NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

SUBSIDIARY MATHEMATICS

SMT - 03

BLOCK - 1

UNITS : 1 - 13

NUMERICAL ANALYSIS AND ANALYTICAL DYNAMICS

প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠ্যক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমত কোনো বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে— যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। ইন্দিরা গান্ধী মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ও রবীন্দ্র মুক্ত বিদ্যালয়ের কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ-কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থীও এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশকিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

চতুর্থ পুনর্মুদ্রণ : ফেব্রুয়ারি, 2019

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau
of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় : সহায়ক গণিতবিদ্যা **স্নাতক পাঠক্রম**

পাঠক্রম : পর্যায় : S M T : 03 : 01

বিভাগ 'ক'	**রচনা**	**সম্পাদনা**
একক ❑ 1–5	ড. শাহ্‌জাহান আলি মোল্লা	অধ্যাপক অমৃতাভ গুপ্ত
বিভাগ 'খ'		
একক ❑ 6–13	ড. অমিতাভ চক্রবর্তী	ড. সুবীর মুখার্জি

প্রজ্ঞাপন

এই পাঠ-সংকলনের সমুদয় স্বত্ব নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের দ্বারা সংরক্ষিত। বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের লিখিত অনুমতি ছাড়া এর কোনোও অংশের পুনর্মুদ্রণ বা কোনোভাবে উদ্ধৃতি সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ।

মোহন কুমার চট্টোপাধ্যায়
নিবন্ধক

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

S M T – 03

(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়

1

বিভাগ 'ক'

সাংখ্যিক বিশ্লেষণ

একক 1 ❑	সাংখ্যিক সমাধানে ভ্রান্তি ও ভ্রান্তির পরিমাণ	7–20
একক 2 ❑	সসীম অন্তর ও সসীম অন্তর সারণি	21–37
একক 3 ❑	আন্তঃপাঠন	38–57
একক 4 ❑	সাংখ্যিক পদ্ধতিতে সমাকলন	58–71
একক 5 ❑	বীজগাণিতিক অথবা অবীজগাণিতিক সমীকরণের সাংখ্যিক সমাধান	72–96

বিভাগ 'খ'

বৈশ্লেষিক গতিবিদ্যা

একক 6 ❑	গতিবিদ্যার জন্য প্রয়োজনীয় প্রারম্ভিক জ্ঞান	97–108
একক 7 ❑	বলাধীন গতিবিদ্যা	109–116
একক 8 ❑	অভিঘাত ও ঘাতবল	117–120
একক 9 ❑	ঋজুরেখ গতি	121–127
একক 10 ❑	সরল সমঞ্জস গতি	128–141
একক 11 ❑	সমতলে বিভিন্ন নির্দেশতন্ত্র চলমান কণার গতিবেগ ও ত্বরণ	142–152
একক 12 ❑	সমতলীয় গতি	153–161
একক 13 ❑	কেন্দ্রীয় বলাধীন গতি	162–172

একক 1 ❑ সাংখ্যিক সমাধানে ভ্রান্তি ও ভ্রান্তির পরিমাণ (Errors and its estimation in numerical computation)

গঠন

1.1. প্রস্তাবনা

1.2 উদ্দেশ্য

1.3 সঠিক ও সমীপস্থ সংখ্যা

1.4 সার্থক অংক

1.5 আসন্নীকরণ ভ্রান্তি

1.6 সার্থক ভ্রান্তি

1.7 পরম, আপেক্ষিক ও শতকরা ভ্রান্তি

1.8 উপপাদ্য

1.9 ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র

1.10 উদাহরণ

1.11 অনুশীলনী

1.12 উত্তরমালা

1.13 সহায়ক গ্রন্থাবলি

1.1. প্রস্তাবনা

ব্যবহারিক দিক থেকে দেখলে, গণিত ও কারিগরিক বিদ্যার বিভিন্ন সমস্যাগুলির সমাধানের লক্ষ্যই হল সমস্যাগুলির সাংখ্যিক সমাধান খুঁজে বের করা। সব সময় বৈশ্লেষিক প্রক্রিয়ায় এদের মান নির্ণয় সম্ভব নয়। সাংখ্যিক বিশ্লেষণ হল এমন একটা পদ্ধতি যার দ্বারা সমস্যাগুলির আসন্ন মান নির্ণয় বা সমাধান করা যায়। আর আসন্ন মানের অর্থ সঠিক মান নয়, তাতে ভ্রান্তি থাকবেই। অতএব এই লব্ধ ভ্রান্তির উৎস, প্রকৃতি ও পরিমাণ সম্বন্ধে সঠিক ধারনা থাকা অবশ্যই প্রয়োজন।

সাংখ্যিক পদ্ধতিতে কোন গাণিতিক সমস্যার সমাধানে তিনটি বিভিন্ন কারণে ভ্রান্তির উদ্ভব হয়।

প্রথমত ঃ সরবরাহীকৃত প্রাথমিক উপাত্ত সমূহে (Initial data) ভ্রান্তি থাকতে পারে যেটা সম্পূর্ণ পদ্ধতিতে প্রথম থেকেই বর্তমান থাকে। এই প্রকার ভ্রান্তির সংশোধন বা হ্রাস করা সম্ভব হয় না। এই ধরনের ভ্রান্তিকে **অন্তর্নিহিত ভ্রান্তি** (Inherent errors) বলা হয়।

দ্বিতীয়ত ঃ অসীম পদ্ধতিতে প্রকাশিত কোন সংখ্যাকে একটা সসীম পদ্ধতি বা সংখ্যার দ্বারা প্রতিস্থাপন করার ফলে এক রকমের ভ্রান্তির উদ্ভব হয়। এই ধরনের ভ্রান্তিকে **খণ্ডিতকরণ ভ্রান্তি** (Truncation errors) বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, আমরা জানি, $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots\infty$ যদি e এর মান নির্ণয় দুইটি পদের যোগ ধরি তবে $e = 2$ হবে, তিনটি পদের যোগ ধরি তবে $e = 2{\cdot}5$ হবে, চারটি পদের যোগ ধরি তবে $e = 2{\cdot}67$ হবে, পাঁচটি পদের যোগ ধরি তবে $e = 2{\cdot}708$ হবে। এইভাবে আমরা পছন্দ মত পদের যোগ ধরে ভ্রান্তির পরিমাণ পছন্দ মত কম করতে পারি। অতএব এই ভ্রান্তি অনেকাংশে আমাদের নিয়ন্ত্রাধীন এবং প্রয়োজন বা পছন্দমত খণ্ডিতকরণ ভ্রান্তির পরিমাণ হ্রাস করা যায়।

তৃতীয়ত ঃ সাধারণত পাটিগাণিতিক প্রক্রিয়ায় যথা যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগে কোনো অসীম ভগ্নাংশের সংখ্যার পরিবর্তে একটা সসীম সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। এটা প্রয়োজন হয় কারণ গণকযন্ত্র সীমিতসংখ্যক অংক দ্বারা গঠিত সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ করতে পারে। ফলে যে ভ্রান্তির উদ্ভব হয় সেই ভ্রান্তিকে **আসন্নীকরণ ভ্রান্তি** (Rounding off errors) বলা হয়।

খণ্ডিতকরণ ও আসন্নীকরণ ভ্রান্তিদ্বয় গণনার কারণে উদ্ভব হয় বলে, এই দুটি ভ্রান্তিকে গণনামূলক ভ্রান্তি বলা হয়।

উপরের আলোচনা থেকে আমরা বলতে পারি অন্তর্নির্হিত ভ্রান্তি থাকলে সেটা কোন মতেই সংশোদন করা যাবে না কিন্তু গণনামূলক ভ্রান্তির পরিমাণ হ্রাস করা সম্ভব এবং আমরা চেষ্টা করব গণনামূলক ভ্রান্তিকে যথা সম্ভব কম করতে।

1.2. উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে আপনি জানতে পারবেন

- ভ্রান্তির উৎস ও বিভিন্ন কারণ
- ভ্রান্তির পরিমাণ।

1.3. সঠিক ও সমীপন্থ বা আসন্ন সংখ্যা (Exact and approximate numbers)

সাংখ্যিক বিশ্লেষণে আমরা দুই প্রকারের সংখ্যা ব্যবহার করে থাকি, সঠিক ও সমীপন্থ সংখ্যা। যে সংখ্যা

সকল অংক বর্তমান সেই সংখ্যাকে সঠিক বা নির্ভুল সংখ্যা বলা হয় কারণ ঐ সংখ্যাগুলিতে কোন অনিশ্চয়তার চিহ্ন মাত্র নেই। যেমন 5, $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{11}$, ... ইত্যাদি। আবার অনেক সংখ্যা আছে যেমন $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π, e........ ইত্যাদি যেগুলি সঠিক কিন্তু সসীম সীমাবদ্ধতার জন্য সীমিত সংখ্যক অংক ব্যবহার করা হয়ে থাকে। কোনো সঠিক সংখ্যার ব্যবহৃত আসন্ন মানকে **সমীপন্থ** সংখ্যা বলা হয়। উদাহরণ স্বরূপ $\sqrt{5}$ সঠিক সংখ্যাটির সমীপন্থ সংখ্যা 2·24, 2·2361, 2.236, ... ইত্যাদি হতে পারে। π সঠিক সংখ্যাটির সমীপন্থ সংখ্যা 3·14, 3·142, 3·1416 ...... ইত্যাদি হতে পারে। অতএব একটা সঠিক সংখ্যার অনেক সমীপন্থ সংখ্যা হতে পারে।

1.4. সার্থক অংক (Significant digits or figures)

কোনো সঠিক সংখ্যাকে সমীপন্থ সংখ্যায় রূপায়নে যতগুলি অংক ব্যবহার করা হয় তাদের **সার্থক অংক** বলা হয়। অর্থাৎ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 সংখ্যাগুলির প্রতিটিই সার্থক সংখ্যা। শূন্য সংখ্যাটি তখনই সার্থক সংখ্যা হয় যখন তা কোন দশমিক বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করে না। উদাহরণস্বরূপ 1·232, 5·0213, 0·3257, 0·000235 সংখ্যাগুলি যথাক্রমে 4, 5, 4 ও 3 সার্থক অংকবিশিষ্ট। কারণ 0·000235 সংখ্যাটিতে, শূন্য সংখ্যাগুলি শুধু দশমিক বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করেছে। আবার যদি পাঁচ সার্থক অংক বিশিষ্ট কোনো সংখ্যা 23451-এর পরিবর্তে যদি আমরা লিখি 23450 তবে শূন্য অংকটিকে এই ক্ষেত্রে সার্থক সংখ্যা হিসাবে বিবেচিত হবে না।

1.5. আসন্নকরণ ভ্রান্তি (Rounding-off errors)

কোনো একটা রাশির বামদিকের কতকগুলি সার্থক সংখ্যা রেখে বিশেষ নিয়মে ডানদিকের কতকগুলি সার্থক সংখ্যা বাদ দিলে যে ভ্রান্তি বা বিচ্যুতি হয় সেই ভ্রান্তিকে **আসন্নকরণ ভ্রান্তি** (Rounding of errors) বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, π = 3·141592654..... কে তিন, চার, পাঁচ বা ছয় সার্থক অংকবিশিষ্ট সংখ্যায় আসন্নীকরণ করলে আমরা পাই, যথাক্রমে 3·14, 3·142, 3·1416 এবং 3·14159। এইভাবে আমরা আসন্নীকরণ ভ্রান্তির পরিমাণ হ্রাস করতে পারি।

কোনো সংখ্যাকে n-সার্থক অংকে আসন্নীকরণে কয়েকটি বিশেষ নিয়ম মানা হয় এবং নিয়মগুলি হল

(a) n-তম স্থানের ডানদিকের সব সংখ্যাগুলি বাদ দিতে হবে, যদি বাদ দেওয়া সংখ্যাটি $\frac{1}{2}$ এর থেকে কম হয় তবে n-তম স্থানের অংকটিকে অপরিবর্তিত রাখতে হবে। আর যদি বাদ দেওয়া সংখ্যাটি যদি $\frac{1}{2}$ এর থেকে বেশী হয় তবে n-তম স্থানের সংখ্যাটির সাথে 1 যোগ করতে হবে।

(b) যদি বাদ দেওয়া সংখ্যাটি $\frac{1}{2}$ এর সমান হয় তবে

(i) n-তম স্থানের অংকটি অপরিবর্তিত থাকবে যদি সেটা জোড় সংখ্যা হয়।

(ii) n-তম স্থানের অংকটির সাথে 1 যোগ করতে হবে, যদি সেটা বিজোড় সংখ্যা হয়।

উদাহরণ ঃ (i) 24·5649⑧6, (ii) 27·483⑤54 (iii) 30·0346⑤3 (iv) 21·5653④5 সংখ্যাগুলিকে ছয় সার্থক অংকবিশিষ্ট সংখ্যায় আসন্নীকরণে পাই

(i) 24·5650 (ii) 27·4836 (iii) 30·0346 (iv) 21·5653.

1.6. সার্থক ভ্রান্তি (Significant errors)

এটা একটা গণনামূলক ভ্রান্তি। সার্থক সংখ্যা হ্রাসের ফলে এই ভ্রান্তির উদ্ভব হয়, তাই এই ভ্রান্তিকে **সার্থক ভ্রান্তি** বলা হয়। সাধারণত সার্থক সংখ্যা হ্রাস তথা সার্থক ভ্রান্তি দুটি কারণে ঘটে থাকে

(i) প্রায় সমান দুটি সংখ্যার বিয়োগ করলে

(ii) দুটি সংখ্যার ভাগ করলে।

উদাহরণস্বরূপ, আমরা প্রায় দুটি সমান সংখ্যা $a = 1{\cdot}2345627$ এবং $b = 1{\cdot}2345584$ ধরলাম। এখন $a - b = 0{\cdot}0000043$ সংখ্যাটি মাত্র দুই সার্থক অংক বিশিষ্ট। অতএব $a - b$ সংখ্যাতে ছয়টি সার্থক সংখ্যা হ্রাস পেয়েছে। এখন যদি $a - b$ সংখ্যাটিকে পরবর্তি গণনায় ব্যবহার করা হয় তবে লব্ধ ফলে বিরাট বড় পরিমাণের ভ্রান্তির উদ্ভব হবে।

মনে করলাম $f(x) = \dfrac{2}{1 - x^3}$, যদি $x = 0{\cdot}99900006$ ধরি অর্থাৎ x-এর মানে যদি অষ্টমতম অংকে ভ্রান্তি থাকে, তবে

$$f(0{\cdot}99900006) = 667{\cdot}3737808$$

আবার যদি $x = 0{\cdot}999$ ধরি, তবে

$$f(0{\cdot}999) = 667{\cdot}3337782$$

অতএব x-এর অষ্টমতম অংকে ভ্রান্তি থাকলে $f(x)$-এর মানে পঞ্চমতম অংকে ভ্রান্তির উদ্ভব হচ্ছে। এই ভ্রান্তির উদ্ভব হচ্ছে শুধু সার্থকসংখ্যা হ্রাসের জন্য।

1.7. পরম, আপেক্ষিক ও শতকরা ভ্রান্তি (Absolute, relative and percentage errors)

কোন রাশির সঠিকমান বা নির্ভুলমান ও উহার সমীপস্থ মানের অন্তরালকে **পরমভ্রান্তি** বলা হয়। পরমভ্রান্তিকে সঠিক মান দ্বারা ভাগ করলে লব্ধ মানকে **আপেক্ষিক ভ্রান্তি** বলা হয় এবং আপেক্ষিক ভ্রান্তির শতকরা হার বা $100 \times$ আপেক্ষিক ভ্রান্তিকে **শতকরা ভ্রান্তি** বলা হয়।

যদি কোন রাশির সঠিক বা নির্ভুল মান V_T-এর সমীপস্থ মান V_A হয় তবে

(a) পরমভ্রান্তি $\quad E_a = |V_T - V_A|$

(b) আপেক্ষিক ভ্রান্তি, $\quad E_r = \dfrac{E_a}{V_T} = \dfrac{|V_T - V_A|}{V_T}$

(c) শতকরা ভ্রান্তি $\quad E_P = E_r \times 100 = \dfrac{|V_T - V_A|}{V_T} \times 100$

1.8. উপপাদ্য (Theorem)

1.8.1. উপপাদ্য ঃ সাংখ্যিক বিশ্লেষণে কোনো সংখ্যাকে n সার্থক অংকে সংশোধন করলে পরমাভ্রান্তি n তম স্থানে $\frac{1}{2}$ এর থেকে কম বা সমান হবে। অর্থাৎ, কোনো একটি সংখ্যাকে m ভগ্নাংশ অংকে আসন্নীকরণ করলে পরম ভ্রান্তি $E_a \leq \frac{1}{2}.10^{-m}$ ..... (1.8.1)

1.8.2. উপপাদ্য ঃ কোনো সংখ্যাকে n সার্থক অংক পর্যন্ত আসন্নীকরণ করা হয়, তবে সংখ্যাটির আপেক্ষিক ভ্রান্তি $\dfrac{1}{K \times 10^{n-1}} (n \neq 1)$ অপেক্ষা কম হবে।

অর্থাৎ $\quad E_r < \dfrac{1}{K \times 10^{n-1}} \ (n \neq 1)$ ...... (1.8.2)

যেখানে K হল সংখ্যাটির প্রথম সার্থক সংখ্যা।

সত্যপ্রতিপাদন (Verification) : এখানে উদাহরণের সাহায্যে উপরের উপপাদ্য দুটির সত্যতা দেখাব,

উদাহরণ ঃ (a) ধরা যাক 7·5263782 সংখ্যাটিকে পাঁচ সার্থক অংকে আসন্নীকরণ করা হয়েছে। অতএব সংখ্যাটির পরম ভ্রান্তি

$$E_a = |7{\cdot}5263782 - 7{\cdot}5264| = 0{\cdot}000022$$

সমীকরণ (1.8.1) প্রয়োগ করে পাই

$$E_a \le \frac{1}{2}.10^{-4} = 0{\cdot}00005$$

উদাহরণ ঃ (b) মনে করা যাক $A = 773{\cdot}78391$ সংখ্যাটি অষ্টম সার্থক অংক পর্যন্ত শুদ্ধ এখানে $K = 7$ এবং $n = 8$ এখন সংখ্যাটিকে ছয় সার্থক অংশ বিশিষ্ট সংখ্যায় আসন্নীকরণ করলে, পরম ভ্রান্তি হবে

$$E_a \le \frac{1}{2}.10^{-6} = 0{\cdot}0000005$$

$$\therefore \quad E_r \le \frac{0{\cdot}0000005}{773{\cdot}78391} = 0{\cdot}000000000646$$

$$= \frac{0{\cdot}00646}{10^7}$$

$$= \frac{1}{7{\cdot}10^7} \times 0{\cdot}04522$$

$$< \frac{1}{7{\cdot}10^{8-1}}$$

1.9. ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র (General formula for estimation of errors)

ধরা যাক $u = f(u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n)$ একটা বৈশ্লেষিক (differentiable) অপেক্ষক যেখানে u_1, u_2, u_3 ..... u_n, হল n স্বাধীন চল এবং চলগুলির আসন্নমানে পরম ভ্রান্তির পরিমাণ যথাক্রমে $|\Delta u_1|$, $|\Delta u_2|$, $|\Delta u_3|$, ... $|\Delta u_n|$. এখন আমাদের উদ্দেশ্য u_1, u_2, u_3, ... u_n চলগুলির পরমাভ্রান্তির সাপেক্ষে, u অপেক্ষকের পরমভ্রান্তি $|\Delta u|$ এবং আপেক্ষিক ভ্রান্তি $\left|\frac{\Delta u}{u}\right|$ এর মান নির্ণয় করা।

অতএব

$$|\Delta u| = \left|f(u_1+\Delta u_1, u_2+\Delta u_2, u_3+\Delta u_3, \ldots, u_n+\Delta u_n) - f(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)\right|$$

$$= \left| f(u_1, u_2, u_3 \ldots u_n) + \left(\Delta u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \Delta u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + \Delta u_n \frac{\partial}{\partial u_n}\right) f + \right.$$

$$\left. \left(\Delta u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \Delta u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + \Delta u_n \frac{\partial}{\partial u_n}\right)^2 f + \ldots - f(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) \right|$$

যেহেতু $\Delta u_i (i = 1,2,3,\ldots n)$ অতি ক্ষুদ্র, উহাদের বর্গ ও গুণফলগুলিকে অগ্রাহ্য করে পাই

$$|\Delta u| = \left| \Delta u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \Delta u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \Delta u_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} + \ldots + \Delta u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} \right|$$

$$\leq |\Delta u_1| \left|\frac{\partial f}{\partial u_1}\right| + |\Delta u_2| \left|\frac{\partial f}{\partial u_2}\right| + \ldots + |\Delta u_n| \left|\frac{\partial f}{\partial u_n}\right| \qquad \ldots\ldots (1.9.1)$$

অর্থাৎ u অপেক্ষকের পরম ভ্রান্তির পরিমাণ

$$E_a = |\Delta u| \leq \sum_{i=1}^{n} |\Delta u_i| \left|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|$$

এবং উহার আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরিমাণ

$$E_r = \left|\frac{\Delta u}{u}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right| \left|\frac{\Delta u_i}{u}\right| \qquad \ldots\ldots (1.9.2)$$

মন্তব্য ঃ

(a) যদি $u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ হয়, তবে পরমভ্রান্তি হবে

$$|\Delta u| = \left|(u_1+\Delta u_1) + (u_2+\Delta u_2) + (u_3+\Delta u_3) + \ldots + (u_n+\Delta u_n) - (u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n)\right|$$

$$= |\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \cdots + \Delta u_n|$$

$$\leq |\Delta u_1| + |\Delta u_2| + |\Delta u_3| + \cdots + |\Delta u_n|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\Delta u_i| \qquad \ldots.. (1.9.3)$$

অর্থাৎ, n-সংখ্যক রাশির যোগফলে পরমভ্রান্তির পরিমাণ প্রতিটি রাশির পরমভ্রান্তির যোগফলের থেকে কম বা সমান।

(b) যদি $u = u_1 - u_2$ হয়, তবে পরমভ্রান্তি হবে

$$|\Delta u| = |(u_1 + \Delta u_1) - (u_2 + \Delta u_2) - (u_1 - u_2)| = |\Delta u_1 - \Delta u_2| \leq |\Delta u_1| + |\Delta u_2| \quad ..(1.9.4)$$

অর্থাৎ বিয়োগফলে পরমভ্রান্তির পরিমাণ প্রতিটি রাশির পরম ভ্রান্তির যোগফলের থেকে কম বা সমান।

(c) যদি $u = u_1 u_2 u_3 \ldots u_n$ হয় তবে

$$lnu = lnu_1 + lnu_2 + lnu_3 + \ldots + lnu_n$$

বা, $\frac{1}{u}\Delta u = \frac{1}{u_1}.\Delta u_1 + \frac{1}{u_2}.\Delta u_2 + \frac{1}{u_3}.\Delta u_3 + \cdots + \frac{1}{u_n}.\Delta u_n$

বা, $\left|\frac{\Delta u}{u}\right| = \left|\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2} + \frac{\Delta u_3}{u_3} + \cdots + \frac{\Delta u_n}{u_n}\right|$

$$\leq \left|\frac{\Delta u_1}{u_1}\right| + \left|\frac{\Delta u_2}{u_2}\right| + \left|\frac{\Delta u_3}{u_3}\right| + \cdots + \left|\frac{\Delta u_n}{u_4}\right|$$

$$\therefore E_r = \left|\frac{\Delta u}{u}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta u_i}{u_i}\right| \quad \ldots.. (1.9.5)$$

এবং পরমভ্রান্তি $E_a = E_r \times u \quad \ldots.. (1.9.6)$

অর্থাৎ n-সংখ্যক রাশির গুণফলে আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরমমান, উহাদের প্রত্যেকটি রাশিতে আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরমমাণের যোগফলের থেকে কম বা সমান।

(d) যদি $u = \frac{u_1}{u_2}$ হয়, তবে

$$\ln u = \ln u_1 - \ln u_2$$

বা, $\frac{1}{u} . \Delta u = \frac{1}{u_1} . \Delta u_1 - \frac{1}{u_2} . \Delta u_2$

অতএব, $\left|\frac{\Delta u}{u}\right| = \left|\frac{\Delta u_1}{u_1} - \frac{\Delta u_2}{u_2}\right|$

$$\therefore \quad E_r = \left|\frac{\Delta u}{u}\right| = \left|\frac{\Delta u_1}{u_1} - \frac{\Delta u_2}{u_2}\right|$$

$$\leq \left|\frac{\Delta u_1}{u_1}\right| + \left|\frac{\Delta u_2}{u_2}\right|$$

অতএব দুটি রাশির ভাগের আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরমমান, উহাদের প্রত্যেকের আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরমমানের যোগফলের থেকে কম বা সমান হবে।

1.10. উদাহরণ

1.10.1. উদাহরণ : দেওয়া সংখ্যাগুলিকে 5 দশমিক সংখ্যা পর্যন্ত সংখ্যায় আসন্নীকরণ করুন।

(i) 5·7264578 (ii) 3·3207246 (iii) 0·00007832 (iv) 1·5762752 (v) 0·4632653

সমাধান : 1·5 (b) প্রয়োগ করে পাই,

(i) 5·72646 (ii) 3·32072 (iii) 0·00008 (iv) 1·57628 (v) 0·46326

1.10.2. উদাহরণ : দেওয়া সংখ্যাগুলিকে 4 সার্থক সংখ্যা পর্যন্ত শুদ্ধ সংখ্যায় প্রকাশ করুন।

(i) 3·205732 (ii) 0·0007321 (iii) 7·99973 (iv) 0·13005 (v) 0·0023565 (vi) 0·0004501

সমাধান : 1·5 (b) প্রয়োগ করে পাই

(i) 3·206 (ii) 0·0007321 (iii) 8·000 (iv) 0·1300 (v) 0·002356

1.10.3. উদাহরণ : 4টি সংখ্যার যোগফল নির্ণয় করুন যাদের আসন্ন মান, 251·72, 3·2013, 0·0032, 0·327

সমাধান : যেহেতু প্রথম সংখ্যাটি দুই দশমিক স্থান পর্য্যন্ত শুদ্ধ অতএব সংখ্যাগুলির যোগফল দুই দশমিক স্থান পর্য্যন্ত শুদ্ধ হবে, এমন সব সংখ্যাগুলিকে দুই দশমিক স্থান পর্য্যন্ত শুদ্ধ করলে পাই,

$3{\cdot}2013 \simeq 3{\cdot}20$

$0{\cdot}032 \simeq 0{\cdot}00$

$0{\cdot}327 \simeq 0{\cdot}33$

অতএব নির্ণেয় যোগফল $= 251{\cdot}72 + 3{\cdot}20 + 0{\cdot}00 + 0{\cdot}33$

$= \mathbf{255{\cdot}25}$

1.10.4 উদাহরণ : 171·72, 51·027 এবং 0·0085 সংখ্যা তিনটির গুণফল নির্ণয় করুন।

$$171{\cdot}72 \times 51{\cdot}03 \times 0{\cdot}01 = 87{\cdot}628716 \simeq \mathbf{87{\cdot}63}$$

1.10.5 উদাহরণ :

(a) 3·14156 সংখ্যাটিকে 3·14 সংখ্যায় আসন্নীকরণ করলে, পরমভ্রান্তি, আপেক্ষিক ভ্রান্তি ও শতকরা প্রান্তি নির্ণয় করুন।

(b) $\frac{2}{3}$ সংখ্যাটিকে 4 সঠিক সংখ্যায় আসন্নীকরণ করলে, পরমভ্রান্তি আপেক্ষিক প্রাপ্তি ও শতকরা ভ্রান্তি নির্ণয় করুন।

সমাধান : (a) এখানে সঠিক মান $V_T = 3{\cdot}14156$ এর সমীপস্থ মান $V_a = 3{\cdot}14$

অতএব পরমভ্রান্তি $E_a = |V_T - V_A| = |3{\cdot}14156 - 3{\cdot}14| = 0{\cdot}00156$

আপেক্ষিক ভ্রান্তি, $E_r = \dfrac{0{\cdot}00156}{3{\cdot}14156} = 0{\cdot}0004966 \simeq 0{\cdot}0005$

শতকরা ভ্রান্তি, $E_p = 0{\cdot}0005 \times 100 = 0{\cdot}05\%$

(b) এখানে, $V_T = \dfrac{2}{3} = 0{\cdot}666666$ এবং $V_A = 0{\cdot}6667$

$$\therefore \quad E_a = \left|\frac{2}{3} - 0{\cdot}6667\right| = 0{\cdot}000033$$

$$E_r = \frac{0{\cdot}000033}{213} = 0{\cdot}0000495 \simeq 0{\cdot}00005$$

$$E_p = 0{\cdot}00005 \times 100 = \mathbf{0{\cdot}005\%}$$

1.10.6. উদাহরণ : সার্থক সংখ্যা নির্ণয় করুন যখন

(a) আসন্ন সংখ্যাটি $V_A = 11{\cdot}2461$, পরমভ্রান্তি দেয় $E_a = 0{\cdot}25 \times 10^{-2}$

(b) আসন্ন সংখ্যাটি $V_A = 1{\cdot}5923$, আপেক্ষিক ভ্রান্তি দেয় $E_r = 0{\cdot}1 \times 10^{-2}$

(c) 8·6 সংখ্যাটি দুই সার্থক সংখ্যা পর্যন্ত শুদ্ধ হলে, সর্বাধিক আপেক্ষিক ভ্রান্তি নির্ণয় করুন।

সমাধান : (a) এখানে পরমভ্রান্তি $E_a = 0{\cdot}25 \times 10^{-2} = \frac{1}{4}.10^{-2} < \frac{1}{2}.10^{-2}$. অতএব উপপাদ্য (1.8.1) সাহায্যে $V_A = 11{\cdot}2461$, দুই দশমিক স্থান পর্য্যন্ত শুদ্ধ। অতএব V_A সংখ্যাটি চার সার্থক সংখ্যা পর্য্যন্ত শুদ্ধ।

(b) এখানে আপেক্ষিক ভ্রান্তি $E_r = 0 \cdot 1 \times 10^{-2} = \dfrac{1}{1 \times 10^{3-1}}$ অতএব উপপাদ্য (1.8.2) এর সাহায্যে, V_A = **1·5923**, চার সার্থক অংক পর্যন্ত শুদ্ধ।

(c) 8·6 সংখ্যাটি দুই সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ এবং প্রথম সার্থক সংখ্যা 8 $\therefore E_r \le \dfrac{1}{8 \times 10^{2-1}} =$ 0·0125

অতএব সর্বাধিক, আপেক্ষিক ভ্রান্তি = **0·0125**.

1.10.7 উদাহরণ : $x - y$ এর মান নির্ণয়ে আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ণয় করুন যখন $x = 12{\cdot}05$ এবং $y = 8{\cdot}02$ এবং উহাদের পরম ভ্রান্তির পরিমাণ $\Delta x = 0{\cdot}005$ এবং $\Delta y = 0{\cdot}001$.

সমাধান ঃ x এর আপেক্ষিক ভ্রান্তি $= \dfrac{0{\cdot}005}{12{\cdot}05} = 0{\cdot}000415$

এর y-এর আপেক্ষিক ভ্রান্তি $= \dfrac{0{\cdot}001}{8{\cdot}02} = 0{\cdot}000125$

$\therefore\ x - y$ এর আপেক্ষিক ভ্রান্তি = 0·000415 – 0·000125 = **0·00029**

1.10.8. উদাহরণ : $y = 4x^6 - 5x$ এর আপেক্ষিক ভ্রান্তি নির্ণয় করুন যখন $x = 1$ এর জন্য x এর পরম ভ্রান্তি $\Delta x = 0{\cdot}04$

সমাধান ঃ এখান $\Delta y \simeq \dfrac{dy}{dx}.\Delta x = (24x^5 - 5).\Delta x$

$x = 1$, হলে y-এর পরমভ্রান্তি, $|\Delta y| = (24 - 5) \times 0{\cdot}04 = 0{\cdot}76$

এবং $x = 1$ হলে $y = -1$

$\therefore$ y এর আপেক্ষিক ভ্রান্তি $= \dfrac{|\Delta y|}{|y|} = \dfrac{0{\cdot}76}{1} = \mathbf{0{\cdot}76}$

1.11. অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে 4-সার্থক অংকবিশিষ্ট সংখ্যায় আসন্নীকরণ করুন।

   (a) 8·0008 (ii) 2·562356 (iii) 0·34026 (iv) 0·000243465 (e) 1·3455 (f) 2·0025

2. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে 3 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ সংখ্যায় আসন্নীকরণ করুন।

   (a) 2·46289 (b) 0·0035869 (c) 0·0027 (d) 1·46894 (e) 0·0045 (f) 7·03557

3. যদি V_T, V_A, E_a, E_r এবং E_P যথাক্রমে সঠিক মান, আসন্ন মান, পরমভ্রান্তি, আপেক্ষিক ভ্রান্তি ও শতকরা ভ্রান্তি হয়, তবে

   (a) $V_T = 2{\cdot}546282$, $V_A = 2{\cdot}5463$ হলে, E_a, E_r এবং E_P এর মান নির্ণয় করুন।

   (b) $E_a = 0{\cdot}2 \times 10^{-3}$, $E_r = 0{\cdot}32 \times 10^{-5}$ হলে, V_T এর মান নির্ণয় করুন।

   (c) $V_T = 2{\cdot}73456$, $E_r = 0{\cdot}2 \times 10^{-2}$ হলে, E_a, E_P এর মান নির্ণয় করুন।

4. x-এর শুদ্ধ সার্থক সংখ্যা নির্ণয় করুন যখন উহার বিভিন্ন মানের জন্য পরমভ্রান্তি দেওয়া আছে।

   (a) $x = 0{\cdot}3681$ এবং $E_a = 0{\cdot}23 \times 10^{-2}$

   (b) $x = 841{\cdot}256$ এবং $E_a = 0{\cdot}1$

   (c) $x = -33{\cdot}783$ এবং $E_a = 0{\cdot}3 \times 10^{-2}$

5. x-এর শুদ্ধ সার্থক অংক নির্ণয় করুন যখন উহাদের মান ও আপেক্ষিক ভ্রান্তি দেওয়া আছে।

(a) $x = 0{\cdot}4785$ এবং $E_r = 0{\cdot}2 \times 10^{-2}$

(b) $x = 386{\cdot}4$ এবং $E_r = 0{\cdot}3$

(c) $x = 86{\cdot}34$ এবং $E_r = 0{\cdot}1$

6. $1{\cdot}8921$ সংখ্যাটির সার্থক অংকের সংখ্যা নির্ময় করুন যখন উহার আপেক্ষিক ভ্রান্তি $0{\cdot}1 \times 10^{-2}$

7. পরমভ্রান্তি, আপেক্ষিক ভ্রান্তি ও শতকরা ভ্রান্তি নির্ণয় করুন।

(a) যদি $\frac{5}{6}$ কে $0{\cdot}8333$ তে আসন্নীকরণ করা হয়।

(b) যদি $1{\cdot}33$ কে $\frac{4}{3}$ এর আসন্ন মান ধরা হয়।

(c) যদি $2{\cdot}71828$-এর আসন্ন মান $2{\cdot}71937$ নেওয়া হয়।

(d) যদি $\frac{1}{3}$ এর আসন্ন মান $0{\cdot}333$ নেওয়া হয়।

8. কত দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt{20}$ এর আসন্ন মান নিলে ভ্রান্তির পরিমাণ $0{\cdot}1\%$ এর বেশী হবে না?

1.12. উত্তরমালা

1. (a) 8·001 (b) 2·562 (c) 0·3403 (d) 0·0002435 (e) 1·346 (f) 2·004
2. (a) 2·463 (b) 0·004 (c) 0·003 (d) 1·469 (e) 0·004 (f) 7·036
3. (a) $E_a = 1{\cdot}8 \times 10^{-5}$, $E_r = 7{\cdot}07 \times 10^{-6}$, $E_P = 7{\cdot}07 \times 10^{-4}$ %

   (b) 62·5 (c) $E_a = 0{\cdot}00547$, $E_P = 0{\cdot}2\%$
4. (a) 2 ; (b) 3 ; (c) 4
5. (a) 2 ; (b) 1 ; (c) 0
6. 3
7. (a) $E_a = 0{\cdot}00003$, $E_r = 0{\cdot}00018$, $E_P = 0{\cdot}004\%$

   (b) $E_a = 0{\cdot}00333$, $E_r = 0{\cdot}0025$, $E_P = 0{\cdot}25\%$

   (c) $E_a = 0{\cdot}00109$, $E_r = 0{\cdot}00040099$, $E_P = 0{\cdot}04\%$

   (d) $E_a = 0{\cdot}00033$, $E_r = 0{\cdot}001$, $E_P = 0{\cdot}1\%$

1.13. সহায়ক গ্রন্থবলি

1. DUTTA, N AND JANA, R : INTRODUCTORY NUMERICAL ANALYSIS, SREEDHAR PRAKASHANI, KOLKATA
2. GUPT, A AND BOSE, S.C : INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS, ACADEMIC PUBLISHERS, KOLKATA
3. MOLLAH, S.A. : INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS, BOOK AND ALLIED (P) LTD, KOLKATA
4. GOEL, B.S. AND MITAL, S.K. : NUMERICAL ANALYSIS, PRAGATIS PRAKASHANI, MEERUT

একক 2 ☐ সসীম অন্তর ও সসীম অন্তর সারণি (Finite difference and finite difference table)

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

2.2 উদ্দেশ্য

2.3 অগ্রান্তর

2.4 উদাহরণ

2.5 পশ্চাদান্তর

2.6 উদাহরণ

2.7 অগ্রান্তর প্রকারক Δ-এর বিশেষ ধর্ম

2.8 উদাহরণ

2.9 সরণ প্রকারক এবং অগ্রান্তর ও পশ্চাদান্তর প্রকারকের সহিত সম্পর্ক

2.10 অপেক্ষকের যে কোনো মান উহার প্রধান মান ও প্রধান অগ্রান্তের দ্বারা প্রকাশ

2.11 উদাহরণ

2.12 অনুশীলনী

2.13 উত্তরমালা

2.14 সহায়ক গ্রন্থাবলি

2.1 প্রস্তাবনা (Introduction)

সুপ্রাচীনকাল থেকেই গণিতবিদরা সাংখ্যিক পদ্ধতির ব্যাপারে সসীম অন্তর ও সসীম অন্তর সারণির প্রতি বিশেষ দৃষ্টি দিয়ে এসেছেন। স্যার আইজ্যাক নিউটন তাদের মধ্যে অন্যতম। তিনি সাংখ্যিক পদ্ধতিতে সসীম অন্তর ও সারণিত অপেক্ষক (tabulated function) বেশি ব্যবহার করেছিলেন।

ধরা যাক, $[a, b]$ অন্তরালে একটা অপেক্ষক $y = f(x)$, যেখানে $f(x)$-এর গাণিতিক আকার বা সূত্র বিশদভাবে (Expictly) জানা আছে। তখন [a,b] অন্তরালে x এর যে কোনো মানের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা

যায়। কিন্তু যদি $f(x)$ এর গাণিতিক আকার বা সূত্র জানা না থাকে বা জটিল হয় তাহলেও উক্ত অন্তরালে x এর যে কোনো মানের জন্য $f(x)$ এর সঠিক মান নির্ণয় করতে না পারলেও সসীম অন্তরের সাহায্যে আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারা যায়। তাই সসীম অন্তর ও সসীম অন্তরসারণির ধারনা সাংখ্যিক বিশ্লেষণের মূল বিষয়বস্তু। এই এককে আমরা সসীম অন্তর ও সসীম অন্তরসারণি নিয়ে আলোচনা করব।

2.2 উদ্দেশ্য (Object)

এই এককটি পাঠ করে আপনি যেগুলি জানতে পারবেন সেগুলি হল :

- সারণির সাহায্যে যে কোন অপেক্ষকের যে কোন বিন্দুতে মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- সারণির সাহায্যে যে কোন অপেক্ষকের গাণিতিক আকার বা সূত্র নির্ণয় করতে পারবেন।
- অগ্রান্তর (Forward difference), পশ্চাদান্তর (Backward difference) এবং সরণ প্রকারক (Shift operator) এর মধ্যে বিভিন্ন সম্পর্কের সাহায্যে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

2.3 অগ্রান্তর (Forward Differences)

ধরা যাক, [a, b] অন্তরালে $y = f(x)$ একটা অপেক্ষক এবং ঐ অন্তরাল $[a, b]$ তে $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_{n-1}, x_n = \mathrm{b}$ হল $(n + 1)$ সংখ্যক সমদূরবর্তি নির্দিষ্ট বিন্দু, যাদের সাধারণ অন্তর h, অর্থাৎ $x_r = x_0 + rh$ $(r = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n)$ এবং ঐ বিন্দুগুলিতে $f(x)$ অপেক্ষকের মানগুলি জানা আছে এবং মানগুলি হল ঃ

$$y_0 = f(x_0)$$
$$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$$
$$y_2 = f(x_2) = f(x_0 + 2h)$$
$$y_3 = f(x_3) = f(x_0 + 3h)$$
- - - - - - - - - - - - - -
$$y_r = f(x_r) = f(x_0 + rh)$$
- - - - - - - - - - - - - -
$$y_n = f(x_n) = f(x_0 + nh)$$

এখানে $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r, \ldots\ldots, x_n$ গুলিকে আর্গিউমেন্ট (argument) এবং $y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots y_r \ldots\ldots y_n$ গুলিকে এন্ট্রি (entry) বলা হয়।

এখন নিচের অন্তরগুলিকে যথা

$f(x_0 + h) - f(x_0) = y_1 - y_0$

$f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h) = y_2 - y_1$

$f(x_0 + 3h) - f(x_0 + 2h) = y_3 - y_2$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$f(x_0 + nh) - f(x_0 + \overline{n-1}h) = y_n - y_{n-1}$

$y = f(x)$ এর প্রথম অগ্রান্তর (First forward difference) বলা হয় এবং যথাক্রমে Δy_0, Δy_1, Δy_2, ..., Δy_{n-1} দ্বারা সূচীত করা হয়।

অর্থাৎ

$$\left.\begin{aligned}
\Delta y_0 &= y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0) \\
\Delta y_1 &= y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) \\
\Delta y_2 &= y_3 - y_2 = f(x_0 + 3h) - f(x_0 + 2h) \\
&- \\
\Delta y_{n-1} &= y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + \overline{n-1}\,h)
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(2.3.1)$$

এখানে Δ কে অগ্রান্তর প্রকারক (Forward difference operator) বলা হয়।

সাধারণ ভাবে, $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$ কে $y = f(x)$ এর অগ্রান্তর প্রকারক বলা হয়। অনুরূপে, প্রথম অগ্রান্তের অগ্রান্তর কে দ্বিতীয় অগ্রান্তর বলা হয় এবং $\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2, \ldots\ldots, \Delta^2 y_{n-1}$ দ্বারা সূচীত হয়।

অর্থাৎ

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^2 y_0 &= \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0 \\
\Delta^2 y_1 &= \Delta(\Delta y_1) = \Delta(y_2 - y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - y_2 - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1 \\
\Delta^2 y_2 &= \Delta(\Delta y_2) = \Delta(y_3 - y_2) = \Delta y_3 - \Delta y_2 = y_4 - y_3 - (y_3 - y_2) = y_4 - 2y_3 + y_2 \\
&- \\
\Delta^2 y_{n-2} &= \Delta(\Delta y_{n-2}) = \Delta(y_{n-1} - y_{n-2}) = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - y_{n-1} - (y_{n-1} - y_{n-2}) = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}
\end{aligned}\right\}(2.3.2)$$

এইভাবে দ্বিতীয় অগ্রান্তের অগ্রান্তরকে তৃতীয় অগ্রান্তর বলা হয় এবং $\Delta^3 y_0, \Delta^3 y_1, \Delta^3 y_2, \ldots, \Delta^3 y_{n-3}$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^3 y_0 &= \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta(y_2 - 2y_1 + y_0) = \Delta y_2 - 2\Delta y_1 + \Delta y_0 \\
&= y_3 - y_2 - 2(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 \\
\Delta^3 y_1 &= \Delta(\Delta^2 y_1) = \Delta(y_3 - 2y_2 + y_1) = \Delta y_3 - 2\Delta y_2 + \Delta y_1 \\
&= y_4 - y_3 - 2(y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\ldots(2.3.3)$$

সাধারণভাবে r-তম অগ্রান্তরগুলি হল ঃ

$$\Delta^r y_0 = \Delta^{r-1} y_1 - \Delta^{r-1} y_0$$

$$\Delta^r y_1 = \Delta^{r-1} y_2 - \Delta^{r-1} y_1$$

. . . .

$$\Delta^r y_{n-1} = \Delta^{r-1} y_n - \Delta^{r-1} y_{n-1}$$

এবং বিশেষভাবে বলা যায়

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x) \qquad \text{..... (2.3.4)}$$

মন্তব্য ঃ সমীকরণ (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) থেকে বলতে পারি যে কোনো উর্ধ্বক্রমের অগ্রান্তরকে y_i (i = 0, 1, 2, 3, ..., n) এর সাহায্যে প্রকাশ করা যায় এবং উহাদের সহজগুলি দ্বিপদী সহগ (Binomial coefficient)

অতএব সাধারণ ভাবে পাই

$$\Delta^n y_0 = y_n - {}^nC_1 . y_{n-1} + {}^nC_2 . y_{n-2} - {}^nC_3 . y_{n-1} + ...+ (-1)^n y_0$$

নিচের সারণিতে অগ্রান্তর নির্ণয়ের ধারা দেখান হল, যেখানে অন্তরগুলিকে দুটি আর্গিউমেন্টের মধ্যবর্তী স্থানে লেখা হয়েছে এবং এই সারণিকে সাধারণতঃ কর্ণ আগ্রান্তর সারণি বলা হয়।

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		$y_1 - y_0 (= \Delta y_0)$			
x_1	y_1		$\Delta y_1 - \Delta y_0 (= \Delta^2 y_0)$		
		$y_2 - y_1 (= \Delta y_1)$		$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 (= \Delta^3 y_0)$	
x_2	y_2		$\Delta y_2 - \Delta y_1 (= \Delta^2 y_1)$		$\Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 (= \Delta^4 y_0)$
		$y_3 - y_2 (= \Delta y_2)$		$\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 (= \Delta^3 y_1)$	
x_3	y_3		$\Delta y_3 - \Delta y_2 (= \Delta^2 y_2)$		$\Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1 (= \Delta^4 y_1)$
		$y_4 - y_3 (= \Delta y_3)$		$\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 (= \Delta^3 y_2)$	
x_4	y_4		$\Delta y_4 - \Delta y_3 (= \Delta^2 y_3)$		$\Delta^3 y_3 - \Delta^3 y_2 (= \Delta^4 y_2)$
		$y_5 - y_4 (= \Delta y_4)$		$\Delta^3 y_4 - \Delta^3 y_3 (= \Delta^4 y_3)$	....ইত্যাদি
x_5	y_5		$\Delta y_5 - \Delta y_4 (= \Delta^2 y_4)$		
		$y_6 - y_5 (= \Delta y_5)$			
x_6	y_6				

2.4 উদাহরণ

উদাহরণ 2.4.1. নিম্নে দেওয়া সারণি ব্যবহার করে অগ্রান্তর সারণি তৈরী করুন।

x :	0	1	2	3	4	5
$y = f(x)$:	1	4	13	34	73	136

সমাধান ঃ অগ্রান্তর সারণিটি হল ঃ

(সারণি নং 2.4.1)

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1					
		3				
1	4		6			
		9		6		
2	13		12		0	
		21		6		0
3	34		18		0	
		39		6		
4	73		24			
		63				
5	136					

উপরের সারণি থেকে আমরা সহজেই লিখতে পারি ঃ

$\Delta^2 f(0) = 6$, $\Delta^2 f(2) = 18$, $\Delta^3 f(1) = 6$, $\Delta f(4) = 63$, $\Delta^4 f(1) = 0$, $\Delta^3 f(2) = 6$ ইত্যাদি।

উদাহরণ 2.4.2 : নিম্নে দেওয়া সারণি ব্যবহার করে অগ্রান্তর সারণি তৈরী করুন।

x :	10	15	20	25	30	35
$y = f(x)$:	19·97	21·51	22·47	23·52	24·65	25·89

সমাধান ঃ অগ্রান্তর সারণিটি হল ঃ

(সারণি নং 2.4.2)

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
10	19·97					
		1·54				
15	21·51		–0·58			
		0·96		0·75		
20	22·47		0·19		–0·92	
		1·15		–0·15		–1·18
25	23·52		0·02		0·26	
		1·13		0·11		
30	24·65		0·11			
		1·24				
35	25·89					

এখানে, সারণি থেকে সহজেই লিখতে পারি

$\Delta^3 f(20) = 0{\cdot}11$, $\Delta^4 f(10) = -0{\cdot}92$, $\Delta^2 f(15) = 0{\cdot}19$, $\Delta f(30) = 1{\cdot}24$, $\Delta^2 f(25) = 0{\cdot}11$, ইত্যাদি।

2.5 পশ্চাদান্তর (Backward Diffrences)

