উপক্রমণিকা

মহান দেশনায়ক সুভাষচন্দ্র বসুর নামাঙ্কিত এই মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনে আপনাকে স্বাগত। সম্প্রতি এই প্রতিষ্ঠান দেশের সর্বপ্রথম রাজ্য সরকারি মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় হিসেবে ন্যাক (NAAC) মূল্যায়নে 'এ'-গ্রেড প্রাপ্ত হয়েছে। বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশন প্রকাশিত নির্দেশনামায় স্নাতক শিক্ষাক্রমকে পাঁচটি পৃথক প্রকরণে বিন্যস্ত করার কথা বলা হয়েছে। এগুলি হল — 'কোর কোর্স', 'ডিসিপ্লিন স্পেসিফিক ইলেকটিভ', 'জেনেরিক ইলেকটিভ' এবং 'স্কিল' / 'এবিলিটি এনহ্যান্সমেন্ট কোর্স'। ক্রেডিট পদ্ধতির ওপর ভিত্তি করে বিন্যস্ত এই পাঠক্রম শিক্ষার্থীর কাছে নির্বাচনাত্মক পাঠক্রমে পাঠ গ্রহণের সুবিধে এনে দেবে। এরই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে যান্মাষিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা এবং ক্রেডিট ট্রান্সফারের সুযোগ। শিক্ষার্থী-কেন্দ্রিক এই ব্যবস্থা মূলত গ্রেড-ভিত্তিক যা অবিচ্ছিন্ন আভ্যন্তরীণ মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সার্বিক মূল্যায়নের দিকে এগোবে এবং শিক্ষার্থীকে বিষয় নির্বাচনের ক্ষেত্রে যথোপযুক্ত সুবিধা দেবে। শিক্ষাক্রমের প্রসারিত পরিসরে বিবিধ বিষয় চয়নের সক্ষমতা শিক্ষার্থীকে দেশের অন্যান্য উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আন্তঃব্যবস্থায় অর্জিত ক্রেডিট স্থানান্তরে সাহায্য করবে। শিক্ষার্থীর অভিযোজন ও পরিগ্রহণ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠক্রমের বিন্যাসই এই নতুন শিক্ষাক্রমের লক্ষ্য।

UGC (Open and Distance Learning Programmes and Online Programmes) Regulations, 2020 অনুযায়ী সকল উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের স্নাতক পাঠক্রমে এই সি.বি.সি.এস. পাঠক্রম পদ্ধতি কার্যকরী করা বাধ্যতামূলক— উচ্চশিক্ষার পরিসরে এই নতুন শিক্ষাক্রম এক বৈকল্পিক পরিবর্তনের সূচনা করেছে। আগামী ২০২১-২২ শিক্ষাবর্ষ থেকে স্নাতক স্তরে এই নির্বাচনভিত্তিক পাঠক্রম কার্যকরী করা হবে, এই মর্মে নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে। বর্তমান পাঠক্রমগুলি উচ্চশিক্ষা ক্ষেত্রের নির্ণায়ক কৃত্যকের যথাবিহিত প্রস্তাবনা ও নির্দেশাবলী অনুসারে রচিত ও বিন্যস্ত হয়েছে। বিশেষ গুরুত্বারোপ করা হয়েছে সেইসব দিকগুলির প্রতি যা ইউ.জি.সি. কর্তৃক চিহ্নিত ও নির্দেশিত।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ক্ষেত্রে স্ব-শিক্ষা পাঠ-উপকরণ শিক্ষার্থী সহায়ক পরিষেবার একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। সি.বি.সি.এস. পাঠক্রমের এই পাঠ-উপকরণ মূলত বাংলা ও ইংরেজিতে লিখিত হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধের কথা মাথায় রেখে আমরা ইংরেজি পাঠ-উপকরণের বাংলা অনুবাদের কাজেও এগিয়েছি। বিশ্ববিদ্যালয়ের আভ্যন্তরীণ শিক্ষকরাই মূলত পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির ক্ষেত্রে অগ্রণী ভূমিকা নিয়েছেন— যদিও পূর্বের পরম্পরা অনুযায়ী অন্যান্য বিদ্যায়তনিক উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানে সংযুক্ত অভিজ্ঞ ও বিশেষজ্ঞ শিক্ষকদের সাহায্য আমরা অকুণ্ঠচিত্তে গ্রহণ করেছি। তাঁদের এই সাহায্য পাঠ-উপকরণের মানোন্নয়নে সহায়ক হবে বলেই আমার বিশ্বাস। এই নির্ভরযোগ্য ও মূল্যবান বিদ্যায়তনিক সাহায্যের জন্য আমি তাঁদের আন্তরিক অভিনন্দন জানাই। এই পাঠ-উপকরণ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষণ পদ্ধতি ও প্রকরণে নিঃসন্দেহে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নেবে। একথা বলা বাহুল্য যে, এ বিষয়ে উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনের পঠন প্রক্রিয়ায় সংযুক্ত সকল শিক্ষকের সদর্থক ও গঠনমূলক মতামত আমাদের আরও সমৃদ্ধ করবে।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির এই বিদ্যায়তনিক উদ্যোগের সর্বাঙ্গীণ সাফল্য কামনা করি। মুক্তশিক্ষাক্রমে উৎকর্ষের প্রশ্নে আমরা প্রতিশ্রুতিবদ্ধ।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

Netaji Subhas Open University

Under Graduate Degree Programme
Choice Based Credit System
Sub. : Honours in Economics (HEC)
Course : Elementary Statistical Methods for Economics
Course Code : CC-EC-04

প্রথম সংস্করণ : September, 2021
First Print : September, 2021

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষার ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

Netaji Subhas Open University

Under Graduate Degree Programme

Choice Based Credit System (CBCS)

(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা)

বিষয় : সাম্মানিক অর্থনীতি (HEC)

পাঠক্রম : প্রাথমিক রাশিবিজ্ঞান সংক্রান্ত পদ্ধতি

Course : Elementary Statistical Methods for Economics

Course Code : CC-EC-04

: রচনা :
বিবেকানন্দ রায়চৌধুরী
NSOU

: সম্পাদনা :
সেখ সেলিম
NSOU

: বিন্যাস সম্পাদনা :
প্রিয়ন্থী বাগচী

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা)

HEC

প্রাথমিক রাশিবিজ্ঞান সংক্রান্ত পদ্ধতি

Course : Elementary Statistical Methods for Economics

Course Code : CC-EC-04

একক 1 ❑ বর্ণনামূলক রাশিবিজ্ঞান/পরিসংখ্যান

গঠন

1.1 উদ্দেশ্য

এই এককটিতে রাশিবিজ্ঞান সম্পর্কে সামগ্রিকভাবে একটি স্বচ্ছ ধারণা দেওয়ার চেষ্টা করা হয়েছে। এই একক থেকে জানা যাবে :

- রাশিবিজ্ঞানের সংজ্ঞা কী?
- ব্যবসা বাণিজ্যের ক্ষেত্রে রাশিবিজ্ঞানের ভূমিকা কী?
- অর্থনীতিতে রাশিবিজ্ঞান কীভাবে ব্যবহৃত হয়?
- ভারতবর্ষের অর্থনীতিতে রাশিবিজ্ঞানের প্রয়োজনীয়তা কোথায়?
- রাশিতথ্যের উপস্থাপন কীভাবে হয়?
- পরিসংখ্যা বিভাজনের মাধ্যমে কীভাবে রাশিতথ্যের উপস্থাপন করা হয়?
- পরিসংখ্যাবিহীন রাশিতথ্যের উপস্থাপন কীভাবে লেখচিত্রের সাহায্যে করা হয়?
- পরিসংখ্যাযুক্ত রাশিতথ্যের উপস্থাপন কীভাবে লেখচিত্রের সাহায্যে করা হয়?

1.2 প্রস্তাবনা

রাশিবিজ্ঞানের ব্যবহার স্মরণাতীত কাল থেকেই চলে আসছে। বিভিন্ন দেশে বিভিন্ন ধরনের রাশিতথ্য সংগ্রহ, উপস্থাপন ও ব্যাখ্যার মধ্যে দিয়ে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্ত নেওয়া হয়। সময়ের সঙ্গে সঙ্গে রাশিবিজ্ঞানের কৌশল উত্তরোত্তর পরিশীলিত হয়েছে। বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় উপযোগী বিভিন্ন সূত্রের সত্যতা বিচার করার জন্য পরিসংখ্যানের বিভিন্ন পদ্ধতির সাহায্য নেওয়া হয়। বিজ্ঞানের প্রতিটি শাখায় গবেষণার ক্ষেত্রে পরিসংখ্যান অপরিহার্য হয়ে উঠেছে। রাজনৈতিক, অর্থনৈতিক ও সামাজিক জটিলতার উত্তরোত্তর বৃদ্ধির ফলে পরিসংখ্যানের প্রয়োগ ক্রমাগত বৃদ্ধি পাচ্ছে। রাশিতথ্যের বিশ্লেষণে সঠিক নীতি নির্ধারণ করা সম্ভব হচ্ছে। বর্তমানে ব্যবসা বাণিজ্য, অর্থনীতি, সমাজবিদ্যা, জীববিদ্যা, রসায়ন, পদার্থবিদ্যা, চিকিৎসাবিজ্ঞান, মনস্তত্ত্ব, নৃতত্ত্ববিদ্যা সর্বত্র রাশিবিজ্ঞান প্রধান সাহায্যকারী বিষয় হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

1.3 রাশিবিজ্ঞান/পরিসংখ্যান ও তার অর্থ

রাশিবিজ্ঞান বা পরিসংখ্যান সম্বন্ধীয় যত সংজ্ঞা পাওয়া যায় তাদের সবাই-র মূল বক্তব্য কিন্তু একই। পরিসংখ্যান এক ধরনের বিজ্ঞান যার সাহায্যে সংখ্যা দ্বারা পরিমিত রাশিতথ্য আহরণ, উপস্থাপন ও ব্যাখ্যা করা যায়।

Bowley-র মতে পরিসংখ্যান হল যে কোনো বিভাগ বা দপ্তরের অনুসন্ধানলব্ধ পরিমাণগত তথ্য বা রাশিবিষয়ক তথ্য।

Lovitt-এর পরিসংখ্যানের সংজ্ঞা হল—পরিসংখ্যান এমন এক বিজ্ঞান যা সংখ্যার সাহায্যে তথ্য সংগ্রহ, শ্রেণিবিন্যাস ও ছকবিন্যাস করে যাতে তথ্যগুলির সাহায্যে ঘটনাবলীর ব্যাখ্যা, বর্ণনা ও তুলনামূলক বিচার করা যায়।

1.3.1 বর্ণনামূলক ও অনুমানসিদ্ধ সিদ্ধান্তমূলক রাশিবিজ্ঞান/পরিসংখ্যান

রাশিবিজ্ঞানের কর্মপদ্ধতিকে দুই ভাগে ভাগ করা যায়। প্রথমতঃ রাশিতথ্য সংগ্রহ ও উপস্থাপনা এবং দ্বিতীয়তঃ সংগৃহীত রাশিতথ্য রাশিবিজ্ঞানের বিভিন্ন পদ্ধতি ও প্রযুক্তি ব্যবহার করে সংশ্লিষ্ট সমস্যাবলীর উপযুক্ত ব্যাখ্যা করা ও একটি যুক্তিগ্রাহ্য সিদ্ধান্ত খুঁজে বার করা।

এই দুই কর্মপন্থা সুসম্পন্ন করার জন্য রাশিবিজ্ঞানকে দুই ভাগে ভাগ করা যায়। প্রথমটি হল বর্ণনামূলক রাশিবিজ্ঞান ও দ্বিতীয়টি হল অনুমানসিদ্ধ সিদ্ধান্তমূলক রাশিবিজ্ঞান।

বর্ণনামূলক রাশিবিজ্ঞানে যে সমস্ত রাশিতথ্য আহরণ, উপস্থাপন ও ব্যাখ্যা করা হয় সেগুলি সবই বাস্তবে আছে। এক চলক বিশিষ্ট তথ্যগুলির পরিসংখ্যানগত পরিমাপ বিভিন্ন ধরনের হয়। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ করা হয় গড় (Average) এর মাধ্যমে। বিস্তৃতির পরিমাপ করা হয় ভেদমান (Variance) অথবা সমক পার্থক্যের (Standard Deviation) মাধ্যমে। এছাড়াও আছে ভ্রামক (moments) প্রতিবৈষম্য (Skewness) ও তীক্ষ্ণতা (Kurtosis)। এইগুলির মান নির্ণয় করা হয় ও সুচারুরূপে রাশিতথ্যের ব্যাখ্যা করা হয়। দুই চলক বিশিষ্ট রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে দুই চলকের সম্পর্ক পরীক্ষা করা হয় সহপরিবর্তন (Correlation) ও প্রতিগমনের (Regression) মাধ্যমে। রাশিবিজ্ঞানের বর্ণনামূলক অংশের আলোচনায় সমস্ত রাশিতথ্যই বাস্তবের উপর প্রতিষ্ঠিত। যে সব চলকের মান সংগ্রহ করা হয় সেগুলি হল উচ্চতা, বয়স, ওজন, আয়, ব্যয়, তাপমাত্রা, লাভ, ক্ষতি সবই বাস্তবে পাওয়া যায়।

অপরপক্ষে, রাশিবিজ্ঞান এর আনুমানিক সিদ্ধান্তমূলক অংশে সম্ভাবনা (Probability) বা অনিশ্চিত ফলাফল পর্যালোচনা করা হয়। এই অংশে সম্ভাবনা তত্ত্বের বিস্তারিত আলোচনা করা হয়। এখানে চলক-টিকে সমসম্ভব চলক (Random Variable) বলা হয়। সমসম্ভব চলকের প্রতিটি মানের সঙ্গে একটি সম্ভাবনা যুক্ত থাকে। এখানে কর্মপদ্ধতি হল নমুনা (Sample) আহরণের পর নমুনায় প্রাপ্ত ফলাফল বিচার করে সমগ্রকের (Population) এর বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে নির্দিষ্ট সিদ্ধান্তে পৌঁছানো। ধরা যাক্ কোনো গবেষকের বিচার্য বিষয় হল কলকাতা মহানগরের নাগরিকদের গড় আয় খুঁজে বের করা। পূর্ণ তদন্তের (Complete enumeration) মাধ্যমে কাজটি করা যায় কিন্তু সেটা খুবই ব্যয়সাপেক্ষ। যেটি করা হয় তাহল নমুনা তদন্ত (Sample Survey) যা তুলনায় সহজ। ব্যয় ও সময়ও সাধ্যের মধ্যে থাকে। বিভিন্ন ভাবে নমুনা সংগ্রহ করা হয় যেমন সমসম্ভব নমুনা, ইচ্ছাধীন নমুনা, স্তরীভূত নমুনা ইত্যাদি। বেশিরভাগ সময়ে সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ করা হয় অর্থাৎ সমগ্রকের যে কোন পদ নমুনায় অন্তর্ভুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা সমান। নমুনা তদন্তের মূল লক্ষ্য হল সমগ্রকের সামান্য অংশপরীক্ষা করে সমগ্রকের সম্পর্কে সম্যক ধারণা করা। এখানে নমুনাঙ্কের উপর নির্ভর করে সমগ্রকের পূর্ণাকাঙ্কের (Parameter) মান বের করা হয়। যেমন আমাদের উদাহরণে কলকাতা মহানগরের নমুনা নাগরিকদের গড় আয় থেকে সম্পূর্ণ কলকাতা মহানগরের নাগরিকদের অর্থাৎ সমগ্রকের গড়মান নির্ণয় করা হয়।

প্রকল্প বিচারে (Testing of Hypothesis) সমগ্রকের পূর্ণাকাঙ্কের একটি আন্দাজ মান দেওয়া হয় এবং তা নমুনার সাহায্যে পরীক্ষা করে দেখতে হয় যে যেটা আন্দাজে ধরা হয়েছে সেটা সঠিক কিনা। সমগ্রকে পূর্ণাঙ্কর কোন নির্দ্দিষ্ট মানের বদলে সেটি একটি একটি আস্থাসীমার (Confidence interval) মধ্যে থাকে। যেমন কলকাতা মহানগরের নাগরিকদের গড় আয় আট হাজার থেকে দশ হাজারের মধ্যে—নমুনার ভিত্তিতে এই মানের সম্পর্কে 99% আস্থা দৃঢ়তার সঙ্গে রাখা যায়।

1.3.2 ব্যবসা ও বাণিজ্যের ক্ষেত্রে পরিসংখ্যান

অতীতে বেশির ভাগ শিল্পই ছিল একমালিকি কারবার অথবা অংশীদারী কারবারের মধ্যে সীমাবদ্ধ। কিন্তু আধুনিক যুগে শিল্পের ক্রমার্দ্ধমান বিকাশের ফলে শিল্পের শুধু আয়তন বৃদ্ধি পেয়েছে তাই নয় পরিচালনার জটিলতাও বৃদ্ধি পেয়েছে। বেশির ভাগ শিল্পই যৌথ মালিকানায় পরিচালিত হচ্ছে যেখানে মালিক হল কোম্পানীর শেয়ারহোল্ডাররা। এর সঙ্গে সমান তালে প্রতিযোগিতাও বেড়েই চলেছে ফলে বিভিন্ন সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে পরিসংখ্যানের উপর নির্ভরশীলতাও বেড়েই চলেছে। ব্যবসা বাণিজ্য সুস্বাস্থ্যের অধিকারী কিনা সেটা তার লাভের অঙ্ক বলে দিতে পারে। আবার এই লাভের অঙ্ক প্রত্যাশার উপর নির্ভরশীল। কোম্পানী দ্রব্য উৎপাদন করে বাজারে প্রত্যাশিত চাহিদার ভিত্তিতে। তাই সমস্ত সিদ্ধান্ত গ্রহণের সময় বাণিজ্য বিষয়ক পূর্বানুমান বিশেষভাবে গুরুত্বপূর্ণ। দ্রব্যের বাজার দামবাড়ছে কিনা। ভবিষ্যতেই বা বাজারদামের কি পরিস্থিতি হবে এসবই পূর্বানুমান বলে দেবে। পরিসংখ্যানের বিভিন্ন পদ্ধতি ব্যবসা বাণিজ্যে ব্যবহৃত হয় যেমন : গড়, বিস্তৃতি, সহ পরিবর্তন ইত্যাদি ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়। পূর্বানুমান (Forcasting) বের করার সময় প্রতিগমণ ব্যবহার করা হয়। কালীন শ্রেণির বিশ্লেষণ প্রয়োজন হয় দ্রব্যের চাহিদার উঠানামা, দামের উঠানামা ইত্যাদির বিচার করতে। নমুনা চয়নের (Sampling) মাধ্যমে ক্রেতার রুচি পছন্দ ইত্যাদির উপর বাজার সমীক্ষা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। পরিসংখ্যান বিষয়ক গুণগত মান নিয়ন্ত্রণ (Statistical Quality Control) বাজার ধরে রাখার জন্য বিশেষ ভাবে প্রয়োজনীয়। বিভিন্ন ধরনের সূচক (Index No.) যেমন দামের সূচক, উৎপাদনের সূচক, আমদানী সূচক, রপ্তানি সূচক বিভিন্ন ধরণের বাণিজ্য সংক্রান্ত সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। এছাড়া বিভিন্ন চিত্র ও ছকের সাহায্যে ব্যবসা ক্ষেত্রে তুলনামূলক বিচারও করা হয়। পদ্ধতিগুলির সঠিক ব্যবহার বাণিজ্য সংক্রান্ত সিদ্ধান্তগুলিকে আরও সঠিক পথে নিয়ে যেতে সাহায্য করে।

1.3.3 অর্থশাস্ত্রে পরিসংখ্যান

অর্থশাস্ত্রের বিভিন্ন তত্ত্ব পর্যালোচনা করতে ও অর্থনীতির বিভিন্ন সূত্রের সত্যতা যাচাই করতে পরিসংখ্যান বিশেষভাবে সাহায্য করে। পরিসংখ্যানের বিভিন্ন পদ্ধতি যেমন গড়, বিস্তৃতি, সহ-পরিবর্তন, প্রতিগমণ, কালীন সারি বিশ্লেষণ, সূচক সংখ্যা, সম্ভাবনা, ছক, পাই চিত্র, পরিসংখ্যা বিভাজন, নমুনা চয়ন, প্রাথমিক অনুমান (null hypothesis) ও বিকল্প অনুমানের (alternative hypothesis) বিচার ও পরীক্ষা (Testing of hypothesis) ইত্যাদি বিভিন্ন অর্থনৈতিক তত্ত্বের আলোচনায় ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়।

বিভিন্ন অর্থনীতির উন্নয়ন ভিত্তিক আলোচনা বিশেষত ভারতের মতো পিছিয়ে পড়া দেশগুলির উন্নয়নের নীতি নির্ধারণের জন্য পরিসংখ্যান বিশেষভাবে গুরুত্বপূর্ণ।

এখন গণিত শাস্ত্র, রাশিবিজ্ঞান ও অর্থনীতির সমন্বয়ে এক আধুনিক শাস্ত্রের জন্ম হয়েছে। তার নাম Econometrics. জটিল অর্থনৈতিক তত্ত্বের আলোচনায় Econometrics ক্রমশই গুরুত্বপূর্ণ জায়গা করে নিচ্ছে।

1.3.4 পরিসংখ্যানের ব্যবহার ভারতবর্ষে

স্বাধীনতা পাওয়ার পর ১৯৫০ সাল থেকে ভারতবর্ষে পঞ্চবার্ষিকী পরিকল্পনা শুরু হয়। জাতীয় সরকার দেশের পরিকল্পিত অর্থনৈতিক উন্নয়নের জন্য পঞ্চবার্ষিকী পরিকল্পনার সাহায্য নেয়। ইন্ডিয়ান স্ট্যাটিসটিকাল ইন্সটিটিউট এর অধ্যাপক প্রশান্তচন্দ্র মহলানবিশ এর নেতৃত্বে পরিসংখ্যান ভিত্তিক উন্নয়নের উদ্যোগ নেওয়া হয়। ভারতে সরকারি পরিসংখ্যান কেন্দ্রীয় পরিসংখ্যান সংগঠন (Central Statistical Organisation বা CSO) ও জাতীয় নমুনা তথ্য সংগ্রহ (National Sample Survey বা NSS) নামক দুটি সংগঠন দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়।

ভারত সরকারের সংবিধান নির্ধারিত কাঠামো অনুযায়ী কতকগুলি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় যেমন বৈদেশিক বাণিজ্য, ব্যাঙ্কিং, শিল্প, শ্রম, জনসংখ্যা ইত্যাদির উপর পুরোপুরি কেন্দ্রীয় নিয়ন্ত্রণ রয়েছে। আবার রাজ্য সরকারের নিয়ন্ত্রণাধীন বিষয়গুলি হল কৃষি, আইন ও শৃঙ্খলা, শিক্ষা ইত্যাদি।

বর্তমানে সংগৃহীত তথ্যাবলী সংকলন ও ব্যবহার করার দায়িত্ব বিভিন্ন কেন্দ্রীয় ও রাজ্য সরকারের সঙ্গে যুক্ত পরিসংখ্যান বিষয়ক সংগঠনের উপর দেওয়া হয়ে থাকে। CSO ১৯৫১ সালে গঠিত হয়। এটি ভারত সরকারের ক্যাবিনেট সেক্রেটারিয়েটের সঙ্গে যুক্ত। কেন্দ্রীয় সরকারের বিভিন্ন দপ্তরের সঙ্গে একটি সমন্বয়কারী পরামর্শদাতা হিসাবে কাজ করে। এছাড়া বিভিন্ন রাজ্যে স্টেট স্ট্যাটিসটিকাল ব্যুরো (State Statistical Bureau) গঠন করা হয়েছে যাদের মূল কাজ হল রাজ্য সরকারের বিভিন্ন দপ্তরের পরিসংখ্যান সংগ্রহ করা এবং ঐ বিভিন্ন দপ্তরের মধ্যে কাজকর্মের সমন্বয় সাধন করা।

ভারতে তথ্য সংগ্রহের দুটি পদ্ধতি আছে। একটি হল স্ট্যাটিস্টিক্স অ্যাক্ট এর মাধ্যমে সংগৃহীত তথ্য। দ্বিতীয়টি হল প্রশাসনিক আইনের মাধ্যমে সংগৃহীত তথ্য যেমন ফ্যাক্টরি ও খনি আইন (Factories and Mines Act), Indian Dock Labour Regulation Act 1948, Indian Trade Union Act 1926 ও Minimum Weges Act 1948. এর মধ্যে অন্তর্ভূক্ত বিষয়গুলি হল জনসংখ্যা, শিল্প, শ্রম ইত্যাদি বিষয়ক পরিসংখ্যান। অপরদিকে কৃষি, শিক্ষা, স্বাস্থ্য বিষয়ক তথ্যগুলি স্বেচ্ছাধীন ভাবে সংগৃহীত হোত। এখন স্বাধীনতার পরে পরিসংখ্যান সংগ্রহের ব্যাপারে বেশ খানিকটা অগ্রগতি হলেও আজও এইসব সংগৃহীত তথ্যের যথার্থতা নিয়ে প্রশ্ন আছে। পরিসংখ্যান যদি বিভ্রান্তিমূলক হয়, তবে উন্নয়নের নীতি নির্ধারণও ভ্রান্ত হতে বাধ্য।

1.4 রাশিতথ্যের উপস্থাপন

রাশিতথ্য তিনটি উপায়ে উপস্থাপিত করা যায় :

(ক) বর্ণনাত্মক উপস্থাপন (Textual Presentation)

(খ) ছক বিন্যাসের সাহায্যে উপস্থাপন (Tabular Presentation)

(গ) লেখ চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন (Graphical Presentation)

1.4.1 বর্ণনাত্মক উপস্থাপন

(ক) বর্ণনাত্মক উপস্থাপন ঃ এই পদ্ধতিতে এক বা একাধিক অনুচ্ছেদ-এর মধ্যে দিয়ে সংগৃহীত রাশি তথ্য বর্ণনার মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। একটি উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে—

শিল্প কারখানা-ঘটিত দূষণের সম্বন্ধে বলা যায় যে ভারতে 132 টি মাঝারি ও বৃহৎ শিল্প কারখানা আছে, যার মধ্যে উত্তরপ্রদেশে 86 টি, বিহারে 3 টি এবং পশ্চিমবঙ্গে 43 টি অবস্থিত। উত্তরপ্রদেশের 86 টির মধ্যে 59 টি হল ট্যানারি। মাত্র 12 টি শিল্প কারখানায় বর্জ্য পরিশোধনের ব্যবস্থা আছে। 68 শিল্প কারখানায় বর্জ্য পরিশোধন করার পরিকল্পনা করা হয়েছে। বাকী 52 টি শিল্প কারখানায় বর্জ্য পরিশোধনের কোনো পরিকল্পনাও নেই।

[সূত্র : ড: টি এন খোসুর সভাপতির ভাষণ, ভারতীয় বিজ্ঞান কংগ্রেস অ্যাসোসিয়েশন এর 73 তম অধিবেশন, 1986]

বর্ণনাত্মক পদ্ধতির অসুবিধাগুলি হল নিম্নরূপ :

(1) এই পদ্ধতিতে অণুচ্ছেদগুলি অত্যন্ত দীর্ঘ হয়,

(2) পরিসংখ্যান সম্পর্কে ভালো ধারণা পেতে হলে ধৈর্য সহকারে বারে বারে পড়তে হয়,

(3) একটি তথ্যের পুনরাবৃত্তি ঘটার ফলে সামগ্রিক ভাবে নিশ্চিত সিদ্ধান্ত নেওয়া মুশকিল।

(4) সদৃশ তথ্যগুলির তুলনামূলক চিত্র ভালোভাবে পাওয়া সম্ভব নয়।

(5) নিরক্ষর ব্যক্তির পক্ষে অনুচ্ছেদগুলি পড়া সম্ভব হয় না।

বর্ণনাত্মক পদ্ধতির সুবিধা :

(1) যে কেউ পরিসংখ্যান সম্বলিত অনুচ্ছেদ লিখে ফেলতে পারে।

(2) অনুচ্ছেদ গুলি শুধু পড়ে নিলেই পরিসংখ্যান সম্পর্কে সম্যক ধারণা হয়।

1.4.2 ছকবিন্যাসের সাহায্যে রাশিতথ্যের উপস্থাপন

রাশিতথ্যগুলি সংগ্রহ করে সুশৃঙ্খলভাবে সারি (row) ও স্তম্ভে (column) সাজিয়ে উপস্থাপন করলে তাকে ছক বিন্যাস (Tabulation) বলা হয়। সুসংহতভাবে পরিকল্পনা করলে একটি ছকে খুবই অল্প জায়গায় অনেক বেশি তথ্য পরিবেশন করা সম্ভব। সুশৃঙ্খল ছকবিন্যাসে উপস্থাপনের উদ্দেশ্য খুব সহজেই বোঝা যায়। এই ধরনের উপস্থাপনে তথ্যগুলি অনায়াসে তুলনা করা সম্ভব।

1.4.2.1 ছকবিন্যাসের সাহায্যে রাশিতথ্য উপস্থাপনেপর সুবিধা

বর্ণনাত্মক পদ্ধতির সঙ্গে তুলনায় ছকবিন্যাসের সাহায্যে রাশিতথ্য উপস্থাপনের সুবিধাগুলি নিম্নরূপ :

(i) ছকবিন্যাসে রাশিতথ্যের উপস্থাপন খুবই সুশৃঙ্খলভাবে হয়।

(ii) ছকবিন্যাস খুব সহজেই বোঝা যায়।

(iii) ছকবিন্যাস সুসংহত ভাবে উপস্থাপন করার ফলে মনে রাখা খুবই সহজ।

(iv) রাশিতথ্যের তুলনামূলক বিচার করা সম্ভব।

(v) ছকবিন্যাসের শেষ স্তম্ভটিতে সব সারির যোগফল এবং শেষ সারিটিতে সমস্ত স্তম্ভের যোগফল নির্দ্দেশ করা হয়। ফলে কোনো ভুলভ্রান্তি হলে সহজেই তা ধরা পড়ে। এইভাবে হিসাবের শুদ্ধতা বজায় রাখা সম্ভব।

(vi) এই পদ্ধতিতে বিষয় বা শিরোনামে পুনরাবৃত্তি হয় না।

(vii) বিভিন্ন পদের (item) মধ্যে সম্পর্ক ও তাদের অন্যান্য বৈশিষ্ট্যও চিহ্নিত করা যায়।

(viii) ছকবিন্যাসের মাধ্যমে রাশিতথ্য অত্যন্ত কম পরিশ্রমে, কম পরিসরে কম খরচে ও কম সময়ে সুপরিকল্পিতভাবে উপস্থাপন করা যায়।

1.4.2.2 ছকের বিভিন্ন অংশ

একটি ছকের নিম্নলিখিত অংশগুলি থাকে :

(i) **শিরোনাম (Title) :** ছকের উপরে একটি শিরোনাম লেখা হয় যার মধ্যে ছকের উদ্দেশ্য সংক্ষিপ্ত আকারে বর্ণিত হয়। এর থেকে পাঠকের একটা সুস্পষ্ট ধারণা হয় যে ছকটিতে কি দেখানো হয়েছে।

(ii) **ছকের বাঁ দিকের বিবরণ লিপি (Stub) :** এখানে ছকের সারিগুলির (rows) একটা পরিষ্কার বর্ণনা থাকে।

(iii) **ছকের উপরিভাগের বিবরণ লিপি (Caption) :** শিরোনামের ঠিক নীচে এটি অবস্থান করে। এখানে বিভিন্ন স্তম্ভগুলির (Columns) শিরোনাম লেখা হয়।

শিরোনাম (Title), বাঁদিকের বিবরণ (Stub) ও উপরিভাগের বিবরণ (Caption) এই তিনটিকে একত্রে বলা হয় ছকের উপরিভাগ (Box head)।

(iv) **মুল অংশ (Body) :** ছকের শিরোনাম বাদ দিলে, সমস্ত সারি ও বিন্যাসের সম্মিলিত রাশিতথ্য গুলিই হল ছকের মূল অংশ।

(v) **পাদ টিকা (Foot Note) :** ছকের ঠিক নীচে পাদটিকা অবস্থান করে। এটির মাধ্যমে কোনো পদের বৈশিষ্ট্যকে বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা হয়।

(vi) **উৎস টিকা (Source Note) :** যদি কোনো গৌণ উৎস (Secondary Source) থেকে রাশিতথ্য সংগ্রহ করে ছকবিন্যাসে উপস্থাপন করা হয়ে থাকে, তাহলে কোন উৎস থেকে ঐ রাশিতথ্য সংগৃহীত হয়েছে সেটি ছকের নীচে লেখা হয়। সাধারণত এটি পাদটিকার ঠিক নীচে লেখা হয়।

ছক বিন্যাস

ছক সংখ্যা (Table Number)

শিরো নাম (Title)

		স্তম্ভগুলির শিরোনাম (Caption)			
(Stub)		(1)	(2)	(3)	(4)
সারিগুলির	(1)				
বর্ণনা	(2)		BODY		
	(3)				

পাদটিকা (Foot Note)

উৎস টিকা (Source Note)

উদাহরণ 1. একটি বিশ্ববিদ্যালয়ের তিনটি বিভাগের—কলা বিভাগ, বিজ্ঞান বিভাগ ও বাণিজ্য বিভাগের প্রথম বর্ষ, দ্বিতীয় বর্ষ ও তৃতীয় বর্ষের পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা লিঙ্গ ভেদের ভিত্তিতে একটি ফাঁকা ছক প্রস্তুত কর।

ছক সংখ্যা : 1

শিরোনাম : একটি বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পরীক্ষার পরীক্ষার্থীদের সংখ্যার ছক বিভাজন

(বিভাগ অনুযায়ী ও লিঙ্গ ভেদে পরীক্ষীর্থীর সংখ্যা)

পরীক্ষা	**প্রথম বর্ষ**			**দ্বিতীয় বর্ষ**			**তৃতীয় বর্ষ**			**মোট সংখ্যা**		
বিভাগ \ লিঙ্গ	পুরুষ	মহিলা	মোট	পুরুষ	মহিলা	মোট	পুরুষ	মহিলা	মোট	পুরুষ	মহিলা	মোট
কলা												
বিজ্ঞান												
বাণিজ্য												
মোট												

1.4.2.3 আদর্শ ছকের গুণাবলী

ছকের মাধ্যমে রাশিতথ্যের উপস্থাপনা যেন সুশৃঙ্খল ভাবে করা হয় যাতে উপস্থাপনার উদ্দেশ্য পরিষ্কারভাবে বোঝা যায় এবং রাশিতথ্যের তুলনামূলক বিচার সম্ভব হয়। একটি আদর্শ ছক উপস্থাপনের গুণাবলী হল :

(ক) ছকের একটি উপযুক্ত শিরোনাম দেওয়া উচি যা থেকে ছকের উদ্দেশ্য বোঝা যায়।

(খ) ছকটি যেন মনোগ্রাহী, বার্তাবহ ও সুষম হয়।

(গ) তুলনামূলক তথ্যগুলি যেন পাশাপাশি স্তম্ভে অবস্থান করে।

(ঘ) রাশিতথ্যের পরিমাপের একক অবশ্যই উল্লেখ করতে হবে।

(ঙ) ছকটিতে যেন কোনো রকম জটিলতা না থাকে।

(চ) রাশিতথ্যগুলির উৎস অবশ্যই উৎস টীকাতে উল্লেখ করতে হবে।

(ছ) কোনো রাশিতথ্যের কোনো বিশেষত্ব থাকলে পাদটীকাতে তার উল্লেখ অবশ্যই করতে হবে।

1.4.3 লেখচিত্রের সাহায্যে রাশিতথ্যের উপস্থাপন

ছক বিন্যাসে সাজানো তথ্যরাশির গতি প্রকৃতি বোঝা খুব সহজসাধ্য ব্যাপার নয়। কিন্তু রাশিতথ্যের সম্ভারকে লেখ (Graph) বা চিত্রের (Diagram) এর মাধ্যমে উপস্থাপন করলে তার গতি প্রকৃতি অতি সহজেই বোঝা যায়। এইজন্য সাধারণ মানুষের বোঝার জন্য লেখচিত্র অত্যন্ত উপযোগী এক মাধ্যম।

সুবিধা (Advantages) : লেখচিত্রের মধ্যে দিয়ে রাশিতথ্য উপস্থাপনের সুবিধা সমূহ :

(i) লেখচিত্র শুধুমাত্র চোখে দেখেই সাধারণ মানুষের ঐ রাশিতথ্য সমন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণা হয়।

(ii) বিশেষ করে জটিল রাশিতথ্যের বিষয়বস্তু ছক বিন্যাসের থেকে লেখচিত্রের সাহায্যে অনেক সহজে বোধগম্য হয়।

(iii) লেখচিত্রের মাধ্যমে রাশিতথ্য উপস্থাপন করলে রাশিতথ্যের কোনো বিশেষ দিকে প্রবণতা (trend) থাকলে অতি সহজেই সেটা বোঝা যায়। কিন্তু ছকবিন্যাসে সেটা একেবারেই বোঝা সম্ভব নয়।

(iv) দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে সম্পর্ক সম্বন্ধে ধারণা করা অতি সহজেই লেখচিত্রের সাহায্যে সম্ভব হয়।

(v) লেখচিত্রের সাহায্যে কোনো চলকের অন্তবর্তী মান অতি সহজেই নির্ণয় করা যায়।

(vi) সংগৃহীত রাশিতথ্যের মধ্যেকার ত্রুটি অতি সহজে লেখচিত্রের সাহায্যে নির্দেশ করা যায়।

অসুবিধা (Disadvantages) :

(i) লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপিত রাশিতথ্যে চলকের সঠিক মানের বদলে একটি মোটামুটি আসন্ন মান পাওয়া যায়। কিন্তু ছকবিন্যাসে চলকের সঠিক মান পাওয়া সম্ভব।

(ii) লেখচিত্রে উপস্থাপিত রাশিতথ্যে বিশদ বিবরণ পাওয়া যায় না। কিন্তু ছকবিন্যাসে বিশদ বিবরণ পাওয়া সম্ভব।

(iii) লেখচিত্র যদি নিখুঁত ভাবে অঙ্কন না করা হয় তবে ভুল সিদ্ধান্তে পৌঁছানোর সম্ভবনা থাকে।

লেখচিত্রের বিভিন্ন ধরন (Different types of Graphs)

(ক) পরিসংখ্যাবিহীন রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে (Case of Non-frequency Data)

(i) রেখাচিত্র (Line diagram)

(ii) আনুপাতিক লেখচিত্র (Ratio Chart or Logarithmic Chart)

(iii) দণ্ড চিত্র (Bar diagram)

(iv) পাই চিত্র (Pie diagram)

(খ) পরিসংখ্যাযুক্ত রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে (Case of Frequency Data)

(v) আয়ত লেখ (Histogram)

(vi) পরিসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygon)

(vii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনের লেখচিত্র (Ogive)

1.4.3.1 রেখাচিত্র

রাশিতথ্য উপস্থাপনায় বিশেষ করে কালীন সারির (time series) আলোচনায় এই রেখাচিত্রের ব্যবহার খুবই উপযোগী। রেখাচিত্র অঙ্কনের জন্য দুটি অক্ষ নেওয়া হয় একটি অনুভূমিক অক্ষ ও অপরটি উল্লম্ব অক্ষ। দুটি অক্ষ-সরলরেখা সমকোণে ছেদ করে। অনুভূমিক অক্ষ বরাবর x-চলক ও উল্লম্ব অক্ষ বরাবর y-চলক পরিমাপ করা হয়। দুটি অক্ষ মূলবিন্দুতে ছেদ করে। মূলবিন্দুতে x-চলক ও y-চলকের মান হল শূন্য। এই মূলবিন্দু (0,0) সাপেক্ষে অনুভূমিক অক্ষের ডান দিক বরাবর x-চলকের ধনাত্মক মান গুলি পরিমাপ করা হয় এবং অনুভূমিক অক্ষের বাম দিক বরাবর x-চলকের ঋণাত্মক মানগুলি পরিমাপ করা হয়। অনুরূপভাবে মূলবিন্দু (0, 0) সাপেক্ষে উল্লম্ব অক্ষের উপরদিক বরাবর y-চলকের ধনাত্মক মানগুলি এবং উল্লম্ব অক্ষের নীচ দিক বরাবর y-চলকের ঋণাত্মক মানগুলি পরিমাপ করা হয়। সাধারণত x-চলককে স্বাধীন চলক (independent variable) এবং y-চলককে পরাধীন বা নির্ভরশীল চলক (dependent variable) বলা হয়ে থাকে।

রাশিতথ্যে x-চলক ও y-চলকের বিভিন্ন মান দেওয়া থাকে। যেমন x_1, x_2, x_3......x-চলকের ক্ষেত্রে

এবং y_1, y_2, y_3........y-চলকের ক্ষেত্রে। অর্থাৎ রাশিতথ্য থেকে আমরা বিভিন্ন বিন্দু পাব যেমন (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)..........ইত্যাদি। এই বিন্দুগুলিকে রেখাচিত্রে একটি লেখ কাগজের (graph paper) উপর উপস্থাপন করা হয়। বিন্দুগুলিকে রেখার দ্বারা সংযোজন করা হয়। আবার, যখন দুই প্রস্থ রাশিতথ্য কালীন সারিতে তুলনা করা হয় তখন একই লেখ কাগজে দুটি রেখাচিত্র অঙ্কন করা হয় ফলে তুলনামূলক আলোচনা খুবই সহজসাধ্য হয়।

উদাহরণ : 2 নীচের কালীন সারি থেকে ভারতের আমদানি ও রপ্তানির রাশিতথ্যের একটি তুলনামূলক পর্যালোচনা কর।

বর্ষ	1937-38	1938-39	1939-40	1940-41	1941-42	1942-43	1943-44	1944-45	1945-46
ভারতের রপ্তানি (কোটি টাকাতে)	301	295	309	260	276	184	158	156	182
ভারতের আমদানি (কোটি টাকাতে)	243	226	230	184	168	85	89	160	177

সমাধান : একই লেখ কাগজে দুটি রেখাচিত্র আঁকা হল যাতে রপ্তানি ও আমদানির মধ্যে তুলনা করা সম্ভব হয় বর্ষ অনুভূমিক অক্ষ বরাবর এবং আমদানি ও রপ্তানি উল্লম্ব অক্ষ বরাবর পরিমাপ করা হয়েছে।

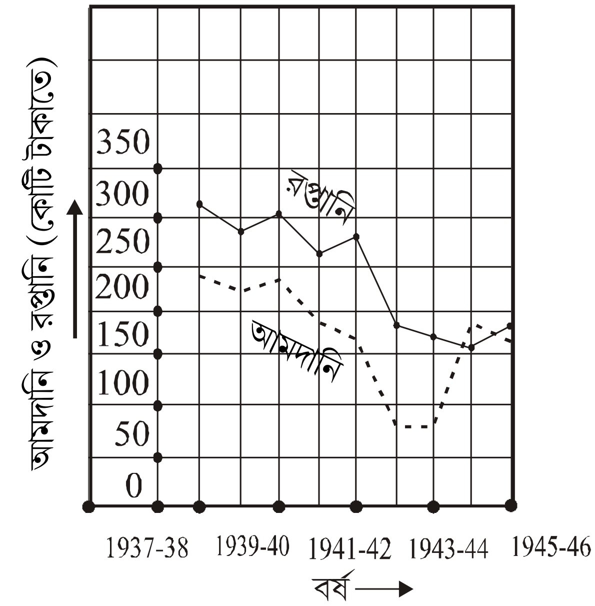
অঙ্কনের মাত্রা (Scale) :

উল্লম্ব মাত্রা : 1 ঘর = Rs. 50 কোটি

অনুভূমিক মাত্রা : 1 ঘর = 1 বর্ষ

1.4.3.2 আনুপাতিক লেখচিত্র বা লগারিদ্‌মিক চিত্র — তার সুবিধা ও অসুবিধা

যখন কোনো রেখাচিত্র অনুভূমিক অক্ষে স্বাধীন চলকের মানগুলি স্বাভাবিক মাত্রায় (normal scale) ও উল্লম্ব অক্ষে নির্ভরশীল চলকের মানগুলি লগারিদ্‌ম মাত্রায় (logarithmic scale) পরিমাপ করা হয় তখন সেই রেখাচিত্রকে আনুপাতিক লেখচিত্র (Ratio chart) বা সেমি-লগারিদ্‌মিক লেখচিত্র (Semi Logarithmic graph) বলা হয়।



চিত্র 1·1 : ভারতের আমদানী ও রপ্তানির (1937–38 থেকে 1945-46) তুলনামূলক রেখাচিত্র

এই ধরনের লেখচিত্র থেকে স্বাধীন চলকের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে নির্ভরশীল চলক কী হারে পরিবর্তিত হচ্ছে সেটা বোঝা যায়।

কালীন সারির আলোচনাতে যদি প্রবণতা সমীকরণ $y = ab^t$ হয়, তাহলে সমীকরণের উভয় দিকে log নিলে, সমীকরণটি হবে

$$\log y = \log a + t \log b$$

অর্থাৎ এখানে $\log y$ হল নির্ভরশীল চলক এবং t হল স্বাধীন চলক এই ধরনের লেখচিত্র একটি সরলরৈখিক রেখাচিত্রের আকারে পাওয়া যায়।

কিন্তু, যদি প্রবণতার সমীকরণ $y = at^b$ হয়, তখন দুদিকে log নিলে সমীকরণটি হবে

$$\log y = \log a + b \log t$$

এক্ষেত্রে নির্ভরশীল চলক $\log y$ এবং স্বাধীন চলক $\log t$.

এই ধরনের রেখাচিত্রে অনুভূমিক অক্ষে $\log t$ এবং উল্লম্ব অক্ষে $\log y$ পরিমাপ করা হয়। সেই রেখা-চিত্রকে ডাবল লগারিদ্‌ম চিত্র বলা হয়।

সুবিধা :

(i) তুলনামূলক পরিবর্তন পর্যালোচনার ক্ষেত্রে আনুপাতিক লেখচিত্র খুবই উপযোগী। কারণ নির্ভরশীল চলক এবং পরিবর্তনের হার উল্লম্ব অক্ষে পরিমাপ করা হয়।

(ii) রাশিতথ্যে যদি সর্বনিম্ন মান ও সর্বোচ্চ মানের মধ্যে ব্যবধান যদি অস্বাভাবিক রকম বেশি হয় তবে স্বাভাবিক মাত্রায় লেখ কাগজে সেই রাশিতথ্য উপস্থাপন করা অসম্ভব হয়ে পড়ে। এসব ক্ষেত্রে আনুপাতিক লেখচিত্র ব্যবহৃত হয়।

(iii) দুই বা ততোধিক নির্ভরশীল চলক যদি ভিন্ন একক বিশিষ্ট হয় তাহলে স্বাভাবিক মাত্রায় লেখ কাগজে উপস্থাপন সম্ভব হয় না। এক্ষেত্রে আনুপাতিক লেখচিত্র ব্যবহৃত হয়।

অসুবিধা :

(i) আনুপাতিক লেখচিত্রে শূন্য অথবা ঋণাত্মক মান log এ প্রকাশ করা যায় না।

(ii) আনুপাতিক লেখচিত্রে চলকের প্রকৃত পরিবর্তন সম্পর্কে কোনো ধারণা করা সম্ভব হয় না।

(iii) logarithm সম্পর্কে জ্ঞান না থাকলে আনুপাতিক লেখচিত্র তৈরি করা যায় না।

উদাহরণ : 3 নির্ভরশীল চলক (y) এবং স্বাধীন চলকের (x) মানগুলি নীচের রাশিতথ্যে দেওয়া হল।

x :	7	8	9	10	11	12
y :	132	214	330	486	688	942

একটি আনুপাতিক লেখচিত্র প্রস্তুত কর। আন্তঃমান নির্ণয় পদ্ধতি অনুযায়ী y এর মান নির্ণয কর যেখানে x রে মান 10·5.

সমাধান : সাধারণ লেখ কাগজে অণুভূমিক অক্ষে স্বাধীন চলক x এবং উল্লম্ব অক্ষে নির্ভরশীল চলক $\log y$ পরিমাপ করা হয়।

log এর গণনা

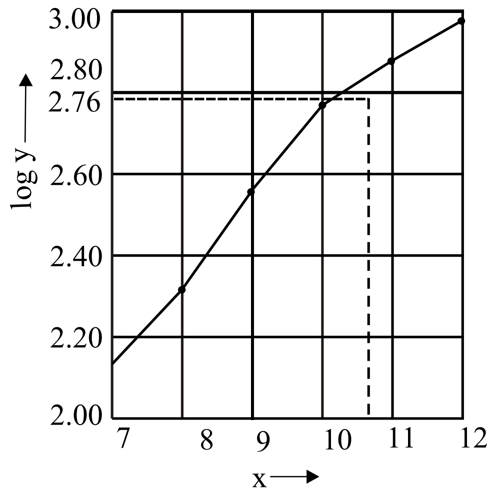
x	y	$\log y$
7	132	2·12
8	214	2·33
9	330	2·52
10	486	2·69
11	688	2·84
12	942	2·97

এখন সরল আন্তঃমান নির্ণয় পদ্ধতিতে $\log y$ এর মান হবে 2·76 (প্রায়) যখন $x = 10{\cdot}5$

$\log y = 2{\cdot}76$

$y = \text{anti log } 2{\cdot}76 = 575{\cdot}4$

$\therefore\ x = 10{\cdot}5$ হলে y এর মান হবে 575·4



চিত্র 1·2 : আনুপাতিক লেখচিত্র সেমি লগারিদ্‌মিক চিত্র

1.4.3.3 দণ্ডচিত্র বা দণ্ডলেখ

দণ্ডচিত্র প্রস্তুত করার সময়ে কতকগুলি সমান প্রস্থের আয়তকার দণ্ডকে সমান দূরত্বে অঙ্কন করা হয়। এই দণ্ডগুলির দৈর্ঘ্য রাশিতথ্যের মানের সমানুপাতিক হবে। দণ্ডচিত্র দুই প্রকারের হয়

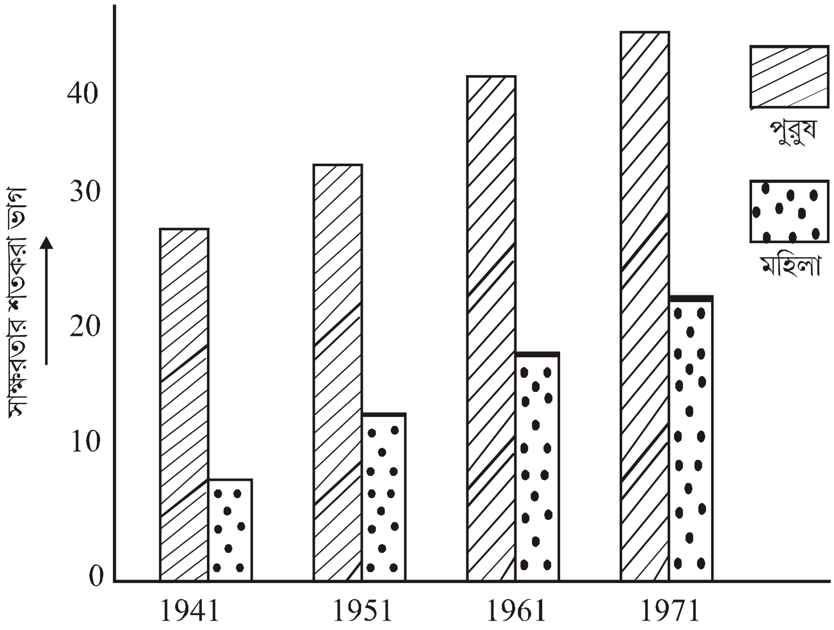
(i) উল্লম্ব দণ্ডচিত্র (Vartical Bar Charts)

(ii) অনুভূমিক দণ্ডচিত্র (Horizontal Bar Charts)

কালীন সারির ক্ষেত্রে উল্লম্ব দণ্ডচিত্র এবং অন্যান্য সাধারণ রাশিতথ্যের বা অপরিমেয় রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে অনুভূমিক দণ্ডচিত্র ব্যবহার করা হয়। পারস্পরিক সম্পর্কযুক্ত কালীন সারির তুলনা করার জন্য বিশেষ ধরনের দণ্ডচিত্র অঙ্কন করা হয়। এই দণ্ডচিত্রকে জটিল দণ্ডচিত্র (Multiple or Compound Bar Chart) বলা হয়। কখনও আবার একটি মাত্র দণ্ডের মধ্যে রাশিতথ্যের অংশগুলি শতকরা হারে অন্তর্ভুক্ত করা হয়। এই দণ্ডচিত্রকে বহুধা বিভক্ত দণ্ডচিত্র (Component Bar Chart) বলে।

উদাহরণ : 4 নিম্নলিখিত রাশিতথ্যে পশ্চিমবঙ্গের সাক্ষরতার শতকরা হার লিঙ্গ ভেদে দেওয়া হল। একটি উপযুক্ত দণ্ডচিত্রের এই রাশিতথ্য উপস্থাপিত কর।

	বর্ষ			
	1941	1951	1961	1971
পুরুষ	27·4	34·1	40·1	44·8
মহিলা	3·9	12·3	17·0	22·1



চিত্র 1·3 : জটিল দণ্ডচিত্রের মাধ্যমে পশ্চিমবঙ্গের সাক্ষরতার হার (লিঙ্গ ভেদে) উপস্থাপিত হল।

1.4.3.4 পাইচিত্র

বহুধা বিভক্ত দণ্ডচিত্রের মতো পাইচিত্র ও ব্যবহৃত হয় যখন রাশিতথ্যটি বিভিন্ন অংশে বিভক্ত থাকে। ঐ অংশগুলিকে তুলনামূলক আলোচনার জন্য উপস্থাপিত করা হয় একটি বৃত্তের মধ্যে। যে কোনো বৃত্তের কেন্দ্রে 360^{o} কোণ পাওয়া যায়। এই 360^{o} কোণ রাশিতথ্যের শতকরা 100 ভাগ উপস্থাপিত করে। অর্থাৎ রাশিতথ্যের শতকরা একভাগ (1%) বৃত্তের কেন্দ্রে $\frac{360^{o}}{100} = 3{\cdot}6^{o}$ কোণ উৎপন্ন করে। এই ভাবে রাশিতথ্যের বিভিন্ন অংশের শতকরা ভাগকে $3{\cdot}6^{o}$ দিয়ে গুণ করলে রাশিতথ্যের ঐ অংশ বৃত্তের কেন্দ্রে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করে সেটা জানা যায়। এইরূপ ভাবে হিসাব করলে রাশিতথ্যের বিভিন্ন অংশ যত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করে সেই কেন্দ্রস্থ কোণগুলি অঙ্কনের দ্বারা বৃত্তটিকে কয়েকটি বৃত্তাংশে বিভক্ত করা হয়। ফলে তুলনামূলক আলোচনার পথ প্রশস্থ হয়।

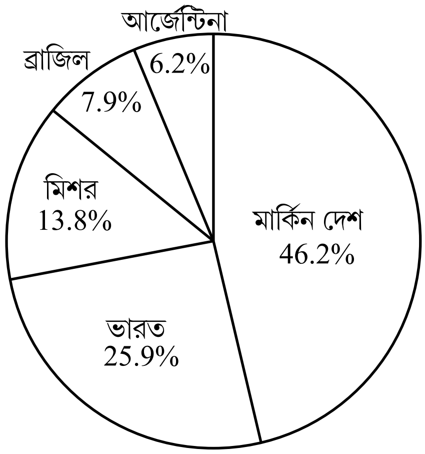
উদাহরণ : 5 নিম্নলিখিত রাশিতথ্যের একটি পাইচিত্র অঙ্কন কর।

প্রধান তুলা রপ্তানিকারক দেশগুলি

দেশ	মার্কিন দেশ	ভারত	মিশর	ব্রাজিল	আর্জেন্টিনা
তুলা রপ্তানি (10,000 বেল)	536	300	160	92	72

পাইচিত্রের জন্য গণনা

দেশ	তুলা রপ্তানি (10,000 বেল)	শতকরা হিসাব	কেন্দ্রস্থ কোণ
মার্কিন দেশ	536	$\frac{536}{1160}\times100=46{\cdot}2\%$	$46{\cdot}2 \times 3{\cdot}6^{o} = 166{\cdot}3^{o}$
ভারত	300	$\frac{300}{1160}\times100=25{\cdot}9\%$	$25{\cdot}9 \times 3{\cdot}6^{o} = 93{\cdot}2^{o}$
মিশর	160	$\frac{160}{1160}\times100=13{\cdot}8\%$	$13{\cdot}8 \times 3{\cdot}6^{o} = 49{\cdot}7^{o}$
ব্রাজিল	92	$\frac{92}{1160}\times100=7{\cdot}9\%$	$7{\cdot}9 \times 3{\cdot}6^{o} = 28{\cdot}5^{o}$
আর্জেন্টিনা	72	$\frac{72}{1160}\times100=6{\cdot}2\%$	$6{\cdot}2 \times 3{\cdot}6^{o} = 22{\cdot}3^{o}$
মোট	1160	100%	360^{o}



পাইচিত্রের মাধ্যমে বিভিন্ন প্রধান তুলা রপ্তানিকারক দেশগুলির তুলনামুলক অবস্থান

1.4.3.5 আয়তলেখ

অবিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া থাকলে সেই রাশিতথ্য আয়তলেখর (Histogram) সাহায্যে উপস্থাপিত হয়। অনুভূমিক অক্ষের উপর পরপর আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করা হয় যাদের প্রতিটির ক্ষেত্রফল অনুরূপ শ্রেণি পরিসংখ্যার সঙ্গে সমানুপাতিক।

প্রথমেই পরিসংখ্যা বিভাজনে শ্রেণি বিভাগ গুলির শ্রেণি সীমানা (class boundary) অণুভূমিক অক্ষে পরপর অঙ্কন করা হয় যাতে কোন ফাঁক না থাকে। প্রতিটি আয়তক্ষেত্রের অণুভূমিক দৈর্ঘ্য শ্রেণি দৈর্ঘ্যের (class width) সমান হবে। আবার আয়তক্ষেত্র গুলির উচ্চতা অণুরূপ পরিসংখ্যার মানের সঙ্গে সমান হবে। অবশ্য এ ক্ষেত্রে ধরে নেওয়া হয়েছে যে প্রতিটি শ্রেণিবিভাগের শ্রেণি দৈর্ঘ্য (class width) সমান।

যদি শ্রেণিবিভাগের শ্রেণি দৈর্ঘ্য গুলি অসমান হয় তখন আয়ত ক্ষেত্র গুলির উচ্চতা শ্রেণিগুলির পরিসংখ্যা ঘনত্বের (Frequency density) সঙ্গে সমানুপাতিক হবে।

$$\text{পরিসংখ্যা ঘনত্ব (Frequency density)} = \frac{\text{শ্রেণির পরিসংখ্যা}}{\text{ঐ শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য}}$$

টিকা : আয়তলেখ অঙ্কনের সময় শ্রেণি সীমানা (class boundary) ব্যবহার করতে হবে শ্রেণি সীমা (class limit) নয়।

উদাহরণ : 6

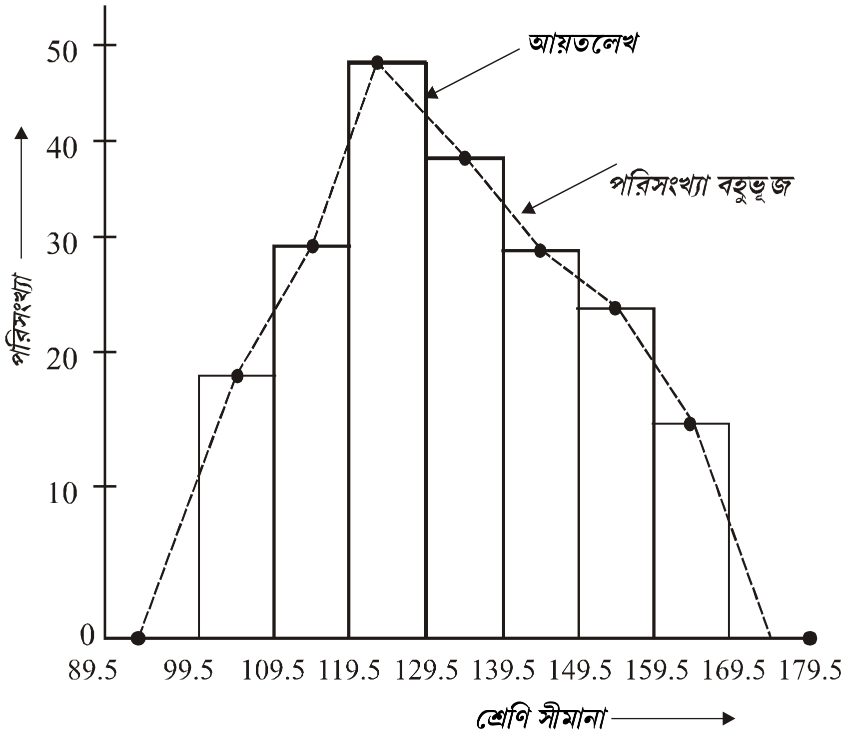
নিম্নলিখিত রাশিতথ্যের ভিত্তিতে একটি আয়তলেখ অঙ্কন কর।

শ্রেণি সীমা (class limits)	100-109	110-119	120-129	130-139	140-149	150-159	160-169
পরিসংখ্যা (frequency)	17	28	46	38	30	26	15

সমাধান : প্রথমেই শ্রেণি সীমা (class limit) থেকে শ্রেণি সীমানা (class boundary) নির্ধারণ করা প্রয়োজন। তারপর আয়তক্ষেত্রগুলির উচ্চতা অনুরূপ পরিসংখ্যার সমান হতে হবে কারণ শ্রেণি দৈর্ঘ্যগুলি সব সমান।

ছক সংখ্যা—২ আয়তলেখর জন্যে রাশিতথ্য

শ্রেণি সীমা	শ্রেণি সীমানা	পরিসংখ্যা	শ্রেণি দৈর্ঘ্য
100 – 109	99·5 – 109·5	17	10
110 – 119	109·5 – 119·5	28	10
120 – 129	119·5 – 129·5	46	10
130 – 139	129·5 – 139·5	38	10
140 – 149	139·5 – 149·5	30	10
150 – 159	149·5 – 159·5	26	10
160 – 169	159·5 – 169·5	15	10
মোট		200	



চিত্র 1·5 : আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভুজ

1.4.3.6 পরিসংখ্যা বহুভুজ

চিত্র 1·5-এ আয়তলেখ অঙ্কন করা হয়েছে। আয়তলেখর আয়তক্ষেত্রগুলির প্রতিটির মাথায় ঠিক মধ্যবিন্দুগুলি চিহ্নিত করে তাদের পরপর ভগ্নরেখার দ্বারা যোগ করে পরিসংখ্যা বহুভূজ অঙ্কন করা হয়েছে। পরিসংখ্যা বহুভূজ অঙ্কনে লক্ষণীয় ব্যাপার হল এই পরিসংখ্যা বহুভূজ অনুভূমিক অক্ষের দুটি বিন্দুতে মিশেছে। একটি বিন্দু হল প্রথম শ্রেণির (99·5 – 109·5) ঠিক আগের শ্রেণির (89·5 – 99·5) মধ্যবিন্দু এবং অপর বিন্দু হল শেষ শ্রেণিটির (159·5 – 169·5) ঠিক পরের শ্রেণিটির (169·5 – 179·5) মধ্যবিন্দু। দুটি বিন্দুই অনুভূমিক অক্ষের উপর অবস্থিত।

1.4.3.7 ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক উপস্থাপন—সোপান চিত্র— ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা

সাধারণত পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে একটি শ্রেণির মধ্যে কতগুলি চলকের মান আছে তাই নির্দেশ করে। কিন্তু কখনও শ্রেণিগুলির নির্দ্দিষ্ট সীমার উপর বা নীচে চলকের কতগুলি মান আছে তা জানার প্রয়োজন হয়। এরূপ ক্ষেত্রে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নির্ণয় করা হয়।

দুই ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা হয় : (i) নীচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (Cumulative Frequency less than type) (ii) উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (Cumulative Frequency more than type)

একটি উদাহরণের সাহায্যে বোঝানো যাক্।

ছক সংখ্যা : 3

100 জন শ্রমিকের মজুরীর বণ্টন (টাকায়)

মজুরী (টাকায়)	শ্রমিক সংখ্যা	শ্রেণি সীমানা (মজুরী)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নীচ থেকে CF≤	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা উপর থেকে CF≥
		100	0	100
100 – 110	10	110	10	90
110 – 120	14	120	24	76
120 – 130	30	130	54	46
130 – 140	26	140	80	20
140 – 150	20	150	100	0
	মোট = 100			

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (নীচ থেকে) (Cumulative Frequency less than type) নির্ণয় করার সময় প্রথম শ্রেণির (100 – 110) সর্বনিম্ন শ্রেণি সীমানা (এখানে 100) থেকে নীচে কত জন শ্রমিক রয়েছে দেখা হয়। 100 এর নীচে একজনও শ্রমিক না থাকায় ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা হবে 'O'। এরপর 110 এর নীচে কত জন শ্রমিক রয়েছে দেখা হয়। এই শ্রমিক সংখ্যা হবে 10. তারপর 120 এর নীচে কত জন শ্রমিক রয়েছে দেখা হয়। এই শ্রমিক সংখ্যা হবে 10 + 14 = 24. তারপর 130 এর নীচে রয়েছে 10 + 14 + 30 = 54 জন শ্রমিক। অনুরূপভাবে 140 এবং 150 শ্রেণি সীমানার নীচে রয়েছে যথাক্রমে 10 + 14 + 30 + 26 = 80 এবং 10 + 14 + 30 + 26 + 20 = 100 জন শ্রমিক।

একইভাবে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (উপর থেকে) (Culmulative Frequency more than type) নির্ণয় করার সময় প্রশ্ন করা হয় যে 100 শ্রেণি সীমানার উপরে কত জন শ্রমিক রয়েছে। অবশ্যই সব শ্রমিক অর্থাৎ 100 জনই এই সর্বনিম্ন শ্রেণি সীমানার উপরে রয়েছে। একইভাবে পরের প্রশ্ন 110 শ্রেণি সীমানার উপরে কয়জন শ্রমিক রয়েছে। উত্তর : 100 – 10 = 90 জন শ্রমিক। অনুরূপ প্রশ্ন 120 শ্রেণি সীমানার উপরে কয়জন শ্রমিক রয়েছে। উত্তর : 100 – 10 – 14 = 76 জন শ্রমিক। এরপর প্রশ্ন 130, 140 ও 150 শ্রেণি সীমানাগুলির উপর যথাক্রমে 100 – 10 – 14 – 30 = 46 জন, 100 – 10 – 14 – 30 – 26 = 20 জন এবং 100 – 10 – 14 – 30 – 26 – 20 = 0 জন শ্রমিক রয়েছে। এই উত্তরগুলি

পরপর উপর থেকে নীচে সাজিয়ে রাখলে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা সারণি পাওয়া যাবে। ছক—2-তে এই ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার সারণি দেওয়া হয়েছে।

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক উপস্থাপনের সময় দেখে নিতে হবে চলকটি বিচ্ছিন্ন না অবিচ্ছিন্ন। যদি চলকটি বিচ্ছিন্ন (discrete) হয় তবে যে রেখাচিত্রের দ্বারা ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনকে উপস্থাপিত করা হয় সেটি একটি সোপান চিত্রের (Step Diagram) আকার নেয়।

অপর পক্ষে যদি চলকটি অবিচ্ছিন্ন (continuous) হয় তবে যে রেখাচিত্রের সাহায্যে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনকে উপস্থাপিত করা হয় তার নাম ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা (cumulative frequency Polygon or Ogive)

উদাহরণের সাহায্যে সোপান চিত্র (Step Diagram) ও ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা (cumulative frequency Polygon or Ogive) নীচে বোঝানো হল।

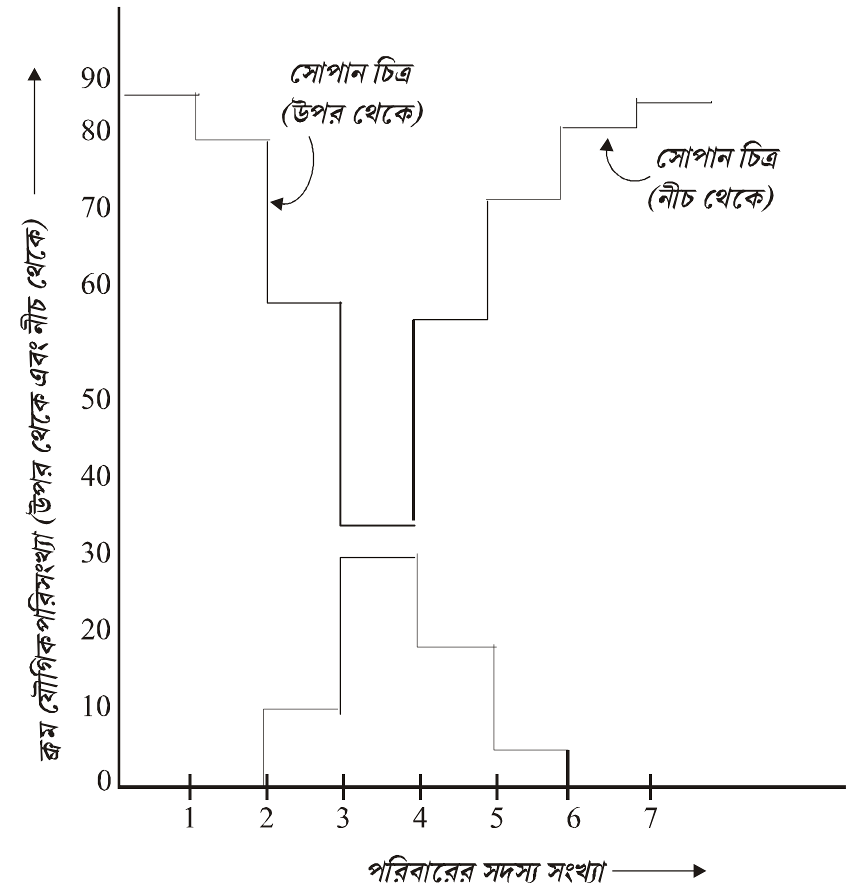
উদাহরণ : 7 বিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

পরিবারের সদস্য সংখ্যার পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া হল 90 টি পরিবারের জন্য। এই রাশিতথ্যের উপর ভিত্তি করে সোপান চিত্র (Step Diagram) (উপর থেকে এবং নীচ থেকে) অঙ্কন কর।

ছক সংখ্যা : 4

পরিবারের সদস্য সংখ্যা	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
		নীচ থেকে CF≤	উপর থেকে CF≥
2	9	9	90
3	20	29	81
4	30	59	61
5	17	76	31
6	10	86	14
7	4	90	4
মোট	90		

পরিবারের সদস্য সংখ্যা হল এখানে বিচ্ছিন্ন চলক। এই বিচ্ছিন্ন চলকটিকে অনুভূমিক অক্ষে পরিমাপ করা হয়েছে এবং ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (উপর থেকে এবং নীচ থেকে) উল্লম্ব অক্ষ বরাবর পরিমাপ করা হয়েছে। ফলে যে বিন্দুগুলি পাওয়া গেছে সেগুলি সরলরেখার দ্বারা যোগ করে সোপান চিত্র পাওয়া গেছে।



চিত্র 1·6 : বিচ্ছিন্ন চলকের জন্য সোপান চিত্র (উপর থেকে এবং নীচ থেকে)

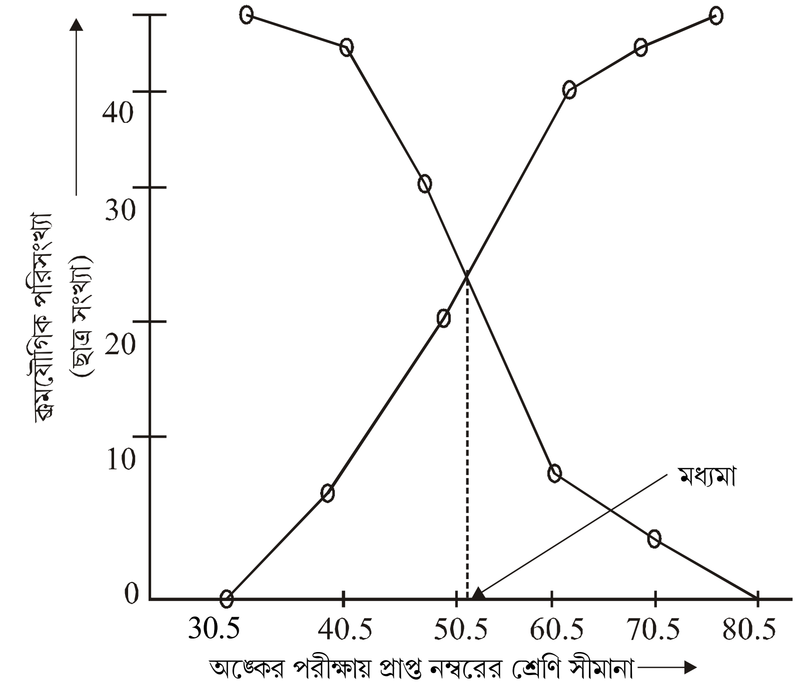
উদাহরণ : 8 অবিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা অঙ্কন

50 টি ছাত্রের অঙ্কের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া হল। এই রাশিতথ্যের ভিত্তিতে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা অঙ্কন কর।

ছক সংখ্যা : 5

শ্রেণি সীমা (class limits)	শ্রেণি সীমানা (class boundaries)	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা CF≤ (নীচ থেকে)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা CF≥ (উপর থেকে)
31 – 40	30·5 – 40·5	6	6	50
41 – 50	40·5 – 50·5	14	20	44
51 – 60	50·5 – 60·5	20	40	30

61 – 70	60·5 – 70·5	7	47	10
71 – 80	70·5 – 80·5	3	50	3
মোট		50		



প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে প্রথমেই শ্রেণি সীমানা নির্ণয় করা হয়। এই শ্রেণি সীমানাগুলি অনুভূমিক অক্ষ বরাবর পরিমাপ করা হয় এবং ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (উপর থেকে এবং নীচ থেকে) উল্লম্ব অক্ষ বরাবর পরিমাপ করা হয়। ফলে যে বিভিন্ন সম্মিলিত বিন্দু পাওয়া যায় সেগুলিকে সরলরেখার দ্বারা যোগ করলে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা (উপর থেকে) এবং ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা (নীচ থেকে) পাওয়া যায়। এই দুই ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা (নীচ থেকে এবং উপর থেকে) যে বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে তার অনুভূমিক মান হবে ঐ চলকের মধ্যমা (Median)।

1.5 পরিসংখ্যা বিভাজন

সংগৃহীত রাশিতথ্যের পরিমাণ যদি পাহাড়প্রমাণ হয় তাহলে সেই বিপুল রাশিতথ্যের তাৎপর্য ও প্রবণতা বিচার করা দুঃসাধ্য হয়ে ওঠে। তাই কাঁচা রাশিতথ্যকে (Raw data) সুশৃঙ্খলভাবে সাজিয়ে নিতে হয়। চলকের বিভিন্ন মানগুলি যদি শ্রেণিবদ্ধভাবে তাদের পরিসংখ্যার (অর্থাৎ কোন শ্রেণির মধ্যে চলকের

কতগুলি মান আছে) সঙ্গে সুবিন্যস্তভাবে পাশাপাশি উপস্থাপিত করা হয়, তবে তাকে পরিসংখ্যা বিভাজন বলে।

পরিসংখ্যা বিভাজন তিন প্রকারের হয় :

(ক) গুণবাচক পরিসংখ্যা বিভাজন (frequency distribution of an attribute)

(খ) বিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন (frequency distribution of a discrete variable)

(গ) অবিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন (frequency distribution of a continuous variable)

গুণবাচক পরিসংখ্যা বিভাজনের উদাহরণ :

ছক সংখ্যা : 6

সহ শিক্ষামূলক শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের একটি শ্রেণিতে লিঙ্গ ভেদে 50 জন ছাত্র-ছাত্রীর পরিসংখ্যা বিভাজন

লিঙ্গ	**পরিসংখ্যা**
বালিকা (F)	22
বালক (M)	28
মোট	50

উপরের ছকটি একটি শ্রেণিতে লিঙ্গভেদে কতগুলি ছাত্র ও কতগুলি ছাত্রী আছে সেই তথ্য পরিবেশন করেছে।

বিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজনের উদাহরণ :

ছক সংখ্যা : 7 বিভিন্ন পরিবারের সদস্য সংখ্যার কাঁচা রাশিতথ্য

3	4	3	5	4	3	2	4	2	2
5	5	3	4	3	2	6	4	2	3
4	6	7	6	6	5	4	4	3	6
2	3	3	5	4	5	3	2	5	7
6	4	4	5	7	3	6	3	4	5
3	6	4	5	6	7	4	4	3	3
5	4	3	4	3	6	2	2	3	4
5	5	4	5	4	4	5	4	5	4
4	4	4	3	4	5	4	4	3	4

ছক সংখ্যা : 8

পরিবারের সদস্য সংখ্যার পরিসংখ্যা বিভাজন (টালী মার্কের সাহায্যে)

পরিবারের সদস্য সংখ্যা	টালী মার্ক	পরিসংখ্যা
2	卌 ||||	9
3	卌 卌 卌 卌	20
4	卌 卌 卌 卌 卌 卌	30
5	卌 卌 卌 ||	17
6	卌 卌	10
7	||||	4
মোট		90

ছক সংখ্যা : 9

।। বিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন।।

পরিবারের সদস্য সংখ্যার আপেক্ষিক পরিসংখ্যা বিভাজন ও ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

পরিবারের সদস্য সংখ্যা	পরিসংখ্যা	আপেক্ষিক* পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
			নীচ থেকে	উপর থেকে
2	9	0·100	9	90
3	20	0·222	29	81
4	30	0·333	59	61
5	17	0·189	76	31
6	10	0·111	86	14
7	4	0·044	90	4
মোট	90	0·999 = 1		

টীকা : *আপেক্ষিক পরিসংখ্যা = শ্রেণিটির পরিসংখ্যা ÷ মোট পরিসংখ্যা

ছক সংখ্যা : 10

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনের (নীচ থেকে) গণনা

পরিবারের সদস্য সংখ্যা	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (নীচ থেকে)
2	9	9
3	20	(9 + 20) = 29
4	30	(9 + 20 + 30) = 59
5	17	(9 + 20 + 30 + 17) = 76
6	10	(9 + 20 + 30 + 17 + 10) = 86
7	4	(9 + 20 + 30 + 17 + 10 + 4) = 90
মোট	90	

ছক সংখ্যা : 11

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনের (উপর থেকে) গণনা

পরিবারের সদস্য সংখ্যা	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (উপর থেকে)
2	9	90 = (90 + 20 + 30 + 17 + 10 + 4)
3	20	81 = (20 + 30 + 17 + 10 + 4)
4	30	61 = (30 + 17 + 10 + 4)
5	17	31 = (17 + 10 + 4)
6	10	14 = (10 + 4)
7	4	4
মোট	90	

অবিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন

(Frequency distribution of a Continuous Variable)

অবিচ্ছিন্ন চলকের রাশিতথ্যের উপস্থাপনার জন্য শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন (grouped frequency distribution) সাধারণত ব্যবহার করা হয়। শ্রেণিগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন (mutually exculsive) হতে হবে। অর্থাৎ অবিচ্ছিন্ন চলকের কোন মান দুটি পরপর শ্রেণির অন্তর্ভূক্ত হওয়া চলবে না। শ্রেণি সংখ্যা খুব কম বা খুব বেশি হওয়া উচিৎ নয়।

শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের কতকগুলি দরকারি সংজ্ঞা দেওয়া হল।

(i) শ্রেণি বিভাগ (class interval)

(ii) শ্রেণি সীমা (class limits)

(iii) শ্রেণি সীমানা (class boundaries)

(iv) পরিসংখ্যা (frequency)

(v) মধ্যবিন্দু (Mid-value or class mark)

(vi) শ্রেণি দৈর্ঘ্য (Width of the class)

(vii) আপেক্ষিক পরিসংখ্যা (Relative frequency) এবং শতকরা পরিসংখ্যা (percentage frequency)

(viii) পরিসংখ্যার ঘনত্ব (Frequency Density)

এই সংজ্ঞাগুলি ছক সংখ্যা 12 তে দেওয়া রাশিতথ্যের ভিত্তিতে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

(i) শ্রেণি বিভাগ (Class Interval) : ছক সংখ্যা 12 তে প্রথম স্তম্ভ (1) তে শ্রেণি বিভাগ দেখানো হয়েছে। চলকের মানগুলিকে কতকগুলি দলে বিভক্ত করা হয়। এখানে 5টি দল (group) দেখানো হয়েছে (31 – 40), (41 – 50), (51 – 60), (61 – 70) ও (71 – 80) চলকের সবকটি মান এই দলগুলির অন্তর্ভুক্ত।

(ii) শ্রেণি সীমা (Class Limits) : ছক সংখ্যা 12 তে স্তম্ভ (3) ও স্তম্ভ (4) এ যথাক্রমে সর্বনিম্ন শ্রেণি সীমা ও সর্বোচ্চ শ্রেণি সীমা নির্দেশ করা হয়েছে। প্রতিটি শ্রেণির জন্য এই সীমা নির্দেশ করা হয়েছে।

ছক সংখ্যা : 12

50 জন ছাত্রের অঙ্ক পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন

শ্রেণি বিভাগ	পরিসংখ্যা (ছাত্র সংখ্যা)	শ্রেণি সীমা		শ্রেণি সীমা		মধ্য বিন্দু	শ্রেণি দৈর্ঘ্য	পরিসংখ্যা ঘনত্ব	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা CF≤ (নীচ থেকে)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা CF≥ (উপর থেকে)	আপেক্ষিক পরিসংখ্যা	শতকরা পরিসংখ্যা
		নিম্ন	ঊর্ধ্ব	নিম্ন	ঊর্ধ্ব							
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
31-40	6	31	40	30.5	40.5	35	10	0.6	6	50	0.12	12
41-50	14	41	50	40.5	50.5	45	10	1.4	20	44	0.28	28
51-60	20	51	60	50.5	60.5	55	10	2.0	40	30	0.40	40
61-70	7	61	70	60.5	70.5	65	10	0.7	47	10	0.14	14
71-80	3	71	80	70.5	80.5	75	10	0.3	50	3	0.06	6
মোট	50										1.00	100

(iii) শ্রেণি সীমানা (Class boundaries) : ছক সংখ্যা 12 তে স্তম্ভ (5) ও স্তম্ভ (6) এ যথাক্রমে সর্বনিম্ন শ্রেণি সীমানা ও সর্বোচ্চ শ্রেণি সীমানা নির্দেশ করা হয়েছে। চলকটি যেহেতু অবিচ্ছিন্ন চলক তাই শ্রেণিগুলির মধ্যে কোনো ফাঁক রাখা উচিৎ নয়। স্তম্ভ (1) এ শ্রেণি বিভাগগুলি লক্ষ্য করলে বোঝা যাবে যে প্রতিটি শ্রেণির মধ্যে ফাঁক রয়েছে। ফাঁকটি নির্ণয় করার জন্য নিম্নলিখিত পদ্ধতি অণুসরণ করা হয়।

পরপর দুটি শ্রেণির মধ্যে ফাঁক ধরা যাক্ 'd'। একটি শ্রেণি সীমার ঊর্ধ্ব শ্রেণি সীমাকে ঠিক তার পরবর্তী শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমার থেকে বিয়োগ করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় সেটিই হ'ল 'd' অর্থাৎ দুই শ্রেণির মধ্যে ফাঁক। এই ফাঁক বন্ধ করার জন্য একটি শ্রেণির নিম্ন সীমানা (lower class boundary) = শ্রেণিটির নিম্নসীমা (lower class limit) $-\frac{d}{2}$ এবং শ্রেণিটির ঊর্ধ্ব শ্রেণি সীমানা (upper class boundary) = ঐ শ্রেণির ঊর্ধ্ব শ্রেণি সীমা (upper class limit) $+\frac{d}{2}$.

