উপক্রমণিকা

মহান দেশনায়ক সুভাষচন্দ্র বসুর নামাঙ্কিত এই মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনে আপনাকে স্বাগত। সম্প্রতি এই প্রতিষ্ঠান দেশের সর্বপ্রথম রাজ্য সরকারি মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় হিসেবে ন্যাক (NAAC) মূল্যায়নে 'এ'-গ্রেড প্রাপ্ত হয়েছে। বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশন প্রকাশিত নির্দেশনামায় স্নাতক শিক্ষাক্রমকে পাঁচটি পৃথক প্রকরণে বিন্যস্ত করার কথা বলা হয়েছে। এগুলি হল—'কোর কোর্স', 'ডিসিপ্লিন স্পেসিফিক ইলেকটিভ', 'জেনেরিক ইলেকটিভ' এবং 'স্কিল'/'এবিলিটি এনহ্যান্সমেন্ট কোর্স'। ক্রেডিট পদ্ধতির ওপর ভিত্তি করে বিন্যস্ত এই পাঠক্রম শিক্ষার্থীর কাছে নির্বাচনাত্মক পাঠক্রমে পাঠ গ্রহণের সুযোগ এনে দেবে। এরই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে ষাণ্মাষিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা এবং ক্রেডিট ট্রান্সফারের সুবিধা। শিক্ষার্থী-কেন্দ্রিক এই ব্যবস্থা মূলত গ্রেড-ভিত্তিক যা অবিচ্ছিন্ন অভ্যন্তরীণ মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সার্বিক মূল্যায়নের দিকে এগোবে এবং শিক্ষার্থীকে বিষয় নির্বাচনের ক্ষেত্রে যথোপযুক্ত সুবিধা দেবে। শিক্ষাক্রমের প্রসারিত পরিসরে বিবিধ বিষয় চয়নের সক্ষমতা শিক্ষার্থীকে দেশের অন্যান্য উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আন্তঃব্যবস্থায় অর্জিত ক্রেডিট স্থানান্তরে সাহায্য করবে। শিক্ষার্থীর অভিযোজন ও পরিগ্রহণ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠক্রমের বিন্যাসই এই নতুন শিক্ষাক্রমের লক্ষ্য।

'UGC (Open and Distance Learning Programmes and Online Programmes) Regulations, 2020' অনুযায়ী সকল উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের স্নাতক পাঠক্রমে এই সি.বি.সি.এস. পাঠক্রম পদ্ধতি কার্যকরী করা বাধ্যতামূলক—উচ্চশিক্ষার পরিসরে এই পদ্ধতি এক বৈকল্পিক পরিবর্তনের সূচনা করেছে। আগামী ২০২১-২২ শিক্ষাবর্ষ থেকে স্নাতক স্তরে এই নির্বাচনভিত্তিক পাঠক্রম কার্যকরী করা হবে, এই মর্মে নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে। বর্তমান পাঠক্রমগুলি উচ্চশিক্ষা ক্ষেত্রের নির্ণায়ক কৃত্যকের যথাবিহিত প্রস্তাবনা ও নির্দেশাবলী অনুসারে রচিত ও বিন্যস্ত হয়েছে। বিশেষ গুরুত্বারোপ করা হয়েছে সেইসব দিকগুলির প্রতি যা ইউ.জি.সি. কর্তৃক চিহ্নিত ও নির্দেশিত।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ক্ষেত্রে স্ব-শিক্ষা পাঠ-উপকরণ শিক্ষার্থী-সহায়ক পরিষেবার একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। সি.বি.সি.এস পাঠক্রমের এই পাঠ-উপকরণ মূলত বাংলা ও ইংরেজিতে লিখিত হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধের কথা মাথায় রেখে আমরা ইংরেজি পাঠ-উপকরণের বাংলা অনুবাদের কাজেও এগিয়েছি। বিশ্ববিদ্যালয়ের অভ্যন্তরীণ শিক্ষকরাই মূলত পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির ক্ষেত্রে অগ্রণী ভূমিকা নিয়েছেন—যদিও পূর্বের মতোই অন্যান্য বিদ্যায়তনিক প্রতিষ্ঠানের সঙ্গে সংযুক্ত অভিজ্ঞ ও বিশেষজ্ঞ শিক্ষকদের সাহায্য আমরা অকুণ্ঠচিত্তে গ্রহণ করেছি। তাঁদের এই সাহায্য পাঠ-উপকরণের মানোন্নয়নে সহায়ক হবে বলেই আমার বিশ্বাস। নির্ভরযোগ্য ও মূল্যবান বিদ্যায়তনিক সাহায্যের জন্য আমি তাঁদের আন্তরিক অভিনন্দন জানাই। এই পাঠ-উপকরণ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষণ পদ্ধতি-প্রকরণে নিঃসন্দেহে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নেবে। উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনের পঠন প্রক্রিয়ায় সংযুক্ত সকল শিক্ষকের সদর্থক ও গঠনমূলক মতামত আমাদের আরও সমৃদ্ধ করবে। মুক্তশিক্ষাক্রমে উৎকর্ষের প্রশ্নে আমরা প্রতিশ্রুতিবদ্ধ।

পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট সকল শিক্ষক, আধিকারিক এবং কর্মীদের আমি আন্তরিক অভিনন্দন জানাই এবং ছাত্রদের সর্বাঙ্গীন সাফল্য কামনা করি।

অধ্যাপক (ড.) রঞ্জন চক্রবর্ত্তী

উপাচার্য

Netaji Subhas Open University
Under Graduate Degree Programme
Choice Based Credit System (CBCS)
নির্বাচনভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা

Subject : Honours in Economics (HEC)
বিষয় : সাম্মানিক অর্থনীতি

পাঠক্রম : সমষ্টিগত অর্থনীতি-III
Course Code : CC-EC-09

পাঠক্রম : Advanced Statistics
Course Code : CC-EC-10

প্রথম মুদ্রণ : অক্টোবর, 2022
First Print : October, 2022

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

Netaji Subhas Open University

Under Graduate Degree Programme
Choice Based Credit System (CBCS)
নির্বাচনভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা
Subject : Honours in Economics (HEC)
বিষয় : সাম্মানিক অর্থনীতি

: বিষয় সমিতি :

: সদস্য বৃন্দ :

পাঠক্রম : সমষ্টিগত অর্থনীতি-III

Course Code : CC-EC-09

: রচনা :
শোভিক মুখার্জী
Assistant Professor, St. Xavier's University

: সম্পাদনা :
অসীম কুমার কর্মকার
NSOU

পাঠক্রম : Advanced Statistics

Course Code : CC-EC-10

: রচনা :
বিবেকানন্দ রায়চৌধুরী
Associate Professor of Economics
NSOU

: সম্পাদনা :
সেখ সেলিম
Associate Professor of Economics
NSOU

: বিন্যাস সম্পাদনা :
প্রিয়ন্থী বাগচী
Assistant Professor of Economics
NSOU

প্রজ্ঞাপন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

(নির্বাচনভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা)

(HEC)

পাঠক্রম : সমষ্টিগত অর্থনীতি-III **(Macroeconomics-III)**

Course Code : CC-EC-09

পাঠক্রম : **Advanced Statistics**

Course Code : CC- EC - 10

একক 1 ❑ মুদ্রাস্ফীতি

গঠন

1.1 উদ্দেশ্য

এই এককের বিষয়বস্তু পাঠ করলে জানা যাবে :

- মুদ্রাস্ফীতির সংজ্ঞা ও তার প্রকারভেদ
- চাহিদা-বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি ও এ প্রসঙ্গে সরকারী নীতির ফলিতার্থ
- ব্যয়-বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি ও এ প্রসঙ্গে সরকারী নীতির যথার্থতা
- চাহিদা বৃদ্ধি ও ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে পার্থক্যের যথার্থতা
- মুদ্রাস্ফীতির সামাজিক ব্যয় ; এবং
- মুদ্রাস্ফীতি রোধে বিভিন্ন কর্মনীতি

1.2 প্রস্তাবনা

যে-কোনো দেশে মুদ্রাস্ফীতির গুরুত্ব অপরিসীম। মুদ্রাস্ফীতি বছর ভিত্তিক (year on year) দামের পরিবর্তন পরিমাপ করে-অর্থাৎ মুদ্রাস্ফীতি = $\dfrac{(\text{দাম}_t - \text{দাম}_{t-1})\ \text{x}100}{\text{দাম}_{t-1}}$ যেখানে t_2 হল সময়ের নির্দিষ্ট

মুহূর্ত, এবং t–1 হল আগের বছরের হিসেব। মুদ্রাস্ফীতি নানাভাবে সমাজের বিভিন্ন ক্ষেত্রে প্রভাব বিস্তার করে। এর হার সহ্যের সীমা ছাড়িয়ে গেলে তা ক্ষতিসাধন করে। এই এককে আমরা আলোচনা করব যে মুদ্রাস্ফীতি কী কী কারণে হয় ও কীভাবে তা সমাজের ক্ষতিসাধন করে। সরকার কী উপায়ে মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রণ করতে পারেন তা সম্পর্কে একটি পরিষ্কার ধারণা ও পাওয়া যাবে।

দ্রব্য সামগ্রীর দাম ক্রমাগত বাড়তে থাকলে তাকে মুদ্রাস্ফীতি বলা হয়। মুদ্রাস্ফীতি কেন দেখা দেয় এ সম্পর্কে বিভিন্ন অর্থনীতিবিদ বিভিন্ন মত প্রকাশ করেন।

