উপক্রমণিকা

মহান দেশনায়ক সুভাষচন্দ্র বসুর নামাঙ্কিত এই মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনে আপনাকে স্বাগত। সম্প্রতি এই প্রতিষ্ঠান দেশের সর্বপ্রথম রাজ্য সরকারি মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় হিসেবে ন্যাক (NAAC) মূল্যায়নে 'এ' গ্রেড প্রাপ্ত হয়েছে। বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশন প্রকাশিত নির্দেশনামায় স্নাতক শিক্ষাক্রমকে পাঁচটি পৃথক প্রকরণে বিন্যস্ত করার কথা বলা হয়েছে। এগুলি হল—'কোর কোর্স', 'ডিসিপ্লিন স্পেসিফিক ইলেকটিভ', 'জেনেরিক ইলেকটিভ' এবং 'স্কিল' / 'এবিলিটি এনহ্যান্সমেন্ট কোর্স'। ক্রেডিট পদ্ধতির ওপর ভিত্তি করে বিন্যস্ত এই পাঠক্রম শিক্ষার্থীর কাছে নির্বাচনত্মক পাঠক্রমে পাঠ গ্রহণের সুবিধে এনে দেবে। এরই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে ষান্মাষিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা এবং ক্রেডিট ট্রান্সফারের সুযোগ। শিক্ষার্থী কেন্দ্রিক এই ব্যবস্থা মূলত গ্রেড-ভিত্তিক যা অবিচ্ছিন্ন আভ্যন্তরীণ মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সার্বিক মূল্যায়নের দিকে এগোবে এবং শিক্ষার্থীকে বিষয় নির্বাচনের ক্ষেত্রে যথোপযুক্ত সুবিধা দেবে। শিক্ষাক্রমের প্রসারিত পরিসরে বিবিধ বিষয় চয়নের সক্ষমতা শিক্ষার্থীকে দেশের অন্যান্য উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আন্তঃব্যবস্থায় অর্জিত ক্রেডিট স্থানান্তরে সাহায্য করবে। শিক্ষার্থীর অভিযোজন ও পরিগ্রহণ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠক্রমের বিন্যাসই এই নতুন শিক্ষাক্রমের লক্ষ্য।

(UGC Open and Distance Learning Programmes and Online Programmes) Regulations, 2020 অনুযায়ী সকল উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের স্নাতক পাঠক্রমে এই সি.বি.সি.এস. পাঠক্রম পদ্ধতি কার্যকরী করা বাধ্যতামূলক—উচ্চশিক্ষার পরিসরে এই পদ্ধতি এক বৈকল্পিক পরিবর্তনের সূচনা করেছে। আগামী ২০২১-২২ শিক্ষাবর্ষ থেকে স্নাতক স্তরে এই নির্বাচনভিত্তিক পাঠক্রম কার্যকরী করা হবে, এই মর্মে নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে। বর্তমান পাঠক্রমগুলি উচ্চশিক্ষা ক্ষেত্রের নির্ণায়ক কৃত্যকের যথাবিহিত প্রস্তাবনা ও নির্দেশাবলী অনুসারে রচিত ও বিন্যস্ত হয়েছে। বিশেষ গুরুত্বারোপ করা হয়েছে সেইসব দিকগুলির প্রতি যা ইউ.জি.সি কর্তৃক চিহ্নিত ও নির্দেশিত।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ক্ষেত্রে স্ব-শিক্ষা পাঠ-উপকরণ শিক্ষার্থী সহায়ক পরিষেবার একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। সি.বি.সি.এস পাঠক্রমের এই পাঠ-উপকরণ মূলত বাংলা ও ইংরেজিতে লিখিত হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধের কথা মাথায় রেখে আমরা ইংরেজি পাঠ-উপকরণের বাংলা অনুবাদের কাজেও এগিয়েছি। বিশ্ববিদ্যালয়ের আভ্যন্তরীণ শিক্ষকরাই মূলত পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির ক্ষেত্রে অগ্রণী ভূমিকা নিয়েছেন—যদিও পূর্বের মতই অন্যান্য বিদ্যায়তনিক প্রতিষ্ঠানের সঙ্গে সংযুক্ত অভিজ্ঞ বিশেষজ্ঞ শিক্ষকদের সাহায্য আমরা অকুণ্ঠচিত্তে গ্রহণ করেছি। তাঁদের এই সাহায্য পাঠ-উপকরণের মানোন্নয়নে সহায়ক হবে বলেই আমার বিশ্বাস। নির্ভরযোগ্য ও মূল্যবান বিদ্যায়তনিক সাহায্যের জন্য আমি তাঁদের আন্তরিক অভিনন্দন জানাই এই পাঠ-উপকরণ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষণ পদ্ধতি-প্রকরণে নিঃসন্দেহে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নেবে। উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনের পঠন প্রক্রিয়ায় সংযুক্ত সকল শিক্ষকের সদর্থক ও গঠনমূলক মতামত আমাদের আরও সমৃদ্ধ করবে। মুক্তশিক্ষাক্রমে উৎকর্ষের প্রশ্নে আমরা প্রতিশ্রুতিবদ্ধ।

পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট সকলকে আমি আন্তরিক অভিনন্দন জানাই এবং এই উদ্যোগের সর্বাঙ্গীণ সাফল্য কামনা করি।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

Under Graduate Degree Programme
Choice Based Credit System
HEC
Mathematical Methods for Economics - I
CC EC-03

প্রথম মুদ্রণ : জুলাই, 2021
First Print : July, 2021

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

Under Graduate Degree Programme
Choice Based Credit System (CBCS)
(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা)
বিষয় : সাম্মানিক অর্থনীতি
Subject : Honours in Economics (HEC)

পাঠক্রম : অর্থনীতির জন্য গাণিতিক পদ্ধতি-১
Mathematical Methods for Economics - I
Course Code : CC - EC - 03

রচনা
সুপর্ণা গঙ্গোপাধ্যায়
Surrendranath Women's College

সম্পাদনা
সেখ সেলিম
NSOU

বিন্যাস সম্পাদনা
প্রিয়ন্তী বাগচী

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা)

HEC

Mathematical Methods for Economics - I

অর্থনীতির জন্য গাণিতিক পদ্ধতি-১

CC-EC-03

একক 1	◻	প্রাথমিক ধারণা	7-25
একক 2	◻	বাস্তব চলরাশির একমাত্রিক অপেক্ষক	26-37
একক 3	◻	এক চলরাশিবিশিষ্ট অপেক্ষকের অন্তরকলন বা অবকলন	38-58
একক 4	◻	এক চলরাশিবিশিষ্ট অপেক্ষকের কাম্যকরণ	59-79
একক 5	◻	সমাকলন ও তার অর্থনৈতিক প্রয়োগ	80-114
একক 6	◻	অর্থনীতিতে ব্যবহৃত পার্থক্যভিত্তিক সমীকরণ	115-126

একক 1 ◻ প্রাথমিক ধারণা

গঠন

1.1 উদ্দেশ্য

1.2 প্রস্তাবনা

1.3 কী কারণে অর্থনীতিবিদগণ অঙ্ক ব্যবহার করেন?

1.4 চলক, ধ্রুবক ও পূর্ণকাঙ্ক

1.4.1 চলক বা চলরাশি

1.4.2 ধ্রুবক

1.4.3 পূর্ণকাঙ্ক

1.5 সমীকরণ ও অভেদ

1.6 বাস্তব সংখ্যা তত্ত্ব

1.7 যুক্তি এবং গাণিতিক প্রমাণ

1.8 সেট তত্ত্ব

1.8.1 সেটের কার্যবিধি

1.8.2 সেট বীজগণিতের সূত্রাবলি

1.9 সম্পর্ক বা সম্বন্ধ ও অপেক্ষক

1.9.1 ক্রমিক জোড়

1.9.2 দুটি সেটের কার্টেজীয় গুণফল

1.9.3 সম্বন্ধ

1.9.4 অপেক্ষক

1.10 সারাংশ

1.11 অনুশীলনী

1.12 গ্রন্থপঞ্জি

1.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- গণিতে চলক, ধ্রুবক এবং পূর্ণকাঙ্ক বলতে কী বোঝায়
- সমীকরণ এবং অভেদের পার্থক্য
- সেট বলতে কী বোঝায় এবং সেট বীজগণিতের সূত্রাবলি
- সম্বন্ধ এবং অপেক্ষকের পার্থক্য

1.2 প্রস্তাবনা

আলোচিত এককটিতে গাণিতিক অর্থনীতির গুরুত্ব সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। অপেক্ষক সম্পর্কে সম্যক ধারণা পাওয়ার জন্য এবং তার প্রকৃতি অনুধাবনের জন্য পূর্ণকাঙ্ক, ধ্রুবক ও চলরাশির আলোচনা করা হয়েছে। পরবর্তী পর্যায়ে অন্তরকলনবিদ্যাকে আয়ত্ত করার উদ্দেশ্যে বাস্তব সংখ্যার সেটের ধারণা দেওয়া হয়েছে। অপেক্ষক এবং সম্বন্ধের আলোচনাও এই এককে করা হয়েছে।

1.3 কী কারণে অর্থনীতিবিদগণ অঙ্ক ব্যবহার করেন?

অর্থনীতি এবং অঙ্কের মধ্যে ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয়। অঙ্ককে গণ্য করা হয় অর্থনীতির ভাষা বা 'language of economics' হিসাবে। অঙ্কের সাহায্যে বর্তমান বিশ্বের যে-কোনো ঘটনা বা অর্থনৈতিক গঠন ও কার্যকলাপের ব্যাখ্যা করে প্রকৃত সত্যে উপনীত হওয়া যায়। উদাহরণ হিসাবে ধরা যাক যে পেট্রোলের মূল্য 10 শতাংশ বৃদ্ধি পাওয়ায় তার চাহিদা 5 শতাংশ হ্রাস পেল। এই তথ্যটির পরিপ্রেক্ষিতে পেট্রোলের মূল্য ও চাহিদা সম্পর্কিত গাণিতিক পরিবেশনকে বলা হয় চাহিদা অপেক্ষক। আবার এই নিরীক্ষাটিকে এভাবেও বলা যায় যে "পেট্রোলের চাহিদার দাম স্থিতিস্থাপকতার মান হলো –0.5"।

অর্থাৎ অঙ্কভিত্তিক অর্থনীতি মূলত বিভিন্ন অর্থনৈতিক বিশ্লেষণের একটি পথ যার মাধ্যমে অর্থনীতিবিদ্‌গণ, অর্থনৈতিক সমস্যা তা ব্যষ্টিগত বা সমষ্টিগত যাই হোক না কেন, সেটিকে উপস্থাপন করেন এবং তার যুক্তি ও ফলাফল বিভিন্ন গাণিতিক উপপাদ্যের মাধ্যমে প্রদান করেন যার ফলে বিষয়টি সরল ও গ্রহণযোগ্য হয়। যে ধরনের অঙ্কগুলি অর্থনীতিতে ব্যবহার করা হয় তা হলো সরল জ্যামিতি, ম্যাট্রিক্স অ্যালজেবরা, অন্তরীকরণ ও সমাকলন ক্যালকুলাস (Differential and Integral Calculus), অন্তর সমীকরণ ও অন্তরীকরণ সমীকরণ (Difference and differential equation) ইত্যাদি।

অর্থনীতিতে অঙ্কের প্রয়োজনীয়তা হিসাবে কিছু কারণ নিম্নে বর্ণিত হলো।

1. গণনা (Enumeration)

প্রাথমিক পর্যায়ে অর্থনীতিতে যে-কোনো ভবিষ্যদ্বাণীকে (predictions) চিত্রের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা হয়। যেমন চাহিদা ও জোগানের বিশ্লেষণে আশা করা হয় যে, কোনো প্রতিযোগিতামূলক বাজারে যদি জোগানকে বদলাতে না

দেওয়া হয়, তাহলে মূল্য বৃদ্ধি পাবে। এখন অর্থনীতিবিদ গাণিতিক মাধ্যমে সহজেই দেখাতে পারেন যে কতটা পরিমাণে মূল্য বৃদ্ধি পাবে যদি জোগানকে নির্দিষ্ট পরিমাণ কমানো যায়। একইরকম ভাবে কোনো একটি ফার্মও নির্ণয় করতে পারে যে দাম পরিবর্তনের ফলে কী পরিমাণে তার বিক্রয় পরিবর্তিত হবে।

2. সরলীকরণ (Simplification)

বিভিন্ন অর্থনৈতিক চলরাশির মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্কগুলি অনেক ক্ষেত্রে জটিল হয় যা ভাষায় লিখতে গেলে জটিলতর হয়। কিন্তু সেই সম্পর্কটিকে যদি কোনো গাণিতিক গঠনের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় তখন তা সহজেই বোঝা যায়।

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক : কোনো এক সময়ে কমলালেবুর চাহিদা হলো 1,200 Kg যখন তার দাম শূন্য। এই চাহিদা কিলোপ্রতি যখন কমলালেবুর মূল্য এক টাকা করে বাড়ে তখন 10 Kg করে কমতে থাকে। এই কমলালেবুর চাহিদা ও দাম সংক্রান্ত তথ্যটি যদি ভাষায় এভাবে না বলে গাণিতিক সমীকরণে প্রকাশ করা যায় তখন তা হবে: $q = 1200 - 10p$ যেখানে q হলো কিলোগ্রামে প্রকাশ করা কমলালেবুর চাহিদা ও p হলো কিলোপ্রতি কমলালেবুর মূল্য। এভাবেই যে-কোনো সম্পর্ককে সহজেই প্রকাশ করা যায়। এমনকি বিভিন্ন চলরাশির মধ্যে সম্পর্কগুলি নিয়ে যখন একজোটে কোনো অর্থনৈতিক ব্যবস্থা (economic system) তৈরি হয় তখন গাণিতিক মডেলের সহায়তায় চলরাশির সম্পর্কগুলির উপর নির্দিষ্ট বিধিনিষেধ আরোপ করে অর্থনৈতিক মডেল তৈরি করা হয়।

3. দুষ্প্রাপ্যতা এবং নির্বাচন (Scarcity and Choice)

অর্থনীতিতে বিভিন্ন সমস্যা আছে যা মূলত সীমিত সম্পদের যথাযথ ও দক্ষ বণ্টনের উপর কেন্দ্রীভূত, একে বলা হয় কাম্যকরণ (optimization) সমস্যা। যেমন কোনো ফার্ম নির্ধারণ করতে চাইলো যে তার নির্দিষ্ট ব্যায়ের ভিত্তিতে কী পরিমাণ উৎপাদন করলে তার লাভ সর্বোচ্চ হবে। এ ধরনের বহু সিদ্ধান্ত গাণিতিক মাধ্যমে সমাধান করা সম্ভব।

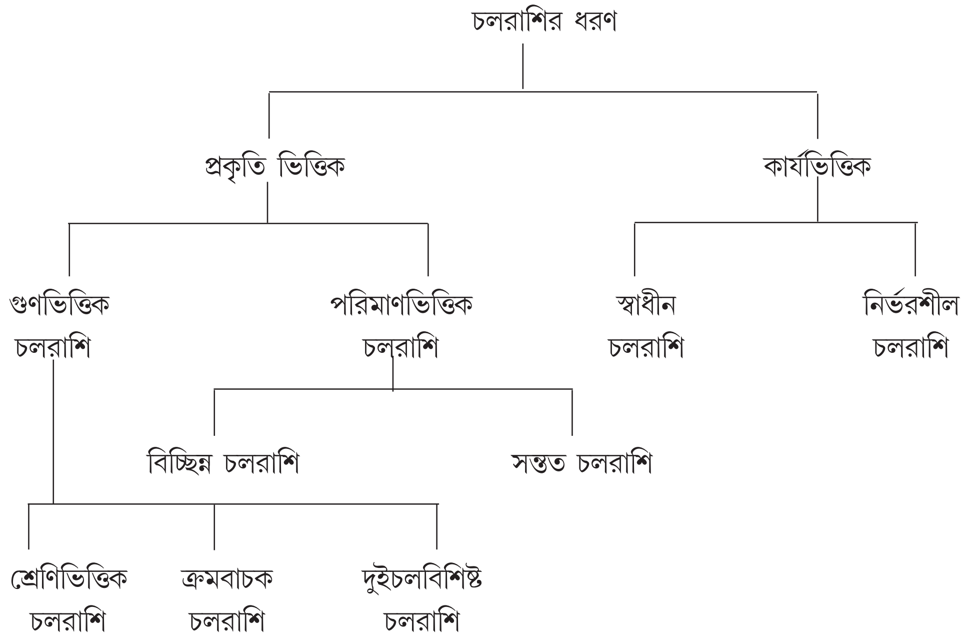
অর্থাৎ বিভিন্ন ঘটনা, সমস্যা, সিদ্ধান্ত ইত্যাদির ক্ষেত্রে সত্যে উপনীত হওয়ার জন্য অর্থনীতি ও গণিত একে অপরের সঙ্গে সম্পর্কিত হয়ে পড়ে।

1.4 চলক, ধ্রুবক ও পূর্ণকাঙ্ক

1.4.1 চলক বা চলরাশি

যে-কোনো বৈশিষ্ট্য, সংখ্যা বা পরিমাণ যা সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় অথবা বিভিন্ন পরিস্থিতিতে বিভিন্ন মান গ্রহণ করে তাকেই চলরাশি বলা হয়। অর্থনীতিতে যেমন মূল্য উৎপাদন ইত্যাদি চলরাশি বলা যায়।

চলরাশিকে প্রকৃতিগত দিক থেকে মূলত দুই ভাগে ভাগ করা যায়— ১। গুণবাচক চলরাশি (Qualitative Variables), ২। পরিমাণবাচক চলরাশি (Quantitative Variables)। গুণবাচক চলরাশিকে আবার নামিক বা শ্রেণিবাচক (Nominal or Categorical), ক্রমবাচক (Ordinal) এবং দুইচল বিশিষ্ট (Binary) এই তিনভাগে এবং পরিমাণগত চলরাশিকে বিচ্ছিন্ন (Discrete) চলরাশি এবং সন্তত (Continuous) চলরাশি এই দুই ভাগে ভাগ করা যায়।



চিত্র 1.4.1 : চলরাশির শ্রেণিবিভাগ

চলরাশিকে কার্যভিত্তিক অনুসারে স্বাধীন ও নির্ভরশীল চলরাশি হিসাবে ভাগ করা যায়। চিত্র 1.4.1-তে সম্পূর্ণ শ্রেণিবিভাগ দেওয়া হল।

গুণবাচক চলরাশি— এই ধরনের চলরাশি সংখ্যাভিত্তিক নয় বরং তাদের কিছু শ্রেণিতে (Category) ভাগ করা যায়, যেমন চোখের রং (এই চলরাশির মধ্যে আবার নীল, কালো, খয়েরী ইত্যাদি হতে পারে) ও লিঙ্গ (যার মধ্যে পুরুষ, মহিলা হতে পারে)। এইজন্য গুণভিত্তিক চলরাশিকে আবার জাতিভিত্তিক চলরাশিও বলা যায়।

নমিন্যাল বা নামিক চলরাশি— যে গুণবাচক চলরাশিতে জাতির কোনো ক্রম থাকে না তাকে নমিন্যাল চলরাশি বলে। যেমন চুলের রং, যা কালো, খয়েরি, সোনালি যাই হোক তার কোনো ক্রম (Order) থাকে না।

ক্রমবাচক চলরাশি— এই ক্ষেত্রে জাতিগুলির মধ্যে ক্রম লক্ষ করা যায়। যেমন ধরা যাক শিক্ষাগত যোগ্যতা বা অভিজ্ঞতা যদি গুণভিত্তিক চলরাশিটি হয় তাকে প্রাথমিক, মাধ্যমিক, গ্র্যাজুয়েট এবং পোষ্ট গ্র্যাজুয়েট এই হিসাবে ভাগ করা হলো, এবং এখানে শিক্ষার স্তর অনুসারে অল্পশিক্ষিত এবং উচ্চশিক্ষিত হিসাবে 1, 2, 3, 4 এই মান (score) ও দেওয়া হলো যাতে স্তরগুলির মধ্যে পার্থক্যের পরিমাণ তুলনা করা যেতে পারে। অর্থাৎ শিক্ষা গ্রহণের মাত্রা অনুসারে শিক্ষাগত যোগ্যতাকে ক্রমানুসারী করা হলো।

দুইচলবিশিষ্ট চলরাশি— এই চলরাশি কেবল দুটি যেমন সাফল্য, ব্যর্থতা; পুরুষ বা মহিলা; সত্য বা মিথ্যা ইত্যাদি।

পরিমাণভিত্তিক চলরাশি— যে চলরাশিকে সংখ্যার মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় তাকে পরিমাণভিত্তিক চলরাশি বলা হয় (Quantitative Variable); যেমন, বয়স, ওজন, ক্ষেত্রফল, বইয়ের পৃষ্ঠাসংখ্যা, শব্দের অক্ষর সংখ্যা প্রভৃতি।

বিচ্ছিন্ন চলরাশি (Discrete variable) — যে চলরাশি কোনো নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে কিছু বিযুক্ত (isolated) মান গ্রহণ করে তাকে বিচ্ছিন্ন চলরাশি বলা হয় যেমন একটি পরিবারে কতজন শিশু আছে; যা 1, 2 এভাবে পূর্ণ সংখ্যা দিয়ে প্রকাশিত হয়; ভগ্নাংশে নয়।

সন্তত বা চলরাশি— যে চলরাশি কোনো একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে (interval) যে-কোনো মান গ্রহণ করে তাকে সন্তত বা অবিচ্ছিন্ন চলরাশি বলা হয়। যেমন ছাত্রের উচ্চতা বা ওজন কোনো নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে যে-কোনো সংখ্যা হতে পারে যেমন ওজনের ক্ষেত্রে 60.557.....Kg, 70.235.....Kg ইত্যাদি।

স্বাধীন চলরাশি— যে চলরাশি অন্য চলরাশিকে প্রভাবিত করে, এবং যার চলন বা মানের তারতম্য অন্য কোনো চলরাশি দ্বারা প্রভাবিত হয় না তাকে বলা হয় স্বাধীন চলরাশি (Independent Variable)।

নির্ভরশীল চলরাশি (Dependent Variable) — যে চলরাশির মান অন্য চলরাশির মানের দ্বারা প্রভাবিত হয় তাকে নির্ভরশীল চলরাশি বলে, যেমন ভোগ ও আয়ের সম্পর্কের ক্ষেত্রে, আয়ের তারতম্যে ভোগের তারতম্য হয় বলে ভোগ হলো নির্ভরশীল চলরাশি ও আয় হলো এই তারতম্যের কারণ বলে স্বাধীন চলরাশি। আবার, শ্রমিকের কার্যক্ষমতা বা উৎপাদনশীলতার সঙ্গে কত ঘণ্টা সে কাজ করলো তার সম্পর্ক যদি লক্ষ করা যায় তাহলে উৎপাদনশীলতা হলো নির্ভরশীল চলরাশি। আবার কোনো দ্রব্যের দামের পরিবর্তনের ফলে যদি চাহিদার পরিমাণের পরিবর্তন হয়, তাহলে দাম হল স্বাধীন চলরাশি এবং চাহিদার পরিমাণ হল নির্ভরশীল চলরাশি।

1.4.2 ধ্রুবক

যে রাশির কেবল একটি নির্দিষ্ট মান থাকে তাকে ধ্রুবক বলা হয়। এই রাশির মান কখনই পরিবর্তিত হয় না। যেমন একটি সমীকরণ নেওয়া যাক $4x - 7 = 5$ যেখানে 4 হলো সহগ, x হলো চলরাশি '—' হলো কার্যকারক (operator) এবং 7 ও 5 হলো ধ্রুবক। এক সপ্তাহে যে ক'টা দিন আছে অর্থাৎ সংখ্যা 7 একটি ধ্রুবক। আবার কিছু কিছু চিহ্ন আছে যারা নিজে থেকে ধ্রুবককে নির্দেশ করে যেমন "পাই" চিহ্ন বা 'π' একটি ধ্রুবক যার কাছাকাছি মান হলো 3.14 অর্থাৎ $\pi \approx 3.14$

1.4.3 পূর্ণকাঙ্ক

কোনো নির্দিষ্ট পরিপ্রেক্ষিতে কোনো চলরাশিকে ধ্রুবক হিসাবে বিবেচনা করলে সেই চলরাশিকে বলা হবে পূর্ণকাঙ্ক। যেমন, কোনো সরলরেখার সমীকরণ হল : $y = mx + c$ যেখানে m ও c হল ধ্রুবক। এই m ও c-এর এক একটি মান থেকে আমরা এক একটি সরলরেখা পাবো। m ও c-এর মান পরিবর্তিত হলে সরলরেখাটির অবস্থানের পরিবর্তন ঘটবে। m ও c কে বলা হবে পূর্ণকাঙ্ক (Parameter is a variable treated as constant in a given context)।

1.5 সমীকরণ ও অভেদ

সমীকরণ : দুটি রাশির মধ্যে যে বিবৃতি (statement) সমতা প্রদান করে '=' এই সমান চিহ্নের সাহায্যে তাকে সমীকরণ বলে। যেমন $10x = 100$ বলতে বোঝায় 10x এবং 100 এর মধ্যে সমতা। সুতরাং এটি একটি সমীকরণ।

অভেদ : ধরা যাক $(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$ এটিও একটি সমীকরণ। কিন্তু লক্ষ করার বিষয় এই যে পূর্বের উদাহরণে $x = 10$ এই মানটির জন্য সমীকরণের সমতা রক্ষিত হয়। অর্থাৎ $10 \times 10 = 100$ হবে। x এর বাকি অন্য

মানের জন্য সমীকরণের 10x ও 100 এই দুই রাশির মধ্যে সমতা রাখা যাবে না। কিন্তু $(x+10)^2 = x^2+20x+100$ -এর ক্ষেত্রে $x = 1$ হলে $11^2=121$, আবার '='-র ডানদিকে $1^2+20\times1+100 = 121 \therefore 121 = 121$ হয়। আবার $x = 10$ হলে $(10+10)^2 = 400$, আবার ডানদিকে $10^2+20\times10+100 = 400$। এভাবে x-এর কোনো একটি মাত্র বিশেষ মান নয়, যে-কোনো মানের জন্য সমীকরণটির উভয় পক্ষ সমান হবে। অতএব এটি একটি অভেদ। অর্থাৎ অভেদ হলো একটি সমীকরণ যা চলকগুলির সম্ভাব্য যে-কোনো মানের জন্যই সত্য। একে '≡' এই চিহ্নের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়, এই চিহ্নের অর্থ সমীকরণটির উভয় পক্ষের রাশিই সমতুল (equivalent to)।

1.6 বাস্তব সংখ্যা তত্ত্ব

অখণ্ড সংখ্যা, ভগ্নাংশ, মূলদ (rational) ও অমূলদ (irrational) সংখ্যা একত্রে বাস্তব সংখ্যা গঠন করে। অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যার গঠনকে নিম্নের বর্ণিত ছকের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

ভগ্নাংশ　　　　অখণ্ড সংখ্যা

মূলদ সংখ্যা　　　　অমূলদ সংখ্যা

বাস্তব সংখ্যা

এখন পৃথকভাবে সংখ্যা তত্ত্ব আলোচনা করা হলো।

স্বাভাবিক সংখ্যা ও অখণ্ড সংখ্যা (Natural number and Integers) : সহজ ভাষায় বলতে গেলে যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাকে যেমন 1, 2, 3, 4... ইত্যাদিকে স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural number) বলা হয়। এই স্বাভাবিক সংখ্যাগুলিকে আবার ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাও বলা হয়। তেমনি –1, –2, –3, –4... ইত্যাদিকে বলা হয় ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। এই ধনাত্মক ও ঋণাত্মক এর মূলদ অখণ্ড সংখ্যা একত্রে অখণ্ড সংখ্যা গঠন করে:

.... –5, – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.......

ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা　　　　ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

এখানে মনে রাখতে হবে শূন্য কিন্তু কখনই ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা নয়। কিন্তু সাধারণভাবে একে অখণ্ড সংখ্যার মধ্যে গণ্য করা হয়, অর্থাৎ ধনাত্মক, ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং শূন্যকে একত্রিত করলে অখণ্ড সংখ্যা পাওয়া যায়।

ভগ্নাংশ ও মূলদ সংখ্যা (Fraction and Rational Numbers) : যখন দুটি পূর্ণ সংখ্যার (Whole number) অনুপাত নেওয়া হয় যেখানে হর (denominator) শূন্য হয় না তখন তাকে ভগ্নাংশ বলা হয়। অর্থাৎ m ও n যদি দুটি পূর্ণ সংখ্যা হয় তখন $^{m}/_{n}; n \neq o$ হলো ভগ্নাংশ। আবার যদি m, n দুটি অখণ্ড সংখ্যা হয় যেখানে $n \neq o$; তখন

তাদের অনুপাত হল মূলদ সংখ্যা। যেমন $^{12}/_{23}, ^{10}/_{32}$ ইত্যাদি হলো ভগ্নাংশ। আবার $^{15}/_{7}, -^{18}/_{13}, -^{6}/_{15}$ হলো মূলদ সংখ্যা। সকল ভগ্নাংশই হলো মূলদ সংখ্যা; কিন্তু সকল মূলদ সংখ্যা ভগ্নাংশ নয়। সেই সব মূলদ সংখ্যাই হলো ভগ্নাংশ যেখানে m ও n দুটি ধনাত্মক সংখ্যা।

আবার, কিছু কিছু ভগ্নাংশ আছে যেমন $\frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{27}{3}$ ইত্যাদি যারা পূর্ণ সংখ্যা ও ভগ্নাংশ একই সাথে হয়। সুতরাং এই ধরনের সংখ্যাগুলি মূলদ সংখ্যাও বটে। যে কোনো পূর্ণ সংখ্যাকে অনুপাতের (ratio) মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় যেমন: $2 = \frac{2}{1}, 4 = \frac{4}{1}$ বা $n = \frac{n}{1}$ সুতরাং তারা মূলদ সংখ্যা। যেহেতু সকল পূর্ণ সংখ্যাকে অনুপাতে প্রকাশ করা যায় সুতরাং তারা সবাই পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু সব মূলদ সংখ্যাই পূর্ণ সংখ্যা নয়। অর্থাৎ সব অখণ্ড সংখ্যা ও সব ভগ্নাংশ একত্রে মিলে মূলদ সংখ্যা গঠন করে।

অমূলদ সংখ্যা (Irrational Numbers) : যে সংখ্যাকে $^{m}/_{n}$ এই অনুপাতে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে m ও n হলো অখণ্ড সংখ্যা তাকে অমূলদ সংখ্যা (irrational number) বলা হয়। যেমন $\sqrt{2} = 1 \cdot 4142...., \pi = 3 \cdot 1415...., e = 2 \cdot 718...$ । এই সব মানের ক্ষেত্রে দশমিকের পর প্রায় মান নির্ণয় করা যায় না। এ ধরনের আরো সংখ্যা আছে যাদের দশমিকের পরের মানগুলির পুনরাবৃত্তি হতে থাকে (recurring) কিন্তু সমাপন হয় না (non-terminating) যেমন $\frac{1}{3} = 0 \cdot 3333.... = 0 \cdot \bar{3}$ । এই 3-র দশমিকের পর পুনরাবৃত্তি ঘটেছে। $\frac{1}{16} = 0 \cdot 1666.... = 0 \cdot 1\bar{6}$ (6-এর পুনরাবর্তন)। এরা কিন্তু মূলদ সংখ্যা। অমূলদ হতে গেলে দশমিকের পরের মানের পুনরাবর্তন হবে না, সমাপনও হবে না (non-repeating and non-terminating decimal in their values)

একটি উদাহরণ দেওয়া যাক :—

উদাহরণ 1 : $2 \cdot \overline{78}$ কি মূলদ সংখ্যা?

$2 \cdot \overline{78} = 2 \cdot 787878.....$

প্রদত্ত সংখ্যাটি মূলদ সংখ্যা কিনা জানার জন্য দুটি তথ্য খতিয়ে দেখা আবশ্যক—

(ক) প্রদত্ত সংখ্যাটিকে ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যাবে কিনা

(খ) দশমিকটি কি পৌনঃপুনিক? (non-recurring or recurring?)

ধরা যাক $2 \cdot \overline{78} = M$

$100\,M = 2 \cdot 78\overline{78} \times 100$

$\Rightarrow 100\,M = 278\cdot\overline{78}$

$\Rightarrow 100\,M = 276 + 2\cdot\overline{78}$

অথবা, 100M = 276 + M $\quad (\because 2\cdot\overline{78} = M)$

অথবা, 100M – M = 276

অথবা, 99 M = 276 $\quad \therefore M = \dfrac{276}{99}$

অথবা, $2\cdot\overline{78} = \dfrac{276}{99}$

অথবা, $2\cdot 787878\ldots = \dfrac{276}{99}$

অর্থাৎ 2·787878... হোলো একটি পৌনঃপুনিক দশমিকের প্রসার (recurring declanal expansion) এবং একে $\dfrac{276}{99}$ এই ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায়।

সুতরাং প্রদত্ত সংখ্যাটি হোলো মূলদ সংখ্যা।

1.7 যুক্তি এবং গাণিতিক প্রমাণ

অঙ্কে যে কোনো সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে যথার্থ সত্যে উপনীত হওয়া বা অনুসন্ধান করার জন্য তর্কবিদ্যার নীতি (Principles of Logic) গ্রহণ করা হয়। একটি উদাহরণ নেওয়া যাক যেখানে ভুল যুক্তির সাহায্যে একটি গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা হচ্ছে, এবং তাতে উত্তর ভুল হচ্ছে।

উদাহরণ : 1.5.1 : নিম্নের সমীকরণটির সম্ভাব্য সমাধান নির্ণয় করো।

$x + 2 = \sqrt{4 - x}$

সমাধান : উভয় দিকে বর্গ নিলে পাই $(x+2)^2 = \left(\sqrt{4-2}\right)^2$

$\therefore$ $x^2 + 4x + 4 = 4 - x$ অথবা $x^2 + 5x = 0$

অথবা, x + 5 = 0 সুতরাং x = –5

এখন, এইভাবে সমাধান করলে উত্তর হোলো x = –5। এটি সঠিক কিনা পরীক্ষা করে দেখা যাক। x = –5 হলে x + 2 = –3 এবং $\sqrt{4-x} = \sqrt{9} = 3$ অর্থাৎ দেখা গেল উত্তরটি ভুল। উদাহরণ 1.5.4 এ দেখানো আছে ভুলটি

কীভাবে এসেছে। এই উদাহরণটির মাধ্যমে বোঝা যায় যে যথাযথ চিন্তা বা নীতি না মেনে সমাধানের ক্ষেত্রে সঠিক উত্তর পাওয়া যায় না।

উক্তি বা প্রতিজ্ঞা (Proposition) : যে-কোনো বিবৃতি (statement), সঠিক বা ভুল যাই হোক না কেন তাকে প্রতিজ্ঞা বলা হয়। নিত্যকার জীবনযাত্রা থেকে যদি একটি উদাহরণ দেওয়া যায়: "সমস্ত ব্যক্তি যারা নিঃশ্বাস নিচ্ছে তারা বেঁচে আছে"—একটি সত্য প্রতিজ্ঞা; কিন্তু যদি এভাবে বলা যায়—"সকল ব্যক্তি যারা নিঃশ্বাস নিচ্ছে তারা স্বাস্থ্যবান"—তখন সেটি হবে ভুল উক্তি বা প্রতিজ্ঞা। এক্ষেত্রে মত প্রকাশকারক প্রতিটি শব্দ অর্থবহ না হলে সেটি সত্যাসত্য বিচার করা সম্ভব হয় না। যেমন যদি বক্তব্যটি এরূপ হয় "72 একটি বৃহৎ সংখ্যা"—এই বক্তব্যটির সত্যাসত্য বিচার করা যাবে না যতক্ষণ পর্যন্ত বৃহৎ সংখ্যার যথাযথ সংজ্ঞা না দেওয়া যাবে।

তাৎপর্য (Implications) : ধরা যাক P এবং Q দুটি এমন ধরনের প্রতিজ্ঞা যেখানে যখনই P সত্য তখনই Q সত্য। এটিকে প্রকাশ করা হয় সাধারণবাবে এভাবে : $P \Rightarrow Q$ অর্থাৎ P বোঝায় Q কে (P implies Q) বা যখনই P তখনই Q অথবা Q হোলো P এর ফলাফল। "$\Rightarrow$" এই চিহ্নটিকে তাৎপর্য চিহ্ন বলা হয়। এই তীরচিহ্ন যুক্তিভিত্তিক তাৎপর্যের (logical implication) দিক নির্দেশ করে। যেমন: a) $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$, b) $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ or $y = 0$; c) x হোলো বর্গক্ষেত্রে $\Rightarrow$ x হোলো আয়তক্ষেত্র ইত্যাদি।

কিছু কিছু ক্ষেত্রে $P \Rightarrow Q$ যখন ঠিক তখন উল্টোদিকটিও ঘটতে পারে অর্থাৎ $Q \Rightarrow P$ ও সত্য হওয়া সম্ভব। অর্থাৎ এই দুটি তাৎপর্যকে একত্র করে বলা যায়: $P \Leftrightarrow Q$। একে বলে যুক্তিসঙ্গত সমার্থতা (logical equivalence); অর্থাৎ যখনই এবং কেবলমাত্র যখনই Q তখনই P (P if and only if Q or P iff Q), '$\Leftrightarrow$' এই চিহ্নকে সমার্থতা চিহ্ন বলা হয়। উপরোক্ত উদাহরণ (b) তে দেখা যায় যে যদি $x = 0$ অথবা $y = 0$ হয় তখন $xy = 0$ হবে. অর্থাৎ এক্ষেত্রে প্রতিজ্ঞাটির যুক্তিসঙ্গত সমার্থতা আছে অর্থাৎ $x = 0$ বা $y = 0 \Rightarrow xy = 0$, কিন্তু বাকি উদাহরণগুলিতে এই যুক্তি খাটে না যেমন আয়তক্ষেত্র মানেই বর্গক্ষেত্র নয়। আবার $x^2 > 4$ মানেই $x > 2$ নাও হতে পারে; যেমন x যদি -3 হয় তখনও $x^2 > 4$ হবে।

আবশ্যক ও যথেষ্ট শর্ত (Necessary and sufficient Condition) : প্রতিজ্ঞা P, প্রতিজ্ঞা Q কে নির্দেশ করে এই বক্তব্যটিকে আার এক ভাবে প্রকাশ করা যায়। যদি 'P' প্রতিজ্ঞা, Q প্রতিজ্ঞাকে বোঝায় তাহলে P হোলো Q এর যথেষ্ট শর্ত। আবার সেই অনুসারে যদি 'P' কে সত্যি হতে হয় বা ঘটতে হয় তখন Q কে যে ঘটতে হবে সেটা নিশ্চিত। এক্ষেত্রে 'Q' হোলো 'P' এর আবশ্যক শর্ত। অর্থাৎ

'P', 'Q'-এর যথেষ্ট শর্ত বলতে বোঝায় : $P \Rightarrow Q$

'Q', 'P'-এর আবশ্যক শর্ত বলতে বোঝায় : $P \Rightarrow Q$

যেমন 'x'-এর আয়তক্ষেত্র হওয়ার যথেষ্ট শর্ত হোলো x কে বর্গক্ষেত্র হতে হবে। আবার 'x' কে বর্গক্ষেত্র হওয়ার আবশ্যক শর্ত হোলো x-এর আয়তক্ষেত্র হওয়া।

যখন $P \Leftrightarrow Q$ হয়, তখন বলা যায় P ও Q এর আবশ্যক ও যথেষ্ট শর্ত।

গাণিতিক প্রমাণ (Mathematical Proof) : গণিতশাস্ত্রে সবথেকে গুরুত্বপূর্ণ ফলাফলকেই বলা হয় উপপাদ্য (theorem) প্রত্যেকটি গাণিতিক উপপাদ্যকে $P \Rightarrow Q$ এইভাবে প্রয়োগ করা হয় যেখানে P কোনো প্রতিজ্ঞা বা প্রতিজ্ঞাসমূহ

(premises) এবং Q হোলো আর এক প্রতিজ্ঞা শ্রেণি যাকে বলে উপসংহার (conclusion)। যখন P দিয়ে শুরু করে ক্রমান্বয়ে Q তে পৌছানো হয় তখন সেটা হয় সরাসরি প্রমাণ। আবার কখনও কখনও শুরু করা হয় যে 'Q' সত্য নয় এবং সেখান থেকে দেখানো হয় যে 'P' ও সত্য নয়। তখন তাকে বলে পরোক্ষ প্রমাণ (indirect proof)।

ন্যায়িক ও প্রস্তাবনামূলক যুক্তি : (Deductive and Inductive Reasoning) : ন্যায়িক যুক্তি, তর্কের নিয়ম মাফিক চলে। পক্ষান্তরে প্রস্তাবনামূলক যুক্তি কিছু নিরীক্ষার মাধ্যমে কতগুলি সিদ্ধান্ত গ্রহণ করে। যেমন, যদি বলা যায় যে বিগত n সংখ্যক বৎসরে সাধারণ মূল্যস্তর বৃদ্ধি পেয়েছে, অতএব আগামী দুই বৎসরে মূল্যস্তর বাড়বে—এই যুক্তি হোলো প্রস্তাবনামূলক যুক্তি।