ছক সংখ্যা 12 তে ফাঁক $d = 1$.

$\therefore$ প্রতিটি শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমা থেকে 0·5 বাদ দেওয়া হয়েছে এবং প্রতিটি শ্রেণির ঊর্ধ্ব শ্রেণি সীমা থেকে 0·5 যোগ করা হয়েছে। এভাবেই সমস্ত শ্রেণি সীমানা (class boundaries) গণনা করা হয়েছে। অর্থাৎ শ্রেণি সীমানাগুলি (class boundaries) হ'ল (30·5 – 40·5), (40·5 – 50·5), (50·5 – 60·5), (60·5 – 70·5) এবং (70·5 – 80·5)

(iv) শ্রেণি পরিসংখ্যা (class frequeny) : কোনো একটি শ্রেণিতে অবিচ্ছিন্ন চলকের কয়টি মান অন্তর্ভুক্ত আছে সেটি পরিসংখ্যার দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। ছক সংখ্যা 12 র স্তম্ভ (2) তে পরিসংখ্যাগুলি দেখানো হয়েছে।

(v) মধ্যবিন্দু (class mark or Mid value) : কোন শ্রেণির ঠিক মধ্যমানকে ঐ শ্রেণির মধ্যবিন্দু বলা হয়। শ্রেণিটির দুই সীমার (ঊর্ধ্ব সীমা ও নিম্ন সীমা) গাণিতিক গড়ই (Arithmatic Mean) হবে ঐ শ্রেণির মধ্যবিন্দু। শ্রেণিটির দুই সীমানার গাণিতিক গড় ও ঐ শ্রেণির মধ্যবিন্দু গণনা করতে ব্যবহার করা যায়।

ছক সংখ্যা 12 র স্তম্ভ (7) এ মধ্যবিন্দুগুলি দেখানো হয়েছে।

(vi) শ্রেণি দৈর্ঘ্য (Width of the class) : কোনো শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্য = (শ্রেণিটির ঊর্ধ্বসীমানা) — (শ্রেণিটির নিম্ন সীমানা) এই সমীকরণে শ্রেণি দৈর্ঘ্য গণনা করতে শ্রেণিটির শ্রেণি সীমা (class limits) কখনই ব্যবহার করা যাবে না। শুধুমাত্র শ্রেণি সীমানা (class boundaries) গুলিই ব্যবহার করতে হবে।

যদি সব শ্রেণিগুলি সমদৈর্ঘ্যের হয় তবে শ্রেণি দৈর্ঘ্য = দুটি পরপর নিম্ন শ্রেণি সীমা বা দুটি পরপর ঊর্ধ্ব শ্রেণি সীমার অন্তর হবে।

অথবা, শ্রেণি দৈর্ঘ্য = পরপর দুটি নিম্ন (বা ঊর্ধ্ব) শ্রেণি সীমানার অন্তর

অথবা, শ্রেণি দৈর্ঘ্য = দুটি পরপর মধ্যবিন্দুর অন্তর

ছক সংখ্যা 12 র স্তম্ভ (8) এ শ্রেণিদৈর্ঘ্যগুলি দেখানো হয়েছে।

(vii) আপেক্ষিক পরিসংখ্যা (Relative frequency) ও শতকরা পরিসংখ্যা (Percentage freqnency)

কোনো শ্রেণির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা (Relative frequency) = $\dfrac{\text{ঐ শ্রেণির পরিসংখ্যা}}{\text{সপ্তম শ্রেণির পরিসংখ্যা}}$

সকল শ্রেণির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা যোগফল সব সময় 1 হয়।

অপরদিকে নিম্নের সমীকরণের সাহায্যে শতকরা পরিসংখ্যা গণনা করা হয়।

শতকরা পরিসংখ্যা = আপেক্ষিক পরিসংখ্যা × 100

সকল শ্রেণির শতকরা পরিসংখ্যার (Percentage frequency) যোগফল সবসময় 100 হয়।

ছক সংখ্যা 12 র স্তম্ভ (12) ও স্তম্ভ (13) তে যথাক্রমে আপেক্ষিক ও শতকরা পরিসংখ্যা দেখানো হয়েছে।

(viii) পরিসংখ্যার ঘনত্ব (Frequency Density) = $\dfrac{\text{ঐ শ্রেণির পরিসংখ্যা}}{\text{শ্রেণির দৈর্ঘ্য}}$

অসম দৈর্ঘ্যের শ্রেণিগুলির ক্ষেত্রে আয়তলেখ (Histogram) অঙ্কনের সময় পরিসংখ্যা ঘনত্বের গণনা প্রয়োজন হয়।

ছক সংখ্যা 12 র স্তম্ভ (9) তে পরিসংখ্যার ঘনত্ব গণনা করে দেখানো হয়েছে।

1.6 সারাংশ

পরিসংখ্যান বা রাশিবিজ্ঞান এক ধরণের বিজ্ঞান যার সাহায্যে সংখ্যা দ্বারা পরিমিত রাশিতথ্য আহরণ, উপস্থাপন ও ব্যাখ্যা করা যায়। এই ব্যাখ্যার মধ্যে দিয়ে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্ত নেওয়া হয়।

রাশিতথ্য তিনটি উপায়ে উপস্থাপিত করা যায় :

(ক) বর্ণনাত্মক উপস্থাপন (Textual Presentation)

(খ) ছকবিন্যাসের সাহায্যে উপস্থাপন (Tabular Presentation)

(গ) লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন (Graphical Presentation)

ভারতে সরকারি পরিসংখ্যান ‘‘কেন্দ্রীয় পরিসংখ্যান সংগঠন’’ (Central Statistical Organisation বা CSO) ও ‘‘জাতীয় নমুনা তথ্য সংগ্রহ’’ (National Sample Survey বা NSS) নামক দুটি সংগঠন দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়। এছাড়া বিভিন্ন রাজ্যে স্টেট স্ট্যাটিসটিকাল ব্যুরো (State Statistical Bureau) গঠন করা হয়েছে যাতে পরিসংখ্যানের কাজ রাজ্যগুলিতে সুষ্ঠু ভাবে সংগঠিত হয়।

লেখচিত্রের সাহায্যে রাশিতথ্য উপস্থানের বিভিন্ন ধরনগুলি হল :

(ক) পরিসংখ্যাবিহীন রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে : (i) রেখাচিত্র (ii) আনুপাতিক লেখচিত্র (iii) দণ্ডচিত্র (iv) পাইচিত্র

(খ) পরিসংখ্যাযুক্ত রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে : (v) আয়তলেখ (vi) পরিসংখ্যা বহুভুজ (vii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনের লেখচিত্র।

পরিসংখ্যা বিভাজন তিন প্রকারের হয় :

(ক) গুণবাচক পরিসংখ্যা বিভাজন

(খ) বিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন

(গ) অবিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন

1.7 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা :

1. রাশিবিজ্ঞানের সংজ্ঞা কী?
2. বর্ণনামূলক (Descriptive) ও অনুমানসিদ্ধ সিদ্ধান্তমূলক (Inferential) রাশিবিজ্ঞানের মধ্যে মূল পার্থক্য কোথায়?
3. ব্যবসা ও বাণিজ্যের ক্ষেত্রে পরিসংখ্যানের ভূমিকা কী?
4. অর্থশাস্ত্রে পরিসংখ্যানের প্রয়োজনীয়তা কী?
5. বর্ণনাত্মক পদ্ধতিতে রাশিতথ্যের উপস্থাপনের (Textual presentation of Statistical data) সুবিধা ও অসুবিধাগুলি কী কী?
6. একটি বিশ্ববিদ্যালয়ে কোনো বৎসরে কলা, বিজ্ঞান ও বাণিজ্য শাখায় প্রথম বর্ষ, দ্বিতীয় বর্ষ ও তৃতীয় বর্ষের পরীক্ষায় অংশগ্রহণকারী পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা লিঙ্গভেদে প্রদর্শনের জন্য একটি ফাঁকা ছক তৈরি কর।
7. একটি রাশিতথ্যে শ্রেণিগুলি শ্রেণি সীমা (class limits) হিসাবে দেওয়া আছে (10 – 19), (20 – 29), (30 – 39), (40 – 49) ও (50 – 59) শ্রেণিগুলির শ্রেণি সীানা (class boundaries) নির্ণয় কর।
8. একটি রাশিতথ্যে শ্রেণিগুলি (10 – 19), (20 – 29), (30 – 39), (40 – 49) ও (50 – 59) দেওয়া আছে এবং পরিসংখ্যাগুলি যথাক্রমে 2, 10, 30, 5 এবং 3 দেওয়া আছে। একটি আপেক্ষিক পরিসংখ্যা (Relative frequency) বিভাজন প্রস্তুত কর।
9. 8 নং প্রশ্নের পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে সকল শ্রেণির পরিসংখ্যা ঘনত্ব (Frequency density) নির্ণয় কর।
10. লেখচিত্রের মাধ্যমে রাশিতথ্যের উপস্থাপনা কী কী ভাবে করা যায়?

প্রশ্নমালা :

11. ছকের বিভিন্ন অংশ ব্যাখ্যা কর। একটি ছক উপস্থাপিত করে তার সংক্ষিপ্ত বিবরণ দাও।

12. রেখাচিত্র কাকে বলে? একটি কাল্পনিক রেখাচিত্রের উদাহরণ দাও যাতে ভারতে ধান ও গম উৎপাদনের একটি তুলনামূলক আলোচনা সম্ভব হয়।
13. অনুপাতিক লেখচিত্র বা লগারিদ্‌মিক চিত্র কাকে বলে? অনুপাত চিত্রের সুবিধা ও অসুবিধা ব্যাখ্যা কর।
14. পাইচিত্রের উপর একটি টিকা লেখ।
15. নিম্নে প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে আয়তলেখ (Histogram) অঙ্কন কর।

আয় (100 টাকায়)	11–15	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40
শ্রমিক সংখ্যা	4	13	22	33	12	6

প্রশ্নমালা :

16. নিম্নে প্রদত্ত রাশিতথ্যের ভিত্তিতে শ্রেণি সীমা, শ্রেণি সীমানা, মধ্যবিন্দু, শ্রেণি দৈর্ঘ্য, পরিসংখ্যা ঘনত্ব, আপেক্ষিক পরিসংখ্যা, শতকরা পরিসংখ্যা, ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (নীচ থেকে) ও ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (উপর থেকে) নির্ণয় কর।

শ্রেণি বিভাগ	90–99	100–109	110–119	120–129	130–139
পরিসংখ্যা	12	20	35	25	8

17. একটি রাশিতথ্যে 50 টি ফার্মের ব্যয়ের বিবরণ (লক্ষ টাকায়) দেওয়া হল। প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখাদ্বয় (নীচ থেকে ও উপর থেকে) (cumulative frequency polygon less than and more than type) অঙ্কন কর।

    এবং ঐ রেখা দুটি থেকে মধ্যমার (Median) মান নির্ণয় কর।

শ্রেণি বিভাগ	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
ফার্ম সংখ্যা	5	8	12	10	8	5	2

18. নিম্নে প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে একটি আয়তলেখ অঙ্কন কর এবং ফার্মের সংখ্যা নির্ণয় কর যাদের বিক্রয় বাবদ আয় 12,00,000 টাকা থেকে 26,00,000 টাকার মধ্যে। মোট ফার্মের সংখ্যা 534.

বিক্রয় মূল্য ('000 টাকায়)	0–500	500–1000	1000–2500	2500–3500	3500–4500
ফার্মের সংখ্যা	3	42	288	150	51

1.8 গ্রন্থপঞ্জি

1. Applied General Statistics–by Croxton and Gowden, Prentice Hall, Inc, 1949
2. Statistical Methods–by S.P. Gupta, Sultan Chand & Sons, 2001

একক 2 ❑ কেন্দ্রীয় প্রবণতার বিভিন্ন পরিমাপ ও তাদের প্রয়োগ

গঠন

2.1 উদ্দেশ্য

কোনো চলকের কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের মূল উদ্দেশ্য হল :

(i) বিভিন্ন পরিমাপের সাহায্যে চলকটির একটি কেন্দ্রীয় মান গণনা করে বের করা যেটি চলকটির সমস্ত মানগুলির প্রতিনিধিত্ব করতে পারে। অর্থাৎ চলকটির সমস্ত মানগুলি এই কেন্দ্রীয় মানটিকে ঘিরে থাকবে এবং চলকটির মানগুলি সম্পর্কে একটি স্পষ্ট ধারণা করা সম্ভব হবে।

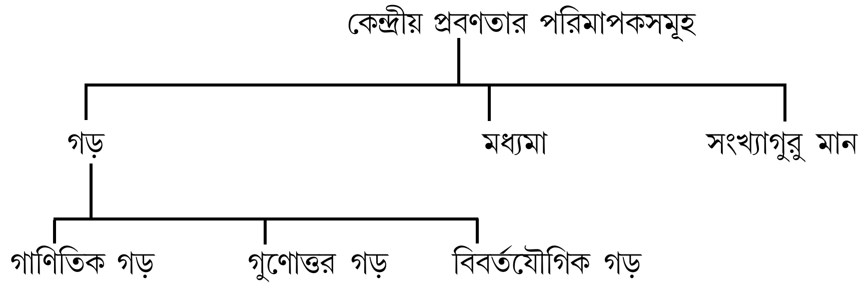
(ii) পরিমাপগুলির সাহায্যে দুই বা ততোধিক আলাদা দলের গড় মানগুলি নিয়ে একটা তুলনামূলক আলোচনা করা সম্ভব হয়। ধরা যাক বস্ত্রশিল্পের অধীনে তিনটি কারখানাতে একই দ্রব্যসামগ্রী উৎপাদিত হচ্ছে। এই তিনটি কারখানায় শ্রমিকদের গড় উৎপাদন তুলনা করে নির্দিষ্ট সিদ্ধান্ত নেওয়া সম্ভব। কোন একটি কারখানায় হয়তো গড় উৎপাদন খুবই কম। এবার এই কম গড় উৎপাদনের কারণ অনুসন্ধান করে সেই কারণের প্রতিষেধকের ব্যবস্থা করা যায়।

2.2 প্রস্তাবনা

রাশিতথ্যের পরিসংখ্যা বিভাজনের দিকে তাকালে সাধারণতঃ দেখা যায় যে পরিসংখ্যার স্তম্ভের মধ্যবর্তী অংশে চলকটির যে সব থেকে বেশি সংখ্যক মান কেন্দ্রীভূত আছে। ঐ সর্বাধিক পরিসংখ্যাযুক্ত শ্রেণিটির মধ্যে চলকটির কেন্দ্রীয় মানটি অবস্থান করে যার চারিদিকে চলকটির অন্যান্য মান বিস্তৃত থাকে। এই কেন্দ্রীয় মানটিই চলকের বাকী মানগুলির প্রতিনিধি। রাশিতথ্যের এই প্রবণতাকেই তার কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলা হয়।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করার তিনটি প্রধান পরিমাপক আছে। এগুলি হল—(i) গড় (Mean) (ii) মধ্যমা (Median) ও (iii) সংখ্যাগুরু মান (Mode)। গড়কে আবার তিনটি ভাগে ভাগ করা যায় : (ক) গাণিতিক গড় (Arithmatic Mean) (খ) গুণোত্তর গড় (Geometric Mean) ও (গ) বিবর্তযৌগিক গড় (Harmonic Mean)।

একটি প্রবাহচিত্রের (flow chart) মাধ্যমে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকগুলি দেখানো হল।



2.3 গাণিতিক গড়

ধরা যাক x চলকের n-সংখ্যক মান দেওয়া আছে x_1, x_2, x_3 ; ...., x_n. সরল গাণিতিক গড় (Simple Arithmatic Mean) $\overline{x}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হলে, x চলকের বিভিন্ন মানগুলির গড় হবে

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

যদি x চলকটির পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া থাকে সেক্ষেত্রে গড় পরিমাপ করা হবে ভারযুক্ত গাণিতিক গড়ের (Weighted Arithmatic Mean) মাধ্যমে।

$$\overline{x} = \frac{f_1 x_2 + f_2 x_2 + ... + f_n x_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n}$$

যেখানে x_1, x_2, ..., x_n চলকটির বিভিন্ন মানের সাথে তাদের পরিসংখ্যা f_1, f_2, ..., f_n দেওয়া আছে। এবং মোট পরিসংখ্যা $\sum_{i=1}^{n} f_i = n$

2.3.1 শ্রেণিবিভাগযুক্ত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে গাণিতিক গড় নির্ণয়

উদাহরণ 2·1 নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে গাণিতিক গড় নির্ণয় কর

শ্রেণি সীমা	130-139	140-149	150-159	160-169	170-179
পরিসংখ্যা	12	19	40	21	8

সমাধান : শ্রেণিবিভাগযুক্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে গাণিতিক গড় নিম্নলিখিত সমীকরণের সাহায্যে সহজেই বের করা যায়।

সমীকরণটি : $\overline{x} = a + b\overline{y}$

$$\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i},\ \overline{y} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i},\ a = \text{মূলবিন্দু},\ b = \text{মাত্রা}$$

ছকসংখ্যা : 2·1 গাণিতিক গড় এর গণনা

শ্রেণি সীমা	**পরিসংখ্যা (f)**	**মধ্যমান (x)**	**($x - a$)** a **= 154·5**	$y = \frac{x-a}{b}$ b **= 10**	fy
130 – 139	12	134·5	–20	–2	–24
140 – 149	19	144·5	–10	–1	–19
150 – 159	40	154·5 = a	0	0	0
160 – 169	21	164·5	10	1	21
170 – 179	8	174·5	20	2	16
মোট	n = 100				–6

এখানে a = 154·5 (মাঝামাঝি কোনো একটি শ্রেণির মধ্যমান)

এবং b = 10 (শ্রেণি দৈর্ঘ্য)

$$\therefore\ \overline{x} = a + b\overline{y} = 154{\cdot}5 + 10 \cdot \left(\frac{-6}{100}\right) = 154{\cdot}5 - 0{\cdot}6 = 153{\cdot}9$$

উদাহরণ 2·2 পরিসংখ্যা বিভাজনে যদি কোনো পরিসংখ্যা অনুপস্থিত থাকে তবে সেই পরিসংখ্যা গণনা করে উদ্ধার করা সম্ভব যদি গাণিতিক গড়ের মান দেওয়া থাকে।

যদি কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনের গাণিতিক গড় 130 টাকা হয়, তবে অনুপস্থিত পরিসংখ্যাটি নির্ণয় কর।

প্রতিদিনের খরচ (টাকাতে)	90 – 110	110 – 130	130 – 150	150 – 170
পরিবার সংখ্যা	20	26	?	16

ছকসংখ্যা : 2·2 অনুপস্থিত পরিসংখ্যার গণনা

শ্রেণি বিন্যাস	পরিসংখ্যা (f)	মধ্যমান (x)	$(x - a)$ ($a = 140$)	$y = \frac{x-a}{b}$ ($b = 20$)	fy
90 – 110	20	100	–40	–2	–40
110 – 130	26	120	–20	–1	–26
130 – 150	f	$140 = a$	0	0	0
150 – 170	16	160	20	1	16
মোট	$n = 62 + f$				–50

এখানে, $n = 62 + f$

$$\overline{x} = a + b\overline{y} = 140 = 20 \cdot \left(\frac{-50}{n}\right)$$

or, $130 = 140 + 20 \cdot \left(\frac{-50}{n}\right)$

or, $-10 = \frac{-1000}{n}$ or, $n = 100$

কিন্তু, $62 + f = n \therefore 62 + f = 100 \therefore f = 38$

$\therefore$ অনুপস্থিত পরিসংখ্যা = 38

মুক্ত-প্রান্ত বিশিষ্ট শ্রেণিবিন্যাস থাকলে সেই ধরনের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা অসম্ভব হয়ে পড়ে। মুক্ত প্রান্ত বিশিষ্ঠ পরিসংখ্যা বিভাজন বলতে বোঝায় কোন পরিসংখ্যা বিভাজনের প্রথম শ্রেণি এবং শেষ শ্রেণিটি উন্মুক্ত আছে। যেমন নিম্নের উদাহরণে পরিসংখ্যা বিভাজনটি মুক্তপ্রান্ত বিশিষ্ট।

উদাহরণ : 2·3 কোনো বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণির ছাত্রদের ওজন সংক্রান্ত পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া হল যেটি মুক্তপ্রান্ত বিশিষ্ট।

ছকসংখ্যা 2·3

ওজন (Kg তে)	ছাত্র সংখ্যা
20 র নীচে	4
20 – 30	12

30 – 40	25
40 – 50	8
50 এর উপরে	1
মোট	50

এখানে প্রথম শ্রেণিটি এবং পঞ্চমশ্রেণি অর্থাৎ শেষ শ্রেণিটি উভয়েই মুক্তপ্রান্ত বিশিষ্ট। এই দুই শ্রেণির মধ্যমান নির্ণয় করা সম্ভব নয়। তাই গাণিতিক গড় নির্ণয় করা অসম্ভব।

কিন্তু অন্যান্য শ্রেণিগুলির দৈর্ঘ্য সব সমান। প্রতিটির (অর্থাৎ দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ শ্রেণি) শ্রেণি দৈর্ঘ্য 10. যদি ধরে নেওয়া যায় যে প্রথম শ্রেণি এবং শেষ শ্রেণি উভয়ের শ্রেণি দৈর্ঘ্যও 10 হবে তাহলে ঐ দুই শ্রেণি হবে (10 – 20) এবং (50 – 60). সেক্ষেত্রে মধ্যমান বের করা সম্ভব হবে এবং গাণিতিক গড় নির্ণয় করাও সম্ভব। কিন্তু যদি অন্যান্য শ্রেণিগুলির শ্রেণি দৈর্ঘ্য অসমান হয়, তবে এই অনুমান করা সম্ভব হবে না এবং গাণিতিক গড় নির্ণয় করাও অসম্ভব। সেক্ষেত্রে অন্যান্য কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ যেমন মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরু মান বের করা সম্ভব হবে কারণ মুক্ত-প্রান্ত বিশিষ্ট শ্রেণি মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মানকে প্রভাবিত করতে পারে না।

2.3.2 গাণিতিক গড়ের বৈশিষ্ট্য

বৈশিষ্ট্য 1. যদি কোনো চলকের প্রতিটির মান একটি ধ্রুবকের সমান হয়, তবে ঐ চলকটির গাণিতিক গড় মানও ঐ ধ্রুবকের সমান হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক্ x_i চলকের প্রতিটির মান k (ধ্রুবক), $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$

অর্থাৎ $x_1 = k, x_2 = k, x_3 = k, \ldots\ldots - x_n = k$

তাহলে গাণিতিক গড় হবে $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} = \dfrac{k + k + \ldots.. + k}{n}$

$$= \frac{nk}{n} = k \therefore \bar{x} = k \text{ প্রমাণিত}$$

বৈশিষ্ট্য 2. কোনো একটি চলকের প্রতিটি মান থেকে যদি তাদের গড় মান বিয়োগ করা হয় তাহলে ঐ বিয়োগফলগুলির মোট যোগফল শূন্য হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক চলকটির (x) বিভিন্ন মান $x_1, x_2, \ldots.., x_n$.

এবং তাদের গাণিতিক গড় $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}$

অথবা, $x_1 + x_2 + \ldots.. + x_n = n\bar{x} \ldots..(1)$

অথবা, $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}....(2)$

এখন $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}$

$= n\bar{x} - n\bar{x} = 0$ প্রমাণিত [সমীকরণ (2) ব্যবহার করে পাই]

শ্রেণিযুক্ত চলরাশির জন্য বৈশিষ্ট্য 2 একইভাবে প্রমাণ করা যায় যে

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x}) = 0$$

বৈশিষ্ট্য : 3 গাণিতিক গড় মূলবিন্দু (Origin) এবং মাত্রা (Scale) উভয়ের উপরই নির্ভরশীল।

যদি দুটি চলক x এবং y সম্বন্ধযুক্ত হয় যেমন $x_i = a + by_i$

যেখানে a = মূলবিন্দু এবং b = মাত্রা এবং $i = 1, 2, ..., n$

এবার দেখাতে হবে যে $\bar{x} = a + b\bar{y}$

অর্থাৎ x_i এর গাণিতিক গড় a (মূল বিন্দু) এবং b (মাত্রা) দুটির উপরই নির্ভরশীল।

প্রমাণ : $x_i = a + by_i$ $\qquad i = 1,2,......, n$

উভয় দিক যোগ করলে আমরা নিম্নের সমীকরণ পাব $\sum_{i=1}^{n} x_i = na + b\sum_{i=1}^{n} y_i$

এবার উভয় দিক n দিয়ে ভাগ দিলে পাওয়া যায় $\frac{\sum n_i}{n} = \frac{na}{n} + b \cdot \frac{\sum y_i}{n}$

অথবা, $\bar{x} = a + b \cdot \bar{y}$

অর্থাৎ x এর গাণিতিক গড় মূলবিন্দু এবং মাত্রার উপরে সর্বতোভাবে নির্ভরশীল।

শ্রেণিবিন্যাস সহ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায় যে $\bar{x} = a + b\bar{y}$

যেখানে $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ এবং $\bar{y} = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i}$

a = মূলবিন্দু ও b = মাত্রা

বৈশিষ্ট্য 4 যদি দুটি চলক x এবং y, তৃতীয় একটি চলক z এর সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত হয়,

যেমন $z_i = an_i + by_i$, $i = 1, 2,......, n$

তাহলে প্রমাণ করতে হবে যে $\bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y}$.

প্রমাণ : ধরা যাক্ $z_i = ax_i + by_i$, $i = 1, 2,......, n$

এখন উভয় দিকে চলকগুলির মান যোগ করলে পাওয়া যায় $\sum z_i = a\sum n_i + b\sum y_i$

এবার, উভয় দিককে n দিয়ে ভাগ করলে পাওয়া যায় $\frac{\sum z_i}{n} = a\frac{\sum x_i}{n} + b\frac{\sum y_i}{n}$

অথবা, $\bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y}$.

বৈশিষ্ট্য 5 কোনো চলকের প্রতিটি মানের একটি ধ্রুবক থেকে ব্যবধানের বর্গের যোগফল সর্বাপেক্ষা কম হবে যখন ঐ ধ্রুবকটি চলকের গাণিতিক গড় হয়।

অর্থাৎ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathrm{A})^2$ সর্বনিম্ন হবে যখন $\mathrm{A} = \bar{x}$ হয়।

প্রমাণ : $\sum(x_i - \mathrm{A})^2 = \sum\left[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mathrm{A})\right]^2$

$$= \sum\left[(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \mathrm{A})^2 + 2\cdot(x_i - \bar{x})(\bar{x} - \mathrm{A})\right]$$

$$= \sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(\bar{x} - \mathrm{A})^2 + 2(\bar{x} - \mathrm{A})\cdot\sum(x_i - \bar{x})$$

$$= \sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(\bar{x} - \mathrm{A})^2 + 0\left[\because \sum(x_i - \bar{x}) = 0\right]$$

$$= \sum(x_i - \bar{x})^2 + n\cdot(\bar{x} - \mathrm{A})^2$$

ডানদিকের দুটি অংশই বর্গ হওয়ায় ধনাত্মক সংখ্যা।

এখন $\sum(x_i - \bar{x})^2$ এর মধ্যে A না থাকায় এটি A র উপর নির্ভরশীল নয়।

কিন্তু দ্বিতীয় অংশটিতে A থাকায় এটি A র উপর নির্ভরশীল।

$\therefore n(\bar{x} - \mathrm{A})^2$ সর্বনিম্ন হবে যখন

$n(\bar{x}-\mathrm{A})^2=0$ কারণ $n(\bar{x}-\mathrm{A})^2$ ঋণাত্মক নয়।

অথবা, $\bar{x}-\mathrm{A}=0$

অথবা, $\bar{x}=\mathrm{A}$

সুতরাং $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mathrm{A})^2$ সর্বনিম্ন হবে যখন $\mathrm{A}=\bar{x}$ (প্রমাণিত)

2.3.3 গাণিতিক গড় সঠিক কিনা যাচাই করার—চার্লিয়ার পদ্ধতি

গাণিতিক গড়ের গণনা সহজ করার জন্য মূলবিন্দু ও মাত্রা পরিবর্তন করা হয় কিন্তু গণনা সঠিক কিনা পরীক্ষা করার জন্য চার্লিয়ার একটি সূত্রের সন্ধান দিয়েছেন।

$$\sum_i f_i(y_i+1)=\sum_i f_i y_i+\sum_i f_i.........(\mathrm{i})$$

যেখানে $y_i=\dfrac{x_i-a}{b}$, a = মূলবিন্দু এবং b = মাত্রা $(b\neq 0)$

f_i = i তম শ্রেণির পরিসংখ্যা

সমীকরণ (i) যদি সিদ্ধ হয় তবে গণনা নির্ভুল নচেৎ নয়।

উদাহরণ : 2·4 চার্লিয়ার পরীক্ষার ব্যবহার

শ্রেণিবিভাগ	10 – 30	30 – 50	50 – 70	70 – 90	90 – 110
পরিসংখ্যা	5	12	16	14	3

ছক সংখ্যা : 2·4 গাণিতিক গড়ের গণনা ও চার্লিয়ার পরীক্ষা

শ্রেণি বিভাগ	পরিসংখ্যা (f_i)	মধ্যমান (x_i)	$y_i=\dfrac{x_i-60}{20}$	$f_i y_i$	$f_i(y_i+1)$
10 – 30	5	20	–2	–10	–5
30 – 50	12	40	–1	–12	0
50 – 70	16	60 = a	0	0	16
70 – 90	14	80	1	14	28
90 – 110	3	100	2	6	9
মোট	50			–2	48

গাণিতিক গড় $\bar{x} = a + b\bar{y}$

যেখানে $\bar{y} = \dfrac{\sum f_i y_i}{\sum f_i}$, $y_i = \dfrac{x_i - a}{b}$, a = মূলবিন্দু, b = মাত্রা $(b \neq 0)$

এক্ষেত্রে $a = 60$ এবং $b = 20$ $\therefore \bar{y} = \dfrac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} = \dfrac{-2}{50}$

$$\therefore \bar{x} = a + b\bar{y} = 60 + 20 \cdot \left(\frac{-2}{50}\right) = 60 - 0{\cdot}8 = 59{\cdot}2$$

অর্থাৎ গাণিতিক গড় = $59{\cdot}2$

এখন চার্লিয়ার পরীক্ষার জন্য

$\sum f_i (y_i + 1) = 48$ এবং

$\sum f_i y_i + \sum f_i = -2 + 50 = 48$

সুতরাং $\sum f_i (y_i + 1) = \sum f_i y_i + \sum f_i = 48$

অর্থাৎ চার্লিয়ার পরীক্ষায় গাণিতিক গড়ের গণনাটি উত্তীর্ণ হয়েছে বলা যেতে পারে।

2.3.4 সংযুক্ত দলের গড়

যদি n_1 এবং n_2 সংখ্যক মান সম্পন্ন দুটি দলের (group) গাণিতিক গড় যথাক্রমে $\bar{x}_1$ এবং $\bar{x}_2$ হয়, তবে $n_1 + n_2$ সংখ্যক মানের সংযুক্ত দলের (composite group) গাণিতিক গড় হবে $\bar{x} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

প্রমাণ : ধরা যাক্ $x_{11} + x_{12} + x_{13} ..... + x_{1n_1}$ এই দলের গাণিতিক গড় $\bar{x}_1$ এবং অপর দল $x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n_2}$

এর গাণিতিক গড় $\bar{x}_2$ দেওয়া আছে।

এখন সংযুক্ত দলের গড় হবে

$$\bar{x} = \frac{x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n_1} + x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n_2}}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}}{n_1 + n_2}$$

অথবা, $\bar{x} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$ $\qquad \therefore \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} = n_1\bar{x}_1$

এবং $\therefore \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} = n\bar{x}_2$

উদাহরণ 2·5 যদি কোনো ব্যবসায় প্রতিষ্ঠানের শ্রমিকদের গড় মাসিক মজুরি Rs. 520 হয় এবং জানা যায় যে পুরুষ শ্রমিকদের গড় মাসিক মজুরি Rs. 540 ও মহিলা শ্রমিকদের গড় মাসিক মজুরি Rs. 460 তাহলে পুরুষ ও মহিলা শ্রমিকদের শতকরা সংখ্যা কত নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরা যাক পুরুষ ও মহিলা শ্রমিকদের সংখ্যা যথাক্রমে n_1 এবং n_2.

দেওয়া আছে : $\bar{x}_1 = 540$ এবং $\bar{x}_2 = 460$

$$\bar{x} = 520$$

সংযুক্ত দলের গড়-এর সমীকরণ থেকে জানি

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

অথবা, $520 = \dfrac{540n_1 + 460n_2}{n_1 + n_2}$

অথবা, $520\ n_1 + 520\ n_2 = 540\ n_1 + 460\ n_2$

অথবা, $-\ 20ni = -\ 60n_2$

অথবা, $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{-60}{-20} = \dfrac{3}{1}$ $\therefore\ n_1 : n_2 = 3 : 1$

সুতরাং পুরুষ শ্রমিকদের শতকরা সংখ্যা $= \dfrac{3}{3+1} \times 100 = 75\%$

ও মহিলা শ্রমিকদের শতকরা সংখ্যা $= \dfrac{1}{3+1} \times 100 = 25\%$

2.3.5 গাণিতিক গড়ের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা :

(i) গাণিতিক গড়ের সংজ্ঞা অতি সহজ—এটি বোঝা যেমন সহজ, গণনা করাও তেমনি সহজ।

(ii) গাণিতিক গড়ের সংজ্ঞা দ্ব্যর্থহীন (rigid)।

(iii) গড়ের মান চলকের প্রতিটি মানের উপর নির্ভরশীল।

(iv) চলকের মানগুলির যোগফল জানা থাকলেও গাণিতিক গড় নির্ণয় করা সম্ভব।

(v) মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মান নির্ণয়ের জন্য চলকের মানগুলি ক্রম অনযায়ী সাজানোর প্রয়োজন হয়, গাণিতিক গড়ে সেসব প্রয়োজনীয়তা নেই।

(vi) বীজগণিতের নিয়মাবলী গাণিতিক গড় প্রয়োগ করা যায়।

(vii) গাণিতিক গড়ের নমুনা বিচ্যুতি নেই বললেই চলে।

অসুবিধা :

(i) চলকের কোনো মান অনুপস্থিত থাকলে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা যায় না।

(ii) পরিসংখ্যা বিভাজনে যদি কোনো শ্রেণি বিন্যাস মুক্তপ্রান্ত বিশিষ্ট হয়, সে ক্ষেত্রে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা যায় না।

(iii) চলকের অতি উচ্চ ও অতি নিম্ন মানের দ্বারা গাণিতিক গড় প্রভাবিত হয়।

(iv) পর্যবেক্ষণ করে গাণিতিক গড়ের মান নির্ণয় করা যায় না।

(v) চলকের উচ্চ মানগুলির গুরুত্ব তার নিম্ন মানগুলির তুলনায় বেশি গুরুত্ব পায় গাণিতিক গড় নির্ণয়ে, তাই গাণিতিক গড়ে একটা ঊর্দ্ধমুখী প্রবণতা দেখা যায়।

2.4 গুণোত্তর গড়

গুণোত্তর গড় হল চলকের n সংখ্যক মানের গুণফলের ধনাত্মক n-তম মূল (root)। অর্থাৎ গুণোত্তর গড় (G)

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots\ldots \cdot x_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

যেখানে $\prod_{i=1}^{n} x_i = (x_1 \cdot x_2 \cdot ...... x_n)$

অথবা, $G = (x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$

উভয় দিকে log নিলে পাই

$$\log G = \frac{1}{n}[\log x_1 + \log x_2 + ... + \log x_n]$$

অথবা, $\log G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i$

$$\therefore G = \text{Anti}\log\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i\right]$$

ভারযুক্ত গুণোত্তর গড়

শ্রেণিবন্ধ রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে চলকের মান যদি x_1, x_2, ... x_n দেওয়া থাকে, ও তাদের পরিসংখ্যা f_1, f_2, ..., f_n ও দেওয়া থাকে, তাহলে ভারযুক্ত গুণোত্তর গড় হবে

$$G = \left(x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot .... x_n^{f_n}\right)^{\frac{1}{\sum f_i}}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n} x_1^{f_1}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=1} f_i}}$$

যেখানে $\sum f_i = f_1 + f_2 + ... + f_n$

উভয়দিকে log নিলে পাই,

$$\log G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} f_i}\left[f_1 \log_{x_1} + f_2 \log x_2 + ... f_n \log x_n\right]$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$\therefore$ ভারযুক্ত গুণোত্তর গড় $G = \text{Anti}\log\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \log x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}\right]$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : অবিচ্ছিন্ন চলকটির যদি শ্রেণিবিন্যাস দেওয়া থাকে তবে x_i হবে চলকটির i তম মধ্যমান এবং f_i হবে অনুরূপ i তম পরিসংখ্যা।

উদাহরণ 2·6 নিম্নলিখিত রাশিতথ্য থেকে গুণোত্তর গড় নির্ণয় কর

x :	12	18	35	47
f :	3	4	5	2

ছক সংখ্যা 2·5 গুণোত্তর গড়ের গণনা

x	f	$\log x$	$f \log x$
12	3	1·0792	3·2376
18	4	1·2553	5·0212
35	5	1·5441	7·7205
47	2	1·6721	3·3442
মোট n = 14		–	19·3235

গুণোত্তর গড় $G = \text{Anti}\log\left(\frac{\sum f \log x}{n}\right) = \text{Anti}\log\left(\frac{19{\cdot}3235}{14}\right)$

$= \text{Anti}\ \log\ (1{\cdot}38025) = 24{\cdot}002$ (প্রায়)

2.4.1 গুণোত্তর গড়ের বৈশিষ্ট্য

(ক) যদি একটি চলকের কোনো একটি মান শূন্য হয় তবে চলকটির গুণোত্তর গড়ও শূন্য হবে [যেহেতু শূন্যের সঙ্গে যে কোনো সংখ্যা গুণ করলে গুণফল শূন্যই হবে] আবার, চলকটির একটি মান যদি ঋণাত্মক হয়, ও বাকী মানগুলি যদি ধনাত্মক হয় তবে, তাদের গুণোত্তর গড়ে মান একটি কাল্পনিক সংখ্যা (imaginary number) হবে। [কারণ ঋণাত্মক সংখ্যার মূল (root) সব সময় কাল্পনিক সংখ্যাই হয়]

(খ) একটি চলকের সমস্ত মানগুলির গুণফল ঐ চলকের গুণোত্তর গড়ের n-তম শক্তির সমান হবে।

প্রমাণ : আমরা জানি $G = (x_1 \cdot x_2 \ldots\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$

$$\therefore\ (x_1 \cdot x_2 \cdot .... x_n) = G^n$$

(গ) যদি কোনো চলক অপর একটি চলকের সঙ্গে অনুপাতিক হারে পরিবর্তিত হয়, তবে তাদের গুণোত্তর গড় ও একই আনুপাতিক হারে পরিবর্তিত হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক $y = mx$ .... (i)

এখন $G_x = (x_1 \times x_2 \times .... \times x_n)^{\frac{1}{n}}$ ....(ii)

এবং $G_y = (y_1 \times y_2 \times .... \times y_n)^{\frac{1}{n}}$ ....(iii)

(iii) ও (i) সমীকরণ মিলিত ভাবে পাই

$$G_y = (mx_1 \times mx_2 \times .... \times mx_n)^{\frac{1}{n}}$$

অথবা, $G_y = \left(m^n\right)^{\frac{1}{n}} \cdot (x_1 \times x_2 \times .... \times x_n)^{\frac{1}{n}}$

এই সমীকরণের সঙ্গে (ii) সমীকরণ সংযুক্ত করলে পাই

$G_y = m\ G_x$ (প্রমাণিত)

(খ) যদি তিনটি চলক x, y ও z এমনভাবে সম্বন্ধযুক্ত হয় যে $z = x \times y$ হয়, তবে তাদের গুণোত্তর গড়ের সঙ্গে একইভাবে সম্বন্ধ স্থাপিত হবে অর্থাৎ $G_z = G_x \times G_y$ হবে।

প্রমাণ : গুণোত্তর গড়ের সংজ্ঞা অনুযায়ী তিনটি চলক x, b, z এর গুণোত্তর গড় হবে :

$$G_x = (x_1 \times x_2 \times ...... \times x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$G_y = (y_1 \times y_2 \times ...... \times y_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$G_z = (z_1 \times z_2 \times ...... \times z_n)^{\frac{1}{n}}$$

$z_i = x_i \times y_i$; $i = 1, 2, ..., n$

এখন $G_z = (z_1 \times z_2 \times ...... \times z_n)^{\frac{1}{n}}$

$$= \left[(x_1 \times y_1) \times (x_2 \times y_2) \times ..... \times (x_n \times y_n)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= (x_1 \times x_2 \times ...... \times x_n)^{\frac{1}{n}} \cdot (y_1 \times y_2 \times .... \times y_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$= G_x \cdot G_y$$

সুতরাং, $GZ = G_x \cdot G_y$ (প্রমাণিত)

(ঙ) তিনটি চলক x, y, z যদি এইভাবে সম্বন্ধযুক্ত হয় যেমন $z = \frac{x}{y}$, তাহলে $G_z = \frac{G_x}{G_y}$ হবে।

প্রমাণ : গুণোত্তর গড়ের সংজ্ঞা অণুযায়ী z চলকের গুণোত্তর গড়ের সমীকরণ হবে :

$$G_z = (z_1 \times z_2 \times .... \times z_n)^{\frac{1}{n}}$$

কিন্তু $z_i = \frac{x_i}{y_i}$, $i = 1, 2, ..., n$

সুতরাং $G_z = (z_1 \times z_2 \times ....z_n)^{\frac{1}{n}}$

$$= \left(\frac{x_1}{y_1} \times \frac{x_2}{y_2} \times ...... \times \frac{x_n}{y_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{(x_1 \times x_2 \times .... \times x_n)^{\frac{1}{n}}}{(y_1 \times y_2 \times .... \times y_n)^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{G_x}{G_y} \qquad \therefore G_z = \frac{G_x}{G_y} \text{ (প্রমাণিত)}$$

2.4.2 সংযুক্ত দলের গুণোত্তর গড়

দুটি চলকের m এবং n সংখ্যক মান সম্পন্ন দুটি দল আছে। ঐ দুই দলের গুণোত্তর গড় যদি যথাক্রমে G_1 ও G_2 হয়, তাহলে $m + n$ সংখ্যক মানের সার্বিক গুণোত্তর গড় হবে

$$G = \left(G_1^m \times G_2^n\right)^{\frac{1}{m+n}}$$

প্রমাণ : ধরা যাক্, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$ প্রথম চলক দলের গুণোত্তর গড় G_1 এবং $y_1, y_2 \ldots . y_n$ দ্বিতীয় চলক দলের গুণোত্তর গড় G_2 ও এই দুই দলের ($m + n$ সংখ্যক মানের) সংযুক্ত গুণোত্তর গড় G.

এখন সংজ্ঞা অণুযায়ী, $G_1 = (x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_m)^{\frac{1}{m}}$

অথবা, $G_1^m = (x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots\ldots \times x_m) \ldots\ldots (1)$

এবং $G_2 = (y_1 \times y_2 \times \ldots\ldots \times y_n)^{\frac{1}{n}}$

অথবা, $G_2^n = (y_1 \times y_2 \times \ldots\ldots \times y_n) \ldots\ldots (2)$

আবার $G = (x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_m \times y_1 \times y_2 \times \ldots . x y_m)^{\frac{1}{m+n}}$

অথবা, $G^{m+n} = (x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_m \times y_1 \times y_2 \times \ldots . \times y_n) \ldots\ldots (3)$

এখন সমীকরণ (1) এবং সমীকরণ (2) গুণ করে পাই

$G_1^m \times G_2^n = (x_1 \times x_2 \times \ldots . \times x_m \times y_1 \times y_2 \times \ldots . \times y_n)$

অথবা, $G_1^m \times G_2^n = G^{m+n}$ [সমীকরণ (3) এর সাহায্যে পাই]

$\therefore G = \left(G_1^m \times G_2^n\right)^{\frac{1}{m+n}}$ (প্রমাণিত)

2.4.3 গুণোত্তর গড়ের ব্যবহার

1. গুণোত্তর গড় খুবই উপযোগী যখন গড় পরিবর্তনের হার নির্ণয় করা হয় সেই ধরনের রাশিতথ্যের জন্য যেখানে চলকের মান আনুপাতিক হারে বাড়ছে। ধরা যাক্ কোনো চলকের মান গুণোত্তর প্রগতিতে পরিবর্তিত হচ্ছে তাহলে তাদের অন্তবর্তী কোনো মান বের করতে হলে গুণোত্তর গড়-এর উপর নির্ভর করা যায়। উদাহরণ স্বরূপ বলা যায় যে x চলক যদি গুণোত্তর প্রগতিতে (geometric progression) বৃদ্ধি পেতে থাকে তবে তার সমীকরণ হয়

$$x_t = ab^t$$

এখন t_1 এবং t_2 সময়ে x চলকের মান হবে

$x_{t_1} = at^{t_1}$ এবং $x_{t_2} = ab^{t_2}$

তাহলে t_1 এবং t_2 সময়ের অন্তবর্তী সময়ে x এর গড় মান হবে

$$ab^{\frac{t_1+t_2}{2}} = \left[\left(ab^{t_1}\right)\left(ab^{t_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(x_{t_1} \cdot x_{t_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$ অর্থাৎ গুণোত্তর গড়।

যদি দেশের জনসংখ্যা গুণোত্তর প্রগতিতে বাড়তে থাকে তাহলে দুটি আদমসুমারীর অন্তবর্তী কোনো বছরের জনসংখ্যা সহজে গুণোত্তর গড়ের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

2. গড় চক্রবৃদ্ধি সুদের হার অথবা মূলধনী দ্রব্যের গড় অবচয় (depreciation) গুণোত্তর গড়ের সাহায্যে বের করা হয়।

3. সূচক সংখ্যা নির্ণয় করার জন্যও গুণোত্তর গড় ব্যবহৃত হয়।

4. কোনো ব্যবসায় প্রতিষ্ঠানের কারবারের গড় ওঠা নামা নির্ণয় করতেও গুণোত্তর গড় ব্যবহৃত হয়।

2.4.4 গুণোত্তর গড়ের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা :

(i) গুণোত্তর গড়ের সংজ্ঞা দ্ব্যর্থহীন (rigid)।

(ii) চলকের প্রতিটি মানের উপর গুণোত্তর গড় নির্ভর করে।

(iii) অনুপাত ও শতকরা হারের ক্ষেত্রে গুণোত্তর গড় বিশেষভাবে ব্যবহৃত হয়।

(iv) চলকটির অতি উচ্চ বা অতি নিম্ন মানের দ্বারা গুণোত্তর গড় বিশেষ প্রভাবিত হয় না।

(v) গুণোত্তর গড় নির্ণয়ে বীজগণিতের নিয়মাবলী প্রয়োগ করা যায়।

(vi) গুণোত্তর গড় নমুনা বিচ্যুতির দ্বারা খুব বেশি প্রভাবিত হয় না।

অসুবিধা :

(i) গুণোত্তর গড় বোঝা বেশ দুরূহ।

(ii) গুণোত্তর গড় গণনাও বেশ কঠিন কেননা লগারিদ্‌মের সাহায্য নিতে হয়।

(iii) চলকের কোনো একটি মান যদি শূন্য হয় অথবা ঋণাত্মক হয় তাহলে গুণোত্তর গড় গণনা অসম্ভব হয়ে পড়ে।

(iv) গুণোত্তর গড়ের ব্যবহার খুবই সীমিত।

উদাহরণ 2·7 যদি কোনো চলকের দুটি মানের গুণোত্তর গড় 3 হয় এবং তিনটি মানের গুণোত্তর গড় 2 হয়, তবে একত্রে এই 5 টি মানের গুণোত্তর গড় নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী

$m = 2,\ G_1 = 3$

এবং $n = 3,\ G_2 = 2$

ধরা যাক্ G গুণোত্তর গড় সংযুক্ত দুইটি দলের গড়। এটি চলকের 5 টি মানের একত্রে গুণোত্তর গড়। সংযুক্ত দলে গুণোত্তর গড়ের সূত্র অনুযায়ী

$$G = \left(G_1^m \times G_2^m\right)^{\frac{1}{m+n}}$$

অথবা, $G = \left(3^2 \times 2^3\right)^{\frac{1}{2+3}} = \left(3^2 \times 2^3\right)^{\frac{1}{5}}$

দুদিকের log নিলে পাওয়া যায়

$$\log G = \frac{1}{5}\left(2\log 3 + 3\log 2\right)$$

অথবা, $\log G = \frac{1}{5}\left(0{\cdot}9542 + 0{\cdot}9030\right) = 0{\cdot}3714$

$\therefore$ G = Antilog (0·3714) = 2·35 (প্রায়)

$\therefore$ 5 টি মানের একত্রে গুণোত্তর গড় = 2·35

2.5 বিবর্তযৌগিক গড়

যদি একটি চলকের (x) n-সংখ্যক মান দেওয়া হয় যেমন :

$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ldots,\ x_n$

তবে ঐ মানগুলির সরল বিবর্তযৌগিক গড়

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে বিবর্তযৌগিক গড় হবে :

$$H = \frac{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n}{f_1/x_1 + f_2/x_2 + \ldots\ldots + f_n/x_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_i}{x_i}\right)}$$

উদাহরণ : 2·8 একটি গাড়ি 50 km চারবার যাতায়াত করে। প্রথম বার গাড়িটির গতি ছিল 50 km প্রতি ঘন্টায়, দ্বিতীয় বার 20 km প্রতি ঘন্টায়, তৃতীয় বার গাড়িটি ঘন্টায় 40 km এবং চতুর্থ বারে ঘন্টায় 25 km বেগে ঐ 50 km অতিক্রম করে। এখন গাড়িটির গড় গতিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে গাড়িটি সমান দূরত্ব (50 km) চারবার যাতায়াতের মাধ্যমে প্রতিবার অতিক্রম করেছে। সুতরাং বিবর্তযৌগিক গড় এখানে সর্বাপেক্ষা উপযুক্ত গড়।

$$\text{গড় গতিবেগ} = \frac{4}{\frac{1}{50}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{25}} = \frac{4\times 200}{4+10+5+8} = \frac{800}{27}$$

$$= 29\cdot63 \text{ km প্রতি ঘন্টায়}$$

2.5.1 বিবর্তযৌগিক গড়ের ব্যবহার

1. বিবর্তযৌগিক গড় চলকটির অতি উচ্চমানগুলির উপর কম গুরুত্ব দেয় এবং অতি নিম্ন মানগুলির উপর বেশি গুরুত্ব দেয়। তাই যখন রাশিতথ্যে চলকটির অতি উচ্চ ও অতি নিম্ন মান বর্তমান, তখন গড় নির্ণয়ের জন্য গাণিতিক গড়ের থেকে বিবর্তযৌগিক গড় বেশি উপযোগী।

2. সময়, দাম ইত্যাদির ক্ষেত্রে বিবর্তযৌগিক গড় বেশি উপযুক্ত।

3. গড় অনুপাত নির্ণয়ের সময় (যেমন গতিবেগ, সময় ও দূরত্ব, দাম, অর্থ ব্যয়ের পরিমাণ) সাধারণত: বিবর্তযৌগিক গড় ব্যবহার করা হয়। কিন্তু কখন গাণিতিক গড় আর কখন বিবর্তযৌগিক গড় ব্যবহৃত হবে সেটার একটা নিয়ম আছে। যদি অনুপাতটি x চলকের মান y চলকের সাপেক্ষে দেওয়া হয় অর্থাৎ x per unit of y তখন

(i) বিবর্তযৌগিক গড় ব্যবহৃত হবে যদি x এর মানগুলি দেওয়া থাকে।

আর (ii) গাণিতিক গড় ব্যবহৃত হবে যখন y এর মান গুলি দেওয়া আছে।

উদাহরণ : 2·9 কোনো ব্যক্তি 10 km হাঁটে ঘণ্টায় 4 km গতিবেগে এবং 8 km হাঁটে 5 km প্রতি ঘণ্টা গতিবেগে। ঐ ব্যক্তির হাঁটার গড় গতিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে x হচ্ছে km এ এবং y হচ্ছে ঘণ্টায় দেওয়া আছে। কিন্তু ব্যক্তিটি কত km হেঁটেছে সেটি দেওয়া আছে। এখানে 10 km এবং 8 km. অর্থাৎ x চলকটির মান দেওয়া আছে, সুতরাং বিবর্ত যৌগিক গড় এখানে উপযুক্ত গড় হবে।

$$H = \frac{f_1+f_2}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}} = \frac{10+8}{\frac{10}{4}+\frac{8}{5}} = \frac{18}{4\cdot1} = 4\cdot39 \text{ km প্রতি ঘণ্টায়}$$

কিন্তু যদি অঙ্কটি এই রকম হতো : ব্যক্তিটি প্রতি ঘণ্টায় 4 km হিসাবে 10 ঘণ্টা হাঁটে এবং পরে

ঘণ্টায় 5 km হিসাবে 8 ঘণ্টা হাঁটে। ঐ ব্যক্তি হাঁটার গতিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে y চলকটির একক হচ্ছে ঘণ্টা এবং কত ঘণ্টা হেঁটেছে সেটা দেওয়া আছে। এক্ষেত্রে গড় গতিবেগ নির্ণয় করতে গাণিতিক গড় ব্যবহার করাটাই সমীচীন।

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2}{f_1 + f_2} = \frac{10 \times 4 + 8 \times 5}{10 + 8} = \frac{40 + 40}{18} = \frac{80}{18}$$

$$= 4{\cdot}44 \text{ km প্রতি ঘন্টায়}$$

2.5.2 বিবর্তযৌগিক গড়ের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা :

(1) বিবর্তযৌগিক গড় চলকটির সমস্ত মানের উপর নির্ভর করে।

(2) বীজগণিতের নিয়মাবলী প্রয়োগ করতে এক্ষেত্রে কোনো অসুবিধা হয় না।

(3) চলকটির কম মানের উপর বেশি গুরুত্ব প্রয়োজন হলে বিবর্তযৌগিক গড় বিশেষ উপযোগী।

(4) দুই একটি অতি উচ্চ বা অতি নিম্ন মান বিবর্তযৌগিক গড়কে বিশেষ প্রভাবিত করে না।

(5) মূল্য, হার, অনুপাত, গতিবেগ ইত্যাদির গড় নির্ণয়ে এটি বিশেষ উপযোগী।

অসুবিধা :

(1) বিবর্তযৌগিক গড় পদ্ধতি খুবই জটিল এবং সহজে বোঝা যায় না।

(2) চলকের কম মানগুলির উপর বেশি গুরুত্ব আরোপ করে বলে এর ব্যবহার সীমিত।

(3) রাশিতথ্যে চলকটির একটি মান শূন্য হলেই বিবর্তযৌগিক গড় নির্ণয় করা অসম্ভব হয়ে উঠে।

2.6 গাণিতিক গড়, গুণোত্তর গড় ও বিবর্তযৌগিক গড়-এর মধ্যে সম্বন্ধ

ধরা যাক একটি চলক (x) এর n সংখ্যক মান x_1, x_2, ... x_n দেওয়া আছে। সুতরাং এদের গাণিতিক গড় (A) হবে

$$\text{A} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}$$

এদের গুণোত্তর গড় (G) হবে

$$\text{G} = (x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}}$$

এবং এদের বিবর্তযৌগিক গড় (H) হবে

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots\dots + \frac{1}{x_n}}$$

প্রথমে x চলকের দুটি মাত্র মান x_1 এবং x_2 নিয়ে আমরা A, G এবং H এর মধ্যে সম্পর্কটি বের করার চেষ্টা করব।

আমরা জানি কোন বাস্তব সংখ্যার বর্গ সব সময় ধনাত্মক হয়

অতএব, $\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0$

অথবা, $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \geq 0$

অথবা, $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$

অথবা, $\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \dots\dots\dots(1)$

$\therefore A \geq G$ যখন $n = 2$ অর্থাৎ x চলকের দুটি মাত্র মান আছে।

এখন $n = 2^2$ যদি নেওয়া হয় তবে x চলকের চারটি মান x_1, x_2, x_3 ও x_4 নিতে হবে।

ধরা যাক্ $x_1' = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ও $x_2' = \frac{x_3 + x_4}{2}$

আমরা জানি যখন $x = 2$ নেওয়া হয়েছিল তখন $A \geq G$ পাওয়া গেছিল।

এখানে x চলকের দুটি মান x_1' ও x_2' নেওয়া হয়েছে

$$\therefore \frac{x_1' + x_2'}{2} \geq \left(x_1' \cdot x_2'\right)^{\frac{1}{2}}$$

অথবা, $$\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2} \geq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \times \frac{x_3 + x_4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

অথবা, $$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \left[\left(x_1 \cdot x_2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x_3 \cdot x_4\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(সমীকরণ (1) ব্যবহার করে পাই)

অথবা, $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore$ $A \geq G$ যখন $n = 4 = 2^2$

অর্থাৎ অনুরূপ ভাবে প্রমাণ করা যায় যে $A \geq G$ যখন

$n = 2^k$ যেখানে $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

এখন প্রমাণ করতে হবে, যখন $n \neq 2^k$ তখনও $A \geq G.$

যখন $n \neq 2^k$, ধরা যাক্ $2^k > n$ তখন $n = 2^k$ করার জন্য n সংখ্যক মানের সঙ্গে $(2^k - n)$ সংখ্যক নতুন মান যোগ করা হল এরা প্রত্যেকে n সংখ্যক মানের গাণিতিক গড় A-এর সমান।

সুতরাং x সব মানগুলি হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\ldots x_2 k$

[এখানে $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots\ldots = x_{2k} = A = \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}$]

যেহেতু, $A \geq G$ যখন $n = 2^k$

$$\therefore \frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n+x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots\ldots+x_{2k}}{2^k}$$

$$\geq (x_1 \cdot x_2 \ldots\ldots x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2} \ldots\ldots x_{2k})^{\frac{1}{2k}}$$

অথবা, $\frac{nA+(2^k-n)A}{2^k} \geq \left(G^n A^{2^k-n}\right)^{\frac{1}{2^k}}$

[$\therefore$ $\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n} = A$ $\quad \therefore (x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n) = nA$

এবং $(x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}} = G$ $\quad \therefore (x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_n) = G^n$

অনুমান অনুযায়ী, $x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots\ldots+x_{2^k} = A+A+\ldots\left(2^k-n\right)$ সংখ্যক

$$= (2^k - n)\,A$$

এবং $x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot ..... \cdot x_2k = \mathrm{A \cdot A \cdot A ...... A} \left(2^k - n\right)$ সংখ্যক $= \mathrm{A}^{2^k - n}$]

$$\therefore \mathrm{A}^{2^k} \geq \frac{\mathrm{G}^n \mathrm{A}^{2^k}}{\mathrm{A}^n}$$

অথবা, $\mathrm{A}^n \geq \mathrm{G}^n$

অথবা, $\mathrm{A} \geq \mathrm{G}$

সুতরাং $\mathrm{A} \geq \mathrm{G}$ প্রমাণিত হল যখন $n \neq 2^k$

এখন গুণোত্তর গড় ও বিবর্তযৌগিক গড়ের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করার জন্য প্রথমেই x এর মানগুলিকে ব্যস্ত অনুপাতে রূপান্তরিত করা হল।

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ... \frac{1}{x_n}$$

যেহেতু আমরা প্রমাণ করেছি যে $\mathrm{A} \geq \mathrm{G}$

$$\therefore \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \left(\frac{1}{x_1} . \frac{1}{x_2} \cdot ...... \frac{1}{x_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

অথবা, $\frac{1}{\mathrm{H}} \geq \frac{1}{\mathrm{G}}$

অথবা, $\mathrm{G} \geq \mathrm{H}$

সুতরাং, $\mathrm{A} \geq \mathrm{G}$ এবং $\mathrm{G} \geq \mathrm{H}$ এই দুই সম্বন্ধ একত্রিত করলে পাই

$\mathrm{A} \geq \mathrm{G} \geq \mathrm{H}$

যদি x চলকের প্রতিটির মান যদি ধ্রুবক হয়

ধরা যাক্ প্রতিটি মান = C

$$\therefore \mathrm{A} = \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n} = \frac{c + c + ... + c}{n} \text{ (n সংখ্যক) } = \frac{nc}{n} = c$$

$$\mathrm{G} = \left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 .....x_n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\mathrm{C}^n\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{C}$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\frac{n}{c}} = c$$

অর্থাৎ A = G + H যখন x চলকের প্রতিটি মান সমান হয়।

উদাহরণ : 2·10 যদি x চলকের দুটি মানই ধনাত্মক হয় তবে প্রমাণ কর তাদের $G = \sqrt{A \cdot H}$

দেওয়া আছে x চলকের দুটি মান x_1 এবং x_2 ধনাত্মক।

এখানে $A = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $G = (x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}}$

এবং $H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}$

এখন $A \times H = \frac{x_1 + x_2}{2} \times \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = x_1 x_2 = \left(\sqrt{x_1 \cdot x_2}\right)^2$

অথবা, $A \times H = G^2$

অথবা, $G = \sqrt{A \times H}$

সুতরাং গুণোত্তর গড় হল গাণিতিক গড় এবং বিবর্তযৌগিক গড়ের গুণোত্তর গড়।

2.7 মধ্যমা

যদি কোনো চলকের মানগুলি ঊর্ধ্বক্রমে বা অধঃক্রমে সাজানো হয় তাহলে ঠিক মধ্যবর্তী সংখ্যাটি বা মানটি হবে মধ্যমা। চলকের মানগুলির মোট সংখ্যা যদি n হয় তবে n যুগ্ম অথবা অযুগ্ম সংখ্যা হতে পারে। যদি n অযুগ্ম সংখ্যা হয় তবে $n = 2m + 1$ ধরা যাক্

$x_1, x_2, ...x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, ...x_{2m+1}$ ঊর্ধ্বক্রমে সাজানো।

এখানে x_{m+1} ঠিক মধ্যবর্তী মান এবং এটিই মধ্যমা।

যদি n যুগ্ম সংখ্যা হয় তবে ধরা যাক $n = 2m$

এক্ষেত্রে $x_1, x_2 ....x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, ...x_{2m}$

ঊর্ধ্বক্রমে সাজানো হলেও মধ্যবর্তী পদ হিসাবে দুটি পদ পাওয়া যাবে x_m এবং x_{m+1} এই দুই এর গাণিতিক গড়ই হবে মধ্যমা।

2.7.1 বিচ্ছিন্ন চলরাশির ক্ষেত্রে মধ্যমা নির্ণয়

উদাহরণ : 2·11 নিম্নের রাশিতথ্য থেকে মধ্যমা নির্ণয় কর।

মজুরি (টাকাতে)	18	22	26	30	34	40
শ্রমিক সংখ্যা	5	12	8	8	5	2

ছকসংখ্যা : 2·6 মধ্যমার গণনা

x	**f**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা**
18	5	5
22	12	17
26	8	25
30	8	33
34	5	38
40	2	40
মোট	$n = 40$	–

এখানে মোট পরিসংখ্যা = 40 যুগ্ম সংখ্যা। সুতরাং মধ্যমার জন্য একটি মান পাওয়া যাবে না। $\frac{40}{2} = 20$ সুতরাং 20 তম পদ এবং 21 তম পদের গাণিতিক গড়ই হবে মধ্যমা।

এখানে 18 তম পদ থেকে 25 তম পদ সবই 26.অর্থাৎ 20 তম পদ ও 21 তম পদ দুটিই 26.

$$\text{মধ্যমা} = \frac{20 \text{ তম পদ} + 21 \text{ তম পদ}}{2} = \frac{26+26}{2} = 26$$

2.7.2 অবিচ্ছিন্ন চলরাশির ক্ষেত্রে মধ্যমা নির্ণয়

অবিচ্ছিন্ন চলকের (x) পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে x এর যে মানের জন্য ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 'নীচ থেকে' $(\text{CF} \leq)$ মোট পরিসংখ্যা অর্ধেক হবে, সেটাই হবে x চলকের মধ্যমা। অবিচ্ছিন্ন চলকের শ্রেণি বিন্যাসের ক্ষেত্রে প্রথমেই মধ্যমা শ্রেণি (Median Class) নির্ণয় করতে হয় অর্থাৎ যে শ্রেণির মধ্যে মধ্যমার মানটি উপস্থিত। এইবার মধ্যমার মান সরল অন্তঃমান নির্ণয় পদ্ধতিতে (Method of Simple interpolation) নির্ণয় করতে হয়।

এছাড়া আর একটি পদ্ধতিতে মধ্যমা নির্ণয় করা যায় যেখানে মধ্যমার সূত্র ব্যবহৃত হয়। উদাহরণের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয়ের দুটি পদ্ধতি বোঝানো হল।

উদাহরণ : 2·12 নিম্নের রাশিতথ্যের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় কর।

শ্রেণি বিন্যাস	1–10	10–20	21–30	31–40	41–50
পরিসংখ্যা	6	12	15	10	7

ছকসংখ্যা : 2·7 মধ্যমার জন্য গণনা

শ্রেণি সীমা	শ্রেণি সীমানা	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (নীচ থেকে) **CF≤**
1 – 10	0·5 – 10·5	6	6
11 – 20	10·5 – 20·5	12	18
21 – 30	(20·5 – 30·5) মধ্যমা শ্রেণি	15	33
31 – 40	30·5 – 40·5	10	43
41 – 50	40·5 – 50·5	7	50 = N
মোট	–	N = 50	–

এখানে মোট পরিসংখ্যা N = 50 $\therefore \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$

এখন 25 তম x এর মানই হল মধ্যমা। 25 ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 18 এবং ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 33 মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং মধ্যমা শ্রেণি (median class) হবে (20·5 – 30·5).