প্রাচীন অর্থনীতিবিদদের ধারণা ছিল যে শুধুমাত্র অর্থের জোগান বৃদ্ধি পেলেই মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিতে পারে। অর্থের পরিমাণ তত্ত্বের সাহায্যে প্রাচীন অর্থনীতিবিদরা দেখিয়েছিলেন যে-কোনো দেশে পূর্ণ কর্মসংস্থান বজায় থাকা অবস্থায় অর্থের জোগান যদি বাড়ে তাহলে দামস্তর বাড়বে এবং অর্থের জোগান যে হারে বাড়বে দামস্তরও ঠিক সেই হারেই বাড়বে। প্রাচীন তত্ত্বের প্রধান অসুবিধা এই যে এই তত্ত্বে ধরে নেওয়া হয় যে অর্থের পরিমাণ বাড়লে দ্রব্য সামগ্রীর জোগান বাড়ে না। আরও ধরা হয় যে অর্থের প্রচলন বেগ সব সময়ে স্থির আছে এবং অর্থ শুধুমাত্র বিনিময়ের মাধ্যম হিসাবেই ব্যবহৃত হয়। এই অনুমানগুলি অবাস্তব। যে দেশে পূর্ণ নিয়োগ অবস্থা এখনও আসেনি সেই দেশে পূর্ণ নিয়োগের আগেই দামস্তর কেন বাড়ে তার ব্যাখ্যা প্রাচীন তত্ত্ব থেকে দেওয়া যায় না। তাছাড়া অনেক সময়ে দেখা যায় যে অর্থের পরিমাণ একই থাকা সত্ত্বেও দ্রব্যের দাম ক্রমাগত বাড়ছে। তার ব্যাখ্যাও প্রাচীন তত্ত্ব থেকে দেওয়া যায় না। এই সমস্ত কারণের জন্য মুদ্রাস্ফীতির ব্যাখ্যা হিসাবে অর্থের পরিমাণ তত্ত্বটি বা প্রাচীন অর্থনীতিবিদ্‌দের তত্ত্বটি সম্পূর্ণরূপে গ্রহণযোগ্য নয়।

অধ্যাপক কেইন্‌সের মতে মুদ্রাস্ফীতি যেহেতু দ্রব্যসামগ্রীর দামবৃদ্ধিকে বোঝায় সুতরাং দ্রব্যসামগ্রীর বাজারেই মুদ্রাস্ফীতির কারণ অনুসন্ধান করতে হবে; অর্থের বাজারে নয়। কেইন্‌সের তত্ত্ব অনুযায়ী যদি দ্রব্য সামগ্রীর বাজারে বাড়তি চাহিদা দেখা দেয় এবং যদি দ্রব্য সামগ্রীর। জোগান সম্পূর্ণরূপে অস্থিতিস্থাপক হয় তাহলে দ্রব্য সামগ্রীর বাজারে বাড়তি চাহিদার প্রভাবে দামস্তর বাড়তে থাকে। দ্রব্যের জোগান স্থির না থাকলে চাহিদা বাড়লে দাম বাড়বে না। বরং জোগান বেড়ে যাবে। সেজন্য মুদ্রাস্ফীতিকে ব্যাখ্যা করতে হলে দ্রব্যের যোগান স্থির আছে বলে ধরে নিতে হয়। দেশে যখন পূর্ণ কর্মসংস্থান রয়েছে তখনই দ্রব্যের জোগান স্থির থাকে। সুতরাং পূর্ণ কর্মসংস্থান অবস্থায় যদি দ্রব্য সামগ্রীর চাহিদা বৃদ্ধি পায় তাহলে দ্রব্যের বাজারে যে বাড়তি চাহিদা দেখা দেয় সেই বাড়তি চাহিদাই মুদ্রাস্ফীতির কারণ। যতক্ষণ পর্যন্ত এই বাড়তি চাহিদা থাকবে ততক্ষণ পর্যন্ত দামস্তর বাড়তে থাকবে।

কিন্তু কেইন্‌সের তত্ত্বটির অসম্পূর্ণতা এই যে এখানে বলা হচ্ছে যে শুধুমাত্র পূর্ণ কর্মসংস্থান অবস্থাতেই মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিতে পারে। যতক্ষণ পর্যন্ত দেশে পূর্ণ কর্মসংস্থান আসবে না ততক্ষণ পর্যন্ত বাড়তি চাহিদা থাকলে বাড়তি চাহিদার প্রভাবে উৎপাদন বাড়বে। কিন্তু দেশে পূর্ণ কর্মসংস্থান এসে গেলে উৎপাদন আর বাড়ানো সম্ভব নয়। সেই অবস্থায় বাড়তি চাহিদা থাকলে শুধুমাত্র দামস্তরই বাড়বে এবং মুদ্রাস্ফীতি দেখা দেবে। কিন্তু পূর্ণ কর্মসংস্থানে পৌঁছানোর আগেই যে-কোনো দেশে মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিতে পারে তার ব্যাখ্যা কেইন্‌সের তত্ত্ব থেকে দেওয়া সম্ভব নয়। আবার কোন দেশের অর্থনৈতিক কাঠামো যদি অনুন্নত হয়, যদি দেশে কোন গুরুত্বপূর্ণ উৎপাদনের উপাদানের জোগান অস্থিতিস্থাপক হয় বা যদি উৎপাদন ক্ষেত্রে অন্য

কোন বাধা থাকে তাহলে পূর্ণ নিয়োগ অবস্থায় পৌঁছানোর আগেই দামস্তর বাড়তে থাকে। এই ধরনের মুদ্রাস্ফীতিকে অধ্যাপক কেইন্‌সের তত্ত্বের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যায় না।

আধুনিক অর্থনীতিবিদ্‌দের মতে মুদ্রাস্ফীতি দুরকমভাবে দেখা দিতে পারে। একটি হ'ল চাহিদার দিক থেকে; অপরটি জোগান বা উৎপাদন ব্যয়ের দিক থেকে। চাহিদার দিক থেকে মুদ্রাস্ফীতি আবার দুভাবে উদ্ভব হতে পারে। উৎপন্ন দ্রব্য সামগ্রীর বাজারে বাড়তি চাহিদা থাকলে তার প্রভাবে দামস্তর বাড়তে পারে। আবার উৎপন্ন দ্রব্য সামগ্রীর বাজারে যদি বাড়তি চাহিদা না থাকে কিন্তু উৎপাদনের উপকরণের বাজারে যদি বাড়তি চাহিদা থাকে তার প্রভাবেও মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, যদি শ্রমের বাজারে বাড়তি চাহিদা থাকে তাহলে তার প্রভাবে মজুরি বাড়বে। মজুরি বাড়লে উৎপাদন ব্যয় বৃদ্ধি পাবে এবং তার ফলে দ্রব্যের দামও বাড়বে। এক্ষেত্রে শ্রমের বাজারের বাড়তি চাহিদা থেকেই মুদ্রাস্ফীতির উদ্ভব হ'ল।

আবার দ্রব্যের বাজারে বা উৎপাদনের উপকরণের বাজারে বাড়তি চাহিদা না থাকা সত্ত্বেও মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিতে পারে। এটিকে বায়বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি বলা হয়। উদাহরণ স্বরূপ ধরা যাক শ্রমের বাজারে বাড়তি চাহিদা নেই। ধরা যাক শ্রমের বাজারে বাড়তি জোগান রয়েছে। অর্থাৎ বেশ কিছু শ্রমিক বেকার রয়েছে। কিন্তু ধরা যাক যে শ্রমিকরা সংঘবদ্ধ হয়ে দর কষাকষির মাধ্যমে অতিরিক্ত মজুরি আদায় করছে। এইভাবে শ্রমিক সংঘের মাধ্যমে যদি শ্রমিকরা মজুরির হার বাড়াতে পারে তাহলে উৎপাদন ব্যয় বৃদ্ধি পাবে। উৎপাদন বায় বৃদ্ধি পেলে দ্রব্য সামগ্রীর দামও বৃদ্ধি পাবে। এই ধরনের মুদ্রাস্ফীতিকে ব্যয় বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি বলা হয়।

শ্রমিকের মজুরি ছাড়া অন্যান্য উপাদানের দাম বৃদ্ধি পেলেও ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রানীতি দেখা দিতে পারে। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক্ কোন দেশ জ্বালানী হিসাবে পেট্রল আমদানি করছে। এখন যদি পেট্রলিয়াম রপ্তানিকারী দেশগুলি পেট্রলের দাম বাড়ায় তাহলে যে দেশটি পেট্রল আমদানি করছে সেই দেশের উৎপাদন ব্যয় বেড়ে যায়। তার প্রভাবে সেই দেশের সাধারণ দামস্তর বাড়তে থাকে। এক্ষেত্রে ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির উৎসটি শ্রমিক সংঘ নয়। এক্ষেত্রে ব্যয় বৃদ্ধির উৎস পেট্রলের দাম বৃদ্ধি।

1.3 মুদ্রাস্ফীতি ও তার প্রকারভেদ

মুদ্রাস্ফীতি ও মুদ্রাস্ফীতির প্রকারভেদ

মুদ্রাস্ফীতি কাকে বলে?

বাংলায় মুদ্রাস্ফীতি কথটি ইংরেজি Inflation শব্দটির বাংলা প্রতিশব্দ হিসাবে ব্যবহৃত হয়ে থাকে। আক্ষরিক অর্থে মুদ্রস্ফীতি বলতে অর্থের পরিমাপ বৃদ্ধিকেই বোঝানো হয়ে থাকে। প্রাচীনকালের অর্থনীতিবিদ্‌দের ধারনা ছিল যে অর্থের পরিমান বৃদ্ধি পেলেই দামস্তর বাড়তে থকে। সেজন্য প্রাচীন অর্থনীতিবিদ্‌রা দামস্তর বাড়াকে মুদ্রাস্ফীতি হিসাবে চিহ্নিত করেছিলেন। কিন্তু আমরা জানি যে অর্থের পরিমান বৃদ্ধি পেলেই যে সকল সময়ে দামস্তর বৃদ্ধি পাবে তার কোনো নিশ্চয়তা নেই। সেটি দ্রব্য সামগ্রীর সামগ্রিক চাহিদা এবং জোগানের উপর- নির্ভর করবে। মুদ্রাস্ফীতি বলতে আমরা এমন একটি অবস্থাকে বুঝি যখন অধিকাংশে দ্রব্য সামগ্রীর দাম ক্রমাগত বৃদ্ধি পাচ্ছে। এই প্রসঙ্গে মনে রাখা প্রয়োজন যে যদি

জিনিসপত্রের দাম খুব বেশি হয় কিন্তু যদি দাম আর না বাড়ে, অর্থাৎ দাম যদি স্থির থাকে তাহলে কিন্তু তাকে আমরা মুদ্রাস্ফীতি বলতে পারি না। মুদ্রাস্ফীতির বৈশিষ্ট্য হল যে মুদ্রাস্ফীতির সময়ে দাম ক্রমাগত বাড়তে থাকবে। দাম যদি খুব বেশি হয় কিন্তু যদি দাম স্থির থাকে তাহলে তাকে আমরা মুদ্রাস্ফীতি বলব না।

