right)\right|+c$

$\left[x^2+2ax=\dfrac{a^2}{p^2}\Rightarrow p=\dfrac{a}{\sqrt{x^2+2ax}}\quad\Rightarrow dy=\dfrac{a}{\sqrt{(x+a)^2-a}}dx\right]$

(D)

25. $cy=c^2(x-b)+a$: $y^2=4a(x-b)$

26. $y=cx+\dfrac{a}{c}$: $y^2=4ax$

27. $y=cx+ac(1-c)$: $\left(x+a\right)^2=4ay$

28. $y=cx-e^c$: $y=x(\log x-1)$

29. $y=xc-c^2$: $x^2=4y$

30. $y=cx+c^2$: $27y^2=-4x^3$

31. $y=cx+2c^2$: $x^2=-8y$

32. $y^3 = cx + \frac{2}{3}c^2$: $8y^3 + 3x^2 = 0$

33. $y = cx + \frac{a}{2c}$: $y^2 = 2ax$

34. $y^4 = cx - c^2$

35. $y = 2a - ap^2 + (1+p)ce^{-p}$

এবং $x = 2a(1-p) + ce^{-p}$ এর p -অপনয়ক

36. $y = p^2 x + p$ এবং $x = \frac{\log p - p + C}{(1-p)^2}$ এর p-অপনয়নক

37. $y = (2+p)x + p^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = (2+p) + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$

বা $\frac{dx}{dp} + \frac{1}{2}x = -p$ $\therefore$ I.F. $= e^{\int \frac{1}{2}dp} = e^{\frac{1}{2}p}$

$\therefore$ $xe^{\frac{1}{2}p} = -\int pe^{+\frac{1}{2}p}dp + c$ $\therefore$ $x = 2(2-p) + ce^{-\frac{p}{2}}$

এবং $y = (2+p)\left\{2(2-p) + ce^{-\frac{p}{2}}\right\} + p^2 \quad = 8 - p^2 + (2+p)ce^{-\frac{p}{2}}$

(D) উত্তরমালার সংক্ষিপ্ত ভাষ্য ঃ

25. $py = p^2(x-b) + a$ ....(i)

$p^2 + y\frac{dp}{dx} = 2p(x-p)\frac{dp}{dx} + p^2$ [x-সাপেক্ষে অবকলন]

বা $\frac{dp}{dx}\{y - 2p(x-b)\} = 0$

যদি $\frac{dp}{dx} = 0$ হয় $p = c$ ....(ii)

(i) এবং (ii) এর মধ্যে p অপনয়ন করে পাই $cy = c^2(x-b) + a$

এটা (i) এর সাধারণ সমাধান

আবার $y-2p(x-b)=0$ হলে $p=\frac{1}{2}\frac{y}{x-b}$........$(iii)$

(1) ও (iii) এর মধ্যে p অপয়ন করে পাই $\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x-b}\cdot y=\frac{1}{4}\frac{y^2}{(x-b)^2}\cdot(x-b)+a$

$y^2(x-b)=4a(x-b)^2$ বা $y^2=4a(x-b)$

এটি সমীকরণ (1) এর বিশিষ্ট সমাধান ; এটি একটি অধিবৃত্ত (parabola).

26. (a) $y=px+\frac{a}{p}$ ...... (1) $p = c$ (b) $x-\frac{a}{p^2}=0 \Rightarrow x=\frac{a}{p^2}$

(1) থেকে $y=\frac{a}{p}+\frac{a}{p}=\frac{2a}{p}$ $\therefore$ $y^2=\frac{4a^2}{p^2}=4a\cdot\frac{a}{p^2}=4ax$ $\therefore$ $y^2=4ax$ বিশিষ্ট সমাধান

27. $y=px+ap(1-p)$ (a) $p=c$ (b) $x+a(1-p)-ap=0$ বা $x+a=2ap.$

(1) এ বসিয়ে $y=p\{-a+2ap\}+ap(1-p)$ $=ap^2$ $=a\cdot\left(\frac{x+a}{2a}\right)^2$

$\therefore (x+a)^2=4ay$ নির্ণেয় বিশিষ্ট সমাধান

28. $p=\log(px-y)$ $\therefore$ $y=px-e^p$ ....(1)

(a) $p=c$ (b) $x-e^p=0 \Rightarrow p=\log x$

(1) এ বসিয়ে $y=x\log x=e^{\log x}=x(\log x-1)$ এটাই বিশিষ্ট সমাধান।

29. $y=xp-p^2$ .... (1)

(a) $\frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p=c$ (b) $x-2p=0 \Rightarrow x=2p$; (1) এ বসিয়ে $y=p^2$

$\therefore$ $x^2=4y$ (p অপয়ন করে)

এটি নির্ণেয় বিশিষ্ট সমাধান।

30. $y=px+p^3$ (a) $\frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p=c$ (b) $x+3p^2=0$ $x=-3p^2$

$\therefore \ y=-3p^3+p^3=-2p^3 \quad \therefore \ x^3=-27\cdot\left(p^2\right)^3=-27\left(p^3\right)^2=-27\left(\frac{y}{-2}\right)^2$

$\therefore \ 4x^3=-27y^2$ বিশিষ্ট সমাধান

31. উহা 6 এর অনুরূপ

32. $y=3px+6p^2y^2$ এটি ক্লেরাউট সমীকরণ নয়।

উভয়পক্ষকে y^2 দিয়ে গুণ করে $y^3=3y^2px+6\cdot p^2y^4$

ধরি $y^3=v,\ 3y^2\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$ বা $3y^2p=\mathrm{P}$ (ধরি)

$\therefore \ v=\mathrm{P}x+\frac{2}{3}\mathrm{P}^2$ (A) এটি ক্লোরাউট সমীকরণ।

$\therefore$ সাধারণ সমাধান $v=cx+\frac{2}{3}c^2$ বা $y^3=cx+\frac{2}{3}c^2$

(A) কে অবকলন করে $\frac{dv}{dx}=\mathrm{P}=\mathrm{P}+x\frac{d\mathrm{P}}{dx}+\frac{2}{3}2\mathrm{P}\frac{d\mathrm{P}}{dx}$

$\frac{d\mathrm{P}}{dx}=0 \ \Rightarrow$ সাধারণ সমাধান বিশিষ্ট সমাধান $x+\frac{4}{3}\frac{dv}{dx}=0.$

বা $3x^2+8v=0 \ \therefore \ 3x^2+8y^3=0$

33. $y=px+\frac{a}{2p}$

(a) $p=c$ (b) $x-\frac{a}{2p^2}=0 \ \Rightarrow \ p^2=\frac{a.}{2x},\ dy=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2x}}dx$

$\therefore$ বিশিষ্ট সমাধান $y^2=2ax$

34. $y=4xp-16y^3p^2,\ y^3y=4py^3\cdot x-16y^6p^2$

$y^4=v$ (ধরি) $4y^3p=\frac{dv}{dx}=\mathrm{P}$ (ধরি) $\therefore \ v=\mathrm{P}x-\mathrm{P}^2$ এটি ক্লোরাউট সমীকরণ

$\therefore \ \mathrm{P}=c \Rightarrow v=cx-c^2$ বা $y^4=cx-c^2$ সাধারণ সমাধান।

10.7 সারাংশ

পূর্বের এককদ্বয়ে একমাত্রীয় **একঘাত** অবকল সমীকরণ সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। এবার একমাত্রীয় কিন্তু **বহুঘাত** অবকল সমীকরণ সম্পর্কিত আলোচনা করা হবে। একমাত্রীয় বা প্রথমক্রম ও বহুঘাত বিশিষ্ট অবকল সমীকরণের সাধারণ রূপ $p^n + p_1\, p^{n-1} + p_2 p^{n-2} + \cdots\cdots + p_{n-1} p + p_n = 0$

এখানে $p = \dfrac{dy}{dx}, p_1, p_{2,} \cdots p_{n-1}$ হলো x ও y অপেক্ষক। বিভিন্ন পদ্ধতিতে এই সমীকরণটির সমাধান করা যায়।

I p - সমন্বিত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে

II y - সাপেক্ষে সমাধান করে

III x - সাপেক্ষে সমাধান করে

IV ক্লেরাউট - সমীকরণ (একটি বিশেষ আকারে)

সবগুলি পদ্ধতি যথেষ্ট সংখ্যাক উদারহণ সহযোগে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

ক্লেরাউট সমীকরণটির বিশেষ আকার

$y = px + f(p)$ যেখানে, $p = \dfrac{dy}{dx} \cdots\cdots (1)$

x - সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায় $x + f^1(p) = 0 \cdots\cdots (2)$

এই আকারের সমীকরণের সাধারণ সমাধান হলো $y = \mathrm{c}x + f(\mathrm{c})$

(1) এবং (2) থেকে p অপনয়ন করে প্রদত্ত সমীকরণের বিশিষ্ট সমাধান (singular solution) পাওয়া যাবে।

একক 11 ❑ দ্বিমাত্রীয় অবকল সমীকরণ (Second order differential Equation)

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা ঃ

বিজ্ঞানে বিভিন্ন আবিষ্কারের সঙ্গে অবকল সমীকরণের সম্পর্ক ওতপ্রোতভাবে জড়িত। পদার্থবিদ্যার বিভিন্ন আবিষ্কার প্রথমে গাণিতিক আকারে বিজ্ঞানীরা পেয়েছেন এবং পরে সেগুলির ব্যাখ্যা করা হয়েছে। S.H.M. (simple Harmonic Motion), সরল দোলকের দোলনগতি, সংযুক্ত ভর স্প্রিং এর দোলন, R-L-C-আবর্ত (Circuit) প্রভৃতি সুষম বা অ-সুষম (non-homoganous) রৈখিক দ্বিমাত্রীয় অবকল সমীকরণের সাহায্যে বর্ণিত হয়।
কাজেই দ্বিমাত্রীয় রৈখিক অবকল সমীকরণের বিশেষ গুরুত্ব আছে।

11.2 উদ্দেশ্য ঃ

এই একক পাঠ করে আপনি

- দ্বিমাত্রীয় রৈখিক ধ্রুবক সহগযুক্ত অবকল সমীকরণের সমাধানপদ্ধতি জানতে পারবেন।
- চলরাশি সহগযুক্ত অয়লার-কসিগঠনের অবকল সমীকরণের সমাধান শিখতে পারবেন।
- প্রচলভেদের পদ্ধতি অনুসরণ করতে পারবেন।

11.3 ধ্রুবকসহগযুক্ত দ্বিমাত্রীয় একঘাত (রৈখিক) অবকল সমীকরণ [Second order Differential Equation with Coust Coefficients]

প্রথমে আমরা ধ্রুবক সহগযুক্ত দ্বিমাত্রীয় একঘাত অবকল সমীকরণ সম্পর্কে আলোচনা করব। এর সাধারণ রূপটি হল

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{P}_1\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}_2 y = \mathrm{Q}$$

P_1, P_2 ধ্রুবক এবং Q ধ্রুবক অথবা x-এর অপেক্ষক।

Case I ঃ ধরাযাক্, Q = O অর্থাৎ সমীকরণটি হল

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1\frac{dy}{dx} + P_2 y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

অথবা $\frac{d}{dx} \equiv \mathrm{D}$ চিহ্নটি ব্যবহার করলে, সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$(\mathrm{D}^2 + \mathrm{P}_1\mathrm{D} + \mathrm{P}_2)\, y = 0$$

সমীকরণ (2) এর আনুমানিক সমাধান $y = e^{mx}$ ধরে অর্থাৎ $y = e^{mx}$ সমীকরণ দ্বারা (2) কে সিম্ধ করে পাই

$$\therefore (m^2 + \mathrm{P}_1 m + P_2)e^{mx} = 0$$

কিন্তু $e^{mx} \neq 0$, $\quad \therefore\ m^2 + P_1 m + P_2 = 0 \ \ldots\ldots\ldots(3)$

সমীকরণ (3) 'm' এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। একে (2) এর **সহায়ক সমীকরণ** বলে। অবশ্যই (3) এর দুটি বীজ থাকবে। এই বীজদুটির প্রকৃতি অনুসারে (2) এর সাধারণ সমাধানের প্রকৃতি নির্ণিত হবে।

(ক) ধরা যাক্, সহায়ক সমীকরণের দুটি বীজ m_1, m_2 বাস্তব এবং ভিন্ন। তখন অবকল সমীকরণ (2) এর সাধারণ সমাধান হবে $y = c_1\ e^{m_1 x} + c_2\ e^{m_2 x}$

c_1, c_2 দুটি সম্পূর্ণ পৃথক ধ্রুবক। লক্ষ্য করতে হবে দ্বিমাত্রীয় অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধানে **দুটি পৃথক ধ্রুবক অবশ্যই বর্তমান থাকবে।**

(খ) ধরা যাক, সহায়ক সমীকরণের দুটি বীজ **বাস্তব** এবং **সমান**, অর্থাৎ $m_1 = m_2$; তখন পূর্বতন পদ্ধতিটি গ্রহণযোগ্য হবে না। কারণ তাহলে সমাধানটি হবে

$$y = (c_1 + c_2)e^{bx} \quad (m_1 = m_2 = b \text{ ধরাযাক্ })$$

$$\text{বা, } y = c\ e^{bx} \ \ldots\ldots\ldots\ (4) \quad c = c_1 + c_2$$

এখানে দেখাযাচ্ছে একটিমাত্র ধ্রুবক বর্তমান, কিন্তু দ্বিমাত্রীয় অবকল সমীকরণের সমাধানে দুটি বিভিন্ন ধ্রুবক অবশ্যই বর্তমান থাকবে। অর্থাৎ সমীকরণ (4), সমীকরণ (2) এর সমাধান হতে পারে না।

এই সমীকরণটি সমাধান করার একটি পৃথক পদ্ধতি আলোচনা করা যাক্।

সহায়ক সমীকরণের বীজদুটিই b হওয়াতে মূল অবকল সমীকরণটির আকার হবে

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2b\frac{dy}{dx} + b^2 = 0$$

ধরাযাক আনুমানিক সমাধান $y = e^{bx}u(x)$

$u(x)$ একটি x-এর অপেক্ষক।

উপরোক্ত সমীকরণে y-এর এই মান বসিয়ে সরলীকরণ করলে পাই

$e^{bx}\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ কিন্তু $e^{bx} \neq 0$

$$\therefore \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

$\therefore$ সমাকলন করে পাই, $\frac{du}{dx} = c_2$

পুনরায় সমাকলন করে পাই, $\int du = c_2 \int dx + c_1$

বা, $u = c_2x + c_2$

$\therefore$ যখন সহায়ক সমীকরণের বীজদুটি **বাস্তব** ও **সমান,** ধরাযক্, $m_1 = m_2 = b$, তখন নির্ণেয় সাধারণ সমাধান হবে, $y = (c_1 + c_2x)\,e^{bx}$ .... (5)

(গ) ধরাযাক্, সহায়ক সমীকরণের বীজদুটি **জটিল রাশি** $a \pm ib$ তাহলে বর্ণিত পদ্ধতি অনুসারে উদ্দিষ্ট সাধারণ সমাধান হবে

$$y = e_1e^{(a+ib)x} + c_2e^{(a-ib)x}$$
$$= e^{ax}(c_1e^{ibx} + c_2e^{-ibx})$$
$$= e^{ax}\{c_1(\cos bx + i\sin bx) + c_2(\cos bx - i\sin bx)\}$$
$$= e^{ax}\{(c_1 + c_2)\cos bx + i(c_1 - c_2)\sin bx\}$$
$$= e^{ax}(\mathrm{A}\cos bx + \mathrm{B}\sin bx)$$

A = c_1 + c_2, $\mathrm{B} = i(c_1 - c_2)$ দুটি সম্পূর্ণ পৃথক ধ্রুবক।

[লক্ষনীয় $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$]