সরল অন্তঃমান নির্ণয় পদ্ধতি

ধরা যাক্, মধ্যমা M দিয়ে নির্দেশিত হল।

মধ্যমা শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমানা = l_1

মধ্যমা শ্রেণির উচ্চ শ্রেণি সীমানা = l_2

মধ্যমা শ্রেণির পূর্ববর্তী ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা = F_1

মধ্যমা শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা = F_2

এখন সরল অন্তঃমান নির্ণয় পদ্ধতির সূত্র হল

$$\frac{median - l_1}{l_2 - l_1} = \frac{\frac{N}{2} - F_1}{F_2 - F_1}$$

ছক সংখ্যা 2·7 থেকে প্রত্যেকের মান সূত্রটিতে বসালে পাই

$$\frac{M - 20{\cdot}5}{30{\cdot}5 - 20{\cdot}5} = \frac{25 - 18}{33 - 18}$$

অথবা, $\frac{M-20\cdot5}{10}=\frac{7}{15}$

অথবা, $M=20\cdot5+\frac{70}{15}=20\cdot5+4\cdot66=25\cdot16$

$\therefore$ মধ্যমা = 25·16 (প্রায়)

মধ্যমার সূত্র পদ্ধতি

মধ্যমা $=l_1+\frac{\frac{N}{2}-F_1}{f_m}\times i$

যেখানে, l_1 = মধ্যমা শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমানা = 20·5

N = মোট পরিসংখ্যা = 50

F_1 = মধ্যমা শ্রেণির পূর্ববর্তী ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা = 18

f_m = মধ্যমা শ্রেণির পরিসংখ্যা = 15

i = মধ্যমা শ্রেণির প্রসার = 10

ছকসংখ্যা 2·7 থেকে প্রত্যেকের মান সূত্রটিতে বসালে পাই

মধ্যমা $=20\cdot5+\frac{25-18}{15}\times10$

$=20\cdot5+\frac{70}{15}=20\cdot5+4\cdot66=25\cdot16$ (প্রায়)

2.7.3 মধ্যমার সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা :

(i) মধ্যমা সহজেই বোঝা যায় এবং এর গণনা সহজ।

(ii) মধ্যমার সংজ্ঞা দ্ব্যর্থহীন (rigid)।

(iii) রাশিতথ্যের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের দ্বারা মধ্যমা প্রভাবিত হয় না।

(iv) উভয় প্রান্তে বা এক প্রান্তে মুক্ত শ্রেণি বিভাজনের ক্ষেত্রে মধ্যমা নির্ণয়ে কোনো অসুবিধা হয় না। কিন্তু এক্ষেত্রে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা যায় না।

(v) কোনো গুণবাচক বৈশিষ্ট্যের (attribute) গড় নির্ণয় করতে একমাত্র মধ্যমা ব্যবহার করা যায়, অন্য কোনো গড় নির্ণয় করা যায় না।

(vi) চলকের কোনো একটি কেন্দ্রীয় মান মধ্যমার মান হিসাবে নির্ণীত হয়।

অসুবিধা :

(i) রাশিতথ্য যদি অতিরিক্ত বেশি সংখ্যক হয়, তাহলে ঊর্ধ্বক্রমে তাদের পরপর সাজিয়ে মধ্যমা নির্ণয় করা খুবই কষ্টসাধ্য।

(ii) মধ্যমা রাশিতথ্যের সকল মানের উপর নির্ভর করে না।

(iii) মধ্যমার নমুনা বিচ্যুতি অন্যান্য গড়ের থেকে বেশি।

(iv) বীজগণিতের নিয়মাবলী মধ্যমাতে প্রয়োগ করা যায় না।

(v) সরল অন্তঃমান নির্ণয় পদ্ধতিতে ধরে নেওয়া হয় মধ্যমা শ্রেণিতে চলকের মানগুলি সমান ভাবে দূরত্ব বজায় রেখে অবস্থিত। কিন্তু তা কখনই বাস্তবসম্মত হতে পারে না।

2.8 চতুর্থক, দশমক ও শততমক -এর গণনা

কোনো চলকের মানগুলিকে ঊর্ধ্বক্রমে সাজালে তিনটি চতুর্থক (Quartiles) Q_1, Q_2, Q_3 সমস্ত মানগুলিকে সমান চার অংশে ভাগ করে। এর মধ্যে Q_2 হল মধ্যমা কেননা Q_2 চলকের সমস্ত মানগুলিকে সমান দুই অংশে ভাগ করে।

একই ভাবে নয়টি দশমক (Deciles) চলকের সমস্ত মানগুলিকে (ঊর্ধ্বক্রমে সাজানোর পর) দশটি সমান অংশে ভাগ করে। এই দশমকগুলি D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, $D_{9.}$ এখানে D_5 = মধ্যমা।

অনুরূপভাবে 99 টি শততমক (Percentiles) চলকের সমস্ত মানগুলিকে ঊর্ধ্বক্রমে সাজানোর পর 100 টি সমান অংশে ভাগ করে। এই শততমকগুলি হ'ল P_1, P_2,........,P_{50},......P_{99}. এখানে P_{50} = মধ্যমা।

চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া থাকলে মধ্যমা যেমন সূত্রের সাহায্যে গণনা করা যায় তেমনি চতুর্থক, দশমক ও শততমক একই রকম সূত্রের সাহায্যে গণনা করা যায়।

চতুর্থক-এর গণনা

(i) সরল পরিসংখ্যা বিভাজনে :

Q_1 = চলকের $\frac{N+1}{4}$ তম মান

Q_2 = চলকের $\frac{N+1}{2}$ তম মান

Q_3 = চলকের $\frac{3(N+1)}{4}$ তম মান

(ii) শ্রেণিবিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজন :

Q_1 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \le)$ $\frac{n}{4}$ এর অনুরূপ চলকের মান

Q_2 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \le)$ $\frac{n}{2}$ এর অনুরূপ চলকের মান

Q_3 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \le)$ $\frac{3n}{4}$ এর অনুরূপ চলকের মান

দশমকের গণনা

(i) **সরল পরিসংখ্যা বিভাজনে :**

D_1 = চলকের $\frac{N+1}{10}$-তম মান

D_2 = চলকের $\frac{2(N+1)}{10}$ তম মান

D_3 = চলকের $\frac{9}{10}(N+1)$ তম মান

(ii) শ্রেণিবিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজন

D_1 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \le)$ $\frac{N}{10}$ এর অনুরূপ চলকের মান

D_2 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \le)$ $\frac{2N}{10}$ এর অনুরূপ চলকের মান

D_9 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \le)$ $\frac{9N}{10}$ এর অনুরূপ চলকের মান

শততমকের গণনা

(i) সরল পরিসংখ্যা বিভাজনে :

P_1 = চলকের $\frac{(N+1)}{100}$ তম মান

P_2 = চলকের $\frac{2(N+1)}{100}$ তম মান

P_{99} = চলকের $\frac{99(N+1)}{100}$ তম মান

(ii) শ্রেণিবিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজনে :

P_1 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \leq)$ $\frac{N}{100}$ এর অনুরূপ চলকের মান

P_2 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \leq)$ $\frac{2N}{100}$ এর অনুরূপ চলকের মান

P_{99} = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \leq)$ $\frac{99N}{100}$ এর অনুরূপ চলকের মান

এখানে N = মোট পরিসংখ্যা।

উদাহরণ : 2·13 নিম্নে প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে Q_1, Q_2, Q_3, D_1, D_5, P_1, P_{90} নির্ণয় কর।

x এর মান	30	32	34	36	38	40	42
পরিসংখ্যা (f)	5	15	12	18	30	25	20

সমাধান : ছকসংখ্যা 2·8 চতুর্থক, দশমক ও শততমকের গণনা

x এর মান	পরিসংখ্যা (f)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \leq)$
30	5	5
32	15	20
34	12	32
36	18	50
38	30	80
40	25	105
42	20	125 = N

এক্ষেত্রে মোট পরিসংখ্যা N = 125

x এর মানগুলিকে ঊর্ধ্বক্রমে পরপর সাজানো হয়েছে

এবং ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নীচ থেকে $(CF \leq)$ সাজানো হয়েছে

এখন $Q_1 = x$ এর $\frac{N+1}{4}$ তম মান $= x$ এর $\frac{125+1}{4}$ 5 তম মান

$= x$ এর 31·5 তম মান

$= 34$

$\therefore\ Q_1 = 34$

$Q_2 = x$ এর $\frac{2(N+1)}{4}$ তম মান $= x$ এর $\frac{2}{4}(125+1)$ তম মান

$= x$ এর $\frac{1}{2}(126)$ তম মান

$= x$ এর 63 তম মান $= 38$

$\therefore\ Q_2 = 38$

$Q_3 = x$ এর $\frac{3}{4}(N+1)$তম মান $= x$ এর $\frac{3}{4}(125+1)$ তম মান

$= x$ এর $94{\cdot}5$ তম মান $= 40$

$\therefore\ Q_3 = 40$

$D_1 = x$ এর $\frac{N+1}{10}$ তম মান $= \frac{125+1}{10}$ তম মান $= 12{\cdot}6$ তম মান $= 32$

$D_5 = x$ এর $\frac{5}{10}(N+1)$ তম মান $= \frac{5}{10}(125+1)$তম মান $= \frac{126}{2}$ তম মান $= 63$ তম মান

$= 38$

$P_1 = x$ এর $\frac{N+1}{100}$ তম মান $= \frac{125+1}{100}$ তম মান $= 1{\cdot}26$ তম মান $= 30$

$P_{90} = x$ এর $\frac{90}{100}(N+1)$ তম মান $= \frac{90(125+1)}{100}$ তম মান $= 113{\cdot}4$ তম মান $= 42$

উদাহরণ : 2·14 নিম্নে প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে Q_1, D_3, P_{90} এর মান নির্ণয় কর

শ্রেণি সীমানা	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
	10	15	25	40	35	20	5

সমাধান : ছক সংখ্যা : 2·9

শ্রেণি সীমানা (x)	পরিসংখ্যা (f)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \leq)$
5–10	10	10
10–15	15	25
15–20	25	50

20–25	40	90
25–30	35	125
30–35	20	145
35–40	5	150 = N
মোট	$\sum f_i = N = 150$	

এক্ষেত্রে মোট পরিসংখ্যা N = 150

আমরা জানি অবিচ্ছিন্ন চলকের শ্রেণিবিন্যস্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে

প্রথম চতুর্থক (Q_1) = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \leq)\frac{N}{4}$ এর অনুরূপে x এর মান

= ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{150}{4}$ অথবা 37·5 এর অনুরূপে x এর মান

∴ প্রথম চতুর্থক Q_1 এর শ্রেণি হল (15 – 20)

মধ্যমার সূত্রের মতো সূত্র এক্ষেত্রেও ব্যবহার করা যায়

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - F_1}{f_0} \times i$$

যেখানে l_1 = প্রথম চতুর্থক শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমানা = 15

N = মোট পরিসংখ্যা = 150

F_1 = প্রথম চতুর্থক শ্রেণির পূর্ববর্তী ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা = 25

f_0 = প্রথম চতুর্থক শ্রেণির পরিসংখ্যা = 25

i = প্রথম চতুর্থক শ্রেণির প্রসার = 5

সূত্রটিতে প্রত্যেকের মান বসিয়ে পাই

$$Q_1 = 15 + \frac{37{\cdot}5 - 25}{25} \times 5 = 15 + \frac{12{\cdot}5}{5} = 17{\cdot}5$$

$$\therefore Q_1 = 17{\cdot}5$$

সংজ্ঞা অনুযায়ী D_3 (তৃতীয় দশমক) হল ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \leq)\ \frac{3N}{10}$ এর অনুরূপ x এর মান।

অর্থাৎ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $(\mathrm{CF} \leq)$ মান এক্ষেত্রে $\frac{3\mathrm{N}}{10} = \frac{3 \times 150}{10} = 45$. সুতরাং D_3 র শ্রেণিটি হল (15 – 20).

$$\therefore l_1 = 15, \quad \mathrm{F}_1 = 25, \; f_0 = 25, \; i = 5, \; \mathrm{N} = 150$$

$$\therefore \mathrm{D}_3 = l_1 + \left[\frac{\frac{3\mathrm{N}}{10} - \mathrm{F}_1}{f_0}\right] \cdot i = 15 = \left[\frac{45 - 25}{25}\right] \cdot 5 = 19$$

$$\therefore \mathrm{D}_3 = 19$$

অনুরূপভাবে P_{90} (নব্বই শততমক) = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(\mathrm{CF} \leq)$ $\frac{90\mathrm{N}}{100}$ এর অনুরূপ x এর মান। অর্থাৎ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $(\mathrm{CF} \leq)$ মান এক্ষেত্রে $\frac{90\mathrm{N}}{100} = \frac{90 \times 150}{100} = 135$. সুতরাং P_{90} র শ্রেণিটি হল (35 – 35).

$$\therefore l_1 = 30, \; \mathrm{F}_1 = 125, \; f_0 = 20, \; i = 5, \; \mathrm{N} = 150$$

$$\therefore \mathrm{P}_{90} = l_1 + \left[\frac{\frac{90\mathrm{N}}{100} - \mathrm{F}_1}{f_0}\right] \cdot i = 30 + \left[\frac{135 - 125}{20}\right] \cdot 5 = 32{\cdot}5$$

$$\therefore \mathrm{P}_{90} = 32{\cdot}5$$

এই মানগুলি (Q_1, D_3, P_{90}) বিকল্প পদ্ধতি অর্থাৎ সরল অন্তঃমান নির্ণয় পদ্ধতি অনুসারেও গণনা করা যায়।

চতুর্থকের ব্যবহার :

(i) কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হিসাবে দ্বিতীয় চতুর্থক Q_2 (অথবা মধ্যমা) ব্যবহৃত হয়।

(ii) বিস্তৃতির (Dispersion) পরিমাপ হিসাবে চতুর্থক পার্থক্য $\left(\frac{\mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_1}{2}\right)$ অথবা, Semi-Inter Quartile Range ব্যবহার করা হয়।

(iii) প্রতিবৈষম্য-এর পরিমাপ করতে প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $= \frac{(\mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_2) - (\mathrm{Q}_2 - \mathrm{Q}_1)}{(\mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_2) + (\mathrm{Q}_2 - \mathrm{Q}_1)}$ (Co-efficient of Skewness) ব্যবহৃত হয়।

2.9 সংখ্যাগুরু মান

একটি চলকের বিভিন্ন মানের মধ্যে যে মানটির পরিসংখ্যা সর্বাধিক, চলকের সেই মানটিকে সংখ্যাগুরু মান (Mode) বলা হয়।

বিচ্ছিন্ন চলকের যদি পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া থাকে যেমন,

x এর মান	3	5	7	9	11
পরিসংখ্যা	2	6	10	5	1

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা এখানে 10

এই সর্বোচ্চ পরিসংখ্যার অনুরূপে চলক (x) টির মান 7

সুতরাং সংখ্যাগুরু মান = 7

যদি বিচ্ছিন্ন চলকের মান নিম্নলিখিত ভাবে দেওয়া থাকে যেমন,

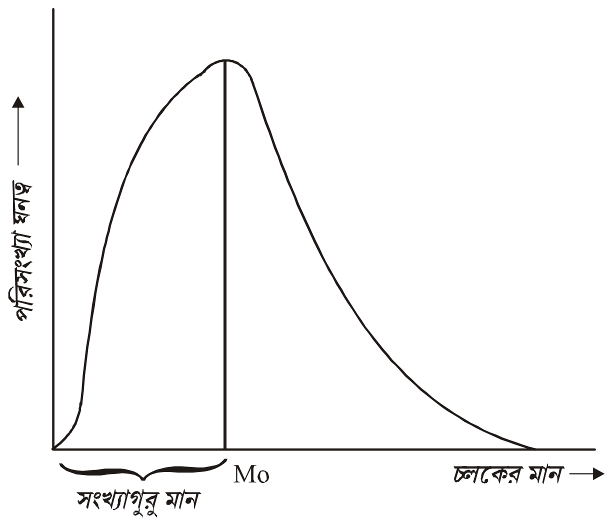
3, 5, 7, 9, 11

অর্থাৎ প্রত্যেকটি মানের পরিসংখ্যা = 1

অর্থাৎ কোনো মানই একবারের বেশি নেই।

এক্ষেত্রে সংখ্যাগুরু মান নেই।

অবিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া থাকলে আমরা আয়তলেখ (Histogram) আঁকতে পারি। এই আয়তলেখ থেকে যদি পরিসংখ্যা রেখা (Frequency Curve) আঁকা যায় তবে পরিসংখ্যা রেখার সর্বোচ্চ বিন্দুর সাপেক্ষে চলকের যে মান পাওয়া যায় তাকেই সংখ্যাগুরু মান বলে।



চিত্র 2·1 এ M_0 হল সংখ্যাগুরু মান যেটি চলকের সেই মান যার জন্য পরিসংখ্যা রেখা সর্বোচ্চ বিন্দুতে পৌঁছায়।

অবিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া থাকলে প্রথমেই সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণি (Modal Class) নির্ণয় করতে হয়। সংখ্যাগুরু শ্রেণি বলতে সেই শ্রেণিকে বুঝায় যার পরিসংখ্যা ঘনত্ব (সকল শ্রেণির বিস্তৃতি (class width) সমান হলে যার পরিসংখ্যা) সবচেয়ে বেশি।

যদি প্রতিটি শ্রেণির প্রসার বা বিস্তৃতি (class width) সমান হয় তবে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করার জন্য নীচের সূত্রটি ব্যবহৃত হয়।

সংখ্যাগুরু মান (Mode) $M_o = l_1 + \dfrac{d_1}{d_1 \times d_2} \times i$

যেখানে, $d_1 = f_m - f_1$ এবং $d_2 = f_m - f_2$

ধরা হয়েছে, l_1 = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমানা

f_m = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির পরিসংখ্যা (অর্থাৎ সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা)

f_1 = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির ঠিক পূর্ববর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা

f_2 = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির ঠিক পরবর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা

i = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির প্রসার

M_o = সংখ্যাগুরু মান

সূত্রটি এভাবেও লেখা যায় :

$$M_o = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times i$$

যখন সমস্ত শ্রেণিগুলির প্রসার (class width) এক রকম নয় সেক্ষেত্রে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করার জন্য গবেষণামূলক সম্বন্ধ (empirical relation) ব্যবহার করা যেতে পারে যেখানে গাণিতিক গড়, মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরু মান সম্পর্কযুক্ত। সম্পর্কটি নীচে দেওয়া হল।

গাণিতিক গড় – সংখ্যাগুরু মান = 3 (গাণিতিক গড় — মধ্যমা)

অথবা, সংখ্যাগুরু মান = 3 (মধ্যমা) — 2 (গাণিতিক গড়)

উদাহরণ : 2·15 নিম্নে প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কর।

পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর :	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
পরীক্ষার্থী সংখ্যা :	7	11	16	9	7

সমাধান ছক সংখ্যা 2·10 সংখ্যাগুরু মান নির্ণয়

পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর (শ্রেণি সীমা)	**শ্রেণি সীমানা**	**পরিসংখ্যা**
20–29	19·5 – 29·5	7
30–39	29·5 – 39·5	11
40–49	(39·5 – 49·5) সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণি	16
50–59	49·5 – 59·5	9
60–69	59·5 – 69·5	7
মোট		50

বিশেষ দ্রষ্টব্য : সংখ্যাগুরু মান নির্ণয়ের জন্য প্রথমেই শ্রেণি সীমানা বের করে নিতে হবে।

এখানে সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা = 16 $\therefore$ সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণি হল (40·5 – 49·5)

সূত্র অনুযায়ী সংখ্যাগুরু মান (M_0)

$$M_0 = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times i$$

যেখানে, l_1 = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমানা = 40·5

f_m = সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা = 16

f_1 = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির ঠিক পূর্ববর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা = 11

f_2 = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির ঠিক পরবর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা = 9

i = সংখ্যাগুরুমানের শ্রেণির ব্যবহার = 0

$$M_0 = 40{\cdot}5 + \frac{16-11}{2\times16-11-9}\times10 = 40{\cdot}5 + \frac{5}{12}\times10 = 40{\cdot}5 + 4{\cdot}17 = 44{\cdot}67$$

উদাহরণ 2·16 যদি গাণিতিক গড় এবং মধ্যমার মান যথাক্রমে 26·70 টাকা এবং 32·50 টাকা হয়, তবে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কর।

সমাধান : গাণিতিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের মধ্যে গবেষণামূলক সম্পর্ক (empirical relation) হ'ল—

গাণিতিক গড়—সংখ্যাগুরু মান = 3 (গাণিতিক গড় — মধ্যমা)

অথবা, সংখ্যাগুরু মান = 3 (মধ্যমা) – 2 (গাণিতিক গড়)

$$= 3 \times 32{\cdot}50 - 2 \times 26{\cdot}70$$

$$= 97{\cdot}50 - 53{\cdot}40 = 34{\cdot}10$$

$\therefore$ সংখ্যাগুরু মান $= 34{\cdot}10$ টাকা

বিশেষ দ্রষ্টব্য : চলকের একক ও সংখ্যাগুরু মানের একক একই হয়।

2.9.1 সংখ্যাগুরু মানের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা :

(i) এটা সহজেই বোঝা যায় এবং সহজে গণনা করা যায়।

(ii) সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে শুধুমাত্র পর্যবেক্ষণ করেই সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা যায়।

(iii) চলকের খুব উঁচু মান বা খুব নীচু মান দ্বারা প্রভাবিত হয় না।

(iv) মুক্ত-প্রান্ত বিশিষ্ট শ্রেণিবিভাগ যুক্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রেও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা যায়।

অসুবিধা :

(i) সংখ্যাগুরু মানের সংজ্ঞা খুব দৃঢ় নয়। অনেক ক্ষেত্রে দুই বা ততোধিক সংখ্যাগুরু মান পাওয়া যায়।

(ii) বীজগণিতের সূত্রাবলীর প্রয়োগ করা সম্ভব হয় না।

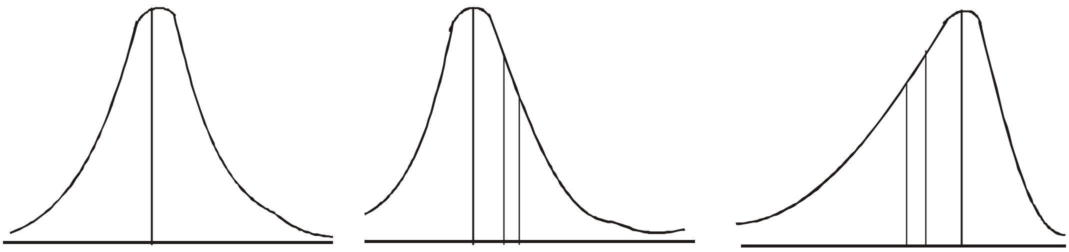
(iii) সংখ্যাগুরু মান চলকের সব মানের উপর নির্ভর করে না।

(iv) এর নমুনা বিচ্যুতি (Sampling fluctuation) বেশি।

2.10 গাণিতিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের মধ্যে সম্পর্ক

কোনো অবিচ্ছিন্ন চলকের সংগৃহীত রাশিতথ্যের সাহায্যে একটি আয়তলেখ (histogram) আঁকা যায়। আয়তলেখটির উপর ভিত্তি করে পরিসংখ্যা রেখা আঁকা সম্ভব। এই আয়তলেখটির ভারকেন্দ্রকে রাশিতথ্যের গাণিতিক গড় বলা হয়। মধ্যমা চলকটির সেই মান বা সমগ্র বিভাজনটিকে দুটি সমান ভাগে ভাগ করে। এবং চলকটির যে মানের জন্য পরিসংখ্যা সর্বোচ্চ হয় তাকে সংখ্যাগুরু মান বলা হয়।

একটি পরিসংখ্যা বিভাজন যদি প্রতিসম (Symmetrical) হয় তবে তার গাণিতিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান সমান হয়। কিন্তু প্রতিবিষ (Skewed) বিভাজনের ক্ষেত্রে গাণিতিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান আলাদা হয়। ধনাত্মক প্রতিবিষম (Positively Skewed) বিভাজনের ক্ষেত্রে গাণিতিক গড় $(\bar{x})$ > মধ্যমা (M_e) > সংখ্যাগুরু মান (M_0) এবং ঋণাত্মক প্রতিবিষম (negatively skewed) বিভাজনের ক্ষেত্রে গাণিতিক গড় $(\bar{x})$ < মধ্যমা (M_e) < সংখ্যাগুরু মান (M_0)



$\bar{x} = M_e = M_0$ — প্রতিসম বিভাজন

$M_0 = M_e \bar{x}$, $\bar{x} > M_e > M_0$ — ধনাত্মক প্রতিবিষম বিভাজন

$\bar{x} M_e = M_0$ — ঋণাত্মক প্রতিবিষম বিভাজন

চিত্র 2.2 : বিভিন্ন বিভাজনের ক্ষেত্রে গাণিতিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের আপেক্ষিক অবস্থান

লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে মধ্যমা (Me), গাণিতিক গড় $(\bar{x})$ ও সংখ্যাগুরু মানের (M_0) মাঝখানে অবস্থান করে। কিন্তু তাই নয়, মধ্যমা সবসময় গাণিতিক গড়ের কাছাকাছি থাকে কিন্তু সংখ্যাগুরু মানের থেকে অপেক্ষাকৃত দূরে থাকে। অভিজ্ঞতা থেকে দেখা যায় যে স্বল্প প্রতিবিষম কোন বিভাজনের ক্ষেত্রে গাণিতিক গড় $(\bar{x})$ — সংখ্যাগুরু মান (M_0)

= 3 [গাণিতিক গড় $(\bar{x})$ — মধ্যমা (Me)]

অর্থাৎ $\bar{x} - M_o = 3[\bar{x} - Me]$

অথবা, $M_0 = 3M_e - 2\bar{x}$ ।

এই সমীকরণ থেকে যেকোনো দুটির মান জানা থাকলে তৃতীয়টির মান অনায়াসে বের করা যায়।

2.11 কেন্দ্রীয় প্রবণতার বিভিন্ন পরিমাপকগুলির মধ্যে তুলনা

কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক যদি উৎকৃষ্ট মানের হয় তাহলে নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যগুলি তার মধ্যে অবশ্যই থাকবে।

(i) পরিমাপটির সংজ্ঞা হবে দ্ব্যর্থহীন (rigid)।

(ii) এটি অতি সহজে গণনা করা যায়।

(iii) চলকের সকল মানের উপর এটি নির্ভরশীল হবে।

(iv) বীজগণিতের সূত্রগুলি প্রয়োগের পক্ষে এটা উপযুক্ত হবে।

(v) পরিমাপকটি যেন সহজেই বোধগম্য হয়।

(vi) চলকের খুব উঁচু অথবা খুব নীচু মানের দ্বারা যেন প্রভাবিত না হয়।

(vii) এর নমুনা বিচ্যুতি (sampling fluctuation) যেন খুব কম হয়।

এখন দেখা যাক গাণিতিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান এই তিনটি কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকের মধ্যে উপরের বৈশিষ্ট্যগুলি কতটা পরিমাণে আছে।

গাণিতিক গড়

(i) এর সংজ্ঞা দ্ব্যর্থহীন।

(ii) এটি অতি সহজে গণনা করা যায়।

(iii) এটি চলকের সমস্ত মানের উপর নির্ভর করে।

(iv) বীজগণিতের সূত্রগুলি প্রয়োগের পক্ষে এটি উপযুক্ত।

(v) নমুনা বিচ্যুতি খুবই কম।

(vi) এটি খুব সহজেই বোধগম্য হয়।

কিন্তু গাণিতিক গড়ের একমাত্র ত্রুটি হল এটা চলকের চরম মান দ্বারা প্রভাবিত হয়।

মধ্যমা

(i) চলকের যুগ্ম সংখ্যক মান না থাকলে এর সংজ্ঞা দ্ব্যর্থহীন।

(ii) এটি অতি সহজে বোধগম্য হয়।

(iii) এটির গণনাও সহজ।

(iv) চলকের চরম মান দ্বারা এটি প্রভাবিত হয় না।

কিন্তু মধ্যমা বাকী গুণাবলী মানে না।

(i) এটি চলকটির সকল মানের উপর নির্ভর করে না।

(ii) বীজগণিতের সূত্রগুলি প্রয়োগ করার পক্ষে এটি উপযুক্ত নয়।

(iii) মধ্যমার নমুনা বিচ্যুতি বেশি।

সংখ্যাগুরু মান

(i) সংখ্যাগুরু মান খুব সহজেই বোধগম্য হয়।

(ii) চলকের অতি উচ্চ মান ও অতি নিম্ন মান একে প্রভাবিত করে না।

কিন্তু সংখ্যাগুরু মান বাকী গুণাবলী মেনে চলে না।

(i) এর সংজ্ঞা দ্ব্যর্থহীন নয়। কোনো কোনো ক্ষেত্রে একাধিক সংখ্যাগুরু মান পাওয়া যায়।

(ii) এর গণনা খুব সহজ নয়।

(iii) এটি চলকের সকল মানের উপর নির্ভর করে না।

(iv) বীজগণিতের সূত্র প্রয়োগের পক্ষে এটি উপযুক্ত নয়।

(v) এর নমুনা বিচ্যুতিও বেশি।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে গাণিতিক গড় আদর্শ গুণাবলীর বেশির ভাগই মেনে চলে। তাই গাণিতিক গড়ই কেন্দ্রীয় প্রবণতার সবথেকে ভালো পরিমাপক বলে ধরা হয়।

2.12 সাংরাশ

সর্বাধিক পরিসংখ্যাযুক্ত শ্রেণিটির মধ্যে চলকটির কেন্দ্রীয় মানটি অবস্থান করে। এই কেন্দ্রীয় মানটিই চলকের বাকী মানগুলির প্রতিনিধি। রাশিতথ্যের এই প্রবণতাকেই তার কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলা হয়।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করার তিনটি প্রধান পরিমাপক আছে। এগুলি হল—(i) গড় (ii) মধ্যমা ও (iii) সংখ্যাগুরু মান। গড়কে আবার তিনটি ভাগে ভাগ করা যায় : (ক) গাণিতিক গড় (খ) গুণোত্তর গড় ও (গ) বিবর্তযৌগিক গড়।

গাণিতিক গড় $(\bar{x}) = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots.. + x_n}{n}$, যেখানে x হল চলক যার n সংখ্যক মান আছে।

গুণোত্তর গড় $(\mathrm{G}) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots\ldots \cdot x_n} = (x_1 \cdot x_2 \ldots.. x_n)^{\frac{1}{n}}$

বিবর্তযৌগিক গড় $(\mathrm{H}) = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{x_n}}$

কোনো চলকের মানগুলি যদি ঊর্ধ্বক্রমে সাজানো হয় তাহলে ঠিক মধ্যবর্তী সংখ্যাটি বা মানটি হবে মধ্যমা (Median).

মধ্যমা নির্ণয়ের সূত্র পদ্ধতি :

মধ্যমা $= l_1 + \dfrac{\frac{\mathrm{N}}{2} - \mathrm{F}_1}{f_m} \times i$

যেখানে, l_1 = মধ্যমা শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমানা

N = মধ্যমা শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমানা

F_1 = মধ্যমা শ্রেণির ঠিক পূর্ববর্তী ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা

f_m = মধ্যমা শ্রেণির পরিসংখ্যা

i = মধ্যমা শ্রেণির প্রসার

একটি চলকের বিভিন্ন মানের মধ্যে যে মানটির পরিসংখ্যা সর্বাধিক হয় চলকের সেই মানটিকে সংখ্যাগুর মান (Mode) বলা হয়।

সংখ্যাগুরু মান নির্ণয়ের সূত্র পদ্ধতি :

$$\text{সংখ্যাগুরু মান} = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times i$$

যেখানে, l_1 = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমানা

f_m = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির পরিসংখ্যা (অর্থাৎ সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা)

f_1 = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির ঠিক পূর্ববর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা

f_2 = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির ঠিক পরবর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা

i = সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণির প্রসার

একটি পরিসংখ্যা বিভাজন যদি প্রতিসম (Symmetrical) হয় তবে তার গাণিতিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান সর্বদা সমান হয়। কিন্তু ধনাত্মক প্রতিবিষম (Positively Skewed) বিভাজনের ক্ষেত্রে গাণিতিক গড় > মধ্যমা > সংখ্যাগুরু মান হয়, এবং ঋণাত্মক প্রতিবিষম (Negatively Skewed) বিভাজনের ক্ষেত্রে গাণিতিক গড় < মধ্যমা < সংখ্যাগুরু মান হয়।

গবেষণালব্ধ ফল থেকে জানা যায় যে স্বল্প প্রতিবিষম

কোনো বিভাজনের ক্ষেত্রে গাণিতিক গড় — সংখ্যাগুরু মান

$$(\bar{x}) \qquad\qquad (\mathrm{M_o})$$

$$= 3\ [\ \text{গাণিতিক গড়}\ (\bar{x}) - (\mathrm{M_e})\ \text{মধ্যমা}\ ]$$

অথবা, $\mathrm{M}_0 = 3\mathrm{M}_\mathrm{e} - 2\bar{x}$

2.13 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা :

1. রাশিতথ্য দেওয়া থাকলে তার কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলতে কী বোঝায়? কেন্দ্রীয় প্রবণতার সাধারণ পরিমাপগুলির সংজ্ঞা দাও।
2. গাণিতিক গড়, গুণোত্তর গড় ও বিবর্তযৌগিক গড় দুইটি সংখ্যা 4 ও 16-এর জন্য নির্ণয় কর। দেখাও যে AM > GM > HM এই সম্পর্কটি সঠিক।
3. দুটি সংখ্যার গাণিতিক গড় = 127·5, গুণোত্তর গড় = 60

   (ক) সংখ্যা দুটির বিবর্তযৌগিক গড় নির্ণয় কর।

   (খ) সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।
4. গাণিতিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের বৈশিষ্ট্যগুলি তুলনা কর।
5. পরিসংখ্যা বিভাজনের চতুর্থক তিনটির সংজ্ঞা দাও। তাদের ব্যবহারগুলি কী কী?
6. যদি দুটি দলের (A_1 ও A_2) মোট পরিসংখ্যা 2 : 1 অনুপাতে অবস্থান করে এবং তাদের গাণিতিক গড় যথাক্রমে 8 এবং 128 হয়, তাহলে দুটি দলের একত্রে গাণিতিক গড় কত হবে নির্ণয় কর।
7. যদি $3u = x$ হয় এবং x চলকের বিবর্তযৌগিক গড় যদি 0·09 হয়, তাহলে u চলকটির বিবর্তযৌগিক গড় নির্ণয় কর।
8. যদি উচ্চমানের কমলালেবু 10 টাকায় 4 টে এবং নিম্নমানের কমলালেবু 10 টাকায় 5 টা বিক্রীত হয় তবে কমলালেবুর দামের গড় নির্ণয় কর।
9. যদি দুটি চলক x এর y এর সম্পর্ক $y = 2x - 5$ সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় এবং x এর মধ্যমা 25 দেওয়া থাকে, তবে y এর মধ্যমার মান নির্ণয় কর।
10. যদি কোনো রাশিতথ্যের গাণিতিক গড় 49·1 হয় এবং মধ্যমা 48·4 হয়, তবে তার সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কর।

প্রশ্নমালা :

11. গাণিতিক গড়, গুণোত্তর গড় ও বিবর্তযৌগিক গড়ের সংজ্ঞা দাও ও তাদের সুবিধা ও অসুবিধা উল্লেখ কর। প্রত্যেক ধরনের উদাহরণ দাও।
12. কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলতে কি বোঝ? কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হিসাবে গাণিতিক গড়কে কেন শ্রেষ্ঠ বলে মনে করা হয় আলোচনা কর।
13. গাণিতিক গড়ের বৈশিষ্ট্যগুলি উদাহরণ সহযোগে আলোচনা কর।
14. 100 জন শ্রমিকের দৈনিক বেতনের নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে গাণিতিক গড় ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কর।

দৈনিক বেতন (টাকায়)	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
শ্রমিক সংখ্যা	16	28	40	10	6

15. নিম্নে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনটির মধ্যমা নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত নম্বর	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
ছাত্র সংখ্যা	10	20	35	25	10

16. ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের তালিকা দেওয়া হল। সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত নম্বর	0–10	10–20	20–30	30–40
ছাত্র সংখ্যা	2	4	9	7

প্রশ্নমালা : (প্রত্যেকটির মান 10)

17. 60 জন ছাত্রের রাশি বিজ্ঞানের প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হল। মধ্যমা নির্ণয় কর ও ক্রমযৌগিক রেখার সাহায্যে উত্তর যাচাই কর।

শ্রেণি বিভাগ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
পরিসংখ্যা	5	8	11	15	13	6	2

18. প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের গাণিতিক গড় = 76·47 টাকা। অনুপস্থিত পরিসংখ্যা দুটি নির্ণয় কর।

দৈনিক মজুরী (টাকায়)	65	70	75	80	85	90	95
পরিসংখ্যা	5	48	?	30	?	8	6

19. নিম্নের পরিসংখ্যা বিভাজনের AM ও মধ্যমা নির্ণয় কর। AM, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের মধ্যে গবেষণালব্ধ সম্বন্ধের সাহায্যে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কর।

শ্রেণি সীমা	130-134	135-139	140-144	145-149	150-154	155-159	160-164
পরিসংখ্যা	5	15	28	24	17	10	1

20. কোনো পরিসংখ্যানে 25 টি মানের গড় 44 পরে দেখা গেল দুটি মান 34 ও 46 কে ভুলবশত 28 এবং 42 লেখা হয়েছে। পরিশুদ্ধ গড় মান নির্ণয় কর।

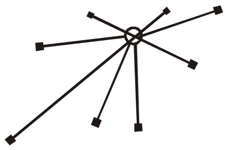
2.14 গ্রন্থপঞ্জি

1. Mathematics of Statistics Vol. I by John F. Kenney and E.S. Keeping, D. Van Nostrand, 1947, New York
2. Basic Statistics, by Goon, Gupta and Dasgupta, The World Press Pvt. Ltd. Calcutta
3. Statistical Methods Vol. I by N. G. Das, McGraw-Hill India, 2008
4. Fundamentals of Statistics–by S.C.Gupta Himalaya Publishing House, 2008

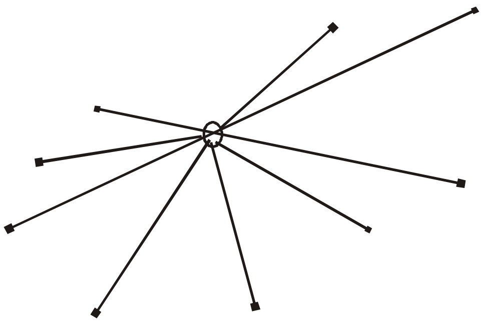
একক 3 ❑ বিস্তৃতির বিভিন্ন পরিমাপ

গঠন

3.1 উদ্দেশ্য



চিত্র 3·1 (ক)



চিত্র 3·1 (খ)

ধরা যাক দুটি চলকের কেন্দ্রীয় মান দেওয়া আছে এবং অন্যান্য মানগুলিও রাশিতথ্যের মাধ্যমে দেওয়া আছে। এই অন্যান্য মানগুলি চলকের কেন্দ্রীয় মানের চতুর্দিকে বিস্তৃত থাকে। এখন চলক দুটির মানগুলি যদি সরলরেখার সাহায্যে কেন্দ্রীয় মানের সঙ্গে যুক্ত করা হয় তাহলে চিত্র 3·1 (ক) ও চিত্র 3·1 (খ) পাওয়া যাবে। এখানে ছবি দুটি থেকে পরিষ্কার ভাবে দেখা যাচ্ছে 3·1 (খ) চিত্রে বিস্তৃতি 3·1 (ক) চিত্র থেকে অনেক বেশি। আমরা 3 নং এককে এই বিস্তৃতির বিভিন্ন ধরনের পরিমাপ নিয়ে আলোচনা করব।

3.2 প্রস্তাবনা

কোনো চলকের বিভিন্ন মানগুলি থেকে তাদের গড় মানের যে পার্থক্য তাকেই বিস্তৃতি বলে। চলকের মানগুলি তাদের গড় মান বা কেন্দ্রীয় মান থেকে কতখানি বিস্তৃত তা নির্ণয় করার বিভিন্ন পরিমাপ আছে।

(i) বিস্তৃতির পরম পরিমাপ পদ্ধতি (Absolute measures of Dispersion)

(ii) বিস্তৃতির বিভিন্ন আপেক্ষিক পরিমাপ পদ্ধতি (Relative measure of Dispersion)

বিস্তৃতির পরিমাপ
Measures of Dispersion

- পরম পরিমাপ পদ্ধতি (Absolute measures)
  - প্রসার Range
  - গড় পার্থক্য Mean Deviation
  - চতুর্থক পার্থক্য Quartile Deviation
  - সমক পার্থক্য Standard Deviation
- আপেক্ষিক পরিমাপ পদ্ধতি (Relative Measures)
  - ভেদাঙ্ক Co-efficient of Variation
  - গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক Co-efficient of Mean Deviation
  - চতুর্থক পার্থক্য গুণাঙ্ক Co-efficient Quartile Deviation

3.3 বিস্তৃতির পরম পরিমাপ পদ্ধতি

পরিসংখ্যা বিভাজনের প্রকৃতি সঠিকভাবে অনুধাবন করতে হলে চলকের মানগুলির কেন্দ্রীয় মানের সঙ্গে ঐ সকল মানগুলির বিস্তৃতির পরিমাপ জানা অতি আবশ্যক। ধরা যাক্ দুটি দলের ওজন সম্পর্কিত মান দেওয়া আছে 40 কেজি, 50 কেজি, 60 কেজি এবং 10 কেজি, 50 কেজি ও 90 কেজি। দুটি দলেরই গাণিতিক গড় 50 কেজি কিন্তু, প্রথম দলের বিস্তৃতি কম আর দ্বিতীয় দলের বিস্তৃতি বেশি।

বিস্তৃতির পরম পরিমাপ পদ্ধতিতে পরিমাপ করলে বিস্তৃতির একক আর চলকের একক একই হয়। যদি চলকের সব কটি মান একই হয়, তবে বিস্তৃতি হবে শূন্য। চলকের মানগুলি কেন্দ্রীয় মানের সাপেক্ষে যত ছড়ানো থাকবে, বিস্তৃতিও তত বেশি হবে।

3.3.1 প্রসার

কোনো চলকের উপর রাশিতথ্য থেকে চলকের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মানের মধ্যের ব্যবধানকে চলকটির প্রসার (Range) বলা হয়।

$\therefore$ প্রসার (R) = $X_{max} - X_{min}$

যেখানে চলকটি হল X.

যখন আমরা পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে চলকটির প্রসার নির্ণয় করি তখন শেষ শ্রেণিটির ঊর্ধ্ব শ্রেণিসীমানা ও প্রথম শ্রেণিটির নিম্নশ্রেণি সীমানার মধ্যের পার্থক্যের পরিমাণকে ঐ চলকের প্রসার হিসাবে ধরা হয়।

$\therefore$ প্রসার (R) = শেষ শ্রেণিটির ঊর্ধ্বশ্রেণি সীমানা — প্রথম শ্রেণিটির নিম্ন শ্রেণিসীমানা

উদাহরণ 3·1

(a) ধরা যাক্ x এর মানগুলি হল 2, 4, 11, 18, 19, 32

$\therefore$ প্রসার = 32 – 2 = 30

(b) যদি পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া থাকে :

10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49
2	8	14	6

$\therefore$ প্রসার = 49·5 – 9·5 = 40

প্রসার-এর ব্যবহার : (i) প্রসার পরিসংখ্যানগত মান নিয়ন্ত্রণে (Statictical Quality Contd) ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়।

(ii) শেয়ার বাজারের উঠা-নামা পরিমাপ করতেও প্রসার ব্যবহৃত হয়।

(iii) আবহাওয়ার পূর্বাভাসের প্রচারের সময় সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন তাপমানের পার্থক্য বহুলভাবে ব্যবহৃত হয়।

3.3.1.1 প্রসারের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা :

(i) প্রসারের গণনা অতি সহজ।

(ii) প্রসার বোঝাও সহজ।

(iii) বিস্তৃতির পরিমাপক হিসাবে প্রসারের বহুল প্রচলন আছে শিল্প উৎপাদনে গুণগত মান নিয়ন্ত্রণে।

(iv) সুদের হার ও মুদ্রার বিনিময় হারের উঠা-নামা, স্বর্ণ-রৌপ্যের দামের উঠা-নামা ইত্যাদি কাজে প্রসার ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়। এই পরিবর্তনগুলি প্রসারের সাহায্যে বোঝানো খুবই সুবিধাজনক।

অসুবিধা :

(i) প্রসারের মান নির্ণয়ের জন্য চলকের শুধুমাত্র সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের প্রয়োজন হয়। চলকের অন্যান্য মানগুলি উপেক্ষিত হয়। অর্থাৎ চলকের চরম মানগুলি দ্বারা প্রসার নির্ধারিত হয়। চলকের সমস্ত মানের উপর প্রসার নির্ভর করে না।

(ii) প্রসারের নমুনা বিচ্যুতি (Sampling fluctuations) খুব বেশি।

(iii) কেন্দ্রীয় মানের সাপেক্ষে চলকের অন্যান্য মানগুলির বিস্তৃতি প্রসার দেখাতে পারে না।

(iv) বীজগণিতের নিয়মাবলী প্রয়োগের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি একেবারেই উপযোগী নয়।

(v) উন্মুক্ত প্রান্তবিশিষ্ট শ্রেণি পরিসংখ্যা বিভাজনে অবস্থান করলে প্রসার নির্ণয় করা যায় না।

3.3.2 চতুর্থক পার্থক্য

তৃতীয় চতুর্থক ও প্রথম চতুর্থক এই দুইয়ের ব্যবধানের অর্ধেককেই বলা হয় চতুর্থক পার্থক্য।

$$\therefore \text{ চতুর্থক পার্থক্য } (Q) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

যেখানে Q_1 = প্রথম চতুর্থক

এবং Q_3 = তৃতীয় চতুর্থক

সরল রাশিতথ্যমালার ক্ষেত্রে প্রথমে রাশিতথ্যগুলিকে মান অনুযায়ী ঊর্ধ্বক্রমে সাজানো হয়।

প্রথম চতুর্থক $(Q_1) = \frac{n+1}{4}$ তম রাশির মান

তৃতীয় চতুর্থক $(Q_3) = \frac{3(n+1)}{4}$ তম রাশির মান

যেখানে n = মোট পরিসংখ্যা

* শ্রেণিবিভাজনযুক্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে চতুর্থকগুলি সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। **উদাহরণ 2·14** অনুসরণ কর।

$$Q_1 = l_1 \frac{\frac{n}{4} - F_1}{f_o} \times i$$

যেখানে l_1 = প্রথম চতুর্থক শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমানা

n = মোট পরিসংখ্যা

F_1 = প্রথম চতুর্থক শ্রেণির পূর্ববর্তী ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $(CF \leq)$

f_o = প্রথম চতুর্থক শ্রেণির পরিসংখ্যা

i = প্রথম চতুর্থক শ্রেণির প্রসার

অনুরূপে, $Q_3 = l_1 + \frac{3n/4 - F_1}{f_o} \times i$

l_1 = তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমানা

n = মোট পরিসংখ্যা

F_1 = তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণির পূর্ববর্তী ক্রমযৌগিক $(\mathrm{CF} \leq)$ পরিসংখ্যা

f_o = তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণির পরিসংখ্যা

i = তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণির প্রসার

উদাহরণ 3·2 নিম্নের রাশিতথ্য থেকে চতুর্থক পার্থক্য নির্ণয় কর।

18, 12, 22, 15, 30, 6, 44

রাশিগুলিকে উর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে নিয়ে পাই

6, 12, 15, 18, 22, 30, 44

এখানে $n = 7$ $\quad \therefore \dfrac{n+1}{4} = \dfrac{7+1}{4} = 2$

এবং $\dfrac{3(n+1)}{4} = \dfrac{3(7+1)}{4} = 6$

Q_1 = দ্বিতীয় রাশির মান = 12

Q_3 = ষষ্ঠ রাশির মান = 30

$\therefore$ চতুর্থক পার্থক্য $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2} = \dfrac{30-12}{2} = 9$

উদাহরণ 3·3 নিম্নের পরিসংখ্যা বিভাজনের থেকে বিস্তৃতির উপযুক্ত পরিমাপ নির্ণয় কর।

সাপ্তাহিক মজুরি (টাকাতে)	**শ্রমিক সংখ্যা**
100 র নীচে	22
100 – 150	54
150 – 200	90
200 – 250	66
250 র উপরে	18

সমাধান : যেহেতু প্রান্ত শ্রেণিগুলি উপযুক্ত, তাই চতুর্থক পার্থক্য এখানে সবথেকে উপযোগী বিস্তৃতির পরিমাপ হবে।

ছক সংখ্যা 3·1 ক্রমযৌগিক $(CF \le)$ পরিসংখ্যা বিভাজন

সাপ্তাহিক মজুরি (টাকাতে)	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক $(CF \le)$ পরিসংখ্যা
100 র নীচে	22	22
$\leftarrow Q_1$		$\leftarrow \frac{N}{4} = 62{\cdot}5$
100 – 150	54	76
150 – 200	90	166
$\leftarrow Q_3$		$\leftarrow \frac{3N}{4} = 187{\cdot}5$
200 – 250	66	232
250 র উপরে	18	250 = N
মোট	N = 250	

এখানে N = 50, $\therefore \frac{N}{4} = \frac{250}{4} = 62{\cdot}5$

এবং $\frac{3N}{4} = 3 \times 62{\cdot}5 = 187{\cdot}5$

সূত্র অনুযায়ী

$$Q_1 = l_1 + \frac{N/4 - F_1}{f_o} \times i = 100 + \frac{62{\cdot}5 - 22}{54} \times 50 = 137{\cdot}5$$

$$Q_3 = l_1 + \frac{3N/4 - F_1}{f_o} \times i = 200 + \frac{187{\cdot}5 - 166}{66} \times 50 = 216{\cdot}29$$

$\therefore$ চতুর্থক পার্থক্য $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{216{\cdot}29 - 137{\cdot}5}{2} = 39{\cdot}39$ টাকা।

3.3.2.1 চতুর্থক পার্থক্যের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা :

(i) এটি গণনার পক্ষে সহজ এবং বোঝার পক্ষেও সহজ।

(ii) চলকের চরম মান দ্বারা প্রভাবিত হয় না।

(iii) উন্মুক্ত প্রান্ত শ্রেণির ক্ষেত্রে এটি বিশেষভাবে উপযোগী।

(iv) অপ্রতিসম (Skewed) বিভাজনের ক্ষেত্রে যখন বিস্তৃতির অন্যান্য পরিমাপক চরম মান দ্বারা বিশেষভাবে প্রভাবিত হয় সেখানে এটি বিশেষ ভাবে উপযোগী।

অসুবিধা :

(i) চলকের সমস্ত মানের উপর এটা নির্ভরশীল নয়।

(ii) বীজগণিতের নিয়মাবলী প্রয়োগের ক্ষেত্রে এটি উপযুক্ত নয়।

(iii) এটির নমুনা বিচ্যুতি খুব বেশি।

(iv) এটি বিস্তৃতির একটা আসন্ন (approximate) ধারণা দেয় কিন্তু বিস্তৃতির নিখুঁত ধারণা পাওয়া যায় না।

(v) চলকের মোট মানের মাত্র 50 শতাংশের উপর এটি নির্ভরশীল।

(vi) যেহেতু কেন্দ্রীয় মানের চতুর্দিকে অন্যান্য মানগুলির প্রত্যেকটির বিস্তৃতির চতুর্থক পার্থক্য বিবেচনা করে না। তাই এটি প্রকৃত পক্ষে বিস্তৃতির কোনো পরিমাপক নয়। একটা ভগ্নাংশের বিস্তৃতি মাপবার পদ্ধতি মাত্র।

3.3.3 গড় পার্থক্য

কোনো চলকের কোনো একটি গড়ের (গাণিতিক গড় অথবা মধ্যমা অথবা সংখ্যাগুরু মানের) থেকে ঐ চলকের অন্যান্য মানগুলির যে বিস্তৃতি তারই একটি পরম পরিমাপ। এটি গণনা করা হয় গড়ের মান থেকে চলকের মানসমূহের ধনাত্মক পার্থক্যের গাণিতিক গড়ের মাধ্যমে।

ধরা যাক্ চলকটি হল x এবং x এর n সংখ্যক মান দেওয়া আছে।

আর ধরা যাক্ A হল চলকটির গড় (গাণিতিক গড় বা মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মান)। এখন A র সাপেক্ষে গড় পার্থক্য হবে।

$$\mathrm{MD_A} = \frac{|x_1 - \mathrm{A}| + |x_2 - \mathrm{A}| + \ldots.. + |x_n - \mathrm{A}|}{n}$$

পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে

$$\mathrm{MD_A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \mathrm{A}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

উদাহরণ 3·4 : নিম্নের রাশিতথ্যের উপর ভিত্তি করে চলকের গাণিতিক গড় এবং মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় কর।

4, 8, 26, 45, 18, 33, 20

সমাধান : উপরের রাশিগুলিকে ঊর্ধ্বক্রমে পর পর সাজানো হল।

4, 8, 18, 20, 26, 33, 45

$$n = 7 \;\therefore \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{154}{7} = 22$$

ছকসংখ্যা 3·2 : গাণিতিক গড়ের $(\bar{x})$ সাপেক্ষে গড় পার্থক্যের গণনা

x	$\lvert x-\bar{x} \rvert$ বা $\lvert x-22 \rvert$
4	18
8	14
18	4
20	2
26	4
33	11
45	23
মোট	76

$\therefore$ গাণিতিক গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য $= \dfrac{\sum \lvert x-\bar{x} \rvert}{n} = \dfrac{76}{7} = 10{\cdot}86$

এখানে মধ্যমা হল $\dfrac{n+1}{2}$ তম মান $= \dfrac{7+1}{2} = 4$ তম চলকের মান

অর্থাৎ মধ্যমা (Me) = 20

ছক সংখ্যা 3·3 : মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্যের গণনা

x	$\lvert x - M_e \rvert$ অথবা $\lvert x - 20 \rvert$
4	16
8	12
18	2

20	0
26	6
33	13
45	25
মোট	74

$\therefore$ মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য $= \dfrac{\sum|x - \text{M}_e|}{n} = \dfrac{74}{7} = 10{\cdot}57$ (প্রায়)

উদাহরণ : 3·5 নিম্নলিখিত রাশিতথ্য থেকে গাণিতিক গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় কর

x চলক :	15	20	25	30	35
পরিসংখ্যা (f) :	4	7	10	5	4

ছক সংখ্যা : 3·4 গাণিতিক গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয়

x	f	fx	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
15	4	60	9·67	38·68
20	7	140	4·67	32·69
25	10	250	0·33	3·30
30	5	150	5·33	26·65
35	4	140	10·33	41·32
	N = 30	740	–	142·64

গাণিতিক গড় $= \dfrac{\sum fx}{\text{N}} = \dfrac{740}{30} = 24{\cdot}67$ (প্রায়)

গড় পার্থক্য $= \dfrac{\sum fx|x - \bar{x}|}{\text{N}} = \dfrac{142{\cdot}64}{30} = 4{\cdot}75$ (প্রায়)

3.3.3.1 গড় পার্থক্যের সূত্রাবলী

সূত্র 1. গড় পার্থক্য যদি মধ্যমার সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয় তাহলে তার মান হবে সর্বনিম্ন।

$\text{MD}_\text{A} = \dfrac{|x_i - \text{A}|}{n}$ এর মান সর্বনিম্ন হবে যদি A = মধ্যমা হয়।

প্রমাণ : ধরা যাক x চলকের মানগুলিকে ঊর্ধ্বক্রমে সাজানো হল

$x_1 \le x_2 \le x_3 .... \le x_{n-1} \le x_n$

চলকের মোট মান সংখ্যা n যুগ্ম (even) অথবা অযুগ্ম (odd) হতে পারে।

যদি n যুগ্ম সংখ্যা হয় তবে ধরা যাক্ $n = 2m$; $m = 1, 2, ...$ তাদের ঊর্ধ্বক্রমে সাজানো হল।

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le .... \le x_m \underset{\text{A}}{\downarrow} \le x_{m+1} \le ...... \le x_{2m-1} \le x_{2m}$$

এখন,

$|x_1 - \text{A}| + |x_{2m} - \text{A}|$ এই যোগফল সর্বনিম্ন হবে যদি A র মান x_1 এবং x_{2m} এর ঠিক মধ্যেখানে অবস্থান করে।

একইভাবে, $|x_2 - \text{A}| + |x_{2m-1} - \text{A}|$ এই যোগফল সর্বনিম্ন হবে যদি A র মান x_2 এবং x_{2m-1} এর ঠিক মধ্যেখানে অবস্থান করে।

এইভাবে চললে আমরা বলতে পারি যে

$|x_m - \text{A}| + |x_{m+1} - \text{A}|$ এই যোগফল সর্বনিম্ন হবে যদি A র মান x_m এবং x_{m+1} এর ঠিক মধ্যেখানে অবস্থান করে।

অর্থাৎ A যদি x_m এবং x_{m+1} এর ঠিক মধ্যেখানে অবস্থান করে তাহলে পূর্ববর্তী প্রতিটি যোগফলই সর্বনিম্ন হবে এবং তাদের মোট যোগফল

অর্থাৎ $\sum_{i=1}^{2m} |x_i - \text{A}|$ এর মান সর্বনিম্ন হবে।

কিন্তু আমরা জানি মধ্যমা $\text{M}_\text{e} = \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}$

অথবা, M_e, x_m এবং x_{m+1} এর মধ্যেখানে অবস্থান করে।

$\therefore$ A মধ্যমা হলে $\sum_{i=1}^{2m} |x_i - \text{A}|$ সর্বনিম্ন হবে।

$\therefore \dfrac{\sum_{i=1}^{2m} |x_i - \text{A}|}{2m}$ সর্বনিম্ন হবে যখন $\text{A} = \text{M}_\text{e}$ (মধ্যমা) হয়।

যদি n অযুগ্ম সংখ্যা হয় অর্থাৎ $n = 2m + 1, m = 1, 2, 3.......$

তাহলে চলকের মানগুলি ঊর্ধ্বক্রমে সাজালে পাই

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le ...... \le x_m \le \underset{\substack{\downarrow \\ \mathrm{A}}}{x_{m+1}} \le x_{m+2} .... \le x_{2m+1}$$

আগের মতো বলা যায় $|x_1 - \mathrm{A}| + |x_{2m+1} - \mathrm{A}|$ এই যোগফলটি সর্বনিম্ন হবে যদি A র মান x_1 এবং x_{2m+1} এর ঠিক মধ্যেখানে অবস্থান করে।

এইভাবে চলতে থাকলে বলা যায় যে

$|x_m - \mathrm{A}| + |x_{m+2} - \mathrm{A}|$ এই যোগফলটি সর্বনিম্ন হবে যদি A র মান x_m ও x_{m+2} এর ঠিক মধ্যেখানে অবস্থান করে।

অবশেষে যে পরম মানটি বাকী থাকে সেটি হল $|x_{m+1} - \mathrm{A}|$

এখন $|x_{m+1} - \mathrm{A}|$ এর মান সর্বনিম্ন হবে যখন $|x_{m+1} - \mathrm{A}| = 0$ হবে

অর্থাৎ $\mathrm{A} = x_{m+1}$

অন্যভাবে বলা যায় যে যখন $\mathrm{A} = x_{m+1}$ হবে তখন পূর্ববর্তী প্রতি জোড়ার যোগফল সর্বনিম্ন হবে।

অর্থাৎ $\sum_{i=1}^{2m+1} |x_i - \mathrm{A}|$ সর্বনিম্ন হবে যখন $\mathrm{A} = x_{m+1}$ = মধ্যমা হয়।

$\therefore \dfrac{\sum_{i=1}^{2m+1} |x_i - \mathrm{A}|}{2m+1}$ সর্বনিম্ন হবে যখন A = মধ্যমা হয়।

সূত্র 2 : গাণিতিক গড়ের $(\bar{x})$ সাপেক্ষে পরম গড় পার্থক্য মূলবিন্দুর উপর নির্ভর করে না কিন্তু স্কেলের উপর নির্ভর করে।

প্রমাণ : ধরা যাক্ $y_i = \dfrac{x_i - a}{b}$, $i = 1, 2, ..., n$

এখানে মূলবিন্দু = a এবং b = মাত্রা (Scale) যখন $b \neq 0$

$\therefore by_i = x_i - a$

অথবা, $x_i = a + by_i$, $i = 1, 2, ..., n$ ....(I)

সমীকরণটি n বার যোগ করে ও n দিয়ে ভাগ দিলে পাই

$$\frac{\sum x_i}{n} = \frac{na}{n} + \frac{b\sum y_i}{n} \text{ অথবা } \bar{x} = a + b\bar{y}.....(\text{II})$$

এখন (I) – (II) থেকে পাই

$$(x_i - \bar{x}) = b(y_i - \bar{y}) \text{ অথবা, } |x_i - \bar{x}| = |b| \cdot |y_i - \bar{y}|$$

$$\text{অথবা, } \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = |b| \cdot \frac{\sum |y_i - \bar{y}|}{n} \text{ অথবা, } \text{MD}_{\bar{x}} = |b| \text{MD}_{\bar{y}}$$

এখানে $\text{MD}_{\bar{x}}$ ও $\text{MD}_{\bar{y}}$ এই দুইয়ের সম্পর্কের মধ্যে মূলবিন্দু 'a' অনুপস্থিত কিন্তু মাত্রা (Scale) 'b' উপস্থিত।

সুতরাং চলকের গাণিতিক গড়ের সাপেক্ষে পরম গড় পার্থক্য মূলবিন্দুর উপর নির্ভর করে না কিন্তু মাত্রার (Scale) উপর নির্ভর করে।

3.3.3.2 গড় পার্থক্যের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা :

(i) গড় পার্থক্যের সংজ্ঞা দ্ব্যর্থহীন (rigid)।

(ii) চলকের সমস্ত মানের উপর এর মান নির্ভরশীল।

(iii) এটির গণনা খুব সহজ আবার এটা বোঝাও খুব সহজ।

(iv) যে কোনো গড়ের সাপেক্ষে এটি নির্ণয় করা যায় কিন্তু মধ্যমার সাপেক্ষে এটির মান সর্বনিম্ন।

(v) প্রান্তীয় রাশিসমূহের দ্বারা খুব বেশি প্রভাবিত হয় না।

অসুবিধা :

(i) পার্থক্য নির্ণয় করতে সাধারণত ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।
কিন্তু গড় পার্থক্যের গণনাতে ঋণাত্মক চিহ্ন উপেক্ষিত হয়।

(ii) বীজগণিতের নিয়মাবলী প্রয়োগের ক্ষেত্রে এটি অনুপযোগী।

(iii) চলকের চরম মান দ্বারা ইহা বিশেষভাবে প্রভাবিত হয়।

ব্যবহার : এত ত্রুটি সত্ত্বেও গড় পার্থক্য বিস্তৃতির পরিমাপ হিসাবে অর্থনৈতিক রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে বিশেষভাবে ব্যবহৃত হয়। সমাজে আয় বন্টনের বৈষম্য কতখানি, ধনী দরিদ্রের মধ্যে প্রভেদ কতখানি এগুলি পরিমাপের জন্য গড় পার্থক্য বিশেষ ভাবে ব্যবহৃত হয়।

3.3.4 সমক পার্থক্য

একটি চলকের রাশিতথ্য দেওয়া থাকলে সমক পার্থক্য হবে ঐ মানগুলির গাণিতিক গড় থেকে তাদের পার্থক্যগুলির বর্গসমূহের গাণিতিক গড়ের ধনাত্মক বর্গমূল। সমক পার্থক্যের বর্গকে বলা হয় ভেদমান (Variance).

ধরা যাক্ x চলকের n সংখ্যক মানগুলি দেওয়া আছে।

$x_1,\ x_2,..........,\ x_n$

এবং গাণিতিক গড় $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$

তাহলে সমক পার্থক্য নিম্নলিখিত সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

$$\text{সমক পার্থক্য } (\sigma) = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + ... + (x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

$$\text{অথবা, } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$\text{ভেদমান (Variance)} = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum\left(x_i^2 - 2x_i\cdot\bar{x} + \bar{x}^2\right)$$

$$= \frac{\sum x_i^2}{n} - 2\bar{x}\cdot\frac{\sum x}{n} + \frac{\sum \bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum x_i^2}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \frac{n\cdot\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$$

$$\therefore \sigma = +\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে যেখানে চলক x এর n সংখ্যক মানের সঙ্গে পরিসংখ্যাগুলিও দেওয়া থাকে $f_1, f_2, ..., f_n$ তবে ভেদমান হবে

$$\text{Var}(x) = \sigma_x^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}, \text{ যেখানে } \overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\therefore \text{Var}(x) = \sigma_x^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - 2\overline{x} \cdot \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} + \frac{\overline{x} \sum f_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - 2\overline{x} \cdot \overline{x} + \overline{x}^2 = \frac{\sum f_i x_i^{\,2}}{\sum f_i} - \overline{x}^2$$

$$\therefore \sigma_x^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}\right)^2$$

$$\therefore \text{ সম্যক পার্থক্য } \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^{\,2}}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}\right)^2}$$

এই সূত্রের সাহায্যে কোনো চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া থাকলে তার সমক পার্থক্য অনায়াসে গণনা করা যায়। এখানে শ্রেণিগুলির মধ্যমানকে x_i ধরা হয় ও বিভিন্ন শ্রেণির পরিসংখ্যাগুলিকে f_i ধরা হয়।

3.3.4.1 সমক পার্থক্যের ধর্মাবলী

1. যদি কোনো চলকের প্রতিটি মান একই হয় তবে মানগুলির সমক পার্থক্য হবে শূন্য।

ধরা যাক্ $x_i = c, \; i = 1, 2, ..., n$

যেখানে c একটি ধ্রুবক এবং $c > 0$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} c = nc$$

আবার, $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{nc}{n} = c$

$\therefore (x_i - \overline{x}) = c - c = 0,\ i$ এর প্রতিটি মানের জন্য

অথবা, $(x_i - \overline{x})^2 = 0,\ i$ এর প্রতিটি মানের জন্য

$$\therefore \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = 0$$

অথবা, $\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = 0 \ \therefore$ সমক পার্থক্য $= 0$ (প্রমাণিত)

অর্থাৎ উল্টোটাও সত্যি। যদি কোনো চলকের সমক পার্থক্য শূন্য হয় তবে ঐ চলকের প্রতিটি মান একই হবে।

প্রমাণ : $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{x} \sum (x_i - \overline{x})^2} = 0$ দেওয়া আছে।

অথবা, $\sigma_x^2 = \frac{1}{x} \sum (x_i - \overline{x})^2 = 0$

অথবা, $\sum (x_i - \overline{x})^2 = 0 \left(\because \frac{1}{n} \neq 0 \right)$

অথবা, $(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x}) = 0$

যেহেতু বর্গগুলির যোগফল শূন্য সুতরাং একক ভাবে প্রতিটি বর্গও শূন্য হবে।

$\therefore x_i - \overline{x} = 0$ অর্থাৎ $x_i = \overline{x}$

$\therefore x_1 = x_2 = x_3 \ldots\ldots = x_n = \overline{x}$

$\therefore$ সমক পার্থক্য শূন্য হলে চলকের প্রতি মানই সমান হয়। (প্রমাণিত)

2. সমক পার্থক্যের মান মূলবিন্দুর (Origin) উপর নির্ভর করে না কিন্তু মাত্রার (Scale) উপর নির্ভর করে।

প্রমাণ : ধরা যাক্ x চলকের মান $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ দেওয়া আছে।

y অপর একটি চলক x চলকের সঙ্গে নিম্নলিখিত ভাবে সম্পর্কযুক্ত

$$y_i = \frac{x_i - a}{b},\ i = 1, 2, \ldots\ldots ,\ n$$

এখানে a মূলবিন্দু (Origin) এবং b = মাত্রা (Scale) এবং $b \neq 0$

a এবং b ধ্রুবক। x এর কেন্দ্রীয় মানকে মূলবিন্দু এবং শ্রেণি দৈর্ঘ্যকে মাত্রা হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

$$y_i = \frac{x_i - a}{b},\ i = 1, 2, \ldots\ldots\ n$$

$x_i - a = by_i$ অথবা, $x_i = a + by_i$

অথবা, $\sum x_i = \sum a + \sum by_i$ অথবা, $\sum_{i=1}^{n} x_i = na + b\sum_{i=1}^{n} y_i$ অথবা, $\frac{\sum x_i}{n} = \frac{na}{n} + b\frac{\sum y_i}{n}$

অথবা, $\bar{x} = a + b\bar{y}$ অথবা, $(x_i - \bar{x}) = b(y_i - \bar{y})$ অথবা, $(x_i - \bar{x})^2 = b^2(y_i - \bar{y})^2$

অথবা, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = b^2 \sum (y_i - \bar{y})^2$ অথবা, $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = b^2 \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}$

অথবা, $\sigma_x^2 = b^2 \sigma_y^2$ অথবা, $\sigma_x = |b| \sigma_y$

যদি পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া থাকে তবে এই সম্পর্ক হবে,

$$\sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = |b| \sqrt{\frac{\sum f_i (y_i - \bar{y})^2}{\sum f_i}}$$

অর্থাৎ সমক পার্থক্য (σ_x) শুধু মাত্রা (b) এর উপর নির্ভরশীল কিন্তু মূলবিন্দু (a) এর উপর নির্ভরশীল নয়।

3. দুই বা ততোধিক সংখ্যক শ্রেণির মিলিত সমক পার্থক্য

ধরা যাক্ n_1 সংখ্যক প্রথম দলের গড় মান $\overline{x}_1$ এবং সমক পার্থক্য σ_1

n_2 সংখ্যক দ্বিতীয় দলের গড় মান $\overline{x}_2$ ও সমক পার্থক্য σ_2

তাহলে (n_1+n_2) সংখ্যক মিলিত দুই দলের গড় মান $\overline{x}$ এবং সমক পার্থক্য σ নির্ণয় করার সূত্র গুলি হবে $\overline{x}=\dfrac{n_1\overline{x}_1+n_2\overline{x}_2}{n_1+n_2}$ এবং $\sigma^2=\dfrac{n_1\sigma_1^2+n_2\sigma_2^2+n_1d_1^2+n_2d_2^2}{n_1+n_2}$

যেখানে $d_1=\overline{x}_1-\overline{x}$ এবং $d_2=\overline{x}_2-\overline{x}$

প্রমাণ : ধরা যাক চলকের প্রথম দলটির মান $x_{1i}, i=1,2,.....,n_1$ এবং চলকের দ্বিতীয় দলটির মান

$$x_{2i}, i=1,2,.......,n_2.$$

$$\therefore \overline{x}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}x_{1i} \text{ এবং } \overline{x}_2=\frac{1}{n_2}\cdot\sum_{i=1}^{n_2}x_{2i} \text{ এবং } \overline{x}=\frac{n_1\overline{x}_1+n_2\overline{x}_2}{n_1+n_2}$$

আবার, $\sigma_1^2=\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\overline{x}_1)^2,\ \sigma_2^2=\dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\overline{x}_2)^2$

এখন দুইটি দলের সকল মানের পার্থক্য $\overline{x}$ থেকে বের করে তাদের বর্গের যোগফল হবে

$$\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\overline{x})^2$$

এবার, $\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{n_1}\left[(x_{1i}-\overline{x}_1)+(\overline{x}_1-\overline{x})\right]^2$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\overline{x}_1)^2+2(\overline{x}_1-\overline{x})\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\overline{x}_1)+n_1(\overline{x}_1-\overline{x})^2$$

$$=n_1\sigma_1^2+n_1\left(\overline{x}_1-\overline{x}^2\right) \qquad \left[\text{যেহেতু } \sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\overline{x}_1)=0\right]$$

একইভাবে, $\sum_{i=1}^{n_2}\left(x_{2i}-\bar{x}_2\right)^2 = n_2\sigma_2^2 + n_2\left(\bar{x}_2-\bar{x}\right)^2$

সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$\sigma^2 = \frac{1}{n_1+n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_{1i}-\bar{x}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(x_{2i}-\bar{x}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1+n_2} + \frac{n_1\left(\bar{x}_1-\bar{x}\right)^2 + n_2\left(\bar{x}_2-\bar{x}\right)^2}{n_1+n_2}$$

$$= \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1+n_2} + \frac{n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{n_1+n_2} \text{ (প্রমাণিত)}$$

যেখানে, $\left(\bar{x}_1-\bar{x}\right) = d_1^2$ এবং $\left(\bar{x}_2-\bar{x}\right) = d_2^2$

4. x চলকের দুটি মান x_1 ও x_2 এর সমক পার্থক্য হবে মান দুটির পার্থক্যের অর্দ্ধেক।

প্রমাণ : x_1 ও x_2 এই দুটি মানের গাণিতিক গড় হবে

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2} \text{ এবং } \mathrm{SD}(\sigma) = \sqrt{\frac{\left(x_1-\bar{x}\right)^2 + \left(x_2-\bar{x}\right)^2}{2}}$$

$$\sigma^2 = \frac{\left(x_1 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\frac{\left(x_1-x_2\right)^2}{4} + \frac{\left(x_1-x_2\right)^2}{4}}{2}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)^2}{4}$$

$\therefore \sigma=\frac{|x_1-x_2|}{2}$, যেহেতু σ সবসময় ধনাত্মক (প্রমাণিত)

উদাহরণ : 3·6 নিম্নের রাশিতথ্য থেকে সমক পার্থক্য নির্ণয় কর।

দিন মজুরি (টাকায়)	20–24	25–29	30–34	35–39
শ্রমিক সংখ্যা	16	28	14	12

ছকসংখ্যা 3·5 সমক পার্থক্যের গণনা

শ্রেণি সীমা	পরিসংখ্যা	মধ্যমান	x–27	$y=\frac{x-27}{5}$	fy	fy^2
20 – 24	16	22	–5	–1	–16	16
25 – 29	28	27	0	0	0	0
30 – 34	14	32	5	1	14	14
35 – 39	12	37	10	2	24	48
মোট	N = 70				22	78

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum fy^2}{N}-\left(\frac{\sum fy}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{78}{70}-\left(\frac{22}{70}\right)^2}=\sqrt{1{\cdot}11-(0{\cdot}31)^2}$$

$$=\sqrt{1{\cdot}11-0{\cdot}096}=\sqrt{1{\cdot}014}=1{\cdot}007$$

$$\therefore \sigma_x=5\times\sigma_y=5\times1{\cdot}007=\text{Rs.}5{\cdot}03$$

উদাহরণ : 3·7 নিম্নের ক্রমযৌগিক $(\text{CF}\geq)$ পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে সমক পার্থক্য নির্ণয় কর।

দিন মজুরি (টাকায়)	**শ্রমিক সংখ্যা**
0 এবং উপরে	200
10 এবং উপরে	155
20 এবং উপরে	127

30 এবং উপরে	92
40 এবং উপরে	54
50 এবং উপরে	0

সমাধান : ক্রমযৌগিক $(\mathrm{CF} \geq)$ [উপর থেকে] পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া আছে। এখন এটিকে সাধারণ পরিসংখ্যা বিভাজনে রূপান্তরিত করতে হবে।

ছকসংখ্যা : 3·6

দিন মজুরি (টাকায়)	শ্রমিক সংখ্যা (f)	মধ্যমান (x)	$x-25$ $(x - A)$	$y = \frac{x-50}{10}$ $(i = 10)$	fy	fy^2
0 – 10	45	5	–20	–2	–90	180
10 – 20	28	15	–10	–1	–28	28
20 – 30	35	25 = A	0	0	0	0
30 – 40	38	35	10	1	38	38
40 – 50	54	45	20	2	108	216
মোট	N = 200	–	–	–	28	462

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum fy^2}{N} - \left(\frac{\sum fy}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{462}{200} - \left(\frac{28}{200}\right)^2} = \sqrt{2{\cdot}31 - (0{\cdot}14)^2}$$

$$= \sqrt{2{\cdot}31 - 0{\cdot}02} = \sqrt{2{\cdot}29} = 1{\cdot}51 \text{ (প্রায়)}$$

$$\sigma_x = i \times \sigma_y = 10 \times 1{\cdot}51 = \text{Rs.}15{\cdot}1$$

উদাহরণ : 3·8 (i) যদি $y = 2x + 5$ হয়, এবং x এর সমক পার্থক্য 12 হয়, তবে y এর সমক পার্থক্য নির্ণয় কর। x-এর গাণিতিক গড় 25 হলে y এর গাণিতিক গড় কত হবে নির্ণয় কর। (ii) যদি $y = -2x + 5$ হয়, এবং x এর সমক পার্থক্য 12 হয়, তবে y এর সমক পার্থক্য নির্ণয় কর। যদি x এর গাণিতিক গড় 25 হলে y এর গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) সমক পার্থক্য মূলবিন্দুর উপর নির্ভর করে না কিন্তু মাত্রার (Scale) উপর নির্ভর করে।

$$\therefore \sigma_y = 2\sigma_x$$

$\sigma_y = 2 \times 12 = 24$ (y এর সমক পার্থক্য)

কিন্তু গাণিতিক গড় মূলবিন্দু ও মাত্রা দুই এর পরিবর্তন হলে ঐ দুইয়ের উপরই নির্ভরশীল।

সুতরাং $\overline{y} = 2\overline{x} + 5 = 2 \times 25 + 5 = 55$

$\therefore y$ এর গাণিতিক গড় $= 55$

(ii) এখানে $\sigma_y = |-2|\sigma_x$ যেহেতু সমক পার্থক্য সর্বদাই ধনাত্মক।

$= 2 \times 12 = 24$ (y এর সমক পার্থক্য)

কিন্তু গাণিতিক গড়ের সময় $\overline{y} = -2\overline{x} + 5$

$$= -2 \times 25 + 5 = -45$$

$\therefore$ y এর গাণিতিক গড় $= -45$

3.3.4.2 সমক পার্থক্যের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা ঃ

(i) সমক পার্থক্যকে বিস্তৃতির শ্রেষ্ঠ পরিমাপ বলা হয়। এটি চলকের সমস্ত মানের উপর নির্ভর করে। বীজগাণিতিক সূত্রাবলী সমক পার্থক্যে প্রয়োগ করা যায়। এটির নমুনা বিচ্যুতি সর্বাপেক্ষা কম।

(ii) দুই বা ততোধিক সংখ্যক শ্রেণির মিলিত সমক পার্থক্য সহজেই নির্ণয় করা যায় যেটা বিস্তৃতির অন্যান্য পরিমাপ দ্বারা সম্ভব নয়।

(iii) দুই বা ততোদিক শ্রেণির চলকের মানগুলির ভেদ তুলনা করে ভেদাঙ্ক (Co-efficient of Variation) ব্যবহার করা হয় কেননা এটিই সর্বোৎকৃষ্ট। এই ভেদাঙ্ক সমক পার্থক্যের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়।

(iv) রাশিবিজ্ঞানের আরও গভীরতর আলোচনায় সমক পার্থক্যের ব্যবহার প্রচুর।

অসুবিধা :

(i) সমক পার্থক্য গণনা খুব সহজ নয়।

(ii) চলকের চরম মানের উপর সমক পার্থক্য অধিক পরিমাণে গুরুত্ব দেয়।

(iii) এটি যেহেতু পরম মানযুক্ত বিস্তৃতির পরিমাপ, তাই বিভিন্ন এককে দেওয়া দুই বা ততোধিক বিভাজনের পরিবর্তনশীলতার তুলনা করা এটির পক্ষে সম্ভব নয়।