তাছাড়া মুদ্রাস্ফীতির সময়ে যে দাম বৃদ্ধি ঘটে থাকে সেই দাম বৃদ্ধি একটি সাময়িক বা স্বল্পকালীন ঘটনা নয়। এই দামবৃদ্ধি একটি স্থায়ী ঘটনা, আমবা জানি সে যদি কোনো দ্রবের জোগান অপেক্ষা চাহিদা বেশি হয় তাহলে সেই দ্রবের দাম বাড়ে, কিন্তু দাম বেড়ে এমন একটি স্তরে পৌছায় যখন ঐ দ্রবের চাহিদা এবং জোগান সমান হয়, তখন দাম আর বাড়ে না। এই ধরনের দামবৃদ্ধিকে তাহলে আমরা মুদ্রাস্ফীতি বলতে পারি না। মুদ্রাস্ফীতির সময়ে দাম ক্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকে। এটি থামেনা কাজেই মুদ্রাস্ফীতি একটি প্রক্রিয়া যার মাধ্যমে দামস্তর ক্রমাগত বেড়ে চলে, সুতরাং মুদ্রাস্ফীতি একটি গতিশীল ব্যাপার যখন মুদ্রাস্ফীতি ঘটে তখন দামস্তর ক্রমাগত বৃদ্ধি পায়। কাজেই তখন সমগ্র অর্থনীতিতে বা দামস্তরে একটি ভারসাম্যহীনতা লক্ষ্য করা যায়।

মুদ্রাস্ফীতির প্রকারভেদ

মুদ্রাস্ফীতির কারণ ও গতি ও প্রকৃতি অনুযায়ী মুদ্রাস্ফীতিকে কয়েকটি ভাগে ভাগ করা যায়, এই রকম কয়েক প্রকার মুদ্রাস্ফীতির উল্লেখ আমরা করতে পারি।

প্রথমত ঃ আমরা পূর্ন মুদ্রাস্ফীতি এবং অর্ধ মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে একটি পার্থক্য করতে পারি। দেশে যখন পূর্ণ কর্মসংস্থান বজায় রয়েছে তখন দ্রব্য এবং সেবার জোগান স্থির থাকে। সেই অবস্থায় দ্রব্য সামগ্রীর চাহিদা বৃদ্ধি পেলে যে মুদ্রাস্ফীতি দেখা দেয় তাকে পূর্ণ মুদ্রাস্ফীতি বলা হয়। অনদিকে দেশে যখন পূর্ণ কর্মসংস্থান আসেনি সেরূপ অবস্থায় যদি কোন উৎপাদনের উপাদানের জোগান অস্থিতিস্থাপক হয় এবং তার প্রভাবে যদি দামস্তর বাড়তে থাকে তাহলে তাকে অর্ধ মুদ্রাস্ফীতি বলা হয়।

দ্বিতীয়ত ঃ মুক্ত বা অবাধ মুদ্রাস্ফীতি এবং দমিত মুদ্রাস্ফীতি এর মধ্যে আমরা একটি পার্থক্য নির্ণয় করতে পারি, যদি দামস্তর অবাধে বাড়তে পারে এবং দামস্তর বৃদ্ধি রোধ করবার জন্য সরকার কোনোরূপে ব্যবস্থা গ্রহণ না করেন তাহলে সেই মুদ্রাস্ফীতিকে মুক্ত মুদ্রাস্ফীতি বা অবাধ মুদ্রাস্ফীতি বলে।

মুদ্রাস্ফীতি প্রতিরোধ করার জন্য সরকার যদি দ্রব্য সামগ্রীর চাহিদার উপর নানারপে নিয়ন্ত্রন আরোপ করেন, কিংবা যদি সরকার দাম নিয়ন্ত্রন ব্যবস্থা, রেশন ব্যবস্থা প্রভৃতি প্রবর্তন করেন তাহলে সেই অবস্থায় যে মুদ্রাস্ফীতি ঘটে তাকে দমিত মুদ্রাস্ফীতি বলে। দমিত মুদ্রাস্ফীতির সময়ে নিয়ন্ত্রন মূল্যের দ্রব্যগুলির দাম বাড়াতে পারে না। কিন্তু অনিয়ন্ত্রিত দ্রব্যগুলির দাম অত্যাধিক পরিমানে বৃদ্ধি পায়।

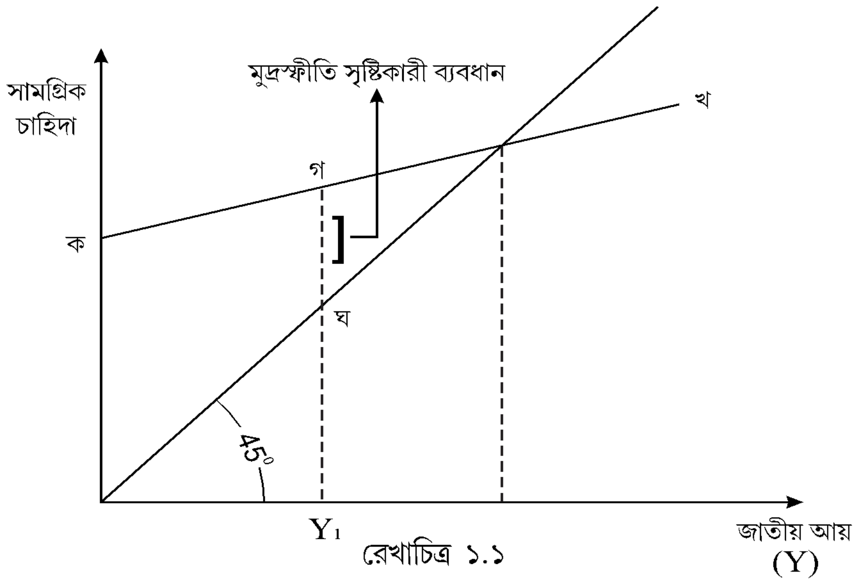
তৃতীয়ত ঃ মুদ্রাস্ফীতিকে মৃদু গতিবিশিষ্ট মুদ্রাস্ফীতি অথবা দ্রুতগতি বিশিষ্ঠ মুদ্রাস্ফীতি এই দুরকম ভাগে ভাগ করা যেতে পারে। যদি দামস্তর মৃদু গতিতে বাড়তে থাকে তাহলে তাকে মৃদু গতি বিশিষ্ট মুদ্রাস্ফীতি বলে। অন্যদিকে যদি দামস্তর দ্রুতবেগে বাড়তে থাকে তাহলে তাকে দ্রুত গতিবিশিষ্ট মুদ্রাস্ফীতি বলে। অবশ্য দামবৃদ্ধির শতকরা হার কত কম হলে মুদ্রাস্ফীতি মৃদুগতিবিশিষ্ট মুদ্রাস্ফীতি হিসাবে পরিগণিত হবে সে সম্মন্ধে কোনো নির্দিষ্ট নিয়ম নেই। তবে সাধারণভাবে যদি দামস্তর বৃদ্ধির হার ১০% কম হয় তাহলে একে মৃদুগতিবিশিষ্ট মুদ্রাস্ফীতি বলা যেতে পারে। আর যদি দামস্তর বৃদ্ধি হার ১০% অথবা তার

বেশি হয় তাহলে একে দ্রুত গতিবিশিষ্ট মুদ্রাস্ফীতি বলা যেতে পারে।

চতুর্থত ঃ মুদ্রাস্ফীতিকে চাহিদা বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি এবং ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি এই দুই ভাগে ভাগ করা যেতে পারে।। দেশে দ্রব্য সামগ্রীর চাহিদা যদি বৃদ্ধি পায় কিন্তু জোগান যদি স্থির থাকে তখন যে মুদ্রাস্ফীতি দেখা দেয় তাকে চাহিদা বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি বলা হয়। অন্যদিকে উৎপাদনের উপাদানগুলির দাম বৃদ্ধি পেলে উৎপাদন ব্যয় যদি বৃদ্ধি পায় তার প্রভাবে যে দামবৃদ্ধি ঘটে তাকে ব্যয়বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি বলা হয়।

1.4 চাহিদা-বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি এবং এ প্রসঙ্গে সরকারি নীতির ফলিতার্থ

সরল কেনিসিয়ান পরিকাঠামোর (Simple Keynesian Model) সাহায্যে এই ধরনের মুদ্রাস্ফীতি সম্পর্কে একটি পরিষ্কার ধারণা দেওয়া যেতে পারে। ১.১ রেখাচিত্রে সামগ্রিক চাহিদারেখা ক খ ৪৫° রেখাকে পূর্ণনিয়োগ (Full employment) আয়ের (Y_1) ডানদিকে ছেদ করেছে। অর্থাৎ উৎপাদনের পরিমাণ পূর্ণনিয়োগ মাত্রার সমান হলেও সমগ্র চাহিদা পূর্ণ হবেনা। কিছুটা চাহিদা (গঘ) অপূর্ণ থেকে যাবে। এই গ ঘ পরিমাণ অপূর্ণ চাহিদাই মুদ্রাস্ফীতির জন্ম দেবে। এই কারণেই এই গঘ পরিমাণ অপূর্ণ চাহিদাকে বলা হয় মুদ্রাস্ফীতি সৃষ্টিকারী ব্যবধান (Inflationary Gap)।



রেখাচিত্র ১.১

মুদ্রাস্ফীতি সৃষ্টি হওয়ার পদ্ধতিটি নিম্নরূপ। অতৃপ্ত ক্রেতারা অপূর্ণ চাহিদা পূরণ করার প্রয়াসে পরস্পরের সঙ্গে দাম প্রতিযোগিতায় লিপ্ত হয়। প্রত্যেকেই অন্যদের চাইতে বেশি দাম দিয়ে বিক্রেতাদের নিজের দিকে আকৃষ্ট করতে চায়। ফলে দামস্তর বেড়ে যেতে থাকে। অন্যদিকে উৎপাদনের পরিমাণ কিন্তু পূর্ণনিয়োগ যাত্রাকে অতিক্রম করতে পারে না। অতএব ১.১ রেখাচিত্রে গঘ পরিমাণ চাহিদা অপূর্ণই থেকে যায় এবং দামস্তর বেড়েই চলে। এ ভাবেই সৃষ্টি হয় চাহিদাবৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি।