1.8 সেট তত্ত্ব

সুসংজ্ঞাত, পরস্পর স্বতন্ত্র এবং ক্রম-নিরপেক্ষ বস্তুসমূহের সংকলন বা সমষ্টিকে (Collection or aggregate) সেট বলে। দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন বস্তুসমূহের সুনির্ধারিত সংগ্রহকে বলা হয় সেট। যেমন, বাগান হোলো একটি সেট যার মধ্যে সকল বৃক্ষ ও উদ্ভিদ আছে। সেটে অন্তর্ভুক্ত বস্তুসমূহকে বলা হয় সেটের উপাদান (element) বা সদস্য (member)। ইংরেজি বর্ণমালার বড় হাতের অক্ষর A, B, C, D... ইত্যাদি দ্বারা সাধারণতঃ সেট প্রকাশ করা হয় এবং সেটের সবগুলো উপাদান দ্বিতীয় বন্ধনী { } দ্বারা আবদ্ধ করতে হয়। উপাদানগুলির একটিকে আর একটি থেকে (,) দ্বারা পৃথক করা হয়। যেমন—

(ক) ১ম পাঁচটি অঋণাত্মক জোড় সংখ্যার সেট, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(খ) বাংলা মাসের নামগুলো M দিয়ে নির্দেশ করলে, M = {x |, x বাংলা বারো মাসের নাম}

সেট গঠনের বা প্রকাশের দুটি পদ্ধতি, যথা—তালিকা পদ্ধতি ও বাছাই পদ্ধতি। উপরে উল্লিখিত (ক) ও (খ) যথাক্রমে তালিকা ও বাছাই পদ্ধতি।

সার্বিক সেট (Unseveral Set) : যে-কোনো প্রসঙ্গে আলোচনাধীন সকল সেটই কোনো নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয়ে থাকে। এ ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট আলোচনাধীন সকল সেটকে সার্বিক সেট বলা হয়। যেমন—

A = {x : x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $3x \leq 15$}

B = {x : x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $x^2 \leq 25$}

C = {x : x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $\sqrt{x} \leq 9$}

এখন U = [x : x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট} বিবেচনা করি, তাহলে A, B, C হোলো U এর উপসেট ও U হোলো সার্বিক সেট।

উপসেট (Subset) : যদি A সেটের উপাদানগুলি B সেটেরও উপাদান হয় তবে A সেটকে B সেটের উপসেট বলা হয়।

ধরা যাক, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ এবং $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ এখানে A সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটে বিদ্যমান; $\therefore\ x \in A \Rightarrow x \in B$

$\therefore$ A সেটটি B সেটের উপসেট, $A \subset B$, আবার C সেটটির প্রতিটি উপাদান B সেটে বিদ্যমান। সুতরাং C সেটকে B সেটের উপসেট বলা হয়। $C \subseteq B$। কিন্তু A ও C সেটের মধ্যে পার্থক্য আছে। যেখানে B ও C সেটের উপাদানগুলো এবং তার সংখ্যা একই কিন্তু A সেট ও B সেটের উপাদানগুলির সংখ্যা সমান নয়। সুতরাং A সেটটি হোলো B সেটের "প্রকৃত উপসেট" এবং $A \subset B$ এভাবে এই তথ্যকে পরিবেশন করা হয়।

যে-কোনো সেট P এর জন্য :

i) $\phi \subseteq P$ অর্থাৎ ফাঁকা সেট ϕ যে-কোনো সেটেরই উপসেট

ii) $P \subseteq P$ অর্থাৎ যে-কোনো সেট সেই সেটেরই উপসেট

iii) n(P) বলতে P সেটের উপাদান সংখ্যা বোঝায়।

iv) যদি P সেট Q সেটের উপাদান অর্থাৎ $P \subseteq Q$ হয় এর অর্থ $n(P) \leq n(\phi)$

v) যদি P সেট Q সেটের প্রকৃত উপসেট অর্থাৎ $P \subset Q$ হয় তার অর্থ $n(P) < n(Q)$

পূরক সেট (Complementary Set) : সার্বিক সেট U-এর উপসেট A হলে, A সেটের সদস্য ব্যতীত U সেটের অন্যান্য সদস্যদের নিয়ে গঠিত সেটকে A সেটের পূরক সেট বলা হয়। একে $A^{/}$ বা A^c হিসেবে প্রকাশ করা যায়। গাণিতিক ভাবে, $A^c = U/A = \{x : x \in U; x \in A\}^c$

যেমন $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং $B = \{2, 4, 6\}$

$\therefore B^c = U/B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{2, 4, 6\}$

$= \{1, 3, 5\}$

যে-কোনো সেট A এর জন্য i) $U^c = \phi$, ii) $\phi^c = U$, iii) $AUA^c = U$, iv) $A \cap A^c = \phi$, v) $(A^c)^c = A$

উদাহরণ 1: প্রদত্ত $A = \{x : 5x > 19\}$ এবং $B = \{x : 3x < 19\}$ এবং $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, $0 \leq x \leq 10\}$, সেট A ও B-এর উপাদানগুলি তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করো এবং A^c ও B^c নির্ণয় করো।

সমাধান : সার্বিক সেট, $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা; $0 \leq x \leq 10\}$

অর্থাৎ, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{x : 5x > 19\} \therefore A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$B = \{x : 3x < 19\} \therefore B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore A^c = \{1, 2, 3\}; B^c = \{7, 8, 9, 10\}$

সূচক সেট (Power Set) : যে-কোনো সেট A এর সকল উপসেটকে A সেটের সূচক সেট বলা হয়। A সেটের সূচক সেটকে P(A) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন যদি $A = \{a, b, c\}$ হয় তাহলে A-এর সূচক বা ঘাত

সেট : $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$

A সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে P(A)-র উপাদান সংখ্যা হবে 2^n। প্রদত্ত উদাহরণটির ক্ষেত্রে উপাদান সংখ্যা হবে $2^3 = 8$

সসীম সেট (Finite Set) : যে সেটের উপাদানসংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় অথবা উপাদান সংখ্যা নির্দিষ্ট বা সীমিত থাকে তাকে সসীম সেট বলা হয়। যেমন $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $0 < x < 10\}$ ইত্যাদি সসীম সেট, যেখানে A সেটে 6টি উপাদান ও B সেটে 4টি উপাদান আছে।

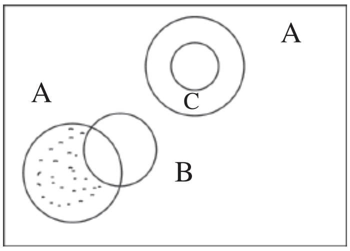
অসীম সেট (Infinite Set) : যে সেটে উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না বা উপাদান সংখ্যা সীমিত নয় তাকে অসীম সেট বলা হয়। যেমন : $A = \{x : x$ জোড় স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$, পূর্ণ সংখ্যার সেট $y = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$ ইত্যাদি হলো অসীম সেট।

ফাঁকা সেট বা শূন্য সেট (Null Set) : যে সেটের কোনো উপাদান বাস্তবে পাওয়া যায় না তাকে ফাঁকা সেট বা শূন্য সেট বলে। একে ϕ অথবা $\{\}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন $\phi = \{\} = \{x \in N : 1 < x < 2\}$ এবং $\phi = \{\} = \{x \in N : x$ মৌলিক সংখ্যা ও $23 < x < 29\}$ ইত্যাদি।

একপদী সেট (Singleton Set) : এক উপাদানবিশিষ্ট সেটকে বলা হয় একপদী সেট। যেমন: $\{0\}$, $\{4\}$ ইত্যাদি।

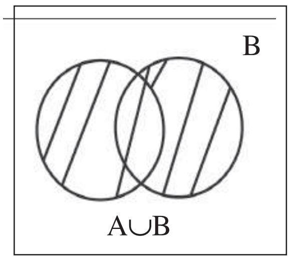
ভেনচিত্র : সেটের সংযোগ, ছেদ উপসেট, অন্তর, পূরক ইত্যাদি প্রক্রিয়া বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্র যেমন আয়তাকার ক্ষেত্র, বৃত্তাকার ক্ষেত্র ও ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করার মাধ্যমকে ভেনচিত্র বলা হয়।

জন ভেন (১৮৩৪-১৮৮৩) সর্বপ্রথম সেটের কার্যবিধি চিত্রের সাহায্যে প্রবর্তন করেন, তাই তার নামানুসারে চিত্রগুলি ভেনচিত্র নামে পরিচিত। যেমন $C \leq A$ -র ভেনচিত্র হলো উপরেরটি। আবার $A \setminus B$-এর ভেনচিত্র হোলো তলারটি।



1.8.1 সেটের কার্যবিধি

সেটের কার্যবিধি বা প্রক্রিয়াসমূহ হোলো সেটের সংযোজন, সেটের ছেদ, অন্তর সেট, পূরক সেট ইত্যাদি। এই কার্যবিধি কিছু নিয়মানুসারে হয়। যেমন, একক সূত্র (Idempotent Law), সহযোজন নিয়ম (Associative Law), বিনিময় নিয়ম (Commutative Law), বণ্টন নিয়ম (Distributive Law) ইত্যাদি।

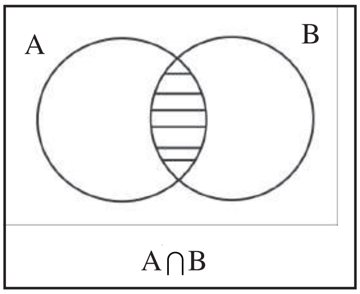


সেটের সংযোজন বা যোগ (Union of sets) : দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোজন সেট বলে। A ও B এর সংযোগ সেটকে

'$A \cup B$' এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A সংযোগ B বা "A union B"। সেট গঠন পদ্ধতিতে $A \cup B = \{z : x \in A$ বা $x \in B\}$, $A \cup B$ এর ভেনচিত্র উদাহরণ: ধরি, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ $\therefore = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

দুটি সেটের ছেদ (Intersection of Two Sets) : A ও B দুটি সেট হলে তাদের সাধারণ পদগুলির সেটকে A ও B এর ছেদ বলে এবং একে $A \cap B$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ $A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$ সুতরাং $A \cap B$ সেই সব পদের সেট যারা A ও B উভয় সেটেই আছে। এর ভেনচিত্রটি হোলো:

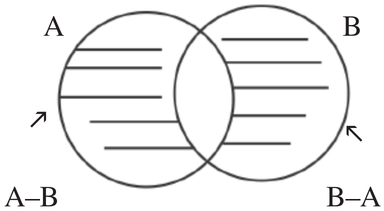


উদাহরণ : ধরি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ $\therefore A \cap B = \{3, 4\}$

এখন যদি দুটি সেট A ও B এমন হয় যে তাদের কোনো সাধারণ পদ নেই, তাহলে A ও B কে বিচ্ছিন্ন সেট (Disjoint Set) বলা হয়। যথা $A = \{1, 5, 7\}$ এবং $B = \{2, 4\}$ দুটি বিচ্ছিন্ন সেট, এক্ষেত্রে, $A \cap B = \phi$

অন্তর সেট : A ও B দুটি সেট হলে, যে সমস্ত পদ A তে আছে কিন্তু B তে নেই,, তাদের সেটকে A ও B-র অন্তর বলে, একে A-B বা A~B চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ $A - B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$। এর ভেনচিত্র হোলো



উদাহরণ: ধরি $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{3, 5, 6, 7\}$

$\therefore A - B = \{1, 2, 4\}$ ও $B - A = \{6, 7\}$

দুটি সেটের প্রতিসম অন্তর : (Symmetric Difference of Two Sets) : A ও B দুটি সেট হলে, যে সমস্ত পদ কেবলমাত্র A অথবা কেবলমাত্র B তে আছে, তাদের সেটকে A ও B এর প্রতিসম অন্তর বলে ও একে $A \Delta B$ (A ডেল্টা B) চিহ্নের দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $A \Delta B = (A - B) \cap (B - A)$

উদাহরণ: ধরি $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ এবং $B = \{2, 4, 6, 7\}$ তাহলে $A \Delta B = \{1, 3, 6, 7, 8\}$

1.8.2 সেট বীজগণিতের সূত্রাবলি

1. **পুনরুৎপাদনক্ষম সূত্র (Idempotent Law) :**

   i) $A \cap A = A$ ii) $A \cap A = A$

2. **বিনিময় সূত্র (Commutative Law) :**

   i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $A \cap B = B \cap A$

3. **সংযোগ সূত্র (Associative Law) :**

   i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4. **বণ্টন সূত্র (Distributive Law) :**

   i) $A \cup (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$ ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

5. **De Morgan -এর সূত্র :**

   i) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$ ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

6. **De Morgan -এর অন্তরফলের সূত্র (De Morgan's Law of Difference) :**

   i) $A - (B \cap C) = (A-B) \cap (A-C)$ ii) $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

7. **পূরক সূত্র (Law of Complements) :**

   i) $(A^c)^c = A$, (ii) $\cup^c = \phi$, (iii) $\phi^c = \cup$ (iv) $A \cup A^c = \cup$ (v) $A \cap A^c = \phi$

8. **অভেদ সূত্র (Identity Law):**

   i) $A \cap \phi = A$, (ii) $A \cap \cup = \cup$, (iii) $A \cup \cup = \cup$ (iv) $A \cap \cup = A$

1.9 সম্পর্ক বা সম্বন্ধ ও অপেক্ষক

সম্বন্ধ ও অপেক্ষক সম্পর্কে ধারণা করার আগে ক্রমিক জোড় (Ordered Pair) ও কার্টেজীয় গুণফল সম্পর্কে ধারণা করা আবশ্যক।

1.9.1 ক্রমিক জোড় :

দুটি পদ a ও b (a, b) আকারে লিখলে, তাকে ক্রমিক জোড় বলে, যথা $(2, 0)$, $(-1, 3)$ ইত্যাদি, $a \neq b$ হলে $(a, b) \neq (b, a)$ কিন্তু $\{a, b\} = \{b, a\}$। আবার দুটি ক্রমিক জোড় (a, b) এবং (c, d) সমান হবে কেবলমাত্র যদি $a = c$ এবং $b = d$ হয়। অর্থাৎ $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c, b = d$

1.9.2 দুটি সেটের কার্টেজীয় গুণফল :

A ও B দুটি সেট হলে এবং $a \in A$ ও $b \in B$ হলে (a, b) আকারের সমস্ত ক্রমিত জোড়ের সেটকে A ও B এর কার্টেজীয় গুণফল বলে। একে $A \times B$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়, অর্থাৎ : $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

উদাহরণ: $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{2, 3\}$ হলে

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

এবং $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

অর্থাৎ $A \times B \neq B \times A$

মনে রাখা দরকার:

a) যদি $A \neq B$ হয় কিংবা কোনো একটি সেট শূন্য না হয়, তবে $A \times B \neq B \times A$

b) যদি A সেটটির mটি পদ এবং B সেটের nটি পদ থাকে, তবে AB সেটটির mn টি পদ থাকবে।

c) $A \times B$ সেটটি শূন্য সেট হবে কেবলমাত্র যদি A অথবা B সেট শূন্য সেট হয়।

1.9.3 সম্বন্ধ :

দুটি সেট A ও B এর কোনোটিই শূন্য সেট না হলে, $A \times B$ এর যে কোনো উপসেট কে A থেকে B এর একটি সম্বন্ধ বলা হয়। সম্বন্ধটিকে R দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

অর্থাৎ, $R = \{(x, y); x \in A, y \in B$ ও $xRy\}$

উদাহরণ: মনে করি, $A = \{1, 2\}$ ও $B = \{2, 3, 4\}$

$\therefore A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

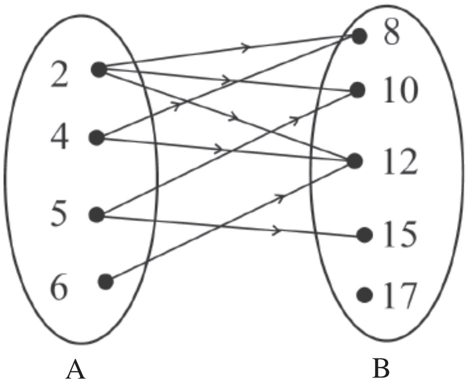
যেহেতু, $A \times B$ সেটটির পদসংখ্যা 6 সেহেতু $A \times B$ এর 2^6 অর্থাৎ 64টি উপসেট থাকবে। সুতরাং A সেট থেকে B সেটে মোট 64টি বিভিন্ন প্রকার সম্বন্ধ হতে পারে।

মনে করি $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3)\}$ এরূপ একটি সম্বন্ধ। এখন $(1, 2) \in R$ বলে আমরা নিখি 1R2; কিন্তু $(2, 4) \in R$ বলে লেখা হয় 2/4 অথবা 24

তির চিহ্নের সাহায্যে একটি সম্বন্ধকে প্রকাশ (Representation of a Relation by Arrow Diagram): তির চিত্রের সাহায্যে A সেট থেকে B সেটে একটি সম্বন্ধ R-কে প্রকাশ করতে হলে প্রথমে দুটি বদ্ধ অঞ্চলের মধ্যে বিন্দুর সাহায্যে A ও B পদগুলিকে দেখানো হয়। তারপর, A-এর যে সব পদ, B-এর যে সব পদের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত, তাদের তির-চিহ্নের সাহায্যে যুক্ত করা হয়।

উদাহরণ : $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B = \{8, 10, 12, 15, 17\}$ এবং A থেকে B একটি সম্বন্ধ হলো R যেখানে $(x, y) \in R \Rightarrow x$ হলো y এর একটি উৎপাদক। সম্বন্ধটিকে তির চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

সমাধান : R = {(2, 8), (2, 10), (2, 12), (4, 8), (4, 12), (5, 10), (5, 15), (5, 12)} এভাবে ক্রমিত জোড় (Ordered pair) হিসাবে দেখানো হোলো

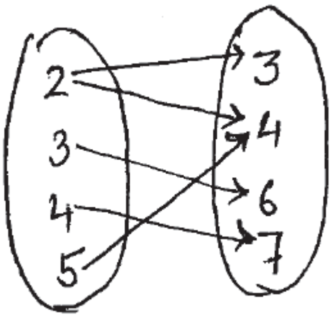


একটি সম্বন্ধের ক্ষেত্র বা অঞ্চল এবং পাল্লা বা প্রসার (Domain and Range of a Relation) :

মনে করি A ও B শূন্য নয় এমন দুটি সেট এবং R, A থেকে B তে একটি সম্বন্ধ। তাহলে R-এর অন্তর্গত ক্রমিত জোড়গুলির প্রথম পদগুলি নিয়ে গঠিত সেটকে R-এর অঞ্চল (Domain) এবং দ্বিতীয় পদগুলি নিয়ে গঠিত সেটকে R-এর প্রসার (Range) বলে। অর্থাৎ R সম্বন্ধের ক্ষেত্র বা অঞ্চল = Dom (R) = $\{x : (x, y) \in R\}$ এবং R এর প্রসার = Range(R) = $\{y : (x, y) \in R\}$ লক্ষণীয় যে R সম্বন্ধের ক্ষেত্র হলো A-এর একটি উপসেট এবং R সম্বন্ধের প্রসার হলো B এর একটি উপসেট। সেট B কে R সম্বন্ধের উপঅঞ্চল (Co-domain) বলা হয়।

1.9.4 অপেক্ষক :

ধরা যাক A ও B দুটি অশূন্য সেট। যদি A ও B এর মধ্যে এরূপ নিয়ম হয় যে, যাতে A-এর প্রত্যেকটি সদস্য x, B এর কোনো না কোনো একক সদস্য y-এর সঙ্গে যোগাযোগ সৃষ্টি করে, তবে এই নিয়মকে অপেক্ষক বলে। উল্লেখ্য, A সেটের একটি সদস্যের জন্য B সেটে কেবলমাত্র একটি সদস্য থাকবে এবং একাধিক সদস্য থাকতে পারবে, তবে A সেটের একাধিক সদস্যের জন্য B সেটে একটি সদস্য থাকতে পারে। A সেটের x সদস্য B সেটের যে সদস্যের সঙ্গে সম্পর্কিত তাকে সাধারণত f(x) দ্বারা সূচিত করা হয় এবং প্রতীকের সাহায্যে $f : A \to B$ এভাবে লেখা যায়। একটি ভেনচিত্র নিম্নে দেখানো হল:

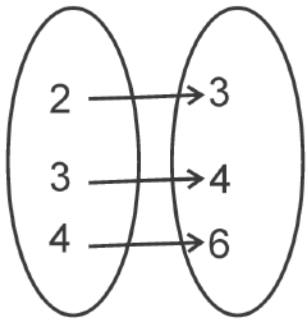


এই চিত্রে দেখা যাচ্ছে $2 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 6$, $4 \to 7$ এবং $5 \to 4$, A সেটের সদস্য 2, B সেটের দুইটি সদস্য 3 ও 4 এর সাথে যুক্ত হয়েছে বা ম্যাপিং হয়েছে। সংজ্ঞানুসারে এই সম্পর্কটি অপেক্ষক নয়। কারণ সংজ্ঞানুসারে A সেটের একটি সদস্যের জন্য B সেটে কেবলমাত্র একটি সদস্য থাকবে। সুতরাং বলা হয় যে "প্রত্যেক অপেক্ষকই একটি সম্বন্ধ, তবে প্রত্যেক সম্বন্ধ অপেক্ষক নয়।"

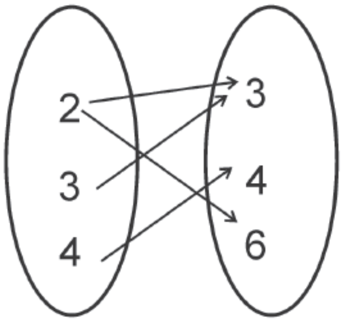
কোনো বস্তুর চাহিদা সেই বস্তুর দামের উপর নির্ভরশীল—এই বক্তব্যটিকে অপেক্ষকের আকারে প্রকাশ করলে লিখতে হবে $D = f(P)$ যেখানে D হোলো চাহিদার পরিমাণ এবং P হোলো যে দ্রব্যটি ক্রয় করার ইচ্ছা তার মূল্য। সেভাবেই কোনো বস্তুর উপযোগিতা (U) যখন সেই বস্তুর ভোগের পরিমাণের (q) উপর নির্ভর করে তখন অপেক্ষকের মাধ্যমে তার প্রকাশ হয় : $U = f(q)$

উদাহরণ: নিচের কোন্ সম্বন্ধটি অপেক্ষক নয়? যুক্তি দাও।

A



A



সমাধান : 'a' হোলো অপেক্ষক ও 'b' অপেক্ষক নয় শুধুই সম্বন্ধ। কারণ 'b' কে $2 \to 3$ ও $2 \to 6$,

অপেক্ষক ক্ষেত্র ও প্রসার : যেহেতু প্রত্যেক অপেক্ষক একটি সম্বন্ধ, সুতরাং অপেক্ষকের ক্ষেত্র বা প্রসার বলতে সম্বন্ধ হিসেবে এর ক্ষেত্র এবং প্রসারই বোঝায়। A সেট থেকে B সেটে f যদি একটি অপেক্ষক হয় তবে ক্ষেত্র f = A এবং B সেটের যে সকল উপাদান $a \in A$ এর ছবিরূপে পাওয়া যায় ঐ উপাদান গুলি f এর প্রসার। সুতরাং প্রসার $f \subset B$ যদি f একটি অপেক্ষক হয় এবং ক্ষেত্র $f = A$ ও প্রসার $f \subset B$ হয়, তবে f কে A থেকে B এ বর্ধিত অপেক্ষক বলা হয় এবং $f : A \to B$ লিখে প্রকাশ করা হয়। যদি f অপেক্ষক হয় এবং $(x, y) \in F$ হয়, তবে y কে f এর অধীনে ছবি (image) বলা হয় এবং $y = f(x)$ লেখা হয়। অন্যভাবে বলা যায় $y = f(x)$ এই অপেক্ষকের ক্ষেত্র হোলো x এর এমন একটি সেট যেখানে সমস্ত x এর জন্য f(x) এর মান নির্ণয় করা সম্ভব, যাদের সংগ্রহকে এর প্রসার বলা হয়।

উদাহরণ : $f : x \to 3x^2+2$ এর ক্ষেত্র $D = \{1, 2, 3\}$ হলে এর প্রসার নির্ণয় করো।

সমাধান : f এর অধীানে 1-এর ইমেজ বা ছবি হোলো

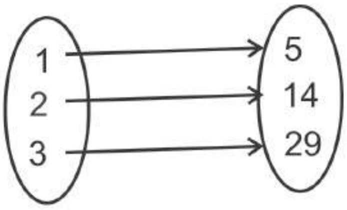
$1 \to 3 \times 1^2+2 \Rightarrow f(1) = 5$

f এর অধীনে 2 এর ইমেজ: $2 \to 3 \times 2^2+2 \Rightarrow f(2)=14$

সেভাবে $f(3) = 29$

$\therefore$ এই অপেক্ষকটির প্রসার $R = \{5, 14, 17\}$

$f : D \to R$



উদাহরণ 2 : $g(x)=\sqrt{2x+4}$ -এর ক্ষেত্র ও প্রসার নির্ণয় করো।

সমাধান : $\sqrt{2x+4}$; x -এর সকল মানে জন্য এভাবেই সংজিত যেখানে $2x+4$ হলো অঋণাত্মক বা নন্-নেগেটিভ (non-negative) এখন $2x + 4 \geq \Rightarrow x \geq -2$. $\therefore$ g এর ক্ষেত্র হোলো $[-2, \infty)$ এখন প্রসার নির্ণয় করতে হলে দেখতে হবে x যখন $[-2, \infty)$ এই সীমার মধ্যে থাকে তখন $\sqrt{2x+4}$ এর সম্ভাব্য মানগুলি কী কী? $x = -2$ হলে $\sqrt{2x+4}=0$ এবার $y_0 \geq 0$, যেখানে y_0 যে কোনো একটি সংখ্যার জন্য অপর সংখ্যা x_0 পাওয়া যায় যেখানে $\sqrt{2x_0+4}=y_0$ ।

$\therefore\ 2x_0 + 4 = y^2_0 \Rightarrow 2x = y^2_0 - 4 \Rightarrow x_0 = ½\ (y^2_0 - 4)$

$\because\ y^2_0 \geq 0\ \therefore\ x_0 = ½\ (y^2_0 - 4) \geq ½\ (-4) = -2$

সুতরাং যে-কোনো সংখ্যা $y_0 \geq 0$, এর জন্য $x_0 \geq -2$ সংখ্যা পাওয়া যায় যাতে $g\ (x_0) = y_0$। অতএব g এর প্রসার বা সীমা হোলো $[0, \propto)$

1.10 সারাংশ

এই অধ্যায়ে অর্থনীতির ক্ষেত্রে গণিতের গুরুত্ব ও ব্যবহার বিশদভাবে দেখানো হয়েছে। এই প্রসঙ্গে চলক, ধ্রুবক, পূর্ণকাঙ্কর ধারণা, চলরাশির ধরণ ও শ্রেণীবিভাগ ব্যাখ্যা করা হয়েছে। বাস্তব সংখ্যা সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। যুক্তি ও গাণিতিক প্রমাণ বিষয়ক ধারণা প্রদান করা হয়েছে। অর্থনীতির বিভিন্ন ক্ষেত্রে আবশ্যক ও যথেষ্ট অবস্থার মাধ্যমে চূড়ান্ত মান নির্ণয় করা একটি গুরুত্বপূর্ণ সমস্যা। সে বিষয়ে বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে। সেট তত্ত্ব ও তার ধর্ম, সম্বন্ধ ও অপেক্ষক ব্যাখ্যা করা হয়েছে।-

1.11 অনুশীলনী

1. যদি $S_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $S_2 = \{2, 3\}$ হয় তবে $S_1 \cup S_2$ ও $S_1 \cup S_2$ কি হবে?
2. $S = \{1, 2, 3, 4\}$ এই সেটের কতগুলি উপসেট আছে?
3. একটি সম্বন্ধ দেওয়া হোলো:
   $R = \{(7, 3), (3, 3), (4, 7), (3, 7)\}$। এটিকে কি অপেক্ষক বলা যায়?

4. আবশ্যিক ও যথেষ্ট শর্তের মধ্যে কী পার্থক্য?

5. পরিসর বার করো : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}}$

6. প্রসার নির্ণয় করো : $f(x) = x^2+2x+3$, যদি $x^2 \leq 4$ হয়।

1.12 গ্রন্থপঞ্জি

1. Sydsaeter K, Hammond P, Strom A (2015) : Essential Mathematics for Economic Analysis, Fourth Edition, Perason.
2. Chiang, Alpha C. (1967) : Fundamental Methods of Methematical Economics, McGraw Hill Book Company.
3. Mehta, B.C., and G.M.K, Madnani (1997) : Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons.
4. Allen, R.G.D. (1938): Mathematical Analysis for Economists, MacMillan
5. Sarkhel, J. and A. Bhukta (2000) : An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Limited.
5. Yamane, T. (1968): Mathematics for Economists, Prentice Hall.

একক 2 □ বাস্তব চলরাশির একমাত্রিক অপেক্ষক

গঠন

2.1 উদ্দেশ্য

2.2 প্রস্তাবনা

2.3 লেখচিত্র

2.4 অপেক্ষকের প্রাথমিক ধরন

2.5 ধারাবাহিকতা সংখ্যা এবং শ্রেণি

2.5.1 ধারাবাহিক সংখ্যাগুচ্ছ

2.5.2 শ্রেণি বা ক্রম

2.6 সন্তত বা অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক

2.6.1 অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের মৌলিক ধর্মসমূহ

2.7 সারাংশ

2.8 অনুশীলনী

2.9 গ্রন্থপঞ্জি

2.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- লেখচিত্রের ব্যবহার
- অপেক্ষকের বিভিন্ন ধরন
- ধারাবাহিক সংখ্যা এবং শ্রেণি বলতে কী বোঝায়

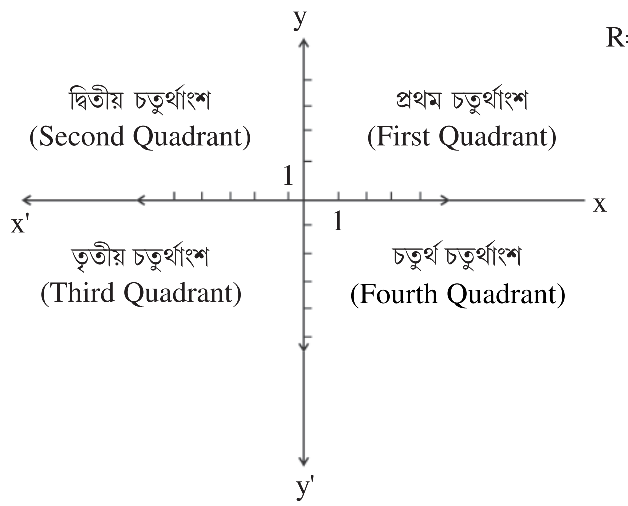
2.2 প্রস্তাবনা

গণিতে অপেক্ষক হোলো একটি মৌলিক ধারণা এবং গাণিতিক অর্থনীতিতেও এর গুরুত্ব অপরিসীম। যেমন গাণিতিক অর্থনীতিতে উপযোগিতা অপেক্ষক, ভোগ অপেক্ষক, ব্যয় অপেক্ষক, উৎপাদন অপেক্ষক, মুনাফা অপেক্ষক

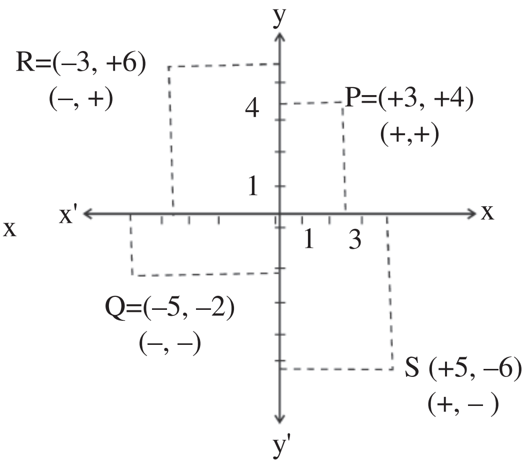
ইত্যাদি বিভিন্ন অপেক্ষকের ধারণা, প্রকৃতি, স্থায়িত্ব, চরম বা অবম মান সম্পর্কে আলোচনা করা হয়। এই এককে কেবলমাত্র একটি চলরাশি সংক্রান্ত বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষকের একটি সাধারণ আলোচনা করা হলো।

2.3 লেখচিত্র

কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে দুটি পরস্পর লম্ব রেখা প্রতিস্থাপিত করা হয়, যাদের স্থানাঙ্ক অক্ষ বলা হয়। এই দুই অক্ষকে x অক্ষ বা অনুভূমিক অক্ষ ও y অক্ষ বা উল্লম্ব অক্ষ বলা হয়। এই দুই-এর ছেদবিন্দুকে মূলবিন্দু (0) বলা হয়। এই দুই রেখাকে বাস্তব সংখ্যা পরিমাপ করা হয়, এবং চিত্র ১ এর সাহায্যে এটা দেখানো যায়। x অক্ষের প্রতিটি বিন্দুর একক দূরত্ব y অক্ষের প্রতিটি বিন্দুর একক দূরত্বের সঙ্গে নাও মিলতে পারে।



চিত্র : ১



চিত্র : ২

চিত্র ১-এর আয়তাকার স্থানাঙ্ক পদ্ধতিকে বলা হয় xy সমতল (xy plane)। স্থানাঙ্ক অক্ষ দুটি তলকে চারটি পাদে (quadrant) বিভক্ত করেছে। এই তলে অবস্থিত যে কোনো বিন্দু P কে (a, b) এই বাস্তব সংখ্যাদ্বয়ের জোড় (unique pair) হিসাবে প্রকাশ করা যায় (a, b) এই সংখ্যাদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত বিন্দুকে $x = a$ এই উল্লম্ব সরলরেখা ও $y = b$ এই অনুভূমিক সরলরেখার ছেদবিন্দুর উপর অবস্থান হিসেবে দেখানো হয়।

চিত্র ২ তে দেখা যায় যে যদি (3, 4) এই ক্রমিক জোড় প্রদত্ত থাকে তবে তার দ্বারা নির্দেশিত বিন্দু P এর অবস্থান হবে $x = 3$ ও $y = 4$ এই সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুর উপর। অর্তাৎ P এর অবস্থান হবে y অক্ষর ও একক দক্ষিণে ও 4 একক x অক্ষের উপরে (3, 4) কে P এর স্থানাঙ্ক করা হয়। অনুরূপভাবে Q এর অবস্থান y অক্ষের 5 একক বাঁ-দিকে এবং x অক্ষের 2 একক নীচে। অতএব Q এর স্থানাঙ্ক হোলো (–5, –2) কোনো একটি চলরাশির প্রত্যেক অপেক্ষককেই এভাবে আয়তাকৃতি স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে লেখচিত্রের আকারে প্রকাশ করা সম্ভব।

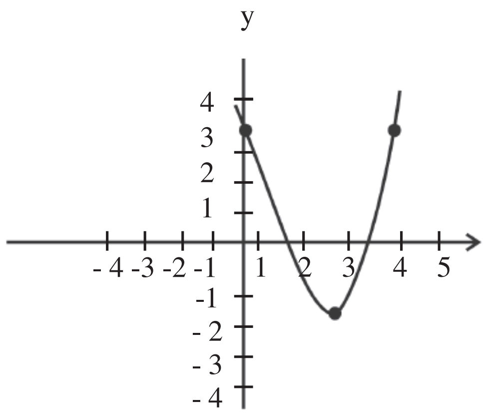
সুতরাং f অপেক্ষকের লেখচিত্র হোলো সহজ ভাষায় $\{x, f(x)\}$ এর সকল বিন্দুগুলির সেট যেখানে x; f এর ডোমেইনের (domain) মধ্যে অবস্থান করে।

উদাহরণ 1: $f(x) = x^2 - 4x + 3$, এই অপেক্ষকের x-এর মানগুলি নিম্নে প্রদত্ত হোলো।

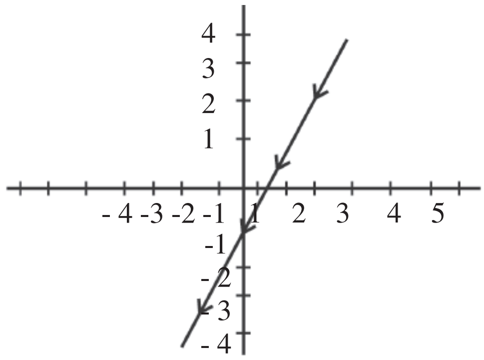
Table-1 : f(x)-এর মান :

x	0	1	2	3	4
f(x)	3	0	–1	0	3

(x, y) তলে স্থানাঙ্কগুলি বসিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করো।



চিত্র 1 : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ এর লেখচিত্র



চিত্র 2 : $g(x) = 2x - 1$-এর লেখচিত্র

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ এর লেখচিত্র 1 এ দেখানো হলো। এই লেখচিত্রটিকে বলা হয় অধিবৃত্ত (Parabola))

উদাহরণ 2 : $g(x) = 2x - 1$-এর লেখচিত্র অঙ্কন করো নির্দিষ্ট কিছু স্থানাঙ্কর ভিত্তিতে।

সমাধান : x এর মান –1, 0, 1, 2 নিলে g(x) এর মানগুলি হবে $g(-1) = 2(-1) -1 = 3$;

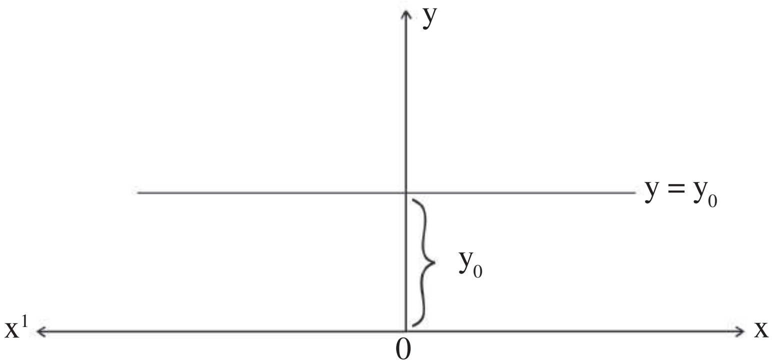
$g(0) = 2\times0 = 1 = -1$, $g(1) = 2\times1 - 1 = 1$, $g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$. এভাবে x এর বিভিন্ন মান বসালে বিভিন্ন g(x) ক্রমানুসারে হবে, যদি (–1, –3); (0, –1), (1, 1) ও (2, 3) স্থানাঙ্কগুলি (x, y) তলে বসানো হয় তাহলে প্রাপ্ত লেখচিত্রটি হবে সরলরেখা। এটি চিত্র 2 তে দেখানো হলো।

2.4 অপেক্ষকের প্রাথমিক ধরন :

3a(a) y=f(x) হল একটি সাধারণ বিবৃতি। এটি শুধু বলছে যে, x এবং y সম্পর্কযুক্ত। কিন্তু সেই সম্পর্কের প্রকৃতিটি স্পষ্টভাবে বলা হয়নি। সেই সম্পর্কের প্রকৃতি অনুযায়ী বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষক পাওয়া যায়। আমরা প্রধান কয়েকটি ধরন নীচে উল্লেখ করছি।

1. ধ্রুবক অপেক্ষক (Constant Function) : যে অপেক্ষকের শুধু একটিই মান আছে সেই অপেক্ষককে বলা হবে ধ্রুবক অপেক্ষক। উদাহরণস্বরূপ, y = f(x) = 10 হল একটি ধ্রুবক অপেক্ষক 1 এর অর্থ হয়, x-এর মান যাই

হোক না কেন, y সর্বদাই 10-এর সমান। সাধারণভাবে, $y = y_0$ বা $y=a_0$ হল একটি ধ্রুবক অপেক্ষক। স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সমতলে অপেক্ষকটি একটি অনুভূমিক সরলরেখার মতো দেখতে হবে। এর উল্লম্ব ছেদাঙ্ক হবে a_0 বা y_0 (চিত্র 3.1)



চিত্র 3.1

সাধারণভাবে বলতে গেলে, এক চলরাশির বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষকের সাধারণ রূপটি হল : $y = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ যেখানে n হল একটি পূর্ণসংখ্যা। এই n-এর মান অনুযঅয়ী আমরা বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষকের বিভিন্ন রকমভেদ পেয়ে থাকি।

যদি $n = 0$ হয়, তাহলে $y = a_0$ (ধ্রুবক অপেক্ষক)

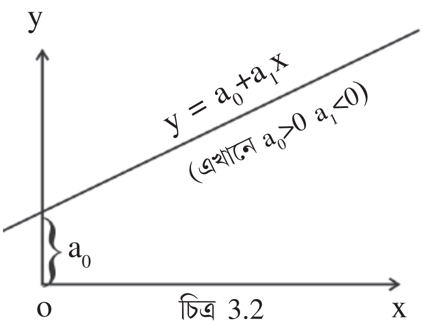
যদি $n = 1$ হয়, তাহলে $y = a_0 + a_1x$ (রৈখিক অপেক্ষক, linear function)