এখন আমরা উদাহরণের সাহায্য আলোচনা করব, যখন

সমীকরণ (I) এর ডানপক্ষ Q= O হবে, অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{P}_1\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}_2y = 0$

উদাহরণ ঃ

1. **সমাধান করুন ঃ**

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

সয়াহক সমীকরণ, $m^2 - 3m + 2 = 0$

$$\therefore\ m = 2,\ 1$$

$\therefore$ উদ্দিষ্ট সাধারণ সমাধান $y = c_1\ c^{2x} + c_2 e^x$

2. **সমাধান করুন ঃ**

$$(2D^2 - 3D + 1)y = 0$$

এখানে সহায়ক সমীকরণ $2m^2 - 3m + 1 = 0\ \Rightarrow (2m-1)(m-1) = 0$

$$\therefore m = \frac{1}{2}, 1$$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান $y = c_1 e^x + c_2 e^{\frac{x}{2}}$

3. **সমাধান করুন ঃ**

$$(D^2 - a^2)y = 0$$

সহায়ক সমীকরণ, $m^2 - a^2 = 0 \quad \therefore\ m = \pm a$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান ঃ $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$

4. **সমাধান করুন ঃ**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0$$

সহায়ক সমীকরণ, $m^2 + 6m + 25 = 0$

$$\therefore m = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 2.25}}{2} = -3 \pm 4$$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান ঃ $y = e^{-3x}(A\cos 4x + B\sin 4x))$

5. **সমাধান করুন ঃ**

$$(D^2 + 8D + 16)y = 0$$

সহায়ক সমীকরণ ঃ $m^2 + 8m + 16 = 0$

বা, $(m+4)^2 = 0$

$$\therefore m = -4, -4$$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান ঃ $y=(c_1+c_2x)e^{-4x}$

6. সমাধান করুন ঃ

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+1=0$$

সহায়ক সমীকরণ ঃ $m^2-4m+1=0$

$$\therefore\ m=\frac{+4\pm\sqrt{16-4}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান ঃ

$$y=e^{2x}\left(c_1e^{\sqrt{3x}}+c_2e^{-\sqrt{3x}}\right)$$

7. যদি $l\frac{d^2w}{dt^2}+gw=0$, যদি $w=\alpha,\ \frac{dw}{dt}=0$ হয়, যখন $t=0$ তাহলে প্রমাণ কর যে

$$w=\alpha\cos\{t\sqrt{\frac{g}{l}}\ \}$$

উঃ এখানে সহায়ক সমীকরণ

$$l.m^2+g=0 \qquad \therefore m=\pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান ঃ

$$w=e^{0.t}\left(A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$\therefore w=\mathrm{A}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+\mathrm{B}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

যখন $t = 0,\ \mathrm{w} = \alpha \quad \therefore\ \mathrm{A} = \alpha$

আবার $\frac{dw}{dt}=\sqrt{\frac{g}{l}}\left(-\mathrm{A}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t+\mathrm{B}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$

যখন $t = 0,\ \frac{dw}{dt}=0 \quad \therefore\ \mathrm{B} = 0$

A এবং B এক মান (i) বসিয়ে পাই

$$\mathrm{w}\ =\alpha\left\{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)t\right\}$$

প্রমাণিত।

প্রশ্নাবলী ঃ

সমাধান করুন ঃ $\left[\mathrm{D} \equiv \frac{d}{dx}\right]$

1. $\left(\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D}\right)y = 0$

2. $\left(\mathrm{D}^2 - 2a\,.\mathrm{D} + a^2 + b^2\right)y = 0$

3. $(\mathrm{D}+5)^2 y = 0$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$; যখন $x = 0,\ y = 2$, এবং যখন $x = \frac{\pi}{2}, y = 5$

5. $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$ যখন $t = 0, \frac{d\theta}{dt} = 0\,, \theta = a$

6. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \mu x = 0$

উত্তরমালা ঃ

1. $y = c_1 + c_2 e^{-2x}$ $\qquad [m = o, -2]$

2. $y = e^{ax}(\mathrm{A}\cos bx + B\sin bx)$ $\qquad \left[m = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2+b^2)}}{2}\right.$

$= a \pm ib$

3. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-5x}$ $\qquad [m = -5, -5]$

4. $y = 2\cos 2x + 5\sin 2x$ $\qquad [m = \pm 2i]$

5. $\theta = a\cos\omega t$ $\qquad [m = \pm\, i\omega,\ \therefore\ \theta = \mathrm{A}\cos\omega t + \mathrm{B}\sin\omega t$

$\theta = a$, যখন $t = 0 \quad \therefore \mathrm{A} = a$

$\frac{d\theta}{dt} = -\mathrm{A}\sin\omega t + \omega\,\mathrm{B}\cos\omega t = 0$ যখন $t = 0\ \therefore \mathrm{B} = 0$]

6. $x = e^{-kt}(\mathrm{A}\cos nt + \mathrm{B}\sin nt)$ যখন $n^2 = \mu - k^2$, $k^2 < \mu$

$x = e^{-kt}\left(c_1 e^{nt} + c_2 e^{-nt}\right)$ যখন $k^2 > \mu$

$x = (c_1 + c_2 x)e^{-kt}$ যখন $k^2 = \mu$

সংকেত ঃ $\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \mu x = 0$

সহায়ক সমীকরণ ঃ

$$m^2 + 2km + \mu = 0$$

$$\therefore \quad m = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4\mu}}{2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \mu}$$

যখন $k^2 < \mu$ হবে, তখন $k^2 - \mu < 0$ অর্থাৎ ঋণাত্মক

ধরা যাক $k^2 - \mu = -n^2$, তাহলে $m = -k \pm in$

$\therefore \; x = e^{-kt}(\mathrm{A}\cos nt + \mathrm{B}\sin nt)$

যখন $k^2 > \mu$, তখন $k^2 - \mu > 0$ (ধনাত্মক)

$$k^2 - \mu = n^2$$

$\therefore \; m = -k \pm n$

$\therefore \; x = c_1\, e^{(-k+n)t} c_2\, e^{(-k-n)t}$

$\quad = e^{-kt}(c_1 e^{nt} + c_2\, e^{-nt})$

যখন $k^2 = \mu$, তখন $n = 0$

$\therefore \; m = -k, -k$

$\therefore x = (c_1 + c_2 x)\, e^{-kt}$

বিশেষ সমাকল ঃ

আমরা এখন আলোচনা করব যখন $\mathrm{Q} \neq 0$ অর্থাৎ সমীকরণটি যখন

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{P}_1 \frac{dy}{dx} + \mathrm{P}_2 y = \mathrm{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ধরা যাক, $\mathrm{G}(x)$ হল $\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{P}_1 \frac{dy}{dx} + \mathrm{P}_2 y = 0$ .... (2) এর **সাধারণ** সমাধান এবং $\mathrm{F}(x)$ হল সমীকরণ (1) এর একটি বিশেষ সমাধান। অতঃপর (1) এর সাধারণ সমাধানটি হবে ঃ

$$y = \mathrm{G}(x) + \mathrm{F}(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

এই সমাধান সরাসরি সমীকরণ (1) এ বামপক্ষে বসিয়ে পাই

$$\left(\frac{d^2\mathrm{G}}{dx^2} + \mathrm{P}_1 \frac{d\,\mathrm{G}}{dx} + \mathrm{P}_2\mathrm{G}\right) + \left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2} + \mathrm{P}_1 \frac{d\,\mathrm{F}}{dx} + P_2\mathrm{F}\right)$$

এখানে প্রথমাংশ অবশ্যই শূণ্য হবে, কারণ $\mathrm{G}(x)$ সমীকরণ (2) এর সাধারণ সমাধান। অতএব দ্বিতীয়াংশ অবশ্যই Q এর সমান।

অর্থাৎ পর্য্যালোচনা করে দেখা যাচ্ছে, অবকল সমীকরণ (1) এর সমাধান পদ্ধতি দুটি পর্বে বিভক্ত। প্রথমতঃ সমীকরণ (2) এর **সাধারণ সমাধান** নির্ণয় করতে হবে, ধরাযাক্ ইহা $G(x, c_1, c_2)$; পরবর্তী পর্বে সমীকরণ (1) বিশেষ সমাধান, $F(x)$ নির্ণয় করতে হবে। কাজেই (1) এর সম্পূর্ণ সাধারণ সমাধান হলঃ

$y = G(x, c_1, c_2) + F(x)$

বিশেষ সমাধান $F(x)$-এ কোন যদৃচ্ছ ধ্রুবক থাকা সম্ভব নয়। কারণ (1) এর সাধারণ সমাধানে কেবলমাত্র দুটিই যদৃচ্ছ ধ্রুবক থাকবে, তার বেশী নয়। প্রথম রাশিটি $G(x, c_1, c_2)$ কে বলা হয় পূরক অপেক্ষক এবং দ্বিতীয় রাশি $F(x)$ কে বলা হয় **বিশেষ সমাকল**।

এখন এই বিশেষ সমাকল নির্ণয় করতে গেলে একটি প্রতিকী প্রকারকের (symbolic operator) অবতারনা করা প্রয়োজন। অবকলন সংক্রান্ত আলোচনায় $\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$ ইত্যাদি অবকলন প্রক্রিয়ার দ্যোতকগুলিকে D, D^2 প্রভৃতি প্রতিকী প্রকারক রূপে চিহ্নিত করা হয়। যেমন $\frac{1}{D}\left(=D^{-1}\right)$ = বিপরীত প্রকারক অর্থাৎ সমাকলন বোঝায়। আমাদের আলোচ্য সমীকরণটিকে

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + P_2 y = Q$$

প্রতীকী প্রকারকে লেখা যায়, যেমন $\left(D^2 + P_1 D + P_2\right)y = Q$

বা, সংক্ষেপে $f(D)y = Q$

কাজেই $\left\{\frac{1}{f(D)}Q\right\}$ ধ্রুবক বর্জিত এমন একটি অপেক্ষক যে $f(D)y = Q$ এর একটি বিশেষ সমাকল (particular integral)।

বিশেষ সমাকল নির্ধারণ পদ্ধতি ঃ

আমাদের আলোচ্য অবকল সমীকরণের ডানপক্ষ অপেক্ষক Q এর প্রকৃতি বা বৈশিষ্ট অনুসারে বিশেষ সমাকল $\left\{\frac{1}{f(D)}Q\right\}$ অপেক্ষকটি নির্ধারণ পদ্ধতি নির্ভর করে।

(*a*) **ধরা যাক্**, $Q = x^m, \ m \in Z^+$ অর্থাৎ m একটি ধানাত্মক বাস্তব সংখ্যা। এখন $\frac{1}{f(D)} = f(D)^{-1}$ কে D-এর ঊর্দ্ধক্রমিক ঘাতে বিস্তৃত করতে হবে এবং x^m এর উপর প্রক্রিয়াকরণ করতে হবে। যেমন

$$\frac{1}{D^2+1}x^3 = \left(1+D^2\right)^{-1}x^3 = \left(1-D^2+D^4-.........\right)x^3$$

$$= x^3 - D^2x^3 + D^4x^3 - ....$$

$$= x^3 - 3\cdot 2\cdot x + 0$$

$\therefore \left(x^3 - 6x\right)$ রাশিটিই $\left(D^2+1\right)y = x^3$-এর বিশেষ সমাকল।

কারণ, $\left(D^2+1\right)\left(x^3-6x\right)=6x+x^3-0-6x=x^3$

উদাহরণ ঃ $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=x$ বা $\left(D^2+D^2-6\right)y=x$ এর বিশেষ সমাকল বাহির করুন।

বিশেষ সমাকল $\frac{1}{D^2+D-6}x$

$$=-\frac{1}{6}\frac{1}{\left(1-\frac{D+D^2}{6}\right)}x=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{D+D^2}{6}\right)^{-1}x$$

$$=-\frac{1}{6}\left[1+\frac{1}{6}\left(D+D^2\right)+\ldots\ldots\ldots\right]x$$

$$=-\frac{1}{6}\left[x+\frac{1}{6}\right]=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{36}$$

প্রদত্ত সমীকরণে বামপক্ষে বসিয়ে দেখা যাক,

$\left(D^2+D-6\right)\left(-\frac{1}{6}x-\frac{1}{36}\right)=0-\frac{1}{6}+x+\frac{1}{6}=x=$ ডানপক্ষ

কাজেই এটি যে বিশেষ সমাকল, তা প্রমাণিত হল।

(b) **যখন $\mathbf{Q=e^{ax}X}$, $\mathbf{X}$ ধ্রুবক বা x-এর অপেক্ষক।** আমরা অনায়াসে পর্য্যবেক্ষণ করে দেখতে পারি যে $f(D)e^{ax}X_1=e^{ax}f(D+a)\cdot X_1$, X_1 একটি x-এর অপেক্ষক বা ধ্রুবক।

বা $f(D)e^{ax}X_1=e^{ax}X$ (ধরা যাক) ....(i)

তাহলে $f(D+a)X_1=X\Rightarrow X_1=\frac{1}{f(D+a)}X$........(2)

কাজেই, $\frac{1}{f(D)}\cdot e^{ax}X=e^{ax}X_1$, ($i$) থেকে পাই।

$=e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}X$, (2) থেকে পাই।

$\therefore$ বিশেষ সমাকল, যখন অবকল সমীকরণ $f(D)y=e^{ax}X$

$$F(x)=\frac{1}{f(D)}e^{ax}X=e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}X$$

(c) **যখন, $\mathbf{Q=e^{ax}}$, $\boldsymbol{a}$ একটি ধ্রুবক।**

আমরা জানি $f(D)e^{ax}=f(a)\cdot e^{ax}$

$\therefore$ বিশেষ সমাকল $\dfrac{1}{f(D)} \cdot e^{ax} = \dfrac{e^{ax}}{f(a)}$, $\quad f(a) \neq 0$ কারণ, $f(a) \neq 0$ হলে,

$$f(\mathrm{D})\left[\left\{\frac{e^{ax}}{f(a)}\right\}\right] = f(a) \cdot \frac{e^{ax}}{f(a)} = e^{ax}$$

অর্থাৎ অবকল সমীকরণ $f(\mathrm{D})y = e^{ax}$ এর বিশেষ সমাকল

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{f(\mathrm{D})} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{f(a)}, \quad f(a) \neq 0$$

যদি $f(a) = 0$ হয়, তাহলে $(\mathrm{D} - a), f(\mathrm{D})$ এর একটি উৎপাদক।

(i) ধরার যাক্, $f(\mathrm{D}) = (\mathrm{D} - a)\,\phi\,(\mathrm{D})$ তাহলে বিশেষ সমাকল

$$\frac{1}{f(\mathrm{D})} e^{ax} = \frac{1}{(\mathrm{D} - a)} \cdot \frac{1}{\phi(\mathrm{D})} e^{ax} \cdot (1)$$

$$= \frac{1}{(\mathrm{D} - a)} \cdot \frac{e^{ax}}{\phi(a)} \quad \phi(a) \neq 0$$

$$= \frac{e^{ax}}{\phi(a)} \cdot \frac{1}{(\mathrm{D} + a - a)} (1) \qquad [\text{ নিয়ম (b) }]$$

$$= \frac{e^{ax}}{\phi(a)} \cdot \frac{1}{\mathrm{D}} (1) = \frac{e^{ax}}{\phi(a)} \cdot \int 1\, dx$$

$$= \frac{x\, e^{ax}}{\phi(a)} \quad , \quad \phi(a) \neq 0$$

(ii) যদি $\phi(a) = 0$ হয়, এবং $f(\mathrm{D}) = (\mathrm{D} - a)^2$ হয়, তবে

$$\frac{1}{f(\mathrm{D})} e^{ax} = \frac{1}{(\mathrm{D} - a)^2} e^{ax} = e^{ax} \frac{1}{(\mathrm{D} + a - a)^2} \cdot 1$$

$$= e^{ax} \cdot \frac{1}{\mathrm{D}^2} \cdot 1$$

$$= \frac{x^2 e^{ax}}{2} \qquad [\text{ দু'বার সমাকলণ করে }]$$

(d) যখন, $\mathbf{Q} = \sin(ax + b)$ বা $\cos(ax + b)$

ধরা যাক্, $f(\mathrm{D})$ কেবলমাত্র D-এর যুগ্ম-ঘাতযুক্ত অপেক্ষক।

ধরাযাক $f(\mathrm{D})=\phi\left(\mathrm{D}^2\right)$, আমরা জানি

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{D}^2\right)\sin(ax+b)=\mathrm{F}\left(-a^2\right)\sin(ax+b) \text{ এবং } \mathrm{F}(\mathrm{D}^2)\cos(ax+b)=\mathrm{F}(-a^2)\cos(ax+b)$$