এ প্রসঙ্গে সব সময়েই মনে রাখতে হবে যে দামস্তর বেড়ে যাওয়ার জন্য সরাসরিভাবে চাহিদা কিন্তু কমে না। এমনিতে ব্যষ্টিগত অর্থনীতির (Microeconomics) ক্ষেত্রে কোনো একটি দ্রব্যের দাম বেড়ে গেলে পরিবর্ত প্রভাব ও আয় প্রভাবের কারণে দ্রব্যটির চাহিদা কমে যায়। কিন্তু সমষ্টিগত অর্থনীতির (Macroeconomics) ক্ষেত্রে এই দুই প্রভাবের কোনো প্রভাবই কাজ করে না। যেহেতু এখানে আপনি সমস্ত রকম দ্রব্য ও সেবাকে একসাথে একটিই দ্রব্য হিসেবে দেখছেন সেহেতু পরিবর্ত প্রভাবের কোনো প্রশ্নই আসে না। আয় প্রভাবও কার্যকরী হয় না কারণ দামস্তরের সাথে সাথে জাতীয় আয়ের অর্থমূল্যও সমান অনুপাতে বেড়ে যায়। অতএব পরিবারের ক্রয়ক্ষমতা একই থেকে যায়। এই কারণেই দামস্তর বেড়ে গেলে অপূর্ণ চাহিদার পরিমাণ হ্রাস পায় না এবং মুদ্রাস্ফীতি পূর্ণ গতিতে চলতে থাকে।

দামস্তরের বৃদ্ধি সরাসরিভাবে আয়প্রভাব ও পরিবর্ত প্রভাবের সাহায্যে চাহিদাকে কমাতে না পারলেও পরোক্ষভাবে নানা পদ্ধতিতে চাহিদাকে এবং ব্যবধানকে সঙ্কুচিত করে। এই পদ্ধতিগুলি নিম্নরূপ।

(ক) দামস্তর বৃদ্ধির সাথে সাথে টাকার চাহিদা বেড়ে যেতে থাকে। টাকার জোগান যদি একই সঙ্গে সমানভাবে না বাড়ে তাহলে সুদের হার বৃদ্ধি পায়। তার ফলে চাহিদা কমে (অর্থাৎ সামগ্রিক চাহিদা রেখা নীচের দিকে নেমে যায়) যদি বিনিয়োগ বায়, বা ভোগ ব্যয় বা দুইই সুদের হারের উপর নির্ভরশীল হয়।

(খ) দেশের দামস্তর যদি বাড়তে থাকে অন্য দেশের তুলনায় তাহলে দেশের পরিবার ও প্রতিষ্ঠানসমূহ নিজের দেশের দ্রব্যের পরিবর্তে অন্যদেশের দ্রব্যাদি কিনতে চাইবে। এর ফলে আমদানি বৃদ্ধি পাবে। অন্যদিকে অন্যদেশের অর্থনৈতিক এককগুলি (economic units) সেই দেশের দ্রব্যের বদলে নিজের দেশের দ্রব্য কিনতে চাইবে, অর্থাৎ রপ্তানি বাড়বে। এই দুই কারণেই সামগ্রিক চাহিদা কমে যেতে থাকবে, অর্থাৎ ১-১ রেখাচিত্রে সামগ্রিক চাহিদা রেখা ক খ নীচের দিকে নামবে।

(গ) উদ্দিষ্ট দেশের করকাঠামো যদি প্রগতিশীল (Progressive) হয় জাতীয় আয় বৃদ্ধির সাথে সাথে প্রত্যেক ব্যক্তির আয় উচ্চতর কর ধাপে (tax bracket) চলে যায়। এর ফলে প্রত্যেকের করের পরিমাণ আয়ের তুলনায় অর্থাৎ সামগ্রিক করের পরিমাণ জাতীয় আয়ের তুলনায় বেশি অনুপাতে বেড়ে যায়। এই কারণেও ১.১ রেখাচিত্রে বর্ণিত সামগ্রিক চাহিদা রেখা কখ মুদ্রাস্ফীতির সঙ্গে সঙ্গে নীচের দিকে নেমে যেতে থাকে। এই ঘটনাটিকে বলা হয় ব্র্যাকেট ক্রীপ্।

(ঘ) উপরিউক্ত কারণগুলি ছাড়াও আয়বণ্টনের পরিবর্তনের ফলেও সামগ্রিক চাহিদা রেখা নীচের দিকে নামতে পারে। মুদ্রাস্ফীতির ফলে অর্থনৈতিক ভাবে দুর্বল শ্রেণীর পরিবারবর্গের থেকে আয় সবল শ্রেণির হাতে চলে আসে। যেহেতু দরিদ্র শ্রেণির প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা ধনী শ্রেণীর প্রান্তিক ভোগ প্রবণতার থেকে অনেক বেশি হয়, সেই কারণে মুদ্রাস্ফীতির সঙ্গে সঙ্গে একই পরিমাণ প্রকৃত জাতীয় আয় থেকে সামগ্রিক ভোগব্যয় কমে যায়। ঘটনাটি নিম্নলিখিত অভেদের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়।

$$Y = \left(Y - \frac{W}{P}\right) + \frac{W}{P}$$

এখানে $Y \equiv$ প্রকৃত জাতীয় আয়, $W \equiv$ সামগ্রিক আর্থিক শ্রমজাত আয় এবং $P \equiv$ দামস্তর। ওপরের

অভেদটির থেকে দেখা যাচ্ছে যে, প্রকৃত জাতীয় আয় সামগ্রিক প্রকৃত শ্রমজাত আয় $\left(\frac{W}{P}\right)$ ও প্রকৃত অশ্রমজাত আয়ের $\left(\left(Y-\frac{W}{P}\right)\right)$ সমষ্টি। P বাড়ার সাথে সাথে যদি W সমান অনুপাতে না বাড়ে তাহলে প্রকৃত শ্রমজাত আয় $\left(\frac{W}{P}\right)$ কমে যাবে ও একই Y থেকে প্রকৃত অশ্রমজাত আয় $\left(Y-\frac{W}{P}\right)$ সমান পরিমাণে বেড়ে যাবে। অতএব শ্রমিকের প্রান্তিক ভোগপ্রবণতা অশ্রমিকের প্রান্তিক ভোগপ্রবণতার থেকে বেশি হলে একই প্রকৃত জাতীয় আয় থেকে প্রকৃত ভোগব্যয় কম হবে। অর্থাৎ সামগ্রিক চাহিদা রেখা নীচের দিকে নামবে ও মুদ্রাস্ফীতি সৃষ্টিকারী ব্যবধানকে সঙ্কুচিত করবে। উপরিউক্ত এই সমস্ত কারণের ফলে চাহিদাবৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতির নিজেই নিজেকে ধ্বংস করার দিকে প্রবণতা থাকবে।

1.5 ব্যয়-বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি ও এ প্রসঙ্গে সরকারি নীতির ফলিতার্থ

ষাটের দশক পর্যন্ত উন্নত দেশগুলির মুদ্রাস্ফীতি ব্যাখ্যা করার জন্য চাহিদা বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতির তত্ত্বকেই যথেষ্ট মনে করা হত। কিন্তু সত্তরের দশক থেকে মুদ্রাস্ফীতির প্রকৃতির আমূল পরিবর্তন হল। দেখা গেল যথেষ্ট পরিমাণ বেকারত্ব থাকা সত্ত্বেও বা জাতীয় আয় পূর্ণনিয়োগ মাত্রার থেকে অনেক কম থাকা সত্ত্বেও মুদ্রাস্ফীতি হচ্ছে। এই ধরনের মুদ্রাস্ফীতিকে বলা হয় স্ট্যাগফ্লেশন। স্বভাবতই পূর্ণনিয়োগ উৎপাদনের তুলনায় চাহিদার আধিক্য বা মুদ্রাস্ফীতি সৃষ্টিকারী ব্যবধানের সাহায্যে এই ধরনের মুদ্রাস্ফীতিকে ব্যাখ্যা করা যায় না। স্ট্যাগফ্লেশন সম্পর্কে গবেষণা করতে গিয়ে অর্থনীতিবিদরা দেখলেন যে, আধুনিক অর্থ ব্যবস্থায় অনেক সময় চাহিদাবৃদ্ধির চাপ না থাকা সত্ত্বেও মজুরির হার বা অন্যান্য দ্রব্যের দাম এবং তার ফলে উৎপাদন ব্যয় বেড়ে যায় এবং মুদ্রাস্ফীতির সৃষ্টি করে। এই ধরনের মুদ্রাস্ফীতিকে বলা হয় ব্যয়বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি এবং এটি স্ট্যাগফেশনের অন্যতম কারণ।

বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির দ্রুত ও অভূতপূর্ব অগ্রগতির ফলে প্রায় সব শিল্পেই বৃহদায়তন উৎপাদন লাভজনক হয়েছে। এই কারণেই পূর্ণাঙ্গ প্রতিযোগিতামূলক বাজারের গুরুত্ব কমে গিয়ে বেশিরভাগ দ্রব্যের বাজারেই কতিপয় উৎপাদন প্রতিষ্ঠানের আধিপত্য স্থাপিত হয়েছে। উৎপাদনের সঙ্গে সঙ্গে শ্রমিকরাও কেন্দ্রীভূত ও সংগঠিত হয়েছে। এই বৃহদায়তন উৎপাদন প্রতিষ্ঠান ও শ্রমিক সংগঠনগুলি প্রভূত পরিমাণে একচেটিয়া অর্থনৈতিক শক্তির (monopoly power) অধিকারী। এরা চাহিদার অবস্থা ব্যতিরেকে তীব্র মন্দার সময়েও নিজেদের পণ্যের দাম বা মজুরির হার বাড়াতে পারে।

ব্যয় বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি এই ধরনের বাজারের অপূর্ণতা (market imperfection) বা প্রতিযোগিতার অপূর্ণাঙ্গতারই প্রত্যক্ষ ফল।

ব্যয়বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি সম্বন্ধে ধারণাটিকে নিম্নলিখিত পরিকাঠামোর (Model) সাহায্যে পরিষ্কার

