উপক্রমণিকা

মহান দেশনায়ক সুভাষচন্দ্র বসুর নামাঙ্কিত এই মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনে আপনাকে স্বাগত। সম্প্রতি এই প্রতিষ্ঠান দেশের সর্বপ্রথম রাজ্য সরকারি মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় হিসেবে ন্যাক (NAAC) মূল্যায়নে 'এ'-গ্রেড প্রাপ্ত হয়েছে। বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশন প্রকাশিত নির্দেশনামায় স্নাতক শিক্ষাক্রমকে পাঁচটি পৃথক প্রকরণে বিন্যস্ত করার কথা বলা হয়েছে। এগুলি হল—'কোর কোর্স', 'ডিসিপ্লিন স্পেসিফিক ইলেকটিভ', 'জেনেরিক ইলেকটিভ' এবং 'স্কিল' / 'এবিলিটি এনহ্যান্সমেন্ট কোর্স'। ক্রেডিট পদ্ধতির উপর ভিত্তি করে বিন্যস্ত এই পাঠক্রম শিক্ষার্থীর সামনে নির্বাচনাত্মক পাঠক্রমে পাঠ গ্রহণের সুবিধে এনে দেবে। এরই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে যান্মাষিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা এবং ক্রেডিট ট্রান্সফারের সুবিধা। শিক্ষার্থী-কেন্দ্রিক এই ব্যবস্থা মূলত গ্রেড-ভিত্তিক যা অবিচ্ছিন্ন আভ্যন্তরীণ মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সার্বিক মূল্যায়নের দিকে এগোবে এবং শিক্ষার্থীকে বিষয় নির্বাচনের ক্ষেত্রে যথোপযুক্ত সুবিধা দেবে। শিক্ষাক্রমের প্রসারিত পরিসরে বিবিধ বিষয় চয়নের সক্ষমতা শিক্ষার্থীকে দেশের অন্যান্য উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আন্তঃব্যবস্থায় অর্জিত ক্রেডিট স্থানান্তরে সাহায্য করবে। শিক্ষার্থীর অভিযোজন ও পরিগ্রহণ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠক্রমের বিন্যাসই এই নতুন শিক্ষাক্রমের লক্ষ্য।

UGC (Open and Distance Learning Programmes and Online Programmes) Regulations, 2020 অনুযায়ী সকল উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের স্নাতক পাঠক্রমে এই সি.বি.সি.এস. পাঠক্রম পদ্ধতি কার্যকরী করা বাধ্যতামূলক—উচ্চশিক্ষার পরিসরে এই নতুন শিক্ষাক্রম এক বৈকল্পিক পরিবর্তনের সূচনা করেছে। আগামী ২০২১-২২ শিক্ষাবর্ষ থেকে স্নাতক স্তরে নির্বাচনভিত্তিক এই পাঠক্রম কার্যকরী করা হবে, এই মর্মে নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে। বর্তমান পাঠক্রমগুলি উচ্চশিক্ষা ক্ষেত্রের নির্ণায়ক কৃত্যকের যথাবিহিত প্রস্তাবনা ও নির্দেশাবলী অনুসারে রচিত ও বিন্যস্ত হয়েছে। বিশেষ গুরুত্বারোপ করা হয়েছে সেইসব দিকগুলির প্রতি যা ইউ.জি.সি. কর্তৃক চিহ্নিত ও নির্দেশিত।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ক্ষেত্রে স্ব-শিক্ষা পাঠ-উপকরণ শিক্ষার্থী-সহায়ক পরিষেবার একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। সি.বি.সি.এস. পাঠক্রমের এই পাঠ-উপকরণ মূলত বাংলা ও ইংরেজিতে লিখিত হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধের কথা মাথায় রেখে আমরা ইংরেজি পাঠ-উপকরণের বাংলা অনুবাদের কাজেও এগিয়েছে। বিশ্ববিদ্যালয়ের আভ্যন্তরীণ শিক্ষকরাই মূলত পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির ক্ষেত্রে অগ্রণী ভূমিকা নিয়েছেন—যদিও পূর্বের পরম্পরা অনুযায়ী অন্যান্য বিদ্যায়তনিক উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানে সংযুক্ত অভিজ্ঞ ও বিশেষজ্ঞ শিক্ষকদের সাহায্য আমরা অকুণ্ঠচিত্তে গ্রহণ করেছি। তাঁদের এই সাহায্য পাঠ-উপকরণের মানোন্নয়নে সহায়ক হবে বলেই আমার বিশ্বাস। এই নির্ভরযোগ্য ও মূল্যবান বিদ্যায়তনিক সাহায্যের জন্য আমি তাঁদের আন্তরিক অভিনন্দন জানাই। এই পাঠ-উপকরণ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষণ পদ্ধতি ও প্রকরণে নিঃসন্দেহে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নেবে। একথা বলা বাহুল্য যে, এ বিষয়ে উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনের পঠন প্রক্রিয়ায় সংযুক্ত সকল শিক্ষকের সদর্থক ও গঠনমূলক মতামত আমাদের আরও সমৃদ্ধ করবে।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির এই বিদ্যায়তনিক উদ্যোগের সর্বাঙ্গীণ সাফল্য কামনা করি। মুক্তশিক্ষাক্রমে উৎকর্ষের প্রশ্নে আমরা প্রতিশ্রুতিবদ্ধ।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

Under Graduate Degree Programme

Choice Based Credit System (CBCS)

(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা)

বিষয় : সাম্মানিক অর্থনীতি

Subject : Honours Commerce (HCO)

পাঠক্রম : গণিত-১ (Mathematics-1)

GE-CO-11

Applicable for learners of HEC (Economics)

প্রথম মুদ্রণ : নভেম্বর 2021

First Print : November 2021

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

Under Graduate Degree Programme
Choice Based Credit System (CBCS)
(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা)
বিষয় : সাম্মানিক অর্থনীতি
Subject : Honours Commerce (HCO)
পাঠক্রম : গণিত-১ **(Mathematics-1)**
GE-CO-11
Applicable for learners of HEC (Economics)

: বিষয় সমিতি :

সদস্যবৃন্দ

অনির্বাণ ঘোষ
Director(i/c), SPS,
Netaji Subhas Open University

সেবক জানা
Professor of Economics,
Vidyasagar University

বিবেকানন্দ রায়চৌধুরী
Associate Professor of Economics,
Netaji Subhas Open University

অসীম কুমার কর্মকার
Assistant Professor of Economics,

প্রিয়ন্থী বাগচী
Assistant Professor of Economics,
Netaji Subhas Open University

ধীরেন কোনার
Professor of Economics,
University of Kalyani (Rted.)

বিশ্বজিৎ চ্যাটার্জী
Professor of Economics,
Netaji Subhas Open University

সেখ সেলিম
Associate Professor of Economics,
Netaji Subhas Open University

পূর্বা রায়চৌধুরী
Associate Professor of Economics,
Bhowanipore Education Society

: রচনা :
মহেন্দ্র রং
Associate Professor
Bangabasi Evening College

: সম্পাদনা :
বিবেকানন্দ রায়চৌধুরী
Associate Professor of Economics
Netaji Subhas Open University

: বিন্যাস সম্পাদনা :
প্রিয়ন্থী বাগচী

প্রজ্ঞাপন

এই পাঠ-সংকলনের সমুদয় স্বত্ব নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের দ্বারা সংরক্ষিত। বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের লিখিত অনুমতি ছাড়া এর কোনও অংশের পুনর্মুদ্রণ বা কোনোভাবে উদ্ধৃতি সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ।

কিশোর সেনগুপ্ত
নিবন্ধক

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

Under Graduate Degree Programme

Choice Based Credit System (CBCS)

(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা)

বিষয় : সাম্মানিক অর্থনীতি

Subject : Honours Commerce (HCO)

পাঠক্রম : গণিত-১ **(Mathematics-1)**

GE-CO-11

Applicable for learners of HEC (Economics)

একক 1 ❑ সেট তত্ত্ব

গঠন

1.1 উদ্দেশ্য

এই এককে সেট তত্ত্ব এবং এর বিভিন্ন প্রক্রিয়া (objective), quari convex, concave সম্পর্কে জ্যামিতিক আলোচনা, ব্যবহার বিষয়ে আলোকপাত করা হয়েছে।

1.2 প্রস্তাবনা

বর্তমান গণিত জগতের একটি উল্লেখযোগ্য হাতিয়ার হল সেট্ তত্ত্ব। গণিতকে আশ্রয় করে সমস্ত বিষয় গড়ে উঠেছে তাতে সাধারণ জীবগণিতের যোগ, বিয়োগ, গুণ প্রক্রিয়ার সঙ্গে সঙ্গতি রেখে সেট তত্ত্বও আলোচিত হয়। সেটের ধারণা কলনবিদ্যাকে উত্তমরূপে সমৃদ্ধ করেছে। সেটের জগৎ ও তার প্রয়োগ সুদূর বিস্তৃত। সেটের তত্ত্ব ঘিরে অপেক্ষক এবং তার সীমা, অনুক্রম ইত্যাদি বিষয় অনিবার্যভাবে এসে যায়। প্রথমদিকে এই আলোচনা শুরু করেন Frige, Caufor, Russel, Diekind-এর মত গণিতজ্ঞরা। পরে এই তত্ত্ব বিজ্ঞানের বহু শাখায় সুচারুভাবে বিকশিত হয়েছে।

1.3 সেট্ তত্ত্ব এবং বিবিধ সেট্ প্রক্রিয়া

স্বাভাবিকভাবে, বস্তু সমূহের সমাহারকে ‘সেট’ বলার চল লক্ষ্য করা যায়। ‘এক সেট পেন’, ‘এক সেট বই’, আমরা একগুচ্ছ বস্তু বলতে ব্যবহার করি। কিন্তু গণিতের ভাষায় সেটের সংজ্ঞাটি এতটা সরল নয়। গণিতজ্ঞ

ক্যান্টরের পূর্বেই সেটের ধারণা ছিল। তবে গণিতবিদ্ হিসাবে ক্যান্টর সেটের একটি সুসংজ্ঞাত ধারণা দেবার চেষ্টা করেছিলেন। তাঁর কথায় সেট্ হল এমন একটি বস্তু/বস্তুসমূহের সংকলন, যাতে বস্তু/বস্তুগুলিকে সংগ্রহ করতে হবে একটি সুনির্দিষ্ট নিয়মের অধীনে। একই বস্তু/সংখ্যা একাধিক ব্যবহার করা যাবে না। সংঘবদ্ধ বস্তু/সংখ্যাগুলি ক্রম নিরপেক্ষ অবস্থায় থাকবে। 'সেট' একটি বস্তু বা একাধিক বস্তুর মাধ্যমে গঠিত হয়। যে সেটে একটি মাত্র বস্তু বা সদস্য থাকে তাকে এক সদস্য যুক্ত সেট্ বলা হয়। ইংরাজীতে বলে 'One point set'। এস্থলে সেট-মধ্যস্থ সদস্য বা বস্তুকে অনেকে জ্যামিতিক দৃষ্টি কোণ থেকে point বা বিন্দু হিসাবে চিহ্নিত করেন।

উদাহরণস্বরূপ, আমরা স্বরবর্ণ (ইংরাজীতে যাদের 'vowels' বলে)-গুলির মাধ্যমে একটি সেট গঠন করতে পারে। ধরি, V হল সেই সেট। সুতরাং $V = \{a, e, i, u, u\}$। সেটটি এই পাঁচটি পদ/সদস্যকে নিয়ে গঠিত। এই সেটে পদসংখ্যা নির্দিষ্ট অর্থাৎ 5টি। সুতরাং এটি একটি **সসীম সেট** (finite set)। যদি সেটের পদ সংখ্যা সসীম বা সীমাবদ্ধ না হয় তবে সেটটিকে **অসীম সেট** (infinite set) বলা হয়। যেমন স্বাভাবিক সংখ্যা (N)-এর সেটটি অসীম সেট। কারণ $N = \{1, 2, 3, ...\}$ এতে নির্দিষ্ট সংখ্যক পদ বা সদস্য নেই।

সেটকে সাধারণত দুটি উপায়ে প্রকাশ করা যায়, (১) তালিকা পদ্ধতি (tabular form) (২) ধর্মের প্রতীকী প্রকাশ (set builder form)

উদাহরণ : ১ থেকে ১০-এর মধ্যে উপস্থিত মৌলিক সংখ্যার সেট। এটিকে আমরা

(১)নং-এ লিখব S (সেট) = $\{2, 3, 5, 7\}$-এই আকারে।

(২)নং-এ লিখব, S = $\{x/x$ একটি মৌলিক সংখ্যা যা 1 থেকে 10-এর মধ্যবর্তী অর্থাৎ $\{1 < x < 10\}$

সেটের সংজ্ঞা ঃ 'সেট হল এমন একটি সুসংজ্ঞাত সংকলন যার মধ্যে উপস্থিত পদ/সদস্যগুলি ক্রম নিরপেক্ষ এবং ভিন্ন'।

(A) উপসেট (sub-set) ঃ যদি X এবং Y দুটি এমন ধরণের সেট যেখানে Y সেটের প্রত্যেক পদ/সদস্যকে X সেটের পদ হিসাবে গণ্য করা যায়, তাহাতে Y-কে X সেটের উপসেট বলা হয়। এক্ষেত্রে, $Y \subseteq X$ (প্রতীকে প্রকাশ)।

যদি $Y \subset X$ হয়, তবে Y সেটকে X সেটের প্রকৃত (proper) উপসেট বলে।

যদি $Y = \{2, 3, 4\}$ এবং $X = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ হয়, তবে Y সেটটি সদস্য সংখ্যার বৃদ্ধি ঘটিয়ে যদি X-এর সঙ্গে সমান হয়ে যায় তখন $Y \subseteq X$। এক্ষেত্রে Y সেটটিকে X সেটের অপ্রকৃত (improper) উপসেট বলা হয়।

(B) সমসেট (equal sets) ঃ X ও Y সেট দুটি সমসেট বলা হয় যদি $X \subseteq Y$ এবং $Y \subseteq X$ হয়।

উদাহরণ ঃ ধরি, $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ এস্থলে $X \subseteq Y$ এবং $Y \subseteq X$; অতএব, $X = Y$

(C) সার্বিক সেট (Univervsal set) ঃ যে সেটের অধীনে অপর সেট/সেটগুলি উপসেট হিসাবে উপস্থিত হয় তখন ঐ বৃহৎ সেটটিকে সার্বিক সেট বলে।

উদাহরণ U বা $\xi = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $X = \{2, 3, 5\}$। সুতরাং $X \subset \xi$

$\therefore$ ξ হল সার্বিক সেট।

(D) শূন্য সেট (Empty/void/null set) ঃ পদ বা সদস্যহীন গঠিত সেটকে শূন্য সেট বলা হয়। যে শর্তে সেট তৈরী হয় তাকে অনুসরণ করে কোন পদ সেটে সংগৃহীত না হলে সেটটিকে শূন্য সেট হিসাবে ধরা হয়। একে $\varnothing$ প্রতীকে বা { } প্রতীকে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ঃ চন্দ্রপৃষ্ঠে অবতরণকারী ভারতীয় মহাকাশচারীদের সেট একটি শূন্য সেটের উদাহরণ।

(E) সূচক সেট (Index set/Power set) ঃ যদি X একটি বিশেষ সেট। X সেটের প্রত্যেক উপসেট (শূন্য সেট/সার্বিক সেট X সহ)-কে সদস্য হিসাবে ধরে যে সেট তৈরী করা হয় তাকে X সেটের সূচক সেট বলা হয়।

উদাহরণ ঃ ধরি, X = {1, 2, 3}

P(X) [X সাপেক্ষে গঠিত সূচক সেট]

$= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \varnothing\}$

লক্ষণীয় যে, কোন মূলসেটের পদসংখ্যা m হলে তাকে গিরে তৈরী উপসেটের মোট সংখ্যা হবে 2^m।

(F) সমতুল্য সেট (Equivalent set) ঃ দুটি সেট পরস্পর সমতুল্য সেট হবে যদি তাদের মোট পদসংখ্যা একই থাকে, কিন্তু পদগুলি নয়। যেমন A = {1, 2, 3} এবং B = $\{a, b, c\}$ পরস্পর সমতুল্য সেট। সমতুল্য সেট কিন্তু সমসেট নয়। পক্ষান্তরে সমসেট কিন্তু সমতুল্য সেট।

1.4 সেট্ প্রক্রিয়া

দুটি সেটের মধ্যে সংযোগ (union), ছেদ (intersection) এবং অন্তর (difference) বলতে কী বুঝায় তা এখন মূলতঃ আলোচনা হবে। এস্থলে, কোনো পদ/সদস্য কোন সেটে বর্তমান হলে তাকে $\in$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হবে অন্যথায় $\notin$ চিহ্ন।

(a) সংযোগ প্রক্রিয়া ঃ এই প্রক্রিয়ার প্রতীক '$\cup$'।

ধরি, D এবং F দুটি সেট। D এবং F সেটের সংযোগ সেটটির সংজ্ঞা হল নিম্নরূপ ঃ

$D \cup F = \{x/x \in D$ অথবা $x \in F\}, x \in D$

অথবা $x \in F$-এর অর্থ হ'ল $x \in D, x \notin F$ (অর্থাৎ x, D সেটের সদস্য/পদ কিন্তু F সেটের অন্তর্গত নয়)

অথবা, $x \in F, x \notin D$। একে 'inclusive form' বা 'অন্তর্ভুক্তি দশা' বলে। 'Exclusive form' বা 'বিযুক্তি দশা' বলতে বুঝতে হবে $D \cup F = \{x/x \in D$ এবং $x \in F\}$ অর্থাৎ x (পদ/সদস্য), D এবং F উভয়ের মধ্যে বর্তমান।

(b) ছেদ প্রক্রিয়া ঃ D এবং F সেট দুটির মধ্যে ছেদ সেটটি হল এমন সেট যার মধ্যে D এবং F সেটের সাধারণ (common) পদ বা সদস্যরাই শুধুমাত্র উপস্থিত থাকবে। সুতরাং প্রতীকী প্রকাশ হল

$D \cap F = \{x/x \in D$ এবং $x \in F\}$ অর্থাৎ $D \cap F$-এর পদ বা সদস্যরা D এবং F উভয় সেটের সাধারণ সদস্য হিসাবে গণ্য হবে। D এবং F সেটের ছেদকে '$\cap$' হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

(c) **অন্তর প্রক্রিয়া ঃ** ধরি, D এবং F যে কোনো দুটি সেট। D ও F-এর মধ্যে অন্তর-কে D – F বা D/F দিয়ে সূচিত করা হয়। সংজ্ঞা হিসাবে বলা যায় যে $D - F = \{x/x \in D$ কিন্তু $x \notin F\}$

উদাহরণ ঃ ধরি $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $F = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

$\therefore\ D \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$D \cap F = \{4, 5\}$

$D - F = \{1, 2, 3\}$

(d) পরিশেষে, এই অংশে পূরক সেটের আলোচনাও অত্যন্ত জরুরী। যার মধ্যে অন্তর প্রক্রিয়ার ছোঁয়া বর্তমান। ধরি, ξ হ'ল সার্বিক সেট (universal set) এবং D একটি যে কোনো সেট। যাকে S দ্বারা উপসেট হিসাবে ভাবা যায়। সংকেতে D সেটের পূরক সেটকে D^c বা D' হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

ধরি, $S/D = \{x/x \in S$ কিন্তু $x \notin D\}$ অর্থাৎ x যে কোনো পদ/সদস্য, S – D-তে বর্তমান। D সেটের পূরক সেট হল D^c অথবা D'।

উদাহরণ ঃ ধরি, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং $D = \{1, 3, 5\}$

$\therefore\ D'$ বা $D^c = \{2, 4, 6\}$

1.5 দুটি সেটের মধ্যে কার্তেসীয় গুণফল

মনে করি, D এবং F দুটি অশূন্য সেট। D ও F সেটের মধ্যে কার্তেসীয় গুণফলকে D × F চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়। সংজ্ঞা স্বরূপ বলা যায় যে, $D \times F = \{(x, y)/x \in D$ এবং $y \in F\}$

(x, y)-কে ক্রম যুগল (ordered pair) বলা হয় অর্থাৎ প্রথমে x, পরে y উপস্থিত হবে, কোনো ক্ষেত্রেই y প্রথম স্থান দখল করবে না।

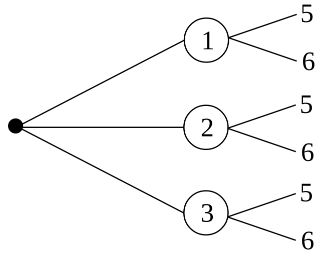
উদাহরণ ঃ মনে করি, $D = \{1, 2, 3\}$ এবং $F = \{5, 6\}$

সুতরাং $D \times F = \{\{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$

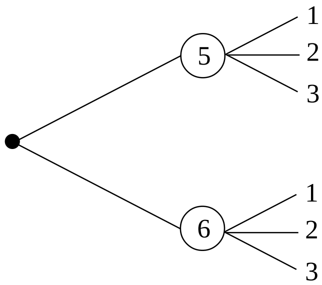
$F \times D = \{\{5, 1\}, \{5, 2\}, \{5, 3\}, \{6, 1\}, \{6, 2\}, \{6, 3\}\}$

এখানে আমরা সেটের মধ্যে সেটের উপস্থিতি লক্ষ্য করি অর্থাৎ 'সেটের শ্রেণি' বা 'class of sets'-কে পর্যবেক্ষণ করি। 'Tree-diagram' বা 'বৃক্ষ চিত্রে' এদের প্রকাশ করা যায়

যেমন— **D × F**-এর বৃক্ষ চিত্রটি নিম্নরূপ ঃ



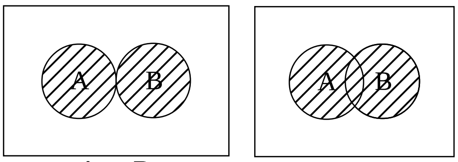
F × D-এর বৃক্ষ চিত্র ঃ



বি.দ্র. ঃ ‘বৃক্ষ চিত্র’ রচনাকালে বাঁদিক থেকে ডান দিকে যাব।

ভেন-অয়লার চিত্র (Venn-Euler diagram) ঃ A ও B সেট দুটির ‘$\cup$’, ‘$\cap$’ এবং ‘′’ প্রক্রিয়া ভেন-অয়লার চিত্রে প্রকাশ হল

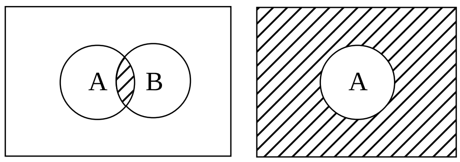
(i)



$A \cup B$
(Inclusive form)
অন্তর্ভুক্তি দশা

$A \cup B$
(Exclusive form)
বিযুক্তি দশা

(ii)



$A \cap B$

A^c বা A'

সম/বিভিন্ন সেটের উপর প্রযুক্ত নিয়মাবলী/সূত্রবলী ঃ সেটের উপর ক্রিয়াশীল বীজ গণিতীয় নিময়াবলীকে উপযুক্তভাবে পরিবেশন করা হল ।

1. **বর্গৈকসম নিয়ম সূত্র (Idempotent law)**

   (a) $A \cup A = A$ (b) $A \cap A = A$

2. **সাহচর্য নিয়ম (Associative law)**

   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. **বিনিময় নিয়ম/সূত্র (Cimmutative law)**

   (a) $A \cup B = B \cup A$ (b) $A \cap B = B \cap A$

4. **বন্টন নিয়ম/সূত্র (Distributive law)**

   (a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. **অভেদ নিয়ম/সূত্র** (Identity law)

   (a) $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \xi = A$ (b) $A \cup \xi = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$

6. **পূরক নিয়ম/সূত্র (Complement law)**

   (a) $A \cup A^c = \xi$; $(A^c)^c = A$ (b) $A \cap A^c = \varnothing$; $(\xi)c = \varnothing$, $\varnothing^c = \xi$

7. **ডি-মরগানের নিয়ম/সূত্র (De-Morgan's law)**

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

বি.দ্র. ঃ এস্থলে 'ξ' হল সার্বিক সেট এবং $\varnothing$ হল শূন সেট।

1.6 অন্তর্ভুক্তি-বিযুক্তি সেট

মনে করি, X একটি সসীম সেট। X সেটের পদ সংখ্যাকে আমরা $|X|$ বা $n(X)$ দিয়ে প্রকাশ করব। প্রসঙ্গত, $|\varnothing| = 0$ বা $n|\varnothing| = 0$

ধরি, A এবং B দুটি সসীম সেট হলে উপরিউক্ত সূত্র অনুসারে,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

A, B এবং C তিনটি সসীম সেটের ক্ষেত্রে, উক্ত সূত্রানুসারে,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

❒ **উদাহরণ–1 ঃ 30, 45 এবং 75 সংখ্যাগুলির সেট প্রক্রিয়ার মাধ্যমে গ.সা.গু ও ল.সা.গু কত হবে তা নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, A, B এবং C হল যথাক্রমে 30, 45 এবং 75-এর ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা 1 এবং মৌলিক উৎপাদকের সেট।

সুতরাং, $A = \{1, 2, 3, 5\}$

$B = \{1, 3, 3, 5\}$

$C = \{1, 3, 5, 5\}$

সহজভাবে পাওয়া যায় যে, $A \cap B \cap C = \{1, 3, 5\}$ এবং $A \cup B \cup C = \{...$

নির্ণেয় গ.সা.গু. = $A \cap B \cap C$ থেকে প্রাপ্ত পদগুলির গুণফল $= 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$

নির্ণেয় ল.সা.গু = $(A \cup B \cup C)$-এর পদগুলির গুণফল

$= \{1, 2, 3, 3, 5, 5\}$-এর পদগুলির গুণফল

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 450$

উত্তর ঃ 15 ও 450

❒ **উদাহরণ–2 ঃ কোনো এলাকার লোক সংখ্যার প্রত্যেকে ইংরাজী, হিন্দি বা বাংলা তিনটি ভাষার মধ্যে কমপক্ষে একটি ভাষায় কথা বলে। 31 জন ইংরাজীতে, 36 জন হিন্দিতে এবং 27 জন বাংলায় কথা বলতে অভ্যস্ত। উভয় ভাষায় কথা বলে 10 জন (ইংরাজী ও হিন্দিতে), 9 জন (ইংরাজী ও বাংলায়) এবং 11 জন (হিন্দি ও বাংলায়)। দেখান যে লোকসংখ্যার যোগফল মোট লোক সংখ্যা খুব কম হলে 64 এবং খুব বেশি হলে 73 হবে।**

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, ইংরাজীতে কথা বলে এমন লোকদের সেটটি হ'ল A

হিন্দিতে কথা বলে এমন লোকদের সেটটি হ'ল B

এবং বাংলায় কথা বলে এমন লোকদের সেটটি হ'ল C

এক্ষেত্রে, শর্তানুসারে,

$n(A) = 31$

$n(B) = 36$

$n(C) = 27$

$n(A \cap B) = 10,\ n(B \cap C) = 11,\ n(A \cap C) = 9$

মনে করি, $n(A \cap B \cap C) = x$

তিনটি সেটের ক্ষেত্রে অন্তর্ভুক্তি-বিযুক্তির সূত্র অবলম্বনে পাই,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 31 + 36 + 27 - 10 - 11 - 9 + x$$

$$= 94 - 30 + x = 64 + x \qquad \text{... (i)}$$

এক্ষেত্রে, মোট লোক সংখ্যা = $n(A \cup B \cup C)$ এবং $n(A \cap B \cap C) = x \geq 0$

পুনরায় $x \leq n\ (A \cap B) = 10$

$x \leq n(B \cap C) = 11$

$x \leq n(A \cap C) = 9$

(i)নং থেকে পাই, $n(A \cup B \cup C) \leq 64 + 9 = 73$ [যখন, $n \leq 9$]

(i)নং থেকে পাই, $n(A \cup B \cup C) \geq 64$ [যখন $x \geq 0$]

সুতরাং $n(A \cup B \cup C)$-এর সর্বনিম্ন মান 64 এবং সর্বোচ্চ মান 73

সুতরাং মোট লোকসংখ্যার সমষ্টিতে, লোকসংখ্যার মোট সংখ্যা খুব কম হলে 64 এবং খুব বেশি হলে 73। এটাই নির্ণেয় ফল।

❒ **উদাহরণ–3 ঃ X, Y এবং Z তিনটি এমন যে, $X \cap Z = Y \cap Z$ এবং $A \cap Z' = B \cap Z'$। প্রমাণ করুন যে, $X = Y$।**

☛ **সমাধান ঃ** $X = X \cap S$ [যখন S হল সার্বিক সেট] যেমন X-এর পুরক সেট X′

$= X \cap (Z \cup Z')$ [$\cup$-এর ক্ষেত্রে পূরক নিয়মে]

$= (X \cap Z) \cup (X \cap Z')$ [$\cap$-এর ক্ষেত্রে বন্টন নিয়মে]

$= (Y \cap Z) \cup (Y \cap Z')$ [প্রদত্ত শর্তানুসারে]

$= Y \cap (Z \cup Z')$

$= Y \cap S = Y$

সুতরাং $X = Y$ **[প্রমাণিত]**

❒ **উদাহরণ–4 ঃ X, Y এবং Z এমন তিনটি সেট যে $X \cup Y = X \cup Z$ এবং $X' \cup Y = X' \cup Z$। প্রমাণ করুন যে, $Y = Z$ (X' হল X-এর পূরক সেট)।**

☛ **সমাধান ঃ** $Y = Y \cup \varnothing$ [$\because X \cap X' = \varnothing$]

$= Y \cup (X \cap X')$

$= (Y \cup X) \cap (Y \cup X')$ [U-এর ক্ষেত্রে, বন্টন সূত্র থেকে]

$= (X \cup Y) \cap (X' \cup Y)$

$= (X \cap Z) \cap (X' \cup Z)$ [$\because X \cup Y = X \cup Z, X' \cup Y = X' \cup Z$]

$= Z \cup (X \cap X') = Z \cup \varnothing$] [অভেদ নিয়মে]

$= Z$

$\therefore Y = Z$ **[প্রমাণিত]**

❒ **উদাহরণ–5 ঃ (a) $A = \{x : 4x = 8\}$. $A = 2$ হওয়া সম্ভব কিনা পরীক্ষা করুন।**

(b) প্রমাণ করুন যে, $X = \{2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{x/x$ যে কোনো যুগ্ম সংখ্যা$\}$-এর উপসেট নয়।

☛ **সমাধান ঃ (a)** A সেটটি শুধুমাত্র 2 পদটিকে অন্তর্ভুক্ত করে। অর্থাৎ $A = \{2\}$। এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে 2 সংখ্যাটি A সেটের একটিমাত্র পদ। কিন্তু 2 কোন অবস্থায় A সেটের সঙ্গে সমান নয়। একটি পদ 'a' কখনই সেট $\{a\}$ -এর সাথে সমান নয়। সেইজন্য $A = 2$ হওয়া সম্ভব নয়।

(b) এক্ষেত্রে, $3 \in X$ কিন্তু $3 \notin Y$ [$\because$ Y হল সমস্ত যুগ্ম সংখ্যার সেট]

অনরূপে, $5 \in X$ কিন্তু $5 \notin Y$

কমপক্ষে X এই একটি পদ ও যদি Y-এর কোন পদ হিসাবে গণ্য না হয়, তবে $X \subset Y$ অসম্ভব **[প্রমাণিত]**

❒ **উদাহরণ–6 ঃ (a) প্রমাণ করুন** $A \subset C$ যদি $A \subset B$ এবং $B \subset C$ হয়।

(b) যদি $A \subset \varnothing$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $A = \varnothing$।

☛ **সমাধান ঃ (a)** সর্বপ্রথম আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, A সেটের যে কোনো পদ অবশ্যই C-সেটের অন্তর্গত পদ।

ধরি, $x \in A$. $A \subset B$ বলে $x \in B$.

পুনরায়, $B \subset C$ বলে $x \in C$

সুতরাং, $x \in A$ নির্দেশ করে $x \in C$

অতএব, $A \subset C$ **[প্রমাণিত]**

(b) আমরা জানি যে, $\varnothing$ বা শূন্য সেট যে কোনো সসীম সেট A-এর উপসেট।

সুতরাং $\varnothing \subset A$ ... (i)

পুনরায়, $A \subset \varnothing$ (প্রদত্ত) (ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) থেকে পাই $A = \varnothing$ [প্রমাণিত]

1.7 উত্তল সেট

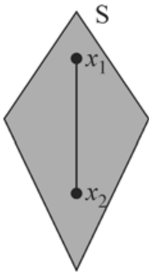
ধরি, $S \subset R^n$ [অর্থাৎ S, ($R^n = R \times R \times \ldots$ *n* সংখ্যক *n* মাত্রা (dimension) যুক্ত ইউক্লিডীয় দেশ (space)-এর একটি উপসেট]

যদি x_1, x_2 দুটি S সেটের পদ বা সদস্য হয় তবে $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$, যখন $0 \le \lambda \le 1$ [λ একটি প্রাচল (parameter)] অর্থাৎ x_1, x_2-এর একটি রৈখিক সমন্বয় অবশ্যই S-এর মধ্যে অবস্থিত। জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে মনে করি, x_1, x_2 দুটি বিন্দু S সেটের মধ্যে অবস্থিত। এদের একটি সরলরেখাংশ দিয়ে যুক্ত করলে সর্বদা সেটি S সেটের মধ্যেই বর্তমান থাকলে, S সেটটিকে "উত্তল সেট" বা convex set বলা হয়।

উদাহরণ ঃ শূন্য সেট ($\varnothing$) এবং একপদ যুক্ত সেট (singleton set) সর্বদাই উত্তল সেট হিসাবে চিহ্নিত হয়।

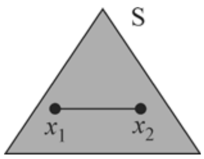
চিত্র (জ্যামিতিক) ঃ

A. (a)



উত্তল সেটের চিত্র (x_1, $x_2 \in S$)

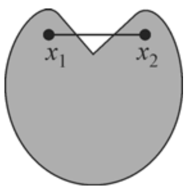
(b)



উত্তর সেটের চিত্র (x_1, $x_2 \in S$)

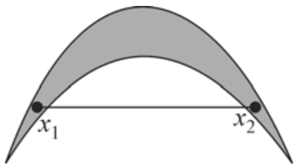
B. **উত্তর সেট নয় এমন ক্ষেত্রগুলি হল নিম্নরূপ ঃ**

(a)



এস্থলে x_1, $x_2 \in S$ কিন্তু x_1, x_2 সংযোজক সরলরেখাটি সম্পূর্ণভাবে S-এর মধ্যে নেই। $\therefore$ S সেটটি উত্তল সেট নয়।

(b)



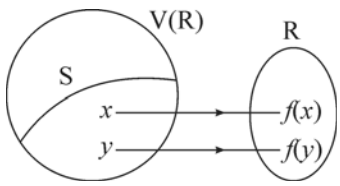
x_1, $x_2 \in S$ কিন্তু x_1, x_2 সংযোজক সরলরেখাংশটি সম্পূর্ণরূপে S-এর মধ্যে নেই। $\therefore$ S সেটটি উত্তল সেট নয়।

বি.দ্র. ঃ উত্তল সেটের ঋণাত্মক বা নেতিবাচক দিকটি হল অবতল সেট (concave set)।

1.8 অপেক্ষকের জ্যামিতিক ধর্মাবলী

(a) **আপাত উত্তল অপেক্ষক (quasi-convex function) এবং আপাত-অবতল অপেক্ষক (quasi concave function)-এর সংজ্ঞা (definition) এবং বৈশিষ্ট্যবলী (characteriszations) ঃ**

ধরি V(R) একটি ভেক্টর স্পেস বা ভেক্টরদের দেশ বা ইউক্লিডীয় দেশ (Euclidean space) এবং S(R) হল V(R)-এর একটি উপদেশ (sub-space)। মনে করি, f হ'ল একটি 'ক্রিয়ামূলক' অপেক্ষক (functional)। এক্ষেত্রে, সমস্ত $x, y \in$ S-এর জন্য $f(x)$ এবং $f(y) \in$ R অর্থাৎ এক কথায়, $f : \text{S} \longrightarrow \text{R}$। এখন λ (ধ্রুবক), $\lambda \in [0, 1]$ বন্ধ অবকাশ, এমনভাবে উপস্থিত যাতে $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ সিদ্ধ হয়। তখন 'f' অপেক্ষকটিকে **'আপাত-উত্তল (চরম মান) অপেক্ষক'** হিসাবে ধরা হয়।



যদি $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \text{Max}\{f(x), f(y)\}$ শর্ত মানে তখন 'f'-কে **'কঠোরভাব (strictly) সম্পন্ন আপাত-উত্তল অপেক্ষক'** বলা হয়।

'f' অপেক্ষকটি যদি $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(\{f(x), f(y)\}$ শর্তাধীন হয় অর্থাৎ 'f' এক অর্থে উপরিউক্ত মানের (অবম) ধারণার বিপরীতমুখী অর্থাৎ ঋণাত্মকধর্মী বা নেতিবাচক হলে তখন 'f'-কে আপাত-অবতল অপেক্ষক' (quasi-concave function) রূপে গণ্য করা হয়।

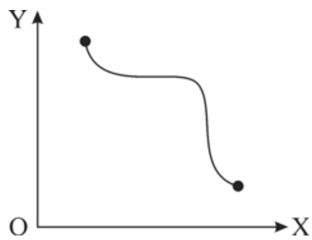
f-কে 'কঠোরভাব সম্পন্ন আপাত-অবতল (strictly quasi-concave) অপেক্ষক' বলা হয় অর্থাৎ ঐ ক্ষেত্রে, $f(\lambda x + (1 - x)y) > \max(f(x), f(y))$

প্রসঙ্গক্রমে অবতল সেটের (convex set)-এর অর্থ হল যে সেট মধ্যস্থ দুটি যেকোনো বিন্দু (পদ/সদস্য)-কে সর্বদা একটি সরলরেখাংশ দিয়ে সংযুক্ত করা যায় অথবা $\lambda x + (1 - \lambda)y \in$ S (সেট) যখন $x, y \in$ S এবং λ (ধ্রুবক) $\in [0, 1]$, শর্তাধীন।

একটি অপেক্ষকের মধ্যে যদি 'আপাত উত্তল' (quasi-convex) এবং 'আপাত অবতল' quasi-concave) উভয় চরিত্র লক্ষ্য করা যায় তবে তাকে আপাত রৈখিক (quasi-linear) বলা হয়।

এক্ষেত্রে, জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে দেখলে দেখা যাবে যে $f : \text{S} \longrightarrow \text{R}$ (যেমন $\text{S} \subset \text{V}$) একটি অংশ হিসাবে পাওয়া আপাত রৈখিখ-অপেক্ষকটিকে।

সুতরাং সমস্ত 'উত্তল' কার্যাবলীর ক্ষেত্রে 'আপাত উত্তল' ধর্ম লভ্য করা গেলেও, বিপরীতমুখী তথ্যটি সঠিক নয় অর্থাৎ সমস্ত আপাত-উত্তল অপেক্ষক, 'উত্তল' অপেক্ষকের কার্যাবলীকে সমর্থন করবে এমনভাবে বলা চলে না। দ্বৈত চল রাশির ক্ষেত্রে, স্বাভাবিক যৌথ ঘনত্ব সর্বদা 'আপাত-অবতল' ধর্মকে আশ্রয় করে চলে। সেই কারণে, 'আপাত উত্তলতা' উত্তলন-প্রক্রিয়ার একটি 'সাধারণীকরণ' রূপে স্বীকৃত হয়।



'আপাত-উত্তল' অপেক্ষকসমূহেরক অধ্যয়ন কালে গণিতে 'অরৈখিক সর্বাধিক অনুকূল পরিস্থিতি সৃষ্টিকারী পদ্ধতি' (non-linear optimization) পুনঃপুনঃ ব্যবহার করে ন্যূনতম মানটিকে গ্রহণ করা হয়। এই নীতিটি

'সারোগেট' দ্বৈত সমস্যা (dual problem)-এ ব্যবহৃত হয়। 'Sale-theory' ('সালে তত্ত্ব') 'উত্তল' এবং 'আপাত উত্তল' অপেক্ষকের ধর্মাবলী বিশ্লেষণে প্রয়োগ করা হয়। বর্তমানে আরও শক্তিশালী পদ্ধতি হিসাবে 'উপ-চালুতা প্রক্ষেপ' পদ্ধতি 'হেরিডিটারী বান্ডিল' পদ্ধতি 'অসমৃণ ছাঁকনী' পদ্ধতি উল্লেখযোগ্য। অর্থনীতির সমস্যা সমাধানে আংশিক অবকল সমীকরণ-এর সাহায্যে অপেক্ষকের চরম ও অবম নির্ণয় করা যায় একাধিক চলের ক্ষেত্রে।

(b) **প্রয়োগিক দিক (applications) ঃ**

'আপাত উত্তল' অপেক্ষকগুলির (যার নেতিবাচক দিক হিসাবে 'আপাত অবতল' অপেক্ষকসমূহ উপস্থিত হয়) গাণিতিক বিচার ও বিশ্লেষণের জন্য গাণিতিক ('max-min' বা 'min-max') বা 'চরম-অবম'/'অবম-চরম' তত্ত্বকে আশ্রয় করা হয় যা 'খেলা তত্ত্ব' (game theory)-এর মূল উপাদান। অর্থনীতিতে আংশিক অবকল-সমীকরণের উপপাদ্যগুলি প্রয়োগ করে চরম-অবম/অবম-চরম মান অপেক্ষকদের জন্য (যা একাধিক চল-সমৃদ্ধ) ব্যবহৃত হয়।

1.9 সংক্ষিপ্তসার

সেট হল বিভিন্ন বিষয়ের একত্রিত সমন্বয় (Collection of distinct objects)। এই বিষয় বা বস্তুর একটি সাধারণ বৈশিষ্ট্যকে কেন্দ্র করে সমন্বয়টি গড়ে তোলা হয়। যেমন ইংরাজী বর্ণমালার Vowels গুলির সমন্বয় নিয়ে একটা সেট তৈরী করা যায়।

আমরা বিভিন্ন ধরণের সেটের সঙ্গে পরিচিত হলাম। যেমন : সমগ্র সেট, অধীনস্থ সেট, শূন্যসেট, একক সেট। ভেনচিত্র (venn diagram) সহযোগ সেট ব্যবহারের নিয়মাবলী বিশদভাবে বোঝানো হয়েছে। যেমন সেটের পূরক, সেটের যোগ, বিয়োগ, গুণ ইত্যাদি। এছাড়া সেটের সূত্রগুলির প্রমাণ ভেন চিত্রের সাহায্যে অনায়াসেই করা সম্ভব।

1.10 অনুশীলনী

1. **নিচের উক্তিগুলি সঠিক (অর্থাৎ সত্য না মিথ্যা) কিনা বিচার করুন ঃ**

(a) A, B এবং C তিনটি সসীম সেট $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

(b) $(A') \neq A$

(c) $\varnothing = \{\varnothing\}$

(d) যদি $A' = \{e, f\}$, $B = \{a, d, e\}$ হয়, তবে $A' \cap B = \{e\}$

2. **কোন্ সেট সসীম তা বলুন ঃ**

(i) $\{1, 2, 3, 4, ..., 98, 99, 100\}$

(ii) 2019 সালের মাসগুলি দ্বারা গঠিত সেট

(iii) $S\ [x/1 < x < 10\}$ (x যেকোনো বাস্তব সংখ্যা)

(iv) অমূলদ (irrational) সংখ্যা দ্বারা গঠিত সেট।

3. যদি $X = \{x / x^2 = 4$ এবং $2x = 6\}$ হয়, তবে $X = ...$, শূন্যস্থান পূরণ করুন।

4. $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ এবং $\{0\}$ এরা পরস্পর পৃথক সেট কিনা যুক্তি দিয়ে স্থাপন করুন।

5. যদি $X = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ হলে $X - A$, $X - B$, $A - B$ নির্ণয় করুন।

6. যদি $A \subset B$ তবে প্রমাণ করুন $A \cap B = A$

7. যদি $X = \{2, 3, 4\}$, $Y = \{6, 7\}$, $Z = \{8, 9, 10\}$ হলে $X \times Y$, $Y \times Z$ এবং $X \times Y \times Z$ নির্ণয় করুন।

8. $A = \{a, b\}$, $Y = \{2, 3\}$, $Z = \{3, 4\}$ হলে

   (i) $A \times (Y \cup Z)$ (ii) $(A \times Y) \cap (A \times Z)$ নির্ণয় করুন।

9. প্রমাণ করুন যে, $A \subset B$ এবং $C \subset D$ হলে $A \times C \subset B \times D$.