যদি $n = 2$ হয়, তাহলে $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (দ্বিঘাত অপেক্ষক, Quadratic function)

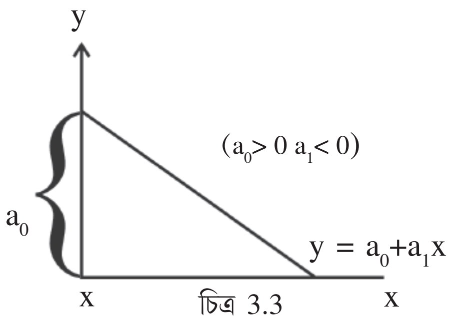
যদি $n = 3$ হয়, তাহলে $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ (ত্রিঘাত অপেক্ষক, Cubic function) ইত্যাদি।

2. রৈখিক বা সরলরৈখিক অপেক্ষক (Linear Function):

রৈখিক অপেক্ষকের সাধারণ সমীকরণটি হল: $y = a_0+a_1x$। এই সমীকরণে a_0 হল উল্লম্ব ছেদাংশ এবং a_1 হল রেখাটির প্রবণতা বা ঢাল। $a_0>0$ এবং $a_1>0$ ধরে আমরা 3.2 নং চিত্রে সরলরেখাটি এঁকেছি। আবার, $a_1< 0$ হলে রেখাটি নিম্নমুখী হবে। 3.3 নং চিত্রে $a_0>0$ এবং $a_1<0$ ধরে আমরা একটা সরলরেখা এঁকেছি।



চিত্র 3.2



চিত্র 3.3

3. দ্বিঘাত অপেক্ষক (Quadratic Function) : যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলরাশির ঘাতে উচ্চতম মান ২, তাকে দ্বিঘাত অপেক্ষক বলা হয়।

উদাহরণ : 1) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

2) $y = ax^2 + bx + c$

3) $y = 3x^2 + 4x + 5$ ইত্যাদি

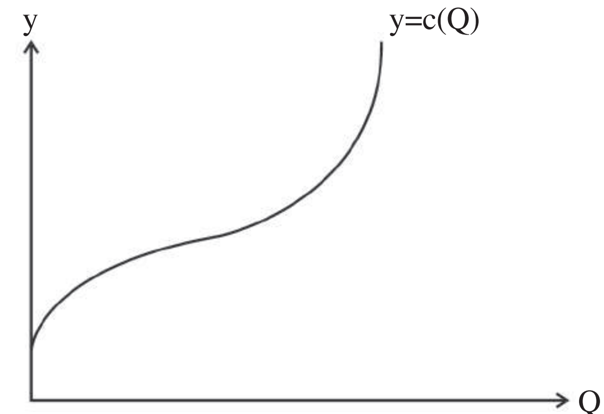
অর্থনীতিতে প্রান্তিক ব্যয় রেখা, গড় ব্যয় রেখা, প্রান্তিক ও গড় উৎপাদন রেখা ইত্যাদি সাধারণভাবে দ্বিঘাত ধরনের হয়।

4. বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষক (Polynomial Function) :

যদি x ও y চলরাশির পারস্পরিক সম্পর্ককে বর্ণনা করা যায় এভাবে যে $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ যেখানে $a_0(\neq 0)$; $a_1, a_2..., a_n$ সকলেই বাস্তব সংখ্যা অর্থাৎ ধ্রুবক এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তাহলে y কে বলা হবে x এর একটি n-ঘাত বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষক। এখানে অপেক্ষকটির পরিসর হলো R।

উদাহরণস্বরূপ, $y = x-1$ ও $y = x^2 + x + 1$ যখন $x \in R$ যথাক্রমে x-এর একঘাত ও দ্বিঘাত বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষক।

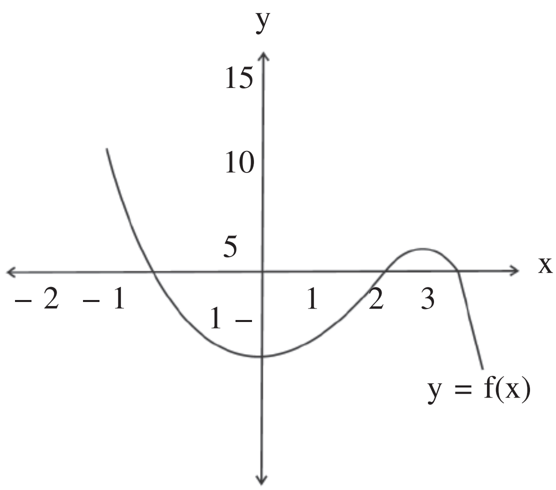
অনুরূপে, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ যেখানে a, b, c, d হোলো ধ্রুবক ও $a \neq 0$ কে বলা হয় ত্রিঘাত অপেক্ষক। এই ধরনের অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র a, b, c, d-র পরিবর্তনের ফলে পরিবর্তিত হয়। অর্থনীতিতে মোট ব্যয় রেখা $c(Q) = aQ^3+bQ^2+cQ+ d(a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ ও $3ac > b^2)$ এই ত্রিঘাত অপেক্ষকের দৃষ্টান্ত। এর চিত্র হোলো, (চিত্র 3.4) আবার, $f(x) = -x^3 + 4x^2-x - 6$ এই অপেক্ষকটির ক্ষেত্রে চিত্র হবে 4 নং-এর ন্যায়।



চিত্র 3.4

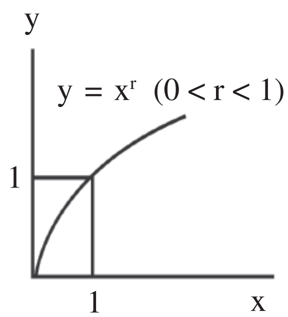
3. ঘাতবিশিষ্ট অপেক্ষক (Power Functions) :

যদি কোনো অপেক্ষককে $f(x) = Ax^r$ ($x > 0$,r এবং A যে-কোনো ধ্রুবক) হিসাবে প্রকাশ করা যায় তখন তাকে শক্তি অপেক্ষক বলা হয়। জাতীয় আয় বৃদ্ধির পরিমাপের জন্য যে ফর্মূলা ব্যবহার করা হয় সেখানে ভগ্নাংশিক সূচক সমন্বিত শক্তি অপেক্ষক ব্যবহার করা হয়। যেমন $y = 2.73K^{0.25} L^{0.75} (1.02)^t$ যেখানে y হোলো নীট জাতীয় আয়, K হোলো মূলধন ও L হোলো শ্রম।

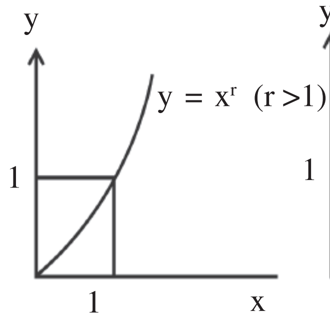


চিত্র 4

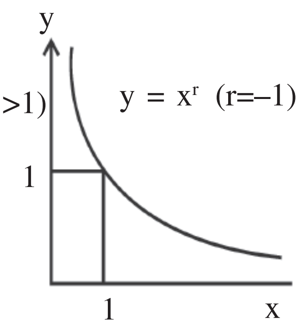
নীচের চিত্রগুলিতে $f(x) = x^r$ এর লেখচিত্রগুলি দেখানো হলো, r এর বিভিন্ন সীমার উপর ভিত্তি করে। চিত্র 8 থেকে বোঝা যায় r এর ধনাত্মক সূচক পরিবর্তিত হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে লেখচিত্রটির ধরন কীভাবে পাল্টে যায়।



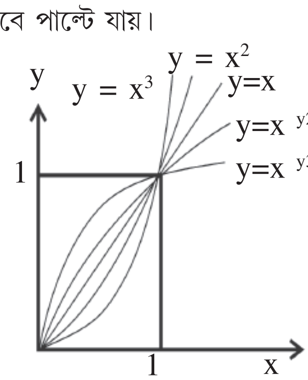
চিত্র 5



চিত্র 6



চিত্র 7



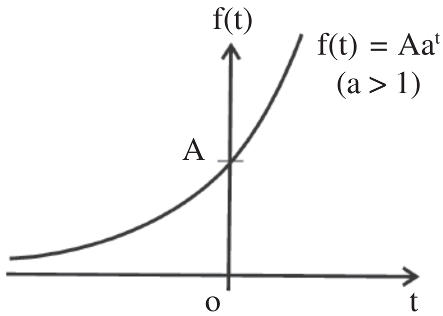
চিত্র 8

4. সূচক অপেক্ষক (Exponential function) : ধরি $f : R \rightarrow R$ একটি অপেক্ষক যেখানে $f(x) = a^2$; $x \in R$ ও x একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা, তাহলে f অপেক্ষককে বলা হয় সূচক অপেক্ষক। যখন $a = 1$, এখন সব $x \in R$ এর জন্য $f(x) = 1$ তখন সব $x \in R$ এর জন্য $f(x) = 1$ অর্থাৎ f একটি ধ্রুবক অপেক্ষক। যখন $a>1$ সূচক অপেক্ষকটি তখন R গুচ্ছের উপর একটি যথার্থ আরোহী বা ঊর্ধ্বল অপেক্ষক (strictly monotonically increasing function) ও তার প্রসার হয় $(0, \infty)$ যা একটি অসীমাবদ্ধ মুক্ত অন্তরাল (unbounded open interval)। যখন $0 < a < 1$ তখন সূচকীয় অপেক্ষকটি R গুচ্ছের (set) উপর একটি যথার্থ অবরোহী বা নিম্নগ অপেক্ষক (strictly monotonically decreasing function) ও তার প্রসার হল $(0, \infty)$, যখন $a = e$ অর্থাৎ 2 ও 3 এর মধ্যবর্তী একটি বিশেষ অমূলদ সংখ্যা তখন $f(x) = e^x$, $x \in R$ সূচক অপেক্ষকের একটি বিশেষ রূপ। যেহেতু $2 > 1$, সুতরাং e^x সূচক অপেক্ষকটি $(0, \infty)$ গুচ্ছের উপর যথাযথভাবে আরোহী অপেক্ষক ও তার প্রসার

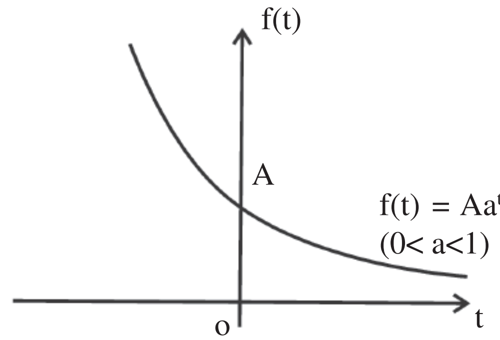
গুচ্ছ। অর্থনীতিতে, অর্থনৈতিক বৃদ্ধি, জনসংখ্যা বৃদ্ধি, ক্রমহ্রাসমান অশিক্ষা ইত্যাদি পরিমাপের ক্ষেত্রে এই ধরনের অপেক্ষক ব্যবহার করা হয়।

এবার যদি $f(x) = a^x$ ও $g(x) = x^a$ এই দুই ধরনের অপেক্ষক খেয়াল করা যায় তাহলে প্রথমটির ক্ষেত্রে সূচক x পরিবর্তিত হয় ও a ধ্রুবক থাকে এবং এটি সূচকীয় অপেক্ষক নয়। আবার দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে সূচকটি ধ্রুবক থাকে ও x পরিবর্তনশীল হয় তখন সেটি শক্তি অপেক্ষক নয়।

এরূপ অপেক্ষকের চিত্র নিম্নে প্রদর্শিত হলো:



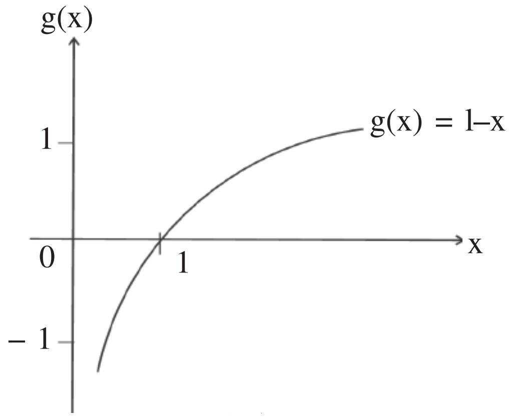
চিত্র 9 : $f(t) = Aa^t(a>1)$ -র লেখচিত্র



চিত্র 10 : $f(t) = Aa^t(0<a<1)$ -র লেখচিত্র

লগারিদ্মীয় অপেক্ষক (logarithmic function) :

$f(0, \propto) \rightarrow R$ আপেক্ষকটি $f(x) = \log_a x$, $x>0$ (a একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা)-এই সম্পর্ক দ্বারা বর্ণিত হলে তাকে লগারিদ্মীয় আপেক্ষক বলা হয়। ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা a কে লগারিদমীয় নিধান (base) বলা হয়। $a>1$ হলে $(0, \propto)$ অন্তরালে $\log_a x$ একটি যথাযথভাবে আরোহী অপেক্ষক এবং $0<a<1$ হলে $(0, \propto)$ অন্তরালে $\log_a x$ একটি যথাযথভাবে অবরোহী অপেক্ষক হয়। যখন $a = e$, তখন $\log_e x$ অপেক্ষকটি স্বাভাবিক লগারিদ্মীয় অপেক্ষক (natural logarithmic function) বলা হয় যার পরিসর (domain) $(0, \propto)$ ও প্রসার R যখন $a=0$; তখন $\log_{10} x$ অপেক্ষকটিকে সাধারণ লগারিদ্মীয় অপেক্ষক (common logarithnic function) বলা হয়। সুতরাং বিশেষভাবে উল্লেখ না থাকলে log x বলতে আমরা $\log_a x$ কেই বোঝাবো।



নিম্নে স্বাভাবিক লগারিদ্মীয় অপেক্ষকের চিত্র বর্ণিত হোলো। মুদ্রাস্ফিতির হার, জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার ইত্যাদি পরিমাণের জন্য স্বাভাবিক লগারিদমীয় অপেক্ষক g(x) = l~x ব্যবহৃত হয়।

2.5 ধারাবাহিকতা এবং শ্রেণি

2.5.1 ধারাবাহিক সংখ্যাগুচ্ছ :

বীজগণিতে পর পর অবস্থিত সংখ্যাসমূহের প্রথম সংখ্যার পরবর্তী প্রতিটি সংখ্যা কোনো নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে গঠিত হলে ওই সংখ্যাসমূহকে একটি অনুক্রম বা ধারাবাহিক সংখ্যাগুচ্ছ (sequence of numbers) বলা হয়। একটি ধারাবাহিক বা অনুক্রম সসীম (finite) বা অসীম (infinite) দুই প্রকারের হতে পারে।

উদাহরণ : 3, 8, 13, 18, 23—এটি 5টি পদের সসীম অনুক্রম যার যে কোনো পদের সঙ্গে 5 যোগ করলে পরবর্তী পদটি পাওয়া যায়।

উদাহরণ : 2, 6, 18, 54, 162....-এটি একটি অসীম অনুক্রম, যার যে-কোনো পদকে 3 নিয়ে গুণ করলে পরবর্তী পদটি পাওয়া যায়।

একটি অনুক্রমের পদগুলিকে $u_1, u_2, u_3..., u_n,...$ দ্বারা সূচিত করা হয়। u_n অর্থাৎ n-তম পদটিকে অনুক্রমের সাধারণ পদ (general term) বলে। একটি অনুক্রমকে $\{u_n\}$ বা $< u_n >$ চিহ্ন দ্বারা লেখা হয়। u_n অর্থাৎ সাধারণ পদ জানা থাকলে n এর স্থলে 1, 2, 3... বসিয়ে অনুক্রমটির প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় পদগুলি নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ : $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots;$ $\{Z^{n-1}\}=1, 2, 4, 8...;\{(-1)^n(n^2-1)\}=0, 3, -8, 15,....$

2.5.2 শ্রেণি বা ক্রম : কোনো অনুক্রমের পদগুলিকে যোগ অথবা বিয়োগ চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে তাকে ক্রম বলা হয়। যদি $\{u_n\}$ একটি অনুক্রম হয়, তবে $u_1+u_2+u_3+...$ অর্থাৎ $\sum u_n$ কে একটি ক্রম বলা হবে। একটি ক্রম সসীম ও অসীম দুই প্রকারেরই হতে পারে। $u_1,u_2,u_3...$ কে যথাক্রমে ক্রমটির প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, পদ বলে।

উদাহরণ : সসীম শ্রেণি : 1) 1+2+3+....+10; 2) $1+y_2+y_3+y_4+y_5$

অসীম শ্রেণি : 1) $1^3+2^3+3^3+...$ 2) $1+y_3+y_a+...$

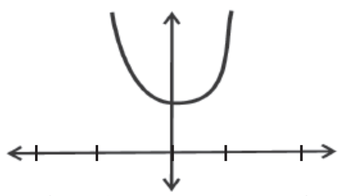
কোনো অসীম শ্রেণির প্রথম n পদের যোগফলকে n-তম আংশিক যোগফল বলে এবং ইহাকে S_n দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। সুতরাং $\sum u_n$ অসীম শ্রেণির ক্ষেত্রে n-তম আংশিক যোগফল হল: $S_n = u_1 + u_2 \times ... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$

2.6 সন্তত বা অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক

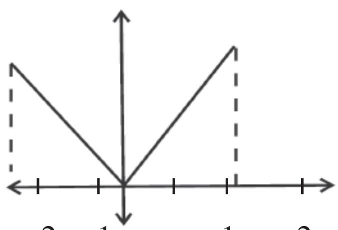
(a, b) ব্যবধিতে f(x) ফাংশনের লেখচিত্রে ব্যবধির মধ্যবর্তী কোনো বিন্দুতে যদি ফাঁকা না থাকে তবে ঐ ব্যাবধিতে f(x) অপেক্ষকটিকে অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক বলা হয়। অর্থাৎ অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কনের ক্ষেত্রে পেন্সিল না

তুলে এক টানে লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়। যে-কোনো বিন্দু x=a তে f(x) ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x=a^-} f(x) = f(a)$ হয়।

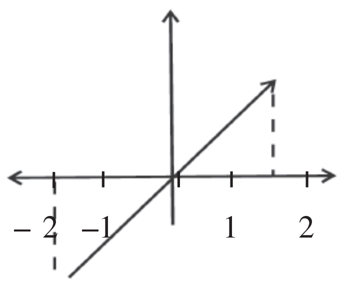
সুতরাং x=a তে f(x) অপেক্ষককে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি f(a) সংজ্ঞায়িত হয় এবং $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ হয় অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ আমরা $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = \lim\limits_{h\to 0} f(a-h) = f(a)$ হয়।



চিত্র 12 : $f(x) = x^2+3$



চিত্র 13 : $f(x) = |x|$



চিত্র 13 $f(x) = x$

চিত্র 12 এ $f(x) = x^2+3$ অপেক্ষকটি, চিত্র 13 তে $f(x) = |x|$ এবং তৃতীয় চিত্রে $f(x) = x$ অপেক্ষকটি (–2, 2) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

অর্থাৎ অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষককে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়—

একটি মুক্ত অন্তরালে x=a বিন্দুতে f(x) অপেক্ষকটি অবিচ্ছিন্ন হবে যদি $\delta>0$ এরকম কিছু বিন্দু থাকে যেখানে $|f(x)-f(a)|<\in$, যখনই $|x-a| < \delta$, যে কোনো $\in>0$-র জন্য, হবে।

উদাহরণ: 2.4.1: প্রমাণ করো যে $y = |x|$ অপেক্ষকটি সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।

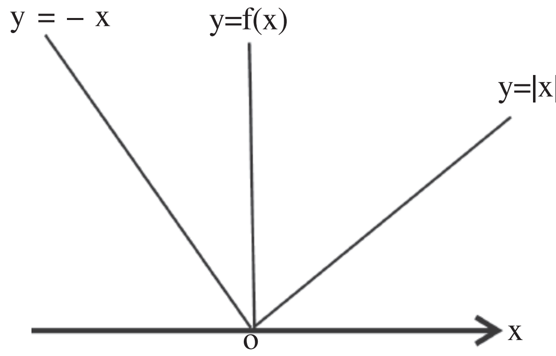
$y = |x|$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র চিত্র 13-তে বর্ণিত আছে। আমরা জানি $|x| = x$ যখন $x>0$ $|x|$ এর $-x$ যখন $x < 0$

লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে $|x|$ সর্বত্রই অবিচ্ছিন্ন। সুতরাং x=0 বিন্দুতে এর অবিচ্ছিন্নতা বিচার করলেই চলবে।

এখন x=0 বিন্দুতে $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$f(0) = 0$



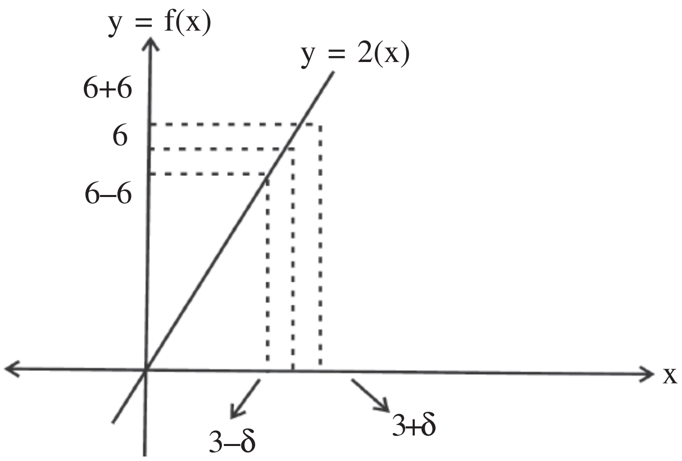
চিত্র 13

সুতরাং $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

অর্থাৎ x=0 বিন্দুটিতে অপেক্ষকটি অবিচ্ছিন্ন।

অর্থাৎ y=|x| অপেক্ষকটি সর্বত্রই অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ : 2.4.2 : দেখাও যে $f(x) = 2x$ অপেক্ষকটি একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক।



চিত্র 14

ধরা যাক x=3 একটি বিন্দু যার অপেক্ষক মান $f(3) = 6$ এখন প্রদত্ত অপেক্ষকটি এই বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হলে যদি, কোনো সংখ্যা $\in>0$ যত ছোটোই হোক না কেন তার জন্য $\delta>0$ কিছু মান, হতে পারে খুবই ছোটো, সেটা পাওয়া যাবে, যার ফলে $(3-\delta, 3+\delta)$ মধ্যের x সেটের সকল মানের জন্য সমস্ত অপেক্ষকমান $(6-\in, 6+\in)$ দ্বারা বর্ণিত সেটে অবস্থান করবে। অর্থাৎ x=3 এর নিকটবর্তী বিন্দুগুলির অপেক্ষকমান মানগুলি f(3) এর কাছাকাছি অবস্থান করবে। যদি $\in = 0.01$ ও $\delta = 0.002$ ধরা হয়, তাহলে $x\in(3-0.002, 3+0.002)$ উপর সংঞ্জিত f(x) এর মানগুলি f(3) এর $\in$ দূরত্বের মধ্যে অবস্থান করবে। অর্থাৎ $f(x)\in(f(3-0.002, 3+.002))$ বোঝায় $f(x)\in(6-0.004,$

6+0.004) এই সবকটি মানের অবস্থান f(3) = 6 এর থেকে $\in$ = 0.001 দূরত্বের মধ্যে δ এর মান যদি ধরা হয় $\delta \leq 0.005$ তাহলে এটি সত্য হবে। অর্থাৎ সাধারণভাবে এটা বলা য়ায় যে x=a এই ধরনের যে-কোনো মানের ক্ষেত্রে f(x); f(a) -র $\in$ দূরত্বে মধ্যে অবস্থান করবে যতক্ষণ $\delta < \in /2$ হবে। $x \in (a-\in/2,\ a+\in/2)$-এর জন্য $f(x) \in (2a-\in,\ 2a+\in)$ হবে। f(x) = 2x এই অপেক্ষকটি $x \in R$ এর প্রত্যেকটি বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 2.4.3 : একটি অপেক্ষক f : R$\to$R বর্ণিত হয় এভাবে যে

$$f(x) = \frac{x^{15} - a^{15}}{x^{12} - a^{12}} \text{ যখন } x \neq a$$

$$= \frac{a^3}{4} \text{ যখন } x = a$$

এক্ষেত্রে R এর ওপর f এর অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা করুন।

সমাধান : ধরি $x \in R$ এবং $x \neq a$। তাহলে $f(x) = \dfrac{x^{15} - a^{15}}{x^{12} - a^{12}}$ একটি বীজগাণিতিক অপেক্ষক সেটি a ব্যতীত R-এর সব x এর জন্য অবিচ্ছিন্ন।

এখন, $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{x^{15} - a^{15}}{x^{12} - a^{12}} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{x^{15} - a^{15}}{x - a}}{\dfrac{x^{12} - a^{12}}{x - a}} \left[\because x - a \neq 0\right]$$

$$= \frac{15a^{15-1}}{12a^{12-1}} \left[\because \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, \text{ যখন n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা}\right]$$

$$= \frac{5}{4}a^3 \text{ কিন্তু } f(a) = \frac{1}{4}a^3 \ \therefore \lim_{x\to a} f(x) \neq t(a)$$

সুতরাং n = a বিন্দুতে f অবিচ্ছিন্ন নয়। অতএব, R এর উপর f অবিচ্ছিন্ন নয়।

2.6.1 অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের মৌলিক ধর্মসমূহ :

(i) একটি ধ্রুবক অপেক্ষক সর্বদাই অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক।

(ii) একই পরিসরে সংজ্ঞাত দুইটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের যোগফল বা বিয়োগফল অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক হয়।

(iii) একই পরিসরে সংজ্ঞাত দুইটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের গুণফল একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক।

(iv) একই পরিসরে সংজ্ঞাত দুইটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের ভাগফল একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক হবে যদি অবশিষ্ট অপেক্ষকটি পরিসরের কোনো অংশে শূন্য না হয়।

(v) একটি অপেক্ষক কোনো বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ প্রান্তে (close-end) অবিচ্ছিন্ন হলে সেটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক হবে কিন্তু একটি অপেক্ষক কোনো মুক্ত প্রান্তে (open end) অবিচ্ছিন্ন হলে সেটি সীমাবদ্ধ হতেও পারে বা নাও হতে পারে।

2.7 সারাংশ

এই এককে বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষকের লেখচিত্র বর্ণনা ও অঙ্কন পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে। ক্রম ও অনুক্রম এবং অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের ধরন ও বৈশিষ্ট্যও আলোচিত হয়েছে।

2.8 অনুশীলনী

1. সূচক অপেক্ষক এবং লগারিদ্মীয় অপেক্ষকের মধ্যে পার্থক্য করুন।
2. নিম্নের অপেক্ষকগুলি কী ধরনের অপেক্ষক?

   a) $y = 2x^3 - 30x^2 + 126x + 59$ b) $y = x^2 + 6x + 15$
3. $f(x) = x^2 - 3x - 4$-এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন।
4. ধারাবাহিকতা ও শ্রেণির মধ্যে পার্থক্য করুন।
5. $f(x) = |x+1|$ কি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক? পরীক্ষা করে দেখান।

2.9 গ্রন্থপঞ্জি

1. K. Sydsaeter and P. Hammond: (2002) : Mathematics for Economic Analysis, Pearson Educational Asia : Delhi.
2. Allen, R.G.D. (1938) : Mathematical Analysis for Economists, MacMillan.
3. Chiang, Alpha C. (1967): Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw Hill Book Company.
4. Mehta, B.C. and G.M.K. Madnani (1997) : Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons.

একক 3 □ এক চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষকের অন্তরকলন বা অবকলন

গঠন

3.1 উদ্দেশ্য

3.2 প্রস্তাবনা

3.3 কোনো রেখার নতি

3.4 স্পর্শকের নতি ও তার অবকল বা অন্তরজ

3.5 পরিবর্তনের হার ও তার অর্থনৈতিক তাৎপর্য

3.6 অন্তরকলজের সরল নিয়মাবলি

3.7 যোগ, গুণ ও ভাগফলের অবকলন

3.8 দ্বিতীয় ও উচ্চতর মাত্রার অন্তরকলজ ও তার প্রয়োগ

3.9 সারাংশ

3.10 অনুশীলনী

3.11 গ্রন্থপঞ্জি

2.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- কোনো অপেক্ষকের নতি
- কোনো অপেক্ষকের অন্তরকলনের নিয়মাবলি
- দুই বা ততোধিক অপেক্ষকের যোগ, গুণ ও ভাগফলের ক্ষেত্রে অবকলন
- দ্বিতীয় ও উচ্চতর মাত্রার অবকলন নির্ণয় ও তাদের প্রয়োগ

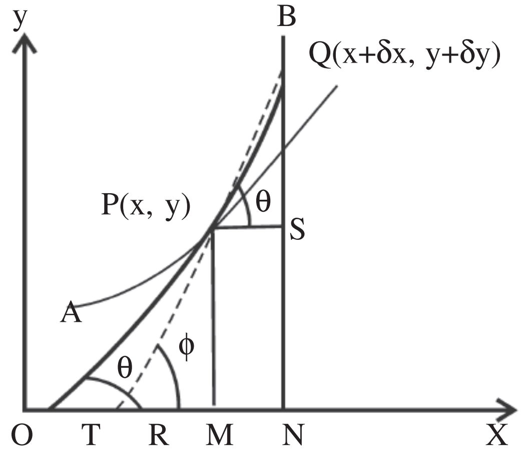
3.2 প্রস্তাবনা

অর্থনীতির একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হোলো কোনো রাশি কত দ্রুত সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়। এই পরিবর্তনের হার বা বৃদ্ধি জানার জন্য অপেক্ষকটির যে ধর্ম বা পদ্ধতি সংক্রান্ত আলোচনা তাকেই বলা হয় অন্তরকলন। অর্থনীতির ক্ষেত্রে যেমন উৎপাদন বৃদ্ধির সঙ্গে মুনাফা বৃদ্ধির হার, আয়ের হ্রাস বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে জীবনযাত্রার মানের পরিবর্তন

ইত্যাদি জানার প্রয়োজন হয়। $y = f(x)$ অপেক্ষকের এই x চলরাশির পরিবর্তনর সঙ্গে y এর পরিবর্তন লক্ষ করা যাবে তাই নিয়েই আলোচনা করা যায় অন্তরকলনের মাধ্যমে।

2.3 কোনো রেখার নতি

অর্থনীতির পাঠের একটি গুরুত্বপূর্ণ ক্ষেত্রে হোলো কিছু বিষয় যেমন সময়ের সঙ্গে সঙ্গে উৎপাদনের পরিমাণের পরিবর্তনের হারকে মেপে দেখা বা জাতীয় আয় বৃদ্ধির গতি প্রকৃতি লক্ষ করা ইত্যাদি। এখন $y = f(x)$ এর মাধ্যমে যখন y ও x এর মধ্যে সম্পর্ক লক্ষ্য করা হয় তখন এই অপেক্ষকের লেখচিত্রর ঢাল এই পরিবর্তনের মাত্রা ও দিক সম্পর্কে ধারণা দেয়। $y = ax+b$ দিয়ে প্রকাশিত সরলরেখাটির ক্ষেত্রে 'a'-র মাধ্যমে ঢাল বা নতি এবং 'b'-র মাধ্যমে ছেদক বোঝানো হয়। যদি 'a'-র মান ধনাত্মক এবং বড়ো হয় তাহলে রেখাটি বাঁ-দিক থেকে ডান দিকে ঋজু (steep) ভাবে বাড়ে বা উর্ধ্বমুখী হয় এবং 'a' যদি বড়ো ও ঋণাত্মক হয় তাহলে রেখাটি নিম্নাভিমুখী হয়। এবার এই ঋজুতা বলতে বোঝায় যে কোনো রেখার যে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে যে স্পর্শক আঁকা যায় তার ঢাল বা নতিকে, লেখচিত্রের যে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢালকেই 'f'-এর ওই বিন্দুতে অন্তরজ বলা হয়। একে $f'(a)$ হিসাবে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $f'(a)$ হোলো $y = f(x)$ অপেক্ষকের $(a, f(a))$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি।



ধরা যাক, AB বক্ররেখাটি $y=f(x)$ অবিচ্ছিন্ন বা সন্তত অপেক্ষকের একটি অংশ এবং $P(x, y)$ ও $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ এই রেখার উপর কাছাকাছি দুইটি বিন্দু। ধরা যাক QP সরলরেখাকে বর্ধিত করলে তা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ $\angle XRP = \theta$। P ও Q সঙ্গে x অক্ষের উপর PM ও QN লম্ব অঙ্কন করা হোলো। আবার P থেকে QN এর উপর PS লম্ব আঁকা হোলো। তাহলে $PS = MN = ON - OM = x + \delta x - x = \delta x$ এবং $\delta Q = QN - SN = y + \delta y - y = \delta y$ $\angle SPQ = \theta = \angle XRP$;

$$\therefore \tan\theta = \frac{QS}{PS} = \frac{\delta y}{\delta x}$$

যদি AB বক্ররেখার উপর দিয়ে ক্রম $Q \to P$ হয়, অর্থাৎ P ও Q খুব কাছাকাছি হয় তবে PQ জ্যা PT স্পর্শকের সঙ্গে সমাপতিত হবে। সেক্ষেত্রে $\delta x \to 0$, এবং $\theta \to \phi$ হবে যেখানে $\phi = \angle XTP$

$$\therefore \tan\theta = \lim_{Q\to P} \tan\theta = \lim_{\delta x\to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

সুতরাং AB বক্ররেখার P(x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল হোলো $\frac{dy}{dx}$

3.4 স্পর্শকের নতি ও তার অবকল বা অন্তরজ

ধরা যাক xy ক্ষেত্রে (plane) একটি বক্ররেখার উপর P একটি বিন্দু। ওই রেখার উপর অপর একটি বিন্দু Q নিয়ে একটি সরলরেখার মাধ্যমে PQ যুক্ত করা হল

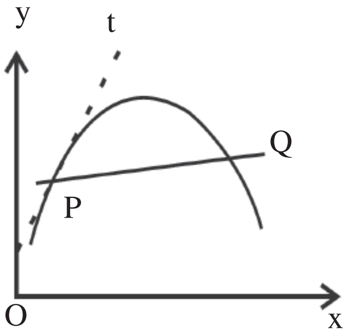


Fig. : 4.1

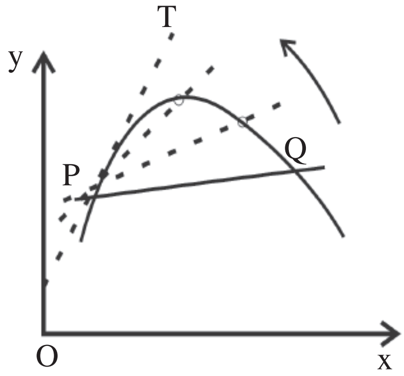


Fig. 4.2

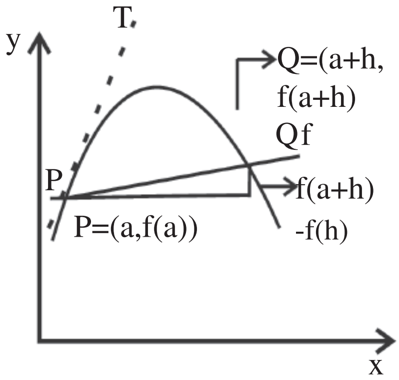


Fig. 4.3

এই PQ সরলরেখাকে বলে কর্তক (secart) এই কর্তককে যদি, P কে স্থির রেখে তার Q বিন্দুকে P এর দিকে ঘুরিয়ে আনা হতে থাকে তাহলে PT হিসেবে যে সীমায়িত (limiting) কর্তক পাওয়া যায় তাকে বলা হয় (P-এর সাপেক্ষে) এই কর্তক থেকে P বিন্দুতে স্পর্শকের প্রক্রিয়া উপরোক্ত 4.1–4.3 তে দেখানো আছে।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক [a, f(a)]। এখন f এর লেখচিত্রর উপর অবস্থিত P এর নিকটবর্তী Q এর x অক্ষের স্থানাঙ্ক ধরা যাক a+h যেখানে h হোলো একটি ক্ষুদ্র সংখ্যা ও $h \neq 0$ অর্থাৎ Q এর x অক্ষের স্থানাঙ্ক a নয় কিন্তু a এর নিকটবর্তী কারণ $Q \neq P$ যেহেতু Q f এর লেখচিত্রে আছে সুতরাং তার y অক্ষের স্থানাঙ্ক f(a+h) অতএব P ও Q র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে P=(a,f(a)) ও Q=(a+h, f(a+w)). PQ কর্তকটির ঢাল হলো $m = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ....(1) গণিতে এই ভগ্নাংশটিকে f-এর নিউটন ভাগফল বা অন্তরকলন ভাগফল বলা হয়। (Newton quotient or differential quotient)। যদি h=0 হয় তবে m অসংজ্ঞাত হবে কারণ $m = \frac{0}{0}$ হবে। কিন্তু যখন Q ক্রমশঃ P এর নিকটবর্তী হতে থাকে (Q tends to P), f লেখচিত্র বরাবর তখন Q এর x স্থানাঙ্ক a+h, a-র দিকে অগ্রসর হতে থাকে ও h, 0-র

দিকে বা 0-র কাছাকাছি হতে থাকে (h tends to zero)। একই সঙ্গে PQ কর্তক, P বিন্দুতে স্পর্শকে পরিণত হয়। অর্থাৎ h যখন শূন্য হতে থাকে সেই অবস্থায় (i) এ m এর সংখ্যাই হোলো P স্পর্শকের ঢাল। সুতরাং বলা যায়

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f'(a)$ হোলো f লেখচিত্রর a বিন্দুতে অবকল, (Derivative)

f(x) লেখচিত্রে স্পর্শকের সমীকরণ হোলো (a, f(a)) বিন্দুর সাপেক্ষে $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

উদাহরণ : 3.2.1 সূত্র 2 অনুসারে $f(x) = x^2$ এই অপেক্ষকের সাপেক্ষে $f'(a)$ নির্ণয় করো। $f'\left(\frac{1}{2}\right), f'(0)$ ও $f'(-1)$ এর মানগুলি নির্ণয় করো।

সমাধান : $f(x) = x^2$ এর ক্ষেত্রে $f(a+h) = (a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$

\ $f(a+h) -f(a) = (a^2 + 2ah + h^2) - a^2 = 2ah + h^2$

সুতরাং সকল $f \neq 0$-র জন্য

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2ah + h^2}{h^2} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$$

$$\therefore f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$$

যখন $a = y_2$ তখন $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2} = 1$

যখন $a = 0$ তখন $f'(0) = 2 \times 0 = 0$

যখন $a = -1$ তখন $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$

গণিতের ব্যবহারিক ক্ষেত্রে অবকলের ক্ষেত্রে (derivative) যে অন্তরকলন চিহ্ন (differential notation) ব্যবহার করা হয় তা লিবনিজ (Lebnitz) প্রণীত। যদি অপেক্ষকটি $y = f(x)$ হল তাহলে তার $f'(x)$ হবে $\frac{dy}{dx}$ বা $\frac{df(x)}{dx}$

অর্থাৎ $y = x^2$ এর ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = 2x$

যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে তখন $f'(x)=\frac{dy}{dx}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0} -\frac{(x=\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to 0}-\frac{(x+h)-f(x)}{h}$, কে প্রথম নীতি থেকে অন্তরকলজ বলা হয়।

I অন্তরালের যদি x = x + h∈I হয় তখন $f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ (যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে)

লক্ষণীয় যে যেহেতু x = c + h, সুতরাং $x\to c$ যখন $h\to 0$,। স্পষ্টতই x = c বিন্দুতে $f'(x)$ এর মান $f'(c)$ এবং আমরা লিখি $f'(c)=f'(x)\big|_{x=c}$

f অপেক্ষককে I অন্তরালের c বিন্দুতে অবকলনযোগ্য (differentiable of deriable) বলা হবে যদি $f'(c)$ এর অসীম অস্তিত্ব থাকে এবং x বিন্দুতে f অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে x-এর সাপেক্ষে f অপেক্ষকের অবকলন প্রক্রিয়া বলা হয়।

টীকা : i) x∈I হলে ওই বিন্দুতে অপেক্ষক $f : I\to R$ এর অন্তরকলজের সসীম অস্তিত্ব থাকতে পারে বা নাও থাকতে পারে। সেহেতু অবকলিত অপেক্ষক (derived function) f' এর পরিসর সর্বদাই I এর উপধস্থ (subset) হবে।

ii) I অন্তরালের কোনো বিন্দু x এ $f'(x)$ এর মান $+\infty$ বা $-\infty$ হতে পারে। সেক্ষেত্রে, x বিন্দুতে f অপেক্ষকের অন্তরকলজ অসীম ধরা হবে।

iii) $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা একটি সীমাকরণ প্রক্রিয়ার চিহ্ন $\frac{d}{dx}(y)$ বোঝানো