করা যেতে পারে। এই পরিকাঠামোটি সরল কেইনিসিয়ান পরিকাঠামোরই একটুখানি বর্ধিত সংস্করণ। এখানে আমরা পরিবারবর্গকে দুই ভাগে ভাগ করছি; শ্রমজীবী ও ঔশ্রমজীবী। শ্রমজীবীরা সংঘবদ্ধ। মজুরি নির্ধারিত হয় শ্রমিক সংগঠন ও মালিকের মধ্যে আলোচনা ও দর-কষাকষির দ্বারা। যখনই প্রকৃত মজুরির হার (W) কাম্য প্রকৃত মজুরির হারের (W*) তলায় চলে যায় তখনই তারা আর্থিক মজুরির হার (money wage rate) বাড়ানোর জন্য মালিকপক্ষকে চাপ দিতে থাকে এবং কিছুটা সফলও হয়। আর্থিক মজুরির হারের পরিবর্তনকে আমরা নিম্নলিখিত সম্পর্কের (relation) সাহায্যে ধরার চেষ্টা করতে পারি।

$$\hat{\tilde{W}} = a(w^*-w);\ \#\ a>0 \qquad (১.১)$$

এখানে $\hat{\tilde{W}} \equiv$ আর্থিক মজুরির বৃদ্ধির আনুপাতিক হার $\equiv \dfrac{\frac{d\tilde{w}}{dt}}{\tilde{w}}$ $t \equiv$ সময় এবং $\tilde{W} \equiv$ আর্থিক মজুরির হার।

উৎপাদন প্রতিষ্ঠানগুলির গড় পরিবর্তনশীল ব্যয়ের উপর একটি স্থির মার্ক-আপ প্রয়োগ করে দ্রব্যের দাম ধার্য করে।

$$P=(I+\beta)\ \tilde{W} \qquad P(I+\beta).\tilde{W} \qquad (১.২)$$

এখানে $P\equiv$ দামস্তর, এবং $\beta\equiv$ স্থির মার্ক-আপ। এখানে অনুমান করা হচ্ছে যে, একক উৎপাদন করতে শুধুমাত্র এক একক শ্রমের প্রয়োজন হয়। এই কারণে এখানে গড় পরিবর্তনশীল ব্যয় $\tilde{W}$-এর সমান। (১.২) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\frac{W}{P}(\equiv W)=\frac{\beta}{1+\beta} \qquad (১.৩)$$

এবং
$$\frac{P-W}{P}=1-\frac{1}{1+\beta}=\frac{1}{1-\beta} \qquad (১.৪)$$

উপরের তিনটি সমীকরণ (১.২), (১.৩), (১.৪) থেকে পরিস্কার বোঝা যাচ্ছে যে, জাতীয় আয় (Y) শ্রম ও উৎপাদনের অন্য উপাদানগুলির মধ্যে একটি নির্দিষ্ট ভাবে বণ্টিত হচ্ছে এবং এই বন্টন নির্ধারণ করছে (১.২)। যে-কোনো Y থেকে শ্রম পাচ্ছে। $\left(\frac{1}{1+\beta}\right)Y$ এবং বাকি অংশটি, $\left(1-\frac{1}{1+\beta}\right)Y=\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)Y$ পাচ্ছে অন্যান্য উৎপাদনের মালিকরা। অতএব

$$C = Cp.\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)Y + Cw.\left(\frac{1}{1+\beta}\right)Y; Cp < Cw$$

$C \equiv$ সামগ্রিক পরিকল্পিত ভোগব্যয়, $Cw \equiv$ শ্রমজীবী পরিবারবর্গের গড় ও প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা এবং $Cp \equiv$ অশ্রমজীবী পরিবারবর্গের গড় ও প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা। পরিকল্পিত বিনিয়োগ (I) সম্পর্কে আমরা অনুমান করি যে

$$I = \bar{I} \qquad (১.৬)$$

অতএব দ্রব্য সামগ্রীর বাজারে ভারসাম্যের শর্ত হল-

$$Y = Cw.\frac{1}{1+\beta}Y + Cp.\frac{\beta}{1+\beta}Y + \bar{I} \qquad (১.৭)$$

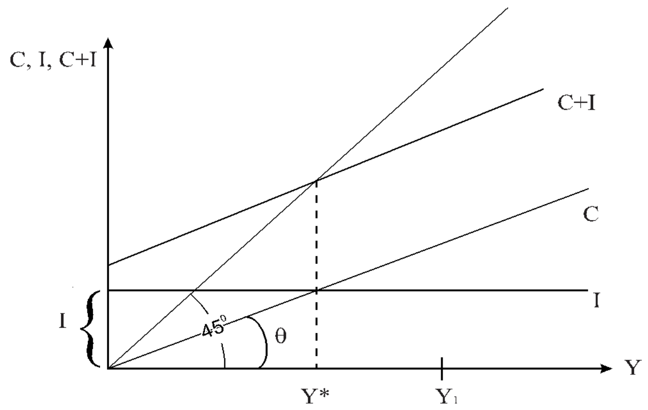
এবার আমাদের পরিকাঠামোটি সম্পূর্ণ হল। এই পরিকাঠামোটির ৪টি প্রধান সমীকরণ (১.১),(১.৩), (১.৫) এবং (১.৭) এবং ৪টি অভ্যন্তরীণ চলরাশি (endogenous variable), $Y, C, \tilde{W}$ ও $\hat{\tilde{W}}$। আমরা এই ৪টি সমীকরণকে সমাধান করে ৪টি অভ্যন্তরীণ চলরাশির মান পেয়ে যাব। সমীকরণ (১.৭) থেকে আমরা পাই-

$$Y^* = \frac{\bar{I}}{I - \left(Cw.\frac{1}{1+\beta} + Cp.\frac{\beta}{1+\beta}\right)} < Y_E \qquad (১.৮)$$

$Y^* \equiv$ ভারসাম্য Y এবং $Y_E \equiv$ পূর্ণনিয়োগ Y^* সমীকরণ (১.৮) থেকে বোঝাই যাচ্ছে যে, অন্য সবকিছু অপরিবর্তিত থেকে $\bar{I}$ যত বড় হবে $\bar{I}$ মানও তত বেশী হবে। এখানে আমরা অনুমান করছি যে $\bar{I}$ এতই ছোট যে, Y^*-এর মান Y_1 -এর থেকে কম। এছাড়া আমরা (১.১), (১.২) ও (১.৩) থেকে পাই।

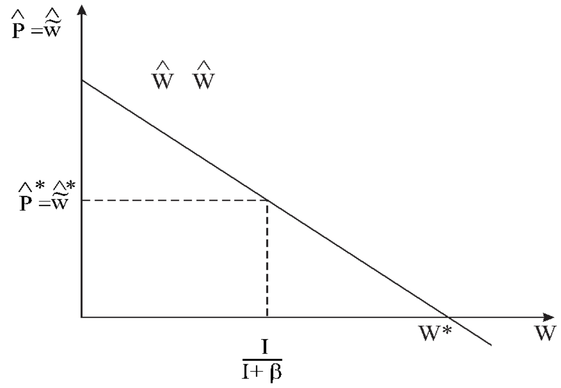
$$\hat{W}^* = \overset{*}{\hat{P}} = a.(W^* \frac{1}{1+\beta})$$

$\hat{\tilde{W}}^* \equiv$ ভারসাম্য $\hat{\tilde{W}}$ এবং $\hat{p}^* \equiv$ ভারসাম্য $\hat{p}$ বা ভারসাম্য মুদ্রাস্ফীতির হার $\equiv \frac{\frac{dp}{dt}}{P}$। আমরা এই সমীকরণগুলির সমাধান ১.২ রেখাচিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করব।



$\tan\theta = C_w \frac{I}{I+\beta} + Cp.\frac{\beta}{I+\beta}$

(ক)



(খ)

রেখাচিত্র - ১.২

রেখাচিত্র ১.২ ক থেকে আমরা পাই যে ভোগব্যয় ও বিনিয়োগ ব্যয় এতই কম যে, ভারসাম্য আয় Y^* পূর্ণনিয়োগ Y, Y_1 এর কম। এখানে পরিস্কার ভাবেই কোনো মুদ্রাস্ফীতি সৃষ্টিকারী ব্যবধান নেই।

রেখাচিত্র ১.২ খ-তে $\hat{W}\ \hat{W}$ রেখা প্রত্যেক w-তে $\hat{\tilde{W}}$ -এর মান দিচ্ছে সমীকরণ (১.৩) অনুযায়ী। এখানে মার্ক-আপ β-ই নির্ধারিত করছে প্রকৃত মজুরির হার, w। এবং β এক্ষেত্রে এতই বেশী যে, $\mathbf{W(=\frac{1}{1+\beta})}$ কাম্য w,w* এর থেকে অনেক কম। এর ফলে শ্রমিক সংগঠনগুলির চাপের ফলে $\tilde{W}$ বেড়ে যাচ্ছে। $\tilde{W}$ বেড়ে যাওয়ার আনুপাতিক (বা শতকরা) হার $\hat{\tilde{W}}^*$ সমীকরণ (১.২) থেকে আমরা দেখি যে, $\tilde{W}$ বাড়ালে উৎপাদন প্রতিষ্ঠানগুলি P ও বাড়বে এবং একই অনুপাতে। অর্থাৎ $\tilde{W}$ দ্বিগুন হলে বা ১০% বাড়লে P ও দ্বিগুন বা ১০% বাড়বে। এর ফলে চাহিদার কোনো রকমের চাপ না

থাকা সত্ত্বেও মুদ্রাস্ফীতি হতে থাকবে শ্রমিক সংগঠন ও উৎপাদন প্রতিষ্ঠানগুলির দর-কষাকষির ফলে। এই মুদ্রাস্ফীতিই হল ব্যয়বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি।

1.6 চাহিদা-বৃদ্ধি ও ব্যয়-বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে পার্থক্যের যথার্থতা

তত্ত্বগত দিক থেকে আমরা চাহিদা-বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি ও ব্যয় বৃদ্ধি-জনিত মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে পার্থক্য করতে পারি। চাহিদা বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি ও ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্য আমরা উল্লেখ করতে পারি।