10. যদি $A = \{2, 3, 4\}$ হয়, তবে $P(A) =$ কত?

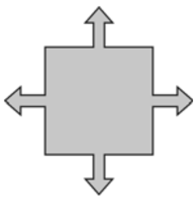
11. যদি $A \subset B$ হয়, তবে $A \cup (B/A) =$ কত হবে?

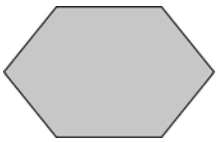
12. সেট প্রক্রিয়া দ্বারা প্রমাণ করুন যে, 48, 60 এবং 64-এর গ.সা.গু = 4

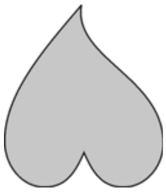
13. সেট প্রক্রিয়া দ্বারা দেখাও যে, 24, 63 এবং 72-এর ল.সা.গু = 504

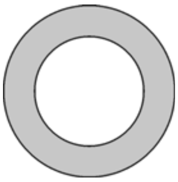
14. একটি সমীক্ষার ফলে দেখা যায় যে 62% লোক চা পছন্দ করে। 58% পছন্দ করে কফি এবং 65% উভয়কেই পছন্দ করে। কতজন লোক (%) চা ও কফি কোনোটাই পছন্দ করে না?

15. **নিচের প্রদত্ত সেটগুলির (ছায়াময় অঞ্চল/shaded region) থেকে কোন্‌গুলি উত্তল সেট (concave) তা উল্লেখ করুন।**

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

16. একটি উত্তল সেটের প্রান্ত বিন্দু (extreme point) কাকে বলে? প্রমাণ করুন যে X = {(x, y)/x + 2y ≤ 5} একটি উত্তল সেট (convex set)।

1.11 গ্রন্থপঞ্জী

1. Mathai and Rathie : Probability and Statistics, Palgrave MacMillan, New Delhi.
2. Goon, Gupta and Dasgupta : Fundamentals of Statistics Vol. I The World Press Pvt. Ltd., Kolkata.

একক 2(ক) ❑ সীমা

গঠন

2(ক).1 উদ্দেশ্য

এই এককটিতে আমরা অপেক্ষকের সীমা, সন্ততা, ল্যাপিটাল নিয়ম উদাহরণসহ আলোচনা করব।

2(ক).2 প্রস্তাবনা

যে কোনো অপেক্ষকের ক্ষেত্রে তা সন্তত না অসন্তত তার বিচার করা হয় ঐ অপেক্ষকের সীমাস্থ মান (limiting value)-কে কেন্দ্র করে। সপ্তদশ শতাব্দীতে গণিতজ্ঞ লাইবনিজের (Leibnitz) হাত ধরে এই প্রক্রিয়া শুরু হয়। পরবর্তী ক্ষেত্রে গণিত জগতে বিশেষভাবে বাস্তব বিশ্লেষণমুখী আলোচনার অকে ক্ষেত্রে সীমা ও সন্ততার ভূমিকা উল্লেখযোগ্য অবদান হিসাবে স্বীকৃতি পেয়েছে। বহু স্বনামধন্য গণিতজ্ঞের জ্ঞানগর্ভ আলোচনায় গণিতের এই শাখা দুটি পল্লবিতও হয়েছে বহুভাবে এবং এদের প্রয়োগিক দিক-বিজ্ঞান ও কারিগরি বিদ্যার জগতে সমভাবে উজ্জ্বল। গ্রীক দার্শনিক জীনো (500 B.C.) ধারণায় (দৌড় বীর অ্যামিলেন অ্যাকিলাস ও কচ্ছপের ঘটনা থেকে) সীমা প্রথম স্থান পায়। কবিগুরু রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর লিখেছেন ঃ ‘সীমার মাঝে অসীম তুমি...’

2(ক).3 সীমার সংজ্ঞা : বাস্তব সংখ্যার অক্ষ বরাবর

একটি সুনির্দিষ্ট অপেক্ষক f বা $f(x)$-এর সীমা l (যখন $l \in$ R) বলতে বুঝায় $f(x)$, l-এর যত নিকটবর্তী হচ্ছে x, a-এর নিকটবর্তী হচ্ছে। গাণিতিক ভাষায়, $|f(x) - l| < \varepsilon$ যখন $0 < |x - a| < \delta$ [এস্থলে ε এবং δ অতি ক্ষুদ্র ছোট ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা, δ আবার ε-এর উপর নির্ভরশীল] প্রতীকী প্রকাশ হল $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x) = l$

যদি x, a-এর যতটা নিকটবর্তী (ক্রমশঃ) হয় বাঁ দিক থেকে তখন $f(x)$, l_1-এর ক্রমশঃ নিকটবর্তী হয়, এমনভাবে যাতে $|f(x) - l_1| < \varepsilon$, যখন $a - \delta < x < a$, সেই সময় আমরা লিখি, $\underset{x \to a-}{\mathrm{Lt}} f(x) = l_1$ বা $f(a^-) = l_1$, l_1-কে $f(x)$-এর বাঁ দিকের সীমা বলা হয়। অনুরূপে, যদি $\varepsilon > 0$-এর জন্য $\delta > 0$-এর অস্তিত্ব থাকে এমনভাবে যাতে $|f(x) - l2| < \varepsilon$, যখন $a < x < a + \delta$। আমরা একে $\underset{x \to a+}{\mathrm{Lt}} f(x) = l_2$ বা $f(a^+) = l_2$ আকারে প্রকাশ করি। l_2-কে বলা হয় $f(x)$-এর ডান দিকের সীমা।

সুতরাং $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x) = l$ অস্তিত্বযুক্ত হবে যদি $\underset{x \to a-}{\mathrm{Lt}} f(x)$ এবং $\underset{x \to a+}{\mathrm{Lt}} f(x)$ পরস্পর সমান হয় অর্থাৎ $l_1 = l_2 = l$ বা $\underset{x \to a-}{\mathrm{Lt}} f(x) = \underset{x \to a+}{\mathrm{Lt}} f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x)$

একটি উদাহরণযোগে $\varepsilon - \delta$ সংজ্ঞাটি কিভাবে সীমা নির্ণয়ে প্রয়োগ করা যায় তা দেখানো হল।

❑ **উদাহরণ ঃ $\varepsilon - \delta$ সংজ্ঞানুসারে, $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{x^2}{x}$ নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, ε (> 0) এবং δ (> 0) অতি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র বাস্তব সংখ্যা যাতে $\left|\dfrac{x^2}{x} - 0\right| < \varepsilon$ যখন $0 < |x - 0| < \delta$ হয়।

সুতরাং $|x| < \varepsilon$ যখন $0 < |x| < \delta$

উপরিউক্ত সম্পর্কটি সত্য যখন $\delta = \varepsilon$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ -এর সীমাস্থ মান = 0 (উত্তর)

2(ক).4 সীমা সংক্রান্ত বিভিন্ন উপপাদ্য

○ **উপপাদ্য-1 ঃ যদি $\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lt}} f(x) = l$ এবং $\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lt}} g(x) = m$ হয়, তবে $\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lt}} [f(x) + g(x)] = l + m$.**

✦ **প্রমাণ ঃ** ধরি, δ এবং ε দুটি অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা (যতটা ক্ষুদ্র করে ভাবা যায়) তবে সীমার সংজ্ঞা অবলম্বনে আমরা লিখতে পারি যে, $|f(x) + g(x) - l - m| < \varepsilon$, যখন $0 < |x - x_0| < \delta$। এখন আমরাদের উপরিউক্ত উপপাদ্যানুসারে এটাই প্রমাণ করতে হবে।

দেওয়া শর্তানুসারে, $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} f(x) = l$

$\therefore |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ [যেখানে $\frac{\varepsilon}{2}$, δ_1 অতি ক্ষুদ্র দুটি ধনাত্মক সংখ্যা (বাস্তব)]... (1)

পুনরায়, $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} g(x) = m$ বলে অনুরূপভাবে বলা যায় যে

$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$ [যেখানে $\frac{\varepsilon}{2}$, δ_2 অতি ক্ষুদ্র দুটি ধনাত্মক (বাস্তব) সংখ্যা] ... (2)

ধরি, δ_1 ও δ_2-এর মধ্যে নিম্নমান (min value) হল δ (> 0) বাস্তব ধন-সংখ্যা।

অর্থাৎ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

এখন $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - l - m|$

$= |(f(x) - l) + (g(x) - m)|$

$\leq |f(x) - l) + |g(x) - m|$ [$\because$ $|\text{a} + \text{b}| \leq |\text{a}| + |\text{b}|$]

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ [(1)নং ও (2)নং সম্পর্ক থেকে]

এস্থলে, লক্ষণীয় যে, $\varepsilon > 0$ এবং $\delta < 0$ (যা ε-এর উপর নির্ভরশীল) হলে

$|f(x) + g(x) - l - m| < \varepsilon$, যখন $|x - x_0| < \delta$

সুতরাং, $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} [f(x) + g(x)] = l + m$ [প্রমাণিত]

বি.দ্র. অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} [f(x) + g(x)] = l - m$ যখন $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} [f(x) = l$ এবং $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} g(x) = m$

○ **উপপাদ্য–2 ঃ যদি $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} f(x) = l$ এবং $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} g(x) = m$ হয়, তবে $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$.**

✦ **প্রমাণ ঃ** উপপাদ্যটি প্রমাণের জন্য আমাদের দেখাতে হবে যে

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)\, g(x) - lm| < \varepsilon$ [যেখানে ε, δ উভয়েই অতি ক্ষুদ্র ধন সংখ্যা (বাস্তব)]... (i)

এখন, $|f(x)\, g(x) - lm|$

$= |f(x)\, g(x) - lg(x) + lg(x) - lm|$

$\leq |f(x)\, g(x) - lg(x)| + |lg(x) - lm|$ [$\because$ $|a + b| \leq |a| + |b|$]

$= |g(x)|\, |f(x) - l| + |l|\, |g(x) - m|$ ... (ii)

দেওয়া শর্ত থেকে পাই,

$\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} g(x) = m \Rightarrow g(x)$, $x = x_0$-এর নিকটবর্তী অঞ্চলে সীমাবদ্ধ (bounded)

সুতরাং $x = x_0$-তে, $|g(x)| < \mathrm{M}$, [$\mathrm{M} > 0$, বাস্তব সংখ্যা]

যখন সকল $x \in (x - x_0)$ মুক্ত অঞ্চলে, যা δ_1-এর থেকে ছোটো [$\delta_1 > 0$, বাস্তব সংখ্যা)

$\therefore\ |f(x)\, g(x) - lm| < \mathrm{M}\,|f(x) - l| + |l|\,|g(x) - m|$ [(ii)নং থেকে]

প্রদত্ত শর্ত থেকে, $\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lt}} f(x) = l$ এবং $\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lt}} g(x) = m$

সুতরাং, $\varepsilon > 0$ জন্য আমরা একটি ধন (বাস্তব) সংখ্যা $\delta\ (< \delta_1)$ পাব যার ফলে

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}} \text{ এবং } |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2|l|}$$

[যেখানে $\frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}} < \varepsilon$ এবং $\frac{\varepsilon}{2|l|} < \varepsilon$]

$$\therefore\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g(x) - lm|$$

$$< \mathrm{M}\cdot\frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}} + |l|\cdot\frac{\varepsilon}{2|l|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

উপরিউক্ত (i)নং তথ্য অনুসারে, $\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lt}} [f(x).g(x) = lm$ প্রমাণিত হল।

❍ **উপপাদ্য–2 ঃ যদি $\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lt}} f(x) = l$ এবং $\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lt}} g(x) = m$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$**

[যেমন, $g(x) \neq 0,\ m \neq 0$]

✦ **প্রমাণ ঃ** উপপাদ্যটি প্রমাণের জন্য আমাদের দেখাতে হবে যে

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \varepsilon \text{ যখন } |x - x_0| < \delta \text{ [যেখানে } \varepsilon \text{ ও } \delta \text{ উভয়েই অতি ক্ষুদ্র বাস্তব ধন সংখ্যা]} \quad \ldots \text{(i)}$$

এখন $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| = \left|\frac{f(x)}{m} - \frac{l}{m} - \frac{f(x)}{m} + \frac{f(x)}{g(x)}\right|$

$$\leq \left|\left\{\frac{1}{m}(f(x) - l)\right\}\right| + \left|\left\{\frac{f(x)}{mg(x)}(m - g(x))\right\}\right| \quad [\because\ |a + b| \leq |a| + |b|] \quad \ldots \text{(ii)}$$

দেওয়া শর্ত থেকে, $\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lt}} f(x) = l$ এবং $\underset{x \to x_0}{\mathrm{Lt}} g(x) = m\ (\neq 0)$

সুতরাং $\varepsilon > 0$-এর জন্য একটি $\delta\ (> 0)$ খুঁজে পাব

যখন $\left|\frac{1}{m}(f(x) - l)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ এবং $\left|\frac{f(x)}{g(x)}(m - g(x)\right|$ [$\varepsilon > 0$, $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ আরও ক্ষুদ্র বাস্তব সংখ্যা]

$$\therefore\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{[(ii)নং সম্পর্ক থেকে]}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \varepsilon$$

$$\therefore\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0\text{-এর জন্য, } |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \varepsilon$$

উপরিউক্ত (i)নং সম্পর্ক থেকে প্রমাণিত হয় যে, $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}\ (m \neq 0)$

2(ক).5 একটি বিন্দুতে সন্ততা

প্রাথমিকভাবে একটি একক মানযুক্ত বাস্তব অপেক্ষক হ'ল $f(x)$ বা f। ইহা $x = x_0$-তে সন্তত যখন $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} f(x) = f(x_0)$

এক্ষেত্রে, $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} f(x)$-এর অস্তিত্ব বজায় থাকে যখন

$\underset{x \to x_0+}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x \to x_0-}{\text{Lt}} f(x)$ হয় অর্থাৎ যখন $x \to x_0$ তখন $f(x)$-এর বাঁদিকের সীমাস্থ মান ডান দিকের সীমাস্থ মানের সমান।

কসির '$\varepsilon - \delta$' সংজ্ঞানুসারে $f(x)$-এর সন্ততা নিম্নোক্তভাবে ব্যক্ত করা যায়।

সংজ্ঞা ঃ ধরি, $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ সুসংজ্ঞাত E সেটের উপর, যেখানে E, R (সকল বাস্তব সংখ্যার সেট)-এর একটি উপসেট। এখন $f(x)$ একটি সসীম এক মানযুক্ত অপেক্ষক যা $x = x_0$-তে অর্থাৎ (x_0 সহ তার নিকটবর্তী অঞ্চলে) সন্তত হবে যদি

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ [যেখানে ε, δ উভয়েই অতি ক্ষুদ্র ধন সংখ্যা (বাস্তব)]

অর্থাৎ যদি $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ এই মুক্ত অবকাশে (in open-interval) থাকে তবে $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ এই মুক্ত অবকাশে বসবাস করবে।

বি.দ্র. ঃ f বা $f(x)$-এর সন্ততা সহজভাবে $f(x)$-এর সীমার সঙ্গে অঙ্গাঙ্গীভাবে জড়িত। কারণ, যদি $\underset{x \to x_0}{\text{Lt}} f(x) = l$ হয়, তবে f বা $f(x)$ সন্তত হচ্ছে শুধুমাত্র $l = f(x_0)$ হলে।

যখন $x = x_0$-তে f বা $f(x)$ সন্ততা বজায় রাখতে পারে না তখন $f(x)$-কে অসন্তত অপেক্ষক বলা হয়। লেখচিত্রের প্রাপ্ত ফল বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় f বা $f(x)$ সন্তত হলে তার লেখে (in graph) কোন ছেদ (gap) থাকে না। কিন্তু f বা $f(x)$-এর অসন্ততার ক্ষেত্রে লেখে এক বা একাধিক স্থলে ছেদ (gap) লক্ষ্য করা যায়। সাধারণভাবে যাকে 'a jump' বা 'একটি লাফ' বলে।

প্রকৃতপক্ষে, একটি লাফ = $\underset{x \to x_0+}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x \to x_0-}{\text{Lt}} f(x)$

❒ **উদাহরণ–1 ঃ প্রমাণ করুন যে, $f(x) = |x|$, $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত।**

☛ **সমাধান ঃ** এক্ষেত্রে, $f(x) = |x|$

অর্থাৎ $f(x) = x,\ x > 0$

$= -x,\ x < 0$

$= 0,\ x = 0$

এখন, $\underset{x\to 0-}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 0-}{\text{Lt}} (-x) = 0$

$\underset{x\to 0+}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 0+}{\text{Lt}} (x) = 0$

$x = 0$ বিন্দুতে, $f(x) = 0$

$\therefore\ f(0) = 0$

এস্থলে লক্ষণীয় যে, $\underset{x\to 0+}{\text{Lt}} f(x) = 0 = \underset{x\to 0-}{\text{Lt}} f(x)$

সুতরাং, $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} f(x) = 0$

পুনরায়, $f(0) = 0$

যেহেতু, $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} f(x) = 0 = f(0)$

সুতরাং, f বা, $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত। [প্রমাণিত]

❒ **উদাহরণ–2 ঃ দেখান যে,** $f(x) = \dfrac{|x|}{x},\ x \neq 0$

$= 0,\ x = 0$

অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে অসন্তত (discontinuous)

☛ **সমাধান ঃ** এক্ষেত্রে, $f(x) = 0$, যখন $x = 0$

$\therefore\ f(0) = 0$ অর্থাৎ $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$-এর মান অস্তিত্বযুক্ত।

এখন, $\underset{x\to 0-}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 0-}{\text{Lt}} \dfrac{|x|}{x} = \underset{x\to 0-}{\text{Lt}} \dfrac{(-x)}{x}$ [$\because\ x < 0$ হলে, $|x| = -x$]

$= -1$

$\underset{x\to 0+}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 0+}{\text{Lt}} \dfrac{|x|}{x} = \underset{x\to 0+}{\text{Lt}} \left(\dfrac{x}{x}\right)$ [$\because\ n > 0$ হলে, $|x| = x$]

$= 1$

যেহেতু $\underset{x\to 0-}{\text{Lt}} f(x) \neq \underset{x\to 0+}{\text{Lt}} f(x)$

সুতরাং, $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} f(x)$ অস্তিত্বহীন।

$\therefore f(0)$ সসীম হলেও, $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} f(x)$-এর সীমাস্থ মানের অস্তিত্ব নেই বলে $f(x)$ অসন্তত $x = 0$ বিন্দুতে। এটাই নির্ণেয় ফল।

❐ **উদাহরণ–3 ঃ দেখান যে, $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$**

$= 0$, $x = 0$ হলে,

$x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ সর্বদা সন্তত।

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে, $|f(x) - f(0)| = |x\sin\frac{1}{x} - 0|$

$= |x\frac{1}{\sin x}| = |x|\,|\sin\frac{1}{x}|$ [$x = 0$-তে $f(x) = 0 \;\therefore\; f(0) = 0$]

$\leq x$ [$\because |\sin\frac{1}{x}| \leq 1;\ |x|\,|\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$

$< \varepsilon$, যখন $0 < |x| < \delta$

যদি $\delta = \varepsilon$ ধরলে, $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} f(x) = f(0)$ [$\varepsilon - \delta$ সংজ্ঞানুসারে]

$\therefore x = 0$ বিন্দুতে, $f(x)$ সন্তত।

এটাই নির্ণেয় ফল।

❐ **উদাহরণ–4 ঃ যদি $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)$, $x \neq 0$**

$= 0$, $x = 0$ হয়, তবে দেখান যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত।

☛ **সমাধান ঃ** এখানে $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ (প্রদত্ত) ... (1)

(1)নং-তে $\sin x = t$ বসালে ($x \neq 0$, $t \neq 0$) পাই

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= t\sin\left(\frac{1}{t}\right),\ t \neq 0 \\ &= 0,\ t = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

(2)নং-তে অপেক্ষক $f(t)$ পূর্বোক্ত উদাহরণ-3 অনুসারে সর্বদা সন্তত $t = 0$ বিন্দুতে। সুতরাং, $f(x)$ একটি সন্তত অপেক্ষক $x = 0$ বিন্দুতে।

এটাই নির্ণেয় ফল।

❑ **উদাহরণ–5 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ** $\displaystyle \mathop{\mathbf{Lt}}_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

☛ **সমাধান ঃ** $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ,,,\right)}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

$$= \mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots}{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots} = \frac{\mathop{\mathrm{Lt}}\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{x^2}{20} + \ldots\right)}{\mathop{\mathrm{Lt}}\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{3!}\left(1 + \frac{x}{4} + \ldots\right)} = \frac{\mathop{\mathrm{Lt}}\limits_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{20} + \ldots\right)}{\mathop{\mathrm{Lt}}\limits_{x\to 0}\left(1 + \frac{x}{4} + \ldots\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

❑ **উদাহরণ–6 ঃ দেখান যে,** $\displaystyle \mathop{\mathbf{Lt}}_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

☛ **সমাধান ঃ** বাঁদিক = $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 3} \frac{x^2-3^2}{x-3} = \mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$

$$= \mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 3} (x+3) \quad [\because x \to 3,\ x-3 \to 0,\ x-3 \neq 0]$$

$$= \mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 3} x + 3$$

= 3 + 3 = 6 = ডানদিক।

এটাই নির্ণেয় ফল।

❑ **উদাহরণ–7 ঃ প্রমাণ করুন যে,** $\displaystyle \mathop{\mathbf{Lt}}_{x\to 0} \frac{x\log_e\sqrt{1+x}}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$

☛ **সমাধান ঃ** বাঁদিক = $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to \infty} \frac{x\log_e\sqrt{1+x}}{\sin^2 x}$

$$= \mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x\log_e(1+x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} \frac{x^2\log_e(1+x)}{x\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} \left\{\frac{\frac{\log_e(1+x)}{x}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot \frac{\mathop{\mathrm{Lt}}\limits_{x\to 0}\left\{\frac{\log_e(1+x)}{x}\right\}}{\mathop{\mathrm{Lt}}\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\frac{\log_e(1+x)}{x}\right\}}{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1^2} \quad [\because \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} = \text{ডানদিক [প্রমাণিত]}$$

❒ **উদাহরণ–8 ঃ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3} = -\frac{1}{10}$, প্রমাণ করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** বাঁদিক $= \lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+3x-2x-3}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{x(2x+3)-1(2x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)(2x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-1)(2x+3)} \quad \text{[লব ও হরকে } \left(\sqrt{x}+1\right) \text{ দিয়ে গুণ করে]}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)\left\{(\sqrt{x})^2-1^2\right\}}{(\sqrt{x}+1)(x-1)(2x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)(x-1)}{(\sqrt{x}+1)(2x+3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)}{(\sqrt{x}+1)(2x+3)} \quad [\because x\to 1,\ x-1\to 0,\ x-1\neq 0]$$

$$= \frac{(2\cdot 1-3)}{(\sqrt{x}+1)(2\cdot 1+3)} = \frac{2-3}{(1+1)\cdot 5} = \frac{-1}{2\cdot 5} = -\frac{1}{10} = \text{ডানদিক } \textbf{[প্রমাণিত]}$$

❒ **উদাহরণ–9 ঃ দেখান যে, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$**

☛ **সমাধান ঃ** বাঁদিক $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}$ $[\because \cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left\{\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\right\}^2 \quad [\because x\to 0,\ \frac{x}{2}\to 0]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2 \quad [\text{ধরি, } \frac{x}{2} = t]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2} = \text{ডানদিক।}$$

এটাই নির্ণেয় ফল।

2(ক).6 একটি অপেক্ষকের সীমার উদাহরণবলী (ল্যাপিটাল নিয়ম ব্যবহার না করে)

❑ **উদাহরণ–10 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ** $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sqrt[3]{1+\boldsymbol{x}}-\sqrt[3]{1-\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{x}}$

☛ **সমাধান ঃ** $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)\left\{(1+x)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+(1-x)^{\frac{2}{3}}\right\}}{x\left\{(1+x)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+(1-x)^{\frac{2}{3}}\right\}}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\left((1+x)^{\frac{1}{3}}-(1-x)^{\frac{1}{3}}\right)\left\{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}\right\}}{x\left\{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}\right\}}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\left\{(1+x)^{\frac{1}{3}}\right\}^3-\left\{(1-x)^{\frac{1}{3}}\right\}^3}{x\left\{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}\right\}}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{(1+x)-(1-x)}{x\left\{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}\right\}}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{2x}{x\left\{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}\right\}}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{2}{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}} \quad [\because x \to 0 \text{ অর্থাৎ } x \neq 0]$$

$$= \frac{2}{(1+0)^{\frac{2}{3}}+(1+0)^{\frac{1}{3}}(1-0)^{\frac{1}{3}}+(1-0)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

উত্তর ঃ $\dfrac{2}{3}$

❑ **উদাহরণ–11 ঃ** $\underset{\boldsymbol{x\to 0}}{\textbf{Lt}} \dfrac{\textbf{tan}^{-1}\boldsymbol{x}}{\textbf{sin}^{-1}\boldsymbol{x}}$ **= কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\tan^{-1}x}{\sin^{-1}x} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left(\dfrac{\tan^{-1}x}{\sin^{-1}x}\right)\left(\dfrac{x}{x}\right)$ $[\because x \to 0,\ x \neq 0]$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{\tan^{-1}x}{x}\right)\cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{x}{\sin^{-1}x}\right)$$

$$= \underset{p\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{p}{\tan p}\right)\cdot \underset{t\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)$$ [ধরি, $\tan^{-1} = p$ এবং $\sin^{-1}x = t$]

[এস্থলে, $x \to 0$, $p \to 0$ এবং $x \to 0$, $t \to 0$]

$$= \underset{p\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{p\cdot\cos p}{\sin p}\right)\cdot \underset{t\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)$$

$$= \underset{p\to 0}{\text{Lt}}\frac{\cos p}{\left(\frac{\sin p}{p}\right)}\cdot 1 = \frac{\underset{p\to 0}{\text{Lt}}\cos p}{\underset{p\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{\sin p}{p}\right)} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

উত্তর ঃ 1

❑ **উদাহরণ–12 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ** $\underset{x\to 0}{\textbf{Lt}}\dfrac{(e^x-1)\log_e(1+x)}{\sin x}$

☛ **সমাধান ঃ** $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{(e^x-1)\log_e(1+x)}{\sin x}$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left\{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\left(\frac{\log_e(1+x)}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{\sin x}\right\}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\log_e(1+x)}{x}\cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{x}{\sin x}\cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\, x$$

$$= 1\cdot 1\cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\, x$$

$$= \frac{1}{\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\, x = \frac{1}{1}\cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\, x = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\, x = 0$$

উত্তর ঃ 0

❑ **উদাহরণ–13 ঃ** $\underset{x\to 0}{\textbf{Lt}}\dfrac{\sin x^0}{x}$ **= কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\sin x^0}{x} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)}{x}$ [‘c’ = রেডিয়ান, $\therefore$ $180° = \pi^c \Rightarrow 1° = \dfrac{\pi^c}{180}$]

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)}{\left(\frac{\pi x}{180}\right)\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)}{\left(\frac{\pi x}{180}\right)}\cdot\frac{\pi}{180}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{180} \cdot \underset{t \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\sin t}{t}\right) \quad \text{[ধরি, } \frac{\pi x}{180} = t, \text{ এস্থলে } x \to 0 \text{ মানে } t \to 0]$$

$$= \frac{\pi}{180} \cdot 1 = \frac{\pi}{180}$$

উত্তর ঃ $\frac{\pi}{180}$

❒ **উদাহরণ–14 ঃ যদি $G(x) = -\sqrt{25-x^2}$ হয়, তবে $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{G(x)-G(1)}{x-1}$ -এর মান কত?**

☛ **সমাধান ঃ** শর্তানুসারে, $G(x) = -\sqrt{25-x^2}$

$$\therefore\ G(1) = -\sqrt{25-1^2} = \sqrt{25-1} = -\sqrt{24}$$

সুতরাং, $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{G(x)-G(1)}{x-1} = \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{-\sqrt{25-x^2}-(-\sqrt{24})}{x-1}$

$$= \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{\sqrt{24}-\sqrt{25-x^2}}{x-1} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{(\sqrt{24}-\sqrt{25-x^2})(\sqrt{24}+\sqrt{25-x^2})}{(x-1)(\sqrt{24}+\sqrt{25-x^2})}$$

$$= \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{(\sqrt{24})^2-(\sqrt{25-x^2})^2}{(x-1)(\sqrt{24}+\sqrt{25-x^2})} = \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{(x^2-1)}{(x-1)(\sqrt{24}+\sqrt{25-x^2})}$$

$$= \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{24}+\sqrt{25-x^2})} \quad [\because\ x \to 1 \Rightarrow x-1 \neq 0]$$

$$= \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{(x+1)}{(\sqrt{24}+\sqrt{25-x^2})} = \frac{\underset{x \to 1}{\text{Lt}}\,(x+1)}{\underset{x \to 1}{\text{Lt}}\,\sqrt{24}+\sqrt{25-x^2}}$$

$$= \frac{1+1}{\sqrt{24}+\sqrt{25-1^2}} = \frac{2}{2\sqrt{6}+2\sqrt{6}} = \frac{2}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

উত্তর ঃ $\frac{1}{2\sqrt{6}}$

❒ **উদাহরণ–15 ঃ $\underset{x \to -\infty}{\text{Lt}} \frac{x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)+|x|^2}{1+|x|^3}$ = কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\underset{x \to -\infty}{\text{Lt}} \frac{x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)+|x|^2}{1+|x|^3}$

$$= \underset{x \to -\infty}{\text{Lt}} \frac{x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2}{1-x^3} \qquad \text{[ধরি, } x = \frac{1}{t} \text{ বা, } t = \frac{1}{x} \text{ যখন } x \to -\infty,\ t \to (-0)]$$

$$= \underset{t\to 0^-}{\text{Lt}} \frac{\left(\frac{1}{t^4}\right)(\sin t)+\left(\frac{1}{t}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{t}\right)^3} \quad [t \to (-0) \text{ অর্থাৎ } t \to 0^-]$$

$$= \underset{t\to 0^-}{\text{Lt}} \frac{t^3\left[\left(\frac{1}{t^4}\right)(\sin t)+\frac{1}{t^2}\right]}{t^3-1} = \underset{t\to 0^-}{\text{Lt}} \left(\frac{\frac{\sin t}{t}+t}{t^3-1}\right)$$

$$= \frac{\underset{t\to 0^-}{\text{Lt}}\left(\frac{\sin t}{t}+t\right)}{\underset{t\to 0^-}{\text{Lt}}(t^3-1)} = \frac{1+0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

উত্তর ঃ –1

❒ **উদাহরণ–16 ঃ** $\underset{x\to\infty}{\textbf{Lt}}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+4}$ **= কত?**

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+4} = p$

$$\therefore \log_e p = \underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\left\{(x+4)\log_e\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\right\}$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\left[(x+4)\log_e\left\{\frac{(x+1)+1}{(x+1)}\right\}\right]$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\left[\frac{(x+4)}{(x+1)}\cdot(x+1)\log_e\left\{1+\frac{1}{x+1}\right\}\right]$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\left[1+\frac{3}{x+1}\cdot(x+1)\log_e\left\{1+\frac{1}{x+1}\right\}\right]$$

$$= \underset{t\to 0}{\text{Lt}}\left\{(1+3t)\cdot\frac{1}{t}\log_e(1+t)\right\} \quad \left[\text{ধরি, } \frac{1}{x+1} = t,\ x \to \infty,\ t \to 0\right]$$

$$= \underset{t\to 0}{\text{Lt}}\left\{(1+3t)\cdot\frac{1}{t}\log_e(1+t)\right\}$$

$$= \underset{t\to 0}{\text{Lt}}(1+3t)\cdot\underset{t\to 0}{\text{Lt}}\frac{\log_e(1+t)}{t}$$

$$= (1+3.0)\cdot 1 = 1\cdot 1 = 1$$

সুতরাং, $p = e^1 = e$

$$\therefore \underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+4} = e \text{ (উত্তর)}$$

❒ **উদাহরণ–17 ঃ** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\log_e\left(1-\frac{x}{2}\right)$ **= কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\log_e\left(1-\frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left\{-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\ldots\right\}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{8}\right)-\ldots\right\}}{x}\right] \quad [\because \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x^2}{8}\right)-\ldots\right\} \quad [\because x \to 0 \Rightarrow x \neq 0]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{8}\right)-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{24}-\ldots$$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}(0) - \frac{1}{24}(0) - \ldots = -\frac{1}{2}$ (যেহেতু, অপর সমস্ত অংশের সীমা শূন্য)

উত্তর ঃ $-\frac{1}{2}$

❒ **উদাহরণ–18 ঃ প্রমাণ করুন ঃ** $\lim\limits_{y\to 0}\frac{(x+y)\sec(x+y)-x\sec x}{y}$ **= sec$x$(x tan$x$ + 1)**

☛ **সমাধান ঃ** বাঁদিক = $\lim\limits_{y\to 0}\frac{(x+y)\sec(x+y)-x\sec x}{y}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{x\{\sec(x+y)-\sec x\}}{y} + \lim_{y\to 0}\frac{y\sec(x+y)}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{x}{y}\left\{\frac{1}{\cos(x+y)}-\frac{1}{\cos x}\right\}+\lim_{y\to 0}\sec(x+y) \quad [\because y \to 0 \Rightarrow y \neq 0]$$

$$= \lim_{y\to 0} x\left[\frac{\cos x-\cos(x+y)}{y\cdot\cos(x+y)\cos x}\right] + \sec x$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[\frac{x\left[2\sin\left\{\frac{x+(x+y)}{2}\right\}\sin\frac{(x+y)-x}{2}\right]}{y\cos(x+y)\cos x}\right] + \sec x$$

$$= \lim_{y\to 0}\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\frac{y}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\left\{\frac{x}{\cos x\cos(x+y)}\right\}+\sec x$$

$$= \sin x \cdot \underset{\frac{y}{2}\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\frac{y}{2}} \underset{y\to 0}{\text{Lt}} \left\{\frac{x}{\cos x \cdot \cos(x+y)}\right\} + \sec x$$

$$= \sin x \cdot 1 \cdot \frac{x}{\cos^2 x} + \sec x \ [\because y \to 0, \frac{y}{2} \to 0]$$

$$= x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} + \sec x = x \tan x \sec x + \sec x$$

$= \sec x(x \tan x + 1) =$ ডানদিক **(প্রমাণিত)**

❑ **উদাহরণ–19 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ** $\underset{x\to\infty}{\mathbf{Lt}} \left(\frac{\mathbf{2x+3}}{\mathbf{2x+1}}\right)^{\mathbf{x+1}}$

☛ **সমাধান ঃ** $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \left\{\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x}\right\}$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \left\{\left(\frac{\frac{2x+3}{2x}}{\frac{2x+1}{2x}}\right)\left(\frac{\frac{2x+3}{2x}}{\frac{2x+1}{2x}}\right)^{x}\right\} \quad [\because x \to \infty, \frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \neq 0]$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \left\{\frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)} \cdot \frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x}\right\} = \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \left(\frac{1+\frac{3}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right) \cdot \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \left(\frac{1+\frac{3}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^x$$

$$= \underset{t\to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{1+3t}{1+t}\right) \cdot \underset{t\to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{1+3t}{1+t}\right)^{\frac{1}{2t}}$$

$[\ x \to \infty, \frac{1}{x} \to 0, \therefore \frac{1}{2x} \to 0,$ ধরি, $\frac{1}{2x} = t$ বা $x = \frac{1}{2t}\ ]$

$$= \left(\frac{1+3\cdot 0}{1+0}\right) \cdot \left[\frac{\underset{t\to 0}{\text{Lt}} \left\{(1+3t)^{\frac{1}{3t}}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\underset{t\to 0}{\text{Lt}} \left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= \left(\frac{1+0}{1+0}\right)\left[\frac{\left\{\underset{p\to 0}{\text{Lt}} (1+p)^{\frac{1}{p}}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left\{\underset{t\to 0}{\text{Lt}} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{\frac{1}{2}}}\right] = \frac{1 \cdot e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} \quad [\text{ধরি}, 3t = p, t \to 0, p \to 0, \because \underset{x\to 0}{\text{Lt}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e]$$

$$= e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = e^{\frac{2}{2}} = e^1 = e$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= e$ (উত্তর)

2(ক).7 ল্যাপিটালের নিয়মের ধারণা

সাধারণভাবে $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ -কে $\dfrac{\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ f(x)}{\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ g(x)}$ আকারে প্রকাশ করা হয়। কিন্তু উভয়ক্ষেত্রে (অর্থাৎ লব ও হরের ক্ষেত্রে) সীমাস্থ মান শূন্য (0) হলে সামগ্রিকভাবে ব্যাপারটি অর্থহীন হয়ে যায়। যদি $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\dfrac{f(x)}{g(x)}\left(\dfrac{0}{0}\right)$ আকারে থাকে তবে সীমাস্থ মান নির্ণেয়র জন্য ল্যাপিটালের সূত্র বা নিয়মটি অনুসরণ করা হয়। একে সীমাস্থ মান নির্ধারণের 'অনির্ণেয় আকার' (indeterminate form) বলে গণ্য করা হয়। শুধু মান $\left(\dfrac{0}{0}\right)$-ই নয় এ নিয়মের অধীনে $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ বা, $(0 \times \infty)$, $\infty - \infty$ সমস্ত আকারকে অন্তর্গত করা যায়।