এখন $\phi\left(\mathrm{D}^2\right)\left\{\dfrac{\sin(ax+b)}{\phi\left(-a^2\right)}\right\}=\phi\left(-a^2\right)\dfrac{\sin(ax+b)}{\phi\left(-a^2\right)}=\sin(ax+b)$

$$\therefore \frac{\sin(ax+b)}{\phi\left(\mathrm{D}^2\right)}=\frac{\sin(ax+b)}{\phi\left(-a^2\right)}, \quad \phi\left(-a^2\right)\neq 0$$

$\therefore$ অবকল সমীকরণ $f(\mathrm{D})y=\sin(ax+b)$ এর বিশেষ সমাকলটি হবে।

$$\frac{1}{f(\mathrm{D})}\sin(ax+b)=\frac{1}{\phi\left(\mathrm{D}^2\right)}\sin(ax+b)=\frac{\sin(ax+b)}{\phi\left(-a^2\right)} \quad \phi\left(-a^2\right)\neq 0$$

অনুরূপে,

$$\frac{1}{f(\mathrm{D})}\cos(ax+b)=\frac{1}{\phi\left(\mathrm{D}^2\right)}\cos(ax+b)=\frac{\cos(ax+b)}{\phi\left(-a^2\right)} \quad \phi\left(-a^2\right)\neq 0$$

যদি $\phi\left(-a^2\right)=0$, তাহলে উপযুক্ত পদ্ধতিটি উদাহরণ সহযোগে পরে ব্যাখ্যা করা হবে।

যেমন ঃ (i) $\left(\mathrm{D}^2-4\right)y=\sin 2x$ অবকল সমীকরণের

বিশেষ সমাকল $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{\mathrm{D}^2-4}\cdot\sin 2x=\dfrac{1}{-2^2-4}\sin 2x=\dfrac{\sin 2x}{-8}$

(ii) বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন ঃ $\left(\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}+5\right)y=\sin x$

বিশেষ সমাকল $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}+5}\sin x=\dfrac{1}{-1^2-2\mathrm{D}+5}\sin x$

$$=\frac{1}{4-2\mathrm{D}}\sin x=\frac{2+\mathrm{D}}{2(2-\mathrm{D})(2+\mathrm{D})}\sin x$$

$$=\frac{2+D}{2\left(4-D^2\right)}\sin x=\frac{2+D}{2\left(4-\left(-1^2\right)\right)}\sin x=\frac{1}{5}\sin x+\frac{1}{10}\cos x$$

(e) **একটি বিশেষ পদ্ধতি ঃ** বিশেষ সমাকল নির্ণয়

$$F(x)=\frac{1}{f(D)}Q=\frac{1}{(D-a)}Q=e^{ax}\int e^{-ax}Q\,dx$$

উদাহরণঃ বিশেষ সমাকল বাহির করুন ঃ $\left(D^2-3D+2\right)y=\sin\left(e^{-x}\right)$

বিশেষ সমাকল $F(x)=\frac{1}{(D-2)(D-1)}\sin\left(e^{-x}\right)$

$=\left(\frac{1}{D-2}-\frac{1}{D-1}\right)\sin\left(e^{-x}\right)$

$=\frac{1}{D-2}\sin\left(e^{-x}\right)-\frac{1}{D-1}\sin\left(e^{-x}\right)\cdots\cdots(A)$

এখন $\frac{1}{D-2}\sin\left(e^{-x}\right)=e^{2x}\int e^{-2x}\sin\left(e^{-x}\right)dx$

$=e^{2x}\int e^{-x}\cdot e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)dx$ এখন $e^{-x}=z$ বসিয়ে $-e^{-x}dx=dz$

$=e^{2x}\int z\sin z(-dz)$

$=e^{2x}\left(z\cos z-\int\cos z\,d\,z\right)=e^{zx}(z\cos z-\sin z)$

$=e^{2x}\left[e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)-\sin\left(e^{-x}\right)\right]\cdots\cdots(i)$

আবার $\frac{1}{D-1}\sin\left(e^{-x}\right)=e^{x}\int e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)dx$

$=e^{x}\int-\sin z\,d\,z$

$=e^{x}\cos z=e^{x}\cos\left(e^{-x}\right)\cdots\cdots(ii)$

(A) তে (i) এবং (ii) এর মানগুলি বসিয়ে পাই বিশেষ সমাকল

$F(x)=e^{2x}\left[e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)-\sin\left(e^{-x}\right)\right]-e^{x}\cos\left(e^{-x}\right)$

$=-e^{2x}\sin\left(e^{-x}\right)$

(f) **ধরাযাক** $Q=x\,\phi(x)$

বিশেষ সমাকল $\frac{1}{f(D)}x\phi=\left\{x-\frac{1}{f(D)}f'(D)\right\}\frac{1}{f(D)}\phi$

উদাহরণ: (i) $\left(D^2-4\right)y=x\sin x$

বিশেষ সমাকল $F(x)=\frac{1}{D^2-4}x\sin x$

$=\left\{x-\frac{2D}{D^2-4}\right\}\frac{1}{D^2-4}\sin x$

$$=\left\{x-\frac{2D}{D^2-4}\right\}\frac{1}{-1^2-4}\sin x$$

$$=\frac{x\sin x}{-5}-\frac{2D}{\left(-1^2-4\right)(-5)}\sin x \qquad \left[\because D\equiv\frac{d}{dx}\right]$$

$$=\frac{x\sin x}{-5}-\frac{2\cos x}{25}$$

(ii) বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন : $\left(D^2-2D+1\right)y=x\sin x$

বিশেষ সমাকল $F(x)=\dfrac{1}{D^2-2D+1}x\sin x$

$$=\left\{x-\frac{2D-2}{D^2-2D+1}\right\}\frac{1}{D^2-2D+1}\sin x$$

$$=\left\{x-\frac{2D-2}{D^2-2D+1}\right\}\frac{1}{1^2-2D+1}\sin x$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{x-\frac{2D-2}{D^2-2D+1}\right\}\int\sin x\,dx$$

$$=+\frac{1}{2}\left\{x-\frac{2D-2}{D^2-2D+1}\right\}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\left\{x\cos x-\frac{2(D-1)}{-1^2-2D+1}\cos x\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{x\cos x+(D-1)\int\cos x\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{x\cos x+(D-1)\sin x\}$$

$$=\frac{1}{2}(x\cos x+\cos x-\sin x)$$

(g) **ধরাযাক** $Q=x^m\sin(ax+b)$ **বা** $Q=x^m\cos(ax+b)$

বিশেষ সমাকল নির্ণয় পদ্ধতি উদাহরণ দিয়ে ব্যাখ্যা করা হল

$\left(D^2+1\right)y=x^2\sin x$

বিশেষ সমাকল $F(x)=\dfrac{1}{\left(D^2+1\right)}x^2\sin x$

$$=\frac{1}{\left(D^2+1\right)}x^2e^{ix}$$ এর অবাস্তব (imaginary)অংশ

$\left[\because e^{ix}=\cos x+i\sin x\right]$

এখন $\dfrac{1}{(D^2+1)}x^2e^{ix} = e^{ix}\dfrac{1}{(D+i)^2+1}x^2$

$$= e^{ix}\frac{1}{D^2+2iD-1+1}x^2$$

$$= e^{ix}\frac{1}{2iD}\left(1-\frac{Di}{2}\right)^{-1}x^2$$

$$= e^{ix}\frac{1}{2iD}\left(1-\frac{Di}{2}+\frac{D^2i^2}{4}+\cdots\right)x^2$$

$$= e^{ix}\frac{1}{2iD}\left(x^2+x\,i-\frac{1}{2}\right)$$

$$= e^{ix}\frac{1}{2i}\int\left(x^2+x\,i-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= e^{ix}\frac{1}{2i}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2i}{2}-\frac{1}{2}x\right)$$

$$= \frac{1}{2i}(\cos x+i\sin x)\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}i-\frac{1}{2}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin x\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{4}x^2\cos x+i\left[-\frac{1}{2}\cos x\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x\right)\right]$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিশেষ সমাকল $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos x\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{2}x\right)$

বি: দ্র: যদি $x^2\sin x$ পরিবর্তে $x^2\cos x$ থাকত, তাহলে বিশেষ সমাকল হবে

$F(x) = \dfrac{1}{2}\sin x\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{2}x\right)+\dfrac{1}{4}x^2\cos x$

অর্থাৎ $\dfrac{1}{D^2+1}x^2e^{ix}$ এর বাস্তব অংশ।

আমরা এবার অবকল সমীকরণ এর সম্পূর্ণ সাধারণ সমাধান নির্ণয় পদ্ধতি উদাহরণ সহযোগে আলোচনা করব; দুটি অংশে এটি আগেই আলোচনা হয়েছে।

উদাহরণমালা ঃ

1. সমাধান করুন ঃ

$(D^2+9)y = 9e^{3x}$

পূরক অপেক্ষকটি $(D^2+9)y=0$ এর সাধারণ সমাধান।

সহায়ক সমীকরণ $m^2+9=0 \quad \therefore m=\pm 3i$

$\therefore$ পূরক অপেক্ষক : $y = A\cos 3x + B\sin 3x$

এবার বিশেষ সমাকল $=\frac{1}{D^2+9}\cdot 9e^{3x}=9\cdot\frac{1}{3^2+9}e^{3x}$

$=\frac{1}{2}e^{3x}$

$\therefore$ সম্পূর্ণ সাধারণ সমাধান

$y=A\cos 3x+B\sin 3x+\frac{1}{2}e^{3x}$

2. সমাধান করুন ঃ $\left(D^2+2D+2\right)y=x\,e^{-x}\cdots\cdots\cdots(A)$

এখানে সহায়ক সমীকরণ $m^2+2m+2=0$

$\therefore m=-1\pm i$

$\therefore$ পূরক অপেক্ষক $y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)\cdots\cdots(B)$

বিশেষ সমাকল $\frac{1}{D^2+2D+2}xe^{-x}$

$=\frac{1}{(D+1)^2+1}xe^{-x}\quad =e^{-x}\frac{1}{\{(D-1)+1\}^2+1}xe^{-x}$

$=e^{-x}\frac{1}{D^2+1}x$

$=e^{-x}\left(1+D^2\right)^{-1}x$

$=e^{-x}\left(1-D^2\right)x$

$=e^{-x}\ x$

$\therefore$ অবকল সমীকরণ (A) এর সম্পূর্ণ সাধারণ সমাধান

$y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x+x)$

3. সমাধান করুন $\left(D^2-9\right)y=e^{3x}\cos x\cdots\cdots(A)$

সহায়ক সমীকরণ $m^2-9=0\quad \therefore m=\pm 3$

$\therefore$ পূরক সমাকল $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}\cdots\cdots\cdots(B)$

বিশেষ সমাকল $=\frac{1}{D^2-9}e^{3x}\cos x$

$=e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2-9}\cos x$

$=e^{3x}\frac{1}{D^2+6D}\cos x$

$$= e^{3x}\frac{1}{-1^2+6\mathrm{D}}\cos x = e^{3x}\frac{6D+1}{(6D)^2-1^2}\cos x = e^{3x}\frac{6D+1}{36(-1)-1}\cos x$$

$$= \frac{e^{3x}}{-37}(-6\sin x + \cos x)$$

$\therefore$ সম্পূর্ণ সমাধান = পূরক অপেক্ষক + বিশেষ সমাকল।

$\therefore$ সম্পূর্ণ সমাধান: $y = c_1e^{3x} + c_2{}^{-3x} + \frac{1}{37}e^{3x}(6\sin x - \cos x)$

4. **সমাধান করুন :** $\left(D^2+1\right) = \sin x \ \sin 2x \cdots\cdots(\mathrm{A})$

পূরক অপেক্ষক : $y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x \cdots\cdots(\mathrm{B})$

বিশেষ সমাকল : $y_p = \frac{1}{\left(\mathrm{D}^2+1\right)}\sin x \sin 2x$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{D}^2+1}(\cos x - \cos 3x)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{D}^2+1}\cos x - \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{D}^2+1}\cos 3x$$

$$= \frac{1}{2} - x \cdot \frac{1}{2\mathrm{D}}\cos x - \frac{1}{2}\frac{1}{3^2+1}\cos 3x$$ [নীচে বিঃ দ্রঃ দেখুন]

$$= \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{4}x\int \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{4}x \sin x \cdots\cdots\cdots(\mathrm{C})$$

$\therefore$ অবকল সমীকরণ (A) এর সম্পূর্ণ সমাধান (B) ও 3 (C) হইতে

$y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x + \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{4}x\sin x$

বিঃ দ্রঃ $\frac{1}{f\left(\mathrm{D}^2\right)}\cos ax$ নির্ণয় করিতে যদি $f\left(-a^2\right) = 0$, হয় তবে $\frac{1}{f\left(\mathrm{D}^2\right)}\cos ax = \frac{x\cos ax}{f'(\mathrm{D})}$

যেমন $\frac{1}{\mathrm{D}^2+1}\cos x = x\frac{1}{2\mathrm{D}}\cos x = x \cdot \frac{1}{2}\int \cos x \, dx = \frac{1}{2}x\sin x$

5. সমাধান করুন : $\left(\mathrm{D}^2+3\mathrm{D}+2\right)y = e^{e^x} \cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$

পূরক অপেক্ষক : $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} \cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$

বিশেষ সমাকল : $y_p = \frac{1}{\mathrm{D}^2+3\mathrm{D}+2}e^{e^x} = \frac{1}{(\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}+2)}e^{e^x}$

$$=\left(\frac{1}{D+1}-\frac{1}{D+2}\right)e^{e^x}=\frac{1}{D+1}e^{e^x}-\frac{1}{D+2}e^{e^x}\cdots\cdots(B)$$

$$\frac{1}{D+1}e^{e^x}=e^{-x}\int e^x\cdot e^{e^x}\cdot dx$$ ধরি $e^x=t$

$$=e^{-x}\int e^t\cdot dt=e^{-x}\cdot e^t=e^{-x}\cdot e^{e^x}\cdots\cdots(i)$$ $e^x dx=d\mathrm{t}$

$$\frac{1}{D+2}e^x=e^{-2x}\int e^{2x}e^{e^{e^x}}dx$$ ধরি $e^x=t$

$$=e^{-2x}\int te^t d\mathrm{t}\quad=e^{-2x}\left[\mathrm{t}\,e^t-e^t\right]$$

$$=e^{-2x}\left[e^x e^{e^x}-e^{e^x}\right]\cdots\cdots(ii)$$

(i) এবং (ii) তে বসিয়ে পাই $y_p=e^{-x}e^{e^x}-e^{-2x}\left(e^x\cdot e^{e^x}-e^{e^x}\right)$

$$=e^{-2x}e^{e^x}\cdots\cdots(D)$$

(B) এবং (D), (A) তে বসিয়ে পাই

অবকল সমীকরণ (A) এর সম্পূর্ণ সমাধান হল,

$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+e^{-2x}\cdot e^{e^x}$

6. সমাধান করুন ঃ $\left(D^2=D-2\right)y=\sin 2x\cdots\cdots\cdots(A)$

সহায়ক সমীকরণ : $m^2-m-2=0\quad\therefore m=2,-1$

পূরক অপেক্ষক : $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}\cdots\cdots\cdots(B)$