অতএব, এটি ভাগফল dy÷dx হিসাবে গণ্য করা যাবে না, একে পড়া হবে ডিy ডিx অথবা ‘y এর ডি ডি x’। বাম অন্তরকলজ (left hand derivative) এবং ডান অন্তর কলজ (Right hand derivative) :

ধরা যাক, f : [a, b]→R অপেক্ষকটি [a, b] এই বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত। ধরা যাক, c∈[a, b] যদি $\lim\limits_{h\to 0}-\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ এর সসীম অস্তিত্ব থাকে তবে বলা যায়, c বিন্দুতে f অপেক্ষকের বাম অন্তরকলজ বর্তমান এবং এই সীমাস্থ মানকে $Lf'(c)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। সুতরাং $Lf'(c)=\lim\limits_{h\to 0}-\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$।

x=c বিন্দুতে f অপেক্ষকের ডান অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকবে যদি $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ এর সসীম অস্তিত্ব থাকে এবং সেটি $Rf'(c)$ দ্বারা চিহ্নিত করা যায়।

সুতরাং $Rf'(c)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

অতএব $x = c$ বিন্দুতে f অপেক্ষক অবকলনযোগ্য হলে যদি $Lf'(c)$ ও $Rf'(c)$ উভয়েরই সসীম অস্তিত্ব থাকে এবং তাদের মান সমান হয়। তাহলে যদি c বিন্দুতে f অপেক্ষক অবকলনযোগ্য হয় তবে $Lf'(c) = Rf'(c) = f'(c)$, [a, b] অন্তরালের প্রান্ত বিন্দুতে অন্তরকলজ (Derivative at the end point of the interval [a, b])

$c = a$ হলে c বিন্দুতে f অবকলনযোগ্য হবে যদি $Rf(c)$ এর সসীম অস্তিত্ব থাকে এবং তাহলে আমরা লিখি $f'(c) = Lf'(c)$।

[a, b] অন্তরালের কোনও বিন্দু c তে অপেক্ষক $[a, b]\to R$ অবকলনযোগ্য হবে যদি $f'(c)$ এর সসীম অস্তিত্ব থাকে এবং সেক্ষেত্রে

$f'(x)|_{x=c} = f'(c)$ যখন $a < b < c$

$= Rf'(c)$ যখন $c = a$

$= Lf'(c)$ যখন $c = b$

অবকল (Differential) :

f(x) যদি f(x) এর অন্তরকলজ হয় এবং x এর বৃদ্ধি Δx হয়, তবে f(x) এর অবচল df(x) সংজ্ঞতি হয় $df(x) = f(x)\,\Delta x$...(1) এই সম্পর্কের মাধ্যমে। যদি $f(x) = x$ তখন $f'(x) = 1$ এবং সেক্ষেত্রে (1) নং সমীকরণ থেকে পাই $dx=\Delta x$। অতএব, যখন x একটি স্বাধীন চলরাশি তখন x এর অবকল অর্থাৎ dx এর মান Δx এর সঙ্গে এক বা অভিন্ন হয়। সুতরাং যদি $y= f(x)$ হয় তবে (1) নং সমীকরণ থেকে পাই, $dy = f'(x)\ dx$। অর্থাৎ একটি অপেক্ষকের অবকলের মান ওই অপেক্ষকের অন্তরকলজ ও স্বাধীন চলরাশির অবকলের গুণফলের সমান।

উদাহরণ 3.2.2 : অন্তরকলজের প্রথম নীতি অনুসারে লেখাও যে ধ্রুবকের অন্তরকলজ শূন্য।

সমাধান : ধরি $f(x) = c$; যেখানে $x\in R$, একটি ধ্রুবক। তাহলে, c

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}\quad [\because f(x)=c, x\in R]$$

$$= 0 \quad \therefore\ f(x+h)=c,\ x+h\in R$$

উদাহরণ 3.2.3 : অন্তরকলজের প্রথম নীতির সাহায্যে দেখাও যে (ax^2+bx+c) অপেক্ষকটির অন্তরকলজ কি হবে, এখানে a, b ও c শূন্য ব্যতীত ধ্রুবক।

সমাধান : ধরি $f(x) = ax^2+bx+c$; $x\in R$ তাহলে অন্তরকলজের প্রথম নীতির সাহায্যে পাই যে,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{a(x+h)^2+b(x+h)+c\}-(ax^2+bx+c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{ax^2+2axh+ah^2+bx+bh+c-ax^2-bx=c}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2ax+ah+b)}{h}=\lim_{h\to 0}(2ax+ah+b)\left[\because h\to 0; \therefore h\neq 0\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}2ax+\lim_{h\to 0}ah+\lim_{h\to 0}b=2ax+a\times 0+b=2ax+b$$

সুতরাং $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)=2ax+b$

উদাহরণ 3.2.4 : $f(x) = |x|;\ x\in R$ হলে অন্তরকলজের প্রথম নীতির সাহায্যে দেখাও যে $x=0$ বিন্দুতে f অপেক্ষক অবকলনযোগ্য নয়।

সমাধান : যেহেতু, $f(x) = |x|;\ x\in R$ সুতরাং

$$\begin{aligned} f(x) &= -x \quad && x<0 \\ &= 0 && x=0 \\ &= x && x>0 \end{aligned}$$

এখন $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-0}{h}$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-1)\left[\because h\to 0^-, \therefore h\neq 0\right]$$

$= -1$

$\therefore f'(0)=-1$

আবার $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-0}{h}$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}\left[\because h\to 0^+,\ \therefore h\neq 0\right]$$

$$= \lim_{h \to 0^+} (1) = 1 \therefore R f'(0) = 1$$

যেহেতু, $Lf'(0) \neq R f'(0)$, সুতরাং, $x = 0$ বিন্দুতে f অবকলনযোগ্য নয়।

3.5 পরিবর্তনের হার ও তার অর্থনৈতিক তাৎপর্য

অর্থনীতিতে $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ এই রাশিটিকে বলা হয় a থেকে a+h এই অন্তরালে f এর গড় পরিবর্তন হার। লক্ষণীয় যে এই ভগ্ন্যাংশটিই f-এর নিউটনীয় ভাগফল। $h \to 0$ এই সীমা নিলেই a বিন্দুতে f এর অবকল পাওয়া যায়। অর্থাৎ 'a' বিন্দুতে f এর অবিরাম পরিবর্তন হার হোলো $f'(a)$।

অর্থনৈতিক ক্ষেত্রে আনুপাতিক হার নির্ণয় করাও গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। যে-কোনো পরিবর্তনের আনুপাতিক হার নির্ণয়ের ক্ষেত্রে $f'(a)/f(a)$ সূত্রটি ব্যবহার করা হয়।

ধরা যাক্ কোনো একটি ফার্ম কোনো নির্দিষ্ট সময়ে কিছু দ্রব্য প্রস্তুত করে।

$C(x) = x$ একক দ্রব্য প্রস্তুতির ব্যয়

$R(x) = x$ একক দ্রব্যের বিক্রয়লব্ধ আয়

$\pi(x) = R(x) - C(x) = x$ একক দ্রব্য থেকে প্রাপ্ত লাভের পরিমাণ।

এ ক্ষেত্রে $C'(x)$ হোলো x এর প্রান্তিক ব্যয়, $R'(x)$ হোলো প্রান্তিক আয় ও $\pi'(x)$ হোলো প্রান্তিক লাভ। অর্থনীতিবিদগণ প্রায়শই অবকল বোঝাতে প্রান্তিক ধারণাকে ব্যবহার করেন। যেমন:

প্রান্তিক ব্যয় $= C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$

প্রান্তিক ব্যয় ও গড় ব্যয়ের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করা যায়। একটি ফার্মের মোট ব্যয় নির্ভর করে সে কতটা উৎপাদন করে তার উপর। সুতরাং $c = c(x)$ হোলো মোট ব্যয় অপেক্ষক।

গড় ব্যয় (Averagi cost) $= \frac{c(x)}{x}$ এবং প্রান্তিক ব্যয় (Marginal cost) $= \frac{dc(x)}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x}\right) = \frac{\frac{dc}{dx} \cdot x - c}{x^2} = \frac{1}{x}\left[\frac{dc}{dx} - \frac{c}{x}\right] = \frac{1}{x}(MC - AC)$$

যদি AC রেখা (AC=Average Cost) নিম্নাভিমুখী হয় তাহলে $\frac{d}{dq}\left(\frac{c}{x}\right) < 0$ অথবা $\frac{1}{x}(MC = AC) < 0$ বা

$MC < AC$ অর্থাৎ MC রেখা AC রেখার নীচে অবস্থান করে যখন AC হ্রাস পেতে তাকে। এভাবেই যখন AC রেখা উর্দ্ধাভিমুখী হয় তখন MC রেখা AC রেখার উর্দ্ধে অবস্থান করে। যখন রেখার নতি শূণ্য, AC রেখা MC রেখাকে ছেদ করে। আর একটি ক্ষেত্র দেখা যাক। অর্থনীতিতে চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা পরিমাপনের ক্ষেত্রে অবকলনের ব্যবহার লক্ষ করা যায়।

চাহিদা একটি বহুচলরাশিভিত্তিক অপেক্ষক (Multi-Variate Function)। যদি এদের মধ্যে থেকে শুধু দ্রব্যের দামকে গণ্য করা যায় তাহলে চাহিদা অপেক্ষক প্রকাশ করা যায় $q=f(p)$ যেখানে p হোলো দ্রব্যের দাম ও q হোলো চাহিদার পরিমাণ। চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা বলতে বোঝায়। দ্রব্যের দামের শতকরা পরিবর্তনের সঙ্গে, দ্রব্যের চাহিদার পরিমাণের পরিবর্তন হার।

অর্থাৎ $e_p = \dfrac{\Delta q / q \times 100}{\Delta p / p \times 100} = \dfrac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \dfrac{p}{q}$ যেখানে Δp ও Δq হোলো দামের পরিবর্তন ও চাদিার পরিমাণের পরিবর্তন। এখন Δp যদি খুবই ক্ষুদ্র হয় অর্থাৎ

$e_p = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \dfrac{p}{q} = \dfrac{p}{q} \dfrac{dq}{dp}$ একে বলা হয় চাহিদার বিন্দুগত দাম স্থিতিস্থাপকতা, যেহেতু চাহিদা অপেক্ষক ঋণাত্মক ঢালসম্পন্ন হয় সুতরাং $\dfrac{dq}{dp} < 0$ এবং সাধারণভাবে চাহিদার দামগত স্থিতিস্থাপকতা ঋণাত্মক হয়।

3.6 অন্তরকলজের সরল নিয়মাবলি

যদি (a, b) মুক্ত অন্তরালের কোনো বিন্দু x-এ $u : (a, b) \to R$ ও $v : (a, b) \to R$ অপেক্ষক দুইটির সসীম অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে তবে

(i) $\dfrac{d}{dx}(cu) = c \cdot \dfrac{du}{dx}$, যেখানে c একটি ধ্রুবক

(ii) $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

(iii) $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{du}{dx} + v \cdot \dfrac{du}{dx}$

(iv) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$, যদি (a, b) অন্তরালের সব বিন্দু x এর জন্য $v \neq 0$ হয়।

উদাহরণ 3.4.1 : ধরা যাক $u=x^3$, $v = \log_e x$ ও $w = e^x$ তাহলে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

i) $\frac{d}{dx}(5w)$ ii) $\frac{d}{dx}(u \pm v)$ iii) $\frac{d}{dx}(u, w)$

iv) $\frac{d}{dx}(uv)$ v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$

i) $\frac{d}{dx}(5w) = \frac{d}{dx}(5e^x) = 5\frac{d}{dx}(e^x) = 5e^x$ [(v) নং নিয়মানুসারে]

ii) $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx}\left(x^3 \pm \log_e{}^x\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^3\right) \pm \frac{d}{dx}\left(\log_e{}^x\right)$ [(ii) নং নিয়মানুসারে]

$= 3x^2 \pm \frac{1}{x}$

iii) $\frac{d}{dx}(uw) = \frac{d}{dx}\left(x^3 e^x\right)$

$= x^3 \frac{d}{dx}\left(e^x\right) + e^x \frac{d}{dx}\left(x^3\right)$ [(iii) নং নিয়মানুসারে]

$= x^3 e^x + e^x 3x^2 = e^x\left(x^3 + 3x^2\right)$

iv) $\frac{d}{dx}(uv) = \frac{d}{dx}\left(x^3 \log_e{}^x\right)$

$= x^3 \frac{d}{dx}\left(\log_e{}^x\right) + \log_e{}^x \frac{d}{dx}\left(x^3\right)$ [নিয়ম (iii) অনুসারে]

$= x^3 \frac{1}{x} + \log_e{}^x \cdot 3x^2$

$= x^2 + 3x^2 \log_e{}^x$

v) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{e^x}\right)=\frac{e^x\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-x^3\frac{d}{dx}\left(e^x\right)}{\left(e^x\right)^2}$$

$$=\frac{e^x 3x^2-x^3e^x}{\left(e^x\right)^2}=e^x\left(3x^2\right)$$

$$=\frac{3x^2-x^3}{e^x}$$

উদাহরণ : 3.4.2 : $y = \log_a x$ হলে, যেখানে a যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত হবে?

সমাধান : $y= \log_e x = (\log_e x)\ (\log_a e)$ [$\because \log_n m = \log_p m \log_n p$ m, n, p>0]

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left\{\left(\log_e x\right)\left(\log_a e\right)\right\}$$

[$\because \log_a e$ একটি ধ্রুবক]

$$=\log_a e\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{1}{x}\log_x e\left[\because\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{1}{x}\right]$$

f একটি ধ্রুবক অপেক্ষক $f(x) = A$ হয়, তাহলে $f'(x) = 0$ অর্থাৎ $f(x) = A \rightarrow f'(x) = 0$

নিয়ম vi :

যদি $y=f(x)$ এ কোনো ধ্রুবক যোগ করা যাকে তাহলে অন্তরকলনে সেটি অবলুপ্ত হয়। অর্থাৎ

$y = A + f(x) \rightarrow y' = f'(x)$

নিয়ম vii :

$y = f(x)$ কে যদি কোনো গুণক থাকে (Multiplicative constant) অবকলনে সেটি রক্ষিত হয়।

অর্থাৎ $y = A\ f(x) \rightarrow y' = Af'(x)$

নিয়ম viii :

ঘাত নিয়ম (Power Rule) : $f(x) = x^a \rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$

[যেখানে a একটি পছন্দমতো (arbitrary) ধ্রুবক]

3.7 যোগ, গুণ ও ভাগফলের অবকলন

ধরা যাক f ও g, A ক্ষেত্রর উপর বাস্তব সংখ্যা দ্বারা সংজ্ঞাত দুটি অপেক্ষক, তাহলে $F(x) = f(x) + g(x)$ এই সূত্র দ্বারা সংজ্ঞতি F অপেক্ষক কে f ও g-র যোগফল বলা হয় অর্থাৎ $f = f + g$। আবার $G(x) = f(x) - g(x)$ এই সূত্র দ্বারা সংজ্ঞত G অপেক্ষককে বলা হয় f ও G-র পার্থক্য ও তা লেখা হয় $G = f - g$ অনুসারে।

যদি x বিন্দুতে f ও g অবকলনযোগ্য হয় তাহলে F=f+g ও G=f–gও x বিন্দুতে অবকলনযোগ্য হবে।

সুতরাং, $f(x)=f(x)+g(x) \rightarrow F'(x) = f'(x) + g'(x)$...(i)

$G(x) = f(x)-g(x) \rightarrow G'(x)=f'(x) -g'(x)$...(ii)

লিবনিজের চিহ্নানুসারে :

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{d(x)}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

প্রমাণ: (i) এ F এর নিউটনীয় ভাগফল :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

যখন $h \rightarrow 0$ তখন শেষ দুই ভগ্নাংশ যথাক্রমে $f'(x)$ ও $g'(x)$ এর দিকে অগ্রসর হতে তাকে। সুতরাং

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

উদাহরণ হিসাবে বলা যায় যদি $\pi(x)$ হয় লাভ অপেক্ষক, $R(x)$ ও $C(x)$ যথাক্রমে আয় ও ব্যয় অপেক্ষক হয় তাহলে $\pi(x) = R(x)-C(x)$ বিশেষত $\pi'(x) = R'(x)-C'(x)$ এবং $\pi'(x)$ বা প্রান্তিক লাভ শূন্য হয় যখন $R'(x) = C'(x)$ হয় বা প্রান্তিক আয়, প্রান্তিক ব্যয়ের সমান হয়।

কোনো যোগফলের অবকলন তাদের অবকলনের যোগফল হয়। অর্থাৎ

$$\frac{d}{dx}\left[f_1(x)+\ldots+f_n(x)\right]=\frac{d}{dx}f_1(x)+\ldots+\frac{d}{dx}f_n(x)$$

উদাহরণ 3.5.1: n ঘাত সম্পন্ন কোন বহুপদের n–th degree polynomial) অবকল নির্ণয় করো

সমাধান : $\frac{d}{dx}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0\right)$

$= na_n x^{x-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}+...+a_1$

যদি ক্ষেত্র A-র উপর সংজ্ঞাত f ও g দুটি অপেক্ষক হয়, তাহলে $F(x) = f(x)\cdot g(x)$ কে f ও g-র গুণক অপেক্ষক (Product) বলা হয়। ও $F=f\cdot g$ হবে। যদি $f(x)=x$ ও $g(x)=x^2$ হয়, তাহলে $(f\cdot g)x = x^3$ এখানে $f'(x)=1$ ও $g'(x)=2x$ ও $(f.g)'x=3x^2$ অর্থাৎ $(f\cdot g)x$ এর অবকল $f'(x)\cdot g'(x)=2x$ এর সঙ্গে সমান হবে না।

যদি f ও g উভয়েই x বিন্দুতে অবকলনযোগ্য হয় তাহলে F= f.g ও x বিন্দুতে অবকলনযোগ্য হবে।

$$F(x) = f(x)\cdot g(x) \rightarrow F'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

লিবনিজের চিহ্নানুসারে : $\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)$

ধরা যাক f ও g বিন্দুতে অবকলনযোগ্য যার নিউটনীয় ভাগফল:

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এবং $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$, ...(1) যখন $h\rightarrow 0$ হয় তখন $f'(x)$ ও $g'(x)$ এ সীমায়িত হয়। এখন F এর নিউটনীয় ভাগফল হোলো

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$ ...(2) । এখন (2) এর ডানদিকে f(x) g(x+h) সংখ্যাটি বিয়োগ এবং পরে যোগ করে দেওয়া যায়। সুতরাং

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \quad ...(3)$$

$$=\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]g(x+h)+f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] ...(3)$$

যদি $h\rightarrow 0$ হয় তখন তৃতীয় বন্ধনীদ্বয়ের নিউটনীয় ভাগফল $f'(x)$ ও $g'(x)$ এ সীমায়িত হয়। অর্থাৎ $h\neq 0$ জন্য

$g(x+h)=\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]h+g(x)$ হবে।

$\therefore$ $g'(x) \cdot 0 + g(x) = g(x)$ হবে, যত $h \to 0$ হবে। অর্থাৎ এভাবে (3) এর নিউটনীয় ভাগফল F, যত $h \to 0$ তত $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ এ সীমায়িত হবে।

উদাহরণ: 3.5.1: যদি $h(x) = (x^3-x) \cdot (5x^4+x^2)$ হয় তাহলে $h'(x)$ কত হবে?

সমাধান : $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ যেখানে $f(x) = x^3-x$ এবং $g(x) = 5x^4+x^2$ এখানে $f'(x) = 3x^2-1$ এবং $g'(x) = 20x^3+2x$, অতএব

$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$= (3x^2-1) \cdot (5x^4+x^2) + (x^3-x) \cdot (20x^3+2x)$

অর্থাৎ $h'(x) = 35x^6 - 20x^4 -3x^2$

ভাগফল: ধরা যাক f ও g হোলো x বিন্দুতে অবকলনযোগ্য দুটি অপেক্ষদ্ধক, এবং $f(x)=f(x)|g(x)$

ধরা যাক $g(x) \neq 0$ যাতে F, x বিন্দুতে সংজ্ঞত হয়। F কে f ও g-র ভাগফল বলা হয় এবং একে লেখা হয় $F=fg$ |$F'(x)$ এর সূত্র নির্ণয় করার জন্য ধরা যাক F(x), অবকলনযোগ্য এবং $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ এবং $f(x) = F(x) \cdot g(x)$। সুতরাং গুণের নিয়মানুসারে $f'(x) = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x)$

$$\therefore F'(x)=\frac{f'(x)-F(x)\cdot g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)-\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\cdot g'(x)}{g(x)}$$

লব ও হরকে g(x) দিয়ে গুণ করে পাই :

$$F(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

অর্থাৎ যদি f ও g, x বিন্দুতে অবকলনযোগ্য হয় এবং $g(x) \neq 0$ হয় তাহলে $F=\frac{f}{g}$, x বিন্দুতে অবকলনযোগ্য

এবং $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \to F'(x)=\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

উদাহরণ : 4.5.2 : $F(x)=\frac{3x-5}{x-2}$ হলে F(x) ও F(b) এর মান কত হবে?

সমাধান : f(x) = 3x–5, g(x) = x–2, ∴ f′(x) = 3, g′(x) =1

সুতরাং $x\neq 2$ এর জন্য

$$F'(x)=\frac{3(x-2)-(3x-5)\times 1}{(x-2)^2}=\frac{3x-6-3x+5}{(x-2)^2}$$

x = 6 বসলে $F'(6)=\frac{1}{(6-2)^2}=-\frac{1}{16}$

3.8 দ্বিতীয় ও উচ্চতর মাত্রার অন্তরকলজ ও তার প্রয়োগ

ধরা যাক, $D\subset R$ এবং একটি অপেক্ষক $f: D\rightarrow R$, গুণ্থ D এর একটি উপগুচ্ছ D এর ওপর অবকলনযোগ্য অর্থাৎ f′(x) এর অস্তিত্ব থাকবে যখন $x\in D$। এই অপেক্ষক f′ কে $x\in D$ এর জন্য y=f(x) এর প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ (first order derivative) বলা হয়।

একইভাবে কোনও বিন্দু $x\in D$, এর জন্য অপেক্ষক f′ অবকলনযোগ্য হয় তবে $\frac{d}{d^x}\left[f'(x)\right]$ হবে f′ এর () হবে f′ এর প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ এবং এটিকে x বিন্দুতে y=f(x) এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ (second order derivative) বলা হয়। $x\in D$, এর জন্য y=f(x) এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ f″(x) বা $\frac{d^2y}{dx^2}$ বা $\frac{d}{d^x}\left[f'(x)\right]$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। x বিন্দুতে y=f(x) এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের অস্তিত্ব হবে যদি $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ এবং $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ এই উভয় সীমাস্থ মানের সসীম অস্তিত্ব থাকে ও তারা সমান হয়।

অতএব $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$,

যদি সীমাস্থ মানের অস্তিত্ব থাকে।

উদাহরণ 4.6.1: y = x(x+1) (x+2) হলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ কত হবে?

সমাধান : যেহেতু y = x(x+1) (x+2)

$$\frac{dy}{dx}=(x+1)(x+2)\frac{d}{dx}(x)+x(x+2)\frac{d}{dx}(x+1)+x(x+1)\frac{d}{dx}(x+2)$$

= (x+1)(x+2) + x(x+2) +x(x+1)

তাহলে, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$$=\frac{d}{dx}\{(x+1)(x+2)\}+\frac{d}{dx}\{x(x+2)\}+\frac{d}{dx}\{x(x+1)\}$$

$$=(x+2)\frac{d}{dx}(x+1)+(x+1)\frac{d}{dx}(x+2)+(x+2)\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}(x+2)+(x+1)\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}(x+1)$$

= (x+2) + (x+1) + (x + 2) + x+(x+1) + x

= 6x+6 = 6(x+1)

উদাহরণ 4.6.2: (x+4)y = x হলে (x+1) এ $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত (x+4) y = x

$$\therefore y=\frac{x}{x+4}\quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(x+4)\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(x+4)}{(x+4)^2}$$

$$=\frac{x+4-x}{(x+4)^2}=\frac{4}{(x+4)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{4}{(x+4)^2}\right]=4\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(x+4)^2}\right]$$

$$=4\times(-2)\cdot\frac{1}{(x+4)^3}=-\frac{8}{(x+4)^3}$$

যখন $x=1,\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{8}{(1+4)^3}=-\frac{8}{5^3}=-\frac{8}{125}$

উদাহরণ 4.6.2 : যদি $y=AK^{\alpha}$, K-র একটি অপেক্ষক হয় (K>0), যেখানে A ও α হলো ধ্রুবক, সেখানে y'' কত হবে?

$y = AK^{\alpha} \rightarrow y'=A\,\alpha\,K^{\alpha-1}$

$y'' = A\,\alpha\,(\alpha-1)K^{\alpha-2}$

উচ্চতর অবকলন (Higher Order Differentiation)

$y'' = f''(x)$ এর অবকলনকে বলা হয় তৃতীয় ক্রমের অবকলন এবং লেখা হয় $y''' = f'''(x)$ এই অনুসারে। এভাবে চতুর্থ ক্রমের অবকলনকে লেখা হবে $y^{(4)} = f^{(4)}x$, এবং n ক্রমের অবকলনকে লেখা হবে $y^{(n)} = f^{(n)}x$।

উদাহরণ 4.6.4 : $f(x) = 3x^{-1}+6x^{3}-x^{2}$ $(x \neq 0)$ এর চতুর্থ ক্রম পর্যন্ত সবকটি অবকলন নির্ণয় করো।

সমাধান : $f'(x) = -3x^{-2}+18x^{2}-2x$

$f''(x) = 6x^{-3} + 36x - 2$

$f'''(x) = -18x^{-4} + 36$

$f^{(4)}(x) = 72x^{-5}$

উদাহরণ **4.6.5 :** $f(x) = 3x^{11/3}$ কে চতুর্থ ক্রম পর্যন্ত অবকলন করো।

সমাধান : $f'(x) = 11x^{8/3}$

$$f''(x) = \frac{88}{3}x^{5/3}$$

$$f'''(x) = \frac{440}{9}x^{2/3}$$

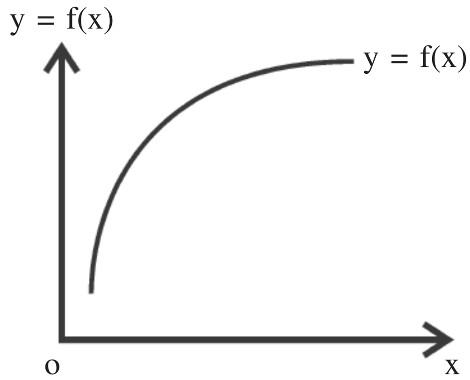
$$f^{(4)}(x) = \frac{880}{27}x^{-\frac{1}{3}}$$

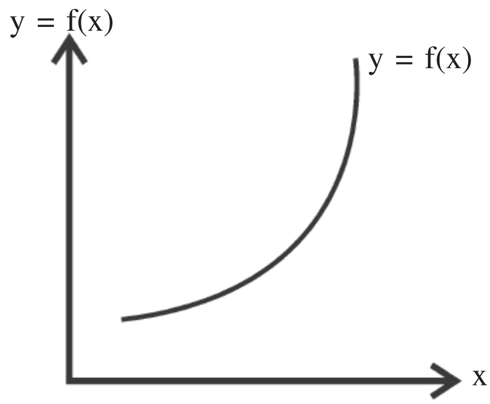
কিন্তু লক্ষণীয় যে $f'(0) = f''(0)= f'''(0)$, কিন্তু $f^{(4)}(0)$-র অস্তিত্ব নেই। সুতরাং f সর্বত্র তৃতীয় ক্রম পর্যন্ত অবকলনযোগ্য কিন্তু '0' তে এর চতর্থ ক্রমের অবকলনের অস্তিত্ব নেই।

প্রয়োগ : প্রথম ক্রমের অবকলন অপেক্ষকের ঢাল এবং তার মান নির্দেশ করে সেই ঢালের চলন। যেমন যদি $f'(0) > 0$ হয় তবে অপেক্ষকটি ক্রমাগত বাড়তে থাকবে (monotonically increasing) এবং $f'(x) < 0$ যদি সকল x এর জন্য হয় তবে অপেক্ষকটি ক্রমাগত কমতে থাকবে (monotonically decreasing)

এখন গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন হোলো, x এর পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে f(x) এর পরিবর্তনের প্রকৃতি নির্ধারণ করা। অর্থাৎ যদি f(x) উর্দ্ধমুখী হয় তাহলে তা কি বাড়ছে ক্রমবর্ধমান হারে (increasing at an incresing rate) না কি বাড়ছে ক্রমহ্রাসমান হারে (increasing at a decreasing rate) এই ক্ষেত্রে দ্বিতীয় ক্রমের অবকলনের গুরুত্ব অনেক।

কোনো রেখার বক্রতা (curvature) মাপা হয় তার ঢাল বা $f'(x)$ এর পরিবর্তনের হারের মাধ্যমে। যদি এই ঢালের পরিবর্তনের হার ধনাত্মক হয় বা $f''(x) > 0$ তখন বলা হয় বক্ররেখাটি উত্তল (convex)। এই উত্তল রেখার ক্ষেত্রে f(x) কমে বা বাড়ে ক্রমবর্ধমান হারে। আবার যদি $f''(x) < 0$ হয় তখন বক্ররেখাটি কমে বা বাড়ে ক্রমহ্রাসমান হারে। এই ধরনের বক্ররেখাকে বলে অবতল রেখা। যদি বক্ররেখাটি কমে বা বাড়ে ধ্রুবক হারে তখন $f''(x) = 0$ হয় ও বক্ররেখাটি সরলরেখা হয়। নিম্নলিখিত চিত্রে উত্তল ও অবতল রেখা দেখানো হলো।





একটি ছকে y = f(x) অপেক্ষকটি $f'(x)$ ও $f''(x)$ এর মানের উপর নির্ভর করে প্রকৃতি নির্ধারণ পরিবেশিত হলো।

যদি (If)	x=a থেকে বক্ররেখাটি বাড়ে (As x increases through a, the curve at x=a	বক্ররেখার স্পর্শক (the tangent to the curve)
$f'(a) > 0$ $f''(a) > 0$	উর্ধ্বমুখী এবং বাড়ে উত্তল	রেখাটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে ঘোরে (turns anti-clockwise)
$f'(a) > 0$ $f''(a) = 0$	উর্ধ্বমুখী বর্ধমান সরল রেখা	রেখাটি ঘোরে না

$$\left.\begin{array}{l} f'(a) > 0 \\ f''(a) < 0 \end{array}\right\}$$ উর্ধ্বমুখী বর্ধমান অবতল } ঘড়ির কাঁটার অভিমুখে ঘোরে

$$\left.\begin{array}{l} f'(a) < 0 \\ f''(a) > 0 \end{array}\right\}$$ নিম্নাভিমুখী উত্তল } ঘড়ির কাঁটার বিপরীত মুখী

$$\left.\begin{array}{l} f'(a) < 0 \\ f''(a) = 0 \end{array}\right\}$$ নিম্নাভিমুখী সরলরেখা } রেখাটি ঘোরে না।

$$\left.\begin{array}{l} f'(a) > 0 \\ f''(a) < 0 \end{array}\right\}$$ নিম্নাভিমুখী অবতল } ঘড়ির কাঁটার অভিমুখে ঘোরে

উদাহরণ 4.7.1 : $y = 5x^2+6$ অপেক্ষকটির বক্রতা নির্ণয় করো।

সমাধান : $f'(x) = 10x$, $f''(x) = 10 > 0$

সুতরাং বক্ররেখাটি উত্তল হবে।

5.7.1 কোনো একটি চাহিদা অপেক্ষক হোলো $p = aq^6(a,\ b > 0)$ এর প্রান্তিক আয়ের গঠন কেমন হবে?

$R = pq = aq^{b+1}$ অতএব $MR = \dfrac{dR}{dq} = a(b+1)x^6 > 0$ যখন $q > 0$

যেহেতু $MR > 0$ সুতরাং MR রেখা উর্ধ্বমুখী।

এখন $\dfrac{d^2R}{dq^2} = ab\,(b+1)\,q^{b-1} > 0\ (\because a, b, q > 0)$

সুতরাং MR রেখা উত্তল।

3.9 সারাংশ

এই এককে দেখানো হলো ঢাল কাকে বলে এবং তার গুরুত্বই বা কি। কোনো অপেক্ষকের একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল পরিমাপন এবং একে কিভাবে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় তার গাণিতিক ও জ্যামিতিক

ব্যাখ্যা দেওয়া হয়েছে। অন্তর কলজ এবং তার নীতির অনুসরণে বিভিন্ন অপেক্ষকের অন্তরজ নির্ণয় পদ্ধতিও আলোচিত হয়েছে। এই ক্ষেত্রে অবকলনকে কাজে লাগিয়ে কিভাবে অর্থনীতির চলরাশির মধ্যে সম্পর্ক নির্ধারণ করা যায় তাও পরিবেশিত হয়েছে। পরিশেষে, উচ্চতর অবকলনের মাধ্যমে কোনো অপেক্ষকের নতির পরিবর্তন বা তার বক্রতার প্রকৃতি ও পরিবর্তন বা তার বক্রতার প্রকৃতি ও পরিবর্তন সম্পর্কে ধারণা দেবে তা ব্যাখ্যা করা হয়েছে চিত্রের মাধ্যমে।

3.10 অনুশীলনী

1. অন্তরকলজের সাহায্যে দেখাও যে ধ্রুবকের অন্তরকলজ শূন্য।

2. অন্তরকলজের প্রথম নীতির সাহায্যে $(3x^3+4)$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

3. যদি $f(x) = 2+5x$ যখন $-\frac{2}{5} < x \leq 0$

$= 2 - 5x$ যখন $0 < x < \frac{2}{5}$ হয়

তাহলে অন্তরকলজের প্রথম নীতির মাধ্যমে বিচার করো যে $x = 0$ বিন্দুতে $f'(x)$ এর অস্তিত্ব থাকবে কিনা।

4. $y = (4x^2-3)\ (2x^5)$ এর অন্তরকলজ গুণের নিয়মে নির্ণয় করুন।

5. কোনো ফার্মের মোট বিক্রয়লব্ধ অপেক্ষক হোলো : $R=100Q - Q^2$ এক্ষেত্রে তার প্রান্তিক আয় নির্ণয় করো ও উৎপাদন বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে প্রান্তিক আয়ের পরিবর্তন দেখান।

3.11 গ্রন্থপঞ্জি

1. Allen, R.G.D. (1938) : Mathematical Analysis for Economists, MacMillan

2. Hoy, M.J., Lwirnois, C. McKenna, R. Rees, and T. Stenjos (2011) : Mathematics for Economics, Third Edition, The MIT Press.

3. Mehta, B.C. and G.M.K. Madnani (1997) : Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons

4. Bhukta, Anindya and Seikh Salim (2013): Mathematics for Undergraduate Economics, Progressive Publishers.

5. Zameeruddin, Qazi and V.K. Khanna (1983) : Mathematics in Commerce and Economics, Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

6. Sarkhel, J. and A. Bhukta (2000) : An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Ltd.

7. Chiang, Alpha C. (1967) : Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw-Hill Book Company.

8. Henry, S.G.B. (1969) : Elementary Mathematical Economics, Routledge and Kegan Paul.

9. Takayama, A. (1974): Mathematical Economics, Dryden Preess.

10. Yamane, T. (1968) : Mathematics for Economists, Prentice Hall.

একক 4 ◻ এক চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষকের কাম্যকরণ

গঠন

4.1 উদ্দেশ্য

4.2 প্রস্তাবনা

4.3 কিছু মৌলিক সংজ্ঞা

4.4 চূড়ান্ত বা প্রান্তবিন্দু নির্ধারণের রথম পর্যায়ের অবকলন

4.5 সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ধারণ

4.6 স্থানীয় সর্বোচ্চ এবং স্থানীয় সর্বনিম্ন মানসমূহ

4.7 উত্তল ও অবতল অপেক্ষক এবং বাঁক বদলের বিন্দু

4.7.1 উত্তল এবং অবতল অপেক্ষকের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

4.8 সর্বাধিক ও সর্বনিম্নকরণের জন্য প্রয়োজনীয় শর্তাবলি

4.9 সারাংশ

4.10 অনুশীলনী

4.11 গ্রন্থপঞ্জি

4.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- কোনো অপেক্ষকের চূড়ান্ত বিন্দু নির্ধারণে অবকলনের ভূমিকা
- কোনো অপেক্ষকের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ধারণের পদ্ধতি
- স্থানীয় সর্বোচ্চ ও স্থানীয় সর্বনিম্নর ধারণা
- উত্তল ও অবতল অপেক্ষক এবং বাঁক বদলের বিন্দু।

4.2 প্রস্তাবনা

গণিত এবং অর্থনীতির ক্ষেত্রে চলরাশি কোন বিন্দুতে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান গ্রহণ করবে তা নির্ধারণ করা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। গণিতের বিভিন্ন পদ্ধতির অনুসরণে, অর্থনৈতিক চলরাশিগুলির তার অপেক্ষকের ধরণ ও প্রকৃতির সাপেক্ষে চরমাবস্থা নির্ধারণ করার থেকে বিভিন্ন অর্থনৈতিক ও গাণিতিক মডেলেরও সৃষ্টি করা হয়েছে। যেমন বিভিন্ন উৎপাদনের

সাহায্যে বা তাদের কোন সমস্বরে কোনো নির্দিষ্ট উৎপাদন প্রস্তুত করলে, মুনাফা সর্বোচ্চ হবে বা দুটি দ্রব্য কি সমস্বরে ক্রয় করলে কোনো ভোক্তার মান তৃপ্তি সর্বোচ্চ হবে। অর্থাৎ চলরাশিগুলির এই চরম মানে পৌঁছনোর শর্ত নিয়ে এই এককে আলোচনা করা হয়েছে।

এই অধ্যায়ে চরম মান বলতে কি বোঝায় তার সম্পর্কে গাণিতিক এবং চিত্রসহ বর্ণনা করা হয়েছে এই চরম বিন্দুতে অর্থাৎ কোনো রাশির সংকট মানে, তার অপেক্ষকটির চরমাবস্থা (Extreme Point) সর্বোচ্চ না সর্বনিম্ন তা কী করে বোঝা যাবে তার জন্য আবশ্যিক এবং যথেষ্ট শর্ত ব্যাখ্যা করা হয়েছে। এই চরম বিন্দুটি স্থানীয় না সার্বিক (Local and Global Extreme Point) গরিষ্ঠ মান এবং সেটা কীভাবে নির্ধারণ করা যাবে তা দেখানো হয়েছে।

4.3 কিছু মৌলিক সংজ্ঞা

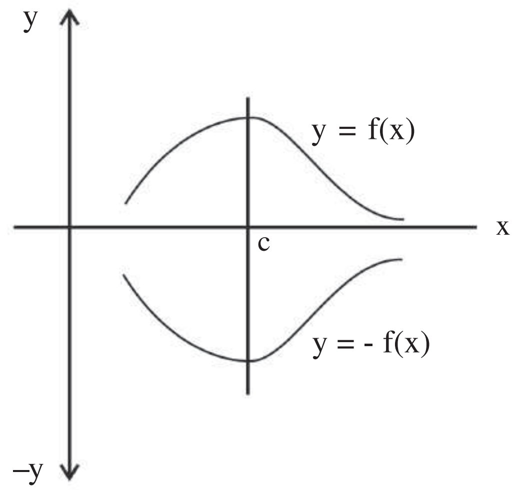
যদি $f(x)$ এর পরিসর D হয় তাহলে

$C \in D$ সর্বোচ্চ বিন্দু হবে f এর জন্য $\Leftrightarrow f(x) \leq f(c)$, সকল $x \in D$ এর জন্য ...(1)

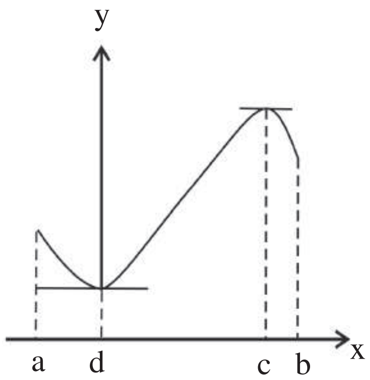
$d \in D$ সর্বনিম্ন বিন্দু হবে f এর জন্য $\Leftrightarrow f(x) \geq f(d)$, সকল $x \in D$ এর জন্য ...(2)

(1) এ $f(c)$ হলো সর্বোচ্চ মান ও (2) এ $f(d)$ হলো সর্বনিম্ন মান। যদি c বিন্দুতে f এর মান, D এর অপর বিন্দুগুলি অপেক্ষা বড় হয় (strictly larger), তাহলে c কে বলা হবে কঠোর সর্বোচ্চ বিন্দু (strict maximum point)। অনুরূপভাবে d হবে কঠোর সর্বনিম্ন বিন্দু (strict minimum point) যদি $f(x)>f(d)$ হয়. সকল $x \in D$, $x \neq d$ এর জন্য। এগুলিকে একক করে বলা হয় চরম বিন্দু বা পরম বিন্দু বা চরম মান (optional points and values or extreme points and values)।