ল্যাপিটালের সূত্র বা নিয়ম ঃ যদি $f'(x)$ এবং $g'(x)$ -কে যথাক্রমে $f(x)$ এবং $g(x)$ অন্তরকলজ হিসাবে ধরা হয় এবং এরা প্রত্যেকে $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হয় এবং যদি $f(a)$ এবং $g(a)$-এর মান শূন্য হয়, তবে

$$\underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \text{ যখন, } g'(a) \neq 0$$

এ সূত্রের পিছনে কার্যকরী ভূমিকা হিসাবে (i) $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x) = f(a)$ (যেখানে $f(x)$, $x = a$-তে সন্তত) (ii) প্রয়োজনীয় শর্ত হিসাবে $f'(a)$ সসীম হলে, $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ অবশ্যই সন্তত হবে, এর অবদান অনস্বীকার্য।

❑ **উদাহরণ–1 ঃ $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ = কত? (যুক্তিসহ নির্ণয় করুন)** **[CU 1995]**

☛ **সমাধান ঃ** $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right.$ আকার বিশিষ্ট)

$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\cos x - 1}{3x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)$ [লব ও হর অংশে অন্তরকলজ করে তাতে $x = 0$ বসালে, $\dfrac{0}{0}$ আকার পাওয়া যায়]

$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{(-\sin x)}{6x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right.$ আকার)

$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{(-\cos x)}{6} = -\dfrac{1}{6}$ [$\because \cos 0 = 1$]

উত্তর ঃ নির্ণেয় মান $= -\dfrac{1}{6}$

❑ **উদাহরণ–2 ঃ** $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}(\tan x)^{\frac{1}{x}}$ **-এর মান নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, $p = (\tan x)^{\frac{1}{x}}$

উভয় পক্ষে log নিয়ে পাই [এক্ষেত্রে log-এর নিধান (base) হল 'e']

$$\log_e p = \frac{1}{x}\log_e\left(\frac{\tan x}{x}\right)$$

এখন, $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}(\log_e p) = \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left\{\dfrac{\log_e\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x}\right\}$ [($\frac{0}{0}$) আকার যুক্ত কারণ, $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\dfrac{\tan x}{x}=1$, $\log 1 = 0$]

$$= \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[\frac{\left\{\frac{x\sec^2 x-(\tan x)\cdot 1}{x^2}\right\}\frac{x}{\tan x}}{1}\right] = \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}-\frac{1}{x}}{1}\right]$$

$$= \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{1}{x}\right] = \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{x}\right]$$

$= \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[\dfrac{2x-\sin 2x}{x\sin 2x}\right]$ [($\frac{0}{0}$) আকার যুক্ত]

$$= \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[\frac{2(1-\cos 2x)}{(\sin 2x)\cdot 1+2x\cos 2x}\right]$$

$= 2\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x+2x\cos 2x}\right]$ [($\frac{0}{0}$) আকার যুক্ত কারণ, যখন $x = 0$, $\cos 2x = 1$, $\sin 2x = 0$]

$$= 2\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[\frac{2\sin 2x}{2\cos 2x+2\cos 2x-4x\sin 2x}\right]$$

$= 2\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[\dfrac{\sin 2x}{4\cos 2x-4x\sin 2x}\right]$ [($\frac{0}{0}$) আকার যুক্ত]

$$= \left(\frac{4}{4}\right)\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[\frac{\sin 2x}{\cos 2x-x\sin 2x}\right] = \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[\frac{\sin 2x}{\cos 2x-x\sin 2x}\right]$$

$$= \frac{\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\sin 2x}{\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\cos 2x-\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}(x\sin 2x)} = \frac{0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\log_e\left(\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\,p\right) = 0$$

বা, $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\,p = e^0$ বা, $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}(\tan x)^{\frac{1}{x}} = 1$

সুতরাং, $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}(\tan x)^{\frac{1}{x}}$ -এর মান = 1 (উত্তর)।

❑ **উদাহরণ–3 ঃ $\underset{x\to a}{\mathbf{Lt}}\dfrac{\mathbf{1-\cos(}x-a\mathbf{)}}{\mathbf{(}x-a\mathbf{)^2}}$-এর মান নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\dfrac{1-\cos(x-a)}{(x-a)^2}$

$$= \underset{z\to 0}{\text{Lt}}\frac{1-\cos z}{z^2} \quad [(\frac{0}{0})\text{ আকার}]\ [\text{ধরি, } x-a = z \text{ যখন } x\to a,\ z\to 0]$$

$$= \underset{z\to 0}{\text{Lt}}\frac{0-(-\sin z)}{2z} = \underset{z\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{\sin z}{2z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underset{z\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = $\frac{1}{2}$ (উত্তর)

❑ **উদাহরণ–4 ঃ দেখান যে, $\underset{x\to 0}{\mathbf{Lt}}\dfrac{\mathbf{\sin(}a+x\mathbf{)+\sin(}a-x\mathbf{)}-2\sin a}{x\sin x} = -\sin a$**

☛ **সমাধান ঃ** বাঁদিক = $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a}{x\sin x}$ $(\frac{0}{0}$ আকার)

L'Hospital নিয়ম প্রয়োগ করে পাই

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)-0}{\sin x + x\cos x} \quad (\frac{0}{0}\text{ আকার})$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{-\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\cos x+\cos x - x\sin x}$$

$$= \frac{-\sin a - \sin a}{1+1-0} = \frac{-2\sin a}{2} = -\sin a$$ = ডানদিক। এটাই নির্ণেয় ফল।

❑ **উদাহরণ–5 ঃ যদি $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $\underset{x\to 0}{\mathbf{Lt}}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x} = 1$**

☛ **সমাধান ঃ** এক্ষেত্রে, $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$

উভয়পক্ষে log নিয়ে পাই, (লগের নিধান = e)

$$\log y = \tan x \log(\frac{1}{x})$$

$$\lim_{x\to 0}(\log y) = \lim_{x\to 0}\left\{\tan x \log\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x} \quad (\tfrac{0}{0} \text{ আকার})$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{(-\text{cosec}^2 x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\times x\right) = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \lim_{x\to 0} x$$

$$= 1^2 \times 0 = 0$$

$$\therefore \log_e\left(\lim_{x\to 0} y\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = 1 \text{ (প্রমাণিত)}$$

❑ **উদাহরণ–6 ঃ যদি $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + a\sin x}{x^3}$ সসীম হয় তবে a-এর মান কত? সীমার মানও নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** প্রদত্ত সীমা $\frac{0}{0}$ আকারে থাকায় $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2\cos 2x + a\cos x}{3x^2}\right\}$ (ল্যাপিটাল নিয়মে)

এখন $x \to 0$, $3x^2 = 0$, $x \to 0$ লব অংশে $2 + a = 0$ অর্থাৎ $a = -2$

$a = -2$ হলে সীমাটি রূপান্তরিত হয় নিচের আকারে

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3} \quad [\tfrac{0}{0} \text{ আকারে}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x - 2\cos x}{3x^2} \quad [\tfrac{0}{0} \text{ আকারে}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x + 2\sin x}{6x} \quad [\tfrac{0}{0} \text{ আকারে}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-8\cos 2x + 2\cos x}{6} = \frac{-8\cos 0 + 2\cos 0}{6} = \frac{-8\cdot 1 + 2\cdot 1}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

$\therefore$ নির্ণেয় সীমার মান $= -1$ (উত্তর)

❑ **উদাহরণ–7 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$**

☛ **সমাধান ঃ** প্রশ্ন থেকে

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x - 0 + 2x}{4x^3} \quad [\tfrac{0}{0} \text{ আকারে থাকায় ল্যাপিটাল নিয়মে}]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{4x^3} \quad [\frac{0}{0} \text{ আকারে থাকায় পূর্বের নিয়মে}]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 2}{12x^2} \quad [\frac{0}{0} \text{ আকারে থাকায় পূর্বের নিয়মে}]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + 0}{24x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{24x}$$

$$= \frac{1}{12} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{12}\cdot 1 = \frac{1}{12}$$

উত্তর ঃ নির্ণেয় মান = $\frac{1}{12}$

❒ **উদাহরণ–8 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\tan x$

☛ **সমাধান ঃ** প্রদত্ত সীমাটির আকার হ'ল $0 \times \infty$

সুতরাং $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)}{\cot x}$ [$\frac{0}{0}$ আকারে থাকায় ল্যাপিটাল নিয়মে]

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos x)}{(-\operatorname{cosec}^2 x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{0}{1^2} = \frac{0}{1} = 0 \quad [\because \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 \text{ এবং } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec} x = 1]$$

উত্তর ঃ 0

❒ **উদাহরণ–9 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ** $\lim_{x\to 0}\left(x^{2\sin x}\right)$

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, $y = x^{2\sin x}$

উভয় পক্ষে লগ (log) নিয়ে পাই, (লগের নিধান = e)

$\log_e y = (2\sin x) \log_e x$

$$\lim_{x\to 0} (\log_e y) = \lim_{x\to 0} \{(2\sin x)\log_e x\}$$

$$\Rightarrow \log_e\left(\lim_{x\to 0} y\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2\log x}{\operatorname{cosec} x} \quad [\frac{0}{0} \text{ আকারে, (ল্যাপিটাল নিয়ম প্রয়োগে}]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{(-\operatorname{cosec} x \cot x)} = (-2) \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\right) \quad [\frac{0}{0} \text{ আকারে}]$$

$$= (-2) \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 \sin x \cos x}{1 \cdot \cos x - x \sin x} = (-2) \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin 2x}{\cos x - x \sin x}$$

$$= (-2) \left[\frac{\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \sin 2x}{\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (\cos x - x \sin x)} \right] = (-2) \times \left(\frac{0}{1-0} \right) = -2 \times 0 = 0$$

$\therefore \underset{x \to 0}{\text{Lt}}\, y = e^0 = 1$

সুতরাং, $\underset{x \to 0}{\text{Lt}}\, x^{\sin x} = 1$

❑ **উদাহরণ–10 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ** $\underset{x \to 0}{\textbf{Lt}} \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right\}^{\frac{1}{x}}$

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, $y = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right\}^{\frac{1}{x}} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} \right)^{\frac{1}{x}}$

$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \right)^{\frac{1}{x}}$ $[\because \tan \frac{\pi}{4} = 1]$ (ল্যাপিটাল নিয়মে)

এখন $\log_e y = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\log(1 + \tan x) - \log(1 - \tan x)}{x}$ $[\frac{0}{0}$ আকার বিশিষ্ট]

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} + \frac{\sec^2 x}{1 - \tan x} \right) = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 \sec^2 x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \cdot 1^2}{1 - 0^2} = \frac{2}{1} = 2$$

$\therefore \log_e y = 2$ বা, $y = e^2$ অর্থাৎ $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right\}^{\frac{1}{x}} = e^2$ (উত্তর)

2(ক).8 কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ সীমা সংক্রান্ত সূত্র

(a) যদি n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে $\underset{x \to a}{\text{Lt}}\, x^n = a^n \; (a \neq 0)$

(b) যদি n একটি ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে $\underset{x \to a}{\text{Lt}}\, x^n = a^n \; (a \neq 0)$

(c) যদি n একটি মূলদ সংখ্যা হয়, তবে $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

(d) যদি n একটি মূলদ সংখ্যা হয়, তবে $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$

(e) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(f) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x}{x} = 1$ (যখন x-কে রেডিয়ান এককে প্রকাশ করা হয়)

(g) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$

(h) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a \ (a > 0)$

(i) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(j) $\underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

2(ক).9 সংক্ষিপ্তসার

এই এককে সীমা (limit) সম্পর্কে একটা নির্দিষ্ট ধারণা দেওয়া হয়েছে।

একটি সুনির্দিষ্ট অপেক্ষক $f(x)$-এর সীমা 'L' বলতে বুঝায় $f(x)$ যত L এর নিকটবর্তী হয়, x তত 'a'-র নিকটবর্তী হবে। $|f(x) - L| < \in$ যখন $0 < |x - a| < \delta$ (যখন $\in$ এবং δ অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং δ আবার $\in$ এর উপর নির্ভরশীল)

প্রতীকের সাহায্যে লেখা যায় $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = L$

এখন x বাঁ দিক থেকে যত ক্রমশঃ 'a'-র নিকটবর্তী হয়, ততই $f(x)$, l_1-এর ক্রমশঃ নিকটবর্তী হবে। এই l_1 হল $f(x)$-এর বাঁ দিকের সীমা। প্রতীকী উপস্থাপনা : $\underset{x \to a^-}{Lt} f(x) = L_1$

একইভাবে x যত ডানদিকের থেকে 'a'-র নিকটবর্তী হবে, তত $f(x)$ l_2-এর নিকটবর্তী হতে থাকবে। এই l_2 হল $f(x)$-এর ডানদিকের সীমা। এবার $\underset{x \to a^+}{Lt} f(x) = L_2$ $f(x)$-এর ডানদিকের সীমার প্রতীকী প্রকাশ।

এখন $L_1 = L_2 = L$ এর অস্তিত্ব নির্ভর করবে যখন $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = L$ হবে অর্থাৎ $\underset{x \to a^-}{Lt} f(x) = \underset{x \to a^+}{Lt} f(x)$

এখানে $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = a$ বিন্দুতে সন্তত (continuous) হবে। অর্থাৎ সীমান্ত মান (limiting value) এবং সন্ততা (continuity) এই দুটি ধারণা পরস্পর সম্পর্কযুক্ত।

2(ক).10 অনুশীলনী

ল্যাপিটাল নিয়মে সীমাস্থ মান নির্ণয় করুন ঃ

1. যদি $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^x - ae^{x\cos x}}{x - \sin x}$ -এর অস্তিত্ব সসীম হয়, তবে a-এর মান নির্ণয় করুন। সীমাস্থ মান কত হবে?

2. দেখান যে, $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan x}\right) = 0$

3. প্রমাণ করুন ঃ $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left(\text{cosec}^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{3}$

4. দেখান যে, $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$

5. $\underset{x\to 1^-}{\text{Lt}} (1-x)\dfrac{1}{2\sec \pi x}$ -এর সঠিক মান নির্ণয় করুন ঃ –1, 0, 1, 2

6. প্রমাণ করুন যে, $\underset{t\to \infty}{\text{Lt}} \left(\sqrt{t^2 + 2t} - t\right) = 1$

সীমা সংক্রান্ত (A)

1. প্রমাণ করুন যে, $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 7x + 1}{3x^2 + 5x + 2} = \dfrac{1}{2}$

2. মান নির্ণয় করুন ঃ $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

3. প্রমাণ করুন ঃ $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \dfrac{2}{3}$

4. $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} (1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ -এর মান হবে...

5. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1}$ হবে $\dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{2}, 0$ কোন্‌টি সঠিক উত্তর তা নির্ণয় করুন।

6. প্রমাণ করুন ঃ $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin 3x} = \dfrac{1}{16}$

7. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^{ax}-1}{\sin bx}$ -এর মান কত হবে তা নির্ণয় করুন।

8. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$-এর মান নিচের লেখা কোন্ মানটি হবে তা নির্ণয় করুন ঃ

$1, \ \dfrac{1}{2}, \ \dfrac{1}{3}, \ \dfrac{1}{7}$

9. $\underset{x \to 3}{\text{Lt}} \dfrac{3-\sqrt{6+x}}{\sqrt{3}-\sqrt{6-x}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ কি সঠিক? তা পরীক্ষা করুন।

10. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সন্ততা বিষয়ক (B)

1. প্রমাণ করুন যে, f বা $f(x)$ সন্তত $x = 1$ বিন্দুতে যখন

$$f(x) = 5x - 4, \quad 0 < x \le 1$$
$$= 4x^3 - 3x, \quad 1 < x < 2$$

2. যদি $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x}, \ x \ne 1$

এবং $f(0) = 1$ হয়, তবে $f(x)$-এর সন্ততা পরীক্ষা করো $x = 0$ বিন্দুতে।

3. দেখান যে $f(x) = \dfrac{|x-a|}{x-a}, \ x \ne a$

$= 1, \quad x = a$ হলে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ অসন্তত।

4. যদি $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$, $x \ne 1$ হয়, তবে $f(1)$-এর মান কত হলে, $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত হবে তা নির্ণয় করুন।

5. k-এর মান এমনভাবে নির্ণয় করুন যাতে

$$f(x) = kx^2, \quad x \le 2$$
$$= 3, \quad x > 2$$

$x = 2$ বিন্দুতে সন্তত হয়।

6. (i) যদি $f(x) = \dfrac{2x^2+6x-5}{12x^2+x-20}$ হয়, তবে x-এর কোন্ কোন্ মানের জন্য $f(x)$ অসন্তত হবে তা স্থির করুন।

(ii) যদি $f(x) = \dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$, $x < 0$

$= \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{16+\sqrt{x}}-4}$, $x > 0$

$= a$, $x = 0$ হয়, তবে a-এর মান নির্ণয় করুন যাতে $f(x)$, $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত হয়।

2(ক).11 গ্রন্থপঞ্জী

1. Das and Mukherjee : Differential Calculus, U.N. Dhur & Sons, Kolkata.
2. Shanti Narayan and Mittal : Differential Calculus, S. Chand, New Delhi.
3. Gorakh Prasad : Differential Calculus, Pothishala Pvt. Ltd. Allahabad.

একক 2(খ) ❑ সন্ততা এবং অন্তরকলন

গঠন

2(খ).1 উদ্দেশ্য

এই এককে সুসংহত অপেক্ষকের সন্ততা ও অন্তরকলজ (ক্রম এক এবং দুই) সম্পর্কে আলোচনা হয়েছে। কতকগুলি গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণও সংযোজিত আছে।

2(খ).2 প্রস্তাবনা

কলনবিদ্যার অপরিহার্য অংশ হল অপেক্ষকের সন্ততা/অসন্ততা এবং তার অন্তরকল সম্পর্কে ধারণা।

(a) **সন্তত অপেক্ষকের সংজ্ঞা (Definition of continous function)** ঃ $x = c$ বিন্দুতে একটি সুসংজ্ঞাত অপেক্ষক সন্তত হবে যদি নিচের তিনটি শর্ত মেনে চলে।

(i) $\underset{x \to c}{\mathrm{Lt}}\, f(x)$ অস্তিত্ব যুক্ত হবে

(ii) $f(c)$ নির্দিষ্ট মানের হবে

(iii) $\underset{x \to c}{\mathrm{Lt}}\, f(x) = f(c)$ হবে।

এই তিন শর্তের কোন একটিকে অমান্য করলে অপেক্ষকটি অসন্তত (discontinuous) হয়ে যাবে।

উদাহরণ ঃ ধরি, $f(x) = 4x + 5$, $x = 1$ বিন্দুতে; (বিন্দুকেন্দ্রিক সন্ততা)

এক্ষেত্রে, $\underset{x \to 1^+}{\mathrm{Lt}} f(x)$ [ডান দিকের সীমা]

$$= \underset{x \to 1^+}{\mathrm{Lt}} (4x + 5) = 4 \underset{x \to 1^+}{\mathrm{Lt}}\, x + 5 = 4(1) + 5 = 9$$

$\underset{x \to 1^-}{\mathrm{Lt}} f(x)\, f(x)$ [বাঁদিকের সীমা]

$$= \underset{x \to 1^-}{\mathrm{Lt}} (4x + 5) = 4 \underset{x \to 1^-}{\mathrm{Lt}}\, x + 5 = 4(1) + 5 = 9$$

যেহেতু $\underset{x \to 1^+}{\mathrm{Lt}} f(x) = 9 = \underset{x \to 1^-}{\mathrm{Lt}} f(x)$, সুতরাং $\underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} f(x) = 9$

পুনরায়, $x = 1$-তে, $f(1) = 4 \cdot (1) + 5 = 9$

$\therefore \underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} f(x) = 9 = f(1)$ বলে, $x = 1$-তে প্রদত্ত অপেক্ষক f বা $f(x)$ সন্তত।

(b) **কসির বিশ্লেষণমুখী সংজ্ঞা (Analytical definition of Cauchy) ঃ** অপেক্ষক f বা $f(x)$ একটি এক-মানযুক্ত (single valued) হয়ে $x = c$ বিন্দুতে সন্তত হবে যদি $f(c)$-এর সসীম মান বজায় থাকে $x = c$-তে এবং ধরি, 'ε' একটি অতিক্ষুদ্র ধনাত্মক রাশি (পূর্ব নির্ধারিত) যার জন্য আরও একটি অতিক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা পাওয়া যাবে (যে δ, ε উপর নির্ভরশীল) যাতে

$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, যখন $|x - c| < \delta$ (সকল x-এর মানের জন্য)।

বি.দ্র. ঃ

(i) কোনো অপেক্ষক f বা $f(x)$ যদি $[a, b]$ বন্ধ অবকাশে (closed interval) সন্তত হয় তবে উহা ঐ অবকাশের প্রতিটি বিন্দুতে অবশ্যই সন্তত (continuous) হবে।

(ii) কোনো অপেক্ষক $f(x)$, $x = c$ বিন্দুতে সন্তত নয় এর অর্থ, $f(x)$ বা f অপেক্ষকটি $x = c$ বিন্দুতে অসন্তত (discontinuous)।

(iii) কোনো অপেক্ষক $f(x)$ সন্তত হলে উহা অবশ্যই দুটি সংখ্যার মধ্যে সীমাবদ্ধ (bounded) হবে। কিন্তু বিপরীতমুখী বিবৃতিটি সত্য নয়।

(iv) একটি সন্তত অপেক্ষক $(f(x))$-কে c $(\neq 0)$ ধ্রুবক দিয়ে গুণ করলে, $cf(x)$-ও সন্তত হবে।

2(খ).3 বিভিন্ন অপেক্ষক $f(x)$-এর সন্ততা বিষয়ক আলোচনা

(a) যদি $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ এবং $g(x)$ সন্তত হয় তবে $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \times g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (যখন $g(x) \neq 0$) অবশ্যই $x = c$ বিন্দুতে সন্তত হবে (এ কথা যেকোনো অবকাশের জন্য সত্য)

(b) যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $[a, b]$ অবকাশে সন্তত হয় এবং $f(a)$, $f(b)$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত মান গ্রহণ করে, তখন $x = d$-এর জন্য [যেখানে $a < d < b$] $f(d) = 0$ হবে।

এখন আমরা কয়েক প্রকার সন্তত নয় এমন অপেক্ষক বিষয়ে আলোকপাত করব

(1) **প্রথম প্রকার বা সাধারণ অসন্তত (Discontinuityof first kind or ordinary discontinuity) ঃ** একটি অপেক্ষক $f(x)$ বা f-এর ক্ষেত্রে 'প্রথম প্রকার অসন্ততা' থাকে যখন c বিন্দুতে, $f(c + 0)$ [বা, $\underset{x \to c^+}{\mathrm{Lt}} f(x)$] এবং $f(c - 0)$ [বা, $\underset{x \to c^-}{\mathrm{Lt}} f(x)$] উভয়ের **অস্তিত্ব** বজায় থাকে, কিন্তু তারা পরস্পর **অসমান** হয়।

এক্ষেত্রে, $f(c - 0) \neq f(c) = f(c + 0)$ অথবা $f(c - 0) = f(c) \neq f(c + 0)$

(2) **দ্বিতীয় প্রকার অসন্ততা (Discontinuity of Second kind) ঃ** একটি অপেক্ষক $f(x)$ বা f-এর ক্ষেত্রে দ্বিতীয় প্রকার অসন্ততা আছে বলা হয় যখন c-তে, $f(c + 0)$ [বা, $\underset{x \to c^+}{\mathrm{Lt}} f(x)$] এবং $f(c - 0)$ [বা, $\underset{x \to c^-}{\mathrm{Lt}} f(x)$] অস্তিত্বহীন। এই অস্তিত্বহীনতা বাঁদিক সাপেক্ষে বা ডানদিক সাপেক্ষে উল্লেখ করা হয় যখন $f(c - 0)$ **অথবা** $f(c + 0)$ অস্তিত্বহীন হয়।

(3) **মিশ্র অসন্ততা (Mixed discontinuity) ঃ** c-তে, অপেক্ষক $f(x)$ বা f-এর **মিশ্র অসন্ততা** আছে বলা হবে যদি c-এর এক প্রান্তে **দ্বিতীয় প্রকার অসন্ততা** এবং অপর প্রান্তে **প্রথম প্রকার অসন্ততা** বজায় থাকে। এমনকি এই প্রান্তে সন্ততাও থাকতে পারে।

(4) **অপসৃয়মান অসন্ততা বা দূরীভবনযোগ্য অসন্ততা (Removable discontinuity) ঃ** প্রথমে, c বিন্দুতে, অপেক্ষক $f(x)$ বা f-এর **দূরীভবনযোগ্য অসন্ততা** আছে যদি $\underset{x \to c}{\mathrm{Lt}} f(x)$ অস্তিত্ব যুক্ত হয়, কিন্তু $f(c)$-এর সাথে কখনই সমান হতে পারে না।

অর্থাৎ $\underset{x \to c^+}{\mathrm{Lt}} f(x) = \underset{x \to c^-}{\mathrm{Lt}} f(x) \neq f(c)$ সম্পর্কটি সত্য হয়। এস্থলে, $f(x)$ বা f-এর **সন্ততা** রক্ষার্থে আমরা $\underset{x \to c}{\mathrm{Lt}} f(x) = f(c)$ সম্পর্কটিকে সত্য করার জন্য সুপরিকল্পিত পন্থা গ্রহণ করব। পরিশেষে, $f(x)$ বা f-এর অসন্ততা দূরীভূত হয়ে f-এর সন্ততায় ফিরে আসে বলে একে 'দূরীভবনযোগ্য অসন্ততা' বা 'অপসৃয়মান অসন্ততা' (removable discontinuity) বলে।

❒ **উদাহরণ–1 ঃ ধরি, $f(x) = 5x, x < 4$**

$= x, x \geq 4$

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে, $f(4 - 0) = \underset{x \to 4^-}{\mathrm{Lt}} f(x) = \underset{x \to 4^-}{\mathrm{Lt}} (5x) = 5 \cdot 4 = 20$

$f(4 + 0) = \underset{x \to 4^+}{\mathrm{Lt}} f(x) = \underset{x \to 4^+}{\mathrm{Lt}} (x) = 4$

$x = 4$-তে, $f(x) = x$ অর্থাৎ $f(4) = 4$

$\therefore \underset{x \to 4^-}{\mathrm{Lt}} f(x) \neq \underset{x \to 4^+}{\mathrm{Lt}} f(x)$

সুতরাং এক্ষেত্রে, $f(x)$ বা f-এর $x = 4$-তে 'প্রথম প্রকার অসন্ততা' লক্ষ্য করা যায়।

❐ **উদাহরণ–2 ঃ ধরি, $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x \neq 2$। এখন আমরা প্রথমতঃ $x = 2$-তে $f(x)$ সন্তত কিনা পরীক্ষা করব। যদি অসন্ততা থাকে, তবে কি শর্তে সন্ততা $f(x)$-এর ক্ষেত্রে লক্ষ্য করা যাবে?**

☛ **সমাধান ঃ** পুনরায়, $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x \neq 2$ এস্থলে $f(2) = \dfrac{2^2-4}{2-2} = \dfrac{4-4}{2-2} = \dfrac{0}{0}$, ইহা অসংজ্ঞাত বা অনির্ণেয়।

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = (x+2)$$

$$\therefore \operatorname*{Lt}_{x\to 2} f(x) = \operatorname*{Lt}_{x\to 2}(x+2) = \operatorname*{Lt}_{x\to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

সুতরাং $\operatorname*{Lt}_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$; ফলে $f(x)$, $x = 2$ বিন্দুতে প্রাথমিকভাবে অসন্তত।

এখন $x = 2$-তে $f(x)$ সন্তত হবে তার জন্য শর্ত প্রয়োজন।

যদি $f(2) = 4$ ধরা হয়, তবেই $\operatorname*{Lt}_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$ হবে।

এক্ষেত্রে, $f(x)$-এর অসন্ততা অপসৃত হয়ে সন্ততার স্তরে পৌঁছাবে। এটি একটি অপসৃতমান অসন্ততার উদাহরণ।

❐ **উদাহরণ–3 ঃ যদি $f(x) = \dfrac{x^2-t^2}{x-t}$, $x \neq t$ এবং $f(t) = 3t$ হয় তবে $f(x)$টি সন্তত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\operatorname*{Lt}_{x\to t} f(x) = \operatorname*{Lt}_{x\to t} \dfrac{x^2-t^2}{x-t} = \operatorname*{Lt}_{x\to t} \dfrac{(x+t)(x-t)}{(x-t)} = \operatorname*{Lt}_{x\to t} f(x+t) = t + t = 2t$ এবং $f(t) = 3t$। যেহেতু $\operatorname*{Lt}_{x\to t} f(x) \neq f(t)$, সুতরাং $f(x)$, $x = t$-তে অসন্তত।

❐ **উদাহরণ–4 ঃ যদি $f(x) = x + 1, x > 1$**

$$\begin{aligned} &= 3x - 1, \ x < 1 \\ &= 3, \ x = 1 \end{aligned}$$

$x = 1$-তে $f(x)$ সন্তত কিনা পরীক্ষা করুন।

☛ **সমাধান ঃ** $\operatorname*{Lt}_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname*{Lt}_{x\to 1^+} (x+1) = 1 + 1 = 2$

$$\operatorname*{Lt}_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname*{Lt}_{x\to 1^-} (3x-1) = 3\cdot 1 - 1 = 2$$

কিন্তু $f(1) = 3$ বলে, $\operatorname*{Lt}_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname*{Lt}_{x\to 1^-} f(x) \neq f(1)$

সুতরাং $f(x)$, $x = 1$-তে '**দ্বিতীয় প্রকার অসন্ততা**' প্রদর্শন করে।

❒ **উদাহরণ–5 ঃ ধরি, $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}, x \neq 0$**

$$= k, x = 0$$

k-এর মান কত হলে f অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে 'সন্তত' হবে?

☛ **সমাধান ঃ** এক্ষেত্রে, $f(x) = k, x = 0$

বা, $f(0) = k$ অর্থাৎ $x = 0$ বিন্দুতে f-অপেক্ষকের মান হ'ল k

এখন, $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\dfrac{\sin x^2}{x}\right) = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\dfrac{\sin x^2}{x^2}\cdot x\right)$

$$= \left(\underset{x^2\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x^2}{x^2}\right)\cdot\left(\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\, x\right) \quad [\because x \to 0, x^2 \to 0]$$

$$= \left(\underset{t\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin t}{t}\right)\cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\, x \quad [\text{ধরি, প্রথম অংশের জন্য } x^2 = t, x^2 \to 0 \therefore t \to 0]$$

$$= 1\cdot(\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\, x) = 1\cdot 0 = 0$$

f অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে **সন্তত** হবে যদি $f(0) = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} f(x)$ হয় অর্থাৎ $k = 0$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় k-এর মান $= 0$ (উত্তর)

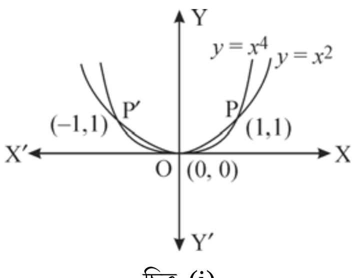
2(খ).4 সন্ততা আলোচনা : দ্বিঘাত এবং উর্দ্ধঘাতযুক্ত বহুপদ রাশির অপেক্ষক

Graphs (for quadratic, polynomial, power function, exponential and logarithmic)

(a) উপরিউক্ত দ্বিঘাত এবং তার ঊর্দ্ধঘাতযুক্ত বহুপদ রাশির লেখচিত্র থেকে সন্ততার বৈশিষ্ট্যগুলি উল্লেখ করা হ'ল

(i) $y = f(x) = x^n$ (যখন $n = 2, 4, 6...$)

এক্ষেত্রে n একটি যুগ্ম সংখ্যা। সুতরাং অপেক্ষকের লেখচিত্র পুরোপুরি প্রথম ও দ্বিতীয় ধাপে (quadrant) সীমাবদ্ধ থাকে। লেখচিত্রটি **সর্বত্র সন্তত** (continuous)। এই লেখচিত্র y-অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম (symmetrical) অর্থাৎ y অক্ষের বাঁ এবং ডান দিকে সমভাবে প্রকাশিত। ইহা (লেখচিত্রটি) $-\infty < x < 0$ -এর জন্য একান্বয়ে ক্ষয়িষ্ণু (কঠোরভাবে) এবং $0 < x < \infty$-এর জন্য লেখচিত্রটি, একান্বয়ে বর্ধিষ্ণু (কঠোরভাবে)। পরিশেষে এটা উল্লেখযোগ্য যে n-এর মান যতই 2 এবং তার ঊর্ধ্বে যায় [অর্থাৎ $n = 4, 6, 8, ...$ হয়] ততই মূলবিন্দু (0, 0) সাপেক্ষে লেখচিত্রের চ্যাপটা ভাবটি কমে আসে।



চিত্র (i)

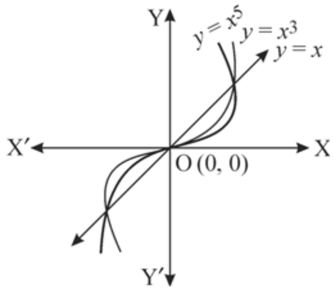
(ii) যদি $y \equiv f(x) = x^n$ (যেখানে n অযুগ্ম সংখ্যা অর্থাৎ $y = x, x^3, x^5, ...$) হয় তবে লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্যগুলি নিম্নরূপ হবে ঃ

লেখচিত্র সর্বদা প্রথম ও তৃতীয় ধাপে অবস্থান করে (সামগ্রিকভাবে)।

$-\infty < x < \infty$-এর জন্য ইহা (লেখচিত্র) একান্বয়ে বর্ধিষ্ণু (কঠোরভাবে)

ইহা সর্বত্র সন্তত মূলবিন্দু (0, 0) সহ।

n-এর মানের বৃদ্ধি ঘটলে লেখচিত্রের চ্যাপটা ভাব বৃদ্ধি পায়। ইহা পর্যাবৃত্ত (periodic) অপেক্ষক হিসাবে গণ্য নয়।



চিত্র (ii)

(b) সূচক সম্বন্ধীয় এবং লগারিদ্‌মিক অপেক্ষকের লেখচিত্র

(i) ধরি, $y \equiv f(x) = a^x$ $(a > 1)$ [চিত্র (1) অনুসারে]

এই অপেক্ষকের আকার e^x, 2^x, ... হিসাবে আত্মপ্রকাশ করে।

সাধারণত $y = a^x$, বর্ধিষ্ণু বিভাগের অন্তর্গত; 0 থেকে ∞ পর্যন্ত বিস্তৃত হয় যখন x, $-\infty$ থেকে $+\infty$-এর দিকে বিভিন্ন মান গ্রহণ করে $(a > 1)$।

যখন x-এর বৃদ্ধি যা $-\infty$ থেকে $+\infty$-এর দিকে ঘটে ততই a^x ক্ষয়িষ্ণু হয়ে যায় $+\infty$ থেকে 0-এর দিকে $(0 < a < 1)$ বক্রলেখাটি সর্বত্র সন্তত (continuous)

(ii) ধরি, $y = a^x$ $(a > 1)$। y-এর মান বর্ধিষ্ণু হয় যখন $-\infty < x < \infty$।

এর বিপরীত অপেক্ষক হিসাবে আসে

$$x = \log_a y \quad (0 < y < \infty, -\infty < x < \infty)$$

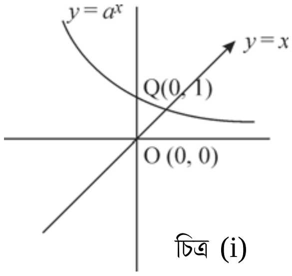
বা, $y = \log_a x$ $(0 < x < \infty, -\infty < y < \infty)$

বিপরীত অপেক্ষকটি কঠোরভাবে বর্ধিষ্ণু যখন $0 < x < \infty$

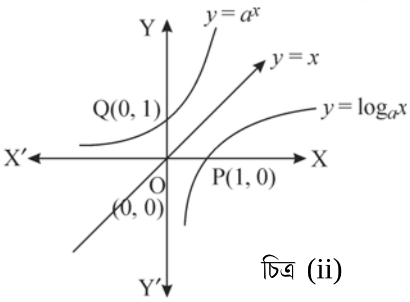
বি.দ্র. ঃ যখন $a = e$ তখন $y = \log_e x$ বা $y = \ln x$ (স্বাভাবিক লগ)

এক্ষেত্রে, $0 < x < \infty$ এবং $-\infty < y < \infty$

(i) এবং (ii) উভয় লেখচিত্র $y = x$ লেখচিত্রের সাপেক্ষে বিপরীতভাবে প্রতিসম (symmetrical)।



চিত্র (i)



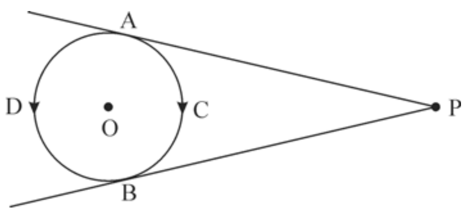
চিত্র (ii)

লক্ষণীয় তথ্য ঃ $y = a^x$ $(0 < a < 1)$ লেখচিত্রটি প্রথম ও দ্বিতীয় ধাপের মধ্যে বিস্তৃত। ইহা ক্রমাগত ক্ষয়িষ্ণু এবং অ-পর্যাবৃত অপেক্ষক। ইহা সন্তত।

বি.দ্র. ঃ $y = a^x$ এবং $y = \log_a x$ $(a > 1)$ উভয় লেখচিত্রই **সন্তত**।

(i) উত্তল অপেক্ষক (Convex function)

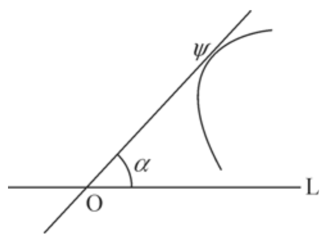
একটি সমতলে অঙ্কিত বক্ররেখার উপরিস্থিত একটি বিন্দু হ'ল P। ধরি L একটি সরলরেখা যা P বিন্দুগামী নয়। তখন বক্ররেখাটি L সরলরেখা সাপেক্ষে P বিন্দুতে **উত্তল** (convex) বলে প্রকাশিত হবে যদি P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং L সরলরেখার সঙ্গে গঠিত সূক্ষ্মকোণ (acute angle) α, বক্ররেখার সহিত সংযুক্ত না হয় অর্থাৎ বর্হিভাগে অবস্থান করে।



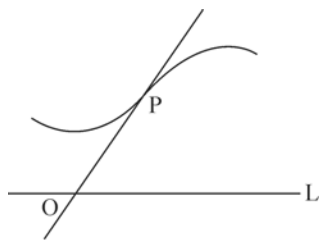
Convex বা উত্তল কথার সাধারণ অর্থ বৃত্তবৎ ক্রমোন্নত তলযুক্ত অংশ। ধরি, O কেন্দ্রীয় বৃত্ত হল ABCD এবং AP এবং BP অঙ্কিত স্পর্শক দুটি P বিন্দুতে ছেদ করে। $\overline{ACB}$ চাপ হ'ল উত্তল। $\overline{ADB}$ চাপ হ'ল অবশ্যই অবতল (concave)। বৃত্তের একটি অংশ উত্তল হলে অপর অংশ অবতল।

(ii) অবতল অপেক্ষক (Concave function)

উপরিউক্ত চিত্রের প্রেক্ষিতে বিপরীত বা নেতিবাচক সংজ্ঞাই হল concave (অবতল)-এর সংজ্ঞা। এক্ষেত্রে সূক্ষ্মকোণ α, বক্ররেখার সহিত সংযুক্ত বা অন্তর্দেশে অবস্থান করে।



P বিন্দু সাপেক্ষে একটি বক্ররেখার একটি অংশ উত্তল এবং অপর দিকটা অবতল দেখায় তখন P বিন্দুকে inflexion বা চ্যুতিহীন বিন্দু বলা হয়। আংকিক ভাষায়, যদি $y = f(x)$ বক্ররেখার (সমতলে অঙ্কিত) উপর অবস্থিত একটি বিন্দু P (x, y)। P বিন্দুকে ঘিরে নিকটবর্তী অঞ্চলে $f'(x)$ অস্তিত্বযুক্ত এবং সন্তত হলে এবং $f''(x) \neq 0$ অবতলতার শর্ত হল $f''(x) > 0$ এবং উত্তলতার শর্ত হল $f''(x) < 0$।

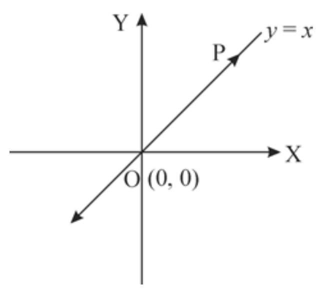


(iii) রৈখিক অপেক্ষক (Linear function)

যদি $y \equiv f(x) = a + bx$ আকারে প্রকাশিত হয়, তখন সর্বোচ্চ x-এর ঘাতকে (বা ঘাতের সূচককে) 1 হিসাবে ধরা হয়।

এক্ষেত্রে, $f''(x) = 0$

x-এর এক ঘাতের অপেক্ষককে রৈখিক অপেক্ষক বলা হয়। জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে এই ধরণের লেখচিত্র হয় সরলরেখা।