3.3.5 বিস্তৃতির পরম পরিমাপগুলির মধ্যে তুলনা

বিস্তৃতির পরম পরিমাপের যদি উন্নত মানের হতে হয় তাহলে নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যগুলি উপস্থিত থাকতেই হবে।

(i) সংজ্ঞাটি দ্ব্যর্থহীন (rigid) হওয়া আবশ্যক।

(ii) গণনা যেন খুব সহজে করা যায়।

(iii) চলকের সমস্ত মানের উপর যেন পরিমাপটি নির্ভর করে।

(iv) সহজে যাতে বোধগম্য হয়।

(v) বীজগণিতের সূত্রগুলি যেন প্রয়োগ করা যায়।

(vi) চলকের চরম মান (অতি উচ্চ বা অতি নিম্ন) যেন এটিকে প্রভাবিত করতে না পারে।

(vii) নমুনা বিচ্যুতি যেন যথাসম্ভব কম থাকে।

এবার দেখা যাক পরম পরিমাপগুলি অর্থাৎ প্রসার (Range), গড় পার্থক্য (Mean deviation), চতুর্থক পার্থক্য (Quartile deviation) ও সমক পার্থক্য (Standard deviation) ইত্যাদির মধ্যে উপরোক্ত বৈশিষ্ট্যগুলি কতটা প্রতিফলিত হয়।

বিস্তৃতি সব পরিমাপগুলির সংজ্ঞা দ্ব্যর্থহীন। প্রসার এদের মধ্যে কিছুটা নিম্নমানের কারণ চলকের কোনো একটি প্রান্তিক মান যদি জানা না থাকে তবে প্রসার নির্ণয় করা যায় না। একই ভাবে চতুর্থক পার্থক্য ও মধ্যমার মতো অনেক সময় নিশ্চিত ভাবে নির্ণয় করা সম্ভব হয় না।

প্রসারের গণনা সবথেকে সহজ। প্রসার বাদে অন্যান্য পরিমাপগুলি একই রকম পরিশ্রম সাপেক্ষ। প্রসার, চতুর্থক পার্থক্য ও গড় পার্থক্য সহজেই বোধগম্য হয়। সমক পার্থক্য বোঝা খানিকটা কঠিন। গড় পার্থক্য ও সমক পার্থক্য চলকের সমস্ত মানের উপর নির্ভর করে। কিন্তু প্রসার ও চতুর্থক চলকের সমস্ত মানের উপর নির্ভরশীল নয়।

সমক পার্থক্য বীজগণিতের নিয়মাবলী প্রয়োগের জন্য খুবই উপযুক্ত। এই বৈশিষ্ট্যটি অন্য কোনো পরিমাপের নেই। কিন্তু সমক পার্থক্য যেহেতু বিস্তৃতির মাপকের গুণাবলীর বেশির ভাগটাই মেনে চলে, তাই একে বিস্তৃতির পরম মাপগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা উৎকৃষ্ট বলে মনে করা হয়।

তবে অনেক ক্ষেত্রে (যেমন উন্মুক্ত প্রান্তবিশিষ্ট শ্রেণি বিভাজনের ক্ষেত্রে) সমক পার্থক্য নির্ণয় করা যায় না। সেক্ষেত্রে চতুর্থক পার্থক্য ব্যবহার করা হয়।

খুব তাড়াতাড়ি বিস্তৃতি সম্পর্কে মোটামুটি একটা ধারণা পেতে হলে কিন্তু প্রসার সবথেকে সহজ ও বোধগম্য বিস্তৃতির পরিমাপ।

3.4 বিস্তৃতির বিভিন্ন আপেক্ষিক পরিমাপ পদ্ধতি

বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপ বলতে বুঝায়

$$\frac{\text{বিস্তৃতির পরম পরিমাপ}}{\text{কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ}} \times 100$$

অর্থাৎ বিস্তৃতির পরম পরিমাপকে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের সাপেক্ষে যে শতকরা হার হয় তাকেই বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপ বলে। বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপের কোনো একক হয় না। তাই দুটি ভিন্ন একক এর চলকদ্বয়ের বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপ গণনা করে তাদের মধ্যে তুলনা করা সম্ভব।

ধরা যাক্ একটি শ্রেণির সমস্ত ছাত্রের উচ্চতা ও ওজনের মধ্যে যে বিস্তৃতি আছে তার তুলনা করা প্রয়োজন। উচ্চতার একক ফুটে এবং ওজনের একক কেজিতে দেওয়া আছে। এখানে বিস্তৃতির কোনো পরম পরিমাপ ব্যবহার করা যাবে না কারণ ফুটের সঙ্গে কেজির কোনো তুলনা করা সম্ভব নয়। কিন্তু আপেক্ষিক পরিমাপের সাহায্যে এদের বিস্তৃতির তুলনা করা সম্ভব। যেহেতু বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপ একক নিরপেক্ষ।

বিস্তৃতির তিনটি আপেক্ষিক পরিমাপ আছে।

(i) ভেদাঙ্ক (Co-efficient of Variation) $= \frac{\text{সমক পার্থক্য}}{\text{গাণিতিক গড়}} \times 100$

$$= \frac{\sigma_x}{x} \times 100 =$$

(ii) গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক (Co-efficient of Mean Deviation)

$$= \frac{\text{A র সাপেক্ষে গড় পার্থক্য}}{\text{A}} \times 100$$

যেখানে, A = কেন্দ্রীয় প্রবণতার কোনো একটি পরিমাপ

(iii) চতুর্থক পার্থক্য গুণাঙ্ক (Co-efficient of Quartile Deviation)

$$= \frac{\text{চতুর্থক পার্থক্য}}{\text{মধ্যমা}} \times 100 \times 100 = \frac{(Q_3 - Q_1)/2}{Q_2} \times 100$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2Q_2} \times 100$$

যেখানে, চতুর্থক পার্থক্য $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ এবং মধ্যমা $= Q_2$

যেহেতু সমক পার্থক্য বিস্তৃতির শ্রেষ্ঠ পরম পরিমাপ ও গাণিতিক গড় শ্রেষ্ঠ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ, তাই ভেদাঙ্ক হল বিস্তৃতির শ্রেষ্ঠ আপেক্ষিক পরিমাপ।

3.4.1 ভেদাঙ্ক

উদাহরণ : 3·9 দুজন ব্যাটস্‌ম্যান A ও B এর কোনো মরশুমে পর পর দশটি ইনিংস রানের স্কোর ছিল নিম্নরূপ :

A	32	28	47	63	71	39	10	60	96	14
B	19	31	48	53	67	90	10	62	40	80

রান স্কোর করার ক্ষেত্রে দুজনের মধ্যে কে বেশি সঙ্গতিপূর্ণ নির্ণয় কর।

সমাধান : উভয় ব্যাটস্‌ম্যানের রানের ভেদাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

যার ভেদাঙ্ক কম হবে, তাকেই বেশি সঙ্গতিপূর্ণ বলে ধরা হবে।

ছক সংখ্যা 3·7 ব্যাটস্‌ম্যানদের রানের গাণিতিক গড় ও SD

ব্যাটস্‌ম্যান A		ব্যাটস্‌ম্যান B	
রান (x_i)	x_i^2	রান (y_i)	y_i^2
32	1024	19	361
28	784	31	961
47	2209	48	2304
63	3969	53	2809
71	5041	67	4489
39	1521	90	8100
10	100	10	100
60	3600	62	3844
96	9216	40	1600
14	196	80	6400
মোট $\sum x_i = 460$	$\sum x_i^2 = 27660$	$\sum y_i = 500$	$\sum y_i^2 = 30968$

এখানে $n = 10$

ব্যাটস্‌ম্যান A এর রানের গড় $\bar{x}_A = \dfrac{\sum x_i}{A} = \dfrac{460}{10} = 46$

ও রানের সমক পার্থক্য $\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{27660}{10} - \left(\frac{460}{10}\right)^2}$

$= \sqrt{2766 - 2116} = \sqrt{650} = 25{\cdot}495 \quad \therefore \bar{x}_A = 46$ ও $\sigma_A = 25{\cdot}495$

ব্যাটস্‌ম্যান A এর রানের ভেদাঙ্ক $(CV_A) = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} \times 100 = \frac{25{\cdot}495}{46} \times 100 = 55{\cdot}42\%$

একই ভাবে ব্যাটস্‌ম্যান B এর রানের গড় $(\bar{x}_B) = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{500}{10} = 50$

ও সমক পার্থক্য $\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum y_i}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{30968}{10} - \left(\frac{500}{10}\right)^2}$

$$= \sqrt{3096{\cdot}8 - 2500} = \sqrt{596{\cdot}8} = 24{\cdot}429$$

$\therefore \bar{x}_B = 50$ ও $\sigma_B = 24{\cdot}429$

এখন ব্যাটস্‌ম্যান B এর রানের ভেদাঙ্ক $(CV_B) = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} \times 100$

$$= \frac{24{\cdot}429}{50} \times 100 = 48{\cdot}858\%$$

$\therefore CV_8 = 48{\cdot}858\%$

যেহেতু $CV_B < CV_A$, সুতরাং ব্যাটস্‌ম্যান B রানের দিক দিয়ে অনেক বেশি সঙ্গতিপূর্ণ।

3.4.2 গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক এবং চতুর্থক পার্থক্য গুণাঙ্ক

উদাহরণ : 3·10 নিম্নের রাশিতথ্যের সাহায্যে মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় কর এবং গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

46, 79, 26, 85, 39, 65, 99, 29, 56, 72

সমাধান : উপরের রাশিতথ্য ঊর্ধ্বক্রমে সাজালে পাই

26, 29, 39, 46, 56, 65, 72, 79, 85, 99

মধ্যমা $(\mathrm{M_e}) = \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2} = \dfrac{\text{পঞ্চম মান + ষষ্ঠ মান}}{2}$

কারণ $n = 2m = 10 \quad \therefore m = 5$

$\therefore \mathrm{M_e} = \dfrac{56+65}{2} = \dfrac{121}{2} = 60{\cdot}5$

সংজ্ঞা অনুসারে মধ্যমার ($\mathrm{M_e}$) সাপেক্ষে গড় পার্থক্য ($\mathrm{MD_{Me}}$) হবে

$$\mathrm{MD_{M_e}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \mathrm{M_e}|}{n}$$

$$= \frac{|46-60{\cdot}5|+|79-60{\cdot}5|+|26-60{\cdot}5|+|85-60{\cdot}5|+|39-60{\cdot}5| + |50-60{\cdot}5|+|99-60{\cdot}5|+|29-60{\cdot}5|+|56-60{\cdot}5|+|72-60{\cdot}5|}{10}$$

$$= \frac{14{\cdot}5+18{\cdot}5+34{\cdot}5+24{\cdot}5+21{\cdot}5+4{\cdot}5+38{\cdot}5+31{\cdot}5+4{\cdot}5+11{\cdot}5}{10}$$

$$= \frac{204}{10} = 20{\cdot}4$$

সুতরাং মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক $= \dfrac{\mathrm{MD_{Me}}}{\mathrm{M_e}} \times 100$

$= \dfrac{20{\cdot}4}{60{\cdot}5} \times 100 = 33{\cdot}72\%$ (প্রায়)

উদাহরণ : 3·11 নিম্নের রাশিতথ্যের ভিত্তিতে চতুর্থক পার্থক্য নির্ণয় কর।

তারপর মধ্যমার সাপেক্ষে চতুর্থক পার্থক্য গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

x	50	55	60	65	70	75	80
f	12	18	26	35	28	21	10

ছক সংখ্যা : 3·8 ক্রমযৌগিক $(\text{CF} \le)$ পরিসংখ্যা বিভাজন

x	f	cf
50	12	12
55	18	30
60	26	56
65	35	91
70	28	119
75	21	140
80	10	150
মোট	N = 150	–

$\therefore Q_1$ = প্রথম চতুর্থক $= \frac{N+1}{4}$ তম মান

= 37·75 তম মান

= 60

Q_2 = দ্বিতীয় চতুর্থক $= \frac{N+1}{2}$ তম মান

= 75·5 তম মান

= 65

Q_3 = তৃতীয় চতুর্থক $= \frac{3(N+1)}{4}$ তম মান

= 113·25 তম মান = 70

চতুর্থক পার্থক্য = QD $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{70-60}{2} = 5$

$\therefore$ চতুর্থক পার্থক্য গুণাঙ্ক = $\frac{\text{মধ্যমা}}{\text{QD}} = \frac{Q_3 - Q_1}{2Q_2} \times 100 = \frac{70-60}{2 \times 65} \times 100$

= 7·69%

উদাহরণ : 3·12 নিম্নের রাশিতথ্যের ভিত্তিতে গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক (i) গাণিতিক গড়ের সাপেক্ষে ও (ii) মধ্যমার সাপেক্ষে নির্ণয় কর।

পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর : 70, 25, 50, 85, 45, 65, 20, 40

সমাধান : গাণিতিক গড় $= \frac{\sum x}{n} = \frac{1}{8}(70+25+50+85+45+65+20+40)$

= 50

প্রাপ্ত নম্বরগুলিকে এখন ঊর্ধ্বক্রমে পরপর সাজানো হল।

20, 25, 40, 45, 50, 65, 70, 85

এবং এখানে n = 8

$\therefore$ মধ্যমা $= \frac{n+1}{2}$ তম মান

$= 4{\cdot}5$ তম মান $= \frac{1}{2}$ (চতুর্থ মান + পঞ্চম মান)

$= \frac{1}{2}(45+50) = 47{\cdot}5$

ছক সংখ্যা : 3·9

গড় পার্থক্যের গণনা

নম্বর (x)	| x – গড় | (গড় = 50)	| x-মধ্যমা | (মধ্যমা = 47·5)
20	30	27·5
25	25	22·5
40	10	7·5
45	5	2·5
50	0	2·5
65	15	17·5
70	20	22·5
85	35	37·5
মোট 400	140	140

(i) গাণিতিক গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য $= \frac{\sum|x - \text{গড়}|}{n}$

$$= \frac{140}{8} = 17{\cdot}5$$

$\therefore$ গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক (গড়ের সাপেক্ষে) $= \frac{\text{গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য}}{\text{গড়}} \times 100$

$$= \frac{17{\cdot}5}{50} \times 100\% = 35\%$$

(ii) মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য

$$= \frac{\sum|x - \text{মধ্যমা}|}{n} = \frac{140}{8} = 17{\cdot}5$$

$\therefore$ গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক (মধ্যমার সাপেক্ষে) $= \dfrac{\text{মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য}}{\text{মধ্যমা}} \times 100$

$$= \frac{17{\cdot}5}{47{\cdot}5} \times 100\% = 36{\cdot}84\%$$

উদাহরণ 3·13 একজন ছাত্র 100 টি পর্যবেক্ষণের গাণিতিক গড় ও সমক পার্থক্য নির্ণয় করে পায় যথাক্রমে 40·1 এবং 5·0। কিন্তু পরে দেখা যায় যে সে ভুল করে একটি পর্যবেক্ষণের মান 40 না লিখে 50 লিখে ফেলেছে। প্রকৃত গাণিতিক গড় ও প্রকৃত সমক পার্থক্য নির্ণয় কর।

সমাধান : গাণিতিক গড় $= \bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$

$\therefore \sum x = \bar{x} \cdot n = 40{\cdot}1 \times 100 = 4010$

সমক পার্থক্য $(\sigma) = \sqrt{\dfrac{\sum x^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x}{n}\right)^2}$

অথবা, $\sigma^2 = \dfrac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2$ অথবা, $(5)^2 = \dfrac{\sum x^2}{100} - (40{\cdot}1)^2$

অথবা, $\dfrac{\sum x^2}{100} = 1633{\cdot}01$ অথবা, $\sum x^2 = 163301$

এখন পরিশুদ্ধ $\sum x = 4010 - 50 + 40 = 4000$

পরিশুদ্ধ $\sum x^2 = 163301 - (50)^2 + (40)^2 = 162401$

$\therefore$ প্রকৃত গাণিতিক গড় $= \dfrac{\sum x}{n} = \dfrac{4000}{100} = 40$

$\therefore$ প্রকৃত গাণিতিক গড় $= \sqrt{\dfrac{\sum x^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{162401}{100} - \left(\frac{4000}{100}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1624{\cdot}01 - 1600}$$

$$= \sqrt{24{\cdot}01} = 4{\cdot}9$$

উদাহরণ : 3·14 ধরা যাক্ চারটি সংখ্যার গড় ও ভেদমান যথাক্রমে 4·5 এবং 1·25 উপযুক্ত একক সহ। যদি দুটি সংখ্যা 4 এবং 6 হয় তবে অন্য দুটি সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরা যাক্ অন্য দুটি সংখ্যা হল x_1 এবং x_2

সুতরাং চারটি সংখ্যা হল 4, 6, x_1 এবং x_2

গড় $= \frac{\sum x}{n} = \frac{4+6+x_1+x_2}{4} = 4{\cdot}5$

অথবা, $10 + x_1 + x_2 = 18$

অথবা, $x_1 + x_2 = 8........(1)$

আবার, ভেদমান $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum x^2}{4} - (4{\cdot}5)^2 = 1{\cdot}25$

$\therefore \frac{\sum x^2}{4} - 20{\cdot}25 = 1{\cdot}25$

$\therefore \frac{\sum x^2}{4} = 20{\cdot}25 + 1{\cdot}25 = 21{\cdot}5$

অথবা, $\sum x^2 = 21{\cdot}5 \times 4 = 86$

সুতরাং $4^2 + 6^2 + x_1^2 + x_2^2 = 86$

অথবা, $52 + x_1^2 + x_2^2 = 86$

$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 34..........(2)$

(1) সমীকরণটি উভয় দিকে বর্গ করিয়া পাই

$(x_1+x_2)^2=(8)^2$

অথবা, $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=64$

কিন্তু সমীকরণ (2) থেকে $x_1^2+x_2^2=34$ পাই। এটিকে উপরের সমীকরণে বসিয়ে পাই

$\therefore 34+2x_1+x_2=64$ অথবা, $2x_1x_2=30$ অথবা, $x_1x_2=15$ অথবা, $x_1=\dfrac{15}{x_2}$

এখন (1) সমীকরণে x_1 এর মান $\dfrac{15}{x_2}$

বসিয়ে পাই

$\dfrac{15}{x_2}+x_2=8$ অথবা, $15+x_2^2=8x_2$

অথবা, $x_2^2-8x_2+15=0$ অথবা, $x_2^2-5x_2-3x_2+15=0$

অথবা, $x_2(x_2-5)-3(x_2-5)=0$ অথবা, $(x_2-5)(x_2-3)=0$ $\therefore x_2=5$ অথবা 3

(1) সমীকরণে এই মান বসিয়ে পাই দুটি সংখ্যা 3 এবং 5.

3.5 লরেঞ্জ রেখা বা কেন্দ্রীভবন রেখা

লরেঞ্জ রেখা একটি বিশেষ ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা লেখচিত্র যার সাহায্যে আয়, সম্পত্তি ইত্যাদির বন্টন বৈষম্য পরিমাপ করা যায়। আয়, সম্পত্তি, মুনাফা ইত্যাদির বন্টন জনসংখ্যার একটি বিশেষ দিকে কেন্দ্রীভূত থাকে। এই কেন্দ্রীভবনের প্রবণতা পরিমাপ করাই এই লরেঞ্জ রেখার কাজ।

চলক X এর x মান পর্যন্ত মোট মান সমষ্টির শতকরা অনুপাত হল Q (x)

অর্থাৎ $Q(x)=\left[\sum_{x_i\le x} f_ix_i \Big/ \sum_i f_ix_i\right]\times 100$

এবং এই x মান পর্যন্ত শতকরা পরিসংখ্যা হল P (x)

অর্থাৎ $P(x) = \left[\sum_{x_i \le x} f_i \Big/ \sum_i f_i \right] \times 100$

এটা যদি আয় বৈষম্য বিচার করা হয় তবে

$$P\ (x) = \frac{\text{যাদের আয় } \le x \text{ এই ধরনের লোক সংখ্যা}}{\text{দেশের মোট লোকসংখ্যা}} \times 100$$

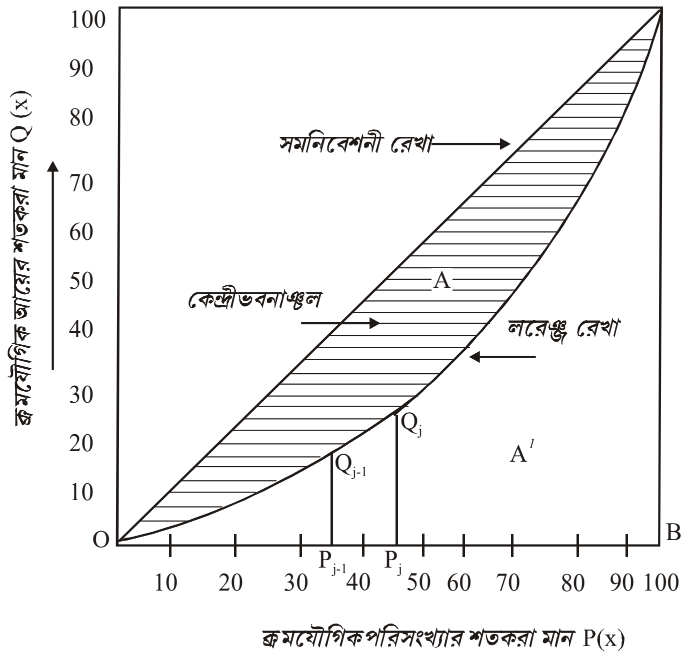
এবং $Q\ (x) = \dfrac{\text{যাদের আয় } \le x \text{ এই ধরনের লোকেদের মোট আয়}}{\text{মোট জাতীয় আয়}} \times 100$

P (x) এবং Q (x) দুটিরই মান 0 থেকে 100.

অনুভূমিক রেখায় P (x) এবং উল্লম্ব রেখায় Q (x) পরিমাপ করা হয়। x এর বিভিন্ন মান অনুযায়ী [P(x), Q (x)] বিন্দুগুলি ছক কাগজে উপস্থাপন করা হয়। এখন এই সকল বিন্দুগুলি যোগ করে যে বক্ররেখাটি পাওয়া যায় তাকেই লরেঞ্জ রেখা বা কেন্দ্রীভবন রেখা বলে।

P (x) = Q (x) এই রেখাটিকে বলা হয় সমনিবেশনী রেখা (line of equal distribution or egalitrian line)। যদি বন্টন ব্যবস্থায় কোনো বৈষম্য না থাকে তাহলে কেন্দ্রীভবন রেখাটি P (x) = Q (x) এই সরলরেখার রূপ নেয়।

চিত্র—3·2



আয় ও সমুহ যদি সমান ভাবে বন্টিত হয় তাহলে লরেঞ্জ রেখাটি একটি সরলরেখা OD (চিত্র—3·2) হবে। কিন্তু আসলে জনগণের মধ্যে আয় ও সমুহ অসম ভাবে বন্টিত হয় বলে লরেঞ্জরেখাটি উপরের দিকে অবতল (Concave) অথবা নীচের দিক থেকে উত্তল (Concave) হবে। এখন এই সমনিবেশনী রেখা (OD) এবং লরেঞ্জরেখাটির মধ্যে দূরত্ব যত বেশি হবে, আয় ও সম্পদের বৈষম্য তত বেশি হবে। OD রেখা ও লরেঞ্জরেখাটির মধ্যে যে ছায়াঞ্চল (Shaded area) আছে (চিত্র—3·2) যেটিকে A দিয়ে চিহ্নিত করা হয়েছে তাকে কেন্দ্রীভবনাঞ্চল (area of concentration) বলে মনে করা হয়। কেন্দ্রীভবনাঞ্চলটির আয়তনকে কেন্দ্রীভবনের পরিমাপ বলে ধরা হয়।

3.5.1 গিনির কেন্দ্রীভবনাঙ্ক

গিনির কেন্দ্রীভবনাঙ্ক (Gini Co-efficient) হল এই কেন্দ্রীভবণাঞ্চলের দ্বিগুণ আয়তন। এটিকে লরেঞ্জ অনুপাতও বলা হয়ে থাকে।

$$\text{গিনি কেন্দ্রীভবনাঙ্ক (G)} = \frac{\text{A অঞ্চলের ক্ষেত্রফল}}{\Delta\text{OBD র ক্ষেত্রফল}} = \frac{\text{A}}{\frac{1}{2}} = 2\text{A}$$

যদি লরেঞ্জ রেখার নীচের অঞ্চলকে A' দ্বারা চিহ্নিত করা হয়

$$\text{তবে গিনি কেন্দ্রীভবনাঙ্ক } (\text{G}) = 2(\Delta\text{OBD} - \text{A}') = 2\left(\frac{1}{2} - \text{A}'\right)$$

$$= 1 - 2\text{A}'$$

$$= 1 - \sum_{j} \text{P}_j\left(\text{Q}_j + \text{Q}_{j-1}\right)$$

যেখানে P_j তম আয়স্তরে মোট জনসংখ্যার অনুপাত (চিত্র 3.2)

3.6 ভ্রামক

যদি x চলকের n সংখ্যক মান দেওয়া থাকে $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ এবং তাদের পরিসংখ্যাগুলি

$f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots, f_n$ তবে

(i) শূন্যের সাপেক্ষে x এর r তম ভ্রামক $(m'r)$ বা কাঁচা ভ্রামক হল

$$m'r = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i \quad \text{যখন } r = 0, 1, 2, 3, 4\ldots\ldots$$

(ii) কোনো একটি ধ্রুবক 'a' র সাপেক্ষে x এর r তম ভ্রামক $\left(m'_{r_a}\right)$ বা অকেন্দ্রীয় ভ্রামক হল

$$m'r_a = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - a\right)^r \bigg/ \sum_{i=1}^{n} f_i \text{ যখন } r = 0,1,2,3,4........$$

(iii) x এর গড় মান $\left(\overline{x}\right)$ এর সাপেক্ষে x এর r তম ভ্রামক $\left(m_r\right)$ বা কেন্দ্রীয় ভ্রামক হল

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - \overline{x}\right)^r \bigg/ \sum_{i=1}^{n} f_i \text{ যখন } r = 0,1,2,3,4....... \text{ ও } \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \bigg/ \sum_{i=1}^{n} f_i$$

এখন ধরা যাক্ x হল একটি বিচ্ছিন্ন চলক এবং এর মানগুলি $x_1, x_2, x_3.......x_n$ শুধুমাত্র একবার করে থাকে অর্থাৎ মানগুলির প্রত্যেকের পরিসংখ্যা হবে 1 ($\therefore f_1 = 1$ যখন i = 1, 2, ... n)

এই অবস্থায় $(\mathrm{i})'$ শূন্যের সাপেক্ষে x এর r-তম কাঁচা ভ্রামক (raw moment) $m'r$ হবে

$$m'r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r / n \text{ যখন } r = 0,1,2,3,4.....$$

(ii) 'a' র সাপেক্ষে x এর r-তম ভ্রামক হবে অকেন্দ্রীক ভ্রামক m'_{r_a} (non-central moment)

$$m'_{r_a} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right)^r \bigg/ n \text{ যখন } r = 0,1,2,3,4.....$$

(iii) গড় মান $\overline{x}$ এর সাপেক্ষে x এর r-তম কেন্দ্রীক ভ্রামক (central moment) m_r হবে

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right) r / n \text{ যখন } r = 0,1,2,3,4.....$$

টীকা-1 : r = 0 হলে কাঁচা ভ্রামক, অকেন্দ্রীয় ভ্রামক ও কেন্দ্রীয় ভ্রামকের মান সর্বদা 1 হবে। অর্থাৎ

$$m'_o = m'_{o_a} = m_o = 1$$

প্রমাণ : সাধারণ ক্ষেত্রে (অর্থাৎ x এর প্রতিটি মানের পরিসংখ্যা যখন 1) x চলকের r তম কাঁচা ভ্রামক (অর্থাৎ শূন্যের সাপেক্ষে ভ্রামক) হবে $m'_r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \Big/ n$ যখন $r = 0,1,2,3,4,......$

এখন, যদি $r = 0$ হয়, $m'_o = \sum_{i=1}^{n} x_i^o \Big/ n = \sum_{i=1}^{n} 1 \Big/ n = \frac{n}{n} = 1$

পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে x চলকের r তম কাঁচা ভ্রামক হবে

$$m'_r = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^{\,r} \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i \quad \text{যখন } r = 0,1,2,3,4,......$$

এখন যদি r = 0 হয়, তবে $m'_o = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^o \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = 1$

সাধারণ ক্ষেত্রে x চলকের r তম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক (‘a’ এর সাপেক্ষে) হবে

$$m'_{r_a} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^r \Big/ n \quad \text{যখন } r = 0,1,2,3,4......$$

এখন যদি r = 0 তবে, $m'_{o_a} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^o \Big/ n = n/n = 1$

পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে

$$m'_{r_a} = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - a)^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i \quad \text{যখন } r = 0,1,2,3,4.....$$

এখন যদি r = o তবে, $m'_{o_a} = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - a)^o \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = 1$

সাধারণ ক্ষেত্রে x চলকের r তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক হবে

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r \Big/ n \quad \text{যখন } r = 0,1,2,3,4......$$

এখন যদি r = o হয় তবে, $m_o = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^o \Big/ n = n/n = 1$

পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে x চলকের r তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক হবে

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i \quad \text{যখন } r = 0,1,2,3,4.....$$

এখন যদি r = o হয় তবে, $m_o = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^o \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = 1$

সুতরাং প্রমাণিত হল $m'_o = m'_{o_a} = m_o = 1$

টীকা-2 : x চলকের প্রথম কাঁচা ভ্রামক অর্থাৎ m'_1 চলকটির গাণিতিক গড়ের $(\bar{x})$ সমান হবে।

প্রমাণ : সংজ্ঞা অনুযায়ী x চলকের r তম কাঁচা ভ্রামক হবে

$$m'_r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \Big/ n \quad \text{যখন} \quad r = 0, 1, 2, 3, 4.....$$

এখন $r = 1$ হলে প্রথম কাঁচা ভ্রামক $m'_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n = \bar{x}$

পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে প্রথম কাঁচা ভ্রামক $m'_1 = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = \bar{x}$

টীকা-3 : x চলকের প্রথম কেন্দ্রীয় ভ্রামক সর্বদা শূন্য হবে অর্থাৎ m_1 = o

প্রমাণ : সংজ্ঞা অনুযায়ী সাধারণ ক্ষেত্রে x চলকের r তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক হল

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r \Big/ n \quad \text{যখন} \quad r = 0, 1, 2, 3, 4.....$$

এখন যদি r = 1 হয় তবে, $m_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \Big/ n = \frac{o}{n} = 0$

কারণ $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$

পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে x চলকের r তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক হল

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i \quad \text{যখন} \quad r = 0, 1, 2, 3, 4....$$

এখন যদি $r = 1$ হয় তবে, $m_1 = \sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i - \bar{x}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{0}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = 0$

কারণ $\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i - \bar{x}\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$

টীকা-4 : *x* চলকের প্রথম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক (‘*a*’ র সাপেক্ষে) $\left(\bar{x} - a\right)$ র সঙ্গে সমান হবে। অর্থাৎ

$$m'_{1_a} = \bar{x} - a$$

প্রমাণ : সাধারণ ক্ষেত্রে ‘a’ র সাপেক্ষে x চলকের r তম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক হল

$m'_{r_a} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^r \Big/ n$ যখন $r = 0, 1, 2, 3, 4.....$

এখন যদি $r = 1$ হয় তবে, $m'_{1_a} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right) \Big/ n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \frac{na}{n} = \bar{x} - a$

পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে

‘a’ সাপেক্ষে x চলকের r তম অকেন্দ্রীক ভ্রামক হল

$m'_{r_a} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$ যখন $r = 0, 1, 2, 3, 4.....$

এখন যদি $r = 1$ হয় তবে, $m'_{1_a} = \sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i - a\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \frac{a\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

$$= \bar{x} - a$$

$\therefore m'_{1_a} = \bar{x} - a$

টীকা-5 : x চলকের দ্বিতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক অর্থাৎ m_2 চলকটির ভেদমান-এর সমান হবে। অর্থাৎ

$$m_2 = \sigma_x{}^2$$

প্রমাণ : সাধারণ ক্ষেত্রে x চলকের r তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক হবে

$$m_r = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^r \Big/ n \text{ যখন } r = 0,1,2,3,4.......$$

$$\text{এবং } \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n$$

এখন যদি $r = 2$ হয় তবে, $m_2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \Big/ n = \text{Var}(x) = \sigma_x{}^2$

আবার পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে x চলকের r তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক হবে

$$m_r = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i \text{ যখন } r = 0,1,2,3,4....... \text{এবং } \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

এখন যদি $r = 2$ হয় তবে, $m_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = \text{Var}(x) = \sigma_x{}^2$

সাধারণত ঃ প্রথম চারটি ভ্রামক রাশিবিজ্ঞানের বিভিন্ন পরিমাপের জন্য ব্যবহার করা হয়।

কাঁচা ভ্রামক	**সাধারণ ক্ষেত্রে**	**পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে**
সংজ্ঞা :	$m'_r = \sum_{i=1}^{n} x^r{}_i \Big/ n$	$m'_r = \sum_{i=1}^{n} f_i x^r{}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$
	যখন, $r = 1, 2, 3, 4$	

যদি $r = 1$ হয় তবে, প্রথম কাঁচা ভ্রামক $m'_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n = \overline{x}$ $m'_1 = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = \overline{x}$

যদি $r = 2$ হয় তবে, দ্বিতীয় কাঁচা ভ্রামক $m_2' = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n$ $m_2' = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$

যদি $r = 3$ হয় তবে, তৃতীয় কাঁচা ভ্রামক $m_3' = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \Big/ n$ $m_3' = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^3 \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$

যদি $r = 4$ হয় তবে, চতুর্থ কাঁচা ভ্রামক $m_4' = \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \Big/ n$ $m_4' = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^4 \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$

অকেন্দ্রীয় ভ্রামক (*'a'* এর সাপেক্ষে)	সাধারণ ক্ষেত্রে	পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে
সংজ্ঞা :	$m_{r_a}' = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^r \Big/ n$	$m_{r_a}' = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - a)^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$

যখন, $r = 1, 2, 3, 4$

যদি $r = 1$ হয় তবে, প্রথম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক

$$m_{1_a}' = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - a) \Big/ n \quad m_{1_a}' = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - a) \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$= \bar{x} - a \qquad\qquad = \bar{x} - a$$

যদি $r = 2$ হয় তবে, দ্বিতীয় অকেন্দ্রীয় ভ্রামক $m_{2_a}' = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 \Big/ n$

$$m_{2_a}' = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$$

যদি $r = 3$ হয় তবে, তৃতীয় অকেন্দ্রীয় ভ্রামক $m_{3_a}' = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^3 \Big/ n$

$$m_{3_a}' = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^3 \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$$

যদি $r = 4$ হয় তবে, চতুর্থ অকেন্দ্রীয় ভ্রামক $m'_{4_a} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^4 \Big/ n$

$$m'_{4_a} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^4 \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$$

কেন্দ্রীয় ভ্রামক	সাধারণ ক্ষেত্রে	পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে
সংজ্ঞা :	$m_r = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r \Big/ n$	$m_r = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$

যখন, $r = 1, 2, 3, 4$

যদি $r = 1$ হয় তবে, প্রথম কেন্দ্রীয় ভ্রামক

$m_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \Big/ n = 0$ $\qquad$ $m_1 = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x}) \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = 0$

$= 0$ $\qquad$ $= 0$

যদি $r = 2$ হয় তবে, দ্বিতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক

$m_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2 \Big/ n = \sigma_x^2$ $\qquad$ $m_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i = \sigma_x^2$

$= \sigma_x^2$ $\qquad$ $= \sigma_x^2$

যদি $r = 3$ হয় তবে, তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক $m_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3 \Big/ n$

$$m_3 = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^3 \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$$

যদি $r = 4$ হয় তবে, চতুর্থ কেন্দ্রীয় ভ্রামক $m_4 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4 \Big/ n$

$$m_4 = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^4 \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i$$

উপরের সারণি থেকে দেখা যাচ্ছে $m_1' = \bar{x}$ এবং $m_2 = \sigma_x^2$

অর্থাৎ ভ্রামকের সাহায্যে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ করা যায় কারণ প্রথম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক থেকে মধ্যক $(\bar{x})$ গণনা করা যায়। আবার দ্বিতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক x চলকের ভেদমানের সমান। অর্থাৎ ভ্রামকের সাহায্যে বিস্তৃতির পরিমাপ করাও সম্ভব। এছাড়া তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক m_3 প্রতিবৈষম্যের মানদণ্ড হিসাবে ব্যবহৃত হয়। আবার চতুর্থ কেন্দ্রীয় ভ্রামক m_4 তীক্ষ্ণতার পরিমাপ করতে সাহায্য করে।

*** কেন্দ্রীয় ভ্রামকসমূহ ও অকেন্দ্রীয় ভ্রামকসমূহের মধ্যে সম্পর্ক (Relation between Central Moments and moments about an arbitrary origin)**

আমরা জানি যে প্রথম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক $m_{1a}' = (\bar{x} - a)$

[উপরের অকেন্দ্রীয় ভ্রামকের সারণি দ্রষ্টব্য]

সংজ্ঞা অনুযায়ী সাধারণ ক্ষেত্রে x চলকের r তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক হল

$$m_r = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r \text{ যখন } r = 0, 1, 2, 3, 4.......$$

অথবা, $$m_r = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - a) - (\bar{x} - a) \right]^r$$

$$m_r = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Big[(x_i - a)^r - {}^rC_1 (x_i - a)^{r-1} (\bar{x} - a) + {}^rC_2 (x_i - a)^{r-2} (\bar{x} - a)^2 -$$

$$....... + (-1)^r (\bar{x} - a)^r \Big]$$

অথবা, $$m_r = m_{ra}' - r_{c_1} \cdot m_{r-1}', a \cdot m_{1a}' + r_{c_2} \cdot m_{r-2}', a \cdot {m_{1a}'}^2$$

$$- r_{c_3} m_{r-3,a}' \cdot {m_{1a}'}^3 + ... + (-1)^r {m_{1_a}'}^r$$

কেন্দ্রীয় ভ্রামক ও অকেন্দ্রীয় ভ্রামকের মধ্যে সম্পর্ক উপরের সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা হল। উপরোক্ত সমীকরণ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য হবে।

এখন এই সমীকরণে $r = 1, 2, 3, 4$ বসালে প্রথম চারটি কেন্দ্রীয় ভ্রামকের সঙ্গে অকেন্দ্রীয় ভ্রামকের সম্পর্ক পরিষ্কার ভাবে বোঝা যায়।

$$m_1 = m'_{1a} - m'_{1a} = 0$$

$$m_2 = m'_{2a} - 2m'_{1a} \cdot m'_{1a} + {m'_{1a}}^2 = m'_{2a} - {m'_{1a}}^2$$

$$m_3 = m'_{3a} - 3m'_{2a}\, m'_{1a} + 3m'_{1a} \cdot {m'_{1a}}^2 - {m'_{1a}}^3$$

$$= m'_{3a} - 3m'_{2a} \cdot m'_{1a} + 2m^3{}_{1a}$$

$$m_4 = m'_{4a} - 4m'_{3a}\, m'_{1a} + 6m'_{2a} \cdot {m'_{1a}}^2 - 4m'_{1a} \cdot {m'_{1a}}^3 + {m'_{1a}}^4$$

$$= m'_{4a} - 4m'_{3a} \cdot m'_{1a} + 6m'_{2a}\, {m'_{1a}}^2 - 3{m'_{1a}}^4$$

কেন্দ্রীয় ভ্রামক ও অকেন্দ্রীয় ভ্রামকের মধ্যে যে সম্পর্ক দেখা গেল ঐ একই সম্পর্ক কেন্দ্রীয় ভ্রামক ও কাঁচা ভ্রামকের মধ্যে। যদি $a = 0$ ধরা হয় তবে অকেন্দ্রীয় ভ্রামক কাঁচা ভ্রামকে পরিণত হবে। কেন্দ্রীয় ভ্রামক ও কাঁচা ভ্রামকের মধ্যে সম্পর্ক নীচে দেওয়া হল।

$$m_1 = m'_1 - m'_1 = 0$$

$$m_2 = m'_2 - {m'_1}^2$$

$$m_3 = m'_3 - 3m'_2 m'_1 + 2{m'_1}^3$$

$$m_4 = m'_4 - 4m'_3 m'_1 + 6m'_2 {m'_1}^2 - 3{m'_1}^4$$

আবার যদি অকেন্দ্রীয় ভ্রামকগুলিকে কেন্দ্রীয় ভ্রামকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় তাহলে প্রথম চারটি ভ্রামক নীচের সমীকরণ দ্বারা বুঝানো যায়।

$m'_{1a} = m'_{1a} + m_1$, যখন $m_1 = 0$

$$m'_{2a} = m_2 + {m'_{1a}}^2$$

$$m'_{3a} = m_3 + 3\, m_2 m'_{1a} + {m'_{1a}}^3$$

$$m'_{4a} = m_4 + 4\, m_3 m'_{1a} + 6m_2 {m'_{1a}}^2 + {m'_{1a}}^4$$

এই সমীকরণ কাঁচা ভ্রামকদের (প্রথম চারটিকে) কেন্দ্রীয় ভ্রামকের সাপেক্ষে প্রকাশ করে

$$m'_1 = m'_1 + m_1$$

$$m_2' = m_2 + m_1'^2$$

$$m_3' = m_3 + 3m_2m_1' + m_1'^3$$

$$m_4' = m_4 + 4m_3m_1' + 6m_2m_1'^2 + m_1'^4$$

*** কেন্দ্রীয় ভ্রামকগুলি মূলবিন্দুর পরিবর্তনে পরিবর্তিত হয় না, কিন্তু মাত্রার পরিবর্তনে পরিবর্তিত হয়।**

x চলকের মানগুলি $x_1, x_2, ...x_n$ যদি যথেষ্ট বড় হয় তবে মূলবিন্দু ও মাত্রা পরিবর্তন করে খুব সহজেই ভ্রামক নির্ণয় করা সম্ভব। মূলবিন্দু ও মাত্রা পরিবর্তন করে x চলককে y চলকে রূপান্তরিত করা হল। অর্থাৎ $y_i = \dfrac{x_i - a}{b}$ যখন $i = 1, 2, ..., n$

a = মূলবিন্দু ও b = মাত্রা যেখানে $b \neq 0$

এবার $by_i = x_i - a$

অথবা, $x_i = a + by_i$, যেখানে $i = 1, 2, ..., n$

অথবা, $\dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{na}{n} + b\dfrac{\sum y_i}{n}$

অথবা, $\overline{x} = a + b\overline{y}$

অথবা, $(x_i - \overline{x}) = b(y_i - \overline{y})$

অথবা, $(x_i - \overline{x})^r = b^r (y_i - \overline{y})^r$

অথবা, $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^r}{n} = b^r \cdot \dfrac{\sum(y_i - \overline{y})^r}{n}$

অথবা, $m_r^{(x)} = b^r \cdot m_r^{(y)}$ যেখানে $r = 0, 1, 2, 3, 4.......$

সুতরাং, কেন্দ্রীয় ভ্রামক মূলবিন্দুর পরিবর্তন হলেও পরিবর্তিত হয় না, কিন্তু মাত্রার পরিবর্তন হলে কেন্দ্রীয় ভ্রামকও পরিবর্তিত হয়।

*** ভ্রামক গণনায় রাশিতথ্য শ্রেণিবন্ধ করার ফলে ভ্রান্তি ও শেফার্ডের সংশোধনী (Grouping Errors and Sheppard's corrections for Moments)**

ধরা যাক্ শ্রেণিবিভাগযুক্ত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে ভ্রামক নির্ণয় করা হচ্ছে, সূত্র দুটি হল

$$m'_{r_a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - a)^r}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \text{ এবং}$$

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^r}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \text{ যেখানে } r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.....$$

এখন x চলকের মধ্যমান $(\bar{x})$ গণনার সময়ে একটি শ্রেণিতে অন্তর্ভুক্ত সমস্ত মানগুলি সমান ধরে নেওয়া হয়, কিন্তু প্রকৃতপক্ষে তারা সকলে সমান হতে পারে না। এই জন্য রাশিতথ্য শ্রেণিবন্ধ অবস্থায় গণনা করলে কিছু ভ্রান্তি থেকে যায় যেটিকে শ্রেণিবন্ধ করণের ভ্রান্তি (Grouping error) বলা হয়।

শেফার্ড নীচের সংশোধনী সূত্রের মাধ্যমে এই ভ্রান্তি দূর করার ব্যবস্থা করেছেন।

$$m'_{1a} \text{ (সংশোধিত) } = m'_{1a}$$

$$m'_{2a} \text{ (সংশোধিত) } = m'_{2a} - \frac{b^2}{12}$$

$$m'_{3a} \text{ (সংশোধিত) } = m'_{3a} - \frac{b^2}{4} \cdot m'_{1a}$$

$$m'_4 \text{ (সংশোধিত) } = m'_{4a} - \frac{b^2}{2} \cdot m'_{2a} + \frac{7}{240} b^4$$

$$m_2 \text{ (সংশোধিত) } = m_2 - \frac{b^2}{12}$$

$$m_3 \text{ (সংশোধিত) } = m_3$$

m_4 (সংশোধিত) $= m_4 - \frac{b^2}{2} \cdot m_2 + \frac{7}{240} \cdot b^4$

এখানে 'b' প্রতিটি শ্রেণির অন্তর (class interval)

শেফার্ডের সূত্রগুলি নীচের শর্তগুলির সাপেক্ষে প্রযোজ্য

1. x চলটি অবিচ্ছিন্ন হতে হবে

2. বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখা অবিচ্ছিন্ন হতে হবে

3. মোট সংখ্যা খুব বেশি হওয়া চলবে না। মোট পরিসংখ্যা 1000 এর বেশি এবং শ্রেণির সংখ্যা 20র বেশি হওয়া চলবে না।

উদাহরণ 3·15 : কোনো চলকের চারটি মান 4, 6, 8, 10 দেওয়া আছে। এখন ঐ চলকের মূলবিন্দু 5 এর সাপেক্ষে প্রথম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক নির্ণয় কর।

সমাধান : মূলবিন্দু 5 এর সাপেক্ষে প্রথম অকেন্দ্রীয় ভ্রামকের সংজ্ঞা হল

$$m_1'(5) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 5) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - 5$$

$$= \frac{1}{4}(4+6+8+10) - 5 = \frac{28}{4} - 5 = 7 - 5 = 2$$

উদাহরণ 3·16 : মূলবিন্দু '3' এর সাপেক্ষে প্রথম চারটি অকেন্দ্রীয় ভ্রামক নির্ণয় কর এবং তাদের সাহায্যে প্রথম চারটি কেন্দ্রীয় ভ্রামক গণনা কর যখন চলকটির মান 1, 3, 5, 7 দেওয়া আছে।

	x_i	$(x_i - 3)$	$(x_i - 3)^2$	$(x_i - 3)^3$	$(x_i - 3)^4$
	1	–2	4	–8	16
	3	0	0	0	0
	5	2	4	8	16
	7	4	16	64	256
মোট	16	4	24	64	288

$m_1'(3) =$ প্রথম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক (3 এর সাপেক্ষে) $= \frac{\sum x_i - 3}{2} = \frac{4}{4} = 1$

$m_2'(3) =$ দ্বিতীয় অকেন্দ্রীয় ভ্রামক (3 এর সাপেক্ষে) $= \frac{\sum (x_i - 3)^2}{n} = \frac{24}{4} = 6$

$m'_3(3) =$ তৃতীয় অকেন্দ্রীয় ভ্রামক (3 এর সাপেক্ষে) $= \frac{\sum(x_i - 3)^3}{n} = \frac{64}{4} = 16$

$m'_4(3) =$ চতুর্থ অকেন্দ্রীয় ভ্রামক (3 এর সাপেক্ষে) $= \frac{\sum(x_i - 3)^4}{n} = \frac{288}{4} = 72$

কেন্দ্রীয় ভ্রামকদের গণনা

$m_1 =$ প্রথম কেন্দ্রীয় ভ্রামক $= \frac{\sum(x_i - \overline{x})}{n} = 0$

$m_2 =$ দ্বিতীয় শ্রেণির ভ্রামক $= m'_2(3) - m'_1(3)^2 = 6 - 1^2 = 6 - 1 = 5$

$m_3 =$ তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক $= m'_3(3) - 3m'_2(3)m'_1(3) + 2m'_1(3)^3$

$= 16 - 3 \times 6 \times 1 + 2 \times 1^3 = 16 - 18 + 2 = 0$

$m_4 =$ চতুর্থ কেন্দ্রীয় ভ্রামক $= m'_4(3) - 4m'_3(3)m'_1(3) + 6m'_2(3)m'_1(3)^2 - 3m'_1(3)^4$

$= 72 - 4 \times 16 \times 1 + 6 \times 6 \times 1^2 - 3 \times 1^4 = 72 - 64 + 36 - 3 = 41$

উদাহরণ 3·17 : নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে প্রথম চারটি কেন্দ্রীয় ভ্রামক নির্ণয় কর এবং শেফার্ডের সংশোধনী প্রয়োগ কর।

ওজন (kg তে) :	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70
লোকসংখ্যা :	100	120	180	250	200	150	50

ওজন (kg তে)	লোকসংখ্যা (f_i)	মধ্যমান (x_i)	$y_i = \frac{x_i - 53}{5}$	$y_i f_i$	$y_i^2 f_i$	$y_i^3 f_i$	$y_i^4 f_i$
36–40	100	38	–3	–300	900	–2700	8100
41–45	120	43	–2	–240	480	–960	1920
46–50	180	48	–1	–180	180	–180	180
51–55	250	53	0	0	0	0	0
56–60	200	58	1	200	200	200	200
61–65	150	63	2	300	600	1200	2400
66–70	50	68	3	150	450	1350	4050
মোট	1050	–	–	–70	2810	–1090	16850

এখন y চলকের কাঁচা ভ্রামক চারটি নীচে গণনা করা হল।

$$m_1' = (0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{n} = \frac{-70}{1050} = -0{\cdot}07$$

$$m_2' = (0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i^2}{n} = \frac{2810}{1050} = -2{\cdot}68$$

$$m_3' = (0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i^3}{n} = \frac{-1090}{1050} = -1{\cdot}04$$

$$m_4' = (0) = \sum_{i=1}^{n} f_i y^4 \Big/ n = 16850/1050 = 16{\cdot}05$$

y চলকের কেন্দ্রীয় ভ্রামক চারটি অনায়াসেই কাঁচা ভ্রামকদের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

$$m_1(y) = 0;\ m_2(y) = 2{\cdot}68 - (-0{\cdot}07)^2 = 2{\cdot}68 - 0{\cdot}0049 = 2{\cdot}675$$

$$m_3(y) = -1{\cdot}04 - 3 \times 2{\cdot}68 \times (-0{\cdot}07) + 2(-0{\cdot}07)^3$$

$$= -1{\cdot}04 + 0{\cdot}5628 - 0{\cdot}000686 = -0{\cdot}478$$

$$m_4(y) = 16{\cdot}05 - 4 \times (1{\cdot}04) \times (0{\cdot}07) + 6 \times 2{\cdot}68 \times (-0{\cdot}07)^2 - 3(-0{\cdot}07)^4$$

$$= 16{\cdot}05 - 0{\cdot}2912 + 0{\cdot}078792 - 0{\cdot}00007203$$

$$= 15{\cdot}838$$

যেহেতু $x_i = 53 + 5y_i$

x চলকের কেন্দ্রীয় ভ্রামক চারটি y চলকের কেন্দ্রীয় ভ্রামকদের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

$$m_1(x) = 0$$

$$m_2(x) = 5^2 m_2(y) = 25 \times 2{\cdot}675 = 66{\cdot}875$$

$$m_3(x) = 5^3 m_3(y) = 125(-0{\cdot}478) = -59{\cdot}75$$

$$m_4(x) = 5^4 m_3(y) = 625 \times 15{\cdot}838 = 9898{\cdot}75$$

এখানে মোট পরিসংখ্যা (n) 1000 এর বেশি এবং শ্রেণিসংখ্যা 20 এর কম। সুতরাং শেফার্ড সংশোধনী প্রয়োগ করা যেতে পারে।

রাশিতথ্য থেকে দেখা যাচ্ছে যে শ্রেণি অন্তর (class width) ‘b’= 5 সুতরাং সংশোধিত কেন্দ্রীয় ভ্রামক x চলকের সাপেক্ষে নীচে দেওয়া হল।

$$m_2 \text{ (সংশোধিত) } = m_2 - \frac{b^2}{12} = 66{\cdot}875 - \frac{5^2}{12}$$

$$= 66{\cdot}875 - 2{\cdot}083 = 64{\cdot}792$$

$$m_3 \text{ (সংশোধিত) } = m_3 \text{ (অসংশোধিত) } = -59{\cdot}75$$

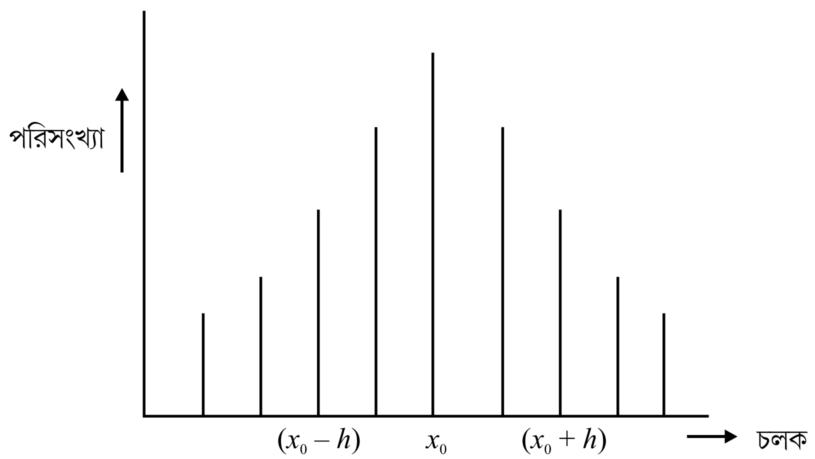
$$m_4 \text{ (সংশোধিত) } = m_4 \text{ (অসংশোধিত) } - \frac{b^2}{2}{\cdot}m_2 + \frac{7}{240}{\cdot}b^4$$

$$= 9898{\cdot}75 - \frac{5^2}{2}(66{\cdot}875) + \frac{7}{240}{\cdot}5^4$$

$$= 9898{\cdot}75 - 835{\cdot}9375 + 18{\cdot}2292 = 9081{\cdot}0417$$

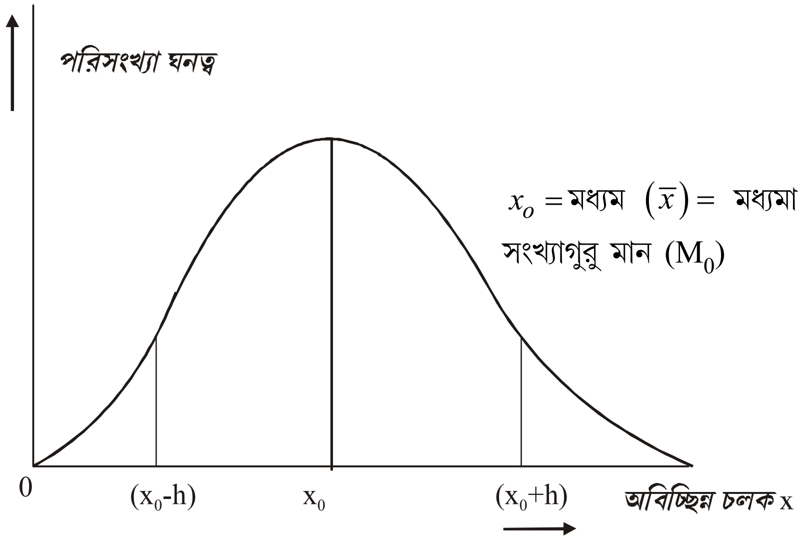
3.7 প্রতিবৈষম্য

প্রতিবৈষম্য (Skewness) মানেই সামঞ্জস্যতার অভাব (lack of symmetry)। একটি বিচ্ছিন্ন চলক x এর পরিসংখ্যা বিভাজনকে কোনো নির্দিষ্ট মান x_0 এর সাপেক্ষে প্রতিসম (synmetrical) বলতে বুঝি $(x_0 - h)$ এবং $(x_0 + h)$ মানের পরিসংখ্যা দুটি সমান হয়, যেখানে h একটি ধনাত্মক ধ্রুবক (চিত্র 3·3)



চিত্র : 3·3 পরিসংখ্যা বিভাজন প্রতিসম যখন x একটি বিচ্ছিন্ন চলক

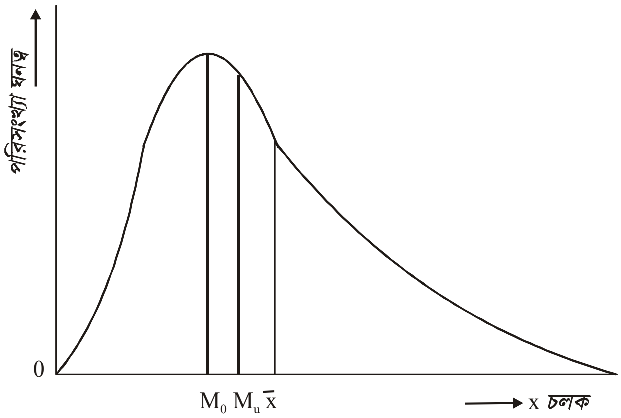
আবার একটি অবিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজনকে কোনো নির্দিষ্ট মান x_0 এর সাপেক্ষে প্রতিসম (symmetrical) বলা যাবে যখন $(x_0 - h)$ এবং $(x_0 + h)$ মান দুটির পরিসংখ্যা ঘনত্ব একই হবে (যেখানে h একটি ধনাত্মক ধ্রুবক)। (চিত্র—3·4)



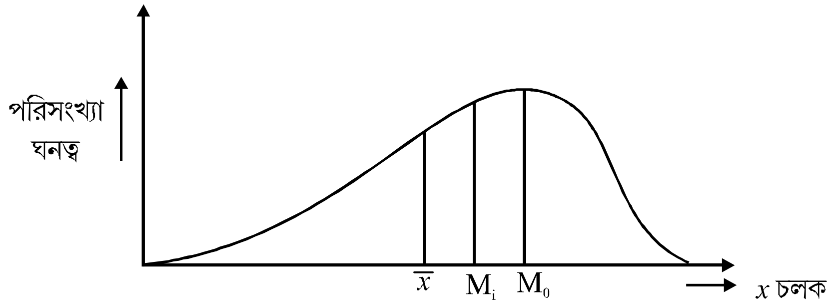
চিত্র : 3·4 অবিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে প্রতিসম বিভাজন

যদি কোন বিভাজন প্রতিসম না হয় তাহলে তাকে অপ্রতিসম বিভাজন (asymmetrical distribution) বা প্রতিবৈষম্য — মূলক বিভাজন (skewed distribution) বলা হয়। প্রতিবৈষম্য ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হতে পারে।

পরিসংখ্যা বিভাজনের প্রতিবৈষম্যকে ধনাত্মক (positively skewed) বলা হবে যখন x চলকের উচ্চতর মানগুলির দিকে পরিসংখ্যা রেখার ঢাল দীর্ঘতর হবে অর্থাৎ x চলকের উচ্চতর মানগুলির দিকে পরিসংখ্যা রেখা ক্রমশ নীচু হতেই থাকে। (চিত্র—3·5)



চিত্র : 3·5 ধনাত্মক প্রতিবৈষম্যমূলক বিভাজন $(\overline{x} < M_i < M_0)$



চিত্র : 3·6 ঋণাত্মক প্রতিবৈষম্যমূলক বিভাজন $\left(\bar{x} < M_i < M_0\right)$

*** প্রতিবৈষম্যের পরিমাপ (Measures of Skewness)**

প্রতিবৈষম্যের পরিমাপ দুই প্রকার : পরম (Absolute) ও আপেক্ষিক (Relative)

প্রতিবৈষম্যের পরম পরিমাপ (Absolute measures of Skewness)

মধ্যক $\left(\bar{x}\right)$ মধ্যমা (M_i) এবং সংখ্যাগুরু মানের (M_o) সাপেক্ষে পরম পরিমাপ হল প্রতিবৈষম্য (পরম) = মধ্যক – সংখ্যাগুরু মান $= \bar{x} - M_o = 3\left(\bar{x} - M_i\right)$

চতুর্থকের সাহায্যে প্রতিবৈষম্য পরিমাপ করলে

প্রতিবৈষম্য (পরম) $Q_3 + Q_1 - 2Q_2 = (Q_3 + Q_1) - 2\ M_i$

একক প্রতিবৈষম্য (পরম) ধনাত্মক হলে বিভাজনটির প্রতিবৈষম্য ধনাত্মক হবে। অপরপক্ষে প্রতিবৈষম্য (পরম) ঋণাত্মক হলে বিভাজনটির প্রতিবৈষম্য ঋণাত্মক হবে।

*** প্রতিবৈষম্যের আপেক্ষিক পরিমাপ (Relative measures of Skewness)**

আপেক্ষিক পরিমাপে যেহেতু কোনো একক নেই এটি একটি সংখ্যামাত্র, তাই বিভিন্ন বিভাজনের প্রতিবৈষম্য তুলনা করা সম্ভব। প্রতিবৈষম্যের আপেক্ষিক পরিমাণকে প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক (coefficient of skewness) বলা হয়।

(1) মধ্যক, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের উপর ভিত্তি করে গঠিত পরিমাপ

Karl Pearson এর প্রথম সূত্র

$$\text{প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক} = \frac{\text{মধ্যক — সংখ্যাগুরু মান}}{\text{সমক পার্থক্য}} = \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma_x}$$

Karl Pearson এর দ্বিতীয় সূত্র

$$\text{প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক} = \frac{3\ (\text{মধ্যক — মধ্যমা})}{\text{সমক পার্থক্য}} = \frac{3\left(\bar{x} - \mathrm{M_i}\right)}{\sigma_x}$$

Pearson এর এই দ্বিতীয় পরিমাপের ক্ষেত্রে প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্কের মান –3 থেকে +3 এর মধ্যে অবস্থান করে অর্থাৎ $-3 \le \dfrac{3\left(\bar{x} - \mathrm{M_i}\right)}{\sigma_x} \le +3$

(2) চতুর্থক ভিত্তিক পরিমাপ

প্রতিসম বিভাজনের ক্ষেত্রে প্রথম $(\mathrm{Q_1})$ ও তৃতীয় $(\mathrm{Q_3})$ চতুর্থক মধ্যমা বা দ্বিতীয় চতুর্থকের $(\mathrm{Q_2})$ থেকে সমান দূরত্বে অবস্থান করে।

অর্থাৎ $\mathrm{Q_3 - M_i = M_i - Q_1}$ অথবা, $\mathrm{Q_3 - Q_2 = Q_2 - Q_1}$

সুতরাং ধনাত্মক প্রতিবৈষম্যমূলক বিভাজনের ক্ষেত্রে

$\left(\mathrm{Q_3 - Q_2}\right) > \left(\mathrm{Q_2 - Q_1}\right)$ হবে এবং

ঋণাত্মক প্রতিবৈষম্যমূলক বিভাজনের ক্ষেত্রে

$\left(\mathrm{Q_3 - Q_2}\right) < \left(\mathrm{Q_2 - Q_1}\right)$ হবে।

এখন $\left(\mathrm{Q_3 - Q_2}\right) - \left(\mathrm{Q_2 - Q_1}\right)$ এই পার্থক্যকে প্রতিবৈষম্যের পরিমাপ হিসাবে ব্যবহার করে এবং সেই পরিমাপকে একক নিরপেক্ষ করতে এই পার্থক্যকে $\left(\mathrm{Q_3 - Q_2}\right) + \left(\mathrm{Q_2 - Q_1}\right)$ দ্বারা ভাগ দিয়ে Bowley একটি প্রতিবৈষম্যের পরিমাপ সূত্র দিয়েছেন।

$$\text{প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক (Bowley)} = \frac{\left(\mathrm{Q_3 - Q_2}\right) - \left(\mathrm{Q_2 - Q_1}\right)}{\left(\mathrm{Q_3 - Q_2}\right) + \left(\mathrm{Q_2 - Q_1}\right)}$$

$$= \frac{\mathrm{Q_3 - Q_2 + Q_1}}{\mathrm{Q_3 - Q_1}}$$

এই প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্কের মান –1 থেকে + 1 এর মধ্যে অবস্থান করে।

(3) ভ্রামক ভিত্তিক প্রতিবৈষম্যের পরিমাপ

আমরা জানি সমস্ত বিভাজনের ক্ষেত্রে প্রথম কেন্দ্রীয় ভ্রামক (m_1) সর্বদা শূন্য হয়। তাই প্রথম কেন্দ্রীয় ভ্রামককে বাদ দিলে দেখা যাবে সমস্ত বিজোড় কেন্দ্রীয় ভ্রামক প্রতিসম বিভাজনের ক্ষেত্রে শূন্য হয়।

ধনাত্মক প্রতিবৈষম্যমূলক বিভাজনের ক্ষেত্রে বিজোড় কেন্দ্রীয় ভ্রামক ধনাত্মক হয়। ঋণাত্মক প্রতিবৈষম্যমূলক বিভাজনের ক্ষেত্রে বিজোড় কেন্দ্রীয় ভ্রামক ঋণাত্মক হয়।

সাধারণত তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামককে (m_3) প্রতিবৈষম্যের পরিমাপ হিসাবে ব্যবহার করা হয়। এই পরিমাপকে একক নিরপেক্ষ করতে σ^3 দিয়ে ভাগ করে ভ্রামক-ভিত্তিক প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক নির্ণয় করা হয়।

প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $= \dfrac{m_3}{\sigma^3} = \dfrac{m_3}{\left(\sqrt{m_2}\right)^3} = \dfrac{m_3}{(m)^{\frac{3}{2}}}$

কারণ $\sigma^2 = m_2 =$ ভেদমান $\therefore$ সমক পার্থক্য $\sigma = \sqrt{m_2}$

সংজ্ঞা অনুযায়ী β_1 গুণাঙ্ক $= \dfrac{m_3^2}{m_2^3}$

প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \dfrac{m_3}{(m_2)^{\frac{3}{2}}}$

(4) দশমক ও শততমক ভিত্তিক পরিমাপ

এটিকে Kelly র প্রতিবৈষম্য পরিমাপ সূত্র বলা হয়।

Kelly র প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $= \dfrac{P_{10} + P_{90} - 2.M_i}{P_{90} - P_{10}} = \dfrac{D_1 + D_9 - 2M_i}{D_9 - D_1}$

যেখানে, P = শততমক (Percentile) এবং D = দশমক (Decile)

M_i = মধ্যমা = P_{50} = D_5

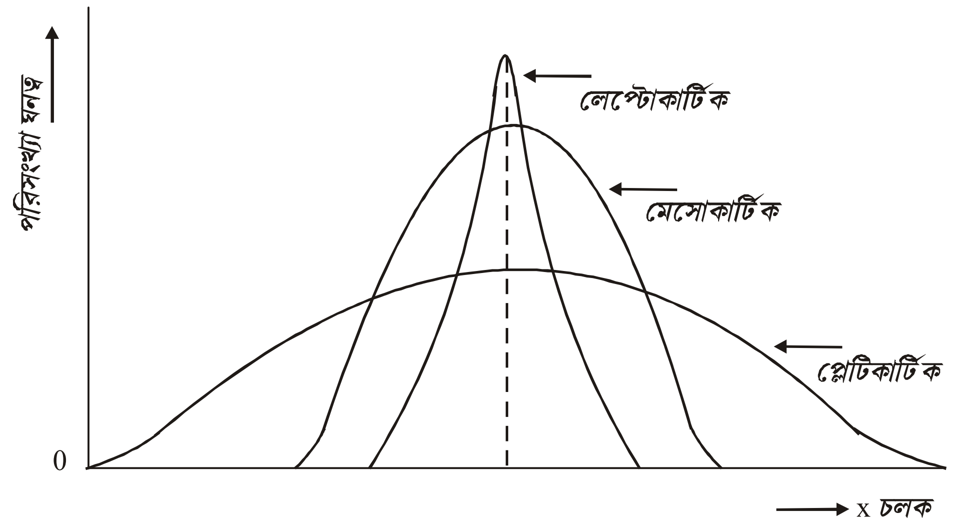
সাধারণত প্রতিবৈষম্যের পরিমাপ হিসাবে Pearson এর গুণাঙ্ক দুটি ব্যবহৃত হয়।

তুলনায় Kelly র গুণাঙ্কের বিশেষ ব্যবহার নেই।

*** অবশ্য প্রতিটি পরিমাপের ক্ষেত্রেই যদি প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্কের মান শূন্য হয় তবে বিভাজনটি প্রতিসম হবে, ধনাত্মক হলে ধনাত্মক প্রতিবৈষম্যমূলক ও ঋণাত্মক হলে ঋণাত্মক প্রতিবৈষম্যমূলক বিভাজন হবে।**

3.8 তীক্ষ্ণতা

দুটি পরিসংখ্যা বিভাজনের একই মধ্যমক (mean), একই সমক পার্থক্য (standard deviation) এবং একই প্রতিবৈষম্য (skewness) হলেও তাদের পরিসংখ্যা রেখার চূড়াগুলি (peaks) আলাদা হতে পারে। কোনো চূড়া হয়তো তীক্ষ্ণ আবার কোনো চূড়া হয়তো চ্যাপ্টা। পরিসংখ্যা বিভাজনের এই বৈশিষ্ট্যকে তীক্ষ্ণতা (kurtosis) বলা হয়।



চিত্র : 3·7 তীক্ষ্ণতার বিভিন্ন পর্যায়

একটি বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখার চূড়া স্বাভাবিক বিভাজন রেখার (Normal Curve) তুলনায় কি পরিমাণ তীক্ষ্ণ বা চ্যাপ্টা তাকেই তীক্ষ্ণতার পরিমাপ বলে গণ্য করা হয়। যদি কোনো পরিসংখ্যা রেখার চূড়া স্বাভাবিক রেখা (Normal Curve) অপেক্ষা অধিক তীক্ষ্ণ হয়, তাহলে তাকে লেপ্টোকার্টিক (Leptokurtic) বলা হবে। আবার কোনো বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখার চূড়া স্বাভাবিক রেখার (Normal Curve) তুলনায় অতিরিক্ত চ্যাপ্টা (flat) হয়, তাহলে তাকে প্লেটিকার্টিক (Platykurtic) বলা হবে। যে পরিসংখ্যা রেখার চূড়া সাধারণ রেখার (Normal Curve) মতো হয় তাকে মেসোকার্টিক (Mesokurtic) বলা হবে।

*** তীক্ষ্ণতার পরিমাপ**

দ্বিতীয় ও চতুর্থ শ্রেণিয় ভ্রামকের সাহায্যে তীক্ষ্ণতার পরিমাপ করা হয়।

তীক্ষ্ণতার গুণাঙ্ককে (Co-efficient of Kurtosis) γ_2 দিয়ে সূচিত করা হয়।

আবার, $\gamma_2 = \beta_2 - 3$

যখন, $\beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{m_4}{\sigma^4}$ [কারণ, সমক পার্থক্য $\sigma = \sqrt{m_2}$]

β_2 গুণাঙ্কের মান যত বেশি হবে, বিভাজনটির তীক্ষ্ণতা তত তীব্র হবে।

স্বাভাবিক রেখার (Normal curve) ক্ষেত্রে $\beta_2 = 3$

অর্থাৎ $\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0$

সুতরাং বলা যায় যে $\gamma_2 = 0$ অথবা $\beta_2 = 3$ হলে বিভাজনটি মেসোকার্টিক (mesokurtic) হবে।

$\gamma_2 > 0$ অথবা $\beta_2 > 3$ হলে বিভাজনটি লেপ্টোকার্টিক হবে।

এবং $\gamma_2 < 0$ অথবা $\beta_2 < 3$ হলে বিভাজনটি প্লেটিকার্টিক হবে।

উদাহরণ : 3·18 x চলকটির চারটি মান 1, 3, 5, 7 দেওয়া আছে। তার উপর ভিত্তি করে চারটি কেন্দ্রীয় ভ্রামক, মধ্যক, সমক পার্থক্য, প্রতিবৈষম্যর গুণাঙ্ক ও তীক্ষ্ণতার গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মধ্যক $(\bar{x}) = \frac{1+3+5+7}{4} = \frac{16}{4} = 4$

কেন্দ্রীয় ভ্রামকের গণনা

x	$(x-\bar{x})\ (x-4)$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^3$	$(x-\bar{x})^4$
1	–3	9	–27	81
3	–1	1	–1	1
5	1	1	1	1
7	3	9	27	81
মোট	0	20	0	164

m_1 = প্রথম কেন্দ্রীয় ভ্রামক $= \frac{\sum(x-\bar{x})}{n} = \frac{0}{4} = 0$

m_2 = দ্বিতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক $= \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{20}{4} = 5$

m_3 = তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক $= \frac{\sum(x-\bar{x})^3}{n} = \frac{0}{4} = 0$

m_4 = চতুর্থ কেন্দ্রীয় ভ্রামক $= \frac{\sum(x-\bar{x})^4}{n} = \frac{164}{4} = 41$

কিন্তু, ভেদমান = (সমক পার্থক্য)^2 = m_2

$\therefore$ সমক পার্থক্য $= \sqrt{m_2} = \sqrt{5} = 2{\cdot}24 = \sigma$

প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $\gamma_1 = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{0}{(2{\cdot}24)^3} = 0$

তীক্ষ্ণতার গুণাঙ্ক $\gamma_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{41}{\left(\sqrt{5}\right)^4} - 3 = \frac{41}{25} - 3 = -1{\cdot}36$

$\therefore \gamma_2 < 0$, বিভাজনটি প্লেটিকার্টিক।

উদাহরণ : 3·19 (i) যদি দ্বিতীয় ও তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামকের মান যথাক্রমে 4 এবং 12 হয়, তাহলে প্রতিবৈষম্য নির্ণয় কর।

(ii) একটি মাঝামাঝি প্রতিবৈষম্যমূলক বিভাজনের ক্ষেত্রে মধ্যক $\left(\overline{x}\right) = 172$, মধ্যমা $(\mathrm{M_i}) = 167$ এবং সমক পার্থক্য $\left(\sigma\right) = 60$ দেওয়া থাকলে প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) $m_2 = 4$ এবং $m_3 = 12$ দেওয়া আছে।

$\therefore$ সমক পার্থক্য $\sigma = \sqrt{m_2} = \sqrt{4} = 2$

প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $= \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{12}{(2)^3} = \frac{12}{8} = 1{\cdot}5$

(ii) প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $= \frac{3\left(\overline{x} - \mathrm{M_i}\right)}{\sigma} = \frac{3\left(172 - 167\right)}{60} = \frac{3 \times 5}{60}$

$$= \frac{1}{4} = 0{\cdot}25$$

আবার মাঝামাঝি প্রতিবৈষম্যমূলক বিভাজনের

$\overline{x} - \mathrm{M_0} = 3\left(\overline{x} - \mathrm{M_i}\right)$ যেখানে $\mathrm{M_o}$ = সংখ্যাগুরু মান

অথবা, $172 - \mathrm{M_o} = 3\ (172 - 167)$

অথবা, $172 - \mathrm{M_0} = 3 \times 5 = 15$

অথবা, $\mathrm{M_o} = 172 - 15 = 157$

উদাহরণ : 3·20 একদল শ্রমিকের প্রতি ঘন্টায় মজুরির বন্টনের মধ্যক = 45 মধ্যমা = 42 ও ভেদাঙ্ক = 40 প্রদত্ত তথ্যসমূহ থেকে (i) সংখ্যাগুরু মান (ii) ভেদমান ও (iii) প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে মধ্যক $\overline{x} = 45$ মধ্যমা $\mathrm{M_i} = 42$ এবং $\mathrm{CV} = \frac{\sigma_x}{x} \times 100 = 40$

$\therefore \mathrm{CV} = \frac{\sigma_x}{x} \times 100 = 40$

অথবা, $\frac{\sigma_x}{x} = \frac{40}{100} = 0{\cdot}40$

$\therefore \sigma_x = 0{\cdot}40 \times \bar{x} = 0{\cdot}40 \times 45 = 18 =$ সমক পার্থক্য