যদি $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$, ..., $y_n - y_{n-1}$ অন্তরগুলিকে ∇y_1, ∇y_2, ∇y_3, ..., ∇y_n দ্বারা সূচীত করা হয়, তবে অন্তরগুলিকে $y = f(x)$ এর প্রথম পশ্চাদান্তর বলা হয়। এখানে ∇-কে পশ্চাদান্তর প্রকারক (Backward difference operator) বলা হয়।

অগ্রান্তরের ন্যায়, একইরকমভাবে উচ্চক্রমের পশ্চাদন্তরগুলি হল

$\nabla y_r = y_r - y_{r-1}$, $\nabla^2 y_r = \nabla y_r - \nabla y_{r-1}$, $\nabla^3 y_r = \nabla^2 y_r - \nabla^2 y_{r-1}$, ... ইত্যাদি।

নিচের সারণিতে পশ্চান্তর নির্ণয়ের ধারা দেখান হল, যেখানে অন্তরগুলিকে দুটি আর্গিউমেন্টের মধ্যবর্তী স্থানে লেখা হয়েছে এবং এই সারণিকে সাধারণত কর্ণ পশ্চাদান্তর বলা হয়।

পশ্চাদান্তর সারণি (সারণি 2.5.1 নং)

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		$y_1 - y_0 (= \nabla y_1)$			
x_1	y_1		$\nabla y_2 - \nabla y_1 (= \nabla^2 y_2)$		
		$y_2 - y_1 (= \nabla y_2)$		$\nabla^2 y_3 - \nabla^2 y_2 (= \nabla^3 y_3)$	
x_2	y_2		$\nabla y_3 - \nabla y_2 (= \nabla^2 y_3)$		$\nabla^3 y_4 - \nabla^3 y_3 (= \nabla^4 y_4)$
		$y_3 - y_2 (= \nabla y_3)$		$\nabla^2 y_4 - \nabla^2 y_3 (= \nabla^3 y_4)$	
x_3	y_3		$\nabla y_4 - \nabla y_3 (= \nabla^2 y_4)$		$\nabla^3 y_5 - \nabla^3 y_4 (= \nabla^4 y_5)$
		$y_4 - y_3 (= \nabla y_4)$		$\nabla^2 y_5 - \nabla^2 y_4 (= \nabla^3 y_5)$	
x_4	y_4		$\nabla y_5 - \nabla y_4 (= \nabla^2 y_5)$		
		$y_5 - y_4 (= \nabla y_5)$			
x_5	y_5				

2.6 উদাহরণ

উদাহরণ ঃ 2.6.1 প্রদত্ত সারণি প্রয়োগ করে পশ্চাদান্তর সারণি তৈরী করুন।

x :	0	1	2	3	4	5
$y = f(x)$:	12	15	20	27	39	52

সমাধান ঃ পশ্চাদন্তর সারণিটি হল

(সারণি নং 2.6.1)

x	$y = f(x)$	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
0	12					
		3				
1	15		2			
		5		0		
2	20		2		3	
		7		3		–10
3	27		5		–7	
		12		– 4		
4	39		1			
		13				
5	52					

এখন সারণি থেকে সহজেই লেখা যায়

$\nabla^2 f(3) = 2,\ \nabla^4 f(4) = 3,\ \nabla^2 f(2) = 2,\ \nabla f(1) = 3,\ \nabla^4 f(5) = -7,\ \nabla^2 f(4) = 5$ ইত্যাদি।

2.7 অগ্রান্তর প্রকারক Δ-এর কয়েকটি বিশেষ ধর্ম (Some properties of forward difference operator)

এখানে আমরা অগ্রান্তর প্রকারক Δ-এর বিশেষ কয়েকটি ধর্ম নিয়ে আলোচনা করব।

2.7.1. ধর্ম-1 : কোনো ধ্রুবক অপেক্ষকের অগ্রান্তর শূন্য।

প্রমাণ ঃ মনে করুন, $f(x) = K$ (ধ্রুবক)

$$\therefore \quad \Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = K - K = 0$$

2.7.2. ধর্ম-2 : ধ্রুবক গুণনের সাপেক্ষে অগ্রান্তর প্রকারক Δ বিনিময় যোগ্য অর্থাৎ

$$\Delta\,[Kf(x)] = K\,\Delta f(x). \qquad \ldots\ldots (2.7.1)$$

প্রমাণ ঃ $\Delta[Kf(x)] = Kf(x+h) - Kf(x) = K[f(x+h) - f(x)] = K\Delta f(x)$

2.7.3. ধর্ম-3 : $f(x)$ এবং $g(x)$ কোনো দুটি অপেক্ষক হলে, উহাদের যোগফল বা বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফলের প্রথম অগ্রান্তের মান হবে যথাক্রমে

(i) $\Delta\,[f(x) \pm g(x)] \quad = \Delta f(x) \pm \Delta\phi(x)$

(ii) $\Delta\,[f(x).\phi(x)] \quad = f(x).\Delta\phi(x) + \Delta f(x).E\phi(x)$, যেখানে $E\phi(x) = \phi(x+h)$

$\qquad = Ef(x).\ \Delta\phi(x) + \phi(x).\ \Delta f(x)$

(iii) $$\Delta\left[\frac{f(x)}{\phi(x)}\right] = \frac{\phi(x).\Delta f(x) - f(x).\Delta\phi(x)}{\phi(x).E\phi(x)} \quad \begin{bmatrix}\phi(x) \neq 0 \\ E\phi(x) \neq 0\end{bmatrix}$$

প্রমাণ ঃ (i) $\Delta\ [f(x) \pm \phi(x)] = [f(x+h) \pm \phi(x+h)] - [f(x) \pm \phi(x)$

$= [f(x+h) - f(x)] \pm [\phi(x+h) - \phi(x)]$

$= \Delta f(x) \pm \Delta\phi(x)$

মন্তব্য ঃ সমীকরণ (2.7.1) টি প্রয়োগ করে পাই

$\Delta[\lambda_1 f(x) \pm \lambda_2\ \phi(x) \pm \lambda_3\ \Psi\ (x)]$

$= \lambda\Delta f(x) \pm \lambda_2\Delta\phi(x) \pm \lambda_3\Delta\Psi(x)$, যখন $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ধ্রুবক।

(ii) $\Delta[f(x).\phi(x)] = f(x+h).\ \phi(x+h) - f(x)\ \phi(x)$

$= f(x+h).\phi(x+h) - \phi(x+h)\ f(x) + \phi\ (x+h)\ f(x) - f(x)\phi(x)]$

$= \phi(x+h)\ [f(x+h) - f(x)] + f(x)\ [\phi\ (x+h) - \phi(x)]$

$= \phi(x+h).\ \Delta f(x) + f(x)\ \Delta\phi(x)$

$= f(x).\ \Delta\phi(x) + \Delta f(x).\ E\phi(x)$

(iii) $$\Delta\left[\frac{f(x)}{\phi(x)}\right] = \frac{f(x+h)}{\phi(x+h)} - \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{f(x+h)\phi(x) - \phi(x+h)f(x)}{\phi(x).\phi(x+h)}$$

$$= \frac{f(x+h)\phi(x) - f(x)\phi(x) + f(x).\phi(x) - \phi(x+h)f(x)}{\phi(x).\phi(x+h)}$$

$$= \frac{\phi(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[\phi(x+h) - \phi(x)}{\phi(x).\phi(x+h)}$$

$$= \frac{\phi(x).\Delta f(x) - f(x).\Delta\phi(x)}{\phi(x).E\phi(x)},$$ যেখানে $E\phi(x) = \phi(x+h)$

2.7.4. ধর্ম-4 : অগ্রান্তর প্রকারক Δ মাত্রা সূত্র মেনে চলে অর্থাৎ

$\Delta^m.\Delta^n f(x) = \Delta^{m+n} f(x)$

প্রমাণ ঃ $\Delta^m.\Delta^n f(x) = (\Delta.\Delta.\Delta\ \ldots\ldots m$ সংখ্যক). $(\Delta.\Delta.\Delta\ \ldots.\ n$ সংখ্যক) $f(x)$

$= (\Delta.\Delta.\Delta.\ \ldots\ldots\ (m+n)$ সংখ্যক) $f(x)$

$= \Delta^{m+n} f(x)$.

2.8 উদাহরণ

উদাহরণ 2.8.1. প্রমাণ করুন যে ঃ

(i) $\Delta^n f(x) = (e^h - 1)^n e^x$, যখন $f(x) = e^x$

(ii) $\Delta - \nabla = \Delta.\nabla$

(iii) $\Delta \log f(x) = \log\left[1 + \frac{\Delta f(x)}{f(x)}\right]$

সমাধান ঃ (i) $\Delta f(x) = \Delta e^x = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1) = (e^h - 1)\, e^x$

$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta e^x] = \Delta[(e^h - 1)\, e^x] = (e^h - 1)\, \Delta e^x$

$= (e^h - 1)^2\, e^x$

$\Delta^3 f(x) = \Delta.[\Delta^2 f(x)] = \Delta[(e^h - 1)^2\, e^x] = (e^h - 1)^2\, \Delta e^x$

$= (e^h - 1)^3\, e^x$

. . . .

$\therefore\ \Delta^n f(x) = (e^h - 1)^n\, e^x$

(ii) $\Delta.\nabla f(x) = \Delta[f(x) - f(x - h)] = \Delta f(x) - \Delta f(x - h)$

$= \Delta f(x) - [f(x) - f(x - h)] = \Delta f(x) - \nabla f(x)$

$= (\Delta - \nabla)\, f(x)$

$\therefore\ \Delta.\nabla = \Delta - \nabla$

(iii) $\Delta \log f(x) = \log f(x + h) - \log f(x) = \log \frac{f(x+h)}{f(x)}$

$= \log\left[\frac{f(x+h) - f(x) + f(x)}{f(x)}\right] = \log\left[1 + \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}\right]$

$= \log\left[1 + \frac{\Delta f(x)}{f(x)}\right]$

2.9 সরণ প্রকারক এবং অগ্রান্তর ও পশ্চাদন্তর প্রকারকের সহিত সম্পর্ক (Shift opeator and Relations Between Forward Difference Operator, Backward operator)

যে কোনো অপেক্ষক $y = f(x)$-এর জন্য সরণ প্রকারক E-এর সংজ্ঞা হচ্ছে ঃ

$$Ef(x) = f(x + h) \quad \text{....... (2.9.1)}$$

আমরা জানি, $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) = Ef(x) - f(x) = (E - 1)f(x)$

$$\therefore \; \Delta = E - 1 \quad \text{বা,} \quad E = \Delta + 1 \quad \text{....... (2.9.2)}$$

এখন, $E^2 f(x) = E.Ef(x) = Ef(x + h) = f(x + 2h)$

$$E^3 f(x) = E.Ef(x + h) = Ef(x + 2h) = f(x + 3h)$$

অনুরূপে, $E^n f(x) = f(x + nh)$ .... (2.9.3)

আবার, n এর জন্য $-n$ ধরলে পাওয়া যায়

$$E^{-n} f(x) = f(x - nh) \quad \text{....... (2.9.4)}$$

এবং $E.\ E^{-1} f(x) = E.f(x - h) = f(x)$;

আবার $E^{-1}.Ef(x) = E^{-1} f(x + h) = f(x)$ .... (2.9.5)

$$\therefore \; EE^{-1} = 1 = E^{-1}.E.$$

এবং E^{-1} কে E প্রকারকের বিপরীত প্রকারক বলা হয়।

$\nabla.Ef(x) = \nabla f(x + h) = f(x + h) - f(x) = \Delta f(x)$

$$\therefore \; \nabla.E = \Delta \quad \text{....... (2.9.6)}$$

আবার $E.\nabla f(x) = E\,[f(x) - f(x - h)] = f(x + h) - f(x) = \Delta f(x)$

$$\therefore \; E.\nabla = \Delta \quad \text{....... (2.9.7)}$$

$$\therefore \; \nabla.E = E.\nabla = \Delta = E - 1 \; \text{[(2. 9. 6), (2. 9. 7) এবং (2. 9. 2) দ্বারা]}$$

.... (2.9.8)

অতএব, E এবং ∇ প্রকারক দুটি বিনিময়যোগ্য।

$\Delta.Ef(x) = \Delta f(x + h) = f(x + 2h) - f(x + h)$

আবার, $E.\Delta f(x) = E\ [f(x+h) - (f(x)] = Ef(x+h) - Ef(x) = f(x+2h) - f(x+h)$

$\therefore\ \Delta.Ef(x) = E.\Delta f(x)$

অতএব $\Delta.E = E.\Delta$ ...... (2.9.9)

অর্থাৎ Δ এবং E প্রকারকদ্বয় বিনিময়যোগ্য

আবার, $\nabla = E^{-1}.E\nabla = E^{-1}\Delta$ (2.9.7 দ্বারা)

$= E^{-1}(E-1)$ (2.9.2 দ্বারা)

$= E^{-1}.E - E^{-1} = 1 - E^{-1}$ [2.9.5 দ্বারা]

$\therefore\ E^{-1} = 1 - \nabla$ .... (2.9.10)

আবার আমরা জানি, (2.9.2) এবং (2.9.10) হতে

$(1+\nabla)(1-\nabla) = E.E^{-1} = 1$ [2.9.10 দ্বারা] ...... (2.9.11)

2.10 অপেক্ষকের যে কোনো মান উহার প্রধান পদ ও প্রধান অগ্রান্তের উর্দ্ধক্রমের দ্বারা প্রকাশ

আমরা জানি,

$$f(x_0+nh) = E^n f(x_0) = (1+\Delta)^n f(x_0) \quad [2.9.2 \text{ দ্বারা}]$$

$$= [1 + {}^nC_1.\Delta + {}^nC_2.\Delta^2 + {}^nC_3.\Delta^3 + \ldots + {}^nC_r.\Delta^r + \ldots + {}^nC_{n-1}.\Delta^{n-1} + {}^nC_n.\Delta^n]f(x_0)$$

$$= f(x_0) + {}^nc_1.\Delta f(x_0) + {}^nc_2.\Delta^2 f(x_0) + {}^nc_3.\Delta^3 f(x_0) + \ldots + {}^nc_r\Delta^r f(x_0) + \ldots + {}^nc_{n-1}.\Delta^{n-1}f(x_0) + {}^nc_n\Delta^n f(x_0)$$

2.11 উদাহরণ

উদাহরণ 2.11.1 মান নির্ণয় করুন।

(i) $\Delta(\tan^{-1}x)$ (ii) $\left(\frac{\Delta}{E}\right)\sin 2x$ (iii) $\Delta\left[\frac{2x-1}{3-x}\right]$ যখন $h = 1$

সমাধান : (i) $\Delta\tan^{-1}x = \tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{x+h-x}{1+(x+h)x}$

$$= \tan^{-1}\frac{h}{1+hx+x^2}$$

(ii) $\left(\frac{\Delta}{E}\right)\sin 2x = (\Delta.E^{-1})\sin 2x = \Delta \sin 2(x-h)$

$$= \sin 2x - \sin 2(x-h) = 2\cos(2x-h)\sin h.$$

(iii) $\Delta\left[\dfrac{2x-1}{3-x}\right] = \dfrac{2(x+1)-1}{3-(x+1)} - \dfrac{2x-1}{3-x}$ [যেহেতু h = 1]

$$= \frac{2x+1}{2-x} - \frac{2x-1}{3-x} = \frac{(2x+1)(3-x)-(2x-1)(2-x)}{(2-x)(3-x)}$$

$$= \frac{5}{6-5x+x^2}$$

উদাহরণ 2.11.2 প্রমাণ করুন।

(i) $\Delta^2 U_n = 0$, যখন $U_n = 2n+1$

(ii) $U_{n+2} - 7U_{n+1} + 12U_n = 0$ যখন $U_n = A.3^n + B.4^n$

সমাধান (i) $\Delta U_n = \Delta(2n+1) = 2(n+h) + 1 - (2n+1) = 2h$

$\Delta^2 U_n = \Delta(2h) = 2h - 2h = 0$

(ii) এখানে $U_n = A.3^n + B.4^n$

$U_{n+2} = A.3^{n+2} + B.4^{n+2} = 9A.3^n + 16B.4^n$

$U_{n+1} = A.3^{n+1} + B.4^{n+1} = 3A.3^n + 4B.4^n$

অতএব, $U_{n+2} - 7U_{n+1} + 12U_n = (9A.3^n + 16B.4^n) - 7(3A.3^n + 4B.4^n)$

$$+ 12(A.3^n + B.4^n) = 0$$

উদাহরণ 2.11.3 নিচের সারণিটি y = f(x) কে সিদ্ধ করলে, f(x) এবং f(1·5) দ্বয়ের মান নির্ণয় করুন।

x :	0	1	2	3	4
$y = f(x)$:	1	2	5	10	17

সমাধান ঃ অগ্রান্তর সারণিটি হল ঃ

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$
0	1		
		1	
1	2		2
		3	
2	5		2
		5	
3	10		2
		7	
4	17		

সমীকরণ (2.10.1) হতে পাই

$$f(x_0 + nh) = f(x_0) + {}^nC_1 . \Delta f(x_0) + {}^nC_2 . \Delta^2 f(x_0) + {}^nC_3 . \Delta^3 f(x_0)$$

এখানে $x_0 = 0$, $h = 1$, এবং মনে করুন $x_0 + nh = n = x$

$$\therefore \; f(x) = f(0) + {}^nC_1 \Delta f(0) + {}^nC_2 \Delta^2 f(0)$$

$$= 1 + x.1 + \frac{n(n-1)}{2}.2 = 1 + x + x^2 - x = x^2 + 1$$

এবং $f(1{\cdot}5) = (1{\cdot}5)^2 + 1 = 3{\cdot}25$

উদাহরণ 2.11.4. প্রদত্ত সারণির সাহায্যে, $f(x)$ এবং $f(0)$ এর মান নির্ণয় করুন।

x :	0	1	2	3	4	5
$y = f(x)$:	41	43	47	53	61	71

সমাধান ঃ অগ্রান্তর সারণিটি হল ঃ

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$
0	41		
		2	
1	43		2
		4	
2	47		2
		6	
3	53		2
		8	
4	61		2
		10	
5	71		

আমরা জানি,

$$f(x_0 + nh) = E^n f(x_0) = (1+\Delta)^n f(x_0)$$

এখানে, $x_0 = 0$, $h = 1$ এর $x_0 + nh = x$ ধরলে

$$0 + n = x \qquad \therefore\ n = x$$

$\therefore\ f(x) = (1+\Delta)^x f(0)$

$$= \left[1 + x.\Delta + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 + \ldots\ldots.\right] f(0)$$

$$= f(0) + x.\Delta f(0) + \frac{x^2 - x}{2}\Delta^2 f(0) = 41 + x.2 + \frac{x^2 - x}{2}.2$$

$$= \mathbf{x^2 + x + 41}$$

$\therefore\ f(0) = 36 + 6 + 41 = \mathbf{83}$

2.12 অনুশীলনী

1. প্রদত্ত সারণি ব্যবহার করে অগ্রান্তর সারণি তৈরী করুন।

x :	0	1	2	3	4	5
$f(x)$:	12	15	20	27	39	52

এবং $\Delta^2 f(3)$, $\Delta^3 f(2)$, $\Delta^4 f(0)$, $\Delta f(4)$-এর মানগুলি নির্ণয় করুন।

2. প্রদত্ত সারণি ব্যবহার করে পশ্চান্তর সারণি তৈরী করুন এবং $\nabla^2 f(4)$, $\nabla^2 f(2)$, $\nabla^3 f(3)$ এর মানগুলি নির্ণয় করুন।

x :	0	1	2	3	4
$f(x)$:	2	3	12	35	78

3. মান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\frac{\Delta^2}{E}\sin(x-h)$

(ii) $\Delta\ [(2x + 1)\ (2 - 3x)]$

(iii) $\Delta^3 (2x^2 + x - 1)$

4. $\Delta f(x) = e^x$, হলে f(x) এর মান নির্ণয় করুন।

5. $\Delta^2 f(x)$ এর মান নির্ণয় করুন, যখন $f(x) = 39x^2 - 12x + 4$, $h = 1$ নিয়ে।

6. $f(x)$ এর অগ্রান্তর সারণি তৈরী করুন, x = 1, 2, 3, 4 এর জন্য, যখন

$f(x) = x^3 + 2x + 1$

7. $U_n = A.2^n + B.3^n$ হলে প্রমাণ করুন, $U_{n+2} - 5U_{n+1} + 6U_n = 0$

8. $U_n = 3^n (A + B. n)$ হলে প্রমাণ করুন, $U_{n+2} - 6U_{n+1} + 9U_n = 0$

9. প্রদত্ত সারণি ব্যবহার করে $f(x)$ এবং $f(-2)$ এর মান নির্ণয় করুন।

x :	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$:	–2	1	0	1	10	33

10. প্রদত্ত সারণি ব্যবহার করে $f(x)$ এবং $f(2{\cdot}2)$ এর মানগুলি নির্ণয় করুন।

x :	0	1	2	3
$f(x)$:	1	2	11	34

2.13 উত্তরমালা

1. অগ্রান্তর সারণিটি হল

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0	12					
		3				
1	15		2			
		5		0		
2	20		2		3	–10
		7		3		
3	27		5		–7	
		12		–4		
4	39		1			
		13				
5	32					

এবং $\Delta^2 f(3) = 1$, $\Delta^3 f(2) = -4$, $\Delta^4 f(0) = 3$, $\Delta f(4) = 13$.

2. পশ্চাদান্তর সারণিটি হল।

x	$y = f(x)$	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
0	2			
		1		
1	3		8	
		9		6
2	12		14	
		23		6
3	35		20	
		43		
4	78			

এবং $\nabla^2 f(4) = 20$, $\nabla^2 f(2) = 8$, $\nabla^3 f(3) = 6$.

3. (i) $\sin(x + 2h) - 2\sin(x + h) + \sin x$

(ii) $-5 - 12x$ [$h = 1$ নিয়ে]

(iii) 0.

4. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^h - 1}$

5. 78.

6.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
1	4			
		9		
2	13		12	
		21		6
3	34		18	
		39		
4	74			

9. $f(x) = x^3 - 2x^3 + 1$, $f(-2) = -15$

10. $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, $f(2{\cdot}2) = 15{\cdot}488$

2.14 সহায়ক গ্রন্থাবলি

1. GUPTA, A, BOSE, S.C. : INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS, ACADEMIC PUBLISHERS, KOLKATA.
2. GOEL, B.S. AND MITAL, S.K. : NUMERICAL ANALYSIS, PRAGATI PRAKASHAN, MEERUT.
3. MOLLAH, S.A. : INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS, BOOK AND ALLIED (P) LTD. KOLKATA.
4. ISLAM, N AND BANERJEE, J : NUMERICAL ANALYSIS AND STATISTICS, ACADEMIC PUBLISHERS, KOLKATA.

একক 3 □ আন্তঃপাঠন (Interpolation)

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

3.2 উদ্দেশ্য

3.3 নিউটনের অগ্রআন্তঃপাঠন সূত্র।

3.4 নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র।

3.5 লাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্র।

3.6 উদাহরণ।

3.7 অনুশীলনী।

3.8 উত্তরমালা।

3.9 সহায়ক গ্রন্থাবলি।

3.1 প্রস্তাবনা (Introduction)

ধরা যাক $[a, b]$ অন্তরালে $y = f(x)$ একটি অপেক্ষক যার গাণিতিক আকার বা সূত্র অজানা কিন্তু ওই অন্তরালে স্বাধীন চল x-এর $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, এই $(n + 1)$ সংখ্যক বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ অপেক্ষকটির মানগুলি জানা আছে এবং মানগুলি যথাক্রমে $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_r, \ldots, y_{n-1}, y_n$ যে পদ্ধতিতে, $[a, b]$ অন্তরালে চল x-এর যেকোনো মানের ($x_0, x_1, x_2, x_r, \ldots, x_n$ ছাড়া) জন্য $f(x)$-এর একটা আসন্নমান নির্ণয় করা যায়, তাকে আন্তঃপাঠন পদ্ধতি (Method of interpolation) বলা হয়। এই পদ্ধতিতে, $[a, b]$ অন্তরালে x-এর ক্ষুদ্রতম $(a = x_0)$ এবং বৃহত্তম $(b = x_n)$ মানের মধ্যবর্তী কোনো মানের জন্য $f(x)$-এর আসন্ন মান নির্ণয় করা হলে পদ্ধতিটিকে অন্তঃপাঠন বলা হয়, আর যদি $[a, b]$ অন্তরালের সামান্য বাইরের কোনো x-এর মানের জন্য $f(x)$-এর আসন্ন মান নির্ণয় করা হয় তবে পদ্ধতিটিকে বহিঃপাঠন (Extrapolation) বলা হয়।

এই আন্তঃপাঠন পদ্ধতি বা সূত্রে $f(x)$ অপেক্ষকটিকে একটা সহজ ও সরল বহুপদী বা অপেক্ষক $\phi(x)$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করা হয় যেখানে x-এর $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_n$ মানের জন্য উভয়েই সমান হয় অর্থাৎ,

$$f(x_i) = \phi(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, r, \ldots n) \qquad \ldots\ldots\ldots (3.1.1)$$

এবং $\phi(x)$ বহুপদীটিকে আন্তঃগঠন বহুপদী (Interpolation Polynomial) এবং x বিন্দুতে $\phi(x)$-এর মানকে ঐ বিন্দুতে $f(x)$ এর আসন্ন মান হিসাবে গ্রহণ করা হয়, অর্থাৎ

$$f(x) \simeq \phi(x) \qquad \text{..... (3.1.2)}$$

এখন যদি আমরা লিখি,

$$f(x) = \phi(x) + R_{n+1}(x) \qquad \text{..... (3.1.3)}$$

তাহলে $R_{n+1}(x)$ আন্তঃপাঠন সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ বলা হয়।

3.2 উদ্দেশ্য (Object)

এই এককটি শিখে যেটা করতে পারবেন সেটা হল আন্তঃপাঠন সূত্র বা পদ্ধতির দ্বারা বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যায় সহজ প্রয়োজনীয় আসন্ন বহুপদী নির্ণয় এবং কোন বিশেষ মানের জন্য ওর আসন্ন সাংশিক মান নির্ণয়।

3.3 নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্র (Newton's Forward Interpolation Formula)

মনে করা যাক, $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, এই $(n + 1)$ সংখ্যক সমদূরবর্তী x-এর মানের জন্য $f(x)$ অপেক্ষকটির মান যথাক্রমে $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_r, \ldots, y_{n-1}, y_n$ জানা আছে অর্থাৎ যখন

$$x_i = x_0 + ih,\ x_0 = a,\ h = \frac{b-a}{n} \qquad \text{..... (3.3.1)}$$

তখন $f(x_i) = y_i,\ (i = 0, 1, 2, \ldots n)$ এই ..... (3.3.2)

মানগুলি জানা আছে। এখন আমাদের মূখ্য উদ্দেশ্য হল এমন একটা বহুপদী $P(x)$ নির্ণয় করা যার ঘাত $\leq n$ এবং যার মান x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ বিন্দুতে y_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$-এর মানের সমান, অর্থাৎ

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i \quad [i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n] \qquad \text{..... (3.3.3)}$$

$P(x)$ একটা n ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী বলে, $P(x)$-নিচের আকারে লিখতে পারি।

$$P(x) = A_0 + A_1 (x - x_0) + A_2 (x - x_0)(x - x_1) + A_3 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + A_n (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \qquad \text{..... (3.3.4)}$$

যেখানে A_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ গুলি ধ্রুবক এবং ধ্রুবকগুলি নির্ণয় করতে হবে সমীকরণ (3.3.3)-এর সাহায্যে।

এখন (3.3.4)-এ $x = x_0$ বসিয়ে পাই,

$P(x_0) = A_0 \quad \therefore \; A_0 = P(x_0) = f(x_0) = y_0$ [(3.3.3) দ্বারা] ..... (3.3.5)

আবার, (3.3.4)-তে $x = x_1$ বসিয়ে পাই,

$P(x_1) = A_0 + A_1\,(x_1 - x_0) = A_0 + A_1.h = y_1$

$\therefore\; y_1 = y_0 + A_1 h \Rightarrow A_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \dfrac{\Delta y_0}{h}$, যখন $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ ..... (3.3.6)

আবার, (3.3.4)-তে $x = x_2$ বসিয়ে পাই,

$P(x_2) = A_0 + A_1\,(x_2 - x_0) + A_2\,(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1) = f(x_2) = y_2$

$\therefore\; y_2 = y_0 + \dfrac{\Delta y_0}{h}.2h + A_2.2h.h$ [(3. 3. 5), (3. 3. 6) এবং (3. 3. 1) দ্বারা]

অতএব $A_2 = \dfrac{y_2 - 2(y_1 - y_0) - y_0}{2h^2} = \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}$

$$= \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} \quad ..... (3.3.6)$$

আবার, (3. 3. 4) তে $x = x_3$ বসিয়ে পাই,

$P(x_3) = A_0 + A_1(x_3 - x_0) + A_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + A_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

$= f(x_3) = y_3$

$$\therefore\; A_3 = \frac{y_3 - A_0 - A_1(x_3 - x_0) - A_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_0)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$= \frac{y_3 - y_0 - \dfrac{\Delta y_0}{h}.3h - \dfrac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.3h.2h}{3h.2h.h}$$ [(3.3.1), (3.3.5), (3.3.6)-এর (3.3.7) দ্বারা]

$$= \frac{y_3 - y_0 - 3.\Delta y_0 - 3\Delta^2 y_0}{6h^3}$$

$$= \frac{y_3 - y_0 - 3(y_1 - y_0) - 3(y_2 - 2y_1 + y_0)}{3!.h^3}$$

$$= \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3!.h^3} = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3} = \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!.h^3} \qquad \text{.... (3.3.8)}$$

এইভাবেই আমরা লিখতে পারি,

$$A_r = \frac{\Delta^r y_0}{r!h^r} = \frac{\Delta^r f(x_0)}{r!h^r} \; (r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

এখন A_r $(r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$-এর মানগুলি (3.3.4)-এ বসিয়ে পাই,

$$f(x) \simeq P(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{h} + (x - x_0)(x - x_1).\frac{\Delta^2 y_0}{2!.h^2} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\frac{\Delta^3 y_0}{3!.h^3} + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{r-1})\frac{\Delta^r y_0}{r!h^r} + \cdots +$$

$$+(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{n!.h^n} \qquad \text{...... (3.3.8)}$$

এখন যদি $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ ধরি, তাহলে

$$\frac{x - x_r}{h} = \frac{x - x_0 - rh}{h} = \frac{x - x_0}{h} - r = u - r(r \le n) \qquad \text{........... (3.3.9)}$$

u-কে দশা (Phase) বলা হয় এবং u একটা বিশুদ্ধ সংখ্যা যার কোনো মাত্রা নেই।

দশা u-এর সাপেক্ষে, সমীকরণ (3.3.8)-তে (3.3.9) সমীকরণ প্রয়োগ করে

লেখা যায়

$$f(x) \simeq P(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}.\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}.\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$+\frac{u(u-1)(u-2)\cdots(u-r+1)}{r!}\cdot\Delta^r y_0 + \cdots +$$

$$+\frac{u(u-1)(u-2)\cdots(u-n+1)}{n!}\cdot\Delta^n y_0 \qquad \text{......... (3.3.10)}$$

$$= y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{u}{r}.\Delta^r y_0 + \cdots + \binom{u}{n}.\Delta^n y_0 \qquad \text{......... (3.3.11)}$$

সমীকরণ (3.3.10) বা, (3.3.11)-কে নিউটনের অগ্রআন্তঃপাঠন সূত্র বলা হয় এবং x_0 বিন্দুটিকে প্রারম্ভিক বিন্দু (initial point) বলা হয়।

অপেক্ষক $f(x)$-কে বহুপদী $P(x)$ দ্বারা পরিবর্তিত করলে নিউটনের অগ্রআন্তঃপাঠন সূত্রে যে ভ্রান্তির উদ্ভব হয় তার পরিমাণ হল,

$$R_{n+1} = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).\ \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}$$

$$= u(u-1)(u-2)\cdots(u-n+1)(u-n).\ \frac{h^{n+1}f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \quad \ldots\ldots\ (3.3.12)$$

যেখানে, $min.\ \{x, x_0, x_1, \ldots x_n\} < c < max.\ \{x, x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$

মন্তব্য ঃ

(a) যদি x-এর মান প্রারম্ভিক বিন্দু x_0-এর নিকটবর্তী হয় তবেই নিউটনের অগ্রআন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করা হবে।

(b) দশা $u(0 < u < 1)$ যত ছোট হবে, $f(x)$-এর আসন্ন মান ততই উৎকৃষ্ট হবে অর্থাৎ ভ্রান্তিক পরিমাণ ততই কম হবে।

(c) যদি x-এর মান x_2, x_3-এর মধ্যবর্তী হয়, তবে x_2-কে প্রারম্ভিক বিন্দু ধরলে আসন্ন মান উৎকৃষ্ট হবে।

(d) অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্রে যত বেশী অন্তর সারণির অন্তর ব্যবহার করা হবে ততই উৎকৃষ্ট আসন্ন মান পাওয়া যাবে।

3.4 নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র (Newton's Backward Interpolation Formula)

নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল—

$$f(x) \simeq P_B(x) = y_n + u.\nabla y_n + \frac{u(u+1)}{2!}.\ \nabla^2 y_n + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}.\nabla^3 y_n + \cdots$$

$$\ldots + \frac{u(u+1)(u+2)\ldots(u+r-1)}{r!}\nabla^r y_n$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + \frac{u(u+1)(u+2)\ldots\ldots(u+n-1)}{n!}\nabla^n y_n \quad \ldots\ldots\ldots\ (3.4.1)$$

$$= y_n + u.\Delta y_{n-1} + \frac{u(u+1)}{2!}.\Delta^2 y_{n-2} + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}.\Delta^2 y_{n-3} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{u(u+1)(u+2)\cdots(u+r-1)}{r!}.\Delta^r y_{n-r} + \cdots$$

$$+ \frac{u(u+1)(u+2)\ldots\ldots(u+n-1)}{n!}.\Delta^n y_0 \quad \ldots\ldots\ldots (3.4.2)$$

যেখানে, দশা $u = \frac{x - x_n}{h}$ .... (3.4.3)

এবং $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r, \ldots\ldots, x_n$ বিন্দুগুলির সমাধান অন্তর h.

মন্তব্য :

অপেক্ষক $f(x)$-কে বহুপদী $P_B(x)$ দ্বারা পরিবর্তিত করলে নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্রে যে ভ্রান্তির উদ্ভব হয় তার পরিমাপ $R_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}$

$$= u(u+1)(u+2)\cdots(u+n-1)(u+n).\frac{h^{n+1}f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \quad \ldots\ldots\ldots (3.4.4)$$

যেখানে $min\ \{x, x_0, x_1, \ldots, x_n\} < c < max.\ \{x, x_0, x_1, \ldots x_n\}$.

(a) যদি x-এর মান অপ্রান্তর বা পশ্চাদান্তর সারণির শেষ বিন্দু x_n-এর কাছাকাছি হয় তবেই নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করা হবে।

(b) যদি x-এর মান, সারণির x_{n-2}, x_{n-1} বিন্দুর মধ্যবর্তি হয় তবে x_{n-1} কে প্রারম্ভিক বিন্দু ধরে নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করলে উৎকৃষ্ট আসন্ন মান পাওয়া যাবে।

(c) দশা $u(-1 < u < 0)$ যত ছোটো হবে, নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্রে ততই উৎকৃষ্ট আসন্ন মান পাওয়া যাবে।

(d) পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্রে যত বেশি অন্তর সারণির অন্তর ব্যবহার করা হবে ততই বেশি উৎকৃষ্ট আসন্ন মান পাওয়া যাবে।

বিশেষ মন্তব্য ঃ মনে রাখতে হবে, যদি $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots x_n$ বিন্দুগুলি সমদূরবর্তি না হয়, তবে নিউটনের অগ্রআন্তঃপাঠন বা পশ্চাৎ আন্তঃপাঠনে সূত্রদ্বয় প্রয়োগ করা যাবে না।

3.5 লাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্র (Lagrange's Interpolation Formula)

আমরা আগেই দেখেছি, নিউটনের আন্তঃপাঠন ও বহিঃপাঠন সূত্রে, $[a, b]$ অন্তরালে x-এর মান যথা $a = x_0$, $x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots x_n = b$ বিন্দুগুলি অবশ্যই সমদূরবর্তি হতে হবে। কিন্তু যদি, $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots x_n$ বিন্দুগুলি সমদূরবর্তি না হয় এবং ওই বিন্দুগুলিতে অপেক্ষক $f(x)$-এর মানগুলি যথাক্রমে $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_r, \ldots y_n$ জানা থাকে অর্থাৎ $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$ ...... (3.5.1) সেখানেও, $[a, b]$ অন্তরালে, n-ঘাত বিশিষ্ট একটা বহুপদী $L(x)$ নির্ণয় করা যায়, যেখানে

$$f(x_i) = L(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n) \qquad \text{........... (3.5.2)}$$

এবং x-এর যেকোনো মানের জন্য বহুপদী $L(x)$-এর মানকে অপেক্ষক লাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্র বলা হয়। লাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল

$$L(x) = \omega(x)\sum_{r=0}^{n}\frac{f(x_r)}{(x-x_r)\omega'(x_r)} = \omega(x)\sum_{r=0}^{n}\frac{y_r}{(x-x_r)\omega'(x_r)} \qquad \text{.......... (3.5.3)}$$

$$= \omega(x)\sum_{r=0}^{n}\frac{y_r}{D_r} = \sum_{r=0}^{n}\omega_r(x)y_r \qquad \text{...... (3.5.4)}$$

যেখানে,

$$\left.\begin{aligned} &\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{r-1})(x-x_r)(x-x_{r+1})\cdots(x-x_n)\\ &\omega'(x_r) = (x_r-x_0)(x_r-x_1)(x_r-x_2)\cdots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\cdots(x_r-x_n)\\ &D_r = (x-x_r)\,\omega'(x_r)\end{aligned}\right\}$$

...... (3.5.5)

এবং $\omega_r(x) = \dfrac{\omega(x)}{(x-x_r)\omega'(x_r)}$ .... (3.5.6) গুলিকে লাগরাঞ্জের অপেক্ষক বলা হয়।

অপেক্ষক $f(x)$-কে, বহুপদী $L(x)$ দ্বারা পরিবর্তিত করলে লাগবান্ধের আন্তঃপাঠন সূত্রে যে ভ্রান্তির উদ্ভব হয় তার পরিমান হল

$$R_{n+1} = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \qquad \text{........ (3.5.7)}$$

$$= w(x)\ \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}$$

যেখানে, $min.\ \{x, x_0, x_1, \ldots x_n\} < c < max.\ \{x, x_0, x_1, \ldots x_n\}$.

মন্তব্য ঃ $[a, b]$ অন্তরালে x-এর মান তথা, $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots x_n$ বিন্দুগুলি সমদূরবর্তি বা অসমদূরবর্তী যাহাই হউক, উভয় ক্ষেত্রেই লাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্র প্রযোজ্য।

এখন লাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্রের গণনার জন্য একটা বিশেষ সারণি প্রয়োগ করব যার দ্বারা সহজেই গণনা করতে পারব।

সারণিটি হল ঃ সারণি (3.5.1)

						D_r	y_r	y_r/D_r
$\boxed{x-x_0}$	x_0-x_1	x_0-x_2	....	x_0-x_{n-1}	x_0-x_n	D_0	y_0	y_0/D_0
x_1-x_0	$\boxed{x-x_1}$	x_1-x_2	....	x_1-x_{n-1}	x_1-x_n	D_1	y_1	y_1/D_1
x_2-x_0	x_2-x_1	$\boxed{x-x_2}$	....	x_2-x_{n-1}	x_2-x_n	D_2	y_2	y_2/D_2
.....								
$x_{n-1}-x_0$	$x_{n-1}-x_1$	$x_{n-1}-x_2$	....	$\boxed{x-x_{n-1}}$	$x_{n-1}-x_n$	D_{n-1}	y_{n-1}	y_{n-1}/D_{n-1}
x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	....	x_n-x_{n-1}	$\boxed{x-x_n}$	D_n	y_n	y_n/D_n
								$\sum_{r=0}^{n} y_r/D_r$

$$\omega(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,\ldots\,(x - x_{n-1})\,(x - x_n)$$

[কর্ণ বরাবর চিহ্নিত রাশিগুলির ঘনফল]

$$D_r = (x - x_r)\,(x_r - x_0)\,(x_r - x_1)\,\ldots\,(x_r - x_{r-1})\,(x_r - x_{r+1})\,\ldots\,(x_r - x_n)$$

[r-তম রাশির সদস্যগুলির ঘনফল]

3.6 উদাহরণ ঃ

উদাহরণ 3.6.1 ঃ প্রদত্ত সারণি ব্যবহার করে (i) $f(0{\cdot}5)$ এবং (ii) $f(2{\cdot}8)$-এর মানগুলি নির্ণয় করুন।

x :	0	1	2	3
$f(x)$:	1	2	11	34

সমাধান ঃ অগ্রান্তর সারণিটি হল ঃ

x :	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	①			
		①		
1	2		⑧	
		9		⑥
2	11		14	
		23		
3	34			

(i) এখানে $x = 0{\cdot}5$, এবং ইহা প্রারম্ভিক বিন্দু 0 (শূন্যের)-এর নিকটবর্তি অতএব এখানে আমরা নিউটনের অগ্রআন্তঃপাঠন সূত্র প্রয়োগ করব।

এখানে $x_0 = 0,\ h = 1, \quad \therefore\ u = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{0{\cdot}5 - 0}{1} = 0{\cdot}5$

$\therefore$ সমীকরণ (3.3.10) প্রয়োগ করে পাই,

$$f(0{\cdot}5) \simeq P(0{\cdot}5) = 1 + 0{\cdot}5 \times 1 + \frac{0{\cdot}5(0{\cdot}5-1)}{2} \times 8 + \frac{0{\cdot}5(0{\cdot}5-1)(0{\cdot}5-2)}{6} \times 6$$

$$= 0{\cdot}875 \simeq \mathbf{0{\cdot}88}.$$ [O-চিহ্নিত রাশিগুলি ব্যবহার করে]

(ii) এখানে $x = 2{\cdot}8$, এবং ইহা শেষ বিন্দু 3-এর নিকটবর্তী অতএব এখানে আমরা নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র প্রয়োগ করব। এখানে $x_n = 3,\ h = 1,\ \ u = \dfrac{x - x_n}{h} = \dfrac{2{\cdot}8 - 3}{1} = -\,0{\cdot}2$

অতএব নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র (3.4.2) প্রয়োগ করে পাই,

$$f(2{\cdot}5) \simeq P_{\mathrm{B}}(2{\cdot}5) = 34 + (-0{\cdot}2) \times 23 + \frac{-0{\cdot}2(-0{\cdot}2+1)}{2} \times 14$$

$$+ \frac{-0{\cdot}2(-0{\cdot}2+1)(-0{\cdot}2+1)}{6} \times 6$$ [যে রাশিগুলির নীচে - চিহ্ন আছে সেগুলি ব্যহার করে]

$$= 34 - 4{\cdot}6 - 1{\cdot}12 - 0{\cdot}288$$

$$= 27{\cdot}992 \simeq \mathbf{28}.$$

উদাহরণ 3.6.2 ঃ প্রদত্ত সারণিটি প্রয়োগ করে $f(0{\cdot}16)$-এর মান নির্ণয় করুন।

x :	0·1	0·2	0·3	0·4
$f(x)$:	1·005	1·020	1·045	1·081

সমাধান ঃ এখানে অগ্রান্তর সারণি বা অন্তর সারণিটি হল ঃ

x :	$y = f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0·1	<u>1·005</u>			
		<u>0·015</u>		
0·2	1·020		<u>0·010</u>	
		0·025		<u>0·001</u>
0·3	1·045		0·011	
		0·036		
0·4	1·081			

এখানে $x = 0{\cdot}16,\ x_0 = 0{\cdot}1,\ h = 0{\cdot}1,\ \therefore\ u = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{0{\cdot}16 - 0{\cdot}1}{0{\cdot}1} = 0{\cdot}6$

যেহেতু $x = 0{\cdot}16$, প্রারম্ভিক বিন্দু **0·1**-এর নিকটবর্তী, অতএব এখানে নিউটনের অগ্রআন্তঃগঠন সূত্র প্রয়োগ করব।

$\therefore$ সমীকরণ (3.3.10) প্রয়োগ করে পাই,

$$f(0{\cdot}16) \simeq P(0{\cdot}16) = 1{\cdot}005 + 0{\cdot}6 \times 0{\cdot}015 + \frac{0{\cdot}6(0{\cdot}6-1)}{2} \times 0{\cdot}010$$

$$+ \frac{0{\cdot}6(0{\cdot}6-1)(0{\cdot}6-2)}{6} \times 0{\cdot}001$$ [সারণীতে চিহ্নিত রাশিগুলি ব্যবহার করে]

$$= 1{\cdot}005 + 0{\cdot}009 - 0{\cdot}001 = \mathbf{1{\cdot}015}$$

উদাহরণ 3.6.3 : প্রদত্ত সারণিটি প্রয়োগ করে (i) $\log_{10}2{\cdot}02$

(ii) $\log_{10}2{\cdot}25$ এবং (iii) $\log_{10} 2{\cdot}91$ গুলির মান নির্ণয় করুন।

x :	2·0	2·2	2·4	2·6	2·8	3·0
$f(x) = \log_{10}x$:	0·30103	0·34242	0·38021	0·41497	0·44716	0·47721

সমাধান ঃ (i) এখানে $x = 2{\cdot}02$, ইহা সারণির প্রারম্ভিক বিন্দু $x_0 = 2{\cdot}0$-এর নিকটবর্তী অতএব আমরা নিউটনের অগ্রআন্তঃপাঠন সূত্র (3.3.10) প্রয়োগ করব এখানে $x_0 = 2{\cdot}0,\ h = 0{\cdot}2$

$$\therefore\quad u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2{\cdot}02 - 2{\cdot}00}{0{\cdot}2} = 0{\cdot}1$$

অগ্রান্তর সারণি বা অন্তর সারণিটি হল ঃ

x :	$f(x) = \log_{10}x$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
2·0	0·30103					
		0·04139				
2·2	0·34242		–0·00360			
		0·03779		0·00057		
2·4	0·38021		–0·00303		–0·00011	
		0·03476		0·00046		0·00008
2·6	0·41497		–0·00257		–0·00003	
		0·03219		0·00043*		
2·8	0·44716		–0·00214*			
		0·03005*				
3·0	0·47721*					

সমীকরণ (3.3.10) প্রয়োগ করে পাই,

$$f(2{\cdot}02) \simeq P(2{\cdot}02) = 0{\cdot}30103 + 0{\cdot}1 \times 0{\cdot}04139 + \frac{0{\cdot}1(0{\cdot}1-1)}{2} \times (-0{\cdot}00360)$$

$$+ \frac{0{\cdot}1(0{\cdot}1-1)(0{\cdot}1-2)}{6} \times 0{\cdot}00057$$

$$+ \frac{0{\cdot}1(0{\cdot}1-1)(0{\cdot}1-2)(0{\cdot}1-3)}{24} \times (-0{\cdot}00011)$$

$$+ \frac{(0{\cdot}1)(0{\cdot}1-1)(0{\cdot}1-2)(0{\cdot}1-3)(0{\cdot}1-4)}{120} \times 0{\cdot}00008$$

$$= 0{\cdot}30103 + 0{\cdot}004139 + 0{\cdot}000162 + 0{\cdot}0000162 + 0{\cdot}0000022$$

$$= 0{\cdot}3053494 \simeq \mathbf{0{\cdot}30535}.$$

(ii) এখানে $x = 2{\cdot}25$ এবং $x = 2{\cdot}2$-এর নিকটবর্তী, অতএব $x = 2{\cdot}2$ কেপ্রারম্ভিক বিন্দু ধরে নিউটনের অগ্র আন্তপাঠন সূত্র প্রয়োগ করব।

$\therefore\ x = 2{\cdot}25,\ x_0 = 2{\cdot}2,\ h = 0{\cdot}2 \quad \therefore\ u = \dfrac{2{\cdot}25 - 2{\cdot}2}{0{\cdot}2} = 0{\cdot}25$; (3.3.10) সূত্র থেকে পাই,

$$f(2{\cdot}25) = 0{\cdot}34242 + 0{\cdot}25 \times 0{\cdot}03779 + \frac{2{\cdot}25(0{\cdot}25-1)}{2} \times (-0{\cdot}00303)$$

$$+ \frac{2{\cdot}25(0{\cdot}25-1)(0{\cdot}25-2)}{6} \times 0{\cdot}00046$$

$$+ \frac{2{\cdot}25(0{\cdot}25-1)(0{\cdot}25-2)(0{\cdot}25-3)}{24} \times (-0{\cdot}00003)$$

$$= 0{\cdot}34242 + 0{\cdot}009448 + 0{\cdot}000284 + 0{\cdot}000025 + 0{\cdot}000002$$

$$= 0{\cdot}352179 \simeq \mathbf{0{\cdot}35218}$$

(iii) এখানে $x = 2{\cdot}91$ এবং ইহা সারণির শেষ বিন্দু 3-এর নিকটবর্তী অতএব এক্ষেত্রে আমরা নিউটনের পশ্চাৎ আন্তপাঠন সূত্র প্রয়োগ করব।

$$\therefore\ x = 2{\cdot}91,\ x_n = 3,\ h = 0{\cdot}2 \quad \therefore\ u = \frac{2{\cdot}91 - 3{\cdot}00}{0{\cdot}2} = -0{\cdot}45$$

এখন (3.4.2) প্রয়োগ করে পাই,

$$f(2{\cdot}91) = 0{\cdot}47721 + (-0{\cdot}45) \times 0{\cdot}03005 + \frac{-0{\cdot}45(-0{\cdot}45+1)}{2} \times (-0{\cdot}00214)$$

$$+\frac{-0{\cdot}45(-0{\cdot}45+1)(-0{\cdot}45+2)}{6} \times -0{\cdot}00043$$

$$+\frac{-0{\cdot}45(-0{\cdot}45+1)(-0{\cdot}45+2)(-0{\cdot}45+3)}{24} \times (-0{\cdot}00003)$$

$$= 0{\cdot}47721 - 0{\cdot}0135225 + 0{\cdot}0002648 - 0{\cdot}0000275 + 0{\cdot}0000012$$

$$= 0{\cdot}463892 \simeq \mathbf{0{\cdot}46389}$$

উদাহরণ 3.6.4 ঃ প্রদত্ত সারণি প্রয়োগ করে কতজন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর 40 থেকে 45-এর মধ্যে থাকতে পারে নির্ণয় করুন।

প্রাপ্ত নম্বর ঃ	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ছাত্র সংখ্যা ঃ	31	42	51	35	31

সমাধান ঃ প্রথমেই আমরা সমষ্টি সারণি তৈরি করছি।

প্রাপ্ত নম্বর $\leq (x)$ ঃ	40	50	60	70	80
ছাত্র সংখ্যা $f(x)$ ঃ	31	72	124	159	190

অগ্রান্তর বা অন্তর সারণিটি হল ঃ

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
40	31				
		42			
50	73		9		
		51		−25	
60	124		−16		37
		35		12	
70	159		−4		
		31			
80	190				

এখানে $x = 45$, সারণির প্রথম দিকে অর্থাৎ $x = 40$-এর নিকটবর্তী। সুতরাং নিউটনের অগ্রআন্তঃপাঠন সূত্র (3.3.10) প্রয়োগ করব।

$\therefore\ x_0 = 40,\ h = 10,\ u = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{45-40}{10} = 0{\cdot}5$; (3.3.10) থেকে পাই,

$$f(45) = 31 + 0{\cdot}5 \times 42 + \frac{0{\cdot}5(0{\cdot}5-1)}{2} \times 9 + \frac{0{\cdot}5(0{\cdot}5-1)(0{\cdot}5-2)}{6} \times (-25)$$

$$+\frac{0{\cdot}5(0{\cdot}5-1)(0{\cdot}5-2)(0{\cdot}5-3)}{24} \times 37$$

$$= 31 + 21 - 1{\cdot}125 - 1{\cdot}5725 - 1{\cdot}4453 \simeq 47{\cdot}87.$$

অতএব, প্রাপ্ত নম্বর 45-এর নিচে এমন ছাত্রের সংখ্যা **47**

প্রাপ্ত নম্বর 40-এর নিচে এমন ছাত্রের সংখ্যা **31**.