উদাহরণ, ধরি $y \equiv f(x) = x$-এর লেখচিত্র হ'ল $\overrightarrow{OP}$ ।

$y \equiv f(x) = a + bx = x$, যেখানে, $a = 0$, $b = 1$

2(খ).5 অন্তর কলজের ধারণা

ধরি, $y = f(x)$ হ'ল x-এর একটি এক মান যুক্ত সসীম অপেক্ষক এবং এটি $c \le x \le d$ বিস্তারে সুসংজ্ঞাত। ঐ বিস্তারটির মধ্যে অবস্থিত যে কোনো বিন্দু x (চল)-এ যদি Δx বা h, x-এর বৃদ্ধি (যা অশূন্য)-কে সূচিত করে, তবে অপর চল y-এর বৃদ্ধি বুঝায় Δy বা k

$\therefore\ y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

বা, $\Delta y = f(x + \Delta x) - y$ বা, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

বা, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $[\because\ \Delta x \neq 0]$

এখন, $\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

যদি ঐ সীমাস্থ মানের অস্তিত্ব থাকে, তবে

$$\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{d}{dx}(y) = \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ হয়।}$$

$\Delta x = h$ বসালে, $\dfrac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ... (1)

এক্ষেত্রে, $\dfrac{d}{dx}(y)$-কে x সাপেক্ষে y-এর অন্তরকলজ (derivative) হিসাবে গণ্য করা হয়।

বি.দ্র. ঃ (i) $\dfrac{d}{dx}(y) = \dfrac{dy}{dx} = dy \div dx$ বুঝায় না। কারণ $\dfrac{d}{dx}$ = 'D' (অর্থাৎ differential operator বা অন্তরকলজ অপেক্ষক), $y = f(x)$-এর উপর প্রযুক্ত। সাধারণ 'ভাগের' ধারণা এটা বহন করে না।

(ii) কোনো অপেক্ষকের অবকল সহগ বা অন্তরকলজ (derivative) নির্ণয় করার পদ্ধতিকে অন্তরকলন বা অবকলন (differentiation) হিসাবে ধরা হয়।

(1)নং সম্পর্ক থেকে $y = f(x)$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করার নিয়মটিকে প্রথম সূত্র (first principle) বা **সংজ্ঞা** (definition) হিসাবে গ্রহণ করা হয়।

যেহেতু $y = f(x)$-এর অন্তরকলজ সূত্রে সীমার অস্তিত্ব জড়িত, সুতরাং $\dfrac{dy}{dx}$-এর অস্তিত্ব বজায় কালে আমাদের ডানদিক এবং বাঁদিক থেকে সীমা নির্ধারণ করতে হবে অর্থাৎ

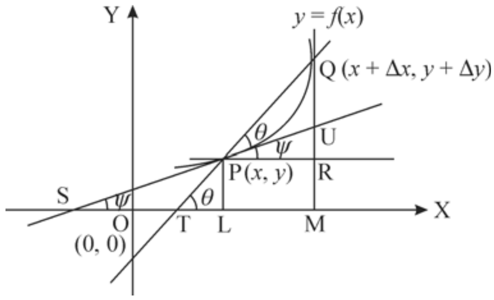
$$\underset{h \to 0^+}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ (ডান দিকের সীমাস্থ মান)} = \underset{h \to 0^-}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ (বামদিকের সীমাস্থ মান)}$$

হলে, তবেই আমরা $\dfrac{dy}{dx}$-এর অস্তিত্ব বর্তমান বলব।

বি.দ্র. ঃ f অপেক্ষকটি (a, b) মুক্ত অবকাশে সংজ্ঞায়িত। $x = c$ বিন্দুতে (যখন $a < c < b$) f অবকলিত হবে যদি এবং কেবল যদি $\underset{x \to c}{\mathrm{Lt}} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ .... (2) অস্তিত্বযুক্ত হয়। $\therefore$ (1) ও (2) সমার্থক।

2(খ).6 লেখচিত্র থেকে প্রাপ্ত অন্তরকলজের অর্থ

ধরি, $y = f(x)$ একটি সুসংজ্ঞাত, সসীম অপেক্ষক। XOY সমতলে অঙ্কিত $y = f(x)$-এর লেখের উপর অবস্থিত দুটি বিন্দু P এবং Q। সমতল XOY-তে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x + \Delta x, y + \Delta x)$ [যেখানে $\Delta x\ (\neq 0)$, $\Delta y\ (\neq 0)$ যথাক্রমে x ও y-এর বৃদ্ধিকে নির্দেশ করছে]



P বিন্দুতে PR এবং QR সরলরেখাংশ দুটি (যারা x অক্ষ ও y অক্ষের সমান্তরাল) আঁকা হল। PL ও RM সরলরেখাংশ দুটি x অক্ষের উপর লম্বভাবে অবস্থিত।

$\therefore$ PR = LM = Δx এবং RQ = Δy

যদি $\angle$QTM = $\angle$QPR = θ (ধরি), তবে ΔPQR ($\angle$R = এক সমকোণ) থেকে পাই,

$\tan\theta = \dfrac{\text{RQ}}{\text{PR}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (যা PQ জ্যা-র প্রবণতা (slope))

এখন Q বিন্দুটি, P বিন্দুর দিকে ক্রমশঃ ($y = f(x)$ বক্ররেখা বরাবর) অগ্রসর হলে $\Delta x \to 0$ হয়। অন্তিম অবস্থানে, প্রায় Q, P-এর সাথে মিশে যাবে এমন অবস্থাকে কল্পনা করলে PQ জ্যাটি P বিন্দুতে একটি স্পর্শক (tangent)-এ রূপান্তরিত হবে (যা চিত্রে SPU) দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে। তখন $\angle$UPS = $\angle$PSM (অনুরূপ কোণ) = ψ (ধরি)

এক্ষেত্রে, $\tan\psi = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \dfrac{dy}{dx}$ হয়।

"$y = f(x)$-এর অন্তরকলজ হ'ল, ঐ বক্রের উপর অবস্থিত P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের প্রবণতা (slope)"। লেখ থেকে $y = f(x)$-এর অন্তরকলজের এই অর্থ প্রতীয়মান হয়।

বি.দ্র. ঃ সুতরাং বলা যায় যে $y = f(x)$ বক্রের উপর অবস্থিত P ও Q বিন্দু দুটির মাধ্যমে গঠিত হয় PQ জ্যা। তার প্রবণতা $\tan\theta \to \tan\psi$ রূপান্তরিত হলে PQ জ্যা, P বিন্দুতে স্পর্শক তৈরী করে। ঐ স্পর্শকের প্রবণতাই x সাপেক্ষে y-র অন্তরকলজ হিসাবে গণ্য হয়।

(a) **প্রথম ক্রমের অন্তর কলজ এবং দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ (First order derivative and second order derivative)**

মনে করি, $y = f(x)$ একটি সুসংজ্ঞাত অপেক্ষক এবং উহা অবকলনযোগ্য। প্রথমবার y বা $f(x)$-কে অবকল করে যে ফল পাওয়া যায় তাকে প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ বা প্রথম ক্রমের অবকল সহগ বলা হয়।

প্রতীকী প্রকাশ হল $\dfrac{d}{dx}(y)$ বা $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}(f(x))$, $f'(x)$ এবং y_1 (বা y')

প্রথমবারে প্রাপ্ত অন্তরকলজকে পুনরায় অন্তরকলনের মাধ্যমে যে ফল পাওয়া যায় তাকে দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ বা দ্বিতীয় ক্রমের অবকল সহগ বলা হয়।

প্রতীকী প্রকাশ হ'ল ঃ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}(f(x))$, $f''(x)$ এবং y_2 (বা, y'')

(b) **উদাহরণ হিসাবে**

$y = 6x^2$ হলে, $\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(6x^2) = 6\frac{d}{dx}(x^2) = 6{\cdot}2x = 12x$

$\therefore \frac{dy}{dx}$ বা, $f'(x)$ বা, $y_1 = 12x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(12x) = 12\frac{d}{dx}(x) = 12{\cdot}1 = 12$$

সুতরাং, $\frac{d^2y}{dx^2}$ বা, $f''(x)$ বা $y_2 = 12$

(c) **দ্বিতীয় ক্রম অন্তরকলজের অস্তিত্ব বিষয়ে ঃ**

ধরি, $y = f(x)$

y_1 বা $\frac{dy}{dx} = \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (সংজ্ঞা থেকে)

$\frac{dy}{dx}$-এর অস্তিত্ব থাকে যদি $\mathrm{L}f'(x) = \mathrm{R}f'(x)$

অর্থাৎ $\underset{h\to 0^-}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0^+}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ বজায় থাকে।

অনুরূপে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$

দ্বিতীয় ক্রম অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে, যদি $\mathrm{L}f''(x) = \mathrm{R}f''(x)$ হয়।

অর্থাৎ, যদি $\underset{h\to 0^-}{\mathrm{Lt}} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \underset{h\to 0^+}{\mathrm{Lt}} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ সম্পর্কটি সত্য হয়।

(d) **অন্তরকলজের ধর্মাবলী ঃ (A) প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের ক্ষেত্রে ঃ**

(i) $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$ [দুটি সুসংজ্ঞাত অপেক্ষক f বা $f(x)$ এবং g বা $g(x)$-এর জন্য]

(ii) $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}(f(x)) - \frac{d}{dx}(g(x))$

(iii) $\frac{d}{dx}(f(x) \times g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}(g(x)) + g(x)\frac{d}{dx}(f(x))$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ [যখন $g(x) \neq 0$]

$$= \frac{g(x)\frac{d}{dx}(f(x)) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

(v) $\frac{d}{dx}(c \cdot f(x))$ [যখন c $(\neq 0)$ একটি ধ্রুবক]

$$= c\frac{d}{dx}f(x)$$

(vi) $\frac{d}{dx}(c) = 0$

(vii) যদি $y = f(v)$ [যখন $v = g(x)$] হয় [অপেক্ষকের মধ্যে অপেক্ষকের উপস্থিতি লক্ষণীয়] তবে

$$\frac{dy}{dx} \text{ বা } f'(x) = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

(viii) $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$

(ix) **প্রাচল আকার**

ধরি, $y = \phi(t)$ [যখন t হল প্রাচল (parameter)

$x = \psi(t)$

সেক্ষেত্রে, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}$ [যখন $\psi'(t) \neq 0$]

(x) শৃঙ্খল নিয়ম (chain rule)

$z = f(u)$, $u = g(v)$, $v = h(x)$ হলে, $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

❒ **উদাহরণ–1 ঃ প্রথম সূত্র (from definition) $y = e^{\sqrt{x}}$ -এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, $y = f(x) = e^{\sqrt{x}} = e^u$ যখন $u = \sqrt{x}$

$\therefore f(x+h) = e^{\sqrt{x+h}} = e^{u+k}$ (মনে করি, $\sqrt{x+h} = u + k$)

$\because u + k = \sqrt{x+h}$

বা, $k = \sqrt{x+h} - u = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{(সংজ্ঞা থেকে)}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{\sqrt{x+h}}-e^{\sqrt{x}}}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{e^{u+k}-e^{u}}{k}\cdot\frac{k}{h}\right)$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{e^{u}(e^{k}-1)}{k}\cdot\frac{k}{h}\right) = \underset{k\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{u}(e^{k}-1)}{k}\cdot \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{k}{h}\right)$$

$$= e^{u}\cdot \underset{k\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{k}-1}{k}\cdot \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{k}{h} = e^{u}\cdot 1\cdot \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h}$$

$$= e^{u} \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = e^{u} \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= e^{u} \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = e^{u} \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= e^{u} \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{e^{u}}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \frac{e^{u}}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}}\right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \quad \text{(উত্তর)}$$

❒ **উদাহরণ–2 ঃ যদি $f(x) = \sin(x^2 + 1)$ হয় তবে সংজ্ঞা (অবকলের) থেকে $f'(x)$ নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** এক্ষেত্রে, $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

$$f(x + h) = \sin\{(x + h)^2 + 1\}$$

অবকলের সংজ্ঞানুসারে,

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\{(x+h)^2+1\}-\sin(x^2+1)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{h}\left[2\cos\left[\frac{\{(x+h)^2+1\}+(x^2+1)}{2}\right]\sin\frac{\{(x+h)^2+1\}-(x^2+1)}{2}\right]$$

$$= 2\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left[\cos\left(x^2+xh+1+\frac{h^2}{2}\right)\left\{\frac{\sin\left(xh+\frac{h^2}{2}\right)}{h}\right\}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[2\cos\left(x^2+1+xh+\frac{h^2}{2}\right)\cdot\left\{\frac{\sin\left(\frac{2xh+h^2}{2}\right)}{h}\right\}\right]$$

$$= 2\cdot\{\cos(x^2+1) \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left\{h\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\}}{h}$$

$$= 2\cdot\cos(x^2+1)\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin\left\{h\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\}}{h\left(x+\frac{h}{2}\right)}\cdot\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\}$$

$$= 2\cos(x^2+1)\lim_{h\to 0}\frac{\sin h\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h\left(x+\frac{h}{2}\right)}\cdot\lim_{h\to 0}\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$= 2\cos(x^2+1)\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{h\to 0}\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

[দ্বিতীয় অংশে ধরি, $h\left(x+\frac{h}{2}\right) = t,\ h\to 0,\ t\to 0$]

$$= 2\cos(x^2+1)\cdot 1\cdot\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\left(x+\frac{h}{2}\right) \quad \left[h\to 0,\ \frac{h}{2}\to 0\right]$$

$$= 2\cos(x^2+1)\cdot(x+0) = 2x\cos(x^2+1)$$

সুতরাং, $f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin(x^2+1)) = 2x\cos(x^2+1)$ [উত্তর]

(e) **দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের জন্য ঃ প্রাচল আকার (Parametric form) ঃ**

যদি $y = \phi(t)$ যেখানে t (প্রাচল)

$x = \psi(t)$

হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = \frac{\phi'(t)}{\psi'(t)},\ \psi'(t) \neq 0$

এখন $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}$ (ফলটি উল্লেখযোগ্য)

এক্ষেত্রে, আমরা নিম্নোক্তভাবে অগ্রসর হবো ঃ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\psi'(t)\phi''(t)-\phi'(t)\psi''(t)}{\{\psi'(t)\}^2}\cdot\frac{1}{\psi'(t)}$$

$$= \frac{\psi'(t)\phi''(t) - \phi'(t)\psi''(t)}{\{\psi'(t)\}^3}$$

[যেখানে $\phi'(t) = \frac{dy}{dt}$, $\phi''(t) = \frac{d}{dt}(\phi'(t))$ অনুরূপে, $\psi'(t) = \frac{dx}{dt}$, $\psi''(t) = \frac{d}{dt}(\psi'(t))$]

(f) **উদাহরণসমূহ ঃ**

❒ **উদাহরণ–1 ঃ যদি $x = a\sin\theta$, $y = b\cos\theta$ হয়, তবে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করুন। (a, $b \neq 0$, ধ্রুবক)**

☛ **সমাধান ঃ** $x = a\sin\theta$ এবং $y = b\cos\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -b\sin\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} \quad \text{(শৃঙ্খল নিয়মে)}$$

$$= \frac{-b\sin\theta}{a\cos\theta} \quad [\because \frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = 1]$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)\cdot\tan\theta$$

এখন, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{b}{a}\tan\theta\right)$

$$= -\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = -\frac{b}{a}\sec^2\theta = -\frac{b}{a}(1 + \tan^2\theta) \text{ (উত্তর)}$$

❒ **উদাহরণ–2 ঃ যদি $y = (\sin^{-1}x)^2$ হয়, তবে দেখান যে $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 4 = 6$**

☛ **সমাধান ঃ** যেহেতু $y = (\sin^{-1}x)^2$ (প্রদত্ত)

অতএব, $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (উভয় দিকে x সাপেক্ষে অবকলিত করে)

$\Rightarrow y_1^2 = \frac{4(\sin^{-1}x)^2}{(1-x^2)}$ [যেখানে $\frac{dy}{dx} = y_1$] (উভয়পক্ষে বর্গ করে)

$\Rightarrow (1 - x^2)y_1^2 = 4y$ [$\because y = (\sin^{-1}x)^2$]

পুনরায় x সাপেক্ষে উভয়পক্ষকে অবকলিত করে পাই

$(1 - x^2)\cdot 2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 4y_1$ [যখন $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$]

$\Rightarrow 2y_1[(1 - x^2)y_2 - xy_1] = 4y_1$

$\Rightarrow (1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2$ [উভয়পক্ষকে $2y_1 (\neq 0)$ দিয়ে ভাগ করে]

$\Rightarrow (1 - x^2)y_2 - xy_1 + 4 = 2 + 4$ [উভয়পক্ষে 4 যোগ করে]

$\Rightarrow (1 - x^2)y_2 - xy_1 + 4 = 6$, এটাই নির্ণেয় ফল।

❑ **উদাহরণ–3 ঃ যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ হয়, তবে দেখান যে $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2 - ab}{(hx+by)^3}$**

☛ **সমাধান ঃ** $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ (প্রদত্ত)

উভয়পক্ষকে x সাপেক্ষে অবকলিত করে পাই

$$2ax + 2h(y + x\frac{dy}{dx}) + 2hy\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $2\frac{dy}{dx}(hx + by) = -2(ax + by)$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{(ax+by)}{(hx+by)}$ বা, $y' = -\frac{(ax+by)}{(hx+by)}$

এখন, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = (-1)\frac{d}{dx}\left(\frac{ax+by}{hx+by}\right)$

$$= (-1)\left\{\frac{(hx+by)(a+by') - (ax+by)(h+by')}{(hx+by)^2}\right\}$$

$$= \frac{(-1)}{(hx+by)^2}[y'(h^2x + hby - abx - hby) + hax + aby - ahx - h^2y]$$

$$= -\frac{(h^2-ab)(y'x-y)}{(hx+by)^2} = \frac{(-1)(h^2-ab)}{(hx+by)^2}\left\{-\left(\frac{ax+hy}{hx+by}\right)x - y\right\}$$

$$= \frac{(h^2-ab)}{(hx+by)^2}\left[\frac{ax^2+hxy+hxy+b^2}{hx+by}\right]$$

$$= \frac{h^2-ab}{(hx+by)^3}(ax^2 + 2hy + by^2) = \frac{h^2-ab}{(hx+by)^3} \times 1 \; [\because ax^2 + 2hxy + by^2 = 1]$$

$= \frac{h^2-ab}{(hx+by)^3}$, এটাই নির্ণেয় ফল।

❑ **উদাহরণ–4 ঃ যদি $y = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$ হয়, তবে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ এবং $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$ -এর মান নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** এক্ষেত্রে, $y = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$ (প্রদত্ত)

$$= \frac{1}{1(1+x)+x^2(1+x)} = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}$$

$$= \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{x-1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^4-1} \text{ (যখন } x \neq 1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^4-1)\cdot 1-(x-1)(4x^3)}{(x^4-1)^2}$$

$$= \frac{x^4-1-4x^4+4x^3}{(x^4-1)^2} = \frac{-3x^4+4x^3-1}{(x^4-1)^2}$$

সুতরাং, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{-3.0+4.0-1}{(0-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$

এখন, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{-3x^4+4x^3+1}{(x^4-1)^2}\right\}$

$$= \frac{(x^4-1)^2(-12x^3+12x^2)-(-3x^4+4x^3-1)\cdot 2(x^4-1)\cdot 4x^3}{(x^4-1)^4}$$

$$\therefore \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = \frac{(-1)^2\cdot 0-(-1)\cdot 2(-1)\cdot 0}{(0-1)^4} = \frac{0}{1} = 0$$

উত্তর ঃ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ -এর মান -1 এবং $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$ -এর মান 0

❒ **উদাহরণ–5 ঃ যদি $y = f(x)$ এবং $x = \frac{1}{z}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\frac{d^2f}{dx^2} = 2z^3\frac{dy}{dx} + z^4\frac{d^2y}{dz^2}$**

☛ **সমাধান ঃ** $\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = -z^2\frac{dy}{dz}$ $[\because \frac{dz}{dx} = -z^2]$ ... (1)

[এক্ষেত্রে $x = \frac{1}{z}$ (প্রদত্ত) $\therefore \frac{dx}{dz} = \frac{d}{dz}(z^{-1}) = (-1)\cdot\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{z^2}$ $\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dz}} = -z^2$]

পুনরায়, $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{dz}{dx}$

$$= \left\{\frac{d}{dz}\left(-z^2\frac{dy}{dz}\right)\right\}\left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ [(1)নং থেকে]}$$

$$= \left\{\frac{d}{dz}\left(-z^2\frac{dy}{dz}\right)\right\}\left(-z^2\right) \quad [\because \frac{dz}{dx} = -z^2]$$

$$= \left\{\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{dy}{dz}\right)\right\}z^2 = \left\{z^2\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)+2z\frac{dy}{dx}\right\}z^2 \text{ (অবকলের গুণের সূত্র প্রয়োগে)}$$

$$= z^4 \frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3 \frac{dy}{dz}$$

$$\therefore \frac{d^2f}{dz^2} = 2z^3 \frac{dy}{dz} + z^4 \frac{d^2y}{dz^2}$$ [প্রমাণিত]

❐ **উদাহরণ–6 ঃ যদি $y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ [যখন, $y_1 = \frac{dy}{dx}, y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$]**

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে, $y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$

বা, $a + \frac{1}{a} = 2x$ [ধরি, $y^{\frac{1}{m}} = a \therefore y^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{a}$]

বা, $\frac{a^2+1}{a} = 2x$ বা, $a^2 + 1 = 2ax$

বা, $a^2 - 2ax + 1 = 0$ বা, $a^2 - 2x{\cdot}a + 1 = 0$

'a'-কে ঘিরে, এটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, সুতরাং শ্রীধর আচার্যের নিয়ম অনুসারে

$a = \frac{-(-2x) \pm \sqrt{(-2x)^2 - 4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$ [শ্রীধর আচার্যের নিয়ম ঃ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ হলে,

বা, $a = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$]

বা, $a = \frac{2(x \pm \sqrt{x^2 - 1})}{2}$ বা, $a = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$

উভয় পক্ষে log (লগ) নিয়ে পাই [লগের নিধান 'e']

$$\log_e a = \log_e(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

বা, $\log_e\left(y^{\frac{1}{m}}\right) = \log_e(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$

বা, $\frac{1}{m}\log_e y = \log_e(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$

x সাপেক্ষে উভয় পক্ষের অবকল নিয়ে পাই,

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \pm \sqrt{x^2 - 1}}\left(1 \pm \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

বা, $\frac{y_1}{my} = \pm \frac{1}{(x \pm \sqrt{x^2-1})} \frac{(x \pm \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}}$ $[\because y_1 = \frac{dy}{dx}]$

বা, $\frac{y_1}{my} = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ বা, $\sqrt{x^2-1}\,y_1 = \pm\, my$

বা, $\left\{\left(\sqrt{x^2-1}\right)y_1\right\}^2 = (\pm\, my)^2$ [উভয় পক্ষে বর্গ করে]

বা, $(x^2 - 1)y_1^2 = m^2y^2$

পুনরায়, উভয় পক্ষকে x সাপেক্ষে অবকলিত করে পাই,

$$(x^2 - 1)2y_1y_2 + (2x)\cdot y_1^2 = m^2\cdot 2yy_1 \left[\because y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}\right]$$

বা, $2y_1\{(x^2 - 1)y_2 + xy_1\} = 2y_1(m^2y)$

বা, $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ [প্রমাণিত] [উভয়পক্ষকে $2y_1$ $(y_1 \neq 0)$ দিয়ে ভাগ করে]

❒ **উদাহরণ–7 ঃ যদি $\log_e y = \tan^{-1}x$ হয়, তবে দেখান যে $(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0$.**

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে $\log_e y = \tan^{-1}x$ (প্রদত্ত)

উভয়পক্ষকে x সাপেক্ষে অন্তরকলজ নিয়ে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\log_e y) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$$

বা, $\frac{d}{dy}(\log_e y)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$ বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

বা, $\frac{y_1}{y} = \frac{1}{1+x^2}$ [ধরি, $y_1 = \frac{dy}{dx}$]

বা, $(1 + x^2)y_1 = y$

উভয়পক্ষকে, x সাপেক্ষে অন্তরকলজ নিয়ে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{(1 + x^2)y_1\} = \frac{d}{dx}(y)$$

বা, $(1 + x^2)y_2 + y_1(2x) = y_1$ [যেখানে, $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$]

বা, $(1 + x^2)y_2 + 2xy_1 - y_1 = 0$

বা, $(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0$

এটাই নির্ণেয় ফল।

2(খ).7 সংক্ষিপ্তসার

2(ক) এককে সীমার (limit) ধারণার উপর নির্ভর করে সন্ততা (continuity) সম্পর্কে সম্যক ধারণা দেওয়া হয়েছে। এই এককে সন্তত অপেক্ষকের সংজ্ঞা দেওয়া হ'ল।

$x = c$ বিন্দুতে একটি সুসংঙ্গত অপেক্ষক সন্তত হবে যখন তিনটি শর্ত পূরণ হয়।

(i) $\underset{x \to c}{Lt} f(x)$ অস্তিত্বযুক্ত হবে

(ii) $f(c)$ নির্দিষ্ট মানের হবে

(iii) $\underset{x \to c}{Lt} f(x) = f(c)$ হবে

এই তিনটি শর্তের কোনটি লঙ্ঘিত হলে অপেক্ষকটি অসন্তত (discontinuous) হবে।

এছাড়া বিভিন্ন ধরণের অপেক্ষক যেমন সূচক সম্বন্ধীয় এবং লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক, উত্তল অপেক্ষক, অবতল অপেক্ষক ইত্যাদি আলোচিত হয়েছে।

এরপর অবকলনের (বা অন্তর কলনের) (differentiation) সাহায্যে প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ এবং দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ (First order derivative and second order derivative) নির্ণয় করা কৌশল শেখানো হয়েছে।

$y = f(x)$ একটি সুসঞ্জাত অপেক্ষক এবং এটি অবকলনযোগ্য।

প্রথমবার y বা $f(x)$ কে অবকল করে যে ফল পাওয়া যায় তাকে প্রথম ক্রমের অন্তর কলজ বলে। প্রতীকের সাহায্যে লেখা হয় $\frac{d(y)}{dx}$

প্রথম বারে প্রাপ্ত অন্তরকলজকে পুনরায় অন্তর কলনের মাধ্যমে যে ফল পাওয়া যায় তাকে দ্বিতীয় ক্রমের অন্তর কলজ বলা হয়। এর প্রতীকী প্রকাশ হ'ল $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ বা $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2(খ).8 অনুশীলনী

অপেক্ষকের প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ সংক্রান্ত প্রশ্নাবলী

1. যদি $y = e^x(\sin x + \cos x)$ হয়, তবে

(i) $\frac{dy}{dx}$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করুন।

(iii) দেখান যে, $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$

2. যদি $y = \mathrm{A}\sin mx + \mathrm{B}\cos mx$ হয় তবে

(i) $\dfrac{dy}{dx}$ (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করুন।

(iii) প্রমাণ করুন যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0$

3. যদি $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = -m^2y$

[এস্থলে, $y_1 = \dfrac{dy}{dx}$, $y_2 = \dfrac{d^2y}{dx^2}$]

4. যদি $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ হয়, তবে দেখান যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

5. যদি $x^3 + y^3 = 3axy$ হয়, তবে $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ = কত?

6. যদি $y = \tan(x + y)$ হয়, তবে দেখান যে $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2(1+y^2)}{5}$

7. প্রমাণ করুন যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{4a}\left(\sec^4\frac{\theta}{2}\right)$, যখন $x = a(\theta + \sin\theta)$ এবং $y = a(1 - \cos\theta)$

8. যদি $y = t^2(1 + t)$ এবং $x = t(1 - t^3)$ হয় তবে দেখান যে, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t(2+3t)}{1-4t^3}$

9. যদি $y = \dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)}$ হয়, তবে $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ = কত? $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$ = কত? নির্ণয় করুন।

10. যদি $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $x(x^2 - 1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + (2x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} = 0$

11. $y = (\sin^{-1}x)^2 + (\cos^{-1}x)^2$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 4 = 0$

12. (i) যদি $y = e^{\tan^{-1}x}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $(1 + x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + (2x - 1)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(ii) $x = \dfrac{y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}}}{2}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $(x^2 - 1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = m^2y$

(iii) যদি $y^{\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}} = 2x$ হয়, তবে দেখান যে, $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 - 9y = 0$

[যখন $y_1 = \frac{dy}{dx}$ এবং $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$]

2(খ).9 গ্রন্থপঞ্জী

1. Das and Mukherjee : Differential Calculus, U.N. Dhur & Sons, Kolkata.
2. Shanti Narayan and Mittal : Differential Calculus, S. Chand, New Delhi.
3. Gorakh Prasad : Differential Calculus, Pothishala Pvt. Ltd. Allahabad.

একক 3 ❑ অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ণয়

গঠন

3.1 উদ্দেশ্য

এই এককের উদ্দেশ্য হ'ল একটি সুসজ্ঞাত অপেক্ষকের কোন বিন্দুতে সর্বাধিক মান (বা চরম মান) পাওয়া যায় এবং কোন বিন্দুতে সর্বনিম্ন মান (বা অবম মান) পাওয়া যায় তা নির্ণয় করা কৌশল আলোচনা করা।

3.2 প্রস্তাবনা

ধরা যাক্ $f(x)$ একটি সুসজ্ঞাত অপেক্ষক। এখন $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ চরম অথবা অবম মান পেতে পারে যদি ঐ বিন্দুতে $\frac{d}{dx}[f(x)] = 0$ হয় অর্থাৎ $f'(a) = 0$. এই শর্তকে বলা হয় প্রয়োজনীয় শর্ত (necessary condition). কিন্তু এই শর্ত পালন করলেও নির্দিষ্টিভাবে বলা সম্ভব হয় না যে $f(x)$-এর মান $x = a$ বিন্দুতে সর্বাধিক হবে না সর্বনিম্ন হবে। কিন্তু মানটি যে এই দুই সম্ভাবনার মধ্যে একটি হবে এ বিষয়ে কোনো সন্দেহ নেই।

এখন যথেষ্ট কার্যকর শর্ত (sufficient condition), যা আমাদের নিশ্চিতভাবে বলে দেবে যে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ সর্বাধিক মান না সর্বনিম্ন মান অর্জন করেছে, বের করতে হলে নীচের পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে।

$x = a$ বিন্দুতে প্রথমে $f'(x) = 0$ পাওয়ার পর $f''(x)$ নির্ণয় করতে হবে। যদি $f''(x)$ ঋণাত্মক মানযুক্ত হয় তবে $f(x)$, $x = a$ বিন্দুতে সর্বাধিক মানযুক্ত হবে।

আর যদি $f''(x)$ ধনাত্মক মান যুক্ত হয় তবে $f(x)$, $x = a$ বিন্দুতে সর্বনিম্ন মানের অধিকারী বলে ধরা হবে।

3.3 কোন অপেক্ষকের স্থানীয় ও সামগ্রিক ভাবে চরম মান (সর্বাধিক মান) ও অবম মান (সর্বনিম্ন মান) নির্ণয়

ধরি, $[a, b]$ বদ্ধ অবকাশে (closed interval) $f(x)$ একটি সুসংজ্ঞাত একটি বাস্তব মান যুক্ত অপেক্ষক (function) যখন $a < b$; এখন ঐ বদ্ধ অবকাশে ধরি c বিন্দুতে $f(x)$ এর একটি **'স্থানীয় চরম মান'** (local maximum) বজায় থাকবে যদি $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ এই মুক্ত অবকাশের (open interval) $(\varepsilon > 0)$ যে সমস্ত বিন্দুতে $f(x)$ সুসংজ্ঞাত। এক্ষেত্রে $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap [a, b]$ হলে $f(x) \leq f(c)$। [এস্থলে, মনে রাখতে হবে যে $c = a, b$ বা $a < c < b$]

$[a, b]$ বদ্ধ অবকাশে, $f(x)$ একটি সুসংজ্ঞাত বাস্তব মান যুক্ত অপেক্ষকের জন্য ঐ অবকাশের অন্তর্গত c বিন্দুতে **'স্থানীয় অবম মান'** (local minimum) থাকবে যদি একটি ধনাত্মক সংখ্যা 'ε'-এর জন্য $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ মুক্ত অবকাশের অন্তর্গত যে সমস্ত বিন্দুকে $f(x)$ সুসংজ্ঞাত হলে $f(x) \geq f(c)$ হবে।

$[a, b]$ বদ্ধ অবকাশে $f(x)$ অপেক্ষকের স্থানীয় চরম বা অবম মানকেই $f(x)$-এর 'চরম' বা 'অবম' মান হিসাবে গণ্য করা হয়।

$[a, b]$ বদ্ধ অবকাশে $f(x)$ একটি সুসংজ্ঞাত বাস্তব মান যুক্ত অপেক্ষক হলে ঐ অবকাশের অন্তর্গত c বিন্দুতে $(c \in [a, b])$ **সামগ্রিকভাবে** (globally বা absolutely) **চরম মান** গ্রহণ করবে, যদি $[a, b]$ অবকাশের সমস্ত x-এর জন্য $f(x) \leq f(c)$ হয়।

অনুরূপে, যখন $c \in [a, b]$-এর জন্য $f(x)$ অপেক্ষকটির একটি **সামগ্রিকভাবে** (globally বা absolutely) **অবম মান** থাকবে, যদি $[a, b]$ অবকাশের অন্তর্গত সকল x-র জন্য $f(x) \geq f(c)$ হয়।

সুতরাং $f(c)$-কে সামগ্রিকভাবে চরম বা অবম মান (absolutely maximum or minimum) হিসাবে গণ্য করা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

(i) উপরিউক্ত আলোচনা সাপেক্ষে উল্লেখ করা যায় যে $f(x)$-এর যে কোনো **সামগ্রিক চরম বা অবম মান** অবশ্যই $f(x)$-এর একটি স্থানীয় **চরম** বা **অবম** মান কিন্তু **বিপরীত বিবৃতিটি সত্য নয়।**

(ii) $[a, b]$ বদ্ধ অবকাশে কোনো একটি সুসংজ্ঞাত বাস্তব মান যুক্ত অপেক্ষক $f(x)$-এর জন্য একটিও স্থানীয় চরম বা অবম মান নাও থাকতে পারে; আবার এক বা একাধিক বিন্দুতে স্থানীয় চরম বা অবম মান $f(x)$-এর জন্য পাওয়া যায়।

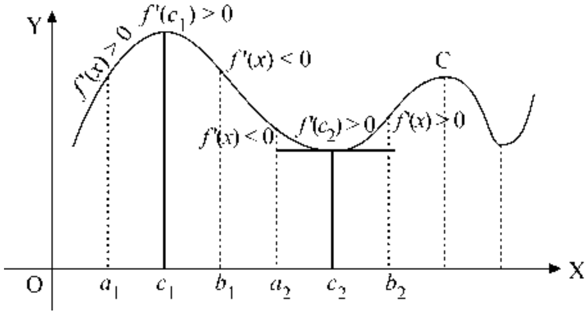
(iii) যে বিন্দুতে অপেক্ষকটি চরম বা অবম মান গ্রহণ করে সেই বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হয় অর্থাৎ ঐ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ হয়।

(iv) কোনো অপেক্ষকের চরম ও অবম মানকে তার প্রান্তিয় মান (extreme value) বলে গণ্য করা হয়।

3.4 লেখচিত্রের সাহায্যে অবকলন সহযোগে সর্বাধিক ও সর্বনিম্ন মানের আলোচনা

কোনো অপেক্ষক ঊর্ধ্বমুখী মান গ্রহণ করতে করতে যে বিন্দুতে নিম্নমুখী মান গ্রহণ করে সেই বিন্দুতে আমরা চরম (maxi) মান পাই এবং ঐ অপেক্ষকটি যখন নিম্নমুখী মান গ্রহণ করতে করতে যে বিন্দুতে ঊর্ধ্বমুখী মান গ্রহণ করা শুরু করে সেই বিন্দুতে আমরা অবম (mini) মান পাই।

আমরা জানি যে প্রদত্ত একটি অপেক্ষক যখন কোনো বিন্দুতে ঊর্ধ্বমুখী মান গ্রহণ করে তখন $f'(x) > 0$ হয় এবং উহা কোনো বিন্দুতে নিম্নমুখী মান গ্রহণ করলে সেই বিন্দুতে $f'(x) < 0$ হয়। যে বিন্দুতে অপেক্ষক $f(x)$-এর মান চরম বা অবম হবে যে বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হয় ফলে ঐ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ হয়।



লেখচিত্র (1.1)

ধরি, $y = f(x)$ অপেক্ষকটি $a_1 \leq x \leq b_1$ বদ্ধ অবকাশে সন্তত (continuous) [লেখচিত্র (1.1) অনুসারে] এবং $a_1 < x < b_1$ মুক্ত অবকাশে অবকলন যোগ্য। c_1 বিন্দুটি $a_1 < c_1 < b_1$ অবকাশে অবস্থিত। এমন $f'(c_1) = 0$ হলে, $x = c_1$ বিন্দুতে, $f(x)$-এর **চরম মান** আছে বলব যদি $f'(x)$-এর চিহ্ন c_1-এর বাম দিকে ধনাত্মক (+ve) থেকে c_1-এর দক্ষিণ দিকে ঋণাত্মকে (–ve) রূপান্তরিত হয়। সুতরাং $x \to c_1^-$ হলে $f'(x) > 0$ এবং $x \to c_1^+$ হলে $f'(x) < 0$ [লেখচিত্র অনুসারে]

অনুরূপে, $a_2 < c_2 < b_2$ অবকাশের $x = c_2$ বিন্দুতে, $f(x)$-এর **অবম মান** আছে বলব যদি $f'(x)$-এর চিহ্ন c_2-এর বাম দিকে ঋণাত্মক (–ve) থেকে c_1-এর দক্ষিণ দিকে ধনাত্মকে (+ve) পরিবর্তিত হয়। সুতরাং $x \to c_2^-$ অবস্থায় $f'(x) < 0$ এবং $x \to c_2^+$ অবস্থায় $f'(x) > 0$ হবে [লেখচিত্র অনুসারে]।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

(i) যদি কোনো বিন্দু $x = c$-তে $f'(x)$-এর চিহ্ন c বিন্দুর উভয় দিকে একই রকম থাকে তবে ঐ বিন্দুতে অপেক্ষক $f(x)$-এর চরম বা অবম মান থাকবে না।

(ii) $y = f(x)$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে কোনো একটি বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ অর্থাৎ নতি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হলে, x-এর বৃদ্ধির সাথে y-এর মান বৃদ্ধি পাবে অথবা হ্রাস পাবে।

(iii) $y = f(x)$ অপেক্ষকটির ক্ষেত্রে চরম ও অবম মান নির্ধারণের জন্য

(a) $f'(x)$ নির্ণয় করতে হবে।

(b) $f'(x) = 0$ ধরে সমীকরণটিকে সমাধান করতে হবে।

(c) $f'(x) = 0$ সমীকরণের জন্য x-এর যে মান (এক বা একাধিক পাওয়া গেছে ঐ মান সাপেক্ষে পূর্বে এবং পশ্চাতে $f'(x)$-এর চিহ্ন নির্ধারণ করতে হবে।

(d) $f'(x)$-এর চিহ্ন অনুসারে $f(x)$-এর চরম ও অবম মান নির্ধারিত হবে।

3.5 প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের শর্তের মূল্যায়ন

আমরা জানি যে $y = f(x)$ অপেক্ষকটির জন্য x-এর মান বৃদ্ধি পেলে $\frac{dy}{dx}$ ধনাত্মক (+ve) হয় এবং x-এর মান হ্রাস পেলে $\frac{dy}{dx}$ ঋণাত্মক (–ve) হয়।

সেই মত x-এর মান বৃদ্ধির সাথে $\frac{dy}{dx}$ বৃদ্ধি পেলে $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ বা $\frac{d^2y}{dx^2}$ ধনাত্মক হয় এবং x-এর বৃদ্ধির সঙ্গে $\frac{dy}{dx}$ হ্রাস পেলে $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ বা $\frac{d^2y}{dx^2}$ ঋণাত্মক হয়।

সুতরাং চরম মান গ্রহণ কালে অর্থাৎ বৃহত্তম মানবিশিষ্ট বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ হয় ঐ বিন্দু ছেড়ে যাবার সময় ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মকে পরিবর্তিত হয়। অতএব, x-এর বৃদ্ধির সঙ্গে চরম মানযুক্ত বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ হ্রাস প্রাপ্ত হয়। ফলে ঐ অবস্থায়, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হয়।

পুনরায়, অবম মান গ্রহণ কালে ঐ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ হয় এবং ঐ বিন্দু ছেড়ে অগ্রসর হলে ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মকে রূপান্তরিত হয়। অতএব, x-এর বৃদ্ধির সাথে অবম মান যুক্ত বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ বৃদ্ধি পায়। এক্ষেত্রে, অবম মান গ্রহণকারী বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হয়।