$\therefore \sigma_x^2 = (18)^2 = (18)^2 = 324 =$ ভেদমান

এখন $(\bar{x} - \mathrm{M_o}) = 3$ (মধ্যক — মধ্যমা)

অথবা, $\bar{x} - \mathrm{M_o} = 3(\bar{x} - \mathrm{M_i})$

অথবা, $45 - \mathrm{M_o} = 3\ (45 - 42) = 3 \times 3 = 9$

$\therefore\ \mathrm{M_o} = 45 - 9 = 36 =$ সংখ্যাগুরু মান

Pearson I এর প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $= (\bar{x} - \mathrm{M_o})/\sigma_x = \dfrac{45-36}{18} = \dfrac{9}{18} = 0{\cdot}5$

3.9 সারাংশ

কোনো চলকের বিভিন্ন মানগুলি থেকে তাদের কেন্দ্রীয় মানের যে পার্থক্য তাকেই বিস্তৃতি বলে। কেন্দ্রীয় মান গড়, মধ্যমা অথবা সংখ্যাগুরু মান হতে পারে। বিস্তৃতির পরম পরিমাপ পদ্ধতিগুলি হল—(i) প্রসার (ii) গড় পার্থক্য (iii) চতুর্থক পার্থক্য ও (iv) সমক পার্থক্য। কিন্তু এগুলির একক আছে। তাই একক নিরপেক্ষ পরিমাপ পদ্ধতিগুলি হল—(i) ভেদাঙ্ক (ii) গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক (iii) চতুর্থক পার্থক্য গুণাঙ্ক ইত্যাদি। এগুলিকে আপেক্ষিক পরিমাপ বলে। বিস্তৃতির পরম পরিমাপগুলির মধ্যে সমক পার্থক্য সবথেকে বেশি ব্যবহৃত হয়। সমক পার্থক্যের বর্গকে ভেদমান বলে। ভেদমানও বহুল ব্যবহৃত।

লরেঞ্জ রেখা বা কেন্দ্রীভবন রেখা একটি বিশেষ ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা লেখচিত্র যার সাহায্যে আয়, সম্পত্তি ইত্যাদির বন্টন বৈষম্য পরিমাপ করা যায়। আয়, সম্পত্তি ইত্যাদির বন্টন জনসংখ্যার একটি বিশেষ দিকে কেন্দ্রীভূত থাকে। এই কেন্দ্রীভবনের প্রবণতা পরিমাপ করাই এই লরেঞ্জ রেখার কাজ। গিনির কেন্দ্রীয়ভবনাঙ্ক বা লরেঞ্জ অনুপাতের মাধ্যমেও এই বন্টন বৈষম্য পরিমাপ করা হয়।

x চলকের একটি নির্দ্দিষ্ট মানের (ধরা যাক a) সাপেক্ষে তিন ধরনের ভ্রামক পাওয়া যায়।

যখন $a = 0$, তখন $m'_r = \sum_{i=1}^{n} {x^r}_i \Big/ n$, যখন $r = 0, 1, 2, 3, 4.....$ কে বলা হয় x এর r তম কাঁচা ভ্রামক।

যখন $a > 0$ এবং $a \neq \bar{x}$ হয় তখন $m'_{r_a} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^r \Big/ n$, যখন $r = 0, 1, 2, 3, 4.....$ কে বলা হয় x এর r তম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক।

এবং যখন $a = \bar{x}$ (মধ্যক) হয়, তখন $m_r = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r \Big/ n$, যখন $r = 0, 1, 2, 3, 4.....$ কে বলা হয় x এর r তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক।

উপরের সমীকরণগুলি অবশ্য সাধারণ ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য অর্থাৎ x যখন একটি বিচ্ছিন্ন চলক এবং তার বিভিন্ন মানগুলি $x_1, x_2, ... x_n$ শুধুমাত্র একবার করেই থাকে অর্থাৎ মানগুলির প্রত্যেকের পরিসংখ্যা 1. পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে সমীকরণগুলি হবে

কাঁচা ভ্রামক : $m'_r = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i, \; r = 0, 1, 2, 3, 4.....$

অকেন্দ্রীয় ভ্রামক : $m'_{ra} = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - a)^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i, \; r = 0, 1, 2, 3, 4.....$

কেন্দ্রীয় ভ্রামক : $m_r = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i, \; r = 0, 1, 2, 3, 4....$

সাধারণত: প্রথম চারটি কাঁচা ভ্রামক, প্রথম চারটি অকেন্দ্রীয় ভ্রামক ও প্রথম চারটি কেন্দ্রীয় ভ্রামক রাশিতত্ত্বে ব্যবহৃত হয়। কাঁচা ভ্রামক অথবা অকেন্দ্রীয় ভ্রামকগুলি জানা থাকলে সম্পর্কযুক্ত সমীকরণের সাহায্যে অনায়াসেই কেন্দ্রীয় ভ্রামক নির্ণয় করা যায়। অপরপক্ষে কেন্দ্রীয় ভ্রামক জানা থাকলে কাঁচা ভ্রামক বা অকেন্দ্রীয় ভ্রামক নির্ণয় করা যায়। কিছু দরকারি ফলসমূহ নীচে দেওয়া হল।

(i) $m'_o = m'_{oa} = m_o = 1$

(ii) x এর প্রথম কাঁচা ভ্রামকটি হল তার মধ্যক। অর্থাৎ $m'_1 = \bar{x}$

(iii) x এর প্রথম কেন্দ্রীয় ভ্রামক হল শূন্য। অর্থাৎ $m_1 = 0$

(iv) $m'_{1a} = \bar{x} - a$

(v) $m_2 = \sigma^2 =$ ভেদমান

ভ্রামকের গুরুত্ব হল : $m'_1 = \bar{x}, m_2 = \text{Var}\,(x)$ অর্থাৎ ভ্রামক কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ এবং বিস্তৃতির পরিমাপ হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

এছাড়া m_3 (তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক) প্রতিবৈষম্যের পরিমাপ হিসাবে ও m_4 (চতুর্থ কেন্দ্রীয় ভ্রামক) তীক্ষ্ণতার পরিমাপ হিসাবেও ব্যবহৃত হয়।

প্রতিবৈষম্য কথাটির অর্থ হল সামঞ্জস্যের অভাব। যে পরিসংখ্যা বিভাজনে সম্পূর্ণ সামঞ্জস্যতা আছে সেটিকে প্রতিসম বিভাজন বলে। সাধারণ রেখা (Normal Curve) একটি প্রতিসম বিভাজন। কারণ সাধারণ রেখাটির মধ্যক $(\bar{x}) =$ মধ্যমা (M_i) = সংখ্যাগুরু মান (M_0) হয়। ধনাত্মক প্রতিবৈষম্যমূলক পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে মধ্যক $(\bar{x}) >$ মধ্যমা (M_i) > সংখ্যাগুরু মান (M_0) ও অপরদিকে ঋণাত্মক প্রতিবৈষম্যমূলক পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে মধ্যক $(\bar{x}) <$ মধ্যমা (M_i) < সংখ্যাগুরু মান (M_0) হয়।

পরিসংখ্যা বিভাজনের তুলনামূলক আলোচনা প্রসঙ্গে একটি উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য হল বিভাজনটির উচ্চতা (Peakedness)। সংখ্যাগুরু মান বরাবর একটি পরিসংখ্যা রেখা অপরটির তুলনায় অধিক তীক্ষ্ণ বা চ্যাপ্টা হতে পারে। পরিসংখ্যা বিভাজনের এই বৈশিষ্ট্যকে তীক্ষ্ণতা (Kurtosis) বলা হয়। সাধারণ রেখার (Normal Curve-এর) সমান উচ্চতা ও সামঞ্জস্যপূর্ণ পরিসংখ্যা রেখাটিকে মেসোকার্টিক বলা হয়। সাধারণ রেখার থেকে বেশি উচ্চ এবং তীক্ষ্ণ পরিসংখ্যা রেখাকে লেপ্টোকার্টিক ও সাধারণ রেখার থেকে কম উচ্চ এবং চ্যাপ্টা পরিসংখ্যা রেখাকে প্লেটিকার্টিক বলা হয়।

3.10 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা :

1. বিস্তৃতির অর্থ কী? বিস্তৃতির পরম পরিমাপগুলি কী কী ব্যাখ্যা কর।
2. বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপগুলি ফর্মূলা সহযোগে ব্যাখ্যা কর। এই আপেক্ষিক পরিমাপগুলির সাথে পরম পরিমাপের তফাৎ কোথায়?
3. প্রসারের (Range) সংজ্ঞা দাও। শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে প্রসার কীভাবে নির্ণয় করা হয়? প্রসারের অসুবিধাগুলি কী কী?
4. গড় পার্থক্যের (Mean Deviation) সংজ্ঞা দাও (সূত্র সহযোগে)। গড় পার্থক্যের মান কখন সর্বনিম্ন হবে? গড় পার্থক্যের অসুবিধাগুলি কী কী?
5. সমক পার্থক্য (Standard Deviation) কাকে বলে? প্রমাণ কর যে একটি চলকের প্রতিটি মান যদি একই হয় তবে মানগুলির সমক পার্থক্য শূন্য হবে।

প্রশ্নমালা :

6. সমক পার্থক্যের মান মূলবিন্দুর (Origin) উপর নির্ভর করে না কিন্তু মাত্রার (Scale) উপর নির্ভর করে—প্রমাণ কর।
7. লরেঞ্জ রেখার (Lorenz Curve) সাহায্যে আয়, পদ্ধতি, মুনাফা ইত্যাদির বন্টন বৈষম্য কীভাবে পরিমাপ করা হয় দেখাও।

8. একটি চলক x এর দুটি মান x_1 ও x_2 ধরলে চলকের সমক পার্থক্য হবে এই মান দুটির পার্থক্যের অর্ধেক—প্রমাণ কর।

9. (i) কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনের কাঁচা ভ্রামক, অকেন্দ্রীয় ভ্রামক ও কেন্দ্রীয় ভ্রামকের সংজ্ঞা দাও।

(ii) দেখাও কীভাবে ভ্রামক দ্বারা বিভাজনের বৈশিষ্ট্যগুলি প্রকাশিত হয়, যেমন গড়, বিস্তৃতি, প্রতিবৈষম্য ও তীক্ষ্ণতা।

10. কেন্দ্রীয় ভ্রামক ও অকেন্দ্রীয় ভ্রামকের মধ্যে সাধারণ সম্পর্ক নির্ধারণ কর। প্রথম চারটি কেন্দ্রীয় ভ্রামককে অকেন্দ্রীয় ভ্রামকের সাপেক্ষে প্রকাশ কর।

প্রশ্নমালা :

11. 20 টি পর্যবেক্ষণের গড় মান ও সমক পার্থক্যের মান যথাক্রমে 10 ও 2। হিসাবটি পুনরায় পরীক্ষা করার সময় দেখা গেল একটি সংখ্যা ভুল করে 8 লেখা হয়েছে। এখন গড় মান ও সমক পার্থক্যের মান নির্ণয় কর (i) যদি ভুল মানটি হিসাব থেকে বাদ দেওয়া হয় এবং (ii) ভুল মানটি সংশোধন করে এর জায়গায় 12 ধরা হয়।

12. কোনো পরীক্ষায় 100 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর নীচে দেওয়া হল :

প্রাপ্ত নম্বর	**ছাত্র সংখ্যা**
10 এর নীচে	14
20 এর নীচে	30
30 এর নীচে	50
40 এর নীচে	75
50 এর নীচে	87
60 এর নীচে	95
70 এর নীচে	100

গড় ও সমক পার্থক্য নির্ণয় কর।

13. কোনো চলকের চারটি পর্যবেক্ষণের গড় ও ভেদমান হল 4·5 এবং 1·25 যদি দুট পর্যবেক্ষণ 4 ও 6 হয় তাহলে অপর দুই পর্যবেক্ষণ নির্ণয় কর।

14. (i) যদি $n = 10$, $\sum x = 120$ এবং $\sum x^2 = 1690$ হয় তবে সমক পার্থক্য নির্ণয় কর।

(ii) ভেদাঙ্ক = 5% ও ভেদমান = 4 হলে, গড় নির্ণয় কর।

(iii) একটি প্রতিসম বিভাজনের AM = মধ্যমা = 8·5 ; চতুর্থক পার্থক্য = 4 হলে প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক নির্ণয় কর।

15. নীচের সারণিতে 430 টি পরিবারের মাসিক ব্যয় দেওয়া হল :

মাসিক ব্যয় (টাকায়)	পরিবারের সংখ্যা
1000 এর নীচে	30
1000 – 1250	45
1250 – 1500	70
1500 – 1750	82
1750 – 2000	66
2000 – 2250	57
2250 – 2500	28
2500 – 2750	22
2750 – 3000	18
3000 এর উপরে	

এক্ষেত্রে কি সমক পার্থক্য নির্ণয় করা যায়? কারণ দেখাও। যদি না হয় তবে উপযুক্ত পরিমাপের সাহায্যে চ্যুতি নির্ণয় কর।

16. (i) একটি অবিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজনের সাপেক্ষে প্রতিবৈষম্য ও তীক্ষ্ণতা এই ধারণা দুটির অর্থ ব্যাখ্যা কর। প্রতিবৈষম্য ও তীক্ষ্ণতার বিভিন্ন পরিমাপগুলি ব্যাখ্যা কর।

(ii) নিম্নে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে ভ্রামক পদ্ধতিতে প্রতিবৈষম্য ও তীক্ষ্ণতা পরিমাপ কর।

শ্রেণি (class) :	0–10	10–20	20–30	30–40
পরিসংখ্যা (frequency) :	1	3	4	2

17. নিম্নের রাশিতথ্য থেকে প্রথম চারটি কেন্দ্রীয় ভ্রামক নির্ণয় কর।

অতঃপর পরিসংখ্যা বিভাজনটির মধ্যক, সমক পার্থক্য, প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক ও তীক্ষ্ণতার গুণাঙ্ক গণনা কর।

শ্রেণি অন্তর	110–119	120–129	130–139	140–149	150–159	160–169	170–179
পরিসংখ্যা	16	25	38	52	37	19	13

18. (i) যদি 2 বার সাপেক্ষে x চলকের প্রথম দ্বিতীয় ও তৃতীয় অকেন্দ্রীয় ভ্রামক যথাক্রমে 1, 16 এবং 40 হয়, তবে প্রথম দ্বিতীয় ও তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক নির্ণয় কর। অতঃপর ভ্রামক ভিত্তিক প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক গণনা কর এবং পরিসংখ্যা রেখাটির আকৃতি সম্পর্কে আলোচনা কর।

19. x চলকের পরিসংখ্যা বিভাজনের প্রথম চারটি কাঁচা ভ্রামক দেওয়া আছে –4, 22, –105 এবং 444. এর থেকে তীক্ষ্ণতার গুণাঙ্ক (B গুণাঙ্কের আকারে) গণনা কর এবং তীক্ষ্ণতার প্রকৃতি সম্পর্কে আলোচনা কর।

20. নিম্নের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে Bowleyর প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

শ্রেণিঅন্তর :	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
পরিসংখ্যা :	3	6	9	14	21	16	8	3

21. নীচের রাশিতথ্য থেকে প্রথম চারটি কেন্দ্রীয় ভ্রামক নির্ণয় কর এবং ভ্রামক ভিত্তিক প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক ও তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক গননা কর।

শ্রেণিঅন্তর :	0–4	4–8	8–12	12–16
পরিসংখ্যা :	10	12	15	13

3.11 গ্রন্থপঞ্জি

1. Applied General Statistics – by Croxton and Cowden, Prentice Hall, Inc, 1949
2. Statistical Methods Vol I–by N.G. Das, McGraw Hill India, 2008
3. Statistics : Theory and Practice – by R.S.N. Pillai and Bhagavati, S.Chand, 2008

একক 4 ❑ কালীন শ্রেণির বিশ্লেষণ

গঠন

4.1 উদ্দেশ্য

কালীন শ্রেণির বিশ্লেষণ অর্থনীতির বিভিন্ন চলকের অতীত আচরণ বুঝতে সাহায্য করে। অতীতের এই জ্ঞান ঐ চলকগুলির ভবিষ্যতের সম্ভাব্য পরিবর্তন ও গতি প্রকৃতি সম্পর্কে একটা পূর্বাভাস দেয়। এই পূর্বাভাষ ভবিষ্যৎ পরিকল্পনাকে প্রভূত সাহায্য করে।

কালীন শ্রেণির বিশ্লেষণের সাহায্যে কোনো পরিকল্পিত কার্যক্রমের প্রত্যাশিত ফলের সঙ্গে প্রকৃত ফলের তুলনা করা সম্ভব। প্রত্যাশিত ও প্রকৃত ফলের মধ্যে পার্থক্য ভবিষ্যৎ পরিকল্পনাকে আরও সমৃদ্ধ করে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যায় যে কোনো দেশের কেন্দ্রীয় ব্যাঙ্ক মোট ঋণের পরিমাণ ও খোলা বাজারের কারবারের মধ্যে সম্পর্ক বিশ্লেষণ করে ভবিষ্যৎ কর্মপন্থ স্থির করে। দেশের সরকার পরিকল্পিত বিনিয়োগ ও জাতীয় আয়বৃদ্ধির সম্পর্ক অনুসন্ধান করে বাজেটে পরিবর্তন আনে। এ সবই কালীন শ্রেণির বিশ্লেষণের মাধ্যমে সম্ভব হয়।

4.2 প্রস্তাবনা

কোনো একটি চলকের বিভিন্ন সময়ের মান সময়ের সাপেক্ষে যেভাবে পরিবর্তিত হয় সেই রাশিতথ্য যদি ছক কাগজে উপস্থাপিত করা যায় তবে কালীন শ্রেণির রাশিতথ্য পাওয়া যায়। অনুভূমিক অক্ষে সময় (t) এবং উল্লম্ব অক্ষে চলকটির বিভিন্ন সময়ের মান (y_t) উপস্থাপিত করা হয়। এই কালীন শ্রেণির রাশিতথ্য ঐ চলকের সময়ের সাপেক্ষে পরিবর্তনের যে প্রবণতা সূচিত করে সেটিই এই বিশ্লেষণের মূল বিষয়। এখন ঐ প্রবণতার কারণ অনুসন্ধানের মধ্যে দিয়ে গবেষণার কাজের অগ্রগতি সম্ভব হয়। সময় বলতে দিন, সপ্তাহ, মাস, বছর ইত্যাদি হতে পারে। সময়ের সাপেক্ষে উৎপাদন, বিক্রয়, মুনাফা, আমদানি, রপ্তানী, বিনিয়োগ ও আয় ইত্যাদি কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যের উদাহরণ।

4.3 কালীন শ্রেণির উপাদানসমূহ

ক্লাসিকাল পদ্ধতি অনুযায়ী কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যের উত্থান-পতন প্রধানত চারটি মৌলিক পরিবর্তনের জন্য হয়ে থাকে। ঐ চারটি মৌলিক পরিবর্তনকে কালীন শ্রেণির চারটি উপাদান বলা হয়। এগুলি হল—

(i) দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা বা প্রবণতা (T_t) (Secular Trend or Trend)

(ii) মরসুমী পরিবর্তন (S_t) (Seasonal Variation)

(iii) বৃত্তাকার পরিবর্তন বা বৃত্তাকার উত্থান-পতন (C_t) (Cyclical Variation or Cyclical Fluctuations)

(iv) অনিয়মিত বা এলোমেলো পরিবর্তন (I_t) (Irregular or Random Movements)

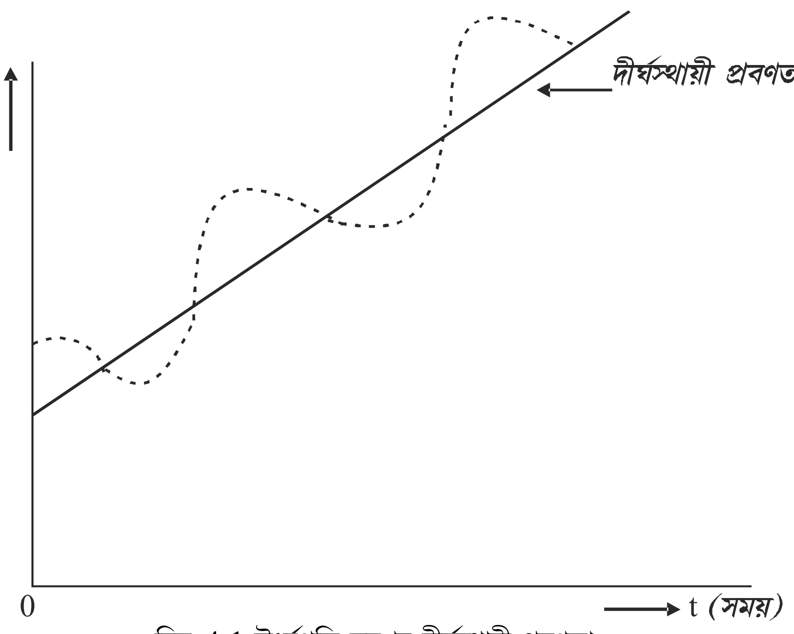
এখন কোনো কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যের উত্থান-পতন এই চারটি উপাদানের সম্মিলিত প্রভাবের জন্য হয়ে থাকে। কোনো একটি রাশিতথ্যের মূল চলকের মান (y_t) কে উপরোক্ত চারটি উপাদানের গুণফল (Product model) অথবা যোগফল (additive model) হিসাবে ধরা হয়।

অর্থাৎ $y_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$ গুণমূলক মডেল (Product Model)

অথবা, $y_t = T_t + S_t + C_t + I_t$ সমষ্টিমূলক মডেল (Additive Model)

(i) দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা বা প্রবণতা (T_t) (Secular Trend or Trend)

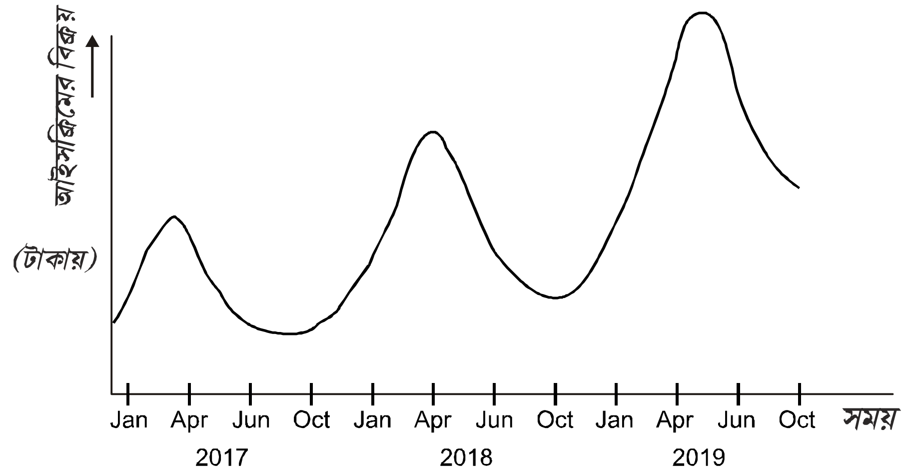
কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যের উত্থান-পতনের মধ্যে সময়ের সাথে সাথে একটা দীর্ঘমেয়াদী প্রবণতা লক্ষ করা যায়। এই প্রবণতাকে দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা বা প্রবণতা বলা হয়। এই প্রবণতা কখনও ঊর্ধ্বমুখী হয় আবার কোনো কোনো ক্ষেত্রে নিম্নমুখী হয়। রাশিতথ্যের ঊর্ধ্বগতি প্রবণতা সাধারণত জনসংখ্যা বৃদ্ধি, দূষণের মাত্রা, প্রযুক্তিগত পরিবর্তন, জাতীয় আয়ের পরিবর্তন ইত্যাদির মধ্যে লক্ষ্য করা যায়। নিম্নগতি প্রবণতা দেখা যায় মানুষের মৃত্যুর হারে, পুরাতন অপ্রচলিত ফ্যাশনের পোষাকসমূহের চাহিদা ইত্যাদি।



চিত্র 4·1 উর্ধ্বগতি সম্পন্ন দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা

(ii) মরসুমী পরিবর্তন (Seasonal Variation)

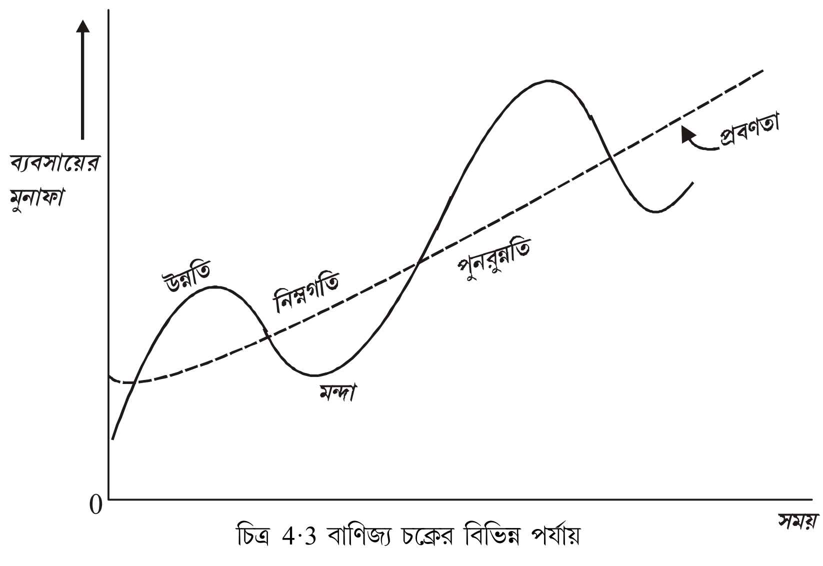
আবহাওয়া ও জলবায়ুর অবস্থা বা পরিবর্তন, মানুষের রুচি পছন্দ, ধর্মীয় উৎসব ইত্যাদির কারণে একটা নির্দিষ্ট সময়ের ব্যবধানে পর্যায়ক্রমে নিয়মিত রাশিতথ্যের উঠানামাকে মরসুমী বা ঋতুনির্ভর পরিবর্তন বলা হয়। যেমন গ্রীষ্মকালে আইসক্রিমের চাহিদা ও শীতকালে কফির চাহিদা বৃদ্ধি অপরপক্ষে শীতকালে আইসক্রিমের চাহিদা ও গ্রীষ্মকালে কফির চাহিদা হ্রাস মরসুমী পরিবর্তনের প্রকৃষ্ট উদাহরণ।



চিত্র 4·2 আইসক্রিমের বিক্রয়ের মরসুমী পরিবর্তন

(iii) বৃত্তাকার পরিবর্তন বা বৃত্তাকার উত্থান-পতন (Cyclical Variation or Cyclical Fluctuation)

বৃত্তাকার পরিবর্তন মরসুমী পরিবর্তন থেকে আলাদা। মরসুমী পরিবর্তনের সময়কাল একবছর কিন্তু বৃত্তাকার পরিবর্তনের সময়কাল একবছরের বেশি কিন্তু সবসময় এই পরিবর্তন নিয়মিত নয়। ব্যবসায়ে



চিত্র 4·3 বাণিজ্য চক্রের বিভিন্ন পর্যায়

তেজীভাব এবং মন্দাভাব পরপরই আসে কিন্তু তার সময়কাল একবছর নয়—একবছরের বেশি এবং সবসময় নিয়মিত নয় কিছুটা অনিয়মিত। ব্যবসায়ের এই উত্থান-পতনকে বাণিজ্য চক্র (business cycle) বলে। একটি পূর্ণচক্রের চারটি পর্যায় (Plase) আছে : (ক) উন্নতি (prosperity) (খ) নিম্নগতি (recession) (গ) মন্দা (depression) (ঘ) পুনরুন্নতি (recovery)। এই উত্থান-পতন এক চক্র থেকে অন্য চক্রে আলাদা হতে পারে। বাণিজ্য চক্রের উত্থান-পতনের তীব্রতা একটি শীর্ষবিন্দু (Boom) ও তার আগের সর্বনিম্ন বিন্দুর (trough) মধ্যে উচ্চতার পার্থক্যের দ্বারা মাপা হয়।

(iv) অনিয়মিত বা এলামেলো পরিবর্তন (Irragular or Random movements)

যে সমস্ত পরিবর্তনের কোনো নিশ্চিত পূর্বাভাস করা যায় না সেগুলিকেই অনিয়মিত পরিবর্তন বলা হয়। যেমন যুদ্ধ বিগ্রহ, ধর্মঘট, ভূমিকম্প, দুর্ভিক্ষ, বন্যা, মহামারী, ঝড়ঝঞ্ঝা ইত্যাদি। প্রবণতা, মরসুমী পরিবর্তন ও বৃত্তাকার উত্থান-পতন ব্যতিরেকে যাবতীয় পরিবর্তনই অনিয়মিত পরিবর্তনের মধ্যে পড়ে। এই পরিবর্তন কখন হবে তা বলা মুশকিল।

চিত্র 4·4 অনিয়মিত পরিবর্তনের রূপরেখা

4.4 প্রবণতার পরিমাপ

কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যের গতিপ্রকৃতির প্রবণতা পরিমাপ করার জন্য চারটি পদ্ধতি আছে। পদ্ধতিগুলি হল :

(i) মুক্তহস্ত লৈখিক পদ্ধতি

(ii) অর্ধগড় পদ্ধতি

(iii) গতিশীল গড় পদ্ধতি

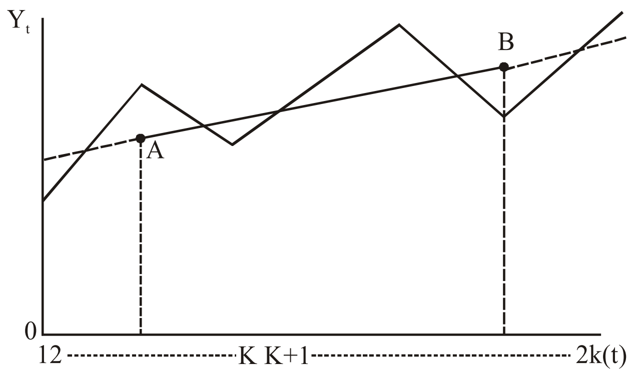
(iv) লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি

4.4.1 মুক্তহস্ত লৈখিক পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে একটি ছক কাগজে কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যগুলি (অর্থাৎ y_t) উলম্ব অক্ষ বরাবর ও সময় (t) কে অনুভূমিক অক্ষ বরাবর পরিমাপ করা হয় ও বিন্দু হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। এরপর ঐ বিন্দুগুলির যথাসম্ভব সান্নিধ্য বজায় রেখে মুক্ত হস্তে সরলরেখা অথবা বক্ররেখা অঙ্কন করা হয়। লক্ষ রাখা হয় যাতে এই প্রবণতা রেখাটির উপরে ও নীচে কম বেশি সমান দূরত্বে যেন সমান সংখ্যক বিন্দু থাকে। এখন রেখাটি উর্ধ্বাভিমুখী হলে উর্ধ্বগতি প্রবণতা বোঝায় এবং নিম্নাভিমুখী হলে নিম্নগতির প্রবণতা বোঝায়। এটি প্রবণতা পরিমাপের সর্বাপেক্ষা সহজ পদ্ধতি।

4.4.2 অর্ধগড় পদ্ধতি

ধরা যাক কালীন শ্রেণির 2K সংখ্যক বছরের জন্য মানগুলি হল $y_1, y_2, \ldots, y_{2k}$ এখন এই মানগুলিকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করলে পাওয়া যায় $y_1, y_2, \ldots y_k$ ও $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots y_{2k}$. এখন প্রথম অংশের মানগুলির গড় $\left[\dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_k}{k}\right]$ কে প্রথম k বছরের ঠিক মাঝখানে স্থাপন করলে এবং শেষ k বছরের মানগুলির গড় $\left[\dfrac{y_{k+1}, + y_{k+2}, \ldots, y_{2k}}{k}\right]$ কে শেষ k বছরের ঠিক মাঝখানে স্থাপন করলে দুটি আলাদা বিন্দু পাওয়া যাবে। এই বিন্দু দুটিকে একটি সরলরেখা দিয়ে যোগ করলে ঐ রাশিতথ্যের প্রবণতা রেখা হিসাবে এই সরলরেখাটিকে চিহ্নিত করা হবে। অনুভূমিক অক্ষ থেকে রেখাটির লম্ব দূরত্বের মাধ্যমে কোনো নির্দ্দিষ্ট সময়ের জন্য প্রবণতার মান নির্ণয় করা হয়। অবশ্য সমস্ত সময়ের প্রবণতার মান নির্ণয় সম্ভব হয় না।



চিত্র 4·5 AB অর্ধগড় পদ্ধতিতে অঙ্কিত প্রবণতা রেখা

যদি বছরের সংখ্যা অযুগ্ম হয় তবে রাশিতথ্যকে সমান দুভাগে বিভক্ত করার জন্য মধ্যস্থতে অবস্থিত বছরটিকে বাদ দেওয়া হয়। একমাত্র সরলরৈখিক প্রবণতার ক্ষেত্রেই এই পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়।

4.4.3 গতিশীল গড় পদ্ধতি

গতিশীল গড় পদ্ধতিতে কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যের বৃত্তাকার উত্থান পতন দূর করে প্রবণতা নির্ণয় করা হয়। এখানে অনুমান করা হয় যে রাশিতথ্যে মরসুমী পরিবর্তন ও অনিয়মিত পরিবর্তন অনুপস্থিত। অর্থাৎ রাশিতথ্যে শুধুমাত্র প্রবণতা ও বৃত্তাকার পরিবর্তনই উপস্থিত ধরে নেওয়া হয়।

যদি গতিশীল গড়ের সময়কাল বৃত্তাকার পরিবর্তনের সময়কালের সমান অথবা তার গুণিতক হয় তবে এই পদ্ধতিতে বৃত্তাকার পরিবর্তনের প্রভাব সম্পূর্ণরূপে দূরীভূত করা সম্ভব।

এই পদ্ধতির শর্তগুলি হল :

(i) রাশিতথ্যের নিয়মিত উত্থান-পতন থাকতে হবে

(ii) এটি যোগফল মডেল অনুযায়ী হবে

(iii) বৃত্তাকার উত্থান-পতনের বিস্তার (amptitude) প্রতি চক্রে সমান হতে হবে

(iv) প্রবণতা সরলরৈখিক হতে হবে

গতিশীল গড় পদ্ধতি দুটি উদাহরণের সাহায্যে নীচে বোঝানো হল।

(ক) গতিশীল গড়ের সময়কাল যখন বিজোড় সংখ্যা :

উদাহরণ 4·1 নীচের রাশিতথ্যের সাহায্যে 3 বছরের গতিশীল গড় পদ্ধতিতে প্রবণতার মানগুলি নির্ণয় কর।

বছর	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
উৎপাদন ('০০০ টন)	2	4	5	7	8	10	13

ছকসংখ্যা : 4·1 3-বছরের গতিশীল গড় পদ্ধতিতে প্রবণতার মান নির্ণয়

বছর (1)	উৎপাদন (2)	3-বছরের গতিশীল মোট সংখ্যা (3)	3-বছরের গতিশীল গড় (4) (প্রবণতার মান)
1981	2	—	—
1982	4	2 + 4 + 5 = 11	11 ÷ 3 = 3·67
1983	5	4 + 5 + 7 = 16	16 ÷ 3 = 5·33
1984	7	5 + 7 + 8 = 20	20 ÷ 3 = 6·67
1985	8	7 + 8 + 10 = 25	25 ÷ 3 = 8·33

1986	10	8 + 10 + 13 = 31	31 ÷ 3 = 10·33
1987	13	—	—

টীকা : (i) গতিশীল গড় পদ্ধতিতে কিন্তু 1981 এবং 1987 এই দুই বছরের প্রবণতার মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

(ii) তিনটি পর পর বছরের চলকের মানের মোট সংখ্যা (3) নং স্তম্ভে লিপিবন্ধ করা হয়েছে। এই মোট সংখ্যাকে 3 দিয়ে ভাগ দিয়ে গতিশীল গড় বা প্রবণতার মান নির্ণয় করা হয়েছে।

(খ) গতিশীল গড়ের সময়কাল যখন জোড় সংখ্যা :

উদাহরণ 4·2 নীচের রাশিতথ্যের সাহায্যে 4-বছরের গতিশীল গড় পদ্ধতিতে প্রবণতার মানগুলি নির্ণয় কর।

বছর	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
বাৎসরিক বিক্রয় ('০০০০ টাকায়)	8·5	12·5	14·5	16·5	18·5	24·5	22·5

ছক সংখ্যা 4·2 4-বছরের গতিশীল গড় পদ্ধতিতে প্রবণতার মান নির্ণয়

বছর (1)	**বাৎসরিক বিক্রয়** (2)	**4-বছরের গতিশীল সমষ্টি** (3)	**4 বছরের গতিশীল গড়** (4) = (3) ÷ 4	**2-বছরের (কেন্দ্রীভূত) গতিশীল সমষ্টি** (5)	**4 বছরের কেন্দ্রীভূত গতিশীল ঝড় (প্রবণতার মান)** (6) = (5) ÷ 2
1986	8·5	–	–	–	–
1987	12·5	–	–	–	–
		52	13·0		
1988	14·5			28·5	14·25
		62	15·5		
1989	16·5			34·0	17·0
		74	18·5		
1990	18·5			39·0	19·5
		82	20·5		
1991	24·4	–	–	–	–
1992	22·5	–	–	–	–

টীকা : (i) গতিশীল গড় পদ্ধতিতে 1986, 1987, 1991 এবং 1992 তে প্রবণতার মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

(ii) 4-বছরের গতিশীল সমষ্টি 52 কে 1987 এবং 1988 এই দুই বছরের মাঝখানে স্থাপন করা হল।

একইভাবে 62, 74 এবং 82 কে দুই বছরের মাঝখানে স্থাপন করা হয়েছে। (5) নং স্তম্ভে 2-বছরের গতিশীল সমষ্টি 28·5, 34·0 এবং 39·0 কেন্দ্রীভূত করে যথাক্রমে 1988, 1989 ও 1990 র বিপরীত স্থাপন করা হয়েছে। একইভাবে (6) নং স্তম্ভে গতিশীল গড়গুলিকেও কেন্দ্রীভূত করে 1988, 1989 ও 1990 বছরের জন্য প্রবণতার মান নির্ণয় করা সম্ভব হয়েছে। জোড় সংখ্যার গতিশীল গড়-এর সময়কাল (এখানে 4-বছর) নেওয়া হলে গতিশীল সমষ্টি ও গতিশীল গড়কে কেন্দ্রীভূত করে প্রবণতার মান নির্ণয় করতে হয় নতুবা কোনো নির্দিষ্ট বছরের প্রবণতার মান নির্ণয় করা সম্ভব হয় না যেমন (4) নং স্তম্ভে গতিশীল গড় কোনো নির্দিষ্ট বছরের জন্য গণনা করা যায়নি।

*** গতিশীল গড় পদ্ধতির সুবিধা ও অসুবিধা**

এই পদ্ধতি প্রয়োগ করা খুবই সহজ। গতিশীল গড়ের সময়কাল যদি বৃত্তাকার পরিবর্তনের সময়কালের সঙ্গে সমান হয় তাহলে বাণিজ্য চক্রের উত্থান-পতন সম্পূর্ণভাবে দূর করা সম্ভব হবে এবং প্রবণতার সঠিক মান নির্ণয় করা সম্ভব হবে।

কিন্তু এই পদ্ধতিতে প্রথম দিকে এবং শেষের দিকে কিছু সময়ের প্রবণতার মান নির্ণয় করা সম্ভব হয় না। এই পদ্ধতিতে ভবিষ্যতের প্রবণতা সম্পর্কে কোনো পূর্ব অনুমান করা সম্ভব নয়। এই পদ্ধতিতে শুধুমাত্র সরল রৈখিক প্রবণতা নির্ণয় করা যায়। যদি রাশিতথ্যের বৃত্তাকার উত্থান-পতন অনিয়মিত হয় তবে গতিশীল গড়ের সময়কাল সঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় না।

4.4.4 লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে গাণিতিক রেখা নির্ধারণ

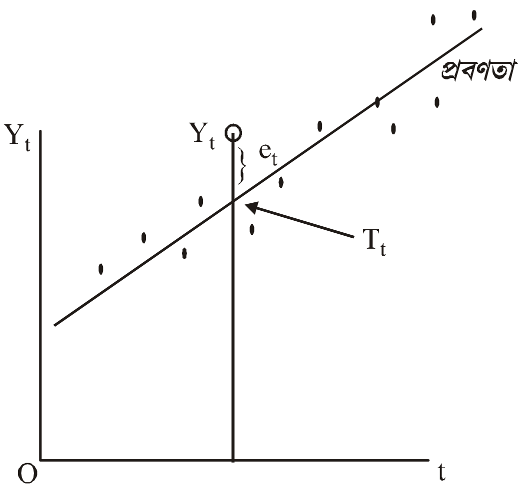
এটি প্রবণতা নির্ণয় করার জন্য সর্বাপেক্ষা যুক্তিগ্রাহ্য পদ্ধতি। এখানে রাশিতথ্যের লেখচিত্রের মাধ্যমে একটি উপযুক্ত মাত্রাযুক্ত বহুপদ অপেক্ষক (Polynomial) নির্দিষ্ট করা হয়। অতঃপর প্রদত্ত রাশিতথ্যের সাহায্যে অপেক্ষকের সঙ্গে যুক্ত নির্ণায়ক (Parameter) গুলির মান নির্ণয় করা হয়।

ধরা যাক প্রবণতা সমীকরণটি নির্ণয় করার জন্য ‘r’ তম মাত্রাযুক্ত ‘t’ এর একটি বহুপদ অপেক্ষক

$$T_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + ... + a_r t^r$$

এখানে ‘t’ বলতে সময়কে বুঝায় এবং T_t ঐ t সময়ে প্রবণতার মান ; $a_0, a_1, a_2, a_3 ..... a_r$ হল (r + 1) সংখ্যক নির্ণায়ক (Parameter) যাদের মান এই সমীকরণটি থেকে লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে নির্ণয় করতে হবে। কিন্তু ‘t’ সময়ের জন্য চলকটির প্রকৃত মান হল y_t. সুতরাং $(y_t - T_t) = e_t$ কে বলা হয় প্রদত্ত মান ও প্রবণতা মানের মধ্যে পার্থক্য বা গণনার ত্রুটি (error of estimation)

লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে এই গণনার ত্রুটির বর্গের যোগফলকে সর্বনিম্নকরণ (minimise) করা হয়। অর্থাৎ $\sum_{t=0}^{r} e_t^2 = \sum_{t=0}^{r} (y_t - T_t)^2$ কে সর্বনিম্ন করা হয়। ফলে প্রস্তাবিত সমীকরণটি প্রদত্ত রাশিতথ্যের ভিত্তিতে যথাসম্ভব মানানসই (best fit) হয়। সর্বনিম্নকরণের প্রথম ক্রমের শর্ত (First Order Condition) হল



চিত্র 4·6 গণনার ত্রুটি

$$\frac{\delta \sum e_t^2}{\delta a_t} = 0 \text{ যখন } t = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots r$$

এগুলি সমাধান করে $(r + 1)$ সংখ্যক মৌল সমীকরণ (Normal equation) পাওয়া যাবে। এই মৌল সমীকরণগুলি হল :

$$\sum y = na_o + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 + \ldots\ldots + a_r \sum t^r$$

$$\sum ty = a_o \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 + \ldots\ldots a_r \sum t^{r+1}$$

$$\sum t^2 y = a_o \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 + \ldots\ldots a_r \sum t^{r+2}$$

....

....

$$\sum t^r y = a_o \sum t^r + a_1 \sum t^{r+1} + a_2 \sum t^{r+2} + \ldots\ldots + a_r \sum t^{2r}$$

এখানে n হল সময়কালের (বছরের) সংখ্যা। এখন এই মৌল সমীকরণগুলি সমাধান করে a_o, a_1, ..., a_r এর মানগুলি পাওয়া যাবে। এই নির্ণয়কের (Parameter) মানগুলি

$$T_t = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots\ldots + a_r t^r$$

সমীকরণে বসিয়ে সবথেকে মানানসই (best fit) সমীকরণটি পাওয়া যাবে।

4.4.4.1 সর্ব্বোত্তম মানানসই সরলরেখা

ধরা যাক $T_t = a_o + a_1 t$ হল এক মাত্রা যুক্ত বহুপদ অপেক্ষক বা একটি সরলরৈখিক অপেক্ষক। এখানে নির্ণায়ক (Parameter) হল দুটি a_o এবং a_1.

এবার লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি ব্যবহার করলে অর্থাৎ

$$\sum_t e_t^2 = \sum_t (y_t - T_t)^2 = \sum_t (y_t - a_o - a_1 t)^2$$ কে a_o এবং a_1

এর সাপেক্ষে সর্বনিম্নকরণ করলে আমরা প্রথম ক্রমের শর্ত অনুযায়ী পাই

$$\frac{\delta \sum e_t^2}{\delta a_o} = 2\sum(y - a_o - a_1 t)(-1) = 0 \text{ অথবা } \sum(y - a_o - a_1 t) = 0$$

$$\text{অথবা } \sum y = na_o + a_1 \sum t.....(1)$$

$$\text{এবং } \frac{\delta \sum e_t^2}{\delta a_1} = 2\sum(y - a_o - a_1 t)(-t) = 0 \text{ অথবা } \sum(y - a_o - a_1 t)(t) = 0$$

$$\text{অথবা } \sum ty = a_o \sum t + a_1 \sum t^2......(2)$$

(1) নং ও (2) নং সমীকরণ দুটিকে মৌল সমীকরণ (Normal equations) বলা হয়। সমীকরণ দুটির সমাধান করলে a_o এবং a_1 এর মান পাওয়া যাবে।

a_o ও a_1 এর এই মান $T_t = a_o + a_1 t$ সমীকরণে বসিয়ে আমরা প্রবণতা সরলরেখাটি পেতে পারি।

উদাহরণ : 4·3 কোন শহরের গড় বাৎসরিক মৃত্যু সংখ্যা নীচে দেওয়া হল’। লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে প্রবণতার একটি মানানসই সরলরেখা নির্ণয় কর। প্রবণতার মানগুলি ছকের সাহায্যে প্রকাশ কর ও 1962 সালে মৃত্যু সংখ্যার একটা অনুমান লিপিবদ্ধ কর।

বছর	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
মৃত্যু সংখ্যা বাৎসরিক গড়	940	912	1055	1002	977	961	888

সমাধান : এখানে বছরের সংখ্যা $n = 7$ অর্থাৎ বিজোড় সংখ্যা। সুতরাং মূলবিন্দু হবে 1957 এবং সময়ের (t) একক হবে 1 বছর।

ছকসংখ্যা : 4·3 সরলরৈখিক প্রবণতার গণনা

বছর (1)	**(t) সময় (2)**	**মৃত্যুসংখ্যা (y) (3)**	**t^2 (4)**	**ty (5)**	**প্রবণতার মান (6)**
1954	–3	940	9	–2820	976·72
1955	–2	912	4	–1824	971·86
1956	–1	1055	1	–1055	967·00
1957	0	1002	0	0	962·14
1958	1	977	1	977	957·28
1959	2	961	4	1922	971·86
1960	3	888	9	2664	976·72
মোট	$\sum t = 0$	$\sum y = 6735$	$\sum t^2 = 28$	$\sum ty = -136$	—

ধরা যাক প্রবণতার সরলরেখাটি $y = a + bt$ .... (1)

মৌল সমীকরণগুলি হবে

$$\sum y = na + b\sum t ....(2)$$

$$\sum ty = a\sum t + b\sum t^2 ....(3)$$

ছক 4·3 থেকে (2) ও (3) নং সমীকরণে মানগুলি বসিয়ে পাই

$6735 = 7a + b \times o$ অথবা $7a = 6735$

$-136 = a \times o + b \times 28$ অথবা $28b = -136$

সুতরাং $a = \frac{6735}{7} = 962{\cdot}14$

এবং $b = \frac{-136}{28} = -4{\cdot}86$

(1) নং সমীকরণে a এবং b এর মান বসিয়ে পাই

$$y = 962{\cdot}14 - 4{\cdot}86t ......(4)$$

এটিই হল প্রবণতার সমীকরণ। t এর বিভিন্ন মান বসিয়ে প্রবণতার মান লিপিবদ্ধ করা হয়েছে ছক 4·3 এর (6) নং স্তম্ভে।

আবার 1962 সালের জন্য মান হবে 5 কারণ 1957 মূলবিন্দু হওয়ায় 1957 এর মান হবে ‘O’। এইভাবে গণনা করলে 1962 = 5 হবে।

এবার (4) নং সমীকরণে t = 5 বসালে পাই

$$y = 962{\cdot}14 - 4{\cdot}86 \times 5$$

$$= 962{\cdot}14 - 24{\cdot}3 = 937{\cdot}84$$

4.4.4.2 অধিবৃত্তাকার প্রবণতা

অধিবৃত্তাকার প্রবণতার ক্ষেত্রে সমীকরণটি হবে

$$T_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

অর্থাৎ t এর দ্বিমাত্রাযুক্ত অপেক্ষক (second degree polynomial in t)

লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতির সাহায্যে $\sum e_t^2 = \sum (y_t - T_b)^2 = \left(y_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2\right)^2$ কে

সর্বনিম্নকরণ করতে হবে। প্রথম ক্রমের শর্ত থেকে তিনটি মৌল সমীকরণ পাওয়া যায় :

$$\sum y = na_o + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 .....(1)$$

$$\sum t_y = a_o \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 .....(2)$$

$$\sum t^2{}_y = a_o \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 .....(3)$$

(1), (2) ও (3) সমীকরণ তিনটি সমাধান করলে a_o, a_1 এবং a_2 র মান পাওয়া যাবে। ঐ মানগুলি $T_t = a_o + a_1 t + a_2 t^2$ প্রবণতার সমীকরণে বসালে প্রবণতার একটি মানানসই অধিবৃত্তাকার রেখা পাওয়া যাবে।

উদাহরণ : 4·4 নীচের রাশিতথ্যের সাহায্যে অধিবৃত্তাকার প্রবণতা গণনা কর। 1997 সালে ঐ প্রবণতার মান অনুমান কর।

বছর	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
উৎপাদন	3937	3905	3730	3521	3350	3476	3575

এখানে বছর সংখ্যা n = 7 অর্থাৎ বিজোড় সংখ্যা। সুতরাং মধ্যেখানের বছর 1992 কে মূলবিন্দু এবং t এর একক এক বছর ধরা হয়েছে।

ছক সংখ্যা : 4·4 অধিবৃত্তাকার প্রবণতা রেখার গণনা

বছর	t	উৎপাদন (y)	t^2	t^3	t^4	t_y	$t^2{}_y$
1989	–3	3937	9	27	81	–11811	35433
1990	–2	3905	4	–8	16	–7810	15620
1991	–1	3730	1	–1	1	–3730	3730
1992	0	3521	0	0	0	0	0
1993	1	3350	1	1	1	3350	3350
1994	2	3476	4	8	16	6952	13904
1995	3	3575	9	27	81	10725	32175
মোট	0 $=\sum t$	25494 $=\sum y$	28 $=\sum t^2$	0 $=\sum t^3$	196 $=\sum t^4$	–2324 $=\sum t_y$	104212 $=\sum t^2 y$

অধিবৃত্তাকার সমীকরণটি ধরা যাক $y = a + bt + ct^2 .....(1)$

মৌল সমীকরণগুলি হবে : $\sum y = na + b\sum t + c\sum t^2$

$$\sum ty = a\sum t + b\sum t^2 + c\sum t^3$$

$$\sum t^2 y = a\sum t^2 + b\sum t^3 + c\sum t^4$$

ছকের ফলাফলগুলি মৌল সমীকরণগুলিতে বসিয়ে পাই

$25494 = 7a + b \times o + 28c$ অথবা, $7a + 28c = 25494$

$-2324 = a \times o + 28b + c \times o$ অথবা, $28b = -2324$

$104212 = 28a + b \times o + 196c$ অথবা, $28a + 196c = 104212$

উপরের সমীকরণগুলির সমাধান থেকে পাই

$a = 3535{\cdot}53,\ b = -83,\ c = 26{\cdot}6$

(1) নং সমীকরণ থেকে অধিবৃত্তাকার প্রবণতা রেখাটি $y = 3535{\cdot}53 - 83t + 26{\cdot}6t^2 .....(2)$

এবার মূলবিন্দু 1992 হলে 1997 জন্য t = 5 হবে।

সুতরাং (2) নং সমীকরণে t = 5 বসিয়ে প্রবণতার (b) মান পাই y = 3785·53

4.4.4.3 এক্সপোনেনসিয়াল প্রবণতা

এক্সপোনেনসিয়াল প্রবণতার সমীকরণ ধরা যাক $T_t = ab^t$ অথবা $y = ab^t$

এখন দুদিকে log নিলে পাই $\log y = \log a + t \log b$

যদি ধরা যায় $\log y = Y$, $\log a = A$ এবং $\log b = B$ তাহলে সমীকরণটি হবে Y = A + Bt যা একটি সরলরেখার সমীকরণ।

এবার লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে মৌল সমীকরণগুলি হবে

$$\sum Y = nA + B\sum t ....(1)$$

এবং $$\sum tY = A\sum t + B\sum t^2 ....(2)$$

এখন প্রদত্ত রাশিতথ্যের উপর ভিত্তি করে A ও B এর মান (1) ও (2) নং সমীকরণের সমাধানের মাধ্যমে পাওয়া যায়। তার থেকে a ও b এর মান নির্ণয় করা সম্ভব কারণ a = Anti log A এবং b = Anti log B.

এই a ও b এর মান $T_t = ab^t$ এই সমীকরণে বসালে সর্বোত্তম এক্সপোনেনসিয়াল প্রবণতা নির্দেশক রেখার সমীকরণ।

উদাহরণ : 4·5 নীচে কোন রাজ্যের জনসংখ্যার তথ্য 10 বছর অন্তর দেওয়া হল।

বছর	1941	1951	1961	1971	1981
জনসংখ্যা (কোটিতে)	31·9	36·1	43·6	54·7	68·6

একটি প্রবণতার এক্সপোনেনসিয়াল রেখা নির্ণয় করে 1991 সালে জনসংখ্যার অনুমান স্থির কর।

ছকসংখ্যা : 4·5 এক্সপোনেনসিয়াল প্রবণতা রেখা গণনা

বছর	t	জনসংখ্যা (কোটিতে) (y_t)	$\log y_t$	$t \log y_t$	t^2
1941	–2	31·9	1·5038	–3·0076	4
1951	–1	36·1	1·5575	–1·5575	1
1961	0	43·6	1·6395	0	0
1971	1	54·7	1·7380	1·7380	1
1981	2	68·6	1·8363	3·6726	4
মোট	0	–	8·2751	0·8455	10

মৌল সমীকরণ দুটি হল $\sum \log y_t = 5A + B\sum t$

এবং $\sum t \log y_t = \mathrm{A}\sum t + \mathrm{B}\sum t^2$

ছক থেকে মানগুলি মৌল সমীকরণে বসিয়ে পাই

$8{\cdot}2751 = 5\mathrm{A}$ এবং $0{\cdot}8455 = 10\ \mathrm{B}$

$\therefore\ A = 1.655;\ \mathrm{B} = 0.0845$

$\therefore\ a = \text{Anti log } (1{\cdot}655) = 45{\cdot}19$

$b = \text{Anti log } (0{\cdot}0845) = 1{\cdot}214$

সুতরাং প্রবণতার সমীকরণটি হবে

$\mathrm{T}_t = 45{\cdot}19 \times (1{\cdot}214)^t$

1991 বছরের জন্য t এর মান হবে 3

$\therefore\ \log \mathrm{T}_3 = 1{\cdot}655\ + 0{\cdot}0845\ (3) = 1{\cdot}9085$

$\therefore$ 1991 সালে জনসংখ্যার অনুমান হবে

Anti log $(1{\cdot}9085) = 81{\cdot}0$ (কোটিতে)

4.4.5 বার্ষিক পরিসংখ্যান থেকে মাসিক প্রবণতা নির্ণয়

প্রবণতা রেখা থেকে অনেক সময় বাৎসরিকের বদলে মাসিক বা চতুর্থক প্রবণতার মান নির্ণয় করতে হয়। কালীন শ্রেণির এই বাৎসরিক রাশিতথ্য দুরকমভাবে দেওয়া হয় :

(i) প্রতি বছরের মাসিক গড় মান দেওয়া হয় আবার কখনও

(ii) বার্ষিক যোগফল হিসাবেও রাশিতথ্য দেওয়া থাকে।

এখন বছরের সংখ্যা কখনও জোড় বা বিজোড় সংখ্যার হতে পারে। এই জোড় বা বিজোড় সংখ্যার উপর নির্ভর করে প্রবণতা সমীকরণটি কি রকম হবে।

4.4.5.1 প্রদত্ত বিজোড় সংখ্যক বছরের ক্ষেত্রে মাসিক গড়সমূহ

বিজোড় সংখ্যক বছরের ক্ষেত্রে একেবারে মাঝখানের বছরটিকে মূলবিন্দু ধরা হয় এবং t এর একক ধরা হয় 1 বছর। মাসিক গড়ের উপর ভিত্তি করে বাৎসরিক প্রবণতা সমীকরণটি ধরা যাক $y = a_o + a_1 t$ এখন মাসিক প্রবণতা সমীকরণ স্থির করার সময়ে মাঝখানের বছরটিরও মাঝখানের সময় হল 30 শে জুন ঐটিই হবে মূলবিন্দু। এখন উপরোক্ত সমীকরণটির ঢাল (slope) a_1 প্রতি একক t এর 12 মাসের বৃদ্ধিকে বোঝায় কেননা $y = a_o + a_1 t$ হল বাৎসরিক প্রবণতা। তাই মাসিক প্রবণতা বৃদ্ধি (monthly trend increment) হবে $\frac{a_1}{12}$ এবং মাসিক প্রবণতা সমীকরণটি $y = a_o + \frac{a_1}{12}\cdot t$, যখন মূলবিন্দু = 30 শে জুন ও t এর একক = 1 মাস।

এই প্রবণতা রেখাটি ব্যবহার করার জন্য যদি কোনো নির্দিষ্ট মাসকে মূলবিন্দু হিসাবে নেওয়া হয় তবে ঐ মাসের মাঝখানের দিনটিকেই মূলবিন্দু ধরা হবে। যেমন, জুলাই মাসকে মাঝখানের বছরটির মূলবিন্দু হিসাবে ধরা হলে মূলবিন্দুটি 30 শে জুন থেকে সরে যায়, তখন মূলবিন্দুটি ধরা হবে 15 ই জুলাই। অর্থাৎ মূলবিন্দু $\frac{1}{2}$ একক সামনের দিকে সরে যাবে সেজন্য t এর জায়গায় $\left(t+\frac{1}{2}\right)$ ধরতে হবে। মাসিক প্রবণতা রেখার সমীকরণগুলি হবে $y = a_o + \frac{a_1}{12}\left(t+\frac{1}{2}\right)$

যখন মূলবিন্দু হবে মাঝখানের বছরটির জুলাই মাস, t এর একক 1 মাস।

একইভাবে যদি মূলবিন্দু $\frac{1}{2}$ একক পেছনের দিকে সরে যায় তখন t এর বদলে $\left(t-\frac{1}{2}\right)$ ধরতে হবে ও মাসিক প্রবণতার সমীকরণটি হবে $y = a_o + \frac{a_1}{12}\left(t-\frac{1}{2}\right)$

যখন মূলবিন্দু হবে মাঝখানের বছরের জুনমাস এবং t এর একক হবে 1 মাস।

4.4.5.2 প্রদত্ত জোড় সংখ্যক বছরের ক্ষেত্রে মাসিক গড়সমূহ

জোড় সংখ্যক বছরের ক্ষেত্রে মাঝখানের বছরটি একটি বছর নয়, দুটি বছর। অর্থাৎ মূলবিন্দুটি ঐ দুই বছরের মাঝামাঝি সময়কে ধরা হয়। t এর একক সেক্ষেত্রে হয় 6 মাস।

ধরা যাক, $y = a_o + a_1 t$ হল মাসিক প্রবণতা রেখার সমীকরণ যখন মূলবিন্দু ঐ দুই মাঝখানের বছরের ~ä, þ yöï û yGþ.yöï î ü" ˜ !Ýþx í ýæ 31 শে ডিসেম্বর এবং t এর একক হবে 6 মাস। রেখাটির ঢাল a_1 প্রতি একক t এর গড় মাসিক বৃদ্ধিকে বোঝায় (6 মাসের জন্য) সুতরাং মাসিক প্রবণতা বৃদ্ধি হল $\frac{a_1}{6}$ এবং মাসিক প্রবণতার সমীকরণটি হবে $y = a_o + \frac{a_1}{6} \cdot t$

যখন মূলবিন্দু হল 31 শে ডিসেম্বর আর t এর একক = 1 মাস।

যদি মূলবিন্দু $\frac{1}{2}$ একক সামনে সরানো হয় তবে মূলবিন্দু হবে 31 শে ডিসেম্বর থেকে সামনের দিকে সরে 15th Jan হবে। t এর জায়গায় বসাতে হবে $\left(t+\frac{1}{2}\right)$ সুতরাং মাসিক প্রবণতার সমীকরণটি হবে

$$y = a_o + \frac{a_1}{6}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

যখন মূলবিন্দু জানুয়ারি মাস ও t এর একক = 1 মাস।

একইভাবে যদি মূলবিন্দু $\frac{1}{2}$ একক পিছিয়ে আনা হয় তাহলে t এর জায়গায় $\left(t-\frac{1}{2}\right)$ বসাতে হবে এবং মাসিক প্রবণতা সমীকরণটি হবে $y = a_o + \frac{a_1}{6}\left(t-\frac{1}{2}\right)$ যখন মূলবিন্দু হবে ডিসেম্বর মাস এবং t এর একক = 1 মাস।

4.4.5.3 বার্ষিক যোগফলগুলি দেওয়া থাকলে মাসিক প্রবণতা

ধরা যাক বার্ষিক রাশিতথ্যের উপর ভিত্তি করে প্রবণতা রেখার সমীকরণ $y = \mathrm{A}_o + \mathrm{A}_1 t$ (বছরের সংখ্যা জোড় বা বিজোড় হতে পারে) যখন t এর মূলবিন্দু কোনো নির্দিষ্ট বছর (ধরা যাক 2000) এবং t এর একক এক বছর।

এখন বার্ষিক মানগুলির যোগফল থেকে মাসিক গড় মানগুলি গণনা করা হয়। এক্ষেত্রে মাসিক প্রবণতা রেখার সমীকরণ হবে, $y = \frac{\mathrm{A}_o}{12} + \frac{\mathrm{A}_1}{12} \cdot \frac{t}{12}$ (যখন বছরের সংখ্যা বিজোড়)

এখানে মূলবিন্দু 2000 সালের মাঝখানে হবে। কিন্তু মাসিক প্রবণতা নির্দেশ করার জন্য কোনো মাসের মাঝামাঝি সময়কে ধরতে হবে। হয় এই সময় হবে 15 ই জুলাই 2000 অথবা 15 ই জুন 2000 ধরতে হবে। 15 ই জুলাই হলে t এর জায়গায় $\left(t+\frac{1}{2}\right)$ ধরতে হবে। আর যদি 15 ই জুন ধরা হয় তবে t এর জায়গায় $\left(t-\frac{1}{2}\right)$ লিখতে হবে। সুতরাং মাসিক প্রবণতা রেখার সমীকরণ হবে :

$y = \frac{\mathrm{A}_o}{12} + \frac{\mathrm{A}_1}{12} \cdot \frac{1}{12}\left(t+\frac{1}{2}\right)$ যখন মূলবিন্দু 15 ই জুলাই ও একক = 1 মাস

অথবা, $y = \frac{\mathrm{A}_o}{12} + \frac{\mathrm{A}_1}{12} \cdot \frac{1}{12}\left(t-\frac{1}{2}\right)$ যখন মূলবিন্দু 15 ই জুন ও একক = 1 মাস

একই ভাবে গণনা করলে চতুর্থক প্রবণতা রেখার সমীকরণ হবে :

$y = \frac{\mathrm{A}_o}{4} + \frac{\mathrm{A}_1}{4} \cdot \frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}\right)$ যখন মূলবিন্দু 2000 এর তৃতীয় চতুর্থক এবং একক = 1 চতুর্থক

অথবা, $y = \frac{\mathrm{A}_o}{4} + \frac{\mathrm{A}_1}{4} \cdot \frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\right)$ যখন মূলবিন্দু 2000 এর দ্বিতীয় চতুর্থক এবং একক = 1 চতুর্থক

একই ভাবে গণনা করে অর্ধেক বছরের প্রবণতা রেখার সমীকরণ হবে :

$y=\frac{A_o}{2}+\frac{A_1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)$ যখন মূলবিন্দু 2000 সালের দ্বিতীয় অর্ধে এবং একক $=\frac{1}{2}$ বছর

অথবা, $y=\frac{A_o}{2}+\frac{A_1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)$ যখন মূলবিন্দু 2000 সালের প্রথম অর্ধে থাকবে এবং একক $=\frac{1}{2}$ বছর

যখন বছরের সংখ্যা জোড় সংখ্যায় থাকে তখন বার্ষিক রাশিতথ্যের উপর ভিত্তি করে বার্ষিক প্রবণতা রেখার সমীকরণ ধরা যাক $y=A_o+A_1t$ যখন t এর মূলবিন্দু 2003 ও 2004 সালের (ধরা যাক) মাঝখানে এবং একক $=\frac{1}{2}$ বছর

আগের মতই t এর একক 6 মাস এবং মূলবিন্দু 2003 সালের 30 শে ডিসেম্বর ধরে নিয়ে বার্ষিক মানগুলির যোগফল থেকে মাসিক গড় মান গণনা করে যে মাসিক প্রবণতা রেখা নির্ণয় করা হয় তার সমীকরণ হবে $y=\frac{A_o}{12}+\frac{A_1}{12}\cdot\frac{t}{6}$

কিন্তু মাসিক প্রবণতা রেখার মূলবিন্দু কোনো মাসের মাঝখানে হওয়া উচিত তাই হয় 15ই জানুয়ারি 2004 এ মূলবিন্দু সরাতে হবে। সেক্ষেত্রে সমীকরণটি হবে

$y=\frac{A_o}{12}+\frac{A_1}{12}\cdot\frac{1}{6}\left(t+\frac{1}{2}\right)$, মূলবিন্দু = 15 ই জানুয়ারি একক = 1 মাস

অথবা মূলবিন্দু আগের মাসের মাঝখানে সরাতে হবে। সেক্ষেত্রে সমীকরণটি হবে

$$y=\frac{A_o}{12}+\frac{A_1}{12}\cdot\frac{1}{6}\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

যখন মূলবিন্দু হবে 15 ই ডিসেম্বর 2003 এবং একক = 1 মাস

চতুর্থক প্রবণতা সমীকরণটি হবে

$y=\frac{A_o}{4}+\frac{A_1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)$ অথবা $y=\frac{A_o}{4}+\frac{A_1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)$

যখন প্রথম ক্ষেত্রে মূলবিন্দু 2004 এর প্রথম চতুর্থক এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মূলবিন্দু 2003 সালের শেষ চতুর্থকে থাকবে। উভয় ক্ষেত্রেই একক = 1 মাস।

অর্ধেক বছরের প্রবণতার সমীকরণ হবে

$$y = \frac{A_o}{2} + \frac{A_1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right) \text{ অথবা } y = \frac{A_o}{2} + \frac{A_1}{2} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

যখন প্রথম ক্ষেত্রে মূলবিন্দু 2004 সালের প্রথম অর্ধ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে 2003 সালের দ্বিতীয় অর্ধে থাকবে। উভয় ক্ষেত্রেই একক = $\frac{1}{2}$ বছর।

উদাহরণ : 4·6 বাৎসরিক যোগফলের রাশিতথ্য ভিত্তি করে বাৎসরিক প্রবণতা রেখাটির সমীকরণ নীচে দেওয়া হল

$$y_t = 2036 + 56t$$

যখন মূলবিন্দু 2010 সালে এবং একক = 1 বছর।

চতুর্থকের প্রবণতা সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : বার্ষিক যোগফল দেওয়া থাকলে বার্ষিক প্রবণতার সমীকরণ থেকে চতুর্থক প্রবণতার সমীকরণ বের করতে হলে নিয়ন্ত্রকগুলিকে 4 দিয়ে ভাগ করতে হবে এবং t এর জায়গায় t/4 বসাতে হবে। সুতরাং চতুর্থক প্রবণতার সমীকরণ হবে

$$y_t = \frac{2036}{4} + \frac{56}{4} \cdot \frac{t}{4} = 509 + 3{\cdot}5t$$

এই সমীকরণের মূলবিন্দু 1980 সালের মধ্যবর্তী সময়, কিন্তু যেহেতু এটি চতুর্থকের প্রবণতার সমীকরণ, মূলবিন্দু চতুর্থকের মধ্যবর্তী সময় হওয়া আবশ্যক। তাই উপযুক্ত কেন্দ্রীকরণের মাধ্যমে নতুন চতুর্থকের প্রবণতার সমীকরণ হবে

$$y_t = 509 + 3{\cdot}5\left(t + \frac{1}{2}\right) = 510{\cdot}75 + 3{\cdot}5t$$

যখন মূলবিন্দু হবে 1980 সালের তৃতীয় চতুর্থকে এবং একক = 1 চতুর্থক

4.5 মরসুমী পরিবর্তনের পরিমাপ

মরসুমী পরিবর্তন বলতে বোঝায় স্বল্পকালে একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর কোনো চলকের রাশিতথ্যের নিয়মিত উঠানামা যার পর্যায়কাল এক বছরের বেশি হয় না। মরসুমী পরিবর্তনের পরিমাপ করার চারটি পদ্ধতি আছে :

(ক) মাসিক (বা ত্রৈমাসিক) গড় পদ্ধতি (Method of Monthly (or Quarterly) Averages)

(খ) গতিশীল গড় অনুপাত পদ্ধতি (Ratio to Moving Average Method)

(গ) প্রবণতা অনুপাত পদ্ধতি (Ratio to Trend Method)

(ঘ) আপেক্ষিক সংযোগ পদ্ধতি (Method of Link Relatives)

4.5.1 মাসিক (বা ত্রৈমাসিক) গড় পদ্ধতি

কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যে যদি প্রবণতা এবং বৃত্তাকার উঠা নামা না থাকে তাহলেই এই পদ্ধতিটি প্রয়োগ করা যায়।

একটি উদাহরণের সাহায্যে মরসুমী সূচকগুলি নির্ণয় করা হল।

উদাহরণ : 4·7 নিম্নে প্রদত্ত কালীন সারির তথ্য থেকে মরসুমী সূচকগুলি নির্ণয় কর যেখানে উৎপাদনের তথ্য দেওয়া আছে। জানা আছে যে রাশিতথ্যে শুধুমাত্র মরসুমী পরিবর্তন ও অনিয়মিত উঠা-নামা লক্ষ্য করা যায়।

বছর চতুর্থাংশ	**I**	**II**	**III**	**IV**
2015	90	75	87	70
2016	75	80	78	75
2017	80	75	75	72
2018	85	82	80	81

সমাধান : ছক সংখ্যা 4·7 মরসুমী সূচকের গণনা

বছর চতুর্থাংশ	**I**	**II**	**III**	**IV**	**মোট**
2015	$y_1 = 90$	$y_2 = 75$	$y_3 = 87$	$y_4 = 70$	
2016	$y_5 = 75$	$y_6 = 80$	$y_7 = 78$	$y_8 = 75$	
2017	$y_9 = 80$	$y_{10} = 75$	$y_{11} = 75$	$y_{12} = 72$	
2018	$y_{13} = 85$	$y_{14} = 82$	$y_{15} = 80$	$y_{16} = 81$	
মোট	330	312	320	298	1260
ত্রৈমাসিক গড়	$A_1 = \frac{330}{4} = 82{\cdot}5$	$A_2 = \frac{312}{4} = 78$	$A_3 = \frac{320}{4} = 80$	$A_4 = \frac{298}{4} = 74{\cdot}5$	315
গুণনমূলক	$S_1 = \frac{A_1}{G}$	$S_2 = \frac{A_2}{G}$	$S_3 = \frac{A_3}{G}$	$S_4 = \frac{A_4}{G}$	

বছর \ চতুর্থাংশ	I	II	III	IV	মোট
মডেলে মরসুমী সূচক	$=\frac{82\cdot5}{78\cdot15}\times100$ = 104·76	$=\frac{78}{78\cdot15}\times100$ = 99·05	$=\frac{80}{78\cdot15}\times100$ = 101·59	$=\frac{74\cdot5}{78\cdot15}\times100$ = 94·60	400
সমষ্টিমূলক মডেলে মরসুমী সূচক	$S_1' = A_1 - G$ = 3·75	$S_2' = A_2 - G$ = – 0·75	$S_3' = A_3 - G$ = 1·25	$S_4' = A_4 - G$ = –4·25	0

এখানে সবকটি ত্রৈমাসিক গড়ের সার্বিক গড় (G) হল

$$G = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} = \frac{315}{4} = 78{\cdot}15$$

গুণনমূলক মডেলে মরসুমী সূচকগুলির যোগফল হবে 400 এবং সমষ্টিমূলক মডেলে মরসুমী সূচকগুলির যোগফল হবে শূ্য।

4.5.2 গতিশীল গড় অণুপাত পদ্ধতি

প্রথমেই এক্ষেত্রে রাশিতথ্যের গতিশীল গড় নির্ণয় করা হয়।

ধরা যাক ত্রৈমাসিক রাশিতথ্যের ভিত্তিতে গণনা হবে। গতিশীল গড়ের পর্যায়কাল হবে 4. এর ফলে প্রথম দুটি ও শেষ দুটি চতুর্থাংশের গতিশীল গড় প্রবণতা পাওয়া যাবে না। গতিশীল গড় অনুপাত পদ্ধতিটি একটি উদাহরণের সাহায্যে বোঝানো হল।

উদাহরণ : 4·8 নিম্নের রাশিতথ্যের সাহায্যে গতিশীল গড় অনুপাত পদ্ধতিতে মরসুমী সূচকগুলি নির্ণয় কর।

বছর \ চতুর্থাংশ	I	II	III	IV
2015	101	93	79	98
2016	106	96	83	103
2017	110	101	88	106

সমাধান :

ছকসংখ্যা 4·8 গতিশীল গড় ও গতিশীল গড় অণুপাত গণনা

চতুর্থাংশ / বছর	চলকের প্রদত্তমান	4 চতুর্থাংশের গতিশীল সমষ্টি	স্তম্ভ (3) এর দ্বিবিন্দু গতিশীল সমষ্টি	4 চতুর্থাংশের গতিশীল গড় স্তম্ভ (4) ÷ 8 (m_t)	% হারে গতিশীল গড় অনুপাত $\frac{y_t}{m_t}\times 100$	$(y_t - m_t)$
2015						
I	$y_1 = 101$	—	—	—	—	—
II	$y_2 = 93$	371	—	—	—	—
III	$y_3 = 79$	376	747	$m_3 = 93.375$	$(y_3/m_3) \times 100 = 84.60$	–14.375
IV	$y_4 = 98$	379	755	$m_4 = 94.375$	$(y_4/m_4) \times 100 = 103.85$	3.635
2016						
I	$y_5 = 106$	383	762	$m_5 = 95.250$	$(y_5/m_5) \times 100 = 111.24$	10.375
II	$y_6 = 96$	388	771	$m_6 = 96.375$	$(y_6/m_6) \times 100 = 96.61$	–0.375
III	$y_7 = 83$	392	780	$m_7 = 97.500$	$(y_7/m_7) \times 100 = 85.13$	–14.500
IV	$y_8 = 103$	397	789	$m_8 = 98.625$	$(y_8/m_8) \times 100 = 104.43$	4.375
2017						
I	$y_9 = 110$	402	799	$m_9 = 99.875$	$(y_9/m_5) \times 100 = 110.13$	10.125
II	$y_{10} = 101$	405	807	$m_{10}=100.875$	$(y_{10}/m_6)\times 100 = 100.13$	0.125
III	$y_{11} = 88$		—	—	—	—
IV	$y_{12} = 106$		—	—	—	—