প্রথমত, চাহিদা-বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির সময়ে দ্রব্যের বাজারে বড়তি চাহিদা থাকার জন্য দ্রব্যের দাম বৃদ্ধি পায়, দ্রব্যের দাম বৃদ্ধি পেলে দ্রব্যের উৎপাদন লাভজনক হয়, ফলে ফার্মগুলি বেশি পরিমান দ্রব্য সামগ্রী উৎপাদন করতে চায়। কিন্তু উৎপাদনের উপকরণের পূর্ণ নিয়োগ অবস্থা বজায় থাকার জন্য উৎপাদনের উপকরণের চাহিদা বাড়লে উৎপাদনের উপকরণের দাম বৃদ্ধি পায়, কাজেই দ্রব্যের বাজারে বাড়তি চাহিদা দেখা দিলে তার প্রভাবে দ্রব্যের দাম যেমন বাড়ে তেমনি উৎপাদনের উপকরণের দামও (যেমন, মজুরির হার) বাড়ে। ব্যয়-বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে বিপরীত ঘটনাক্রম লক্ষ্য করা যায়, ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে পূর্ণ নিয়োগ অবস্থা আসার আগেই মজুরির হার বা অন্যান্য উপকরণের দাম বৃদ্ধি পায়। তার ফলে উৎপাদন ব্যয় বৃদ্ধি পায়। উৎপাদন ব্যয় বৃদ্ধি পেলে দ্রব্য সামগ্রীর জোগান কমে আসে। দ্রব্যের বাজারে জোগান কম কিন্তু চাহিদা একই থাকার জন্য দ্রব্যের দাম বাড়তে থাকে।

দ্বিতীয়ত, চাহিদা-বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে ধরা হয় যে দেশে পূর্ণ নিয়োগ অবস্থা রয়েছে। শুধু পূর্ণ নিয়োগ অবস্থাতেই চাহিদা বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিতে পারে। কিন্তু ব্যয-বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে পূর্ণ নিয়োগ এই অনুমানটি ধরার প্রয়োজন হয় না। পূর্ণ নিয়োগের আগেই ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিতে পারে। তৃতীয়ত, চাহিদা বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে উৎপাদন ব্যয় অপরিবর্তিত থাকে বলে ধরে নেওয়া হয়। তেমনি ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে চাহিদার পরিমাণও স্থির থাকে বলে ধরে নেওয়া হয়। অন্যভাবে বলতে গেলে চাহিদা বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে জোগান রেখাটি স্থির থাকে এবং চাহিদা রেখাটি পরিবর্তনের জন্যই দাম বৃদ্ধি পায়। কিন্তু ব্যয় বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে চাহিদা রেখাটি স্থির থাকে এবং জোগান রেখার পরিবর্তনের জন্যই দাম বৃদ্ধি পায়। চতুর্থত, চাহিদা বৃদ্ধির ক্ষেত্রে অতিরিক্ত চাহিদা উপর থেকে দামকে টেনে তোলে। এজন্য ইংরাজীতে একে Demand-pull inflation বলা হয়। কিন্তু ব্যয় বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে উৎপাদন ব্যয় নিচের থেকে ঠেলা দিয়ে দামকে বাড়িয়ে দেয়। এজন্য ইংরাজীতে এই ধরনের মুদ্রাস্ফীতিকে Cost-push inflation বলা হয়। চাহিদা বৃদ্ধির ক্ষেত্রে এটি কাজ করে উপর থেকে। কিন্তু ব্যয় বৃদ্ধির ক্ষেত্রে এটি কাজ করে নিচে থেকে।

তত্ত্বগত দিক থেকে চাহিদা বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি এবং ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে আমরা পার্থক্য নির্ণয় করলেও বাস্তবে কোন একটি দেশে কোন বছরের মুদ্রাস্ফীতি চাহিদা বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি না ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি সেটি নির্ণয় করা মুশকিল। তার কারণ চাহিদা বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির সময়ে আমরা কার্য-কারণ সম্পর্কটি এইভাবে ব্যাখ্যা করিঃ সেখানে প্রথমে দ্রব্য সামগ্রীর চাহিদা বৃদ্ধি পায়; তার প্রভাবে দ্রব্যের দাম বাড়ে। দ্রব্যের দাম বাড়ার জন্য মজুরির হার বাড়ে। ব্যয় বৃদ্ধি জনিত

মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে কার্য-কারণ সম্পর্কটি বিপরীত হয়ে থাকে। এখানে মজুরির হার প্রথমে বাড়ে তার প্রভাবে উৎপাদন ব্যয় বাড়ে এবং সেজন্য দ্রব্যের দাম বাড়ে। চাহিদা বৃদ্ধি জনিত এবং ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে এই যে পার্থক্য করা হয়েছে সেই পার্থক্য কিন্তু কার্যকারণ দিক থেকেই। এর অর্থ এই নয় যে চাহিদা বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে প্রথমে দ্রব্য সামগ্রীর দাম বাড়বে তারপর কিছু সময় পরে মজুরির হার বাড়বে। তেমনি ব্যয় বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রেও এটি সত্য নয় যে প্রথমে মজুরির হার বাড়বে তারপর কিছু সময় পরে দামস্তর বাড়বে। মজুরির হার বৃদ্ধি এবং দামস্তর বৃদ্ধি যদি একই সময়ে ঘটে থাকে তাহলে মজুরির হার বৃদ্ধি দামস্তর বৃদ্ধির জন্য ঘটছে, না কি দামস্তর বৃদ্ধি মজুরির হার বৃদ্ধির জন্য ঘটছে সেটি বলা মুশকিল। এই কারণেই বলা হয় যে চাহিদা বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি এবং ব্যয় বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে বাস্তবে পার্থক্য করা খুবই শক্ত।

তবে এই প্রসঙ্গে একটি বিষয় আমরা মনে রাখতে পারি। সেটি এই যে চাহিদা বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি শুধু পূর্ণ নিয়োগ অবস্থার পরেই ঘটতে পারে। সুতরাং যদি দেশে পূর্ণ নিয়োগ অবস্থা বলবৎ থাকে এবং সেই অবস্থায় যদি দ্রব্য সামগ্রীর দামস্তর বাড়ে তাহলে সেই মুদ্রাস্ফীতিকে আমরা চাহিদা বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি বলতে পারি। কিন্তু যদি দেশে পূর্ণ নিয়োগ অবস্থা আসার আগেই দামস্তর বাড়তে থাকে তাহলে সেই মুদ্রাস্ফীতিকে আমরা চাহিদা বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি বলতে পারি না। সেটি স্বভাবতই ব্যয় বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি হবে। সুতরাং দেশে পূর্ণ নিয়োগ অবস্থা রয়েছে কিনা সে দিক দিয়ে বিচার করে আমরা বলতে পারি যে দেশের মুদ্রাস্ফীতিটি চাহিদা বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি না কি ব্যয়-বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি। কিন্তু এর অসুবিধা এই যে দেশে পূর্ণ নিয়োগ আছে কিনা সেটি নির্ধারণ করাও মুশকিল কারণ পূর্ণ নিয়োগ এর অর্থ এই নয় যে সমস্ত শ্রমিকই চাকরি পাবে। কতজন শ্রমিক বেকার থাকলে বা দেশের মোট শ্রমিকের কত অংশ বেকার থাকলে দেশে পূর্ণ নিয়োগ বজায় আছে বলা হবে সে সম্পর্কে কোন নির্দিষ্ট নিয়ম নেই ।

অধ্যাপক এ্যাকলে (Ackley) মনে করেন যে ব্যয় বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি এবং চাহিদা বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে পার্থক্য করার প্রধান অসুবিধা এই যে বাস্তব জগতে দ্রব্যের দাম স্বাধীনভাবে চাহিদা এবং যোগানের দ্বারা নির্ধারিত হয় না। কয়েকটি কৃষিজাত দ্রব্যের ক্ষেত্রে দাম চাহিদা এবং জোগানের দ্বারা নির্ধারিত হয় এবং চাহিদা ও জোগানের পরিবর্তনের সাথে সাথে দামের পরিবর্তন ঘটে থাকে ঠিকই। কিন্তু কারখানায় উৎপন্ন অধিকাংশ দ্রব্যের ক্ষেত্রেই দেখা যায় যে দ্রব্য সামগ্রীর দাম চাহিদা এবং জোগানের দ্বারা স্থির না হয়ে প্রশাসনিক সিদ্ধান্তের (Administrative decisions) দ্বারা নির্ধারিত হয়। কারখানাজাত অধিকাংশ দ্রব্য সামগ্রীর ক্ষেত্রে দামস্তর প্রায়ই পরিবর্তিত হয় না। কাজেই কারখানাজাত দ্রব্যের দাম যখন পরিবর্তিত হ'ল সেই পরিবর্তন চাহিদা বৃদ্ধির জন্য ঘটল না যায় বৃদ্ধির জন্য ঘটল তা বলা মুশকিল।

1.7 মুদ্রাস্ফীতির জন্য সামাজিক ব্যয়ভার

কোন দেশে মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিলে সেই মুদ্রাস্ফীতির ফল বিভিন্ন শ্রেণির লোকের উপর বিভিন্ন হয়ে থাকে। কেউ কেউ মুদ্রাস্ফীতির ফলে লাভবান হয়। আবার কেউ কেউ মুদ্রাস্ফীতির ফলে ক্ষতিগ্রস্ত হয়। অর্থনৈতিক জীবনেও মুদ্রাস্ফীতির সুদুর প্রসারী প্রভাব বিস্তার করে। মুদ্রাস্ফীতির অর্থনৈতিক ফলাফলগুলি নিয়ে আমরা এখন আলোচনা করব।

মুদ্রাস্ফীতির ফলাফলগুলিকে আমরা তিন শ্রেণীতে ভাগ করতে পারি ঃ

i উৎপাদনের উপর প্রভাব

ii বন্টনের উপর প্রভাব ও

iii অন্যান্য প্রভাব

উৎপাদনের উপর মুদ্রাস্ফীতির প্রভাব ঃ- মুদ্রাস্ফীতির ফলে মোট উৎপাদন কীভাবে প্রভাবিত হয় সেটি দেশের অনৈতিক অবস্থার ওপর নির্ভর করে যদি দেশে পূর্নকর্মসংস্থান বজায় থাকে এবং পূর্ণকর্মসংস্থান অবস্থায় যদি দ্রব্য সামগ্রীর চাহিদা বৃদ্ধির জন্য মুদ্রাস্ফীতির দেখা দেয় তাহলে এই মুদ্রাস্ফীতির ফলে দ্রব্যের উৎপাদন আর বাড়ে না, তার কারণ আমরা জানি যে পূর্ননিয়োগ অবস্থায় দ্রব্য সামগ্রীর উৎপাদন আর বাড়ানো সম্ভব নয়। সুতরাং পূর্ণনিয়োগ অবস্থায় চাহিদা বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিলে এর প্রভাবে উৎপাদন আর বাড়ানো সম্ভব নয়। পূর্ণনিয়োগ অবস্থান এই ধরনের মুদ্রাস্ফীতিকে আমরা প্রকৃত মুদ্রাস্ফীতি বা পূর্ণ মুদ্রাস্ফীতি বলে থাকি। অন্যদিকে যদি দেশে পূর্ণনিয়োগ অবস্থা পৌঁছানের আগেই মুদ্রাস্ফীতি দেখা দেয় তাহলে সেই মুদ্রাস্ফীতির প্রভাবে উৎপাদন বৃদ্ধি পেতে পারে।