সুতরাং সংক্ষেপে বলা হয় যে প্রদত্ত অপেক্ষকটি চরম মান গ্রহণকারী বিন্দুতে প্রথম ক্রমের অবকল গুণাঙ্ক অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে এবং দ্বিতীয় ক্রমের অবকল গুণাঙ্ক অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হবে।

অপরদিকে, অপেক্ষকটি অবম মান গ্রহণকারী বিন্দুতে প্রথম ক্রমের অবকল গুণাঙ্ক অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে এবং দ্বিতীয় ক্রমের অবকল গুণাঙ্ক অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হবে।

অতএব দেয় অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ধারণের জন্য প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের অবকল গুণাঙ্কের উপস্থিতি অত্যন্ত তাৎপর্যপূর্ণ।

3.6 উদাহরণের সাহায্যে প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্তের আলোচনা

প্রয়োজনীয় শর্ত (চরম ও অবম মান থাকার) ঃ যদি $x = c$-তে অপেক্ষক $f(x)$-এর চরম ও অবম মান বর্তমান থাকে এবং $f'(c)$ অস্তিত্বযুক্ত হয় তবে $f'(c) = 0$ হবে।

ধরি, $x = c$-তে $f(x)$ অপেক্ষকের চরম মান বর্তমান। তখন h-এর সমস্ত ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ক্ষুদ্র মানের জন্য $f(c) \geq f(c + h)$ অর্থাৎ $f(c + h) - f(c) \leq 0$

সুতরাং $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$, যখন $h > 0$

এবং $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$, যখন $h < 0$

অতএব, $\underset{h\to 0+}{\mathrm{Lt}} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ ... (i)

এবং $\underset{h\to 0-}{\mathrm{Lt}} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$ ... (ii)

(i)নং ও (ii)নং থেকে সহজেই লেখা যায় যে,

$f'(c) = 0$ [যখন $f'(c)$ অস্তিত্বযুক্ত]

অনুরূপে, যদি $x = c$-তে $f(x)$ অপেক্ষকের অবম মান থাকে এবং $f'(c)$ অস্তিত্ব বজায় রাখে তবে প্রমাণ করা যায় যে $f'(c) = 0$

উপরি উক্ত শর্তটি শুধুমাত্র অপেক্ষক $f(x)$-এর $x = c$-তে চরম ও অবম মান থাকার প্রয়োজনীয় (necessary) শর্ত। কারণ $f'(c)$-এর অস্তিত্ব না থাকলেও অপেক্ষক $f(x)$-এর চরম ও অবম মান থাকতে পারে।

যদি $f_+'(c) \neq f_-'(c)$ হয়, সেক্ষেত্রে

(a) $f_+'(c) > 0$ এবং $f_-'(c) < 0$ হলে $f(x)$-এর **অবম মান** $f(c)$ হবে।

(b) $f_+'(c) < 0$ এবং $f_-'(c) > 0$ হলে $f(x)$-এর **চরম মান** $f(c)$ হবে।

ক্ষেত্রবিশেষে $f'(c) = 0$, কিন্তু $x = c$-তে $f(x)$ অপেক্ষকের চরম বা অবম মান পাওয়া যায় না। সেই কারণে অপেক্ষক $f(x)$-এর চরম ও অবম মান বজায় থাকার জন্য নিম্নোক্ত শর্তটি **যথেষ্ট** (sufficient) বলে পরিচিত।

যথেষ্ট শর্ত ঃ c কেন্দ্রিক অঞ্চলে অর্থাৎ x যতই c-এর নিকটবর্তী হয়, ততই $f(x)$ সুসংজ্ঞাত অপেক্ষক হিসাবে গণ্য হয়। এমন অবস্থায় $f'(c) = 0$ এবং $f''(c)$ অস্তিত্ব যুক্ত হলে $f(x)$-এর চরম মান $f(c)$ হবে যদি $f''(c) < 0$ হয়। অপর দিকে $f(x)$-এর অবম মান $f(c)$ হবে যদি $f''(c) > 0$ হয়।

বি.দ্র. ঃ যদি $f'(c) = f''(c) = \ldots f^{n-1}(c) = 0$, কিন্তু $f^n(c) \neq 0$, n যুগ্ম সংখ্যা হলে এবং $f^n(c) < 0$ হলে স্থানীয়ভাবে c-তে $f(x)$-এর চরম মান এবং পক্ষান্তরে $f^n(\mathrm{c}) > 0$ হলে, স্থানীয়ভাবে c-তে $f(x)$-এর অবম মান বজায় থাকে।

3.7 উদাহরণের সাহায্যে $f(x)$-এর চরম ও অবম মান নির্ণয় এবং তার প্রয়োগ

❑ **উদাহরণ–1 ঃ যদি $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 2$ হয়, তবে $f(x)$-এর চরম ও অবম মান নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান** ঃ এস্থলে, $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 2$

সুতরাং $f'(x) = 12x^2 - 30x + 12$

$$= 6(2x^2 - 5x + 2) = 6(2x^2 - 4x - x + 2)$$

$$= 6\{2x(x - 2) - 1(x - 2)\}$$

$$= 6(x - 2)(2x - 1) \qquad \ldots \text{(i)}$$

এখন $f''(x) = 24x - 30 \qquad \ldots$ (ii)

(i)নং থেকে, যদি $f'(x) = 0$ হয়,

তবে $6(x - 2)(2x - 1) = 0$ বা, $(x - 2)(2x - 1) = 0$ [উভয় পক্ষকে 6 দিয়ে ভাগ করে]

অর্থাৎ $x = 2$ অথবা $x = \frac{1}{2}$

সুতরাং $f''(2) = 24(2) - 30$ [(ii)নং থেকে]

$$= 48 - 30 = 18 > 0$$

$\therefore$ $x = 2$-তে অপেক্ষক $f(x)$-এর অবম মান আছে।

ঐ অবম মান $= f(2)$

$$= 4(2)^3 - 15(2)^2 + 12(2) - 2 \text{ [প্রদত্ত } f(x) \text{ থেকে]}$$

$$= 32 - 60 + 24 - 2 = 56 - 62 = -6$$

পুনরায়, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 24\left(\frac{1}{2}\right) - 30$ [(ii)নং থেকে]

$$= 12 - 30 = -18 < 0$$

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}$-তে অপেক্ষক $f(x)$-এর চরম মান আছে এবং

ঐ চরম মান = $f\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 15\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{2}\right) - 2$ [$f(x)$ থেকে]

$= \frac{4}{8} - \frac{15}{4} + 6 - 2 = \frac{1}{2} - \frac{15}{4} + 4$

$= \frac{9}{2} - \frac{15}{4} = \frac{18-15}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় চরম মান = $\frac{3}{4}$ এবং অবম মান = –6 [উত্তর]

❐ **উদাহরণ–2 ঃ নিম্নোক্ত অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ণয় করুন ঃ**

$\boldsymbol{\frac{x^2-7x+6}{x-10}}$।

☛ **সমাধান ঃ** মনে করি, $f(x) = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$

$\therefore \frac{dy}{dx}$ বা $f'(x) = \frac{(x-10)(2x-7)-1(x^2-7x+6)}{(x-10)^2}$

$= \frac{2x^2-20x-\cancel{7x}+70-x^2+\cancel{7x}-6}{(x-10)^2}$

$= \frac{x^2-20x+64}{(x-10)^2} = \frac{x^2-16x-4x+64}{(x-10)^2}$

$= \frac{x(x-16)-4(x-16)}{(x-10)^2} = \frac{(x-16)(x-4)}{(x-10)^2}$

$f(x)$-এর চরম ও অবম মান নির্ধারণের জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত হিসাবে $f'(x) = 0$ হবে

অর্থাৎ $\frac{(x-16)(x-4)}{(x-10)^2} = 0$ হবে অর্থাৎ $x = 16$ অথবা 4 হবে।

এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে $x \to 4$ (বা $x < 4$) হয় তখন $f'(x) > 0$ হয়

আবার $x \to 4^+$ $(x > 4)$, $f'(x) < 0$

সুতরাং $x = 4$-তে অপেক্ষক $f(x)$-এর চরম মান বর্তমান।

প্রদত্ত অপেক্ষকটির নির্ণেয় চরম মান = $f(4) = \frac{4^2-7(4)+6}{(4-10)}$

$= \frac{16-28+6}{(-6)} = \frac{22-28}{(-6)} = \frac{(-6)}{(-6)} = 1$

অনুরূপে, $x \to 16^-$ (অর্থাৎ x-এর মান 16-এর বামদিকে বর্তমান)

তখন $f'(x) < 0$

এবং $x \to 16^+$ (x-এর মান 16-এর দক্ষিণ বা ডান দিকে অবস্থিত)

তখন $f'(x) > 0$

$\therefore$ $x = 16$-তে অপেক্ষক $f(x)$-এর অবম মান বর্তমান।

ঐ অপেক্ষকটি নির্ণেয় অবম মান $= f(16) = \dfrac{16^2 - 7(16) + 6}{16 - 10} = \dfrac{256 - 112 + 6}{6}$

$$= \frac{262 - 112}{6} = \frac{150}{6} = 25$$

উত্তর ঃ নির্ণেয় চরম মান = 1 এবং অবম মান = 25

❒ **উদাহরণ–3 ঃ প্রমাণ করুন যে $f(x) = |x - 2|$ হলে $x = 2$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য হচ্ছে না কিন্তু তা সত্ত্বেও $x = 2$ বিন্দুতে উহা অবম মান ধারণে সক্ষম।**

☛ **সমাধান ঃ** এক্ষেত্রে, $f(x) = |x - 2|$

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore f'(2) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{|2+h-2| - |2-2|}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{|h|}{h}$$

এখন $f_-'(2) = \underset{h\to 0-}{\text{Lt}} \dfrac{|h|}{h} = \underset{h\to 0-}{\text{Lt}} \dfrac{(-h)}{h} = -1$

(বাম পার্শ্বের অবকল গুণাঙ্ক)

$$f_+'(2) = \underset{h\to 0+}{\text{Lt}} \frac{|h|}{h} = \underset{h\to 0+}{\text{Lt}} \frac{(h)}{h} = 1$$

(দক্ষিণ পার্শ্বের অবকল গুণাঙ্ক)

যেহেতু $f_+'(2) \neq f_-'(2)$, $f'(2)$-এর অস্তিত্বহীন।

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে, $f(x)$ অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য নয়।

এস্থলে, লক্ষণীয় যে, $f_-'(2) = -1 < 0$ এবং $f_+'(2) = 1 > 0$

যেহেতু $f'(x)$-এর চিহ্ন ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক হচ্ছে যখন x-এর মান 2-এর ছোটো থেকে 2-এর বড়ো হচ্ছে।

$\therefore$ $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$-এর অবম মান বর্তমান।

নির্ণেয় অবম মান (যা প্রদত্ত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য) $= f(2) = |2 - 2| = 0$

সুতরাং এটা প্রমাণিত হল যে প্রদত্ত অপেক্ষকটি $x = 2$-তে অবকলনযোগ্য নয় কিন্তু ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটি অবম মান ধারণ করে।

❒ **উদাহরণ—4 ঃ দ্বিতীয় অবকলের মাধ্যমে (বা যথেষ্ট শর্তের মাধ্যমে), $f(x) = x^3 - 3x + 1$-এর অবম মান নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** মনে করি, $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$f(x)$-এর মান অবম হবে যদি $f'(x) = 0$

অর্থাৎ $3x^2 - 3 = 0$ বা $3x^2 = 3$ বা, $x^2 = 1$ অর্থাৎ $x = \pm 1$

এক্ষেত্রে, $f''(x) = 6x - 0 = 6x$

(দ্বিতীয় ক্রমের অবকল গুণাঙ্ক)

এখন $x = 1$ বিন্দুতে, $f''(1) = 6(1) = 6 > 0$

$\therefore$ $x = 1$ হলে $f(x)$ অপেক্ষকটি অবম মান গ্রহণ করে।

❒ **উদাহরণ—5 ঃ যদি x (একক) দ্রব্য উৎপাদন কালে, দ্রব্যের ক্রয়মূল্যজাত অপেক্ষক (cost function) $C(x) = \dfrac{x^3}{3} - 45x^2 - 900x$ হয় তবে কতগুলি দ্রব্য উৎপাদন করলে দ্রব্যের প্রান্তিক মূল্য [marginal cost (MC)] সর্বপেক্ষা (minimum) কম হবে?**

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে, $C(x) = \dfrac{x^3}{3} - 45x^2 - 900x$

প্রান্তিক মূল্য (MC) $= \dfrac{d}{dx}(C(x))$

$$\Rightarrow MC = \frac{1}{3}(3x^2) - 45(2x) - 900(1)$$

$$\Rightarrow MC = x^2 - 90x - 900 \qquad \dots (1)$$

এখন x-এর মান কত হলে MC সর্বনিম্ন (minimum) হয় তা আমাদের নির্ণয় করতে হবে। সেজন্য $\dfrac{d}{dx}(MC) = 0$ এবং $\dfrac{d^2}{dx^2}(MC) > 0$ হবে।

এখন, $\dfrac{d}{dx}(MC) = 2x - 90$ ((1)নং থেকে) এবং $\dfrac{d^2}{dx^2}(MC) = 2 \cdot 1 - 0 = 2$

$\dfrac{d}{dx}(MC) = 0 \Rightarrow 2x - 90 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{90}{2} = 45$

সুতরাং $x = 45$ হলে $\dfrac{d^2}{dx^2}(MC) = 2 > 0$

$\therefore$ উৎপাদিত দ্রব্য সংখ্যা 45 হলে, উহার প্রান্তিক মূল্য (MC) সর্বনিম্ন হয়। (শর্ত অনুসারে)

উত্তর ঃ নির্ণেয় উৎপাদিত দ্রব্য সংখ্যা = 45

❑ **উদাহরণ–6 ঃ যদি x দফা (item) দ্রব্যের উৎপাদন কালে, মোট উৎপাদন মূল্যে উপরি ব্যয় 1600 টাকা এবং দ্রব্যের খরচ 30x টাকা এবং পারিশ্রমিক বাবদ $\frac{x^2}{100}$ টাকা ধরা হলে, কতগুলি দফার দ্রব্য প্রস্তুতিতে গড় ক্রয়মূল্য (average cost) সর্বনিম্ন (minimum) হবে তা নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** x দফা দ্রব্য প্রস্তুতিতে,

মোট কেনা দাম (cost) $C(x) = \left(1600 + 30x + \frac{x^2}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ গড়ে কেনা দাম [Average cost (AC)] $= \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(1600 + 30x + \frac{x^2}{100}\right)$

$$= \left(\frac{1600}{x} + 30 + \frac{x}{100}\right) \text{ টাকা}$$

এখন x সংখ্যক দ্রব্যের মূল্য বা দাম নির্ধারণ কালে গড়ে কেনা দাম (AC) সর্বনিম্ন হবে

যখন $\frac{d}{dx}(AC) = 0$ এবং $\frac{d^2}{dx^2}(AC) > 0$ হবে।

স্পষ্টতই, $\frac{d}{dx}(AC) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1600}{x} + 30 + \frac{x}{100}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 1600\frac{d}{dx}(x^{-1}) + \frac{d}{dx}(30) + \frac{1}{100}\frac{d}{dx}(x) = 0$$

$$\Rightarrow 1600\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 0 + \frac{1}{100}(1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1600}{x^2} + \frac{1}{100} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1600}{x^2} = -\frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1600}{x^2} = \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow x^2 = 16 \times 10^4$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{4^2 \times (100)^2} = \pm 400$$

কিন্তু, $x > 0$ বলে $x \neq -400$ অর্থাৎ $x = 400$

এখন $\frac{d^2}{dx^2}(AC) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(AC)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1600}{x^2} + \frac{1}{100}\right)$

$$= -1600\frac{d}{dx}(x^{-2}) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{100}\right) = -1600 \times (-2x^{-3}) + 0$$

$$= 1600 \times 2x^{-3} = \frac{3200}{x^3}$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}(\text{AC})\right]_{x=400} = \frac{3200}{(400)^3} = \frac{32\times100}{64\times100\times100\times100} = \frac{1}{2\times10000} = \frac{1}{20000} > 0$$

সুতরাং গড় কেনা দাম সর্বনিম্ন হয় যখন উৎপাদিত দ্রব্যের দফার সংখ্যা 400

উত্তর ঃ 400

❒ **উদাহরণ—7 ঃ যদি কোনো দ্রব্যের চাহিদা সংক্রান্ত অপেক্ষক (demand function) $x = \frac{24-2p}{3}$, যখন দ্রব্যের চাহিদা সংখ্যা = x এবং একক (unit) পিছু মূল্য হয় p টাকা তবে**

(i) আয়কারী অপেক্ষক (revenue function) 'R' নির্ণয় করুন p সাপেক্ষে

(ii) চাহিদার হিসাবে দ্রব্যের সংখ্যা এবং মূল্য (price) নির্ণয় করুন যখন আয় কবে সর্বোচ্চ (maximum)

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে চাহিদা সংক্রান্ত অপেক্ষক $x = \frac{24-2p}{3}$

(i) যেহেতু আয়কারী অপেক্ষক (revenue function)

$$\text{R} = px = p\left(\frac{24-2p}{3}\right) = 8p - \frac{2}{3}p^2$$

যখন আয় (R) সর্বাধিক তখন 'p'-এর মান নির্ধারণ করতে হবে

অর্থাৎ ঐক্ষেত্রে, $\frac{d\text{R}}{dp} = 0$ এবং $\frac{d^2\text{R}}{dp^2} < 0$ হবে

এখন, $\frac{d\text{R}}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dp}\left(8p - \frac{2}{3}p^2\right) = 0 \Rightarrow 8\frac{d}{dp}(p) - \frac{2}{3}\frac{d}{dp}(p^2) = 0$

$$\Rightarrow 8\cdot1 - \frac{2}{3}\cdot2p = 0 \Rightarrow 8 - \frac{4}{3}p = 0 \Rightarrow \frac{4p}{3} = 8$$

$$\Rightarrow 4p = 24 \Rightarrow p = \frac{24}{4} \Rightarrow p = 6$$

সুতরাং $\left[\frac{d^2\text{R}}{dp^2}\right]_{p=6} = \left[\frac{d}{dp}\left(\frac{d\text{R}}{dp}\right)\right]_{p=6} = \left[\frac{d}{dp}\left(8 - \frac{4}{3}p\right)\right]_{p=6} = \left[0 - \frac{4}{3}\cdot1\right]_{p=6}$

$$= \left[-\frac{4}{3}\right]_{p=6} = -\frac{4}{3}$$ ['p' নিরপেক্ষ বলে]

অর্থাৎ $\left[\frac{d^2\text{R}}{dp^2}\right]_{p=6} < 0$

সুতরাং $p = 6$ হলে আয় সর্বোচ্চ হবে,

দ্রব্যের চাহিদা সংখ্যা (x) = $\frac{24-2\times6}{3} = \frac{24-12}{3} = \frac{12}{3} = 4$

এস্থলে সহজভাবে পর্যবেক্ষণ করা যায় যে দ্রব্যের চাহিদা সংখ্যা 4 এবং দ্রব্যের প্রতি এককে মূল্য হয় 6 টাকা তখনই দ্রব্য থেকে আয় হয় সর্বাধিক।

❒ **উদাহরণ–8 ঃ একটি কারখানায় দ্রব্যের ক্রয়মূল্যজাত অপেক্ষক (cost function) C(x) = $\frac{x^3}{3} - 7x^2 + 111x + 50$ এবং চাহিদা সংক্রান্ত অপেক্ষক (x) = 100 – p**

নিম্নোক্ত ক্ষেত্রগুলিকে সঠিকভাবে নির্ণয় করুন ঃ

(i) মোট আয়কারী অপেক্ষক (revenue function) x-এর মাধ্যমে

(ii) লাভজনক অপেক্ষক (profit function) P-কে x-এর মাধ্যমে

(iii) সর্বাধিক লাভের পরিমাণ কত?

☛ **সমাধান ঃ** (i) এক্ষেত্রে, চাহিদা সংক্রান্ত অপেক্ষক $x = 100 - p$

অর্থাৎ $p = 100 - x$

আয়কারী অপেক্ষক (revenue function),

$$R(x) = px = (100 - x)x = 100x - x^2$$

(ii) লাভজনক অপেক্ষক (profit function)

$$P(x) = R(x) - C(x) = (100x - x^2) - \left(\frac{x^3}{3} - 7x^2 + 111x + 50\right)$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 6x^2 - 11x - 50$$

(iii) সর্বপ্রথম x-এর মান কত হলে P(x) সর্বাধিক হয় তা স্থির করতে হবে। ঐ ক্ষেত্রে $\frac{dP}{dx} = 0$ এবং $\frac{d^2P}{dx^2} < 0$ হবে।

এখন $\frac{dP}{dx} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}(3x^2) + 6(2x) - 11(1) - 0 = 0$$
$$\Rightarrow -x^2 + 12x - 11 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 12x + 11 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 11x - x + 11 = 0$$
$$\Rightarrow x(x - 11) - 1(x - 11) = 0$$
$$\Rightarrow (x - 11)(x - 1) = 0$$

$\Rightarrow x - 11 = 0$ অথবা, $x - 1 = 0$

অর্থাৎ $x = 11$ অথবা $x = 1$

$$\therefore \frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(-x^2 + 12x - 11)$$

$$= (-1)\frac{d}{dx}(x^2) + 12\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(11)$$

$$= -2x + 12(1) - 0 = -2x + 12$$

যখন $x = 11$, $\frac{d^2P}{dx^2} = -2(11) + 12 = -22 + 12 = -10 < 0$

এবং যখন $x = 1$, $\frac{d^2P}{dx^2} = -2(1) + 12 = -2 + 12 = 10 > 0$

$\therefore$ সর্বাধিক লাভের জন্য $x = 11$ মানটি গ্রহণযোগ্য।

যেহেতু, $P(x) = -\frac{x^3}{3} + 6x^2 - 11x - 50$

সুতরাং $P(11) = -\frac{(11)^3}{3} + 6(11)^2 - 11(11) - 50$ [$x = 11$ বলে]

$$= -\frac{1331}{3} + 6(121) - 121 - 50$$

$$= -\frac{1331}{3} + 726 - 171 = \frac{-1331 + 726 \times 3 - 3 \times 171}{3}$$

$$= -\frac{-1331 + 2178 - 513}{3} = \frac{-1844 + 2178}{3} = \frac{334}{3}$$

$= 111.33$ (দু দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বোচ্চ লাভের পরিমাণ $= 111.33$ টাকা

❒ **উদাহরণ–9 ঃ প্রমাণ করুন যে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ অপেক্ষকটির কোনো চরম বা অবম মান পাওয়া যায় না [যখন x বাস্তব এবং $x \in (-\infty, \infty)$]**

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে প্রশ্নমতে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3(2x) + 9(1) - 0$$

$$= 3x^2 - 6x + 9 = 3(x^2 - 2x + 3)$$

এখন $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 - 2x + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$ (উভয়পক্ষকে 3 দিয়ে ভাগ করে)

$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + 2 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + 2 = 0$ ... (1)

(i)নং সমীকরণ থেকে x-এর কোনো গ্রহণযোগ্য বাস্তব (real) মান পাওয়া সম্ভব নয় যেহেতু $(x-1)^2 + 2$ সর্বদা ধনাত্মক (strictly positive) অর্থাৎ $(x-1)^2 + 2 > 0$

অতএব, $f(x)$ অপেক্ষকটির এক্ষেত্রে কোনো চরম বা অবম মান পাওয়া সম্ভব নয়। **(প্রমাণিত)**

❒ **উদাহরণ–10 ঃ মূলবিন্দু (0, 0) সাপেক্ষে $2x + 3y - 6 = 0$ সরলরেখার সর্বাপেক্ষা নিকটে অবস্থিত বিন্দুটি নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** P(x, y) বিন্দুটিকে $2x + 3y - 6 = 0$ সরলরেখার উপর যে কোনো একটি বিন্দু হিসাবে চিহ্নিত করা হল।

ধরি, P(x, y) বিন্দুটি মূলবিন্দু (0, 0) থেকে যে দূরত্বে অবস্থিত তার বর্গ হল L (একক)

সুতরাং $L = (x - 0^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2$

$$= x^2 + \left(\frac{6-2x}{3}\right)^2 \quad [\because 2x + 3y - 6 = 0 \text{ বা, } 3y = 6 - 2x \text{ বা, } y = \frac{6-2x}{3}]$$

$$= x^2 + \left\{\frac{2(3-x)}{3}\right\}^2 = x^2 + \frac{4}{9}(3-x)^2$$

$$\therefore \frac{dL}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^2 + \frac{4}{9}(3-x)^2\right] = 2x + \frac{4}{9}\cdot 2(3-x)(-1)$$

$$= 2x - \frac{8}{9}(3-x) = \frac{18x - 24 + 8x}{9} = \frac{26x-24}{9}$$

L-এর সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন মানের জন্য

$\frac{dL}{dx} = 0$ হবে অর্থাৎ $\frac{26x-24}{9} = 0$ হবে অর্থাৎ $x = \frac{24}{26}$ বা, $x = \frac{12}{13}$ হবে।

এখন, $\frac{d^2L}{dx^2} = \frac{26}{9}(1) - 0 \quad [\because \frac{d}{dx}\left(\frac{24}{9}\right) = 0]$

$$= \frac{26}{9} > 0$$

$\therefore x = \frac{12}{13}$ হলে L-এর মান সর্বনিম্ন হবে। ঐক্ষেত্রে $\left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)$ বিন্দু যা $2x + 3y - 6 = 0$ সরলরেখায় অবস্থিত তা মূলবিন্দুর সবচেয়ে কাছের বিন্দু হিসেবে চিহ্নিত হবে।

[এস্থলে লক্ষণীয় যে, $x = \frac{12}{13}$ হলে $2x + 3y = 6$ সরলরেখায় তা স্থাপন করলে,

$$2\left(\frac{12}{13}\right) + 3y = 6 \text{ বা, } 3y = 6 - \frac{24}{13}$$

বা, $3y = \frac{78-24}{13}$ বা, $3y = \frac{54}{13}$ বা, $y = \frac{54}{3\times 13}$ বা, $y = \frac{18}{13}$

$\therefore \left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)$ বিন্দু $2x + 3y - 6 = 0$ সরলরেখায় অবস্থিত]

❒ **উদাহরণ–11 ঃ ধরি, $y = f(x) = \begin{cases} |x-1|+\alpha, & x \le 1 \\ 2x+3, & x > 1 \end{cases}$**

যদি $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$-এর স্থানীয় অবম মান থাকে তবে প্রমাণ করুন যে $\alpha \le 5$

☛ **সমাধান ঃ** এক্ষেত্রে, লক্ষণীয় যে, $f(x) = \begin{cases} 1-x+\alpha, & x \le 1 \\ 2x+3, & x > 1 \end{cases}$

যেহেতু, $y = 1 - x + \alpha$, অপেক্ষক হিসাবে ক্ষয়িষ্ণু এবং $y = 2x + 3$ অপেক্ষক হিসাবে বর্ধিষ্ণু, সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$-এর অবম মান থাকবে যদি $f(1) \le f(x)$, $x > 1$

অর্থাৎ, $\alpha \le 2x + 3$ যখন $x > 1$

অর্থাৎ $\alpha \le 5$ **(প্রমাণিত)**।

❒ **উদাহরণ–12 ঃ যদি $f(x) = 2x^2 + \frac{2}{x^2}$, $-2 \le x < 0$ এবং $0 < x \le 2$**

$= 1$, $x = 0$ হয়,

তবে বৃহত্তম (greatest) মান এবং ক্ষুদ্রতম (least) মান নির্ণয় করুন। প্রদত্ত অপেক্ষকের অবম মানটি নির্ণয় করুন।

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - \frac{4}{x^3} = 0$

বা, $\frac{4(x^4-1)}{x^3} = 0$ বা, $x^4 = 1$ বা, $(x^2)^2 - 1 = 0$

বা, $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) = 0$ বা, $x = 1, -1$ (বাস্তব)

$x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটি সন্তত নয় এবং অবকলনযোগ্যও নয়।

বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের জন্য আমরা অবশ্যই প্রান্ত বিন্দু দুটি এবং সংকটকালীন বিন্দুগুলিকে Critical points খুঁজে নেব।

এক্ষেত্রে, $x = -2, 0, 1, -1, 2$ এবং $f(x) = \frac{17}{2}, 1, 4, -4, \frac{17}{2}$

সহজেই উল্লেখ করা যায় যে, প্রদত্ত অপেক্ষকটির বৃহত্তম মান $= \frac{17}{2}$ এবং ক্ষুদ্রতম মান $= 1$

অবম মান নির্ণয়ের জন্য, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 + \frac{12}{x^4}$ থেকে পাই, $x^4 = 1 \Rightarrow x = 1, -1$ (বাস্তব)

$x = \pm 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ সুতরাং $x = 1, -1$ বিন্দুতে $f(x)$-এর অবম মান বর্তমান।

নির্ণেয় অবম মান $= 4$ [$\because f(1) = 4 = f(-1)$]

উত্তর ঃ $\frac{17}{2}$ বা, $8\frac{1}{2}$, 1; 4

3.8 সংক্ষিপ্তসার

$y = f(x)$ অপেক্ষকটির জন্য x-এর মান বৃদ্ধি পাওয়ার সাথে সাথে যদি y-এর মান বৃদ্ধি পায় তবে রেখাটি উর্দ্ধমুখী হবে। আবার x বৃদ্ধি পাওয়ার সঙ্গে যদি y-এর মান হ্রাস পায় তবে রেখাটি নিম্নমুখী হয়। আর যদি অপেক্ষক রেখাটি প্রথমে উপরের দিকে যেতে যেতে কিছু পরে নীচের দিকে নামে, তবে রেখাটির আকৃতি ঘণ্টার মতো অথবা উল্টে রাখা বাটির মতো লাগবে। সেক্ষেত্রে রেখাটির একটি সর্বোচ্চ বিন্দু থাকবে যেখানে y-এর মান সর্বাধিক। এই বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে।

আবার যদি অপেক্ষক রেখাটি নীচের দিকে যেতে যেতে উপরের দিকে ওঠে তখন রেখাটি U-আকৃতির হবে। এক্ষেত্রে রেখাটির একটি সর্বনিম্ন বিন্দু থাকবে। এই বিন্দুতে y-এর মান সর্বনিম্ন হবে। এই বিন্দুতেও $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে।

এখন ঐ বিন্দুতে যেখানে $\frac{dy}{dx} = 0$ পাওয়া গিয়েছে সেই বিন্দুটিতে অপেক্ষকের সর্বাধিক অথবা সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে। কিন্তু মানটি সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন নিশ্চিত ভাবে বলতে গেলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করতে হবে। ঐ বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হলে অপেক্ষকের মান সর্বাধিক হবে আর $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হলে অপেক্ষকের মান সর্বনিম্ন হবে।

3.9 অনুশীলনী

1. প্রমাণ করুন যে, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ অপেক্ষকটির চরম মান উহার অবম মানের তুলনায় কম।
2. যদি $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$ হয়, তবে অপেক্ষকটির চরম ও অবম মানগুলি নির্ণয় করুন।
3. প্রমাণ করুন যে, $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ হলে অপেক্ষকটির চরম মান হবে $e^{\frac{1}{e}}$
4. $x + y = 6$ হলে $x^2 + y^2$-এর অবম মান $= 18$, প্রমাণ করুন।
5. কোনো দ্রব্যের চাহিদা সংক্রান্ত অপেক্ষক $(p) = \frac{50}{\sqrt{x}}$ এবং উহার গড় ক্রয়মূল্যজাত অপেক্ষক (AC) $= 0.5 + \frac{2000}{x}$। প্রমাণ করুন যে, $x = 2500$ হলে লভ্যাংশ হবে সর্বাধিক (maximum)।

6. কোনো উৎপাদিত দ্রব্যের ক্রয়মূল্যজাত অপেক্ষক $C(x) = \frac{x^3}{3} - 45x^2 - 900x + 36$, যেখানে x হল উৎপাদিত দ্রব্যের সংখ্যা। দ্রব্যের প্রান্তিক ক্রয়মূল্য (marginal cost) সর্বনিম্ন রাখার জন্য কতগুলি দ্রব্যের উৎপাদন সম্ভব তা নির্ণয় করুন।

7. যদি দ্রব্যের গড় ক্রয়মূল্যজাত অপেক্ষক (AC) $= x + 5 + \frac{36}{x}$ যখন উৎপাদিক দ্রব্যের সংখ্যা $= x$। নিম্নোক্ত ক্ষেত্রগুলি যথাযথভাবে নির্ণয় করুন ঃ

(i) দ্রব্যের সামগ্রিক ক্রয়মূল্য (total cost) এবং প্রান্তিক ক্রয়মূল্য (marginal cost), x-এর মাধ্যমে

(ii) উৎপাদিত দ্রব্যের সংখ্যা কিরূপ হবে যাতে গড় ক্রয়মূল্য (Average cost) ক্রমবর্ধমান হয়।

8. যদি ক্রয়মূল্যজাত অপেক্ষক $C(x) = x^3 - 24x^2 + 600x$ হয় তবে প্রান্তিক ক্রয়মূল্য [marginjal cost (MC)] এবং গড় ক্রয়মূল্য [average cost (AC)] নির্ণয় করুন। কোন্ বিন্দুতে AC = MC হবে তা স্থির করো। পরিশেষে প্রমাণ করুন যে ঐ বিন্দুতে AC (average cost) সর্বনিম্ন মান গ্রহণ করে।

9. যদি q সংখ্যক উৎপাদিত দ্রব্যের বিক্রয়কালে প্রাপ্ত আয় revenue $2q$ টাকা হয় যখন ক্রয়মূল্য (cost) = $500 + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{20}\right)^2$; তখন দেখাও যে লভ্যাংশের হার $\left(\frac{dp}{dq}\right) = 2 - \frac{q}{400}$ এবং পরিশেষে $\left(\frac{dp}{dq}\right)_{p=500}$ কত হবে তা নির্ণয় করুন।

10. যদি $x = 200 - 10p$ এবং গড় ক্রয়মূল্য (AC) $= 10 + \frac{7}{30}x$ হয় যখন উৎপাদিত দ্রব্যের সংখ্যা $= x$, প্রতি দ্রব্যের উৎপাদন মূল্য $= p$, তবে প্রমাণ করুন যে, $x = 15$ হলে লাভের পরিমাণ হয় সর্বাধিক।

11. যদি দ্রব্যের সামগ্রিক ক্রয়মূল্য $C(x) = \frac{x^2}{100} + 100x + 40$ হয় যখন উৎপাদিত দ্রব্য সংখ্যা $= x$। প্রতি দ্রব্যের বিক্রয়কালে মূল্য $P(x) = 200 - \frac{x}{400}$ হলে, উৎপাদন স্তরে x-এর মান নির্ণয় করুন যাতে লাভের পরিমাণ বৃহত্তম (maximum) হয়। মোট লাভের পরিমাণ কত হবে তা নির্ণয় করুন।

12. যদি $f(x) = a - (x - 3)^{8/9}$ হয় তবে $f(x)$-এর চরম মান হবে

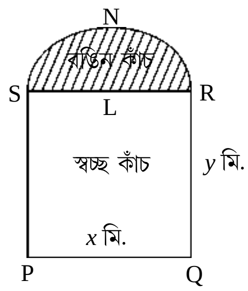
(i) 3 (ii) $a - 3$ (iii) a (iv) এদের কোনোটিই নয়

13. x ও y দুটি বাস্তব চলক যখন $x > 0$ এবং $xy = 1$। $(x + y)$-এর অবম মান নির্ণয় করুন।

14. (i) যদি $f(x) = x(1 - x)^2$ এবং $0 \le x \le 2$ হয় তবে প্রদত্ত অপেক্ষকটির চরম (max) এবং অবম (min) মান দুটি নির্ণয় করুন।

15. প্রমাণ করুন যে, সবচেয়ে বড়ো মাপের আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 2500 বর্গমিটার হবে যখন ক্ষেত্রটির পরিসীমা 200 মিটার।

16. চিত্র অনুসারে, নির্দিষ্ট পরিসীমাবিশিষ্ট জানালার অর্ধবৃত্তাকার অংশটি রঙিন কাঁচে এবং নিচের আয়তাকার অংশটি স্বচ্ছ কাঁচে আবৃত। রঙিন কাঁচের মধ্য দিয়ে বাহিত আলোর তিন গুণ আলো স্বচ্ছ কাঁচের মধ্য দিয়ে বাহিত হলে, (প্রতি বর্গমিটার হিসাবে) প্রমাণ করুন যে, জানালার মধ্য দিয়ে সর্বোচ্চ আলো বাহিত হবে যখন $x : y = 6 : (\pi + 6)$.



3.10 গ্রন্থপঞ্জী

1. Das and Mukherjee : Differential Calculus, U.N. Dhur & Sons, Kolkata.
2. Shanti Narayan and Mittal : Differential Calculus, S. Chand, New Delhi.
3. Gorakh Prasad : Differential Calculus, Pothishala Pvt. Ltd. Allahabad.