$\therefore$ প্রাপ্ত নম্বর 40 এবং 45-এর মধ্যে এমন ছাত্রের সংখ্যা 47 – 31 = 16

উদাহরণ ঃ 3.6.5. প্রদত্ত সরণি ব্যবহার করে (i) $f(1{\cdot}38)$ (ii) $f(1{\cdot}42)$-এর মানগুলি নির্ণয় করুন।

x :	1·1	1·2	1·3	1·4
$f(x)$:	7·831	8·728	9·697	10·744

সমাধান ঃ অন্তর সারণিটি হল ঃ

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
1·1	7·831			
		0·897		
1·2	8·728		0·072	
		0·969		0·006
1·3	9·697		0·078	
		1·047		
1·4	10·744			

(b) $x = 1{\cdot}38$, ইহা সারনির শেষদিকে $x = 1{\cdot}4$-এর কাছাকাছি। অতএব আমরা নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করব।

এখানে $x = 1{\cdot}38,\ x_n = 1{\cdot}4,\ h = 0{\cdot}1,\ u = \dfrac{x - x_n}{h} = \dfrac{1{\cdot}38 - 1{\cdot}40}{0{\cdot}1} = -0{\cdot}2$

$\therefore$ (3.4.2) প্রয়োগ করে পাই,

$$f(1{\cdot}38) = 10{\cdot}744 - 0{\cdot}2 \times 1{\cdot}047 + \frac{-0{\cdot}2 \times 0{\cdot}8}{24} \times 0{\cdot}078$$

$$+ \frac{-0{\cdot}2 \times 0{\cdot}8 \times 1{\cdot}8}{6} \times 0{\cdot}006 = 10{\cdot}52807 \simeq \mathbf{10{\cdot}528}$$

(ii) এখানে $x = 1{\cdot}42,\ x_n = 1{\cdot}4,\ h = 0{\cdot}1 \quad \therefore u = \dfrac{1{\cdot}42 \times 1{\cdot}40}{0{\cdot}1} = 0{\cdot}2$

$\therefore$ (3.4.2) দ্বারা পাই,

$$f(1{\cdot}42) = 10{\cdot}744 + 0{\cdot}2 \times 1{\cdot}047 + \frac{0{\cdot}2 \times 1{\cdot}2}{2} \times 0{\cdot}078$$

$$+ \frac{0{\cdot}2 \times 1{\cdot}2 \times 2{\cdot}2}{6} \times 0{\cdot}006 = 10{\cdot}96329 \simeq \mathbf{10{\cdot}963}.$$

উদাহরণ 3.6.6. প্রদত্ত সারণি প্রয়োগ করে লাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন বহুপদীটি নির্ণয় করুন।

x :	-1	0	2	5
$f(x)$:	9	5	3	15

সমাধান ঃ লাগরাঞ্জের আন্তঃগঠন সূত্রটি হল ঃ

$$L(x) = \omega(x)\sum_{r=0}^{n}\frac{f(x_r)}{D_r} = \omega(x)\sum_{r=0}^{n}\frac{y_r}{D_r} \text{ [(3.5.4) থেকে]}$$

যেখানে, $\omega(x) = (x - x_0)\,(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

$D_r = (x - x_r)\,(x_r - x_0)\,(x_r - x_1) \ldots (x_r - x_{r-1})\,(x_r - x_{r+1}) \ldots (x_r - x_n)$

এখানে $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5$

$f(x_0) = y_1 = 9,\ f(x_1) = y_1 = 5,\ f(x_2) = y_2 = 3,\ f(x_3) = y_3 = 15$

গণনার সারণিটি হল [সারণি (3.5.1) দেখুন]

				D_r	y_r	y_r/D_r
$x-x_0=x+1$	$x_0-x_1=-1$	$x_0-x_2=-3$	$x_0-x_3=-6$	$-18\,(x+1)$	9	$-\dfrac{1}{2(x+1)}$
$x_1-x_0=1$	$x-x_1=x$	$x_1-x_2=-2$	$x_1-x_3=-5$	$10x$	5	$\dfrac{1}{2x}$
$x_2-x_0=3$	$x_2-x_1=2$	$x-x_2=x-2$	$x_2-x_3=-3$	$-18\,(x-2)$	3	$-\dfrac{1}{6(x-2)}$
$x_3-x_0=6$	$x_3-x_1=5$	$x_3-x_2=3$	$x-x_3=x-5$	$90\,(x-5)$	15	$\dfrac{1}{6(x-5)}$
						$\sum\dfrac{y_r}{D_r}$

$\omega(x) = (x + 1)\,x\,(x - 2)\,(x - 5)$

$$\therefore\ L(x) = (x + 1)\,x(x - 2)\,(x - 5)\left[-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{6(x-2)}+\frac{1}{6(x-5)}\right]$$

$$= \frac{1}{6}[-3x(x-2)(x-5) + 3(x+1)(x-2)(x-5)$$

$$-(x+1)x(x-5) + (x+1)x(x-2)]$$

$$= \mathbf{x^2 - 3x + 5}$$

উদাহরণ 3.6.7. প্রদত্ত সারণির সাহায্যে বহুপদী $f(x)$-এর মান নির্ণয় করুন।

x :	0	1	2	3
$f(x)$:	1	2	11	34

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে আমরা লাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করব যদিও x-এর মান যথা 0, 1, 2, 3 সমদূরবর্তী।

লাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল $L(x) = \omega(x) \sum_{r=0}^{n} \frac{f(x_r)}{D_r}$

যেখানে $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

$$D_r = (x - x_r)(x_r - x_0)(x_1 - x_1) \ldots (x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1}) \ldots (x_r - x_n)$$

এখানে, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ এবং $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 11$ এবং $f(x_3) = 34$

গণনার সারণিটি হল [সারণি (3.5.1) দেখুন]

				D_r	y_r	y_r/D_r
$x - x_0 = x$	$x_0 - x_1 = -1$	$x_0 - x_2 = -2$	$x_0 - x_3 = -3$	$-6x$	1	$\frac{1}{-6x}$
$x_1 - x_0 = 1$	$x - x_1 = x - 1$	$x_1 - x_2 = -1$	$x_1 - x_3 = -2$	$2(x-1)$	2	$\frac{1}{x-1}$
$x_2 - x_0 = 2$	$x_2 - x_1 = 1$	$x - x_2 = x - 2$	$x_2 - x_3 = -1$	$-2(x-2)$	11	$\frac{11}{-2(x-2)}$
$x_3 - x_0 = 3$	$x_3 - x_1 = 2$	$x_3 - x_2 = 1$	$x - x_3 = x - 3$	$6(x-3)$	34	$\frac{34}{6(x-3)}$
						$\sum y_r/D_r$

$\omega(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

$$\therefore \quad L(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\left[-\frac{1}{6x} + \frac{1}{x-1} - \frac{11}{2(x-2)} + \frac{34}{6(x-3)}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\,[-(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-2)(x-3) - 33x(x-1)(x-3)$$

$$+ 34x(x-1)(x-2)]$$

$= x^3 + x^2 - x + 1$

উদাহরণ ঃ 3.6.8 : নিচের সারণি থেকে, $f(0{\cdot}9)$-এর মান নির্ণয় করুন।

x :	0·3	0·5	0·6
$f(x)$:	0·61	0·69	0·72

সমাধান ঃ লাগরাঞ্জের আন্তঃগঠন সূত্রটি হল ঃ

$$L(x) = \omega(x) \sum_{r=0}^{n} \frac{f(x_r)}{D_r}$$

যেখানে, $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

এবং $D_r = (x - x_r)\ (x_r - x_0)\ (x_r - x_1) \ldots (x_r - x_{r-1})\ (x_r - x_{r+1}) \ldots (x_r - x_n)$

$x = 0{\cdot}4$, $x_0 = 0{\cdot}3$, $x_1 = 0{\cdot}5$, $x_2 = 0{\cdot}6$, $f(x_0) = 0{\cdot}61$, $f(x_1) = 0{\cdot}69$ এবং $f(x) = 0{\cdot}72$

গণনার সারণিটি হল [সারণি (3.5.1) দেখুন]

			D_r	y_r	y_r/D_r
0·4 – 0·3	–0·2	–0·3	0·006	0·61	101·667
0·2	0·4 – 0·5	–0·1	0·002	0·69	345·000
0·3	0·1	0·4 – 0·6	–0·006	0·72	–120·000
				যোগফল	326·667

$\omega(0{\cdot}4) = 0{\cdot}1 \times (-0{\cdot}1) \times (-0{\cdot}2) = 0{\cdot}002$

$\therefore f(0{\cdot}4) \simeq L(0{\cdot}4) = 0{\cdot}002 \times 326{\cdot}667 \simeq 0{\cdot}65$

উদাহরণ ঃ 3.6.9 : নিচের সারণি প্রয়োগ করে $f(2)$-এর মান নির্ণয় করুন।

x :	0	1	3	4
$f(x)$:	5	6	50	105

সমাধান ঃ লাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল ঃ

$$L(x) = \omega(x) \sum_{r=0}^{n} \frac{f(x_r)}{D_r}$$

যেখানে, $\omega(x) = (x - x_0)\ (x - x_1) \ldots (x - x_n)$

এবং $D_r = (x - x_r)\ (x_r - x_0)\ (x_r - x_1) \ldots (x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1}) \ldots (x_r - x_n)$

এখানে, $x = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_4 = 4$ এবং $f(x_0) = 5$

$f(x_1) = 6$, $f(x_2) = 50$, $f(x_3) = 105$

গণনার সারণিটি হল সারণি (3.5.1) দেখুন।

				D_r	y_r	y_r/D_r
2 – 0	–1	–3	–4	–24	5	–5/24
1	2 –1	–2	–3	6	6	1
3	2	2 – 3	–1	6	50	50/6
4	3	1	2 – 4	–24	105	–105/24

এবং $\omega(2) = 2 \times 1 \times (-1) \times (-2) = 4$

$$\therefore\ f(2) \simeq L(2) = 4\left[-\frac{5}{24} + 1 + \frac{50}{6} - \frac{105}{24}\right] = \frac{1}{6}[-5 + 24 + 200 - 105]$$

$$= \frac{114}{6} = \mathbf{19}$$

3.7 অনুশীলনী

1. প্রদত্ত সারণি ব্যবহার করে (i) $f(1.1)$ এবং (ii) $f(4\cdot5)$-এর মানগুলি নির্ণয় করুন।

x :	0	1	2	3	4	5
$f(x)$:	0	3	8	15	24	35

2. নিচের সারণি প্রয়োগ করে (i) sin 3° এবং (ii) sin 39°-এর মানগুলি নির্ণয় করুন।

$x°$	0	10	20	30	40
sin $x°$	0	0·1736	0·3420	0·5000	0·6428

3. নিচের সারণিটিকে ব্যবহার করে (i) $f(0\cdot5)$ এবং (ii) $f(6.7)$-এর মানদ্বয় নির্ণয় করুন।

x :	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$:	0	7	26	63	124	215	342	511

4. প্রদত্ত সারণি ব্যবহার করে (i) $\log_{10}$ 5·15 এবং (ii) $\log_{10}$4·48-এর মানদ্বয় নির্ণয় করুন।

x :	5·1	5·2	5·3	5·4	5·5
$\log_{10}x$:	0·7076	0·7160	0·7243	0·7324	0·7404

5. $\Gamma(x)$-এর নিচের সারণি থেকে $\Gamma(1\cdot1673)$-এর মান নির্ণয় করুন।

x :	1·15	1·16	1·17	1·18	1·19
$\Gamma(x)$:	0·93304	0·92980	0·92670	0·92373	0·92088

6. এমন একটা বহুপদী $f(x)$ নির্ণয় করুন যেটা নিচের সারণি দ্বারা সিদ্ধ হয়।

x :	0	1	2	3
$f(x)$:	1	2	11	34

7. এমন একটা বহুপদী $y = f(x)$ নির্ণয় করুন যেটা নিচের সারণি দ্বারা সিদ্ধ হবে।

x :	–2	1	2	4
$f(x)$:	25	–8	–15	–25

8. নিচের সারণি প্রয়োগ করে $f(5)$-এর মান নির্ণয় করুন।

x :	2	4	7	9
$f(x)$:	10	26	65	101

9. এই সারণি থেকে

x :	2	3	5	7
$\log_{10}x$:	0·301	0·477	0·699	0·845

$\log_{10}3\cdot5$-এর মান নির্ণয় করুন।

10. উপযুক্ত আন্তঃপাঠন সূত্র প্রয়োগ করে, নিচেরসারণি ব্যবহার করে, বহুপদী $f(x)$ টিকে নির্ণয় করুন।

x :	–2	0	1	3
$f(x)$:	7	1	1	–23

11. নিচের সারণি প্রয়োগ করে, $f(2)$-এর মান নির্ণয় করুন।

x :	0	1	5	7
$f(x)$:	1	2	146	386

12. লাগারাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্র দ্বারা, বহুপদী $f(x)$ কে নির্ণয় করুন যাহা নিচের সারণি দ্বারা সিদ্ধ হয়। এবং $f(1)$-এর মান নির্ণয় করুন।

x :	–1	0	2
$f(x)$:	9	5	3

3.8 উত্তরমালা

1. (i) $f(1{\cdot}1) = 3{\cdot}41$ (ii) $f(4{\cdot}5) = 29{\cdot}25$
2. (i) $\sin 3° = 0{\cdot}0523$ (ii) $\sin 39° = 0{\cdot}6293$
3. (i) $f(0{\cdot}5) = 2{\cdot}375$ (ii) $f(6{\cdot}7) = 455{\cdot}533$
4. (i) $\log_{10} 5{\cdot}15 = 0{\cdot}7118$ (ii) $\log_{10} 4{\cdot}48 = 0{\cdot}6513$
5. $\Gamma(1{\cdot}1673) = 0{\cdot}92723$
6. $f(x)\ x^3 + x^2 - x + 1$
7. $f(x) = x^2 - 10x + 1$
8. $f(5) = 37$
9. $\log_{10} 3{\cdot}5 = 0{\cdot}544$

10. $f(x) = -x^3 + x + 1$

11. $f(2) = 11$

12. $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $f(1) = 3$

3.9 সহায়ক গ্রন্থাবলি

1. MOLLAH, S.A. : INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS, BOOKS AND ALLIED (P) LTD. KOLKATA.

2. GUPTA, A AND BOSE, S.C. : INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS, ACADEMIC PUBLISHERS, KOLKATA

3. MUKHERJEE, K. K. : NUMERICAL ANALYSIS, NEW CENTRAL BOOK AGENCY (P) LTD. KOLKATA.

4. GUPTA, P.P. AND MALIK, G.S. : NUMERICAL ANALYSIS, KRISHNA PRAKASHAN MANDIR, MEERUT.

একক 4 ❑ সাংখ্যিক পদ্ধতিতে সমাকলন (Numerical Integration)

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

4.2 উদ্দেশ্য

4.3 ট্র্যাপিজয়ডাল সূত্র এবং যৌগিক ট্র্যাপিজয়ডাল সূত্র।

4.4 সিম্পসনের সমাকলন সূত্র এবং সিম্পসনের যৌগিক সূত্র।

4.5 উদাহরণমালা

4.6 অনুশীলনী

4.7 উত্তরমালা

4.8 সহায়ক গ্রন্থাবলি

4.1 প্রস্তাবনা (Introduction)

আমরা জানি যে, বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় তথা উচ্চ গণিতে নির্দিষ্ট সমাকলনের মান নির্ণয় প্রায়ই অত্যাবশ্যক হয় কিন্তু f(x) অপেক্ষকটির বৈশ্লেষিক আকার জানা থাকা সত্ত্বেও উহার নির্দিষ্ট সমাকলন বা $\int_a^b f(x)dx$ -এর মান সর্বদা সাধারণ পদ্ধতির দ্বারা সহজ উপায়ে এমনকি একেবারেই নির্ণয় করা সম্ভবপর হয় না। উদাহরণ স্বরূপ যখন f(x)-এর মান $e^{-\frac{x^3}{3}}, \frac{e^{x^2}}{|x|}, \frac{e^{\log x}}{\cot x}, \cdots$ ইত্যাদি হয়।

আবার, যদি f(x) অপেক্ষকটির বৈশ্লেষিক আকার সম্পূর্ণ অজানা হয় বা x চলের কয়েকটি নির্দিষ্ট মানের জন্য f(x)-এর নির্দিষ্ট মান জানা থাকে তা হলেও সাধারণ পদ্ধতির দ্বারা নির্দিষ্ট সমাকলন $\int_a^b f(x)dx$ মান নির্ণয় সম্ভব নয়।

এই রকম ক্ষেত্রে, একমাত্র সাংখ্যিক পদ্ধতির দ্বারাই নির্দিষ্ট সমাকলনের মান নির্ণয় করা সম্ভব।

এই পদ্ধতিতে, নির্দিষ্ট সমাকলন $\int_a^b f(x)dx$ -এর মান নির্ণয় করার জন্য, [a, b] অন্তরালে f(x) অপেক্ষকটিকে

উপযুক্ত আন্তঃপাঠন বহুপদ রাশিমালা দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা হয় এবং উহার নির্দিষ্ট সমাকলনকে প্রদত্ত অপেক্ষকের আসন্ন মান হিসাবে গ্রহণ করা হয়।

এখন ধরা যাক, $\int_a^b f(x)dx$, নির্দিষ্ট সমাকলনটির মান নির্ণয় করতে হবে, এবং মনে করা যাক, $[a, b]$ অন্তরালে চল x-এর এক সেট্ মান $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$-এর জন্য $f(x)$-এর মান যথাক্রমে $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}, y_r, y_{r+1}, \cdots y_{n-1}, y_n$ মান জানা আছে। অতএব ওই মানগুলির জন্য, $f(x)$-এর আন্তঃপাঠন বহুপদ রাশিমালা $P(x)$ এবং উহার ভ্রান্তি $R_{n+1}(x)$ হলে,

$$f(x) = P(x) + R_{n+1}(x)$$

সুতরাং $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P(x)dx + \int_a^b R_{n+1}(x)dx \qquad \ldots\ldots (4.1.1)$$

$P(x)$ একটা n-ঘাতের বহুপদরাশিমালা, সুতরাং $\int_a^b P(x)dx$-এর মান খুব সহজেই নির্ণয় করা যায়। এখন যদি $\int_a^b R_{n+1}(x)dx$-এর মান খুবই ক্ষুদ্র হয় তবে আমরা লিখতে পারি।

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P(x)dx \qquad \ldots\ldots (4.1.2)$$

এবং $\int_a^b P(x)dx$-এর মানকে $\int_a^b f(x)dx$-এর আসন্ন মান হিসাবে গ্রহণ করা হয়। এবং ইহাতে ভ্রান্তি হয় তার পরিমাণ হল।

$$E_r = \int_a^b R_{n+1}(x)dx$$

$$= \int_a^b (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}dx,$$

যেখানে $(x_0 = a < c < b = x_n)$ $\qquad \ldots\ldots (4.1.3)$

4.2 উদ্দেশ্য (Object)

এই এককটি শিখে আপনি যেকোনো নির্দিষ্ট সমাকলন সমস্যার সমাধান, সাংখ্যিক সমাকলন পদ্ধতিতে করতে পারবেন।

4.3 ট্র্যাপিজয়ডালের সূত্র (Trapezoidal Rule)

4.3.1. ট্র্যাপিজয়ডালের সূত্র ঃ

যদি $[a, b]$ অন্তরালটি ক্ষুদ্র হয় এবং $[a, b]$ অন্তরালটিকে $[x_0, x_0 + h]$

ধরি, তবে $I_T = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$ ...... (4.3.1)

এখন মনে করি, $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ বা, $x = x_0 + uh \quad \therefore\ dx = h\ du$

এবং যখন $x = x_0 \to u = 0$

এবং $x = x_0 + h \to u = 1$.

এখন (4.3.1) থেকে পাই, $\because$

$$I_T = h\int_0^1 f(x_0 + uh)\,du = h\int_0^1 E^u f(x_0)\,du$$

$$= h\int_0^1 (1+\Delta)^u f(x_0)\,du \quad [\ \because\ E = 1 + \Delta\ ]$$

$$\approx h\int_0^1 [1 + u\Delta] f(x_0)\,du$$ [Δ এর দ্বিতীয় ও তার বেশী ঘাতবিশিষ্ট পদগুলি বাদ দিয়ে]

$$= h\int_0^1 [f(x_0) + u\Delta f(x_0)]\,du$$

$$= h\left[f(x_0) + \frac{1}{2}\Delta f(x_0)\right] = h\left[f(x_0) + \frac{1}{2}\{f(x_0 + h) - f(x_0)\}\right]$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_0 + h)] = \frac{h}{2}[y_0 + y_1]$$

অতএব ট্র্যাপিজয়ডালের সূত্রটি হল $I_T = \frac{h}{2}[y_0 + y_1]$ .... (4.3.2)

এবং ট্র্যাপিজয়ডালের সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ,

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(c), \text{ যখন } a = x_0 < c < x_0 + h = b \quad ...... (4.3.3)$$

4.3.2. যৌগিক ট্র্যাপিজয়ডাল সূত্র (Composite Trapezoidal Rule) :

মনে করা যাক, সাংখ্যিক পদ্ধতি দ্বারা $I_T = \int_a^b f(x)dx$

এর মান নির্ণয় করতে হবে, এখন $[a, b]$ অন্তরালটি যদি খুব ছোট না হলে $x_0 = I$ এবং $x_1 = x_0 + h = b$ ধরে ট্র্যাপিজয়ডাল সূত্রটি প্রয়োগ করলে ভ্রান্তির পরিমাণ বেশ বড় হবে। সেইজন্য, $[a, b]$ বা $[x_0, x_n]$ অন্তরালটিকে n-সংখ্যক সূত্র $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{r-1}, x_r]$, ... $[x_{n-1}, x_n]$ উপ-অন্তরালে বিভক্ত করা হয়, যেখানে $x_r = x_{r-1} + h$ এবং h প্রতিটি উপঅন্তরালের দৈর্ঘ্য এবং প্রতিটি উপঅন্তরালে ট্র্যাপিজয়ডাল সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$I_T^C = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{r-1}) + f(x_r)]$$

$$+ \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{h}{2}[y_0 + y_1] + \frac{h}{2}[y_1 + y_2] + \cdots + \frac{h}{2}[y_{r-1} + y_r] + \cdots + \frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n]$$

$$= \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]$$

$$= \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\{(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + (y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{n-2})\}\right]$$

...... (4.3.4)

$$= \frac{h}{2}\left[Y_0 + 2(Y_1 + Y_2)\right] \qquad \text{...... (4.3.5)}$$

যখন $Y_o = y_0 + y_n$

$$Y_1 = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1} \qquad \text{...... (4.3.6)}$$

এবং $Y_2 = y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}$

(4.3.4) বা (4.3.5) সূত্রটিকে যৌগিক ট্র্যাপিজিয়ডাল সূত্র বলা হয় এবং যৌগিক ট্র্যাপিজিয়ডাল সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ

$$E_T^C = -\frac{nh^3}{12} f''(c) \text{ ; যখন } x_0 = a < c < b = x_n \qquad \text{...... (4.3.7)}$$

4.4 সিম্পসনের একের তিন সমাকলন সূত্র বা সিম্পসনের সমাকলন সূত্র

4.3.1. সিম্পসনের সমাকলন সূত্র (Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule) ঃ

এটা একটা দুই অন্তরাল বা তিন বিন্দুর সমাকলন সূত্র, ধরা যাক $\int_a^b f(x)dx$ এই সমাকলনটির মান সাংখ্যিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করতে হবে। এখানে, $[a, b]$ অন্তরালটিকে দুইটি উপ অন্তরালে বিভক্ত করা হয়। $a = x_0$, $x_1 = x_0 + h$, $b = x_2 = x_1 + h$ বিন্দুর দ্বারা যেখানে h প্রতিটি উপঅন্তরালের দৈর্ঘ্য, এবং $f(x_0) = y_0$, $f(x_0 + h) = y_1$, $f(x_0 + 2h) = y_2$.

$$\therefore \quad I_S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx$$

এখানে মনে করি, $u = \frac{x - x_0}{h}$ বা, $x = x_0 + uh \quad \therefore \; dx = h\,du$

এবং $x = x_0 \Rightarrow u = 0$

$$x = x_0 + 2h \Rightarrow u = 2$$

$$\therefore \quad I_S = h\int_0^2 f(x_0 + hu)\,du = h\int_0^2 E^u f(x_0)du = h\int_0^2 (1+\Delta)^u f(x_0)\,du$$

$$\approx h\int_0^2\left[1+u\Delta+\frac{u^2-u}{2}\Delta^2\right]f(x_0)\,du$$ [Δ 3 এবং তদূর্ধ ঘাত বিশিষ্ট পদগুলি বাদ দিয়ে]

$$= h\int_0^2\left[f(x_0)+u\Delta f(x_0)+\frac{1}{2}(u^2-u)\Delta^2 f(x_0)\right]du$$

$$= h\left[f(x_0)\int_0^2 du+\Delta f(x_0)\int_0^2 u\,du+\frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0)\int_0^2 (u^2-u)\,du\right]$$

$$= h\left[2f(x_0)+2.\,\Delta f(x_0)+\frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0).\,\frac{2}{3}\right]$$

$$= h\left[2f(x_0)+2\{f(x_0+h)-f(x_0)\}+\frac{1}{3}\{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)\}\right]$$

$$= h\left[\frac{1}{3}f(x_0)+\frac{4}{3}f(x_0+h)+\frac{1}{3}f(x_0+2h)\right]$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_0+h)+f(x_0+2h)]$$

$$= \frac{h}{3}[y_0+4y_1+y_2] \qquad \text{.... (4.4.1)}$$

সাংখ্যিক সমাকলন পদ্ধতিতে (4.4.1) সূত্রটিকে সিম্পসনের সূত্র হিসাবে পরিচিত।

এবং এই পদ্ধতিতে ভ্রান্তির পরিমাণ, $E_S = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(c)\,;\,(a = x_0 < c < x_2 = b)$...(4.4.2)

4.4.2. সিম্পসনের যৌগিক সমাকলন সূত্র (Composite Simpson R*u*le) :

মনে করা যাক, সাংখ্যিক পদ্ধতির দ্বারা $I_S = \int_a^b f(x)\,dx$, নির্দিষ্ট সমাকলনটি মান নির্ণয় করতে হবে।

এখানেও ট্রাপিজয়ডান সূত্রের মতই, যদি $[a, b]$ অন্তরালটি ছোট না হয় তবে ভ্রান্তির পরিমাণ বেশী হবে। সুতরাং এই পদ্ধতিতে $[a, b]$ অন্তরালটিকে $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots x_{r-1}, x_r, \ldots, x_n = b$, $(n + 1)$ বিন্দু দ্বারা n ($= 2m$ অর্থাৎ জোড় সংখ্যক) উপঅন্তরালে বিভক্ত করা হয়। যখন $x_r = x_0 + rh$ এবং $h = \frac{b-a}{n}\left(=\frac{b-a}{2m}\right)$, $r = 1, 2, 3, \ldots, n$ এবং $y_r = f(x_r)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$

এখন $I_S^C = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_{2m}} f(x)dx$

$$= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-4}}^{x_{2m-2}} f(x)dx + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx$$

প্রতিটি $2h$ দৈর্ঘ্যের উপঅন্তরালে $[x_0, x_2], [x_2, x_4], [x_4, x_6], \ldots [x_{2m-2}, x_{2m}]$
সিম্পসনের সমাকলন সূত্র (4.4.1) প্রয়োগ করে পাই,

$$I_S^C = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4] + \frac{h}{3}[y_4 + 4y_5 + y_6] + \cdots + \frac{h}{3}[y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}]$$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{2m-2}) + y_{2m}]$$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{2m-2})]$$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})]$$

$$= \frac{h}{3}[Y_0 + 4Y_1 + 2Y_2] \qquad \text{....... (4.4.3)}$$

$= \frac{h}{3}$ [প্রথম ও শেষ কোটিদ্বয়ের সমষ্টি $+ 4\times$ বিজোড় স্থানের কোটিগুলির সমষ্টি $+ 2\times$ জোড় স্থানের কোটিগুলির সমষ্টি]

যখন,

$$\left.\begin{aligned} Y_0 &= y_0 + y_n \\ Y_1 &= y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1} \\ Y_2 &= y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{....... (4.4.4)}$$

সমীকরণ (4.4.2)টিকে সিম্পসনের যৌগিক সমাকলন সূত্র হিসাবে গণ্য করা হয়। এবং এই পদ্ধতিতে ভ্রান্তির পরিমাণ হয়।

$$E_S^C = -\frac{nh^5}{180} f^{IV}(c) \; ; \; a = x_0 < C < x_n = b \qquad \text{...... (4.4.5)}$$

4.5 উদাহরণমালা

উদাহরণ 4.5.1. ট্র্যাপিজয়ডাল সূত্র এবং সিম্পসনের সূত্রের সাহায্যে $\int_0^1 (1+x)\,dx$ নির্দিষ্ট সমাকলনের মান নির্ণয় করুন, উপঅন্তরালের দৈর্ঘ্য 0·5 ধরে।

সমাধান ঃ এখানে, $f(x) = 1 + x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{\cdot}5$, $x_2 = 1{\cdot}0$

x_i	y_i	y_i	y_i
$i = 0$ থেকে 2	$i = 0$ থেকে 2	$(i = 0, 2)$	$(i = 1)$
0	1	1	—
0·5	1·5	—	1·5
1·0	2·0	2·0	—
		$Y_0 = 3{\cdot}0$	$Y_1 = 1{\cdot}5$

অতএব, (4.3.5)-নং সমীকরণ প্রয়োগ করে পাই,

$$I_T^C = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2)] = \frac{0{\cdot}5}{2}\,[3{\cdot}0 + 2(1{\cdot}5 + 0)]$$

$$= 0{\cdot}5 \times 3 = 1{\cdot}5$$

আবার, সিম্পসনের সূত্র (4.4.3) নং প্রয়োগ করে পাই,

$$I_T^C = \frac{h}{3}\,[Y_0 + 4Y_1 + 2Y_2] = \frac{0{\cdot}5}{3}[3 + 4 \times 1{\cdot}5] = \mathbf{1{\cdot}5}$$

মন্তব্য ঃ y = 1 + x সরলরেখা সূচিত করে বলে এক্ষেত্রে দুটি পদ্ধতিতেই মান $\int_0^1 (1+x)dx = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$ অর্থাৎ ভ্রান্তিহীন]

উদাহরণ 4.5.2 ঃ সমান উপঅন্তরাল নিয়ে যার দৈর্ঘ্য 0·5, $\int_{-2}^{2} x^4 dx$ এই নির্দিষ্ট সমাকলনের মান নির্ণয় করুন, ট্রাপিজয়ডাল ও সিম্পসরনের সূত্র প্রয়োগ করে।

সমাধান ঃ এখানে, $f(x) = x^4$, $a = x_0 = -2$, $b = x_n = 2$ এবং $h = 0{\cdot}5$

x_i (i = 0 থেকে 8)	y_i (i = 0 থেকে 8)	y_i (i = 0, 8)	y_i (i = 1, 3, 5, 7)	y_i (i = 2, 4, 6)
–2	16·0000	16·0000	—	—
–1·5	5·0625	—	5·0625	—
–1·0	1·0000	—	—	1·0000
–0·5	0·0625	—	0·0625	—
0	0·0000	—	—	0
0·5	0·0625	—	0·0625	—
1·0	1·0000	—	—	1·000
1·5	5·0625	—	5·0625	—
2·0	16·0000	16·0000	—	—
		$Y_0 = 32{\cdot}00$	$Y_1 = 10{\cdot}25$	$Y_2 = 2{\cdot}00$

ট্রাপিজিয়ডাল সূত্র, (4.3.5)-নং প্রয়োগ করে পাই,

$$I_T^C = \int_{-2}^{2} x^4 dx = \frac{h}{2}[Y_0 + 2(Y_1 + Y_2)] = \frac{0{\cdot}5}{2}\ [32{\cdot}00 + 2(10{\cdot}25 + 2{\cdot}00)]$$

$$= 14{\cdot}125$$

এবং সিম্পসনের সূত্র (4.4.3) নং প্রয়োগ করে পাই,

$$I_S^C = \int_{-2}^{2} x^4 dx = \frac{h}{3}[Y_0 + 4Y_1 + 2Y_2] = \frac{0{\cdot}5}{3}\ [32{\cdot}00 + 4 \times 10{\cdot}25 + 2 \times 2{\cdot}00] = \mathbf{12{\cdot}83}$$

লক্ষণীয় যে দুটি পদ্ধতিতে নির্ণীত মানদ্বয় আলাদা।

উদাহরণ 4.5.3 : 10টি সমান দৈর্ঘ্যের উপ-অন্তরাল লইয়া, নির্দিষ্ট সমাকলনটির $\int_0^1 (4x - 3x^2)dx$ -এর মান নির্ণয় করুন, (i) ট্রাপিজিয়ডাল এবং (ii) সিম্পসনের সূত্র প্রয়োগ করে। উহার প্রকৃত মানের সহিত তুলনা করুন। এবং উহার পরম ভ্রান্তি ও আপেক্ষিক ভ্রান্তি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে $f(x) = 4x - 3x^2,\ a = x_0 = 0,\ b = x_n = 1,\ n = 10$

$$\therefore\quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0{\cdot}1$$

x_i (i = 0 থেকে 10)	y_i (i = 0 থেকে 10)	y_i (i = 0, 10)	y_i (i = 1, 3, 5, 7, 9)	y_i (i = 2, 4, 6, 8)
0·0	0·00	0·00	—	—
0·1	0·37	—	0·37	—
0·2	0·68	—	—	0·68
0·3	0·93	—	0·93	—
0·4	1·12	—	—	1·12
0·5	1·25	—	1·25	—
0·6	1·32	—	—	1·32
0·7	1·33	—	1·33	—
0·8	1·28	—	—	1·28
0·9	1·17	—	1·17	—
1·0	1·10	1·00	—	—
		$Y_0 = 1{\cdot}00$	$Y_1 = 5{\cdot}05$	$Y_2 = 4{\cdot}40$

এখন, (i) ট্রাপিজিয়ডাম সূত্র, (4.35)-নং প্রয়োগ করে পাই,

$$I_T^C = \int_0^1 (4x - 3x^2)dx = \frac{h}{2}[Y_0 + 2(Y_1 + Y_2)] = \frac{0{\cdot}1}{2}\ [1{\cdot}00 + 2(5{\cdot}05 + 4{\cdot}40)]$$

$$= 0{\cdot}995 \quad [\text{ তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ }]$$

নির্দিষ্ট সমাকলনটির প্রকৃত মান $\int_0^1 (4x - 3x^2)dx = |2x^2 - x^3|_0^1 = 1{\cdot}000$

অতএব ট্রাপিজিয়ডাল সূত্রে পরম ভ্রান্তি = | 1·000 – 0·995 | = 0·005

এবং আপেক্ষিক ভ্রান্তি = $\frac{0{\cdot}005}{1{\cdot}000} = \mathbf{0{\cdot}005}$

(ii) সিম্পসনের সূত্র, (4.4.3) নং প্রয়োগ করে পাই,

$$I_S^C = \int_0^1 (4x - 3x^2)dx = \frac{R}{3}[Y_0 + 4Y_1 + 2Y_2]$$

$$= \frac{0{\cdot}1}{3}\ [1{\cdot}00 + 4 \times 5{\cdot}05 + 2 \times 4{\cdot}40]$$

$$= \frac{0{\cdot}1}{3} \times 30 = 1{\cdot}000$$ (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ)

অতএব, সিম্পসনের সূত্রে, পরমভ্রান্তি = | 1·000 – 1·000 | = **0·000**

এবং আপেক্ষিক ভ্রান্তি $= \frac{0}{1} = \mathbf{0}$

উদাহরণ 4.5.4 : $\int_0^2 |x-1|\,dx$ নির্দিষ্ট সমাকলটির মান নির্ণয় করুন।

(i) ট্রাপিজিয়ডাল ও **(ii)** সিম্পসনের সূত্র দ্বারা, 10টি সমান অন্তরালে বিভক্ত করে।

সমাধান ঃ এখানে $f(x) = |x-1|$, $a = x_0 = 0$, $b = x_n = 2$, $n = 10$

$$\therefore \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{10} = 0{\cdot}2$$

x_i (i = 0 থেকে 10)	y_i (i = 0 থেকে 10)	y_i (i = 0, 10)	y_i (i = 1, 3, 5, 7, 9)	y_i (i = 2, 4, 6, 8)
0	1·0	1·0	—	—
0·2	0·8	—	0·8	—
0·4	0·6	—	—	0·6
0·6	0·4	—	0·4	—
0·8	0·2	—	—	0·2
1·0	0	—	0	—
1·2	0·2	—	—	0·2
1·4	0·4	—	0·4	—
1·6	0·6	—	—	0·6
1·8	0·8	—	0·8	—
2·0	1·0	1·0	—	—
		$Y_0 = 2{\cdot}0$	$Y_1 = 2{\cdot}4$	$Y_2 = 1{\cdot}6$

$$\therefore \; I_T^C = \frac{h}{2}[Y_0 + 2(Y_1 + Y_2)] = \frac{0{\cdot}2}{2}[2{\cdot}0 + 2(2{\cdot}4 + 1{\cdot}6)] = 1{\cdot}0$$

$$I_T^C = \frac{h}{3}[Y_0 + 2(Y_1 + Y_2)] = 3[2{\cdot}0 + 4 \times 2{\cdot}4 + 2 \times 1{\cdot}6] = 0{\cdot}987 \simeq 1{\cdot}0$$

উদাহরণ 4.5.5 : ধাপ-দৈর্ঘ্য 0·1 নিয়ে $\int_{0\cdot 1}^{0\cdot 7} (e^x + 2x)\,dx$-এর মান নির্ণয় করুট্রোপিজিয়ডাল ও সিম্পসনের সূত্র প্রয়োগ করে, পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ এখানে $f(x) = e^x + 2x,\ a = x_0 = 0\cdot 1,\ b = x_n = 0\cdot 7,\ h = 0\cdot 1$

x_i (i = 0 থেকে 6)	y_i (i = 0 থেকে 6)	y_i (i = 0, 6)	y_i (i = 1, 3, 5)	y_i (i = 2, 4)
0·1	1·30517	1·30517	—	—
0·2	1·62140	—	1·62140	—
0·3	1·94986	—	—	1·94986
0·4	2·29182	—	2·29182	—
0·5	2·64872	—	—	2·64872
0·6	3·02212	—	3·02212	—
0·7	3·41375	3·41375	—	—
		$Y_0 = 4\cdot 71892$	$Y_1 = 6\cdot 93534$	$Y_2 = 4\cdot 59858$

$$\therefore\quad I_T^C = \frac{h}{2}[Y_0 + 2(Y_1 + Y_2)] = \frac{0\cdot 1}{2}[4\cdot 71892 + 2(6\cdot 93534 + 4\cdot 59858)]$$

$= 1\cdot 389338 \simeq 1\cdot 38934$, পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$I_S^C = \frac{h}{3}\left[Y_0 + 4Y_1 + 2Y_2 = \frac{0\cdot 1}{3}\right][4\cdot 71892 + 4 \times 6\cdot 93534 + 2 \times 4\cdot 59858]$$

$= 1\cdot 3885813 \simeq$ **1·38858**, পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 4.5.6 : দুইটি অন্তরালে বিভক্ত করে, $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 0\cdot 162\sin^2\phi}\ d\phi$-এর মান নির্ণয় করুন, সিম্পসনের সূত্র প্রয়োগ করে।

সমাধান ঃ এখানে $f(x) = \sqrt{1 - 0\cdot 162\sin^2\phi},\ a = x_0, = 0,\ b = x_n = \frac{\pi}{2},\ n = 2$

$$\therefore \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} = \frac{\pi}{4} = 0{\cdot}7854$$

x_i	y_i
(1 = 0, 1, 2)	(i = 0, 1, 2)
$x_0 = 0$	$y_0 = 1{\cdot}0000$
$x_1 = \frac{\pi}{4}$	$y_1 = 0{\cdot}9586$
$x_2 = \frac{\pi}{2}$	$y_2 = 0{\cdot}9154$

$$\therefore \quad I_S = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] = \frac{0{\cdot}7854}{3}\,[1{\cdot}0000 + 4 \times 0{\cdot}9586 + 0{\cdot}9154]$$

$= 1{\cdot}5052976 \simeq$ **1·50**, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

4.6 অনুশীলনী

(a) 5 টি অন্তরালে বিভক্ত করে, ট্রাপিজিয়ডাল সূত্রের দ্বারা $\int_0^5 \frac{dx}{1+x}$, নির্দিষ্ট সমাকলনের মান নির্ণয় করুন।

(b) 6 টি অন্তরালে বিভক্ত করে, (i) সিমপসনের এবং (ii) ট্রাপিজয়ডালের সূত্র দ্বারা, $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x}$, নির্দিষ্ট সমাকলনের মান নির্ণয় করুন।

(c) 6 টি অন্তরালে বিভক্ত করে, (i) ট্রাপিজিয়ডাল ও (ii) সিম্পসনের সূত্র দ্বারা $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\ dx$-এর মান নির্ণয় করুন।

(d) বিভক্ত অন্তরালের দৈর্ঘ্য 0.1, ধরে, $\int_0^1 x^2(1-x)dx$ সমাকলনটির মান নির্ণয় করুন, সিম্পসনের সূত্র দ্বারা।

(e) $h = 0.1$ ধরে. (i) ট্রাপিজিয়ডাল সূত্র এবং (ii) সিম্পসনের সূত্র দ্বারা $\int_{0.1}^{0.7} (e^x + 2x)dx$ সমাকলনটির মান নির্ণয় করুন।

(f) 4 টি অন্তরালে বিভক্ত করে, সিম্পসনের সূত্র প্রয়োগ করে $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx$ সমাকলনটির মান নির্ণয় করুন।

(g) 10 টি অন্তরালে বিভক্ত করে, (i) ট্রাপিজয়ডাল (ii) সিম্পসনের সূত্র দ্বারা $\int_0^1 \sin x^2 dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

(h) 6টি অন্তরালে বিভক্ত করে $\int_0^1 e^{\sin x} dx$ এর মান নির্ণয় করুন (i) সিম্পসন ও (ii) ট্রাপিজয়ডাল সূত্র প্রয়োগ করে।

4.7 উত্তরমালা

(a) 1.866,	(b) (i) o.307, (ii) 0.305	(c)(i) 0.82 (ii) 0.83
(d) 0.083,	(e) (i) 1.389 (ii) 1.388	(f) 2.193
(g) (i) 0.311 (ii) 0.310	(h) (i) 3.104 (ii) 3.099	

4.8 সহায়ক গ্রন্থাবলি

1. S.A.MOLLAH : INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS (BOOKS AND ALLIED (P) LTD.)

2. H.C.SAXENA : FINITE DIFFERENCES AND NUMERICAL ANALYSIS (S.CHAND & COMPANY LTD.)

3. A. GUPTA & S.C.BOSE : INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS (ACADEMIC PUBLICATION)

একক 5 □ বীজগাণিতিক অথবা অবীজগাণিতিক সমীকরণের সাংখ্যিক সমাধান (Numerical solution of Algebraic or Transcendental equation)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

5.2 উদ্দেশ্য

5.3 দেসকার্তের চিহ্ন রীতি

5.4 সারণি পদ্ধতি

5.5 সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি

5.6 গণনার ধারা বা পদ্ধতি

5.7 উদাহরণ

5.8 নিউটন-র‍্যাফসনের পদ্ধতি

5.9 নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতির জ্যামিতিক তাৎপর্য

5.10 গণনার ধারা বা পদ্ধতি

5.11 উদাহরণ

5.12 অনুশীলনী

5.13 উত্তরমালা

5.14 সহায়ক গ্রন্থাবলি

5.1 প্রস্তাবনা

বিজ্ঞান ও প্রকৌশলে নিয়ত আমরা $f(x) = 0$ আকারের সমীকরণ থেকে তার বীজ বা মূল নির্ণয় করে থাকি। কখনও কখনও সমীকরণের বীজের অবস্থানও নির্ণয় করে থাকি। উল্লেখ্য যে, সীমাকরণটি এক বা বহুমানবিশিষ্ট বীজগাণিতিক বা অবীজগাণিতিকও হতে পারে ; এমনকি বীজটি বাস্তব না হয়ে জটিলও হতে পারে।

যদিও আমরা সমীকরণের সঠিক বীজ বা বীজটির অবস্থান নির্ণয়ের জন্য কার্ডন পদ্ধতি, অয়লার পদ্ধতি, ফেরারীর পদ্ধতি, দেকার্তের পদ্ধতি, স্ট্রামের পদ্ধতি প্রভৃতি জানি তবুও এখানে আমরা উল্লিখিত সমীকরণগুলির বীজ বা মূলের আসন্ন মান নির্ণয়ের জন্য কয়েকটি সাংখ্যিক সমাধান পদ্ধতির আলোচনা করব।

এই এককে আমরা সারণি পদ্ধতি, সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি ও নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি দ্বারা যে কোন সমীকরণের বাস্তব বীজের সাংখ্যিক সমাধান নিয়ে আলোচনা করব।

5.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি যেগুলি জানতে পারবেন সেগুলি হল

- কোন সমীকরণের বাস্তব বীজের সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা করতে পারবেন।
- কোন সমীকরণের বাস্তব বীজগুলির অবস্থান সম্বন্ধে ধারণা করতে পারবেন।
- কোন সমীকরণের বীজ বা বীজগুলির সাংখ্যিক মান, পছন্দমত শুদ্ধ স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করতে পারবেন।

5.3 দেসকার্তের চিহ্ন রীতি (Descartes' rule of Signs)