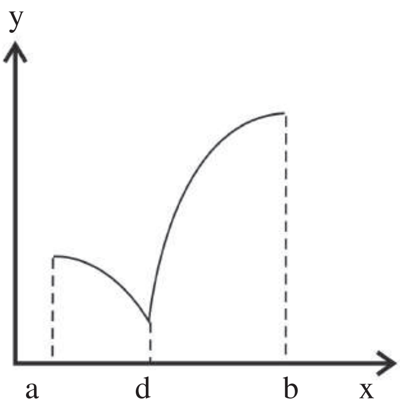
যদি D পরিসরে f কোনো অপেক্ষক হয় তাহলে D পরিসরে $-f$ কে সংজ্ঞত করা যাবে এভাবে যে $(-f)(x) = -f(x)$। লক্ষণীয় যে $f(x) \leq f(c)$ হবে সকল $x \in D$ এর জন্য, যদি এবং কেবলমাত্র $-f(x) \geq f(c)$ হয় সকল $x \in D$ এর জন্য। অর্তাৎ c, D পরিসরে f অপেক্ষককে সর্বোচ্চ করে যদি এবং কেবলমাত্র c, D পরিসরে $-f$ কে সর্বনিম্ন করে। চিত্র 4.1 এ এই তথ্যের পরিবেশনা করা হলো—



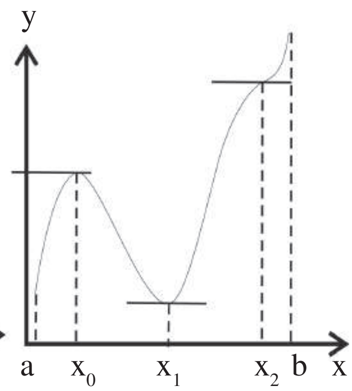
f অপেক্ষকের নিশ্চল বিন্দু (stationary point) x_0 হবে যদি $f'(x_0) = 0$ হয়। জ্যামিতিক ভাবে, কোনো অপেক্ষকের লেখচিত্রর স্পর্শক x অক্ষের যখন সমান্তরাল হয় তখন সেই বিন্দুই হয় নিশ্চল বিন্দু।



চিত্র : 2



চিত্র : 3



চিত্র : 4

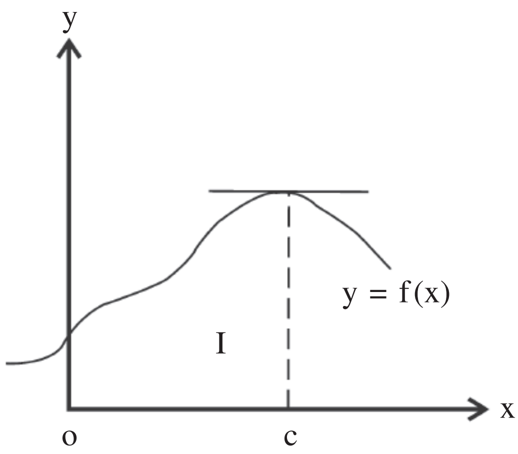
চিত্র 2-এ লেখচিত্রটির দুটি নিশ্চল বিন্দু, c ও d যেখানে c বিন্দুটি সর্বোচ্চ ও d বিন্দুটি সর্বনিম্ন বিন্দু নির্দেশ করে।

চিত্র 3-এর লেখচিত্রটির কোনো নিশ্চল বিন্দু নেই। কিন্তু লেখচিত্রটির প্রান্তভাগ b তে সর্বোচ্চ বিন্দু ও d তে সর্বনিম্ন বিন্দু হবে। d বিন্দুতে অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য নয় আবার b বিন্দুতে অবকলন 0 নয়।

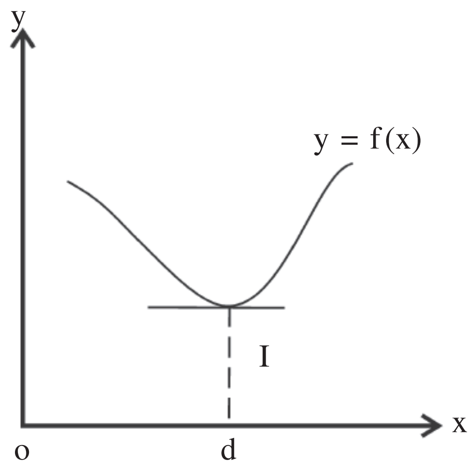
চিত্র 3-এ অপেক্ষকটির x_0, x_1, x_2 তিনিটি নিশ্চল বিন্দু দেখা যায়। অপেক্ষকটি গোড়ার দিকের প্রান্তভাগ 'a' তে সর্বনিম্ন বিন্দু, কিন্তু অপেক্ষকটির সর্বোচ্চ বিন্দু পাওয়া যায় না কারণ যত x b এর দিকে সীমায়িত হবে তত অপেক্ষকের মান '$\propto$'-র দিকে যাবে। কিন্তু যেহেতু x_0 বিন্দুতে অপেক্ষকটি তার নিকটবর্তী, প্রতিরোধ বিন্দুগুলি অপেক্ষা সর্বোচ্চ বিন্দু হতে দেখা যাচ্ছে তাই একে বলা হয় লক্ষণীয় সর্বোচ্চ বিন্দু। সেইভাবে x_1 এ অপেক্ষকটি স্থানীয় সর্বনিম্ন মান হবে। কিন্তু x_2 আবার এমন একটি নিশ্চল বিন্দু যা স্থানীয় সর্বোচ্চ বা স্থানীয় সর্বনিম্ন কোনোটাই নয়। এই x_2 কে বলা হয় বাঁক বদলের বিন্দু (inflection point)।

4.4 চূড়ান্ত বা প্রান্তবিন্দু নির্ধারণের প্রথম পর্যায়ের অবকলন

প্রথম পর্যায়ের অবকলনের চিহ্নর উপর ভিত্তি করে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা যায়। ধরা যাক I অন্তরালে f(x) অবকলনযোগ্য এবং f(x) এর কেবলমাত্র একটি নিশ্চল বিন্দু আছে x=c তে। যদি সকল $x \in I$ এর জন্য $f'(x) \geq 0$ হয়, যাতে $x \leq c$ হয়, এবং $f'(x) \leq 0$ হয় সকল $x \in I$ এর জন্য এমনভাবে যাতে $x \geq c$ হয় তাহলে f(x), c এর বাঁ পাশে বাড়তে থাকবে ও c এর ডানপাশে কমতে থাকবে।



চিত্র : 5

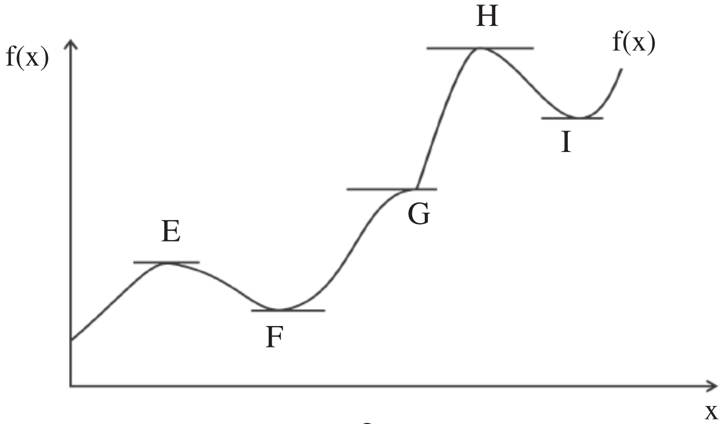


চিত্র : 6

অর্থাৎ $f(x) \leq f(c)$ হবে সকল $x \leq c$ এর জন্য ও $f(c) \geq f(x)$ হবে সকল $x \geq c$ এর জন্য। অর্থাৎ $x=c$ হলে I অন্তরালে f এর সর্বোচ্চ বিন্দু। এটি চিত্র 5 এ দেখানো হলো। একইভাবে d বিন্দুতে f এর সর্বনিম্ন মান প্রদর্শিত হলো চিত্র 6 এ।

4.5 সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ধারণ

পূর্বোক্ত আলোচনায় এটা স্পষ্ট হয়েছে যে, এমন বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকের স্থানীয় সর্বোচ্চ (স্থানীয় সর্বনিম্ন) মান নির্ধারিত হয় যেখানে ওই বিন্দুর একদম নিকটস্থ সকল মানের তুলনায় $f(x)$ এর মান বেশি (কম) হয়। অপেক্ষকের স্থানীয় চরম মান (local extreme values) বলতে বোঝায় এই স্থানীয় সর্বোচ্চ ও স্থানীয় সর্বনিম্ন মানসমূহকে এক সাথে বলা। এই বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে অনুমান করা হয় যে, এই অপেক্ষক ও তার অন্তরকলজ সকল বিন্দুতে সসীম (finite) এবং সন্তত (continuous) থাকে। ফলে এর সঙ্গে সম্পর্কিত রেখাটিও মসৃণ (smooth) আকার নেয়, অর্থাৎ এই রেখায় কোনো তীক্ষ্ণধার বিন্দু থাকে না এবং রেখায় কোনো বিচ্ছিন্নতা থাকে না।



চিত্র : 7

এখানে একটি বিষয় স্মরণে রাখা আবশ্যক যে, কোনো অপেক্ষকের স্থানীয় সর্বোচ্চ মানটিই যে অপেক্ষকের সর্বাপেক্ষা বৃহৎ (greatest) মান হবে তার কোনো নিশ্চয়তা নেই। অর্থাৎ স্থানীয়ভাবে নিকটস্থ অন্যান্য মান এর তুলনায় অপেক্ষকের একটি মান সর্বোচ্চ হতে পারে কিন্তু দূরবর্তী কোনো বিন্দুতে এই মান আরও বেশি হতে পারে (চিত্র 7)। চিত্র 7 এ দেখা যাচ্ছে যে, E বিন্দুটি অপেক্ষকের একটি স্থানীয় গরিষ্ঠ মান নির্দেশ করলেও H বিন্দুটি অপেক্ষকের অপর একটি স্থানীয় গরিষ্ঠ মান নির্দেশ করে।

অনুরূপভাবে, কোনো অপেক্ষকের স্থানীয় লঘিষ্ঠ মান যে অপেক্ষকটির সর্বনিম্ন মান নির্দেশ করবেই তার অর্থ নেই। এটি কেবল ওই বিন্দুর নিকটবর্তী অন্যান্য বিন্দুতে অপেক্ষকের মানের তুলনায় স্বল্প মানকেই নির্দেশ করে। যেমন চিত্র 7 এ F ও J উভয় বিন্দুতেই অপেক্ষকটির স্থানীয় লঘিষ্ঠ মান নির্দেশ করা হয়েছে। এখানে G বিন্দুটি অপেক্ষকটির বাঁদিক বদলের বিন্দু।

সুতরাং একটি অপেক্ষক $F : D \rightarrow R$ এর মান সার্বিক গরিষ্ঠ বা Global maximum (সার্বিক লঘিষ্ঠ Global Minimum) হয় একটি বিন্দুতে $c \in D$, যদি D এর মধ্যে সকল x এর জন্য $f(x) \leq f(c)$ $[f(x) \geq f(c)]$ হয়।

4.6 স্থানীয় সর্বোচ্চ এবং স্থানীয় সর্বনিম্ন মানসমূহ

পূর্ববর্তী আলোচনার ভিত্তিতে স্থানীয় সর্বোচ্চ এবং স্থানীয় সর্বনিম্ন মানসমূহের নির্দেশ করতে পারি।

(a) একটি মানযুক্ত অপেক্ষকের সকল সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানই নিশ্চল মান। যদি $f'(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে তবে এই মান পাওয়া যায় যখন $f'(x) = 0$ হয়।

(b) (i) যখন x এর মান ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকে এবং x=a হলে $f'(a) = 0$ হয় এবং $f'(x)$ এর মান ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক হয়ে পড়ে, তখন f(x) অপেক্ষকের f(a) মানকে সর্বোচ্চ মান বলা হয়।

(ii) যখন x এর মান ক্রমশঃ বৃদ্ধি পেতে থাকে এবং x=a হলে $f'(a) = 0$ হয় এবং $f'(x)$ এর মান ঞণাত্মক থেকে ধনাত্মক হয়ে পড়ে, তখন f(x) অপেক্ষকের f(a) মানকে সর্বনিম্ন মান বলা হয়।

(iii) উপরিউক্ত অবস্থার প্রেক্ষিতে যখন $f'(x)$ এর চিহ্ন কোনো পরিবর্তন না হয় তখন f(a) মানকে সর্বোচ্চ আমরা সর্বনিম্ন মান বলা যায় না। তখন x=a বিন্দুতে f(x) অপেক্ষকের আরূঢ় বিন্দু (saddle point) নির্ধারিত হয়।

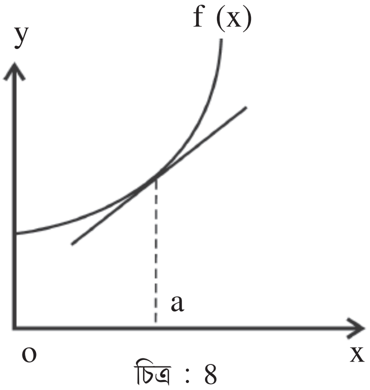
এখানে দুটি শর্ত উল্লেখ করা যায় :

উপরে উল্লিখিত (a) নির্ণায়কটি কোনো চরম মান (extreme value) নির্ধারণের প্রয়োজনীয় শর্ত (necessary condition) নির্দেশ করে। অন্যদিকে (b) নির্ণায়কটি যথেষ্ট শর্ত (sufficient condition) নির্দেশ করে যার সাহায্যে স্থানীয় গরিষ্ঠ, (স্থানীয়) লঘিষ্ঠ এবং অন্যান্য নিশ্চল মানের মধ্যে পার্থক্য করতে পারি।

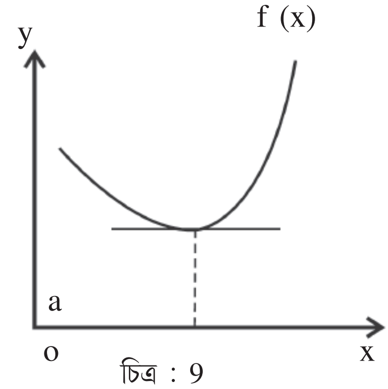
দ্বিতীয় অন্তরকলজের প্রয়োগ : (Application of Second Order Derivative) :

$f'(x)$ এর বৃদ্ধি বা হ্রাসের মাত্রা দ্বিতীয় অন্তরকলজের বা $f''(x)$ এর সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

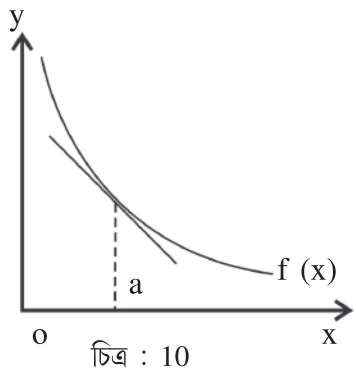
এখানে $f''(x) = \frac{d[f'(x)]}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2y}{dx^2}$ এটি y = f(x) রেখার কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতির বৃদ্ধি বা হ্রাসের মাত্রা নির্দেশ করে।



চিত্র : 8



চিত্র : 9

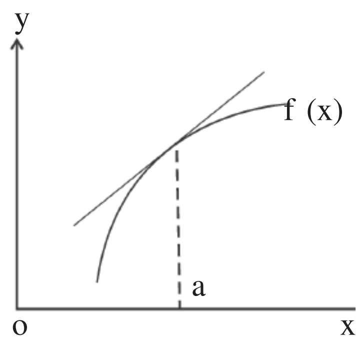


চিত্র : 10

যদি $x=a$ এবং $f''(a) > 0$ হয়, তবে তার অর্থ হোলো x এর মান a-র মধ্য দিয়ে যখন ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকে যেমন f(x) এর ক্রমবর্ধমান হারে পরিবর্তন ঘটে, এবং যখন $y=f(x)$ রেখার ওপর a ভুজ সম্পন্ন বিন্দুর মধ্য দিয়ে অগ্রসর হওয়া যায় তখন ওই রেখার বিভিন্ন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি ক্রমশ বৃদ্ধি পায়।

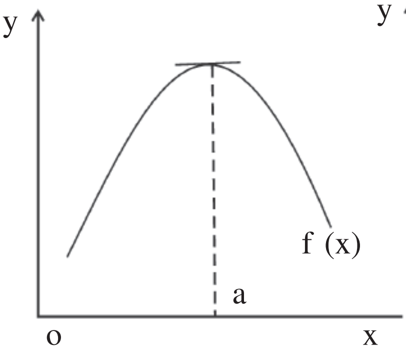
অনুরূপভাবে, যদি $x = a$ এবং $f''(a) < 0$ হয়, তবে তার অর্থ হোলো x এর মান a-র মধ্য দিয়ে যখন ক্রমশ বৃদ্ধি পায়, তখন f(x) এর ক্রমহ্রাসমান হারে পরিবর্তন ঘটে। অর্থাৎ $f''(a)$ এর গাণিতিক মান নির্দেশ করে কত দ্রুত f(x) এর মান $x = a$ এর অবস্থায় পরিবর্তিত হয়। এটি $x = a$ অবস্থায় $y=f(x)$ রেখার বক্রতার অবস্থাও নির্দেশ করে।

এখন $f''(a) > 0$ হওয়ার অর্থ হোলো x এর মান যখন a-র মধ্য দিয়ে বৃদ্ধি পেতে থাকে তখন f(x) অপেক্ষকের মান ক্রমবর্ধমান হারে পরিবর্তিত হয় এবং $y=f(x)$ রেখাটি $x=a$ তে নীচের দিক থেকে উত্তল (Convex from below) হয় (চিত্র 8—চিত্র 10)



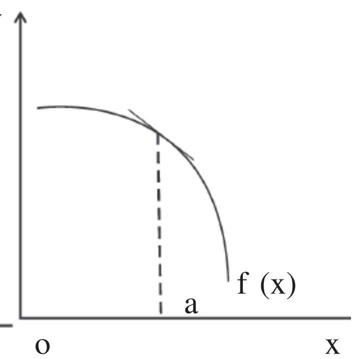
$f'(a) > 0, \; f''(a) < 0$

চিত্র : 11



$f'(a) = 0, \; f''(a) < 0$

চিত্র : 12



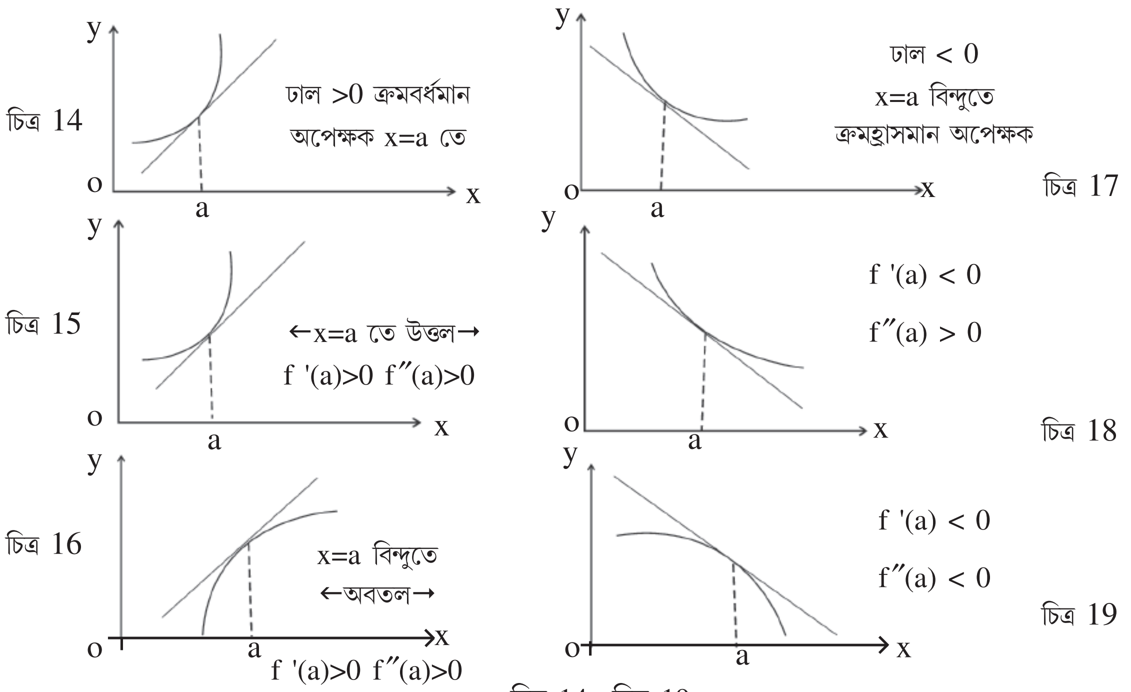
$f'(a) > 0, \; f''(a) < 0$

চিত্র : 13

আবার যদি $f(a)<0$ হয়, তবে তার অর্থ হোলো x এর মান যখন a-র মধ্য দিয়ে ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকে তখন $f''(x)$ অপেক্ষকের মান ক্রমহ্রাসমান গতিতে পরিবর্তিত হয়। এখানে $x=a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ রেখাটি নীচ থেকে অবতল হয় (চিত্র 11—চিত্র 13)

4.7 উত্তল ও অবতল অপেক্ষক এবং বাঁক বদলের বিন্দু

কোনো একটি অপেক্ষক f(x), x = a তে উত্তল হবে, যদি [a, f(a)] খুব নিকটবর্তী কোনো অঞ্চলে, অপেক্ষকটির লেখচিত্র সম্পূর্ণভাবে, লেখচিত্রটির স্পর্শকের নীচে অবস্থান করে। পূর্বে উল্লিখিত আছে যে x=a তে দ্বিতীয় অন্তরকলজ ধনাত্মক হলে, ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটি উত্তল হবে। আবার x=a বিন্দুতে যদি দ্বিতীয় অন্তরকলজ ঋণাত্মক হয় তখন a বিন্দুতে অপেক্ষকটি অবতল হবে। অর্থাৎ $f''(a) > 0$ হলে f(x); x=a বিন্দুতে উত্তল ও $f''(a)<0$ হলে f(x); x=a বিন্দুতে অবতল।



চিত্র 14—চিত্র 19

যদি $f''(a) > 0$ একটি নির্দিষ্ট পরিসরে সকল x এর জন্য তখন তা কঠোরভাবে উত্তল (strictly Concave) আবার যদি $f''(x) < 0$ হয় একটি নির্দিষ্ট পরিসরে সকল x এর জন্য তখন তা কঠোরভাবে অবতল হয় (strictly Concave) (চিত্র 14—চিত্র 19)

এতদূর আলোচনার সারমর্ম হলো এই যে—

যখন কোনো একটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষকের আপাত সর্বোচ্চ বা আপাত সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা হয় তখন দুটি বিষয় খেয়াল রাখা প্রয়োজন।

1. প্রথম পর্যায়ের অবকলনকে শূন্যর সঙ্গে সমান করে নিশ্চল মান নির্ণয় করা হয়। এই মান বা মানগুলিতে অপেক্ষকটি বাড়ে না এবং কমে না। এই x এর মানগুলি তখন সর্বোচ্চ না আপাত সর্বনিম্ন তা বিচারের জন্য দেখা হবে দ্বিতীয় পর্যায়ে।

2. নিশ্চল বিন্দুটিতে দ্বিতীয় অন্তরকলজের চিহ্নানুসারে তিনটি সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়। যদি নিশ্চল বা চরম বিন্দু a তে

i) $f''(a) < 0$; অপেক্ষকটি a তে অবতল এবং আপাত সর্বোচ্চ হয়

ii) $f''(a) > 0$; অপেক্ষকটি a তে উত্তল এবং আপাত সর্বনিম্ন

iii) $f''(a) = 0$; পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন (inconclusive)

এমন যদি অপেক্ষকটি কঠোরভাবে অবতল বা উত্তল হয়, তাহলে তার যথাক্রমে একটিমাত্র সর্বোচ্চ বিন্দু বা একটি মাত্র সর্বনিম্ন বিন্দু থাকবে যাকে যথাক্রমে সার্বিক গরিষ্ঠ বা সার্বিক লঘিষ্ঠ বলা হয়।

বাঁক বদলের বিন্দু : বাঁক বদলের বিন্দু (inflection point) বলতে সেই বিন্দুকে বোঝায় যেখানে অপেক্ষকটি তার স্পর্শককে ছেদ করে বা কর্তন করে এবং অপেক্ষকটি তার বক্রতা পরিবর্তন করে হয় উত্তল থেকে অবতল বা উল্টো রকম ভাবে। এক্ষেত্রে প্রথম অন্তরকলজের চিহ্নর গুরুত্ব থাকে না। 'a' যদি বাঁক বদলের বিন্দু হয় তাহলে তিনটি শর্ত আবর্শক :

1. $f''(a) = 0$ বা অসংজ্ঞাত

2. x=a তে বক্রতার পরিবর্তন

3. x=a তে লেখচিত্রটি স্পর্শককে অতিক্রম করে।

অর্থাৎ একটি দুইবার অবকলনযোগ্য অপেক্ষক f এর (a, b) সীমার মধ্যে 'c' একটি বাঁক বদলের বিন্দু হবে যদি নিম্নলিখিত দুই অবস্থার কোনো একটি সত্যি হয়।

a) $f''(x) \geq 0$ যদি $a < x < c$ ও $f''(x) \leq 0$ যদি $c < x < b$

অথবা

b) $f''(x) \leq 0$ যদি $a < x < c$ ও $f''(x) \geq 0$ যদি $c < x < b$

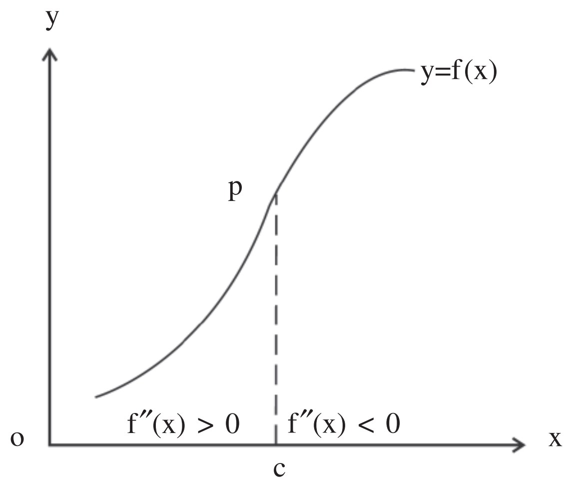
সুতরাং x=c তে বাঁক বদল হবে যদি c তে $f''(x)$ চিহ্ন পরিবর্তন করে। সেক্ষেত্রে লেখচিত্রটির বাঁকবদলের বিন্দু হবে (c, f(c)), (চিত্র 20)।

বাঁক বদলের বিন্দু নির্ণয়ের পরীক্ষা:

ধরা যাক f একটি অপেক্ষক যার I অন্তরালে বিচ্ছিন্ন দ্বিতীয় অন্তরকলজ আছে এবং I-এর ভিতর c একটি বিন্দু।

a) c একটি বাঁক বদলের বিন্দু হবে যদি $f''(c) = 0$ হয়

b) যদি $f''(c) = 0$ এবং f''; c তে তার চিহ্ন পরিবর্তন করে, তাহলে c হবে বাঁক বদলের বিন্দু।

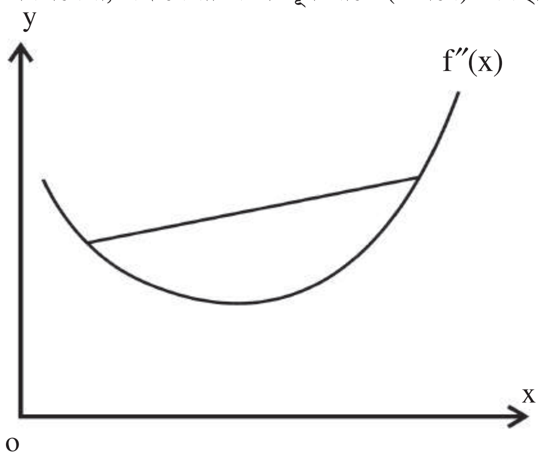


চিত্র 20 : P হোলো বাঁক বদল বিন্দু লেখচিত্রর উপর ও অপেক্ষকটির বাঁক বদল বিন্দু $x = c$

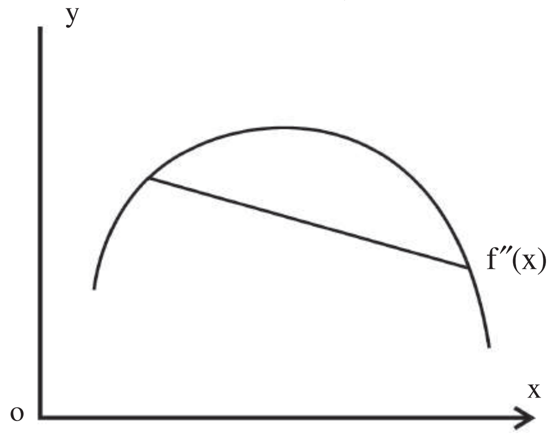
সুতরাং একটি আপাত (relative) চরমমানকে নিশ্চল মান হতেই হবে যেটি হয় সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন, অথবা বাঁক বদলের বিন্দু হবে। যদি $f''(a) = 0$ হয় অর্থাৎ পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন হয়, তাহলে তার সংলগ্ন সংকট বিন্দুতে (critical value) বা $f''(x) = 0$ তে x এর যে মান এসেছে তাতে যদি প্রথম উচ্চতর শূন্যব্যতীত অন্তরকলজ (first non-zero value of a higher order derivative) বিজোড় ক্রমের (odd order) হয় তখন অপেক্ষকটির বাঁক বদল বিন্দু থাকবে। কিন্তু যদি প্রথম উচ্চতর শূন্যব্যতীত অন্তরকলজ জোড় একবিশিষ্ট হয় তবে অপেক্ষকটি সেই অন্তরকলজের চিহ্নানুসারে আপাত চরম মান থাকবে।

4.7.1 উত্তল এবং অবতল অপেক্ষকের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

কোনো একটি অপেক্ষক অবতল (উত্তল) হয় যদি যার লেখচিত্রের উপর যে কোনো দুটি বিন্দু সংযোগকারি সরলরেখা, বক্ররেখাটির সম্পূর্ণ নীচে (উপরে) অবস্থান করে বা কখনও উপরে (নীচে) অবস্থান করে না।

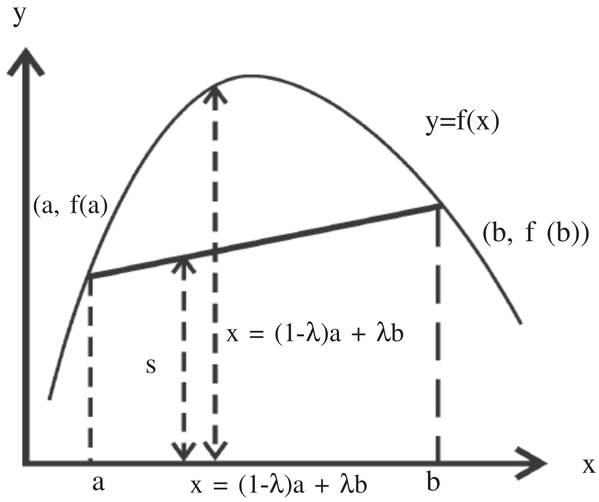


চিত্র 21 : f আপেক্ষিক উত্তল



চিত্র 22 : f আপেক্ষিক অবতল

উপরোক্ত সংজ্ঞা দুটি চিত্র 21-22 এ বর্ণিত করা হয়েছে ধরা যাক [a, b] অন্তরালে x একটি বিন্দু যেখানে a<b। একে লেখা যায়:



চিত্র 23

$x = (1-\lambda)a + \lambda b$

$= a+\lambda(b-a)$ (কিছু $\lambda \in [0, 1]$-র জন্য।

এখন যদি $b > a$, ও $0 \leq \lambda \leq$ হয় তাহলে $a \leq a + \lambda(b-a) \leq b$

আবার যদি $x \in [a, b]$ হয় এবং $\lambda = \dfrac{x-a}{b-a}$ তাহলে $0 \leq \lambda \leq 1$ ও

$$(1-\lambda)a + \lambda b = \left(1 - \frac{x-1}{b-a}\right)a + \frac{x-a}{b-a} \cdot b$$

$$= \frac{ba - a^2 - xa + a^2 + xb - ab}{b-a} = x$$

এক্ষেত্রে λ হোলো x থেকে a-র দূরত্ব আর a থেকে b এর দূরত্বের অনুপাত।

$$\therefore \lambda = \frac{x-a}{b-a}$$

চিত্র 23-এ s এর মান নির্ণয় করা দেখানো হল। (a, f(c)) ও (b, f(b)) -র সংযোগকারী সরলরেখার সমীকরণ হোলো:

$$y - f(c) = \frac{b(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

কারণ (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুর সংযোগকারী রেখার ঢাল $= a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ও সমীকরণ:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ধরা যাক $x = (1-\lambda)\ a + \lambda b$ তাহলে $y = s$

সুতরাং $s - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left[(1-\lambda)a + \lambda b - a\right]$

$$= \lambda[f(b) - f(a)]$$

অর্থাৎ $s = (1-\lambda)\ f(a)+\lambda f(b)$। এখন যদি λ; [0, 1] সীমার মধ্যে সব মানগুলি গ্রহণ করে, তাহলে $(1-\lambda)a + \lambda b$ ও [a, b] সীমার মধ্যে সবকটি মান গ্রহণ করবে। সুতরাং (a, f(a)) ও (b, f(b) সংযোগকারী সরলরেখা সর্বদা f এর লেখচিত্রর নীচে বা লেখচিত্ররই উপর অবস্থান করবে বললে বোঝাবে $s \le f((1-\lambda)a + \lambda b)$ সকল $\lambda \in [0, 1]$-র জন্য।

অর্থাৎ f যদি অবতল হয় I অন্তরালে যেখানে $a, b \in I$ ও $\lambda \in (0, 1)$ তবে $f((1-\lambda)\ a+\lambda b) \ge (1-\lambda)\ f(a) + \lambda f(b)$ বা সরলরেখাটির উচ্চতা, চাপের উচ্চতা অপেক্ষা কম হবে। যদি f অবতল হবে তাহলে –f উত্তল হবে। f উত্তল হবে I অন্তরালে সকল $a, b \in I$ এবং $\lambda \in (0, 1)$ যদি

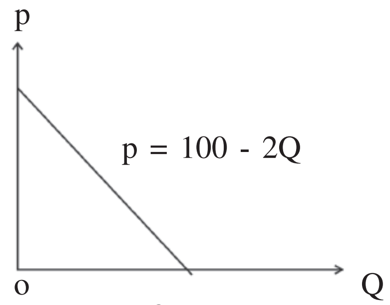
$f((1-\lambda)\ a+\lambda b) \le (1-\lambda)\ f(a) + \lambda f(b)$ অর্থাৎ সরলরেখার উচ্চতা, চাপের উচ্চতা অপেক্ষা বেশি হবে।

বিবিধ উদাহরণ (Miscellaneous Examples)

1. ধরা যাক একটি চাহিদা অপেক্ষক $P = 100 - 2Q$। এই অপেক্ষকটি কি ক্রমবর্দ্ধমান?