একক 4 ❑ অপেক্ষকের সমাকলন

গঠন

4.1 উদ্দেশ্য

এই এককে আমরা সমাকল (অনির্দিষ্ট) সম্পর্কে আলোচনা করেছি এবং কতকগুলি উদাহরণও সংযোজন করেছি। কারণ, আমরা একথাও জানি যে অনির্দিষ্ট সমাকল অধিক গুরুত্বপূর্ণ। একে আশ্রয় করে নির্দিষ্ট সমাকল (definite integral)-এর তত্ত্ব গণিতজ্ঞ Reiman দিয়েছিলেন। যার ব্যবহারিক প্রয়োগ আমরা সমতলে অঙ্কিত বক্ররেখা (curve), কোটি ও x-অক্ষ বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে লক্ষ্য করি।

4.2 প্রস্তাবনা

সমাকল (integral)-কে প্রাথমিকভাবে অসংখ্য ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র রাশির যোগফলে প্রকাশ করা হয়। গবেষণালব্ধ ফল থেকে জানা যায় যে সমাকলন হ'ল অবকল এর বিপরীত প্রক্রিয়া (integration as the reverse process of differentiation)। বক্ররেখার মাধ্যমে কোনো সমতলস্থ অবতলকে সীমায়িত করে তার ক্ষেত্রফল নির্ধারণ করা হ'ল সমাকলন বিদ্যার অন্যতম ব্যবহারিক দিক। রীমানীয় পদ্ধতি আজও তার উজ্জ্বল নির্দশন।

4.3 সমাকলনের প্রতীক

যেকোনো প্রক্রিয়াকে সঠিকভাবে বুঝাইতে প্রতীকের প্রয়োজন হয়। যোগফল (sum)-এর প্রথম অক্ষরটি হ'ল 'S'। সেজন্য সমাকলের চিহ্ন হিসাবে '∫' চিহ্নটিকে ব্যবহার করা হয়; যাকে 'S'-এর বর্ধিত রূপ (elongated 'S') হিসাবেও ধরা চলে।

4.4 সমাকলনের সংজ্ঞা

ধরি, f বা $f(x)$ একটি সুনির্দিষ্ট এবং সসংজ্ঞাত অপেক্ষক। অপর একটি অপেক্ষক (যা সুনির্দিষ্ট এবং সুসংজ্ঞাত) হ'ল ϕ বা $\phi(x)$, এমনভাবে অবস্থিত যখন $\frac{d}{dx}(\phi(x)) = f(x)$ বা $D(\phi(x)) = f(x)$ বা, $\phi(x) = D^{-1}f(x) = \int f(x)dx$ বা $\phi(x)$-কে x সাপেক্ষে $f(x)$-এর অনির্দিষ্ট সমাকল বা সংক্ষেপে সমাকল বলা হয়।

এক্ষেত্রে, লক্ষণীয় যে, $D(\phi(x) + c) = f(x)$ [যখন 'c' একটি ধ্রুবক]

সুতরাং $D^{-1}(f(x)) = \phi(x) + c$

বা, $\int f(x)dx = \phi(x) + c$

অনির্দিষ্ট সমাকলে c-কে সমাকলন ধ্রুবক হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। $f(x)$-কে সমাকল্য (integrand) হিসাবে উল্লেখ করা হয়। সমাকল প্রক্রিয়া দুভাবে বিভক্ত। অনির্দিষ্ট সমাকল এবং নির্দিষ্ট সমাকল। দ্বিতীয় অংশটি একটি সুনির্দিষ্ট অন্তর $[a, b]$-এর মধ্যে সমাকল প্রক্রিয়া প্রযোজ্য হ'লে ফল 'c' নিরপেক্ষ হবে অর্থাৎ 'c' বর্জিত ফল পাওয়া যাবে।

4.5 কয়েকটি উল্লেখযোগ্য সূত্রাবলী

1. যদি $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$, x সাপেক্ষে সমাকলনযোগ্য n সংখ্যক অপেক্ষক বা ধ্রুবক হ'লে, $\int\{g_1(x) \pm g_2(x) \pm ... \pm g_n(x)\}dx = \int g_1(x)dx \pm \int g_2(x)dx \pm ... \pm \int g_n(x)dx$ সর্বদা সত্য।
2. $k \neq 0$ ধ্রুবক হলে, $\int kg(x)dx = k\int g(x)dx$ হবে।
3. $\int\{k_1g_1(x) \pm k_2g_2(x) \pm ... \pm k_ng_n(x)\}dx = k_1\int g_1(x)dx \pm k_2\int g_2(x)dx \pm ... \pm k_n\int g_n(x)dx$ হবে।

4.6 কয়েকটি প্রয়োজনীয় ফল

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (সমাকলন ধ্রুবক) (যখন $n \neq -1$)

(ii) $n = -1$ হলে, $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \log_e|x| + c = \ln|x| + c$

(iii) $\int e^{mx}dx = \frac{e^{mx}}{m} + c$ ($m \neq 0$ ধ্রুবক) [যখন $m = 1$, $\int e^{x}dx = e^{x} + c$]

(iv) $\int \sin mx\, dx = -\frac{\cos mx}{m} + c$ $(m \neq 0)$। [$m = 1$ হলে, $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$]

(v) $\int \cos mx\, dx = \frac{\sin mx}{m} + c$ $(m \neq 0)$ [$m = 1$ হলে, $\int \cos x\, dx = \sin x + c$]

(vi) $\int \sec^2 mx\, dx = \frac{1}{m}\tan mx + c$ $(m \neq 0)$

(vii) $\int \operatorname{cosec}^2 mx\, dx = -\frac{1}{m}\cot mx + c$ $(m \neq 0)$

(viii) $\int \operatorname{cosec} mx \cot mx\, dx = -\frac{\operatorname{cosec} mx}{m} + c$ $(m \neq 0)$

(ix) $\int \sec mx \tan mx\, dx = \frac{\sec mx}{m} + c$ $(m \neq 0)$

(x) $\int a^{mx}\, dx = \frac{a^{mx}}{m\log_e a} + c$ $(m \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$

❒ **উদাহরণ–1 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ** $\int\left(\frac{\mathbf{1-\tan x}}{\mathbf{1+\tan x}}\right)\boldsymbol{dx}$

☛ **সমাধান ঃ** $\int\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx = \int\frac{\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)}dx = \int\frac{(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)}dx$

$= \int\frac{dp}{p}$ [ধরি, $\cos x + \sin x = p$ $\therefore$ $(-\sin x + \cos x)dx = dp$ বা, $(\cos x - \sin x)dx = dp$]

$= \log_e|p| + c = \log_e|\cos x + \sin x| + c$ (উত্তর)

❒ **উদাহরণ–2 ঃ** $\int\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{\sin^2 x\cos^2 x}}$ **= কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx$ [$\because$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$]

$= \int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \cos^2 x}dx + \int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$= \int\frac{1}{\cos^2 x}dx + \int\frac{1}{\sin^2 x}dx = \int\sec^2 x\, dx + \int\operatorname{cosec}^2 x\, dx$

$= \tan x + (-\cot x) + c = \tan x - \cot x + c$ (উত্তর)

❐ **উদাহরণ–3 ঃ সমাকল নির্ণয় করুন ঃ (a) $\int(5x^2 + 6x + 7)dx$ (b) $\int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}} dx$**

☛ **সমাধান ঃ (a)** $\int(5x^2 + 6x + 7)dx = 5\int x^2 dx + 6\int x\, dx + 7\int dx$

$$= \frac{5x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 7x + c$$

$$= \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + 7x + c \text{ (উত্তর)}$$

(b) $\int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{x}} dx$

$$= \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx - 4\int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int x^{\left(2-\frac{1}{2}\right)} dx - 4\int x^{\left(1-\frac{1}{2}\right)} dx + 4\int x^{\left(-\frac{1}{2}\right)} dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}} dx - 4\int x^{\frac{1}{2}} dx + 4\int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\left(\frac{3}{2}+1\right)} - 4\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)} + 4\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 4\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4\times 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}} + c \text{ (উত্তর)}$$

❐ **উদাহরণ–4 ঃ সমাকলন করে ফল উল্লেখ করুন ঃ (a) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$ (b) $\int \sin t^\circ dt$**

☛ **সমাধান ঃ** (a) $\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{(1+\cos x)dx}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$$= \int \left(\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\right)dx = \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx$$

$$= -\cot x - \operatorname{cosec} x + c = -(\cot x + \operatorname{cosec} x) + c \text{ (উত্তর)}$$

(b) $\int \sin t^\circ\, dt = \int \sin\left(\frac{\pi t}{180}\right)dt$ [$\because$ $180^\circ = \pi$ রেডিয়ান, $t^\circ = \frac{\pi t}{180}$ রেডিয়ান]

$$= -\frac{180}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{180}\right) + c \text{ (উত্তর)}$$

❑ **উদাহরণ–5 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ** $\displaystyle\int \frac{(e^{3x}+e^{x})dx}{2(e^{2x}+1)}$

☛ **সমাধান ঃ** $\displaystyle\int \frac{(e^{3x}+e^{x})dx}{2(e^{2x}+1)} = \int \frac{e^{x}(e^{2x}+1)}{2(e^{2x}+1)}dx = \frac{1}{2}\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$ (উত্তর)

❑ **উদাহরণ–6 ঃ যদি $\frac{dy}{dx} = \sin x$ এবং $y = 3$, যখন $x = \frac{\pi}{3}$, তখন y-এর মান x-এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে $\frac{dy}{dx} = \sin x$

$\therefore \int dy = \int \sin x\, dx$

বা, $y = -\cos x + c$ (সমাকলন ধ্রুবক) ... (i)

(i)নং সম্পর্কে $y = 3$ এবং $x = \frac{\pi}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$3 = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + c$$

বা, $3 = -\frac{1}{2} + c$ $[\because \cos\frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2}]$

বা, $c = \frac{7}{2}$

পুনরায়, (i)নং-তে $c = \frac{7}{2}$ বসিয়ে পাই, $y = -\cos x + \frac{7}{2}$ (উত্তর)

❑ **উদাহরণ–7 ঃ সমাকলন করুন ঃ $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx$**

☛ **সমাধান ঃ** $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos x\,(2\cos 3x \cos 2x)\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x\{\cos(3x+2x) + \cos(3x-2x)\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x \cos 5x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 2\cos 5x \cos x\, dx + \frac{1}{4}\int 2\cos^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (\cos 6x + \cos 4x)dx + \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$= \frac{1}{4}(x + \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x) + c$$ (উত্তর)

❑ **উদাহরণ–8 ঃ (i) $\int e^{7\log x}dx$ = কত হবে? (ii) $\int \dfrac{a^{2x}+a^{3x}+a^{4x}}{a^x}dx$ = কত?**

☛ **সমাধান ঃ** (i) $\int e^{7\log x}dx = \int e^{\log x^7}dx = \int x^7 dx = \dfrac{x^8}{8} + c$ (উত্তর)

(ii) $\int \dfrac{a^{2x}+a^{3x}+a^{4x}}{a^x} = \int \dfrac{a^{2x}}{a^x}dx + \int \dfrac{a^{3x}}{a^x}dx + \int \dfrac{a^{4x}}{a^x}dx$

$= \int a^x dx + \int a^{2x}dx + \int a^{3x}dx$

$= \dfrac{a^x}{\log_e a} + \dfrac{a^{2x}}{2\log_e a} + \dfrac{a^{3x}}{3\log_e a} + c$ (উত্তর)

$\left[\because \int a^{mx}dx = \dfrac{a^{mx}}{m\log_e a} + c,\ m \neq 0,\ a > 0,\ a = 1\right]$

❑ **উদাহরণ–9 ঃ সমাকল নির্ণয় করুন ঃ $\int \dfrac{x-1}{x+2}dx$**

☛ **সমাধান ঃ** $\int \dfrac{x-1}{x+2}dx = \int \dfrac{\{(x+2)-3\}dx}{x+2} = \int \dfrac{x+2}{x+2}dx - 3\int \dfrac{dx}{x+2}$

$= \int 1\cdot dx - 3\int \dfrac{dx}{x+2} = x - 3\log_e(x+2) + c$ (উত্তর)

❑ **উদাহরণ–10 ঃ সমাকলন করুন ঃ $\int \dfrac{(\sin x - \cos x)}{\sqrt{1-\sin 2x}}dx$**

☛ **সমাধান ঃ** $\int \dfrac{(\sin x - \cos x)}{\sqrt{1-\sin 2x}}dx = \int \dfrac{(\sin x - \cos x)}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}}dx$

$= \int \dfrac{(\sin x - \cos x)}{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}}dx = \int \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}dx = \int 1\cdot dx = x + c$ (উত্তর)

4.7 পরিবর্ত বা প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

সূচনা ঃ প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে, একটি স্বাধীন চল x হলে $\int f(x)dx$ সমাকলকে অপর একটি সমাকলে এমনভাবে প্রকাশ করা হয় যাতে দ্বিতীয় চল z (স্বাধীন), প্রথম চল x-এর মধ্যে $x = \phi(z)$ সম্পর্কে আবদ্ধ থাকে। তবে $\int f(x)dx = \int f(\phi(z)\ \phi'(z)dz$ হবে।

সমাকল সংক্রান্ত নিয়মাবলী

(1) $\int f'(ax+b)dx = \dfrac{f(ax+b)}{a} + c$

(2) $\int\{g(x)\}^n g'(x)\,dx = \dfrac{\{g(x)\}^{n+1}}{n+1} + c$ [যখন $n \neq -1$]

(3) $\int(ax + b)^n dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$ [যখন $n \neq -1$]

(4) $\int\dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)}\,dx = \log_e|\phi(x)| + c$

❑ **উদাহরণ–(i) ঃ $\int(3x + 1)^2 dx$ = কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\int(3x + 1)^2 dx = \dfrac{1}{3}\int z^2 dz$ [ধরি, $3x + 1 = z \therefore dz = 3dx$ বা, $dx = \dfrac{1}{3}dz$]

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{z^3}{3}\right) + c = \dfrac{z^3}{9} + c$ (সমাকলন ধ্রুবক)

$= \dfrac{(3x+1)^3}{9} + c$

❑ **উদাহরণ–(ii) ঃ $\int\text{cosec}^2(2x + 5)dx$ = কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\int\text{cosec}^2(2x + 5)dx = \dfrac{1}{2}\int\text{cosec}^2 z\,dz$ [ধরি, $2x + 5 = z \therefore dz = 2dx$ বা $dx = \dfrac{1}{2}dz$]

$= \dfrac{1}{2}(-\cot z) + c = -\dfrac{\cot(2x+5)}{2} + c$ (উত্তর)

❑ **উদাহরণ–(iii) ঃ $\int\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$ = কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\int\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int\left(\dfrac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}}\right)dx$

$= \int\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}dx = \int\dfrac{(e^{2x} + 1) - 2}{(e^{2x} + 1)}\,dx$

$= \int dx - 2\int\dfrac{e^x dx}{e^x\{(e^x)^2 + 1\}}$

$= x - 2\int\dfrac{dz}{z(z^2 + 1)}$ [ধরি, $e^x = z, \therefore dz = e^x dx$]

$= x - 2\int\dfrac{z\,dz}{z^2(z^2 + 1)}$

$= x - \int \frac{dt}{t(t+1)}$ [ধরি, $z^2 = t, \therefore dt = 2zdz$]

$= x - \left\{\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt\right\}$

$= x - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t+1} = x - \log_e|t| + \log_e|(t+1)|$

$= x + \log_e\left|\frac{t+1}{t}\right| + c = x + \log_e\left|\frac{z^2+1}{z^2}\right| + c$

$= x + \log_e\left|1+\frac{1}{z^2}\right| + c = x + \log_e\left|1+\frac{1}{e^x}\right| + c$

অন্যভাবে

$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{dt}{t}$ [ধরি, $e^x + e^{-x} = t, dt = (e^x + (-e^{-x})dx = (e^x - e^{-x})dx$]

$= \log_e|e^x + e^{-x}| + c$

❒ **উদাহরণ–(iv) ঃ সমাকলন করুন ঃ** $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} dx$

☛ **সমাধান ঃ** $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} dx = \int e^z dz$ [ধরি, $\tan^{-1}x = z \therefore dz = \frac{1}{1+x^2} dx$]

$= e^z + c = e^{\tan^{-1}x} + c$ (উত্তর)

❒ **উদাহরণ–(v) ঃ** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\, dx$ **= কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\, dx = 2\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$ [ধরি, $\sqrt{x} = z \therefore dz = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$]

$= 2\int \cos z\, dz = 2\sin z + c = 2\sin\sqrt{x} + c$ (উত্তর)

❒ **উদাহরণ–(vi) ঃ** $\int \frac{dx}{1+e^x}$ **= কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{dz}{z(1+z)}$ [ধরি, $e^x = z \therefore dz = e^x dx$]

$= \int\left(\frac{1}{1+z} - \frac{1}{z}\right)dz = \int \frac{dz}{(1+z)} - \int \frac{dz}{z}$

$= \log_e|(1 + z)| - \log_e|z| + c$

$= \log_e\left|\dfrac{1+z}{z}\right| + c = \log_e\left|\left(\dfrac{1}{z}+1\right)\right| + c$

$= \log_e\left|\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)\right| + c$ (উত্তর)

❒ **উদাহরণ—(vii) ঃ সমাকলন নির্ণয় করুন ঃ** $\displaystyle\int \frac{\sec^2(\log x)}{x}dx$

☛ **সমাধান ঃ** $\displaystyle\int \frac{\sec^2(\log x)}{x}dx = \int \sec^2 z\, dz$ [ধরি, $\log x = z$, $dz = \dfrac{1}{x}dx$]

$= \tan z + c = \tan(\log x) + c$ (উত্তর)

❒ **উদাহরণ—(viii) ঃ দেখান যে ঃ** $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$

☛ **সমাধান ঃ** বামপক্ষ $= \displaystyle\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

$= \displaystyle\int\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right)dx = \int\frac{(1+x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{(-t)dt}{t}$ [ধরি, $\sqrt{1-x^2} = t$ বা, $1 - x^2 = t^2$ $\therefore$ $(-2x)dx = 2t\,dt$

বা, $-x\,dx = t\,dt$ বা, $x\,dx = -t\,dt$]

$= \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int dt$

$= \sin^{-1}x - t + c = \sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$ = দক্ষিণপক্ষ।

❒ **উদাহরণ—(ix) ঃ প্রমাণ করুন যে,** $\displaystyle\int\frac{\sin x dx}{1+\cos x} = \log\left|\frac{1}{1+\cos x}\right| + c$

☛ **সমাধান ঃ** বামপক্ষ $= \displaystyle\int\frac{\sin x dx}{1+\cos x}$

$= -\displaystyle\int\frac{dz}{z}$ [ধরি, $1 + \cos x = z$ $\therefore$ $(-\sin x)dx = dz;$ $\sin x dx = -dz$]

$= -\log_e|z| + c = \log_e\left|\dfrac{1}{z}\right| + c$

$= \log_e\left|\dfrac{1}{1+\cos x}\right| + c$ = দক্ষিণপক্ষ।

4.8 আংশিক সমাকলন

এ অংশে দুটি ভিন্ন অপেক্ষকের গুণফলের সমাকলন নির্ণয় সম্পর্কে আলোচনা করা হবে। দুটি অপেক্ষকের গুণফলের অবকল সহগ নির্ণয়েয়র নিয়ম অনুসরণ করে সমাকল নির্ধারণের নিয়মটি অনুসৃত হবে। এ পদ্ধতিটিই 'আংশিক সমাকল' প্রক্রিয়ার মধ্যে দিয়ে প্রকাশিত হয়।

এস্থলে $u = u(x)$ এবং $v = v(x)$, x চলরাশির দুটি ভিন্ন অপেক্ষক।

আংশিক সমাকল সূত্রানুযায়ী,

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left[\left(\frac{du}{dx}\right)\int v\,dx\right]dx \quad \text{প্রতিষ্ঠিত।}$$

❑ **উদাহরণ–1 ঃ $\int x^n \log x\, dx$ = কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\int x^n \log x\, dx = (\log x)\int x^n dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int x^n dx\right\}dx$

$$= (\log x)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \int\frac{1}{x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\log x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\log x - \frac{1}{n+1}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + c$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c \text{ (উত্তর)}$$

❑ **উদাহরণ–2 ঃ সমাকলন করুন ঃ $\int \log x\, dx$**

☛ **সমাধান ঃ** $\int \log x\, dx = (\log x)\int 1\cdot dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int 1\cdot dx\right\}dx$

$$= x\log(x) - \int\left(\frac{1}{x}\right)x\,dx = x\log(x) - \int 1\cdot dx$$

$$= x\log(x) - x + c \text{ (উত্তর)}$$

❑ **উদাহরণ–3 ঃ $\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ -এর সমাকল নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** $\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int\frac{e^x}{x}dx - \int\frac{e^x}{x^2}dx$

$$= \frac{1}{x}\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\int e^x dx\right\}dx - \int\frac{e^x}{x^2}dx$$

$$= \frac{e^x}{x} - \int\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^x dx - \int\frac{e^x}{x^2}dx + c$$

$$= \frac{e^x}{x} + \int\frac{e^x}{x^2}dx - \int\frac{e^x}{x^2}dx + c$$

$$= \frac{e^x}{x} + c \text{ (উত্তর)}$$

❐ **উদাহরণ–4 ঃ** $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \frac{e^x}{x+1} + c$ **প্রমাণ করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int\frac{\{(x+1)-1\}e^x}{(x+1)^2}dx$

$$= \int\frac{(x+1)e^x}{(x+1)^2}dx - \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx = \int\frac{e^x}{x+1}dx - \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{x+1}\int e^x dx - \int\left[\frac{d}{dx}\{(x+1)^{-1}\}\int e^x dx\right]dx - \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{e^x}{x+1} + \int(-1)\cdot\frac{e^x}{(x+1)^2}dx - \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{e^x}{x+1} - \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx - \int\frac{e^x}{(x+1)^2}dx = \frac{e^x}{x+1} + c$$

❐ **উদাহরণ–5 ঃ** $\int\sin(\log x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + c$ **কিনা পরীক্ষা করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, $I = \int\sin(\log x)\,dx$

$$= \sin(\log x)\int 1\cdot dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\sin(\log x))\int 1\cdot dx\right\}dx$$

$$= x\sin(\log x) - \int\frac{\cos(\log x)}{x}\cdot x\,dx$$

$$= x\sin(\log x) - \int\cos(\log x)dx$$

$$= x\sin(\log x) - [\cos(\log x)\int 1\cdot dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\cos(\log x))\int 1\cdot dx\right\}dx]$$

$$= x\sin(\log x) - [x\cos(\log x) + \int\frac{\sin(\log x)}{x}\cdot x\,dx]$$

$$= x\sin(\log x) - x\cos(\log x) - \int\sin(\log x)dx$$

$$= x[\sin(\log x) - \cos(\log x)] - I + c_1 \text{ (সমাকলন ধ্রুবক)}$$

$\therefore\ 2I = x[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + c_1$

$\Rightarrow I = \frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + \frac{c_1}{2}$

$\therefore \int \sin(\log x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + c$ [যখন c (ধ্রুবক) $= \frac{c_1}{2}$]— ফলটি সত্য।

❒ **উদাহরণ–6 ঃ** $\int \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{(x+1)^3}} \boldsymbol{e^x dx} = \frac{\boldsymbol{e^x}}{\mathbf{(x+1)^2}} + \boldsymbol{c}$**, সত্য না মিথ্যা তা পরীক্ষা করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** $\int \frac{x-1}{(x+1)^3} e^x dx = \int \frac{\{(x+1)-2\}e^x}{(x+1)^3} dx$

$= \int e^x \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx - 2\int \frac{e^x}{(x+1)^3} dx$

$= \frac{1}{(x+1)^2} \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \int e^x dx \right\} dx - 2\int \frac{e^x}{(x+1)^3} dx$

$= \frac{e^x}{(x+1)^2} - \int (-2) \cdot \frac{1}{(x+1)^3} \cdot e^x dx - 2\int \frac{e^x}{(x+1)^3} dx$

$= \frac{e^x}{(x+1)^2} + 2\int \frac{e^x}{(x+1)^3} dx - 2\int \frac{e^x}{(x+1)^3} dx$

$= \frac{e^x}{(x+1)^2} + c$ প্রদত্ত সমাকলের ফলটি সত্য।

❒ **উদাহরণ–7 ঃ দেখান যে,** $\int \boldsymbol{x\cos^2 x\, dx} = \frac{\boldsymbol{x\sin 2x}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{\cos 2x}}{\mathbf{8}} + \frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{c}$

☛ **সমাধান ঃ** বামপক্ষ $= \int x\cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int x(2\cos^2 x)dx$

$= \frac{1}{2}\int x(\cos 2x + 1)\, dx = \frac{1}{2}\int x\cos 2x\, dx + \frac{1}{2}\int x\, dx$

$= \frac{1}{2}\left[x\int \cos 2x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos 2x dx\right\} dx\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[x \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2}\right) - \int 1 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx\right] + \frac{x^2}{4}$

$= \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{1}{4}\int \sin 2x dx + \frac{x^2}{4}$

$= \frac{x\sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + \frac{x^2}{4} + c =$ দক্ষিণপক্ষ—নির্ণেয় ফলটি সত্য।

❑ **উদাহরণ–8 ঃ $\int e^{2x}\sin x \cos x\, dx$ = কত হবে?**

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, $I = \int e^{2x}\sin x \cos x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int e^{2x}(2\cdot\sin x \cos x)dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin 2x\int e^{2x}dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\sin 2x)\int e^{2x}dx\right\}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\sin 2x)\frac{e^{2x}}{2} - \int 2\cos 2x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x}\sin 2x - \frac{1}{2}\int(\cos 2x)e^{2x}dx$$

$$= \frac{e^{2x}\sin 2x}{4} - \frac{1}{2}\left[\cos 2x\int e^{2x}dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\cos 2x)\int e^{2x}dx\right\}dx\right]$$

$$= \frac{e^{2x}\sin 2x}{4} - \frac{e^{2x}\cos 2x}{4} + \frac{1}{2}\int\left(-\frac{\sin 2x}{2}\right)\cdot\frac{e^{2x}}{2}dx$$

$$= \frac{e^{2x}\sin 2x}{4} - \frac{e^{2x}\cos 2x}{4} - \frac{1}{8}\int e^{2x}\sin 2x dx$$

$\therefore \left(1+\frac{1}{8}\right)I = \frac{1}{4}\times e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$ বা, $I = \frac{8^2}{9\cdot 4}e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x) + c$

$\therefore \int e^{2x}\sin x \cos x\, dx = \frac{2}{9}e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x) + c$ (উত্তর)

অন্য উপায়ে অংকটিকে করা হল ঃ

$\int e^{2x}\sin x \cos x = \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin 2x\, dx$ [সূত্র ঃ $\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx - \tan^{-1}\frac{b}{a}) + c$]

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{\sqrt{2^2+2^2}}\sin(2x - \tan^{-1}\frac{2}{2}) + c$$

$$= \frac{e^{2x}}{4\sqrt{2}}\sin(2x - \tan^{-1}1) + c = \frac{e^{2x}}{4\sqrt{2}}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) + c$$

❑ **উদাহরণ–9 ঃ যদি $c = \int e^x\cos x\, dx$ এবং $s = \int e^x\sin x\, dx$ হয় তবে দেখাও যে $c + s = e^x\sin x$**

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে, $c = \int e^x\cos x\, dx = e^x\int\cos x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(e^x)\int\cos x\, dx\right\}dx$

$$= e^x\sin x - \int e^x\sin x\, dx = e^x\sin x - s$$

$\therefore c + s = e^x\sin x$ এটাই নির্ণেয় ফল।

❒ **উদাহরণ–10 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-2}}$

[সাধারণ আকার ঃ $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$, $\sqrt{cx+d}$ = t বসবে]

☛ **সমাধান ঃ** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-2}}$ [এস্থলে $\sqrt{x-2} = t$ (ধরি), $\therefore$ $x - 2 = t^2$ সুতরাং $dx = 2t\ dt$]

$$= \frac{2t\,dt}{\{(t^2+2)+1\}\sqrt{t^2+2-2}} = 2\int \frac{t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2}} = 2\int \frac{t\,dt}{(t^2+3)t}$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$ [সূত্র ঃ $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$]

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}}\right) + c, \ [\because\ t = \sqrt{x-2}\ ]$$

❒ **উদাহরণ–11 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ** $\int \frac{(x+2)dx}{(x^2+3x+3)\sqrt{x+1}}$

[সাধারণ আকার ঃ $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)\sqrt{px+q}}$, $\sqrt{px+q}$ = t বসাবে।]

☛ **সমাধান ঃ** $\int \frac{(x+2)dx}{(x^2+3x+3)\sqrt{x+1}}$

[ধরি, $\sqrt{x+1}$ = p বা, $x + 1 = p^2$ (উভয়দিকে বর্গ করে) $\therefore$ $dx = 2p\ dp$]

$$= \int \frac{(p^2-1+2)\cdot 2p\,dp}{\{(p^2-1)^2+3(p^2-1)+3\}\cdot p} = 2\int \frac{(p^2+1)dp}{p^4-2p^2+1+3p^2-3+3}$$

$$= 2\int \frac{(p^2+1)dp}{p^4+p^2+1} = 2\int \frac{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)dp}{p^2\left(p^2+1+\frac{1}{p^2}\right)}$$

$$= 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)dp}{\left(p^2+\frac{1}{p^2}+1\right)} = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)dp}{\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2\cdot p\cdot\frac{1}{p}+1}$$

$$= 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)dp}{\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+3} = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)dp}{\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2 + (\sqrt{3})^2} \quad [\text{ধরি, } p - \frac{1}{p} = z \;\therefore\; \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)dp = dz]$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left\{\frac{\left(p - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{3}}\right\} + c \quad [\because z = p - \frac{1}{p}]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left\{\frac{p^2 - 1}{\sqrt{3}p}\right\} + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1-1}{\sqrt{3}\sqrt{x+1}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3(x+1)}}\right) + c$$

❒ **উদাহরণ–12 ঃ** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$ **-কে সমাকলন করুন।**

[সাধারণ আকার ঃ $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px^2+qx+r}}$ সমাধানের জন্য $ax + b = \frac{1}{t}$, $(t \neq 0)$ বসাবেন।]

☛ **সমাধান ঃ** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$ [ধরি, $x - 1 = \frac{1}{t} \;\therefore\; dx = -\frac{1}{t^2}dt$]

$$= \int \frac{\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{t}\right) + 1}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\left(\frac{1}{t}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2 + \left(\frac{1}{t}+1\right) + 1}}$$

$$= -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\left(\frac{1}{t}\right)\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} + 1 + \frac{1}{t} + 1 + 1}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\left(\frac{1}{t}\right)\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t} + 3}}$$

$$= -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{3t^2 + 3t + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3t^2 + 3t + 1}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{3\left(t^2 + t + \frac{1}{3}\right)}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2\cdot t\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}\log\left|\left\{z+\sqrt{z^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}\right\}\right| + c$$ [ধরি, $t + \frac{1}{2} = z \therefore dt = dz$]

$$= -2\log\left|\left\{\left(t+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}\right\}\right| + c$$ [$\because z = (t + \frac{1}{2})$]

$$= -2\log\left|\left\{\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\frac{12\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\right)^2+1}{12}}\right\}\right| + c$$

$$= -2\log\left|\left\{\frac{x+1}{2(x-1)}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{12(x+1)^2}{4(x-1)^2}+1}\right\}\right| + c$$

$$= -2\log\left|\left\{\frac{(x+1)}{2(x-1)}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+1}\right\}\right| + c$$

$$= -2\log\left|\left\{\frac{(x+1)}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\frac{1}{3}}\right\}\right| + c$$

❐ **উদাহরণ–13 ঃ $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ -কে নির্ণয় করুন।**

[**সাধারণ আকার ঃ** $\int\frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$ সমাধানের জন্য $x = \frac{1}{t}$ বসাবেন।]

☛ **সমাধান ঃ** $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int\frac{\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}$ [ধরি, $x = \frac{1}{t} \therefore dx = -\frac{1}{t^2}dt$]

$$= -\int\frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{(t^2+1)}{t^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}} = -\int\frac{t\,dt}{(t^2+1)\sqrt{t^2-1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{(1+t^2)\sqrt{t^2-1}}$$ [ধরি, $t = \sqrt{p}$ বা, $t^2 = p \therefore 2t\,dt = dp$]

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dp}{(1+p)\sqrt{p-1}} \quad [\text{ধরি, } \sqrt{p-1} = z \therefore p-1 = z^2 \text{ বা, } dp = 2z\,dz]$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{2zdz}{(z^2+1+1)\sqrt{z^2}} = -\frac{2}{2}\int\frac{zdz}{z(z^2+2)} = -\int\frac{dz}{z^2+2}$$

$$= -\int\frac{dz}{z^2+(\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{2}}\right) + c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}{\sqrt{2}}\right) + c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}\right) + c \text{ (উত্তর)}$$

❐ **উদাহরণ–14 ঃ সমাকল করুন ঃ** $\int\sqrt{3-4x^2}dx$

☛ **সমাধান ঃ** $\int\sqrt{3-4x^2}dx = \int\sqrt{4\left(\frac{3}{4}-x^2\right)}dx$

$$= 2\int\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - x^2}\,dx = 2\left\{\frac{x\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - x^2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}\right\} + c$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{3-4x^2}\right)x\right\} + \frac{3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + c \text{ (উত্তর)}$$

4.9 সংক্ষিপ্তসার

সমাকলে ব্যবহৃত কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলী

1. $\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

2. $\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log_e\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ (যখন $|x| > |a|$)

3. $\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log_e\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$ (যখন $|x| < |a|$)

4. $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log_e\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log_e \left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ [যখন $|x| < |a|$]

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

অথবা, $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

8. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log_e \left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

9. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log_e \left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$

10. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

11. $\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2} + c \ (a \neq 0)$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\left(bx - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + c$$

12. $\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2} + c \ (a \neq 0)$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\left(bx - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + c$$

4.10 অনুশীলনী

সমাকল নির্ণয় করুন ঃ

1. $\int e^x \sin mx \cos nx\, dx \ (m > n)$

2. $\int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$

3. $\int \tan^2 x\, dx$

4. $\int \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

5. $\int 5^{\log_e x} dx$

6. $\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$

7. $\int \frac{\cos 7x - \cos 8x}{1 + 2\cos 5x} dx$

8. $\int \frac{dx}{\sin(x-m)\cos(x-n)}$

9. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$

10. যদি $u = \int e^x \cos x \, dx$ এবং $v = \int e^x \sin bx \, dx$ হয়, তবে দেখান যে, $u^2 + v^2 = \frac{e^{2x}}{2}$

11. $\int \sqrt{x^2 + x + 1} \, dx$

12. $\int e^x \cos^2 x \, dx$

13. $\int \frac{\sec x(2 + \sec x)}{(1 + 2\sec x)^2} dx$

14. $\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{3\cos x + 2\sin x} dx$

15. $\int \frac{dx}{2\sin x + \sec x}$

16. $\int \sqrt{ax - x^2} \, dx$

17. $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$

18. $\int \frac{(3x+1)dx}{2x^2 + x - 3}$

19. $\int \cos^{-1} x \, dx$

20. $\int \frac{(1+x^2)dx}{(1-x^2)\sqrt{x^4+x^2+1}}$

21. প্রমাণ করুন ঃ $\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right)+c$

22. প্রমাণ করুন ঃ $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}\,dx = [x+a]\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{ax}+c$

4.11 গ্রন্থপঞ্জী

1. Das and Mukherjee : Differential Calculus, U.N. Dhur & Sons, Kolkata.
2. Gorakh Prasad : Differential Calculus, Pothishala Pvt. Ltd. Allahabad.

একক 5 ❑ নির্ণায়ক

গঠন

5.1 উদ্দেশ্য

এই এককে আমরা নির্ণায়ক বিষয়ে আলোচনা করেছি উদাহরণসহ। সহসমীকরণ-এর সমাধান Cramer-এর নিয়মে এবং অরৈখিক সমীকরণের গুরুত্ব ও অস্তিত্ব বিষয়ে আলোচনা করেছি। Jacobian সম্পর্কে আলোচনা করেছি।

5.2 প্রস্তাবনা

1693 গণিতজ্ঞ লিব্‌নিজ একঘাতের সমীকরণগুলির মধ্যে একটি বিশেষ সম্পর্ক লক্ষ্য করলেন। সমীকরণগুলির মধ্যে উপস্থিত চলরাশির অপনয়নের ফলে একটি বিশেষ সম্বন্ধ পাওয়া যাচ্ছে। পরবর্তীকালে গণিতবিদ্ হিসাবে ফ্রেডরিক গাউস ও কসি উভয়েই এবিষয়ে গভীরভাবে মননিবেশ করেছিলেন। কসি সর্বপ্রথম নির্ণায়কের (Determinant) নামকরণ করেন। পরবর্তীকালে ক্রেমার, জ্যাকোবি, ভেন্ডারমন্ডি ও ব্লো ওহ্যামিন্টনের গবেষণা নির্ণায়কের তত্ত্বকে আরও সমৃদ্ধ করেছে।

5.3 নির্ণায়কের উৎপত্তি

ধরি, $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ ... (1)

$a_2x + b_2y + c_2z = 0$ ... (2)

$a_3x + b_3y + c_3z = 0$ ... (3)

তিনটি একঘাতের সমীকরণ।

(1)নং ও (2)নং থেকে বজ্রগুণন (cross multiplication) পদ্ধতিতে সমাধান করলে পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1} = k\ (\neq 0)$$ (ধরি, k ধ্রুবক রাশি)

$\therefore\ x = k(b_1c_2 - b_2c_1),\ y = k(a_2c_1 - a_1c_2)$ এবং $z = (a_1b_2 - a_2b_1)$

x, y ও z-এর মানগুলি (3)নং-তে বসিয়ে পাই,

$$a_3 \cdot k(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3 \cdot k(a_2c_1 - a_1c_2) + c_3 \cdot k(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

বা, $k[a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 + b_3a_2c_1 - b_3a_1c_2 + c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1] = 0$

বা, $a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 + b_3a_2c_1 - b_3a_1c_2 + c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1 = 0\ (\because\ k \neq 0)$

বা, $(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$ ... (4)

(4)নং সম্পর্কের বাঁদিকের অংশটিকে আমরা সহজেই লিখতে পারি, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হিসাবে।

(যেখানে নির্ণায়কের চিহ্ন হল | |)

একে তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক (third order determinant) বলে অভিহিত করা হয়।

এভাবে n-ক্রমের (n-th order) নির্ণায়ককে আমরা $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ হিসাবে প্রকাশ করতে পারি।

যদি $A = (a_{ij})_{n \times n}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে তার নির্ণায়কের রূপটি হবে $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

একে আরমা $|A|$ হিসাবে চিহ্নিত করব।

মাইনর (Minor)

ধরি, A = $|a_{ij}|$ যখন i = 1, 2, 3 এবং j = 1, 2, 3 A নির্ণায়কের যে কোনো পদ a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)। সুতরাং পদ 'a_{ij}' বলতে বুঝায় i-তম সারি (row) এবং j-তম স্তম্ভের (column) সংযোগস্থলে অবস্থিত পদটি। এখন আমরা i-তম সারি এবং j-তম স্তম্ভ (যা a_{ij}-কে ঘিরে আছে)-কে অপসৃত করে (অর্থাৎ বাদ দিয়ে) অবশিষ্ট পদগুলির মাধ্যমে পুনরায় একটি নির্ণায়ক প্রস্তুত করলাম এবং তাকে বললাম a_{ij}-এর মাইনর (minor)। একে M_{ij} হিসাবে সূচিত করলাম।

ধরি, $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$\therefore$ a_{12} পদের minor অর্থাৎ $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

অনুরূপে, a_{22} পদের minor অর্থাৎ $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

এভাবে A নির্ণায়কের যেকোনো পদের minor নির্ধারণ করা যায়।

সহ উৎপাদক (Co-factor)

ধরি, A = $|a_{ij}|$ (i, j = 1, 2, 3, ..., n) a_{ij} হ'ল A নির্ণায়কের i-তম সারি ও j-তম স্তম্ভের সংযোগস্থলে অবস্থিত পদ।

a_{ij}-এর সহ উৎপাদক = $(-1)^{i+j} \times a_{ij}$-এর মাইনর।

সুতরাং ($i + j$) = যুগ্ম সংখ্যা হলে, $i + j$ = 1 হবে।

($i + j$) = অযুগ্ম সংখ্যা হলে, $i + j$ = –1 হবে।

$\therefore$ ($i + j$) = যুগ্ম (even) সংখ্যা হলে, a_{ij}-এর সহ উৎপাদক = a_{ij}-এর মাইনর।

অন্যদিকে ($i + j$) = অযুগ্ম (odd) সংখ্যা হলে, a_{ij}-এর সহ উৎপাদক = – a_{ij}-এর মাইনর।

❒ **উদাহরণ ঃ ধরি, A = $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{a_{21}}$, $\boldsymbol{a_{31}}$, $\boldsymbol{a_{22}}$-এর সহ-উৎপাদক নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** a_{21}-এর সহউৎপাদক = $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

a_{31}-এর সহ উৎপাদক = $A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

a_{22}-এর সহ উৎপাদক = $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

(**বি.দ্র.** ঃ যে কোনো পদের সহ-উৎপাদক-কে বড় হাতের অক্ষরে লেখা হয়।)

5.4 নির্ণায়কের বিস্তৃতি

যে কোনো নির্ণায়কের ক্ষেত্রে যখন তার বিস্তার নিয়ে আলোচনা হবে তখন সহজেই আমাদের নজর যায় তার (নির্ণায়কের) যে কোনো সারি (row) বা স্তম্ব (column)-এর প্রতিটি পদ ও তার অনুরূপ সহ-উৎপাদকের দিকে। নির্ণায়কের বিস্তারের পর তার মান হবে যেকোনো সারি বা স্তম্ভ সাপেক্ষে প্রত্যেক পদ ও তার অনুরূপ সহ-উৎপাদকের গুণফল সমূহের যোগফলের সমান।

❒ **উদাহরণ ঃ মনে করি, A =** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$**, |A|-কে বিস্তৃত ক'রে মান নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** প্রথম সারি (1st row) বরাবর বিস্তৃতির সাহায্যে |A|-এর মান হবে নিম্নরূপ ঃ

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (5 \times 9 - 8 \times 6) - 2 \times (4 \times 9 - 7 \times 6) + 3 \times (4 \times 8 - 7 \times 5)$$

$$= 1 \times (45 - 48) - 2 \times (36 - 42) + 3 \times (32 - 35)$$

$$= 1 \times (-3) - 2 \times (-6) + 3 \times (-3) = -3 + 12 - 9 = 12 - 12 = 0$$

(বি.দ্র. ঃ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_1 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$)।

নির্ণায়কের বিস্তৃতির সাধারণ রূপ

ধরি, $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n}$

আমরা জানি যে, a_{ij}-এর সহ উৎপাদক (co-factor) = a_{ij}-এর মাইনর × $(-1)^{i+j}$

সাধারণত একে A_{ij} বলা হয়।

সুতরাং $A_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$ $[i, j = 1, 2, ..., n]$

∴ 'A' নির্ণায়কের মান (i-তম সারি সাপেক্ষে),

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

অনুরূপে, 'A' নির্ণায়কের মান (j-তম স্তম্ভ সাপেক্ষে),

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

5.5 দুটি সম ক্রমে নির্ণায়কের গুণন প্রক্রিয়া

দুটি সম ক্রমের (same order) নির্ণায়কের গুণফল চার প্রকারে করা যায়। যথা ঃ

(1) সারি (প্রথম নির্ণায়কের) × সারি (দ্বিতীয় নির্ণায়কের)

(2) সারি × স্তম্ভ (একইভাবে)

(3) স্তম্ভ × স্তম্ভ (একইভাবে)

(4) সারি × স্তম্ভ (একইভাবে)

আমরা এখানে (1)নং পদ্ধতিটি গ্রহণ করছি এবং অত্যন্ত সহজভাবে দুটি তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়কের মধ্যে গুণফল বার করার নিয়মটি তুলে ধরছি।

ধরি, $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}_{3\times3}$ এবং $A_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}_{3\times3}$

$$\therefore\ A \times A_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

বা, $AA_1 = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$

বি.দ্র. ঃ

যদি $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}_{2\times2}$ এবং $A_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}_{2\times2}$ হয়

তবে, $AA_1 = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$ [সারি (প্রথম নির্ণায়কের) × সারি (দ্বিতীয় নির্ণায়কের) (নিয়মে)]

কিন্তু ম্যাট্রিক্স (Matrix) এর গুণন প্রক্রিয়া একেবারেই আলাদা। সেখানে গুণফল হবে প্রথম ম্যাট্রিক্সের সারি এবং দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভের গুণফল গুলি যোগ করে প্রতিটি গুণফল ম্যাট্রিক্সের উপাদান (element) বের করতে হয়।

তখন $AA_1 = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$ হবে।

5.6 উদাহরণমালা

❒ **উদাহরণ–1 ঃ বিস্তৃত না করে $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

$(R_2 - R_1)$ এবং $(R_3 - R_1)$ প্রয়োগ করে পাই, (R = Row)

$$= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$(R_3 - R_1)$ প্রয়োগ করে পাই,

$$= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0$ [দ্বিতীয় ও তৃতীয় সারি দুটি পরস্পর সমান বলে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে]