বিশেষ সমাকল : $y_p=\dfrac{1}{D^2-D-2}\sin 2x$

$$=\frac{1}{-2^2-D-2}\sin 2x$$

$$=-\frac{D-6}{(D+6)(D-6)}\sin 2x$$

$$=-\frac{D-6}{D^2-36}\sin 2x$$

$$=-\frac{D-6}{-2^2-36}\sin 2x\quad=\frac{1}{40}(D-6)\sin 2x$$

$$=\frac{1}{40}[2\cos 2x-6\sin 2x]\quad[\because D\sin 2x=2\cos 2x]$$

$$=\frac{1}{20}(\cos 2x-3\sin 2x)\cdots(C)$$

অবকল সমীকরণ (A) এর সম্পূর্ণ সমাধান (B) ও (C) থেকে পাই

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{20}(\cos 2x-3\sin 2x)$$

7. সমাধান করুন : $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=x\sin^2 x$

পূরক অপেক্ষক: $y=\mathrm{A}\cos 2x+\mathrm{B}\sin 2x$

বিশেষ সমাকল: $\dfrac{1}{\mathrm{D}^2+4}x\sin^2 x$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}^2+4}x\,\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{D}^2+4}x-\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{D}^2+4}x\cos 2x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{I}_1,-\frac{1}{2}\mathrm{I}_2\cdots\cdots(\mathrm{D})$$

$$\mathrm{I}_1=\frac{1}{4}\left(1+\frac{\mathrm{D}^2}{4}\right)^{-1}x \qquad =\frac{1}{4}\left(1-\frac{\mathrm{D}^2}{4}+\cdots\cdots\right)x=\frac{x}{4}$$

$$\mathrm{I}_2=\frac{1}{\mathrm{D}^2+4}x\cos 2x$$

$=\dfrac{1}{\mathrm{D}^2+4}x\cdot e^{2ix}$ এর বাস্তব অংশ

এখন $\dfrac{1}{D^2+4}x\,e^{2ix}=e^{2ix}\dfrac{1}{(D+2i)^2+4}x$

$$=e^{2ix}\frac{1}{\mathrm{D}^2+4i\mathrm{D}}x \qquad =e^{2ix}\frac{1}{4i\mathrm{D}}\left(1-\frac{i\mathrm{D}}{4}\right)^{-1}x$$

$$=e^{2ix}\frac{1}{4i\mathrm{D}}\left(1+\frac{i\mathrm{D}}{4}+\cdots\right)x \qquad =\frac{1}{4i}e^{2ix}\frac{1}{\mathrm{D}}\left(x+\frac{i}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4i}(\cos 2x+i\sin 2x)\frac{1}{\mathrm{D}}\left(x+\frac{1}{4}i\right)$$

$$=\frac{1}{4i}(\cos 2x+i\sin 2x)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}ix\right)$$

$$=\frac{1}{4}(\cos 2x+i\sin 2x)\left(\frac{1}{4}x-i\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(\cos 2x+i\sin 2x)\left(x-2ix^2\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left\{\left(x\cos 2x+2x^2\sin 2x\right)+i\left(x\sin 2x-2x^2\cos 2x\right)\right\}$$

$$\therefore \mathrm{I}_2=\frac{1}{16}\left(x\cos 2x+2x^2\sin 2x\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্পূর্ণ সমাধান : $y=\mathrm{A}\cos 2x+\mathrm{B}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{16}\left(x\cos 2x+2x^2\sin x\right)$

$$\because y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{x}{8} - \frac{1}{32}x\cos 2x - \frac{1}{16}x^2 \sin 2x$$

8. সমাধান করুন ঃ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = \left(x^3 + x\right)e^{2x} \cdots\cdots(A)$

বা $\left(D^2 - 4D + 4\right)y = \left(x^3 + x\right)e^{2x}$

বা $(D-2)^2 y = \left(x^3 + x\right)e^{2x}$

পূরক অপেক্ষক: $= (c_1 + c_2 x)e^{2x} \cdots\cdots(B)$

বিশেষ সমাকল: $y_p = \dfrac{1}{(D-2)^2}\cdot\left(x^3 + x\right)e^{2x}$

$$= e^{2x}\frac{1}{(D+2-2)^2}\left(x^3 + x\right)$$

$$= e^{2x}\frac{1}{D}\int\left(x^3 + x\right)dx$$

$$= e^{2x}\frac{1}{D}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= e^{2x}\int\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= e^{2x}\left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6}\right)$$

$\therefore$ অবকল সমীকরণ (A) এর সম্পূর্ণ সমাধান:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + e^{2x}\left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6}\right)$$

$$\therefore y = e^{2x}\left(c_1 + c_2 x + \frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{6}\right)$$

9. সমাধান করুন : $\left(D^2 + 1\right)y = e^{-x} + x^3 + e^x \sin x \cdots\cdots\cdots(A)$

পূরক অপেক্ষক: $y = A\cos x + B\sin x \cdots\cdots\cdots(B)$

বিশেষ সমাকল: $y_p = \dfrac{1}{D^2+1}\left(e^{-x} + x^3 + e^x \sin x\right)$

$$= \frac{1}{D^2+1}e^{-x} + \frac{1}{D^2+1}x^3 + \frac{1}{D^2+1}e^x \sin x \cdots\cdots(c)$$

$$\frac{1}{D^2+1}e^{-x} = \frac{1}{(-1)^2+1}e^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x} \cdots\cdots(i)$$

$$\frac{1}{D^2+1}x^3 = \left(1+D^2\right)^{-1}x^3 = \left(1 - D^2 + D^4 - \cdots\cdots\right)x^3 = x^3 - 3\cdot 2x \cdots\cdots(ii)$$

$$\frac{1}{D^2+1}e^x\sin x = e^x\frac{1}{(D+1)^2+1}\sin x$$

$$= e^x\frac{1}{D^2+2D+2}\sin x$$

$$= e^x\frac{1}{-1^2+2D+2}\sin x = e^x\frac{2D-1}{(2D+1)(2D-1)}\sin x = e^x\frac{2D-1}{4D^2-1}\sin x$$

$$= e^x\frac{2D-1}{4(-1)^2-1}\sin x \quad = -\frac{1}{5}e^x(2D-1)\sin x$$

$$= -\frac{1}{5}e^x(2\cos x-\sin x)\cdots\cdots\cdots(iii)$$

(i), (ii), (iii) (c) তে বসিয়ে পাই

$$y_p = \frac{1}{2}e^{-x}+x^3-6x+\frac{1}{5}e^x(\sin x-2\cos x)$$

$\therefore$ অবকল সমীকরণ-এর সম্পূর্ণ সমাধান হল,

$$y = A\cos x+B\sin x+\frac{1}{2}e^{-x}+x^3-6x+\frac{1}{5}e^x(\sin x-2\cos x)$$

10. সমাধান করুন : $\left(D^2-4D+4\right)y = 8x^2e^{2x}\sin 2x$

সহায়ক সমীকরণ: $m^2-4m+4=0 \;\therefore\; m=2,2$

পূরক অপেক্ষক: $y=\left(c_1+c_2x\right)e^{2x}$

বিশেষ সমাকল: $y_p = \dfrac{1}{f(D)}e^{2x}8\left(x^2\sin 2x\right)$

$$= 8e^{2x}\frac{1}{(D+2-2)^2}x^2\sin 2x$$

$$= 8e^{2x}\frac{1}{D^2}x^2\sin 2x$$

$$= 8e^{2x}\frac{1}{D}\left\{\int x^2\sin 2x\,dx\right\}$$

$$= 8e^{2x}\frac{1}{D}\left[-\frac{x^2\cos 2x}{2}+\int x\cos 2x\,dx\right]$$

$$= 8e^{2x}\frac{1}{D}\left[-\frac{x^2\cos 2x}{2}+\frac{x\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx\right]$$

$$= 8e^{2x}\frac{1}{D}\left[-\frac{x^2\cos 2x}{2}+\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}\right]$$

$$= 8e^{2x}\left[\int -\frac{x^2\cos 2x}{2}dx+\frac{1}{2}\int x\sin 2x\,dx+\frac{1}{4}\int\cos 2x\,dx\right]$$

$$= 8e^{2x}\left[-\frac{x^2 \sin 2x}{4} + \frac{1}{2}\int x \sin 2x \, dx + \frac{1}{2}\int x \sin 2x + \frac{\sin 2x}{8}\right]$$

$$= 8e^{2x}\left[-\frac{x^2 \sin 2x}{4} - \frac{x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx + \frac{\sin 2x}{8}\right]$$

$$= 8e^{2x}\left[-\frac{x^2}{4}\sin 2x - \frac{x \cos 2x}{2} + \frac{3}{8}\sin 2x\right]$$

$$= e^{2x}\left[-2x^2 \sin 2x - 4x \cos 2x + 3\sin 2x\right]$$

$\therefore$ সম্পূর্ণ সমাধান:

$$y = e^{2x}\left[c_1 + c_2 x + 3\sin 2x - 4x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x\right]$$

11. সমাধান করুন : $\left(D^2 + 2D + 1\right)y = e^{-x} \log x$

পূরক অপেক্ষক: $y = \left(c_1 + c_2 x\right)e^{-x}$

বিশেষ সমাকল: $y_p = \dfrac{1}{(D+1)^2} e^{-x} \log x$

$$= \frac{1}{(D+1)}\left\{\frac{1}{D+1}\left(e^{-x} \log x\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{(D+1)}\left[e^{-x}\int e^{x} e^{-x} \log x \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{(D+1)}\left[e^{-x}(x \log x - x)\right]$$

$$= e^{-x}\int e^{x} e^{-x}(x \log x - x)dx$$

$$= e^{-x}\left\{\int x \log x \, dx - \int x \, dx\right\}$$

$$= e^{-x}\left\{\frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x}{2} dx - \int x \, dx\right\}$$

$$= e^{-x}\left\{\frac{x^2}{2}\log x - \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2}\right\}$$

$\therefore$ সম্পূর্ণ সমাধান: $y = e^{-x}\left\{c_1 + c_2 x + \dfrac{x^2}{2}\log x - \dfrac{3}{4}x^2\right\}$

প্রশ্নাবলী (উত্তর সহ) ঃ

সমাধান করুন ঃ

1. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - y = \sin^2 x$ উঃ $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \dfrac{1}{10}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=\sin 2x$ উঃ $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\dfrac{1}{4}x\cos 2x$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+3y=2e^{3x}$ উঃ $y=c_1e^x+c_2e^{3x}+xe^{3x}$

4. $(\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}+4)=e^x\cos^2 x$ উঃ $y=e^x(c_1\cos\sqrt{3}x+c_2\sin\sqrt{3x})\quad+\dfrac{1}{6}e^x-\dfrac{1}{2}e^x\cos 2x$

11.4 চল সহগবিশিষ্ঠ সরল সুষম অবকল সমীকরণ বা অরলার-কসি গঠনের অবকল সমীকরণ (Homogeneous linear Equation with Variable Co-efficients)

নিম্নলিখিত গঠনের অবকল সমীকরণকে

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+\mathrm{A}_1\,x^{n-1}\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots\mathrm{A}_ny=\mathrm{P}\ ....\ \text{(i)}$$

যেখানে $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ ...., A_n সকলেই ধ্রুবক এবং P ধ্রুবক অথবা কেবলমাত্র x-এর অপেক্ষক; বলা হয় চল সহগবিশিষ্ট সরল সুষম (homogeneous) অবকল সমীকরণ। ইহাকে অয়লার-কসি গঠনের অবকল সমীকরণও বলা হয়।

এই ধরনের সমীকরণ সমাধনের জন্য

$x=e^z$ অর্থাৎ $z=\log x\ \Rightarrow\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{x}$ .... (2) ধরা হয়।

অতএব $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}.\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dz}$

বা, $x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}=Dy$, যখন $\dfrac{d}{dz}\equiv D$ .... (3)

আবার, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{x}\left(\dfrac{dy}{dz}\right)+\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right).\dfrac{dy}{dz}$

$$=\frac{1}{x}.\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right).\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)\qquad[\because\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}]$$

বা, $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d^2y}{dz^2}-\dfrac{dy}{dz}=(\mathrm{D}^2-\mathrm{D})y=\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y$........(4)

অনুরূপে $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} = \mathrm{D(D-1)\,(D-2)}\,y$

....
....
....

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = \mathrm{D(D-1)\,(D-2)\cdots\cdots(D-\overline{n-1})}\,y \text{ ইত্যাদি}$$

এই পরিবর্তনগুলি (1) নং সমীকরণে ঘটিয়ে পাই

$$[\mathrm{D(D-1)}\cdots\cdots(\mathrm{D}-n+1)+\mathrm{A}_1\mathrm{D(D-1)}\ \cdots(\mathrm{D}-n+2)+\cdots+\mathrm{A}_n]\,y = Q \quad .... \quad (5)$$

যেখানে P- তে $x=e^z$ রূপান্তর ঘাটিয়ে (যদি সম্ভব হয়) Q পাওয়া গেছে; সেইজন্য Q কেবলমাত্র z এর অপেক্ষক অথবা ধ্রুবক।

এখানে (5) নং সমীকরণ ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট অসুষম সমীকরণ এবং একে আগের নিয়মে সমাধান করা যায়।

উদাহরণমালা ঃ

1. সমাধান করুন ঃ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6y = x$

এখানে $x=e^z$ ধরে পাই

$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{D(D-1)}\,y$ যখন $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ পরিবর্তিত হয়ে দাঁড়ায়

$$[\,\mathrm{D(D\text{-}1)}-6\,]\,y = e^z$$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ (Aux. Equation) $\mathrm{D}^2 - D - 6 = 0$ বা, $\mathrm{(D-3)\,(D+2)} = 0$

$\Rightarrow \mathrm{D} = 3,\ -2$

$\therefore$ পূরক অপেক্ষক $= c_1e^{3z} + c_2e^{-2z}$

বিশেষ সমাকল $\dfrac{1}{(\mathrm{D}-3)\,(D+2)}.e^z = \dfrac{e^z}{(1-3)(1+2)} = -\dfrac{1}{6}e^z$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান $y = c_1e^{3z} + c_2e^{-2z} - \dfrac{1}{6}e^z$

$$= c_1x^3 + c_2x^{-2} - \frac{1}{6}x$$

2. সমাধান করুন ঃ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5x\dfrac{dx}{dx} + 4y = \log x$

$x = e^z$ বসিয়ে পাই

$$[D(D-1)+5D+4]y = z$$

বা, $(D^2+4D+4)y = z$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ $D^2 + D4 + 4 = 0$

বা, $(D+2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \ D = -2, \ -2$

$\therefore$ পূরক অপেক্ষক $= (c_1 + c_2 z)e^{2z}$

বিশেষ সমাকল $\dfrac{1}{(D+2)^2} z = \dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{D}{2}\right)^{-2} . z$

$$= \frac{1}{4}(1 - D + \cdots)\, z \quad = \frac{1}{4}(z-1)$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান $y = (c_1 + c_2 z)\, e^{2z} + \dfrac{1}{4}(z-1)$

$$= (c_1 + c_2 \log x)\, .\, x^2 + \frac{1}{4}(\log x - 1)$$

(প্রশ্নাবলী উত্তর সহ) ঃ

সমাধান করুন ঃ

1. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$ উঃ $y = (c_1 + c_2 \log x)x^2 + x^2(\log x)^2$

2. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ উঃ $y = c_1 x^2 + c_2 x^{-1} + \dfrac{1}{3}x^2 \log x - \dfrac{\log x}{3x}$

3. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 3y = x^2 \log x$ উঃ $y = c_1 x^3 + c_2 x^{-1} - \dfrac{x^2}{3}\log x - \dfrac{2x^2}{9}$

11.5 প্রচল-ভেদ পদ্ধতি (Method of Variation of Parameters)

দ্বিমাত্রা বা উচ্চতর মাত্রার একঘাত অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাকল নির্ণেয় আরও কয়েকটি উল্লেখযোগ্য পদ্ধতি আছে। তার মধ্যে একটি পদ্ধতি এখানে ব্যাখা করা হচ্ছে।

প্রচল-ভেদ পদ্ধতি (variation of parameters) : দুটি অপেক্ষক $y_1(x)$ এবং $y_2(x)$ **রৈখিকভাবে পরস্পর স্বাধীন** তখনই বলা হয়, যখন $k_1y_1 + k_2y_2 = 0$

ইহা একমাত্র তখনই সম্ভব, যখন $k_1 = k_2 = 0$

$y_1(x)$ এবং $y_2(x)$ **রৈখিক ভাবে পরস্পর যুক্ত** বা **নির্ভরশীল** বলা হয়, যখন $k_1y_1 + k_2y_2 = 0$

ইহা সম্ভব, যদি k_1, k_2 দুটি একত্রে শূন্য নয়। অর্থাৎ যে কোন একটি অপেক্ষককে অন্য অপেক্ষকের সাপেক্ষে নির্ণয় করা সম্ভব, যেমন $y_1 = -\dfrac{k_2}{k_1} y_2 (k_1 \neq 0)$

বা $y_2 = -\frac{k_1}{k_2} y, \ (k_2 \neq 0)$

রৈখিকভাবে দুটি অপেক্ষক স্বাধীন বা যুক্ত হওয়ার শর্ত ঃ দুটি অপেক্ষক y_1 এবং y_2 পরস্পর রৈখিকভাবে স্বাধীন হওয়ার শর্ত: $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^1 & y_2^1 \end{vmatrix} = y_1 y_2^1 - y_1^1 y_2 \neq 0$

এবং রৈখিক ভাবে যুক্ত বা অধীন হওয়ার শর্ত $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^1 & y_2^1 \end{vmatrix} = y_1 y_2^1 - y_1^1 y_2 = 0$

যেমন $(i)\ y_1 = \cos ax, y_2 = \sin ax \quad a \neq 0$

$$W = \begin{vmatrix} \cos ax & \sin ax \\ -a\sin ax & a\cos ax \end{vmatrix} = a\left(\cos^2 ax + \sin^2 ax\right) = a \neq 0$$

$\therefore y_1 = \cos ax, y_2 = \sin ax$ পরস্পর রৈখিকভাবে স্বাধীন।

$(ii)\quad y_1 = \log x, y_2 = \log x^m$

$$W_1 = \begin{vmatrix} \log x & \log x^m \\ \frac{1}{x} & \frac{m}{x} \end{vmatrix} = \log x \cdot \frac{m}{x} - \frac{1}{x} \cdot m \log x = 0$$

$\therefore y_1 = \log x, y_2 = \log x^m$ পরস্পর রৈখিকভাবে যুক্ত বা অধীন।

বি: দ্র: $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2^1 \end{vmatrix}$ কে y_1 ও y_2 অপেক্ষকের “রনস্কিয়ান” (Wronoskion) বলে। এটি পোলান্ডের গনিতবিদ রন্স্কির নামাঙ্কিত (Wronoski)।

পূরক অপেক্ষককে প্রচলগুলি (সদৃচ্ছ ধ্রুবকগুলি) পরিবর্তন করে সেস্থানে উপযুক্ত অপেক্ষক বসিয়ে বিশেষ সমাকল পাওয়া যায়।

ধরা যাক অবকল সমীকরণটি $\frac{d^{2y} y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = Q \cdots\cdots (1)$

P_1, P_2 ধ্রবক অথবা x- এর অপেক্ষক। ধরাযাক, পূরক অপেক্ষকটি

$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \cdots\cdots (2)$

প্রচল ভেদ পদ্ধতিতে (2) - তে যদৃচ্ছ ধ্রুবক দুটি c_1, c_2 পরিবর্তন করে দুটি অপেক্ষক বসান হল

অর্থাৎ বিশেষ সমাকল হল: $y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x) \cdots\cdots (3)$

এখানে $u_1(x) = -\int \frac{Q(x) \cdot y_2(x)}{W} dx$

$$u_2(x) = \int \frac{Q(x) \cdot y_1(x)}{W} dx$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^1 & y_2^1 \end{vmatrix} = y_1 y_2^1 - y_1^1 y_2 \neq 0$$

অত:পর নির্ণেয় সম্পূর্ণ সাধারণ সমাকল হল: $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p$

এই পদ্ধতিটি নীম্নে উদারহরণ সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হল।

উদাহরণমালা ঃ প্রচলভেদের অনুসারে সমাধান করুন ঃ

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$

পূরক অপেক্ষক: $y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

$\therefore y_1, y_2$ পরস্পর স্বাধীন।

$\therefore y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$$= -\cos x \int \frac{\tan x \cdot \sin x}{1} dx + \sin x \int \frac{\tan x \cos x}{1} dx$$

$$= -\cos x \int (1 - \cos^2 x) \sec x \, dx + \sin x \int \sin x \, dx$$

$$= \sin x \cos x - \cos x \log|(\sec x + \tan x)| - \sin x \cos x$$

$$= -\cos \log|(\sec x + \tan x)|$$

$\therefore$ সম্পূর্ণ সাধারণ সমাকল:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos \log|(\sec x + \tan x)|$$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$

সহায়ক সমীকরণ: $m^2 - 6m + 9 = 0, m = 3, 3$

পূরক অপেক্ষক: $y_c=(c_1+c_2x)e^{3x} \Rightarrow y_1=e^{3x},\ y_2=xe^{3x}$

$$W=\begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & 3xe^{3x}+e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$=e^{3x}\left(3x\,e^{3x}+e^{3x}\right)-3e^{3x}\cdot x\,e^{3x}$$

$$=e^{3x}\cdot e^{3x}\neq 0$$

$$\therefore y_p=-y_1\int\frac{y_2Q}{W}dx+y_2\int\frac{y_1Q}{W}dx$$

$$=-e^{3x}\int\frac{x\cdot e^{3x}\cdot e^{3x}}{x^2\cdot e^{3x}\cdot e^{3x}}dx+xe^{3x}\int\frac{e^{3x}\cdot e^{3x}}{x^2\cdot e^{3x}\cdot e^{3x}}dx$$

$$=-e^{3x}\log x+x\cdot e^{3x}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$=-e^{3x}\left(1+\log|x|\right)$$

$\therefore$ সম্পূর্ণ সমাধান

$$y=y_c+y_p$$

$$=(c_1+c_2x)e^{3x}-e^{3x}\log x$$

$\left[c_1e^{3x}=-e^{3x}\right.$ যখন $\left.c_1=-1,\right]$ তাই প্রকৃতপক্ষে $-c^{3x}$ অংশটুকু y_p থেকে বাদ দেওয়া হল, যেহেতু এটি সাধারণ সমাকলেরই অন্তর্গত]

3. $(D^2+1)y=\cos ec\ x$

$$y_c=c_1\sin x+c_2\cos x$$

$$y_1=\sin x,\ y_2=\cos x$$

$$W=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$\therefore y_p=-\sin x\int\frac{\cos x\cdot\operatorname{cosec} x}{-1}dx \quad +\cos x\int\frac{\sin x\operatorname{cosec} x}{-1}dx$$

$$=-\sin x\log(\sin x)-x\cos x$$

$\therefore$ সম্পূর্ণ সাধারণ সমাধান:

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x+\sin x\log(\sin x)-x\cos x$$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2y=\tan ax, a\neq 0$

সহায়ক সমীকরণ: $m^2+a^2=0 \Rightarrow m=\pm ia$

পূরক অপেক্ষক: $y_c=c_1\cos ax+c_2\sin ax$

ধরি $y_1=\sin ax, \quad y_2=\cos ax$

$$W=\begin{vmatrix}\sin ax & \cos ax\\ \cos ax & -\sin ax\end{vmatrix}=-a\neq 0$$

$\therefore$ বিশেষ সমাকল:

$$y_p=-\sin ax\int\frac{\cos ax\tan ax}{-a}dx+\cos ax\int\frac{\sin ax\tan ax}{-a}dx$$

$$=-\frac{1}{a}\cdot\sin ax\cdot\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}\cos ax\int\left(1-\cos^2 ax\right)\sec ax\,dx$$

$$=-\frac{1}{a^2}\sin ax\cos ax-\frac{\cos ax}{a^2}\left[\log(\sec ax+\tan ax)-\sin ax\right]$$

$$=-\frac{1}{a^2}\cos ax\log(\sec ax+\tan ax)$$

$\therefore$ সম্পূর্ণ সমাধান: $y=y_c+y_p$

বা $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax-\dfrac{1}{a^2}\cos ax\log(\sec ax+\tan ax)$

প্রশ্নাবলী ঃ

সমাধান করুন (প্রচলভেদের পদ্ধতি অনুসরণ করে) ঃ

1. $\left(D^2-2D\right)y=e^x\sin x$

2. $\left(D^2+2D+1\right)y=e^{-x}\ln x$

3. $\left[D^2-2D+1\right]y=x^{3/2}e^x$

4. $\left[D^2-3D+2\right]y=xe^x$

উত্তরাবলী :

1. $\left[y_e=c_1+c_2e^{2x}\right], y_1=1, y_2=e^{2x} \quad W=1\cdot 2e^{2x}-e^{2x}\cdot 0=2\cdot e^{2x}$

$$y_p=-1\int\frac{e^{2x}e^x\sin x}{2e^{2x}}dx+e^{2x}\int\frac{2\cdot e^x\sin x}{2e^{2x}}dx \qquad =-\frac{1}{2}\int e^x\sin x\,dx+\frac{1}{2}e^{2x}\int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+\frac{1}{2}e^{2x}\frac{e^{-x}(-\sin x-\cos x)}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{x}\sin x$$

$$\therefore y=(c_1+c_2)e^{2x}-\frac{1}{2}e^{x}\sin x$$

2. $y=c_1e^{-x}+c_2x\,e^{-x}+\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\ln x\right)e^{-x}+xe^{-x}(x\ln x-x)$

[$\mathrm{W}=e^{-2x}$

$y_p=-u_1(x)y_1x+u_2(x)y_2(x)$

$$u_1=-\int\frac{\left(e^{-x}\ln x\right)\cdot x\cdot e^{-x}}{e^{-2x}}dx$$

$$=-\int x\ln x\,dx$$

$$=-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$=-\frac{x^2}{2}\left[\frac{1}{2}-\ln x\right]$$

$$u_2=\int\frac{e^{-x}\ln x\,e^{-x}}{e^{-2x}}dx \qquad =\int\ln x\,dx=x\ln x-x$$

$$\therefore y_p=\frac{x^2}{2}\left[\frac{1}{2}-\ln x\right]e^{-x}+x^2e^{-x}[\ln x-1]$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2}+\ln x\right)e^{-x}]$$

3. $y=(\mathrm{c}_1+\mathrm{c}_2x)e^{x}+\frac{4}{35}x^{7/2}e^{x}$

[$y_1=e^{x},y_2=xe^{x}$

$$\mathrm{W}=\begin{vmatrix}e^{x} & xe^{x}\\ e^{x} & xe^{x}+e^{x}\end{vmatrix}=\left(e^{x}\left(xe^{x}+e^{x}\right)-e^{x}\cdot xe^{x}\right)$$

$=e^{2x}$

$$\therefore y_p=-e^{x}\int\frac{xe^{x}\cdot x^2\cdot e^{x}}{e^{2x}}dx+xe^{x}\int\frac{e^{x}\cdot x^{3/2}e^{x}}{e^{2x}}dx$$

$$=-\frac{2}{7}e^{+x}x^{7/2}+\frac{2}{5}x\cdot e^{x}x^{5/2}$$

$$=\frac{4}{35}x^{7/2}e^{x}]$$

4. $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-\frac{x^2}{2}e^{x}-xe^{-x}$

[$y_1=e^{x},y_2=e^{2x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = +e^{3x} \neq 0]$$

$$y_p = -e^x \int \frac{e^{2x} \cdot xe^x}{c^{3x}} dx + e^{2x} \int \frac{e^x x\, e^x}{e^{3x}} dx$$

$$= -e^x \frac{x^2}{2} + e^{2x} \int xe^{-x} dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} e^x + e^{2x}\left[-xe^{-x} - e^x\right]$$

$$= -\frac{x^2}{2} e^x - x\, e^{-x} - e^x$$

$$= -\frac{x^2}{2}$$

11.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী ঃ

সমাধান করুন :

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 9y = 0$

3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3a\dfrac{dx}{dt} - 4a^2x = 0$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 24\dfrac{dy}{dx} + 144y = 0$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 29y = 0$ প্রদত্ত $y = 0$; $\dfrac{dy}{dx} = 15$, যখন $x = 0$

7. $\left(D^2 + 5D + 6\right)y = e^x$, $\quad D = \dfrac{d}{dx}$

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=x^2+2x+4$

9. $\left(D^2-2D+4\right)y=e^x\cos x$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=xe^x\sin x$

11. $(D^2-1)y=x\sin 3x+\cos x$

12. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=x^2e^{3x}$

13. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=2\sin^2 x$

প্রদত্ত $y=\dfrac{41}{45}$, $\dfrac{dy}{dx}=0$ যখন $x = 0$

15. $y^{11}-4y^1+3y=10e^{-2x}, \quad y'=\dfrac{dy}{dx}, \quad y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$

প্রদত্ত y (o) $=$ 1, $y^1(o)=3$

16. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+4x=3\sin 2t$

প্রদত্ত x = 0, $\dfrac{dx}{dt}=0$ যখন $t=0$

17. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}-4y=x^4$

18. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=k\log x$, k = ধ্রুবক

19. $(x+a)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4(x+a)\dfrac{dy}{dx}+6y=x$

প্রচল ভেদের পদ্ধতি অনুসরণ করে সমাধান করুন (20–23) :

20. $\left(D^2+3D+2\right)y=\dfrac{1}{1+e^x}$

21. $\left(D^2+1\right)y = x\cos 2x$

22. $\left(D^2+1\right)y = \log\cos x$

23. $\left(D^2+a^2\right)y = \sec ax$

11.7 উত্তরমালা ঃ

1. সহায়ক সমীকরণ $m^2+m-1=0$

   $= m = -2, 1$

   সাধারণ সমাধান $y = e_1\ e^{-2x} + e_2 e^x$

2. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$ $\quad [m = -3, -3]$

3. $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-4ax}$ $\quad [(m+4a)(m-a)=0]$

4. $y = (c_1 + c_2 x)e^{12x}$ $\quad [(m-12)^2 = 0]$

5. $y = (A\cos 2x + B\sin 2x)$ $\quad \begin{bmatrix} m^2+4=0 \\ m=\pm 2i \end{bmatrix}$

6. $y = e^{-2x}(A\cos 5x + B\sin 5x)$

$A = 0, \dfrac{dy}{dx} = -2e^{-2x}(A\cos 5x + 5B\cos 5x) + e^{-2x}(-5\text{A}\sin 5x + 5\text{B}\cos 5x)$

$15 = -2.(A) + 1.5B$

$\therefore B = 3$

নির্ণেয় সমাধান $y = 3e^{-2x}\sin 5x$

7. $y = c_1\ e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + \dfrac{1}{12}e^x$

8. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \dfrac{x^3}{3} + x^2 + 2x$