সমাধান: $P = 100 - 2Q$; $\frac{dP}{dQ} = -2 < 0$

চাহিদা অপেক্ষকটি ঋণাত্মক ঢালসম্পন্ন এবং $\frac{d^2P}{dQ^2} = 0$ সুতরাং এই অপেক্ষক একটি নির্দিষ্ট হারে হ্রাস পেয়েছে। (চিত্র 24)।



চিত্র 24

2. **চাহিদা অপেক্ষক :** $p = \left(\frac{a}{Q+b}\right) - c$ যেখানে a, b, c হোলো ধনাত্মক ধ্রুবক। চাহিদা রেখাটির বক্রতা (curvature) নির্ণয় করো

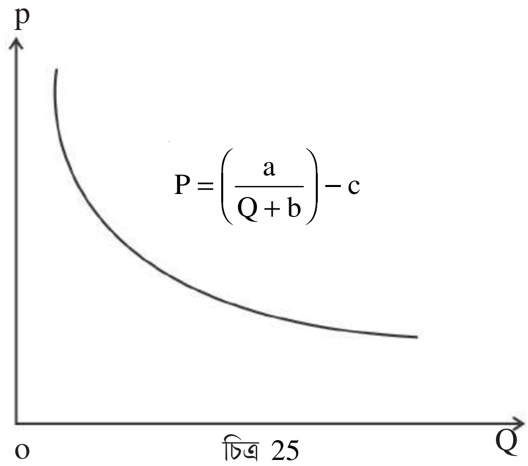
$$P = \left(\frac{a}{Q+b}\right) - c$$

$$\frac{dP}{dQ} = -\frac{a}{(a+b)^2} < 0$$

($\because a > 0$ এবং হর > 0)

অর্থাৎ অপেক্ষকটি ক্রমহ্রাসমান।

$$\frac{d^2P}{dQ^2} = \frac{2a}{(Q+b)^3} > 0 \quad (a, Q, b > 0)$$



চিত্র 25

সুতরাং অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান হারে হ্রাস পাচ্ছে। অর্থাৎ চাহিদারেখাটি মূলবিন্দুর দিকে উত্তল হবে। (চিত্র 25)।

3. ধরা যাক, ফার্মের মোট ব্যয় (TC) অপেক্ষক হোলো $TC = 300Q - 10Q^2 + \frac{1}{3}Q^3$ । কোন উৎপাদন স্তরে AC ও MC সর্বনিম্ন হয় তা নির্ণয় করো।

সমাধান

$$TC = 300Q - 10Q^2 + \frac{1}{3}Q^3$$

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{300Q - 10Q^2 + y_3Q^3}{Q} = 300 - 10Q + \frac{1}{3}Q^2$$

AC যেখানে সর্বনিম্ন হবে সেখানে $\frac{dAC}{dQ} = 0$ এবং $\frac{d^2AC}{dQ^2} > 0$ হবে

$\therefore \frac{dAC}{dQ} = -10 + \frac{3}{3}Q = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}Q = 10$

$\Rightarrow 2Q = 30 \quad \Rightarrow Q = 15$

আবার $\frac{d^2AC}{dQ^2} = \frac{2}{3} > 0$। অর্থাৎ Q যখন 15 তখন ফার্মের AC সর্বনিম্ন হবে।

AC-র সমীকরণে Q = 15 বসিয়ে সর্বনিম্ন AC -র মান পাওয়া যাবে।

সর্বনিম্ন $AC = 300 - 10Q + \frac{1}{3}Q^2 = 300 - 10 \times 15 + \frac{1}{3} \times 15 \times 15$

= 300 + 75 – 150 = 225

$MC = \frac{MTC}{dQ} = 300 - 20Q + Q^2$

MC যখন সর্বনিম্ন হবে তখন $\frac{dMC}{dQ} = 0$ এবং $\frac{d^2MC}{dQ^2} > 0$ হবে।

$\therefore \frac{dMC}{dQ} = -20 + 2Q = 0$

$\Rightarrow Q = 10$

$\frac{d^2MC}{dQ^2} = 2 > 0$ অর্থাৎ Q = 10 একক হলে MC সর্বনিম্ন হবে।

MC-র সমীকরণ Q = 10 বসালে সর্বনিম্ন MC-র মান পাওয়া যাবে।

সর্বনিম্ন MC=300 – 20Q+Q = 300 – 20×10 + 10×10 = 300+100–200=200

4. একটি ফার্ম একটি স্থির দামে (P) দ্রব্য বিক্রয় করে যেখানে P = Rs 2। ফার্মটির মোট ব্যয় অপেক্ষক হোলো $TC = 1000 + \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{50}\right)^2$। ফার্মটির মুনাফা (π) অপেক্ষক নির্ণয় করো এবং যে উৎপাদনস্তরে মুনাফা সর্বোচ্চ হয় তা নির্দেশ করো।

সমাধান : π = TR – TC; TR = PQ = 2Q

$$\pi = TR - TC = 2Q - \left[1000 + \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{50}\right)^2\right]$$

$$= 2Q - 1000 - \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{50}\right)^2$$

যে উৎপাদন স্তরে মুনাফা সর্বোচ্চ হয় সেখানে $\frac{d\pi}{dQ} = 0$ এবং $\frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0$ হবে।

এখানে $\frac{d\pi}{dQ} = 2 - \frac{Q}{50} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 100$

আবার $\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -\frac{1}{50} < 0$

সুতরাং Q = 100 হলে ফার্মের মুনাফা সর্বোচ্চ হবে।

5. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির (1) গুরুত্বপূর্ণ বা সংকট মান (Critical Value) নির্ধারণ কর (2) অপেক্ষকগুলির গুরুত্বপূর্ণ মান অপেক্ষকগুলির আপাত চরম অবস্থা অথবা বাঁক বদলের বিন্দু নির্ণয় করো।

a) $y = -(x-8)^4$ b) $y = (5-x)^3$ c) $y = -2(x-b)^6$

a) $y = -(x-8)^4$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -4(x-8)^3$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ বসালে x এর সংকট মান বেরোয়।

$y = -4(x-8)^3 = 0$

$\Rightarrow x - 8 = 0 \ \Rightarrow x = 8$ হোলো সংকট মান।

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = -12(x-8)^2\ ;\ y''(8) = 0$$

$\therefore$ পরীক্ষাটি থেকে সিদ্ধান্ত নেওয়া যাবে না (The test is inconclusive)।

$\therefore$ উচ্চতর অন্তরকলন নির্ণয় করা যাক।

$y''' = -24(x - 8) \Rightarrow y'''(8) = -24(8-8) = 0$

$\therefore$ পরীক্ষাটি আবার সিদ্ধান্তবিহীন।

$y^{(4)} = -24 \Rightarrow y^4(8) = 24 < 0$

$\therefore$ অপেক্ষকটি অবতল এবং $x = 8$ এই গুরুত্বপূর্ণ বিন্দুতে সর্বোচ্চ হয়।

b) $y = (5 - x)^3$

1) $y' = 3(5 - x)^2 (-1) = -3(5 - x)^2 = 0$

$5 = x$ হোলো গুরুত্বপূর্ণ মান।

2) $y'' = 6(5 - x) \Rightarrow y''(5) = 6(5-5) = 0$ $\therefore$ দ্বিতীয় অন্তরকলজ পরীক্ষা সিদ্ধান্তবিহীন।

$y''' = -6 \Rightarrow y'''(5) = -6 < 0$

অর্থাৎ y একটি বাঁক বদলের বিন্দুতে অবস্থান করছে $x=5$-এ যা চরম বিন্দু নয়।

c) $y = -2(x-6)^6$

1) $y' = -12(x-6)^5 = 0 \Rightarrow x=6$ সংকট বিন্দু।

2) $y'' = -60(x-6)^4$

$y''(6) = -60 \times 0^4 = 0$ $\therefore$ পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন।

$y''' = -240(x-6)^3 \Rightarrow y'''(6) = 0$ $\therefore$ পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন।

$y^{(4)} = -720(x-6)^2 \Rightarrow y^4(6) = 0$ $\therefore$ পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন।

$y^{(5)} = -1440(x-6) \Rightarrow y^5(6) = 0$ $\therefore$ পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন।

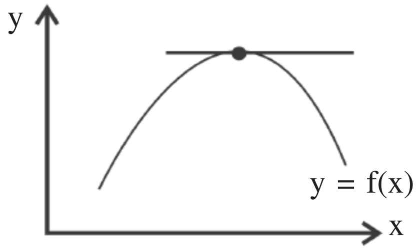
$y^{(6)} = -1440 \Rightarrow y^6(6) = -1440 < 0$

$\therefore$ y হোলো অবতল এবং এর সর্বোচ্চ মান আছে।

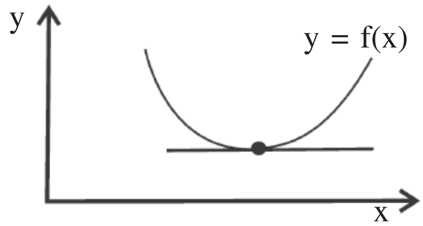
4.8 সর্বাধিক ও সর্বনিম্নকরণের জন্য প্রয়োজনীয় শর্তাবলি

আমাদের চিত্রে দেখা যাচ্ছে যে, $y = f(x)$ অপেক্ষকটি A বিন্দুতে সর্বাধিক, B বিন্দুতে সর্বনিম্ন এবং C বিন্দুটি হল বাঁক বদলের বিন্দু (Point of inflexion) যেখানে অপেক্ষকটি সর্বাধিকও নয়, আবার সর্বনিম্নও নয়। কিন্তু তিনটি বিন্দুতেই $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং এটিই হল কোন অপেক্ষকের সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন মান হওয়ার প্রথম ক্রমের বা প্রয়োজনীয়

শর্ত। অবশ্য এই শর্ত পর্যাপ্ত নয়। সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন মান পেতে গেলে একটি পর্যাপ্ত বা দ্বিতীয় ক্রমের শর্তও পূরণ হওয়া দরকার। সর্বাধিককরণের জন্য দ্বিতীয় ক্রমের শর্তটি হল, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ এবং সর্বনিম্নকরণের জন্য দ্বিতীয় ক্রমের শর্তটি হল, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ । সংক্ষিপ্তসার হিসাবে বলতে গেলে:



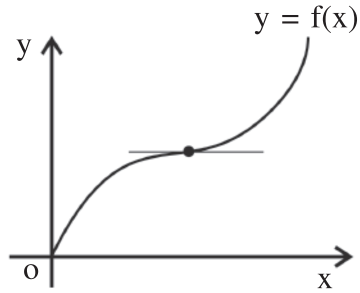
সর্বাধিককরণের জন্য শর্ত হল : $\frac{dy}{dx} = 0, \ \frac{d^2y}{dx^2} < 0$



সর্বনিম্নকরণের জন্য শর্ত হল : $\frac{dy}{dx} = 0, \ \frac{d^2y}{dx^2} > 0$

বাঁক বদলের বিন্দুর জন্য প্রয়োজন : $\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \, , \ \frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

তাহলে দেখা যাচ্ছে, সর্বাধিক ও সর্বনিম্ন বিন্দুগুলি হল নিশ্চল (stationary) বিন্দু, কিন্তু নিশ্চল বিন্দু সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন বিন্দু নাও হতে পারে, কেননা সেটি বাঁক বদলের বিন্দুও হতে পারে। কোন অপেক্ষক f(x)-এর নিশ্চল বিন্দুতে মানকে নিশ্চল মান (Stationary Value) বলা হয়।



উদাহরণ : নীচের রাশিমালার সর্বাধিক ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

উত্তর : মনে করি, $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$ এখন, y কে সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন হতে গেলে $\frac{dy}{dx} = 0$ হতে হবে।

$\therefore$ $3x^2 - 6x - 9 = 0$ or, $x^2 - 2x - 3 = 0$ or, $(x+1)(x-3) = 0$

$\therefore$ $x = -1, 3$ এখন $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$

$x = -1$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -12 < 0$ সুতরাং $x = -1$ হলে y সর্বাধিক হবে।

সর্বাধিক $y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 27 = 27 + 9 - 3 - 1 = 32$

আবার, x = 3 হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 6 \times 3 - 6 = 12 > 0$

$\therefore$ x = 3 হলে y সর্বনিম্ন হবে।

y-এর সর্বনিম্ন মান = $3^3 - 3(3)^2 - 9(3) = 27 - 27 - 27 + 27 = 0$

উদাহরণ : $y = 8x^5 - 15x^4 + 10x^2$ এই অপেক্ষকের সর্বাধিক ও সর্বনিম্ন মান বের কর।

উত্তর : ধরি, $y = f(x) = 8x^5 - 15x^4 + 10x^2$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 40x^4 - 60x^3 + 20x$$

সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন y পেতে গেলে $f'(x) = 0$ হতে হবে।

অর্থাৎ $40x^4 - 60x^3 + 20x = 0$ বা $20x(2x^3 - 3x^2 + 1) = 0$

সুতরাং হয় x = 0 বা, $2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

বা, $2x^3 - 2x^2 + x^2 + x - x + 1 = 0$

বা, $2x^2(x-1) - x(x-1) - 1(x-1) = 0$

বা, $(x-1)(2x^2-x-1) = 0$। তাহলে হয় x=1 কিংবা

$2x^2 - x - 1 = 0$ বা, $2x^2 - 2x + x - 1 = 0$

বা, $2x(x-1) + 1(x-1) = 0$

বা, $(x-1)(2x+1) = 0$ $\therefore$ x = 1 বা $-\frac{1}{2}$

x-এর এই সমস্ত মানে অপেক্ষকটির সর্বাধিক অথবা সর্বনিম্ন মান থাকতে পারে।

এখন $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 160x^3 - 180x^2 + 20$

এখন, $f''(0) = 20 > 0$ সুতরাং x = 0 বিন্দুতে y-এর একটি সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে। সর্বনিম্ন y = f(0) = 0। আবার $f''(1) = 160 - 180 + 20 = 0$, সুতরাং, এই স্তরে আমরা নির্দিষ্ট করে কিছু বলতে পারছি না। আমাদের $f'''(x)$-এর মান দেখতে হবে। এখানে, $f'''(x) = 480x - 360x$

এখন, $f'''(1) = 480 - 360 = 120 \neq 0$, সুতরাং x = 1 বিন্দুতে y সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন কোনোটাই নয়। ঐ বিন্দুটি একটি বাঁক বদলের বিন্দু। $f(1) = 8(1)^5 - 15(1)^4 + 10(1)^2 = 8-15+10=3$

সুতরাং বাঁক বদলের বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (1, 3)।

আবার, $x=-\frac{1}{2}$ হলে, $f''\left(-\frac{1}{2}\right)=160\left(-\frac{1}{2}\right)^3-180\left(-\frac{1}{2}\right)^2+20$

$= -20 - 45 + 20 = -45 < 0$

সুতরাং, $x = -\frac{1}{2}$ হলে y সর্বাধিক হবে।

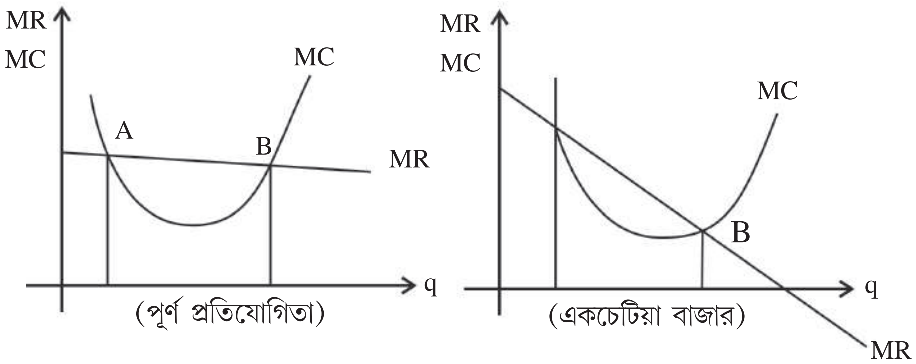
সর্বাধিক $y=8\left(-\frac{1}{2}\right)^5-15\left(-\frac{1}{2}\right)^4+10\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$=-\frac{1}{4}-\frac{15}{16}+\frac{5}{2}=\frac{40-15-4}{16}=\frac{21}{16}$

অর্থনীতি থেকে উদাহরণ (Example from Economics)

সর্বাধিককরণের প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের শর্তের উদাহরণ আমরা পূর্ণ প্রতিযোগিতা ও একচেটিয়া বাজারের ভারসাম্য অবস্থা থেকে দিতে পারি। মুনাফা সর্বাধিক করণের প্রথম ক্রমের শর্ত হল, MR=MC। এই শর্ত A ও B উভয় বিন্দুতে পূরণ হয়েছে। মুনাফা সর্বাধিককরণের দ্বিতীয় ক্রমের শর্ত হল, MC রেখার ঢাল > MR রেখার ঢাল। এই শর্ত পূরণ হয়েছে কেবল B বিন্দুতে। সুতরাং, A বিন্দু মুনাফা সর্বাধিককারী বিন্দু নয়। কিন্তু B বিন্দুতে যেহেতু প্রথম ও দ্বিতীয় উভয় ক্রমের শর্তই পালিত হচ্ছে, তাই B বিন্দু হল মুনাফা সর্বাধিককারী বিন্দু।

গাণিতিক সমস্যা ও তার সমাধান (Mathematical Problems & Solutions)



(1) উৎপাদন অপেক্ষকটি হল: $q=40L+3L^2-\frac{L^3}{3}$

(i) L -এর যে মানে q সর্বাধিক, সেই মান বের কর। q-এর সর্বাধিক মান কত?

(ii) সর্বাধিক AP-র মান নির্ণয় কর।

(iii) দেখাও যে যখন AP সর্বাধিক, তখন AP = MP

উত্তর : (i) $q = 40L + 3L^2 - \frac{L^3}{2}$

$\therefore \frac{dq}{dL} = 40 + 6L = L^2$ । এখন q কে সর্বাধিক করার প্রথম ক্রমের শর্ত হল, $\frac{dq}{dL} = 0$

বা, $40 + 6L - L^2 = 0$

বা, $L^2 - 6L - 40 = 0$ বা, $(L+4)(L-10) = 0$, $\therefore$ L= – 4, 10.

q কে সর্বাধিক করার দ্বিতীয় ক্রমের শর্ত, $\frac{d^2q}{dL^2} < 0$

এখানে, $\therefore \frac{d^2q}{dL^2} = 6 - 2L$ । যখন $L = -4, \frac{d^2q}{dL^2} = -14 < 0$

যখন $L = 10, \frac{d^2q}{dL^2} = -14 < 0$

সুতরাং, যখন L = 10 তখন q সর্বাধিক। q এর সর্বাধিক মান হল

$$= 40 \times 10 + 3 \times 10^2 - \frac{10^3}{3} = 700 - \frac{1100}{3} = \frac{1100}{3} = 367 \,(\text{Ans.})$$

(ii) $MP = \frac{dq}{dL} = 40 + 6L - L^2$

এখন MP সর্বাধিক হতে গেলে $\frac{dMP}{dL} = 0$ or, $6 - 2L = 0$ $\therefore$ L=3

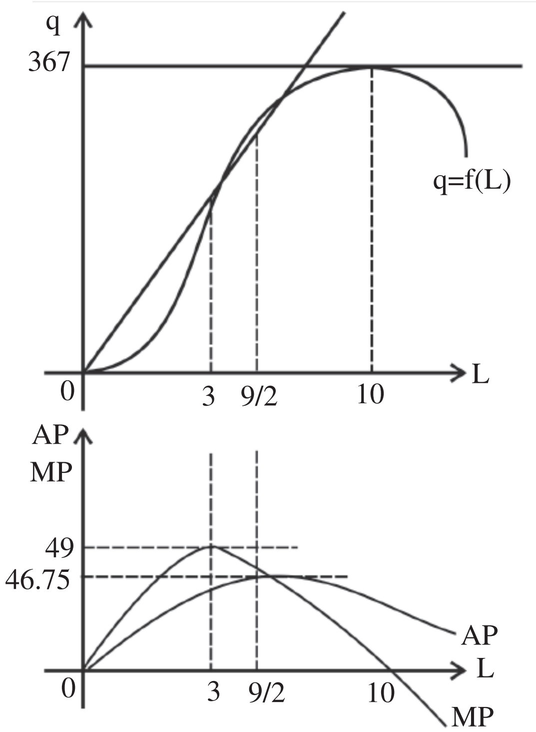
এখানে $\frac{d^2MP}{dL^2} = -2 > 0$ সুতরাং L=3 হলে MP সর্বাধিক হবে।

সর্বাধিক MP = 40 + 6 × 3 – 3 = 55

(iii) $AP = \frac{q}{L} = 40 + 3L - \frac{L^2}{3}$ এখন, AP কে সর্বাধিক হতে গেলে $\frac{dAP}{dL} = 0$ এবং $\frac{d^2AP}{dL^2} < 0$ হতে হবে।

এখন $\frac{dAP_L}{dL} = 3 - \frac{2L}{3} = 0$ $\therefore L = \frac{9}{2}$ । এখানে $\frac{d^2AP}{dL^2} = -\frac{2}{3} < 0$

সুতরাং, যখন $L = 9/2$, তখন AP সর্বাধিক।



সর্বাধিক $AP = 40 + 3L - \frac{L^2}{3}$

$= 40 + 3 \times \frac{9}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{81}{4} = 40 + \frac{22}{2} - \frac{27}{4}$

$= 40 + \frac{27}{4} = 46\frac{3}{4} = 46 \cdot 75$

যখন $L = 9/2$, $MP = 40 + 4L - L^2$

$= 40 + 6 \times \frac{9}{2} - \frac{81}{4} 40 + \frac{27}{4}$

$= 46{\cdot}75$

দেখা যাচ্ছে, যখন $L = 9/2$ তখন AP সর্বাধিক এবং ঐ বিন্দুতে সর্বাধিক AP=MP

4.9 সারাংশ

এই অধ্যায়ে কোনো একটি অপেক্ষক f(x) যে বিন্দুতে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন হয়, প্রথম মাত্রা ও দ্বিতীয় মাত্রার অন্তরকলজের চিহ্নানুসারে তার নির্ধারণ পদ্ধতি বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা হয়েছে। এক্ষেত্রে $f'(x) = 0$ হলে f(x) এর নিশ্চল মান হওয়ার ধারণা ব্যাখ্যা করা হয়েছে। সেই সূত্রে f(x) অপেক্ষকের সকল সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের ক্ষেত্রে $f'(x) = 0$ হয়, তা দর্শিত হয়েছে। যদি $f'(a) = 0$ এবং $f''(a) = 0$ হয় তাহলে f(a) মানকে x=a বিন্দুতে অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ধারিত হবে, এবং $f'(a) = 0$ এবং $f''(a) > 0$ হলে, f(a) মানকে x=a বিন্দুতে অপেক্ষকের সর্বনিম্ন মান নির্ধারিত হবে, সেটা দেখানো হয়। কোনো অপেক্ষকের বক্রতার ধরন উত্তল না অবতল, এবং তার কোনো বাঁক বদলের বিন্দু আছে কিনা সেটার নির্ণয় পদ্ধতি নিয়েও আলোচনা করা হয়েছে।

4.10 অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলি x=4-এ ক্রমবর্ধমান না ক্রমহ্রাসমান??

   a) $y = 3x^2 - 14x + 5$ b) $y = (5x^2 - 8)^2$

2. $f(x) = -7x^2 + 126x-23$ অপেক্ষকটির আপাত চরমাবস্থা নির্ধারণ করুন।

3. দেখাও যে দ্বিঘাত অপেক্ষকের কোনো বাঁক বদলের বিন্দু নেই কিন্তু ত্রিঘাত অপেক্ষকের বাঁক বদলের বিন্দু আছে।

4. যদি মোট ব্যয় অপেক্ষক $C = 4q^2+10$ ও মোট বিক্রয়লব্ধ আয় $R = -2q^2+6q$ হয় তাহলে কোন্ উৎপাদনের পরিমাণে মুনাফা সর্বোচ্চ হবে?

5. কোনো একটি উৎপাদন অপেক্ষক হোলো $q = -3L^3+18L^2+L$ দেখান যে বাঁক বদলের বিন্দুতে প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা (MP) সর্বোচ্চ হয়। দেখান যে গড় উৎপাদনশীলতা (AP) যখন সর্বোচ্চ হয় (L এর যে মানে) সেখানে MP = AP হবে।

6. $y = -2x^3+4x^2+9x-15$ অপেক্ষকের $x=3$ এ বক্রতা কী হবে?

4.11 গ্রন্থপঞ্জি

1. Alpha. C. Chiang and K. Wainwright (2013): Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw Hill Education, Fourth Edition.

2. Silberberg. E. and Suen, W: The Structure of Economics: A Mathematical Analysis, Third Edition, McGrawHill, 2001.

3. Bhukta, Anindya and Seikh Salim (2013) : Mathematics for Undergraduate Economics, Progressive Publishers.

4. Sarkhel, J and A, Bhukta (2000): An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Limited.

5. Henry, S.G.B. (1969) : Elementary Mathematical Economics, Routledge and Kegan Paul.

একক 5 ◻ সমাকলন ও তার অর্থনৈতিক প্রয়োগ

গঠন

5.1 উদ্দেশ্য

5.2 প্রস্তাবনা

5.3 সমাকলন

5.3.1 সংজ্ঞা

5.3.2 বিপরীত অবকল বা অন্তরকলন হিসেবে সমাকলন

5.3.3 সমাকলনীয় ধ্রুবক

5.3.4 সমাকলনের নিয়মাবলী

5.3.5 পরিবর্ত বা প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাকলন

5.3.6 অংশভিত্তিক সমাকলন

5.3.7 আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন

5.4 নির্দিষ্ট সমাকল

5.4.1 সংজ্ঞা

5.4.2 যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা

5.4.3 সমাকলের মৌলিক উপপাদ্য

5.4.4 নির্দিষ্ট সমাকলের ধর্মসমূহ

5.4.5 বক্ররেখাগুলির অন্তবর্তী ক্ষেত্রফলের পরিমাপ

5.4.6 সঙ্গতিবিহীন বা অসংগত সমাকল

5.4.7 লাইপিটালের নিয়ম

5.5 অর্থনীতিতে সমাকলনের ব্যবহার

5.5.1 প্রান্তিক অপেক্ষক থেকে মোট অপেক্ষক নির্ণয়

5.5.2 সমাকলনের স্থির রাশির অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা

5.5.3 চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা থেকে চাহিদা অপেক্ষক নির্ণয়

5.5.4 প্রান্তিক পরিবর্ততার হার থেকে উপযোগিতা অপেক্ষক নির্ণয় করা

5.5.5 ভোগউদ্বৃত্ত ও উৎপাদন উদ্বৃত্তর পরিমাপ

5.6 সারাংশ

5.7 অনুশীলনী

5.8 গ্রন্থপঞ্জি

5.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন্ত

- সমাকলনের তাৎপর্য ও নিয়মাবলী
- সমাকলের ধর্মসমূহ
- অর্থনীতিতে সমাকলনের ব্যবহার।

5.2 প্রস্তাবনা

অন্তরকলনের বিপরীত প্রক্রিয়াকে সমাকলন বলে। অর্থাৎ অন্তরকলনের মাধ্যমে প্রাপ্ত ফলাফল থেকে মূল অপেক্ষক নির্ণয় করা হয় সমাকলনের মাধ্যমে। সমাকলন মৌলিকভাবে পদার্থ বিজ্ঞান ও অর্থনীতির ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ণ। অর্থনীতির বিভিন্ন প্রান্তিক ধারণাসমূহ যেমন প্রান্তিক আয়, প্রান্তিক ব্যয় ইত্যাদি থেকে মোট ধারণা যেমন মোট আয়, মোট ব্যয় ইত্যাদি নির্ণয় করা হয় সমাকলনের মাধ্যমে।

5.3 সমাকলন

5.3.1 সংজ্ঞা

x চলের একটি প্রদত্ত আপেক্ষক $f(x)$ এর জন্য যদি x চলের অপর একটি অপেক্ষক $F(x)$ এমনভাবে নির্ণয় করা যায় যে, x এর সাপেক্ষে $F(x)$ এর অন্তরকলজ $f(x)$ এর সমান বা $F(x)$ এর অবকল $f(x)dx$ এর সমান, তাহলে $F(x)$ কে (x) এর সাপেক্ষে $f(x)$ এর একটি অনির্দিষ্ট সমাকল (indifinite integral) বলা হয় এবং তাকে $\int f(x)dx=F(x)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এক্ষেত্রে, $F(x)$ নির্ণয় করার পদ্ধতিকে সমাকলন (integration) এবং $f(x)$ কে সমাকল্য (integrand) বলা হয়। সমাকলন প্রকাশ করার জন্য '$\int$' প্রতীককে সমাকলনের চিহ্ন এবং dx অবকল দ্বারা বোঝানো হয় যে, সমাকলনের চলরাশি হলো x; $\int f(x)dx$ প্রতীকটিকে $f(x)dx$ এর সমাকল—এভাবে পড়া যায় হয়।

5.3.2 বিপরীত অবকলন বা অন্তরকলন হিসেবে সমাকলন

স্যার আইজাক নিউটনসহ আরও ককেজন গণিতজ্ঞ একটি প্রশ্নের উত্তর দিয়েছিলেন—"কোনও মধ্যান্তর (interval) [a, b] -তে একটি অপেক্ষক f সংজ্ঞাত হলে ওই অপেক্ষকের সকল বিন্দু x এর জন্য কি ওই মধ্যান্তরে এমন অপেক্ষক f-এর অস্তিত্ব থাকবে যেখানে $F'(x) = f(x)$ হবে? এবং যদি এমন অপেক্ষক F এর অস্তিত্ব থাকে তবে F কি অদ্বিতীয় হবে?

গণিতজ্ঞরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছিলেন যে [a, b] এই সীমা ও মধ্যান্তরে f অপেক্ষক সংজ্ঞাত হলে ওই সীমার সকল বিন্দু x এর জন্য সবসময় একটি অপেক্ষক f পাওয়া যাবে না যেখানে $F'(x)=f(x)$ হবে। কিন্তু যদি f অপেক্ষকটি [a, b] মধ্যান্তর বা সীমায় সন্তত হয়, তবে সেক্ষেত্রে [a, b] মধ্যান্তরের সকল বিন্দু x এর জন্য F অপেক্ষকের অস্তিত্ব থাকবে যেখানে $F'(x)=f(x)$ হবে।

যখন [a, b] মধ্যাঞ্চলে এরূপ একটি অপেক্ষক F এর অস্তিত্ব থাকবে তখন আমরা f অপেক্ষক থেকে F অপেক্ষক নির্ণয় করার পদ্ধতিকেই অবকলনের বিপরীত পদ্ধতি হিসাবে গণ্য করতে পারি। অবকলনের এই বিপরীত পদ্ধতি থেকেই সমাকলন পদ্ধতির সূত্রপাত হয়। [a, b] মধ্যান্তরে সংজ্ঞাত কোনও অপেক্ষক f এর জন্য যদি এমন একটি অপেক্ষক F-এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে [a, b] অন্তরালের সকল বিন্দু x-এর জন্য $F'(x)=f(x)$ হয়, তবে F কে [a, b] অন্তরালে f এর অনির্দিষ্ট সমাকল বা বিপরীত অন্তরকলজ (anti derivative) বলা হল এবং লেখা হয় $F(x) = \int f(x)dx,\ x \in [a, b]$। অর্থাৎ, $F(x) = \int dF(x)$। তাহলে দেখা গেল যে f অপেক্ষক থেকে F অপেক্ষক নির্ণয়ের পদ্ধতিই হোলো সমাকলন যেখানে f অপেক্ষক হোলো সমাকল্য। '$\int$' এই চিহ্নটি ইংরাজি বর্ণমালার S অক্ষর থেকে এসেছে কারণ সমাকলনের তত্ত্বের প্রাথমিক বর্ণনায় যোগফল (Summation) বোঝাতে S অক্ষরটি ব্যবহৃত হয়েছিল। সমাকলনের এই চিহ্নটি ইংরাজি S অক্ষরের দীর্ঘায়িত রূপ (elongated form)। বিপরীত অবকলন হিসাবে সমাকলনের ধারণাটি বর্ণনা করতে কিছু উদাহরণ দেওয়া হোলো :

উদাহরণ 1: যেহেতু $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n}\right) = x^{n-1}(n \geq 1)$

$$\therefore \int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n}$$

এখানে $f(x) = x^{n-1}$; $(n\geq1)$ কে সমাকল্য এবং $F(x) = \frac{x^n}{n}$ কে x^{n-1}, $(n\geq1)$ এর অনির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়।

উদাহরণ 2: $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}; x > 0$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ এবং

$$\frac{d}{dx}\{\log_e(-x)\} = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}, x < 0 \ ;$$

$$\therefore \ \frac{d}{dx}\{\log_e|x|\} = \frac{1}{x} \ ; \quad x \neq 0$$

সুতরাং $\int \frac{1}{x} dx = \log_e|x| \ ; x \neq 0$

এখানে সমাকল্য $f(x) = \frac{1}{x} \ ; x \neq 0$ এবং $\frac{1}{x}$ এর $(x \neq 0)$ অনির্দিষ্ট সমাকল $F(x) = \log_e |x|$

5.3.3 সমাকলনীয় ধ্রুবক

দ্বিতীয় যে প্রশ্নটি পূর্বোক্ত আলোচনায় ছিল অর্থাৎ [a, b] মধ্যাঞ্চলে f অপেক্ষকের অনির্দিষ্ট সমাকল থাকলে তা অদ্বিতীয় হবে কিনা, তার উত্তরে দেখা যাবে যে [a, b] মধ্যাঞ্চলে f অপেক্ষকের অনির্দিষ্ট সমাকল F হলে ওই অন্তরালে (x) = f(x) হবে এবং যে কোনও বাস্তব ধ্রুবক c এর জন্য

$$\frac{d}{dx}\{F(x) + c\} = F'(x) + \frac{dc}{dx}$$

$$= F'(x) \quad \left(\because \frac{dc}{dx} = 0\right)$$

$= f(x) \ ; \ x \in [a, b]$

স্পষ্টতই, c এর যে কোনও বাস্তব মানের জন্য f(x) এর অনির্দিষ্ট সমাকল হবে F(x)+c। সুতরাং, f অপেক্ষকের যদি একটি অনির্দিষ্ট সমাকল পাওয়া যায় তবে তার অসংখ্য অনির্দিষ্ট সমাকল থাকবে, অর্তাৎ কোনও অপেক্ষকের যদি অনির্দিষ্ট সমাকলের অস্তিত্ব থাকে, তবে তা কখনই অদ্বিতীয় (unique) নয়।

উদাহরণস্বরূপ : $\frac{d}{dx}\left(x^3 + c\right) = 3x^2$

$\therefore \ \int 3x^2 dx = x^3 + c$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(e^{5x} + c\right) = \frac{e^{5x}}{5} \quad \therefore \int \frac{e^{5x}}{5} = e^{5x} + c$

অতএব প্রতিটি অপেক্ষকের অনির্দিষ্ট সমাকলে যে ধ্রুবক c থাকছে, তাকে সমাকলন ধ্রুবক বলা হয়।

তাহলে দেখা গেল যে c যদি x নিরপেক্ষ একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক (arbitrary constant) হয়, তবে

$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ হলে

$\frac{d}{dx}[F(x)+c] = f(x)$ হবে।

সমাকলনের সংজ্ঞানুসারে : $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

এক্ষেত্রে $\int f(x)\,dx$ এর সাধারণ সমাধান $[F(x) + c]$ হোলো একটি অনির্দিষ্ট সমাকল এবং x নিরপেক্ষ অনির্দিষ্ট ধ্রুবক c কে সমাকলন ধ্রুবক বলা হয়।

যেহেতু $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$, সুতরাং বোঝা গেল যে যখন F(x) অপেক্ষককে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করা হয়, তখন কেবল একটি নির্দিষ্ট সমাধান পাওয়া যায়; কিন্তু $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ বলে f(x) অপেক্ষকের x এর সাপেক্ষে সমাকলন করা হলে F(x)+c আকারে অসংখ্য সমাধান পাওয়া সম্ভব (অনির্দিষ্ট ধ্রুবক c এর বিভিন্ন মান নিয়ে)। এজন্য, $\int f(x)\,dx$ কে x এর সাপেক্ষে f(x) এর অনির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়। অবশ্য কোনো প্রদত্ত শর্তের পরিপ্রেক্ষিতে যদি c এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়, তবে সেক্ষেত্রে সমাকলের একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে।

অর্থাৎ লক্ষণীয় যে c যদি x নিরপেক্ষ অনির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং $\frac{d}{dx}[F(x)+c] = f(x)$ হয় তবে সংজ্ঞানুসারে, $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}[F(x)+c] = f(x)$$

কিন্তু $\int \left\{\frac{d}{dx} f(x)\right\} dx = \int f'(x)\,dx$

= f(x) + একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক

সুতরাং সহজেই বোঝা যায় যে, $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]$ এবং $\int \left[\frac{d}{dx} f(x)\right] dx$ এই দুটির মান সাধারণভাবে সমান নাও হতে পারে।

f(x) ও $\phi(x)$ অপেক্ষক দুটি এমন হয় যে $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \phi(x)$ তাহলে, $f(x) - \phi(x) = c$ হবে যেখানে c একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক।

প্রমাণ : যেহেতু, $\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\phi(x)$

$$\therefore \int \frac{d}{dx}f(x)\,dx=\int \frac{d}{dx}\phi(x)\,dx$$

or, $f(x) + c_1 = \phi(x) + c_2$ [c_1 ও c_2 অনির্দিষ্ট ধ্রুবক]

or, $f(x) - \phi(x) = c_2 - c_1 = c$

(যেখানে $c = c_2 - c_1$ হলো অনির্দিষ্ট ধ্রুবক)

এই ফল থেকে বোঝা যায় যে, একটি অপেক্ষঅকের সমাকল বিভিন্ন আকারে প্রকাশিত হতে পারে, কিন্তু যে কোনো দুটি আকারের বিয়োগফল সর্বদাই একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক হবে।

5.3.4 সমাকলনের নিয়মাবলি

প্রথম নিয়ম : K ধ্রুবকের সমাকল হবে $\int Kdx = Kx+c$

দ্বিতীয় নিয়ম : '1' এর সমাকল লেখা হবে dx হিসাবে 1dx হিসেবে নয় অর্থাৎ $\int dx = x+c$

তৃতীয় নিয়ম : শক্তি অপেক্ষক x^n এর সমাকল, যেখানে $n \neq -1$ প্রকাশিত হবে শক্তির নিয়মানুসারে :

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c;\ n\neq -1$$

চতুর্থ নিয়ম : x^{-1} বা $\frac{1}{x}$ এর সমাকল হবে

$$\int x^{-1}dx=\int \frac{1}{x}dx=\ln x+c;\ x>c$$

এখানে $x > 0$ এই শর্তটি আরোপ করা হয়েছে তার কারণ কেবলমাত্র ধনাত্মক সংখ্যারই লগারিদম্ হয়। সংখ্যা যদি ঋণাত্মক হয় তখন

$\int x^1 dx = \ln |x| + c;\ x \neq 0$

পঞ্চম নিয়ম : সূচকীয় অপেক্ষক এর সমাকল হলো :

$$\int a^{Kx}dx=\frac{a^{Kx}}{K\log a}+c$$

ষষ্ঠ নিয়ম : স্বাভাবিক সূচকীয় সংখ্যার সমাকল হোলো

$$\int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{K} + c \ \because \ln e = 1$$

সপ্তম নিয়ম : যদি কোনো উপেক্ষককে ধ্রুবক দিয়ে গুণ করা হয় তখন তার সমাকল হবে, সেই অপেক্ষকের সমাকল গুণিত ধ্রুবক। অর্থাৎ

$\int Kf(x)\ dx = K\int f(x)\ dx$

অষ্টম নিয়ম : দুটি বা তার অধিক অপেক্ষকের যোগফল বা অন্তরের সমাকল, তাদের সমাকলের যোগফল বা অন্তর হয়।

অর্থাৎ; $\int[f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)dx$

নবম নিয়ম : কোনো অপেক্ষকের ঋণাত্মক মানের সমাকল, সেই অপেক্ষকের সমাকলের ঋণাত্মক হবে।

অর্থাৎ, $\int - f(x)\ dx = -\int f(x)\ dx$

এই নিয়মগুলির প্রয়োগ হিসাবে কিছু উদাহরণ নেওয়া হলো।

উদাহরণ 3 : $\int 3\ dx = 3x + c$ [নিয়ম 1]

উদাহরণ 4 : $\int x^4 dx = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$ [নিয়ম 3]

উদাহরণ 5 : $\int 12x^5 dx = 12\int x^5 dx$

$$= 12 \times \left[\frac{x^6}{6} + c_1\right] = 2x^6 + c \quad \text{[নিয়ম 7 ও নিয়ম 3]}$$

যেখানে c_1 ও c হোলো অনির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং $5c_1 = c_1$ যেহেতু c হোলো অনির্দিষ্ট ধ্রুবক, সুতরাং প্রাথমিক গণনায় একে না ব্যবহার করে কেবলমাত্র সর্বশেষ সমাধানেও একে দেখানো যাবে।

উদাহরণ 6 : $\int(3x^3 - x + 1)\ dx$

$= 3\int x^3 dx - \int x\ dx + \int dx$ [নিয়ম 7, 8, 9]

$= 3\left[\frac{x^4}{4}\right] - \frac{1}{2}x^2 + x + c$ [নিয়ম 2, 3]

$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$

উদাহরণ 7 : $\int 3x^{-1}\,dx = \int 3x^{-1}\,dx$ [নিয়ম 7]

$= 3 \ln |x| + c$ [নিয়ম 4]

উদাহরণ 8 : $\int 2^{3x}\,dx = \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + c$ [নিয়ম 1]

উদাহরণ 9 : $\int 9e^{-3x}\,dx = \frac{9e^{-3x}}{-3} + c$ [নিয়ম 1]

$= -3e^{-3x} + c$

5.3.5 পরিবর্ত বা প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাকলন

মনে করা যাক $\int f(x)\,dx$ নির্ণয় করতে হবে, যেখানে $f(x)$ অর্তাৎ সমাকল্য আদর্শ আকারে প্রদত্ত নয়। পরিবর্ত পদ্ধতির সাহায্যে চলের পরিবর্তনের মাধ্যমে সমাকল্যকে আদর্শ সমাকল্যে পরিণত করা যায়।

মনে করা যাক, $\int f(x)\,dx = I$

তাহলে সংজ্ঞনুসারে, $\frac{dI}{dx} = f(x)$;

এখন $x = \phi(Z)$ হলে $\frac{dx}{dZ} = \phi'(Z)$

$\therefore \frac{dI}{dZ} = \frac{dI}{dx} \cdot \frac{dx}{dZ}$

$= f(x) \cdot \phi'(Z)$

বা, $\frac{dI}{dZ} = f\{\phi(Z)\}\,\phi'(Z)\,dZ$

সংজ্ঞানুসারে, $I = \int f\{\phi(Z)\}\,\phi'(Z)\,dZ$

বা, $\int f(x)dx = \int f\{\phi(Z)\}\,\phi'(Z)\,dZ$

অপেক্ষকের কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ আকার এবং তাদের সমালোচনা

(i) $\int f(ax+b)\,dx$ এর সমাকল প্রতিস্থাপন প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করা যায়; এক্ষেত্রে চলের প্রতিস্থাপন সমীকরণ হয় $ax + b = Z$

উদাহরণ 10: সমাকলন করো : $\int (ax+b)^7\,dx$

ধরা যাক $ax + b = Z \quad \therefore adx = dZ$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{a}dZ$$

$$\therefore \int (ax+b)^7 dx = \int Z^7 \frac{dZ}{a} = \frac{1}{a}\int Z^7 dZ = \frac{1}{a}\cdot\frac{Z^8}{8} + c$$

$$= \frac{(ax+b)^8}{8a} + c \; [\because Z = ax+b]$$

(ii) $\int[f(x)^n f'(x)\, dx]$ এর সমাকল পরিবর্তন প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করা যায়; এক্ষেত্রে লের প্রতিস্থাপন সমীকরণ, $f(x)=Z$ ধরা হয়।

$f(x) = Z$ ধরলে, $f'(x)\, dx = dZ$ হয়।

$\therefore \int[f(x)]^n f'(x)\, dx = \int Z^n dZ \; [\because f(x) = Z$ ও $f'(x)dx = dz]$

$$= \frac{Z^{n+1}}{n+1} + c \;\; [\text{যখন } n \neq -1] \;\; = \frac{[f(x)]^{x+1}}{n+1} + c$$

এবং $\int[f(x)]^n f'(x)\, dx = \log |Z| + K$ [যখন $n = -1$] $=\log|f(x)|+K$

অর্থাৎ $\int[f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ [যখন $n \neq -1$]

এবং $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + K$ [যখন $n = -1$]

উদাহরণ 11: সমাকলন করো : $\int \frac{x^2}{2+x^3} dx$

ধরা যাক $2 + x^3 = Z \Rightarrow 3x^2dx = dZ$

$\therefore \int \frac{x^2}{2+x^3} dx = \int \frac{1}{x}\frac{dZ}{3}$ $\qquad [\because x^2dx = \frac{1}{3}dZ$ ও $2 + x^3 = Z]$

$$= \frac{1}{3}\log|Z| + c$$

$$=\frac{1}{3}\log\left|2+x^3\right|+c$$

পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাকলনের বিবিধ উদাহরণ :

উদাহরণ 12: সমাকল করো:

(i) $\int \frac{x^2}{\left(4x^3+7\right)^2}\,dx$ (ii) $\int 24xe^{3x^2}\,dx$

(iii) $\frac{xe^x\,dx}{(x+1)^2}$ (iv) $\int (x-9)^{7/4}\,dx$

(i) $\int \frac{x^2}{\left(4x^3+7\right)^2}\,dx \Rightarrow \int x^2\left(4x^3+7\right)^{-2}dx$

ধরা যাক $u=4x^3+7\,;\frac{du}{dx}=12x^2$

$$\therefore dx=\frac{du}{12x^2}$$

প্রতিস্থাপন করে পাই:

$$\int x^2u^{-2}\,\frac{du}{dx^2}=\frac{1}{12}\int u^{-2}du$$

সমাকলনে পাই : $\frac{1}{12}\int u^{-2}du=-\frac{1}{12}u^{-1}+c$

$$\Rightarrow -\frac{1}{12\left(4x^3+7\right)}+c$$

(ii) $\int 24xe^{3x^2}\,dx$

ধরা যাক $u=3x^2,\ \frac{du}{dx}=6x\,;\ dx=\frac{du}{6x}$

প্রতিস্থাপন করে : $\int 24xe^{u}\frac{du}{dx} = 4\int e^{u}du \Rightarrow 4e^{u} + c \Rightarrow 4e^{3x^2} + c$

(iii) $\frac{xe^{x}\,dx}{(x+1)^2}$

ধরা যাক $I = \int \frac{xe^{x}}{(x+1)^2}\,dx \Rightarrow \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}e^{x}\,dx$

$\Rightarrow \int e^{x}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$ ধরা যাক $e^{x}\cdot\frac{1}{x+1} = Z$

$\Rightarrow \left\{e^{x}\frac{1}{x+1} + e^{x}\left[-\frac{1}{(x+1)^2}\right]\right\}dx = dz$

$\Rightarrow e^{x}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx = dz$

$\therefore I = \int e^{x}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$

$\Rightarrow \int dZ = Z + c = e^{x}\cdot\frac{1}{x+1} + c$

$\left[\because Z = e^{x}\frac{1}{x+1}\right]$

(iv) $\int (x-9)^{7/4}\,dx$

ধরা যাক $u = x - 9 \quad \therefore \frac{du}{dx} = 1, dx = du$

প্রতিস্থাপন করে : $\int (x-9)^{7/4}\,dx = \int u^{7/4}\,du$

সমাকলন করে $\int u^{7/4}\,du = \frac{4}{11}u^{11/4} + c$

$\Rightarrow \frac{4}{11}(x-9)^{11/4} + c$

5.3.6 অংশভিত্তিক সমাকলন

প্রথম পদ্ধতি : সমাকলনের ক্ষেত্রে দুটি অপেক্ষক গুণন আকারে উপস্থিত থাকলে এ পদ্ধতিতে তার সমাকলিত মান নির্ণয় করা হয়। গুণনকৃত দুটো অপেক্ষকের সমাকলিত মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সূত্রটি ব্যবহৃত হয়। যদি u এবং v দুটি অপেক্ষক হয় তবে,

$$\int uv dx = u\int u dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int v dx\right\}dx$$

অথবা প্রথম অপেক্ষক $\times\int$ দ্বিতীয় অপেক্ষক dx $-\int\{\frac{d}{dx}$ প্রথম অপেক্ষক $\times\int$ দ্বিতীয় অপেক্ষক dx$\}$ dx

উদাহরণ 13 : $\int x^2e^x\,dx$

সমাধান : $I = x^2\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x^2)\int e^x dx\right\}dx$

$= x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$

$= x^2e^x - 2\left[x\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\right\}dx\right]$

$= x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right]$

$= x^2e^x - 2\ [xe^x - e^x]+c$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

$= e^x\ (x^2 - 2x + 2) + c$

দ্বিতীয় পদ্ধতি : u এর সম্পর্কে v এর সমাকলন পাওয়া যায়, uv থেকে v এর সম্পর্ক u এর সমাকলিত মান বিয়োগ করে অর্থাৎ $\int v dx = uv - \int u dv$.