❑ **উদাহরণ–2 ঃ প্রমাণ করুন যে,** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{ax+by} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{bx+cy} \\ \boldsymbol{ax+by} & \boldsymbol{bx+cy} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = \boldsymbol{(b^2 - ac)(ax^2 + 2bxy + cy^2)}$

☛ **সমাধান ঃ** বাঁদিক $= \begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$

$[c_3 - (xc_1 + yc_2)]$ প্রয়োগ করে পাই (C = column)

$$= \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ ax+by & bx+cy & -(ax^2+2bxy+c^2) \end{vmatrix}$$

তৃতীয় স্তম্ভের পদগুলির মাধ্যমে বিস্তৃত করে পাই

$= 0 - 0 + \{-(ax^2 + 2bxy + c^2)\}(ac - b^2)$

$= -(ax^2 + 2bxy + c^2) \times -(b^2 - ac)$

$= (b^2 - ac)(ax^2 + 2bxy + c^2) =$ ডান দিক **(প্রমাণিত)**

❑ **উদাহরণ–3 ঃ দেখান যে,** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a-b-c} & \boldsymbol{2a} & \boldsymbol{2a} \\ \boldsymbol{2b} & \boldsymbol{b-c-a} & \boldsymbol{2b} \\ \boldsymbol{2c} & \boldsymbol{2c} & \boldsymbol{c-a-b} \end{vmatrix} = \boldsymbol{(a + b + c)^3}$

☛ **সমাধান ঃ** বাঁদিক $= \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ প্রক্রিয়া অবলম্বনে ['$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$' দিয়ে নতুন R_1-কে $(R_1 + R_2 + R_3)$-এর মাধ্যমে প্রতিস্থাপিত করা হয়েছে।]

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} \quad [c_2 \to c_2 - c_1 \text{ এবং } c_3 \to c_3 - c_1]$$

$= (a + b + c)[1\cdot\{(a + b + c)^2 - 0\} - 0 + 0]$ [প্রথম সারির প্রতিপ্রেক্ষিতে বিস্তৃত করে]

$= (a + b + c)^3 =$ ডানদিক। এটাই নির্ণেয় ফল।

❒ **উদাহরণ–4 ঃ প্রমাণ করুন যে,** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{b+c} & \boldsymbol{c+a} & \boldsymbol{a+b} \\ \boldsymbol{q+r} & \boldsymbol{r+p} & \boldsymbol{p+q} \\ \boldsymbol{y+z} & \boldsymbol{z+x} & \boldsymbol{x+y} \end{vmatrix} = \mathbf{2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix}$

☛ **সমাধান ঃ** বাঁদিক $= \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a \\ q+r & r+p & p \\ y+z & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b+c & c+a & b \\ q+r & r+p & q \\ y+z & z+x & y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b+c & c & a \\ q+r & r & p \\ y+z & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ q+r & p & p \\ y+z & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b+c & c & b \\ q+r & r & q \\ y+z & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b+c & a & b \\ q+r & p & q \\ y+z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c & a \\ r & r & p \\ z & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ q & r & q \\ y & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c & b \\ r & r & q \\ z & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & b \\ q & p & q \\ y & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

[দ্বিতীয় নির্ণায়কের ক্ষেত্রে, প্রথম ও দ্বিতীয় স্তম্ভ পরস্পর সমান
তৃতীয় নির্ণায়কের ক্ষেত্রে, প্রথম ও তৃতীয় স্তম্ভ পরস্পর সমান
চতুর্থ নির্ণায়কের ক্ষেত্রে, প্রথম ও দ্বিতীয় স্তম্ভ পরস্পর সমান
পঞ্চম নির্ণায়কের ক্ষেত্রে, প্রথম ও তৃতীয় স্তম্ভ পরস্পর সমান]

$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ (প্রত্যেক নির্ণায়কের ক্ষেত্রে স্তম্ভগুলির মধ্যে পারস্পরিক স্থান বিনিময়ের মাধ্যমে, দুটি স্তম্ভের স্থান বিনিময়ে (–1) দিয়ে নির্ণায়কটিকে গুণ করা হয়েছে।)

$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} =$ ডানদিক (প্রমাণিত)।

❑ **উদাহরণ–5 ঃ ক্রামারের (Cremer's) নিয়মে সমাধান করুন (নিম্নোক্ত সমীকরণগুলিকে) ঃ**

$$\boldsymbol{x + y + z = 6}$$
$$\boldsymbol{x - y + 2z = 5}$$
$$\boldsymbol{3x + 5y - 7z = -8}$$

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 1\ (7 - 10) - 1\ (-7 - 6) + 1(5 + 3)$

[প্রথম সারির প্রেক্ষিতে নির্ণায়কটিকে বিস্তৃত করে]

$= -3 + 13 + 8 = 21 - 3 = 18\ (\neq 0)$

এখন, $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -8 & 5 & -7 \end{vmatrix}}{18} = \dfrac{1}{18}\{6(7 - 10) - 1\ (-35 + 16) + 1(25 - 8)\}$

$= \dfrac{1}{18}(-18 + 19 + 17) = \dfrac{18}{18} = 1$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -8 & -7 \end{vmatrix}}{18} = \dfrac{1(-35+16) - 6(-7-6) + 1(-8-15)}{18}$

$= \dfrac{-19+78+23}{18} = \dfrac{36}{18} = 2$

$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix}}{18} = \dfrac{1(8-25) - 1(-8-15) + 6(5+3)}{18}$

$= \dfrac{-17+23+48}{18} = \dfrac{71-17}{18} = \dfrac{54}{18} = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $x = 1$, $y = 2$ এবং $z = 3$

❑ **উদাহরণ–6 ঃ যদি $\boldsymbol{x = -9}$, $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{7} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{7} & \boldsymbol{6} & \boldsymbol{x} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$ সমীকরণের একটি বীজ হয় তবে এই সমীকরণের অপর দুটি বীজ নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে, $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$

বা, $\begin{vmatrix} x+2+7 & 3+x+6 & 7+2+x \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$ [নির্ণায়কে $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ (নতুন)]

বা, $\begin{vmatrix} x+9 & x+9 & x+9 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$

বা, $\begin{vmatrix} x+9 & 0 & 0 \\ 2 & x-2 & 0 \\ 7 & -1 & x-7 \end{vmatrix} = 0$ [নির্ণায়কে $C_2 \to C_2 - C_1$ (নতুন); $C_3 \to C_3 - C_1$ (নতুন)]

বা, $(x+9)\{(x-2)(x-7)-0\} - 0 + 0 = 0$ [প্রথম সারির পদগুলি সাপেক্ষে নির্ণায়কটিকে বিস্তৃত করে]

বা, $(x + 9)(x - 2)(x - 7) = 0$

$x + 9 = 0$, $x - 2 = 0$ এবং $x - 7 = 0$ অর্থাৎ $x = -9, 2, 7$

সুতরাং সমীকরণের $x = -9$ বীজটি বাদে অপর বীজ দুটি হ'ল $x = 2$ এবং $x = 7$

উত্তর ঃ $x = 2$, $x = 7$

5.7 প্রদত্ত সহসমীকরণগুলির সমাধনের জন্য ক্রামারের নিয়ম

নির্ণায়ক প্রক্রিয়া অবলম্বন করে জি. ক্রামার নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে একাধিক সহ-সমীকরণের (প্রদত্ত) সমাধান নির্ণয় করেছিলেন।

মনে করি, n সংখ্যক চলরাশি যুক্ত n সংখ্যক সহ-সমীকরণ দেওয়া আছে। যেমন

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = k_i \ (i = 1, 2, ..., n)$$

এবং নির্ণায়ক $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ ... (i)

এখন, $x_1\Delta = \begin{vmatrix} x_1a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_1a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ [এস্থলে C_1 (প্রথম স্তম্ভ) $\times x_1$]

$$= \begin{vmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \cdots + x_na_{nn} & a_m & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[$C_1' = C_1 + x_2C_2 + ... + x_nC_n$ (নতুন প্রথম স্তম্ভ)]

$$= \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ [(i)নং সম্পর্কের মাধ্যমে]

$= \Delta_1$ (ধরি)

$\therefore\ x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$

অনুরূপে, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, যেখানে $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ নির্ণায়কগুলি Δ থেকে পাওয়া যায় যদি Δ-এর দ্বিতীয়, তৃতীয়, ..., n-তম স্তম্ভগুলিকে যথাযথভাবে $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ দিয়ে প্রতিস্থাপিত করা যায়।

❒ **উদাহরণ ঃ Cramer-এর নিয়মে সমাধান করুন ঃ**

$$\mathbf{2x + 3y - 3z = 0}$$
$$\mathbf{5x - 2y + 2z = 19}$$
$$\mathbf{x + 7y - 5z = 5}$$

☛ **সমাধান ঃ** এখানে, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 1 & 7 & -5 \end{vmatrix}$

$$= 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 2(10 - 14) - 3(-25 - 2) - 3(35 + 2)$

$= 2(-4) - 3(-27) - 3(37)$

$= -8 + 81 - 111 = 81 - 119 = -38\ (\neq 0)$

$\therefore$ Cramer-এর নিয়ম প্রযোজ্য।

এখন, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 19 & -2 & 2 \\ 5 & 7 & -5 \end{vmatrix}$

$$= 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 19 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 0 - 3(-95 - 10) - 3(133 + 10)$

$= -3(-105) - 3(143) = 315 - 429 = -114$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 19 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 2(-95 - 10) - 0 - 3(25 - 19)$

$= 2(-105) - 3(6) = -210 - 18 = -228$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 19 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-10 - 133) - 3(25 - 19) + 0 = 2(-143) - 3(6)$$

$$= -286 - 18 = -304$$

Cramer-এর নিয়মে,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-114}{-38} = \frac{114}{38} = 3 \ (\because \ \Delta \neq 0)$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-228}{-38} = \frac{228}{38} = 6,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-304}{-38} = \frac{304}{38} = 8$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $x = 3$, $y = 6$ এবং $z = 8$ (উত্তর)।

ক্রামারের নিয়ম সম্পর্কে কয়েকটি জ্ঞাতব্য তথ্যাদি নীচে আলোচনা করা হল। এ আলোচনাটি **সহ-সমীকরণ সমাধানকালে** তাদের **প্রকৃতি বিষয়ে** উল্লেখযোগ্য ভূমিকা গ্রহণ করে।

(i) দুটি **প্রদত্ত সহ-সমীকরণের ক্ষেত্রে ঃ**

যদি $\Delta \neq 0$ তবে $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ হবে।

এক্ষেত্রে, **একটি মাত্র সমাধান** (unique solution) পাওয়া যাবে এবং প্রকৃতিগতভাবে প্রদত্ত সমীকরণগুলির তন্ত্রটি সুসমঞ্জস্য পূর্ণ (consistent) হবে।

(ii) যদি $\Delta = 0$ এবং x ও y-এর **অসংখ্য সমাধানযোগ্য** (infinite no. of solutions) মান পাওয়া যাবে এবং প্রকৃতিগতভাবে বলা চলে যে সহ-সমীকরণগুলি দিয়ে রচিত তন্ত্রটি (system) সামঞ্জস্যপূর্ণ (consistent) হবে।

(iii) যদি $\Delta = 0$ এবং Δ_1 ও Δ_2 মধ্যে কমপক্ষে একটি মান অশূন্য ($\neq 0$) হয়, তবে সমগ্র সহ-সমীকরণ (প্রদত্ত)-গুলির তন্ত্র (system of equations of two variables)টি অসামঞ্জস্যপূর্ণ (inconsistent) হবে। অর্থাৎ চল x ও y এর সমাধানযোগ্য মান পাওয়া যাবে না।

অনুরূপে, তিনটি অজানা চলকের ক্ষেত্রেও একই পদ্ধতিতে আমরা মতদান করতে পারি। একটি উদাহরণের মাধ্যমে আমরা তিনটি অজানা চলকের সহ-সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করার পদ্ধতিটি আলোচনা করছি।

❒ **উদাহরণ ঃ সমাধান করুন (নির্ণায়কের মাধ্যমে)**

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x + y + z = 1} \\ &\boldsymbol{x + 2y + 3z = 4} \qquad \textbf{(সমীকরণতন্ত্র)} \\ &\boldsymbol{x + 3y + 5z = 7} \qquad \qquad \textbf{... (1)} \end{aligned}$$

☛ **সমাধান ঃ** এখানে, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1(10 - 9) - 1(5 - 3) + 1\ (3 - 2)$

[নির্ণায়কের প্রথম সারির পরিপ্রেক্ষিতে]

$= 1(1) - 1(2) + 1(1) = 1 - 2 + 1 = 2 - 2 = 0$

অনুরূপে, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$ এবং $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$

সুতরাং, $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণতন্ত্র থেকে প্রাপ্ত চলের মান অসংখ্য হবে এবং তন্ত্রটি সামঞ্জস্যপূর্ণ হিসাবে বিবেচিত হবে **অথবা** তন্ত্রটি সামগ্রিকভাবে আসামঞ্জস্যপূর্ণ বলে নির্দিষ্ট হয়ে যাবে। এটি পরীক্ষার জন্য আমরা প্রথম দুটি সমীকরণকে নিলাম ঃ

$x + y + z = 1$ বা $x + y = 1 - z$

এবং $x + 2y + 3z = 4$ বা, $x + 2y = 4 - 3z$ ... (2)

এক্ষেত্রে, Cramer-এর নিয়ম অনুসরণ করে পাই, [(2)নং লক্ষণীয়]

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 4-3z & 2 \end{vmatrix} = (2 - 2z) - (4 - 3z) = 2 - 2z - 4 + 3z = z - 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & 4-3z \end{vmatrix} = (4 - 3z) - (1 - z) = 4 - 3z - 1 + z = 3 - 2z$$

$$\therefore\ x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{z-2}{1} = z - 2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3-2z}{1} = 3 - 2z$$

মনে করি, $z = k$ (যে কোনো বাস্তব সংখ্যা), $x = z - 2$ এবং $y = 3 - 2z$ থেকে পাই,

$x = k - 2,\ y = 3 - 2k\quad [\because\ z = k]$

সুতরাং, $x = k - 2$

$y = 3 - 2k$

$z = k$

যেহেতু, k একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক বলে, x, y ও z-এর অসংখ্য সমাধান মিলবে।

$\therefore$ সমষ্টিগতভাগে এই আলোচনা থেকে আমরা বলতে পারি যে, (1)নং সমীকরণ তন্ত্রটি সামঞ্জস্যপূর্ণ এবং এতে জড়িত চলের মান অসংখ্য।

❍ **প্রশ্ন ঃ Cramer নিয়ম অবলম্বনে সমাধান করুন ঃ**

$$5x - 7y + z - 11 = 0$$

$$6x - 8y = z + 15$$

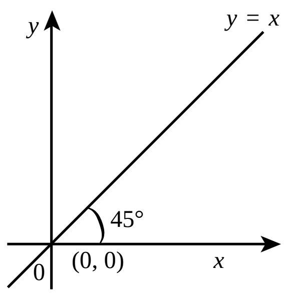
$$3x + 2y - 6z = 7$$ (সমীকরণগুলি দিয়ে গঠিত তন্ত্র (system))

চল রাশি x, y, z-এর মান নির্ণয় করে সামগ্রিকভাবে সমীকরণগুলি দিয়ে তৈরী করা তন্ত্রটির স্বরূপ (প্রকৃতি) উল্লেখ করুন।

✦ **উত্তর ঃ** $x = 1, y = -1, z = -1$ সমীকরণগুলি দিয়ে তৈরী করা তন্ত্রটি সুসামঞ্জস্য পূর্ণ 1

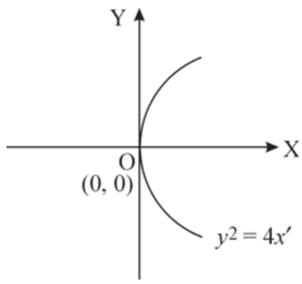
5.8 অরৈখিক সমীকরণ এবং এর অস্তিত্ব বিষয়ক আলোচনা

কোন বীজগাণিতীয় সমীকরণে উপস্থিত অজানা চলরাশির (রাশিসমূহের) সর্বোচ্চ ঘাত এক (one) হলে তাকে **রৈখিক সমীকরণ** (linear equation) বলা হয়। রৈখিক সমীকরণ বলার উদ্দেশ্য হল এর লেখচিত্র সর্বদা একটি সরলরেখাকে নির্দেশ করে। সেই কারণে, যে বীজগণিতীয় সমীকরণে হাজির থাকা চলরাশি (অজানা) বা রাশিসমূহের সর্বোচ্চ ঘাত দুই বা তার বেশী হয় তাকে **অরৈখিক সমীকরণ** হিসাবে উল্লেখ করা হয়।



উদাহরণ ঃ (i) $x' - y' = 0$ (রৈখিক সমীকরণ, কারণ x ও y চলরশি দুটির সর্বোচ্চ ঘাত এক (one))-এর লেখচিত্র মূলবিন্দু (0, 0)-গামী এবং x অক্ষের সহিত 45° কোণে নত একটি সরলরেখা।

(ii) $4x - y^2 = 0$ বা $y^2 = 4x$ [অরৈখিক সমীকরণ ঃ কারণ, এক্ষেত্রে x ও y-এর মধ্যে সর্বাচ্চ ঘাত দুই (two)]-এর লেখচিত্র সরলরেখা নয়, অধিবৃত্তাকার যার শীর্ষবিন্দু (0, 0)।



অরৈখিক সমীকরণগুলির ঘাত দুই, তিন, চার হলে তাদের সমাধানের কতকগুলি নির্দিষ্ট পদ্ধতি চালু আছে। কিন্তু বীজ গাণিতীয় সমীকরণে উপস্থিত চলের সর্বোচ্চ ঘাত পাঁচ এবং তার বেশী হলে সুনির্দিষ্ট পদ্ধতিতে সমাধান করাটা মোটেই সহজসাধ্য হয় না। কিন্তু, বর্তমানে বিজ্ঞান শাখায় কারিগরি বিদ্যায়, বাণিজ্য শাখায় এমনকি অর্থনীতিতে আজকাল অনেক সময় রৈখিক সমীকরণের পাশাপাশি অরৈখিক সমীকরণের উপস্থিতি অনিবার্য হয়ে পড়েছে। সেজন্য তাদের সমাধান কল্পে প্রকৃত (exact) সমাধানযোগ্য মানের বদলে আনুমানিক মানকে গ্রহণ করে, বর্তমানে numerical (সংখ্যাসূচক) পদ্ধতিকেই হাতিয়ার করা হচ্ছে।

অরৈখিক সমীকরণকে সমাধান করারজন্য কতকগুলি পদ্ধতির নাম নিচে উল্লেখ করা হল ঃ

(i) Bisection method (সমদ্বিখন্ডন পদ্ধতি)

(ii) 'Regula falsi' method

(iii) 'Fixed point iteration' method

(iv) Newton's Method

(v) Newton-Raphson's Method

(vi) 'Aitken's Δ^2' method ইত্যাদি।

Numerical method (সংখ্যাসূচক পদ্ধতি) যেহেতু অরৈখিক সমীকরণে প্রাপ্ত বীজের (আনুমানিক) মানকে সঠিক মানের যতটা সম্ভব কাছাকাছি নিয়ে যাওয়া যায় তার চেষ্টা করে থাকে। ফলে আনুমানিক মানগুলি দিয়ে 'সঠিক অনুঃক্রম (sequence)-কে বদ্ধ (closed) আকারে প্রকাশ করা হয়। সেজন্য এক্ষেত্রে ঐ প্রাপ্ত মানের অনুঃক্রমকে অভিসারী (convergent) অবশ্যই হতে হবে। সহজেই অনুমান করা যায় যে এক্ষেত্রে প্রাপ্ত মান ও সঠিক মানের মধ্যে অল্প হলেও একটা পার্থক্য অবশ্যই থাকবে। যাকে আমরা ত্রুটি বা 'error' বলি। এই ত্রুটিকে যে পদ্ধতি যত কম করতে পারে সে পদ্ধতিটি তত কার্যকরী হয়। বর্তমানে সেজন্য বিভিন্ন পদ্ধতির (অনুমানিক মান নির্ধারণের জন্য) আবির্ভাগ ঘটেছে। প্রথমে একটি নির্দিষ্ট অবকাশে প্রদত্ত সমীকরণের বীজ কোথায় নিহিত আছে তা স্থির করা হয়। পরবর্তী ক্ষেত্রে ঐ প্রাপ্ত বীজকে ত্রুটি মুক্ত (error free) করার জন্য অর্থাৎ সঠিক মানের কাছাকাছি নিয়ে যাওয়ার জন্য পুনঃপুন প্রয়োগ প্রক্রিয়া আরোপ করা হয়, যাকে আমরা 'পুনরাবৃত্তিকরণ প্রক্রিয়া (iteration) বলি। নিচের উপপাদ্যটির সাহায্যে আমরা প্রাথমিকভাবে $f(x) = 0$ থেকে x-এর বিশেষ একটি মান কোন অবকাশে নিহিত তা নির্ণয় করি।

উপপাদ্য ঃ "যদি $[a, b]$ এই বদ্ধ অবকাশে (closed interval) সুসংজ্ঞাত অপেক্ষক f (বা $f(x)$) সন্তত হয় এবং a এবং b প্রান্ত বিন্দুতে $f(a)$ এবং $f(b)$-র মান বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়, তখন কমপক্ষে একটি মান $\alpha \in (a, b)$ $[(a, b)$ খোলা অবকাশে α বর্তমান]-এর জন্য $f(\alpha) = 0$ হবে। (Intermediate value theorem—এই প্রক্রিয়ার একটি বিশেষ ধাপ)

বি.দ্র. ঃ আনুমানিক সমাধানযোগ্য মানকে α বলব, যদি অরৈখিক সমীকরণ $f(x) = 0$-কে α সিদ্ধ (satisfy) করে অর্থাৎ $f(\alpha) = 0$ হয়। আনুমানিক সমাধানগুলি দিয়ে প্রাপ্ত অনুঃক্রম $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$। যদি প্রকৃত সমাধান $f(x) = 0$ সমীকরণের জন্য α হয়, তবে, $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ (ত্রুটি), যখন $n \geq n_0$ (একটি নির্দিষ্ট বাস্তব মানের জন্য)

এস্থলে, এককথায়, $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\, x_n = \alpha$ [কসির উপপাদ্য, অভিসারী অনুঃক্রমের ক্ষেত্রে]

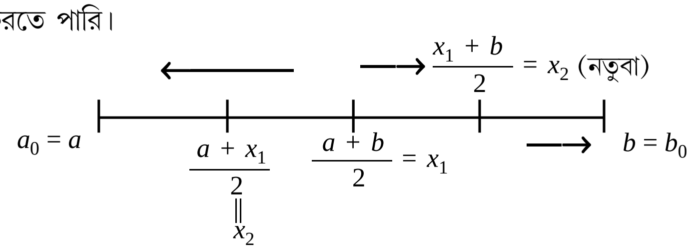
Numerical (সংখ্যাসূচক) পদ্ধতি অবলম্বনে অরৈখিক সমীকরণের সমাধান কিভাবে পাওয়া যায় তা আমরা 'প্রথম পদ্ধতি' অর্থাৎ 'Bisection method' (সমদ্বিখন্ডন পদ্ধতি)-এর মাধ্যমে ব্যাখ্যা করব।

সমদ্বিখন্ডন পদ্ধতি নিম্নোক্তভাবে প্রয়োগ করা হয় ঃ

ধরি, $f(x) = 0$ একটি অরৈখিক বীজগাণিতীয় সমীকরণ। $f(x)$, $[a, b]$ বদ্ধ অবকাশে কমপক্ষে একটি বীজকে গ্রহণ করছে বুঝব, যদি $f(a)$ এবং $f(b)$-তে প্রাপ্ত মান দুটি পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়। ধরি, x_0 সেই বীজ যার জন্য $f(a)\, f(b) < 0$ এবং $f'(x)$একই চিহ্ন ধরে রাখছে $[a, b]$ অবকাশে, তাহলে $f(x)$ অবশ্যই বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক (কঠোরভাবে) ঐ অবকাশে।

এভাবে প্রাপ্ত বীজগুলিকে $\{x_n\}$ বা $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ একটি অনুঃক্রমে প্রকাশ করতে পারব দ্বিসমদ্বিখন্ডন পদ্ধতিকে কাজে লাগিয়ে। ধরি, $x_0 = a$ বা b এবং $x_1 = \frac{1}{2}(a + b)$। তখন $f(x_1)$ নির্ণয় করা যায়। যদি $f(a)$ এবং $f(x_1)$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তবে $a_1 = a$, $b_1 = x_1$ ভেবে আমরা অগ্রসর হব যাতে $[a_1, b_1] = [a, x_1]$ হয়। অন্যভাবে যদি $f(x_1)$ ও $f(b)$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তবে আমরা ধরব $a_1 = x_1$ এবং $b_1 = b$ অর্থাৎ $[a_1, b_1] = [x_1, b]$। $f(x) = 0$ সমীকরণের যেকোনো একটি বীজ α, পূর্বোক্ত দুটি বিভাজনের যেকোনো একটিতে অবশ্যই নিহিত থাকবে যা কিনা $[a_1\ b_1]$ অবকাশের প্রতিরূপ। এই প্রক্রিয়ার পুনঃপুনঃ প্রয়োগে আমরা $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$-কে পাব অর্থাৎ $x_n \to \alpha$ যখন $n \to \infty$

আমরা নিচের ছবিটিকে অনুসরণ করতে পারি।



$$\left[x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2},\ x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2},\ ...,\ x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\right]$$

সমদ্বিখন্ডন পদ্ধতিতে আমরা অত্যন্ত সহজ ও সরলভাবে প্রদত্ত $f(x) = 0$ সমীকরণের (অরৈখিক বীজের অনুমানিক মান স্থির করতে পারি, যদিও এই পদ্ধতি কিছুটা মন্থর পদ্ধতি এবং অনেকগুলি মান বার করার উপর নির্ভরশীল।

❒ **উদাহরণ ঃ ধরি, $x^3 - 4x - 9 = 0$ বা $f(x) = 0$ যখন $f(x) = x^3 - 4x - 9$ 'সমদ্বিখন্ডন পদ্ধতি' অবলম্বন করে দেয় অরৈখিক সমীকরণের তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত গ্রহণযোগ্য বীজ (বাস্তব) নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** এক্ষেত্রে, $f(x) = x^3 - 4x - 9$

পরীক্ষামূলকভাবে পাই, $f(0) = 0^3 - 4{\cdot}0 - 9 = 0 - 9 = -9 < 0$

$$f(1) = 1^3 - 4{\cdot}1 - 9 = 1 - 4 - 9 = 1 - 13 = -12 < 0$$
$$f(2) = 2^3 - 4{\cdot}2 - 9 = 8 - 8 - 9 = -9 < 0$$
$$f(3) = 3^3 - 4{\cdot}3 - 9 = 27 - 12 - 9 = 27 - 21 = 6 > 0$$

সুতরাং এস্থলে লক্ষণীয় যে, $f(2) < 0$ ঋণাত্মক কিন্তু $f(3) > 0$ (ধনাত্মক)

$\therefore$ $f(2)$ এবং $f(3)$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত, ফলে $x^3 - 4x - 9 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ $[2, 3]$ অবকাশে সীমাবদ্ধ। মনে করি, $a_0 = 2$ এবং $b_0 = 3$।

সুতরাং $x_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) = \frac{1}{2}(2 + 3) = 2.5.$

পুনরায়, $f(2.5) = (2.5)^3 - 4(2.5) - 9 = -3.375 < 0$

$f(3) > 0$ অতএব, $[2{\cdot}5, 3]$ এই অবকাশে একটি বীজ অবশ্যই অবস্থান করবে।

$\therefore$ $x_2 = \frac{1}{2}(2.5 + 3) = \frac{1}{2}(5.5) = 2.75$

এভাবে আমরা এগিয়ে গেলে, নিচের তালিকাটি সহজেই প্রস্তুত করা যায়।

ক্রমিক সংখ্যা (n)	**a_n-এর জন্য $f(a_n) < 0$**	**b_n-এর জন্য $f(b_n) > 0$**	**$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ (-এর মান)**	**$f(x_{n+1})$ (এর প্রাপ্ত মান)**
0	2	3	2.5	–3.375
1	2.5	3	2.75	0.797
2	2.5	2.75	2.625	–1.412
3	2.625	2.75	2.6875	– 0.339
4	2.6875	2.75	2.7187	0.22
5	2.6875	2.7187	2.7031	–0.058
6	2.7031	2.7187	2.7109	0.076
7	2.7031	2.7109	2.7070	0.0084
8	2.7031	2.7070	2.70505	–0.027

উপরিউক্ত তালিকা লক্ষ্য করলে সহজেই ধরা পড়ে যে $x^3 - 4x - 9 = 0$ সমীকরণের (অরৈখিক) একটি আনুমানিক বীজ হ'ল 2.706 (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত)।

উত্তর ঃ 2.706

প্রশ্ন ঃ

(1) 'সমদ্বিখন্ডন প্রক্রিয়া' অবলম্বনে $x^3 - 9x + 1 = 0$ (অরৈখিক সমীকরণ)-কে সমাধান করে আনুমানিকভাবে (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত) যে বীজটি 2 এবং 3-এর মধ্যে অবস্থিত তাকে নির্ণয় করুন।

(2) সমদ্বিখন্ডন সূত্র প্রয়োগ করে অরৈখিক সমীকরণ $x^3 + x^2 - 1 = 0$-এর একটি বীজ (যা তিনটি শুদ্ধ সার্থক অংক যুক্ত) নির্ণয় করুন।

5.9 জ্যাকোবি প্রদত্ত নির্ণায়ক বা জ্যাকোবীয় নির্ণায়ক

যদি $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, n সংখ্যক চলরাশি সমৃদ্ধ n-ক্রমে অবকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় তবে

$$J\left(\frac{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n}{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial u_3}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \frac{\partial u_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

-কে জ্যাকোবীয় নিণায়ক বা ক্রিয়ামূলক নির্ণায়ক বলা হয় যেখানে অপেক্ষক হিসাবে উপস্থিত থাকে u_1, u_2, u_3, ..., u_n এবং যাকে x_1, x_2, x_3 সাপেক্ষে আংশিকভাবে অবকলিত করা হয়। প্রতীকী প্রকাশে জ্যকোবীয় নির্ণায়ককে নিম্নোক্তভাবে লেখা হয় ঃ

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, ..., u_n)}{\partial(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)} \quad \text{বা, } J\left(\frac{u_1, u_2, u_3, ..., u_n}{x_1, x_2, x_3, ..., x_n}\right)$$

রূপান্তর জ্যামিতিতে জ্যাকোবীয় নির্ণায়কের ব্যবহার বহুল প্রচলিত। যেহেতু একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্সকে বাস্তব মানে প্রকাশের কাজটি করে নির্ণায়ক, ফলে ম্যাট্রিক্স বীজগাণিতেও এই নির্ণায়কের প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়। বিশিষ্ট গণিতজ্ঞ (জার্মান) কে.জি. জ্যকোবির 'নাম' অনুসারে এই নির্ণায়কের নামকরণ করা হয়েছে।

❒ **উদাহরণ–1 ঃ $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ হয়, তবে দেখান যে, $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2\sin\theta\sin\phi$.**

☛ **সমাধান ঃ** বাঁদিক $= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$

$= (\gamma^2\sin\theta)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$ ($r\sin\theta$ এবং r-কে তৃতীয় ও দ্বিতীয় স্তম্ভ থেকে সাধারণ উৎপাদক হিসাবে নেওয়া হয়েছে।)

$= (r^2\sin\theta)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$ (R_2 (নতুন) $\rightarrow R_1\cos\phi + R_2\sin\phi$)

$= (r^2\sin\theta)(-\sin\phi)(-1) - 0 + 0$ [নির্ণায়কটিকে তৃতীয় স্তম্ভের পরিপ্রেক্ষিতে ভাঙা হয়েছে]

$= r^2\sin\theta\sin\phi$ = ডানদিক। এটাই নির্ণেয় ফল।

❒ **উদাহরণ–2 ঃ যদি x ও y এক প্রকার স্বাধীন চলক এবং u অন্যপ্রকার স্বাধীন চলক হয়, তবে $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ = কত?**

☛ **সমাধান ঃ** $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$ (জ্যাকোবীয় নির্ণায়কের সংজ্ঞা অনুসারে)

এবং $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

এখন, $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ (নির্ণায়ক দুটির মধ্যে গুণ করে) ... (1)

ধরি, $u = f(x, y)$ এবং $v = g(x, y)$ এবং $x = F(u, v)$ এবং $y = G(u, v)$

এদের সমাধান করে আমরা পাই,

এখন, $\dfrac{\partial u}{\partial u} = 1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}$

$\dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}$ ... (2)

$\dfrac{\partial v}{\partial v} = 1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}$

$\dfrac{\partial v}{\partial u} = 0 = \dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}$

(1)নং থেকে পাই [(2)নং সম্পর্কের সাহায্যে]

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

সুতরাং, $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 1 (উত্তর)

কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য জ্যাকোবীয় তত্ত্বের উপর

○ **উপপাদ্য–1 ঃ Jacobian for implicit functions,**

যদি $f(u, v, x, y) = 0$ এবং $g(u, v, x, y) = 0$ দুটি অপেক্ষক এমনভাবে বর্তমান, যখন u, v উভয়েই x এবং y চলকের মাধ্যমে প্রকাশিত আংশিকভাবে অবকলনযোগ্য অপেক্ষক, তখন

$$J \text{ বা } \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$$ [যেখানে $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$ (হর অংশ) $\neq 0$

○ **উপপাদ্য–2 ঃ** ধরি, তিনটি স্বাধীন বাস্তব চলরাশি হল x_1, x_2 এবং x_3 যাদের মাধ্যমে প্রকাশিত বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষকসমূহ হল u_1, u_2 এবং u_3 ও u_1, u_2 এবং u_3-এর মধ্যে একটি অধীনস্থ অপেক্ষক প্রসূত সম্পর্ক থাকার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হ'ল

$\dfrac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 0$ (অপেক্ষকের আংশিক অবকলের সন্ততা অবশ্যই ধরে নিতে হবে)

❑ **উদাহরণ–1 ঃ জ্যাকোবীয় নিয়ম প্রয়োগ করে প্রমাণ করুন যে, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$**

☛ **সমাধান ঃ** ধরি, $f(x) = \tan^{-1}x$

$\therefore\ f(y) = \tan^{-1}y$

ধরি, $u = f(x) + f(y)$ এবং $v = \dfrac{x+y}{1-xy}$

$$\therefore\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} \\ \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} & \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\ u$ এবং v পরস্পর নির্ভরশীল।

ধরি, $u = \phi(v)$

$f(x) + f(y) = \phi\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$, এটা সকল x ও y-এ সত্য)।

$y = 0$ হলে, $f(x) = \phi(x) \quad \therefore\ f(v) = \phi(v) \quad \therefore\ u = \phi(v)$

$f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

সুতরাং $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন ঃ যদি $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$ এবং $w = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, u, v এবং w অপেক্ষকগুলি স্বাধীন (independent) নয় (জ্যাকোবীয় নিয়মে)

❑ **উদাহরণ–2 ঃ যদি $u = x + y + z$, $uv = y + z$, $uvw = z$ হয়, তবে $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ = কত?**

☛ **সমাধান ঃ** শর্তানুসারে,

$u = x + y + z,\ uv = y + z,\ uvz = z$

$\therefore\ x = u - (y + z) = u - uv$

$y = uv - z = uv - uvw$

$z = uvw$

$$\text{সুতরাং, } \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} \quad [R_2 + R_3 \text{ প্রয়োগে নতুন } R_2 \text{ পাওয়া যায়}]$$

$$= \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw+vw & uw+u-uw & -uv+uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = 0 - 0 + uv\begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix}$$

$$= uv\{u(1-v) + uv\} = uv(u - uv + uv) = u^2v$$

$\therefore \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ -এর মান u^2v (উত্তর)

প্রশ্নাবলী ঃ

(1) যদি $u^2 + v^3 = x + y$ এবং $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, J বা $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{(y^2-x^2)}{uv(u-v)}\right\}$

(2) যদি $x + y + z = u$, $y + z = uv$ এবং $z = uvw$ হয় তবে দেখান যে, J বা $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = u^2v$

5.10 সংক্ষিপ্তসার

যদি mn সংখ্যক সংখ্যা সমূহের গঠনতন্ত্র (system) কোন বিশেষ নিয়মে (order) সাজানো যায় যাতে m সংখ্যক সারির প্রতি সারিতে n সংখ্যক সংখ্যা থাকে অর্থাৎ গঠন তন্ত্রে m সংখ্যক সারি ও n সংখ্যক স্তম্ভ পাওয়া যায় তবে এই ব্যবস্থাকে $m \times n$ ম্যাট্রিক্স বলা হবে।

একঘাত সমীকরণের কোন গঠনতন্ত্রকে ম্যাট্রিক্সের মাধ্যমে প্রকাশ করা সম্ভব। যেমন—

$$x + 2y + 3z = 5$$

$$2x + 9y + 4z = 7$$

$$5x + y + 8z = 9$$

এই সমীকরণের গঠনতন্ত্রকে ম্যাট্রিক্সের মাধ্যমে নীচের পদ্ধতিতে প্রকাশ করা যায়।

$$\underset{3\times3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}}$$

প্রতীক হিসেবে লেখা হয় AY = F

এখানে A, Y এবং F এই তিনটিই Matrix যাদের আয়তন (demension) প্রথম সারি ও তারপর স্তম্ভের সংখ্যার গুণকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় যেমন A Matrix-এর আয়তন 3 × 3, Y Matrix-এর আয়তন 3 × 1 এবং F Matrix-এর আয়তন 3 × 1

নির্ণায়ক (determinant) হ'ল ম্যাট্রিক্সের (Matrix) মান

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ Matrix-এর determinant হবে $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

$= 1(9.8 - 4.1) - 2(2.8 - 5.4) + 3(2.1 - 5.9)$

$= 1(72 - 4) - 2(16 - 20) + 3(2 - 45)$

$= 68 + 8 - 129$

$= -53$

এই সমীকরণের গঠনতন্ত্রে যে তিনটি চলরাশি ব্যবহার করা হয়েছে সেগুলি হ'ল x, y, z. এই তিন চলরাশির মান আমরা নির্ণায়কের সাহায্যে ক্র্যামারের সূত্র অনুযায়ী বের করে ফেলতে পারি।

5.11 অনুশীলনী

1. প্রমাণ করুন যে $\begin{vmatrix} 2bc - a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca - b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix} = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$

2. দেখান যে, $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

3. যদি $s = \frac{(a+b+c)}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে,

$$\begin{vmatrix} a^2 & (s-a)^2 & (s-a)^2 \\ (s-b)^2 & b^2 & (s-b)^2 \\ (s-c)^2 & (s-c)^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2s^3(s-a)(s-b)(s-c)$$

4. বিস্তৃতির সাহায্য ছাড়া নির্ণায়কটির মান স্থির করুন ঃ $\begin{vmatrix} 17 & 19 & 18 \\ 58 & 60 & 59 \\ 97 & 99 & 98 \end{vmatrix}$

5. মান নির্ণয় করুন ঃ $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$ (যেখানে ω, ω^2 হল $x^3 - 1 = 0$ সমীকরণের দুটি অবাস্তব বীজ)

6. যদি $x \neq y \neq z$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $xyz = -1$ যখন $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

7. দেখান যে, $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$

8. প্রমাণ করুন যে, $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

9. নিচের সমীকরণগুলি ক্রামারের নিয়মে সমাধান করুন ঃ

$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z} = 4$, $\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z} = 1$ এবং $\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z} = 2$

10. a ও b-এর মান কেমন হবে যাতে প্রদত্ত সমীকরণগুলির একটিমাত্র সমাধান থাকে

$2x + ay + 6z = 8$

$x + 2y + bz = 5$

$x + y + 3z = 4$

11. $\omega^3 = 1$ হলে দেখান যে, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a + b\omega + c\omega^2)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ \omega^2 & c & a \\ \omega & a & b \end{vmatrix}$

(যেখানে ω, ω^2 হল $x^3 - 1 = 0$ সমীকরণের দুটি কাল্পনিক বীজ)

12. সমাধান করুন ঃ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & p & q \\ x^2 & p^2 & q^2 \end{vmatrix} = 0, (p \neq q)$

13. প্রমাণ করুন যে, $\begin{vmatrix} \frac{a^2+b^2}{c} & c & c \\ a & \frac{b^2+c^2}{a} & a \\ b & b & \frac{c^2+a^2}{b} \end{vmatrix} = 4abc$

14. দেখান যে, $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 - bc \\ 1 & b & b^2 - ca \\ 1 & c & c^2 - ab \end{vmatrix} = 0$

15. প্রমাণ করুন ঃ $\begin{vmatrix} 1 + a^2 - b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1 - a^2 + b^2 & 2b \\ 2b & -2a & 1 - a^2 - b^2 \end{vmatrix} = (1 + a^2 + b^2)^3$

5.12 গ্রন্থপঞ্জী

1. A Text Book of Matrices : Shanti Narayan and P.K. Mittal, S. Chand, New Delhi.
2. Simplified Course in Matrices : H.K. Dass, S. Chand, New Delhi.