$m = 0,-1$; $y_p = \dfrac{1}{D^2+D}\left(x^2+2x+4\right)$

$$=\frac{1}{\text{D}}\left(1+\text{D}^2\right)^{-1}(x^2+2x+4)$$

$$=\frac{1}{D}(1-D^2-......)(x^2+2x+4)$$

$$=\frac{1}{D}\left[x^2+2x+4-2\right]$$

$$=f(x^2+2x+2)dx=\frac{x^3}{3}+x^2+2x$$

9. $y=e^x(A\cos x+B\sin 3x)+\frac{1}{2}e^x\cos x \quad m=1\pm 3i,$

$$y_p=\frac{1}{(\text{D}-1)^2}e^x\cos x=e^x\frac{1}{(D+1-1)^2-3}\cos x=e^x\frac{1}{D^2+3}\cos x=e^x\frac{1}{-1^2+3}\cos x$$

10. $y=c_1e^x+c_2xe^x-e^x(x\sin x+2\cos x)$

$m=1,1$

$$y_p=\frac{1}{(\text{D}-1)^2}e^x x\sin x=e^x\frac{1}{(\text{D}+1-1)^2}x\sin x \quad =e^x\frac{1}{D^2}x\sin x$$

$$=e^x\left[x-\frac{2D}{D^2}\right]\frac{\sin x}{D^2}=e^x[-x\sin x-2\cos x]$$

11. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{50}\left(2\cos 3x+5x\sin 3x\right)-\frac{1}{2}\cos x$

$$m=\pm 1 \quad y_p=\frac{1}{D^2-1}\cos x+\frac{1}{D^2-1}x\sin 3x$$

$$=\frac{1}{-1^2-1}\cos x+\left[x-\frac{2D}{D^2-1}\right]\frac{\sin 3x}{D^2-1}$$

12. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{2x}+e^{3x}\left(x^3-3x^2+6x\right)$

$m=3,2$

$$y_p = \frac{1}{(D-3)(D-2)} e^{3x} . x^2 = e^{3x} \frac{1}{(D+3-3)(D+3-2)} x^2$$

$$= e^{3x} \frac{1}{D}(1+D)^{-1} x^2 = e^{3x} \frac{1}{D}(1-D+D^2.-.......) x^2$$

$$\frac{e^{3x}}{D}(x^2 - 2x + \frac{1}{2}) = e^{3x} \int \ (x^2 - 2x + 2) dx$$

$$= e^{3x}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right)$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x}\left(x^3 - 3x^2 + 6x\right)$$

13. $y = \mathrm{A}\cos 3x + \mathrm{B}\sin 3x + \frac{1}{9} - \frac{1}{5}\cos 2x$

$y = \frac{41}{45}$ যখন $x = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0,\ x = 0$ বসিয়ে $\mathrm{A} = 1,\ \mathrm{B} = 0$

$\therefore\ y = \cos 3x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{9}$

14. $y = e^{3x}\left(\mathrm{A}\cos 2x + \mathrm{B}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin 4x\right) + \frac{2x}{(\log 2)^2 - 6(\log 2) + 13}$

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 13}}{2} = 3 \pm 2i$$

$$\therefore \mathrm{I}_1 = 8 \cdot e^{3x} \frac{1}{(\mathrm{D}+3)^2 - 6(\mathrm{D}+3) + 13} \sin 4x = 8e^{3x} \frac{1}{\mathrm{D}^2 + 4} \sin 4x = -\frac{2}{3} e^{3x} \sin 4x$$

$$I_2 = \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 6\mathrm{D} + 13} \cdot 2^x = \frac{1}{\mathrm{D}^2 - 6\mathrm{D} + 13} \cdot e^{x \log 2}$$

$$= \frac{1}{(\log 2)^2 - 6\log 2 + 13} \cdot e^{x \log 2} = \frac{2^x}{(\log 2)^2 - 6(\log 2) + 13}$$

$$y_p = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$$

15. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x + \frac{2}{3} e^{-2x}$

$y(0) = 1,\ y^1(0) = 3$, মান বসিয়ে পাই $1 = c_1 + c_2 + \frac{2}{3},\ \ 3 = 3c_1 + c_2 - \frac{4}{3} \Rightarrow c_1 = 2,\ c_2 = \frac{-5}{3}$

$\therefore y = 2e^{3x} - \frac{5}{3}e^{x} + \frac{2}{3}e^{-2x}$

16. $x = \frac{3}{8}\left(e^{-2t} - \cos 2t\right)$

সম্পূর্ণ সাধারণ সমাধান $x = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} - \frac{3}{8}\cos 2t$-তে

$c_1 = \frac{3}{8}$ এবং $c_2 = 0$, বসিয়ে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যায়।

17. $y = c_1 x^4 + \frac{c_2}{x} + \frac{1}{5}x^4 \log x$

[$x = e^z$ ধরে $\left(D^2 - 3D - 4\right)y = e^{4z}$

$\Rightarrow$ পূরক অপেক্ষক $= c_1 e^{4z} + c_2 e^{-z} = c_1 x^4 + c_2 x^{-1}$

বিশেষ সমাকল $= \frac{1}{D^2 - 3D - 4} \cdot e^{4z} = \frac{1}{(D-4)(D+1)} \cdot e^{4z} = e^{4z} \cdot \frac{1}{(D+4-4)(4+1)} \cdot 1$

$= \frac{1}{5} \cdot e^{4z} \cdot \frac{1}{D} \cdot 1 = \frac{1}{5}e^{4z} \cdot z = \frac{1}{5}x^4 \log x$]

18. $y = (c_1 + c_2 \log x)x + k(2 + \log x)$

[$x = e^z$ ধরে $(D-1)^2 y = kz$

$\therefore$ পূরক সমাকল $= (c_1 + c_2 z)e^z = (c_1 + c_2 \log x).x$

বিশেষ সমাকল $= \frac{1}{(D-1)^2} \cdot kz = k(1-D)^{-2} \cdot z$

$= k(1 + 2D + ...)z = k(z+2) = k(\log x + 2)$]

19. $y = c_1(x+a)^2 + c_2(x+a)^3 + \frac{x+a}{2} - \frac{a}{6}$

[$x + a = e^z$ ধরে $\left(D^2 - 5D + 6\right)y = e^z - a$

$\because z = \log(x+a) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x+a}$

$\therefore (x+a)\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = Dy$

আবার, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{1}{x+a}+\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+a}\right)$

$=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{1}{x+a}+\frac{dy}{dz}\left\{-\frac{1}{(x+a)^2}\right\}.$

$=\frac{1}{(x+a)^2}\left\{\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right\}$

$\therefore (x+a)^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}=\left(D^2-D\right)y$ ইত্যাদি]

20. $y=\mathrm{c}_1e^{-x}+\mathrm{c}_2e^{-2x}+\left(e^x+e^{-2x}\right)\log\left(1+e^x\right)$

[$y_1=e^{-x}, y_2=e^{-2x}$

$\mathrm{W}=e^{-x}\left(-2\cdot e^{-2x}\right)-\left(-e^{-x}\right)\left(e^{-2x}\right)$

$=-e^{-3x}\neq 0$

$y_p=-e^{-x}\int\frac{e^{-2x}\left(-e^{3x}\right)}{\left(1+e^x\right)}dx+e^{-2x}\int\frac{e^{-x}\left(-e^{3x}\right)}{1+e^x}dx$

$=e^{-x}\log\left(1+e^x\right)-e^{-2x}\int e^x\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$

$=e^{-x}\log\left(1+e^x\right)-e^{-2x}\int e^x\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$]

$=\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)\left\{\log\left(1+e^x\right)\right\}$

21. $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$

[$y_1=\cos x, y_2=\sin x \therefore \mathrm{W}=1\neq 0$

$y_p=-\cos x\int\frac{\sin x\cdot x\cos 2x}{1}dx+\sin x\int\frac{\cos x\cos 2x}{1}dx$

$=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{4}{9}\sin x$]

22. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\log(\cos x-1)+(\sin x)\log(\sec x+\tan x)$

[$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$, W = 1

$$\therefore y_p = -\cos x \int \frac{\sin x \log \cos x}{1} dx + \sin x \int \frac{\cos x \log \cos x}{1} dx$$

$$= -\cos x\left[-\cos x(\log \cos x - 1)\right] + \sin x\left[\sin x(\log \cos x - 1) + \log(\sec x + \tan x)\right]$$

23. $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax \log \cos ax$

[$C.F = A\cos ax + B\sin ax$

$y_1 = \cos ax,\ y_2 = \sin ax$

$W = \cos ax(a\cos ax) - (-a\sin ax)\sin ax = a \neq 0$

$$\therefore y_p = -\cos ax \int \frac{\sin ax \sec ax}{a} dx + \sin ax \int \frac{\cos ax \sec ax}{a} dx$$

$$= \cos ax \int -a\frac{\sin ax}{a^2 \cos ax} dx + \frac{\sin ax}{a}\int dx \quad = \frac{\cos ax}{a^2}\log \cos ax + \frac{x \sin ax}{a}\ ]$$

11.8 সারাংশ ঃ

এই এককে দ্বিমাত্রীয় একঘাত বিভিন্ন অবকল সমীকরণ কিভাবে সমাধান করা যায় অর্থাৎ সমাধান পদ্ধতিগুলি আলোচিত হয়েছে। সেগুলি বিভিন্ন উদাহরণ সহযোগে বোঝানো হয়েছে। প্রতি অণুচ্ছেদের শেষে প্রশ্নাবলী এবং সবশেষে **'সর্বশেষ প্রশ্নাবলী'র** সংযোজনে ও সংকেত সমূহ এই এককের উৎকর্ষ বর্ধন করেছে।

(ক) ধ্রুবক সহগযুক্ত দ্বিমাত্রীয় একঘাত রৈখিক অবকল সমীকরণের সমাধানের পদ্ধতি জানতে 11·3 অণুচ্ছেদ দেখুন।

(খ) চলরাশি সহগযুক্ত অয়লার-কসি গঠনের অবকল সমীকরণের গঠন ও তার সমাধানের জন্য 11·4 অণুচ্ছেদ দেখুন।

(গ) প্রচলভেদের পদ্ধতি 11·5 অণুচ্ছেদে আলোচিত হয়েছে।

একক 12 ❑ অবকল সমীকরণের প্রয়োগে লম্বপ্রক্ষেপ পথ নির্ণয় (Determination of Orthogonal Trajectories)

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা ঃ

ইতিমধ্যেই অবকল সমীকরণ সম্পর্কে বিভিন্ন বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। বর্তমান এককে অবকল সমীকরণ প্রয়োগ সম্পর্কে আলোচনা করা হবে। বিজ্ঞানের বিভিন্ন বিভাগে অবকল সমীকরণের অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ আছে। বর্তমান এককে আমরা কেবল লম্ব প্রক্ষেপ পথ নির্ণয়ে অবকল সমীকরণ কি ভাবে ব্যবহৃত হয়, সেটাই আলোচনা করব। এই প্রসঙ্গে কিছু অতি পরিচিত উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে।

আমাদের এই পৃথিবীর অক্ষরেখাগুলি ও দ্রাঘিমা রেখা গুলির পরস্পর লম্বপ্রক্ষেপ পথ। তাপপ্রবাহের রেখাসমূহ ও সমতাপমাত্রাযুক্ত রেখা গোষ্ঠী ইত্যাদি।

12.2 উদ্দেশ্য ঃ

এই এককে আপনি—

- বক্ররেখাগোষ্ঠী ও প্রক্ষেপ পথের ধারণা পাবেন।
- কার্তেসীয় ও মেরুস্থানাঙ্কের বক্ররেখাগোষ্ঠীর লম্বপ্রক্ষেপপথ নির্ণয় পদ্ধতি সম্পর্কে অবহিত হবেন।

12.3 বক্ররেখাগোষ্ঠীও প্রক্ষেপ পথ (Family of Curves and Trajectories) :

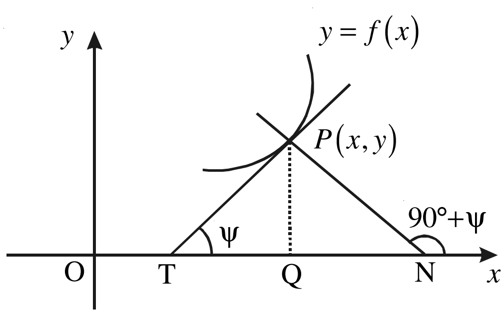
স্পর্শক, অভিলম্ব (Tangent, Normal) :

অবকল সহগের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা অনুযায়ী আমরা জানি কোন সমতলিক বক্র $y = f(x)$-এর উপর $P(x, y)$ বিন্দুতে চিত্র-12·1 অনুযায়ী অঙ্কিত স্পর্শক PT যদি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত ψ কোণ উৎপন্ন করে তবে উক্ত স্পর্শকের প্রবণতা (gradient) $= m = \tan\psi = \dfrac{dy}{dx}$,

অভিলম্ব (normal) PN এর প্রবণতা $= m_1 = \tan(90^\circ + \psi) = -\cot\psi = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{dx}{dy}$,

উপস্পর্শক (sub-tangent) $TQ = PQ\cot\psi = y\dfrac{dx}{dy}$

এবং উপ-অভিলম্ব (sub-normal) $QN = PQ\tan\psi = y\dfrac{dy}{dx}$.



চিত্র-12.1

আবার যদি দুটি সমতলিক বক্র $y = g(x)$, $y = \phi(x)$ [চিত্র-12·2] পরস্পরকে $P(x, y)$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং উক্ত ছেদবিন্দুতে বক্রদ্বয়ের উপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় x-অক্ষের ধণাত্মক দিকের সহিত যথাক্রমে ψ_1 ও ψ_2 কোণ উৎপন্ন করে, তবে বক্রদ্বয় পরস্পরকে $\theta = \psi_1 \sim \psi_2$ কোণে ছেদ করে।

তখন $\tan\theta = \tan(\psi_1 \sim \psi_2) = \dfrac{\tan\psi_1 \sim \tan\psi_2}{1 + \tan\psi_1 \tan\psi_2}$

এইভাবে স্পর্শকদ্বয়ের প্রবণতার দ্বারা দুটি বক্র পরস্পরকে কত কোণে ছেদ করছে তা নির্ণয় করা যায়।

বক্রের পরিবার বা গোষ্ঠী (Family of Curves) :

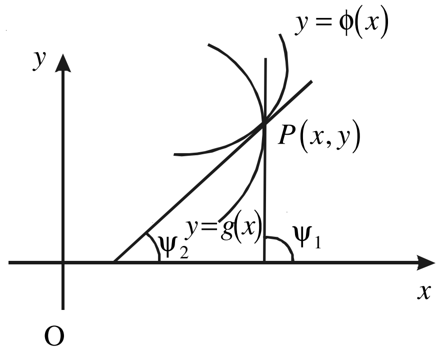
ধরা যাক্ কোন সরলরেখা x-অক্ষের সহিত সমান্তরাল সরলরেখা সমূহের প্রত্যেকের সঙ্গে γ ধ্রুবক কোণে নত আছে। তাহলে উহা x-অক্ষের সঙ্গেও γ কোণে নত থাকবে।

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \tan\gamma$ বা $\tan(\pi - \gamma) =$ ধ্রুবক $= m'$

(যে কোন একটি মান ধরে)

$\therefore$ সমাকল করে পাওয়া যায়

$y = m'x + c$ ....(A)