উদাহরণ 14 : $\int x(x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx$

সমাধান : উল্লেখ্য যে এক্ষেত্রে প্রতিস্থাপন বা অন্য কোনো নিয়মে সমাকলিত মান নির্ণয় করা যায় না। এ কারণে উপরিউক্ত দ্বিতীয় পদ্ধতি অনুসারে উক্ত সমস্যাকে $\int vdu$ আকারে সাজিয়ে সমস্ত সমাকলন পদ্ধতিতে মান বের করার চেষ্টা করা হয়।

মনে করি $v = x$, ফলে $dv = dx$ এবং

মনে করি $u=\frac{3}{4}(x+1)^{3/2}$

যাতে $du=(x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx$ হয়।

$\therefore \int x(x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx=\int vdu$

$= vu-\int udx=\left(\frac{3}{4}\right)(x+1)^{4/3}\cdot x-\int\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}\,dx$

$=\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}x-\frac{9}{28}(x+1)^{7/3}+c$

উদাহরণ 15 : $\int xe^{x}\,dx$

সমাধান: এক্ষেত্রে মনে করি $v=x$ এবং $u=e^{x}$ যাতে $dv = dx$ এবং $du = e^{2}dx$। সুতরাং

$\int xe^{x}\,dx = \int vdu = uv = \int u\,dv$

$= e^{x}\cdot x - \int e^{x}\,dx$

$= e^{x}\cdot x - e^{x} + c = e^{x}(x-1) + c$

সমাকলিত মান সঠিক হয়েছে কিনা যাচাই করার জন্য উক্ত ফলাফলের অন্তরকলন মান নির্ণয় করে দেখতে হবে যে সেটা Integrand বা সমাকল্যের সমান কিনা।

5.3.7 আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন

যখন হর উচ্চতর ক্রমের হয় এবং তার উৎপাদক নির্ণয় সম্ভব হয় তখন সাধারণতঃ আংশিক ভগ্নাংশ প্রয়োগ করা হয়। প্রদত্ত ভগ্নাংশের হরের উৎপাদকগুলির প্রকৃতি বিবেচনা করে আংশিক ভগ্নাংশের বিভিন্ন পদ্ধতি আলোচনা করা হলো।

প্রথম পদ্ধতি : যখন হরে বাস্তব এবং এক ঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু কোনো উৎপাদকেরই পুনরাবৃত্তি হয় না, এই পদ্ধতিটি নিম্নোক্ত উদাহরণে দেখানো হলো।

উদাহরণ 16: $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\ dx$

সমাধান :

এরূপ সমস্যার ক্ষেত্রে হর অংশকে একঘাত বিশিষ্ট কয়েকটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হয়। যেমন,

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6)$$

$$= x(x-2)\ (x+3)$$

মনে করি $\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{x+3}$

উভয় পক্ষকে $x(x-2)\ (x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই

$$x^2+x-1 = A(x-2)(0+3) + B\cdot x\ (x+3) + C\cdot x\ (x-2)\ ...(1)$$

(1) নং অভেদে পর্যায়ক্রমে $x = 0, 2, -3$ বসিয়ে পাই

$$-1 = A(0-2)(0+3) \Rightarrow -1 = -6A \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$4+2-1 = B\times 2(2+3); \Rightarrow 5 = 10B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$9-3-1 = C(-3)(-3-2) \Rightarrow 5 = 15C \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1/6}{x} + \frac{1/2}{(x-2)} + \frac{1/3}{(x+3)}$$

$$\therefore \int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x} = \frac{1}{6}\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6}\log|x| + \frac{1}{2}\log|x-2| + \frac{1}{3}\log|x+3| + C$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি

যখন লবের ঘাত হরের ঘাত অপেক্ষা বৃহত্তর বা সমান, তখন লবকে হর দ্বারা ভাগ করে লবের ঘাতকে হরের ঘাত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করে নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে সমাকলন করা হয়।

উদাহরণ 17 : $\int \frac{x^2}{x+2} dx$

মনে করি $I = \int \left[(x-2) + \frac{4}{(x+2)} \right] dx$

$= \int (x-2)\, dx + \int \frac{4}{x+2} dx$

$= \frac{x^2}{2} - 2x + 4 \log (x+2) + C$

তৃতীয় পদ্ধতি :

যখন হরে বাস্তব এবং একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং এদের মধ্যে পুনরাবৃত্তি থাকে।

উদাহরণ **18 :** $\int \frac{x}{(x-1)^2 (x+2)} dx$

সমাধান : মনে করি, $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$

উভয় পক্ষকে $(x-1)^2$ $(x+2)$ দিয়ে গুণ করে পাই :

$x = A(x-1)\ (x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2 ....(1)$

(1) নং অভেদে পর্যায়ক্রমে $x = 1, -2$ বসিয়ে পাই

$1 = B(1+2) \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

$-2 = C(-2-1)^2 \Rightarrow C = -\frac{2}{9}$

আবার 1 নং অভেদে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই :

$0 = A + C \Rightarrow A - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow A = \frac{2}{9}$

$\therefore \int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx = \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+2}$

$$=\frac{2}{9}\{\log|x-1|-\log|x+2|\}+\frac{1}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C$$

$$=\frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{9}{3(x-1)}+C$$

চতুর্থ পদ্ধতি :

যখন হরে বাস্তব ও দ্বিঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু কোনো উৎপাদকেরই পুনরাবৃত্তি হয় না।

উদাহরণ 19 : $\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$

সমাধান: মনে করি $\frac{x}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$

উভয় পক্ষকে $(x-1)(x^2+4)$ দিয়ে গুণ করে পাই :

$x = A(x^2+4) + (Bx + C)(x - 1)$ ...(1)

(1) নং অভেদে x^2 এবং x এর সহগ সমীকৃত করে পাই

$A + B = 0$....(2) $\quad C - B = 1$ ....(3)

(1) নং অভেদে $x = 1$ বসালে $A=\frac{1}{5}$ হবে

$\therefore$ (2) ও (3) থেকে $A=\frac{1}{5}$ বসালে $B=-\frac{1}{5}$ ও $C=\frac{4}{5}$ হবে।

$$\therefore\int\frac{x\ dx}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{5}\int\frac{x-4}{x^2+4}$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{10}\int\frac{2x\ dx}{x^2+4}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$=\frac{1}{5}\log\ |x-1|\ -\frac{1}{10}\log\left|x^2+4\right|+\frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$$

পঞ্চম পদ্ধতি :

যখন হর বাস্তব এবং পুনরাবৃত্তিসহ দ্বিঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে তখন নিম্নোক্ত নিয়মে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করে সমাকলন করা হয়। যেমন—

উদাহরণ 20 : $\int \frac{2x\,dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$

সমাধান : $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow 2x = A\,(x^2+1)^2 + (Bx+C)\,(x+1)\,(x^2+1) + (Dx+E)\,(x+1)$ ...(1)

$\Rightarrow A\,(x^4+2x^2+1) + (Bx+C)\,(x^3+x^2+x+1) + (Dx^2+Dx+Ex+E)\,x$

$(A+B)\,x^4 + (B+C)\,x^3 + (2A+B+C+D)\,x^2 + (B+C+D+E)\,x + (A+C+E)$...(1)

উপরোক্ত (1) নং অভেদে $x = -1$ বসিয়ে $A = -\frac{1}{2}$ পাওয়া যায়। আবার x^4, x^3, x^2, x এর সহগ সমীকৃত করে

$A + B = 0$ . . . (2)

$B + C = 0$ . . . (3)

$2A + B + C + D = 0$ . . . (4)

$B+C+D+E = 2$ . . . (5)

(2) নং এ $A = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই $B = \frac{1}{2}$; (3) এ $B = \frac{1}{2}$ বসালে; $C = \frac{-1}{2}$ পাওয়া যায়; (5) এ $A = -\frac{1}{2}, B = y_2, C = -\frac{1}{2}$ বসালে D = 1 ও (5) এ $B = y_2$, $C = y_2$, D = 1 বসালে E = 1 পাওয়া যায়।

$$\therefore \int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \int \frac{-y_2\,dx}{(x+1)} + \int \frac{(y_2 x - y_2)\,dx}{(x^2+1)} + \int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} + \int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} + \int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

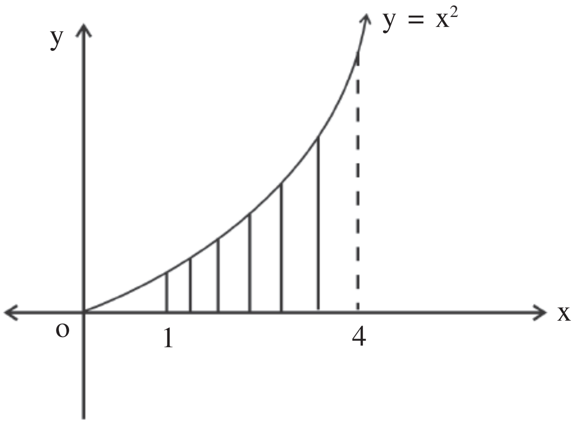
$$= -\frac{1}{2}\log|x+1| + y_4 \log\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + C$$

$$= \frac{1}{4}\log\frac{x^2+1}{\left(x+1\right)^2} + \frac{\left(x-1\right)}{2\left(x^2+1\right)} + C$$

5.4 নির্দিষ্ট সমাকল

5.4.1 সংজ্ঞা

গাণিতিক সমস্যার অন্তর্গত কোনো রাশিকে যদি বিশেষ নিয়মে কতগুলি অংশে ভাগ করা হয়, এবং এমন একটি শ্রেণির আকারে প্রকাশ করা যায় যে, শ্রেণিটির পদসংখ্যা যথেচ্ছভাবে বৃদ্ধি করা যায় এবং একই সঙ্গে প্রতিটি পদের মান ক্রমশঃ ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর করা সম্ভব হয়, তবে এই জাতীয় শ্রেণির যোগফলের সীমাকে নির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ মনে করা যাক, $y = x^2$ সন্তত অপেক্ষক, x অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 4$ বিন্দু দুটিতে অঙ্কিত কোটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে। (চিত্র 1) এক্ষেত্রে $1 \le x \le 4$



চিত্র 1

বিস্তারকে $x = 1, 1{\cdot}3, 1{\cdot}6$ ইত্যাদি বিন্দুসমূহ দ্বারা 10 টি সমান ভাগে ভাগ করে প্রত্যেক বিন্দুতে কোটিগুলি অঙ্কন করা হলে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফলটি 10টি অংশে বিভক্ত হবে এবং তার ফলে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফলকে 10টি পদের একটি শ্রেণির আকারে প্রকাশ করা যাবে। এইভাবে $1 \le x \le 4$ বিস্তারকে $x = 1, 1{\cdot}03, 1{\cdot}06\ldots$ ইত্যাদি বিন্দুসমূহ দ্বারা 100টি সমান ভাগে ভাগ করা এবং প্রত্যেক বিন্দুতে কোটিসমূহ অঙ্কন করা হলে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল 100টি অংশে

বিভক্ত হবে এবং তার ফলে ক্ষেত্রফলকে 100টি পদের একটি শ্রেণির আকারে প্রকাশ করা সম্ভব হবে। স্পষ্টতই বিস্তারের অন্তর্গত বিন্দুসমূহের সংখ্যা যথেচ্ছভাবে বৃদ্ধি করে উক্ত ক্ষেত্রফল প্রকাশক শ্রেণির পদসংখ্যার মানও ক্রমশ ক্ষুদ্র থেকে আরও ক্ষুদ্রতর হয়। এক্ষেত্রে এই প্রকার শ্রেণির যোগফলের সীমাকে নির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়।

5.4.2 যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা

মনে করা যাক, $a \le x \le b$ সসীম বিস্তারে $f(x)$ একটি সংজ্ঞাত, এক মানবিশিষ্ট ও সীমাবদ্ধ অপেক্ষক। এখন a, $a + h$, $a + 2h, \ldots, \{a + (n - 1) h\}$, $a + nh$ বিন্দুগুলি দ্বারা $a \le x \le b$ বিস্তারকে প্রত্যেকটি h দৈর্ঘ্যের n সংখ্যক উপবিস্তার (sub-interval) এ বিভক্ত করা হলে $a + nh = b$ বা $nh = b - a$ হবে। তাহলে,

$$\lim_{h\to 0} h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f\{a+(n-1)h\}\right]$$

অথবা সংক্ষেপে $\lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{r=0}^{n-1} f\,(a+rh)$

সীমাকে (যখন সীমার অস্তিত্ব থাকে) a ও b সীমার মধ্যে x এর সাপেক্ষে $f(x)$ অপেক্ষকের নির্দিষ্ট সমাকল বলা হয় এবং তাকে $\int_a^b f(x)\,dx$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখানে b কে সমাকলের ঊর্ধ্বসীমা (upper or superior limit) এবং a কে সমাকলের নিম্নসীমা (lower or inferior limit) বলা হয়। সুতরাং $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{r=0}^{n-1} f(a+rh)$ [যেখানে $nh = b - a$]

5.4.3 সমাকলের মৌলিক উপপাদ্য :

যদি $a \le x \le b$ বিস্তারে $f(x)$ অপেক্ষক সমাকলনযোগ্য হয়, এবং $\phi(x)$ এমন একটি অপেক্ষক হয় যে, $a \le x \le b$ বিস্তারের সর্বত্র $f(x) = \phi'(x)$ তবে,

$\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$ হবে।

একেই বলে সমাকলনবিদ্যার মৌলিক উপাপাদ্য।

5.4.4 নির্দিষ্ট সমাকলের ধর্মসমূহ :

1. যদি নির্দিষ্ট সমাকলের সীমা পরিবর্তন করা হয় তাহলে তার চিহ্ন পরিবর্তন হবে।

অর্থাৎ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2. যদি নির্দিষ্ট সমাকলের উর্ধ্ব ও নিম্নসীমার মান একই হয় তবে সমাকল্যের মান শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

3. নির্দিষ্ট সমাকলকে তার উপসমাকলগুলির ভাগগুলির যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা হয়।

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \,,\ a \le b \le c$$

4. দুটি সমান সীমা (উর্ধ্ব ও নিম্ন) সহ নির্দিষ্ট সমাকলের যোগফল বা অন্তর হোলো সেই দুই অপেক্ষকের যোগফল বা অন্তরের নির্দিষ্ট সমাকল।

অর্থাৎ $\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx$

5. যদি কোনো অপেক্ষককে ধ্রুবক দিয়ে গুণ করে তার নির্দিষ্ট সমাকল নেওয়া হয় তাহলে তা হবে সেই ধ্রুবক গুণিত সেই অপেক্ষকের নির্দিষ্ট সমাকল।

$$\therefore \int_a^b Kf(x)\,dx = K \int_a^b f(x)\,dx$$

উদাহরণ 21 : $\int_5^5 (2x+3)\,dx$

$$= \int_5^5 (2x+3)\,dx = \left[x^2 + 3x\right]_5^5 = \left[5^2 + 15\right] - \left[5^2 + 15\right] = 0$$

উদাহরণ **22 :** $\int_0^3 \frac{6x}{x^2+1}\,dx$

ধরা যাক $u = x^2 + 1 ; \frac{du}{dx} = 2x ; dx = \frac{du}{2x}$

$$\therefore \int \frac{6x}{x^2+1}\,dx = \int 6xu^{-1} \frac{du}{2x} = 3\int u^{-1}\,du$$

$= 3\ln|u| = 3\ln\ [x^2+1]$

$$\therefore \int_0^3 \frac{6x}{x^2+1}\,dx = 3\ln\left[x^2+1\right]_0^3$$

$= 3\ln\ |3^2+1| - 3\ \ln|\ 0^2+1$

$= 3\ln 10 - 3 \ln 1$

$= 3\ln 10 = 6{\cdot}9078$

আবার u-র সীমা $u = 0^2 + 1 = 1$ এবং

$u = 3^2 + 1 = 10$

u-এর সাপেক্ষে সমাকল করে পাই :

$$3\int_1^{10} u^{-1}du = 3lu\left[u\right]_1^{10}$$

$= 3\ln 10 - 3\ln 1$

$= 3\ln 10 = 6{\cdot}9078$

$[\because \ln 1 = 0]$

উদাহরণ **23 :** মান নির্ণয় করো $\int_1^3 5xe^{x+2}\,dx$

ধরা যাক $f(x) = 5x$, $f'(x) = 5$, $g'(x)=e^{x+2}$

$g(x) = \int e^{x+2}dx = e^{x+2}$

$\therefore \int 5xe^{x+2}dx = 5xe^{x+2} - \int e^{x+2}5\ dx$

$= 5xe^{x+2} - 5\int e^{x+2}\ dx$

$= 5xe^{x+2} - 5e^{x+2}$

[অখণ্ড সমাকলন পদ্ধতি অনুসরণ করে]

$$\therefore \int_1^3 5xe^{x+2}\,dx = \left[5xe^{x+2} - 5e^{x+2}\right]_1^3$$

$= (15e^5 - 5e^5) - (5e^3 - 5e^3)$

$= 10e^5 = 10\times148{\cdot}4 = 1484$

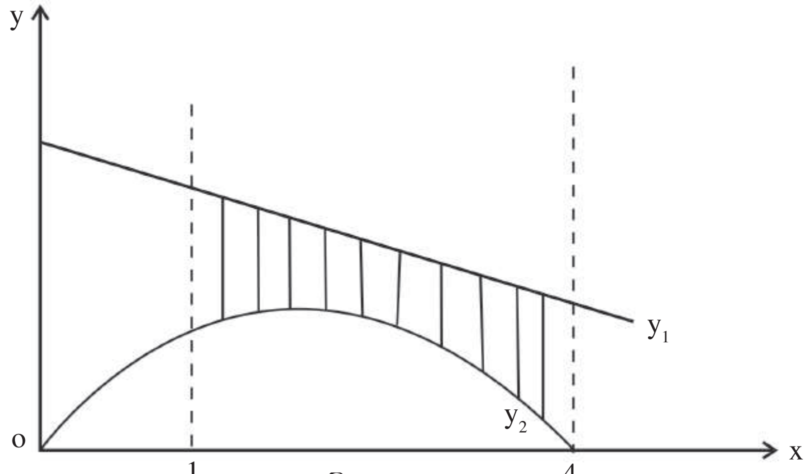
5.4.5 বক্ররেখাগুলির অন্তর্বর্তী ক্ষেত্রফলের পরিমাপ

দুই বা তার বেশি বক্ররেখার মধ্যবর্তী ক্ষেত্রফল নির্দিষ্ট সমাকলের মাধ্যমে নির্ধারণ করা সম্ভব। এটি একটি উদাহরণের মাধ্যমে দেখানো যাক।

উদাহরণ **24 :** $y_1 = 7 - x$ এবং $y_2 = 4x - x^2$ এই দুই অপেক্ষকের $x = 1$ থেকে $x = 4$ এর মধ্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : $A = \int_1^4 (7 - x)\,dx - \int_1^4 \left(4x - x^2\right) dx$

যেখানে A হোলো অপেক্ষকদ্বয়ের অন্তর্বর্তী এলাকা।



চিত্র : 2

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2\cdot 5x^2 + 7x\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{1}{3}4^3 - 2\cdot 5\times 4^2 + 7\times 4\right] - \left[\frac{1}{3}\times 1^3 - 2\cdot 5\times 1^2 + 7\times 1\right]$$

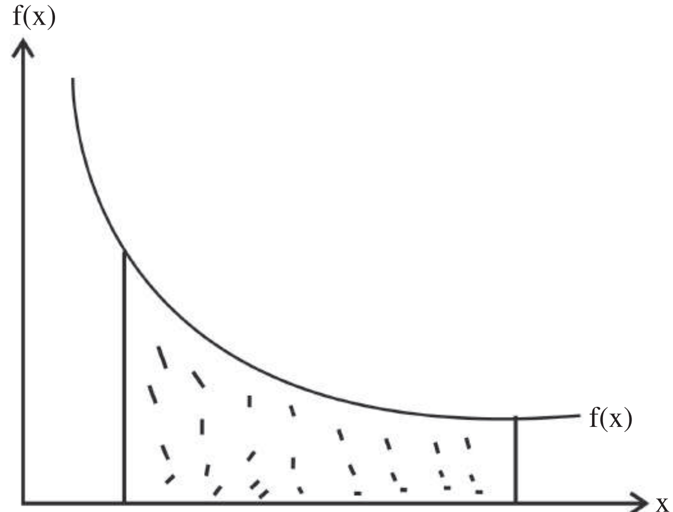
$= 4\cdot 5$

5.4.6 সঙ্গতিবিহীন বা অসংগত সমাকল

কিছু কিছু বক্ররেখার সংলগ্ন ক্ষেত্র x অক্ষে অসীম ভাবে বাড়তে থাকে। এসব ক্ষেত্রে তাদের সঙ্গতিবিহীন সমাকল পদ্ধতিতে মান নির্ণয় করা হয়। যে নির্দিষ্ট সমাকলে একটি সীমা সসীম ও অপরটি অসীম তাদেরই বলা হয় সঙ্গতিবিহীন সমাকল, যেমন $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ এবং $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ '$\propto$' কোনো সংখ্যা যেহেতু নয় তাদের, x এর জন্য F(x) এ প্রতিস্থাপন করা যাবে না। কিন্তু তাদের অপর সকলের সীমায়িত রূপ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে।

যেমন $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$ এবং

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$



চিত্র : 3

উদাহরণ 25 : $\int_{1}^{\infty} \frac{6}{x}\,dx$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{6}{x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[6\ln|x|\right]_{1}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[6\ln|b| - 6\ln|1|\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[6\ln|b|\right] \quad \left[\because \ln|1| = 0\right]$$

যেহেতু $b \to \infty$; $6\ln |b| \to \infty$ এই সঙ্গতিবিহীন সমাকলটির অপসারণ ঘটছে (diverge)। সুতরাং এর কোনো নির্দিষ্ট মান থাকবে না। অর্থাৎ এই অপেক্ষকের সংলগ্ন প্রদত্ত ক্ষেত্রফলের মান নির্ণয় করা যাবে না। কিন্তু যদি সীমার মান নির্ণয় করা যায় তখন সমাকলটি অভিসৃত হয় (convergent) এবং তার সংলগ্ন ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্ভব হয়।

5.4.7 লা'হপিটালের নিয়ম

যখন $f(x) = g(x) / h(x)$ এর $x \to a$ এ সীমায়িত মান নির্ণয় করা যাবে না যদি (1) লব ও হর শূন্যের দিকে সীমায়িত হয় এবং $\frac{0}{0}$ অনির্ণেয় গঠন (indeterminate form) হয় (2) যখন লব ও হর অসীমের দিকে সীমায়িত হয় এবং $\frac{\infty}{\infty}$ অনির্ণেয় গঠন হয়; তখন লা'পিটালের নিয়মে মান নির্ণয় করা হয়। সূত্রটি হোলো:

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{n(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{n'(x)}$$

উদাহরণ 26 : মান নির্ণয় করো : $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{16-x^2}$

সমাধান : যত $x \to 4$ হবে, তত $x - 4$; $16 - x^2 \to 0$ হবে।

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{16-x^2} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{-22} = -\frac{1}{8}$$ (লা'পিটাল সূত্রের সাহায্যে)

5.5 অর্থনীতিতে সমাকলনের ব্যবহার

অনির্দিষ্ট সমাকলনের দ্বারা অর্থনীতিতে ব্যবহৃত অপেক্ষকগুলির প্রান্তিক গঠন থেকে মোট গঠন বের করা যায়। যেমন—

(i) প্রান্তিক আয় থেকে মোট আয় পাওয়া যায়।

(ii) প্রান্তিক ব্যয় (MC) থেকে মোট ব্যয় পাওয়া যায়।

(iii) প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা (MPC) থেকে মোট ভোগ প্রবণতা নির্ণয় করা যায়।

পক্ষান্তরে, সুনির্দিষ্ট সমাকলন দ্বারা নিম্নলিখিত বিষয়গুলি নির্ণয় করা যায়:

(i) ভোক্তার উদ্বৃত্ত

(ii) উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত

(iii) মূলধনের সময়পথ (Time Path of Capital)

(iv) অর্থ প্রবাহের বর্তমান মূল্য (Present value of cash flow) ইত্যাদি।

5.5.1 প্রান্তিক অপেক্ষক থেকে মোট অপেক্ষক নির্ণয় করা

উদাহরণ 27: কোনো ফার্মের প্রন্তিক ব্যয় $C(\phi) = 2e^{0\cdot2\phi}$ এবং স্থির ব্যয় হোলো $C_F = 90$; মোট ব্যয় অপেক্ষক নির্ণয় করো।

সমাধান : $\int 2e^{0\cdot2\phi}d\phi = 2\times\frac{1}{0\cdot2}e^{0\cdot2\phi} + C$

$= 10e^{0\cdot2\phi} + C$

$= 10e^{0\cdot2\phi} + C$

কিন্তু যখন $\phi = 0$, মোট ব্যয় $C_F = 90$

$\therefore\ 10e^0 + C = 90\ ;\ \Rightarrow C = 90 - 10 = 80$

$\therefore$ মোট ব্যয় অপেক্ষক : $C(\phi) = 10e^{0\cdot2\phi} + 80$

5.5.2 সমাকলনের স্থির রাশির অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা

অনির্দিষ্ট সমাকলনের বেলায় অপেক্ষকের সমাকলের সঙ্গে একটি স্থির রাশি (c) যোগ করা হচ্ছে। কোনো প্রান্তিক অপেক্ষকের সমাকল্য নির্ণয় করলে, প্রান্তিক অপেক্ষকের নামানুসারে এর নামকরণ হয়। যেমন, পণ্যের প্রান্তিক ব্যয় অপেক্ষকের সমাকলন নিলে মোট ব্যয় অপেক্ষক পাওয়া যায়। সমাকলনের স্থির রাশি সাধারণত অর্থনীতিতে একটি

স্বয়ম্ভূত চলক/উপাদান নির্দেশ করে। এর নাম সমাকল্য অপেক্ষকের উপর নির্ভর করে। যেমন মোট ব্যয় অপেক্ষকের ক্ষেত্রে স্থির রাশিটি মোট স্থির ব্যয় নির্দেশ করে। সমাকলনের স্থির রাশির মানের প্রাথমিক শর্ত (Initial Condition) অথবা আবদ্ধ শর্তের (Boundary Condition) উপর নির্ভর করে। তাই স্থিররাশির মান ধনাত্মক, ঋণাত্মক, না শূন্য হবে তা মূলত নির্ভর করে প্রাথমিক অথবা আবদ্ধ শর্তের প্রকৃতির উপর।

আবার একটি উদাহরণ দেওয়া যাক—

উদাহরণ 28: কোনো দেশে প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা MPC = $C'(y) = 0{\cdot}5$ ও মোট আয় $y = 100$ হলে মোট ভোগ ব্যয় $C(y) = 200$ হয়। মোট ভোগ অপেক্ষক নির্ণয় করো।

সমাধান : $C(y) = \int C'(y)\, dy = \int 0{\cdot}5\, dy$

$$= 0{\cdot}5\, y + C$$

এখানে C = স্বয়ম্ভূত ভোগ ব্যয়। এর প্রাথমিক শর্ত

$y=100$ হলে $C(y) = 200$ প্রয়োগ করলে:

$200 = 0{\cdot}5 \times 100 + C \Rightarrow C = 150$

$\therefore$ মোট ভোগ ব্যয় : $C(y) = 0{\cdot}5y + 150$

5.5.3 চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা থেকে চাহিদা অপেক্ষক নির্ণয়

উদাহরণ 29: ধরা যাক কোনো দ্রব্যের দামগত স্থিতিস্থাপকতা হোলো $e_p = \dfrac{5p}{(p+3)(p-2)}$। চাহিদা অপেক্ষক বার করো। প্রদত্ত আছে যে যখন p = 3, 6 একক দ্রব্য ছিল চাহিদার পরিমাণ।

ধরা যাক p হোলো দ্রব্যের 1 এককের দাম, এবং x হোলো চাহিদার পরিমাণ।

$$e_p = -\frac{dx/x}{dp/p} \Rightarrow -\frac{pdx}{xdp} = \frac{5p}{(p+3)(p-2)}$$

$$-\int \frac{pdx}{xdp} = \int \frac{5p}{(p+3)(p-2)} \Rightarrow \log\frac{p-2}{p+3} = \log\frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow x = c\left(\frac{p+3}{p-2}\right)$$

এখন $p = 3$ হলে $x = 6$। অর্থাৎ $6 = 6C$; $\therefore\ C = 1$

$\therefore$ চাহিদা অপেক্ষক হোলো, $x = \frac{p+3}{p-2}$

5.5.4 প্রান্তিক পরিবর্ততার হার থেকে উপযোগিতা অপেক্ষক নির্ণয় করা

উদাহরণ 30: ধরা যাক y ও x দ্রব্যের প্রান্তিক পরিবর্ততার হার হোলো : $M = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{y+b}{x+a}$, যদি α, β, a, b ধ্রুবক হয়,

তাহলে উপযোগিতা অপেক্ষক নির্ণয় করো।

$$M = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{y+b}{x+a},$$

$$\Rightarrow -\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{y+b}{x+a} \quad \left[\because MRS_{yx} = \left|\frac{dy}{dx}\right|\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\alpha(y+b)} = \frac{dx}{\beta(x+a)}$$

$$\Rightarrow \beta\,\frac{dy}{y+b} = \frac{-adx}{x+a}$$

উভয়পক্ষে সমাকলন করে পাই :

$$\int \frac{\beta\,dy}{y+b} = -\int \frac{\alpha\,dx}{x+a}$$

$$\Rightarrow b \log(y + b) + \log c_1 = -\alpha \log(x + a) + \log c_2$$

$$\Rightarrow \log(y + b)^b + \log(x+a)^\alpha = \log c_2 - \log c_1$$

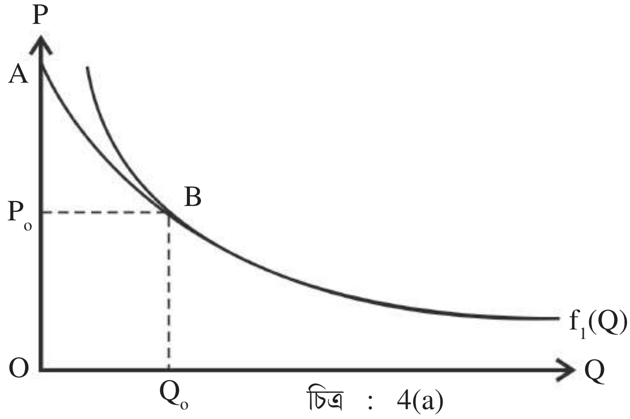
$$\Rightarrow \log\left\{(y+b)^\beta \cdot (x+a)^\alpha\right\} = \log\left(c_2/c_1\right) = \log u$$

$$\Rightarrow u = (x+a)^\alpha (y+b)^\beta$$

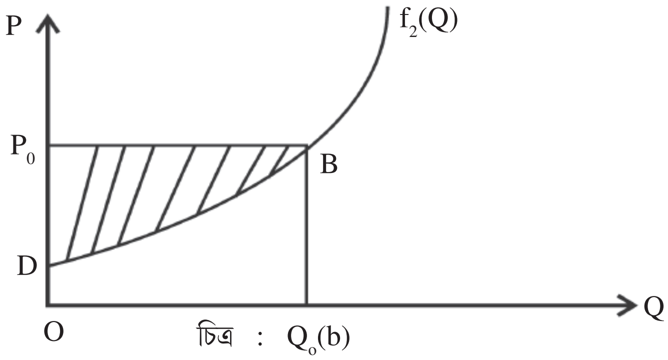
এটিই হল নির্ণেয় উপযোগিতা অপেক্ষক।

5.5.5 ভোগ উদ্বৃত্ত ও উৎপাদন উদ্বৃত্তর পরিমাপ

ধরা যাক চাহিদা অপেক্ষকের ধরন হোলো : $P_1 = f_1(Q)$ (চিত্র 4a), যেটা থেকে বোঝা যায় কোনো দ্রব্যের বিভিন্ন পরিমাণ ক্রয় করার জন্য ভোক্তারা যে বিভিন্ন দাম দিতে চায় তার রূপ। যদি (Q_0, P_0)-তে সাম্যাবস্থা হয় তাহলে P_0-র থেকে বেশি যে দাম দিতে চায় তার উপকার হবে। সেক্ষেত্রে মোট লাভ হবে, ভোক্তার ক্ষেত্রে, যা তারা দিতে পারতো এবং যে মোট ব্যয় এখন করতে হচ্ছে তার বিয়োগফল। অর্থাৎ AP_0B ক্ষেত্র নির্দেশ করে ভোক্তার ভোগ উদ্বৃত্ত।



চিত্র : 4(a)



চিত্র : Q_o(b)

$\therefore$ ভোক্তার ভোগ উদ্বৃত্ত $= \int_0^{Q_0} f_1(Q)\, dQ - P_0Q_0$

অপরপক্ষে, যদি জোগান অপেক্ষক হয় $P_2 = f_2(Q_2)$ (চিত্র 4b), তা নির্দেশ করে কোনো দ্রব্যের বিভিন্ন দামে, যে বিভিন্ন পরিমাণ বিক্রি হয় তার তালিকা, যদি (Q_0, P_0) তে সাম্যাবস্থা হয় তাহলে যে P_0-র চেয়ে কম মূল্যে জোগান দিতে পারলে সে লাভ করবে। তাহলে উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত হোলো, DP_0B ক্ষেত্র (চিত্র 4b) বা

$$Q_0P_0 - \int_o^{Q_0} f_2(Q)\, dQ$$

এটি হল উৎপাদকের উদ্বৃত্ত (Producer's Surplus)।

উদাহরণ 31: যদি চাহিদা অপেক্ষক $P_d = 25 - Q^2$ ও জোগান অপেক্ষক $P_s = 2Q + 1$ হয়, তাহলে, ভোগ উদ্বৃত্ত ও উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত নির্ণয় করো। (বাজারটি পূর্ণ প্রতিযোগিতা মূলক)

সমাধান : বাজারের ভারসাম্যর অবস্থানুসারে :

$2Q + 1 = 25 - Q^2$ ($\because$ S = D)

$\Rightarrow Q + 2Q - 24 = 0$

$\Rightarrow (Q+6)(Q-4) = 0 \quad \because Q \leq 0$

$\therefore Q_0 = 4$; $\therefore P_0 = 9$

CS (ভোগ উদ্বৃত্ত) $= \int_0^4 (25 - Q^2)\, dQ - 9 \times 4$

$$= \left[25Q - \frac{1}{3}Q^3\right]_0^4 - 36$$

$$= \left[25 \times 4 - \frac{1}{3} \times 4^3\right] - 0 - 36$$

$$= 42 \cdot 67$$

PS (উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত) :

$$= 9 \times 4 - \int_0^4 (2Q+1)\, dQ = 36 - \left[Q^2 + Q\right]_0^4 = 16$$

বিবিধ উদাহরণ

উদাহরণ 32: ধরা যাক কোনো উৎপাদক x এর পরিবর্তনের সঙ্গে উৎপাদনের (Q) পরিবর্তনের হার হোলো উৎপাদকের পরিমাণ ও উৎপাদনের পরিমাপের গুণফল। যদি $Q = 4e^2$ হয় যখন $x = 2$ তাহলে উৎপাদন অপেক্ষক নির্ণয় করো।

সমাধান : প্রশ্নানুসারে, $\frac{dQ}{dx} = Qx \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = x\, dx$

উভয়পক্ষে সমাকল করে পাই :

$$\int \frac{dQ}{Q} = \int x\, dx \Rightarrow \log Q = \frac{x^2}{2} + \log C$$

$$\Rightarrow \log Q - \log C = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \log\left(\frac{Q}{C}\right) = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \frac{Q}{C} = e^{x^2/2} \Rightarrow Q = Ce^{x^2/2}$$

$\therefore$ যখন $x = 2$, $Q = 4e^2$ $\therefore 4e^2 = Ce^{4/2} = Ce^2 \Rightarrow C = 4$

$\therefore$ উৎপাদন অপেক্ষক $Q = 4e^{x^2/2}$

উদাহরণ 33: যদি $q = f(p)$ এই চাহিদা অপেক্ষকের সাপেক্ষে চাহিদার দামগত স্থিতিস্থাপকতার মান ধ্রুবক হয় তবে চাহিদা অপেক্ষক নির্ণয় করো।

$$|e_p| = -\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp} = \alpha \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\alpha\frac{dp}{p}$$

$$\int\frac{dq}{q} = -\alpha\int\frac{dp}{p} \Rightarrow \log q + \log C_1 = -\alpha \log p + \log C_2$$

$$\Rightarrow \log\left(qp^{\alpha}\right) = \log\left(\frac{C_2}{C_1}\right) \Rightarrow qp^{\alpha} = C \quad \left(\text{যেখানে } C = \frac{C_2}{C_1}\right)$$

$\therefore q = \dfrac{C}{p^{\alpha}}$ হলো নির্ণেয় চাহিদা অপেক্ষক।

উদাহরণ 34: চাহিদা অপেক্ষক, $p = 45 - \dfrac{x}{2}$ এবং দাম 32.5 হলে ভোক্তার উদ্বৃত্তের পরিমাণ নির্ণয় কর।

উত্তর : দাম $p = 32.5$ $\therefore 45 - \dfrac{x}{2} = 32\cdot5$ $\therefore \dfrac{x}{2} = 12\cdot5$ $\therefore x = 25$

এখন, ভোক্তার উদ্বৃত্ত $= \int_0^{25}\left(45 - \dfrac{x}{2}\right)dx - 32\cdot5\times25$

$$= \left[45x - \frac{x^2}{4}\right]_0^{25} - 812\cdot5 = 45\times25 - \frac{25\times25}{4} - 812\cdot5$$

$= 1125 - 156.25 - 812.50 = 1125.00 - 968.75 = 156.25.$

উদাহরণ 35 : চাহিদা অপেক্ষক, $p_d = 4 - x^2$: জোগান অপেক্ষক : $p_s = x + 2$,

নিখুঁত প্রতিযোগিতার অবস্থা ধরে নিয়ে ভোক্তার উদ্বৃত্ত এবং উৎপাদকের উদ্বৃত্ত নির্ণয় কর।

উত্তর : নিখুঁত প্রতিযোগিতার বাজারে ভারসাম্য $p_d = p_s$

$\therefore\ 4 - x^2 = x+2$ বা, $x^2+x-2=0 \setminus (x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x = -2, 1$ যেহেতু $x < 0,\ \therefore\ x=1$ তখন $p = 3$

$\therefore$ ভোক্তার উদ্বৃত্ত $= \int_0^1 (4 - x^2)\, dx - 3 \times 1 = \left[4x - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 - 3$

$$= 4 - \frac{1}{3} - 3 = \frac{12 - 1 - 9}{3} = \frac{2}{3}$$

উৎপাদকের উদ্বৃত্ত $= 3 \times 1 - \int_0^1 (x+2)\, dx = 3 - \left[\dfrac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1$

$$= 3 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{6 - 1 - 4}{2} = \frac{1}{2}$$