একটি মূলদ, অখণ্ডক ও বাস্তব সহগবিশিষ্ট বীজগাণিতিক সমীকরণ $f(x) = 0$ এর ধনাত্মক বীজ বা মূলের সংখ্যা $f(x)$ বহুপদী রাশির চিহ্নের পরিবর্তনের সংখ্যা অপেক্ষা বেশী হতে পারে না এবং ঋনাত্মক বীজের সংখ্যা $f(-x)$ বহুপদী রাশির চিহ্নের পরিবর্তনের সংখ্যা অপেক্ষা বেশী হতে পারে না। যদি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বীজের সংখ্যা কমে তবে ওরা দুই-এর গুণিতক হিসাবে কমবে। অর্থাৎ $f(x) = 0$ যদি n ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী রাশী সমীকরণ হয় এবং $f(x)$ এ m_1 সংখ্যক চিহ্নের পরিবর্তন থাকে এবং $f(-x)$ এ m_2 সংখ্যক চিহ্নের পরিবর্তন থাকে, তবে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক বীজের সর্বাধিক সংখ্যা m_1 এবং m_2 অর্থাৎ কমপক্ষে $n - (m_1 + m_2)$ সংখ্যক জটিল বীজ থাকবে। অতএব দেসকার্তের চিহ্ন রীতির সাহায্যে কোন বহুপদী বীজগাণিতিক সমীকরণের বাস্তব বীজের সর্বাধিক সংখ্যা ও জটিল বীজের সর্বনিম্ন সংখ্যা নির্ণয় করতে পারা যায়। যদি $f(x) = 0$ বা $f(-x) = 0$ সমীকরণের একটিমাত্র চিহ্নের পরিবর্তন থাকে তবেই $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি মাত্র বাস্তব ধনাত্মক বা একটিমাত্র বাস্তব ঋণাত্মক বীজ আছে নির্দিষ্ট করে বলতে পারা যায়।

এখন আমরা একটি উপপাদ্যের উল্লেখ করব যার সাহায্যে পরবর্তীকালে আমরা যে-কোন সমীকরণ $f(x) = 0$-এর বীজ নির্ণয় করার জন্য ব্যবহার করব।

উপপাদ্য—1 যদি $f(x)$, $f'(x)$, $[a, b]$ অন্তরালে উভয়ই সন্তত হয় এবং যদি $f(a). f(b) < 0$ অর্থাৎ $f(a)$ এবং $f(b)$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়, তবে $f(x) = 0$ সমীকরণের কম করে একটি বীজ $[a, b]$ অন্তরালের মধ্যে অবস্থান করে। আরও যদি $f'(x)$, $[a, b]$ অন্তরালে একই চিহ্নযুক্ত (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হয়, তবে $f(x) = 0$ সমীকরণের একটিমাত্র বীজ $[a, b]$ অন্তরালের মধ্যে অবস্থিত হয়।

5.4 সারণি পদ্ধতি (Tabulation Method)

মনে করুন, $f(x) = 0$ সমীকরণটি সব বাস্তব বীজগুলিই (a, b) মুক্ত অন্তরালে অবস্থান করে। এমন (a, b) অন্তরাল থেকে একটি ছোট মুক্ত অন্তরাল (a_0, b_0) $[(a_0, b_0) \subseteq (a, b)]$ নির্ণয় করুন, যেখানে $f(a_0)\, f(b_0) < 0$ এবং $f'(x)$ উক্ত অন্তরাল (a_0, b_0)-তে একই চিহ্নযুক্ত (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)। অর্থাৎ (a_0, b_0) অন্তরালে $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটিমাত্র বীজ $x = \alpha$ (ধরা যাক) অবস্থান করবে। আবার x-এর পৃথক মান যথা $a_0,\ a_0 + h,\ a_0 + 2h,\ a_0 + rh,\ a_0 + (r + 1)\, h,\ \ldots,\ a_0 + nh = b_0$-এর জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করুন, যেখানে h হল ধাপ দৈর্ঘ্য (সাধারণত $h = 1$ ধরা হয়)। মনে করুন $f(a_0 + rh).\ f\left(a_0 + \overline{r+1}h\right) < 0$, তাহলে $x = \alpha$ বীজটি $\left(a_0 + rh, a_0 + \overline{r+1}h\right)$ অন্তরালে অবস্থান করবে। এখন $\left(a_0 + rh, a_0 + (r+1)h\right)$ অন্তরালটিকে (a_1, b_1) অন্তরাল দ্বারা সূচিত করুন। আবার x-এর পৃথক মান যথা, $a_1, a_1 + \frac{h}{10}, a_1 + \frac{2h}{10} \ldots, a_1 + \frac{sh}{10}, a_1 + \frac{\overline{s+1}}{10}h, \ldots, a_1 + \frac{nh}{10} = b_1$ এর জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করুন এবং মনে করুন $f\left(a_1 + \frac{sh}{10}\right) . f\left(a_1 + \frac{\overline{s+1}h}{10}\right) < 0$ অতএব, $x = \alpha$ বীজটি $\left(a_1 + \frac{sh}{10}, a_1 + \frac{\overline{s+1}h}{10}\right)$ অন্তরালের মধ্যে অবস্থান করবে এবং $\left(a_1 + \frac{sh}{10}, a_1 + \frac{\overline{s+1}h}{10}\right)$ অন্তরালটিকে (a_2, b_2) অন্তরাবা দ্বারা সূচিত করুন। আবার x-এর পৃথক মান যথা $a_2, a_2 + \frac{h}{10^2}, a_2 + \frac{2h}{10^2}, \ldots, a_2 + \frac{Kh}{10^2}, a_2 + \frac{\overline{K+1}}{10^2}h, \ldots, a_2 + \frac{nh}{10^2} = b_2$ এর জন্য $f(x)$-এর মানগুলি নির্ণয় করুন এবং মনে করুন $f\left(a_2 + \frac{Kh}{10^2}\right) . \left(b_2 + \frac{\overline{K+1}h}{10^2}\right) < 0$. অতএব $x = \alpha$ বীজটি $\left(a_2 + \frac{Kh}{10^2}, a_2 + \frac{\overline{K+1}h}{10^2}\right)$ অন্তরালের অন্তর্গত এবং অন্তরালটিকে (a_3, b_3) অন্তরাল দ্বারা সূচিত করুন। এইভাবে প্রতিটি ক্ষুদ্র অন্তরাল আরও ক্ষুদ্র হতে হতে $x = \alpha$ এর দিকে অভিসারী হবে।

এই পদ্ধতি দ্বারা প্রাথমিকভাবে একটি বীজের সম্ভাব্য অবস্থান নির্ণয় করতে পারবেন।

উদাহরণ 5.4.1. সারণি পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত সমীকরণটির বাস্তব বীজগুলি নির্ণয় করুন, দুই বা তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 76x - 79 = 0$$

সমাধান ঃ মনে করুন, $f(x) = x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 76x - 79$

রাশিমালার চিহ্ন ঃ + –·– + –, যেখানে চিহ্নের পরিবর্তন তিনটি।

আবার, $f(-x) = x^4 + 5x^3 - 12x^2 - 76x - 79$

এই রাশিমালার চিহ্ন ঃ + + – – – –, যেখানে চিহ্নের পরিবর্তন একটি।

এখন দেসকার্তের চিহ্ন রীতি প্রয়োগ করে আমরা বলতে পারি $f(x) = 0$ সমীকরণটির সর্বাধিক তিনটি ধনাত্মক এবং একটি মাত্র ঋণাত্মক বীজ আছে। এমন ধাপ দৈর্ঘ্য 1 নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মানগুলি নির্ণয় করা হল ঃ

সারণি T_0

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	491	1	–199	–223	–161	–79	–19	1	–13	–31	1

এখন সারণি T_0 থেকে পাচ্ছি, $f(-4).\ f(-3) < 0$, $f(2).\ f(1) < 0$, $f(2).\ f(3) < 0$ এবং $f(4).\ f(5) < 0$. অর্থাৎ ঋণাত্মক বীজটি α, (–4, –3) অন্তরালে এবং ধনাত্মক বীজ তিনটি β, γ, δ যথাক্রমে (1, 2), (2, 3) এবং (4, 5) অন্তরালে অবস্থান করছে।

α $(-4 < \alpha < -3)$ নির্ণয় করার জন্য, –4 থেকে আরম্ভ করে এবং মাপ, দৈর্ঘ্য 0·1 (বা $\frac{1}{10}$) নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_1^{(\alpha)}$ $(-4 < \alpha < -3)$

x	–4·0	–3·9	–3·8	–3·7	–3·6	–3·5	–3·4	–3·3	–3·2	–3·1	–3·0
$f(x)$	1	–29·98	—	—	—	—	—	—	—	—	–199

যেহেতু $f(-4{\cdot}0).\ f(-3.9) < 0$, α বীজটি (–4·0, –3·9) অন্তরালের অন্তর্গত। এখন –4·0 থেকে শুরু করে এবং ধাপ-দৈর্ঘ্য (step-length) 0·01 (বা $\frac{1}{10^2}$) নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_2^{(\alpha)}$ $(-4\cdot0 < \alpha < -3\cdot9)$

x	–4·00	–3·99	–3·98	–3·97	–3·96	–3·95	–3·94	–3·93	–3·92	–3·91	–3·90
$f(x)$	1	–2·22	—	—	—	—	—	—	—	—	–29·98

এখানে $f(-4\cdot00).\ f(-3\cdot99) < 0$, অতএব α বীজটি (–4·00, –399) অন্তরালে অবস্থান করছে।

আবার –4·00 থেকে আরম্ভ করে এবং 0·001 (বা $\frac{1}{10^3}$) ধাপ-দৈর্ঘ্য নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_3^{(\alpha)}$ $(-4\cdot00 < \alpha < -3\cdot99)$

x	–4·000	–3·999	–3·998	–3·997	–3·996	–3·995	–3·944		–3·990
$f(x)$	1	0·676	0·352	0·029	–0·293	—	—	—	–2·22

এখানে $f(-3\cdot997).\ f(-3\cdot996) < 0$, অতএব α বীজটি (–3·997, –3·996) অন্তরালে অবস্থান করছে। আবার –3·997 থেকে শুরু করে এবং 0·0001 (বা $\frac{1}{10^4}$) ধাপ দৈর্ঘ্য নিয়ে x এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_4^{(\alpha)}$ $(-3\cdot997 < \alpha < -3\cdot996)$

x	–3·9970	–3·9969	–3·9968	–3·9967	–3·9966	–3·9965
$f(x)$	0·029	0·003	–0·035	—	—	—

এখানে $f(-3\cdot9970).\ f(-3\cdot9969) < 0$ এবং α বীজটি (–3·9970, –3·9969) অন্তরালের অন্তর্গত।

$\therefore\ \alpha = -\ 3\cdot997$, $f(x) = 0$ সমীকরণটির একমাত্র ঋণাত্মক বীজ, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

এবার β $(1 < \beta < 2)$ বীজটি নির্ণয় করব।

β $(1 < \beta < 2)$ নির্ণয় করার জন্য 1 থেকে আরম্ভ করে এবং ধাপ-দৈর্ঘ্য 0·1 (বা $\frac{1}{10}$) নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_1^{(\beta)}$ $(1 < \beta < 2)$

x	1		1·5	1·6	1·7	1·8		2
$f(x)$	–19		–3·81		–0·69	0·25		1

এখানে, $f(1{\cdot}7).\ f(1{\cdot}8) < 0$, অতএব β বীজটি (1·7, 1·8) অন্তরালের অন্তর্গত। এখন 1·7 থেকে আরম্ভ করে এবং 0·01 ধাপ-দৈর্ঘ্য নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হল,

সারণি ঃ $T_2^{(\beta)}$ $(1{\cdot}7 < \beta < 1{\cdot}8)$

x	1·70		1·75	1·76	1·77	1·78	1·79	1·80
$f(x)$	–0·69		–0·17	–0·07	0·01			0·25

যেহেতু $f(1{\cdot}76).\ f(1{\cdot}77) < 0$, β বীজটি (1·76, 1·77) অন্তরালে অবস্থান করছে। আবার 1·76 থেকে আরম্ভ করে এবং 0·001 ধাপ-দৈর্ঘ্য নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_3^{(\beta)}$ $(1{\cdot}76 < \beta < 1{\cdot}77)$

x	1·760		1·765		1·768	1·769	1·770
$f(x)$	–0·07		–0·030		–0·003	0·005	0·01

এখানে $f(1{\cdot}768).\ f(1{\cdot}769) < 0$, অতএব β বীজটি (1·768, 1·769) অন্তরালে অবস্থান করছে। আবার 1·768 থেকে আরম্ভ করে এবং 0·0001 ধাপ-দৈর্ঘ্য নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_4^{(\beta)}$ $(1{\cdot}768 < \beta < 1{\cdot}769)$

x	1·7680	1·7681		1·7683	1·7684		1·7690
$f(x)$	–0·003	–0·002		–0·0004	0·001		0·005

এখানে $f(1{\cdot}7683).\ f(1{\cdot}7684) < 0$, অতএব β বীজটি (1·7683, 1·7684) অন্তরালে অন্তর্গত।

∴ $\beta = 1{\cdot}768$, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি বীজ, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

এখন $\gamma(2 < \gamma < 3)$ বীজটি নির্ণয় করব।

এখানে 2 থেকে আরম্ভ করে এবং 0·1 ধাপ, দৈর্ঘ্য নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_1^{(\gamma)}$ $(2 < \gamma < 3)$

x	2·0		2·2	2·3		2·5		3·0
$f(x)$	1		0·30	–0·53		–3·06		–13

এখানে $f(2.2).\ f(2.3) < 0$, অতএব γ বীজটি (2·2, 2·3) অন্তরালে অবস্থান করবে। আবার 2·2 থেকে আরম্ভ করে, 0·01 ধাপ—দৈর্ঘ্য নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_2^{(\gamma)}$ $(2·2 < \gamma < 2·3)$

x	2·20		2·24	2·25		3·0
$f(x)$	0·30		+0·008	–0·07		–0·53

এখানে $f(2.24).\ f(2.25) < 0$, অতএব γ বীজটি (2·24, 2·25) অন্তরালে অবস্থান করবে। এখন 2·24 থেকে আরম্ভ করে, 0·001 ধাপ—দৈর্ঘ্য নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_3^{(\gamma)}$ $(2·24 < \gamma < 2·25)$

x	2·240	2·241	2·242		2·245		2·250
$f(x)$	0·008	–0·00009	–0·008		–0·03		–0·07

এখানে $f(2·240).\ f(2·241) < 0$, অতএব γ বীজটি (2·240, 2·241) অন্তরালে অবস্থান করবে। অতএব $\gamma = 2·24$, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটা বীজ, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

এবার δ $(4 < \delta < 5)$ বীজটি নির্ণয় করব।

4 থেকে আরম্ভ করে এবং 0·1 ধাপ—দৈর্ঘ্য নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_1^{(\delta)}$ $(4 < \delta < 5)$

x	4·0		4·6		4·9	5·0
$f(x)$	–31		–22·25		–6·48	1

এখানে দেখা যাচ্ছে $f(4·9).\ f(5·0) < 0$, অতএব δ বীজটি (4·9, 5·0) অন্তরালে অবস্থান করছে। এখন 4·9 থেকে আরম্ভ করে এবং 0·01 ধাপ—দৈর্ঘ্য নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ময় করা হল।

সারণি ঃ $T_2^{(\delta)}$ $(4{\cdot}9 < \delta < 5{\cdot}0)$

x	4·90		4·95		4·97	4·98	4·99	5·00
$f(x)$	–6·48		–2·89		—	–0·59	0·20	1

এখানে দেখা যাচ্ছে $f(4{\cdot}98).\ f(4{\cdot}99) < 0$, অতএব δ বীজটি $(4{\cdot}98,\ 4{\cdot}99)$ অন্তরালে অবস্থান করছে। এখন 4·98 থেকে আরম্ভ করে এবং 0·001 ধাপ—দৈর্ঘ্য নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি ঃ $T_3^{(\delta)}$ $(4{\cdot}98 < \delta < 4{\cdot}99)$

x	4·980		4·985	4·986	4·987	4·988	4·989	4·9
$f(x)$	–0·59		–0·201	—	–0·042	0·037	—	0·20

এখানে $f(4{\cdot}987).\ f(4{\cdot}988) < 0$

$\therefore\ \ \delta = 4{\cdot}99,\ f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

5.5 সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি (Bisection Method)

সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি একটি পৌনঃপুনিক পদ্ধতি (Iterative method). এখানে সারণি পদ্ধতি দ্বারা একটি সম্ভাব্য ছোট অন্তরাল $(a_0,\ b_0)$ নির্ণয় করতে হবে, যেখানে $f(a_0).\ f(b_0) < 0$ এবং $f'(x)$ একই চিহ্নযুক্ত হয়। অর্থাৎ এমন একটি ছোট অন্তরাল নির্ণয় করতে হবে যার মধ্যে $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি মাত্র বাস্তব বীজ α অবস্থান করে।

এখন $(a_0,\ b_0)$ অন্তরালকে দুইটি সমান উপ-অন্তরালে $(a_0,\ x_1)$ ও $(x_1,\ b_0)$-এ বিভক্ত করা হল অর্থাৎ $x_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$। এখন যদি x_1, $f(x) = 0$ এর বীজ হয় তবে $f(x_1) = 0$ হবে, নতুবা $f(a_0).\ f(x_1) < 0$ বা $f(x_1).f(b_0) < 0$ হবে। মনে করা যাক $f(a_0).\ f(x_1) < 0$. অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণের বাস্তব বীজটি α, $(a_0,\ x_1)$ অন্তরালে অবস্থান করবে। এখন $(a_0,\ x_1)$ অন্তরালটিকে $(a_1,\ b_1)$ অন্তরাল দ্বারা সূচিত করা হল, অর্থাৎ $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$ আবার $(a_1,\ b_1)$ অন্তরালটিকে দুটি সমান অন্তরাল $(a_1,\ x_2)$ এবং $(x_2,\ b_1)$ তে বিভক্ত করা হল। অর্থাৎ $x_2 = \dfrac{b_1 + a_1}{2}$। এখন যদি x_2, $f(x) = 0$ সমীকরণটির বীজ হয়, তবে $f(x_2) = 0$ হবে নতুবা $f(a_1).\ f(x_2) < 0$ বা $f(x_2).\ f(b_1) < 0$ হবে। মনে করি $f(x_2).\ f(b_1) < 0$,

তবে $f(x) = 0$ সমীকরণের বাস্তব বীজটি α, (x_2, b_1) অন্তরালে থাকবে। এখন (x_2, b_1) অন্তরালটিকে (a_2, b_2) অন্তরাল দ্বারা সূচিত করা হল। অতএব $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}\ (b_1 - a_1) = \frac{1}{2^2}\ (b_0 - a_0)$ একইভাবে, আমরা $x_{n+1} = \frac{b_n + a_n}{2}$ নির্ণয় করব যা $f(x) = 0$ সমীকরণের বাস্তব বীজ $x = \alpha$ এর $(n + 1)$-তম প্রায়িক মান ধরা হবে এবং $x = \alpha$ বাস্তব বীজটি (a_n, b_n) অন্তরালে অবস্থান করবে।

যেখানে $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \ldots\ldots = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$

$\therefore$ x_{n+1}-এর পরপর মানগুলি যথা $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n, x_{n+1}$, $x = \alpha$ তে অভিসারী।

5.6 গণনার ধারা বা পদ্ধতি

সারণি ঃ 5.6.1

যখন $f(a_0) > 0$ এবং $f(b_0) < 0$

n	$a_n.f(a_n)>0$	$b_n.f(bn)<0$	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	a_0	b_0	$x_1\left(=\frac{a_0+b_0}{2}\right)$	$f(x_1) > 0$
1	$a_1 (= x_1)$	$b_1 (= b_0)$	$x_2\left(=\frac{a_1+b_1}{2}\right)$	$f(x_2) > 0$
2	$a_2 (= x_2)$	$b_2 (= b_1)$	$x_3\left(=\frac{a_2+b_2}{2}\right)$	$f(x_3) < 0$
3	$a_3 (= a_2)$	$b_3 (= x_3)$	$x_4\left(=\frac{a_3+b_3}{2}\right)$	$f(x_4) < 0$
4	$a_4 (= a_3)$	$b_4 (= x_4)$	$x_5\left(=\frac{a_4+b_4}{2}\right)$	$f(x_5) > 0$
5	$a_5 (= x_5)$	$b_5 (= b_4)$	$x_6\left(=\frac{a_5+b_5}{2}\right)$	$f(x_6) < 0$
	....	....	....	....
	....	....	....	....

সারণি ঃ 5.6.1 (A)

যখন $f(a_0) < 0$ এবং $f(b_0) > 0$

n	$a_n f(a_n) < 0$	$b_n f(b_n) > 0$	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	a_0	b_0	$x_1\left(= \dfrac{a_0 + b_0}{2}\right)$	$f(x_1) > 0$
1	$a_1 (= a_0)$	$b_1 (= x_1)$	$x_2\left(= \dfrac{a_1 + b_1}{2}\right)$	$f(x_2) > 0$
2	$a_2 (= a_1)$	$b_2 (= x_2)$	$x_3\left(= \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$	$f(x_3) < 0$
3	$a_3 (= x_3)$	$b_3 (= b_2)$	$x_4\left(= \dfrac{a_3 + b_3}{2}\right)$	$f(x_4) < 0$
4	$a_4 (= x_4)$	$b_4 (= b_3)$	$x_5\left(= \dfrac{a_4 + b_4}{2}\right)$	$f(x_5) > 0$
5	$a_5 (= a_4)$	$b_5 (= x_5)$	$x_6\left(= \dfrac{a_5 + b_5}{2}\right)$	$f(x_6) < 0$
6	$a_6 (= x_6)$	$b_6 (= b_5)$	$x_7\left(= \dfrac{a_6 + b_6}{2}\right)$	$f(x_6) > 0$
	....	....	....	....
	....	....	....	....

5.7 উদাহরণ

উদাহরণ 5.7.1 : সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতির দ্বারা $x^3 - 4x - 9 = 0$ সমীকরণটি ধনাত্মক বাস্তব বীজটি নির্ণয় করুন, দুই সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন $f(x) = x^3 - 4x - 9 \quad \therefore f'(x) = 3x^2 - 4$

এখন $f(0) = -9$, $f(1) = -12$, $f(2) = -9$, $f(3) = 6$

$\therefore f(2).\ f(3) < 0$ এবং $f'(x) > 0$, যখন $2 < x < 3$

$\therefore f(x) = 0$ সমীকরণটির একটিমাত্র বীজ, (2, 3) অন্তরালে অবস্থান করে।

সারণি ঃ 5.7.1 (A)

α ($2 < \alpha < 3$)

n	$a_n f(an) < 0$	$b_n f(b_n) > 0$	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	2	3	2·5	$f(2·5) = -3·3 < 0$
1	2·5	3	2·7	$f(2·7) = -0·12 < 0$
2	2·7	3	2·8	$f(2·8) = 1·75 > 0$
3	2·7	2·8	2·75	$f(2·75) = 0·80 > 0$
4	2·7	2·75	2·72	$f(2·72) = 0·24 > 0$
5	2·7	2·72	2·71	$f(2·71) = 0·06 > 0$

$\therefore$ α = **2·7**, $f(x) = 0$ সমীকরণটি একমাত্র ধনাত্মক বাস্তব বীজ, দুই **সার্থক** অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.7.2 : সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতির দ্বারা $x^3 - 9x + 1 = 0$ সমীকরণের যে বীজটি 2 ও 3 এর মধ্যবর্তী নির্ণয় করুন, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন $f(x) = x^3 - 9x + 1$ $\quad \therefore f'(x) = 3x^2 - 9$

এখন $f(2) = -9$, $f(3) = 1$ এবং $f'(x) > 0$ যখন $2 < x < 3$

$\therefore$ $f(x) = 0$ সমীকরণের (2, 3) অন্তরালে একটিমাত্র ধনাত্মক বীজ থাকবে।

সারণি ঃ 5.7.2

α ($2 < \alpha < 3$)

n	$a_n f(a_n) < 0$	$b_n f(b_n) > 0$	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	2	3	2·5	$f(2·5) = -5·8 < 0$
1	2·5	3	2·75	$f(2·75) = -2·95 < 0$
2	2·75	3	2·88	$f(2·88) = -1·03 > 0$
3	2·88	3	2·94	$f(2·94) = -0·04 > 0$
4	2·94	3	2·97	$f(2·97) = -0·47 > 0$
5	2·94	2·97	2·955	$f(2·955) = -0·21 > 0$
6	2·94	2·955	2·947	$f(2·947) = -0·07 > 0$
7	2·94	2·947	2·9435	$f(2·9435) = -0·01 > 0$
8	2·94	2·9435	2·9418	

∴ α = **2·94**, $f(x) = 0$ সমীকরণের ধনাত্মক বীজ যাহা 2 ও 3 এর মধ্যবর্তী, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.7.3 : সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতির দ্বারা $x^3 + x^2 - 1 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন, দুই সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন $f(x) = x^3 + x^2 - 1 \quad \therefore f'(x) = 3x^2 + 2x$

এখানে দেসকার্তের চিহ্ন নীতি প্রয়োগ করে পাই, $f(x) = 0$ এই সমীকরণের একটি মাত্র বাস্তব ধনাত্মক বীজ আছে এবং ঐ বীজটাকেই আমরা নির্ণয় করব।

এখানে, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $f(0·5) = -0·63$, $f(0·8) = 0·15$, $f(0·6) = -0·42$, $f(0·7) = -0·17$

∴ $f(0·7).\ f(0·8) < 0$ এবং $f'(x) > 0$, যখন $0·7 < x < 0·8$

অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটিমাত্র বাস্তব বীজ আছে, (0·7, 0·8) অন্তরালে।

সারণি ঃ 5.7.3

$\alpha\ (0·7 < \alpha < 0·8)$

n	$a_n\ (-ve)$	$b_n\ (+ve)$	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	0·7	0·8	0·75	$f(0·75) = -0·12 < 0$
1	0·75	0·8	0·775	$f(0·775) = 0·07 > 0$
2	0·75	0·775	0·762	$f(0·762) = 0·02 > 0$
3	0·75	0·762	0·756	$f(0·756) = 0·004 > 0$
4	0·75	0·756	0·753	$f(0·753) = -0·006 < 0$
5	0·753	0·756	0·754	$f(0·754) = -0·003 < 0$
6	0·754	0·756	0·755	$f(0·755) = 0·0004 > 0$
7	0·755	0·756	0·7555	

দ্রষ্টব্য ঃ এখান থেকে পরবর্তী উদাহরণ গুলিতে $a_n(-ve)$ বলতে a_n মানকে বুঝাবে যেখানে $f(a_n) < 0$; অনুরূপে $a_n(+ve)$, $b_n(-ve)$, $b_n(+ve)$ ইত্যাদিও বুঝাবে।

$\therefore$ α = **0·76**, সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ, দুই সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.7.4 : সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতির সাহায্যে $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ সমীকরণটির যে বীজটি (0, 1) অন্তরাল অবস্থিত সেটা নির্ণয় করুন, দুই দশমিকস্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1$ $\quad\therefore f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 1$

এখানে, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ এবং $f'(x) > 0$ যখন $(0 < x < 1)$

$\therefore f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি মাত্র বীজ বর্তমান (0, 1) অন্তরালে।

সারণি ঃ 5.7.4

α $(0 < \alpha < 1)$

n	a_n $(-ve)$	b_n $(+ve)$	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	0	1	0·5	$f(0·5) = -1·19 < 0$
1	0·5	1	0·75	$f(0·75) = -0·59 < 0$
2	0·75	1	0·87	$f(0·87) = 0·12 > 0$
3	0·75	0·87	0·81	$f(0·81) = -0·32 < 0$
4	0·81	0·87	0·84	$f(0·84) = -0·16 < 0$
5	0·84	0·87	0·855	$f(0·855) = -0·070 < 0$
6	0·855	0·87	0·862	$f(0·862) = -0·02 < 0$
7	0·862	0·87	0·866	$f(0·866) = -0·004 < 0$
8	0·866	0·87	0·868	

$\therefore$ α = **0·87**, $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ যাহা (0, 1) অন্তরালে অবস্থিত, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.7.5 : সমদ্বিখণ্ডক পদ্ধতির দ্বারা $x^3 - 3x + 1·06 = 0$ সমীকরণটির ধনাত্মক বীজগুলির মান নির্ণয় করুন, দুই সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন $f(x) = x^3 - 3x + 1{\cdot}06$ $\quad \therefore f'(x) = 3x^2 - 3$

দেসকার্তের চিহ্ন নীতি প্রয়োগ করে আমরা বলতে পারি যে $f(x) = 0$ সমীকরণে সর্বাধিক দুটি ধনাত্মক বীজ আছে।

এখন, $f(0) = 1{\cdot}06$, $f(1) = -0{\cdot}94$, $f(2) = 3{\cdot}06$ এবং $f'(x) < 0$ যখন $(0 < x < 1)$ এবং $f'(x) > 0$ যখন $(1 < x < 2)$

অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণের একটা বীজ (α), $(0, 1)$ অন্তরালে এবং অপরবীজ (β), $(1, 2)$ অন্তরালে থাকবে।

সারণি ঃ 5.7.5

$\alpha \ (0 < \alpha < 1)$

n	a_n $(+ve)$	b_n $(-ve)$	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	0	1	0·5	$f(0{\cdot}5) = -0{\cdot}32 < 0$
1	0	0·5	0·25	$f(0{\cdot}75) = 0{\cdot}33 > 0$
2	0·25	0·5	0·375	$f(0{\cdot}375) = -0{\cdot}012 < 0$
3	0·25	0·375	0·312	$f(0{\cdot}312) = 0{\cdot}154 > 0$
4	0·312	0·375	0·343	$f(0{\cdot}343) = 0{\cdot}071 > 0$
5	0·343	0·375	0·359	$f(0{\cdot}359) = 0{\cdot}029 > 0$
6	0·359	0·375	0·367	$f(0{\cdot}367) = 0{\cdot}008 > 0$
7	0·367	0·375	0·371	$f(0{\cdot}371) = -0{\cdot}002 < 0$
7	0·367	0·371	0·369	$f(0{\cdot}369) = 0{\cdot}003 > 0$
8	0·369	0·371	0·370	

$\therefore$ $\boldsymbol{\alpha = 0{\cdot}37}$, $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি ধনাত্মক বীজ, দুই সার্থক অঙ্ক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সারণি ঃ 5.7.6

β $(1 < \beta < 2)$

n	a_n $(-ve)$	b_n $(+ve)$	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	1	2	1·5	$f(1{\cdot}5) = -0{\cdot}06 < 0$
1	1·5	2	1·75	$f(1{\cdot}75) = 1{\cdot}17 > 0$
2	1·5	1·75	1·62	$f(1{\cdot}62) = 0{\cdot}45 > 0$
3	1·5	1·62	1·56	$f(1{\cdot}56) = 0{\cdot}17 > 0$
4	1·5	1·56	1·53	$f(1{\cdot}53) = 0{\cdot}05 > 0$
5	1·5	1·53	1·515	$f(1{\cdot}515) = -0{\cdot}007 < 0$

$\therefore$ $\boldsymbol{\beta = 1{\cdot}5}$, $f(x) = 0$ সমীকরণটির অপর ধনাত্মক বাস্তব বীজ, দুই সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.7.6 : সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি প্রয়োগ করে, $e^x - 3x = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন $f(x) = e^x - 3x$; $f'(x) = e^x - 3$

এখন $f(1) = -0{\cdot}28$, $f(1{\cdot}5) = -0{\cdot}02$, $f(1{\cdot}6) = 0{\cdot}15$ এবং $f'(x) > 0$, যখন $1{\cdot}5 < x < 1{\cdot}6$

$\therefore$ $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটা মাত্র বীজ আছে $(1{\cdot}5,\ 1{\cdot}6)$ অন্তরালে।

সারণি ঃ 5.7.7

β $(1{\cdot}5 < \beta < 1{\cdot}6)$

n	a_n $(-ve)$	b_n $(+ve)$	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	1·5	1·6	1·55	$f(1{\cdot}55) = 0{\cdot}06 > 0$
1	1·5	1·55	1·525	$f(1{\cdot}525) = 0{\cdot}20 > 0$
2	1·5	1·525	1·5125	$f(1{\cdot}5125) = 0{\cdot}0005 > 0$
3	1·5	1·5125	1·5062	$f(1{\cdot}5062) = -0{\cdot}0090 < 0$
4	1·5062	1·5125	1·50935	

$\therefore$ α = **1·51**, $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.7.7 : সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি প্রয়োগ করে, $\log_e x = \cos x$ সমীকরণের যে বীজটি 1 এবং 2 দুই-এর মধ্যে অবস্থান করে নির্ণয় করুন, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন, $f(x) = \log_e x - \cos x$

এখন $f(1) = -0{\cdot}54$, $f(1{\cdot}5) = 0{\cdot}33$, $f(1{\cdot}3) = -0{\cdot}005$, $f(1{\cdot}4) = 0{\cdot}166$

অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটা বীজ (1, 2) অন্তরালে তথা (1·3, 1·4) অন্তরালে আছে।

সারণি ঃ 5.7.8

[α, $1{\cdot}3 < \alpha < 1{\cdot}4$]

n	a_n (–ve)	b_n (+ve)	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	1·3	1·4	1·35	$f(1{\cdot}35) = 0{\cdot}08 > 0$
1	1·3	1·35	1·325	$f(1{\cdot}325) = 0{\cdot}038 > 0$
2	1·3	1·325	1·3125	$f(1{\cdot}3125) = 0{\cdot}0165 > 0$
3	1·3	1·3125	1·3062	$f(1{\cdot}3062) = 0{\cdot}0056 > 0$
4	1·3	1·3062	1·3031	$f(1{\cdot}3031) = 0{\cdot}00024 > 0$
5	1·3	1·3031	1·3016	$f(1{\cdot}3016) = -0{\cdot}0024 < 0$

$\therefore$ α = **1·30**, $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.7.9 : সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতির দ্বারা $\tan x + x = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন যার অবস্থান 2·0 এবং 2·1 এর মধ্যে, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মান করুন $f(x) = \tan x + x$ $\quad \therefore f'(x) = \sec^2 x + 1$

এখানে $f(2) = -0{\cdot}18$, $f(2{\cdot}1) = 0{\cdot}39$ এবং $f'(x) > 0$ যখন $2 < x < 2{\cdot}1$

অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি মাত্র বীজ (2, 2·1) অন্তরালে অবস্থান করে।

সারণি ঃ 5.7.9

[α, 2·0 < α < 2·1]

n	a_n (–ve)	b_n (+ve)	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	2·0	2·1	2·05	$f(2\cdot05) = 0\cdot12 > 0$
1	2·0	2·05	2·025	$f(2\cdot025) = -0\cdot02 < 0$
2	2·025	2·05	2·038	$f(2\cdot038) = 0\cdot056 > 0$
3	2·025	2·038	2·031	$f(2\cdot031) = 0\cdot014 > 0$
4	2·025	2·031	2·028	$f(2\cdot028) = -0\cdot005 < 0$
5	2·028	2·031	2·0295	$f(2\cdot0295) = 0\cdot005 < 0$

অতএব α = **2·03**, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটা বীজ, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

5.8 সমীকরণের সাংখ্যিক সমাধানে নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি (Newton-Raphson method for Numerical Solution of An Equation)

মনে করি, $x = \alpha$, হল $f(x) = 0$ সমীকরণের একটা বাস্তব বীজ। এখানেও সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতির মত সারণি পদ্ধতি প্রয়োগ করে একটা সম্ভাব্য ক্ষুদ্র অন্তরাল (a_0, b_0) নির্ণয় করতে হবে, যার মধ্যে α $(a_0 < \alpha < b_0)$ বীজটি বিদ্যমান অর্থাৎ $f(a_0).\ f(b_0) < 0$ এবং $f(x)$ উক্তঅন্তরালে একই চিহ্নযুক্ত হবে।

যদি $x = x_0$, $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটা বীজ α-এর প্রায়িক বা আসন্ন মান হয়, তাহলে $f(x_0)$ অবশ্যই ক্ষুদ্র হবে। মনে করি, বীজটির সংশোধনী h, তাহলে বীজটির সঠিক মান $x = x_0 + h$ এবং $f(x_0 + h) = 0$, এখন h এর মান নির্ণয় করতে হবে।

টেলরের ধারা অনুযায়ী

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ \ldots\ldots \qquad = 0$$

এখন h এর দুই বা উচ্চতর ঘাতগুলিকে উপেক্ষা করে পাই

$$f(x_0) + hf'(x_0) = 0 \text{ অর্থাৎ } h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ এবং } x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

অতএব x_0-কে প্রারম্ভিক প্রায়িক মান ধরে, পরপর প্রায়িক মানগুলি পাই,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

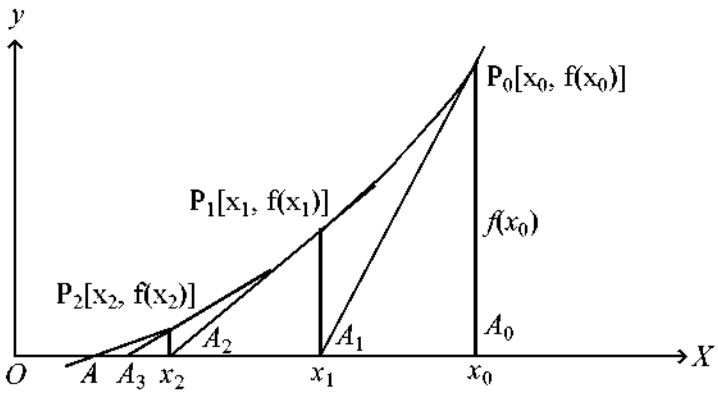
এবং এই ভাবে অগ্রসর হয়ে $(n + 1)$ তম প্রায়িক মান হবে

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

এটা হল নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতির পৌনঃপুনিক সূত্র।

5.9 নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতির জ্যামিতিক তাৎপর্য (Geometrical Interpretation of Nowton-Raphson Method)

ox এবং oy-কে অক্ষ ধরে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করা হল, মনে করুন, $P_0[x_0, f(x_0)]$ বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষকে A_1 বিন্দুতে ছেদ করে, যেখানে $OA_1 = x_1$ এবং বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষকে A_2 বিন্দুতে ছেদ করে, যেখানে $OA_2 = x_2$ ইত্যাদি।



অতএব, $P_0A_0 = (x_0 - x_1)\tan P_0A_1A_0 = (x_0 - x_1)f'(x_0)$

$$\therefore \quad f(x_0) = (x_0 - x_1)\, f'(x)$$

$$\text{বা,} \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

অতএব y = $f(x)$ বক্ররেখার $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, -x_{n+1}$ বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষকে যে সব বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুগুলিই যথাক্রমে বীজটির ক্রমিক প্রায়িক অসন্ন মান যথা $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$।

মন্তব্য ঃ 5.9.1. যদি $f'(x) = 0$ বা অতিক্ষুদ্র হয়, তবে নিউটন র‍্যাফসন্ পদ্ধতি প্রয়োগ করা যাবে না।

মন্তব্য ঃ 5.9.2. যদি প্রাথমিক প্রায়িক মান বীজের যথেষ্ট কাছাকাছি হয়, তবেই নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি কার্যকর হয়।

5.10 গণনার ধারা বা পদ্ধতি

সারণি ঃ 5.10.1

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n + h_n$
0	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$h_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$	$x_1 = x_0 + h_0$
1	x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$h_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	$x_2 = x_1 + h_1$
2	x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$	$h_2 = -\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$	$x_3 = x_2 + h_2$
3	x_3	$f(x_3)$	$f'(x_3)$	$h_3 = -\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$	$x_4 = x_3 + h_3$
…	…	……	……	………………	………………
…	…	……	……	………………	………………

5.11 উদাহরণ

উদাহরণ 5.11.1 : নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে, $3x^2 + 2x - 9 = 0$ সমীকরণটির ধনাত্মক বীজটি নির্ণয় করুন, চার-সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন, $f(x) = 3x^2 + 2x - 9$ $\quad \therefore f'(x) = 6x + 2$

দেসকার্তের চিহ্ন রীতি প্রয়োগ করে পাই, $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটিমাত্র ধনাত্মক বীজ বর্তমান।

এখন, $f(0) = -9$, $f(1) = -4$, $f(2) = 7$ এবং $f'(x) > 0$ যখন $1 < x < 2$

$\therefore$ $(1, 2)$ অন্তরালে, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি মাত্র বীজ আছে।

$x_0 = 1$ ধরে পাই (যেহেতু $1 - 41 = 4$ মানটি 7 এর থেকে কম)

সারণি ঃ 5.11.1

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n + h_n$
0	1	–4	8	0·5	1·5
1	1·5	0·75	9	0·08	1·58
2	1·58	1·649	11·48	–0·14	1·44
3	1·44	0·1008	10·64	–0·009474	1·4305
4	1·4305	–0·000009	10·583	–0·000000	1·4305

$\therefore$ α = **1·430**, $f(x) = 0$ সমীকরণটির ধনাত্মক বীজ, চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.11.2. নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি দ্বারা, $x^3 - x - 0{\cdot}1 = 0$ সমীকরণটি ধনাত্মক বাস্তব বীজটি নির্ণয় করুন, ছয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন, $f(x) = x^3 - x - 0{\cdot}1$ $\quad \therefore f'(x) = 3x^2 - 1$

দেসকার্তের চিহ্ন রীতি প্রয়োগ করে বলতে পারি $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটা মাত্র ধনাত্মক বাস্তব বীজ বিদ্যমান।

এখন $f(0) = -0{\cdot}1$, $f(1) = -0{\cdot}1$, $f(1{\cdot}1) = 0{\cdot}131$

অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণটি ধনাত্মক বীজটি, $(1{\cdot}0,\ 1{\cdot}1)$ অন্তরালে অবস্থান করছে। এবং $x_0 = 1$ ধরে পাই,

সারণি ঃ 5.11.2

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n + h_n$
0	1·0	– 0·1	2·0	0·05	1·05
1	1·05	0·0076	2·3075	–0·00329	1·04671
2	1·04671	0·000067	2·28680	–0·000029	1·046681
3	1·046681	0·0000011	2·286623	–0·00000048	1·046681

$\therefore\ \alpha = \mathbf{1{\cdot}046681}$, $f(x) = 0$ সমীকরণটির বাস্তব ধনাত্মক বীজ, ছয় সার্থক অঙ্ক পর্য্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.11.3 : নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে, $x^3 - 8x - 4 = 0$ সমীকরণটির ধনাত্মক বাস্তব বীজটি নির্ণয় করুন, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন $f(x) = x^3 - 8x - 4 \quad \therefore\ f'(x) = 3x^2 - 8$

দেসকার্তের চিহ্নরীতি দ্বারা আমরা বলতে পারি, $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটা মাত্র ধনাত্মক বাস্তব বীজ আছে।

এখন $f(0) = -4$, $f(2) = -12$, $f(3) = -1$, $f(4) = 28$

অতএব $f(3).f(4) < 0$ এবং $f'(x) > 0$ যখন $3 < x < 4$.

অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি মাত্র বীজ আছে $(3,\ 4)$ অন্তরালে। $x_0 = 3$ ধরে পাই,

সারণি ঃ 5.11.3

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n + h_n$
0	3	–1·0	19·0	0·05	3·05
1	3·05	–0·027	19·9075	0·0014	3·0514
2	3·0514	0·000513	19·93312	–0·0000257	3·051374
3	3·051374	–0·000005	19·932649	0·00000025	3·0513742

$\therefore$ α = **3·0514**, সমীকরণটির ধনাত্মক বীজ, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.11.4 : নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে, $3x - \cos x - 1 = 0$ সমীকরণটির একটা বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন, পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন $f(x) = 3x - \cos x - 1$ $\quad\therefore f'(x) = 3 + \sin x$

এখানে, $f(0) = -2$, $f(0{\cdot}5) = -0{\cdot}37$, $f(0{\cdot}7) = 0{\cdot}34$ অতএব $f(0{\cdot}5).\,f(0{\cdot}7) < 0$ এবং $f'(x) > 0$, যখন $0{\cdot}5 < x < 0{\cdot}7$

অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটিমাত্র বীজ বিদ্যমান, $(0{\cdot}5,\ 0{\cdot}7)$ অন্তরালে। এবং $x_0 = 0{\cdot}5$ ধরে পাই,

সারণি ঃ 5.11.4

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n + h_n$
0	0·5	–0·37	3·48	0·1063	0·6063
1	0·6063	–0·00286	3·56983	0·000801	0·607101
2	0·607101	–0·00000231	3·570489	0·00000064	0·60710164

$\therefore$ α = **0·60710**, $f(x)$ = 0 সমীকরণটির একটা বাস্তব বীজ, পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.11.5 : কোন ধনাত্মক সংখ্যার **a**-এর q-তম মূল নির্ণয় করার জন্য নিম্নলিখিত প্রায়িক সূত্রটি প্রমাণ করুন

$$x_{n+1} = \frac{(q-1)x_n^q + a}{qx_n^{q-1}} \text{ , n = 0, 1, 2, 3, ………}$$

এবং $\sqrt{3}$-এর মান নির্ণয় করুন, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন, $x = a^{\frac{1}{q}}$ এবং $f(x) \equiv x^q - a = 0 \quad \therefore \; f'(x) = qx^{q-1}$

এখন $f(x)$ = 0, সমীকরণে, নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রায়িক সূত্র পাই

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^q - a}{qx_n^{q-1}} = \frac{(q-1)x_n^q + a}{qx_n^{q-1}}$$ ইহাই নির্ণেয় সূত্র।

এখন q = 2 এবং a = 3 বসিয়ে পাই

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{2.x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$$

x_0 = 1 ধরে পাই

সারণি ঃ 5.11.5

n	x_n	x_{n+1}
0	1	2·0
1	2·0	1·75
2	1·75	1·732
3	1·732	1·73205

$\therefore$ $\sqrt{3}$ = **1·732**, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5.11.6 : $\sqrt[5]{2}$ এর মান নির্ণয় করুন, পাঁচ সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন, $x = \sqrt[5]{2}$ বা $x^5 - 2 = 0$

এখন $f(x) = x^5 - 2 = 0$ তে নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 2}{5x_n^4} = \frac{4x_n^5 + 2}{5x_n^4}$$

$x_0 = 1$ ধরে পাই,

সারণি 5.11.6

n	x_n	x_{n+1}
0	1	1·2
1	1·2	1·1529
2	1·1529	1·148728
3	1·148728	1·14869836

$\therefore$ $\sqrt[5]{2}$ = **1·1487**, পাঁচ সার্থক হয়ে পর্যন্ত শুদ্ধ।

5.12 অনুশীলনী

1. সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন।

   (a) $x^3 - x - 1 = 0$, তিন সার্থক অঙ্ক পর্য্যন্ত শুদ্ধ।

   (b) $3x^2 + 5x - 40 = 0$, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

   (c) $x^3 + 2x - 6 = 0$, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

   (d) $x^3 + 7x^2 + 9 = 0$, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

   (e) $2x - 3 \sin x - 5 = 0$, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

   (f) $x^3 - 3x - 5 = 0$, দুই সার্থক অঙ্ক পর্য্যন্ত শুদ্ধ।

2. নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি দ্বারা নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন।

   (a) $x^3 + 2x - 6 = 0$

   (b) $x^3 - x - 1 = 0$

   (c) $x^2 - x - 0{\cdot}1 = 0$

   (d) $x^3 + x^2 - 1 = 0$

   (e) $\sin x = 5x - 2$

3. পৌনঃপুনিক পদ্ধতির সাহায্যে মান নির্ণয় করুন।

(a) $\sqrt[3]{13}$

(b) $\sqrt[7]{125}$

(c) $\sqrt{5}$

5.13 উত্তরমালা

1.	(a) 1·323	(b) 2·912	(c) 1·723	(d) –7·175
	(e) 2·883	(f) 2·3		
2.	(a) 1·723	(b) 1·323	(c) 1·09	(d) 0·755
	(e) 0·524			
3.	(a) 2·351	(b) 1·993	(c) 1·358	

5.14 সহায়ক গ্রন্থাবলি

1. S.A. MOLLAH : NUMERICAL ANALYSIS & COMPUTATIONAL PROCEDURES. (BOOKS AND ALLIED (P) LTD)

2. A.GUPTA & S. G. BOSE : INTRODUCTION TO NUMERICAL ALALYSIS (ACADEMIC PUBLICATION)

3. N. ISLAM & J. BANERJEE : NUMERICAL ANALYSIS & STATISTICS (ACADEMIC PUBLICATION)

4. H.C. SAXENA : FINITE DIFFERENCE & NUMERICAL ANALYSIS (S. CHAND & COMPANY LTD).

একক 6 □ গতিবিদ্যার জন্য প্রয়োজনীয় প্রারম্ভিক জ্ঞান

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

6.2 উদ্দেশ্য

6.3 স্কেলার ও ভেক্টর ; ভেক্টরের ধর্ম ; ভেক্টরের বীজগণিত ও ভেক্টরকলন।

6.4 সরণ, দ্রুতি, বেগ, ত্বরণ ও আপেক্ষিক বেগ।

6.5 দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক।

6.6 গড় দ্রুতি ও গড় বেগ।

6.7 অনুশীলনী

6.8 সারাংশ

6.1 প্রস্তাবনা

আমরা জ্ঞান ও বস্তুর গতি সংক্রান্ত সমস্যার আলোচনায় প্রথমতঃ সচলবস্তুর সরণ (displacement), দ্রুতি (speed), বেগ (velocity), ত্বরণ (acceleration) ইত্যাদি ব্যাখ্যা করিব এবং এজন্য যে সকল গাণিতিক ধ্যানধারণা প্রয়োজন তাহা এই এককে আলোচনা করিব।

6.2 উদ্দেশ্য

গতিবিদ্যায় কোনও সচল বস্তুর সরণ, দ্রুতি, বেগ, ত্বরণ বোঝাতে স্কেলার (scalar), এবং ভেক্টরের (vector) প্রয়োগের সম্বন্ধে সম্যক্ ধারণা থাকা প্রয়োজন, এজন্য আমরা স্বল্প পরিসরে সেটা নিয়ে আলোচনা করিতেছি।

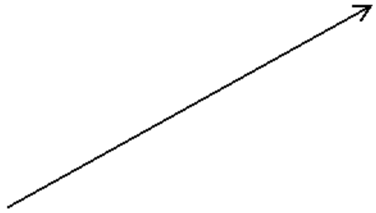
6.3 স্কেলার এবং ভেক্টর (Scalar and Vector)

যে সকল রাশির কেবলমাত্র পরিমাণ (magnitude) আছে তাহাদেরকে স্কেলার (Scalar) বলা হইয়া থাকে। যেমন 35,100 ইত্যাদি সংখ্যা স্কেলার রাশি।

অপর দিকে যে সকল রাশির শুধু পরিমাণ নয়, কোনও বিশেষ নির্দিষ্ট দিশা (direction) বর্তমান থাকে তাহাদেরকে ভেক্টর বলা হয়।

ভেক্টরকে সাধারণত জ্যামিতিতে একটি সীমিত সরলরেখার অংশরূপে চিত্রিত করা হয় এবং ওই রেখাংশের একটি বিশেষ দিকে ওই ভেক্টরের দিশা নির্দিষ্ট করা হয়।

সাধারণতঃ ভেক্টরকে স্কেলার থেকে পৃথক বোঝাতে ভেক্টরের উপর একটি তীরচিহ্ন ব্যবহার করা হয়।



চিত্র 6.1

এই চিত্রে $\overrightarrow{OP}$ একটি ভেক্টর, তার মান OP রেখাংশের দৈর্ঘ্যের পরিমাপের সমান এবং তার দিশা O বিন্দু থেকে P বিন্দুর দিকে নির্দিষ্ট হইতেছে।

$\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরকে $\vec{a}$ দ্বারা চিহ্নিত করিলে ওই ভেক্টরের মানকে $|\overrightarrow{OP}|$ বা $|\vec{a}|$ রূপে প্রকাশ করা হয়। লক্ষণীয় যে, $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ একটি ভেক্টর যার দিশা এবং $\vec{a}$ ভেক্টরের দিশা অভিন্ন কিন্তু তার মান এক একক (1)।

$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ভেক্টরটিকে $\vec{a}$ দিশার একক ভেক্টর বলা হইয়া থাকে। $\overrightarrow{OA}$-কে 'ভিত্তি বিন্দু' (base point) বা 'প্রারম্ভিক বিন্দু' (initial point) '0'-র সাপেক্ষে বিন্দু A-র অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। m যদি কোনো স্কেলার সংখ্যা হয় (যেমন, 5, 7 ইত্যাদি) তা হলে $m\vec{a}$ একটি ভেক্টর হইবে এবং তার দিশা ও $\vec{a}$ ভেক্টরের দিশা অভিন্ন হইবে কিন্তু $m\vec{a}$ ভেক্টরের মান $|m\vec{a}| = m\,|\vec{a}|$ হইবে অর্থাৎ $\vec{a}$ ভেক্টরের মানকে m দ্বারা গুণ করিলে $m\vec{a}$ ভেক্টরের মান পাওয়া যাইবে।

ভেক্টররাশিদের সাধারণতঃ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ইত্যাদি রূপে চিহ্নিত করা হয়। $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দ্বয়ের মান একই এবং দিশা অভিন্ন হইলে আমরা লিখি $\vec{a} = \vec{b}$; এস্থলে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় একই সরলরেখার উপর অবস্থিত অথবা সমান্তরাল সরলরেখায় বিদ্যমান ধরা হইবে।

আমরা $\vec{a}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা চিহ্নিত করিয়াছি ; আবার $\overrightarrow{PO}$ ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরের বিপরীত দিশায় আছে। কিন্তু উহাদের মান সমান ; এস্থলে $\overrightarrow{PO}$-কে $-\vec{a}$ ভেক্টর বলা হইয়া থাকে।

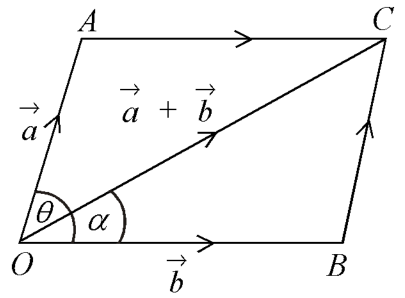
ভেক্টর যোগ ঃ

ধরা যাক যে, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর। যে একটিমাত্র ভেক্টরের প্রভাব ওই দুই ভেক্টরের সম্মিলিত প্রভাবের সমান, তাহাকে উহাদের যোগফল $\vec{a} + \vec{b}$ বলা হয়। আবার $\vec{a}$ এবং $-\vec{b}$ ভেক্টর দ্বয়ের যোগফল $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{a}$ এবং $-\vec{a}$ ভেক্টর দুটির যোগফল $\vec{a} - \vec{a} = \vec{O}$; এখানে $\vec{O}$ একটি শূন্য ভেক্টর যার মান শূন্য ; উল্লেখ্য যে, $\vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{a}$; যদি m একটি স্কেলার রাশি হয় তাহা হইলে $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$ হইবে।

দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিতে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দ্বয়ের যোগফল নিরূপণ ঃ

$\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটি যদি $OBCA$ সামন্তরিকের দুই সন্নিহির বাহু $\overrightarrow{OA}$ $(\vec{a})$ এবং $\overrightarrow{OB}(\vec{b})$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয় তা হলে O বিন্দু হইতে ওই সামন্তরিকের কর্ণ $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা $\vec{a} + \vec{b}$ দ্বারা চিহ্নিত করা যায়।

লক্ষণীয় যে, ওই সামন্তরিকের $\overrightarrow{BC}$ বাহু এবং $\overrightarrow{OA}$ বাহুর দিশা এবং মান সমান, এজন্য $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ধরা হয় (এস্থলে ওই দুটিকে ভেক্টর প্রকৃতপক্ষে মুক্ত ভেক্টর (free vector) ধরা হইয়াছে)। অনুরূপভাবে $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ অতএব $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$ বা, $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. এই সূত্রটিকে দুটি ভেক্টরের যোগফলের বিনিময় নিয়ম বলা হইয়া থাকে।



চিত্র 6.2

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;

এই সূত্রটিকে তিনটি ভেক্টরের যোগফলের সংযোগ নিয়ম বলা হইয়া থাকে।

$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$-কে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দ্বয়ের লব্ধি (Resultant) এবং $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটিকে $\vec{a} + \vec{b}$ ভেক্টরের উপাংশদ্বয় (components) বলা হয়। যদি $\angle AOB = \theta$ এবং $\angle COB = \alpha$ হয় তা হলে সহজেই ত্রিকোণমিতির সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে, $OC^2 = OA^2 + OB^2 + 2OA.\ OB \cos \theta$ এবং $\tan\alpha = \dfrac{a\sin\theta}{b + a\cos\theta}$ হবে, [$|\overrightarrow{OA}| = a$ এবং $|\overrightarrow{OB}| = b$]। যখন $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর মধ্যবর্তী

কোণ $\theta = \frac{\pi}{2}$ হয় তখন ওই ভেক্টর দুটির লব্ধি $\vec{a} + \vec{b}$-এর উপাংশদ্বয় $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ পরস্পর সমকোণে থাকে।

আবার তখন $\vec{a} + \vec{b}$-কে $\vec{R}$ ধরিলে $\vec{R}$-এর উপাংশদ্বয় $\vec{b} = \vec{R} \cos \alpha$ এবং $\vec{a} = \vec{R} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \vec{R} \sin \alpha$ হয়।

এস্থলে দেখা যাইতেছে যে, $\vec{a}$-এর মান $|\vec{a}|$, $\vec{b}$-এর মান $|\vec{b}|$ এবং $\vec{R}$-এর মান $|\vec{R}|$ হলে $|\vec{R}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

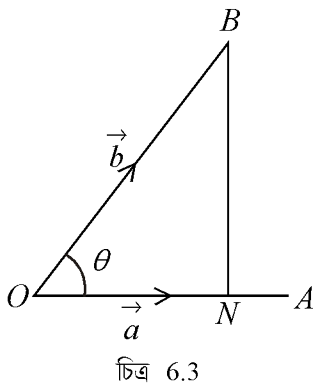
এবং $\tan \alpha = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ হইবে।

সাধারণতঃ আমরা পরস্পর সমকোণে অবস্থিত সরলরেখাদ্বয় OX এবং OY দিকে কোনও ভেক্টরের উপাংশ লইব।

প্রমাণ করা যায় যে, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি ভেক্টরের কোনও নির্দিষ্ট দিশায় উপাংশ দ্বয়ের যোগফল, $\vec{a} + \vec{b}$ ভেক্টরের ওই দিকে উপাংশের সমান।

দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল ঃ

$\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ θ হলে ওই ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণফল অথবা ডট্ গুণফল $|\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos \theta$ এবং তাহা $\vec{a}.\vec{b}$ রূপে চিহ্নিত হইয় থাকে এবং $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ হয়, আবার $\theta = 0$ হইলে $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|$ হয়। আবার $\vec{a} = \vec{b}$ হলে $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2$ হয় এবং সেটা a^2 রূপে চিহ্নিত হয়, $\theta = \frac{\pi}{2}$ বা $\frac{3\pi}{2}$ হইলেও $\vec{a}.\vec{b} = 0$ হয়।



চিত্র 6.3

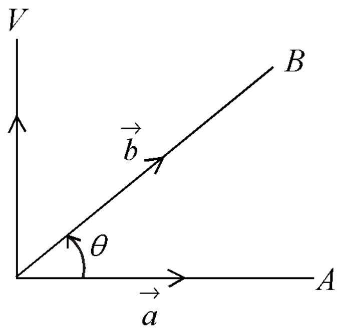
দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল ঃ

$\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুইটির ভেক্টর গুণফল $\vec{V} = \vec{a} \times \vec{b} = \hat{n}\,|\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin \theta$

যেখানে θ হল $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ যা ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে পরিমাপ করা হইয়াছে

এবং $\hat{n}$ হইল ওই দুই ভেক্টরের ধারক তলের উপর লম্বদিকে একক ভেক্টর এবং $\vec{a}$ থেকে $\vec{b}$ অভিমুখে যাইতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে যে দিশায় লম্ব থাকে সেইটিই দিশা হইবে।

ফলে $\hat{n} = \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}$



চিত্র 6.4

ত্রিভুজ OAB-এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \mid \vec{a} \times \vec{b} \mid$

মন্তব্য ঃ (i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(ii) যদি m স্কেলার হয়, $m(\vec{a}\times\vec{b}) = (m\vec{a})\times\vec{b} = (\vec{a}\times m\vec{b})$ হইবে।

(iii) দুটি অশূণ্য ভেক্টরের সমান্তরাল হবার শর্ত হল $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

(iv) $\left.\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\\ (\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} &= \vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}\end{aligned}\right\}$

(v) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\, |\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$

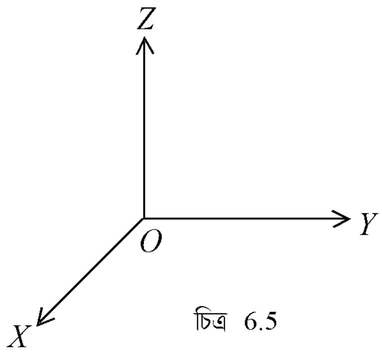
কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Carestans coordinates) দ্বারা ভেক্টর নির্দেশনা ঃ

ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিতে O মূলবিন্দুগামী সরলরেখা OX, OY, OZ পরস্পর লম্ব হইয়া আছে এবং OX থেকে OY এবং পরে OZ যথাক্রমে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে থাকিলে তাহাদের OX, OY এবং OZ অক্ষরেখা বলা হইয়া থাকে।

যদি $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ যথাক্রমে OX, OY, OZ অভিমুখে ভেক্টর একক (unit vector) হয় তাহা হইলে $\vec{i}\,.\,\vec{z} = |\hat{i}\,|^2 = 1$, $\hat{j}.\hat{j} = |\hat{j}\,|^2 = 1$ এবং $\hat{k}.\hat{k} = |\,\hat{k}\,|^2 = 1$ হইবে ;

পুনরায় $\hat{i}\,.\,\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{i}\,.\hat{k} = 0$ হইবে ;

(এখানে ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণ প্রক্রিয়ার নিয়ম ধরা হইয়াছে)।



চিত্র 6.5

আবার, ভেক্টর দ্বয়ের ভেক্টর গুণ প্রক্রিয়া প্রয়োগে আমরা দেখিতে পাই যে, $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$

এবং $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} = -\hat{j}\times\hat{i}$

$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j} = -\hat{i}\times\hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j}$

ভেক্টর কলনবিদ্যার কিছু প্রারম্ভিক ধারণা (Vector Calculus) :

যদি $\vec{a}$ ভেক্টরটি t চলের উপর নির্ভরশীল হয় তাহা হইলে t সাপেক্ষে $\vec{a}$ ভেক্টরের অবকল (vector derivation) হইবে $\frac{d\vec{a}}{dt}$.

ধরা যাক্ যে, $\vec{a} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ তাহা হইলে এখানে

$x(t)$ $y(t)$ $z(t)$ যথাক্রমে OX, OY, OZ অভিমুখে $\vec{a}$ ভেক্টরের উপাংশত্রয়।

এস্থলে $\frac{d\vec{a}}{dt} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt}$; লক্ষ্য করিতে হইবে যে, $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ভেক্তরত্রয় t-এর উপর নিভরশীল নয়।

ধরা যাক যে, $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{b}(t)$ তাহা হইলে, কলনের ধর্ম অনুযায়ী আমরা পাই, $\vec{a} = \int \vec{b}(t)dt + \vec{c}$

অর্থাৎ $\vec{a}(t)$ হইল $\vec{b}(t)$ ভেক্টরের t সাপেক্ষে সমাকল (Integrand) এবং $\vec{c}$ যদৃচ্ছ ধ্রুবক ভেক্টর t-এর উপর নির্ভরশীল হইবে।

$\vec{b} = \hat{i}b_1(t) + \hat{j}b_2(t) + \hat{k}b_3(t)$

ধরিলে আমরা পাই,

$\vec{a}(t) = \hat{i}\int b_1(t)dt + \hat{j}\int b_2(t)\,dt + \hat{k}\int b_3(t)dt + \vec{c} \quad [\because \int \vec{b}(t)dt + \vec{c} = \vec{a}(t)]$

গতিবিদ্যা আলোচনায় আমরা বিভিন্ন সময়ে ভেক্টর এবং স্কেলারের উপরে উল্লিখিত নিয়মাবলী প্রয়োগ করিব।

6.4 দ্রুতি (Speed), সরণ (Displacement), বেগ (Velocity), ত্বরণ (Acceleration) ও আপেক্ষিক বেগ (Relative velocity) :

6.4.1. দ্রুতি :

যদি একটি চলমান কণা একক সময়ে মোট x একক পরিমাণ পথ অতিক্রম করে তা ওই কণাটির ওই সময়ে দ্রুতি হইবে $\frac{x}{t}$ একক ; উল্লেখ্য যে, দ্রুতির কোনো নির্দিষ্ট দিশা নাই। এজন্য দ্রুতি স্কেলার রাশি ভেক্টর নহে।

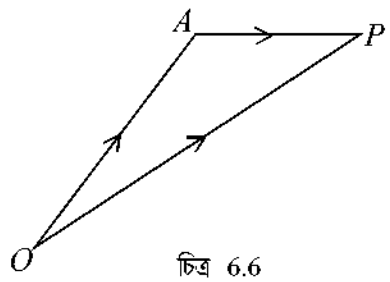
6.4.2. সরণ, বেগ, ত্বরণ এবং আপেক্ষিক বেগ :

ধরা যাক্ O মূলবিন্দু হইতে কোনো নির্দিষ্ট দিকে $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ একটি ভেক্টর। কোনো গতিশীল কণা A বিন্দু হইতে যাত্রা করে $\overrightarrow{AP}$ অভিমুখে গমন করে অবশেষে P বিন্দুতে পৌঁছাইলে $\overrightarrow{AP}$-কে A বিন্দুর সরণ ধরা হইয়া থাকে। $\overrightarrow{AP}$-এর মান অতিক্ষুদ্র $\overrightarrow{dr}$ ধরলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} = \vec{r} + \overrightarrow{dr}$ হইবে।

এস্থলে অতি ক্ষুদ্র সময় Δt সময় সাপেক্ষ এবং $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{dr}$ সরণের পরিবর্তনের হার $\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$ কে ওই কণাটির **A বিন্দুতে গতিবেগ বলা** হইয়া থাকে।

উল্লেখ্য যে, ওই বেগ $\overrightarrow{AP}$ অভিমুখে হইবে।

সাধারণতঃ বেগ $\vec{V}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। আবার সময় সাপেক্ষে কণাটির বেগের পরিবর্তনের হারকে $\frac{d\vec{V}}{dt} =$ ত্বরণ (acceleration) বলা হয় ; ত্বরণ $= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ গতিতে মন্দন (retardation) বলা হয়। মন্দন $= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{d\vec{V}}{dt}$.



চিত্র 6.6

দ্বিমাত্রিক স্থানাংক জ্যামিতিতে সরণ $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$ ধরিলে

বেগ, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt}$

এবং ত্বরণ $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \hat{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{j}\frac{d^2y}{dt^2}$ হয়।

অনেক সময়ে কোনো নির্দিষ্ট দিকে বিন্দুটির ত্বরণ $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds}\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds}\vec{v}$ রূপে প্রকাশ করা হয় ; এস্থলে $\vec{s}$ -কে বিন্দুটি সরণ ধরা হইয়াছে।

আপেক্ষিক বেগ (Relative Velocity) :

ধরা যাক্ যে, চলমান A বিন্দুর বেগ $\vec{V_A}$ এবং চলমান B বিন্দুর বেগ $\vec{V_B}$; এস্থলে A বিন্দু সাপেক্ষে B বিন্দুর আপেক্ষিক বেগ $\vec{V_{BA}}$ রূপে প্রকাশিত হয় এবং $\vec{V_{BA}} = \vec{V_B} - \vec{V_A}$ অর্থাৎ $\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{V_{BA}}$ হইবে।

6.5 দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক (Units of length and time) :

অধুনা প্রচলিত সি.জি.এস. (C.G.S.) পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্য বা সরণের একক এক সেন্টিমিটার (cm) এবং সময়ের একক এক সেকেন্ড (second) ধরা হয়। আবার, অনেক সময় সুবিধামত এম.কে.এস (M.K.S.) পদ্ধতি ধরা হইয়া থাকে। এই পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক এক মিটার (1 m) এবং সময়ের একক (1 সেকেন্ড) ধরা হইয়া থাকে।

সি.জি.এস. পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্য বা সরণের একক এক সেন্টিমিটার (1 cm) দ্রুতি বা বেগের একক প্রতি সেকেন্ডে 1 সেন্টিমিটার (1 cm/sec.) এবং ত্বরণের একক $\left(\frac{1\,\text{cm}}{\text{sec}^2}\right)$.

6.6 গড় দ্রুতি (Average speed) :

যদি কোনো কণা সমদ্রুতিতে t_1 সেকেন্ডে a সেন্টিমিটার পথ অতিক্রম করে এবং পরে সমদ্রুতিতে t_2 সেকেন্ডে b সেন্টিমিটার পথ অতিক্রম করে তাহা হইলে মোট $a + b$ সেন্টিমিটার পথ অতিক্রম করিতে ওই কণাটির গড় দ্রুতি হইবে $\frac{a+b}{t_1+t_2}$ (সেন্টিমিটার / সেকেন্ড) $\left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)$.

গড় বেগ (Average Velocity) : যদি একটি কণা t সেকেন্ডে কোনো নির্দিষ্ট দিকে a সেন্টিমিটার পথ অতিক্রম করে তাহা হইলে ওই দিকে কণাটির গড়বেগ $\frac{a}{t}$ (সেন্টিমিটার/সেকেন্ড) $\left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)$ হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ লক্ষণীয় যে দ্রুতি কিংবা সমদ্রুতির কোনো নির্দিষ্ট দিশা নাই কিন্তু সরণ, বেগ ও ত্বরণের ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট দিশা থাকিতে হইবে।

6.7 অনুশীলনী

শিক্ষার্থীদের সুবিধার জন্য সময় সাপেক্ষে সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদির মূলসূত্রগুলি, ভেক্টরের ধর্ম এবং তৎসংক্রান্ত সমস্যা সমূহ কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে নিম্নে দেখান হইল।

উদাহরণ 1. যদি একটি কণা f সুষম ত্বরণে কোনো সরলরেখায় চলতে থাকে এবং তার প্রারম্ভিক বেগ u হইলে এবং t সময়ে সেটা ওই সরলরেখার x বা s পথ অতিক্রম করে তাহার বেগ V হয় তাহা হইলে

$V = u + ft$ .... (i)

$$x = s = ut + \frac{1}{2} ft^2 \qquad \text{........... (ii)}$$

$$V^2 = u^2 + 2fs \qquad \text{.......... (iii)}$$ হইবে।

সমাধান ঃ ox অভিমুখে কণাটির t সময়ে বেগ V হইলে $\frac{dx}{dt} = V$ এবং ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2} = f$ হয়। এখন $\frac{d^2x}{dt^2} = f$ সমীকরণটির t সাপেক্ষে সমাকলন করিয়া আমরা পাই, $\frac{dx}{dt} = V = ft$ + ধ্রুবক রাশি।

সাধারণতঃ কণাটির যাত্রার আরম্ভকাল $t = 0$ দ্বারা সূচিত হয়। কণাটির যাত্রার আরম্ভকালে বেগ $V(t = 0) = u$ নির্দিষ্ট আছে। এজন্য $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = (V)_{t=0} = u$ হইবে।

অতএব $V = ft$ + ধ্রুবকরাশি ধরিলে ওই ধ্রুবকবিশিষ্ট **u** হইবে।

অর্থাৎ $V = u + ft$ হয়।

লক্ষণীয় যে, ত্বরণ f ধ্রুবক।

আবার, $\frac{dx}{dt} = V = u + ft$ সমীকরণটিকে সমাকলন করিয়া আমরা পাই,

$$x = ut + \frac{1}{2} ft^2 + \text{ ধ্রুবকরাশি।}$$

যদি প্রারম্ভকালে $(t = 0)$ $x = 0$ ধরি তাহা হইলে ওই ধ্রুবকরাশিটির মান শূন্য হইবে ; অর্থাৎ $x = ut + \frac{1}{2} ft^2$ হয়।

অনেক সময় কোনো কণার প্রারম্ভিক বেগ u এবং সমত্বরণ f ধরিয়া t সময়ে ওই কণাটি যে পথ অতিক্রম করে তা s দ্বারা সূচিত হয় এবং $s = ut + \frac{1}{2} ft^2$ রূপে সূত্রটি লেখা হইয়া থাকে।

আবার, $V = u + ft$

এবং $S = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সূত্র দুইটি ব্যবহার করিয়া পাই,

$$V^2 = (u + ft)^2 = u^2 + 2ft + f^2t^2$$

$$= u^2 + 2f\left(ut + \frac{1}{2}ft^2\right) = u^2 + 2fx$$

অর্থাৎ $V^2 = u^2 + 2fx$ অথবা, $V^2 = u^2 + 2fs$ অস্থলে t সময়ে পরে কণাটির বেগ V তাহার প্রারম্ভিক বেগ u, ত্বরণ f এবং অতিক্রান্ত পথ s দ্বারা প্রকাশিত হইয়াছে।

আবার, $f = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx}V = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{dx}$

অর্থাৎ $f = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}V^2$; এখন x সাপেক্ষে উপরের সমীকরণটির উভয়দিকে সমাকলন করিয়া আমরা পাই, $fx = \frac{1}{2}V^2 +$ ধ্রুবক রাশি।

কিন্তু প্রারম্ভকালে $t = 0$, $x = 0$ ওই $V = u$ প্রারম্ভিক বেগ ধরা হইয়াছে। এজন্য $0 = \frac{1}{2}u^2 +$ ধ্রুবক হয়।

অতএব ওই ধ্রুবকটি $-\frac{1}{2}u^2$ হইবে এবং আমরা পাই, $V^2 = u^2 + 2fx = u^2 + 2fs$.

সমত্বরণ গতির ক্ষেত্রে (i), (ii) এবং (iii) সূত্রসমূহ বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ।

দ্রষ্টব্য ঃ এস্থলে ত্বরণ f-কে সবসময়ই ধ্রুবক ধরা হইয়াছে।

উদাহরণ 2. f সুষম ত্বরণে (cm/sec^2) চলমান একটি কণার প্রারম্ভিক বেগ u ($t = 0$) ধরিলে p তম সেকেন্ডে কণাটি কতটা পথটা অতিক্রম করিবে?

সমাধান ঃ কণাটি $t = 0$ সময়ে যাত্রা করে p সেকেন্ডে $up + \frac{1}{2}fp^2$ সেন্টিমিটার পথ অতিক্রম করিবে। আবার $(p - 1)$ সেকেন্ডে ওই কণাটি $u(p-1) + \frac{1}{2}f(p-1)^2$ সে.মি. পথ অতিক্রম করিয়াছিল। অতএব p-তম সেকেন্ডে কণাটি $\left(up + \frac{1}{2}fp^2\right) - \left[u(p-1) + \frac{1}{2}(p-1)^2\right] = \mathrm{u} + \frac{1}{2}f(2p-1)$ সে.মি. পথ অতিক্রম করিবে।

নিম্নে ভেক্টর সংক্রান্ত দুটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. যদি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i}a_1 + \hat{j}a_2$ এবং ভেক্টর $\vec{B} = \hat{i}b_1 + \hat{j}b_2$, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ OX, OY, OZ অভিমুখে একক ভেক্টরত্রয় সাধারণতঃ ধরা হইয়া থাকে। তাহা হইলে $\vec{A}.\vec{B}$ এবং $\vec{A} \times \vec{B}$ নির্ণয় করুন। মনে রাখিতে হইবে যে, $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 0$ এবং $\hat{i}^2 = 1, \hat{j}^2 = 1$; আবার, $\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}$, $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = 0$

অতএব, $\vec{A}.\vec{B} = (\hat{i}a_1 + \hat{j}a_2).(\hat{i}b_1 + \hat{j}b_2)$

$$|\hat{i}|^2 a_1b_1 + \hat{i}.\hat{j}(a_1b_2) + \hat{j}.\hat{i}(a_2b_1) + |\hat{j}|^2 a_2b_2 = a_1b_1 + a_2b_2$$

আবার, $\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i}a_1 + \hat{j}a_2) \times (\hat{i}b_1 + \hat{j}b_2) = \hat{i} \times \hat{i}a_1b_1$

$$+\hat{i} \times \hat{j}(a_1b_2) + \hat{j} \times \hat{i}(a_2b_1) + \hat{j} \times \hat{j}a_2b_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

উদাহরণ 2. যদি $\vec{A} = \vec{R}\cos pt + \vec{B}\sin pt$ ($\vec{R}, \vec{A}, \vec{B}$ ভেক্টরত্রয় ধ্রুবক ; p একটি এছাড়াও স্কেলার ; $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টর দ্বয়ের মানও ধ্রুবক ধরা হইয়াছে)।

তাহা হইলে, দেখান যে, (i) $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} + p^2\vec{R} = 0$;

এবং (ii) $\vec{R} \times \dfrac{d\vec{R}}{dt} = p(\vec{A} \times \vec{B})$ হইবে।

সমাধান ঃ $\vec{R} = \vec{A}\cos pt + \vec{B}\sin pt$ হইলে

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -p\vec{A}\sin pt + p\vec{B}\cos pt$$

এবং $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -p^2\vec{A}\cos pt - p^2\vec{B}\sin pt$ হইবে।

অতএব $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -p^2\vec{R}$

অর্থাৎ $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + p^2 \vec{R} = 0$ হয়। এইরূপে (i) প্রমাণিত হইল।

(ii) ভেক্টর গুণন অনুযায়ী $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{B} = \vec{O}$ এবং $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ প্রয়োগ করিয়া আমরা দেখি যে, $\vec{R} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \left(\vec{A}\cos pt + \vec{B}\sin pt\right) \times \left(-p\vec{A}\sin pt + p\vec{B}\cos pt\right)$

$= p\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)\ (\cos^2 pt + \sin^2 pt)\ = p\left(\vec{A} \times \vec{B}\right).$

6.8 সারাংশ

এই এককে গতিবিদ্যার প্রয়োজনীয় তথ্যগুলি আলোচিত হইয়াছে।

একক 7 □ বলাধীন গতিবিদ্যা (Motion under external force)

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

7.2 উদ্দেশ্য

7.3 গতিবিদ্যায় নিউটনের সূত্র সমূহ

7.4 বলসমূহের ভৌত স্বাতন্ত্র্য

7.5 গতিশক্তি, কর্ম ও ক্ষমতা, সংরক্ষীবল ক্রিয়াবলক্ষেত্র, স্থিতিশক্তি

7.6 রৈখিক সংরক্ষণ নীতি

7.7 মহাকর্ষ বিধি

7.8 বল, কর্ম ও শক্তির একক

7.9 মাত্রা ও ঘাত

7.10 সারাংশ

7.1 প্রস্তাবনা

পূর্বের এককে আমরা গতিশীল কোনও বস্তুর সরণ, বেগ, ত্বরণ এবং ভেক্টরের প্রয়োগ লইয়া আলোচনা করিয়াছি। এই এককে আমরা বহিঃস্থ বল (external force) প্রয়োগে কোনও বস্তুর সরণ, বেগ ও ত্বরণের উপর প্রভাব এবং এই প্রসঙ্গে বলসমূহের ভৌত স্বতন্ত্রতা, কর্ম, ক্ষমতা, গতি ও স্থিতি শক্তিদ্বয় এবং তাহাদের একক ব্যাখ্যা করিব। পরে আমরা গতিবিদ্যায় নিউটনের সূত্র সমূহ, মহাকর্ষ বিধি, ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি ইত্যাদির আলোচনা করিব।

7.2 উদ্দেশ্য

এই এককে নিউটনের সূত্রত্রয় অনুযায়ী বহিঃস্থ সসীম বল প্রয়োগে কোনও বস্তুর গতি এবং বলের জন্য

যে সকল শক্তির উদ্ভব হয় তাহা দেখিব। পরে বল, শক্তি ইত্যাদির একক এবং এতদব্যতীত সরণ, ত্বরণ, বল, শক্তি ইত্যাদির মাত্রা বা ঘাত লইয়া আলোচনা করিব।

7.3 গতিবিদ্যায় নিউটনের সূত্রসমূহ

নিউটন প্রবর্তিত গতিবিদ্যার নিয়মাবলী

সূত্র নং এক ঃ কোনও বস্তু যদি স্থির অবস্থায় থাকে অথবা সমবেগে চলিতে থাকে তাহা হইলে উহা ঐ সাম্যাবস্থায় থাকিবে অথবা পূর্বের বেগে চলিতে থাকিবে যতক্ষণ না কোনও বহিঃস্থ বল প্রয়োগে ঐ বস্তুর সাম্যাবস্থা কিংবা সমবেগ পরিবর্তন ঘটাইবে। কোনও বস্তুর স্থিতাবস্থা কিংবা সমবেগ থাকা অবস্থাকে ঐ বস্তুর জাড্য বা জড়তা বলা হইয়া থাকে এবং নিউটনের এই এক নং সূত্রকে বস্তুটির জাড্য নিয়ম (Law of Inertia) বলা হইয়া থাকে।

ভর (mass) ও ভরবেগ (momentum)

কোনও বস্তুর মধ্যে যে পরিমাণ জড় থাকে তাহাকে বস্তুটির ভর বলা হয় এবং কোনও বস্তুর ভর এবং বেগের গুণফলকে বস্তুটির ভরবেগ বলা হইয়া থাকে। এই পাঠক্রমে ভর একটি স্কেলার রাশি ধরা হইয়াছে কিন্তু বেগ একটি ভেক্টর রাশি এজন্য ভরবেগ একটি ভেক্টর রাশি।

সি. জি. এস্. (C.G.S.) পদ্ধতিতে ভরের একক এক গ্রাম (1m) এবং এম্. কে. এস্. (M.K.S.) পদ্ধতিতে ভরের একক এক কিলোগ্রাম (1 Kilogramm/ 1 Kg) ধরা হইয়া থাকে।

গতির দ্বিতীয় নিয়ম (সূত্র নং দুই) ঃ

কোনও বস্তুর উপর বহিঃস্থ কোনও বলপ্রয়োগ করিলে সময় সাপেক্ষে কোনও বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার ঐ ক্রিয়াশীল বলের সমানুপাতিক হইবে এবং বহিঃস্থ বলটির দিশা এবং ঐ বস্তুটির ভর বেগের দিশা একই হইবে। যদি ঐ বস্তুর ভর m এবং বেগ $\vec{V}$ হয় এবং ক্রিয়াশীল বলটি $\vec{P}$ হয় তাহা হইলে $\vec{P} = K\frac{d}{dt}(m\vec{V})$ হইবে ; (K একটি ধ্রুবক রাশি) ($\vec{P}$ এবং $\vec{V}$ একই দিশায় আছে)। এখন ভর m কে অপরিবর্তনীয় ধরিলে আমরা পাই $\vec{P} = Km\frac{d\vec{V}}{dt} = Km\vec{f}$; $\vec{P}$ বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল (force) এবং $\vec{f}$ বস্তুটির ত্বরণ। এখন যদি সুবিধামত এমন একক ধরি যাহাতে $|m\vec{f}|$ এবং $|\vec{P}|$ এর মান একই থাকে, তাহা হইলে আমরা $\vec{P} = m\vec{f}$ পাইব। লক্ষ্য কর যে, $\vec{P} = 0$ হইলে $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0$ হইবে ; অর্থাৎ বহিঃস্থ কোনও বল না থাকিলে বস্তুটির ভরবেগ সংরক্ষিত থাকিবে।

($\vec{P}$ এবং $\vec{f}$ একই দিশায় দুইটি ভেক্টর ধরা হইয়াছে)। যদি একই দিশায় m জড় বিশিষ্ট কোনও বস্তুর উপর P_1 ও P_2 দুইটি পৃথক বল একই দিশায় ক্রিয়াশীল হয় এবং বস্তুটির ত্বরণ যথাক্রমে f_1 ও f_2 হয় তাহা হইলে $\frac{P_1}{f_1} = m = \frac{P_2}{f_2}$ হইবে।

গতির তৃতীয় নিয়ম (সূত্র নং তিন) ঃ

প্রত্যেকটি ক্রিয়ায় (action) জন্য সমপরিমাণ (equal) বিপরীত (opposite) প্রতিক্রিয়া (reaction) থাকিবে।

7.4 বল সমূহের ভৌত স্বাতন্ত্র্য (Physical independence of forces)

যদি কোনও বস্তুর উপর দুই বা ততোধিক বল প্রযুক্ত হয়, তাহা হইলে যে কোনও বলের ঐ বস্তুর উপর প্রভাব (অর্থাৎ বস্তুটির ভরবেগের পরিবর্তনের হার) অন্য কোনও বল কর্তৃক ঐ বস্তুটির উপর প্রভাবের উপর নির্ভরশীল হইবে না।

যদি m জাড্য বিশিষ্ট কোনও বস্তুর উপর P_1 বল দ্বারা ঐ বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার mf_1 হয় এবং P_2 বল দ্বারা ঐ বস্তুর দ্বারা ঐ বস্তুর ভরবেগ পরিবর্তনের হার mf_2 হয় তাহা হইলে $P_1 + P_2 = mf_1 + mf_2$ হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ এই পাঠ্যক্রমে m জাড্য বিশিষ্ট কোনও বস্তুকে m জাড্য বিশিষ্ট একটি কণা বুঝাইবে; কণাটির দৈর্ঘ্য (length), প্রস্থ (weight) অথবা উচ্চতা (height) নাই এরূপ একটি বিন্দুর উপর অবস্থিত ধরা হইবে।

7.5 গতিশক্তি (Kinetic Energy)

কোনও সময়ে m ভরবিশিষ্ট কোনও বস্তুর গতিবেগ V ধরিলে, ঐ সময়ে ঐ কণাটির গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv^2$ হইবে এবং সাধারণত উহা T দ্বারা চিহ্নিত হয়। T একটি স্কেলার রাশি m_1 এবং m_2 ভরবিশিষ্ট দুইটি বস্তুর গতিবেগ যথাক্রমে V_1 এবং V_2 হইলে ঐ বস্তু দুইটির মোট গতিশক্তি হইবে $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ লক্ষ্য কর যে অভিমুখে $\frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\frac{dv}{dx}$ কিন্তু আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি যে $v\frac{dv}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}$ $=$ f (ত্বরণ) ; অতএব $\frac{dT}{dx} = mf$, জন্য $\frac{dT}{dx}$ কে m ভর বিশিষ্ট বস্তুটির উপর OX দিশায় প্রযুক্ত বল রূপে চিন্তা করা যায়।

কর্ম (Work) ও ক্ষমতা (Power) :

যদি কোনও বহিঃস্থ বল $\vec{F}$ কোনও বস্তুকে P বিন্দু হইতে Q বিন্দুতে লইয়া যায় অর্থাৎ $\vec{F}$ বল বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল হইয়া ঐ বস্তুটির $\overrightarrow{PQ}$ সরণ ঘটায় তাহা হইলে $\vec{F}.\overrightarrow{PQ}$ স্কেলার গুণফল ঐ বস্তুটির উপর $\vec{F}$ বলটির $\overrightarrow{PQ}$ সরণের জন্য কর্ম হইবে। ভেক্টরের ধর্ম অনুযায়ী মনে রাখিতে হইবে যে $\vec{F}.\overrightarrow{PQ} = |\vec{F}|\ |\overrightarrow{PQ}|$ $\cos\theta$ (θ, $\vec{F}$ এবং $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর দ্বয়ের অন্তভূক্ত কোণ) $\theta = \frac{\pi}{2}$ হইলে ঐ কর্ম শূন্য হইবে অর্থাৎ ঐ বলটির লম্বদিশায় কোনও কর্ম ঘটিবে না। $\vec{F} = \hat{i}P_1 + \hat{j}P_2$ এবং $\overrightarrow{PQ} = \hat{i}x + \hat{j}y$ হইলে $\vec{F}.\overrightarrow{PQ} = P_1x + P_2y$ হইবে।

লক্ষণীয় যে কোনও বস্তুর সরণ $\vec{dr}$ এবং প্রযুক্ত বল $\vec{F}$ হইলে, ঐ সরণের জন্য কর্ম (work) হইবে $\vec{F}.\vec{dr}$; কিন্তু আমরা জানি যে, $\vec{V} = \frac{\vec{dr}}{dt}$; ক্রিয়াশীল বল $\vec{F} = m\frac{\vec{dv}}{dt}$ ধরিলে $\vec{F}$ বলের দ্বারা প্রযুক্ত কর্ম $m\frac{\vec{dv}}{dt}.\vec{dr} = m\frac{\vec{dv}}{dt}.\frac{\vec{dr}}{dt}dt = \frac{\vec{dv}}{dt}.\vec{v}\,dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ অর্থাৎ $\vec{F}.\vec{dr}$ $= d\left(\frac{1}{2}mv^2\right).\ \vec{F}$

বল প্রভাবে m ভর বিশিষ্ট কোনও বস্তু যদি A বিন্দু হইতে B বিন্দুতে যায় তাহা হইলে ঐ বলটির কর্ম ভেক্টর সমাকল অনুযায়ী $\int_A^B \vec{F}.\vec{dr}$ হইবে ; কিন্তু আমরা দেখিয়াছি যে $\vec{F}.\vec{dr} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$। অতএব কর্ম $\int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right)$ অর্থাৎ ঐ বস্তুটির গতিশক্তির বৃদ্ধির সমান হইবে।

যদি কর্ম $\int_A^B \vec{F}.\vec{dr}$ সমাকলটি A বিন্দু হইতে B বিন্দু পর্যন্ত কোনও নির্দিষ্ট পথের উপর নির্ভরশীল না হইয়া কেবলমাত্র ঐ সমাকলের প্রান্তিক দুইটি বিন্দু A এবং B এর উপর নির্ভর করে তাহা হইলে ঐ বল $\vec{F}$ কে সংরক্ষী বল (Conservative force) বলিয়া থাকি।

ক্ষমতা (Power) : সময়ে সাপেক্ষে কর্মের পরিবর্তনের হারকে ক্ষমতা বলা হইয়া থাকে ; কোনও বস্তুর

উপর ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}.\vec{r}$ পরিমাণ কার্য্য করিলে ক্ষমতা $\vec{F}.\frac{\vec{dr}}{dt}$ হইবে। লক্ষণীয় যে সময়সাপেক্ষে $\vec{F}$ এর কোনও পরিবর্তন ধরা হয় নাই।

পূর্বে আমরা দেখিয়াছি $\vec{F}.\vec{dr} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dT$ এজন্য $\frac{dT}{dt} = \vec{F}.\frac{\vec{dr}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$ ক্ষমতা হইবে; অর্থাৎ গতিশক্তির সময়সাপেক্ষে পরিবর্তনের হারই ক্ষমতা।

ক্রিয়া বলক্ষেত্র (Field of force)

কোনও বিশেষ অঞ্চলব্যাপী কোনও বল ক্রিয়াশীল হইলে ঐ অঞ্চলটিকে বলটির ক্রিয়া বলক্ষেত্র বলা হইয়া থাকে।

স্থিতিশক্তি (Potential Energy)

সংরক্ষী বলসমূহের প্রভাবে যদি কোনও বিশেষ ক্রিয়া বলক্ষেত্রে কোনও বিন্দু A হইতে ঐ বলক্ষেত্রের কোনও নির্দিষ্ট কোনও বিন্দুতে যাইতে ঐ বলসমূহের দ্বারা যে ক্রিয়া সাধিত হয়, উহাকে A বিন্দুতে ঐ বলক্ষেত্রের স্থিতিশক্তি বলা হইয়া থাকে ; বলক্ষেত্রে ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু অসীম দূরত্বেও থাকিতে পারে। কণাটির ভর m ধরিয়া যদি A বিন্দুতে উহার গতিবেগ V_A হয় তবে ঐ A বিন্দুতে কণাটির গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv_A^2$ হইবে ; অনুরূপভাবে B বিন্দুতে কণাটি গতিবেগ V_B হইলে B বিন্দুতে কণাটির গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv_B^2$ হইবে। এখন যদি A বিন্দুতে কণাটির স্থিতিশক্তি $V(A)$ এবং B বিন্দুতে কণাটির স্থিতিশক্তি $V(B)$ হয় তারা হইলে সংরক্ষণ ধর্ম অনুযায়ী সংরত্রী বলক্ষেত্রে $\frac{1}{2}mv_B^2 + V(B) = \frac{1}{2}mv_A^2 + V(A)$ হইবে। ইহাকে শক্তির সংরক্ষণ নীতি (Principle of conservation of Energy) বলা হইয়া থাকে।

7.6 রৈখিক সংরক্ষণ নীতি

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী m ভর বিশিষ্ট কোনও বস্তুর উপর কোনও নির্দিষ্ট দিশায় কোনও বল ক্রিয়াশীল না থাকিলে অর্থাৎ $\frac{d}{dt}\left(\vec{mv}\right) = 0$ হইবে অর্থাৎ $\left|\vec{mv}\right| =$ ধ্রুবক হইবে ; অর্থাৎ ঐ দিশায় ঐ কণাটির ভরবেগ ধ্রবক থাকিবে। গতিবিদ্যায় ইহাকে রৈখিক সংরক্ষণ নীতি (Principle of conservation of linear momentum) বলা হয়।

7.7 মহাকর্ষ বিধি (Universal law of gravitation)

নিউটন প্রবর্তিত মহাকর্ষ বিধি অনুযায়ী বিশ্বের কোনও দুইটি কণা পরস্পরকে আকর্ষণ করে ; এই আকর্ষণজনিত বলের মান ঐ কণা দুইটির ভরদ্বয়ের গুণফলের সমানুপাতিক ও ঐ কণা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের ব্যস্ত সমানুপাতিক হইবে এবং বলটি ঐ কণা দুইটির সংযোগীরেখায় ক্রিয়াশীল থাকিবে।

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ a এবং ভর M ধরিলে m ভর বিশিষ্ট কোন বস্তু পৃথিবীর কেন্দ্র হইতে r দূরত্বে থাকিলে ঐ বস্তুটি পৃথিবীর কেন্দ্র অভিমুখে $\frac{GMm}{r^2}$ পরিমাণ বল দ্বারা আকৃষ্ট হইবে। ভূপৃষ্ঠে যখন $r = a$ তখন ঐ বলের মান $\frac{GMm}{a^2}$ হইবে ; m ভরবিশিষ্ট বস্তুটির উপর ঐ বল $mg\left(g = \frac{GM}{a^2}\right)$ ধরা হল ; ভূপৃষ্ঠের নিকটবর্তী অঞ্চলে ধরা যাক্ ভূপৃষ্ঠ হইতে x দূরত্বে ঐ ভূকেন্দ্রাভিমুখী বল $\frac{GMm}{(a+x)^2}$; কিন্তু $\frac{1}{(a+x)^2} = \frac{1}{a^2}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-2} = \frac{1}{a^2}\left(1-\frac{2x}{a}+\frac{3x^2}{a^2}-\cdots\cdots\right) \simeq \frac{1}{a^2}$ (প্রায়), যেহেতু $\frac{x}{a}, \frac{x^2}{a^2}$ এই রাশিগুলি অতিক্ষুদ্র এজন্য, $\frac{GMm}{(a+x)^2} \simeq \frac{GMm}{a^2}$; কাজেই ভূকেন্দ্রভিমুখী ঐ বলের জন্য ত্বরণ g ধ্রুবক এবং ঐ ত্বরণের দিশা ভূকেন্দ্র অভিমুখে ধরা হইয়া থাকে। (লক্ষণীয় যে $g = \frac{GM}{a^2}$)

7.8 বল, কর্ম ও শক্তি ইত্যাদির একক (Unit)

আমরা সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে সরণের বা দৈর্ঘ্যের একক এক সেন্টিমিটার (1 cm), সময়ের একক এক সেকেন্ড (1 second), বেগের একক $\frac{\text{1cm}}{\text{(sec)}}$ এবং ত্বরণের একক $\frac{\text{1cm}}{\text{(sec)}^2}$ ধরিয়াছি ; এখন কোনও বস্তুর ভরের একক এক গ্রাম (1 gramme) ধরিয়া বলের একক ($P = mf$) অনুযায়ী $\frac{\text{1gm. cm}}{\text{(sec)}^2} = 1$ dyne অথবা এক ডাইন ধরা হইয়া থাকে। অনুরূপভাবে কর্ম ও শক্তির সংজ্ঞা অনুযায়ী কর্মের এবং শক্তির একক 1 gm $\frac{\text{cm}^2}{\text{(sec)}^2}$ অথবা 1 dyne. cm ধরা হইয়া থাকে ; ক্ষমতার একক $1\text{gm}\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^3}$ অথবা 1 dyne $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$

ধরা হয়। অনেক সময় সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে কর্ম ও শক্তির একক 1 dyne cm এর পরিবর্তে 1 erg বলা হয় এবং ক্ষমতার একককে $\frac{1\text{erg}}{\text{sec}}$ ধরা হইয়া থাকে।

সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক ক্ষুদ্র হওয়ার জন্য অনেক সময় পূর্বে উল্লেখিত এম্. কে. এস্. পদ্ধতি ব্যবহার হয় ; এস্থলে বস্তুর একক কিলোগ্রাম (1 kg), সরণের একক এক মিটার (1 m) এবং সময়ের একক সেকেণ্ড (1 sec) ধরিয়া বলের একক $\frac{1\text{kg.m}}{(\text{sec})^2}$ অর্থাৎ $\frac{1000\text{gm}.100\text{cm}}{(\text{sec})^2}$ = এক নিউটন (1 Newton) ধরা হয়। দেখা যাইতেছে যে এক নিউটন = 10^5 ডাইন ; এই পদ্ধতিতে কর্ম বা শক্তির একক $\frac{1\text{kg.m}^2}{(\text{sec})^2}$ = 10^5 ডাইন × 10^2 সেমি. = 10^7 আর্গ (erg). কর্ম বা শক্তির ঐ একককে এক জুল (1 Joule) বলা হইয়া থাকে ; অনুরূপভাবে ক্ষমতার এককে $\frac{1\text{Joule}}{\text{sec}}$ = এক ওয়াট (1 watt) বলা হয়।