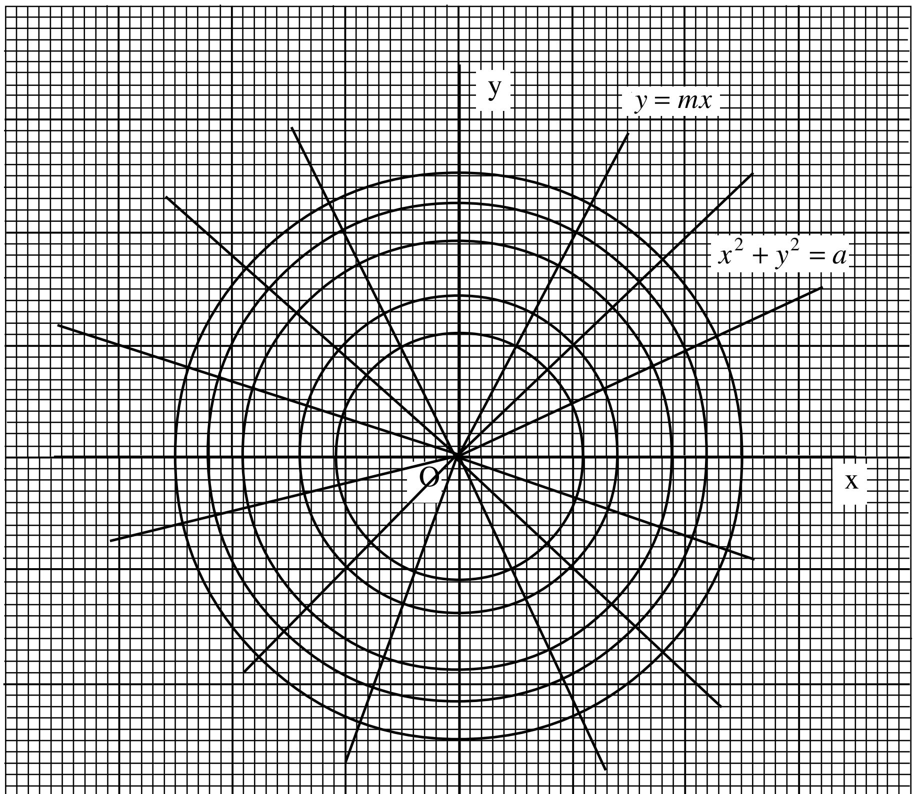
চিত্র-12.2

এখানে c-এর একটি বিশেষ মানের জন্য উহা অর্থাৎ (A) পূর্ববর্ণিত গুণসম্পন্ন একটি সরলরেখা। কিন্তু c-এর বিভিন্ন মানের জন্য সমীকরণ (A) একই গুণসম্পন্ন একগুচ্ছ সরলরেখাকে বোঝায়। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে c-কে প্রচলন (Parameter) এবং সরলরেখা গুচ্ছকে একটি পরিবার বা গোষ্ঠী (family) বলা হয়।

অন্য একটি ক্ষেত্রে, যেখানে একটি বক্রগোষ্ঠীর প্রত্যেকটির উপর কোন বিন্দুতে উপস্পর্শক ঐ বিন্দুর ভুজের দ্বিগুন তাকে গাণিতিক নিয়মে লিখলে পাওয়া যায় ঃ

$$y\frac{dx}{dy} = 2x \quad \text{বা,} \quad \frac{dx}{x} = 2\frac{dy}{y}.$$

সমাকল করে পাওয়া যায়



y=mx এবং $x^2 + y^2 = a^2$ পরস্পর লম্বপ্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠী

চিত্র 9.1

$y^2 = cx,$

যা একটি অধিবৃত্তের পরিবার (এখানে c একটি প্রচল)।

উপরের দুটি উদাহরণের মাধ্যমে প্রাপ্ত বক্র-গোষ্ঠী দুটি উভয়েই একটি প্রচল যুক্ত। কোন বক্রগুচ্ছের সমীকরণে একাধিক প্রচলও যুক্ত থাকতে পারে, যেমন

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

এই উপবৃত্তের সমীকরণে a ও b কে প্রচল হিসাবে বিবেচনা করলে উক্ত সমীকরণ একগুচ্ছ এককেন্দ্রিক উপবৃত্তকে বুঝায়। $f(x, y, \alpha) = 0$, α প্রচল, ইহা একটি এক প্রচলযুক্ত বক্ররেখাগোষ্ঠীর সমীকরণের সাধারণ প্রকাশ।

প্রক্ষেপ পথ (Trajectory) ঃ

একটি বক্রগোষ্ঠীর **প্রক্ষেপ পথ** বলতে আমরা একটি রেখা (line) কে বুঝা যে রেখাটি কোন নির্দিষ্ট নিয়ম মেনে উক্ত গোষ্ঠীর প্রত্যেক সদস্যকে ছেদ করে।

আগের আলোচনায় সরলরেখা (A)-কে (c-এর একটি ধ্রুবক মানের জন্য) x-অক্ষের সহিত সমান্তরাল সরলরেখা গোষ্ঠী $y = \alpha$, (α প্রচল).............(B)

এর প্রক্ষেপ পথ বলা হবে।

আবার যখন c এবং α উভয়েই প্রচল তখন দুই গোষ্ঠী (A) ও (B) উভয়েই থাকে অপরের প্রক্ষেপপথগোষ্ঠী (trajectories)।

সাধারণভাবে, $g(x, y, c) = 0$ ও $\phi(x, y, \alpha) = 0$ বক্রগুচ্ছদ্বয়ের প্রচলদ্বয় যথাক্রমে c ও α হলে এবং C-পরিবার ভুক্ত বক্রগুচ্ছের প্রত্যেকটি α-পরিবারভুক্ত সকল বক্রকে কোন নির্দিষ্ট নিয়মে ছেদ করলে যেকোন একটি গোষ্ঠীর যেকোন একটি বক্রকে অন্য গোষ্ঠীর প্রক্ষেপপথ বলে এবং একটি গোষ্ঠীকে অন্যগোষ্ঠীর প্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠী বলে।

এক্ষেত্রে সবথেকে গুরুত্বপূর্ণ হল যে নিয়মে রেখাটি একটি বক্রগোষ্ঠীর সকল সদস্যকে ছেদ করে তা হলো নির্দিষ্ট কোণে ছেদ করা। যখন কোণটি সমকোণ হয় রেখাটিকে বা প্রক্ষেপপথটিকে বলা হয় লম্বপ্রক্ষেপ পথ (Orthogonal trajectory)।

সংজ্ঞা ঃ যদি কোন বক্ররেখাগুচ্ছের (family of curues) যে কোন একটি রেখা অন্য একটি বক্ররেখাগুচ্ছের প্রত্যেকটি রেখাকে সমকোণে ছেদ করে, তাহলে ঐ দুটি রেখাগুচ্ছকে একে অপরের **লম্ব প্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠী (Orthogonal trajectories)** বলা হয়।

12.4 লম্বপ্রক্ষেপ নির্ণয় পদ্ধতি (কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক) ঃ

সমকোণী স্থানাঙ্ক বা কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট লম্ব প্রক্ষে পথ নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

ধরা যাক $\mathrm{F}(x, y, c) = 0$ এক প্রচল (c) বিশিষ্ট একটি বক্ররেখাগুচ্ছ, অর্থাৎ c-এর বিভিন্নমানের জন্য ঐ বক্ররেখা সমষ্টির অন্তর্ভূক্ত বিভিন্ন রেখা পাওয়া যাবে।

$F(x, y, c) = 0$..................(1)

ধরা যাক (1) এর অনুষঙ্গী অবকল সমীকরণ

$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$.................(2)

এই অবকল সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি পূর্বেই আলোচনা করা হয়েছে; (1) কে x -এর সাপেক্ষে অবকলন করে প্রাপ্ত সমীকরণ এবং (1) থেকে c -প্রচলকে অপনয়ণ করে অবকল-সমীকরণ (2) পাওয়া যাবে।

যে কোন দুটি বক্ররেখা l ও l' এর ছেদবিন্দুতে রেখাদুটির মধ্যে অন্তর্ভূত কোণ-যদি "ϕ" হয়, তাহলে $\tan\phi = \tan(\theta - \theta^1)$, যখন θ, θ^1 যথাক্রমে l, l^1 এর উপর ঐ ছেদবিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে অন্তর্ভূক্ত কোণ। ঐ বক্ররেখা দুটি যদি পরস্পর ‘‘লম্ব-প্রক্ষেপ পথে’’র অন্তর্গত হয়, তাহলে সংজ্ঞানুসারে

$\phi = \frac{\pi}{2}$, বা $mm^1 = -1$ অর্থাৎ $\tan\theta \tan\theta^1 = -1$ বা $\tan\theta = -\cot\theta^1$

আমরা জানি $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$

কাজেই আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, অনুষঙ্গী-লম্ব প্রক্ষেপপথ সমষ্টির অবকল সমীকরণ

সমীকরণ (2) এ $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx}} = -\frac{dx}{dy_1}$ বসিয়ে পাওয়া যায়।

$\therefore$ অনুষঙ্গী লম্ব প্রক্ষেপপথ সমষ্টির অবকল সমীকরণ

$\Psi\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0$...............(3)

(3) এর সমাধান $G(x, y, k) = 0$-ই হবে উদ্দিষ্ট ‘‘লম্বপ্রক্ষেপ পথ’’।

উদাহরণ ঃ

1. লম্বপ্রক্ষেপ পথ নির্ণয় করুন $y = mx$.........(1) এখানে প্রচলটি "m" এটি মূল বিন্দুগামী সরলরেখার সমষ্টি। 'm' এর ভিন্ন-ভিন্ন মানের জন্য উপরোক্ত সরলরেখা গোষ্ঠীর অন্তর্ভূক্ত বিভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যাবে।

(1) কে x -সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $\frac{dy}{dx} = m$...............(2)

এবার (2) এবং (1) এর মধ্যে m অপনয়ণ করে পাই $\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$.............(3)

এটি প্রদত্ত সরলরেখা গোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ।

$\therefore$ লম্বপ্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ

$\frac{y}{x} = -\frac{dx}{dy}$ বা $xdx + ydy = 0$

সমাধান করে পাই $x^2 + y^2 = a^2$

এটি লম্বপ্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠীর নির্ণেয় সমীকরণ; এটি মূলবিন্দু কেন্দ্রিক বৃত্তের গোষ্ঠী। এখানে $'a'$ প্রচল; অর্থাৎ $'a'$ এর বিভিন্ন মানের জন্য ভিন্ন ভিন্ন বৃত্ত পাওয়া যাবে যাদের প্রত্যেকের কেন্দ্র হল মূলবিন্দু এবং এই গোষ্ঠীর অন্তর্গত যেকোন কেটি বৃত্ত (1) সরলরেখা গোষ্ঠীর যে কোন সরলরেখা পরস্পর সমকোণ।

2. নিম্নলিখিত বক্ররেখাটির লম্বপ্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠী নির্ণয় করুন ঃ

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

x -এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\cdot y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$ লম্বপ্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ

$$x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{dx}{dy}\right) = 0$$

$$x^{\frac{1}{3}}dx - y^{\frac{1}{3}}dy = 0$$

সমাকলন করে পাই,

$$x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} = k^{\frac{4}{3}}$$

এটিই নির্ণেয় লম্বপ্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠী।

3. প্রমাণ করুন যে বক্ররেখা গোষ্ঠীদ্বয় $x^2 + 4y^2 = a$ এবং $y = bx^4$ পরস্পর সর্বদাই সমকোণে ছেদ করে।

উঃ $y_1 : x^2 + 4y^2 = a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$y_2 : y = bx^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

প্রথম বক্ররেখাগোষ্ঠীর যে কোন রেখার যেকোন বিন্দু (x, y) তে অঙ্কিত সর্ম্পকের নতি ঃ

$$2x + 8y\,y_1' = 0 \quad \therefore\ y_1' = -\frac{x}{4y}$$

অনুরুপে দ্বিতীয় বক্ররেখাগোষ্ঠীর যে কোন রেখার যেকোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি ঃ

$$y_2' = 4bx^3 = 4\cdot\frac{y}{x^4}\cdot x^3 \quad [\ b \ \text{ অপনয়ণ করে }]$$

$$\therefore\ y_2' = \frac{4y}{x}$$

$\therefore y_1' y_2' = \frac{-x}{4y} \times \frac{4y}{x} = -1$

নির্ণেয় সমাধান প্রতিষ্ঠিত হল।

4. লম্বপ্রক্ষেপ পথ নির্ণয় করুন ঃ

$$y^2 = cx$$

x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$$2y\frac{dy}{dx} = c = \frac{y^2}{x} \quad [\ c \quad \text{অপনয়ণ করে}\ ]$$

$\therefore$ লম্বপ্রক্ষেপ পথের অবকল সমীকরণ

$$-2y\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{x} \quad \text{বা} \quad y\,dy + 2x\,dx = 0$$

সমাকলন করে পাই $y^2 + 2x^2 = a$

5. লম্বপ্রক্ষেপ পথ নির্ণয় করুন ঃ

$xy = c$...........(1)

উঃ অবকল সমীকরণ

$y + x\frac{dy}{dx} = 0$ বা $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

$\therefore$ লম্বপ্রক্ষেপ পথের অবকল সমীকরণ

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

সমাকলন করে পাই $y^2 - x^2 = c$ এটাই নির্ণেয় লম্বপ্রক্ষেপ পথ।

6. $e^x + e^{-y} = c$

উঃ অবকল করে পাই $e^x - e^{-y}\,\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore$ লম্বপ্রক্ষেপ পথের অবকল সমীকরণ $e^x + e^{-y}\frac{dx}{dy} = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্বপ্রক্ষেপ পথ

$$\int e^y dy + \int e^{-x} dx = \text{।C} \quad \text{বা} \quad e^y - e^{-x} = \text{।C}$$

7. $x^2 + cy^2 = 1, \quad (2,1)$ বিন্দুগামী।

উঃ অনুষঙ্গী অবকল সমীকরণ

$2x + 2cyy^1 = 0$

c কে অপনয়ণ করে পাই

$$x + yy^1 \cdot \frac{1-x^2}{y^2} = 0$$

বা $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2-1}$

অর্থাৎ লম্বপ্রক্ষেপ পথের অবকল সমীকরণ

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{xy}{x^2-1} \quad \text{বা} \quad ydy = \frac{1-x^2}{x}dx$$

সমাকলন করে $\int ydy = \int \frac{1}{x}dx - \int xdx + \mathrm{K}'$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \log\frac{x}{k}$$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্বপ্রক্ষেপ পথ $x^2 = k\, e^{\left(x^2+y^2\right)}$

(2,1) বিন্দুগামী $\therefore \quad 2^2 = k \cdot e^{2^2+1^2} \;\; \therefore\; k = 4e^{-5}$

$\therefore$ নির্ণেয় পথ $x^2 = 4e^{-5}e^{\left(x^2+y^2\right)}$

8. $y^3 = c_1 x$ (A) এবং $x^2 + ey^2 = c_2$ (B) পরস্পর লম্বপ্রক্ষেপ পথগোষ্ঠী হইলে, e এর মান নির্ণয় করুন, c_1, c_2 সদৃচ্ছ ধ্রুবক।

উঃ- $y^3 = c_1 x \;\; \therefore 3y^2\dfrac{dy}{dx} = c_1 = \dfrac{y^3}{x}$

$$\therefore m_1 \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{y}{x} \text{.............(A)} \qquad [\ c \text{ অপনয়ণ করে }]$$

$$x^2 + eh^2 = c_2 \;\; \therefore\; 2x + 2ey\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore m_2 \equiv \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{ey} \text{.............(B)}$$

নির্ণেয় শর্ত $\quad m_1 \times m_2 = -1$

$$\therefore \frac{1}{3}\frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{ey}\right) = -1$$

$\therefore e = \frac{1}{3}$ উদ্দিষ্ট মান।

প্রশ্নাবলী

1. $x^2 + y^2 = 2gx$ (g প্রচল) বৃত্তগোষ্ঠীর লম্বপ্রক্ষেপ পথগোষ্ঠী নির্ণয় করুন

2. দেখান যে a প্রচল হলে $y = ax^2$ অধিবৃত্ত গোষ্ঠীর লম্বপ্রক্ষেপ পথগোষ্ঠী $x^2 + 2y^2 = c^2$