দ্রব্য সামগ্রীর দাম বৃদ্ধি পায় বলে উৎপাদকেরা তাদের উৎপাদন বাড়াতে চেষ্টা করে। দাম যতই বাড়তে থাকে উৎপাদকদের লাভের পরিমাণ ততই বৃদ্ধি পায়। সেজন্য তারা অধিক পরিমাণ সামগ্রী উৎপাদনের চেষ্টা করে। প্রথমে সাধারণত ভোগ্য দ্রবের উৎপাদন বৃদ্ধি পায় এবং পরে এর প্রভাবে মূলধনী দ্রব্যসামগ্রীর উৎপাদনও বৃদ্ধি পায়। অন্যভাবে বলতে গেলে যদি দেশে উৎপাদনের উপাদানগুলির পূর্ণ নিয়োগ অবস্থা না আসে তাহলে মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিলে এই সমস্ত অ্যবহৃত উৎপাদনকে উৎপাদনের কাজে ব্যবহার করে মোট উৎপাদন বাড়নো সম্ভব, পূর্ণনিয়োগ অবস্থার আগেই যে মুদ্রাস্ফীতি দেখা দেয় সেই মুদ্রাস্ফীতিকে অর্ধ মুদ্রাস্ফীতি বলা হয়। তবে এই প্রসঙ্গে মনে রাখতে হবে যে যদি মুদ্রাস্ফীতি খুব মৃদু হারে হয় তাহলেই তা উৎপাদন বৃদ্ধির পক্ষে সহায়ক হয়। অধ্যাপক স্যামুয়েলসনের মতে মূল্যস্তরের মৃদু উর্ধ্বগতি অর্থনৈতিক অগ্রগতির সহায়ক, কিন্তু মুদ্রাস্ফীতি যদি খুব দ্রুতগতি সম্পর্ন্ন হয় তাহলে তা কখনই অর্থনৈতিক উন্নতিকে সাহায্য করতে পারে না। দ্রুতগতি মুদ্রাস্ফীতির ক্ষেত্রে দেশের মুদ্রা ব্যবস্থায় জনসাধারণের আস্থা নষ্ট হয়ে যায়। তখন দ্রব্য সামগ্রীর ক্রেতাদেরই যে শুধু অসুবিধা হয় তা নয়। বিক্রেতাদেরও অসুবিধা হয়। এই ধরণের দ্রুতগতি সম্পন্ন মুদ্রাস্ফীতি কখনই উৎপাদন বৃদ্ধির সহায়ক হতে পারে না।

তাহলে উৎপাদনের উপর মুদ্রাস্ফীতির ফলাফল সম্পর্কে সাধারণভাবে বলা যেতে পারে যদি দেশে পূর্ননিয়োগ অবস্থা বলবৎ থাকে তাহলে মুদ্রাস্ফীতির দ্বারা মোট উৎপাদন আর বৃদ্ধি করা সম্ভব নয়। কিন্তু যদি দেশে পূর্ণ নিয়োগ না থাকে তাহলে মুদ্রাস্ফীতির ফলে মোট উৎপাদন কিছুটা বৃদ্ধি পায়।। তবে মৃদুগতিতে মুদ্রাস্ফীতি হলে তবেই উৎপাদন বৃদ্ধির সহায়ক হয়। কিন্তু দ্রুতগতিতে মুদ্রাস্ফীতি ঘটলে সেটি উৎপাদন বৃদ্ধির সহায়ক হয় না।

■ **আয় বন্টনের উপর প্রভাব:-** এবার আয় বন্টনের উপর মুদ্রাস্ফীতি ফলাফল কীরুপে হয় সেটি দেখা যাক। মুদ্রাস্ফীতির ফলে সমাজের আয় এবং সম্পদ বন্টনের কাঠামোতে নানারুপ পরিবর্তন দেখা দেয়। মুদ্রাস্ফীতির সময় কোন শ্রেণির লোকেরা লাভবান হয় আবার কোন শ্রেণির লোকেরা ক্ষতিগ্রস্ত হয়। বিভিন্ন শ্রেণীর লোকেরা মুদ্রাস্ফীতির দ্বারা কীভাবে প্রভাবিত হয় সেটি নীচে আলোচনা করা হল।

■ **দেনাদার ও পাওনাদার:**- মুদ্রাস্ফীতির ফলে পাওনাদাররা ক্ষতিগ্রস্ত হয় এবং দেনাদাররা লাভবান হয়। মুদ্রাস্ফীতি ঘটার আগে কোন ব্যক্তি যদি কিছু টাকা ধার করে- থাকে, মুদ্রাস্ফীতির সময় সেই ঋণ শোধ করলে অর্থের অঙ্কে একই পরিমাণ শোধ দেওয়া হচ্ছে। কিন্তু দ্রব্য সামগ্রীর হিসাবে তাকে অনেক কম শোধ দিতে হচ্ছে। ফলে দেনাদার লাভবান হচ্ছে ও পাওনাদার ক্ষতিগ্রস্ত হচ্ছে, কারণ মুদ্রাস্ফীতির আগে যখন টাকার মূল্য বেশি ছিল তখন দ্রব্যসামগ্রীর অঙ্কে তারা যে টাকা ধার দিয়েছিল এখন মুদ্রাস্ফীতির ফলে সমপরিমাণ টাকা তারা ফেরত পেলেও সেই টাকার ক্রয় ক্ষমতা এখন অনেকটা কমে গেছে। তাছাড়া দেনাদাররা যখন অর্থ ঋণ করে তখন সুদের হার সম্পর্তে যে চুক্তি হয় সেই চুক্তির দ্বারা সুদের হার স্থির থকে। এখন দামস্তর বাড়লেও সুদের হার আর পরিবর্তিত হয় না। তার ফলে পাওনাদাররা যে সুদ পায় তার প্রকৃত মূল্য মুদ্রাস্ফীতির ফলে কমে যায়। এই দুদিক থেকেই মুদ্রাস্ফীতি ফলে দেনাদাররা লাভবান হয় এবং পাওনাদাররা ক্ষতিগ্রস্ত হয়।

■ **উৎপাদক ও শ্রমিক** ঃ- মুদ্রাস্ফীতির ফলে উৎপাদকরা লাভবান হয় কারন উৎপন্ন দ্রব্য সামগ্রী বিক্রি করে তারা অধিক রেভিনিউ আয় করতে পারে, কিন্তু উৎপাদনের উপাদানগুলি দাম সেই অনুপাতে বাড়ে না। অনেক সময়ই উৎপাদনের উপাদানগুলি দাম চুক্তির মারফৎ স্থির থাকে এবং চুক্তির শর্ত পরিবতির্ত না হওয়া পযর্ন্ত উৎপাদনের উপাদানগুলিকে পূর্বের দামই দিতে হয়। তার ফলে উৎপাদনের মুনাফা বৃদ্ধি পায়, অন্যদিকে শ্রমিকরা ক্ষতিগ্রস্ত হয় কারণ মুদ্রাস্ফীতির সময় দ্রব্য সামগ্রীর দাম বাড়লে প্রকৃত মজুরি কমে আসে।

■ **স্থির আয়ের ব্যাক্তি-ও পরিবর্তনশীল আয়ের ব্যক্তি ঃ-** যে সমস্ত লোকের আয় স্থির মুদ্রাস্ফীতির ফলে তারা ক্ষতিগ্রস্ত হয় কারণ দ্রব্যসামগ্রীর দাম বাড়লেও তাদের আয় বাড়েনা। বেতনভোগী কর্মচারী, পেনশনভোগী, বাড়ির মালিক প্রভৃতি স্থির আয়ের ব্যক্তিরা মুদ্রাস্ফীতির ফলে ক্ষতিগ্রস্ত হয় কারণ এদের আয় স্থির থাকে, অন্যদিকে ব্যবসাদাররা দ্রব্য সামগ্রীর দাম বাড়িয়ে মুদ্রাস্ফীতির সময়ে তাদের আর্থিক আয়কে বাড়াতে সক্ষম হয়। ফলে মুদ্রাস্ফীতির সময়ে দামবৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে পরিবর্তনশীল আয়ের ব্যক্তিদের আর্থিক আয় ও পরিবতির্ত হয়। তাদের প্রকৃত আয় কমেনা বা ততটা কমে না যতটা স্থির আয়ের ব্যক্তিদের অপেক্ষাকৃত বেশি ক্ষতি হয়।

■ **কৃষিজীবি ঃ-** মুদ্রাস্ফীতির সময়ে কৃষিজাত দ্রব্যের দাম যদি অন্য দ্রব্যর তুলনায় বেশি বাড়ে তাহলে বলা যেতে পারে যে মুদ্রাস্ফীতির ফলে কৃষকরা লাভবান হবে। কিন্তু সেটি সকল সময়ে সত্য নাও হতে পারে কৃষকদের নানা ধরনের দ্রব্য সামগ্রী কিনতে হয়। যেমন কৃষকদের সার, কীটনাশক, ঔষধ, প্রভৃতি শিল্পজাত দ্রব্য কিনতে হয়। তাছাড়া কৃষকদের নিজেদের ভোগ করার জন্য কাপড়, ভোজ্যতেল, চিনি, কেরোসিন, ঔষধপত্র ইত্যাদি কিনতে হয়। যদি শিল্পজাত দ্র্যবের দাম কৃষিজাত দ্র্যবের দাম অপেক্ষা বেশি হারে বাড়ে তাহলে মুদ্রাস্ফীতির ফলে কৃষকরা ক্ষতিগ্রস্ত হয়। অন্যদিকে শিল্পজাত দ্র্যবের তুলনায় যদি কৃষিজাত দ্র্যবের দাম অধিক হারে বেড়ে যায় তাহলে কৃষকরা লাভবান হয়।