ছক সংখ্যা : 4·9 গুণণ মডেলে মরসুমী সূচকের গণনা

চতুর্থাংশ \ বছর	শতকরা হারে গতিশীল গড় অনুপাত $= \frac{y_t}{m_t}\times 100$				
	I	**II**	**III**	**IV**	**সমষ্টি**
2015	–	–	$\frac{y_3}{m_3}\times 100 = 84{\cdot}60$	$\frac{y_4}{m_4}\times 100 = 103{\cdot}85$	
2016	$\frac{y_5}{m_5}\times 100 = 111{\cdot}29$	$\frac{y_6}{m_6}\times 100 = 99{\cdot}61$	$\frac{y_7}{m_7}\times 100 = 85{\cdot}13$	$\frac{y_8}{m_8}\times 100 = 104{\cdot}43$	
2017	$\frac{y_9}{m_9}\times 100 = 110{\cdot}13$	$\frac{y_{10}}{m_{10}}\times 100 = 110{\cdot}13$	—	—	
মোট	221·42	199·74	169·73	208·28	799·17
গড়	$A_1 = 110{\cdot}71$	$A_2 = 99{\cdot}87$	$A_3 = 84{\cdot}865$	$A_4 = 104{\cdot}14$	399·585
মরসুমী	$S_1 = \frac{A_1}{G}\times 100$	$S_2 = \frac{A_2}{G}\times 100$	$S_3 = \frac{A_3}{G}\times 100$	$S_4 = \frac{A_4}{G}\times 100$	400
সূচক	= 110·83	= 99·97	= 84·95	= 104·25	

বি.দ্র. এখানে সার্বিক গড় $(G)=(A_1+A_2+A_3+A_4)\div 4=\frac{399{\cdot}585}{4}=99{\cdot}896$

মরসুমী সূচকের যোগফল হবে :

$S_1+S_2+S_3+S_4=110{\cdot}83+99{\cdot}97+84{\cdot}95+104{\cdot}25=400$

ছক সংখ্যা : 4·10 সমষ্টিমূলক মডেলে মরসুমী সূচকের গণনা

চতুর্থাংশ / বছর	চলকের মান থেকে প্রবণতার ব্যবধান $(y_t - m_t)$				
	I	**II**	**III**	**IV**	**সমষ্টি**
2015	—	—	(–) 14·375	3·625	—
2016	10·750	(–) 0·375	(–) 14·500	4·375	—
2017	10·125	0·125			—
সমষ্টি	20·875	–0·250	–28·875	8·000	—
গড় (A_1)	(A_1) 10·4375	(A_2) –0·125	(A_3) –14·4375	(A_4) 4·000	–0·03125
মরসুমী সূচক $S_i=A_i-G$	$S_1'=A_1-G$ $=10{\cdot}46875$	$S_2'=A_2-G$ $=-0{\cdot}09375$	$S_3'=A_3-G$ $=-14{\cdot}40625$	$S_4'=A_4-G$ $=4{\cdot}03125$	$\sum_i S_i=0$

সার্বিক গড় $=(A_1+A_2+A_3+A_4)\div 4=-0{\cdot}03125$

4.5.3 প্রবণতা অনুপাত পদ্ধতি

কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যের মধ্যে যদি কোনো প্রবণতা থাকে তবে প্রথমে গাণিতিক পদ্ধতি ব্যবহার করে বিভিন্ন সময় (t) এর জন্য প্রবণতা নির্ণয় করতে হবে। সাধারণত প্রবণতা লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে নির্ণয় করা হয়। যদি গুণনমূলক মডেল ধরা হয় তবে বিভিন্ন সময়ের (t) জন্যে চলকের মান (y_t) এবং প্রবণতার (T_t) অনুপাত শতকরা হারে নির্ণয় করা হয়। $\frac{y_t}{T_t}\times 100$ এইমানগুলি নির্ণয় করে পর পর রাখা হয়। চারটি চতুর্থাংশের গড় এরপর নীচের সূত্রের সাহায্যে বের করা হয়। ধরা যাক তিন বছরের চতুর্থাংশের মান (y_t) দেওয়া আছে। লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে প্রবণতা (T_t) নির্ণয় করে $\frac{y_t}{T_t}\times 100$ প্রবণতা অণুপাতগুলি গণনা করা হয়। তারপর চারটি চতুর্থাংশের গড় (A_i) হবে :

$$A_1 = \left[\frac{y_1}{T_1}\times 100 + \frac{y_5}{T_5}\times 100 + \frac{y_9}{T_9}\times 100\right] \div 3$$

$$A_2 = \left[\frac{y_2}{T_2}\times 100 + \frac{y_6}{T_6}\times 100 + \frac{y_{10}}{T_{10}}\times 100\right] \div 3$$

$$A_3 = \left[\frac{y_3}{T_3}\times 100 + \frac{y_7}{T_7}\times 100 + \frac{y_{11}}{T_{11}}\times 100\right] \div 3$$

$$A_4 = \left[\frac{y_4}{T_4}\times 100 + \frac{y_8}{T_8}\times 100 + \frac{y_{12}}{T_{12}}\times 100\right] \div 3$$

এবং সার্বিক গড় (Grand Average) G হবে

$$G = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}$$

গুণণমূলক মডেলে চারটি মরসুমী সূচক (S_i) হবে

$$S_1 = \frac{A_1}{G}\times 100\ ;\ S_2 = \frac{A_2}{G}\times 100\ ;\ S_3 = \frac{A_3}{G}\times 100\ ;\ S_4 = \frac{A_4}{G}\times 100$$

এখন $\left(S_1 + S_2 + S_3 + S_4\right)$ সব সময় 400 এর সমান হবে।

যদি সমষ্টিমূলক মডেল নেওয়া হয় তবে $\left(\frac{y_t}{T_t}\times 100\right)$ এর বদলে প্রদত্ত চলকের মানগুলি (y_t) থেকে প্রবণতার (T_t) পার্থক্য ($y_t - T_t$) গণনা করা হয়। এরপর পার্থক্যগুলির গড় নেওয়া হয়।

ধরা যাক তিন বছরের রাশিতথ্য দেওয়া আছে। তাহলে চতুর্থাংশের গড় হবে

$$A_1 = \left[\left(y_1 - T_1\right) + \left(y_5 - T_5\right) + \left(y_9 - T_9\right)\right] \div 3$$

$$A_2 = \left[\left(y_2 - T_2\right) + \left(y_6 - T_6\right) + \left(y_{10} - T_{10}\right)\right] \div 3$$

$$A_3 = \left[\left(y_3 - T_3\right) + \left(y_7 - T_7\right) + \left(y_{11} - T_{11}\right)\right] \div 3$$

$$A_4 = \left[\left(y_4 - T_4\right) + \left(y_8 - T_8\right) + \left(y_{12} - T_{12}\right)\right] \div 3$$

যেখানে সার্বিক গড় (G) হবে

$$G = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}$$

এরপর সমষ্টিমূলক মডেলে চারটি মরসুমী সূচক হবে

$S_1 = A_1 - G$; $S_2 = A_2 - G$; $S_3 = A_3 - G$ এবং $S_4 = A_4 - G$

এবং এই মরসুমী সূচকগুলির যোগফল অর্থাৎ

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = O$ হবে।

''প্রবণতা অনুপাত পদ্ধতিতে'' প্রবণতার মান লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে বার করা হয় আর ''গতিশীল গড় অণুপাত পদ্ধতিতে'' প্রবণতার মান গতিশীল গড় পদ্ধতিতে বার করা হয়। এছাড়া এই দুই পদ্ধতিতে মরসুমী সূচক নির্ণয় করার পদ্ধতিতে কোনো তফাৎ নেই।

4.5.4 আপেক্ষিক সংযোগ পদ্ধতি

কালীন শ্রেণির মরসুমী পরিবর্তন পরিমাপের যত পদ্ধতি আছে আপেক্ষিক সংযোগ পদ্ধতি তার মধ্যে সব থেকে জটিল। একটি উদাহরণের সাহায্যে এই পদ্ধতি বোঝানো হল।

উদাহরণ : 4·9 আপেক্ষিক সংযোগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে মরসুমী সূচকগুলি নীচের রাশিতথ্য থেকে নির্ণয় কর।

চতুর্থাংশ / বছর	কয়লার উৎপাদন (y_t)			
	I	**II**	**III**	**IV**
1988	64	56	54	62
1989	68	63	65	69
1990	72	60	60	63

1. প্রথমেই প্রতি চতুর্থক মানকে তার ঠিক আগের চতুর্থক মানের সাপেক্ষে শতকরা হারে প্রকাশ করা হল। এটিকেই আপেক্ষিক সংযোগ (LR) বলা হয়।

$$\text{আপেক্ষিক সংযোগ (LR)} = \frac{\text{চলতি চতুর্থক মান/মাসিক মান}}{\text{ঠিক পূর্ববর্তী চতুর্থকের মান/মাসিক মান}} \times 100$$

$$\therefore LR = \frac{y_t}{y_{t-1}} \times 100$$

কিন্তু, প্রথম চতুর্থকের জন্য LR পাওয়া যাবে না কারণ তার পূর্ববর্তী কোনো মান পাওয়া যায় না।

2. প্রতি চতুর্থকের জন্য আপেক্ষিক সংযোগ (LR) গুলির গড় নির্ণয় করা হয়।

3. এখন এই গড় আপেক্ষিক সংযোগগুলি থেকে আপেক্ষিক শৃঙ্খল (Chain Relatives) বের করা হয়। প্রথম চতুর্থকের CR = 100 ধরা হয়।

$$\text{সূত্রটি হল : প্রতি চতুর্থকের CR} = \frac{\text{ঐ চতুর্থকের LR} \times \text{পূর্ববর্তী চতুর্থকের CR}}{100}$$

এই সূত্র ধরে সব কটি CR নির্ণয় করা হয়।

4. এবার আপেক্ষিক শৃঙ্খল (CR) গুলিকে সংশোধন করা হবে এই সংশোধনের গুণকটি প্রথম চতুর্থকের গড় LR এর সাহায্যে নির্ণয় করা হয়। তার ধাপগুলি নীচে দেওয়া হল।

$$\text{নতুন প্রথম চতুর্থকের CR} = \frac{\text{প্রথম চতুর্থকের গড় LR} \times \text{চতুর্থ চতুর্থকের CR}}{100}$$

$$= \frac{107{\cdot}02 \times 95{\cdot}31}{100} = 102{\cdot}001$$

এই মান প্রথম চতুর্থকের পুরনো মানের থেকে আলাদা। পুরনো মানটি হল 100. সুতরাং সংশোধন গুণক $(d) = \frac{1}{4}$ (নতুন প্রথম চতুর্থকের CR – 100)

$$= \frac{1}{4}(102{\cdot}001 - 100) = 0{\cdot}5$$

ছক সংখ্যা : 4·11 মরসুমী সূচকের গণনা

চতুর্থক / বছর	আপেক্ষিক সংযোগ (LR)			
	I	II	III	IV
1998	–	87·50	96·43	114·81
1989	109·68	92·65	103·17	106·15
1990	104·35	83·33	100·00	105·00
গড় LR	107·02	87·83	99·87	108·65
CR	100	87·83	87·72	95·31
সংশোধিত CR	100	87·33	86·72	93·81
মরসুমী সূচক	108·74	94·95	94·30	102·01

5. সংশোধিত CR নির্ণয় করা যায় যদি দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্থকের পুরানো মানের থেকে যথাক্রমে 1d, 2d, 3d বিয়োগ করা হয়।

প্রথম চতুর্থকের সংশোধিত CRও 100 ই হবে।

6. এবার সংশোধিত CR গুলির গড় নির্ণয় করা হয়। এই গড় হবে

$$(100+87{\cdot}33+86{\cdot}72+93{\cdot}81)\div 4=91{\cdot}96$$

7. মরসুমী সূচক বের করার সূত্র হল $\dfrac{\text{সংশোধিত CR}}{91{\cdot}96}\times 100$

4.6 মরসুমী সূচকের ব্যবহার

মরসুমী সূচকগুলি দুইটি উদ্দেশ্যে ব্যবহৃত হয় :

(i) রাশিতথ্যের মরসুমী পরিবর্তন দূর করা। ব্যবসায়ের মরসুমী পরিবর্তন বা উঠা-নামার ফলে খানিকটা অনিশ্চয়তা আসে। এই অনিশ্চয়তা দূর করতে পারলে ব্যবসায়ে খানিকটা স্থিতিশীলতা আসে।

যদি সমষ্টিমূলক মডেল হয় তাহলে প্রদত্ত রাশিতথ্যে চলকের মান (y_t) থেকে মরসুমী পরিবর্তন (সূচক) (S) বিয়োগ দিলে মরসুমী নির্ভরতা মুক্ত তথ্য ($y_t - s$) পাওয়া যাবে।

যদি গুণণমূলক মডেল হয় তাহলে প্রদত্ত রাশিতথ্যে চলকের মান (y_t) কে মরসুমী সূচক (s) এর সাপেক্ষে শতকরা হারে প্রকাশিত করলে $\left(\dfrac{y_t}{s}\times 100\right)$ মরসুমী নির্ভরতা মুক্ত তথ্য পাওয়া যায়।

(ii) স্বল্পকালে পূর্ব অনুমান করা : ধরা যাক কোনো ব্যবসায় প্রতিষ্ঠানে বাজারের চাহিদার উঠা নামার উপর নির্ভর করে ভাণ্ডারে দ্রব্য মজুত করা হয়। মরসুমী সূচক পরিমাপ করা হলে জানা যায় যে চাহিদা কতটা বাড়বে বা কমবে যেটা মরসুমী পরিবর্তনের উপর নির্ভর করে। ঐ মরসুমী সূচক থেকে আগে থেকে পরিকল্পনা করা যায় যে কতটা দ্রব্য উৎপাদন এবং মজুত করতে হবে।

4.7 বৃত্তাকার উত্থান-পতনের পরিমাপ

রাশিতথ্যের বৃত্তাকার উত্থানপতন পরিমাপ করাটা বেশ কষ্টসাধ্য।

কিন্তু অবশিষ্ট পদ্ধতি (Residual Method) এর সাহায্যে খুব সহজেই এই উত্থানপতন পরিমাপ করা সম্ভব।

4.7.1 অবশিষ্ট পদ্ধতি

কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যের (y_t) উত্থানপতনের মধ্যে চারটি উপাদান থাকে—যেমন প্রবণতা (T_t),

মরসুমী পরিবর্তন (S_t), বৃত্তাকার উত্থান পতন (C_t) ও অনিয়মিত পরিবর্তন (I_t). এখন অবশিষ্ট পদ্ধতিতে রাশিতথ্য থেকে T_t ও S_t কোনো ভাবে বাদ দেওয়া হয়।

গুণণমূলক মডেল ধরা হলে আমরা জানি

$$y_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$$

এখন T_t এবং S_t যদি বাদ দেওয়া যায় তবে আমরা পাই

$\dfrac{y_t}{T_t \times S_t} = C_t \times I_t$. গুণণমূলক মডেল এইভাবে অবশিষ্ট থাকে বৃত্তাকার উত্থানপতন এবং অনিয়মিত পরিবর্তন।

এবার সমষ্টিমূলক মডেল ধরা হলে আমাদের সমীকরণ হবে

$$y_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$$

অবশিষ্ট পদ্ধতির মাধ্যমে প্রবণতা ও মরসুমী পরিবর্তনের প্রভাব রাশিতথ্য (y_t) থেকে যদি বাদ দেওয়া যায় তবে বৃত্তাকার উত্থানপতন এবং অনিয়মিত পরিবর্তন পড়ে থাকে।

অর্থাৎ $y_t - (T_t + S_t) = C_t + I_t$

এখন I_t এর গড় স্থয়িত্বকাল সাপেক্ষে উপযুক্ত পর্যায় বিশিষ্ট গতিশীল গড় পদ্ধতি অবলম্বন করে অনিয়মিত পরিবর্তন (I_t) কে যদি অপসারণ করা যায়, হয় ভাগ দিয়ে (গুণণমূলক মডেলে) বা বিয়োগ দিয়ে, তবেই বৃত্তাকার উত্থানপতনের (C_t) পরিমাপ পাওয়া যাবে।

4.8 সারাংশ

একটি চলক যেমন আয়, উৎপাদন, বিক্রয়, বিনিয়োগ, ইত্যাদির মান সময়ের সাপেক্ষে উঠানামা করে। সময়ের সঙ্গে এই চলকের উঠানামাকে লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থিত করলে আমরা কালীন সারি পাই। রাশিতথ্যের এই উত্থান-পতনের মধ্যে চারটি মৌলিক উপাদান থাকে। এগুলি হল প্রবণতা, মরসুমী পরিবর্তন, বৃত্তাকার পরিবর্তন ও অনিয়মিত পরিবর্তন। কালীন শ্রেণির প্রবণতা কখনও উর্ধ্বমুখী আবার কখনও নিম্নমুখী হয়। কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যের গতিপ্রকৃতির প্রবণতা পরিমাপ করার জন্য চারটি পদ্ধতি আছে।

(i) মুক্তহস্ত লৈখিক পদ্ধতি

(ii) অর্ধগড় পদ্ধতি

(iii) গতিশীল গড় পদ্ধতি

(iv) লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি

অনেক সময় বাৎসরিকের বদলে মাসিক বা চতুর্থক প্রবণতার মান নির্ণয় করতে হয়। কালীন শ্রেণির এই বাৎসরিক রাশিতথ্য দুরকমে দেওয়া হয়

(i) প্রতি বছর মাসিক গড় মান দেওয়া থাকে

অথবা (ii) বাৎসরিক যোগফল হিসাবেও রাশিতথ্য দেওয়া থাকে।

জোড় সংখ্যক বা বিজোড় সংখ্যক বছরের সংখ্যার উপর নির্ভর করে প্রবণতা সমীকরণটি কি প্রকারের হবে।

মরসুমী পরিবর্তন বলতে বোঝায় এক নির্দিষ্ট সময় অন্তর কোনো রাশিতথ্যের নিয়মিত উঠা নামা যার পর্যায়কাল এক বছরের বেশি হয় না। মরসুমী পরিবর্তন পরিমাপ করার চারটি পদ্ধতি আছে :

(i) মাসিক (বা ত্রৈমাসিক) গড় পদ্ধতি

(ii) গতিশীল গড় অনুপাত পদ্ধতি

(iii) প্রবণতা অনুপাত পদ্ধতি

(iv) আপেক্ষিক সংযোগ পদ্ধতি

মরসুমী সূচকের ব্যবহার দুইটি :

(ক) রাশিতথ্যের মরসুমী পরিবর্তন দূর করা

(খ) স্বল্পকালে পূর্ব অনুমান করা

বৃত্তাকার উত্থান-পতনের মাধ্যমে বাণিজ্য চক্র পাওয়া যায়। এখানে ঊর্ধ্বগতি ও নিম্নগতি পর্যায়ক্রমে আসে। ঊর্ধ্বগতির দুটি ভাগ : পুনরুন্নতি ও উন্নতি আর নিম্নাভিমুখী পতনের দুটি ভাগ : নিম্নগতি ও মন্দা। এই বৃত্তাকার উত্থান-পতন পরিমাপ করার জন্য অবশিষ্ট পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। রাশিতথ্য থেকে প্রবণতা, মরসুমী পরিবর্তন ও অনিয়মিত পরিবর্তনের পরিমাপ বিয়োগ দিলে অবশিষ্ট থাকে বৃত্তাকার উঠা-নামা। এইভাবেই পরিমাপ করা হয়।

4.9 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা :

1. কালীন শ্রেণি বলতে কী বুঝায়? কালীন শ্রেণির রাশিতথ্যের মূল উপাদানগুলি উল্লেখ কর।
2. কালীন শ্রেণিতে প্রবণতা নির্ণয়ের পদ্ধতিগুলি উল্লেখ কর। মরসুমী পরিবর্তনের পরিমাপের পদ্ধতিগুলি কি কি?
3. কালীন শ্রেণির মৌলিক উপাদানগুলি কী কী? এদের কোনটির সঙ্গে নীচের ঘটনাগুলি নিবিড় ভাবে

যুক্ত :

(ক) আইলা ঝড়ে পশ্চিমবঙ্গের ধান উৎপাদন বিশেষ ভাবে ক্ষতিগ্রস্থ হয়।

(খ) বাণিজ্যে এখন মন্দা দেখা দিয়েছে।

(গ) জনসংখ্যা বৃদ্ধির জন্য খাদ্যোৎপাদন বেশি হয়েছে।

(ঘ) বর্ষাকালে ছাতার বিক্রয় সব সময় বেশি

4. লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে কীভাবে প্রবণতা গণনা করা হয়?

5. মরসুমী সূচকের কার্যকারীতা ব্যাখ্যা কর।

প্রশ্নমালা :

6. প্রবণতা নির্ণয়ে গতিশীল গড়ের পদ্ধতি সম্বন্ধে বিবরণ দাও।

7. নীচের ছকে পশ্চিমবঙ্গে ধানের উৎপাদনের তথ্য দেওয়া হল:

বছর :	1971	1972	1973	1974	1975
উৎপাদন ('000 টনে) :	10	12	8	10	14

লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে একটি প্রবণতা রেখা নিরূপণ কর।

8. কারণ দেখিয়ে বলো নীচের কথাগুলি সত্য না মিথ্যা

(i) প্রবণতা বলতে বোঝায় ক্রমাগত ঊর্ধ্বগতি অথবা নিম্নগতির দীর্ঘস্থায়ী ঝোঁক।

(ii) মরসুমী পরিবর্তন প্রতি তিনবছর অন্তর সংঘটিত হয়।

(iii) বৃত্তাকার পরিবর্তন প্রতি বছর অন্তর ঘটিতে থাকে।

(iv) অনিয়মিত পরিবর্তন জনসংখ্যা ক্রমাগত বৃদ্ধির জন্য হয়ে থাকে।

(v) বৃত্তাকার পরিবর্তন উন্নতি এবং অধোগতির পর্যায়ক্রমে আবির্ভাবের ফলে হয়ে থাকে।

প্রশ্নমালা :

9. নীচের রাশিতথ্যের ভিত্তিতে 3 বছরের গতিশীল গড় পদ্ধাতিতে কোনো শিল্পের বার্ষিক মুনাফার ('000 টাকাতে) প্রবণতা নির্ণয় কর।

বছর :	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
মুনাফা :	85	88	90	95	97	93	96	98

10. নীচের রাশিতথ্যের থেকে একটি দ্বিঘাত বহুপদ অপেক্ষকের সাহায্যে প্রবণতা রেখা নির্ণয় কর ও 1996 সালে প্রবণতার মান কত হবে তাও গণনা কর।

বছর :	1993	1994	1995	1996	1997
বিক্রয় ('000 টাকাতে) :	16	18	19	20	24

11. নীচে ভারতের জনসংখ্যার রাশিতথ্য দেওয়া হল :

আদমসুমারীর বছর :	1911	1921	1931	1941	1951	1961	1971
জনসংখ্যা (কোটিতে) :	25	25·1	27·9	31·9	36·1	43·9	54·7

এখন 1981 সালে ভারতের জনসংখ্যার অনুমান $T_t = ab^t$ সমীকরণের সাহায্যে গণনা কর।

12. বাৎসরিক প্রবণতা সমীকরণ $y_t = 144 + 8t$ (মূলবিন্দু 1985 এ এবং একক = 1 বছর) কে অর্ধ বাৎসরিক প্রবণতা সমীকরণে রূপান্তরিত কর যখন বাৎসরিক যোগফল দেওয়া আছে।

13. সমষ্টিমূলক মডেলে গতিশীল গড় অনুপাত পদ্ধতিতে নীচের রাশিতথ্য থেকে মরসুমী সূচক নির্ণয় কর।

(ধানের উৎপাদন '000 টন)

চতুর্থক / বছর	I	II	III	IV
1973	37	38	37	40
1974	41	34	25	31
1975	35	37	35	41

14. কোনো দ্রব্যের উৎপাদনের রাশিতথ্য বাৎসরিক যোগফলে দেওয়া থাকলে বাৎসরিক প্রবণতা সমীকরণ $y = 360 + 48t$ (মূলবিন্দু 2008 সাল, t এর একক = 1 বছর) কে মাসিক প্রবণতা সমীকরণে রূপান্তরিত কর। অতঃপর 2015 সালের মে মাসের প্রবণতার মান নির্ণয় কর।

4.10 গ্রন্থপঞ্জি

1. Basic Statistics by Goon, Gupta and Dasgupta, The World Press Pvt. Ltd, Calcutta

2. Applied General Statistics by Croxton Cowden, Prentice Hall Inc, 1949

3. Statistical Methods Vol. I by N. G. Das, Mc Graw Hill India, 2008

4. Fundamentals of Statistics by S.C. Gupta, Himalaya Publishing House, 2008

একক 5 ❑ বিভিন্ন সূচক সংখ্যা এবং তাদের প্রয়োগ

গঠন

5.1 উদ্দেশ্য

অর্থনৈতিক চলক অর্থাৎ যে সব চলক ব্যবসা বাণিজ্যের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত যেমন দাম, উৎপাদন, বিক্রয়, আমদানি, রপ্তানি, বিনিয়োগ ইত্যাদি অনবরত পরিবর্তিত হতেই থাকে কখনও সময়ের সাপেক্ষে আবার কখনও ভৌগোলিক অবস্থানের সাপেক্ষে। এই পরিবর্তনকে বুঝতে হলে একটি সূচক সংখ্যার প্রয়োজন। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে দাম পরিবর্তিত হচ্ছে কিন্তু কতটা পরিবর্তিত হয়েছে সেটা বোঝা যাবে কিভাবে? দ্রব্যের সংখ্যা তো অগণ্য। সব দ্রব্যের দাম তো একইভাবে পরিবর্তিত হয় না। তাই দামের একটা সূচক সংখ্যা থাকলে সেটাই নির্দেশ করবে দাম কতটা পরিবর্তিত হয়েছে।

5.2 প্রস্তাবনা

সূচক সংখ্যা বলতে কোনো চলকের অথবা সম্পর্কযুক্ত একাধিক চলকের আপেক্ষিক পরিবর্তনের একটি পরিসংখ্যানগত পরিমাপ বুঝি। এই আপেক্ষিক পরিবর্তনটি সময়ের সাপেক্ষে অথবা ভৌগোলিক অবস্থানের সাপেক্ষে গণনা করা হয়।

যেহেতু এটি একটি আপেক্ষিক পরিবর্তন, তাই এর কোনো একক হয় না। সাধারণত এই সূচক সংখ্যা শতকরা হিসাবে নির্ণিত হয়। তাই বিভিন্ন সময়ের পরিপ্রেক্ষিতে অথবা বিভিন্ন ভৌগোলিক অবস্থানের পরিপ্রেক্ষিতে দ্রব্যের দাম, পরিমাণ অথবা দ্রব্যের মূল্যের পরিবর্তনের তুলনা করা সম্ভব হয়। যখন দ্রব্যের দামের পরিবর্তনের তুলনা করা হয় তখন সূচক সংখ্যাকে দাম সূচক সংখ্যা (Price Index Number) বলা হয়। আবার যখন দ্রব্যের পরিমাণের পরিবর্তনের তুলনা করা হয় তখন সূচক সংখ্যাকে পরিমাণ সূচক সংখ্যা (Quantity Index Number) বলে।

5.3 দাম ও পরিমাণ সূচক সংখ্যা

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক P_1 কোনো দ্রব্যের 2005 সালে কলকাতার বাজারের দাম। আবার ধরা যাক, 2000 সালে কলকাতার বাজারে ঐ দ্রব্যের দাম ছিল P_o. যদি 2000 সালকে ভিত্তি বছর ধরা যায় তাহলে 2005 হবে চলতি বছর। এবারে $\left(\frac{P_1}{P_o}\right)$ এই অনুপাতকে ভিত্তি বছরের সাপেক্ষে চলতি বছরের ঐ দ্রব্যের আপেক্ষিক দাম (Price Relative) বলা হয়। এই অনুপাতকে 100 দিয়ে গুণ করলে আমরা ঐ দ্রব্যের দাম সূচক পাব। ভিত্তি বছরের দাম সূচক সর্বদাই 100 ধরা হয়। এখন $\frac{P_1}{P_o} \times 100 =$ যদি 160 হয় তবে তার অর্থ হল 2005 সালে (চলতি বছরে) ঐ দ্রব্যের দাম 2000 সালের (ভিত্তি বছরের) তুলনায় 60% বৃদ্ধি পেয়েছে। এই দাম সূচক সংখ্যাকে I_{01} হিসাবে চিহ্নিত করা হয় যার অর্থ হল ভিত্তি বছরের (0) সাপেক্ষে ঐ দ্রব্যের চলতি বছরের (1) দাম সূচক সংখ্যা হল I_{01} [= $(P_1/P_o) \times 100$].

ধরা যাক আমরা 5টি দ্রব্যের দাম সূচক নির্ণয় করতে চাই যাদের ভার (weight) আছে। ঐ 5টি দ্রব্যের দাম কোনো নির্দিষ্ট বাজারে চলতি বছরের জন্য এবং ভিত্তি বছরের জন্য সংগ্রহ করা হল।

চলতি বছরের (1) দাম ধরা যাক P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}

এবং ভিত্তি বছরের (0) দাম ধরা যাক P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}, P_{05}

আর ঐ 5টি দ্রব্যের ভার ধরা যাক w_1, w_2, w_3, w_4, w_5

তাহলে ঐ 5টি দ্রব্যের ভারযুক্ত দাম সূচক হবে :

$$I_{01} = \frac{\left[\frac{P_{11} \times w_1}{P_{01}} + \frac{P_{12} \times w_2}{P_{02}} + \frac{P_{13} \times w_3}{P_{03}} + \frac{P_{14} \times w_4}{P_{04}} + \frac{P_{15} \times W_5}{P_{05}}\right] \times 100}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}$$

$$= \frac{\sum \frac{P_{1i}}{P_{0i}} \times w_i}{\sum w_i} \times 100$$

এখানে আমরা দাম সূচক নির্ণয় করার জন্য যে পদ্ধতি গ্রহণ করেছি তা হল দাম আপেক্ষিকের গড় পদ্ধতি (Average of Relative Prices)।

পরিমাণ সূচক সংখ্যা বলতে বোঝায় দুটি ভিন্ন সময়ে অথবা ভিন্ন ভৌগোলিক অবস্থানে দ্রব্যের পরিমাণগত আপেক্ষিক পরিবর্তনের সূচক। ভারত সরকার কতৃক প্রচারিত শিল্প উৎপাদনের সূচক সংখ্যা (Industrial Production Index Number) পরিমাণগত সূচক সংখ্যার উদাহরণ। এখানে বিভিন্ন শিল্প যেমন লোহা ও স্টীল, সুতির সামগ্রী, পাটজাত দ্রব্য, সিমেন্ট ইত্যাদির উৎপাদনের পরিমাণ কীভাবে পরিবর্তিত হচ্ছে তা এই সূচকের মাধ্যমে নির্দেশ করে। দাম সূচকের মতোই আপেক্ষিক পরিমাণের গড় পদ্ধতি অনুসরণ করে পরিমাণ সূচক সংখ্যা নির্ণয় করা যায়।

সরল পরিমাণ সূচকের সূত্র হবে $I'_{01} = \frac{\sum \frac{q_{1i}}{q_{0i}} \times 100}{n}$ (n সংখ্যক দ্রব্যের জন্য)

এবং ভারযুক্ত পরিমাণ সূচক সংখ্যা $I'_{01} = \frac{\sum \frac{q_{1i}}{q_{0i}} \times w_i}{\sum w_i} \times 100$

5.4 দাম সূচক গঠনের সমস্যা

দাম সূচক তৈরির সময় নিম্নলিখিত সমস্যাগুলি উপস্থিত হয়।

(ক) দাম সূচক গঠনের উদ্দেশ্য (Purpose of the construction of Price Index)

(খ) ভিত্তি বছর পছন্দ করার সমস্যা (Problem of Choice of Base year)

(গ) দ্রব্য নির্বাচনের সমস্যা (Problem of Choice of Commodities)

(ঘ) রাশিতথ্য সংগ্রহের সমস্যা (Problem of Collection of Data)

(ঙ) সঠিক সূত্র ও সঠিক ভার নির্বাচন (Choice of Correct Formula & Correct Weights)

(চ) দাম সূচকের ব্যাখ্যা (Interpretation of Price Index)

(ক) সব দাম সূচক গঠনের উদ্দেশ্য এক নয়। এই উদ্দেশ্যের উপর ভিত্তি করে কি কি দ্রব্য নির্বাচন করা হবে, রাশিতথ্য সংগ্রহের উৎস কি হবে, কোনটি ভিত্তি বৎসর হওয়া উচিৎ ইত্যাদি। যদি জীবনযাত্রার ব্যয় সূচক (Cost of Living Index) গঠন করা উদ্দেশ্য হয় তবে বিভিন্ন ভোগ্যদ্রব্যের খুচরা দামের রাশিতথ্য সংগ্রহ করতে হবে, পাইকারি দামের রাশিতথ্য সংগ্রহ করা অনুচিত হবে।

(খ) ভিত্তি বছর নির্বাচন করার সময় খেয়াল রাখতে হয় যেন ভিত্তি বছরটি সম্পূর্ণ স্বাভাবিক বছর হয়। কোনো প্রাকৃতিক বিপর্যয় বা যুদ্ধবিগ্রহের মতো ঘটনা যেন না ঘটে থাকে, কারণ তাহলে জিনিসপত্রের দাম অস্বাভাবিক রকম বৃদ্ধি পাবে।

ভিত্তি বছরটি যেন চলতি বছরের থেকে খুব বেশি দূরে না হয়। কারণ ক্রেতাদের রুচি পছন্দ অনুযায়ী নতুন নতুন দ্রব্য সামগ্রী বাজারে আসে আর পুরনো দ্রব্য সামগ্রী অন্তর্হিত হয়। তাই খুব বেশি দূরে হলে তুলনামূলক দ্রব্যসামগ্রী ও তাদের দামের রাশিতথ্য পাওয়া যাবে না। এক্ষেত্রে শৃঙ্খল ভিত্তিক পদ্ধতি (chain base method) স্থির ভিত্তিক পদ্ধতি (Fixed base method) অপেক্ষা অনেকাংশে সুবিধাযুক্ত।

(গ) দ্রব্য নির্বাচন করার সময়ে দামসূচক গঠনের উদ্দেশ্য মনে রাখতে হবে। দ্রব্য গুলিকে অবশ্যই ঐ উদ্দেশ্য সিদ্ধকারী দ্রব্য হতে হবে। সুতরাং দ্রব্য গুলিকে প্রাসঙ্গিক, প্রতিনিধিত্ব কারী, বিশ্বাসযোগ্য ও তুলনীয় হতে হবে। দ্রব্য সামগ্রীর সংখ্যা যেন প্রয়োজনের অতিরিক্ত না হয়।

ধরা যাক খাদ্য দ্রব্যের দামের সূচক সংখ্যা গঠন করা হচ্ছে। এখানে চাল ও গম অনেক বেশি প্রাসঙ্গিক হবে সর্ষের তুলনায়।

(ঘ) দাম সূচক নির্ণয়ের জন্যে ভিত্তি বছরের দাম ও চলতি বছরের দামের পরিসংখ্যান সংগ্রহ করতে হবে। কিন্তু দাম বিভিন্ন প্রকারের হয়—খুচরো দাম, পাইকারি দাম। এছাড়াও একই দ্রব্যের গুণগত মান অনুযায়ী দামও বিভিন্ন হয়। তাই দামের রাশিতথ্য সংগ্রহ করা সহজ নয়। তবে জীবনযাত্রার ব্যয় সূচক (Cost of Living Index) এর জন্য খুচরো দামের রাশিতথ্য পাইকারি দামের রাশিতথ্য অপেক্ষা বেশি প্রাসঙ্গিক হবে।

(ঙ) দাম সূচকের গঠনে যদি একাধিক দ্রব্য অংশ নেয় তাহলে তাদের গুরুত্ব বা ভার নির্বাচন করা জরুরি হয়ে পড়ে। যেমন জীবনযাত্রার ব্যয় সূচক নির্ণয়ে চাল, গম অনেক বেশি গুরুত্বপূর্ণ চিনি বা নুনের তুলনায়। প্রতিটা দ্রব্যের গুরুত্ব একটা সংখ্যার দ্বারা নির্দেশ করাকে ভার নির্বাচন করা বলা হয়। পরবর্তী পর্যায়ে আমরা দেখতে পাব যে ভারযুক্ত দাম সূচক নির্ণয়ে দ্রব্যের পরিমাণকে ভার হিসাবে ব্যবহার করা হয়। আর ভারযুক্ত পরিমাণ সূচক নির্ণয়ে দ্রব্যের দামকে ভার হিসাবে ব্যবহার করা হয়।

(চ) দাম সূচকের ব্যাখ্যা খুবই সহজ। ধরা যাক পাইকারি দাম সূচক সংখ্যা 1980 সালের সাপেক্ষে 1998 সালে দেখা যাচ্ছে 280·5. এর অর্থ হল দেশের সাধারণ দামস্তর (Price level) 180·5% বেড়েছে। ভিত্তি বছর 1980 সালের সূচক এখানে 100 ধরতে হবে, ভিত্তি বছর বলে। অথবা এভাবেও ব্যাখ্যা করা যায় যে দামস্তর 2·805 গুণ বৃদ্ধি পেয়েছে।

5.5 দাম সূচক গঠন করার বিভিন্ন পদ্ধতি

দাম সূচক গঠন করার বিভিন্ন পদ্ধতি

- সমষ্টিগত পদ্ধতি (Aggregative Method)
  - সরল সমষ্টিগত পদ্ধতি (Simple Aggregative method)
  - ভারযুক্ত সমষ্টিগত পদ্ধতি(Weighted Aggregative method)
    - লাসপেয়ারের সূত্র (Laspeyer's formula)
    - পাসের সূত্র (Paasche's formula)
    - মার্শাল-এজ্ওয়ার্থ-এর সূত্র (Marshall-Edgeworth formula)
    - ফিশারের আইডিয়াল সূত্র (Fisher's Ideal formula)
    - বউলের সূত্র (Bowley's formula)
- আপেক্ষিক/আনুপাতিক গড় পদ্ধতি (Average of Relative Method)
  - সরল আনুপাতিক পদ্ধতি (Simple Average of Relatives)
  - ভারযুক্ত আনুপাতিক গড় পদ্ধতি (Weighted Average of Relatives)

5.5.1 সমষ্টিগত পদ্ধতি

ধরা যাক্ n সংখ্যক দ্রব্য সামগ্রীর দাম সূচক নির্ণয় করতে হবে। এখানে চলতি বছর 1 এবং ভিত্তি বছর 0 ধরা হয়েছে। এবার n সংখ্যক দাম একবার চলতি বছরে ও একবার ভিত্তি বছরে সংগ্রহ করতে হবে। I_{01} যদি দামসূচক হয় তবে

$$I_{01} = \frac{\left(P_{11} + P_{12} + P_{13} + ... + P_{1n}\right)}{\left(P_{01} + P_{02} + P_{03} + ... + P_{0n}\right)} \times 100$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} P_{oi}} \times 100.......(5{\cdot}1)$$

এই পদ্ধতিকে **সরল সমষ্টিগত পদ্ধতি** বলা হয়।

যদি n সংখ্যক দ্রব্য সামগ্রীর ভার দেওয়া থাকে তবে ভারযুক্ত সমষ্টিগত পদ্ধতি অনুসারে দামসূচক হবে

$$I_{01} = \frac{P_{11}{\cdot}w_1 + P_{12}{\cdot}w_2 + P_{13}{\cdot}w_3 + ... + P_{1n}{\cdot}w_n}{P_{01}{\cdot}w_1 + P_{02}{\cdot}w_2 + P_{03}{\cdot}w_3 + ... + P_{0n}{\cdot}w_n} \times 100$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1i}{\cdot}w_i}{\sum_{i=1}^{n} P_{oi}{\cdot}w_i} \times 100 \quad ....(5{\cdot}2)$$ যেখানে w_i হল ভার বা গুরুত্ব $i = 1, 2, 3....., n$

এই পদ্ধতিকে **ভারযুক্ত সমষ্টিগত পদ্ধতি** বলা হয়।

এখন এই গুরুত্ব বা ভারের বিভিন্ন মান বসিয়ে বিভিন্ন পরিসংখ্যানবিদ্ দাম সূচক পরিমাপের বিভিন্ন সূত্র উদ্ভাবন করেছেন।

(i) **লাসপ্যেয়ারের দামসূচক :** লাসপ্যেয়ার ভার w_i এর জায়গায় q_{oi} বসিয়েছেন। অর্থাৎ ভিত্তি বছরের বিভিন্ন দ্রব্যের পরিমাণকে ভার হিসাবে ধরে দাম সূচক বের করেছেন।

$$I_{01}^{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1i}{\cdot}q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} P_{0i}{\cdot}q_{0i}} \times 100.........(5{\cdot}3)$$

এই সূত্রটিকে লাসপ্যেয়ারের দাম সূচক সূত্র বলা হয়।

(ii) **পাস-এর দাম সূচক :** পাস ভার w_i এর জায়গায় q_{1i} বসিয়েছেন। অর্থাৎ তিনি চলতি বছরের দ্রব্যের পরিমাণগুলিকে ভার হিসাবে ধরে দাম সূচক বের করেছেন।

$$\mathrm{I}_{01}^{\mathrm{P}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_{1i} \cdot w_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_{0i} \cdot w_{1i}} \times 100 \text{.........} (5 \cdot 4)$$

এই সূত্রটিকে পাস-এর দাম সূচক সূত্র বলা হয়।

(iii) **মার্শাল-এর্জওয়ার্থ-এর দাম সূচক :** মার্শাল-এজওয়ার্থ ভার w_i এর জায়গায় $\frac{(q_{0i} + q_{1i})}{2}$ বসিয়েছেন। অর্থাৎ এখানে চলতি বছরের দ্রব্যের পরিমাণ ও ভিত্তি বছরের ঐ দ্রব্যের পরিমাণের গাণিতিক গড়কে ভার হিসাবে ব্যবহার করা হয়েছে।

$$\mathrm{I}_{01}^{\mathrm{M-E}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_{1i} (q_{0i} + q_{1i})}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_{0i} (q_{0i} + q_{1i})} \times 100 \text{.........} (5 \cdot 5)$$

এই সূত্রকে মার্শাল-এর্জওয়ার্থ দাম-সূচক সূত্র বলা হয়।

(iv) **ফিশারের দাম সূচক সূত্র :** লাসপ্যেয়ার ও পাসের দাম সূচকের গুণোত্তর গড়কে ফিশারের আইডিয়াল দাম সূচক বলা হয়।

$$\mathrm{I}_{01}^{\mathrm{F}} = \sqrt{\mathrm{I}_{01}^{\mathrm{L}} \times \mathrm{I}_{01}^{\mathrm{P}}} \text{.........} (5 \cdot 6)$$

(v) **বউলের দাম সূচক সূত্র :** লাসপ্যেয়ার ও পাসের দাম সূচকের সরল গাণিতিক গড়কে বউলের দাম সূচক সূত্র বলে।

$$\mathrm{I}_{01}^{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{I}_{01}^{\mathrm{L}} + \mathrm{I}_{01}^{\mathrm{P}}}{2} \text{.........} (5 \cdot 7)$$

5.5.2 গড় আপেক্ষিক পদ্ধতি

গড় আপেক্ষিক পদ্ধতিতে দাম সূচক সূত্র সরল ও ভারযুক্ত হতে পারে সরল গড় আপেক্ষিক পদ্ধতিতে

আমরা চলতি বছর ও ভিত্তি বছরের দাম অনুপাতগুলির গাণিতিক গড়, বিবর্তযৌগিক গড় ও গুণোত্তর গড় নির্ণয় করে বিভিন্ন দাম সূচক উপস্থাপিত করতে পারি।

$$(\text{ক})\ \ I_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(P_{1i}/P_{0i}\right)}{n} \times 100\ \ (\text{গাণিতিক গড়})......(5 \cdot 8)$$

$$(\text{খ})\ \ I_{01} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(P_{1i}/P_{0i}\right)} \times 100\ \ (\text{বিবর্তযৌগিক গড়}).....(5 \cdot 9)$$

$$(\text{গ})\ \ I_{01} = \prod\left(P_{1i}/P_{0i}\right)^{\frac{1}{n}} \times 100\ \ (\text{গুণোত্তর গড়})......(5 \cdot 10)$$

একইভাবে ভারযুক্ত দাম সূচক নির্ণয়ের সময় দাম অনুপাতগুলির সঙ্গে ভার যদি যুক্ত করা যায় এবং তাদের বিভিন্ন ধরনে গড় গণনা করে আবার ঐ তিন ধরনের দাম সূচক সূত্র লেখা যায়।

$$(\text{i})\ \ I_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(P_{1i}/P_{0i}\right) \times w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \times 100\ \ (\text{ভারযুক্ত গাণিতিক গড়})\ ......\ (5.11)$$

$$(\text{ii})\ \ I_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{P_{0i}}{P_{1i}} \times w_i} \times 100\ \ (\text{ভারযুক্ত বিবর্ত যৌগিক গড়})\ ......\ (5.12)$$

$$(\text{iii})\ \ I_{01} = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{P_{1i}}{P_{0i}} \times w_i\right)^{\frac{1}{\sum w_i}} \times 100\ \ (\text{ভারযুক্ত গুণোত্তর গড়})\ ......\ (5.13)$$

ভারযুক্ত সমষ্টিগত পদ্ধতির মতোই ভারযুক্ত আনুপাতিক গড় পদ্ধতিতেও ভারের বিভিন্ন মান বসালে দাম সূচকের বিভিন্ন সূত্র পাওয়া যায়। যেমন $(5 \cdot 11)$ সূত্রে যদি $w_i = P_{0i} \cdot q_{0i}$ অর্থাৎ ভিত্তি বছরের মূল্য (Base year Value) বসানো হয়, তাহলে সূত্রটি পরিবর্তিত হবে।

$$I_{01} = \frac{\sum (P_{1i}/P_{0i}) \times P_{0i} \cdot q_{0i}}{\sum P_{0i} \cdot q_{0i}} \times 100$$

$$= \frac{\sum P_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum P_{0i} \cdot q_{0i}} \times 100 = I_{01}^{L}$$

অর্থাৎ আমরা লাসপ্যেয়ারের দাম সূচকের সূত্রটি পাব। একই রকমভাবে যদি (5·12) সূত্রে $w_i = P_{1i} \cdot q_{1i}$ অর্থাৎ চলতি বছরের মূল্য (Current Year Value) বসানো হয়, তাহলে সূত্রটি পরিবর্তিত হবে।

$$I_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{P_{0i}}{P_{1i}} \times P_{1i} \cdot q_{1i}} \times 100$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} P_{1i} \cdot q_{1i}} \times 100 = I_{01}^{P}$$

অর্থাৎ আমরা পাসের দাম সূচক সূত্রটি পাব।

উদাহরণ : 5·1 নীচের রাশিতথ্যের ভিত্তিতে (ক) পাস পদ্ধতিতে (খ) লাসপ্যেয়ার পদ্ধতিতে (গ) ফিশারীয় পদ্ধতিতে ও (ঘ) বউলি-র পদ্ধতিতে দামসূচক নির্ণয় কর।

	1980		1990	
দ্রব্য	**দাম**	**পরিমাণ**	**দাম**	**পরিমাণ**
A	8	5	12	6
B	12	4	16	5
C	10	6	12	8

সমাধান : ভিত্তি বছরের দাম ও পরিমাণকে P_o ও Q_o দিয়ে এবং চলতি বছরের দাম ও পরিমাণকে P_1 ও Q_1 দিয়ে সূচিত করা হল।

ছক সংখ্যা : 5·1 দাম সূচকের গণনা

দ্রব্য	P_0	Q_0	P_1	Q_1	P_0Q_0	P_1Q_0	P_0Q_1	P_1Q_1
A	8	5	12	6	40	60	48	72
B	12	4	16	5	48	64	60	80
C	10	6	12	8	60	72	80	96
মোট					148	196	188	248

(ক) পাসের দামসূচক সংখ্যা $= \dfrac{\sum P_1Q_1}{\sum P_0Q_1} \times 100$

$$= \frac{248}{188} \times 100 = 131{\cdot}91$$

(খ) লাসপ্যেয়ারের দাম সূচক সংখ্যা $= \dfrac{\sum P_1Q_0}{\sum P_0Q_0} \times 100$

$$= \frac{196}{148} \times 100 = 132{\cdot}43$$

(গ) ফিশারের আদর্শ দাম সূচক সংখ্যা $= \sqrt{(\text{লাসপ্যেয়ারের দাম সূচক}) \times (\text{পাসের দাম সূচক})}$

$$= \sqrt{131{\cdot}91 \times 132{\cdot}43}$$

$$= \sqrt{17468{\cdot}84} = 132{\cdot}17$$

(ঘ) বউলের দাম সূচক সংখ্যা $= \frac{1}{2}\sqrt{(\text{লাসপ্যেয়ারের দাম সূচক}) + (\text{পাসের দাম সূচক})}$

$$= \frac{1}{2}(131{\cdot}91 + 132{\cdot}43)$$

$$= 132{\cdot}17$$

5.6 পরিমাণ সূচক সংখ্যাসমূহ

পরিমাণ সূচক সংখ্যা বলতে বোঝায় দুটি ভিন্ন পরিস্থিতিতে দ্রব্যের পরিমাণগত পরিবর্তনের সূচক। দ্রব্যের পরিমাণ বলতে উৎপাদিত দ্রব্যের আয়তন/ওজন, বিক্রয়ের পরিমাণ ইত্যাদি বোঝায়।

পরিমাণ সূচক গঠনে দাম সূচক গঠনের পদ্ধতিগুলি অনুসরণ করা হয়। তাই দাম সূচকের সূত্রগুলিতে P এর জায়গায় q এবং q এর জায়গায় p বসালেই পরিমাণ সূচকের সূত্র পাওয়া যায়।

সূত্র	**দাম সূচক সংখ্যা**	**পরিমাণ সূচক সংখ্যা**
1. সরল সমষ্টিগত সূচক সংখ্যা	$\frac{\sum \mathrm{P}_{1i}}{\mathrm{P}_{0i}} \times 100$	$\frac{\sum q_{1i}}{q_{0i}} \times 100$
2. ভারযুক্ত সমষ্টিগত সূচক সংখ্যা	$\frac{\sum p_{1i} w_i}{\sum p_{0i} w_i} \times 100$	$\frac{\sum q_{1i} w_i}{\sum q_{0i} w_i} \times 100$
3. লাসপ্যেয়ার-এর সূত্র	$\frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} q_{0i}} \times 100$	$\frac{\sum q_{1i} \cdot p_{0i}}{\sum q_{0i} p_{0i}} \times 100$
4. পাস-এর সূত্র	$\frac{\sum p_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} q_{1i}} \times 100$	$\frac{\sum q_{1i} \cdot p_{1i}}{\sum q_{0i} \cdot p_{1i}} \times 100$
5. ফিশার-এর সূত্র	$\sqrt{\frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} \times \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}}} \times 100$	$\sqrt{\frac{\sum q_{1i} \cdot p_{0i}}{\sum q_{0i} \cdot p_{0i}} \times \frac{\sum q_{1i} \cdot p_{1i}}{\sum q_{0i} \cdot p_{1i}}} \times 100$
6. বউলের সূত্র	$\frac{\left[\left(\frac{\sum P_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum P_{0i} \cdot q_{0i}}\right) + \left(\frac{\sum P_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum P_{0i} \cdot q_{1i}}\right)\right] \times 100}{2}$	$\frac{\left[\left(\frac{\sum q_{1i} \cdot p_{0i}}{\sum q_{0i} \cdot p_{0i}}\right) + \left(\frac{\sum q_{1i} \cdot p_{1i}}{\sum q_{0i} \cdot p_{1i}}\right)\right] \times 100}{2}$

7. মার্শাল-এর্জওয়ার্থ-এর সূত্র $\dfrac{\sum p_{1i}q_{0i}+\sum p_{1i}\cdot q_{1i}}{\sum p_{0i}\cdot q_{0i}+\sum p_{0i}\cdot q_{1i}}\times 100$ $\dfrac{\sum q_{1i}\cdot p_{0i}+\sum q_{1i}\cdot p_{1i}}{\sum q_{0i}\cdot p_{0i}+\sum q_{0i}\cdot p_{1i}}\times 100$

8. সরল আপেক্ষিক

গড় পদ্ধতিতে $\dfrac{\sum\left(\dfrac{P_{1i}}{P_{0i}}\right)}{n}\times 100$ $\dfrac{\sum\left(\dfrac{q_{1i}}{q_{0i}}\right)}{n}\times 100$

সূচক সংখ্যা

9. ভারযুক্ত আপেক্ষিক $\dfrac{\sum\left(\dfrac{p_{1i}}{p_{0i}}\right)\cdot w_i}{\sum w_i}\times 100$ $\dfrac{\sum\left(\dfrac{q_{1i}}{q_{0i}}\right)\cdot w_i}{\sum w_i}\times 100$

গড় পদ্ধতিতে

সূচক সংখ্যা

উদাহরণ : 5·2 নীচের রাশিতথ্যের সাহায্যে (i) লাসপ্যেয়ারের সূত্র (ii) পাসের সূত্র (iii) মার্শাল-এজওয়ার্থ সূত্র (iv) ফিশারের সূত্র অবলম্বনে পরিমাণ সূচক সংখ্যা নির্ণয় কর।

	দাম		পরিমাণ	
দ্রব্য	**ভিত্তি বছরে**	**চলতি বছরে**	**ভিত্তি বছরে**	**চলতি বছরে**
A	4	12	60	50
B	3	10	20	12
C	2	6	10	6

সমাধান : ধরা যাক P_o ও P_1 যথাক্রমে ভিত্তি বছরে ও চলতি বছরে দাম। আবার q_0 ও q_1 যথাক্রমে ভিত্তি বছরে ও চলতি বছরে দ্রব্যটির পরিমাণ।

ছক সংখ্যা 5·1

দ্রব্য	q_0	q_1	P_0	P_1	q_0P_0	q_0P_1	q_1P_0	q_1P_1
A	60	50	4	12	240	720	200	600
B	20	12	3	10	60	200	36	120
C	10	6	2	6	20	60	12	36
মোট	–	–	–	–	320	980	248	756

$\therefore$(i) লাসপেয়ারের সূত্র অনুযায়ী পরিমাণ সূচক সংখ্যা হবে

$$\frac{\sum q_{1i}P_{oi}}{\sum q_{oi}\times P_{oi}}\times 100=\frac{248}{320}\times 100=77\cdot 5$$

(ii) পাসের সূত্র অনুযায়ী পরিমাণ সূচক সংখ্যা হবে

$$\frac{\sum q_{1i}\cdot P_{1i}}{\sum q_{oi}\cdot P_{1i}}\times 100=\frac{756}{980}\times 100=77\cdot 14$$

(iii) মার্শাল-এর্জওয়ার্থ সূত্র অনুযায়ী পরিমাণ সূচক সংখ্যা হবে

$$\frac{\sum q_{1i}P_{oi}+\sum q_{1i}P_{1i}}{\sum q_{oi}P_{oi}+\sum q_{oi}P_{1i}}\times 100=\frac{248+756}{320+980}\times 100=\frac{1004}{1300}\times 100=77\cdot 23$$

(iv) ফিশারের সূত্র অনুযায়ী পরিমাণ সূচক সংখ্যা হবে

$$\sqrt{\frac{\sum q_{1i}P_{oi}}{\sum q_{oi}P_{oi}}\times\frac{\sum q_{1i}\cdot P_{1i}}{\sum q_{oi}.P_{oi}}}\times 100$$

$$=\sqrt{\frac{248}{320}\times\frac{756}{980}}\times 100$$

$$=\sqrt{0\cdot 775\times 0\cdot 77}\times 100$$

$$= 0\cdot 77 \times 100 = 77$$

উদাহরণ : 5·3 : নীচে চারটি দ্রব্যের শতকরা হিসাবে আপেক্ষিক দাম ও তাদের ভার দেওয়া হল।

দ্রব্য :	A	B	C	D
আপেক্ষিক দাম :	115	110	125	116
ভার :	w_1	w_2	$2w_1$	w_2–2

যদি ভারগুলির যোগফল 30 হয় আর দাম সূচক সংখ্যা 118% হয়, তবে w_1 ও w_2 এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : যেহেতু ভারগুলির যোগফল 30 উপরের ভাগগুলি যোগ করে পাই

$$w_1+w_2+2w_1+w_2-2=30$$

অথবা, $3w_1 + 2w_2 = 32......(1)$

এখন ভারযুক্ত আপেক্ষিক দামের গড় পদ্ধতিতে দাম সূচক সংখ্যা হবে

$$\frac{115 \cdot w_1 + 110 \cdot w_2 + 125 \cdot 2w_1 + 116(w_2 - 2)}{30} = 118$$

অথবা, $\dfrac{365w_1 + 226w_2 - 232}{30} = 118$

অথবা, $365w_1 + 226w_2 - 232 = 3540$

অথবা, $365w_1 + 226w_2 = 3772......(2)$

সমীকরণ (1) × 113 থেকে পাই $339w_1 + 226w_2 = 3616.....(3)$

এবার সমীকরণ (2) – সমীকরণ (3) থেকে পাই

$26w_1 = 156$

অথবা, $w_1 = 6$

এখন সমীকরণ (1) এ w_1 এর মান বসিয়ে পাই

$3 \times 6 + 2w_2 = 32$ বা, $18 + 2w_2 = 32$ বা $2w_2 = 14$

$\therefore w_2 = 7$

5.7 সূচক সংখ্যার পরীক্ষাসমূহ

ফিশার দাম সূচক সংখ্যাগুলির সূচক সংখ্যা হিসাবে দৃঢ়তা এবং সামঞ্জস্য যাচাই করার জন্য দুটি পরীক্ষা পদ্ধতির কথা বলেছেন :

(i) কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষা (Time Reversal Test)

(ii) গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষা (Factor Reversal Test)

এই পরীক্ষাগুলি করার সময় সূচক সংখ্যার সূত্রের গুণনীয়ক 100 বাদ দেওয়া হয়।

5.7.1 কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষা

কোনো সূচক সংখ্যা যদি কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয় তবে বলা যাবে ঐ সূচক সংখ্যা

সময়ের সাপেক্ষে সামনের দিকে এগোতে অথবা পিছনের দিকে আসাতে খুবই সামঞ্জস্যপূর্ণ। এর অর্থ হল ভিত্তি বছরের সাপেক্ষে চলতি বছরের সূচক সংখ্যাটি (I_{10}), চলতি বছরের সাপেক্ষে ভিত্তি বছরের সূচক সংখ্যার (I_{10}) ব্যস্ত আনুপাতিক। গাণিতিক পরিভাষায় :

$$I_{01} \times I_{10} = 1 \text{ ......(1)}$$

যে সব সূচক সংখ্যা (1) সমীকরণটি মেনে চলে সেই সূচক সংখ্যাটি কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ বলে ধরা হয়। এখন সূচক সংখ্যার বিভিন্ন সূত্রগুলিকে পরীক্ষা করা হবে।

ভিত্তি বছর ও চলতি বছর পাল্টাপাল্টি করে আমরা দুটি সূচক I_{01} ও I_{10} পাই

সূত্র (I_{01}) **(I_{10})** **$I_{01} \times I_{10}$** **উপসংহার**

1. লাসপ্যেয়ারের দাম সূচক

$$\frac{\sum P_{1i} \cdot q_{oi}}{\sum P_{oi} \cdot q_{oi}} \qquad \frac{\sum P_{oi} \cdot q_{1i}}{\sum P_{1i} \cdot q_{1i}} \qquad \frac{\sum P_{1i} \cdot q_{oi}}{\sum P_{oi} \cdot q_{oi}} \times \frac{\sum P_{oi} \cdot q_{1i}}{\sum P_{1i} \cdot q_{1i}} \neq 1$$

এখানে সমীকরণ (1) সিদ্ধ হয়নি।

অর্থাৎ লাসপ্যেয়ারের সূত্র কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ নয়।

2. পাসের দাম সূচক

$$\frac{\sum P_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum P_{oi} \cdot q_{1i}} \qquad \frac{\sum P_{oi} \cdot q_{oi}}{\sum P_{1i} \cdot q_{oi}} \qquad \frac{\sum P_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum P_{oi} \cdot q_{1i}} \times \frac{\sum P_{oi} \cdot q_{oi}}{\sum P_{1i} \cdot q_{oi}} \neq 1$$

এখানেও সমীকরণ (1) সিদ্ধ হয়নি।

অর্থাৎ পাসের সূত্র কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ নয়।

3. ফিশারের আদর্শ দাম সূচক

$$\sqrt{\frac{\sum P_{1i} \cdot q_{oi}}{\sum P_{oi} \cdot q_{oi}} \times \frac{\sum P_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum P_{oi} \cdot q_{1i}}} \qquad \sqrt{\frac{\sum P_{oi} \cdot q_{1i}}{\sum P_{1i} \cdot q_{1i}} \times \frac{\sum P_{oi} \cdot q_{oi}}{\sum P_{1i} \cdot q_{oi}}} \qquad \sqrt{\frac{\sum P_{1i} \cdot q_{oi}}{\sum P_{oi} \cdot q_{oi}} \times \frac{\sum P_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum P_{oi} \cdot q_{1i}}} \times$$

$$\sqrt{\frac{\sum P_{oi} \cdot q_{1i}}{\sum P_{1i} \cdot q_{1i}} \times \frac{\sum P_{oi} \cdot q_{oi}}{\sum P_{1i} \cdot q_{oi}}} = 1$$

এখানে সমীকরণ (1) সিদ্ধ হয়েছে।
অর্থাৎ ফিশারের আদর্শ সূত্র কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ।

4. মার্শাল-এর্জওয়ার্থ দাম সূচক

$$\frac{\sum P_{1i}(q_{oi}+q_{1i})}{\sum P_{oi}(q_{oi}+q_{1i})} \qquad \frac{\sum P_{oi}(q_{1i}+q_{oi})}{\sum P_{1i}(q_{1i}+q_{oi})} \qquad \frac{\sum P_{1i}(q_{oi}+q_{1i})}{\sum P_{oi}(q_{oi}+q_{1i})}\times$$

$$\frac{\sum P_{oi}(q_{1i}+q_{oi})}{\sum P_{1i}(q_{1i}+q_{oi})}\times = 1$$

এখানে সমীকরণ (1) সিদ্ধ হয়েছে।
অর্থাৎ মার্শাল-এর্জওয়ার্থ সূত্রটি কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ।

5. সরল সমষ্টিগত দাম সূচক

$$\frac{\sum P_{1i}}{\sum P_{oi}} \qquad \frac{\sum P_{oi}}{\sum P_{1i}} \qquad \frac{\sum P_{1i}}{\sum P_{oi}}\times\frac{\sum P_{oi}}{\sum P_{1i}} = 1$$

এখানে সমীকরণ (1) সিদ্ধ হয়েছে।
অর্থাৎ সরল সমষ্টিগত দাম সূচকটি কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ।

6. আপেক্ষিক দামের সরল
গুণোত্তর গড় পদ্ধতিতে দাম সূচক

$$\prod\left(\frac{P_{1i}}{P_{oi}}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \prod\left(\frac{P_{oi}}{P_{1i}}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \prod\left(\frac{P_{1i}}{P_{oi}}\right)^{\frac{1}{n}}\times\prod\left(\frac{P_{oi}}{P_{1i}}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$=\left(\frac{P_{11}}{P_{01}}\times\frac{P_{12}}{P_{02}}\times.....\times\frac{P_{1n}}{P_{0n}}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad =\left(\frac{P_{01}}{P_{11}}\times\frac{P_{02}}{P_{12}}\times.....\times\frac{P_{0n}}{P_{1n}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

এখানে সমীকরণ (1) সিদ্ধ হয়েছে।
অর্থাৎ আপেক্ষিক দামের সরল গুণোত্তর গড় পদ্ধতিতে দাম সূচকটি কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ।

5.7.2 গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষা

ধরা যাক কোনো দ্রব্যের ভিত্তি বছরে এবং চলতি বছরের দাম P_{oi} ও P_{1i} এবং তাদের পরিমাণ যথাক্রমে q_{oi} ও q_{1i}

তাহলে দ্রব্যটির দাম সূচক (PI) ও পরিমাণ সূচক (QI) হবে যথাক্রমে $\frac{P_{1i}}{P_{oi}}$ এবং $\frac{q_{1i}}{q_{oi}}$.

এখানে গুণনীয়ক 100 কে উপেক্ষা করা হয়েছে।

এখন এই দুই সূচকের গুণফল হবে

$$\underset{(PI)}{\text{দাম সূচক}} \times \underset{(PI)}{\text{পরিমাণ সূচক}} = \frac{P_{1i}}{P_{oi}} \times \frac{q_{1i}}{q_{oi}} = \frac{P_{1i} \cdot q_{1i}}{P_{oi} \cdot q_{oi}} = \frac{\text{চলতি বছরের মূল্য}}{\text{ভিত্তি বছরের মূল্য}}$$

$$= \text{মূল্য সূচক (VI)}$$

অর্থাৎ PI × QI = VI.....(2)

গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষার নিয়ম হল

প্রতিটি সূত্রের দাম সূচককে পরিমাণ সূচক দিয়ে গুণ করলে গুণফল হবে মূল্য সূচক। অর্থাৎ সমীকরণ (2) সিদ্ধ হতে হবে। এখন প্রতিটি সূত্রের দাম সূচকের মধ্যে P এর জায়গায় q বসালেই পরিমাণ সূচক পাওয়া যাবে।

এখন দেখা যাক কোন কোন সূত্র গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়

সূত্র দাম সূচক (PI)	**পরিমাণ সূচক (QI)**	**দাম সূচক × পরিমাণ সূচক উপসংহার PI × QI**
1. লাসপ্যেয়ার-এর সূত্র		
$\frac{\sum P_1 q_o}{\sum P_o q_o}$	$\frac{\sum q_1 P_o}{\sum q_o P_o}$	$\frac{\sum P_1 q_o}{\sum P_o q_o} \times \frac{\sum q_1 P_o}{\sum q_o P_o} \neq \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_o q_o}$

এখানে $PI \times QI \neq VI$
অর্থাৎ সমীকরণ (2) সিদ্ধ হয়নি।
সুতরাং লাসপেয়ারের সূত্র গুণনীয়ক বিপরীত করণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হবে না।

2. পাস-এর সূত্র

$$\frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_o q_1} \qquad \frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_o P_1} \qquad \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_o q_1} \times \frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_o P_1} \neq \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_o q_o}$$

এখানে $PI \times QI \neq VI$
অর্থাৎ সমীকরণ (2) সিদ্ধ হয়নি।
সুতরাং পাসের সূত্র গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হবে না।

3. ফিশারের আদর্শ সূত্র

$$\sqrt{\frac{\sum P_1 q_o}{\sum P_o q_o} \times \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_o q_1}} \qquad \sqrt{\frac{\sum q_1 P_o}{\sum q_o P_o} \times \frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_o P_1}} \qquad \sqrt{\frac{\sum P_1 q_o}{\sum P_o q_o} \times \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_o q_1}} \times$$

$$\sqrt{\frac{\sum q_1 P_o}{\sum q_o P_o} \times \frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_o P_1}} = \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_o q_o}$$

এখানে $PI \times QI \neq VI$
অর্থাৎ সমীকরণ (2) সিদ্ধ হয়েছে।
সুতরাং ফিশারের আদর্শ সূত্র গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়েছে।

4. মার্শাল-এজওয়ার্থ সূত্র

$$\frac{\sum P_1 (q_o + q_1)}{\sum P_1 (q_o + q_1)} \qquad \frac{\sum q_1 (P_o + P_1)}{\sum q_o (P_o + P_1)} \qquad \frac{\sum P_1 (q_o + q_1)}{\sum P_o (q_o + q_1)} \times \frac{\sum q_1 (P_o + P_1)}{\sum q_o (P_o + P_1)}$$

$$\neq \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_o q_o}$$

এখানে $PI \times QI \neq VI$
অর্থাৎ সমীকরণ (2) সিদ্ধ হয়নি।
সুতরাং মার্শাল-এজওয়ার্থ সূত্র গুণনীয়ক
বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হবে না।

টীকা : ফিশারের সূত্র হচ্ছে একমাত্র সূত্র যেটা কালবিপরীতকরণ পরীক্ষা এবং গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষা-দুই পরীক্ষাতেই উত্তীর্ণ হয়, তাই ফিশারের সূত্রকে আদর্শ সূত্র বলা হয়।

উদাহরণ : 5·4 নীচের রাশিতথ্য থেকে ফিশারের আদর্শ সূচক সংখ্যা নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এই সূত্র কাল বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়।

	1984		1985	
দ্রব্য	**পরিমাণ**	**দাম (টাকাতে)**	**পরিমাণ**	**দাম (টাকাতে)**
X	50	32	50	30
Y	35	30	40	25
Z	55	16	50	18

সমাধান : ছক সংখ্যা : 5·2 ফিশারের আদর্শ সূচক সংখ্যার গণনা

	1984		1985					
দ্রব্য	q_o	P_o	q_1	P_1	P_oq_o	P_oq_1	P_1q_o	P_1q_1
X	50	32	50	30	1600	1600	1500	1500
Y	35	30	40	25	1050	1200	875	1000
Z	35	16	50	18	880	800	990	900
মোট	–	–	–	–	3530	3600	3365	3400

ফিশারের দাম সূচক সংখ্যা (I_{01})

$$I_{01} = \left(\sqrt{\frac{\sum P_1q_o}{\sum P_oq_o} \times \frac{\sum P_1q_1}{\sum P_oq_1}}\right) \times 100$$

$$= \left(\frac{3365}{3530} \times \frac{3400}{3600}\right) \times 100$$

$$= \left(\sqrt{\frac{114410}{127080}}\right) \times 100$$

$$=\left(\sqrt{0{\cdot}90}\right)\times 100 = 0{\cdot}95\times 100 = 95$$

এখন কাল-বিপরীতকরণ প্রক্রিয়া অনুযায়ী I_{10} গণনা করতে হবে। ‘o’ এর জায়গায় ‘1’ এবং ‘1’ এর জায়গায় ‘o’ বসিয়ে পাই

$$I_{10}=\sqrt{\frac{\sum P_o q_1}{P_1 q_1}\times\frac{\sum P_o q_o}{P_1 q_o}}$$ [এখানে গুণনীয়ক 100 উপেক্ষা করা হয়েছে]

$$=\sqrt{\frac{3600}{3400}\times\frac{3530}{3365}}$$

কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষা অনুযায়ী ($I_{01}\times I_{10}$) এর মান গণনা করা হল।

এখানে I_{01} এবং I_{10} এর সূত্রে গুণনীয়ক 100 উপেক্ষা করা হয়েছে।

$$I_{10}\times I_{10}=\sqrt{\frac{3365}{3530}\times\frac{3400}{3600}\times\frac{3600}{3400}\times\frac{3530}{3365}}=\sqrt{1}=1$$

সুতরাং প্রমাণিত হল যে ফিশারের দাম সূচক সংখ্যার সূত্রটি কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষা উত্তীর্ণ হয়েছে।

উদাহরণ : 5·5 নীচের রাশিতথ্য থেকে ফিশারের আদর্শ সূচক সংখ্যা নির্ণয় কর এবং পরীক্ষা করে দেখাও যে এই সূচক সংখ্যা সূত্র গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়।

	1984		**1985**	
দ্রব্য	**পরিমাণ**	**দাম**	**পরিমাণ**	**দাম**
A	50	32	50	40
B	35	30	40	35
C	55	16	50	18

সমাধান : ছক সংখ্যা : 5·3 ফিশারের আদর্শ সূচক সংখ্যার গণনা

দ্রব্য	q_o	P_o	q_1	P_1	P_oq_o	P_oq_1	P_1q_o	P_1q_1
A	50	32	50	40	1600	1600	2000	2000
B	35	30	40	35	1050	1200	1225	1400
C	55	16	50	18	880	800	990	900
মোট	–	–	–	–	3530	3600	4215	4300

ফিশারের দাম সূচক $(I_{01}) = \sqrt{\frac{\sum P_1 q_o}{\sum P_o q_o} \times \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_o q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{4215}{3530} \times \frac{4300}{3600}} \times 100$

$$= \sqrt{1{\cdot}19 \times 1{\cdot}19} \times 100$$

$$= 1{\cdot}19 \times 100$$

$$= 119$$

গুণনীয়ক বিপরীতকরণ প্রক্রিয়া অনুযায়ী আমরা প্রথমেই ফিশারের দাম সূচক সংখ্যার সূত্রে গুণনীয়ক 100 কে উপেক্ষা করে I_{01} এর সমীকরণ সাজিয়ে নেব।

সুতরাং $I_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_1 q_o}{\sum P_o q_o} \times \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_o q_1}} = \sqrt{\frac{4215}{3530} \times \frac{4300}{3600}}$

গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পদ্ধতির দ্বিতীয় পর্যায়ে দাম সূচক সংখ্যার সূত্রে ‘P’ এর জায়গায় ‘q’ এবং ‘q’ এর জায়গায় ‘P’ বসিয়ে ফিশারের পরিমাণ সূচক সংখ্যা পাওয়া যাবে।

I'_{01} (পরিমাণ সূচক সংখ্যা) $= \sqrt{\frac{\sum q_1 P_o}{\sum q_o P_o} \times \frac{\sum q_1 P_1}{\sum q_o P_1}}$

$$= \sqrt{\frac{3600}{3530} \times \frac{4300}{4215}}$$

এখন দেখতে হবে ফিশারের সূত্র সমীকরণ (2) কে সিদ্ধ করে কিনা। তার জন্য প্রথমেই $(I_{01} \times I'_{01})$ এই গুণফলটি পরীক্ষা করা প্রয়োজন।

$$I_{01} \times I'_{01} = \sqrt{\frac{4215}{3530} \times \frac{4300}{3600} \times \frac{3600}{3530} \times \frac{4300}{4215}}$$

$$= \sqrt{\frac{(4300)^2}{(3530)^2}}$$

$$= \frac{4300}{3530} = \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_o q_o} = \text{মূল্য সূচক}$$

এখানে PI × QI = VI

অর্থাৎ সমীকরণ (2) সিদ্ধ হয়েছে।

সুতরাং ফিশারের সূত্র গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়েছে।

5.8 শৃঙ্খল-সূচক সংখ্যা

দাম সূচক সংখ্যা গঠন করার সময় আমরা একটি ভিত্তি বছরের (ধরা যাক 'o') সাপেক্ষে একটি চলতি বছরের (ধরা যাক 'n') দাম সূচক নির্ণয় করি। এক্ষেত্রে শুধুমাত্র 'o' বছর ও 'n' বছর—এই দুই বছরের দামের তথ্য সংগ্রহ করা হয়। এ ধরনের সূচক সংখ্যা গঠনের পদ্ধতিকে স্থিরভিত্তি পদ্ধতি (Fixed Base Method) বলা হয়। ধরা যাক স্থিরভিত্তি পদ্ধতিতে যে সূচক সংখ্যা নির্ণয় করা হল সেটি I_{on}.