উদাহরণ 36 : মুনাফা সর্বাধিককারী একচেটিয়া কারবারীর চাহিদা অপেক্ষকটি হল, $p = 274 - x^2$, $MC = 4 + 3x$

ভোক্তার উদ্বৃত্ত (ভারসাম্য বিন্দুতে) নির্ণয় কর।

উত্তর : $p = 274 - x^2\ \therefore\ R = px = 274x - x^3$

$\therefore MR = \dfrac{dR}{dx} = 274 - 3x^2$, এখানে $MC = 4+3x$

$\therefore$ $MR = MC$ বসিয়ে পাই, $274-3x^2 = 4 + 3x$

$\therefore\ 3x^2 + 3x - 270 = 0$, বা, $x^2 + x - 90 = 0$

$\therefore\ (x+10)\ (x-9) = 0\quad \therefore\ x = -10, 9$, কিন্তু $x > 0,\ \therefore\ x = 9$

তখন $p = 274-81 = 193$

এখন ভোগকারীর উদ্বৃত্ত $= \int_O^9 (274 - x^2)\, dx - 193 \times 9 = \left[274x - \dfrac{23}{2}\right]_0^9 - 193 \times 9$

$= 274 \times 9 - 81 \times 3 - 193 \times 9$

$= 9\ (274 - 27 - 193) = 9 \times 54 = 486$

সমাকলনের আরো কয়েকটি অঙ্ক

উদাহরণ 37: MC = 2 + 3e^q, TFC = 500, TC অপেক্ষক নির্ণয় কর।

উত্তর : $\frac{dc}{dq} = 2 + 3e^q$ এখন $c = \int \frac{dc}{dq} \cdot dq$

$\therefore c = \int \left(2 + 3e^q\right) dq = 2q + 3e^q + k$

q = 0 বসিয়ে আমরা পাই, TFC = 0+3+k কিন্তু TFC = 500

$\therefore$ 3+k = 500 $\therefore$ k = 497 $\therefore$ c = 2q + 3e^q + 497

উদাহরণ 38: MR = 16 – q^2 হলে সর্বাধিক TR নির্ণয় কর। AR অপেক্ষকও দেখাও। যেখানে TR সর্বাধিক, সেই বিন্দুতে চাহিদার দামগত স্থিতিস্থাপকতার মান নির্ণয় কর।

উত্তর : মোট রেভিনিউ, $R = \int dR = \int \frac{dR}{dq} \cdot dq = \int MR\ dq$

$\therefore R = \int \left(16 = q^2\right) dq = 16q - \frac{q^3}{3} + R$

যখন q = 0, R = 0 $\therefore$ k = 0 সুতরাং, $R = 16q - \frac{q^3}{3}$

$AR = \frac{R}{q} = 16 - \frac{q^2}{3}$ সুতরাং চাহিদা অপেক্ষক,

$p = 16 - \frac{q^2}{3}$ এখন, R সর্বাধিক যখন $\frac{dR}{dq} = MR = 0$

এবং $\frac{d^2R}{dq^2} < 0$ এখন, $\frac{dR}{dq} = 0 \Rightarrow 16 - q^2 = \therefore q = \pm 4$

$\frac{d^2R}{dq^2} - 2q < 0$ যদি $q = +4$ হয়। $\therefore$ যখন $q = +4$

মোট রেভিনিউ সর্বাধিক। সর্বাধিক $R = 16 \times 4 - \frac{4^3}{3}$

$= 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3} = 42.7$

বিকল্পভাবে, সর্বাধিক $R = \int_0^4 \frac{dR}{dq}.dq = \int_0^4 MR\ dq$

$= \int_0^4 \left(16 - q^2\right) dq = \left[16q - \frac{q^3}{3}\right]_0^4 = 16 \times 4 - \frac{4^3}{3} = \frac{192 - 64}{3} = \frac{128}{3}$

আরো এক ভাবে সর্বাধিক R-এর মান নির্ণয় করা যায়।

আমরা জানি, R সর্বাধিক যখন q = 4, তখন $p = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

$\therefore$ সর্বাধিক $R = p \times q = 4 \times \frac{32}{3} = \frac{128}{3}$

এখন TR যেখানে সর্বাধিক, সেই বিন্দুতে e_p-র মান দেখা যাক।

আমরা পেয়েছি, $p = AR = 16 - \frac{q^2}{3}$

$\therefore \frac{dp}{dq} = -\frac{2q}{3}$ $\therefore \frac{dq}{dp} = -\frac{3}{2q}$

এখন $\left|e_p\right| = -\frac{p}{q}.\frac{dq}{dp} = -\frac{p}{q} \times \frac{3}{2q} = \frac{32}{3 \times 4} \times \frac{3}{2 \times 3} = 1$

সুতরাং, যখন R সর্বাধিক, তখন $\left|e_p\right| = 1$

উদাহরণ 39: $MC = 2 + 3\sqrt{9} + \frac{5}{5\sqrt{q}}$, TC নির্ণয় কর যখন f(1) = 21

উত্তর : $TC = f(q) = \int MC\ dq = \int \left(2 + 3q^{\frac{1}{2}} + 5q^{-\frac{1}{2}}\right) dq$

$$= 2q + \frac{3q^{3/2}}{3/2} + \frac{5q^{1/2}}{1/2} + k = 2q + 2q^{3/2} + 10q^{\frac{1}{2}} + k$$

যখন q = 1, f(q) = 21

$$\therefore 2(1) + 2(1)^{3/2} + 10(1)^{1/2} + k = 21$$

$\therefore$ 14+k = 21 $\quad \therefore$ k = 7

$\therefore TC = 2q + 2q^{3/2} + 10q^{1/2} + 7$. এখানে TFC = 7

উদাহরণ 40 : $MR = \frac{ab}{(x+b)^2} - C$ হলে চাহিদা অপেক্ষকটি নির্ণয় কর।

উত্তর : $TR = \int \frac{d\,TR}{dx} \cdot dx = \int \left[\frac{ab}{(x+b)^2} - C \right] dx$

$$= \frac{ab(x+b)^{-1}}{-1} - Cx + k = -\frac{ab}{x+b} - cx + k$$

এখন, যদি x = 0, TR = 0

$$\therefore -\frac{ab}{b} + k = 0 \quad \therefore k = a$$

সুতরাং, $TR = -\frac{ab}{x+b} - cx + a = \frac{ax + ab - ab}{x+b} - cx = \frac{ax}{x+b} - cx$

$\therefore$ চাহিদা অপেক্ষক, $p = AR = \frac{TR}{x} = \frac{a}{x+b} - c$ (উত্তর)

উদাহরণ 41: নিট বিনিয়োগের হার, $I(t) = 120\,t^{2/3}$ এবং $t = 0$

প্রাথমিক মূলধন ভাণ্ডার হল 90

মূলধন অপেক্ষক K(t) নির্ণয় কর।

উত্তর : $K(t)=\int I(t)\,dt=\int 120\,t^{2/3}\,dt=\dfrac{120\,t^{5/3}}{5/3}+c=72\,t^{5/3}+c$

যখন t = 0, K(0) = 90 $\therefore$ c = 90

$\therefore K(t)=72t^{5/3}+90$ হল মূলধন অপেক্ষক

(4) ধরা যাক, $I(t)=3t^{1/2}$ এবং t = 0 তে প্রাথমিক মূলধন ভাণ্ডার K(0)। মূলধনের (K) সময় পথ নির্ণয় কর।

উত্তর : $K(t)=\int I(t)\,dt=\int 3t^{1/2}dt=3\cdot\dfrac{t^{3/2}}{3/2}+C=2t^{3/2}+c$

যখন t = 0, c = K(0), সুতরাং মূলধনের সময়পথ (time path) হল $K(t)=K(0)+2t^{3/2}$

5.6 সারাংশ

আলোচনা থেকে বিপরীত অবকলন হিসাবে সমাকলনকে কীভাবে দেখানো যায় তা ব্যাখ্যা করা হয়েছে। [a, b] অন্তরালে সংজ্ঞাত কোনও অপেক্ষক f এর জন্য যদি এমন একটি অপেক্ষক F-এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে [a, b] অন্তরালের সকল বিন্দু x এর জন্য $F'(x) = f(x)$ হয় তবে F কে [a, b] অন্তরালে f এর অনির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়। সমাকলনের বিভিন্ন পদ্ধতি, এবং তার অনুসরণে সমাধান কিভাবে হবে তা দেখানো হয়েছে। সমাকলনের মৌলিক উপপাদ্য ব্যাখ্যা করা হয়েছে। নির্দিষ্ট সমাকলের ধারণা ও তার ব্যাখ্যা করা হয়েছে। [a, b] অন্তরালে যদি অপেক্ষক $f : [a, b]\rightarrow R$ সন্তত হয় এবং সমাকলনযোগ্য হয় অর্থাৎ [a, b] অন্তরালে এমন একটি অপেক্ষক F পাওয়া যাবে যেখানে ওই অন্তরালের সব বিন্দুতে $F'(x)=f(x)$ হবে, তাহলে $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$। এর $\int_a^b f(x)\,dx$ সমাকলটিকে নির্দিষ্ট সমাকল ও a ও b কে যথাক্রমে নিম্নসীমা ও উচ্চসীমা এবং [a, b] অন্তরালকে সমাকলনের অঞ্চল বলা হয়। উভয় ধরনের সমাকলনেরই অর্থনীতির ক্ষেত্রে প্রায়োগিক বিষয় নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

5.7 অনুশীলনী

1. প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করো : $\int 12x^2(x^3+2)\,dx$

2. সখণ্ড সমাকলন পদ্ধতিতে $\int 4x\,(x+1)^3\,dx$ এর সমাধান করো।

3. যদি প্রান্তিক ব্যয় MC = 25 + 30Q – 9Q^2 ও স্থির ব্যয় 55 হয় তাহলে গড় ব্যয় নির্ণয় কর।

4. $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx$ এর অভিসৃত মান (convergence) কত হবে?

5. যদি যোগান অপেক্ষক হয় $P = (Q + 3)^2$ তাহলে $P_0 = 81$ এর উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত নির্ণয় করুনয

5.8 গ্রন্থপঞ্জি

1. Carl Simon and Lawrence Blune : 1994) : Mathematics for Economists, W.W.Norton and Company.
2. Sydsaeter K, Hammond P, and Strom A (2015) : Essential Mathematics for Economic Analysis, Pearson.
3. Takayama, A. (1974) : Mathematical Economics, Dryden Press.
4. Yamane, T. (1968) : Mathematics for Economists, Prentice Hall.
5. Bhukta, Anindya and Seikh Salim (2013) : Mathematics for Undergraduate Economics, Progressive Publishers.
6. Zameeruddin, Qazi and V.K. Khanna (1983): Mathematics in Commerce and Economics, Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

একক 6 □ অর্থনীতিতে ব্যবহৃত পার্থক্যভিত্তিক সমীকরণ

গঠন

6.1 উদ্দেশ্য

6.2 প্রস্তাবনা

6.3 পার্থক্যভিত্তিক সমীকরণের ধারণা

6.4 পার্থক্যভিত্তিক সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি

6.5 সাম্যাবস্থার গতীয় স্থিতিশীলতা

6.6 অর্থনীতিতে পার্থক্য ভিত্তিক সমীকরণের ব্যবহার: কবওয়েব মডেল

6.7 মজুত ভান্ডারের ক্ষেত্রে বাজারের অবস্থার মডেল

6.8 সারাংশ

6.9 অনুশীলনী

6.10 গ্রন্থপঞ্জি

6.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- পার্থক্যভিত্তিক সমীকরণ কাকে বলে?
- পার্থক্যভিত্তিক সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি
- কোনো চলরাশির সময় পথের প্রকৃতি
- মজুত ভান্ডারের উপস্থিতিতে বাজারের ভারসাম্য মডেল।

6.2 প্রস্তাবনা

অর্থনীতিতে প্রায়শঃই চলরাশিগুলির যেমন জাতীয় আয়, অর্থের জোগান, উৎপাদন, নিয়োগের পরিবর্তন ইত্যাদির ক্ষেত্রে সময়ের সঙ্গে সঙ্গে বৃদ্ধি বা উন্নয়ণের হার লক্ষ্য করা হয়। সেই সময় এই চলরাশিগুলির পরিবর্তনের প্রকৃতিকে ব্যাখ্যা করার জন্য যে নিয়ম বা পদ্ধতি অনুসরণ করা হয় তা এক বা একাধিক সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশিত হয়। এখন এই সময়কে যদি অখণ্ড সংখ্যা হিসেবে বিবেচনা করা হয় তাহলে সময়ের বদলের সঙ্গে সঙ্গে চলরাশিগুলির মানের

পরিবর্তনের প্রকৃতি তার সঙ্গে কিবাবে সম্পর্কিত হচ্ছে, যেখানে সময় সর্বদাই অখণ্ড বা বিচ্ছিন্ন রাশি, সেটাই পার্থক্য ভিত্তিক সমীকরণের (Difference Equation) মূল প্রতিপাদ্য বিষয়। বর্তমান এককটি প্রথম মাত্রার পার্থক্য ভিত্তিক সমীকরণের ধারণা সমাধান পদ্ধতি ও অর্থনীতিতে তার ব্যবহার সম্পর্কে আলোকপাত করা হয়েছে।

এই এককের মূল বিষয় হোলো পার্থক্য ভিত্তিক সমীকরণের গঠন এবং সমাধান নির্ধারণ করা। চলরাশির গতিপথ এবং গতীয় স্থিতিশীলতার ধারণা এবং তার প্রকৃতি সম্পর্কে আলোকপাত করা যার ফলে অর্থনৈতিক চলরাশিগুলি সাম্যাবস্থার থেকে অন্য কোনো মানে যখন চলন শুরু করে সময় পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে তখন সেই গতিপথ অভিসারী না অপসারী হবে তা জানা যাবে।

6.3 পার্থক্যভিত্তিক সমীকরণের ধারণা

সময় যখন অবিচ্ছিন্ন ধরা হয় তখন কোনো চলরাশির (y) পরিবর্তনের হার ও প্রকৃতি অন্তরকলনের মাধ্যমে $y'(t)$, $y''(t)$ ইত্যাদি ভাবে পরিবেশন করা হয়। এই $y'(t)$ বা $\frac{dy}{dt}$ এবং $y''(t)$ বা $\frac{d^2y}{dt^2}$ প্রকৃতি পদ কোনো সমীকরণে থাকলে তাকে বলে (Differential Equation)। কিন্তু সময় যদি বিচ্ছিন্ন চলরাশি (desirete variabe) ধরা হয় তখন সেই চলরাশি t কিন্তু অখণ্ড মান নেয় (integer values)। তখন $\frac{dy}{dt}$ -র পরিবর্তে, y এর সময়ের সঙ্গে পরিবর্তনকে প্রকাশ করা হবে $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ করে। প্রদত্ত পরিবর্তনের ধরনের উপর ভিত্তি করে, বিচ্ছিন্ন সময়ের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে, চলরাশির পরিবর্তনের সময় পথ যে গতীয় বিশ্লেষণের (dynamic analysis) মাধ্যমে প্রকাশিত হয় তাকে বলা হয় পার্থক্যজনিত সমীকরণ (difference equation)।

এক্ষেত্রে $\Delta y_t \equiv y_{t+1} - y_t$ হলো প্রথম পার্থক্য যেখানে y_t হোলো t সময়ে y এর মান এবং y_{t+1} হোলো t + 1 সময়ে y এর মান। এই আকারের সমীকরণকে বলা হয় পার্থক্যজনিত সমীকরণ। পার্থক্যজনিত সমীকরণের ক্ষেত্রে মূল বিষয় হোলো y-এর সময় পথ নির্ধারণ।

6.4 পার্থক্যভিত্তিক সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি

সমাধান পদ্ধতি

ধরা যাক প্রথম মাত্রার পার্থক্য সমীকরণ হোলো $y_{t+1} + \alpha y_t = c \ldots (1)$ যেখানে α ও c হোলো ধ্রুবক। সাধারণ সমাধানকে বিশেষ সমাধান (particular solution) ও পরিপূরক সমাধান (complementary function) এই দু'ভাগে ভাগ করা যায়। (1) নং সমীকরণের ধরনকে বলা হয় অসম সত্ত্ব পার্থক্য সমীকরণ (non-homogeneous difference equation).

বিশেষ সমাধান : ধরা যাক (1) নং সমীকরণের একটি পরীক্ষামূলক সমাধান হোলো (trial solution) $y_t = K$ যেখানে K হোলো একটি ধ্রুবক। তাহলে y, সময় পরিবর্তন হলেও ওই একই মান নেবে। অর্থাৎ $y_{t+1} = K$

$$\therefore K + \alpha K = c \Rightarrow K = \frac{c}{1+\alpha} = y_p$$

($\alpha \neq 1$ এর জন্য)

এই y_p হোলো নিশ্চল সাম্যাবস্থা (stationary equilibrium)।

পরিপূরক সমাধান : এর জন্য (1) নং সমীকরণকে একটি হ্রাসপ্রাপ্ত গঠনে (Reduced form equation) পরিবেশন করা হয় বা c = 0 বসিয়ে সমীকরণটির সমসত্ত্ব রূপ (homogeneous form) ব্যবহার করা হয়। পরীক্ষামূলক সমাধান হোলো $y_t = Ab^t$ যেখানে $t \neq 0$ কারণ না হলে y_t, t অক্ষের অনুভূমিক সরলরেখা হবে।

$\therefore\ y_{t+1} = Ab^{t+1} \qquad \therefore\ Ab^{t+1} + \alpha Ab^t = 0$

$\Rightarrow b + \alpha = 0 \ \Rightarrow b = -\alpha$

$\therefore$ পরিপূরক অপেক্ষক হোলো $y = A(-\alpha)^t$

y_c ও y_p যোগ করে সাধারণ সমাধান পাওয়া যায়।

$$\therefore y_t = A(-\alpha)^t + \frac{C}{1+\alpha} \text{ যখন } \alpha \neq -1$$

কিন্তু যদি $\alpha = -1$ হয় তখন বিশেষ সমাধানটি সংজ্ঞাত হয় না। সেক্ষেত্রে পরীক্ষামূলক সমাধান $y_t = K$-র পরিবর্তে নেওয়া যেতে পারে $y_t = Kt$; $\therefore\ y_{t+1} = K(t+1)$

$\therefore$ (1) নং পার্থক্য সমীকরণকে লেখা যাবে $K(t+1) + \alpha Kt = C$

এবং $K = \dfrac{C}{t+1+\alpha t} = C\ [\because \alpha = -1]$

$\therefore\ y_p = Ct$

তখন সাধারণ সমাধান হবে $y_t = A(-\alpha)^t + Ct$ ...(2)

$= A + Ct$ (যেখানে $\alpha = -1$)

'A'-র মান নির্ধারণের জন্য একটি প্রাথমিক অবস্থা ব্যবহার করা হয়। ধরা যাক $y_t = y_0$ যখন $t = 0$

$$\therefore y_0 = A + \frac{C}{1+\alpha} \Rightarrow A = y_0 - \frac{C}{1+\alpha}$$

সুতরাং নির্দিষ্ট সমাধান হলো (Definite solution)

$$y_t = \left(y_0 - \frac{C}{1+\alpha}\right)(-\alpha)^t + \frac{C}{1+\alpha} \text{ যখন } \alpha \neq -1$$

আবার যখন $\alpha = -1$ তখন সাধারণ সমাধান (2) এ $t = 0$ বসালে $y_0 = A$ হবে।

অতএব নির্দিষ্ট সমাধান হবে $y_t = y_0 + Ct$

6.5 সাম্যাবস্থার গতীয় স্থিতিশীলতা

কোনো একটি সাম্যাবস্থা স্থিতিশীল কিনা তা নির্ভর করবে $t \to \infty$ হলে পরিপূরক অপেক্ষক শূন্যর দিকে সীমায়িত হবে কিনা তার উপর। এক্ষেত্রে b এর মানই যথেষ্ট গুরুত্বপূর্ণ। b এর মানগুলি (সম্ভাব্য) $(-\infty, +\infty)$-র মধ্যে 7টি ক্ষেত্রে ভাগ করা হল—

সারণি 1 : b এর সম্ভাব্য মানের শ্রেণীবিভাগসহ অঞ্চল

				বিভিন্ন সময়সীমায় b^t-এর মান				
অঞ্চল	b-এর মান	b-এর মান	b^t-এর মান	t = 0	t=1	t=2	t=3	t=4
I	b>1	|b|>1	উদা: $(2)^t$	1	2	4	8	16
II	b = 1	|b| = 1	$(1)^t$	1	1	1	1	1
III	0 < b < 1	|b| < 1	উদা: $\left(\frac{1}{2}\right)^t$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
IV	b = 0	|b| = 0	$(0)^t$	0	0	0	0	0
V	-1 < b < 0	|b| < 1	উদা: $\left(-\frac{1}{2}\right)^t$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
VI	b = –1	|b| = 1	$(-1)^t$	1	–1	1	–1	1
VII	b < –1	|b| > 1	উদা: $(-2)^t$	1	–2	4	–8	16

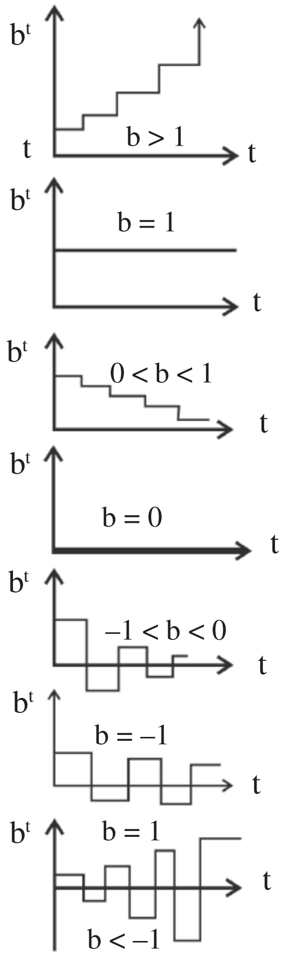
দেখা যাচ্ছে যে প্রত্যেক অঞ্চলেই b^t একটি নতুন রকমের সময় পথ নির্দেশ করছে। প্রথম অঞ্চলটিকে অর্থাৎ যেখানে b>1, t বাড়ার সঙ্গে b^t বাড়ছে ক্রমবর্ধমান হারে দ্বিতীয় অঞ্চলে t এর সকল মানের জন্য b^t-র মান এবং তৃতীয় অঞ্চলে যত t বাড়ছে, b^t তত হ্রাস পাচ্ছে কিন্তু সম্পূর্ণ ধনাত্মক থাকছে। চতুর্থ অঞ্চলে t বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে b^t শূণ্যই থাকছে। তাহলে তার লেখচিত্র অনুভূমিক অক্ষের সঙ্গে মিলে যাবে। যখন ঋণাত্মক অঞ্চলগুলি দেখা যায় তখন লক্ষণীয় যে b^t, ধনাত্মক, ঋণাত্মক, ধনাত্মক...এভাবে পরিবর্তিত হারে (alternate) চলতে থাকে। এবার পঞ্চম অঞ্চলে সময়

পথ ক্রমশঃ t বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে অনুভূমিক অক্ষের দিকে ঝুঁকতে থাকে কিন্তু সপ্তম অঞ্চলে b^t ক্রমশঃ অনুভূমিক অক্ষ থেকে সরতে তাকে। ষষ্ঠ অঞ্চলে b^t, –1 ও +1 এর মধ্যে একইভাবে ক্রমাগত পরিবর্তিত হতে থাকে। সম্পূর্ণ সময়পথটি চিত্র 1এ দেখানো হলো। অর্থাৎ b এর সময় পথকে এভাবে ব্যাখ্যা করা যায়:

$$\left.\begin{array}{l}\text{দোদুল্যমান নয়}\\ \text{দোদুল্যমান}\end{array}\right\}\ \text{যদি}\ \left\{\begin{array}{l} b > 0\\ b < 0\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{অপসারী}\\ \text{(Divergent)}\\ \text{অভিসারী}\\ \text{(Convergent)}\end{array}\right\}\ \text{যদি}\ \left\{\begin{array}{l} |b| > 1\\ |b| < 1\end{array}\right.$$

b^t-র সময়পথ



6.6 অর্থনীতিতে পার্থক্যভিত্তিক সমীকরণের ব্যবহার : কবওয়েব মডেল

এই ধরনের মডেলে উৎপাদনকারীর উৎপাদন সংক্রান্ত সিদ্ধান্ত যথার্থ বিক্রয়ের সময়ের পূর্বেই নেওয়া হয়। অথবা (), বর্তমান মূল্যের উপর নির্ভর না করে তার ঠিক পূর্বের উপর নির্ভর করে। অর্থাৎ জোগান অপেক্ষক হবে

Q_s, t+1 = $S(P_t)$

অর্থাৎ $Q_{St} = S(P_{t-1})$

চাহিদা অপেক্ষক $Q_{dt} = D(P_t)$

সাম্যাবস্থায় $\therefore\ Q_{dt} = Q_{st}$

$Q_{dt} = \alpha - \beta\ P_t\ (\alpha,\ \beta > 0)$

$Q_{st} = -\ \gamma + \delta P_{t-1}\ \ (\delta > 0)$

এখন, $Q_{dt} = Q_{st}$ বসিয়ে পাই,

$\beta\ Pt\ +\ \delta P_{t-1} = \alpha + \gamma$

$$\Rightarrow P_{t+1} + \frac{\delta}{\beta} P_t = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} \ldots.(1)$$ [t কে t+1 এ এগিয়ে পাই]

বিশেষ সমাধান (Particular Solution)

ধরি $P_t = P_{t+1} = K$

সুতরাং $K + \frac{\delta}{\beta} K = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$

$$\Rightarrow K\left(1+\frac{\delta}{\beta}\right) = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{\delta+\beta}{\beta}\right) = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} \quad \Rightarrow K = \frac{\alpha+\gamma}{\delta+\beta}$$

পরিপূরক সমাধান (Complementary Solution) : ধরা যাক $Ab^t = P_t$

$\therefore$ (1) কে সমসত্ত্ব পার্থক্য সমীকরণ ধরে :

$$Ab^{t+1} + \frac{\delta}{\beta} Ab^t = 0 \ \ \Rightarrow Ab^t \left[b + \frac{\delta}{\beta} \right] = 0$$

$$\Rightarrow b = -\frac{\delta}{\beta}$$

সাধারণ সমাধান (General Solution) :

$$P_t = A\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha+\gamma}{\delta+\beta}$$

$t = 0$ বসালে $P_0 = A + \frac{\alpha+\gamma}{\delta+\beta}$

$$\therefore A = P_2 - \frac{\alpha+\gamma}{\delta+\beta}$$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সমাধান : $P_t = \left[P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\delta+\beta}\right]\left[-\frac{\delta}{\beta}\right]^t + \frac{\alpha+\gamma}{\delta+\beta}$

$\frac{\alpha+\gamma}{\delta+\beta} = \overline{P}$ কে বলা হয় অন্তর্বর্তী সময়গত সাম্যাবস্থা (Intertemporal Equilibriuim)।

$$\therefore P_t = \left[P_0 - \overline{P}\right]\left[-\frac{\delta}{\beta}\right]^t + \overline{P}$$

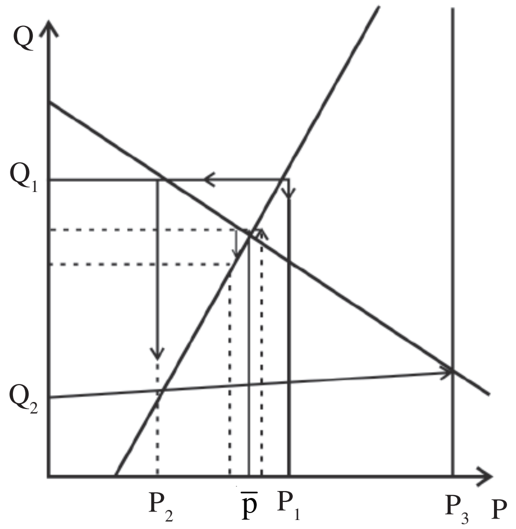
যেহেতু এই সাম্যাবস্থা $\overline{P}$, একটি ধ্রুবক, সুতরাং এটি স্থিতিশীল। এখন এই A হোলো $P_0 - \overline{P}$, যার চিহ্নের অর্থ হোলো সময়পথ সাম্যাবস্থার দিকে, সাম্যাবস্থার ওপর থেকে না নীচের দিক থেকে শুরু হচ্ছে। একে বলা হয় আয়না প্রভাব (mirror effect)। আবার A-র মান নির্ধারণ করবে সময়পথ ঠিক সাম্যাবস্থা থেকে কতটা উপরে বা কতটা নীচে। একে বলা হবে স্কেল প্রভাব। (Scale Effect)।

এখন যেহেতু $\beta, \delta > 0$, সুতরাং সময়সীমা হোলো দোদুল্যমান। কিন্তু এক্ষেত্রে এই কবওয়েব মডেল ৩ ধরনের অবস্থা হতে পারে, দোদুল্যমানের ক্ষেত্রে।

বিস্ফোরক (Explosive)

একইরকম (Uniform) যখন $\delta \geq \beta$

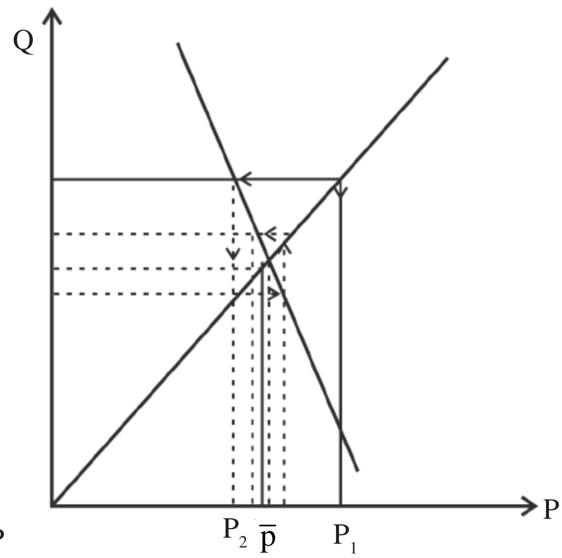
হ্রাসপ্রাপ্ত (Damped)



চিত্র 2a

জোগান রেখা চাহিদা রেখার

অপেক্ষা খাড়া (steeper)



চিত্র 2b

জোগান রেখা চাহিদা রেখা

অপেক্ষা অধিক ঢালু (flotter)

চিত্র 2a থেকে বোঝা যায় যে যখন $\delta > \beta$, চাহিদা ও জোগানের ঘাত-প্রতিঘাতে দামের বা দামস্তরের সময়পথ ক্রমশ সাম্যাবস্থা থেকে বিচ্যুত হচ্ছে। যদি সাম্যাবস্থার দামস্তর এর অধিক দামস্তর P_0 থেকে প্রাথমিক দাম শুরু হয় তাহলে তীর চিহ্ন অনুসরণ করে দেখা যায় জোগান রেখা বরাবর পরবর্তী সময়ে বা $t = 1$ এ জোগান হবে Q_1। এবার বাজারে সাম্যের প্রয়োজনে চাহিদার পরিমাণ হয় Q_1, যেটা সম্ভব হবে যদি দাম P_1 হয় তবে। আবার এই দামে জোগান রেখা বরাবর জোগান হবে Q_2। এভাবে যেন মাকড়সার জালের মত ঘটনা ঘটতে থাকে এবং P_0, P_1, P_2 এই দামগুলি লক্ষ করলে দেখা যায় তারা শুধু দোলায়িতই নয় ক্রমশঃ $\overline{P}$-এর থেকে দূরে সরে যাচ্ছে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে দামের সময়পথ হবে দোদুল্যমান ও বিস্ফোরক।

আবার যখন $\delta < \beta$ তখন এই জাল যদি P_0 থেকে তির চিহ্ন বরাবর লক্ষ করা যায় তাহলে দেখা যাবে তা ক্রমশঃ $\overline{P}$-এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে। অর্থাৎ যদিও P_t-এর সময়পথ দোদুল্যমান কিন্তু তা অভিসারী (Convergent), অপসারী (Divergent) নয়।

উদাহরণ 1: ধরা যাক একটি কবওয়েব মডেলে চাহিদা ও জোগান অপেক্ষক যথাক্রমে:

$Q_{dt} = 18 - 3P_t$; $\quad Q_{st} = -3 + 4P_{t-1}$

অন্তর্বর্তী সময়গত সাম্যাবস্থার দাম নির্ণয় করো এবং সাম্যাবস্থার স্থিতিশীলতা পরীক্ষা করো। দামস্তরের সময়পথ নির্ণয় করো।

সমাধান : সাম্যাবস্থা $Q_{dt} = Q_{st}$

$\Rightarrow 18 - 3P_t = -3 + 4P_{t-1}$

$\Rightarrow 4P_{t-1} + 3P_t = 21 \quad \Rightarrow 4P_t + 3P_{t+1} = 21$

$\Rightarrow 3P_{t+1} + 4P_t = 21 \ldots..(1)$

বিশেষ সমাধান :

ধরা যাক $P_{t+1} = P_t = K$

$\therefore$ 3K + 4K = 21

$\Rightarrow$ 7K = 21 $\quad \Rightarrow$ K = 3

$\therefore \overline{P}$ সাম্যাবস্থার মূল্যস্তর = 3

পরিপূরক সমাধান :

ধরা যাক পরীক্ষামূলক সমাধান হোলো $P_t = Ab^t$

$\therefore 3Ab^{t+1} + 4Ab^t = 0 \quad \Rightarrow 3b + 4 = 0$

$\Rightarrow b = -\frac{4}{3}$

সাধারণ সমাধান : $P_t = A\left(-\frac{4}{3}\right)^t + 3$

যখন t = 0 তখন $P_0 = A + 3$

$\therefore A = P_0 - 3$

সুতরাং নির্দিষ্ট সমাধান $P_t = (P_0 - 3)\left(-\frac{4}{3}\right)^t + 3$

এক্ষেত্রে যেহেতু $b < 0$, দামস্তরের সময়পথ দোদুল্যমান। আবার যেহেতু $|b| = \frac{4}{3} > 1$, উক্ত সময়পথ অপসারী (divergent)। অতএব দামস্তরের সময়পথ অপসারী ও দোদুল্যমান।

6.7 মজুত ভান্ডারের ক্ষেত্রে বাজারের অবস্থার মডেল

পূর্বোক্ত মডেলে এমন ভাবে দামের স্থিরীকরণ হচ্ছিল যাতে বর্তমান উৎপাদন, প্রত্যেক সময় বাজারে বিক্রি হয়ে যেতে পারে। অর্থাৎ দ্রব্যটি এমন থাকে (stock) বা মজুত করা যাবে অথবা মজুত বা inventory করার প্রয়োজন পড়ে না।

এবার ধরা যাক,

Q_{dt} এবং বর্তমানে প্রস্তুত দ্রব্য Q_{st} উভয়েই P_t-র অপেক্ষক এবং দুটি অপেক্ষকই সরলরৈখিক ও বর্তমান সময়ের দামের উপর নির্ভর করে (Unlagged)।

দামের সমন্বয়সাধন (adjustment of price), প্রত্যেক সময়ে বাজারের চাহিদার-জোগানের সমতার (market clearance) মাধ্যমে ঘটে না; বরং বিক্রেতার দাম নির্ধারণ পদ্ধতির মাধ্যমে ঘটে থাকে। প্রত্যেক সময়ের প্রারম্ভে বিক্রেতা একটি দাম স্থির করে তারৈ মজুত বা ইনভেন্টারীর অবস্থার উপর নির্ভর করে। যদি পূর্ববর্তী দামের জন্য ইনভেন্টারী জমা হয় তবে বর্তমান সময়ে দাম আগের চেয়ে কম মাত্রায় স্থির হয়, অন্যথায় বেশি হয়। প্রত্যেক সময়ে দামের এই সমন্বয়সাধন তার ইনভেন্টারী জমার সঙ্গে ব্যস্তানুপাতে ঘটে। এবারে যেবাবে মডেলটি তৈরি হবে তা হলো:

$$Q_{dt} = \alpha - \beta P_t \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

$$Q_{st} = -\gamma + \delta P_t \qquad (\gamma, \delta > 0)$$

$$P_{t+1} = P_t - \sigma\ (Q_{st} - Q_{dt}) \quad (\sigma > 0)$$

σ হোলো ইনভেন্টারী বা মজুত জমা অবস্থার উপর ভিত্তি করে দামের সমন্বয় সাধনকারী সহগ (stock induced price adjustment cofficient)।

প্রথম দুটি সমীকরণ তৃতীয়টিতে বসালে হবে

$$P_{t+1} = [1 - \sigma\ (\beta + \delta)]\ P_t = \sigma(\alpha + \gamma)$$

এর সমাধান হলো $P_t = \left(P_0 - \dfrac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right)[1 - \sigma(\beta + \delta)]^t + \dfrac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

$$\Rightarrow P_t = \left(P_0 - \overline{P}\right)[1 - \sigma(\beta + \delta)]^t + \overline{P}$$

[পূর্বোক্ত পদ্ধতিতে বিশেষ, পরিপূরক ও সাধারণ সমাধান ব্যবহার করে]

এখানে গতীয় স্থিতিশীলতা নির্ভর করবে $1-\sigma(\beta+\delta)$ -র উপর যেখানে $b=1-\sigma(\beta+\delta)$ । সারণি 2 থেকে b এর বিভিন্ন মানের জন্য P_t-র সময়পথ দেখানো হলো।

সারণি ২ : সময় পথের ধরন :

অঞ্চল	b এর মান $b = 1-\sigma(\beta+\delta)$	σ-র মান	P_t-র সময় পথের ধরন
III	$0 < b < 1$	$0<\sigma<\dfrac{1}{\beta+\delta}$	দোদুল্যমান নয় এবং অভিসারী
IV	$b = 0$	$\sigma=\dfrac{1}{\beta+\delta}$	সাম্যাবস্থায় থাকা
V	$-1 < b < 0$	$\dfrac{1}{\beta+\delta}<\sigma<\dfrac{2}{\beta+\delta}$	ক্রমহ্রাসমান ওঠানামা (with damped oscillation)
VI	$b = -1$	$\sigma=\dfrac{2}{\beta+\delta}$	একই রকম ওঠা নামা
VII	$b < -1$	$\sigma>\dfrac{2}{\beta+\delta}$	বিস্ফোরক ওঠানামা

উদাহরণ ২ ঃ উপরোক্ত মডেলে যদি কোনো বিক্রেতা সবসময় ইনভেন্টারী হ্রাসের (বৃদ্ধির) সঙ্গে 10% দাম বাড়ায় (কমায়) এবং চাহিদা রেখার ঢাল যদি –1 হয় এবং জোগান রেখার ঢাল যদি 15 হয়, তাহলে P_t-র সময় পথ নির্ধারণ করো।

সমাধান : এখানে $\sigma=0\cdot1,\ \delta=15,\ \dfrac{1}{\beta+\delta}=\dfrac{1}{16}$ ও $\dfrac{2}{\beta+\delta}=\dfrac{1}{8}$ সুতরাং $\dfrac{1}{\beta+\delta}<\sigma<\dfrac{2}{\beta+\delta}$ অর্থাৎ P_t-র সময়পথ হ্রাসপ্রাপ্ত দোদুল্যমান।

6.8 সারাংশ

এই এককে পার্থক্য সমীকরণ সম্পর্কে ধারণা দেওয়া হয়েছে ও প্রথম মাত্রার পার্থক্য সমীকরণ সম্পর্কে আলোচনা করা হয়ে হয়েছে। প্রথম মাত্রার পার্থক্য সমীকরণ সংক্রান্ত দুটি অর্থনৈতিক মডেল ঃ কবওয়েব মডেল ও ইনভেন্টারী সহ বাজার ব্যবস্থাও বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

6.9 অনুশীলনী

1 ধরা যাক কোনো পার্থক্য সমীকরণ হোলো :

$y_t = 6\left(-\frac{1}{4}\right)^t + 6$। এর সময়পথের ধরন কী হবে?

2. কোনো একটি পার্থক্য সমীকরণ হোলো $y_t = 7y_{t-1} + 16$. এর বিশেষ সমাধান কী হবে?

3. পরিপূরক সমাধানের তাৎপর্য কী?

4. কবওয়েব মডেলটি আলোচনা করুন।

5. প্রদত্ত আছে $Q_{dt} = 86 - 0.8P_t$ এবং $Q_{st} = -10 + 0.2P_{t-1}$ যেখানে Q_{dt}, Q_{st} ও P_t হোলো t সময়ে চাহিদার পরিমাণ, জোগানের পরিমাণ ও মূল্যস্তর। দামের সময়পথ নির্ধারণ করুন।

6. ইনভেন্টারীসহ বাজার ব্যবস্থা সংক্রান্ত মডেলটি আলোচনা করুন।

6.10 গ্রন্থপঞ্জি

1. Alpha C. Chiang and Kevin Wainwright (2013): Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw Hill Education, Fourth Edition.
2. Goldberg, S. (1958) : Introduction to Difference Equations, John Wiley and Sons.
3. Henderson, James M. and Richard E. Quandt (1958): Microeconomic Theory: A Mathematical Approach, McGraw-Hill Book Company, Inc.
4. Mehta, B.C. and G.M.K. Madnani (1997): Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons.
5. Sarkhel, J. and A. Bhukta (2000): An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Ltd.