মহাকর্ষ হেতু ভূপৃষ্ঠে বা ভূপৃষ্ঠের সন্নিহিত অঞ্চলে কোনও বস্তু ভূকেন্দ্রের দিকে যে বল দ্বারা আকৃষ্ট হয়, সেই বলকে বস্তুটির ওজন (weight) বলা হইয়া থাকে। মহাকর্ষ হেতু ঐ বস্তুটির ভূকেন্দ্রভিমুখী ঐ ত্বরণ g দ্বারা সূচিত হয়। g একটি ধ্রুবক রাশি এবং উহার আসন্নমান $981\frac{\text{cm}}{(\text{sec})^2}$ (সি জি এস্ পদ্ধতিতে) ; অতএব

এক গ্রামের ওজন = $\frac{981\text{cm}.(\text{One gram})}{(\text{sec})^2}$

কাজের সুবিধার জন্য অনেকসময় অশ্বশক্তিকে (Horse Power) ক্ষমতার একক ধরা হয় ; এম্ কে এস্ পদ্ধতিতে অশ্বশক্তির একক $\frac{75\text{Kg(weight)m}}{(\text{sec})}$

F. P. S. পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে আজকাল খুবই অল্পই ব্যবহৃত হয়। এই পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক ফুট, (1 foot) ভরের একক এক পাউন্ড (1 Pound) এবং সময়ের একক এক সেকেন্ড (1 second) ধরা হইয়া থাকে। এক্ষেত্রে বলের একক এক পাউন্ডাল (1 Poundal) = $\frac{1lb:\text{ft}}{(\text{sec})^2}$ এবং g এর মান $\frac{32\text{ft.}}{(\text{sec})^2}$ এবং এক পাউণ্ডের ওজন আসন্নভাবে = $\frac{32\text{ft.}(\text{one } lb)}{(\text{sec})^2}$

এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে (এক অশ্বশক্তি) 1 H.P. = $\frac{550\text{ft pound weight}}{(\text{sec})}$

1 ফুট = 30·48 সেমি এবং 1 পাউন্ড = 453·6 গ্রাম ধরিয়া এফ্ পি এস্ পদ্ধতি হইতে সি জি এস্ পদ্ধতিতে যাওয়া যায় এবং অনুরূপভাবে সি. জি. এস্ পদ্ধতি হইতে এফ্. পি. এল্. পদ্ধতিতে যাওয়া যায়।

7.9 মাত্রা বা ঘাত (Dimension)

আমরা বিভিন্ন উপায়ে সরণ, সময় ও ভরের একক ধরিয়া বেগ, ত্বরণ, বল, শক্তি, কর্ম, ক্ষমতা ইত্যাদির পরিমাপ করিয়াছি। এখন দৈর্ঘ্যকে $[L]$ মাত্রা, সময়কে $[T]$ মাত্রা এবং ভরকে $[M]$ মাত্রা ধরিয়া আমরা বেগ, ত্বরণ ইত্যাদির মাত্রা নিরূপণ করিব। সময় সাপেক্ষে নির্দিষ্ট দিকে সরণের পরিবর্তনের হার বা গতিবেগের মাত্রা $\left(\frac{L}{T}\right)$ দ্বারা, ত্বরণের মাত্রা $\left(\frac{L}{T^2}\right)$ দ্বারা, ভরবেগের মাত্রা $\left(\frac{ML}{T}\right)$, বলের মাত্রা $\left(\frac{ML}{T^2}\right)$ দ্বারা এবং শক্তির মাত্রা $\left(\frac{ML^2}{T^2}\right)$ দ্বারা চিহ্নিত করিব।

উল্লেক্ষ যে দুইটি বা ততোধিক ভৌতিক রাশির মাত্রা অভিন্ন হইলেই তাহাদের মধ্যে যোগ (+) ক্রিয়া কিংবা বিয়োগ (–) ক্রিয়া চলে। যেমন 1 গ্রাম ওজনের সঙ্গে 1 সেকেন্ড সময় যোগ করা যায় না কিন্তু 5 গ্রাম + 75 গ্রাম = 12 গ্রাম হইবে।

লক্ষ্য রাখিতে হইবে যে ভৌতরাশি বিশিষ্ট কোনও সমকীরণের বাম দিকে এবং ডানদিকে যেন একই মাত্রা বিশিষ্ট ভৌত রাশি থাকে। সমীকরণের প্রত্যেকটি পদের একই মাত্রা থাকার নিয়মকে মাত্রার সমতার তত্ত্ব (Principle of Homogeneity of dimension) বলা হইয়া থাকে।

7.10 সারাংশ

এই এককে আমরা নিউটনের গতীয় সূত্র তিনটি ব্যাখ্যা করিয়া গতিশক্তি, কর্ম, ক্ষমতা, স্থিতিশক্তি এবং বলক্ষেত্র এবং ঐ সকল শক্তি, কর্ম, ক্ষমতার পরিমাপ করিবার জন্য প্রয়োজনীয় একক এবং বেগ, ত্বরণ, ভরবেগ বল, শক্তি এবং ক্ষমতার মাত্রা আলোচনা করিয়াছি।

একক 8 ❐ অভিঘাত ও ঘাতবল (Impulse and Impulsive force)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

8.2 উদ্দেশ্য

8.3 অভিঘাত ও ঘাতবলের সংজ্ঞা

8.4 অনুশীলনী

8.5 সারাংশ

8.6 প্রশ্নমালা

8.1 প্রস্তাবনা

এই 8 নং এককে আমরা অতি অল্পসময়ের জন্য ক্রিয়াশীল বলপ্রয়োগে কোনও বস্তুর ভরবেগের যে পরিবর্তন হইবে তাহা লইয়া আলোচনা করিব।

8.2 উদ্দেশ্য

কোনও স্থির বা চলমান বস্তুর সহিত অন্য একটি চলমান বস্তুর সংযোগ ঘটিলে সংযুক্ত দুইটি বস্তুর যে পরিবর্তিত বেগ হইবে অথবা দুইটি অন্তর্ঘাতী বিস্ফোরণের জন্য একটি বল যদি দুইটি বস্তুতে বিভক্ত হয় এবং গমন করে তাহা হইলে ঐ বিভক্ত অথবা সংলগ্ন বস্তুদ্বয়ের বেগ নির্ণয় সম্পর্কিত বিষয়গুলি এই এককে আলোচিত হইবে। লক্ষ্য করিতে হইবে যে আমরা সর্বত্র বস্তুসমূহের একই সরল রেখায় গতি ধরিব।

8.3 অভিঘাত (Impulse) ও ঘাতবলের (Impulsive force) সংজ্ঞা

কোনও বহিঃস্থ বল যদি অতি অল্পসময়ের জন্য m ভর বিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হইয়া উহার বেগের পরিবর্তন ঘটায় তাহা হইলে ঐ বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনকে ঐ বলের অভিঘাত এবং প্রযুক্ত ঐ বলকে ঘাত বলা হইয়া থাকে।

ধরা যাক একটি পরিবর্তনশীল বল $\vec{P}$ অতি অল্প δt সময়ে m ভর বিশিষ্ট কোনও বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হইয়া ঐ বস্তুটির বেগকে ঐ বলের দিশায় u হইতে v তে পরিবর্তন ঘটায় ; তাহা হইলে আমরা $\int_{t}^{t+\delta t} \vec{P}\,dt$ $= m\ (v - u)$ পাইব। $\int_{t}^{t+\delta t} \vec{P}\,dt$ কে আমরা সীমিত ধরিয়া আমরা উহাকে I দ্বারা চিহ্নিত করিব ; $m\ (v - u)$ কে অর্থাৎ বাস্তব ভরবেগের পরিবর্তনকে ঐ বস্তুর অভিঘাত এবং I কে ঘাতবল বলিব।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

আমরা পূর্বেই আলোচনা করিয়াছি যে বলের অভিঘাতের পরিমাণ বলজনিত ভরবেগের পরিবর্তনের দ্বারা পরিমাপ করা হয়।

অভিঘাতের একক

এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে ঃ অভিঘাতের পরম একক (Absolute unit) হইল সেকেন্ড-পাউন্ড্যাল এবং অভিকর্ষজনিত একক (Gravitational unit) হইল সেকেন্ডে-পাউন্ড।

সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে ঃ পরম একক সেকেন্ড-ডাইন ও অভিকর্ষজনিত একক সেকেন্ড-গ্রাম-ওজন।

আরও পাই যে $\overrightarrow{Pt} = \mathrm{m}\ (\vec{v} - \vec{u})$

অতএব বল × সময় = ভরবেগের পরিবর্তন এবং বল × সরণ = গতিশক্তির পরিবর্তন

রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি

দুইটি সংঘাতলিপ্ত (colliding) বস্তুর উপর কোন বহিঃশক্তি প্রযুক্ত না হইলে যে কোন দিকে সংঘাতের আগে তাহাদের ভরবেগের সমষ্টি সংঘাতের পর তাহাদের ভরবেগের সমষ্টির সমান হইবে।

বস্তু দুইটির ভর m_1 ও m_2 এবং সংঘাতের আগে তাহাদের গতিবেগ যথাক্রমে u_1 ও u_2 এবং সংঘাতের পরে গতিবেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2 হইলে

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

8.4 অনুশীলনী

উদাহরণ—1

u বেগে চলমান m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু স্থির অবস্থায় থাকা 2m ভরবিশিষ্ট কোনও বস্তুর উপর ধাক্কা দিয়া উহার সহিত সংলগ্ন হইয়া একই দিশায় উভয়ে একসঙ্গে চলিতে থাকে। এখন সংলগ্ন বস্তুদুটির বেগ নির্ণয় করিতে হইবে।

সমাধান ঃ যদি সংলগ্ন বস্তু দুইটির বেগ v হয় তাহা হইলে ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী আমরা পাই

$$mu + 2m.0 = 3mV$$

অর্থাৎ $V = \frac{u}{3}$ হইবে।

উদাহরণ—2

m ভর বিশিষ্ট একটি গোলা v বেগে নিক্ষিপ্ত হইয়া স্থিরাবস্থায় M ভর বিশিষ্ট একটি তক্তার ভিতরে প্রবেশ করে এবং তার মধ্যেই সংলগ্ন হইয়া থাকে এবং গোলা সহিত তক্তাটি V বেগে চলিতে থাকে। দেখাও যে এজন্য তক্তা এবং গোলাটির মোট গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{M}{M+m}\right)$ পরিমাণ হ্রাস পাইবে।

সমাধান ঃ প্রারম্ভে গোলাটির গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv^2$ এবং তক্তাটির গতিশক্তি শূন্য পরিমাণ ছিল। গোলাটি তক্তার মধ্যে প্রবেশ করিলে রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণ অনুযায়ী $mv = (M + m)\ V$ হইবে এবং গোলাশুদ্ধ তক্তাটির গতিশক্তি হইবে $\frac{1}{2}(M+m)V^2$; কিন্তু $V = \frac{mv}{M+m}$; অতএব মোট গতিশক্তির হ্রাসেপ পরিমাণ হইবে $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M+m)V^2$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{M+m} = \frac{1}{2}\frac{mM}{(M+m)}v^2$$

8.5 সারাংশ

এই 8 নং এককে আমরা অভিঘাত ও ঘাতবলের সংজ্ঞা দিয়াছি এবং বস্তুসমূহের উপর ঘাতবলের ক্রিয়া সংক্রান্ত সমস্যা বিচার করিয়াছি।

8.6 প্রশ্নমালা

1. E পরিমাণ গতীয় শক্তি উৎপাদনকারী অন্তর্ঘাতী বিস্ফোরণে কোনও নির্দিষ্ট দিকে V বেগে চলমান M ভর বিশিষ্ট একটি গোলক এমন দুইটি অংশে ভাঙ্গিয়া গেল যেন ঐ অংশ দুইটির ভরের মান $m_1 : m_2$ অনুপাতে থাকে ; যদি ঐ বিভক্ত অংশ দুইটি পূর্বের অবিভক্ত গোলকের অনুসৃত সরলরেখায় চলিতে থাকে, তাহা হইলে প্রমাণ করুন যে ঐ অংশ দুইটি বেগ হইবে যথাক্রমে

$$V + \sqrt{\frac{2m_2E}{m_1M}} \text{ এবং } V - \sqrt{\frac{2m_1E}{m_2M}}$$

2. M ভর বিশিষ্ট একটি কামান হইতে m ভর বিশিষ্ট একটি গোলক বিক্ষিপ্ত হওয়ায় E পরিমাণ গতীয় শক্তি উৎপন্ন হয়। প্রমাণ করুন যে, গোলাটি যেদিকে নিক্ষিপ্ত হইবে, কামানটি তাহার বিপরীত দিকে $\sqrt{\dfrac{2ME}{M(m+M)}}$ বেগে চালিত হইবে।

একক 9 ❐ ঋজুরেখ গতি (Motion on a straigh line)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

9.2 উদ্দেশ্য

9.3 স্থির অথবা চলমান বস্তুর উপর বহিঃস্থ বল প্রয়োগের প্রভাব

9.4 অনুশীলনী

9.5 সারাংশ

9.6 প্রশ্নমালা

9.1 প্রস্তাবনা

পূর্ব পাঠক্রমে (৬ নং এককে) ত্বরণ ধ্রুবক হইলে কোনো বিন্দুর সরলরেখায় গতি কীরূপ হইবে তাহা আলোচিত হইয়াছে। আমরা এই এককে (নং ৯) ত্বরণটি ধ্রুবক রাশি না হইলেও কোনো কণার গতি কীরূপ করিব তাহা আলোচনা হইবে।

9.2 উদ্দেশ্য

গতিবিদ্যায় চলরাশিরূপে বেগ ও ত্বরণের গুরুত্ব অপরিসীম ; পদার্থবিদ্যা, জীববিজ্ঞান, কারিগরী বিদ্যা, পদার্থবিদ্যা ইত্যাদি ব্যবহারিক বিজ্ঞানে এইরূপ বেগ ও ত্বরণকে চলরাশি (varial) রূপে প্রায়শঃ ধরা হয়। এই অধ্যায়ে এবং পরবর্তী অধ্যায়গুলিতে গতিবিদ্যায় কীরূপে দোলক (Pendulum) এবং গ্রহের গতি (Planetary motion) সংক্রান্ত সমস্যা আলোচনার আমরা ত্বরণকে সরণের বেগের অথবা সময়ের অপেক্ষক ধরিয়া বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করিব।

9.3 স্থির অথবা চলমান বস্তুর উপর বহিঃস্থ বল প্রয়োগের প্রভাব

সরলরেখায় গতিশীল বস্তুকণার ত্বরণ পরিবর্তনশীল হইতে পারে। এক্ষেত্রে ত্বরণ একটি অপেক্ষক হইবে যাহা (ক) শুধুমাত্র সময় (খ) শুধুমাত্র সরণ (গ) শুধুমাত্র গতিবেগ অথবা (চ) উক্ত তিনটি চলরাশির একাধিকের উপর নির্ভরশীল হইতে পারে।

ফলে এক্ষেত্রে বস্তুকণাটির গতির সম্পর্কে তথ্যর জন্য পূর্ব অধ্যায়ে আলোচিত সূত্রগুলি ব্যবহার করা যাইবে না। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী 'গতির সমীকরণ' (Equation of motion) নির্ধারণ করিতে হইবে এবং ওই অবকল সমীকরণটিকে সমাধা করিতে হইবে। প্রদত্ত অঙ্কে যে সব প্রারম্ভিক তথ্য অর্থাৎ সময়, সরণ, প্রারম্ভিক বেগ দেওয়া আছে সেগুলিকে ওই দুই সমীকরণের ক্ষেত্রে ব্যবহার করিতে হইবে।

বস্তুর গতি নিউটনের দ্বিতীয় নিয়ম অনুযায়ী আমরা পাই $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F$, m বস্তুটির ভর ; $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ উহার ত্বরণ এবং F ওই বস্তুটির উপর প্রযুক্ত বল OX দিকে ক্রিয়াশীল। এই F বল t (সময়), x (সরণ) কিংবা v (বেগ)-এর উপর নির্ভরসীল হইতে পারে।

(i) যদি বহিঃস্থ বল $F(t)$ সময়ের অপেক্ষক হয় তাহা হইলে $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_1(t)$ হইবে। ওই অবকল সমীকরণ (differential equation)-এর উভয় দিকে t সাপেক্ষে সমাকলন করিয়া আমরা পাই, $m\dfrac{dx}{dt} = \int F_1(t)dt +$ ধ্রুবক রাশি। এবং পুনরায় সমকলন করিয়া যে $mx = m$(সরণ) সময়ের অপেক্ষকরূপে পাওয়া যাইতে পারে। প্রদত্ত তথ্যের দ্বারা ধ্রুবক রাশি নির্ণীত হইবে।

(ii) বহিঃস্থ বল $F_2(x)$ যদি x সরণের উপর নির্ভরশীল হয় তাহা হইলে $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_2(x)$ হইবে। $\dfrac{d^2x}{at^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$ রূপে প্রকাশ করা যায়।

এস্থলে $mv\dfrac{dv}{dx} = F_2(x)$ ধরিয়া x সাপেক্ষে উভয় পার্শ্বে সমাকলন করিয়া আমরা পাই $m\dfrac{v^2}{2} = \int F_2(x)\,dx +$ ধ্রুবক রাশি। অর্থাৎ $m\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = 2\int F_2(x)\,dx +$ ধ্রুবক রাশি। ধরা যাক্ যে, $x = a$ অবস্থানে বেগ $\dfrac{dx}{dt} = u$ দিন, তাহা হইলে $m\left[\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 - u^2\right] = 2\int_a^x F_2(x)dx$ অর্থাৎ $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = u^2 + \dfrac{2}{m}\int_a^x F_2(x)\,dx$ অর্থাৎ $\dfrac{dx}{dt} = \pm\sqrt{u^2 + \dfrac{2}{m}\int_a^x F_2(x)dx}$ হয়, এইরূপে পুনরায় সমাকলন করিয়া আমরা $\int dt = \pm\int \dfrac{dx}{\sqrt{u^2 + \dfrac{2}{m}\int_a^x F_2(x)dx}}$ পাই, সময়ের পরিবর্তনের সঙ্গে সরণের পরিবর্তনের দিশা অনুসারে ডানদিকের সমাকলনটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

(iii) বহিঃস্থ ক্রিয়াশীল বল $F_3(v)$ যদি v বেগের উপর নির্ভর করে তাহা হইলে আমরা পাই, $m\frac{dv}{dt} = F_3(v)$ অথবা, $mv\frac{dv}{dx} = F_3(v)$।

$m\frac{dv}{dt} = F_3(v)$ সমীকরণটি সমাকলন করিয়া আমরা পাই, $m\int\frac{dv}{F_3(v)} = \int dt$ + ধ্রুবক, এইরূপে v-কে t-র অপেক্ষকরূপে প্রকাশ করিয়া v-কে $\frac{dx}{dt}$ ধরিয়া আরেকবার সমাকলন করিয়া সরণ x-কে t-এর অপেক্ষক রূপে পাওয়া যায়।

যদি $mv\frac{dv}{dx} = F_3(v)$ ধরি, তা হলে $\int\frac{mvdv}{F_3(v)} = \int dx$ + ধ্রুবক হইবে।

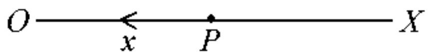
এইরূপে x সরণকে v বেগের অপেক্ষক রূপে পাওয়া যাইতে পারে।

পরের অনুশীলনীতে এরূপ গতি সংক্রান্ত কয়েকটি সমস্যা নিয়ে আমরা আলোচনা করিব।

9.4 অনুশীলনী

উদাহরণ 1. একটি বস্তুকণা সরলরেখায় গতিশীল এবং বস্তুকণার যেকোনো অবস্থানে ত্বরণ ওই সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর অভিমুখে ও ত্বরণ ওই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে বস্তুকণাটির দূরত্বের সঙ্গে সরলভেদে আছে। বস্তুকণাটির গতিপথ ও প্রাসঙ্গিক বিষয়সমূহ আলোচনা করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন নির্দিষ্ট বিন্দুটি O এবং বস্তুটি ধরা যাক্ t সময়ে P বিন্দুতে আছে ; OP যোগ করিয়া বর্ধিত রেখা OX ধরা হইল ; যদি $OP = x$ হয় তাহা হইলে t সময়ের পরিবর্তনের সঙ্গে x-এর পরিবর্তন হইবে।

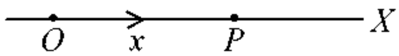


চিত্র 9.1

এস্থলে P $(OP = x)$ বিন্দুতে বস্তুটির বেগ $\frac{dx}{dt}$ ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2}$; ধরা যাক্ বলটির মান mn^2x এবং O অভিমুখে ক্রিয়মান ; তখন নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\,mn^2PO = -mn^2x$ (যেহেতু বলটি আকর্ষক এজন্য $\overrightarrow{PO}$ দিকে বলটির দিশা ; n^2 একটি ধ্রুবক) উপরের অবকল সমীকরণটি সমাধান করিয়া আমরা পাই, $x = A\cos nt + B\sin nt$ (A ও B যদৃচ্ছ ধ্রুবক) যদি বস্তুটি $x = a$ অবস্থান হইতে V বেগে যাত্রা করে (ওই বেগ OP দিকে ধরা হইয়াছে।) তাহা হইলে যাত্রার সময়কে $t = 0$ ধরিয়া ওই যাত্রা সময়ে আমরা পাই, $x = a$ এবং $\frac{dx}{dt} = V$ এখন $x = A\cos nt + B\sin nt$ সমীকরণটিতে $t = 0$

বসাইলে আমরা $A = a$ পাই। আবার, $\frac{dx}{dt} = -nA\sin nt + nB\cos nt$ সমীকরণটিতে $t = 0$ বসাইয়া আমরা পাই $V = nB$ বা $B = \frac{V}{n}$; অতএব এস্থলে $x = a \cos nt + \frac{v}{n} \sin nt$ হয়। লক্ষ্য করুন যে, $t = \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \cdots$ ইত্যাদি হইলে $x = a \cos nt + \frac{V}{n}\sin nt$ পরপর হইবে। গতিবিজ্ঞানে এইরূপ গতিকে সরল সুমঞ্জস গতি বলা হয় ; পরে আমরা এরূপ গতির বিশদ আলোচনা করিব।

উদাহরণ 2. সরলরেখায় চলমান একক ভরবিশিষ্ট কোনো বস্তুর উপর যদি ওই সরলরেখার উপর নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে বিন্দুর সঙ্গে বস্তুটির দূরত্বের সমানুপাতিক একটি বিকর্ষক বলক্রিয়াশীল হয় তাহা হইলে ওই বস্তুটির গতিপথ নির্ণয় করুন।



চিত্র 9.2

ধরা যাক্ যে, সরলরেখাটি OX এবং O উপরিউক্ত নির্দিষ্ট বিন্দু ; t সময়ে বস্তুটির অবস্থান P বিন্দুতে হইলে এবং $OP = x$ ধরলে নিউটনের গতির দ্বিতীয় নিয়ম অনুযায়ী $\frac{md^2x}{dt^2} = mn^2x$ হইবে (n^2 ধনাত্মক ধ্রুবক) ওই অবকল সমীকরণটি সমাধান করিয়া আমরা পাই,

$$x = A \cos h\ nt + B \sin h\ nt$$

$$\cos h\,nt = \frac{1}{2}(e^{nt} + e^{-nt})$$

$$\sin h\,nt = \frac{1}{2}(e^{nt} - e^{-nt})$$

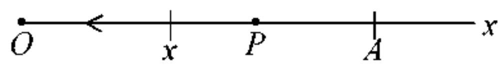
$\frac{d}{dt}\sin nt = n\cos h\,nt$ এবং $\frac{d}{dt}\cos nt = n\sin h\,nt$ যদি $t = 0$ সময়ে অর্থাৎ প্রারম্ভকালে বস্তুটির অবস্থান $x = a$ হয় এবং বস্তুটির গতিবেগ V হয়, $t = 0$ বসাইয়া $x = A = a$ হইবে অতএব $x = a \cos h\ nt + B \sin h\ nt$ এখন $\frac{dx}{dt} = na\sin h\,nt + nB\cos h\,nt$ যেহেতু $\sin h\ 0 = 0$; $\cos h\ 0 = 1$, এজন্য $t = 0$ বসাইলে $V = nB$ পাওয়া যাইবে। অতএব $x = a \cos h\ nt + \frac{V}{n}\sin h\ nt$ হয়। লক্ষণীয় সময়ের অগ্রগতির সঙ্গে সঙ্গে বস্তুটি ক্রমশঃ O বিন্দু থেকে দূরে সরিয়া যাইবে। (যেহেতু t সময় সাপেক্ষে $\cos h\ nt$ এবং $\sin h\ nt$ ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইয়া থাকে।)

উদাহরণ 3. সরলরেখায় গতিশীল একটি বস্তুকণার ত্বরণ তার যেকোনো অবস্থানে ওই সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দূরত্বের বর্গের সঙ্গে ব্যস্তভেদে আছে। যদি বস্তুকণাটি ওই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে '$2a$'

একক দূরত্বে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করে তবে প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$ সময়ের ব্যবধানে বস্তুকণাটি 'a' একক দূরত্বে যাইবে, এখানে ধ্রুবক μ হল উক্ত ভেদসূত্রের ধ্রুবক।

সমাধান ঃ ধরা যাক যে, O-কে স্থিরবিন্দু নির্দিষ্ট করিয়া OX সরলরেখা ওই বস্তুটির গতিপথ। কোনো সময় t-তে মনে করা যাক্ যে বস্তুটির অবস্থান P এবং $OP = x$।

দেওয়া আছে যে যখন বস্তুটি O থেকে $2a(OA = 2a)$ দূরত্বে ছিল তখন তাহা স্থিরাবস্থায় ছিল অর্থাৎ তার গতিবেগ শূন্য ছিল।



চিত্র 9.3

A বিন্দু থেকে আকৃষ্ট হয়ে বস্তুটি O বিন্দুর দিকে চলিতেছে থাকে এবং তাহা O বিন্দু হইতে $x = a$ দূরত্বে $(OB = a)$ পৌঁছাইতে বস্তুটির কত সময় লাগিবে তা নির্ণয় করিতে হইবে। নিউটনের দ্বিতীয় নিয়ম অনুযায়ী এস্থলে $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m\mu}{x^2}$ অথবা $v\frac{dv}{dx} = -\frac{\mu}{x^2}$ অর্থাৎ $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\frac{\mu}{x^2}$; এখন উভয়দিকে সমাকলন করিয়া আমরা পাই $\frac{1}{2}v^2 = \frac{\mu}{x} + C$ (ধ্রুবক) কিন্তু দেওয়া আছে যে, $x = 2a$ অবস্থানে $v = 0$; অতএব $v^2 = 2\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2a}\right)$ হইবে। কিন্তু $v = \frac{dx}{dt}$; এস্থলে $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2\mu(2a-x)}{2ax}}$। বলটি আকর্ষক নিয়ে t সময় বৃদ্ধির সঙ্গে x-এর মান হ্রাস পাবে এজন্য $\frac{dx}{dt}$ ঋণাত্মক ধরা হয়েছে।

অতএব $x = 2a$ থেকে $x = a$ বিন্দুতে অবস্থিত বস্তুটির T সময় থাকিলে, T এইরূপে পাওয়া যাইবে।

$$\int_{t=0}^{T} dt = -\sqrt{\frac{a}{\mu}}\int_{x=2a}^{a}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$$ হইবে।

অর্থাৎ $x = 2a \cos^2\theta,\ 2a - x = 2a \sin^2\theta$

ধরিলে, $dx = -4a \cos\theta \sin\theta\, d\theta$ হয়

এবং $T = -\sqrt{\frac{a}{\mu}}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(-4a\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$ হইবে।

(যেহেতু $x = 2a$ হলে $\theta = 0$ এবং $x = a$ হলে $\theta = \frac{\pi}{4}$ হয়।)

অতএব $T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^2\theta \, d\theta$

$$= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$$

9.5 সারাংশ

এই এককটি পাঠ করিলে নিউটনের গতীয় সূত্র প্রয়োগ করিয়া বিভিন্ন প্রচার বল ক্রিয়াশীল বলের প্রভাবে বস্তুসমূহের সরলরেখার গতি এবং বিভিন্ন সময়ে তাদের গতিবেগ ইত্যাদি নির্ণয় করা যাইতে পারে।

9.6 প্রশ্নমালা

1. কোনো সরলরেখার উপরে μv^{n+1} মন্দনে একটি কণা চলিতেছে (এখানে t সময়ে কণাটির গতিবেগ v ধরা হইয়াছে।)

কণাটির প্রারম্ভিক বেগ u হইলে দেখান যে,

$n\mu t = \frac{1}{v^n} - \frac{1}{u^n} (n \neq 0)$ হইবে ; আবার, যদি ওই t সময়ে কণাটি x পথ অতিক্রম করে তাহা হইলে $(n-1)\mu x = \frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{u^{n-1}} (n \neq 1)$ হইবে।

2. কোনো সরলরেখায় একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O থেকে a দূরত্বে একটি কণা স্থিরাবস্থায় হইতে O বিন্দু অভিমুখে কোনো আকর্ষক বল দ্বারা চলিতে থাকে ; O বিন্দু হইতে x দূরত্বে যখন থাকে তখন তার গতিবেগ $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$-এর সমানুপাত হইলে ওই সময়ে কণাটির ওপর ওই আকর্ষক বল কীরূপ হইবে তা নির্ণয় করুন।

(উত্তর আকর্ষক বলটি $-\frac{a^2}{x^3}$ হইবে)।

3. কোনো সরলরেখায় গমনরত একটি কণার ত্বরণ যদি ওই সরলরেখার উপরে অবস্থিত কোনো নির্দিষ্ট স্থির বিন্দুর দিকে থাকে এবং কণাটির দূরত্ব ওই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে x হইলে এই ত্বরণের মান n^2x ; এখন ওই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কণাটি যদি ওই সরলরেখার উপর y দূরত্বে একটি বিন্দু হইতে V বেগে ওই বিন্দু দিকে ছোড়া হয়, তাহা হইলে দেখান যে, কণাটি $\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{ny}{V}\right)$ সময় পরে ওই নির্দিষ্ট বিন্দুতে পৌঁছাইবে।

4. দেখান যে, ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত একটি বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করিয়া পৃথিবীর অভ্যন্তরে কোনো ঋজু মসৃণ সুড়ঙ্গ পথ অতিক্রম করিয়া একটি কণাকে ভূপৃষ্ঠের অন্য প্রান্ত বিন্দুতে পৌঁছাইতে প্রায় পৌনে একঘণ্টা সময় লাগিবে। (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $6{\cdot}37 \times 10^5$ cm এবং $g = 981$ cm/(sec)^2]

5. কোনো সরলরেখায় v বেগে গমনরত একটি কণা ওই সরলরেখায় অবস্থিত কোনো নির্দিষ্ট স্থিরবিন্দু হইতে দূরত্ব $x = ae^{kv^2}$ দেওয়া আছে (a এবং k ধ্রুবক রাশিদ্বয়) দেখান যে, কণাটির উপর ওই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে বিকর্ষক বলটি ক্রিয়াশীল এবং ওই বলটি $\frac{1}{x}$-এর সমানুপাতিক হইবে।

একক 10 □ সরল সমঞ্জস গতি (Simple Harmonic Motion)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

10.2 উদ্দেশ্য

10.3 সরল সমঞ্জস গতির প্রকৃতি এবং তৎসংক্রান্ত অবকল সমীকরণের (Differentia equation) প্রয়োগ। দোলনকাল (Periodic time) এবং দোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক (frequency)

10.4 দুইটি সরল সমঞ্জস দোলনের লব্ধি (Resultant of two harmonic oscillation)।

10.5 অবমন্দিত সমঞ্জস দোলন (Damped harmonic oscillation)

10.6 প্রণোদিত দোলন (Forced oscillation) এবং অনুনাদ (Resouance)

10.7 অবমন্দিত প্রণোদিত দোলন (Damped forced oscillation)

10.8 অনুশীলনী

10.9 সারাংশ

10.10 প্রশ্নাবলী

10.1 প্রস্তাবনা

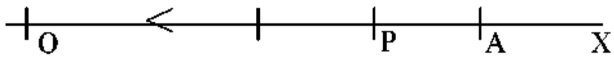
এই এককে সরল সমঞ্জস গতির ব্যাখ্যা করিয়া ঐরূপ গতির জন্য দোলন এবং দোলনকাল, প্রণোদিত দোলন, অবমন্দিত দোলন ইত্যাদি আলোচনা করা হইয়াছে ; এ প্রসঙ্গে অনুনাদ তত্ত্ব (Resonane) এবং উহার গুরুত্ব বলা হইয়াছে।

10.2 উদ্দেশ্য

পদার্থ বিদ্যার বিভিন্ন শাখায় যেমন—শব্দ বিজ্ঞান (Accousties), তড়িৎচুম্বক তত্ত্ব (Electromagnetic theory) ভূবিজ্ঞান (Geophysics), আলোকতত্ত্ব (Theory of Light) ইত্যাদিতে সমঞ্জস দোলনের প্রয়োগ রহিয়াছে ; এখন আমরা অবকল সমীকরণের সাহায্যে বিভিন্ন প্রকার দোলনের ধর্ম ব্যাখ্যা করিব।

10.3 সরল সমঞ্জস গতির প্রকৃতি এবং তৎসংক্রান্ত অবকল সমীকরণের প্রয়োগ ; দোলনকাল এবং দোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক

কোন সরলরেখার উপর চলমান একটি কণা যদি ঐ রেখার উপর নির্দিষ্ট একটি স্থির বিন্দুর দিকে কোনও বিশেষ একটি আকর্ষক বলের প্রভাবে ঐ সরলরেখা উপর চলিতে থাকে এবং ঐ ক্রিয়াশীল আকর্ষক বলটির মান যদি স্থিরবিন্দু হইতে চলমান বিন্দুর দূরত্বের সমানুপাতিক হয় তাহা হইলে কণাটির গতিকে সরল সমঞ্জস গতি বলা হইয়া থাকে।



চিত্র 10.1

ঐ স্থির বিন্দুটিকে O এবং কণাটির গতিপথের সরলরেখাটিকে OX ধরিলে, যদি কণাটির ভর m হয় তাহা হইলে নিউটনের গতীয়, সূত্র অনুযায়ী আমরা পাই

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x$$ (n^2 ধ্রুবক এবং A হইতে যাত্রা শুরু করিয়া t সময়ে P-তে পৌঁছায় যখন $OP = x,\ OA = a$)

অর্থাৎ $\dfrac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$;

অবকল সমীকরণ সমাধানের নিয়ম প্রয়োগ করিয়া, $x = e^{pt}$ এবং $\dfrac{d^2x}{dt^2} = p^2e^{pt}$ বসাইয়া ঐ সমীকরণটি হইতে আমরা $(p^2 + n^2).e^{pt} = 0$ পাই। যেহেতু $e^{pt} \neq 0$ অতএব $p^2 + n^2 = 0$ এজন্য $p = \pm\, in$, $(i^2 = -1)$ এবং $x = A\cos nt + B\sin nt$ হইবে (A ও B সদৃশ ধ্রুবক রাশিদ্বয়)।

আবার $A = a\cos\in$ এবং $B = a\sin\in$

($a, \in$ ধ্রুবক রাশিদ্বয় ধরিয়া $A^2 + B^2 = a^2$ এবং $\tan\in = \dfrac{B}{A}$)

আমরা পাই $x = a\cos(nt + \in)$ .... (ii)

লক্ষণীয় যে, $|\cos(nt + \in)| \leq 1$, কণাটির সরণ $x = a\cos(nt + \in)$ অতএব $-a \leq x \leq +a$ থাকিবে।

আবার দেখা যাইবে যে কোনও নির্দিষ্ট t সময়ে কণাটি $a\cos(nt+\in)$ অবস্থানে থাকিলে আবার $\frac{2\pi}{n}$ সময় পরে কণাটি $a\cos\left[n\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)+\in\right] = \cos[nt+2\pi+\in] = a\cos(nt+\in)$ ঐ বিন্দুটিতে ফিরিয়া আসিবে এবং যতক্ষণ ঐ কণাটির উপর বলটি ক্রিয়াশীল থাকিবে ততক্ষণ $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}$ .... সময় পরে পরে কণাটি একই অবস্থানে পুনঃ পুনঃ ফিরিয়া আসিবে।

প্রারম্ভিক শর্ত $t=0,\ x=a,\ \frac{dx}{dt}=0$ হইলে $x=a\cos nt$ হইবে।

অবকল সমীকরণটিকে $v\frac{dv}{dx}=-n^2x$ লিখিয়া পাই $v\,dv=-n^2x\,dx$

সমাকল করিয়া, $v^2=-n^2x^2+c$ (c : ধ্রুবক)

$x=a,\ v=0 \Rightarrow c=n^2a^2$

অতএব $x'=v=-\sqrt{n^2(a^2-x^2)}=-n\sqrt{(a^2-x^2)}$ [যখন $x'=\frac{dx}{dt}$]

$\Rightarrow x=a\cos nt$ (সমাকল করিয়া)।

$x=0$ বিন্দুতে v সর্বোচ্চ ও $|v|=na$ বস্তুকণাটি O বিন্দুর বামদিকে যাইবে এবং বামদিকে P' অবস্থানে $\ddot{x}=\mu.OP'=\mu(-x)=-\mu x$ অর্থাৎ সমীকরণটি একই থাকিবে।

ত্বরণ O দিকে ধাবমান, x বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে v হ্রাস পাইবে ও 'a' দূরত্বে $v=0$ হইবে।

O-র বামদিকে a দূরত্বে থামিবার পর বস্তুকণাটি আবার ঐ ত্বরণসূত্র অনুযায়ী O-র দিকে যাইবে এবং O-র ডানে 'a' দূরত্ব অবধি যাইবে। ফলে গতি O-কেন্দ্রিক সরল সুসমঞ্জস হইবে।

$$\cos\sqrt{u}t=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}},\ \text{যখন } n^2=\mu\ ;$$

ফলে মোট দোলনকাল $\frac{4\pi}{2\sqrt{\mu}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$

$\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ সংখ্যাটিকে ঐ কণাটির দোলনের দোলনকাল বা পর্যায়কাল (Periodic time) বলা হয় এবং ঐ পর্যায়কালের ব্যস্ত সংখ্যাটি $\left(\frac{n}{2\pi}\right)$ কে এই দোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক বলা হইয়া থাকে। a কে দোলনের বিস্তার এবং $(nt+\in)$ কে দশা কোণ (amplitude phase angle) বলা হইয়া থাকে ; $\in$ কে দোলনটি আদি

দশা কোণ (initial phase angle) বলা হয়। উল্লেক্ষ যে, কণাটির সরণ $x = a\cos(nt + \in)$ হইলে বেগ $\frac{dx}{dt} = na\cos\left(nt + \frac{\pi}{2} + \in\right)$ এবং ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2} = n^2 a\cos\ (nt + \pi + \in)$ হয় ; অর্থাৎ বেগের দশাকোণ সরণের দশাকোণের $\frac{\pi}{2}$ অধিক এবং ত্বরণের দশা কোণ বেগের দশাকোণের $\frac{\pi}{2}$ অধিক হইবে।

সরণ সমঞ্জস গতির ক্ষেত্রে শক্তির সংরক্ষণ

সরণ সমঞ্জস দোলন হইলে আমরা দেখিয়াছি যে স্থিরবিন্দু O অভিমুখে OX সরলরেখার উপর O হইতে X দূরত্বে একক ভরের জন্য প্রত্যোনাক বল $-n^2x$ হইলে যখন বস্তুটির সরণ $x = a\cos(nt + \in)$ (a বিস্তার, $\frac{2\pi}{n}$ পর্য্যায় কাল এবং $nt + \in$ দশা কোণ) তখন বস্তুটির বেগ $\frac{dx}{dt} = -na\sin(nt + \in)$ এবং গতিশক্তি = $\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2n^2\sin^2(nt + \in)$ হয়।

আবার বস্তুটির x অবস্থান হইতে O স্থির বিন্দুতে আসিতে প্রত্যোনয়ক বল যে ক্রিয়া সম্পাদন করে তাহাই বস্তুটির স্থিতিশক্তি এবং ঐ শক্তির মান $-\int_x^0 n^2x\,dx = +n^2\frac{x^2}{2} = \frac{n^2a^2}{2}\cos^2(nt + \in)$ সহজেই দেখা যায় যে, বস্তুটি মূলবিন্দু হইতে $x = a\cos(nt + \in)$ দূরত্বে থাকিলে গতিশক্তি এবং স্থিতিশক্তির যোগফল $= \frac{n^2a^2}{2}\left[\sin^2(nt + \in) + \cos^2(nt + \in)\right] = \frac{n^2a^2}{2}$; ইহা t, $\in$ নিরপেক্ষ একটি ধ্রুবক রাশি।

10.4 দুইটি সরল সমঞ্জস দোলনের লব্ধি

কোনও নির্দিষ্ট সরলরেখার একই পর্যায় কাল বিশিষ্ট দুইটি সরল সমঞ্জস দোলনের প্রভাব যদি একটি কণার উপর থাকে তাহা হইলে ঐ দুইটি সরল সমঞ্জস গতির লব্ধি নিম্নলিখিত রূপে নির্ণয় করা যায়। ধরা যাক OX সরলরেখার উপর কণাটির উপর $x_1 = a_1\cos(nt + \in)$ এবং $x_2 = a_2\cos(nt + \in)$ দুইটি সমঞ্জস গতির জন্য সরণ ; এখন এই দুইটি দোলনের লব্ধির সরণ $x = x_1 + x_2 = a_1\cos(nt + \in_1) + a_2\cos(nt + \in_2)$ অর্থাৎ ঐ দুইটি সরণের যোগফল ;

$$\begin{aligned} x &= (a_1\cos\in_1 + a_2\cos\in_2)\cos nt \\ &\quad - (a_1\sin\in_1 + a_2\sin\in_2)\sin nt \\ &= A\cos nt + B\sin nt \end{aligned}$$

হইবে।

[$A = a_1 \cos \in_1 + a_2 \cos \in_2$ এবং $B = -(a_1 \sin \in_1 + a_2 \sin \in_2)$ ধরা হইয়াছে]

এখন $A = a \cos \in$ এবং $B = -a \sin \in$ লিখিয়া

আমরা পাই $x = a \cos (nt + \in)$; যেখানে $a = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\in_1 - \in_2)} \quad ......(i)$$

এবং $\tan \in = -\dfrac{B}{A} = \dfrac{a_1 \sin \in_1 + a_2 \sin \in_2}{a_1 \cos \in_1 + a_2 \cos \in_2}$ ....(ii)

এইরূপে দেখা যায় যে, সমপর্য্যায়কাল বিশিষ্ট দুইটি সরল সমঞ্জস গতির লব্ধির পর্য্যায়কাল একই থাকিবে এবং উহার বিস্তার এবং আদি দশা কোণ (i) এবং (ii) দ্বারা পাওয়া যাইবে।

যখন দুইটি দোলনের আদি দশা কোণদ্বয় যথাক্রমে $\in_1$ এবং $\in_2$ তখন ঐ লব্ধির বিস্তার $a_1 + a_2$ অর্থাৎ ঐ দোলনদ্বয়ের বিস্তারের মানের যোগফল হইবে।

আবার $\in_1 - \in_2 = \pi$ হইলে ঐ দোলনদ্বয়ের লব্ধির বিস্তার

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos\pi} = a_1 - a_2$$ হইবে। ($\cos \pi = -1$)

10.5 অবমন্দিত সমঞ্জস দোলন ঃ

বাস্তবক্ষেত্রে দেখা যায় যে, সময়ের সঙ্গে সঙ্গে নানাবিধ কারণে স্বাভাবিক সমঞ্জস দোলনের ক্ষেত্রে বিভিন্ন প্রকারে বাধা সৃষ্টি হয় এবং এজন্য দোলনের বিস্তার ও পর্য্যায়কাল পরিবর্তিত হইয়া থাকে।

কোনও সরলরেখায় কণার দোলনের জন্য যে কেন্দ্রাভিমুখী প্রত্যানয়ক বল বিদ্যমান তাহা ছাড়া দোলনের বেগের সমানুপাতিক বাধা থাকিলে দোলনের গতি (বিশেষত উহার বিস্তার এবং পর্য্যায়কাল) কিরূপ পরিবর্তিত হইবে তাহা লইয়া আমরা আলোচনা করিতেছি।

O কে মূলবিন্দু এবং OX অক্ষের উপর কণাটির দোলন ধরিলে যখন কণাটি হইতে x দূরত্বের থাকিবে তখন কণাটির বেগ হইবে $\dfrac{dx}{dt}$ এবং ত্বরণ $\dfrac{d^2x}{dt^2}$; কণাটির ভর m হইলে ঐ অবমন্দিত দোলনের সমীকরণ হইবে $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x - mk\dfrac{dx}{dt} \rightarrow$ (A)

এখানে প্রত্যেনয়ক বল mn^2x এবং কণাটি গতিপথে বাধার পরিমাণ প্রতি একক ভরের জন্য $-K\dfrac{dx}{dt}$ ধরা হইয়াছে, (n^2 এবং K ধ্রুবক রাশিদ্বয়)

এই প্রকার দোলনের অবকলসমীকরণ (A)-তে $x = e^{pt}$ বসাইলে আমরা $e^{pt}\ [p^2 + n^2 + Kp] = 0$ পাই ; যেহেতু $e^{pt} \neq 0$, এজন্য $p^2 + n^2 + kp = 0$; এবং $p = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - n^2}$ হইবে।

দেখা যাইতেছে যে কণাটির সরণ x, k এবং $\frac{K^2}{4} - n^2$ এর মানের উপর নির্ভরশীল।

(i) যখন বাধাটি (K) দুর্বল $\left(\frac{K^2}{4} < n^2\right)$ তখন $\frac{K^2}{4} - n^2$ (< 0) ঋণাত্মক রাশি হইবে এবং $x = e^{-\frac{kt}{2}}$ $(a \cos wt + b \sin wt)$, যেখানে $w^2 = n^2 - \frac{K^2}{4}$ হইবে ; $(a, b$ ধ্রুবক রাশিদ্বয়)

অথবা আমরা $x = ce^{-\frac{Kt}{2}} \cos (wt + \in)$ (c ধ্রুবক রাশি) এইরূপে লিখিতে পারি। দোলনের এই সবাধ বিস্তার $ce^{-\frac{Kt}{2}}$ এবং পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - \frac{K^2}{4}}}$; দেখা যাইতেছে যে সময়ের সঙ্গে সঙ্গে এইরূপ অবমন্দিত দোলনের বিস্তার $ce^{-\frac{Kt}{2}}$ কমিতে থাকিবে এবং $t \to \infty$ হইলে ঐ বিস্তার শূন্যের দিকে যাইবে।

যেহেতু $n^2 - \frac{K^2}{4} < n^2$ এজন্য $\frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - \frac{K^2}{4}}} > \frac{2\pi}{n}$;

এক্ষেত্রে অবমন্দিত দোলনের পর্য্যায়কাল বাধাহীন দোলনের পর্য্যায়কাল হইতে বৃহত্তর হইবে।

(ii) যখন $n^2 = \frac{K^2}{4}$ হয়, তখন বস্তুটির সরণ $x = (P + Qt)\ e^{-\frac{Kt}{2}}$ হইবে। (P এবং Q ধ্রবক রাশিদ্বয়)

এস্থলে দেখা যাইতেছে যে কোনও দোলন হইবে না এবং কণাটির গতিবেগ

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{K}{2}(P + Qt)e^{-\frac{Kt}{2}} + Qe^{-\frac{Kt}{2}}$$

এক্ষেত্রে সময়ের সঙ্গে সঙ্গে গতিবেগ ক্রমশ হ্রাস পাইতে থাকিবে এবং $t \to +\infty$ হইলে $\frac{dx}{dt} \to 0$ হইবে।

(iii) যখন বাধা প্রবল এবং $\frac{K^2}{4} > n^2$ এ $\frac{K^2}{4} - n^2 = w^2$ ধরিয়া আমরা পাই, $x = e^{-\frac{Kt}{2}}\left(Ce^{wt} + De^{-wt}\right)$ (C এবং D ধ্রুবক রাশিদ্বয়)

এস্থলেও কোনও দোলন নাই এবং ঐ বস্তুটির গতিবেগ

$\frac{dx}{dt} = \left(-\frac{K}{2}+w\right)Ce^{\left(-\frac{K}{2}+w\right)t} + \left(-\frac{K}{2}-w\right)De^{\left(-\frac{K}{2}-w\right)t}$ সময়ের সঙ্গে সঙ্গে হ্রাস পাইয়া $t \to \infty$ হইলে উহা শূন্য হইবে (লক্ষণীয় যে, $\frac{K}{2} > w$)।

10.6 প্রণোদিত দোলন এবং অনুনাদ

কোনও সরলরেখায় সরল সমঞ্জস গতিতে চলমান কোনও কণার উপর প্রত্যানয়ক বল ব্যতীত যদি অন্য কোনও বল ক্রিয়াশীল থাকে তাহা হইলে ঐ বলের প্রভাবে কণার মূল সমঞ্জসগতি ছাড়া অন্য যে প্রকার গতি হইবে তাহা আমরা এখন বিচার করিব। ঐ অতিরিক্ত বলকে X দ্বারা চিহ্নিত করিলে কণাটির গতির অবকল সমীকরণ হইবে (O স্থির বিন্দু এবং কণাটি x অক্ষরেখা চলিতেছে) $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x + X$ (m কণাটির ভর এবং $-mn^2x$ প্রত্যেনয়ক বল)