3. $x^2 + y^2 = c^2$ এই সমকেন্দ্রিক বৃত্তগোষ্ঠীর সঙ্গে 45° কোণে ছেদকারী প্রক্ষেপ পথগোষ্ঠী নির্ণয় করুন

উত্তরমালা

1. $x^2 + y^2 = cy$

[অবকল করে $x + y\frac{dy}{dx} = g$ $\therefore$ বৃত্তগোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ $2x\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = x^2 + y^2$ লম্বপ্রক্ষেপ পথগোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ $2x\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = x^2 + y^2$ বা $\left(x^2 - y^2\right)\frac{dy}{dx} = 2xy$ । একে $y = vx$ বসিয়ে সমাধান করুন।]

3. $x^2 + y^2 = ce^{-2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$

[এখানে $x^2 + y^2 = c^2$ এর অবকল সমীকরণ $x + y\frac{dy}{dx} = 0.$ যেহেতু বক্রদ্বয়ের মধ্যে কোণ 45°, ছেদবিন্দুতে x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত প্রদত্ত স্পর্শক ψ এবং লম্বপ্রক্ষেপ পথের স্পর্শক ψ' হলে $\psi' = \psi - 45^\circ$

$$\therefore \text{ লম্ব প্রক্ষেপপথের প্রবণতা } \tan\psi' = \frac{\tan\psi - \tan 45^\circ}{1 + \tan\psi\tan 45^\circ} = \frac{\frac{dy}{dx} - 1}{1 + \frac{dy}{dx}}.$$

$$\therefore \text{ লম্বপ্রক্ষেপপথের অবকল সমীকরণ } x + y\left(\frac{\frac{dy}{dx} - 1}{1 + \frac{dy}{dx}}\right) = 0$$

সরল করে $\frac{dy}{dx} = \frac{y - k}{x + y}$, $y = vx$ বসিয়ে

$\frac{dx}{x} + \frac{v+1}{v^2+1}dv = 0$ বা $\frac{dx}{x} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2v}{v^2+1} + \frac{1}{v^2+1}\right)dv = 0$

এখন সমাকল করে অগ্রসর হোন]

12.5 লম্বপ্রক্ষেপ পথ নির্ণয় পদ্ধতি (মেরু স্থানাঙ্ক) ঃ

মেরু-স্থানাঙ্ক বিশিষ্ঠ লম্বপ্রক্ষেপ পথ নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

ধরা যাক প্রদত্ত বক্ররেখা গোষ্ঠী

$f(r, \theta, a) = a \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ a প্রচল

এর অনুসঙ্গী অবকল সমীকরণ ধরা যাক

$$\phi\left(r, \theta, \frac{dr}{d\theta}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

অবশ্যই প্রচল a কে অপনয়ণ করা হয়েছে। লম্বপ্রক্ষেপ পথের অবকল সমীকরণ পাওয়া যাবে (2) তে $\frac{dr}{d\theta}$ এর পরিবর্তে $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ লিখতে হবে।

অর্থাৎ $\phi\left(r, \theta, -r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

(3) এর সাধারণ সমাধানই নির্ণেয় লম্বপ্রক্ষেপ পথ।

উদাহরণ ঃ

1. মূলবিন্দুগামী বৃত্তগোষ্ঠী $r = a\cos\theta$ এর লম্বপ্রক্ষেপ পথ নির্ণয় করুন।

উঃ $r = a\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$\therefore \quad \log r = \log a + \log\cos\theta$

অবকলন করে,

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta} = -\tan\theta$$

এবার $\frac{dr}{d\theta}$ এর পরিবর্তে $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ লিখিয়া পাই

$-r\frac{d\theta}{dr} = -\tan\theta$ বা $\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\tan\theta}$

$\therefore \log\frac{r}{c} = \log\sin\theta \quad \therefore r = c\sin\theta$

এটি নির্ণেয় লম্বপ্রক্ষেপ পথ, এটি ও একটি বৃত্তগোষ্ঠী।

2. একটি কার্ডিঅয়েড (Cardiod) গোষ্ঠীর লম্বপ্রক্ষেপ পথ নির্ধারণ করুন।

ধরা যাক কার্ডিঅয়েড গোষ্ঠী $r = a(1-\cos\theta)$, a প্রচল

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta$$

a অপনয়ণ করে $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r\cdot\sin\theta}{1-\cos\theta} = r\cot\frac{\theta}{2}$

এবার $\frac{dr}{d\theta}$ এর পরিবর্তে $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ লিখে পাই

$$-r^2\frac{d\theta}{dr} = r\frac{\cot\theta}{2}$$

বা $-\frac{\tan}{2}d\theta = \frac{dr}{r}, \quad r \neq 0$

সমাকলণ করে

$$\log\frac{r}{c} = 2\log\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

বা $\quad r = c\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}c(1+\cos\theta)$

$\therefore\ r = b(1+\cos\theta)$

নির্ণেয় লম্বপ্রক্ষেপ পথ। এটিও একটি কার্ডিঅয়েড গোষ্ঠী।

3. $r^n = a^n \cos n\theta$ বক্ররেখা গোষ্ঠী লম্বপ্রক্ষেপ পথ নির্ণয় করুন। (a প্রচল)

উঃ $\quad r^n = a^n\cos n\theta \qquad \therefore n\log r = n\log a + \log\cos a\theta$

অবকলন করে, $\frac{n}{r}\frac{dr}{d\theta} = -n\tan n\theta$

$\therefore$ লম্বপ্রক্ষেপ পথের অবকল সমীকরণ

$$\frac{1}{r}\left(-r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = -\tan n\theta$$

$$\therefore \frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\tan n\theta}$$

সমাকলন করে পাই

$$\frac{\log r}{c} = \frac{1}{n}\log\sin n\theta$$

$\therefore\ r^n = c^n\sin n\theta$ এটি নির্ণেয় লম্বপ্রক্ষেপ পথ।

প্রশ্নাবলী

নিম্নলিখিত বক্ররেখা গোষ্ঠীগুলির লম্বপ্রক্ষেপপথ নির্ণয় করুন।

1. $\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta,\ a$ প্রচল

2. $r = a\sin^2\theta,\ a$ প্রচল

3. $r = 4a\sec\theta\tan\theta,\ a$ প্রচল

উত্তরমালা

1. $r = 2c(1-\cos\theta)^{-1}$. [প্রদত্ত বক্রগুচ্ছের অবকল সমীকরণ $r\frac{d\theta}{dr} = \cot\frac{\theta}{2}$

$\therefore$ লম্বপ্রক্ষেপ পথগোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ $r\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \cot\frac{\theta}{2}$

বা $\frac{dr}{r} = -\cot\frac{\theta}{2}d\theta$ ইত্যাদি]

2. $r^2 = c\cos\theta$ [প্রদত্ত বক্রগুচ্ছের অবকল সমীকরণ $r\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{2}\tan\theta$

$\therefore$ লম্ব প্রক্ষেপ পথগোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ $r\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{1}{2}\tan\theta$ বা $-2\frac{dr}{r} = \tan\theta\, d\theta$

যা সমাকল করে $-2\log r = -\log\cos\theta - \log c$ বা $r^2 = \cos\theta$]

3. $r^2\left(1+\sin^2\theta\right) = c^2$ [প্রদত্ত সমীকরণকে অবকল করে ও a অপনয়ন করে পাই $r\frac{d\theta}{dr} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}$

$\therefore$ লম্ব প্রক্ষেপপথগোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ $r\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}$.

বা $-\frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\right)d\theta$

সমাকল করে $-\log r = \frac{1}{2}\log\left(1+\sin^2\theta\right) - \log c$ ইত্যাদি]

12.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী ঃ

(A)

নিম্নলিখিত এক-প্রচল যুক্ত বক্ররেখা গোষ্ঠীগুলির লম্বপ্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠী নির্ণয় করুন।

1. $xy = c$

2. $e^x + e^{-y} = c$

3. $ay^2 = x^3$

4. $x^2 - y^2 = cx$

5. $(a + x)y^2 = x^2(3a - x)$

6. দেখান যে সমাক্ষ (co-axial) বৃত্তগোষ্ঠীর $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ এর লম্বপ্রক্ষেপ পথ অপর একটি সমাক্ষ বৃত্তগোষ্ঠী $x^2 + y^2 + 2\mu y - c = 0$

c একটি ধ্রুবক এবং μ, λ প্রচল (parameters)

7. দেখান যে সমনাভি কনিক্ গোষ্ঠী $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$ নিজেই নিজের লম্বপ্রক্ষেপ পথ; a, b ধ্রুবক, λ প্রচল।

8. দেখান যে অধিবৃত্ত গোষ্ঠী $y^2 = 4a(x + a)$ আত্ম-লম্বপ্রক্ষেক পথ।

(B)

নিম্নোক্ত বক্ররেখা গোষ্ঠী গুলির লম্বপ্রক্ষেপ পথ নির্ণয় করুন

1. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$
2. $r(1 + \cos\theta) = 2a$
3. $r^n \sin \eta\theta = a^n$
4. $r = a\theta$
5. $r = a\cos^2\theta$
6. $r = a(\sec\theta + \tan\theta)$
7. $r = \frac{\mathrm{K}}{1 + 2\cos\theta}$
8. $r = 4a\sec\theta.\tan\theta$

12.7 উত্তরমালা ঃ

(A)

1. $y^2 - x^2 = 2a$

2. $e^y - e^{-x} = k$

3. $2x^2 + 3y^2 = c^2$

4. $y\left(y^2+3x^2\right)=k$

5. $\left(x^2+y^2\right)^5=cy^3\left(5x^2+y^2\right)$

6. $x^2+y^2+2\lambda x+c=0$ কে x -সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2\lambda dx=0$, λ কে অপনয়ণ করে পাই,

$$\left(y^2-x^2+c\right)+2xy\ \frac{dy}{dx}=0$$

$\therefore$ লম্বপ্রক্ষেপ পথ এর অবকল সমীকরণ

$$\left(y^2-x^2+c\right)-2xy\frac{dx}{dy}=0$$

$$2xy\,dx-\left(y^2-x^2+c\right)dy=0$$

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right)=\frac{2}{y} \qquad \therefore \mathrm{I}\cdot\mathrm{F}=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=\frac{1}{y^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{c}{y}+y=\mathrm{K}$

$\therefore$ লম্বপ্রক্ষেপ পথের সমীকরণ

$$x^2+y^2+2\mu y-c=0$$

7. $$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1 \quad ....(1)$$

$$\therefore \frac{x}{a^2+\lambda}+\frac{y}{b^2+\lambda}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

বা $x\left(b^2+\lambda\right)+y\left(a^2+\lambda\right)\dfrac{dy}{dx}=0$

$$\therefore \lambda=\frac{b^2x+a^2yy^1}{x+yy^1}, \qquad y^1\equiv\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore a^2+\lambda=\frac{\left(a^2-b^2\right)x}{x+yy^1}$$

$$b^2+\lambda=\frac{\left(a^2-b^2\right)yy^1}{x+yy^1}$$

(1) এর বসিয়ে পাই (সরলীকৃত করে)

$$\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)=\left(a^2-b^2\right)\text{............(A)}$$

এটি প্রদত্ত কনিক গোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ

$\therefore$ লম্ব-প্রক্ষেপ পথ এর অবকল সমীকরণ

$$\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)=\left(a^2-b^2\right)\text{..............(B)}$$

এটি (A) এর মত একই আকারের।

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব প্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠী $\dfrac{x^2}{a^2+\mu}+\dfrac{y^2}{b^2+\mu}=1$

(B)

1. $r^2=c^2\sin 2\theta$

2. $r(1-\cos\theta)=2c$

3. $r^n\cos n\theta=c$

4. $r^2=ce^{-\theta^2}$

5. $r^2=b\sin\theta$

$$\left[\frac{dr}{d\theta}=\frac{-2r}{\cos^2\theta}\cos\theta\cdot\sin\theta\right.$$

$$\therefore -r^2\frac{d\theta}{dr}=-2r\tan\theta$$

$$\left.\therefore 2\frac{dr}{r}=\frac{d\theta}{\tan\theta}\right]$$

6. $r=be^{-\sin\theta}$

$$\left[\frac{dr}{d\theta}=r\sec\theta\right.$$

$$-r^2\frac{d\theta}{dr}=r\sec\theta$$

$$\left.\therefore -\cos d\theta=\frac{dr}{r}\right]$$

7. $r^2\sin^3\theta=b(1+\cos\theta)$

8. $r^2\left(1+\sin^2\theta\right)=b^2$

12.8 সারাংশ ঃ

অবকল সমীকরণ প্রয়োগে লম্বপ্রক্ষেপ পথসমূহ নির্ণয়ের বিষয় এই এককে আলোচিত হয়েছে।

দুটি বক্ররেখা গোষ্ঠী যদি এমন হয় যে যে কোন গোষ্ঠীর যে কোন একটি বক্ররেখা অপর গোষ্ঠীর প্রতিটি রেখাকে লম্বভাবে ছেদ করে তাহলে তাদের প্রতিটি গোষ্ঠীকে অপর বক্ররেখা গোষ্ঠীর লম্বপ্রক্ষেপ পথ বলা হয়।

যদি প্রদত্ত বক্ররেখাগোষ্ঠী কার্টেসীয় বা সমকোণী স্থানাঙ্ক (x, y) সমীকরেণ দেওয়া থাকে, তাহলে তার অনুষঙ্গী অবকল সমীকরণ প্রথমে নির্ণয় করতে হবে; ধরাযাক $\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$; এতে $\frac{dy}{dx}$ এর পরিবর্তে $\left(-\frac{dx}{dy}\right)$ লিখলেই লম্বপ্রক্ষেপ পথের অবকল সমীকরণ পাওয়া যাবে; এটি হবে $\Psi\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0$ অতঃপর একে সমাকলন প্রক্রিয়ায় সমাধান করলে নির্ণেয় লম্বপ্রক্ষেপ পথের কার্টেসীয় সমীকরণ পাওয়া যাবে।

যদি প্রদত্ত বক্ররেখা গোষ্ঠী মেরুস্থানাঙ্ক (r, θ) সমীকরণে যাকে, একই ভাবে অর্থাৎ θ সাপেক্ষে অবকলন করে ও প্রচল (parameter) কে অপনয়ণ করে ঐ বক্ররেখা গোষ্ঠীর অবকল সমীকরণ পাওয়া যাবে; ধরাযাক উহা $\Psi\left(r, \theta \frac{dr}{d\theta}\right) = 0$.

এই সমীকরণে $\frac{dr}{d\theta}$ পরিবর্তে $-r^2 \frac{d\theta}{dr}$ লিখলে লম্বপ্রক্ষেপ পথের অবকল সমীকরণ পাওয়া যাবে। এটি $\Psi\left(r, \theta - r^2 \frac{d\theta}{dr}\right) = 0$ এবার এই সমীকরণের সাধারণ সমাধানটি উদ্দিষ্ট লম্বপ্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠী।

কতকগুলি বৈশিষ্টপূর্ণ বক্ররেখাগোষ্ঠী আছে, যেমন সম-নাভিযুক্ত (confocal) কণিক্স্ $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$; লক্ষ্যণীয়, এরা আত্ম-লম্বপ্রক্ষেপ পথ গোষ্ঠী; অর্থাৎ নিজেরাই নিজেদের লম্বপ্রক্ষেপ । উদাহরণে ইতিমধ্যেই দেখান হয়েছে।

মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

— রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে, সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নূতন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

— সুভাষচন্দ্র বসু

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

— Subhas Chandra Bose

Price : ₹ 225.00

(NSOU-র ছাত্র-ছাত্রীদের কাছে বিক্রয়ের জন্য নয়)

Published by : Netaji Subhas Open University, DD-26, Sector-I, Salt Lake, Kolkata-700 064 &
Printed at : The Saraswati Printing Works, 2, Guru Prosad Chowdhury Lane, Kolkata 700 006