সূচক সংখ্যা গঠনের আর একটি পদ্ধতি আছে। 'o' এবং 'n' বছরের মাঝে যে বছরগুলি আছে তার প্রত্যেকটি বছরের সূচক সংখ্যা ঠিক তার পূর্ববর্তী বছরের সাপেক্ষে যদি গণনা করা হয় এবং অবশেষে সবকটি সূচক সংখ্যাকে যদি গুণ করে যদি শৃঙ্খলিত করা হয় তবে এই পদ্ধতিকে শৃঙ্খলভিত্তি পদ্ধতি (Chain Base Method) বলা হয়। ধরা যাক্ শৃঙ্খলভিত্তি পদ্ধতিতে যে সূচক সংখ্যা নির্ণয় করা হল। সেটি C_{on} দ্বারা সূচিত হল। এর পোষাকি নাম হল শৃঙ্খলিত সূচক সংখ্যা (Chain Index). এই শৃঙ্খলিত সূচক সংখ্যা সংযোগ সূচক সমূহের (Link Indices) গুণফলের মাধ্যমে পাওয়া যায়। সংযোগ সূচকগুলি হল I_{01}, I_{12}, I_{23} ইত্যাদি।

$$\therefore C_{on} = I_{01} \times I_{12} \times I_{23} \times \ldots\ldots \times I_{n-1,n}$$

ধরা যাক লাসপ্যেয়ারের সূত্রের সাহায্যে স্থির ভিত্তি ও শৃঙ্খল ভিত্তি সূচক সংখ্যা দেখানো হবে

স্থির ভিত্তি পদ্ধতি **শৃঙ্খল ভিত্তি পদ্ধতি**

$$I_{01} = \frac{\sum P_1 q_o}{\sum P_o q_o} \qquad C_{01} = \frac{\sum P_1 q_o}{\sum P_o q_o}$$

$$I_{02} = \frac{\sum P_2 q_o}{\sum P_o q_o} \qquad C_{02} = I_{01} \times I_{12} = \frac{\sum P_1 q_o}{\sum P_o q_o} \times \frac{\sum P_2 q_1}{\sum P_1 q_1}$$

$$I_{03} = \frac{\sum P_3 q_o}{\sum P_o q_o} \qquad C_{03} = I_{01} \times I_{12} \times I_{23} = \frac{\sum P_1 q_o}{\sum P_o q_o} \times \frac{\sum P_2 q_1}{\sum P_1 q_1} \times \frac{\sum P_3 q_2}{\sum P_2 q_2}$$

....

$$I_{on} = \frac{\sum P_n q_o}{\sum P_o q_o} \qquad C_{on} = I_{01} \times I_{12} \times I_{13} \times .....I_{n-1,n}$$

$$= \frac{\sum P_1 q_o}{\sum P_o q_o} \times \frac{\sum P_2 q_1}{\sum P_1 q_1} \times \frac{\sum P_3 q_2}{\sum P_2 q_2} \times .... \times \frac{\sum P_n q_{n-1}}{\sum P_{n-1} q_{n-1}}$$

স্থিরভিত্তি পদ্ধতি ও শৃঙ্খলভিত্তি পদ্ধতিতে গঠিত সূচক সংখ্যা সাধারণত এক হয় না। তবে এই দুই সূচক সংখ্যা এক হবে যখন সূচক সংখ্যার সূত্রটি বৃত্তাকার পরীক্ষায় (Circular Test) উত্তীর্ণ হয়।

5.8.1 বৃত্তাকার পরীক্ষা

বৃত্তাকার পরীক্ষাটি আসলে কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষার বর্ধিত রূপ বিশেষ। এই পরীক্ষা পদ্ধতির শর্ত নীচে দেওয়া হল

$$C_{on} \times I_{no} = 1$$

অর্থাৎ $I_{01} \times I_{12} \times I_{23} \times .... \times I_{n-1,n} \times I_{no} = 1$

লাসপ্যেয়ারের সূত্র, পাসের সূত্র, ফিশারের সূত্র, মার্শাল-এর্জওয়ার্থের সূত্র কোনোটিই এই বৃত্তাকার পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয় না। কেবলমাত্র আপেক্ষিক দামের সরল গুণোত্তর গড় এবং সরল সমষ্টিগত সূচক এই বৃত্তাকার পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়।

উদাহরণ : 5·6 নীচের রাশিতথ্যের সাহায্যে 1971 (= 100) সালকে ভিত্তি বছর ধরে 1972, 1973, 1974, 1975 ও 1976 সালগুলির শৃঙ্খলিত সূচক সংখ্যা নির্ণয় কর।

বছর :	1972	1973	1974	1975	1976
সংযোগ সূচক সংখ্যা :	110	118	115	120	122

সমাধান : শৃঙ্খলিত সূচক সংখ্যা নির্ণয় করার জন্য একটি সমীকরণ ব্যবহার করা হয়—

$$\text{চলতি বছরের শৃঙ্খলিত সূচক সংখ্যা} = \frac{\text{চলতি বছরের সংযোগ সূচক} \times \text{ঠিক পূর্ববর্তী বছরের শৃঙ্খলিত সূচক}}{100}$$

ছকসংখ্যা : 5·4 শৃঙ্খলিত সূচকের গণনা

বছর	সংযোগ সূচক	শৃঙ্খলিত সূচক
1971	100	100
1972	110	$\frac{110\times100}{100}=100$
1973	118	$\frac{118\times110}{100}=129{\cdot}8$
1974	115	$\frac{115\times129{\cdot}8}{100}=149{\cdot}3$
1975	120	$\frac{120\times149{\cdot}3}{100}=179{\cdot}2$
1976	122	$\frac{122\times179{\cdot}2}{100}=218{\cdot}6$

উদাহরণ : 5·7 নীচে 1981–85 পর্যন্ত শৃঙ্খলভিত্তি সূচক দেওয়া হল। ঐ সময়ের জন্য বছরগুলির স্থিরভিত্তি সূচক গণনা কর (ভিত্তি বছর 1981 ধরে নিতে হবে)।

বছর	1981	1982	1983	1984	1985
সূচক সংখ্যা :	80	110	120	90	140

সমাধান : শৃঙ্খলভিত্তি মূলক সংখ্যা থেকে স্থির ভিত্তি সূচক সংখ্যায় রূপান্তরিত করতে নীচের সূত্র ব্যবহার করা হয়।

$$\text{চলতি বছরের স্থির ভিত্তি সূচক} = \frac{\text{চলতি বছরের শৃঙ্খলভিত্তি সূচক} \times \text{ঠিক পূর্ববর্তী বছরের স্থিরভিত্তি সূচক}}{100}$$

ছক সংখ্যা : 5·5 স্থিরভিত্তি সূচক সংখ্যার গণনা

বছর	শৃঙ্খলিত সূচক	স্থিরভিত্তি সূচক
1981	80	80
1982	110	$\frac{110\times80}{100}=88$
1983	120	$\frac{120\times88}{100}=105{\cdot}60$
1984	90	$\frac{90\times105{\cdot}6}{100}=95{\cdot}04$
1985	140	$\frac{140\times95{\cdot}04}{100}=133{\cdot}056$

5.8.2 স্থিরভিত্তিক পদ্ধতি ও শৃঙ্খলভিত্তিক পদ্ধতির মধ্যে তুলনা

স্থিরভিত্তিক পদ্ধতিতে সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে শুধুমাত্র দুটি বছরের তথ্য সংগ্রহ করা হয়—ভিত্তি বছর ও চলতি বছর। কিন্তু শৃঙ্খলভিত্তিক পদ্ধতিতে সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে ভিত্তি বছর ও চলতি বছরের মাঝের বছরগুলিকেও গণনার মধ্যে আনা হয়। এদিক থেকে দেখলে শৃঙ্খলভিত্তিক সূচক সংখ্যা অনেক বেশি নির্ভুল।

শৃঙ্খলভিত্তিক পদ্ধতিতে স্থিরভিত্তিক পদ্ধতির তুলনায় কতকগুলি সুবিধা আছে।

(1) শৃঙ্খলভিত্তিক পদ্ধতি অনেক বেশি বাস্তবসম্মত কেননা ভিত্তি ও চলতি বছরের মধ্যের বছরগুলিও গণনাতে অংশ নেয়।

(2) যেহেতু মধ্যবর্তী বছরগুলি গণনাতে অংশ নেয় তাই অন্তবর্তী সূচক সংখ্যাগুলি অর্থাৎ (সংযোগ সূচক সংখ্যাগুলি (Link Index Numbers) পরিবর্তনের প্রকৃত রূপ প্রকাশ করে। স্থিরভিত্তিক সূচক সংখ্যায় এটা সম্ভব নয়।

(3) সময়ের পরিবর্তনের সঙ্গে বিক্রেতারা নতুন নতুন দ্রব্য সামগ্রী বাজারে নিয়ে আসে। ক্রেতার রুচি ও পছন্দ ক্রমাগত পরিবর্তিত হয়। ফলে ভিত্তি ও চলতি বছরের মধ্যে দীর্ঘকালের তফাত হলে এই পরিবর্তনগুলো কীভাবে স্থিরভিত্তিক সূচক সংখ্যা প্রকাশ করতে পারে না।

কিন্তু, শৃঙ্খলভিত্তি সূচক সংখ্যার কিছু অসুবিধাও আছে।

(1) এই পদ্ধতি জটিল ও কষ্টসাধ্য।

(2) এই পদ্ধতি সহজে বোঝা যায় না।

(3) এই পদ্ধতিতে ক্রমযৌগিক ভুলের (Cumulative Error) সম্ভাবনা আছে।

(4) সময়সীমা যদি অল্প হয় তবেই এই পদ্ধতিতে নির্ভুল সূচক সংখ্যা নির্ণয় করা যায়।

সুতরাং স্থিরভিত্তিক সূচক সংখ্যা গননা ও বোঝার দিক থেকে সহজ। কিন্তু যদি নির্ভুল সূচক সংখ্যা নির্ণয় করা লক্ষ্য হয় তবে শৃঙ্খলভিত্তিক সূচক সংখ্যাই উপযুক্ত।

5.9 জীবনধারণের ব্যয় সূচক বা পণ্য ভোগকারীর দাম সূচক সংখ্যা

জীবন ধারণের ব্যয় সূচক সংখ্যা বলতে একটি পরিমাপ বোঝায় যার দ্বারা দুই সময়ে একই রকম তৃপ্তি লাভের জন্য প্রয়োজনীয় অর্থের আপেক্ষিক পরিমাণ যা শতকরা হারে প্রকাশ করা হয়। জীবনধারণের ব্যয় সূচক সর্বদাই একটি নির্দিষ্ট শ্রেণির মানুষের জন্য এবং কোনো নির্দিষ্ট স্থানের জন্য গণনা করা হয়। উদাহরণ স্বরূপ বলা যায় কলকাতার মধ্যবিত্ত শ্রেণির জীবনধারণের ব্যয় সূচক সংখ্যা। এই সূচক সংখ্যা একটি নির্দিষ্ট ভোগ্যপণ্য সমষ্টির খুচরা দামের উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হয়।

অন্যভাবে বলতে গেলে সময়ের সাপেক্ষে জিনিসপত্রের দামস্তর পরিবর্তিত হয়। কিন্তু এই পরিমাণ দ্রব্যসমষ্টি দুটি ভিন্ন সময়ে ক্রয় করতে কতটা বাড়তি টাকার দরকার হবে সেটা এই শ্রেণির ভোগকারীদের দাম সূচকের মাধ্যমে স্থির করা হয়।

জীবনধারণের ব্যয় সূচক গঠন :

(1) প্রথমেই লোকেদের সামাজিক শ্রেণি ও তাদের ভৌগোলিক অবস্থান নির্দিষ্ট করতে হয়। এখানে ধরা যাক আমরা কলকাতার মধ্যবিত্ত শ্রেণির জীবনধারণের ব্যয় সূচক গঠন করতে আগ্রহী।

(2) এ পরই ভিত্তি বছর পছন্দ করতে হবে।

(3) মানুষের শ্রেণি নির্ধারণ করে ঐ শ্রেণির পারিবারিক আয়/ব্যয়ের হিসাব অনুসন্ধান করা প্রয়োজন। নমুনা সংগ্রহের সময় পরিবারগুলি দ্রব্য সামগ্রী ও সেবাকার্যের উপর যে অর্থ ব্যয় করে সেটিকে পাঁচ ভাগে ভাগ করতে হবে :

খাদ্য, বস্ত্র, জ্বালানী, বাসস্থান এবং বিবিধ।

(4) যে নির্দিষ্ট ভৌগোলিক অবস্থানের মধ্যে নমুনা সংগ্রহ সীমাবদ্ধ সেই স্থানের বাজার থেকে সপ্তাহে অন্ততঃ একবার ব্যবহৃত দ্রব্যাদির খুচরা দাম সংগ্রহ করা হয়। এরপর প্রত্যেক দ্রব্যের গড় দাম নির্ধারণ করা হয়।

(5) এবার ভারযুক্ত আপেক্ষিক দাম পদ্ধতিতে প্রতিটি শ্রেণির দ্রব্যের ক্ষেত্রে লাসপ্যোয়ারের দাম সূচক নির্ণয় করা হয়।

$$\text{দলীয় সূচক } = \mathrm{I} = \frac{\sum w_i \left(\frac{\mathrm{P}_{1i}}{\mathrm{P}_{oi}}\right) \times 100}{100}$$

$$\text{যখন } w_i = \frac{\mathrm{P}_{oi} \times q_{oi}}{\sum \mathrm{P}_{oi} \times q_{oi}} \times 100$$

এখানে w_i হল i তম (i = 1,2, 3, 4, 5) শ্রেণির দ্রব্যের উপর পরিবারগুলি গড়ে তাদের আয়ের শতকরা কতভাগ ব্যয় করে।

(6) এই দলীয় সূচকগুলির ভারযুক্ত গড়ই হল জীবনধারণের ব্যয় সূচক (Cost of Living Index)

$$\mathrm{I}_{\mathrm{oLI}} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \mathrm{I}_i w_i}{\sum_{i=1}^{5} w_i} \quad \text{যখন } \sum_{i=1}^{5} w_i = 100$$

প্রতিটি শ্রেণির দ্রব্যের ভার ঐ দ্রব্যের উপর পরিবারগুলি তাদের আয়ের শতকরা কত ভাগ ব্যয় করে সেটাই বোঝায়।

(7) জীবনধারণের ব্যয়সূচক সাধারণতঃ প্রতি সপ্তাহে গঠন করা হয়। সাপ্তাহিক সূচকের গড় থেকে মাসিক ব্যয় সূচক এবং মাসিক সূচকের গড় থেকে বাৎসরিক সূচক গঠন করা হয়।

5.9.1 জীবনধারণের ব্যয় সূচকের ব্যবহার

1. সরকারি কর্মচারীদের মহার্ঘ্য ভাতা (Dearness Allowanse) হিসাব করার কাজে এই সূচক গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নিয়ে থাকে।

2. জীবনধারণের ব্যয় সূচকের পারস্পরিক মান (reciprocal) এর মাধ্যমে অর্থের ক্রয় ক্ষমতা পরিমাপ করা হয়। ক্রয় ক্ষমতা = 100/দাম সূচক সংখ্যা

3. আর্থিক মজুরিকে জীবনধারণের ব্যয় সূচক দিয়ে ভাগ দিলে প্রকৃত মজুরি পাওয়া যায়।

$$\text{প্রকৃত মজুরি (Real Wage)} = \frac{\text{আর্থিক মজুরি (Nominal Wage)}}{\text{জীবনধারণের ব্যয় সূচক}}$$

4. এছাড়া সরকার মজুরি নীতি, দাম নীতি, খাজনা নীতি এবং সাধারণ অর্থনৈতিক নীতি নির্ধারণে জীবনধারণের ব্যয় সূচকের প্রচুর অবদান আছে।

উদাহরণ : 5·8 নীচে 5 টি ভোগ্যপণ্যের জীবনধারণের ব্যয় সূচক দেওয়া হল 1981 সালে মধ্যবিত্ত শ্রেণির জন্য (ভিত্তি বছর 1971)। এই 5টি পণ্যের উপর ব্যয়ের শতকরা ভাগও সঙ্গে দেওয়া হল। এখন 1981 এর জন্য জীবনধারণের সূচক সংখ্যা নির্ণয় কর (ভিত্তি বছর 1971)।

ভোগ্য পণ্য :	**খাদ্য দ্রব্য**	**পরিধানের বস্ত্র**	**আলো ও জ্বালানী**	**বাড়ি ভাড়া**	**বিবিধ**
সূচক সংখ্যা :	525	325	240	180	200
মোট খরচের শতকরা ভাগ :	40	16	15	20	9

মিঃ রায়ের 1971 সালে আয় ছিল 550/-. 1971 সালের স্তরে জীবনযাত্রার মান ধরে রাখতে মিঃ রায়ের আয় 1981 সালে কত হওয়া উচিৎ?

ছক সংখ্যা : 5·6 জীবনধারণের ব্যয় সূচক এর গণনা

ভোগ্য পণ্য	**সূচক সংখ্যা (I)**	**ব্যয়ের শতকরা হিসাব (w)**	**IW**
খাদ্য	525	40	21000
পরিধানের বস্ত্র	325	16	5200
আলো ও জ্বালানী	240	15	3600
বাড়ি ভাড়া	180	20	3600
বিবিধ	200	9	1800
মোট	–	100	35200

সুতরাং জীবনধারণের ব্যয় সূচক সংখ্যা $= \frac{\sum \mathrm{I}w}{\sum w} = \frac{35200}{100} = 352$

যেহেতু 1981 সালে ব্যয় সূচক বেড়ে 352 হয়েছে

আগে 1971 সালে এই ব্যয় সূচক ছিল 100

সুতরাং মিঃ রায়ের জীবনযাত্রার মান 1971 সালের মতো রাখতে হলে

ওঁর আয় হওয়া উচিৎ $\frac{352}{100} \times 550 = 1936$ টাকা।

5.10 ভিত্তি পরিবর্তন, সংযুক্তিকরণ ও অপস্ফিতী

ভিত্তি পরিবর্তন : কখনও কখনও ভিত্তি বছর পরিবর্তনের প্রয়োজন দেখা দেয়। বিশেষভাবে যখন ভিত্তি বছরটি খুবই পুরনো এবং তুলনামূলক কাজে ব্যবহারের অযোগ্য হয়ে পড়ে। আবার যখন দুই বা ততোধিক সূচক সংখ্যার শ্রেণির মধ্যে তুলনা করার প্রয়োজন হয় যাদের ভিত্তি বছরগুলি আলাদা আলাদা তখন সর্বজনগ্রাহ্য একটি ভিত্তি বছর নির্দিষ্ট করে সব কটি সূচক সংখ্যার শ্রেণিকে নতুন ভিত্তি বছরের সাপেক্ষে নতুন করে গঠন করে তুলনার যোগ্য করে তোলা হয়। নতুন ভিত্তি বছরের সূচক সংখ্যা সর্বদাই 100 হবে। এখন অন্যান্য বছরগুলির সূচক সংখ্যা নতুন ভিত্তি বছরের সাপেক্ষে নিম্নলিখিত সূত্র অনুযায়ী গঠন করা হয়।

যে কোনো বছরের সূচক সংখ্যা (নতুন ভিত্তি বছরের সাপেক্ষে)

$$= \frac{\text{পুরনো সূচক সংখ্যা সেই বছরের জন্য}}{\text{পুরনো সূচক সংখ্যা নতুন ভিত্তি বছরের জন্য}} \times 100$$

সুতরাং আরও সহজ ভাবে বললে বলা হয় যে নতুন সূচক সংখ্যার শ্রেণি (নতুন ভিত্তি বছরের সাপেক্ষে) গণনা করার সব থেকে সহজ উপায় হল পুরানো সূচক সংখ্যাগুলিকে নীচের গুণনীয়ক দিয়ে গুণ করলেই পাওয়া যাবে।

$$\text{গুণনীয়কটি হল } \left(\frac{100}{\text{নুতন ভিত্তি বছরের জন্য পুরনো সূচক সংখ্যা}} \right)$$

টীকা : এই পদ্ধতি সঠিক ভাবে ব্যবহৃত হয় যখন প্রদত্ত সূচক সংখ্যাগুলি বৃত্তাকার পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়।

উদাহরণ : 5·9 নীচের দাম সূচক সংখ্যাগুলির ভিত্তি বছর 2011.

ভিত্তি বছর 2014 ধরে 2011 থেকে 2017 পর্যন্ত দাম সূচক নির্ণয় কর।

বছর :	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
সূচক সংখ্যা :	100	120	145	200	220	210	180

ছকসংখ্যা : 5·7 ভিত্তি বছর 2011 থেকে 2014 তে পরিবর্তন

বছর	¢%þb¢,..Ÿ (2011 = 100)	সূচক সংখ্যা (2014 = 100)
2011	100	$\frac{100}{200} \times 100 = 50$
2012	120	$\frac{100}{200} \times 120 = 60$
2013	145	$\frac{100}{200} \times 145 = 72{\cdot}5$
2014	200	$\frac{100}{200} \times 200 = 100$
2015	220	$\frac{100}{200} \times 220 = 110$
2016	210	$\frac{100}{200} \times 210 = 105$
2017	180	$\frac{100}{200} \times 180 = 90$

সংযুক্তিকরণ (Splicing)

সংযুক্তিকরণ আসলে এক ধরনের ভিত্তি বছর পরিবর্ত্তন। বেশির ভাগ সরকারি পরিসংখ্যানে দেখা যায় যে সূচক সংখ্যার একটি শ্রেণি কোনো একটি নির্দিষ্ট ভিত্তি বছরের সাপেক্ষে গণনা করে শ্রেণিটিতে বেশ কিছু পরে ছেদ টানা হয়। এর প্রধান কারণ হল ভিত্তি বছরটি খুবই পুরনো এবং তুলনার অযোগ্য। তারপর দেখা যায় যে সূচক সংখ্যার একটি নতুন শ্রেণি শুরু করা হয়েছে যার ভিত্তি বছর হল আগের ছেদ টানা শ্রেণিটির শেষ বছর। এখন গবেষণার কাজে তুলনামূলক আলোচনার জন্য এই দুটি শ্রেণির সংযুক্তিকরণ খুবই প্রয়োজনীয়। যে পদ্ধতিতে দুটি শ্রেণিকে (যাদের মধ্যে অন্তত একটি বছর দুটি শ্রেণিতেই আছে) সংযুক্ত করা হয় তাকে সংযুক্তিকরণ (Splicing) বলা হয়।

সংযুক্তিকরণের পর কোনো নির্দিষ্ট চলতি বছরের সূচক সংখ্যা

$$= \frac{\text{নতুন ভিত্তি বছরের পুরানো সূচক সংখ্যা}}{100} \times \text{চলতি বছরের সূচক সংখ্যা}$$

উদাহরণ : 5·10 দুটি সূচক সংখ্যার শ্রেণি দেওয়া হ'ল—A ও B. A শ্রেণির ভিত্তি বছর 2001 এবং B শ্রেণির ভিত্তি বছর হ'ল 2007.

বছর :	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
সূচক সংখ্যার শ্রেণি A :	100	120	150	200	300	350	400
বছর :	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
সূচক সংখ্যার শ্রেণি B :	100	115	90	95	102	110	98

(i) B শ্রেণিকে A শ্রেণির সঙ্গে সংযুক্ত কর (ii) A শ্রেণিকে B শ্রেণির সঙ্গে সংযুক্ত কর।

ছক সংখ্যা : 5·7 সূচক সংখ্যার শ্রেণিদের সংযুক্তিকরণের গণনা

বছর **(1)**	**সূচক সংখ্যার শ্রেণি—A** **(ভিত্তি 2001=100)** **(2)**	**সূচক সংখ্যার শ্রেণি—B** **(ভিত্তি 2007=100)** **(3)**	**B শ্রেণিকে A শ্রেণির সঙ্গে সংযুক্তিকরণ** **(2001=100)** **(4)**	**A শ্রেণিকে B শ্রেণির সঙ্গে সংযুক্তিকরণ** **(2007=100)** **(5)**
2001	100		100	$\frac{100}{400}\times 100 = 25$
2002	120		120	$\frac{100}{400}\times 120 = 30$
2003	150		150	$\frac{100}{400}\times 150 = 37{\cdot}5$
2004	200		200	$\frac{100}{400}\times 200 = 50$
2005	300		300	$\frac{100}{400}\times 300 = 75$
2006	350		350	$\frac{100}{400}\times 350 = 87{\cdot}5$
2007	400	100	400	100
2008		115	$\frac{400}{100}\times 115 = 460$	115
2009		90	$\frac{400}{100}\times 90 = 360$	90

2010		95	$\frac{400}{100}\times 95=380$	95
2011		102	$\frac{400}{100}\times 102=408$	102
2012		110	$\frac{400}{100}\times 110=440$	110
2013		98	$\frac{400}{100}\times 98=392$	98

চতুর্থ স্তম্ভে B শ্রেণিকে A শ্রেণির সঙ্গে সংযুক্ত করা হয়েছে। এই পদ্ধতিকে বলা হয় সম্মুখের দিকে সংযুক্তিকরণ (Forward Splicing)

পঞ্চম স্তম্ভে A শ্রেণিকে B শ্রেণির সঙ্গে সংযুক্ত করা হয়েছে। এই পদ্ধতিকে বলা হয় পশ্চাতের দিকে সংযুক্তিকরণ (Backward Splicing).

অবপাত (Deflating)

যখন দামস্তর বৃদ্ধি পায় তখন অর্থের ক্রয় ক্ষমতা হ্রাস পায়। অর্থাৎ দাম বৃদ্ধির জন্য আমরা একই পরিমাণ অর্থের সাহায্যে আগের তুলনায় অনেক কম দ্রব্য ক্রয় করতে পারি। সুতরাং যদি আর্থিক মজুরি বৃদ্ধি পায় তাতে প্রমাণ হয় না যে জীবনযাত্রার মানও বৃদ্ধি পেয়েছে। তখন আমাদের প্রকৃত মজুরি গণনা করতে হবে যার মাধ্যমে জীবনযাত্রার মান বেড়েছে না কমেছে, না একই আছে বোঝা যাবে। আর্থিক মজুরিকে প্রকৃত মজুরিতে রূপান্তরিত করার পদ্ধতিকেই অবপাত (Deflating) বলা হয়। অবপাত পদ্ধতিটি নীচে সূত্রের আকারে দেওয়া হল :

$$\text{প্রকৃত মজুরী (Real Wage)} = \frac{\text{আর্থিক মজুরি (Money Wage)}}{\text{দাম সূচক বা জীবনধারণের ব্যয়সূচক}} \times 100$$

$$\text{একইভাবে প্রকৃত আয় (Real Income)} = \frac{\text{আর্থিক আয় (Money Income)}}{\text{জীবন ধারণের ব্যয় সূচক}} \times 100$$

উদাহরণ : 5·11 নীচে রাশিতথ্যে আর্থিক মজুরী ও জীবন ধারণের ব্যয় সূচক 2001 থেকে 2007 সাল পর্যন্ত সময়ের জন্য দেওয়া হল (ভিত্তি বছর 2001 = 2001)। প্রকৃত মজুরী নির্ণয় কর।

বছর :	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
আর্থিক মজুরি (টাকায়) :	75	80	90	110	120	126	140
জীবনধারণের ব্যয় সূচক :	100	120	140	150	170	210	250

ছক সংখ্যা : 5·8 প্রকৃত মজুরির গণনা

বছর (1)	মজুরি (টাকায়) (2)	জীবনধারণের ব্যয় সূচক (2001 = 100) (3)	প্রকৃত মজুরি $= \frac{\text{স্তম্ভ (2)}}{\text{স্তম্ভ (3)}} \times 100$ (4)
2001	75	100	75·00
2002	80	120	66·67
2003	90	140	64·28
2004	110	150	73·33
2005	120	170	70·59
2006	126	210	60·00
2007	140	250	56·00

টীকা : প্রকৃত মজুরির সূচক (ভিত্তি বছর 2001 = 100) সংখ্যা গণনা করতে হলে নীচের সূত্র অণুসরণ করতে হবে। প্রকৃত মজুরির সূচক = স্তম্ভ $(4)\times\frac{4}{3}$ (2001 = 100)

5.11 সূচক সংখ্যার ব্যবহার ও তার সীমাবদ্ধতা

সূচক সংখ্যার ব্যবহার :

1. দাম সূচক সংখ্যার সাহায্যে বিভিন্ন সময়ে দামস্তরের পরিবর্তন পরিমাপ করা যায়।

2. পাইকারি দাম সূচক কেবলমাত্র মুদ্রাস্ফীতির পরিমাপ করে না, অর্থের ক্রয় ক্ষমতারও পরিমাপ করে। এর থেকে দেশের অর্থনীতির একটা ছবি পাওয়া যায়।

3. দাম সূচকের সাহায্যে সরকারি কর্মচারীদের মহার্ঘ ভাতার (DA) হার নির্ণয় করা হয়।

4. দাম সূচকের সাহায্যে আর্থিক আয়কে প্রকৃত আয়ে রূপান্তরিত করা যায় এবং তার সাহায্যে জীবন যাত্রার মানের একটা পরিমাপ পাওয়া যায়।

5. সূচক সংখ্যা শুধু পাইকারি দামের নয় খুচরা দামেরও সূচক সংখ্যা গঠন করে জীবনধারণের ব্যায় সূচক নির্ণয় করা হয়। এই জীবনধারণের ব্যয় সূচক একটি নির্দিষ্ট শ্রেণির মানুষের জন্য এবং তাদের ব্যবহৃত দ্রব্য ও সেবার খুচরা দামের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়। এই ব্যয় সূচক মজুরির দর কষাকষি, মহার্ঘ ভাতা স্থির করা, প্রকৃত মজুরি নির্ণয় এবং সরকারের বিভিন্ন অর্থনৈতিক নীতি নির্ধারণে যেমন কর ধার্য করা, ভাড়া নিয়ন্ত্রণ করা ইত্যাদি কাজে ব্যবহৃত হয়। শেয়ার বাজারের SENSEX হল শেয়ারের দামের সূচক

সংখ্যা এই সূচক সংখ্যা। অর্থনীতিবিদরা, ব্যাঙ্কের আধিকারিকরা এবং ফাটকা কারবারীরা প্রভূত পরিমাণে নিজেদের কাজে ব্যবহার করে।

6. বিভিন্ন শিল্পের উৎপাদনের পরিমাণেরও সূচক সংখ্যা গঠন করা হয় সেই শিল্পের উৎপাদন ক্ষমতা ঠিকভাবে বোঝার জন্য। আমদানি ও রপ্তানির সূচক সংখ্যার মাধ্যমে কোনো দেশের বৈদেশিক মুদ্রার ভাণ্ডারের অবস্থা সম্যক রূপে বোঝা যায়।

সূচক সংখ্যার সীমাবদ্ধতা

1. সূচক সংখ্যার গঠনে প্রতিটি দ্রব্যকে নমুনার অন্তর্ভুক্ত করা সম্ভব হয় না।

2. দাম সূচক গঠনের জন্য নমুনা সংগ্রহের সময় ইচ্ছাকৃত নমুনার (purposive sampling) সাহায্য নেওয়া হয়। যদৃচ্ছা নমুনা (Random Sampling) নেওয়া হয় না। ফলে সূচক সংখ্যা খানিকটা পক্ষপাতমূলক হয়ে পড়ে।

3. ভিত্তি বছর ও চলতি বছরের মধ্যে বেশি দূরত্ব থাকা সমীচীন নয়। দূরত্ব বেশি হলে বাজার থেকে পুরানো জিনিসের বদলে অনেক নতুন জিনিসের আমদানি হয়। তার ফলে সূচক গঠনে অসুবিধা দেখা দেয়।

4. সূচক সংখ্যা গঠনের সূত্র অনেকগুলি হওয়ায় উপযুক্ত সূত্র বিচার করা কষ্টসাধ্য হয়ে পড়ে।

5. সূচক সংখ্যার ভিত্তি বছর পছন্দ একটি দুরূহ কাজ। ভুল ভিত্তি বছর বেছে নিলে ভুল সিদ্ধান্ত হয়ে থাকার সমস্যা দেখা দেয়।

6. সঠিক তথ্য সংগ্রহ করা একটি কঠিন কাজ। যদি তথ্য নির্ভুল না হয় তবে সূচক সংখ্যাও নির্ভুল হবে না।

5.12 সারাংশ

সূচক সংখ্যা বলতে কোনো চলকের আপেক্ষিক পরিবর্তনের একটি পরিসংখ্যানগত পরিমাপ বোঝায়। এই আপেক্ষিক পরিবর্তন সময়ের সাপেক্ষে অথবা ভৌগোলিক অবস্থানের সাপেক্ষে গণনা করা হয়।

যখন দ্রব্যের দামের পরিবর্তনের তুলনা করা হয় তখন সূচক সংখ্যাকে দাম সূচক সংখ্যা বলা হয়। আবার যখন দ্রব্যের পরিমাণের পরিবর্তনের তুলনা করা হয় তখন সূচক সংখ্যাকে পরিমাণ সূচক সংখ্যা বলা হয়। ভিত্তি বছরের দাম সূচক সর্বদাই 100 ধরা হয়। এখন চলতি বছরের দাম সূচক সংখ্যা যদি 160 হয় তার অর্থ হল চলতি বছরে দ্রব্যের দাম ভিত্তি বছরের তুলনায় 60% বৃদ্ধি পেয়েছে।

দাম সূচক গঠনের কিছু সমস্যা আছে। যেমন দাম সূচক গঠনের উদ্দেশ্য নির্দিষ্ট করতে হয়, ভিত্তি বছরটি সাবধানে পছন্দ করতে হয়, দ্রব্য নির্বাচন সুষ্ঠু ভাবে করতে হবে যাতে উদ্দেশ্য প্রতিফলিত হয়, রাশিতথ্য সংগ্রহের সময় ইচ্ছাকৃত নমুনা (Purposive Sampling) সংগ্রহ করা হয়, দ্রব্যগুলির ভার

(weight) নির্বাচন যেন সঙ্গত হয়, অবশেষে অনেকগুলি সূচক গঠনের সূত্রের মধ্যে থেকে উপযুক্ত সূত্র পছন্দ করতে হয়।

দাম সূচক গঠনের বিভিন্ন পদ্ধতি আছে—(1) সমষ্টিগত পদ্ধতি ও (2) আপেক্ষিক গড় পদ্ধতি। আপেক্ষিক গড় পদ্ধতি দুই প্রকার—(i) সরল আনুপাতিক গড় পদ্ধতি ও (ii) ভারযুক্ত আনুপাতিক গড় পদ্ধতি। সমষ্টিগত পদ্ধতি আবার দুই প্রকার—(i) সরল সমষ্টিগত পদ্ধতি এবং (ii) ভারযুক্ত সমষ্টিগত পদ্ধতি। এই ভারযুক্ত সমষ্টিগত পদ্ধতিতে বিভিন্ন ধরনের ভার (weight) ব্যবহার করে বিভিন্ন পরিংখ্যানবিদ্ বিভিন্ন সূত্রের সাহায্যে সূচক সংখ্যা গঠন করেছেন যেমন লাসপ্যেয়ারের সূত্রে ভিত্তি বছরের দ্রব্য পরিমাণকে ভার হিসাবে ব্যবহার করা হয়েছে। পাসের সূত্রে চলতি বছরের দ্রব্য পরিমাণকে ভার হিসাবে ব্যবহার করা হয়েছে। মার্শাল-এর্জওয়ার্থের সূত্রে চলতি বছরের দ্রব্যের পরিমাণ ও ভিত্তি বছরের দ্রব্যের পরিমাণের গাণিতিক গড়কে ভার হিসাবে ব্যবহার করা হয়েছে। ফিশারের সূত্রে লাসপ্যেয়ার ও পাসের দাম সূচকের গুণোত্তর গড়কে সূচক সংখ্যার আদর্শ মান হিসাবে ধরা হয়। বউলের সূত্রে লাসপ্যেয়ার ও পাসের দাম সূচকের সরল গাণিতিক গড়কে দাম সূচক বলে ধরা হয়।

পরিমাণ সূচক গঠনে দাম সূচক গঠনের পদ্ধতিগুলি অনুসরণ করা হয়। তাই দাম সূচকের সূত্রগুলিতে p এর জায়গায় q এবং q এর জায়গায় p বসালেই পরিমাণ সূচকের সূত্র পাওয়া যায়।

ফিশার দাম সূচক সংখ্যাগুলির দৃঢ়তা এবং সামঞ্জস্য যাচাই করার জন্য দুটি পরীক্ষা পদ্ধতির কথা বলেছেন।

(i) কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষা

(ii) গুণনীয়ক-বিপরীতকরণ পরীক্ষা

কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষার অর্থ হল ভিত্তি বছরের সাপেক্ষে চলতি বছরের সূচক সংখ্যাটি যদি চলতি বছরের সাপেক্ষে ভিত্তি বছরের সূচক সংখ্যার ব্যস্তানুপাতিক হয়, তবে সূচক সংখ্যার সূত্রটি কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ বলা হবে।

গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষার নিয়ম হল প্রতিটি সূত্রের দামমূলককে পরিমাণ সূচক দিয়ে গুণ করলে গুণফল যদি মূল্য সূচক হয় তবে সূচকসংখ্যার সূত্রটি গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ বলা হবে।

ফিশারের সূত্র হচ্ছে একমাত্র সূত্র যেটা কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষা ও গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষা—দুই পরীক্ষাতেই উত্তীর্ণ হয়, তাই ফিশারের সূত্রকে আদর্শ সূত্র বলা হয়।

আমরা সাধারণত একটি নির্দিষ্ট ভিত্তি বছরের (Base year) সাপেক্ষে একটি নির্দিষ্ট চলতি বছরে (Current year) দামের সূচক সংখ্যা নির্ণয় করি। এটিকে স্থিরভিত্তি পদ্ধতি (Fixed Base Method) বলা হয়।

সূচক সংখ্যা গঠনের আর একটি পদ্ধতি আছে। এটিকে বলে শৃঙ্খলভিত্তি পদ্ধতি (Chain Base Method). ভিত্তি বছর ও চলতি বছরের মধ্যে যে বছরগুলি আছে তার প্রত্যেকটি বছরের সূচক সংখ্যা ঠিক তার পূর্ববর্তী বছরের সাপেক্ষে যদি গণনা করা হয় তবে এই সূচক সংখ্যাগুলিকে সংযোগ সূচক (link

Indices) বলা হয়। এখন এই সংযোগ সূচকগুলিকে যদি গুণ করে শৃঙ্খলিত করা হয় তবে এই পদ্ধতিকে শৃঙ্খলভিত্তি পদ্ধতি বলা হয় এবং গুণফলটিকে শৃঙ্খলিত সূচক সংখ্যা (Chain Index) বলা হয়।

স্থিরভিত্তি পদ্ধতি ও শৃঙ্খলভিত্তি পদ্ধতিতে গঠিত সূচক সংখ্যা সাধারণত এক হয় না। তবে এই দুই সূচক সংখ্যা এক হবে যখন সূচক সংখ্যার সূত্রটি বৃত্তাকার পরীক্ষায় (Circular test) উত্তীর্ণ হয়। বৃত্তাকার পরীক্ষাটি আসলে কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষার বর্ধিত রূপ বিশেষ।

এই পরীক্ষা পদ্ধতির শর্ত হল : $I_{01} \times I_{12} \times I_{23} \times \ldots\ldots \times I_{n-1,n} \times I_{no} = 1$

যেখানে I_{ij} হল সংযোগ সূচক। $i =$ ভিত্তি বছর $j =$ চলতি বছর।

জীবনধারণের ব্যয় সূচক সংখ্যা বলতে একটি পরিমাপ বোঝায় যার মাধ্যমে দুটি আলাদা সময়ে একই রকম তৃপ্তি লাভের জন্য প্রয়োজনীয় অর্থের আপেক্ষিক পরিমাণ যেটা শতকরা হারে প্রকাশ করা হয়। এই সূচক সংখ্যা সর্বদাই একটি নির্দিষ্ট শ্রেণির মানুষের জন্য এবং একটি নির্দিষ্ট স্থানের জন্য গণনা করা হয়। আর্থিক আয়কে (মজুরিকে) জীবনধারণের ব্যয় সূচক দিয়ে ভাগ দিলে প্রকৃত আয় (মজুরি) পাওয়া যায়।

অনেক সময় ভিত্তি বছর খুব পুরনো হয়ে গেলে ভিত্তি বছর পরিবর্তনের প্রয়োজন দেখা দেয়। তখন নতুন সূচক সংখ্যার শ্রেণি (নতুন ভিত্তি বছরের সাপেক্ষে) গণনা করার সব থেকে সহজ উপায় হল পুরনো সূচক সংখ্যাগুলিকে নীচের গুণনীয়ক দিয়ে গুণ করলেই পাওয়া যাবে। গুণনীয়কটি হল

$$\left(\frac{100}{\text{নতুন ভিত্তি বছরের জন্য পুরানো সূচক সংখ্যা}}\right)$$

সংযুক্তিকরণ আসলে এক ধরনের ভিত্তি বছর পরিবর্তন। সংযুক্তিকরণের পর কোনো নির্দিষ্ট চলতি বছরের সূচক সংখ্যা গণনা করার জন্য নীচের সূত্রটি ব্যবহার করা হয়।

সংযুক্তিকরণের পর কোনো নির্দিষ্ট চলতি বছরের সূচক সংখ্যা

$$= \frac{\text{নতুন ভিত্তি বছরের জন্য পুরানো সূচক সংখ্যা}}{100} \times \text{চলতি বছরের সূচক সংখ্যা}$$

দামস্তর পরিবর্তিত হলে আর্থিক মজুরিকে প্রকৃত মজুরিতে রূপান্তরিত করার পদ্ধতিকেই অবপাত বলা হয়। নীচে সূত্রের আকারে অবপাত পদ্ধতিটি বোঝানো হল।

$$\text{প্রকৃত মজুরি} = \frac{\text{আর্থিক মজুরি}}{\text{দামসূচক বা জীবনধারণের ব্যয় সূচক}} \times 100$$

5.13 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা :

1. সূচক সংখ্যা বলতে কী বোঝ? দাম আপেক্ষিকের গড় পদ্ধতিতে কীভাবে দাম সূচক কীভাবে গঠন করা হয়?
2. দাম সূচক গঠন করার বিভিন্ন পদ্ধতিগুলি উল্লেখ কর।
3. লাসপ্যেয়ারের দাম সূচক ও পাস-এর দাম সূচকের মধ্যে পার্থক্য বোঝায়?
4. ভারযুক্ত গড় আপেক্ষিক পদ্ধতিতে দাম সূচক গঠন করে কীভাবে সেই দাম সূচককে লাসপ্যেয়ার ও পাসে-এর দাম সূচকে পরিবর্তিত করা যায় দেখাও।
5. কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষা ও গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষা সংক্ষেপে ব্যাখ্যা কর।
6. সূচক সংখ্যার ব্যবহার ও সীমাবদ্ধতা সম্পর্কে টীকা লেখো।

প্রশ্নমালা :

7. দাম সূচকের কোন কোন সূত্র কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয় প্রমাণ সহ ব্যাখ্যা কর।
8. দাম সূচকের কোন কোন সূত্র গুণনীয়ক বিপরীতকরণের পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয় প্রমাণ সহ দেখাও।
9. জীবনধারণের ব্যয় সূচক কীভাবে গঠন করা হয়? এই সূচকের ব্যবহারগুলি কী কী ব্যাখ্যা কর।
10. নীচের রাশিতথ্য থেকে দাম সূচক, গড় আপেক্ষিক পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

    (i) গাণিতিক গড় ও (ii) গুণোত্তর গড় ব্যবহার করে

দ্রব্য	ভিত্তি বছরের দাম	চলতি বছরের দাম
A	30	48
B	22	44
C	16	40

11. নীচের রাশিতথ্য থেকে লাসপ্যেয়ারের সূত্র অবলম্বন 2011 সালের দামসূচক নির্ণয় কর (2000 100)

দ্রব্য	দাম		দ্রব্যের আর্থিক মূল্য
	2000	2011	2000
ক	4	10	200
খ	3	8	30
গ	5	4	20

12. নীচের রাশিতথ্য থেকে ফিশারের পরিমাণ সূচক সংখ্যা নির্ণয় কর।

	2005		2015	
দ্রব্য	**দাম**	**পরিমাণ**	**দাম**	**পরিমাণ**
X	5	10	4	12
Y	8	6	7	7
Z	6	3	5	4

13. ধরা যাক কোনো লোকের মাসিক আর্থিক আয় 800 টাকা ছিল 2000 সালে। ক্রেতার দাম সূচক 2000 সালে ছিল 160. এখন 2010 সালে ঐ দাম সূচক বৃদ্ধি পেয়ে হয়েছে 200.

এবার ঐ লোকের জন্য কত মহার্ঘ ভাতা বরাদ্দ করলে 2010 সালে তার পরিতৃপ্তি 2000 সালের সমান হবে নির্ণয় কর।

14. ধরা যাক্ লাসপ্যেয়ারের দাম সূচক সংখ্যা : পাস-এর দাম সূচক সংখ্যা = 28 : 27 এবার নীচের রাশিতথ্যের অদৃশ্য সংখ্যাটি গণনা কর।

দ্রব্য	**ভিত্তি বছর (2000 সাল)**		**চলতি বছর (2010 সাল)**	
	দাম	**পরিমাণ**	**দাম**	**পরিমাণ**
X	1	10	2	5
Y	1	5	?	2

প্রশ্নমালা :

15. নীচের রাশিতথ্যের সাহায্যে 2001 সাল থেকে 2005 সাল পর্যন্ত শৃঙ্খলিত সূচক সংখ্যা গঠন কর (ভিত্তি বছর 2000 সাল = 100)

বছর :	2001	2002	2003	2004	2005
সংযোগ সূচক :	110	105	112	115	110

16. কাল-বিপরীতকরণ পরীক্ষা ও গুণনীয়ক বিপরীতকরণ পরীক্ষাগুলি সংক্ষেপে ব্যাখ্যা কর। দেখাও যে লাসপ্যেয়ার ও পাসের সূত্র এই দুই পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয় না কিন্তু ফিশারের সূত্র উভয় পরীক্ষাতে উত্তীর্ণ হয়।

17. নীচের রাশিতথ্যের সাহায্যে লাসপ্যেয়ার, পাস, ফিশার, বউলে ও মার্শাল-এজওয়ার্থ-এর সূত্র ব্যবহার করে 2015 সালের দামসূচক নির্ণয় কর। (ভিত্তি বছর 2005 = 100)

দ্রব্য	দাম		পরিমাণ (kg তে)	
	2015	2005	2015	2005
A	30	20	82	74
B	40	50	140	125
C	60	70	33	40

18. (i) যদি লাসপেয়ার ও পাস-এর দাম সূচক যথাক্রমে 125·6 ও 154·3 হয় তাহলে ফিশারের দাম সূচক নির্ণয় কর।

5.14 গ্রন্থপঞ্জি

1. Mathematics of Statistics Vol. I by John F. Kenney and E.S. Keeping, D. Van Nostrand, 1947, New York
2. Statistical Methods Vol.I by N.G. Das, Mc Graw–Hill India, 2008
3. Fundamentals of Statistics by S.C. Gupta, Himalaya Publishing House, 2008

একক 6 ❑ দ্বিচলক রাশিতথ্য বিশ্লেষণ—সহ পরিবর্তন ও প্রতিগমন

গঠন

6.1 উদ্দেশ্য

দ্বিচলক সম্পর্কিত রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে আমরা দুটি ভিন্ন দৃষ্টিভঙ্গি থেকে বিশ্লেষণ শুরু করি।

প্রথমত: আমরা অনুসন্ধান করি যে দুটি চলকের মধ্যে কোনো রৈখিক সম্পর্ক আছে কিনা। যদি কোনো সম্পর্ক থাকে তবে সেই সম্পর্কের চরিত্র কেমন।

দ্বিতীয়ত: দুটি চলকের মধ্যে একটি স্বাধীন চলক ও অপরটি নির্ভরশীল চলক ধরে নিয়ে একটি সমীকরণের মাধ্যমে চলক দুটির স্থির সম্পর্ক নির্ধারিত করি। সমীকরণটি নির্ণয় করার পর আমরা নির্ভরশীল চলকের মান অনায়াসে বের করতে পারি যদি স্বাধীন চলকের মান দেওয়া থাকে। প্রথম সমস্যাটিকে সরল সহ পরিবর্তন (Simple Correlation) বলা হয় আর দ্বিতীয় সমস্যাটিকে সরল প্রতিগমন (Simple Regression) বলা হয়।

6.2 প্রস্তাবনা

দ্বিচলক রাশিতথ্যে আমরা নতুন কিছু প্রশ্নের সম্মুখীন হই। যেমন, দুটি চলকের মধ্যে কি কোন সম্পর্ক আছে? অর্থাৎ যদি একটি চলকের মান বৃদ্ধি পায় (অথবা হ্রাস পায়) তাহলে সেটা কি অন্য চলককে প্রভাবিত করে? উত্তর যদি হ্যাঁ হয়, তাহলে আরও দুটি প্রশ্ন—কতটা প্রভাবিত করে এবং কোন অভিমুখে প্রভাবিত করে? আর উত্তর যদি না হয় তাহলে তার মানে খুবই সোজা—তাহলে চলক দুটির মধ্যে কোনো সম্পর্ক নেই বলতে হবে।

সরল সহ পরিবর্তনে (Simple Correlation) শুধুমাত্র দুই চলকের সম্পর্কের মাত্রা (degree) কতটা এবং সম্পর্কের অভিমুখ (direction) কি এটুকুই প্রকাশ পায়। কিন্তু দুটি চলকের মধ্যে কার্য-কারণ সম্পর্ক (Cause and effect relationship) নির্দেশ করা যায় না। যেমন ধূমপান করা ও ফুসফুসের ক্যান্সার রোগের মধ্যে সম্পর্কের মাত্রা খুবই বেশি দেখা যায় কিন্তু তার থেকে এটা প্রমাণ হয় না যে ধূমপানের জন্য ফুসফুসের ক্যান্সার রোগে আক্রান্ত হয়েছে।

এখন এই দ্বিচলক রাশিতথ্যকে লেখচিত্রের আকারে উপস্থাপিত করলে একটি বিক্ষিপ্ত চিত্র পাওয়া যাবে। যদি দুটি চলকের মধ্যে সম্পর্ক থাকে তবে বিক্ষিপ্ত চিত্রের বিন্দুগুলি কোনো সরলরেখা অথবা কোনো বক্ররেখার চারিদিকে পরিব্যপ্ত থাকবে। এই রেখাটিকে বলা হয় প্রতিগমন রেখা (cruve of regression)।

ধরা যাক্ কোনো স্কুলের সমস্ত ছাত্রদের উচ্চতা ও ওজন এর রাশিতথ্য সংগ্রহ করা হল। এই উচ্চতা ও ওজনকেই দুটি চলক হিসাবে ধরা হবে। এখন বিক্ষিপ্ত চিত্র থেকে যদি দেখা যায় যে উচ্চতা বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে গড় ওজনও বৃদ্ধি পাচ্ছে তবে একটি প্রতিগমন রেখা পাওয়া যাবে যার সাহায্যে কোনো নির্দিষ্ট উচ্চতা বিশিষ্ট ছাত্রের ওজনের পরিমাপ আন্দাজ (estimate) করা সহজ হবে।

6.3 দ্বিচলক রাশিতথ্য

দ্বিচলক বা Bivariate বলতে আমরা বুঝি কোনো ব্যক্তি বা কোনো বস্তুর দুটি আলাদা বৈশিষ্ট্যকে। ঐ দুটি বৈশিষ্ট্যকে X ও Y চলক হিসাবে ধরা হয়। যেমন আমাদের আগের উদাহরণে আমরা ছাত্রদের উচ্চতা ও ওজন এই দুই বৈশিষ্ট্যকে দুটি চলক হিসাবে দেখিয়েছি। ধরা যাক n সংখ্যক ছাত্রের জন্য ঐ দুই চলক উচ্চতা (X) এবং ওজন (Y) এই দুই এর মান সংগ্রহ করা হল। অর্থাৎ X চলকের মান x_i, i = 1, 2, 3,........, n এবং Y চলকের মান y_i, i = 1, 2, 3,....., n. পাওয়া গেল। দ্বিচলক রাশিতথ্যের উপস্থাপনা (x_i, y_i), i = 1, 2, 3,...., n এইভাবে হয়।

লেখচিত্রে আমরা X চলকের মানগুলিকে অনুভূমিক অক্ষে (horizontal axis) এবং Y চলকের মান গুলিকে উল্লম্ব অক্ষে (Vertical axis) পরিমাপ করে থাকি। সাধারণ ভাবে X চলকটিকে স্বাধীন চলক (independent variable) এবং Y চলকটিকে নির্ভরশীল চলক (dependent variable) বলে মনে করা হয়।

দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজন একটি উদাহরণের সাহায্যে বোঝানো হল যেখানে 100 জন ছাত্রের উচ্চতা 3 ওজন একটি পরিসংখ্যা বিভাজনের মাধ্যমে উপস্থাপিত করা হয়েছে।

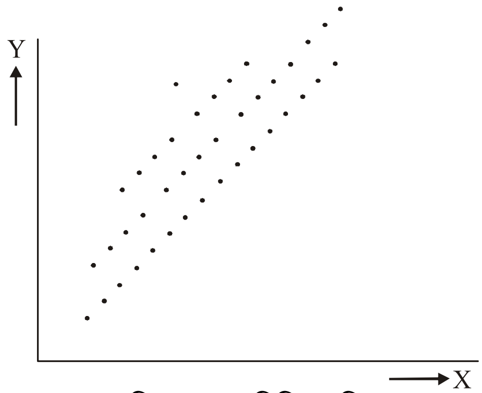
ওজন Kg তে (y) / উচ্চতা সে.মি তে (x)	55 – 60	60 – 65	65–70	70–75	75–80	মোট
150 – 155	1	3	7	5	2	18
155 – 160	2	4	10	7	4	27
160 – 165	1	5	12	10	7	35
165 – 170	–	3	8	6	3	20
মোট	4	15	37	28	16	100

6.4 বিক্ষিপ্ত চিত্র

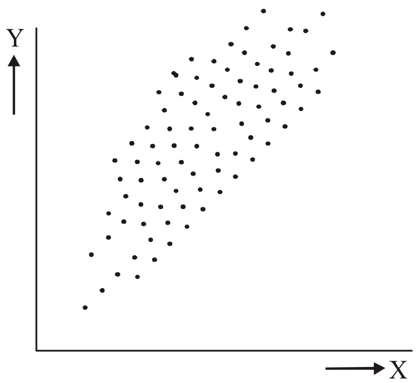
দ্বিচলক রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে চলক দুটির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য আমরা বিন্দু চিত্রের (Dot Diagram) সাহায্য নিয়ে থাকি। ধরা যাক দুটি চলক X এবং Y এর n-জোড়া সংগৃহীত মানগুলি যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_3, y_3),......., (x_n y_n). এখন লেখচিত্রে অনুভূমিক অক্ষ বরাবর X চলকের মান ও উল্লম্ব অক্ষ বরাবর Y চলকের মানসমূহ পরিমাপ করা হয়।

এইবার (x_1, y_1), (x_2, y_2),......., (x_3 y_3),....., (x_n, y_n) যদি লেখচিত্রে উপস্থাপিত করা হয় তবে

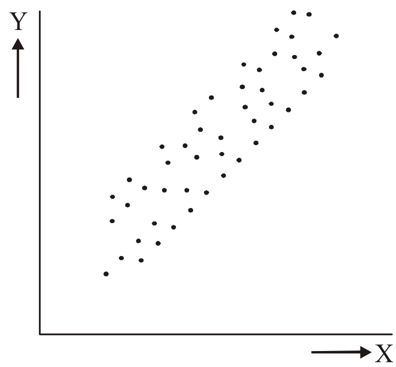
n সংখ্যক বিন্দু পাওয়া যাবে। দ্বিচলক রাশিতথ্যকে এইরূপ বিন্দুসমূহের মাধ্যমে উপস্থাপনা করলে যে চিত্র পাওয়া যায় তাকে বিক্ষিপ্ত চিত্র (scatter diagram) বলে। বিক্ষিপ্ত চিত্রের মাধ্যমে X ও Y চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক খুব সহজে বিশ্লেষণ করা সম্ভব হয়।



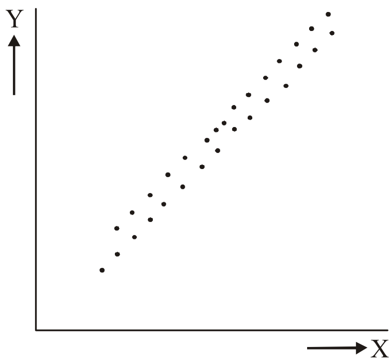
চিত্র 6.1 : বিক্ষিপ্ত চিত্র



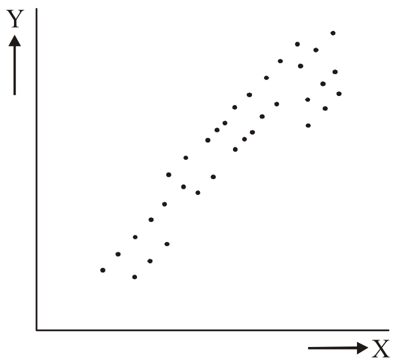
চিত্র 6·1 (a)



চিত্র 6·1 (b)



চিত্র 6·1 (c)



চিত্র 6·1 (d)

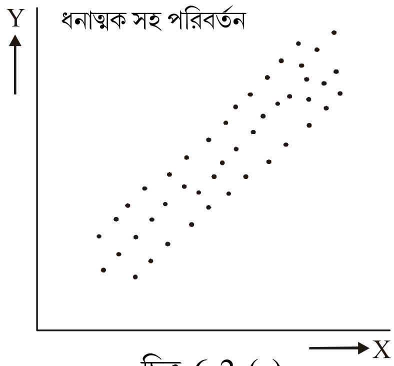
চিত্র 6·1 (a) থেকে চিত্র 6·1 (d) পর্যন্ত চারটি বিক্ষিপ্ত চিত্রের মাধ্যমে রাশিতথ্যের বিভিন্ন ধরন দেখানো হয়েছে। প্রথম তিনটি চিত্রের রাশিতথ্যে X ও Y চলকের মধ্যে সরল রৈখিক সম্বন্ধ প্রকাশিত হয়েছে আর চতুর্থ চিত্রে X এবং Y চলকের সম্পর্ক বক্ররৈখিক। এছাড়াও আমরা যত প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বিক্ষিপ্ত চিত্রের দিকে সরতে থাকব তত X ও Y চলকের মধ্যে সম্পর্কের নিবিড়তা বৃদ্ধি পাবে।

অর্থাৎ 6·1 (c) চিত্রে X ও Y এর মধ্যে সম্পর্ক সর্বাপেক্ষা ঘন।

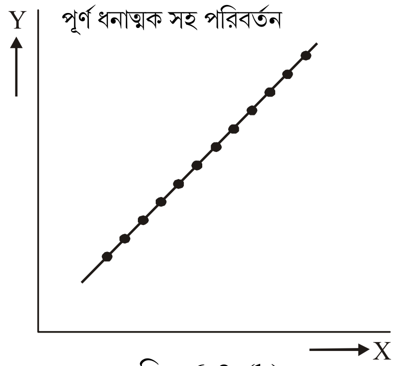
6.5 সহ পরিবর্তন

রাশিবিজ্ঞানে সহ পরিবর্তন বলতে দুটি চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধের প্রকৃতি নির্ধারণ ও বিশ্লেষণকে বোঝায়। দুটি চলক X ও Y মধ্যে সম্বন্ধের প্রকৃতি কেমন তা নির্ণয় করার জন্য বিক্ষিপ্ত চিত্র ব্যবহার করা যায়। দুটি চলককে সম্বন্ধযুক্ত বলা যাবে যদি একটি চলকের মান পরিবর্ত্তিত হলে অপর চলকের মানেরও পরিবর্তন হয়।

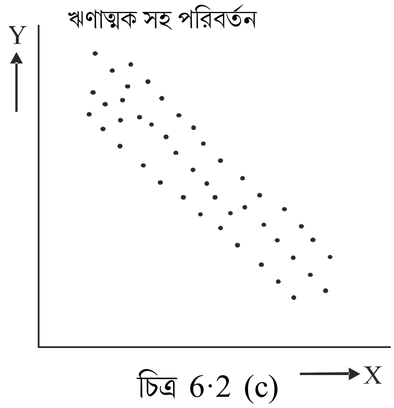
সহ পরিবর্তন সরলরৈখিক এবং বক্ররৈখিক দুইই হতে পারে। আমরা এখানে শুধু সরলরৈখিক সহ পরিবর্তন নিয়ে আলোচনা করব।



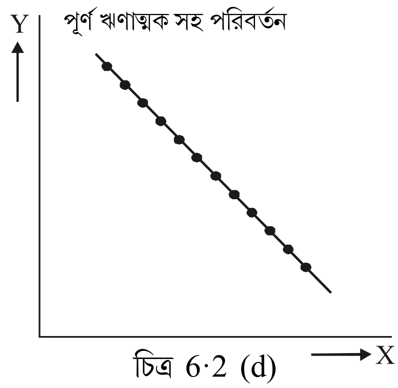
চিত্র 6·2 (a)



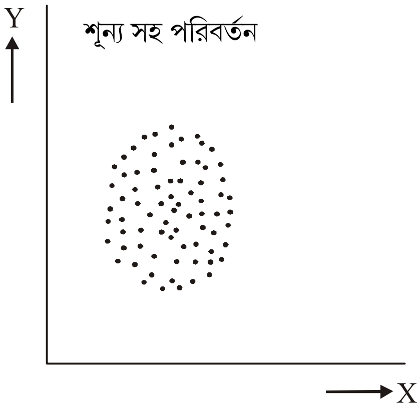
চিত্র 6·2 (b)



চিত্র 6·2 (c)



চিত্র 6·2 (d)



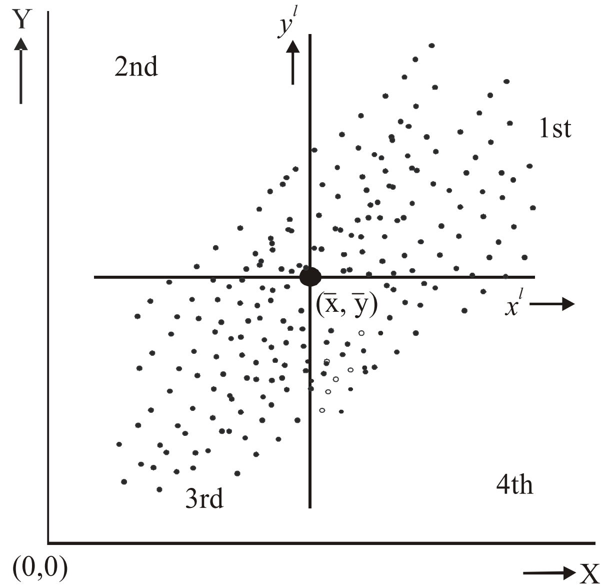
চিত্র 6·2 (e)

X চলকের মান বৃদ্ধি পেলে যদি Y চলকের মানও বৃদ্ধি পায় অথবা X চলকের মান হ্রাস পেলে যদি Y চলকের মানও হ্রাস পায় তাহলে সহ পরিবর্তন ধনাত্মক বলা হয় [চিত্র 6·2 (a)]। অপর পক্ষে X চলকের মান বৃদ্ধি পেলে যদি Y চলকের মান হ্রাস পায় অথবা X চলকের মান হ্রাস পেলে যদি Y চলকের মান বৃদ্ধি পায় তাহলে সহ-পরিবর্তন ঋণাত্মক বলা হয় [চিত্র 6·2 (c)]। চিত্র 6·2 (a) তে যে বিক্ষিপ্ত চিত্র দেখানো হয়েছে তার সরলরৈখিক প্রবণতা বাম দিক থেকে ডান দিকে উপরের দিক নির্দেশ করছে অর্থাৎ X ও Y চলক দুটির মান একই দিকে পরিবর্তিত হচ্ছে। অপরপক্ষে চিত্র 6·2 (c) তে যে বিক্ষিপ্ত চিত্র দেখানো হয়েছে তার সরলরৈখিক প্রবণতা বাম দিক থেকে ডান দিকে নীচের দিক নির্দেশ করছে অর্থাৎ X ও Y চলক দুটির মান বিপরীত দিকে পরিবর্তিত হচ্ছে। চিত্র 6·2 (b) তে X ও Y চলক দুটির প্রতি জোড়া মান অর্থাৎ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ইত্যাদি একই ঊর্ধ্বমুখী সরলরেখার উপর অবস্থান করছে। এখানে পূর্ণ ধনাত্মক সহ পরিবর্তন পাওয়া যায়। চিত্র 6·2 (d) তে X ও Y চলক দুটির প্রতি জোড়া মান একই নিম্নমুখী সরলরেখার উপর অবস্থান করছে। এখানে পূর্ণ ঋণাত্মক সহ পরিবর্তন পাওয়া যায়। চিত্র 6·2 (e) তে বিন্দুগুলি X ও Y চলকদুটির মধ্যে কোনো সরলরৈখিক সম্পর্ক নির্দেশ করে না। এক্ষেত্রে চলক দুটির সম্পর্ক শূন্য সহ পরিবর্তন নির্দেশ করে। বিক্ষিপ্ত চিত্রের সাহায্যে X ও Y চলক দুটির সহ পরিবর্তনের ধারণার একটা আন্দাজ পাওয়া যায় মাত্র। নির্ভুলভাবে সহ পরিবর্তন পরিমাপ করতে হলে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের সাহায্য নিতে হবে।

6.6 সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের সূত্র নিরূপণ

বিক্ষিপ্ত চিত্রে (Fig : 6·3) অনুভূমিক অক্ষ বরাবর X এর মান এবং উল্লম্ব অক্ষ বরাবর Y এর মান গুলি পরিমাপ করা হয়েছে। মূল বিন্দু (0, 0) এর সাপেক্ষে (x_i, y_i), i = 1, 2, 3,....., n বিন্দুগুলি অঙ্কন করা হয়েছে। ধরা যাক্ x এবং y এর গড় মান হল $\bar{x}$ ও $\bar{y}$।

এই $(\bar{x}, \bar{y})$ স্থানাঙ্কটিকে নতুন মূলবিন্দু হিসাবে ধরা হল। এই নতুন মূলবিন্দু $(\bar{x}, \bar{y})$ এর সাপেক্ষে



চিত্র 6·3 বিক্ষিপ্ত চিত্রে নতুন দুটি অক্ষের সংযোজন হয়েছে। অক্ষ $x'=(x-\bar{x})$ এবং অক্ষ $y'=(y-\bar{y})$ এবং মূল বিন্দু (0, 0) থেকে সরে হয়েছে $(\bar{x},\bar{y})$

(x_i', y_i') কে আমরা নতুন স্থানাঙ্ক বিন্দু বলবো। অর্থাৎ $x_i' = x_i - \bar{x}$ এবং $y_i' = y_i - \bar{y}$.

এখানে নতুন দুটি অক্ষ x' এবং y' সম্পূর্ণ বিক্ষিপ্ত চিত্রকে চারটি ভাগে ভাগ করেছে।

প্রথম ভাগে (1st Quadrant) $x'>0, y'>0$

দ্বিতীয় ভাগে (2nd Quadrant) $x'<0, y'>0$

তৃতীয় ভাগে (3rd Quadrant) $x'<0, y'<0$

এবং চতুর্থ ভাগে (4th Quadrant) $x'<0, y'<0$

এখন আমরা যদি $\sum_i x_i' \cdot y_i'$ গণনা করি বিক্ষিপ্ত চিত্রের সমস্ত বিন্দুর জন্য তাহলে $\sum x_i' \cdot y_i'$ এর মান ধনাত্মক হবে যদি বেশির ভাগ বিন্দু প্রথম ভাগে এবং তৃতীয় ভাগে অবস্থান করে। অর্থাৎ x এবং Y এর সহ পরিবর্তন ধনাত্মক হবে।

অপরপক্ষে $\sum x_i' \cdot y_i'$ এর মান ঋণাত্মক হবে যদি বেশির ভাগ বিন্দু দ্বিতীয় ভাগ এবং চতুর্থ ভাগে অবস্থান করে। অর্থাৎ X এবং Y এর সহ পরিবর্তন ঋণাত্মক হবে।

আর $\sum x_i' \cdot y_i'$ এর মান শূন্য হবে যদি সমান সংখ্যক বিন্দু চারটি ভাগে সমান ভাবে ছড়িয়ে থাকে। অর্থাৎ X এবং Y এবং সহ পরিবর্তন শূন্য হবে। যার অর্থ হল X এবং Y এর মধ্যে কোনো সম্পর্কই নেই।

সুতরাং $\sum x_i' \cdot y_i' = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ কে সরল সহ পরিবর্তনের একটি পরিমাপ হিসাবে ধরা যেতে পারে। কিন্তু এখানে কিছু সীমাবন্ধতা আছে।

প্রথমত: যদি বিক্ষিপ্ত চিত্রে শুধুমাত্র বিন্দুর সংখ্যা (n) বাড়িয়ে দিই তাহলে $\sum x_i' y_i'$ এর মানও বৃদ্ধি পাবে।

দ্বিতীয়ত: $\sum x_i' y_i'$ এর মান X ও Y চলক দুটির একক-এর উপরও নির্ভরশীল।

প্রথম সমস্যাটির সমাধানের জন্য $\sum x_i' y_i'$ কে n দিয়ে ভাগ করা হয়।

দ্বিতীয় সমস্যাটির সমাধানের জন্য $\sum x_i' y_i'$ কে X ও Y এর সমক পার্থক্যকে (σ_x, σ_y) দ্বারা ভাগ দেওয়া হয়।

অবশেষে আমরা সহ পরিবর্তনের সঠিক সূত্র নির্ধারণ করতে সমর্থ হই।

সরল সহ পরিবর্তন $r_{xy} = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x \sigma_y}$

এই সূত্রটিকে Karl Pearson -এর গুণফল-ভ্রামক সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক (Product-moment Correlation Co-efficient) বলে।

6.6.1 কার্ল পিয়ারসনের গুণফল-ভ্রামক সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক

যদি X এবং Y দুটি চলক হয় এবং n বিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে চলক দুটির n জোড়া মান যেমন (x_1, y_1), $(x_2\ y_2)$.........(x_n, y_n) উপস্থাপিত করা হয় তাহলে X ও Y এর সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের সূত্র হবে

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

যেখানে r_{xy} = X ও Y এর সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক। $\bar{x}, \bar{y}$ হল চলক দুটির গাণিতিক গড়। অর্থাৎ $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ এবং $\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$ এবং σ_x ও σ_y হল চলক দুটির সমক পার্থক্য।

অর্থাৎ $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$

এবং $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum y_i}{n}\right)^2}$

আবার সহ ভেদাঙ্ক $\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

সহ পরিবর্তনের গুণাঙ্কের সূত্রটি সহ ভেদাঙ্কের সাপেক্ষেও লেখা যায়

যেহেতু σ_x এবং σ_y সর্বদাই ধনাত্মক, তাই সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক ধনাত্মক হবে না ঋণাত্মক হবে সেটা নির্ভর করবে সম্পূর্ণ রূপে সহ ভেদাঙ্ক cov (x,y) এর উপর।

যদি cov (x, y) > 0 হয় তবে r_{xy} > o হবে।

যদি cov (x, y) < 0 হয় তবে r_{xy} < 0 হবে।

আবার, cov (x, y) = 0 হলে r_{xy} = 0 হবে।

সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের এই সূত্রটিকে Karl Pearson এর গুণফল-ভ্রামক সূত্র বলা হয়।

গণনার সময় এই সূত্রটিকে একটু সহজবোধ্য ভাবে নীচে লেখা হল।

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{x}\sum(y_i - \bar{y})^2}} \text{..........}(6{\cdot}1)$$

$$r_{xy} = \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n} - \frac{\sum x_i}{n}.\frac{\sum y_i}{n}}{\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}.\sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum y_i}{n}\right)^2}} \text{..........}(6{\cdot}2)$$

অথবা, $$r_{xy}=\frac{n\sum x_iy_i-\sum x_i\cdot\sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}\cdot\sqrt{n\sum y_i^2-\left(\sum y_i\right)^2}}\text{..........}(6\cdot3)$$

কার্যকরী সূত্র (Working Formula)

সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক গণনা করার সময়ে নীচের দুইটি সূত্র ব্যবহার করা হয়।

(i) $$r_{xy}=\frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2}\cdot\sqrt{\sum Y^2}}\text{..........}(6\cdot4)$$

যেখানে $X=(x-\bar{x})$ এবং $Y=(y-\bar{y})$

(ii) $$r_{xy}=\frac{n\sum XY-\left(\sum X\right)\left(\sum Y\right)}{\sqrt{n\sum X^2-\left(\sum X\right)^2}\cdot\sqrt{n\sum Y^2-\left(\sum Y\right)^2}}\text{......}(6\cdot5)$$

যেখানে X = (x – a) এবং Y = (y – b) $\left[a\neq\bar{x}\text{ এবং }b\neq\bar{y}\right]$

উদাহরণ : 6·1 নীচের রাশিতথ্যের ভিত্তিতে x ও y চলক দুটির সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

x :	1	2	3	4	5
y :	6	8	11	8	12

ছক সংখ্যা 6·1 সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের গণনা

x	y	$x=(x-\bar{x})$ $\bar{x}=3$	$y=(y-\bar{y})$ $\bar{y}=9$	X^2	Y^2	XY
1	6	–2	–3	4	9	6
2	8	–1	–1	1	1	1
3	11	0	2	0	4	0
4	8	1	–1	1	1	–1
5	12	2	3	4	9	6
মোট 15	45	0	0	10	24	12
$=\sum x$	$=\sum y$			$=\sum X^2$	$=\sum Y^2$	$=\sum XY$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{15}{5} = 3 \text{ এবং } \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{45}{5} = 9$$

$$\therefore r_{xy} = \frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2}\sqrt{\sum Y^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{24}} = \frac{12}{\sqrt{240}} = \frac{12}{15{\cdot}49} = 0{\cdot}77$$

বিকল্প পদ্ধতি

ছক সংখ্যা 6·2 সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক গণনা

x	y	x^2	y^2	xy
1	6	1	36	6
2	8	4	64	16
3	11	9	121	33
4	8	16	64	32
5	12	25	144	60
15 $=\sum x$	45 $=\sum y$	55 $=\sum x^2$	429 $=\sum y^2$	149 $=\sum xy$

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}}$$

$$= \frac{5{\cdot}147 - 15{\cdot}45}{\sqrt{5{\cdot}55 - (15)^2} \cdot \sqrt{5{\cdot}429 - (45)^2}}$$

$$= \frac{735 - 675}{\sqrt{275 - 225}\cdot\sqrt{2145 - 2025}}$$

$$= \frac{60}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{120}} = \frac{60}{\sqrt{6000}} = \frac{60}{\sqrt{60}\cdot 10} = \frac{\sqrt{60}}{10} = \frac{7{\cdot}74}{10} = 0.774$$

টীকা : যদি $\bar{x}$ এবং $\bar{y}$ পূর্ণ সংখ্যা হয় তাহলে কার্য্যকরী সূত্র (i) ব্যবহার করা উচিৎ আর যদি $\bar{x}$ এবং $\bar{y}$ এর মান ভগ্নাংশে হয় তাহলে কার্যকরী সূত্র (ii) ব্যবহার করা উচিৎ।

6.6.2 সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের ধর্মাবলী

সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের ধর্মগুলি নিম্নরূপ :

1. সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের কোনো একক নাই। এটি একটি সংখ্যা মাত্র।

2. X ও Y দুটি চলকের সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক X ও Y এর মধ্যে প্রতিসম (Symmetric in X and Y)। অর্থাৎ $r_{xy} = r_{yx}$

প্রমাণ : সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের সূত্র অনুযায়ী $r_{xy} = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$ এবং $r_{yx} = \dfrac{\operatorname{cov}(y,x)}{\sigma_y \cdot \sigma_x}$

যেহেতু $\operatorname{cov}(x,y) = \operatorname{cov}(y,x) = \dfrac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{n}$

$$\therefore r_{xy} = r_{yx}$$

3. X ও Y চলক দুটির সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের পরম মান মূলবিন্দুর (Origin) উপর অথবা মাত্রার (Scale) উপর নির্ভর করে না। অর্থাৎ X এবং Y এর মান যদি মূলবিন্দুর পরিবর্তন এবং মাত্রার পরিবর্তনের ফলে পরিবর্তিত হয়, তাসত্ত্বেও সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের মানের কোনোরূপ পরিবর্তন হয় না।

প্রমাণ :

ধরা যাক্ X ও Y চলকের n জোড়া পর্যবেক্ষণ দেওয়া আছে। অর্থাৎ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ দেওয়া আছে। এখন X ও Y চলকের মূলবিন্দু (0, 0) থেকে সরিয়ে (a, b) বিন্দুতে নিয়ে যাওয়া হল এবং মাত্রাও যথাক্রমে C এবং d তে পরিবর্তিত হল। ফলে X এবং Y চলক পরিবর্তিত হয়ে u এবং v চলকে রূপান্তরিত হল।

অর্থাৎ $u_i = \dfrac{x_i - a}{c}$ এবং $v_i = \dfrac{y_i - b}{d} (i = 1, 2, \ldots, n)$

যেখানে a, b, c, d চারটি ধ্রুবক এবং $c \neq 0, d \neq 0$

এখন, $x_i = a + cu_i$ এবং $y_i = b + dv_i \ldots\ldots (1)$

$\therefore \overline{x} = a + c\overline{u}$ এবং $\overline{y} = b + d\,\overline{v} \ldots\ldots (2)$

(1) – (2) থেকে পাই, $(x_i - \overline{x}) = c(u_i - \overline{u})$ অথবা, $(x_i - \overline{x})^2 = c^2 (u_i - \overline{u})^2$

অথবা, $\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = c^2 \frac{\sum(u_i - \bar{u})^2}{n}$ অথবা, ${\sigma_x}^2 = c^2 {\sigma_u}^2$

অথবা, $\sigma_x = |c|\sigma_u$

একই ভাবে পাওয়া যাবে, $\sigma_y = |d|\sigma_v$

এখন সংজ্ঞা অনুসারে আমরা জানি $r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$

$$\therefore r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum c(u_i - \bar{u}) \cdot d(v_i - \bar{v})}{|c|\sigma_u \cdot |d|\sigma_v} ....(3)$$

$$\left[\because (x_i - \bar{x}) = c(u_i - \bar{u}), (y_i - \bar{y}) = d(v_i - \bar{v}), \sigma_x, \sigma_y = |d|\sigma_v\right]$$

আবার, $r_{uv} = \frac{\text{cov}(u, v)}{\sigma_u \sigma_v} = \frac{\frac{1}{n}\sum(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sigma_u \sigma_v} ......(4)$

সুতরাং (3) ও (4) নং সমীকরণ একত্র করলে পাই, $r_{xy} = \frac{cd}{|c| \cdot |d|} \cdot r_{uv}$

যদি c এবং d একই চিহ্নযুক্ত হয় তবে $\frac{cd}{|c| \cdot |d|} = +1$ হবে

কিন্তু যদি c এবং d বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তবে $\frac{cd}{|c| \cdot |d|} = -1$ হবে।

অর্থাৎ c এবং d মাত্রা দুটি একই চিহ্নযুক্ত হলে $r_{xy} = r_{uv}$ হবে,

আর c এবং d মাত্রা দুটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে $r_{xy} = -r_{uv}$ হবে।

এর অর্থ হল মূলবিন্দু পরিবর্তনের ফলে এবং মাত্রা দুটি পরিবর্তনের ফলে X এবং Y চলক দুটির সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের পরম মান একই থাকে।

উদাহরণ 6·2 যদি $r_{xy} = 0 \cdot 6$ হয় তাহলে r_{uv} এর মান কত হবে গণনা কর, যখন

(i) $u = 3x + 5, v = 4y - 3$

(ii) $u = 3x + 5, v = -4y + 3$

সমাধান :

(i) $u = 3x + 5$ অর্থাৎ $x = \dfrac{u-5}{3}$

এবং $v = 4y - 3$ অর্থাৎ $y = \dfrac{v-(-3)}{4}$

এখানে মূলবিন্দু (5, –3) এবং মাত্রা দুটি 3 ও 4

যেহেতু মাত্রা দুটিই ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত সুতরাং $r_{xy} = r_{uv}$ হবে। অর্থাৎ $r_{uv} = 0{\cdot}6$

(ii) $u = 3x + 5$ অর্থাৎ $x = \dfrac{u-5}{3}$

এবং $v = -4y + 3$ অর্থাৎ $y = \dfrac{v-3}{-4}$

এখানে মূলবিন্দু (5, 3) এবং মাত্রা দুটি 3 ও –4

যেহেতু মাত্রা দুটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত সুতরাং $r_{xy} - r_{uv}$ হবে। অর্থাৎ $r_{uv} = -0{\cdot}6$

4. সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের মান –1 ও +1 এর মাঝামাঝি জায়গায় অবস্থান করে। অর্থাৎ $-1 \le r_{xy} \le +1$

X ও Y চলকের n জোড়া মান $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ দেওয়া আছে।

ধরা যাক্ $u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{\sigma_x}$ এবং $v_i = \dfrac{y_i - \overline{y}}{\sigma_y}$

যেখানে $\overline{x}, \overline{y}$ দুটি চলকের গাণিতিক গড় এবং σ_x, σ_y দুটি চলকের সমক-পার্থক্য

এখন $\sum u_i^2 = \sum\left(\dfrac{x_i - \overline{x}}{\sigma_x}\right)^2 = \dfrac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{{\sigma_x}^2} = \dfrac{n{\sigma_x}^2}{{\sigma_x}^2} = n$

অনুরূপভাবে পাওয়া যাবে $\sum v_i^2 = n$

$$\sum u_i v_i = \sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}\right) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{n\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = nr_{xy}$$

যেখানে r_{xy} হল X ও Y চলকের সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক।

এখন, $\sum(u_i + vi)^2 \geq 0$

$\therefore \sum\left(u_i^2 + v_i^2 + 2u_i v_i\right) \geq 0$

অথবা, $\sum u_i^2 + \sum v_i^2 + 2\sum u_i v_i \geq 0$

অথবা, $n + n + 2nr_{xy} \geq 0$ অথবা, $2n + 2nr_{xy} \geq 0$

অথবা, $2n\left(1 + r_{xy}\right) \geq 0$ অথবা, $\left(1 + r_{xy}\right) \geq 0\ [\because n > 0]$

অথবা, $r_{xy} \geq -1.....(1)$

অনুরূপে $\sum(u_i - v_i)^2 \geq 0$ অথবা, $\sum u_i^2 + \sum v_i^2 - 2\sum u_i v_i \geq 0$

অথবা, $n + n - 2nr_{xy} \geq 0$ অথবা, $2n\left(1 - r_{xy}\right) \geq 0(\therefore n > 0)$

$\therefore r_{xy} \leq 1....(2)$

এখন (1) ও (2) সমীকরণদ্বয়কে একত্র করলে পাই $-1 \leq r_{xy} \leq 1$

অর্থাৎ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক $r_{xy}, -1$ এবং $+1$ এর মধ্যে কোনো এক স্থানে অবস্থান করে।

6.6.3 দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের গণনা

ছক সংখ্যা : 6·3 একটি দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজন : যেখানে n সংখ্যক ব্যক্তির জন্য x ও y এই দুই বৈশিষ্ট্যের (চলকের) পরিসংখ্যান দেওয়া হয়েছে

y \ x	$y_0 - y_1$	$y_1 - y_2$	—	$y_{j-1} - y_j$	—	$y_{1-1} - y_1$	Total
$x_0 - x_1$	f_{11}	f_{12}	—	f_{1j}	—	f_{1L}	f_{10}
$x_1 - x_2$	f_{21}	f_{22}	—	f_{2j}	—	f_{2L}	f_{20}
—	—	—	—	—	—	—	—
$x_{i-1} - x_i$	f_{i1}	f_{i2}	—	f_{ij}	—	f_{iL}	f_{io}
—	—	—	—	—	—	—	—
$x_{k-1} - x_k$	f_{kl}	f_{k2}	—	f_{kj}	—	f_{kL}	f_{ko}
Total	f_{01}	f_{02}	—	f_{0j}	—	f_{ol}	n

এখানে পরিসংখ্যা বিভাজনে দেখা যাচ্ছে যে x চলকের k টি শ্রেণি এবং y চলকের L টি শ্রেণি আছে। x_i হল x শ্রেণি বিভাগের i-তম মধ্যমান এবং y_j হ'ল y শ্রেণিবিভাগের j-তম মধ্যমান। f_{ij} হ'ল (i, j) তম আয়তাকার ঘরের (cell) পরিসংখ্যা (frequency) যখন i = 1, 2, 3,....,k এবং j = 1, 2, 3,.....L.