(i) যদি X সময়ের (t) উপর নির্ভরশীল না হয় তাহা হইলে আমরা উপরের অবকল সমীকরণটি হইতে আমরা পাই $\frac{d^2}{dt^2}\left(x - \frac{X}{mn^2}\right) = -n^2\left(x - \frac{X}{mn^2}\right)$

এখন এই অবকল সমীকরণটি সমাধান করিয়া আমরা পাই

$$x - \frac{X}{mn^2} = a\cos(nt + \in)$$

দেখা যাইতেছে যে কণাটি $x = \frac{X}{mn^2}$ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া $\frac{2\pi}{n}$ পর্যায়কাল বিশিষ্ট সমঞ্জস গতিতে চলিতে থাকিবে।

(ii) যদি মূল দোলনের প্রত্যানয়ক বল ব্যতীত বহিঃস্থ বল $= F\cos pt$ (F, p ধ্রুবক) কণাটির উপর ক্রিয়াশীল হয়।

তাহা হইলে কণাটির গতীয় অবকল সমীকরণ হইবে $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x + F\cos pt$ অথবা $\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \frac{F}{m}\cos pt$ অর্থাৎ, $(D^2+n^2)x = \frac{F}{m}\cos pt\left(D = \frac{d}{dt}\right)$

এই অবকল সমীকরণটি সমাধান করিলে আমরা পাই $x = a\cos(nt + \in) + \frac{F}{m\left(D^2+n^2\right)}\cos pt$

যদি $p \neq n$ হয় তাহা হইলে $x = a\cos(nt + \in) + \frac{F\cos pt}{m\left(n^2-p^2\right)}$ হয়।

দেখা যাইতেছে যে কণাটির উপর $\frac{2\pi}{n}$ পর্য্যায়কাল বিশিষ্ট মূল দোলন ব্যতীত $\frac{2\pi}{p}$ পর্য্যায়কাল বিশিষ্ট অপর একটি দোলন বিদ্যমান ; এই অতিরিক্ত দোলনকে প্রণোদিত দোলন বলা হইয়া থাকে। যদি $p = n$ হয় অর্থাৎ মূল দোলন এবং প্রণোদিত দোলনের পর্য্যায় কালের মান একই হয় তাহা হইলে সরণ $x = a \cos (nt + \in) + \frac{Ft \sin nt}{2nm}$ হইবে ; দেখা যাইতেছে যে এক্ষেত্রে $(p = n)$ প্রণোদিত দোলনের বিস্তার হইবে $\frac{Ft}{2nm}$ এবং উহা সময়ের সঙ্গে সঙ্গে বৃদ্ধি পাইয়া, $t \to +\infty$ হইলে $x \to \infty$ হইবে।

এইরূপ পরিস্থিতিকে অনুনাদ (Resonance) বলা হইয়া থাকে। আমরা সর্বত্র চেষ্টা করিব যাহাতে অনুনাদ ব্যতীত দোলন হয়। যেমন কোনও সেতুর উপর সৈন্যদের কুচকাওয়াজ করিয়া যাইতে নিষেধ করা হয় কারণ সেতুটির কম্পনের মানের সহিত সৈন্যদের কুচকাওয়াজের কম্পনের মান সমান হইলে সেতুটি ভাঙিয়া যাইতে পারে।

10.7 অবমন্দিত প্রণোদিত দোলন

m ভর বিশিষ্ট OX (O মূল বিন্দু ধরিয়া) সরলরেখার উপর চলমান কোনও কণার O মূলবিন্দু অভিমুখে $= mn^2x$ প্রত্যানয়ক বল বিদ্যমান থাকিলে এবং উপরন্তু $mk\frac{dx}{dt}$ পরিমাণ বাধা এবং $F \cos pt$ অতিরিক্ত বল প্রণোদিত হইলে কণাটির যে গতি হইবে তাহা লইয়া আমরা এখন আলোচনা করিব।

নিউটনের গতি সূত্র অনুযায়ী কণাটি গতির অবকল সমীকরণ দাঁড়ায়

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x - mK\frac{dx}{dt} + F \cos pt$$

অর্থাৎ $(D^2 + KD + n^2)\, x = \frac{F}{m} \cos pt$ [যেখানে $D \equiv \frac{d}{dt}$]

এখন $x = e^{st}$ বসাইলে $(D^2 + KD + n^2)\, x = 0$ সমীকরণের সমাধান

$= Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$ হইবে যেখানে s_1 ও s_2

$s^2 + Ks + n^2 = 0$ দ্বিঘাত বীজগণীয় সমীকরণটির বীজদ্বয় এবং A ও B ধ্রুবক রাশি দ্বয়; এস্থলে

$s_1,\ s_2 = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} - n^2}$ হইবে।

আবার, $\frac{F \cos pt}{m(D^2 + KD + n^2)}$ নির্ণয় করিতে হইবে।

D (cos pt) = $-p$ sin pt এবং D^2 (cos pt) = $-p^2$ cos pt ধরিয়া আমরা দেখি

$$\frac{F}{m}\frac{\cos pt}{\left(D^2+KD+n^2\right)}=\frac{F}{m}\frac{\left(D^2-KD+n^2\right)\cos pt}{\left(D^2-KD+n^2\right)\left(D^2+KD+n^2\right)}$$

$$=\frac{F\left[\left(-p^2+n^2\right)\cos pt+Kp\sin pt\right]}{m\left[\left(D^2+n^2\right)^2-K^2D^2\right]}$$

$$=\frac{F\left[\left(n^2-p^2\right)\cos pt+Kp\sin pt\right]}{m\left[\left(n^2-p^2\right)^2+K^2p^2\right]}$$

অতএব কণাটির সরণ হইবে

$$x=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}+\frac{F}{m}\frac{\left[(n^2-p^2)\cos pt+kp\sin pt\right]}{\left[\left(n^2-p^2\right)^2+k^2p^2\right]}$$

(s_1, s_2 = $-\dfrac{K}{2}\pm\sqrt{\dfrac{K^2}{4}-n^2}$ এবং A ও B ধ্রুবক রাশিদ্বয়।)

যদি অবমন্দন মূল দোলনের কম্পাঙ্ক অপেক্ষা এরূপ কম হয় যাহাতে $\dfrac{K^2}{4}<n^2$ অর্থাৎ বাধা দুর্বল এবং $\dfrac{K^2}{4}-n^2$ একটি ঋণাত্মক রাশি হয় তখন কণাটির সরণ $A^1e^{-\frac{Kt}{2}}\cos\sqrt{n^2-\dfrac{K^2}{4}}\,t+B^1e^{-\frac{Kt}{2}}\sin\sqrt{n^2-\dfrac{K^2}{4}}\,t+\dfrac{F}{m}\dfrac{\left[\left(n^2-p^2\right)\cos pt+Kp\sin pt\right]}{\left(n^2-p^2\right)^2+K^2p^2}$ হইবে (A^1 এবং B^1 ধ্রুবক রাশিদ্বয়)।

দেখা যাইতেছে যে এক্ষেত্রে কণাটির দোলন দুইটি দোলনের লব্ধি ; প্রথমটি একটি অবমন্দিত দোলন যাহার বিস্তার $e^{-K\frac{t}{2}}$ উপর নির্ভরশীল এবং পর্য্যায়কাল $\dfrac{2\pi}{\sqrt{n^2-\dfrac{K^2}{4}}}$ এবং অপর দোলনটি $\dfrac{2\pi}{p}$ পর্যায়কাল বিশিষ্ট প্রণোদিত দোলন।

সময়ের সঙ্গে সঙ্গে প্রথম অবমন্দিত দোলনটির বিস্তার হ্রাস পাইতে থাকিবে এবং $t\to\infty$ হইলে ঐ বিস্তারের মান শূন্য হইবে, তখন শুধু কণাটির প্রণোদিত দোলন থাকিবে।

যদি $p = n$ হয় তখন প্রণোদিত দোলন $\frac{F}{m}\frac{\sin pt}{Kp}$ হইবে ; এস্থলে বাধার পরিমাণ K যদি খুব অল্প হয়, তাহা হইলে $\frac{F}{m}\frac{\sin pt}{Kp}$ অতি বৃহৎ হইবে এবং ঐ দোলন অনুনাদে পর্যবসিত হইবে।

আবার যদি বাধা K মূল দোলনের কম্পাঙ্ক অপেক্ষা এরূপ বেশী হয় যে, $K^2 > 4n^2$। তখন মূল দোলনের জন্য কণাটির সরণ $x = e^{-\frac{Kt}{2}}\left[Le^{\left(\sqrt{\frac{K^2}{4}-n^2}\right)t} + Me^{-\left(\sqrt{\frac{K^2}{4}-n^2}\right)t}\right]$ (L, M ধ্রুবক রাশিদ্বয়) হইবে।

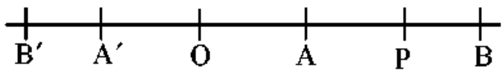
এস্থলে সময়ের সঙ্গে সঙ্গে মনে দোলনের বিস্তার কমিতে থাকিবে এবং নিয়ত দশায় $t \to \infty$ হইলে ঐ বিস্তারের মান শূন্য হইবে এবং তখন কণাটির কেবলমাত্র প্রণোদিত দোলনই থাকিবে।

স্থিতিস্থাপক (Elastic) তারের ক্ষেত্রে সরল সুসমঞ্জস গতি

যদি কোন স্থিতিস্থাপক তারকে তাহার স্বাভাবিক দৈর্ঘ্যের চেয়ে বৃদ্ধি করা হয় তবে হুকের সূত্র অনুযায়ী ঐ তারের টান (Tension) স্বাভাবিক দৈর্ঘ্যের প্রতি একক পিছু সম্প্রসারণের পরিমাণের সঙ্গে সরলভেদে থাকে। ফলে যদি তারের স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য l_0 একক, সম্প্রসারণের পরে তারের দৈর্ঘ্য x একক ও চাপ বা টান (Tension) T একক হয়, ক্ষেত্রে $T = \lambda.\frac{x-l}{l}$ হইবে।

ভেদ-ধ্রুবক λ কে স্থিতিস্থাপকতার মডিউলাস বলা হয়।

(ক) মনে করি তারটি অনুভূমিক তলে আবদ্ধ।



চিত্র 10.2

মনে করি স্থিতিস্থাপক তারের দৈর্ঘ্য l $(= OA)$ এবং O বিন্দুতে একটি প্রান্ত বাঁধা আছে। অন্যপ্রান্তে m ভরের একটি বস্তুকণা আছে। বস্তুকণাটি সরলরেখা বরাবর ডানদিকে সরানো হইল ও $AP = x$. ফলে $T = \lambda\frac{x}{l}$

গতি সমীকরণ $m\ddot{x} = -T = \frac{-\lambda x}{l}$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda}{ml}\cdot x$$

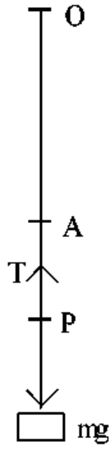
ইহা $\ddot{x} = -\mu x$ আকারের এবং ইহার গতি সরল সুসমঞ্জস গতি।

মনে করি O বিন্দু থেকে তারটি আর অনুভূমিক তলে নেই—এটি উল্লম্বভাবে অর্থাৎ খাড়াখাড়ি ভাবে ঝোলানো আছে। এক্ষেত্রে গতি সমীকরণের আকার হইল

$$m\ddot{x} = mg - T$$
$$= mg - \lambda.\frac{x}{l}$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = g - \frac{\lambda}{ml}.x$$
$$= -\frac{\lambda}{ml}\left(x - \frac{mgl}{\lambda}\right)$$

$$x - \frac{mgl}{\lambda} = X \Rightarrow \ddot{X} = -\frac{\lambda}{ml}X$$

পূর্বের মত এটিও সরল সু-সমঞ্জস গতি সম্পন্ন।



চিত্র 10.3

10.8 অনুশীলনী

উদাহরণ 1. বাধাহীন সরল সমঞ্জস গতিতে চলমান একটি কণা যখন মূল মধ্যবিন্দু হইতে x_1 দূরত্বে থাকে তখন উহার গতিবেগ v_1 এবং ঐ মূল বিন্দু হইতে x_2 দূরত্বে থাকে তখন উহার গতিবেগ v_2 হইলে প্রমাণ করুন যে কণাটির দোলনের পর্য্যায়কাল $2\pi\left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ হইবে।

সমাধান ঃ ধরা হল কণাটির দোলনের বিস্তার a এবং পর্য্যায়কাল $\frac{2\pi}{p}$; তাহা হইলে কণাটি মূল মধ্যবিন্দু হইতে x দূরত্বে থাকিলে সরণ $x = a \cos pt$ এবং কণাটির গতিবেগ $v = \frac{dx}{dt} = -pa \sin pt$ রূপে প্রকাশ করা যায়।

এস্থলে $v^2 = p^2a^2 \sin^2 pt = p^2\left(a^2 - a^2 \cos^2 pt\right)$

অর্থাৎ $v^2 = p^2\left(a^2 - x^2\right)$

কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে $v_1^2 = p^2\left(a^2 - x_1^2\right)$

এবং $v_2^2 = p^2\left(a^2 - x_2^2\right)$;

অতএব $v_2^2 - v_1^2 = p^2\left(x_1^2 - x_2^2\right)$

অর্থাৎ $p = \left(\dfrac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$;

এজন্য ঐ দোলনের পর্যায়কাল $= \dfrac{2\pi}{p}$

$$= 2\pi\left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

উদাহরণ 2. দেখান যে কোনও সরলরেখায় সরল সমঞ্জস গতিতে চলমান একটি কণার মূল মধ্যবিন্দু হইতে x দূরত্বে পৌঁছাইতে $\dfrac{T}{2\pi}\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ সময় লাগিবে। (a এবং T যথাক্রমে ঐ সমঞ্জস গতির বিস্তার এবং পর্য্যায়কাল ধরা হইয়াছে)

সমাধান ঃ $\dfrac{2\pi}{T} = n$ ধরিলে মূল বিন্দু হইতে কণাটির দূরত্ব $x = a \cos(nt + \in)$ ($\in$ ধ্রুবক) হইবে।

অতএব $\dfrac{dx}{dt} = -na \sin(nt + \in)$

$$= +n\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2\pi}{T}\sqrt{a^2 - x^2}$$

(মূলবিন্দু হইতে $x > 0$ পৌঁছাইতে t এর বৃদ্ধির সঙ্গে x বৃদ্ধি পাইতেছে এজন্য $\dfrac{dx}{dt}$ ধনাত্মক হইবে।)

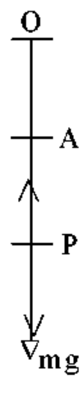
নির্ণেয় সময় $t = \displaystyle\int_{x=0}^{x} \frac{dt}{dx} \cdot dx$

$$= \frac{T}{2\pi}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{T}{2\pi}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

উদাহরণ 3. দেখান যে একটি কণার অবমন্দিত সমঞ্জস দোলন হইলে যে সকল ভিন্ন ভিন্ন দোলন হইবে তাহাদের বিস্তারের পরিমাণ সমূহ একটি গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকিবে।

সমাধান ঃ আমরা দেখিয়াছি যে এস্থলে কণাটির গতির সমীকরণ হইবে

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + K\dfrac{dx}{dt} + n^2x = 0$ (অবমন্দন $K\dfrac{dx}{dt}$ এবং K, n^2 ধ্রুবক রাশি ধরা হইয়াছে)



চিত্র 10.4

আমরা দেখিয়াছি যে, ঐ অবকল সমীকরণটি সমাধান করিয়া আমরা পাইব

$$x = ae^{-\frac{Kt}{2}} \cos(wt + \in)$$

(যেখানে a, $\in$ ধ্রুবক রাশিদ্বয় এবং $w^2 = n^2 - \frac{K^2}{4}$)

এখানে বিস্তারটি $ae^{-\frac{Kt}{2}}$ এজন্য বিভিন্ন পর্য্যায়কালে $t = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - \frac{K^2}{4}}}, \frac{4\pi}{\sqrt{n^2 - \frac{K^2}{4}}}$

$\frac{6\pi}{\sqrt{n^2 - \frac{K^2}{4}}}$ .... ধরিলে বিস্তারগুলি

$ae^{-\frac{Kt}{2}}$ একটি গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকিবে।

[$t = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - \frac{K^2}{4}}}, \frac{4\pi}{\sqrt{n^2 - \frac{K^2}{4}}}, \frac{6\pi}{\sqrt{n^2 - \frac{K^2}{4}}}$, ...

এস্থলে $n^2 - \frac{t^2}{4}$ ধনাত্মক রাশি ধরা হইয়াছে।]

10.9 সারাংশ

আমরা পূর্বেই বলিয়াছি যে এই সকল দোলন বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় দেখা যায় এবং উহাদের আলোচনা করিয়া আমরা কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে বিভিন্ন দোলনের এবং অনুনাদ সমস্যার প্রকৃতি বিচার করিতে চেষ্টা করিয়াছি।

10.10 প্রশ্নাবলী

1. কোনও সরলরেখায় সমঞ্জস গতিতে চলমান একটি কণার মূলবিন্দু হইতে দূরত্ব পর পর তিন সেকেন্ডে যথাক্রমে x_1, x_2 এবং x_3 হইলে দেখান যে কণাটির দোলনের পর্য্যায়কাল $2\pi \div \cos^{-1}\left(\frac{x_1 + x_3}{2x_2}\right)$ হইবে।

2. সরল সমঞ্জস গতিতে চলমান একটি কণার গতিবেগ কোনও সময়ে v হইলে এবং ঐ সমঞ্জস গতির বিস্তার a এবং পর্যায়কাল T ধরিলে দেখান যে $\int_0^T v^2 dt = \frac{2\pi^2 a^2}{T}$.

3. কোনও সরলরেখার উপর সরল সমঞ্জস গতিতে চলমান একটি কণার মূলবিন্দু হইতে x_1, x_2 এবং x_3 পরিমাণ দূরত্বের উহার গতিবেগ যথাক্রমে v_1, v_2 এবং v_3 হইলে দেখান যে, $x_1^2\left(v_2^2 - v_3^2\right) + x_2^2\left(v_3^2 - v_1^2\right) + x_3^2\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 0$ হইবে।

4. l পরিমাণ দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট উল্লম্ব সমতলে ঝুলন্ত একটি দোলকের গতীয় সমীকরণ $\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2K\frac{d\theta}{dt} + \frac{g\theta}{l} = 0$ ধরিলে বাধা দুর্বল হইলে দেখান যে, ঐ দোলকটির পর্যায়কাল ধ্রুবক হইবে। (মূল দিশা হইতে t সময়ে দোলকটি θ পরিমাণ সরিয়া আসিতেছে। θ ক্ষুদ্র এবং দোলকটি $K\frac{d\theta}{dt}$ বাধা পাইতেছে এবং K ও g ধ্রুবক ধরা হইয়াছে।)

5. একটি বস্তুকণা দুইটি বলকেন্দ্রর আকর্ষণে সাম্যাবস্থায় আছে। উভয়কেন্দ্রের ক্ষেত্রেই বল দূরত্বের সঙ্গে সরলভেদে আছে। একক ভর পিছু একক দূরত্বের ক্ষেত্রে আকর্ষণের পরিমাণ হইল μ ও μ'। বস্তুকণাটি যে কোন ভরকেন্দ্রর দিকে সামান্য পরিমাণ সরানো হইল। দেখান যে বস্তুকণাটির গতি সরল সুসমঞ্জস ও দোলনের পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\sqrt{(\mu + \mu')}}$

6. একটি হাল্কা স্থিতিস্থাপক তারকে একটি প্রান্ত দিয়ে ঝুলিয়ে দেওয়া হইল ও অন্যপ্রান্তে m ভরবিশিষ্ট বস্তুকণা দেওয়া হইল। যদি তারের স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য l ও তারের স্থিতিস্থাপকতার মডিউলাস n আউন্স হয়, তবে উল্লম্ব দোলনের পর্যায়কাল নির্ণয় করুন।

7. সরলরৈখিক পথে গতিশীল একটি বস্তুকণার গতিবেগ নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে x দূরত্বে $\mu\sqrt{\frac{a - x}{x}}$ দেওয়া আছে। দেখান যে বস্তুকণাটি ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে আকর্ষিত এবং বলটি দূরত্বের বর্গের সঙ্গে ব্যাস্তানুপাতে আছে।

একক 11 □ সমতলে বিভিন্ন নির্দেশতন্ত্রে চলমান কণার গতিবেগ ও ত্বরণ (Velocity and acceleration of a particle in different coordinates in a plane)

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

11.2 উদ্দেশ্য

11.3 কার্তেজীয় নির্দেশতন্ত্র

11.4 মেরু নির্দেশতন্ত্র

11.5 স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় নির্দেশতন্ত্র

11.6 বৃত্তপথে সুষম গতি

11.7 অনুশীলনী

11.8 সারাংশ

11.9 প্রশ্নাবলী

11.1 প্রস্তাবনা

পূর্বে ঋজুরেখা গতিতে x অক্ষের উপর চলমান কোনো বস্তুর গতিবেগ ও ত্বরণ যথাক্রমে $\frac{dx}{dt}$ এবং $\frac{d^2x}{dt^2}$ রূপে আমরা প্রকাশ করিয়াছি।

এই অধ্যায়ে কোনো সমতলে চলমান কোনো বস্তুর বিভিন্ন নির্দেশতন্ত্রে গতিবেগ ও ত্বরণ কীরূপে প্রকাশ করা যায় তা দেখিব।

11.2 উদ্দেশ্য

এই একক অধ্যয়নের পর সমতলে বিভিন্ন নির্দেশতন্ত্রে প্রকাশিত গতিবেগ ও ত্বরণের সাহায্যে আমরা ওই সমতলে কোনো বস্তুর গতিপথ আলোচনা করতে সক্ষম হইব। পরের অধ্যায়গুলিতে (12 এবং 13 নং এককে) আমরা বিভিন্ন প্রকার গতিসংক্রান্ত সমস্যা সমাধানে সুবিধামত নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করিব।

11.3 কার্তেজীয় নির্দেশতন্ত্র (Cartesian co-ordinates)

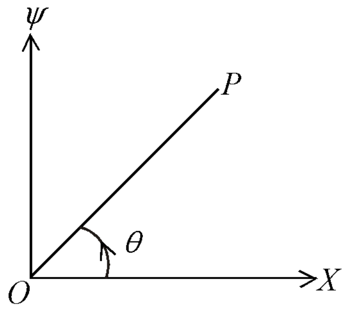
এই নির্দেশতন্ত্রে কোনো সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O লইয়া পরস্পর সমকোণে অবস্থিত OX এবং OY দুটি সরলরেখা স্থির করা হয় এবং ওই সমতলকে XOY সমতল বলা হয়ে থাকে। ওই সমতলে t সময়ে চলমান কোনো বিন্দু P-এর স্থানাংক x এবং y ধরলে অভিমুখে (x, y) বিন্দুতে কণাটির গতিবেগের উপাংশ (cemponent of velocity in OX direction) হবে $\frac{dx}{dt}$; আবার OY অভিমুখে ওই গতিবেগের উপাংশ (component of velocity in OY direction) হবে $\frac{dy}{dt}$; অনুরূপভাবে t সময় $P(x, y)$ বিন্দুতে অবস্থিত কোনো কণার OX অভিমুখে ত্বরণের উপাংশ (component of acceleration in OX direction) $\frac{d^2x}{dt^2}$ এবং OY অভিমুখে ত্বরণের উপাংশ (component of acceleration in OY direction) $\frac{d^2y}{dt^2}$ হইবে।

(মনে রাখতে হবে যে, x এবং y উভয়েই t সময়ের অপেক্ষক)।

11.4 মেরু নির্দেশ তন্ত্র (Polar coordinates)

সমতলে O-কে মূলবিন্দু ধরে O বিন্দুগামী পরস্পর সমকোণে অবস্থিত OX, OY সরলরেখাদ্বয়কে X এবং Y অক্ষ ধরে t সময়ে ওই সমতলে কোনো বিন্দু P-এর কার্তেসীয় স্থানাংক (x, y) ধরা হয়। আবার স্থানাংক জ্যামিতি অনুসারে O-কে মূলবিন্দু, OX-কে আদিদশা এবং $\angle XOP$-কে θ ধরে একই বিন্দু P-এর স্থানাংক মেরু নির্দেশতন্ত্রে হবে (r, θ) যেখানে θ-এর মান o থেকে 2π পর্যন্ত হইবে এবং θ-কে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (anticlockwise) পরিমাপ করিতে হইবে। r এবং θ উভয়েই t (সময়) এর অপেক্ষতি ধরা

হইবে।



চিত্র 11.1

OP-কে r এবং $\angle XOP$-কে θ ধরিলে দেখা যাইবে যে, $x = r \cos \theta$ এবং $y = r \sin \theta$

এখন t (সময়) সাপেক্ষে উভয়দিকে অবকলন করিয়া আমরা পাই,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \text{ .... (i)}$$

এবং $$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \text{ .... (ii)}$$

অতএব $\overrightarrow{OP}$ অভিমুখে গতিবেগের উপাংশ হইবে, $\frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta = \frac{dr}{dt}$ এবং ইহাকে অরীয় বেগ (radial velocity) বলা হয়।

আবার, $\overrightarrow{OP}$-এর লম্ব অভিমুখে θ থেকে $\theta + \frac{\pi}{2}$ দিকে (অর্থাৎ OX থেকে OY এর দিকে) কণাটির গতিবেগের উপাংশ হইবে।

$$\frac{dx}{dt}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{dy}{dt}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{dx}{dt}\sin\theta + \frac{dy}{dt}\cos\theta$$

$$= -\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\sin\theta + \left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\cos\theta$$

$$= r\frac{d\theta}{dt}$$

গতিবেগের ঐ দিশায় উপাংশকে অনুপ্রস্থ বেগ (cross radial or transverse velocity) বলা হইয়া থাকে এবং $\frac{d\theta}{dt}$-কে কণার কৌণিক বেগ (angular velocity) বলা হয়।

আবার, (i) এবং (ii) সমীকরণ দুইদিকে t সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

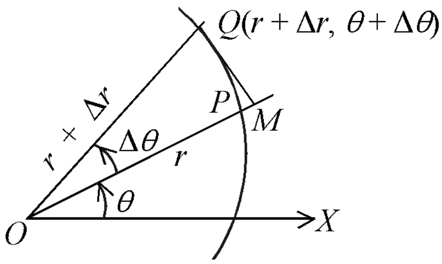
এবং $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

সহজেই দেখা যায় যে, অরীয় ত্বরণ অর্থাৎ ত্বরণের অরীয় উপাংশ (radial acceleration) হবে $\dfrac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \dfrac{d^2y}{dt^2}\sin\theta = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$; আবার, অনুপ্রস্থ ত্বরণ (tansverse or cross redial acceleration) হইবে।

$$-\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta$$

$$= 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r.\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

দ্রষ্টব্য ঃ $r^2\dfrac{d\theta}{dt} = r.r.\dfrac{d\theta}{dt}$; আমরা দেখিয়াছি যে, $r\dfrac{d\theta}{dt}$ বস্তুর অনুপ্রস্থ বেগ এবং ওই বেগ অক্ষের লম্ব অভিমুখে থাকে।



চিত্র 11.2

$r^2\dfrac{d\theta}{dt}$-কে একক ভরযুক্ত বস্তুর কৌণিক ভরবেগ (angular momentum) বলা হইয়া থাকে।

কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের বেগ ও ত্বরণের উপাংশ ছাড়াই শুধুমাত্র মেরু স্থানাঙ্কের সাহায্যেও বেগ-ত্বরণ নির্ণয় করা যায় ঃ

O বিন্দুকে মেরু ও OX-কে আদি রেখা ধরিয়া মনে করি t সময়ে বস্তুকণার অবস্থান $P(r, \theta)$ বিন্দুতে ও $t + \Delta t$ সময়ে বস্তুকণার অবস্থান $Q(r + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$-তে। QM, OP-এর বর্ধিতাংশের ওপর লম্ব।

মনে করি, u ও v যথাক্রমে OP এবং OP-র উপর লম্বরেখা বরাবর বস্তুকণাটির বেগের উপাংশ।

$$u = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t \text{ সময়ে } OP \text{ বরাবর বস্তুকণার সরণ}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{PM}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{OM - OP}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(r+\Delta r)\cos\Delta\theta - r}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\Delta r}{\Delta t} . \cos\Delta\theta - \frac{r(1-\cos\Delta\theta)}{\Delta t} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\Delta r}{\Delta t} . \cos\Delta\theta - r . \frac{\sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}}{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2} . \frac{\Delta\theta}{\Delta t} . \frac{\Delta\theta}{2} \right\}$$

$$= \frac{dr}{dt} .1 - r.1. \frac{d\theta}{dt} .0 \quad [\ \Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\theta \to 0 \text{ সুতরাং } \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \to 1, \cos\Delta\theta \to 1]$$

$$= \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t \text{ সময়ে } OP\text{-এর উপর লম্বরেখা বরাবর বস্তুকণার সরণ}}{\Delta t}$$

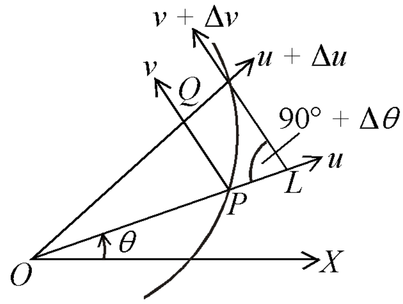
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MQ}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(r+\Delta r)\sin\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ (r+\Delta r) . \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} . \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right\} = r.1. \frac{d\theta}{dt} = r . \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}$$

t সময়ে OP রেখা বরাবর ও OP-এর উপর লম্ব রেখা বরাবর বস্তুকণাটির বেগের উপাংশ যথাক্রমে u ও v এবং $t + \Delta t$ সময়ে OQ রেখা বরাবর ও OQ-এর উপর লম্বরেখা বরাবর উহার বেগের উপাংশ যথাক্রমে $u + \Delta u$ ও $v + \Delta v$ ধরা হইল। অতএব OP বরাবর ত্বরণের উপাংশ

$$= f_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t \text{ সময়ে } OP \text{ বরাবর বস্তুকণার সরণ}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(u+\Delta u)\cos\Delta\theta - (v+\Delta v)\cos(90^\circ - \Delta\theta) - u}{\Delta t}$$



চিত্র 11.3

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{-u.2\sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} + \frac{\Delta u}{\Delta t}\cos\Delta\theta - \frac{v\sin\Delta\theta}{\Delta t} - \frac{\Delta v \sin\Delta\theta}{\Delta t} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ -u.\left(\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \right)^2 . \frac{\Delta\theta}{\Delta t} . \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\Delta u}{\Delta t}\cos\Delta\theta - v.\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}.\frac{\Delta\theta}{\Delta t} - \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}.\Delta\theta \right\}$$

$$= -u.1.\frac{d\theta}{dt}.0 + \frac{du}{dt}.1 - v.1.\frac{d\theta}{dt} - \frac{dv}{dt}.1.0$$

$$= \frac{du}{dt} - v.\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

OP-এর উপর লম্বরেখা বরাবর ত্বরণের উপাংশের $= f_\theta$

$$f_\theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t \text{ সময়ে } OP\text{-এর উপর লম্বরেখা বরাবর বেগের পরিবর্তন}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(u + \Delta u)\sin\Delta\theta + (v + \Delta v)\sin(90° - \Delta\theta) - v}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ (u + \Delta u).\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}.\frac{\Delta\theta}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t}\cos\Delta\theta - v.\frac{2\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}}{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2}.\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.\frac{\Delta\theta}{4} \right\}$$

$$= u.1.\frac{d\theta}{dt} + \frac{dv}{dt}.1 - v.1.\frac{d\theta}{dt}.0$$

$$= u.\frac{d\theta}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

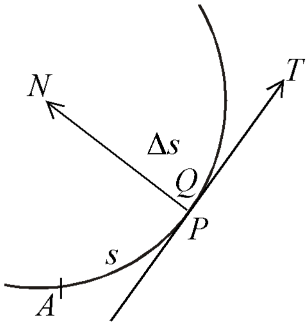
$$= \frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt}\left(r.\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= 2.\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

11.5 স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় নির্দেশতন্ত্রে কোনও কণার বেগ ও ত্বরণ (Tangential and normal accelerations of a pardicle)

কোনো বক্ররেখার (চিত্র 1নং) উপর A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ধরা হইল।

P এবং Q বক্ররেখার উপর অপর দুইটি বিন্দু এবং Q বিন্দুটি P বিন্দুর অতিনিকটে অবস্থিত। A বিন্দু থেকে P বিন্দুর এক চাপের দূরত্ব s এবং Q বিন্দুর বক্রচাপ দূরত্ব $s + \Delta s$ ধরা হইল। (A নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে P এবং Q বিন্দুর দূরত্ব বক্ররেখার উপর চাপের দূরত্বকে বক্রচাপ বলা হইয়াছে)।



চিত্র 11.4

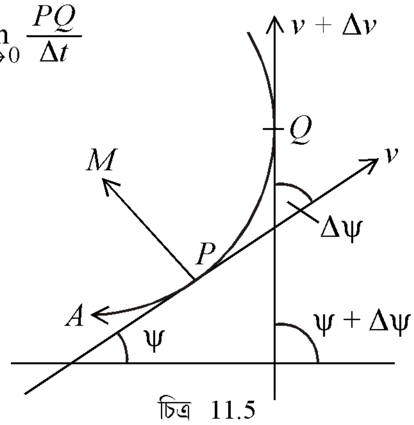
যদি t সময়ে কোনও বস্তুকণার অবস্থান P হয় তাহলে

$$\text{P বিন্দুতে উহার গতিবেগ} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{জ্যা}\, PQ}{\text{চাপ}\, PQ} \cdot \frac{\text{চাপ}\, PQ}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{জ্যা}\, PQ}{\text{চাপ}\, PQ} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$= 1 . \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} = v$$



চিত্র 11.5

লক্ষণীয় $\Delta t \to 0$ হইলে বক্ররেখা বরাবর $Q \to P$ হইবে এবং জ্যা PQ, P বিন্দুতে স্পর্শক অভিমুখে ধাবমান হইবে। v এর দিশা হইল P বিন্দুতে স্পর্শক অভিমুখে। ইহার কোনো উপাংশ P বিন্দুতে অভিলম্ব অভিমুখে থাকিবে না।

ত্বরণ ঃ ওই বক্ররেখার ওপর চলমান বস্তুকণার P অবস্থানে t সময়ে কোনো কণার গতিবেগ PT স্পর্শক দিশায় v এবং Q বিন্দুতে ওই বক্ররেখার স্পর্শক দিশায় $v + dv$ ধরা হইল।

এখন P বিন্দুতে বক্ররেখাটির উপর স্পর্শক এবং OX অক্ষের সন্নিহিত কোণ ψ ধরিলে Q বিন্দুতে ওই বক্ররেখাটির উপর স্পর্শক এবং OX অক্ষের সন্নিহিত কোণ $\psi + d\psi$ হইবে। এখন P বিন্দুতে স্পর্শকের দিশায় ওই কণাটির ত্বরণ $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(v + \Delta v)\cos \Delta \psi - v}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\Delta v}{\Delta t} . \cos \Delta\psi - v.2. \left(\frac{\sin \frac{\Delta\psi}{2}}{\frac{\Delta\psi}{2}} \right)^2 . \left(\frac{\Delta\psi}{\Delta t} \right)^2 . \frac{\Delta t}{4} \right\}$$

$$= \frac{dv}{dt}.1 - v.2.1.\frac{d\psi}{dt}.0 = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ বা, } \frac{dv}{ds}.\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

অভিলম্বের দিশায় বস্তুকণার ত্বরণ

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t \text{ সময়ে অভিলম্ব অভিমুখে বেগের পরিবর্তন}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(v + \Delta v) \sin \Delta\psi - 0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ (v + \Delta v). \frac{\sin \Delta\psi}{\Delta\psi} . \frac{\Delta\psi}{\Delta s} . \frac{\Delta s}{\Delta t} \right\}$$

$$= v.1\frac{d\psi}{ds}.v = \frac{v^2}{\rho}$$

যেখানে ρ বলতে P বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ বোঝায়।

এইরূপে আমার দেখি যে বক্ররেখার উপর চলমান কোনো কণিকার P বিন্দুতে গতিবেগ কেবলমাত্র P বিন্দুতে বক্ররেখার স্পর্শক দিশায় $\frac{ds}{dt}$ হইবে এবং P বিন্দুতে স্পর্শক দিশায় কণাটির ত্বরণের উপাংশ $\frac{dv}{at}$ বা, $\frac{d^2s}{dt^2}$ হইবে এবং অভিলম্ব দিশায় ওই ত্বরণের উপাংশ $v^2\frac{d\psi}{ds}$ বা, $\frac{v^2}{\rho}$ হইবে।

11.6 বৃত্তপথে সুষমগতি (Uniform motion on a circle)

ধরা যাক্ কোনো কণা a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তের পরিধির উপর v সমবেগে চলিতেছে। ওই বৃত্তের পরিধির উপর A বিন্দু থেকে বৃত্তচাপ s মাপা শুরু করিলে দেখা যায় যে, ওই পরিধির উপর P বিন্দুতে $\angle AOP$ হইলে চাপ $AP = s = a\theta$ হয়। এখানে P বিন্দুতে স্পর্শক অভিমুখে গতিবেগ $v = \frac{ds}{dt} = a.\frac{d\theta}{dt}$ হয়।

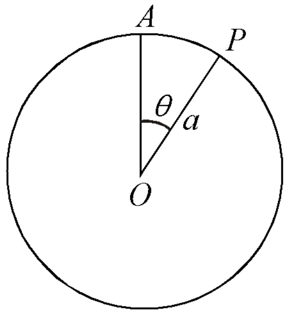
অর্থাৎ $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{a} =$ ধ্রুবক হইবে।

এস্থলে দেখা যাইতেছে যে, ওই বৃত্তটির পরিধির উপর যে কোনো বিন্দুতে কণাটির কৌণিক গতিবেগ ধ্রুবক

এবং উহা $\frac{\text{কণাটির বেগ}}{\text{বৃত্তটির ব্যাসার্ধ}}$-এর সমপরিমাণ হইবে।

কণাটির গতিবেগ $\frac{ds}{dt} = v$ ধ্রুবক ধরা হইয়াছে, এজন্য স্পর্শক অভিমুখে কণাটির ত্বরণ $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ হইবে।

আবার, অভিলম্ব দিশায় (এস্থলে বৃত্তটির কেন্দ্রের দিকে) কণাটির ত্বরণ $\frac{v^2}{a} = a\left(\frac{d\theta}{at}\right)^2$ হইবে।



চিত্র 11.6

(মনে রাখতে হইবে যে a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ ওই বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমপরিমাণ হয়।)

11.7 অনুশীলনী

উদাহরণ 1. দেখান যে, $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt}$

সমাধান ঃ যেহেতু $x = r \cos \theta$ এবং $y = r \sin \theta$

এজন্য $\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$

এবং $\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$;

অতএব $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r\cos\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\right)$

$$-r\sin\theta\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\right) = r^2\frac{d\theta}{dt}$$ হইবে।

উদাহরণ 2. সমতলে চলমান একটি কণার অরীয় অক্ষের দিকে বেগের উপাংশ $\mu\theta$ এবং অনুপ্রস্থ দিশায় বেগের উপাংশ λr হইলে (λ এবং μ ধ্রুবক রাশিদ্বয়) কণাটির গতিপথ (Locus) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এস্থলে কণাটির ত্বরীয় বেগ, $\frac{dr}{d\theta} = \mu\theta$ এবং অনুপ্রস্থ দিশার বেগ $r\frac{d\theta}{dt} = \lambda r$;

$$\frac{dr}{dt}\Big/ r\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{\mu\theta}{\lambda r}.$$

অতএব $dr = \frac{\mu}{\lambda}\theta\, d\theta$;

উপরের সমাকল সমীকরণটি সমাধান করিয়া আমরা পাই, $r = \frac{\mu}{2\lambda}\theta^2 +$ ধ্রুবক রাশি। উহাই ওই কণাটির গতিপথের সমীকরণ।

উদাহরণ 3. সমতলে কোনো বক্ররেখার উপর চলমান একটি কণার স্পর্শক এবং অভিলম্ব দিশায় ত্বরণের উপাংশ সমান হইলে কণাটির গতিবেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ স্পর্শক দিশায় কণাটির ত্বরণ $\frac{d^2s}{dt^2} = u\frac{dv}{ds}$ এবং অভিলম্ব দিশার কণাটির ত্বরণ $\frac{v^2}{\rho}$ ।

উভয়েই সমান হইলে $v\frac{dv}{ds} = \frac{v^2}{\rho} = v^2\frac{d\psi}{ds}$ হয়।

ওই অবকল সমীকরণ হইতে আমরা পাই $\frac{1}{v}\frac{dv}{ds} = \frac{d\psi}{ds}$; ইহা সমাধান করিলে $\log v = \psi +$ ধ্রুবক হইবে।

অর্থাৎ $v = Ae^{\psi}$ (A ধ্রুবক রাশি) হইবে।

11.8 সারাংশ

এই অধ্যায়ে বিভিন্ন নির্দেশকাঠামোতে বেগ ও ত্বরণের উপাংশ সমূহ প্রয়োগ করে সমতলে চলমান কোনো কণার গতিপথ এবং গতিবেগ আলোচনা করা হইয়াছে।

11.9 প্রশ্নাবলী

1. OX এবং OY দিকে কোনো কণার গতিবেগের উপাংশদ্বয় যথাক্রমে $u + w_1y$ এবং $v + w_2x$ হলে এবং u, v, w_1 এবং w_2 ধ্রুবক ধরিলে দেখান যে কণাটির গতিপথ একটি কণিক হয়।

উত্তর ঃ গতিপথ $2(vx - uy) + (w_2x^2 - w_1y^2) =$ ধ্রুবক রাশি।

2. সমতলে চলমান কোনো বিন্দুর t সময়ে অবস্থানের স্থানাংক $x = a \cos nt$ এবং $y = a \sin nt$ হইলে কণাটির গতিবেগ ও ত্বরণ নির্ণয় করুন। দেখান যে, কণাটির গতিপথ বৃত্তাকার হইবে।

(উত্তর ঃ গতিপথ $x^2 + y^2$ = ধ্রুবকরাশি)।

3. সমতলে চলমান একটি কণার অক্ষের দিকে বেগের উপাংশ λr এবং অনুপ্রস্থ অভিমুখে বেগের উপাংশ $\mu\theta$ (λ, μ ধ্রুবক রাশিদ্বয়) হইলে দেখান যে কণাটির অরীয় ত্বরণ $\lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r}$ এবং অনুপ্রস্থ দিশায় ত্বরণ $\mu\theta\left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right)$ হইবে।

4. দেখান যে, কোনো বক্ররেখার উপর সুষম বেগে চলমান একটি কণাটির ত্বরণ $\rho\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$ হইবে। (ρ বক্ররেখার বক্রচাপ ব্যাসার্ধ)

5. একটি বস্তুকণা $y = a \log \sec\left(\frac{x}{a}\right)$ বক্ররেখা পরিক্রমা করে এমনভাবে যে বক্ররেখার স্পর্শকের ঘূর্ণন একই হারে হয়। দেখান যে ওই বস্তুকণার লব্ধি-ত্বরণ বক্রতা-ব্যাসার্ধের বর্গের সঙ্গে সরলভেদে আছে।

6. যদি একটি বস্তুকণা সমতলে বক্ররেখা বরাবর এরূপে পরিক্রমা করে যে প্রতিটি ক্ষেত্রে তার স্পর্শক দিশায় ত্বরণ ও অভিলম্ব দিশায় ত্বরণ ধ্রুবক হয়, তবে দেখান যে ওই বক্ররেখার যেকোনো বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ $(At + B)^2$ আকারের হইবে, যেখানে A ও B ধ্রুবক।

একক 12 □ সমতলীয় গতি (Motion in a plane)

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

12.2 উদ্দেশ্য

12.3 সমতলীয় গতির প্রকৃতি কার্তেজীয় এবং মেরু নির্দেশতন্ত্রে সমতলে কণিকার গতীয় সমীকরণ প্রয়োগে গতিবিজ্ঞানে বিভিন্ন সমস্যায় সমাধান

12.4 অনুশীলনী

12.5 সারাংশ

12.6 প্রশ্নমালা

12.1 প্রস্তাবনা

আমরা পূর্ব পাঠক্রমে কার্তেজীয় এবং মেরুস্থানাংকে কোনও কণিকার বেগ ও ত্বরণ কিরূপ হইবে তাহা দেখাইয়াছি ; এই এককে নিউটনের গতীয় সূত্র নং ২ অনুযায়ী আমরা কার্তেজীয় ও মেরুস্থানাংকে কোনও কণিকার গতীয় সমীকরণ লিখিয়া গতিবিদ্যার বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করিবার চেষ্টা করিব।

12.2 উদ্দেশ্য

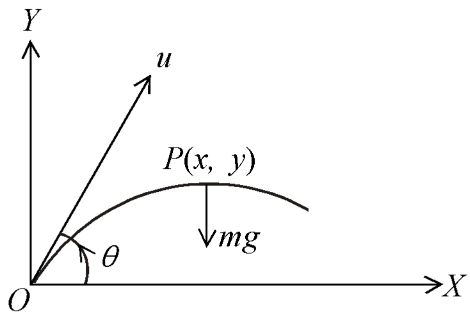
এই এককে আমরা কার্তেজীয় নির্দেশতন্ত্র প্রয়োগে মাধ্যাকর্ষণ হেতু প্রাসের (Projectable) গতিপথ নির্ণয় এবং তৎসংক্রান্ত সমস্যা লইয়া আলোচনা করিব এবং পরে মেরু নির্দেশতন্ত্র প্রয়োগে বক্রপথে বিভিন্ন শক্তি প্রয়োগে কোনও কণিকা গতি কিরূপ হইবে তাহা দেখিব।

10.3 সমতলীয় গতির ধর্ম

প্রথমে আমরা XOY সমতলে কার্তেজীয় নির্দেশতন্ত্র অনুযায়ী বলাধীন কণিকার গতি লইয়া আলোচনা করিব। ধরা যাক্ যে XOY সমতলে চলমান m ভরবিশিষ্ট কোনও কণিকার উপর OX অভিমুখে X পরিমাণ বল এবং OY অভিমুখে Y পরিমাণ বল প্রয়োগ করা হইয়াছে।

এস্থলে নিউটনের গতীয় দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে আমরা দুইটি অবকল সমীকরণ যথাক্রমে $m\frac{d^2x}{dt^2} = X$

এবং $\frac{d^2y}{dt^2} = Y$ পাই। মনে রাখিত হইবে OX অভিমুখে বল X এবং OY অভিমুখে বল Y সম্পূর্ণ স্বতন্ত্র রূপে কণাটির OX অভিমুখে গতি এবং OY অভিমুখে গতির উপর ক্রিয়াশীল। বাধা শূন্য মাধ্যমে প্রাসের গতিপথ (Path of a projectile in a vacuo) নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র 12.1

বস্তুকণার প্রক্ষেপ বিন্দু O কে মূলবিন্দু ধরা হইল। মূলবিন্দু হইতে ভূমির সহিত θ কোণে u বেগে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু ছোঁড়া হইল। ঐ মাধ্যাকর্ষণ হেতু ঐ প্রাসটির উপর অভিমুখে mg পরিমাণ বল ক্রিয়াশীল হইবে এবং অন্য কোনও বল ঐ প্রাসটির উপর বর্তমান থাকিবে না।

এস্থলে অনুভূমিক দিশায় OX অক্ষ এবং ঊর্ধ্বে উল্লম্ব দিশারা OY অক্ষ ধরিলে প্রসারিত গতীয় সমীকরণ হইবে

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

এবং $$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \quad [\because\ X = 0 \text{ এবং } Y = -mg]$$

উপরের দুইটি অবকল সমীকরণ t সাপেক্ষে সমাধান করিয়া আমরা পাই $\frac{dx}{dt}$ = ধ্রুবক রাশি

এবং $\frac{dy}{dt} = -gt$ + ধ্রুবকরাশি।

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে আদি দশায় ($t = 0$ সময়ে) অনুভূমিক দিকে বেগ $\frac{dx}{dt} = u\cos\theta$ এবং ঊর্ধ্বদিকে বেগ $\frac{dy}{dt} = u\cos\theta$ ছিল।

অতএব প্রথম সমীকরণে ধ্রুবক রাশির মান u cos θ ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ধ্রুবক রাশির মান u sin θ হওয়ায়

$$\frac{dx}{dt} = u\cos\theta$$

এবং $\frac{dy}{dt} = -gt + u\sin\theta$ হইবে।

পুনরায় উপরের অবকল সমীকরণদ্বয় t সাপেক্ষে সমাকল করিয়া আমরা পাই

$$x = ut\cos\theta + \text{ ধ্রুবক রাশি } \ldots\ldots\ldots \text{ (i)}$$

এবং $$y = -g\frac{t^2}{2} + ut\sin\theta + \text{ ধ্রুবক রাশি (iii)}$$

কিন্তু আদি দশায়, ($t = 0$ সময়ে)