একক 6 ❑ ম্যাট্রিক্স

গঠন

6.1 উদ্দেশ্য

এই এককে ম্যাট্রিক্স (বীজ গণিত) বিষয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। Eigen value এবং eigen vector সম্পর্কেও উদাহরণসহ বিশ্লেষণ করা হয়েছে।

6.2 প্রস্তাবনা

বর্তমানে বিজ্ঞান, প্রযুক্তি, শিল্পে, অর্থনীতি এবং মহাকাশ গবেষণায় সংখ্যা তত্ত্বের প্রয়োগ সুবিদিত। আজকের দুনিয়ায় আমরা সংখ্যাকে বাদ দিয়ে জীবনের কোন কাজকে সুচারুরূপে সম্পন্ন করতে অক্ষম। তাই কতকগুলিকে সুসংহতভাবে সাজিয়ে গণিতের যে শাখায় তার প্রায়োগিক দিক আলোচিত হয় তা ‘Matrix theory বা ম্যাট্রিক্সের তত্ত্ব’ হিসাবে স্বীকৃত। শুধুমাত্র সহ-সমীকরণ (প্রদত্ত)গুলির সমাধান এর উদ্দেশ্য নয়। গণিতের বিবিধ ক্ষেত্রে সংখ্যাগুলিকে সুসজ্জিত করে তার উন্নত ধারার প্রয়োগ আমাদের দৃষ্টি আকর্ষণ করে। সংখ্যার জগতে বাস্তব ও কাল্পনিক উভয় প্রকারের উপস্থিতি আছে। কিন্তু আমরা আলোচ্য সূচীতে বাস্তব সংখ্যাকে ম্যাট্রিক্স গঠনে নির্বাচিত করছি এই অধ্যায়ে।

সংজ্ঞা (বাস্তব ম্যাট্রিক্সের) ঃ m সংখ্যক বাস্তব সংখ্যাকে সারিতে (row) এবং n সংখ্যক বাস্তব সংখ্যাকে স্তম্ভে (column) সুনির্দিষ্ট প্রক্রিয়ায় সাজালে সেই সজ্জা পদ্ধতিকে ‘Matrix’ (ম্যাট্রিক্স) বলা হয়। এর প্রতীক হিসাবে ( ) বা [ ] বা || || ব্যবহার করা হয়।

ধরি, (ম্যাট্রিক্স) A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$, n-তম ক্রমের একটি ম্যাট্রিক্স।

এক্ষেত্রে $(a_{ij})_{m\times n}$ $(i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n)$

ম্যাট্রিক্স-এর সারির সংখ্যা m এবং স্তম্ভের সংখ্যা n। ম্যাট্রিক্স A-এর i-তম সারি এবং j-তম স্তম্ভে উপস্থিত পদকে a_{ij} হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

সমস্যা সমাধানে ম্যাট্রিক্স একটি গাণিতিক উপকরণ (tool or device) বাস্তব রাশি সমৃদ্ধ হয়েও এর নির্দিষ্ট মান থাকে না। যেমন নির্ণায়কের ক্ষেত্রে সংখ্যা বা পদগুলির বিন্যাসে (সারি এবং স্তম্ভে) একটি নির্দিষ্ট বাস্তব মান পাওয়া যায়। নির্ণায়ক ও ম্যাট্রিক্স এর মূল প্রভেদটি এক্ষেত্রে সহজেই লক্ষ্য করা যায়। নির্ণায়কের (determinant)-এর ক্ষেত্রে যে কোনো সারি বা স্তম্ভকে কোন বাস্তব সংখ্যা k $(\neq 0)$ দিয়ে গুণ করার অর্থ পুরো নির্ণায়কটিকে ঐ বাস্তব সংখ্যা k দিয়ে গুণ করা। কিন্তু, ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা k $(\neq 0)$ দিয়ে গুণ করার অর্থ ম্যাট্রিক্সের সারি ও স্তম্ভে অবস্থিত প্রত্যেক সংখ্যা (বা পদ) কে গুণ করা। প্রভেদ দুটি আমাদের স্মরণ করায় যে নির্ণায়ক ও ম্যাট্রিক্স বাস্তব সংখ্যাসমূহের সারি ও স্তম্ভের একটি সজ্জা পদ্ধতি হয়েও একই অর্থ বহন করে না।

6.3 ম্যাট্রিক্সের প্রকার ভেদ

(a) **আয়তকার ম্যাট্রিক্স (Rectangular matrix) ঃ** যখন $(a_{ij})_{m\times n}$ ম্যাট্রিক্সের $m \neq n$ অর্থাৎ মোট সারির সংখ্যা ≠ মোট স্তম্ভের সংখ্যা, তখন এই ধরনের ম্যাট্রিক্সকে 'আয়তাকার ম্যাট্রিক্স' বলা হয়।

উদাহরণ ঃ A = $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

এস্থলে, A ম্যাট্রিক্সে মোট সারির সংখ্যা = 2 এবং মোট স্তম্ভের সংখ্যা = 3। সুতরাং A ম্যাট্রিক্সটি আয়তাকার ম্যাট্রিক্স।

(b) **বর্গাকার ম্যাট্রিক্স (square typed matrix) ঃ** যখন $(a_{ij})_{m\times n}$ ম্যাট্রিক্সের $m = n$ অর্থাৎ মোট সারির সংখ্যা = মোট স্তম্ভের সংখ্যা, তখন এই প্রকার ম্যাট্রিক্সকে '**বর্গাকার ম্যাট্রিক্স**' বলা হয়।

উদাহরণ ঃ A = $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

এস্থলে, A ম্যাট্রিক্সের মোট সারির সংখ্যা = 2 = 2 মোট স্তম্ভের সংখ্যা। সুতরাং A ম্যাট্রিক্সটি একটি '**বর্গাকার ম্যাট্রিক্স**'।

(c) **কর্ণাকার ম্যাট্রিক্স (Diagonal matrix) ঃ** ধরি, A = $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ প্রধান কর্ণ (Principal diagonal)

A ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণ বরাবর পদগুলি বিভিন্ন ধ্রুবক সংখ্যা কিন্তু অবশিষ্ট পদগুলি শূন্য হলে, ঐ ম্যাট্রিক্স-কে 'কর্ণাকার ম্যাট্রিক্স' বলে।

উদাহরণ ঃ মনে করি, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ — এটি একটি কর্ণাকার ম্যাট্রিক্স।

বি.দ্র. ঃ সাধারণভাবে $(a_{ij})_{n\times n}$, $(i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., n)$ ম্যাট্রিক্সের a_{ii} পদে $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ বিভিন্ন সংখ্যা কিন্তু বাকি পদে শূন্য থাকলে, ঐ ম্যাট্রিক্সকে কর্ণাকার ম্যাট্রিক্স বলে।

(d) **স্কেলার ম্যাট্রিক্স (scalar matrix)** ঃ সাধারণভাবে $(a_{ij})_{n\times n}$ ম্যাট্রিক্সের কর্ণ বরাবর পদগুলি [অর্থাৎ a_{ii} যেখানে $j = i$ পদে] কোনো বিশেষ ধ্রুবক ($\neq 0$) উপস্থিত থাকলে তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে।

উদাহরণ ঃ ধরি, $A = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$ এস্থলে $s = 50$; এটি একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

(e) **শূন্য ম্যাট্রিক্স (Zero matrix or null matrix)** ঃ সাধারণভাবে, $(a_{ij})_{n\times n}$ বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে, $a_{ii} = 0$ হলে, ম্যাট্রিক্সটিকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলা হয় যার অন্যান্য পদে অবশ্যই শূন্য উপস্থিত অর্থাৎ এই ম্যাট্রিক্সের সকল পদই শূন্য।

উদাহরণ ঃ ধরি, $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

এস্থলে a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$

সকলেই শূন্য অর্থাৎ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$
$b_1 = b_2 = b_3 = 0$
$c_1 = c_2 = c_3 = 0$

সুতরাং, ম্যাট্রিক্স A-এর আকার হ'ল $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ । এটিকে $O_{3\times 3}$ হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

(f) **একক ম্যাট্রিক্স বা অভেদ ম্যাট্রিক্স (Unit or Identity matrix)** ঃ এক্ষেত্রে, $(a_{ij})_{n\times n}$ বর্গ ম্যাট্রিক্সের $(i = 1, 2, ..., n$ এবং $j = 1, 2, ..., n)$ a_{ii} পদে সর্বদা এক বা 1 অবস্থিত। অন্য পদগুলি শূন্য। এই প্রকার ম্যাট্রিক্সকে 'একক ম্যাট্রিক্স' বলা হয়।

উদাহরণ ঃ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ এটি একটি 'একক ম্যাট্রিক্স'।

(g) **সারি ম্যাট্রিক্স (Row matrix)** ঃ যে ম্যাট্রিক্সের গঠনে শুধুমাত্র একটি সারি বরাবর পদ থাকে, তাকে 'সারি ম্যাট্রিক্স' বলে।

যথা ঃ (i) $A = (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4)_{1\times 4}$ —একটি সারি (row) এবং চারটি স্তম্ভ (column) দিয়ে ম্যাট্রিক্সটি গঠিত।

(ii) অনুরূপে, $(4 \;\; 5 \;\; 6)_{1\times 3}$ —একটি 'সারি ম্যাট্রিক্স'।

(h) **স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স (Column matrix)** ঃ যে ম্যাট্রিক্স গঠনে শুধুমাত্র স্তম্ভ বরাবর পদগুলি বর্তমান থাকে, তাকে স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স বলে।

উদাহরণ ঃ (i) $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}_{3\times1}$, একটি স্তম্ভ ম্যাট্রিক্সের উদাহরণ।

(ii) $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}_{4\times1}$, একটি স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স।

(i) **প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric matrix)** ঃ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে যখন $a_{ij} = a_{ji}$ হয় তখন এটিকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে। যথা $A = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$

এক্ষেত্রে, $a_{12} = h = a_{21}$, $a_{31} = g = a_{31}$, $a_{23} = f = a_{32}$।

(j) **অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew symmetric matrid)** ঃ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে, $a_{ij} = -a_{ji}$। এক্ষেত্রে, কর্ণ বরাবর পদগুলি শূন্য।

যথা ঃ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, এটি একটি অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

(k) **বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স বা সিংগুলার ম্যাট্রিক্স (Singular matrix)** ঃ ধরি, একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})_{n\times n}$। যদি $|a_{ij}| = 0$ হয় অর্থাৎ $(a_{ij})_{n\times n}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য হলে A ম্যাট্রিক্সকে সিংগুলার ম্যাট্রিক্স বলে।

যথা ঃ ধরি, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$

$$\therefore\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-12 + 12) - 2(15 - 15) + 3(20 - 20)$$

$$= 1\cdot0 - 2\cdot0 + 3\cdot0 = 0$$

সুতরাং ম্যাট্রিক্স A একটি সিংগুলার ম্যাট্রিক্স।

(l) **অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স (Non-singular matrix) ঃ** যদি $(a_{ij})_{n\times n}$ বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের $|a_{ij}|$ নির্ণায়কের মান শূন্য না হয় তবে ঐ ম্যাট্রিক্সকে 'নন্-সিংগুলার ম্যাট্রিক্স' বলে।

উদাহরণ ঃ ধরি, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

$\therefore\ |A| = 5 - 12 = -7 \neq 0$

সুতরাং ম্যাট্রিক্স 'A' হ'ল 'নন্ সিংগুলার ম্যাট্রিক্স'।

বি.দ্র. ঃ এক্ষেত্রে লক্ষ্যণীয় যে, কর্ণাকার বর্গম্যাট্রিক্সের কর্ণ বরাবর পদগুলি ভিন্ন কিন্তু অন্যান্য পদগুলি শূন্য। 'শূন্য ম্যাট্রিক্স'—একটি কর্ণাকার ম্যাট্রিক্স যার সকল পদই শূন্য। অভেদ বা একক ম্যাট্রিক্স একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স যার কর্ণ বরাবর পদগুলি 1 অন্যান্য পদগুলি অবশ্যই শূন্য। সুতরাং 'এক কথায় শূন্য ম্যাট্রিক্স, অভেদ ম্যাট্রিক্স সকলেই বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের একটি বিশেষ রূপ (special form)।

◆ **উদাহরণ ঃ** ধরি, A (ম্যাট্রিক্স) = $\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ [যেখানে k_1, k_2, k_3 (বাস্তব ধ্রুবক) ... (1)

A ম্যাট্রিক্স হ'ল একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স (diagonal matrix)।

(i) এখন $k_1 = k_2 = k_3 = k$ (ধরি, $\neq 0$, ধ্রুবক); (1)নং থেকে পাই,

$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}_{3\times 3}$, একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স (scalar matrix)

(ii) এখন $k = 0$ (ধরি), (1)নং থেকে পাই,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$, একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স (null or zero matrix)

(iii) ধরি, $k = 1$ হলে, (1)নং থেকে পাই,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ বা, I_3 , একটি অভেদ বা একক ম্যাট্রিক্স (identity or unit matrix)

6.4 ম্যাট্রিক্সের স্থানাঙ্ক

ধরি, A একটি অশূন্য ম্যাট্রিক্স $(m \times n)$ ক্রমের। যদি সর্বোচ্চ ধনাত্মক সংখ্যা r-এর জন্য A ম্যাট্রিক্সের কমপক্ষে একটি অশূন্য r ক্রমের মাইনর (minor) পাওয়া যায়, তবে r-কে ঐ ম্যাট্রিক্স A-এর 'rank' বলা হয়। শূন্য ম্যাট্রিক্স এর rank সর্বদা শূন্য হবে।

◆ **উদাহরণ–1 ঃ** ধরি, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times3}$

এক্ষেত্রে, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(4-0) - 0(8-3) + 3(0-6)$

$= 4 - 0 - 18 = 4 - 18 = -14 \neq 0$

সুতরাং A-এর rank = 3

◆ **উদাহরণ–2 ঃ** ধরি, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3\times3}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1(-6-0) - 0(24-10) + 3(0+2)$

$= -6 - 0 + 6 = 0$

সুতরাং rank of A < 3 (কারণ A ম্যাট্রিক্সের তৃতীয় সারি এবং প্রথম সারি পরস্পর নির্ভলশীল।)

মূল A ম্যাট্রিক্সের দ্বিতীয় যে কোনো উপ-ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক শূন্য নয়।

যেমন, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$,

$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6 \neq 0$

সুতরাং, দ্বিতীয় ক্রমের যে কোনো ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক অশূন্য। অতএব A ম্যাট্রিক্সের rank = 2.

Elemntary Oprations

যদি A ম্যাট্রিক্সের পদগুলি সংগৃহীত হয় F বাস্তব সংখ্যা ক্ষেত্র থেকে (field of scalars) তবে A ম্যাট্রিক্সের উপর নিম্নোক্ত তিনটি প্রক্রিয়ার যেকোনো একটির মাধ্যমে 'elementary operation' প্রয়োগ করা যায়।

(a) A ম্যাট্রিক্সের যে কোনো দুটি সারির (বা যেকোনো দুটি স্তম্ভের) স্থান পরিবর্তনের সাহায্যে।

(b) A ম্যাট্রিক্সের যেকোনো একটি সারি (বা স্তম্ভ)-কে একটি অশূন্য বাস্তব সংখ্যা K($\in$ F) দিয়ে গুণ করে।

(c) যে কোনো সারি (বা স্তম্ভ)-কে একটি অশূন্য বাস্তব সংখ্যা দিয়ে গুণ করে অপর একটি সারি (বা স্তম্ভ)-এর সাথে সংযুক্ত করে।

যখন 'elementary operations' শুধুমাত্র A ম্যাট্রিক্সের row (সারিগুলি) উপর প্রযুক্ত হয় তাকে 'elementary row operations' বলে

অনুরূপে, ‘elementary operations’ শুধুমাত্র A ম্যাট্রিক্স স্তম্ভগুলির (columns) উপর কার্যকরী হলে তাকে ‘elementary column operations’ বলা হয়।

◆ **উদাহরণ ঃ** প্রথম ধাপ ঃ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

[দেয় ম্যাট্রিক্স সারি দ্বিতীয়, তৃতীয় সারির মধ্যে পরিবর্তন]

দ্বিতীয় ধাপ ঃ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ [R_3 অর্থাৎ তৃতীয় সারিকে 2 দিয়ে গুণ করা]

তৃতীয় ধাপ ঃ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+3R_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 14 & 9 & 19 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ [নতুন দ্বিতীয় সারিটি, প্রথম সারির পদের সঙ্গে তিন দিয়ে গুণ করে দ্বিতীয় সারির পদগুলির সাথে যুক্ত করে]

অনুরূপে $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{23}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ [তিন নং স্তম্ভকে দু নং স্তম্ভে পরিবর্তনের মাধ্যমে আসতে হবে]

একইভাবে দ্বিতীয় ও তৃতীয় ধাপের প্রক্রিয়া স্তম্ভের ক্ষেত্রে করা যাবে।

(a) **সাধারণ সারি প্রক্রিয়া (Elementary row operation)-এর মাধ্যমে A =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ **-এর rank নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** A-এর সারির উপর ‘elementary operation’ প্রয়োগ করা হবে।

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3-5R_2 \\ R_4-11R_2}]{R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2+R_3 \\ R_4+10R_3}]{R_1+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B\,(\text{ধরি})$$

শেষ ম্যাট্রিক্সটিকে লক্ষ্য করা যায় যে, পরিবর্তিত ম্যাট্রিক্সের তিনটি সারি অশূন্য কিন্তু চতুর্থ সারিটি পুরোপুরি শূন্য পদ যুক্ত।

$\therefore$ Rank A = Rank B = 3

(b) **সাধারণ স্তম্ভ প্রক্রিয়ার (elementary column operation) মাধ্যমে X, Y ম্যাট্রিক্স দুটি সমতুল্য কিনা পরীক্ষা করো যখন** $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ **এবং** $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{5} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{-1} & -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \end{pmatrix}$

☛ **সমাধান ঃ** $X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \xrightarrow{C_{12}} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}C_2} \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} \\ 5 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}_{3\times 3} = Y$

যেহেতু Y (ম্যাট্রিক্স)-কে X (ম্যাট্রিক্স) থেকে পাওয়া গেল শুধুমাত্র স্তম্ভ প্রক্রিয়ার (column-operation) মাধ্যমে সুতরাং আমরা X, Y ম্যাট্রিক্স দুটিকে সমতুল্য (equivalent) বলতে পারি।

[এখানে X ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে C_{12} বলতে দ্বিতীয় স্তম্ভ দিয়ে প্রথম স্তম্ভকে প্রতিস্থাপিত করা হয়েছে, এটাই বুঝানো হয়েছে।]

ধরি, A একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স, যেমন $A = (a_{ij})_{n\times n}$ $(i, j = 1, 2, 3, ..., n)$। a_{ij} পদের সহ-উৎপাদক (co-factor) হল A_{ij} যারা উপস্থিত আছে $|A| = |a_{ij}|_{n\times n}$

$(A_{ij})_{n\times n}$ ম্যাট্রিক্সে প্রধান কর্ণ বরাবর অবস্থিত পদ সাপেক্ষে সারিকে স্তম্ভে এবং অনুরূপে স্তম্ভকে সারিতে রূপান্তরিত করলে Adjoint বা Adjugate ম্যাট্রিক্স গঠিত হয়। একে Adj(A) হিসাবে চিহ্নিত করা যায়।

যদি $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{11} & c_{12} & c_{33} \end{pmatrix}$-কে একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স ধরা যায়। তবে a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$-এর সহ-উৎপাদকগুলি হল A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$

$$\therefore \text{Adj.A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} \end{pmatrix}^T \quad \text{[প্রধান কর্ণে অবস্থিত পদগুলির সাপেক্ষে]}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} \\ A_{13} & B_{13} & C_{13} \end{pmatrix}$$

❒ **উদাহরণ–1 ঃ ধরি,** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**; A-এর Adj. A নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** $\text{Adj. A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -7 \\ 4 & -8 & 4 \\ -15 & 12 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -15 \\ -4 & -8 & 12 \\ -7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

6.5 বিপরীত ম্যাট্রিক্স

যদি A একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স $(a_{ij})_{n\times n}$ রূপে প্রকাশিত হয় এবং B অপর একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স $(b_{ij})_{n\times n}$ হিসাবে চিহ্নিত হয় এবং AB = I = BA সম্পর্কটি বজায় থাকে তবে B ম্যাট্রিক্সটিকে A ম্যাট্রিক্সের inverse (বিপরীত ম্যাট্রিক্স) বলা হয় এবং একে A^{-1} দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। [এক্ষেত্রে $I_{n\times n}$ একটি একক ম্যাট্রিক্স]

এস্থলে উল্লেখযোগ্য যে একটি অশূন্য ম্যাট্রিক্সের 'inverse' (বিপরীত ম্যাট্রিক্স) হবে কিন্তু শূণ্য Matrix-এর বিপরীত Matrix হবে না।

A^{-1} বাহির করার নিয়ম হ'ল— (i) A বর্গ ম্যাট্রিক্সের |A| বা নির্ণায়কের মান নির্ণয় করতে হবে। (ii) Adj.A নির্ণয় করতে হবে (যা অশূন্য হবে)। (iii) $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj.A}}{|A|}$ অর্থাৎ Adj.A-কে |A| (≠ 0) দিয়ে ভাগ করলে তবেই A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} পাওয়া যাবে।

❒ **উদাহরণ–2 ঃ যদি $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ হয় তবে A^{-1} নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** পূর্বের উদাহরণ-1 থেকে পাই,

$$\text{Adj.A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -15 \\ -4 & -8 & 12 \\ -7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -15 \\ -4 & -8 & 12 \\ -7 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 5(24 - 48) - 4(12 + 84) + (-15)(-16 - 56)$$

$$= 5(-24) - 4(96) - 15(-72) = -120 - 384 + 1080 = 576$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{\text{Adj.A}}{|A|} = \frac{1}{576}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -15 \\ -4 & -8 & 12 \\ -7 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{576} & \frac{4}{576} & -\frac{15}{576} \\ -\frac{4}{576} & -\frac{8}{576} & \frac{12}{576} \\ -\frac{7}{576} & \frac{4}{576} & -\frac{3}{576} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{576} & \frac{1}{144} & -\frac{5}{192} \\ -\frac{1}{144} & -\frac{1}{72} & \frac{3}{48} \\ -\frac{7}{576} & \frac{1}{144} & -\frac{1}{192} \end{pmatrix}$$

6.6 আইগেন মান এবং আইগেন ভেক্টর

মনে করি, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ (একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স) এবং $\alpha = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ (একটি অশূন্য ভেক্টর) এমনভাবে উপস্থিত, যাতে λ (বাস্তব ধ্রুব-প্রাচল)-এর জন্য নিম্নোক্ত সম্পর্কটি

$A\cdot\alpha = \lambda\alpha$, সম্ভব হয়।

এস্থলে, α-কে আইগেন ভেক্টর এবং λ-কে আইগেন মান (eigen value), A বর্গাকার ম্যাট্রিক্স-এর জন্য গণ্য করা হয়।

❒ **উদাহরণ—1 ঃ যদি** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স ধরা হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, A-এর আইগেন ভেক্টর (1, 1, 2) এবং অনুরূপ আইগেন মান 2**

☛ **সমাধান ঃ** মনে করি, $\alpha = (1, 1, 2)$

এখন, $A \cdot \alpha = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times1+1\times1+(-1)\times2 \\ 2\times1+2\times1+(-1)\times2 \\ 2\times1+2\times1+0\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1-2 \\ 2+2-2 \\ 2+2+0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\alpha$$

এক্ষেত্রে, $A\alpha = 2\alpha$

স্পষ্টতঃ A বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের আইগেন ভেক্টর (1, 1, 2) এবং অনুরূপ আইগেন মান 2 (প্রমাণিত)।

❒ **উদাহরণ—2 ঃ নিম্নোক্ত ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মান এবং আইগেন 3-এর জন্য আইগেন ভেক্টরটি নির্ণয় করুন, যখন A (ম্যাট্রিক্স) =** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\mathbf{3\times3}}$

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$

এর চরিত্রগত সমীকরণ (characteristic equation) হল

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ [এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে মূল ম্যাট্রিক্সের কর্ণ বরাবর λ (ধ্রুবক) বিয়োগ করা হয়েছে]

বা, $0 - 0 + (1 - \lambda)\{(2 - \lambda)^2 - 1\} = 0$ [নির্ণায়কটিকে তৃতীয় সারির পদের মাধ্যমে বিস্তৃত করে]

বা, $(1 - \lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1) = 0$

বা, $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$

বা, $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - \lambda + 3) = 0$

বা, $(1 - \lambda)\{\lambda(\lambda - 3) - 1(\lambda - 3)\} = 0$

বা, $(1 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$

বা, $(\lambda - 3)(1 - \lambda)(\lambda - 1) = 0$

$\therefore \lambda - 3 = 0, 1 - \lambda = 0, \lambda - 1 = 0$

বা, $\lambda = 3, 1, 1$

এক্ষেত্রে λ (ধ্রুবকের) মানগুলি অর্থাৎ 3, 1, 1 হল নির্ণেয় আইগেন মান (eigen value)

এখন, λ = 3-এর জন্য আইগেন ভেক্টরটি নির্ণয় করব।

ধরি, AX = 3X [যখন X = (x_1, x_2, x_3) (আইগেন ভেক্টর), যখন λ = 3]

বা, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ বা, $\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 0 + 0 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$

সুতরাং, $2x_1 + x_2 + x_3 = 3x_1$ বা, $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3x_2$ বা, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$x_3 = 3x_3$ বা, $-2x_3 = 0$ বা, $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - 2x_3 = 0$ ... (1)

মনে করি, B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ [(4)নং থেকে প্রাপ্ত সহগ ম্যাট্রিক্স (co-efficient matrix)]

$$\text{এখন, } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2'(\text{[illegible]}) = R_1 + R_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3' = R_3 + R_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C \text{ (ধরি)}$$

$\therefore$ C বা B ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে, র‍্যাঙ্ক (rank) = 2 [কারণ B-এর দুটি স্বাধীন সারি ভেক্টর বর্তমান]

C ম্যাট্রিক্সের প্রেক্ষিতে (i)নং সম্পর্ক থেকে পাই,

$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$2x_3 = 0$ বা, $x_3 = 0$

$\therefore -x_1 + x_2 + 0 = 0$ বা, $x_1 = x_2$

সুতরাং λ = 3 হলে, আইগেন ভেক্টর = (x_2, x_2, 0) [$\because$ $x_1 = x_2$] যেখানে x_2 একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক।

❑ **উদাহরণ–3 ঃ যদি A (ম্যাট্রিক্স) = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{\mathbf{3\times 3}}$ হয়, দেখান যে A তার নিজস্ব চরিত্রগত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।**

[এটাই হল কে্‌-হ্যামিলটন সমীকরণ (Cayley-Hamilton equation) অর্থাৎ 'প্রত্যেক ম্যাট্রিক্স তার চরিত্রগত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।']

☛ **সমাধান ঃ** এক্ষেত্রে, A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A-এর চরিত্রগত সমীকরণ $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -(1+\lambda) & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$

বা, $(1 - \lambda)(\lambda(1 + \lambda) - 1) = 0$ বা, $(1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$

বা, $\lambda^2 + \lambda - 1 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = 0$ বা, $-\lambda^3 + 2\lambda - 1 = 0$

বা, $\lambda^3 - 2\lambda + 1 = 0$

এখন আমরা দেখাবো যে $A^3 - 2A + I_3 = 0$ (যেখানে I_3 হল একটি একক ম্যাট্রিক্স তৃতীয় ক্রমের]

এক্ষেত্রে, $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+2 & 2+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+1 & 0-1+0 \\ 0+0+0 & 0-1+0 & 0+1+0 \end{pmatrix}$ [গুণন প্রক্রিয়া (সারি × স্তম্ভ)]

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

অনুরূপে, $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

এখন, $A^3 - 2A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ এটাই নির্ণেয় ফল।

❒ **উদাহরণ–4 ঃ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-7} \end{pmatrix}_{\mathbf{3\times3}}$ ম্যাট্রিক্স থেকে $\mathbf{A^{-1}}$ নির্ণয় করুন।**

নিচের সমীকরণগগুলি ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে সমাধান করুন।

$$\boldsymbol{x + y + z = 8}$$
$$\boldsymbol{x - y + 2z = 6}$$
$$\boldsymbol{3x + 5y + 7z = 14}$$

☛ **সমাধান ঃ** এস্থলে, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -7 \end{pmatrix}_{3\times3}$ একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স।

$c_{11} = 7 - 10 = -3$

[প্রথম সারি ও প্রথম স্তম্ভে উপস্থিত ‘1’-এর সহ উৎপাদক (co-factor) দিয়ে প্রকাশিত হয়েছে।]

অনুরূপে, $c_{12} = -(-7 - 6) = 13$, $c_{13} = 5 + 3 = 8$, $c_{21} = -(-7 - 5) = 12$, $c_{22} = -7 - 3 = -10$, $c_{23} = -(5 - 3) = -2$, $c_{31} = 2 + 1 = 3$, $c_{32} = -(2 - 1) = -1$, $c_{33} = -1 - 1 = -2$

$\therefore$ সহ-উৎপাদকগুলি দিয়ে প্রস্তুত ম্যাট্রিক্সটি হল $\begin{pmatrix} -3 & 13 & 8 \\ 12 & -10 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

সুতরাং Adj.A = $\begin{pmatrix} -3 & 13 & 8 \\ 12 & -10 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T$ [এস্থলে (T (transpose)) করার অর্থ হল প্রধান কর্ণ বরাবর উপস্থিত সংখ্যাগুলি সাপেক্ষে সারিকে স্তম্ভে এবং স্তম্ভকে সারিতে ঘুরিয়ে লেখার রীতি]

$$= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 3 \\ 13 & -10 & -1 \\ 8 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $|A|$ (ডেট A) অর্থাৎ A-এর নির্ণায়ক $= 1(7 - 10) - 1(-7 - 6) + 1(5 + 3)$

$= -3 + 13 + 8 = 18 \neq 0 \Rightarrow$ A ম্যাট্রিক্সটি সমাধানযোগ্য।

এখন $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj.A}}{|A|} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} -3 & 12 & 3 \\ 13 & -10 & -1 \\ 8 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

দ্বিতীয় অংশে যে সমীকরণগুলি উল্লেখ করা হয়েছে তাদের ম্যাট্রিক্স প্রকাশ করলে দাঁড়ায়

AX = B যখন A হল প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স, B হল $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$ এবং $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X = A^{-1}B$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -3 & 12 & 3 \\ 13 & -10 & -1 \\ 8 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -24+72+42 \\ 104-60-14 \\ 64-12-28 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 114-24 \\ 104-74 \\ 64-40 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 90 \\ 30 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{90}{18} \\ \frac{30}{18} \\ \frac{24}{18} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = 5, y = \dfrac{5}{3}, z = \dfrac{4}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 5, y = \dfrac{5}{3}, z = \dfrac{4}{3}$ (উত্তর)

❒ **উদাহরণ–5 ঃ দেখান যে, যদি A = $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হয়, তবে ইহা একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স।**

☛ **সমাধান ঃ** লম্ব ম্যাট্রিক্সের শর্ত ঃ $AA^T = I$ (অভেদ ম্যাট্রিক্স)

এক্ষেত্রে $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\therefore AA^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$\therefore$ ম্যাট্রিক্স A একটি লম্ব-ম্যাট্রিক্স (orthogonal matrix)। সুতরাং এটাই হল নির্ণেয় ফল।

❒ **উদাহরণ–6 ঃ যদি A = $\begin{pmatrix} 3-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{pmatrix}_{2\times 2}$ একটি সিঙ্গুলার (singular) ম্যাট্রিক্স হয়, তবে x-এর মান নির্ণয় করুন।**

☛ **সমাধান ঃ** যেহেতু ম্যাট্রিক্স A একটি সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং $|A| = 0$ অর্থাৎ A (নির্ণায়ক)-এর মান = 0

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (3-x)(4-x) - 6 = 0 \Rightarrow 12 - 3x - 4x + x^2 - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - x + 6 = 0$

$\Rightarrow x(x-6) - 1(x-6) = 0 \Rightarrow (x-6)(x-1) = 0$

সুতরাং $x - 6 = 0$ নতুবা $x - 1 = 0$

$\therefore x = 6, 1$

$\therefore$ x-এর নির্ণেয় মান = 1, 6 (উত্তর).

❒ **উদাহরণ–7 ঃ বিপরীত ম্যাট্রিক্সের মাধ্যমে নিম্নোক্ত সমীকরণগুলির সমাধান করুন ঃ**

$$\mathbf{2x + 5y + 3z = 9}$$
$$\mathbf{3x + y + 2z = 3}$$
$$\mathbf{x + 2y - z = 6}$$

☛ **সমাধান ঃ** প্রদত্ত সমীকরণগুলিকে নিম্নোক্তভাবে রূপান্তরিত (transformed) সমীকরণে লেখা যায়,

$AX = B$

যেখানে, $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (সহগ সমীকরণ), $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

সুতরাং, $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ বা, $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

বা, $IX = A^{-1}B$ [I হল অভেদ বা একক ম্যাট্রিক্স]

বা, $X = A^{-1}B$

আমরা জানি যে, $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj.A}}{|A|}$

এখন, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 2(-1-4) - 5(-3-2) + 3(6-1)$ [নির্ণায়কের বিস্তৃতি হল প্রথম সারির সাপেক্ষে]

$= 2(-5) - 5(-5) + 3(5) = -10 + 25 + 15 = 40 - 10 = 30 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} (বিপরীত ম্যাট্রিক্সটি) অস্তিত্বযুক্ত।

Adj.A (সহযোগী ম্যাট্রিক্স) $= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$

$= \begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \\ 7 & 5 & -13 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5 & 11 & 7 \\ 5 & -5 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $X = A^{-1}B$

বা, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} -5 & 11 & 7 \\ 5 & -5 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

বা, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} -45+33+42 \\ 45-15+30 \\ 45+3-78 \end{pmatrix}$ বা, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 75-45 \\ 75-15 \\ 48-78 \end{pmatrix}$

বা, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}$ বা, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{30} \\ \frac{60}{30} \\ \frac{-30}{30} \end{pmatrix}$ বা, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান ঃ $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$ (উত্তর)।

❒ **উদাহরণ–8 ঃ (ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে) λ ও μ-এর কোন মানের জন্য নিচেয় প্রদত্ত সমীকরণগুলির**

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 10 \\ x + 2y + \lambda z &= \mu \end{aligned}$$

(i) কোনো সমাধান নেই (ii) একটি মাত্র সমাধান আছে (iii) অসংখ্য সমাধান বর্তমান।

☛ **সমাধান ঃ** The argumented matrix (অগম্যান্টেড ম্যাট্রিক্স) হল $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & \lambda & \mu \end{array}\right)$

$R_2 - R_1$, $R_3 - R_1$ প্রয়োগ করে পাই, $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & \mu-6 \end{array}\right)$

এখন $R_3 - R_2$ প্রয়োগ করে পাই, $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & \mu-10 \end{array}\right)$

ধরি, 'r' হল প্রদত্ত সমীকরণগুলি থেকে প্রাপ্ত সহগ ম্যাট্রিক্স-এর র‍্যাঙ্ক (rank) এবং r' হল অগম্যান্টেড ম্যাট্রিক্সটির র‍্যাঙ্ক।

সুতরাং (i)-এর জন্য আমরা লিখব ঃ

যদি $r \neq r'$ অর্থাৎ $\lambda = 3, \mu \neq 10$

(ii) এর জন্য আমরা পাই ঃ

যদি $r = r' = 3$ হয় অর্থাৎ যদি $\lambda \neq 3$, μ-এর যেকোনো বাস্তব মান থাকে।

(iii) এর জন্য আমরা উল্লেখ করব ঃ

$r = r' < 3$ অর্থাৎ $\lambda = 3, \mu = 10$

উত্তর ঃ (i) $\lambda = 3, \mu \neq 10$; (ii) $\lambda \neq 3$, μ-এর যেকোনো বাস্তব মান (iii) $\lambda = 3, \mu = 10$

6.7 সংক্ষিপ্তসার

m সংখ্যক বাস্তব সংখ্যাকে সারিতে এবং n সংখ্যক বাস্তব সংখ্যাকে স্তম্ভে সুনির্দিষ্ট প্রক্রিয়ায় সাজালে সেই সজ্জা পদ্ধতিকে (Matrix) ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন—

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

এখানে সারির সংখ্যা m এবং স্তম্ভের সংখ্যা n সমস্যা সমাধানে matrix একটি গাণিতিক উপকরণ ও বাস্তব রাশি সমৃদ্ধ হয়েও এর কোন নির্দিষ্ট মান থাকে না। কিন্তু নির্ণায়কের (determinant) ক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট বাস্তব মান পাওয়া যায়।

আবার নির্ণায়কের ক্ষেত্রে যে কোন সারি বা স্তম্ভকে কোনো বাস্তব সংখ্যা ($K \neq 0$) দিয়ে গুণ করার অর্থ পুরো নির্ণায়কটিকে ঐ বাস্তব সংখ্যা দিয়ে গুণ করা। কিন্তু Matrix এর ক্ষেত্রে কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা দিয়ে গুণ করার অর্থ Matrix এর সারি ও স্তম্ভে অবস্থিত প্রত্যেক সংখ্যাকে গুণ করা।

প্রতিটি বর্গাকার Matrix এর নির্ণায়ক এর মান নির্ণয় করা যায় যেমন—

Matrix	Determinant
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (8 - 3) = 5 =$ Determinant এর মান

6.8 অনুশীলনী

1. যদি $A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 6 & -9 & 12 \\ 2 & 9 & -10 \end{pmatrix}_{3\times3}$ এবং $2A + B = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 4 \\ 12 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$ হয়, তবে A ও B ম্যাট্রিক্স দুটি নির্ণয় করুন।

2. যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $A^3 - 23A - 40I_3 = 0$ (তৃতীয় ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্স)

3. যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$ হয় তবে (i) A^{-1} (A-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স) নির্ণয় করুন।

   (ii) নিম্নোক্ত সমীকরণগুলির সমাধান করুন (A^{-1}-এর সাহায্যে)

$$x + y + z - 3 = 0$$
$$x - y - z + 1 = 0$$
$$2x + y - z - 2 = 0$$

4. যদি $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times2}$ হয়, তবে $(A - 2I)(A - 3I) = 0$ (দ্বিতীয় ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্স)

   যেখানে I হল একক ম্যাট্রিক্স (দ্বিতীয় ক্রমের)

5. প্রমাণ করুন যে,

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

   (1)-এর শুধুমাত্র একটি সমাধান (unique solution) থাকবে যখন $\lambda \neq -2$ অথবা, $\lambda \neq 1$

6. A (ম্যাট্রিক্স)-এর উপর সাধারণভাবে সারি প্রক্রিয়া প্রয়োগে দেখান যে এর স্থানসূচক মান (rank) = 2 যখন

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

7. যদি A (ম্যাট্রিক্স) = $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ হয়, তবে A-কে প্রতিসম (symmetric) ও অপ্রতিসম (skew-symmetric) ম্যাট্রিক্সের যোগফলে প্রকাশ করা যায়।

[প্রতিসম ম্যাট্রিক্সটি = $\begin{pmatrix} 4 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 5 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$, অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সটি = $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ 1 & -\frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix}$]

[**সংকেত ঃ** ধরি, A = $(a_{ij})_{n\times n}$, A-এর প্রতিসম ম্যাট্রিক্স = $(A_1)_{n\times n}$, যেখানে $a_{ij} = a_{ji}$

A-এর অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স = $(A_2)_{n\times n}$ যেখানে, $a_{ij} = -a_{ji}$

প্রধান কর্ণের সমস্ত পদের মান = 0]

$A = \frac{1}{2}(2A) = \frac{1}{2}[(A + A^T)$ (প্রতিসম) + $(A - A^T)$ (অপ্রতিসম) [প্রয়োগ করতে হবে]

8. যদি A (ম্যাট্রিক্স) = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ তবে দেখান $(A + A^T)$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (symmetric matrix) এবং $(A - A^T)$ একটি অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (skew symmetric) যাদের প্রত্যেকটি ক্রম হল (2×2)।

9. A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ -এর ক্ষেত্রে দেখান যে, 1 একটি আইগেন মান (eigen value)

10. (i) প্রমাণ করুন যে, X = (2, 0, 1) হল একটি eigen vector নিম্নে প্রদত্ত A ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(ii) উপরিউক্ত A (ম্যাট্রিক্সের) সকল 'eigen value' নির্ণয় করুন।

6.9 গ্রন্থপঞ্জী

1. A Text Book of Matrices : Shanti Narayan and P.K. Mittal, S. Chand & Co. Ltd., New Delhi.

2. Simplified Course in Matrices : H.K. Dass, S. Chand, New Delhi.