এখানে x ও y এর সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের সূত্র হবে

$$r_{xy} \frac{\frac{1}{n}\sum_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})f_{ij}}{\left\{\frac{1}{n}\sum_{i}(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_{i0}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{n}\cdot\sum_{j}(y_i - \bar{y})^2 \cdot f_{oj}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

x ও y চলকের মানগুলি বড় হলে মূলবিন্দু ও মাত্রা পরিবর্তন করে u ও v চলকে রূপান্তরিত করা হয় যখন $u_i = \frac{x_i - a}{c}$ এবং $v_j = \frac{y_j - b}{d}$

যেহেতু সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক মূলবিন্দু ও মাত্রার পরিবর্তনের উপর নির্ভর করে না, তাই সূত্রটিকে নীচের মতও লেখা যায়।

$$r_{xy} = r_{uv} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i}\sum_{j}(u_i - \bar{u})(v_j - \bar{v})f_{ij}}{\left\{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i}(u_i - \bar{u})^2 \cdot f_{io}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{n}\cdot\sum_{j}(v_j - \bar{v})^2 \cdot f_{oj}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sum_i \sum_j u_i v_j f_{ij} - n\bar{u}\cdot\bar{v}}{\left\{\sum_i u_i^2 f_{io} - n\bar{u}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_j v_j^2 f_{oj} - n\bar{v}^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{n\sum_i \sum_j u_i v_j f_{ij} - \left(\sum_i u_i f_{io}\right)\left(\sum_j v_j f_{oj}\right)}{\left\{n\sum_i u_i^2 f_{io} - \left(\sum_i u_i f_{io}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{n\sum_j v_j^2 f_{oj} - \left(\sum_j v_j f_{oj}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

যখন $\bar{u} = \left(\sum_i u_i f_{io}\right)\Big/ n$ এবং $\bar{v} = \left(\sum_j v_i f_{oj}\right)\Big/ n$

$\sum_i u_i f_{io}, \sum_j v_i f_{oj}, \sum_i u_i^2 f_{io}$ এবং $\sum_j v_j^2 f_{oj}$ অতি সহজেই গণনা করা যায়।

কিন্তু $\sum_i \sum_j u_i \ v_j f_{ij}$ গণনা কিঞ্চিত কষ্টকর। তাই এই গণনা দুই স্তরে করা হয়।

প্রথমে j-র একটি নির্দিষ্ট মানে $\sum_i u_i f_{ij} = \mathrm{U}_j$ নির্ণয় করা হয়। অতঃপর $\sum_j v_j u_j$ গণনা করলেই $\sum_i \sum_j u_i v_j f_{ij}$ নির্ণয় করা হয়।

বিকল্প উপায়ে, প্রথমে i-এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য $\sum_j v_j f_{ij} = \mathrm{V}_i$ নির্ণয় করা হয়। অতঃপর $\sum_j u_i \mathrm{V}_i$ গণনা করলেই $\sum_i \sum_j u_i v_j f_{ij}$ নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ : 6.3 নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে x ও y চলক দ্বয়ের সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

y \ x	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	মোট
0-20	4	2				6
20-40	6	5	3	1		15
40-60		9	4	2	1	16
60-80		7	4	1		12
80-100			1			1
মোট	10	23	12	4	1	50

আমরা মূলবিন্দু ও মাত্রার পরিবর্তন করে নতুন দুই চলক u এবং v উপস্থিত করেছি।

যেখানে, $u = \dfrac{x - 27 \cdot 5}{5}$ এবং $v = \dfrac{y - 50}{20}$

টীকা : $v_j f_{ij}$ গুলি গণনা করে আয়তাকার ঘরে পরিসংখ্যার বাম দিকে বন্ধনীর মধ্যে রাখা হয়েছে। $u_i f_{ij}$ গুলি গণনা করে আয়তাকার ঘরে পরিসংখ্যার ডান দিকে বন্ধনীর মধ্যে রাখা হয়েছে।

অতঃপর এগুলি যোগ দিয়ে পাওয়া যাবে V_i এবং U_j অর্থাৎ $\sum v_j f_{ij} = V_i$ এবং $\sum u_i f_{ij} = U_j$

ছকসংখ্যা : 6.4 সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের গণনা

মধ্যক y_j	মধ্যক x_i	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	f_{oj}	$v_j f_{oj}$	$v_j^2 f_{oj}$	u_j	
	v_j \ u_i	–2	–1	0	1	2					
10	–2	(–8) 4(–8)	(–4) 2(–2)				6	–12	24	–10	20
30	–1	(–6)6(–12)	(–5) 5(–5)	(–3)3 (0)	(–1) (1)		15	–15	15	–16	16
50	0		(0) 9(–9)	(0) 4(0)	(0)2 (2)	(0)1 (2)	16	0	0	–5	0
70	1		(7) 7(–7)	(4) 4(0)	(1)1 (1)		12	12	12	–6	–6
90	2			(2) 1(0)			1	2	4	0	0
f_{io}		10	23	12	4	1	50	–13	55	–37	30
$u_j f_{io}$		–20	–23	0	4	2	–37				
$u_j^2 f_{io}$		40	23	0	4	4	71				
v_i		–14	–2	3	0	0	–13				
$u_i v_i$		28	2	0	0	0	30				

কার্যকরী সূত্র : $r_{xy} = r_{uv} = \dfrac{n\sum_i u_i V_i - \left(\sum_i V_i\right)\left(\sum_j U_j\right)}{\left\{n\sum_i u_i^2 f_{io} - \left(\sum_j U_j\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{n\sum_j v_i^2 f_{oj} - \left(\sum_i V_i\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{50\times 30-(-13)\times(-37)}{\sqrt{50\times 71-(-37)^2}\cdot\sqrt{50\times 55-(-13)^2}} = \frac{1019}{\sqrt{2181}\cdot\sqrt{2581}} = \frac{109}{46\cdot 70\times 50\cdot 80} = 0\cdot 43$$

6.7 সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের ব্যবহার

সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক দুটি চলকের পারস্পরিক সম্পর্কের প্রকৃতি ও ঘনিষ্ঠতার মাত্রার নিখুঁত সংখ্যাগত উপস্থাপন।

দুটি চলক যখন ঘনিষ্ঠভাবে সম্পর্কযুক্ত হয়, তখন একটি চলকের মান জানা থাকলে অপর চলকটির সম্ভাব্য মান নির্ণয় করা যায়। কিন্তু এক্ষেত্রে প্রতিগমন সমীকরণটিকে ব্যবহার অবশ্যম্ভাবী হয়ে পড়ে। সহ পরিবর্তনের মান ধনাত্মক হলে x ও y এর মধ্যে সরাসরি সম্বন্ধ আছে বলে মনে করা হয়। অর্থাৎ x এর মান (হ্রাস) বৃদ্ধি পেলে y এর মানও বৃদ্ধি (হ্রাস) পাবে।

কিন্তু সহ পরিবর্তনের মান যদি ঋণাত্মক হয় তবে x ও y এর মধ্যে বিপরীত সম্পর্ক আছে বলে ধরা হয়।

ব্যবসা বাণিজ্যের ক্ষেত্রে সহ পরিবর্তন ধারণাটির মাধ্যমে উৎপাদন ব্যয়, বিক্রয়ের পরিমাণ, দাম ও অন্যান্য আর্থিক চলকের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করা যায়। শিক্ষাতত্ত্ব ও মনস্তত্ত্বের বিভিন্ন অভীক্ষার যথার্থতা ও বিশ্বস্ততা নির্ণয়ে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক ব্যবহার করা হয়।

পরিবেশ বিজ্ঞানের ক্রমাগত অগ্রগতির ফলে প্রাকৃতিক বিভিন্ন উপাদান এবং শক্তির মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধের উপর গবেষণায় সহ-পরিবর্তন গুণাঙ্কের অবদান অস্বীকার করার উপায় নেই।

6.8 সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের সীমাবদ্ধতা

1. দুটি চলক x এবং y এর মধ্যে সম্পর্ক সরলরৈখিক না হলে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের মান শূন্য হবে। অর্থাৎ দুটি চলকের মধ্যে কোনো সম্পর্ক না থাকলে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের মান শূন্য হবে কিন্তু দুটি

চলকের সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক শূন্য হলে প্রমাণ হয় না যে তাদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক নেই।

2. যদি সমগ্রক (population) এর আয়তন খুব বড় হয় তবে তার থেকে নমুনা সংগ্রহ করে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করা হলে সেই একই সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক সমগ্রকের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নাও হতে পারে।

3. সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের মাধ্যম কোনো দুটি চলকের সম্পর্কের মাত্রা নিরূপণ করা হয়। কিন্তু তার থেকে তাদের মধ্যে কোনো কার্যকারণ সম্পর্ক আছে কিনা সেটা বলা সম্ভব হয় না।

4. দুটি চলকের মধ্যে সহ-পরিবর্তন গুণাঙ্ক খুবই বেশি হলেও অনেক ক্ষেত্রে দেখা যায় যে এই দুই চলকের মধ্যে কোনো সম্পর্কই নেই। এই ধরনের সম্পর্ককে বলা হয় অর্থহীন সম্পর্ক (non sense correlation or spurious correlation)। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় একটা স্কুলের ছাত্রদের বুদ্ধিমত্তা ও তাদের জুতোর মাপ এই দুই বৈশিষ্ট্যের (চলকের) মধ্যে খুবই নিবিড় সম্পর্ক আছে মনে হবে কারণ তাদের সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের মান খুব বেশি হয়। কিন্তু সাধারণ দৃষ্টিভঙ্গিতে আমরা জানি এই দুই বৈশিষ্ট্যের মধ্যে কোনো গভীর সম্পর্ক দেখা গেলে সেটা হবে অর্থহীন সম্পর্ক। আসলে বুদ্ধিমত্তা (intelligence) ও জুতোর মাপ (shoe size) এই দুটি চলক একটি তৃতীয় চলকের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। সেই তৃতীয় চলক হল ছাত্রদের বয়স। বয়সের সঙ্গে বুদ্ধিমত্তা বাড়ে আবার বয়সের সঙ্গে জুতোর মাপ বাড়ে কিন্তু বুদ্ধিমত্তা ও জুতোর মাপের সম্পর্ক সম্পূর্ণ অর্থহীন।

6.9 সারিবদ্ধ সহ পরিবর্তন

যদি দুটি চলকের মানের বদলে ক্রম সংখ্যা দেওয়া থাকে তাহলে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের গুণফল—ভ্রামক সূত্রটি ব্যবহার করা যায় না। যেমন ধরা যাক 10 জন ছাত্রের অঙ্ক ও ইংরাজি পরীক্ষার ফল নম্বরের ভিত্তিতে না দিয়ে ক্রম (rank) অনুযায়ী দেওয়া হয়েছে। এখানে গুণফল-ভ্রামক সূত্রটি ব্যবহারযোগ্য নয়। এর জন্য সারিবদ্ধ সহ পরিবর্তন পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হয়।

আবার গুণবাচক (attributes) দুটি চলকের পারস্পরিক সম্পর্ক গণনা করতে হলে গুণফল-ভ্রামক সূত্রটি ব্যবহার করা যায় না। যেমন কয়েকজন বিক্রেতার বুদ্ধিমত্তা ও কর্মনিপুণতার মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে হলেও সারিবদ্ধ সহ পরিবর্তন পদ্ধতি (Rank correlation) ব্যবহার করা হয়। এই পদ্ধতিতে 1, 2, 3, 4 ইত্যাদি সংখ্যা ব্যবহার করে চলক দুটির ক্রম অনুযায়ী অবস্থানের ভিত্তিতে দুটি শ্রেণি তৈরী করা যায়। ক্রম অনুযায়ী প্রাপ্ত দুটি শ্রেণির সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ককে সারিবদ্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক (Rank Correlation Co-efficient) বলা হয়। Edward Spearman এই গুণাঙ্কের একটি সূত্র দিয়েছেন

$$r_R = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}$$

যেখানে d = কোনো পদের দুটি সারিতে ক্রম অনুযায়ী অবস্থানের অন্তর এবং n = প্রত্যেকটি সারির মোট পদসংখ্যা।

এই সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের মান -1 এবং $+1$ এর মধ্যে থাকে।

অর্থাৎ $-1 \le r_R \le +1$

$r_R = +1$ হয় যখন দুটি সারিতে ক্রম অনুযায়ী প্রত্যেক পদের অবস্থান একই থাকে।

$r_R = -1$ হয় যখন ক্রম অনুযায়ী প্রত্যেক পদের অবস্থান দুই শ্রেণিতে বিপরীতমুখী ক্রমে থাকে। অর্থাৎ একটি শ্রেণিতে যে পদটি ক্রম অনুযায়ী প্রথম হয় অন্য শ্রেণিতে সেই পদটি ক্রম অনুযায়ী সবার শেষে থাকে।

বন্ধনযুক্ত ক্রম

রাশিতথ্যের শ্রেণি দুটিতে কখনও কখনও দেখা যায় যে দুই বা ততোধিক পদ একই ক্রমের অধিকারী। এই ধরনের সমস্যার নাম হল 'বন্ধনযুক্ত ক্রম'। এর সমাধানের জন্য ঐ পদগুলিকে, যাদের ক্রমসংখ্যা একই পাওয়া যাচ্ছে তাদের প্রত্যেককে একটি গড় ক্রমসংখ্যা প্রদান করা হয়। যেমন ধরা যাক একটি পরীক্ষায় তিনটি ছাত্র সর্বোচ্চ নম্বর পাওয়ার সুবাদে তিনজনই প্রথম স্থান অধিকার করেছে। এখন তাদের গড় ক্রম সংখ্যা হবে $\frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$

অর্থাৎ তিনটি ছাত্রের প্রত্যেকের ক্রমসংখ্যা হবে '2'.

এইরূপ বন্ধনযুক্ত ক্রম থাকলে সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় :

$$r_{R(\text{tied})} = 1 - \frac{6\left[\sum d_i^2 + \sum \left(t_i^3 - t_i\right) / 12\right]}{n^3 - n}$$

এখানে d = দুটি শ্রেণির পদগুলির ক্রমসংখ্যার অন্তর

n = প্রত্যেকটি সারির মোট পদসংখ্যা

t = উভয় শ্রেণিতে কোন পদ বন্ধনযুক্ত ক্রম অবস্থায় থাকলে তাদের সংখ্যা

উদাহরণ 6·4 : কোনো পরীক্ষায় 10 জন ছাত্র অঙ্ক ও অর্থনীতি বিষয়ে নিম্নলিখিত নম্বর পেয়েছে। তাদের সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

ছাত্র :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
অঙ্কের নম্বর :	90	30	82	45	32	65	40	88	73	66
অর্থনীতির নম্বর :	85	42	75	68	45	63	60	90	62	58

সমাধান : ছক সংখ্যা : 6·5 সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক গণনা

ছাত্র	অঙ্ক		অর্থনীতি		ক্রমের অন্তর	
	নম্বর	ক্রম সংখ্যা (x)	নম্বর	ক্রমসংখ্যা (y)	d = (x − y)	d^2
1	90	1	85	2	–1	1
2	30	10	42	10	0	0
3	82	3	75	3	0	0
4	45	7	68	4	3	9
5	32	9	45	9	0	0
6	65	6	63	5	1	1
7	40	8	60	7	1	1
8	88	2	90	1	1	1
9	73	4	62	6	–2	4
10	66	5	58	8	–3	9
Total	–	–	–	–	–	$\sum d^2 = 26$

সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক $r_R = 1 - \dfrac{6\sum d^2}{n^3 - n}$

$$= 1 - \frac{6 \times 26}{10^3 - 10} = 1 - \frac{156}{990} = \frac{26}{165}$$

$$= 1 - 0{\cdot}16 = 0{\cdot}84$$

উদাহরণ : 6·5 (বন্ধনযুক্ত ক্রম)

নীচের রাশিতথ্য থেকে সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

A শ্রেণি	29	32	45	67	56	36	45
B শ্রেণি	56	40	52	68	40	72	40

সমাধান : A শ্রেণিতে সর্বোচ্চ নম্বর হল 67 সুতরাং ঐ নম্বরের ক্রমসংখ্যা হল 1. এরপর দ্বিতীয় সর্বোচ্চ নম্বর হল 56 সুতরাং ঐ নম্বরের ক্রমসংখ্যা হবে 2. তৃতীয় সর্বোচ্চ নম্বর হল 45; কিন্তু 45 দুই বার আছে।

সুতরাং এই দুই পদে যেখানে যেখানে 45 নম্বর আছে সেখানে গড় ক্রমসংখ্যা হবে $\dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2} = 3{\cdot}5$ বাকী নম্বরগুলির ক্রমসংখ্যা অনুরূপভাবে নিরূপণ করতে হবে।

B শ্রেণিতে 72 সর্বোচ্চ নম্বর সুতরাং এটির ক্রমসংখ্যা হবে 1. এইভাবে 68 নম্বরের ক্রমসংখ্যা হবে 2. একইভাবে 56 নম্বরের ক্রম হবে 3. ঐভাবে 52 নম্বরের ক্রম হল 4. 40 নম্বর যার পঞ্চম স্থান পাওয়ার কথা, কিন্তু যেহেতু 40 নম্বর তিন বার আছে তাই 40 নম্বর পঞ্চম, ষষ্ঠ ও সপ্তম স্থান অধিকার করবে। অবশেষে বন্ধনযুক্ত ক্রমের নিয়ম অনুযায়ী 40 নম্বরকে আমরা একটা বড় ক্রম সংখ্যার ব্যবস্থা করব।

অর্থাৎ $\frac{5+6+7}{3}=\frac{18}{3}=6$

40 নম্বরের জন্য তিন জায়গায় ক্রমসংখ্যা 6 বসবে।

ছকসংখ্যা 6·6 সারিবদ্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক গণনা

শ্রেণি A		শ্রেণি B		ক্রম সংখ্যার অন্তর	
নম্বর	ক্রমসংখ্যা (x)	নম্বর	ক্রমসংখ্যা (y)	d = (x − y)	d^2
29	7	56	3	4	16
32	6	40	6	0	0
45	3·5	52	4	–0·5	0·25
67	1	68	2	–1	1
56	2	40	6	–4	16
36	5	72	1	4	16
45	3·5	40	6	–2·5	6·25
মোট –	–	–	–	–	$\sum d^2 = 55{\cdot}5$

সাকুল্যে এখানে দুটি শ্রেণিতে (A এবং B) দুবার বন্ধনযুক্ত ক্রমের সম্মুখীন হতে হয়েছে। A শ্রেণিতে দুটি নম্বরের ক্রমসংখ্যা এবং B শ্রেণিতে তিনটি নম্বরের ক্রমসংখ্যা বন্ধনযুক্ত পাওয়া গেছে।

সুতরাং t = 2 এবং 3

$$\therefore \frac{\sum\left(t^3-t\right)}{12}=\frac{2^3-2}{12}+\frac{3^3-3}{12}=0{\cdot}5+2=2{\cdot}5$$

$$\therefore r_{R_{(\text{tied})}}=1-\frac{6\left[\sum d^2+\sum\frac{t^3-t}{12}\right]}{n\left(n^2-1\right)}$$

$$= 1 - \frac{6[55{\cdot}5 + 2{\cdot}5]}{7(7^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 58}{7 \times 48} = 1 - 1{\cdot}036 = -0{\cdot}036$$

6.10 সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন, গুণাঙ্কের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা :

1. সারিবন্ধ সহ-পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করা তুলনামূলক ভাবে গুণফল-ভ্রামক সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের থেকে সহজ। কিন্তু যদি দুইটি চলকের মান দেওয়া থাকে তবে এই দুই পদ্ধতিতে গুণাঙ্ক নির্ণয় করলে দেখা যাবে যে দুইটি গুণাঙ্কের মান সমান। তবে অবশ্য কোনো পদে বন্ধনযুক্ত ক্রমের সমস্যা না থাকলে তবেই এই মান দুটি সমান হবে।

2. গুণবাচক রাশিতথ্য (Attributes) যেমন সততা, বুদ্ধিমত্তা, দক্ষতা ইত্যাদি চলক যাদের সংখ্যা দ্বারা পরিমাপ করা যায় না সে সব ক্ষেত্রে সারিবন্ধ সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করাই একমাত্র উপায়।

3. যদি সঠিক রাশিতথ্য জানা না থাকে অথচ ক্রম অনুযায়ী ক্রমসংখ্যা দেওয়া থাকে, তখন আমরা অনায়াসে সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করতে পারি।

4. আবার রাশিতথ্য জানা থাকলেও চলক দুটির সম্পর্কের নিবিড়তার একটা আন্দাজ পেতে সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক ব্যবহার করা হয়।

অসুবিধা :

1. শ্রেণিবন্ধ দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতিতে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের মান নির্ণয় করা যায় না।

2. পদ সংখ্যা যদি খুব বেশি হয় (30 এর বেশি) তাহলে সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করা বেশ কষ্টসাধ্য ব্যাপার হয়ে উঠে।

6.11 সরল প্রতিগমন বিশ্লেষণ

দুইটি চলক যদি সম্পর্কযুক্ত হয় তবে একটি চলকের কোনো নির্দ্দিষ্ট মানের জন্য অপরটির গড় মান গণনা করা যায়। প্রথম চলকটি যার নির্দিষ্ট মান দেওয়া আছে সেটিকে স্বাধীন চলক (Independent Variable) বলা হয় আর অপর চলকটিকে নির্ভরশীল চলক (Dependent Variable) বলা হয় যার মান অনুমান (estimate) করা সম্ভব।

দ্বিচলক রাশিতথ্যের উপর ভিত্তি করে চলক দুটির পারস্পরিক সম্পর্ক একটি সমীকরণের মাধ্যমে

প্রকাশ করা হয়। ধরা যাক্ x হচ্ছে স্বাধীন চলক ও y হচ্ছে নির্ভরশীল চলক। অর্থাৎ x এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য y এর গড় মান অনুমান করা সম্ভব হবে ঐ সমীকরণের মাধ্যমে। মনে করা যাক্ x এবং y এর সম্পর্ক নিম্নলিখিত সমীকরণের মাধ্যমে উপস্থাপিত হয়।

$y = a + bx$..........(1)

এখন x এর মান যদি নির্দিষ্ট করা হয় ধরা যাক $x = x_o$ তাহলে y এর গড় মান যেটা পূর্বাভাস (prediction) হিসাবে ধরা হবে সেটা হল

$a + bx_o$

সমীকরণ (1) হবে প্রতিগমন সমীকরণ (Regression Equation)।

মনে করা যাক্ আমরা একটি স্কুলের সব ছাত্রের উচ্চতা ও ওজনের রাশিতথ্য সংগ্রহ করেছি। এবার এই উচ্চতা ও ওজনগুলি আমরা এক লেখচিত্রে উপস্থাপন করেছি। ফলে আমরা একটা বিক্ষিপ্ত চিত্র (Scatter Diagram) পাব যেখানে (x_i, y_i) = (উচ্চতা, ওজন) স্থানাঙ্কগুলি অসংখ্য বিন্দু নির্দেশ করে যেগুলি বিক্ষিপ্ত চিত্রে উপস্থাপিত হয়েছে। কোনো নির্দিষ্ট উচ্চতার মানের জন্য অনেকগুলি ওজনের মান পাওয়া যাবে আবার অপরপক্ষে কোনো নির্দিষ্ট ওজনের মানের জন্য অনেকগুলি উচ্চতার মান পাওয়া যাবে। এই উচ্চতার পরিবর্তনশীলতা অথবা ওজনের পরিবর্তনশীলতা মূলত ছাত্রগুলির বিভিন্নতার জন্য হয়। অর্থাৎ কোনো অনন্য (unique) সম্পর্ক প্রকৃত উচ্চতা ও প্রকৃত ওজনের মধ্যে আশা করা যায় না। কিন্তু পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যাবে যে যদি উচ্চতা বৃদ্ধি পায় তাহলে গড় ওজনের মানও বৃদ্ধি পাবে। বিভিন্ন উচ্চতার মানের জন্য ওজনের গড় মানগুলির সঞ্চারপথ (locus) কেই প্রতিগমন রেখা বলা হয়। ধরা যাক্ এই প্রতিগমন রেখার কার্যকরী সমীকরণ (functional equation) $y = f(x)$।

এছাড়াও আরও একটি প্রতিগমন রেখা এই বিক্ষিপ্ত চিত্রে পাওয়া যায় সেটি হল বিভিন্ন ওজনের মানের জন্য উচ্চতার গড় মানগুলির সঞ্চারপথ। এই সঞ্চার পথের কার্যকরী সমীকরণ হবে $x = \psi(y)$ ধরা যাক্ দুইটি সঞ্চারপথই সরলরৈখিক। প্রথম সরলরেখাকে বলা হয় x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ যেখানে x হল স্বাধীন চলক ও y হল নির্ভরশীল চলক। আর দ্বিতীয় সরলরেখাটিকে বলা হয় y এর উপর x এর প্রতিগমন সমীকরণ যেখানে y হল স্বাধীন চলক এবং x হল নির্ভরশীল চলক।

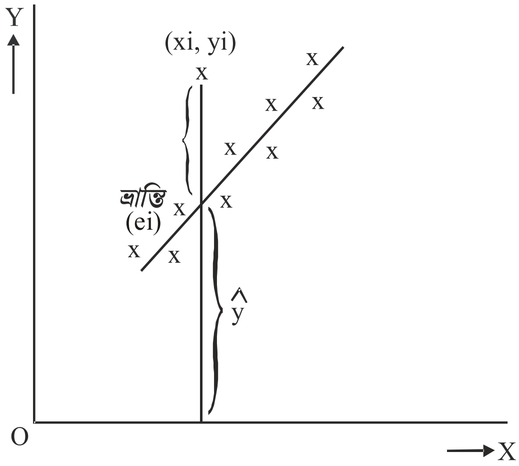
6.12 x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ

ধরা যাক্ x এর উপর y-এর সরলরৈখিক প্রতিগমন সমীকরণটি হল

$$y = a + bx$$

যেহেতু এই সমীকরণটি y এর মানের পূর্বাভাসের (prediction) জন্য ব্যবহৃত হবে তাই a এবং b আপাত ধ্রুবকের অনুমিত (estimated) মান x এবং y এর যে সমস্ত মান পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে পাওয়া যাবে সেগুলির ভিত্তিতে গণনা করতে হবে।

x এর উপর y এর প্রতিগমন রেখা



চিত্র : 6·4

যখন x এর মান x_i, পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে y এর মান হবে y_i অর্থাৎ রাশিতথ্য যা পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে পাওয়া যায় সেটিকে আমরা x_i ও y_i বলি যেখানে i = 1, 2, 3,....., n.

এবার y এর অনুমিত (estimated) মানকে যদি $\hat{y}$ দিয়ে উপস্থিত করা হয় তবে

$\hat{y} = a + bx_i$ যখন x এর মান x_i.

তাহলে অনুমানের ভ্রান্তি (error of estimation) আমরা e_i দিয়ে উপস্থিত করবো সেটি হবে অনুমানের ভ্রান্তি $= e_i = y_i - \hat{y} = y_i - (a + bx_i) = (y_i - a - bx_i)$

অর্থাৎ পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে পাওয়া y এর মানের থেকে y এর অনুমিত মান বিয়োগ দিলে অনুমানের ভ্রান্তি পাওয়া যায়।

এখন চিত্র 6·4 এ বিক্ষিপ্ত চিত্রের মধ্যে দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখাটি সর্বাপেক্ষা উপযুক্ত (best fit) হবে যদি অনুমানের ভ্রান্তির বর্গের যোগফল $\left(\sum e_i^2\right)$ সর্বনিম্ন হয়।

এই পদ্ধতিকে লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি (Method of Least Square) বলা হয়।

এই লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে সমাধান করা হয় যেখানে $\sum e_i^2$ কে a ও b এই দুই ধ্রুবকের সাপেক্ষে সর্বনিম্নকরণ (minimise) করা হয়।

এখন $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$

এই $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ কে a ও b এই দুয়ের সাপেক্ষে সর্বনিম্নকরণ করতে হবে।

সর্বনিম্নকরণের প্রাথমিক স্তরের শর্ত (1st order condition) অনুসারে পাই

$$\frac{\delta}{\delta a}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2\right) = 0 \text{ এবং } \frac{\delta}{\delta b}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2\right) = 0$$

সুতরাং $\frac{\delta}{\delta a}\left(\sum e_i^2\right) = 2\sum\left(y_i - a - bx_i\right)\times(-1) = 0$

অথবা, $\sum\left(y_i - a - bx_i\right) = 0$

অথবা, $\sum y_i = na + b\sum x_i$........(i)

এবং $\frac{\delta}{\delta b}\left(\sum e_i^2\right) = 2\sum\left(y_i - a - bx_i\right)\times\left(-x_i\right) = 0$

অথবা, $\sum\left(y_i - a - bx_i\right)\times x_i = 0$

অথবা, $\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2$........(ii)

(i) এবং (ii) সমীকরণ দুটিকে স্বাভাবিক সমীকরণ (normal equations) বলা হয়। এখন এই সমীকরণ দুটি সমাধান করে ‘a’ এবং ‘b’ এর মান নির্ণয় করে সেই মান $y = a + bx$ এই সমীকরণে বসিয়ে x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ পাওয়া যায়।

[সমীকরণ (ii) × n] – [সমীকরণ (i) × $\sum x_i$] থেকে পাই

$$n\sum x_i y_i = a.n\sum x_i + b.n\sum {x_i}^2$$

$$-\quad \sum x_i y_i = a.n\sum x_i + b\left(\sum x_i\right)^2$$

$$n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i = b\left[n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right]$$

$$\therefore b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum x_i y_i - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \overline{x}^2} \quad \left(\because \frac{\sum x_i}{n} = \overline{x} \text{ ও } \frac{\sum y_i}{n} = \overline{y}\right)$$

$$=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\operatorname{var}(x)}=r\frac{\delta_y}{\delta_x}$$

এবার (i) এ এই মান বসিয়ে পাই $\overline{y}=a+b\overline{x}$

অথবা, $a=\overline{y}-r\frac{\delta_y}{\delta_x}\cdot\overline{x}.$

এখন 'a' ও 'b' এর অনুমিত (estimated) মান y = a + bx সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$y=\overline{y}-r\frac{\delta_y}{\delta_x}\cdot\overline{x}+r\frac{\delta_y}{\delta_x}\cdot x$$

অথবা, $y=\overline{y}+r\frac{\delta_y}{\delta_x}(x-\overline{x})$.........(iii)

এই সমীকরণে x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ বলা হয় এবং $r\frac{\delta_y}{\delta_x}$ কে প্রতিগমন গুণাঙ্ক বলে যখন x এর উপর y এর প্রতিগমন হয় এবং b_{yx} দিয়ে প্রতিগমন গুণাঙ্ককে চিহ্নিত করা হয়। এই প্রতিগমন গুণাঙ্কের অর্থ হল x চলকের এক একক বৃদ্ধির জন্য y-এর বৃদ্ধির পরিমাণ হবে $\left(r\frac{\delta_y}{\delta_x}\right)$

6.13 y এর উপর x এর প্রতিগমন সমীকরণ

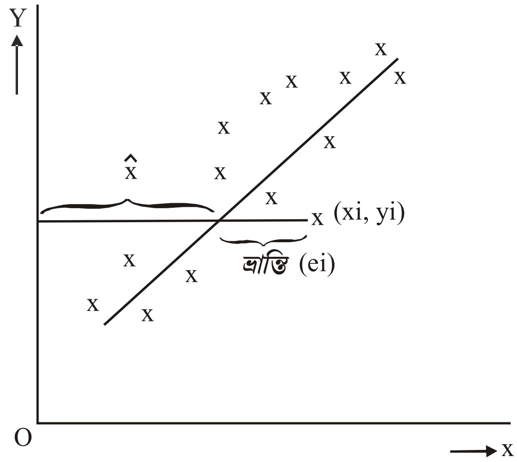
ধরা যাক x হ'ল নির্ভরশীল চলক এবং y স্বাধীন চলক। মনে করা যাক্ y এর উপর x এর প্রতিগমন সমীকরণ হ'ল

$x_i = c + dy_i$, i = 1, 2,........n. ....(1)

(x_i, y_i) হ'ল পর্য্যবেক্ষণের মাধ্যমে পাওয়া রাশিতথ্য। $y = y_i$ হ'লে x এর অণুমিত (predicted or estimated) মান হবে $c + dy_i$. x এর অনুমিত মানকে $\hat{x}$ দিয়ে চিহ্নিত করা হল। তাহলে x এর অনুমানের ভ্রান্তি (error of estimation) হবে $e_i=x_i-\hat{x}=x_i-(c+dy_i)=(x_i-c-dy_i)$

এখন c এবং d এর অনুমিত (estimated) মান গণনা করে (1) নং সমীকরণে বসালে আমরা y এর উপর x এর প্রতিগমন সমীকরণ পাব।

y এর উপর x এর প্রতিগমন রেখা



c ও d এর অনুমতি মান গণনা করার জন্য অনুমানের ভ্রান্তির বর্গের যোগফলকে c ও d এর সাপেক্ষে সর্বনিম্নকরণ করতে হবে।

অর্থাৎ $\sum\left(x_i - c - dy_i\right)^2$ কে c এবং d এর সাপেক্ষে সর্বনিম্নকরণ করতে হবে।

সর্বনিম্নকরণের প্রাথমিক স্তরের শর্ত হল

$$\frac{\delta \sum e_i^2}{\delta c} = 0 \text{ এবং } \frac{\delta \sum e_i^2}{\delta d} = 0$$

উপরের (6·12) অংশে যে পদ্ধতিতে x এর উপর y এর প্রতিগমণ সমীকরন গণনা করা হয়েছে সেই একই পদ্ধতিতে গণনা করে আমরা y এর উপর x এর প্রতিগমন সমীকরণ পাই

$$x = \bar{x} + r\frac{\delta_x}{\delta_y}\left(y - \bar{y}\right).......(2)$$

এর মধ্যে $r\frac{\delta_x}{\delta_y}$ কে y এর উপর x এর প্রতিগমন গুণাঙ্ক বলা হয় এবং প্রথাগত ভাবে চিহ্নিত করা হয় b_{xy} দিয়ে। এর অর্থ হল y এর এক একক বৃদ্ধি হলে x এর বৃদ্ধির পরিমাণ হবে $r\frac{\delta_x}{\delta_y}$.

টীকা 1. দুটি প্রতিগমন সমীকরণ $y = \bar{y} = r\frac{\delta_y}{\delta_x}\left(x - \bar{x}\right)$ এবং

$x-\bar{x}=r\frac{\sigma x}{\sigma y}(y-\bar{y})$ পরস্পরকে ছেদ করে $(\bar{x},\bar{y})$ বিন্দুতে।

কারণ দুটি সমীকরণই সিদ্ধ হয় যখন $x=\bar{x}$ এবং $y=\bar{y}$

2. দুটি প্রতিগমন রেখা একটির উপর আর একটি সমপাতিত (Coincide) হয় বা মিশে যায় যখন $r=\pm 1$ হয় অর্থাৎ যখন দুটি চলক x এবং y এর মধ্যে সম্পর্ক পূর্ণভাবে সরলরৈখিক।

6.14 প্রতিগমন রেখার ধর্মাবলী

1. প্রতিগমন গুণাঙ্ক শুধুমাত্র মাত্রার (scale) উপর নির্ভর করে কিন্তু মূলবিন্দুর (origin) উপর নির্ভর করে না।

ধরা যাক্ $u=\frac{x-a}{c}$ এবং $v=\frac{y-b}{d}$

$\therefore x=a+cu$ এবং

$\bar{x}=a+c\bar{u}$

বিয়োগ দিয়ে পাই $(x-\bar{x})=c(u-\bar{u})$

একই ভাবে পাওয়া যায় $(y-\bar{y})=d(v-\bar{v})$

সুতরাং $\operatorname{var}(x)=c^2\operatorname{var}(u)$

$$\left[\because \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}=\operatorname{var}(x) \text{ এবং } \frac{\sum(u-\bar{u})^2}{n}=\operatorname{var}(u)\right]$$

একই ভাবে পাওয়া যাবে $\operatorname{var}(y)=d^2\operatorname{var}(v)$

$$\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})=\frac{1}{n}\sum c(u-\bar{u})\cdot d(v-\bar{v})$$

$$=\frac{1}{n}c\cdot d\sum(u-\bar{u})(v-\bar{v})$$

$$=cd\operatorname{cov}(u,v)$$

এখানে $b_{yx} = r\frac{\delta_y}{\delta_x} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\delta_x \delta_y} \cdot \frac{\delta_y}{\delta_x} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\operatorname{var}(x)} \quad \left(\therefore r_x^2 = \operatorname{var}(x)\right)$

$$= \frac{cd \operatorname{cov}(u,v)}{c^2 \operatorname{var}(u)} = \frac{d}{c} \times \frac{\operatorname{cov}(u,v)}{\operatorname{var}(u)} = \frac{d}{c} \cdot b_{vu}$$

একইভাবে গণনা করলে পাওয়া যাবে $b_{xy} = \frac{c}{d} \cdot b_{uv}$

সুতরাং প্রমাণিত হল যে প্রতিগমন গুণাঙ্ক শুধুমাত্র মাত্রার (Scale) উপর নির্ভর করে, মূলবিন্দুর উপরে নয়। এইখানে c এ d হল মাত্রা।

2. দুটি প্রতিগমন রেখা $(y-\bar{y}) = b_{yx}(x-\bar{x})$ এবং $(x-\bar{x}) = b_{xy}(y-\bar{y})$ পরস্পর মিশে যাবে বা একটি আর একটির উপর সমপাতিত (Coincide) হবে যদি $b_{yn} = \frac{1}{b_{xy}}$ হয়।

প্রমাণ : প্রতিগমন রেখা দুটি $(y-\bar{y}) = b_{yx}(x-\bar{x})$ এবং $(y-\bar{y}) = \frac{1}{bxy}(x-\bar{x})$

এখন, যদি $b_{yx} = \frac{1}{b_{xy}}$ হয় তবে $b_{yx} \cdot b_{xy} = 1$

অথবা, $r_{yx} \cdot \frac{\delta_y}{\delta_x} \;\; r_{xy} \cdot \frac{\delta_x}{\delta_y} = 1$ অথবা, $r_{yx} \cdot \frac{\delta_y}{\delta_x} \cdot \delta_{xy} \cdot \frac{\delta_x}{\delta_y} = 1 \quad \left(\because r_{xy} = r_{yx}\right)$

অথবা, $r_{xy}^2 = 1 \therefore r_{xy} = \pm 1$

অর্থাৎ বিক্ষিপ্ত চিত্রে সমস্ত বিন্দু একটাই সরলরেখার উপর অবস্থান করবে।

3. দুটি প্রতিগমন রেখা যদি মিশে না যায় তাহলে $b_{yx} \neq \frac{1}{b_{xy}}$ হবে। এবং প্রতিগমন রেখা দুটি $(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করবে।

প্রমাণ : যেহেতু $(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দু দ্বারা দুটি প্রতিগমন সমীকরণ সিদ্ধ হয় তাই $(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দুতে দুটি প্রতিগমন রেখা পরস্পর ছেদ করে।

4. x এর উপর y এর প্রতিগমনে দেখা যায় যে y এর অনুমিত (estimated) মানের গড় আর পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে y এর রাশিতথ্যের গড়—দুটিই সমান।

প্রমাণ : x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ থেকে y এর অনুমিত (estimated) মান পাওয়া যায় $\hat{Y}$ যখন $x = x_i$

$$\therefore \hat{Y}_i = \overline{y} + r \cdot \frac{\delta_y}{\delta_x}\left(x_i - \overline{x}\right)$$

$$\therefore \sum \hat{Y}_i = n\overline{y} + r \cdot \frac{\delta_y}{\delta_x} \cdot \sum\left(x_i - \overline{x}\right) = n\overline{y} \quad \left[\therefore \sum\left(x_i - \overline{x}\right) = 0\right]$$

$$\therefore \hat{Y} = \frac{1}{n}\sum \hat{Y}_i = \overline{y}$$

টীকা :

এর থেকে আর একটি ফলাফল পাওয়া যায়।

ভ্রান্তির গড় $= \overline{e} = \frac{1}{n}\sum e_i = \frac{1}{n}\sum_i \left(y_i - \hat{Y}\right) = \overline{y} - \hat{Y} = 0$

এই ধরনের ফল y এর উপর x এর প্রতিগমনের সময়ও পাওয়া যাবে।

5. সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক হল দুটি প্রতিগমন গুণাঙ্কের গুণোত্তর গড়

প্রমাণ : দুটি প্রতিগমন গুণাঙ্ক হল

$b_{yx} = r \cdot \frac{\delta_y}{\delta_x}$ এবং $b_{xy} = r \frac{\delta_x}{\delta_y}$

$$\therefore b_{yx} \cdot b_{xy} = r \frac{\delta_y}{\delta_x} \cdot r \frac{\delta_x}{\delta_y} = r^2$$

$$\therefore |r| = \sqrt{b_{yx} \cdot b_{xy}}$$

6. $\text{Var}\left(\hat{Y}\right) = \frac{1}{n}\sum\left(\hat{Y}_i - \hat{Y}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum\left[\overline{y} + r\frac{\delta_y}{\delta_x}\left(x_i - \overline{x}\right) - \overline{y}\right]^2$

$$= r^2 \frac{\delta_y^2}{\delta_x^2} \cdot \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 \qquad [\because \bar{Y} = \bar{y}]$$

$$= r^2 \cdot \frac{\delta_y^2}{\delta_x^2} \cdot \delta_x^2 = r^2 \delta_y^2 \qquad \therefore \text{Var}(\bar{Y}) = r^2 \delta_y^2$$

$$= r^2 \text{ Var}(y)$$

$$\therefore r^2 = r_{xy}^2 = \frac{\text{Var}(\hat{Y})}{\text{var}(y)} = \frac{\delta_{\hat{Y}}{}^2}{\delta_y{}^2} \text{ অথবা, } |r| = \frac{\delta_{\hat{Y}}}{\delta_y}$$

সুতরাং x ও y এর সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের সংখ্যাগত মানের অর্থ হল এটি সেই অনুপাত যে অনুপাতে x এর উপর y এর প্রতিগমন y চলকের মোট পরিবর্তনশীলতাকে (variability) ব্যাখ্যা করে। অন্যভাবে বলা যায়

$$r_{xy}^2 = \frac{\text{Var}(\hat{Y})}{\text{Var}(y)} = \frac{\text{y এর ব্যাখ্যাকৃত ভেদমান}}{\text{y এর মোট ভেদমান}}$$

এবং r_{xy}^2 হল নির্ধারক গুণাঙ্ক (Co-efficient of determination)

7. অনুমানের ভ্রান্তির (e) সমক পার্থক্য কে y এর অনুমানের প্রমাণ ভ্রান্তি (Standard error of estimate) বলা হয় যখন x এর উপর y এর প্রতিগমন হয়। এই অনুমানের প্রমাণ ভ্রান্তি হবে $\delta_y \sqrt{1-r^2}$

$$\text{Var}(e) = \frac{1}{n} \sum e_i^2 \; (\because \bar{e} = 0)$$

$$= \frac{1}{n} \sum (y_i - \hat{Y})^2 = \frac{1}{n} \sum \left\{ (y_i - \bar{y}) - r \frac{\delta_y}{\delta_x} (x_i - \bar{x}) \right\}^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2 - 2r \frac{\delta_y}{\delta_x} \cdot \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + r^2 \frac{\delta_{y^2}}{\delta_{x^2}} \cdot \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \delta_y^2 - 2r\frac{\delta_y}{\delta_x} \cdot r\delta_x\delta_y + r^2\frac{\delta_y{}^2}{\delta_x{}^2} \cdot \delta_x^2 \qquad \therefore \frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = \operatorname{cov}(x, y)$$

$$= \delta_y^2 - 2r^2\delta_y^2 + r^2\delta_y^2 \qquad \text{and } r = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\delta_x\delta_y} \quad \therefore \operatorname{cov}(x,y) = r\delta_x\delta_y$$

$$= \delta_y^2 - r^2\delta_y^2 \qquad \text{এবং } \frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})^2 = \delta_y^2 \text{ ও } \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2 = \delta_x^2$$

$$= \delta_y^2\left(1 - r^2\right)$$

$$\therefore \operatorname{var}(e) = \delta_y^2\left(1 - r^2\right)$$

$\therefore$ e এর সমক পার্থক্য $= \delta_y\sqrt{1 - r^2}$

$$\therefore \operatorname{var}(e) \geq 0$$

$\therefore \delta_y^2\left(1 - r^2\right) \geq 0$ অথবা, $1 - r^2 \geq 0$ অথবা $r^2 \leq 1 \therefore -1 \leq r \leq +1$

8. অনুমানের ভ্রান্তি e হচ্ছে y চলকের সেই অংশ যার সঙ্গে x চলকের কোনো সম্পর্ক নেই। এটা প্রমাণ করতে হল আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে cov (x, e) = 0.

$$\operatorname{cov}(x, e) = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})e_i \; [\therefore \bar{e} = 0]$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum x_ie_i - \bar{x}\sum e_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}(0 - \bar{x}.0)$$

$$= 0$$

[6·12 অংশে আলোচিত স্বাভাবিক সমীকরণ থেকে পাই $\sum(y_i - a - bx_i) = 0$ অথবা $\sum e_i = 0$

এবং $\sum(y_i - a - bx_i) \times x_i = 0$ অথবা $\sum x_ie_i = 0$]

$$\therefore r_{xe} = 0$$

9. পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে পাওয়া y চলকের রাশিতথ্যের থেকে তার গড় মানের পার্থক্যের বর্গের যোগফলকে দুটি অংশে ভাগ করা যায়।

প্রথমটি হল সেই অংশের বর্গের যোগফল যা x এর উপর y এর প্রতিগমনের মাধ্যমে y চলকের পরিবর্তনশীলতা ব্যাখ্যা করতে পারে। দ্বিতীয়টি হল সেই অংশের বর্গের যোগফল যা x এর উপর y এর প্রতিগমনের মাধ্যমে y চলকের পরিবর্তনশীলতা ব্যাখ্যা করতে পারে না।

$$\therefore \sum\left(y_i-\bar{y}\right)^2$$

$$=\sum\left\{\left(\hat{Y}-\bar{y}\right)+\left(y_i-\hat{Y}\right)\right\}^2$$

$$=\sum\left(\hat{Y}-\bar{y}\right)^2+\sum\left(y_i-\hat{Y}\right)^2+2\sum\left(\hat{Y}-\hat{y}\right)\left(y_i-\hat{Y}\right)$$

$$=\sum\left(\hat{Y}-\bar{y}\right)^2+\sum\left(y_i-\hat{Y}\right)^2 ....(\mathrm{I})$$

$$\left[\therefore \sum\left(\hat{Y}-\hat{y}\right)\left(y_i-\hat{Y}\right)=\sum b\left(x_i-\bar{x}\right)e_i=b\sum x_ie_i-b\bar{x}\sum e_i=0-0=0\right.$$

কারণ স্বাভাবিক সমীকরণ থেকে পাই $\sum x_ie_i=0$ এবং $\sum e_i=0$]

সমীকরণ (I) এর ডান দিকে দুটি অংশ আছে। প্রথমটি হল সেই অংশ যা x এর উপর y এর প্রতিগমনের ফলে y চলকের পরিবর্তনশীলতা ব্যাখ্যা করে। দ্বিতীয়টি হল সেই অংশ যা x এর উপর y এর প্রতিগমনের ফলে y চলকের পরিবর্তনশীলতা ব্যাখ্যা করতে পারে না।

10. দুটি সরলরৈখিক প্রতিগমন রেখা পরস্পরকে ছেদ করলে দুটি রেখার মধ্যে যে কোণ উৎপন্ন হয় সেটির মান 'O' হবে যখন $r=\pm 1$

আর কোণটির মান 90º হবে যখন r = 0.

প্রতিগমন রেখাদ্বয়ের সমীকরণ হল

$$y=\bar{y}+r\frac{\delta_y}{\delta_x}\left(x-\bar{x}\right)........(\mathrm{i})$$

এবং $x=\bar{x}+r\frac{\delta_x}{\delta_y}\left(y-\bar{y}\right).......(\mathrm{ii})$

সমীকরণ (i) এর ঢাল (Slope) হল $r\frac{\delta_y}{\delta_x}=m_1$ (ধরা যাক্)

এবং সমীকরণ (ii) এর ঢাল হল $\frac{\delta_y}{r\delta_x}=m_2$ (ধরা যাক্)

যদি দুই প্রতিগমন রেখার মধ্যে যে কোণ উৎপন্ন হয় সেটিকে θ ধরা হয়, তবে

$$\theta=\tan^{-1}\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|=\tan^{-1}\left|\frac{\frac{\delta_y}{r\delta_x}-r\frac{\delta_y}{\delta_x}}{1+\frac{\delta_y}{r\delta_x}\cdot r\frac{\delta_y}{\delta_x}}\right|$$

$$=\tan^{-1}\left|\frac{\left(1-r^2\right)}{r}\cdot\frac{\delta_x\delta_y}{\delta_x^2+\delta_y^2}\right|$$

যখন $r=\pm 1,$ তখন tan θ = 0 অর্থাৎ θ = 0 এবং দুটি প্রতিগমন রেখা একে অপরের উপর সমপাতিত হবে।

আবার যখন r = 0, cot θ = 0 অর্থাৎ θ = 90º এবং দুটি প্রতিগমন রেখা একটি আর একটির উপর লম্ব হবে আর 90º কোণ উৎপন্ন করবে।

উদাহরণ : 6·6 ধরা যাক্ 4u = 2x + 7 এবং 6v = 2y – 15 দেওয়া আছে। x এর উপর y এর প্রতিগমন গুণাঙ্ক দেওয়া আছে 3, তাহলে u এর উপর v এর প্রতিগমন গুণাঙ্ক কত হবে?

সমাধান : $u=\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$ এবং $v=\frac{1}{3}y-\frac{5}{2}$

$\therefore u-\bar{u}=\frac{1}{2}\left(x-\bar{x}\right)$ এবং $v-\bar{v}=\frac{1}{3}\left(y-\bar{y}\right)$

$$\therefore \operatorname{var}(u)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\operatorname{var}(x)=\frac{1}{4}\operatorname{var}(x)$$

এবং $\operatorname{cov}(u,v)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{cov}(x,y)$

$$\therefore b_{vu}=\frac{\operatorname{cov}(u,v)}{\operatorname{var}(u)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{cov}(x,y)}{\frac{1}{4}\operatorname{var}(x)}=\frac{2}{3}\cdot b_{yx}=\frac{2}{3}\times 3=2$$

উদাহরণ : 6·7 বয়সকে x চলক এবং রক্তচাপকে y চলক ধরে নিয়ে 10 জন মহিলার জন্য নীচের তথ্য পাওয়া গেল :

		x	y
গড়	:	53	142
ভেদমান	:	130	165

$$\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})=1220$$

এখন এই তথ্যের ভিত্তিতে x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ নির্ণয় কর এবং ঐ সমীকরণের সাহায্যে 45 বছর বয়সের একজন মহিলার রক্তচাপ কত হতে পারে অনুমান (estimate) কর।

সমাধান : দেওয়া আছে $\bar{x}=53,\ \bar{y}=142,\ \operatorname{var}(x)=130$ এবং $\operatorname{var}(b)=165$

এখন $\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{10}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})=\frac{1}{10}\times 1220=122$

সুতরাং x এর উপর y এর প্রতিগমন গুণাঙ্ক হবে

$$b_{yx}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\operatorname{var}(x)}=\frac{122}{130}=0{\cdot}94$$

$\therefore$ x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ হবে

$$y=\bar{y}+b_{yx}(x-\bar{x})=142+0{\cdot}94(x-53)=142+0{\cdot}94x-48{\cdot}82$$

অথবা $g=92{\cdot}18+0{\cdot}94x$

এখন x = 45 দেওয়া আছে। $\therefore y=92{\cdot}18+0{\cdot}94\times 45=134{\cdot}48$

উদাহরণ : 6·8 y এর উপর x এর প্রতিগমন সমীকরণ হল x = 4y + 5 এবং x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ হল y = kx + 4

প্রমাণ কর যে $0<k\leq 0{\cdot}25.$ কিন্তু k = 0·10 যদি দেওয়া থাকে, তবে x এবং y এর গড় নির্ণয় কর এবং তাদের সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক গণনা কর।

সমাধান : $b_{xy} = 4$ এবং $b_{yx} = k$

$\therefore 0 \le r_{xy} = b_{xy} \cdot b_{yx} \le 1$

$\therefore 0 \le 4k \le 1$

অথবা $0 \le k \le 0{\cdot}25$

কিন্তু $b_{yx} = k > 0$ [কারণ $b_{xy} = 4 > 0$]

$\therefore 0 < k \le 0{\cdot}25$

যদি k = 0·10 দেওয়া থাকে, তবে প্রতিগমন সমীকরণ দুটি হবে

x = 4y + 5 এবং y = 0·10x + 4

যেহেতু দুটি প্রতিগমন রেখা $(\overline{x}, \overline{y})$ বিন্দুতে ছেদ করে, দুটি প্রতিগমন রেখাকে সমাধান করে পাই

$x = 0{\cdot}4x + 21$ $\quad\quad \therefore x = \dfrac{21}{0{\cdot}6} = 35$

$y = 3{\cdot}5 + 4 = 7{\cdot}5$ $\quad\quad \therefore \overline{x} = 35$ এবং $\overline{y} = 7{\cdot}5$

$r_{xy}^2 = 4{\cdot}k = 0{\cdot}4$ $\quad\quad \therefore r_{xy} + \sqrt{0{\cdot}4} = +0{\cdot}63$

r_{xy} ধনাত্মক হবে তার কারণ r_{xy} এবং r_{yx} সর্বদা একই সাংকেতিক চিহ্ন থাকবে। r_{xy} এবং r_{yx} এখানে দুটিই ধনাত্মক হবে।

উদাহরণ : 6·9 যদি x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ 3y – 2x = 9 হয় এবং যদি x ও y এর সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক $\frac{1}{3}$ হয় আর x এর ভেদমান 4 হয় তবে y এর ভেদমান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে দেওয়া আছে যে x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ হল 3y – 2x = 9

অথবা, $y = 3 + \frac{2}{3}x$

$\therefore b_{yx} = \frac{2}{3}$ অথবা $r\frac{\delta_y}{\delta_x} = \frac{2}{3}$ অথবা $\frac{1}{3} \cdot \frac{\delta_y}{2} = \frac{2}{3}$ $\left(\therefore r = \frac{1}{3}, \text{var}(x) = 4\right)$

$\therefore \delta_y = 4 \quad \therefore \text{var}(y) = 16$

উদাহরণ : 6·10 (i) $b_{yx} = -\frac{3}{2}, b_{xy} = -\frac{1}{5}$ এখন $\text{var}(y) : \text{var}(x)$ নির্ণয় কর

(ii) তুমি কি মনে কর যে $2x + 3y = 11$ এবং $3x - 5y = -12$ দুটি প্রতিগমন সমীকরণ হতে পারে?

সমাধান : (i) $b_{yx} = r\frac{\delta_y}{\delta_x}, b_{xy} = r\cdot\frac{\delta_x}{\delta_y}$

$$\therefore \frac{b_{yx}}{b_{xy}} = \frac{\delta_y^2}{\delta_x{}^2} = \frac{\text{var}(y)}{\text{var}(x)} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{5}} = \frac{15}{2}$$

$\therefore \text{var}(b) : \text{var}(x) = 15 : 2$

(ii) দেওয়া আছে $2x + 3y = 11........(1)$

$$3x - 5y = -12......(2)$$

(1) এবং (2) এইভাবেও লেখা যায়

$x = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}y$ এবং $y = \frac{12}{5} + \frac{3}{5}x$

যেহেতু এখানে $b_{xy} = -\frac{3}{2}$ এবং $b_{yx} = \frac{3}{5}$

দুটি আলাদা চিহ্ন (একটি ঋণাত্মক ও অপরটি ধনাত্মক)

$\therefore$ এই দুই সমীকরণ প্রতিগমন রেখা হতে পারে না

6.15 সারাংশ

দ্বিচলক রাশিতথ্যে আমরা অনুসন্ধান করি যে দুই চলকের মধ্যে কোনো সরলরৈখিক সম্পর্ক আছে কিনা। যদি সম্পর্ক থাকে তবে তার চরিত্র কেমন।

অপরপক্ষে, দুটি চলকের একটিকে স্বাধীন চলক এবং অন্যটিকে নির্ভরশীল চলক ধরে নিয়ে একটি সমীকরণের মাধ্যমে চলক দুটির সম্পর্ক নির্ধারিত হয়। স্বাধীন চলকের মান দেওয়া থাকলে অনায়াসে সমীকরণটির সাহায্যে নির্ভরশীল চলকের মান নির্ণয় করা যায়।

প্রথম অনুসন্ধানের নাম সরল সহ পরিবর্তন আর দ্বিতীয় অনুসন্ধানের নাম হল সরল প্রতিগমন।

এই দ্বিচলক রাশিতথ্যকে লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপিত করলে একটি বিক্ষিপ্ত চিত্র পাওয়া যায়। দুটি চলকের মধ্যে সম্পর্ক থাকলে বিক্ষিপ্ত চিত্রের বিন্দুগুলি কোনো সরলরেখা বা বক্ররেখার চারিদিকে ছড়ানো থাকে। কিন্তু এই সম্পর্ক সবসময় কার্য-কারণ নির্দেশ করে না। আমরা অবশ্য সরল রৈখিক সম্পর্ক নিয়েই আলোচনা করব।

x চলক ও y চলকের মান যদি একই দিকে পরিবর্তিত হয় অর্থাৎ x এর মান ও y এর মান হয় দুটোই এক সঙ্গে বাড়বে বা দুটোই একসঙ্গে কমবে তখন x এবং y এর সহ পরিবর্তন ধনাত্মক বলা হবে। আবার x এর মান ও y এর মান যদি বিপরীত দিকে পরিবর্তিত হয় অর্থাৎ একটির মান বাড়লে অন্যটির মান কমে যায় তাহলে x ও y এর সহ পরিবর্তন ঋণাত্মক বলা হবে।

কিন্তু বিক্ষিপ্ত চিত্রের সাহায্যে x ও y চলকের সহ পরিবর্তনের ধারণার একটা আন্দাজ পাওয়া যায় মাত্র। নির্ভুলভাবে সহ পরিবর্তন পরিমাপ করতে হলে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের সাহায্য নিতে হয়।

Karl Pearson এর গুণফল-ভ্রামক সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের সূত্র হল

x ও y এর সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক $= r_{xy} = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\delta_x\delta_y}$

অথবা, $r_{xy} = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\delta_x\delta_y}$ [$\therefore$ সহভেদাঙ্ক $\operatorname{cov}(x,y) = \dfrac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})$

সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কে ধমাবলী :

1. সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের কোন একক নাই। এটি একটি সংখ্যামাত্র।

2. সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক x এবং y এর মধ্যে প্রতিসম। অর্থাৎ $r_{xy} = r_{yx}$

3. সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের পরম মান মূলবিন্দুর (Origin) উপর অথবা মাত্রার (Scale) উপর নির্ভর করে না।

4. সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের মান –1 ও +1 এর মধ্যে অবস্থান করে।

অর্থাৎ $-1 \le r_{xy} \le +1$

যদি x ও y চলক দুটির মানের বদলে ক্রমসংখ্যা দেওয়া থাকে তাহলে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের গুণফল-ভ্রামক সূত্রটি ব্যবহার করা যাবে না। এখানে সারিবন্ধ সহপরিবর্তন পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হয়।

আবার গুণবাচক (attributes) দুটি চলকের পারস্পরিক সম্পর্ক গণনা করতেও সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। যেমন বিক্রেতার বুদ্ধিমত্তা ও কর্মনিপুণতার মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ের সময় সারিবন্ধ সহ পরিবর্তন পদ্ধতির প্রয়োগ হয়।

Edward Spearman এই সারিবদ্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের যে সূত্র দিয়েছেন সেটা হ'ল :

$$r_R = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}$$

যেখানে d = কোনো পদের দুটি সারিতে ক্রম অনুযায়ী অবস্থানের অন্তর

n = প্রত্যেক সারির মোট পদসংখ্যা

সারিবদ্ধ সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের মান – 1 এবং +1 এর মধ্যে থাকে। অর্থাৎ $-1 \le r_R \le +1$

কিন্তু বন্ধনযুক্ত ক্রম থাকলে সূত্রটি কিছুটা পাল্টে যাবে। বন্ধনযুক্ত ক্রম অর্থাৎ রাশিতথ্যের শ্রেণি দুটিতে কখনও কখনও দুই বা ততোধিক পদ একই ক্রমের অধিকারী হয়।

$$r_{R(\text{tied})} = 1 - \frac{6\left[\sum d_i^2 + \sum\left(t_i^3 - t_i\right)/12\right]}{n^3 - n}$$

যেখানে d = দুটি শ্রেণির পদগুলির ক্রমসংখ্যার অন্তর

n = প্রত্যেকটি সারির মোট পদসংখা

t = উভয় শ্রেণিতে কোনো পদ বন্ধনযুক্ত ক্রম অবস্থায় থাকলে তাদের সংখ্যা

শ্রেণিবদ্ধ দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি ব্যবহার করা যায় না। পদসংখ্যা যদি খুব বেশি হয় (30 এর বেশি) তাহলে এই পদ্ধতিতে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক গণনা করা কষ্টসাধ্য।

দ্বিচলক রাশিতথ্যের উপর ভিত্তি করে x ও y চলক দুটির পারস্পরিক সম্পর্ক একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। ধরা যাক্ x হচ্ছে স্বাধীন চলক এবং y হচ্ছে নির্ভরশীল চলক। সমীকরণটি ধরা যাক্ $y = a + bx$

x এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য y এর গড় মান অনুমান (estimate) করা সম্ভব।

$n = x_o$ হলে y এর অনুমিত মান হবে $(a + bx_o)$

এই সমীকরণকে x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ বলা হয়।

একইভাবে $x = c + dy$ সমীকরণটিকে y এর উপর x এর প্রতিগমন সমীকরণ বলা হয়।

এখন লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে অনুমানের ভ্রান্তির বর্গের যোগফলের সর্বনিম্নকরণের মাধ্যমে দুটি স্বাভাবিক সমীকরণ (normal equations) পাওয়া যায়। ঐ স্বাভাবিক সমীকরণ দুটির সমাধান করে a ও b এই ধ্রুবক দুটির মান পাওয়া যায়। ঐ মান দুটি $y = a + bx$ সমীকরণের মধ্যে বসিয়ে দিলে পূর্ণাঙ্গ প্রতিগমন সমীকরণ পাওয়া যায়।

ঐ একই পদ্ধতিতে অপর প্রতিগমন সমীকরণ x = c + dy এর মধ্যে c ও d ধ্রুবক দ্বয়ের মান বসালে অপর পূর্ণাঙ্গ প্রতিগমন সমীকরণ পাওয়া যাবে।

প্রতিগমন রেখার ধর্মাবলী নিম্নরূপ :

1. প্রতিগমন গুণাঙ্ক শুধুমাত্র মাত্রার উপর নির্ভর করে কিন্তু মূলবিন্দুর উপর নির্ভর করে না।

2. দুটি প্রতিগমন রেখা পরস্পর মিশে যায় যখন $b_{yx} = \frac{1}{b_{xy}}$ হয়,

যেখানে $b_{yx} = r\frac{\delta_y}{\delta_x}$ কে x এর উপর y এর প্রতিগমন গুণাঙ্ক এবং

$b_{xy} = r\frac{\delta_x}{\delta_y}$ কে y এর উপর x এর প্রতিগমন গুণাঙ্ক বলে।

[r = সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক, $\delta_x = x$ এর সমক পার্থক্য আর $\delta_y = y$ এর সমক পার্থক্য]

3. দুটি প্রতিগমন রেখা যদি পরস্পর মিশে না যায় তাহলে রেখাদুটি পরস্পরকে ছেদ করবে $(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দুতে।

4. x এর উপর y এর প্রতিগমনে দেখা যায় যে y এর অনুমিত মানের গড় আর পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে y এর রাশিতথ্যের গড় —— দুটিই সমান। y এর উপর x এর প্রতিগমনের সময় একই ফল পাওয়া যায়।

5. সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক হল দুটি প্রতিগমন গুণাঙ্কের গুণোত্তর গড়।

6. x ও y চলকের সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের সংখ্যাগত মানের অর্থ হল এটি সেই অনুপাত যে অনুপাতে x এর উপর y এর প্রতিগমন y চলকের মোট পরিবর্তনশীলতাকে ব্যাখ্যা করে।

7. অনুমানের ভ্রান্তির (e) সমক পার্থক্যকে y এর অনুমানের প্রমাণ ভ্রান্তি (Standard error of estimate) বলা হয়। e এর সমক পার্থক্য হল $\delta_y\sqrt{1-r^2}$

8. অনুমানের ভ্রান্তি e হচ্ছে y চলকের সেই অংশ যার সঙ্গে x চলকের কোনো সম্পর্ক নেই। অর্থাৎ $\operatorname{cov}(x,e) = 0 \Rightarrow r_{xe} = 0$

9. $\operatorname{Var}(y) = \frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum(\hat{Y} - \hat{y})^2 + \frac{1}{n}\sum(y_i - \hat{Y})^2$

এখানে y_i এ মোট পরিবর্তনশীলতা (variability) কে দুটি অংশে ভাগ করা হয়েছে। প্রতিগমনের মাধ্যমে প্রথমটি এই পরিবর্তনশীলতাকে ব্যাখ্যা করে, আর পরের অংশটি এই পরিবর্তনশীলতাকে ব্যাখ্যা করে না।

6.16 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা :

1. নিম্নের চলক দ্বয়ের সহ পরিবর্তনের প্রকৃতি বিচার কর :

   (i) শিক্ষাস্তর ও আয়

   (ii) দাম ও চাহিদা

   (iii) আয় ও ব্যয়

   (iv) বৃষ্টিপাতের পরিমাণ ও উৎপাদিত শস্য

   (v) বুদ্ধিমত্তা ও জুতোর মাপ

2. বিক্ষিপ্ত চিত্রের সাহায্যে কীভাবে বিভিন্ন ধরনের সহ পরিবর্তন দেখানো যায় ব্যাখ্যা কর।

3. সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক কাকে বলে? এই গুণাঙ্কের গুণফল-ভ্রামক সূত্রটি কীভাবে উদ্ভূত হয় দেখাও।

4. যদি দুটি চলক x ও y এর মধ্যে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক $0{\cdot}52$ হয় এবং তাদের সহ ভেদাঙ্ক (Covariance) $7{\cdot}8$ হয় তবে y এর সমক পার্থক্যের মান নির্ণয় কর যখন x এর ভেদাঙ্ক হল 16.

5. যদি $\bar{x} = 10, \bar{y} = 15$ এবং $b_{yx} = 2{\cdot}50$ দেওয়া থাকে তাহলে x এর উপর y এর প্রতিগমন সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. যদি $b_{yx} = 1{\cdot}6, b_{xy} = 0{\cdot}4$ দেওয়া থাকে তবে, $r_{xy} = ?$

7. যদি $b_{yx} = -0{\cdot}6$ এবং $b_{xy} = -1{\cdot}35$ দেওয়া থাকে, তবে $r_{xy} = ?$

8. রাশিতথ্যে দেওয়া আছে

	x	y
যৌগিক গড় (AM)	20	25
সমক পার্থক্য (SD)	5	4

x এবং y এর মধ্যে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক = $0{\cdot}6$

প্রতিগমন সমীকরণ দুটি নির্ণয় কর।

প্রশ্নমালা :

9. প্রমাণ কর যে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের মান – 1 ও + 1 এর মধ্যে থাকে।

10. 10 জন ছাত্রের দুটি বিষয়ে (A ও B) প্রাপ্ত নম্বর ক্রমানুসারে দেওয়া আছে।

সারিবদ্ধ সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

A :	3	4	8	4	7	10	2	1	6	9
B :	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

প্রশ্নমালা :

11. দুটি চলক x ও y এর মধ্যে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের পরম মান মূলবিন্দুর (Origin) কিংবা মাত্রার (Scale) উপর নির্ভর করে না — প্রমাণ কর।

12. যদি z = x + y হয় তবে প্রমাণ কর $r_{xy} = \frac{\delta_{x+y}^2 - \delta_x^2 - \delta_y^2}{2\delta_x\delta_y}$

আর যদি z = x – y হয় তবে প্রমাণ কর $r_{xy} = \frac{\delta_x^2 + \delta_y^2 - \delta_{x-y}^2}{2\delta_x\delta_y}$

13. x ও y চলক দুটির সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করার সময় নিম্নের তথ্যগুলি পাওয়া যায় :

$$n = 25, \sum x = 125, \sum y = 100, \sum x^2 = 650, \sum xy = 508$$

পরে দেখা গেল (x, y) এর দুই জোড়া মান ভুল করে দেখা হয়েছে (6, 4) এবং (8, 6) কিন্তু তাদের আসল মান হল (8, 12) ও (6, 8), সহ পরিবর্তন গুণাঙ্কের আসল মান নির্ণয় কর।

14. নীচের রাশিতথ্য থেকে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় কর

x :	1	2	3	4	5
y :	3	2	5	4	6

এবং প্রমাণ কর যে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক, দুইটি প্রতিগমন গুণাঙ্কের গুণোত্তর গড়।

6.17 গ্রন্থপঞ্জি

1. Statistical Methods Vol.I by N.G. Das, Mc Graw–Hill India, 2008

2. Fundamentals of Statistics by S.C. Gupta, Himalaya Publishing House, 2008

3. Applied General Statistics by Croxton Cowden, Prentice Hall Inc., 1949