প্রাসটি O মূলবিন্দু ($x = 0$, $y = 0$) তে ছিল এজন্য উপরের (i) এবং (ii) সমীকরণ দুইটির ধ্রুবক রাশিদ্বয় শূন্য হইবে এবং অবশেষে আমরা পাই

$$x = ut \cos \theta$$

এবং $$y = -g\frac{t^2}{2} + ut \sin\theta$$

এখন x এবং y দ্বারা প্রকাশিত রাশিমালা হইতে t অপনয়ন করিয়া আমরা পাই

$$y = x \tan\theta - \frac{gx^2 \sec^2\theta}{2u^2}$$

দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি অনুযায়ী ঐ প্রাসটির গতিপথ একটি অধিবৃত্ত (parelota).

x, y সম্বলিত ঐ গতিপথটি

$$\left(x - \frac{u^2}{g}\sin\theta\cos\theta\right)^2 = -\frac{2u^2}{g}\cos^2\theta\left(y - \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta\right)$$ রূপে প্রকাশ করা যায়।

দ্বিমাত্রিক জ্যামিতি হইতে আমরা জানি যে, এই অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু (Vertex) $\left(\frac{u^2}{g}\sin\theta\cos\theta, \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta\right)$ এবং ঐ অধিবৃত্তর নাভিলম্ব (lotus rectum) $\frac{2u^2}{g}\cos^2\theta$ পরিমাণ হইবে।

ঐ অধিবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ $x = \frac{u^2}{g}\sin\theta\cos\theta$ এবং ঐ অক্ষরেখাটি নিম্নাভিমুখী ভূপৃষ্ঠের দিকে থাকিবে। স্থানাংক জ্যামিতি অনুযায়ী ঐ অধিবৃত্তটির নাভিবিন্দুর (focus) স্থানাংক $\left(\frac{u^2}{g}\sin\theta\cos\theta, -\frac{u^2}{g}\cos^2\theta\right)$ এবং নিয়ামকের (directrix) সমীকরণ $y = \frac{u^2}{2g}$ হইবে।

প্রাসটির গতিবেগ t সময় পরে v ধরা হইলে

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = u^2\cos^2\theta + (u\sin\theta - gt)^2$$

$$= u^2 - 2ugt\sin\theta + g^2t^2 \quad \left[y = u\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right]$$

$v^2 = u^2 - 2gy$ হইবে ;

লক্ষণীয় যে কোন সময়ে প্রাসটির গতীয় শক্তি হইবে $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(u^2 - 2gy)$ (m প্রাসটির ভর ধরা হইয়াছে)।

আবার ঐ সময়ে প্রাসটির স্থৈতিক শক্তি = mgy ; উল্লেক্ষ যে প্রাসটির গতীয় শক্তি + স্থৈতিক শক্তি = $\frac{1}{2}mu^2$ যাহা প্রাসটির আদিদশায় গতীয় শক্তি ছিল (ঐ সময়ে প্রাসটির স্থৈতিক শক্তি শূন্য পরিমাণ ছিল)। দেখা যাইতেছে প্রাসটির গমন পথে শক্তিসংরক্ষণ নীতি অব্যাহত থাকিতেছে।

প্রাসটির গমন পথে সংক্রান্ত কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় আমরা এখন আলোচনা করিব। প্রাসটির গমনপথে $x = u\cos\theta t$ এবং $y = u\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$ ধরিলে আমরা দেখিতে পাই যে যুগল প্রাসটির সর্বোচ্চ উর্ধ্বসীমার পৌঁছাইবে তখন $\frac{dy}{dt} = u\sin\theta - gt = 0$ হয়। অর্থাৎ $t = \frac{u\sin\theta}{g}$, $y = \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta$ হইবে। লক্ষ্য করুন যে, প্রাসটির গতিপথের আধিবৃত্তটির শীর্ষ বিন্দুর উচ্চতা $\frac{u^2}{2g}\sin^2\theta$ এবং উহাই প্রাসটির গতির সর্বোচ্চ উচ্চতা এবং ঐ স্থলে পৌঁছাইতে প্রাসটির $\frac{u\sin\theta}{g}$ সময় লাগিবে। ঐ সময়ে O মূলবিন্দু হইতে অনুভূমিক দিশায় দূরত্ব $x = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g}$।

আবার যখন প্রাসটির পুনরায় ভূপৃষ্ঠে ফিরিয়া আসিবে তখন $y = 0$ অর্থাৎ $u\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ হইবে। তখন $t = \frac{2u\sin\theta}{g}$ এবং $x = u\cos\theta t = \frac{2u^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{u^2}{g}\sin 2\theta$ হয়। দেখা যাইতেছে যে, $\frac{2u\sin\theta}{g}$ সময়ে পরে প্রাসটি O বিন্দু হইতে $\frac{u^2}{g}\sin 2\theta$ অনুভূমিক দূরত্বে পুনরায় ভূপৃষ্ঠে ফিরিয়া আসে।

অতএব $\frac{2u\sin\theta}{g}$ প্রাসটির গতির সম্পূর্ণ সময় (Total time of flight) এবং $\frac{u^2\sin 2\theta}{g}$ কে প্রাসটির পাল্লা (Range) বলা হইয়া থাকে।

লক্ষণীয় যে $\sin 2\theta$ এর চরম মান = 1 হইবে যখন $\theta = \frac{\pi}{4}$; অতএব $\theta = \frac{\pi}{4}$ ধরিয়া প্রাসটির চরম পাল্লা হইবে এবং ঐ চরম পাল্লা $\frac{u^2}{g}$ পৌঁছাইতে প্রাসটির $\frac{2u \sin 45^\circ}{g} = \frac{\sqrt{2}u}{g}$ সময় লাগিবে।

12.4 অনুশীলনী

উদাহরণ 1. মাটিতে পড়ে একটি বোমার বিস্ফোরণ হইলে বোমার টুকরোগুলি V সম বেগে চতুর্দিকে ছড়িয়ে পড়ে। মাটির টুকরাগুলি যে অঞ্চলে পড়ে তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ পূর্বেই আমরা দেখিয়াছি যে, মাধ্যাকর্ষণ হেতু বোমার টুকরাগুলির চরম পাল্লা $\frac{V^2}{g}$; ইহাকে ব্যাসার্ধ ধরিয়া ভূতলে যে বৃত্ত হইবে তাহার ক্ষেত্রফল $\pi\left(\frac{V^2}{g}\right)^2 = \frac{\pi V^4}{g^2}$ হয়।

উদাহরণ 2. উল্লম্ব সমতলে (vertical plane) OX (x অক্ষ) অনুভূমিক রেখার দিকে এবং OY (y অক্ষ) কে উল্লম্ব ঊর্ধ্বদিকে ধরা হইল।

O মূলবিন্দু হইতে একটি কণা ঐ উল্লম্ব সমতলে u বেগে ছোড়া হইল। দেখান যে যদি $u^2 \geq g\left(K + \sqrt{h^2 + K^2}\right)$ হয় তাহলে ঐ কণাটি ঐ সমতলে (h, k) বিন্দু দিয়া গমন করিবে।

সমাধান ঃ যদি কণাটি অনুভূমিক রেখার (x অক্ষ) সহিত θ কোণে u বেগে ছোড়া হয় এবং t সময় পরে ঐ (h, k) বিন্দুতে পৌঁছায় তাহা হইলে

$$h = u \cos \theta t \;;$$

এবং $$k = u \sin \theta t - \frac{1}{2} gt^2$$ হইবে

ঐ দুইটি সমীকরণ হইতে t অপনয়ন করিয়া আমরা পাই $K = h \tan\theta - \frac{gh^2}{2u^2} \sec^2\theta$;

অর্থাৎ $$\frac{gh^2}{2u^2}\tan^2\theta - h\tan\theta + K + \frac{gh^2}{2u^2} = 0.$$

ইহা হইতে আমরা পাই

$$\tan^2\theta - \frac{2u^2}{gh}\tan\theta + \frac{2u^2 K}{gh^2} + 1 = 0$$

অথবা, $$\left(\tan\theta - \frac{u^2}{gh}\right)^2 + 1 + \frac{2u^2K}{gh^2} - \frac{u^4}{g^2h^2} = 0$$

অথবা, $$\left(\tan\theta - \frac{u^2}{gh}\right)^2 = \frac{u^4}{g^2h^2} - \frac{2u^2K}{gh^2} - 1$$

এখানে বামপক্ষ একটি অ-ঋণাত্মক রাশি এজন্য

দক্ষিণ পক্ষ $\dfrac{u^4}{g^2h^2} - \dfrac{2u^2K}{gh^2} - 1 \geq 0$;

অর্থাৎ $\left(\dfrac{u^2}{gh} - \dfrac{K}{h}\right)^2 \geq 1 + \dfrac{K^2}{h^2}$

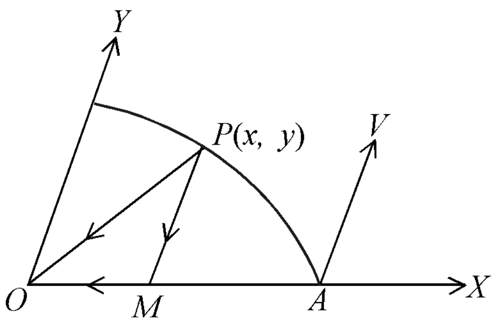
অর্থাৎ $\dfrac{u^2}{gh} - \dfrac{K}{h} \geq \sqrt{1 + \dfrac{K^2}{h^2}}$ [বর্গমূল ধনাত্মক ধরিয়া]

বা, $$\frac{u^2}{gh} \geq \frac{K}{h} + \sqrt{\frac{1+K^2}{h^2}}$$

বা, $u^2 \geq g\left(K + \sqrt{K^2 + h^2}\right)$ হইবে।

উদাহরণ 3. সমতলে চলমান কোনও নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে আকৃষ্ট কণার ত্বরণ যদি কণাটির ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুর দূরত্বের সরলভেদে থাকে, তাহা ঐ কণাটির গতিপথে কিরূপ হইবে নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রশ্নের নির্দিষ্ট বিন্দুকে মূলবিন্দু O ধরা হইল ; ধরা যাক্ যে সমতলে A বিন্দু হইতে কণাটিকে V বেগে প্রক্ষেপ করা হইল ; এবং OA সরলরেখাকে OX (x অক্ষ) ধরা হইল এবং আদি দশায় A বিন্দু হইতে যে দিকে কণাটি ছোড়া হইয়াছিল O বিন্দুগামী ঐ দিকের সমান্তরাল রেখাকে OY (y অক্ষ) ধরা হইল। t সময় পরে যদি কণাটি P (x, y) বিন্দুতে থাকে তাহা হইলে তখন কণাটির ঐ সময়ে ত্বরণ হইবে $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MO}$ [$\overrightarrow{PM}$ ভেক্টরকে YO র সমান্তরাল বা আদি দশার বিপরীতমুখী ধরা হইয়াছে]



চিত্র 12.2

নিউটনের গতীয় সূত্রানুযায়ী কণাটির গতীয় সমীকরণদ্বয় হইবে

$m\ddot{x} = -m\mu x$ (এখন m কণাটির ভর ধনাত্মক এবং

$m\ddot{y} = -m\mu y$ μ একটি ধনাত্মক ধ্রুবক রাশি)

অর্থাৎ $\ddot{x} + \mu x = 0$

এবং $\ddot{y} + \mu y = 0$ হইবে।

উপরের দুইটি অবকল সমীকরণ সমাধান করিয়া আমরা পাই

$$x = A\cos\sqrt{\mu}t + B\sin\sqrt{\mu}t$$

$$y = C\cos\sqrt{\mu}t + D\sin\sqrt{\mu}t$$

(A, B, C, D ধ্রুবক রাশি)

আদি দশায় কণাটি A বিন্দুতে ছিল এবং উহাকে V আদিবেগে OY অভিমুখে ছোড়া হইয়াছিল।

এজন্য আদি দশায় $t = 0$ সময়ে

$$x = OA \text{ ও } \frac{dx}{dt} = 0$$

এবং $y = 0$ ও $\frac{dy}{dt} = V$ ধরা হইয়াছে।

এখন $OA = a$ (ধ্রুবক) ধরিলে শর্তানুযায়ী আদি দশায় $t = 0$ সময়

$$x = a = A + B \times O$$

এবং $\frac{dx}{dt} = 0 = -\sqrt{\mu}A\sin O + \sqrt{\mu}B\cos O = \sqrt{\mu}B$

অর্থাৎ $A = a$ এবং $B = 0$ হইবে ;

আবার, যখন $t = 0$, $y = 0 = C \cos O + D \sin O$

এবং $\frac{dy}{dt} = V = -C\sin O + D\sqrt{\mu}\cos O$

অর্থাৎ $C = O$ এবং $D = \frac{V}{\sqrt{\mu}}$ হইবে।

এইরূপে, $x = a\cos\sqrt{\mu}t$

এবং $y = \frac{V}{\sqrt{\mu}}\sin\sqrt{\mu}t$ হইবে।

এখানে t অপনয়ন করিয়া আমরা পাই, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{V^2} = 1$, যাহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ ; যাহা কণাটির গতিপথ।

উদাহরণ 4. অনুভূমিক তলে একটি সরলমসৃণ টিউবের একটিপ্রান্তবিন্দু O এর সাপেক্ষে w সুষম কৌণিক বেগে আবর্তিত হইতেছে। আদি দশায় একটি কণা O বিন্দু হইতে a দূরত্বে V বেগে O বিন্দু অভিমুখে নিক্ষিপ্ত হইল। দেখাও যে $aw < V$ হইলে ঐ কণাটি $\frac{1}{w}\tanh^{-1}\left(\frac{aw}{V}\right)$ সময় পরে O বিন্দুতে পৌঁছাইবে।

সমাধান ঃ O কে মূলবিন্দু এবং OX (অক্ষরেখা) টিউব বরাবর ধরিলে কণাটির অরীয় ত্বরণ $\frac{d^2r}{dt^2} - w^2r = 0$ হয় (w একটি ধ্রুবক রাশি)।

উপরের অবকল সমীকরণটি সমাধান করিয়া আমরা পাই

$$r = A \cos h\ wt + B \sin h\ wt \text{ .... (i)}$$

A এবং B দুইটি ধ্রুবক রাশি যাহাদের নির্ণয় করিতে হইবে।

আদি দশায় $t = 0$ সময়ে $r = a$ এবং $\frac{dr}{dt} = -V$

অতএব $t = 0$ (i) এ বসাইলে আমরা পাইব $a = A$; অবার $\frac{dr}{dt} = wA\sin hwt + wB\cos hwt$

এখানে পুনরায় $t = 0$ বসাইয়া আমরা পাই $-V = wB$ অথবা $B = -\frac{V}{w}$;

সর্বশেষে আমরা দেখি যে, $r = a\cos hwt - \frac{V}{w}\sin hwt$; কণাটি O বিন্দুতে পৌঁছাইতে T সময় লাগিলে $O = a\ \cos\ hw\ T - V\ \sin\ hwT$ হইবে এবং $\tan\ hwT = \frac{wa}{V}$

অর্থাৎ $T = \frac{1}{w}\tan^{-1}\left(\frac{aw}{V}\right)$ হয়।

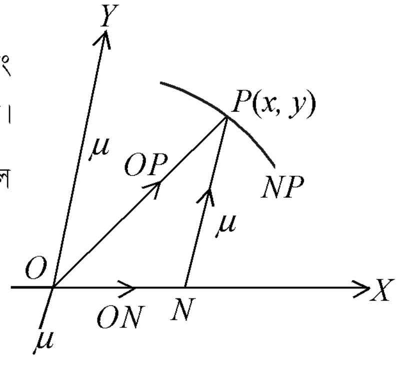
উদাহরণ 5. গতিশীল একটি বস্তুকণা বিকর্ষক বল $\vec{F}$-এর অধীনে আছে। বল $\vec{F}$ ঐ তলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O থেকে বস্তুকণার অবস্থানের দূরত্বের সঙ্গে সরলভেদে আছে। বস্তুকণাটি ঐ তলে A বিন্দু থেকে V গতিবেগ সহ প্রক্ষিপ্ত হইলে, বস্তুকণার গতিপথ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ নিদিষ্ট বিন্দু O কে মূলবিন্দু, OA বরাবর x-অক্ষ এবং O গামী, V-এর দিশার সমান্তরাল সরলরেখাকে y-অক্ষ লওয়া হইল।

ত্বরণের ত্রিভূজ নীতি বিবেচনা করিয়া গতির সমীকরণ হইল $\ddot{x} = \mu x$ (1), $\ddot{y} = \mu y$ (1)

(1) হইতে পাই, $x = A'\cos h\sqrt{\mu}t + B'\sin h\sqrt{\mu}t$

$$y = C'\cos h\sqrt{\mu}t + D'\sin h\sqrt{\mu}t$$



চিত্র 12.3

$$\dot{x} = A'\sqrt{\mu}\sin h\sqrt{\mu}t + B'\sqrt{\mu}\cos h\sqrt{\mu}t$$

$$\dot{y} = C'\sqrt{\mu}\sin h\sqrt{\mu}t + D'\sqrt{\mu}\cos h\sqrt{\mu}t$$

$t = 0$ তে $x = a,\ y = 0,\ x' = 0,\ y' = V$

অতএব $\quad A' = a,\ B' = 0,\ C' = 0,\ D' = \dfrac{V}{\sqrt{\mu}}$

$$x = a\cos h\sqrt{\mu}t,\ y = \frac{V}{\sqrt{\mu}}\sin h\sqrt{\mu}\, t$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\frac{v^2}{\sqrt{\mu}}} = 1$$

ইহা উক্ত অক্ষদ্বয় সাপেক্ষে পরাবৃত্ত সূচিত করে।

12.5 সারাংশ

এই অনুশীলনীতে কার্তেজীয় এবং মেরু নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করিয়া কোনও সমতলে বলাধীন কণিকাদের গতি লইয়া আলোচনা করা হইল।

12.6 প্রশ্নমালা

1. সমুদ্রে ভাসমান একটি জাহাজ হইতে ঐ জাহাজের আনুভূমিক b দূরত্বে এবং h উচ্চে অবস্থিত একটি দূর্গ অভিমুখে $\sqrt{2gu}$ আদি বেগে একটি কামান হইতে গোলা ছোড়া হইল। দেখান যে $b^2 \leq 4u(u-h)$ হইলে গোলাটি ঐ দূর্গে পৌঁছাইবে।

2. কোনও সমতলে বলাধীন একটি কণার গতিপথ একটি উপবৃত্ত এবং কণাটির ত্বরণ ঐ উপবৃত্তের পরাক্ষের দিকে থাকিলে দেখান যে কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল ঐ পরাক্ষের সহিত কণাটির দূরত্বের ত্রিঘাতের সমপরিমাণ হইবে।

3. একটি বস্তুকণা $y = \dfrac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$ বক্ররেখাটি y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে সমান্তরাল বলের অধীনে পরিক্রমা করে। বলের সূত্র নির্ণয় করুন।

4. একটি বস্তুকণার গতিপথ একটি অধিবৃত্ত, যে কোন বিন্দুতে বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল বল অধিবৃত্তর অক্ষের উপর লম্বরেখা অনুযায়ী ধাবিত বলের সূত্রটি নির্ধারণ করুন।

5. একটি সাইকেলের চাকার তারের উপর কোনও কীট v সমবেগে চলিলে ঐ কীটটির অরীয় ও অনুপ্রস্থ দিশায় ত্বরণ নির্ণয় করুন।

উত্তর ঃ বৃত্তাকার চাকার কেন্দ্রকে কেন্দ্রবিন্দু এবং এই চাকার ব্যাসার্ধ $\frac{x}{a}$ ধরিলে কীটটির অরীয় ত্বরণ $-r\frac{v^2}{a^2}$ এবং অনুপ্রস্থ দিশায় ত্বরণ $\frac{2uv}{a}$ হইবে।

6. সুষম কৌণিক বেগ সমন্বিত চলমান একটি কণার গতিপথ $r = ae^{\theta}$ হইলে দেখান যে কণাটির অরীয় ত্বরণের মান শূন্য হইবে এবং অনুপ্রস্থ দিশায় ত্বরণ ঐ কণাটির মূলবিন্দু হইতে দূরত্বের সমানুপাতিক হইবে।

একক 13 □ কেন্দ্রীয় বলাধীন গতি (Motion under central force)

গঠন

13.1 প্রস্তাবনা

13.2 উদ্দেশ্য

13.3 কেন্দ্রীয় বল

13.4 মেরু স্থানাংকে কেন্দ্রীয় বলাধীন কণার গতিপথ নির্ণয়ের জন্য অবকল সমীকরণ

13.5 কেন্দ্রীয় বলাধীন কণিকার গতিপথের পাদ (p, r) সম্বলিত অবকল সমীকরণ

13.6 বিপরীত বর্গ নিয়মাধীন কেন্দ্রীয় বলের জন্য গ্রহসমূহের গতিপথ নির্ণয়

13.7 পলায়নী বেগ (Excape velocity)

13.8 গ্রহসমূহের গতিসংক্রান্ত বিষয়ে কেপলারের নিয়মাবলী

13.9 অনুশীলনী

13.10 সারাংশ

13.11 প্রশ্নমালা

13.1 প্রস্তাবনা

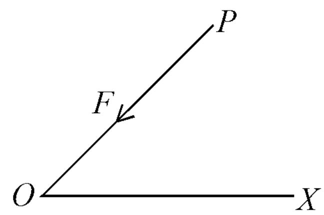
এই এককে কোনো কণিকা কেবলমাত্র কোনো নির্দিষ্ট দিকে বহিঃস্থ বল দ্বারা প্রভাবিত হইলে উহার গতিপথ কীরূপ হইবে এবং কণাটির বেগ কীরূপ হইবে আমরা তাহা আলোচনা করিব।

13.2 উদ্দেশ্য

বিভিন্ন স্থানাংক ব্যবহার করিয়া আমরা কেন্দ্রীয় বলাধীন কণিকার গতি নির্ণয় করিয়া দেখিব যে যখন কেন্দ্রাভিমুখী বলটি কণিকা থেকে কেন্দ্রবিন্দুর দূরত্বের বিপরীত বর্গে থাকে তখন ওই কণিকার গতিপথ সৌরজগতের গ্রহ সমূহের গতিপথের অনুরূপ হইবে।

13.3 কেন্দ্রীয় বল

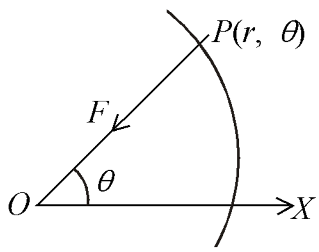
মনে করা যাক্ যে সমতলে চলমান একটি কণা P বিন্দুতে অবস্থানকালে O কেন্দ্র অভিমুখে একটি বল F কণাটির উপর ক্রিয়াশীল আছে। যদি ক্রিয়াশীল বলটি কেবলমাত্র $\overrightarrow{PO}$ দিশার উপর নির্ভরশল হয় তা হলে কণাটির P গতিপথকে কেন্দ্রীয় গতিপথ বলা হইয়া থাকে। প্রমাণ করা যেতে পারে যে, ওই কেন্দ্রীয় গতিপথ O এবং P বিন্দু সম্বলিত একটি সমতলে থাকিবে।



চিত্র 13.1

13.4 মেরু স্থানাংকে কেন্দ্রীয় বলাধীন কণার গতিপথ নির্ণয়ের জন্য অবকল সমীকরণ

O-কে মূলবিন্দু এবং OX রেখাকে আদি রেখা ধরা হইল। যদি কোনো সময়ে একক ভরবিশিষ্ট কণাটি $P(r, \theta)$ বিন্দুতে থাকে এবং কণাটির উপর $\overrightarrow{PO}$ অভিমুখে $\vec{F}$ বলটি ক্রিয়াশীল হয় তাহা হইলে মেরু স্থানাংকে কণাটির গতীয় সমীকরণ হইবে $\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -F$ .... (i)



চিত্র 13.2

অনুপ্রস্থ দিশায় কণাটির উপর কোনো বল ক্রিয়াশীল নাই, এজন্য $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$ .... (ii) হইবে।

উপরের (ii)-নং অবকল সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \text{ (ধ্রুবক রাশি) } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (iii)}$$

এখন $u = \frac{1}{r}$ ধরিলে আমরা পাই, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = hu^2$ .... (iv)

আবার, $\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}hu^2 = -h\frac{du}{d\theta}$ .... (v)

এবং $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)$

$$= -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2h}{d\theta^2}(hu^2) = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

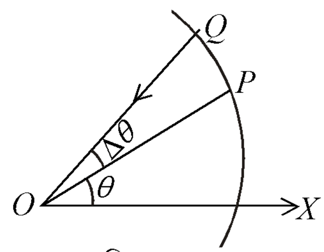
এই পক্ষে (i) নং অবকল সমীকরণ হইতে আমরা পাই,

$$h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{1}{u}h^2u^4 = F$$

অর্থাৎ $F = h^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$

অথবা, $\frac{F}{h^2u^2} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$

ধরা যাক্ যে t সময়ে চলমান কণাটি $P(r,\ \theta)$ বিন্দুতে থাকে এবং অতিক্ষুদ্র Δt সময় পরে অর্থাৎ $t + \Delta t$ সময়ে কণাটি $Q(r + \Delta r,\ \theta + \Delta\theta)$ বিন্দুতে গমন করে ; এস্থলে Δr এবং $\Delta\theta$ উভয়ই অতি ক্ষুদ্র এখন PQ বিন্দুদ্বয় যোগ করিয়া আমরা পাই OPQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta$ এবং OP রেখা, PQ চাপ এবং OQ রেখা দ্বারা বেষ্টিত OPQ অঞ্চল $\simeq \Delta OPQ$; (মনে রাখিতে হইবে যে, $\lim\limits_{Q\to P}\frac{PQ \text{ রেখাংশ}}{PQ \text{ বক্রচাপ}} = 1$)



চিত্র 13.3

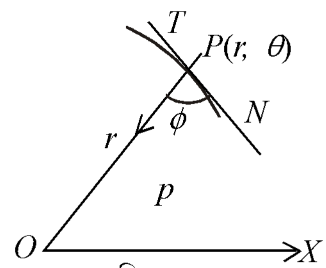
এখন O বিন্দু সাপেক্ষে Δt সময়ে ΔOPQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের পরিবর্তন হার $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\frac{r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$ (যেহেতু $\sin\Delta\theta \simeq \Delta\theta$ এবং $\Delta r\ \Delta\theta$ অতি ক্ষুদ্র রাশি) এবং ইহাকে P বিন্দুতে কণাটির ক্ষেত্রীয় গতিবেগ বলা হয় (areal velocity)।

(iii) নং হইতে দেখা যায় যে, ঐ ক্ষেত্রীয় গতিবেগ $= \frac{1}{2}h$ (ধ্রুবক রাশি)।

P বিন্দুতে কণাটির গতিবেগ V ধরলে $V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$;

আমরা দেখিয়াছি যে, $\frac{dr}{dt} = -h\frac{du}{d\theta}$ [(v) হইতে] এবং $\frac{d\theta}{dt} = hu^2$ [(iv) হইতে] এজন্য

$$V^2 = h^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{u^2}h^2u^4$$



চিত্র 13.4

$$= h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$$ রূপে লেখা যাইতে পারে।

বক্ররেখার পাদ সমীকরণ ঃ

কোনো বক্ররেখার উপর $P(r,\ \theta)$ বিন্দুতে যদি PT স্পর্শক টানা হয় এবং যদি O বিন্দু থেকে ওই স্পর্শকের ওপর ON লম্ব টানা হয় এবং $\angle OPN = \phi$ হয় তাহা হইলে অবকল গণিত অনুযায়ী ON লম্বের পরিমাণকে p বলা হয় এবং ΔOPN থেকে সহজেই দেখা যায় যে, $ON = OP \sin\phi$ অর্থাৎ $p = r\sin\phi$; আবার অবকলগণিত অনুযায়ী $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = r\Big/\frac{dr}{d\theta}$ এজন্য $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}\operatorname{cosec}^2\phi$ $= \frac{1}{r^2}(1+\cot^2\phi)$ অথবা, $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2\tan^2\phi} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$ এখন $u = \frac{1}{r}$ ধরিয়া $\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$ এবং $\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$ হইবে।

যখন $p = r = \frac{1}{u}$ হয় তখন $\frac{du}{d\theta} = 0$ হইবে। এই অবস্থায় $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = 0$ যখন কেন্দ্রীয় বলাধীন গতিপথে অর (r)-এর চরম মানে কণাটি পৌঁছায় তখন ওই বিন্দুটিকে অপদূরক বিন্দু এবং মূলবিন্দু এবং অপদূরকে বিন্দুর সংযোজক রেখাকে অপদূরক রেখা বলা হয়।

13.5 কেন্দ্রীয় বলাধীন কণিকার গতিপথের পাদ (p, r) সম্বলিত অবকল সমীকরণ।

আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি যে, $\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$; u সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই $-\frac{2}{p^3}\frac{dp}{du} =$ $2u + 2.\frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}\left(\frac{du}{d\theta}\right)$ অর্থাৎ $-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{du} = u + \frac{du}{d\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{du}$

বা, $-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{du} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$

বা, $-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr}\cdot\frac{dr}{du} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$

বা, $-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right) = u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$

বা, $+\frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr}\times\frac{1}{u^2} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$

অর্থাৎ $\frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr} = u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$

কিন্তু আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি যে, F কেন্দ্রীয় বল হইলে কণাটির গতিপথের অবকল সমীকরণ হইবে $\frac{F}{h^2u^2} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$ অর্থাৎ $F = h^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$ হয় ; এজন্য কণাটির গতিপথ $(p,\ r)$ স্থানাংকে $F = \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}$ হইবে, লক্ষণীয় যে, $v^2 = h^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$ (v গতিবেগ) এবং $\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$; এজন্য $vp = h$ হয়। পরে অনুশীলনীতে আমরা দেখিব যে $(p,\ r)$ স্থানাংকে কীরূপে কেন্দ্রীয় বলাধীন কণার বেগ গতিপথ ইত্যাদি সহজেই নির্ণয় করা যাইতে পারে।

13.6 বিপরীত বর্গ নিয়মাধীন কেন্দ্রীয় বলের জন্য গ্রহসমূহের গতিপথ নির্ণয়

বিপরীত বর্গ নিয়মাধীন কেন্দ্রীয় বলের জন্য কোনো কণিকার গতিপথের অবকলন সমীকরণ হইবে।

$$\frac{dp}{dr}\cdot\frac{h^2}{p^3} = \frac{\mu}{r^2}$$

ওই অবকল সমীকরণটি সমাধান করিয়া আমরা পাই, $\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + c$ .... (i)

(c একটি ধ্রুবক)।

এখন কলনবিদ্যা অনুযায়ী $(p,\ r)$ স্থানাংকে সমতলে অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{a}{p^2} = \frac{2}{r}$ ...... (ii)

$2a$ অধিবৃত্তের অধনাভিলম্ব।

উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$ .... (iii)

এবং পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} + 1$, এস্থলে কণিকাটির গতিপথের নাভিবিন্দুকে মূলবিন্দু ধরা হয়েছে এবং $2a$ ও $2b$ যথাক্রমে পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্যের মান।

(i)-এর সঙ্গে (iii) ও (iv) তুলনা করিয়া আমরা পাই, $\frac{h^2}{b^2} = \frac{\mu}{a}$ অর্থাৎ $h^2 = \frac{\mu b^2}{a}$ অর্থাৎ $h^2 = \mu$ (অর্ধনাভিলম্ব) ; (অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে $h^2 = \mu a$) আবার, $h = pv$ অতএব $v^2 = \frac{h^2}{p^2}$ অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে

$v^2 = \frac{h^2}{p^2} = \frac{\mu a}{p^2}$

আবার, উপবৃত্তের ক্ষেত্রে $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$ এবং $v^2 = \frac{h^2}{p^2}$ কিন্তু $h^2 = \frac{\mu b^2}{a}$; এজন্য এস্থলে $v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ হয় এবং অনুরূপভাবে পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} + 1$ এবং $v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$ হইবে।

উপবৃত্তীয় গতিপথের পর্যায়কাল ঃ

আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি কণিকার ক্ষেত্রজ গতিবেগ (areal velocity) $= \frac{1}{2}h$; এখন $2a$, $2b$ পরাক্ষ এবং উপাক্ষ বিশিষ্ট একটি উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল πab এবং কণাটিকে ঐ উপবৃত্তকে একবার পরিক্রমা করতে হলে $\frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu}\frac{b}{\sqrt{a}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{\frac{3}{2}}$ সময় লাগিবে।

ওই উপবৃত্তীয় গতিপথে চলমান গ্রহের উহাই পর্যায়কাল।

13.7 পলায়নী বেগ (Escape Velocity)

আমরা দেখিয়াছি যে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ a ধরিলে ভূকেন্দ্র অভিমুখে মাধ্যাকর্ষণ বল ; এখানে $r = a$ ধরিলে ভূপৃষ্ঠে ওই বলের পরিমাণ $\frac{\mu}{a^2} = g$ ধরা হয় অর্থাৎ $\mu = a^2 g$। কিন্তু $v^2 \geq \frac{2\mu}{r}$ হইলে ওই বস্তুটির কক্ষপথ অধিবৃত্ত অথবা পরাবৃত্ত হইবে।

এখন পৃথিবীর ভূপৃষ্ঠ বা সন্নিকট অঞ্চল হইতে যদি $\sqrt{\frac{2a^2 g}{a}} = 2ag$ বা তার অধিক বেগে কোনো বস্তু নিক্ষেপ করা হয় তা হলে তার গতিপথ একটি অধিবৃত্ত বা পরাবৃত্ত হইবে এবং উহা ভূপৃষ্ঠে পুনরায় ফিরিয়া আসিবে না। এজন্য $\sqrt{2ag}$-কে পলায়নী বেগ বলা হইয়া থাকে।

13.8 গ্রহসমূহের গতিসংক্রান্ত বিষয়ে কেপলারের নিয়মাবলী

দীর্ঘকালযাবৎ গ্রহসমূহের গতিপথ পর্যবেক্ষণ করিয়া কেপলার (Kepler) 1609 এবং 1619 খৃষ্টাব্দে

নিম্নলিখিত নিয়মগুলি উপস্থাপনা করেন।

(1) প্রথম নিয়ম ঃ প্রতিটি গ্রহ উপবৃত্তীয় কক্ষপথে সূর্য্যের চতুর্দিকে আবর্তন করে এবং সূর্য্যের অবস্থান ওই উপবৃত্তের একটি নাভিবিন্দুতে বিদ্যমান ধরিতে হইবে।

(2) দ্বিতীয় নিয়ম ঃ যে কোনো গ্রহ এবং সূর্য্যের সংযোজক রেখা সমান সময়ে উপবৃত্তে সমপরিমাণ ক্ষেত্র অতিক্রম করে।

(3) তৃতীয় নিয়ম ঃ যে কোনো গ্রহের উপবৃত্তীয় কক্ষে পর্য্যায়কক্ষের বর্গ ওই উপবৃত্তের অর্ধপরাক্ষের ঘনফলের সমানুপাতে থাকিবে।

পরবর্তীকালে 1687 খৃষ্টাব্দে নিউটন মহাকর্ষ বিধির প্রয়োগে ওই নিয়মগুলির যথার্থ্য প্রতিষ্ঠা করেন।

দ্রষ্টব্য ঃ (1) সূর্য্যের তুলনায় প্রতিটি গ্রহের ভর অতি ক্ষুদ্র, এজন্য সূর্য্যের অবস্থানকে স্থির বলকেন্দ্র এবং গ্রহগুলিকে কণিকা ধরিয়া তাদের সূর্য্যের চারদিকে উপবৃত্তীয় কক্ষপথ আবর্তনশীল মনে করা হইয়া থাকে। সূর্যের অবস্থান স্থির ধরে প্রতিটি গ্রহ সূর্যের চারদিকে উপবৃত্তীয় কক্ষপথে আবর্তন করে এবং সূর্য ওই উপবৃত্তের একটি নাভিবিন্দুতে থাকে বলিয়া ধরা হয়। উপবৃত্তের উপর পরাক্ষের যে প্রান্তবিন্দুটি ওই নাভিবিন্দু থেকে নিকটতর তাকে অনুসুর (perihelion) এবং পরাক্ষের যে বিন্দুটি নাভিবিন্দু থেকে দূরে আছে তাকে অপসূর (Aphelion) বলা হয়ে থাকে।

13.9 অনুশীলনী

উদাহরণ 1. কেন্দ্রীয় বলাধীন একটি কণিকার কক্ষপথ মেরুস্থানাংকে $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ রূপে লেখা আছে (e কণিকাটির উৎকেন্দ্রতা এবং l অর্ধনাভিলম্বের দৈর্ঘ্যের পরিমাণ)। দেখান যে, বলকেন্দ্রটি ওই কণিকের নাভিবিন্দুতে থাকিলে ওই কণিকার উপর ক্রিয়াশীল বল $\alpha \frac{1}{r^2}$.

সমাধান ঃ এস্থলে $u = \frac{1}{r}$ ধরিয়া কণিকাটির সমীকরণ হইবে $lu = 1 + e\cos\theta$; $l\frac{du}{d\theta} = -e\sin\theta$ এবং $l\frac{d^2u}{d\theta^2} = -e\cos\theta$ হয়।

অতএব $l\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = 1$ হইবে।

কিন্তু আমরা জানি যে, ক্রিয়াশীল বল $P = h^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$ (h ধ্রুবক রাশি) এবং এক্ষেত্রে

$P = \dfrac{h^2u^2}{l} = \dfrac{h^2}{l}\dfrac{1}{r^2}$; অতএব $P \propto \dfrac{1}{r^2}$ হইবে।

উদাহরণ 2. m ভরবিশিষ্ট একটি কণার উপর কেন্দ্র থেকে r দূরত্বে কেন্দ্রীয় আকর্ষক বল $m\mu[3au^4 - 2(a^2 - b^2)u^5]$ $(a > b)$ বিদ্যমান থাকিলে যদি অপদূরক বিন্দু $(r = a + b)$ থেকে কণাটিকে $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a+b}$ বেগে নিক্ষেপ করা হয়, তাহা হইলে দেখান যে, কণাটির গতিপথ $r = a + b \cos \theta$ হইবে।

সমাধান ঃ প্রদত্ত শর্তানুযায়ী মেরুস্থানাংকে কণাটি গতিপথের সমীকরণ হইবে $m\left[\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = \dfrac{m\mu[3au^4 - 2(a^2 - b^2)u^5]}{h^2u^2}$ এস্থলে $h = \dfrac{\sqrt{\mu}}{a+b}(a+b) = \sqrt{\mu}$ হয় ; অতএব $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{3au^4 - 2(a^2 - b^2)u^5}{u^2}$ হইবে। এখন উভয়দিকে $\dfrac{2du}{d\theta}$ গুণ করিয়া এবং পরে সমাকলন করিয়া আমরা পাই, $\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = au^3 - (a^2 - b^2)\dfrac{u^4}{2} +$ ধ্রুবক রাশি।

কিন্তু যখন $r = a + b$ অর্থাৎ $u = \dfrac{1}{a+b}$ হয় তখন $\dfrac{du}{d\theta} = 0$ হইবে।

এজন্যে ওই ধ্রুবক রাশিটি হইবে,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(a+b)^2} - \frac{a}{(a+b)^3} + \frac{(a^2 - b^2)}{2(a+b)^4}$$

$$= \frac{1}{2(a+b)^2} - \frac{2a(a+b) - (a^2 - b^2)}{2(a+b)^4} = \frac{1}{2(a+b)^2} - \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2(a+b)^4}$$

= শূন্য পরিমাণ।

অতএব $\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = 2au^3 - (a^2 - b^2)u^4$ হয়।

কিন্তু $u = \dfrac{1}{r}$ এবং $\dfrac{du}{d\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta}$;

এজন্য $u = \dfrac{1}{r}$ বসাইয়া আমরা পাই, $\dfrac{1}{r^4}\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - \dfrac{2a}{r^3} = \dfrac{a^2 - b^2}{r^4} - \dfrac{1}{r^2}$

অর্থাৎ $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 2ar - (a^2 - b^2) - r^2$

$$= b^2 - (a^2 + r^2 - 2ar) = b^2 - (a - r)^2 \text{ হয়।}$$

অতএব $\frac{dr}{d\theta} = \pm\sqrt{b^2 - (r - a)^2}$ হইবে।

উহা সমাকলন করিয়া আমরা পাই,

$$\int \frac{dr}{\sqrt{b^2 - (r - a)^2}} = \pm\int d\theta + \text{ ধ্রুবক রাশি}$$

অর্থাৎ $\cos^{-1}\left(\frac{r - a}{b}\right) = \pm\theta$ + ধ্রুবক রাশি

কিন্তু $r = a + b$ অবস্থানে $\theta = 0$ ধরলে এই ধ্রবক রাশিটির মান শূন্য হবে। এজন্য অবশেষে আকার পাই, $r = a + b \cos \theta$ এবং উহাই কণাটির গতিপথ।

উদাহরণ 3. কোনো গ্রহের কক্ষপথ সূর্য্যের চতুর্দিকে বৃত্তাকার ধরিয়া অকস্মাৎ সূর্য্যের ভর $\frac{1}{n}$ অংশ হইলে, গ্রহটির নতুন কক্ষপথ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রথমে সূর্য্যের ভর M এবং গ্রহটির ভর m ধরিলে গ্রহটির উপর সূর্য্যের ক্রিয়াশীল বল $\frac{GMm}{r^2}$ হইবে (সূর্য্য থেকে গ্রহটির দূরত্ব r ধরা হইয়াছে)। গ্রহটি সূর্য্যের চতুর্দিকে v বেগে a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করিলে $\frac{GMm}{a^2} = \frac{mV^2}{a}$ হইবে।

অর্থাৎ $V = \sqrt{\frac{GM}{a}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$ $(GM = \mu)$। আবার যখন সূর্য্যের ভর $\frac{M}{n}$ হইবে তখন ওই গ্রহটি ওপর ক্রিয়াশীল বল $\frac{GMm}{nr^2} = \frac{\mu m}{nr^2}$ এবং $r = a$ অবস্থানে ওই বল হয় $\frac{\mu m}{na^2}$.

আদি দশায় গ্রহটির গতিবেগ $\sqrt{\frac{\mu}{a}}$ ধরিলে আমরা দেখিয়াছি যে $\frac{h^2}{p^2} = V^2 = \frac{\mu}{a}$ যখন সূর্য্যের ভর $\frac{M}{n}$ হয় তখন $\frac{\mu}{n}$ হইবে এবং μ পরিবর্তিত হইয়া $\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{nr^2}$ হইবে।

সমাকলন করিয়া আমরা পাই, $\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{nr} + c$ কিন্তু আদি দশায় $r = a$ ধরিয়া পরিবর্তিত পরিস্থিতিতে

$\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{na}$ হইবে। অতএব $c = \frac{\mu}{a}\left(1 - \frac{2}{n}\right)$;

এজন্য অবশেষে এক্ষেত্রে আমরা পাই, $\frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{nr} + \frac{\mu}{a}\left(1 - \frac{2}{n}\right)$

এখন $1 > \frac{2}{n}$ অর্থাৎ $n > 2$ হইলে কক্ষপথটি একটি পরাবৃত্ত এবং $1 = \frac{2}{n}$ অর্থাৎ $n = 2$ হইলে কক্ষপথটি একটি অধিবৃত্ত এবং $1 < \frac{2}{n}$ অর্থাৎ $n < 2$ কক্ষপথটি একটি উপবৃত্ত হইবে।

উদাহরণ 4. যদি কোনো গ্রহ সূর্য হইতে যখন সর্বাপেক্ষা সবচেয়ে দূরে থাকে তখন তার রৈখিক গতিবেগ V_1 হয় এবং ওই গ্রহটি যখন সূর্য্য থেকে নিকটতম দূরত্বে থাকে তখন তার রৈখিক গতিবেগ V_2 হয় ; তা হলে প্রমাণ করুন যে, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{(1-e)}{(1+e)}$ হইবে।

সমাধান ঃ গ্রহটি সূর্য্যের চতুর্দিকে উপবৃত্তাকার পথে চলে এবং যদি ওই উপবৃত্তের পরাক্ষ $2a$ এবং উৎকেন্দ্রতা e হয় তা হলে দেখা যাবে যে, $vp = h$ (ধ্রুবক রাশি) হয়। যখন গ্রহটি সূর্য হইতে সর্বাপেক্ষা বেশী দূরত্বে থাকে $p = a(1 + e)$ হয়, এজন্য $v_1 = \frac{h}{a(1+e)}$ হইবে। আবার যখন ওই গ্রহটি সূর্য্যের নিকটতম অবস্থানে আসে তখন $p = a(1 - e)$ হয় এজন্য $v_2 = \frac{h}{a(1-e)}$ হইবে। এজন্য $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1-e}{1+e}$ হইবে।

উদাহরণ 5. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $6{\cdot}4 \times 10^6$ মিটার এবং $g = 9{\cdot}8$ মিটার/সেকেন্ড^2 ধরিয়া ভূপৃষ্ঠ হইতে নিক্ষেপিত কোনো কণার পলায়নীবেগ নির্ণয় করুন। আমাদের জানা আছে যে, পলায়নীবেগ $= \sqrt{2ga}$ $= \sqrt{2 \times 9{\cdot}8 \times 6{\cdot}4 \times 10^6}$ মিটার/সেকেন্ড প্রায় 11×10^3 মিটার/সেকেন্ড।

অতএব পলায়নীবেগ = 11 কিলোমিটার প্রতি সেকেন্ডে হইবে।

13.10 সারাংশ

আমরা এই এককে কেন্দ্রীয় বলাধীন কণার গতিবেগ আলোচনা করিয়া বিপরীত বর্গ নিয়মাধীন কেন্দ্রীয় বলের নিয়মে চলমান গ্রহসমূহের গতি এবং তৎসংক্রান্ত কেপলারের নিয়মাবলী বিশ্লেষণ করিবার চেষ্টা করিয়া অবশেষে ভূ-পৃষ্ঠ হইতে নিক্ষিপ্ত কোনো বস্তুর পলায়নীবেগ নির্ণয় করা হইয়াছে।

13.11 প্রশ্নমালা

1. যদি পৃথিবীর সূর্য পরিক্রমার কক্ষপথ বৃত্তাকার হয় তা হলে দেখান যে পৃথিবীর গতিবেগ দেড়গুণ হলে, সূর্যকে নাভিবিন্দু অবস্থানে রাখিয়া পৃথিবীর গতিপথ অধিবৃত্তাকার হইবে।

2. কোনো একটি কণার গতিপথ একটি উপবৃত্ত এবং কণাটি ওই উপবৃত্তের নাভিকেন্দ্রের দিকে $\frac{\mu}{r^2}$ পরিমাণ বল দ্বারা আকৃষ্ট হইতেছে ধরিয়া (এখানে নাভিকেন্দ্র থেকে কণাটির দূরত্ব r, μ ধ্রুবক রাশি) r পরিমাণ দূরত্বে কণাটিকে V বেগে নিক্ষেপ করিলে দেখান যে, কণাটির পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{2}{r}-\frac{V^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$ হইবে।

3. সূর্য্যের চতুর্দিকে চলমান কোনো একটি গ্রহের গতিপথ বৃত্তাকার হইলে দেখান যে, গ্রহটির গতিবেগ হঠাৎ শূন্য হইলে ওই গ্রহটি সূর্যের চতুর্দিকে পরিক্রমার পর্যায়কালের $\frac{\sqrt{2}}{8}$ গুণ সময়ে সূর্যে পতিত হইবে।

4. একটি বস্তুকণা মূলবিন্দু অভিমুখী কেন্দ্রীয় বলাধীনে $r = a \tan \theta$ পথ পরিক্রমা করে। বলটির সূত্র ও গতিবেগ r-এর আকারে প্রকাশ করুন।

5. কেন্দ্রীয় বলাধীন একটি বস্তুকণার কক্ষপথ হল $r^n = A \cos n\theta + B \sin n\theta$ যেখানে A ও B যদৃচ্ছ ধ্রুবক। দেখান যে ক্রিয়াশীল কেন্দ্রীয় বলটি r^{2n+3}-এর সঙ্গে ব্যস্তভেদে আছে।

6. একটি বস্তুকণা কেন্দ্রীয় বল $m\mu\left(r+\frac{a^4}{r^3}\right)$–এর অধীনে পথ পরিক্রমা করে। বস্তুটিকে $\frac{2\sqrt{\mu}}{a}$ গতিবেগে 'a' অপদূরক বিন্দু (Apse) থেকে প্রক্ষেপ করা হইয়াছিল। দেখান যে, গতিপথের সমীকরণ $r^2(2 + \cos \theta\sqrt{3}) = 3a^2$

মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

— রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে, সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নূতন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

— সুভাষচন্দ্র বসু

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

— Subhas Chandra Bose

Price : ₹ 225.00

(NSOU-র ছাত্র-ছাত্রীদের কাছে বিক্রয়ের জন্য নয়)

Published by : Netaji Subhas Open University, DD-26, Sector-I, Salt Lake, Kolkata-700 064 &
Printed at : The Saraswati Printing Works, 2, Guru Prosad Chowdhury Lane, Kolkata 700 006