■ **বিনিয়োগকারী** ঃ- বিনিয়োগকারীদের মধ্যে যারা শেয়ারে টাকা বিনিয়োগ করে, মুদ্রাস্ফীতির দরুন তারা লাভবান হয়। কারণ মুদ্রাস্ফীতির দরুন কোম্পানির মুনাফা বৃদ্ধি পায় বলে তারা বেশি লভ্যাংশ পেতে পারে কিন্তু যে সমস্ত বিনিয়োগকারী বন্ড বা ডিবেঞ্চারে টাকা বিনিয়োগ করে তারা ক্ষতিগস্ত হয় কারণ দ্রব্য সামগ্রীর দাম বাড়লেও বন্ড থেকে প্রাপ্ত সুদ বাড়ে না। সুতরাং মুদ্রাস্ফীতির ফলে শেয়ারে

বিনিয়োগকারীদের লাভ হয় কিন্তু যে সমস্ত ব্যক্তি স্বর্ণপত্র বা বন্ডে টাকা বিনিয়োগ করে তারা ক্ষতিগ্রস্ত হয়।

■ **ব্যবসাদার, মজুতদার ও ফটকা কারবারীঃ-** মুদ্রাস্ফীতির ফলে ব্যবসা বাণিজ্য থেকে লাভের সুযোগ বৃদ্ধি পায়। সেজন্য ব্যবসাদারদের লাভ হয়, মজুতদার এবং ফটকা কারবারীরা কম দামে দ্রব্য সামগ্রী কিনে ভবিষ্যতে বেশি দামে বিক্রি করতে পারে তার ফলে তারাও মুদ্রাস্ফীতির সময়ে মোটা লাভের সুযোগ পায়।

■ **স্বয়ং নিযুক্ত ব্যক্তি ঃ-** স্বয়ং নিযুক্ত পেশায় যাঁরা নিযুক্ত থাকেন মুদ্রাস্ফীতির সময়ে তাঁরা নিজেদের ফি বাড়িয়ে দেন। অর্থাৎ স্বয়ং নিযুক্ত ব্যক্তিরাও মুদ্রাস্ফীতির বোঝা অন্যের ঘাড়ে চাপাতে পারেন। মুদ্রাস্ফীতির সময়ে ডাক্তার বা উকিল তাদের ফি বাড়িয়ে দেবেন। এইভাবে স্বয়ং নিযুক্ত ব্যক্তিরা মুদ্রাস্ফীতির সময়ে নিজেদের আয় বাড়িয়ে ফেলতে পারেন। ফলে তাঁদের অবস্থার খুব বেশি পরিবর্তন হয় না।

■ **অন্যান্য প্রভাব ঃ-**

প্রথমত,

মুদ্রাস্ফীতির সময়ে দেশের জিনিসপত্রের দাম বেড়ে যায়। তার ফলে দেশের রপ্তানি কমে আসে, অন্যদিকে আমদানির পরিমান বৃদ্ধি পায়, ফলে বৈদেশিক বাণিজ্য ঘাটতি দেখা দেয়।

দ্বিতীয়ত,

মুদ্রাস্ফীতির ফলে দেশে আয় ও সম্পদের বৈষম্য বৃদ্ধি পায়, মুদ্রাস্ফীতির ফলে দেশে মুনাফা অধিক হারে বাড়ে। মজুরি অপেক্ষাকৃত কম হারে বাড়ে ধনী ব্যক্তিদের আয় অপেক্ষাকৃত বেশি হারে বাড়ে অন্যদিকে দরিদ্র ব্যক্তিদের আয় হয় বাড়ে না হয় বাড়ে না। এর ফলে অর্থনীতিতে মুদ্রাস্ফীতির সময় আয় এবং সম্পদ বণ্টনে বৈষম্য দেখা যায়।

তৃতীয়ত,

মুদ্রাস্ফীতি সময়ে ভোগ্যদ্রব্যের দাম বেড়ে গেলে সাধারণ মানুষ ভোগ্য দ্রব্য কম করে কিনতে পারে। তার ফলে ভোগ্য দ্রব্যের উৎপাদনে কম পরিমাণ উপকরণ নিয়োগ করা হয়। এইভাবে অধিক উপকরণ মূলধনী দ্রব্যের উৎপাদনে নিয়োগ করা সম্ভব একে বাধ্যতামূলক সঞ্চয় বলা যেতে পারে। মুদ্রাস্ফীতির সময় এইভাবে জনসাধারণকে বাধ্যতামূলকভাবে সঞ্চয় করতে হয়।

চতুর্থত,

যদি মুদ্রাস্ফীতি দ্রুতহারে হয় তাহলে অর্থের মূল্য দ্রুত হ্রাস পায় বলে জনসাধারণ অর্থ হাতে রাখতে চায় না। সকলেই দ্রব্য সামগ্রী মজুদ করে রাখতে চায়। জনসাধারণ তাদের সঞ্চয় ব্যাংকের কাছে বা আর্থিক প্রতিষ্ঠান কাছে জমা রাখতে চায় না।

পরিবর্তে সেই সঞ্চয় দিয়ে সোনা বা মূল্যবান ধাতু অথবা জমি কিনে রাখতে চায় এর ফলে দেশের মূলধন গঠন বাধাপ্রাপ্ত হয়।

পঞ্চমত,

মুদ্রাস্ফীতির সময় শ্রমিকদের মজুরি যথেষ্ট বৃদ্ধি পায় না ফলে শ্রমিক অসন্তোষ দেখা দেয়। শ্রমিকরা মজুরি বৃদ্ধির জন্য আন্দোলন করতে থাকে। সেই দাবি মেনে না নিলে আন্দোলন দীর্ঘস্থায়ী হয়। এর ফলে উৎপাদন ব্যাহত হয় তাছাড়া মুদ্রাস্ফীতির ফলে জীবনযাত্রার ব্যয় বৃদ্ধি পায়, তার ফলে দরিদ্র, মধ্যবিত্ত ও নিম্নবিত্ত জনসাধারণ দারুণভাবে ক্ষতিগ্রস্ত হয়।

উপসংহারে বলা যেতে পারে যে মুদ্রাস্ফীতির কিছু ফলাফল শুভ হলেও সামগ্রিক দৃষ্টিকোণ থেকে কোন দেশের পক্ষে তা বাঞ্ছনীয় নয়। মৃদু হারে মুদ্রাস্ফীতিকে অর্থনৈতিক উন্নয়নের পক্ষে সহায়ক বলা হলেও অধিকাংশ ক্ষেত্রেই দেখা যায় যে একবার মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিলে মুদ্রাস্ফীতির হারকে দমিয়ে রাখা সম্ভব হয় না।

মুদ্রাস্ফীতির গতিবেগ নিয়ন্ত্রণের বাইরে চলে যায়। তার ফলে সমগ্র অর্থনীতিতে চরম বিশৃঙ্খলতা দেখা দেয়। সেই জন্য মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রণে রাখাই বাঞ্ছনীয়।

1.8 মুদ্রাস্ফীতির নিয়ন্ত্রন এবং তার রোধে বিভিন্ন কর্মনীতি

মুদ্রাস্ফীতির নিয়ন্ত্রণ

একবার মুদ্রাস্ফীতি দেখা দিলে তার নিয়ন্ত্রণ করা কঠিন হয়ে পড়ে। মুদ্রাস্ফীতি দুভাবে প্রতিরোধ করা যেতে পারে একটি দ্রব্য সামগ্রীর উৎপাদন বৃদ্ধি করা এবং অপরটি মোট চাহিদাকে হ্রাস করা। মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রণ করার জন্য যেসব ব্যবস্থা গ্রহণ করা যেতে পারে সেগুলিকে তিন ভাগে ভাগ করা যেতে পারে।

- **আর্থিক পদ্ধতি**
- **রাজস্ব-সংক্রান্ত পদ্ধতি**
- **অন্যান্য পদ্ধতি**

তিনটি পদ্ধতি নিয়ে আমরা একে একে আলোচনা করব,

আর্থিক পদ্ধতি ঃ- মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রণের জন্য যে সমস্ত আর্থিক পদ্ধতি গ্রহণ করা যায় সেগুলি সাধারণত দেশের কেন্দ্রীয় ব্যাংকই গ্রহণ করে থাকে। মুদ্রাস্ফীতি দমন করার জন্য কেন্দ্রীয় ব্যাংক তার ঋণ নিয়ন্ত্রণ পদ্ধতি গুলি ব্যবহার করতে পারে।

প্রথমত, ব্যাংক রেট বৃদ্ধি করে মুদ্রাস্ফীতি দমন করার চেষ্টা করা যেতে পারে। বাড়িয়ে দিলে বাণিজ্যিক ব্যাংকগুলিও তাদের সুদের হার বাড়িয়ে দেয়, উদ্যোক্তারা কম পরিমাণ বিনিয়োগ করে। বিনিয়োগের পরিমাণ কমলে সামগ্রিক চাহিদা কমে আসে।

দ্বিতীয়ত, কেন্দ্রীয় ব্যাংক বাণিজ্যিক ব্যাংকগুলি কর্তৃক রক্ষিত রিজার্ভের এর অনুপাতকে বাড়িয়ে দিতে পারে। যদি রিজার্ভের এর অনুপাত বাড়ানো হয় তাহলে বাণিজ্যিক ব্যাংকগুলিকে বেশি টাকা কেন্দ্রীয় ব্যাংকের কাছে রিজার্ভ আকারে জমা রাখতে হয়, তার ফলে তারা কম পরিমাণ ঋণ দিতে পারবে। তখন সামগ্রিক চাহিদা কমবে।

তৃতীয়ত, কেন্দ্রীয় ব্যাংক খোলা বাজারে ঋণপত্র বিক্রি করে জনসাধারণের কাছ থেকে অতিরিক্ত অর্থ তুলে নিতে পারে। জনসাধারণের হাতে নগদ টাকা কমে গেলে এবং বাণিজ্যিক ব্যাংকগুলির হাতে নগদ টাকা কমে গেলে কম পরিমান ঋণ সৃষ্টি হবে। তার ফলেও সামগ্রিক চাহিদা কমবে।

চতুর্থত, মুদ্রাস্ফীতির নিয়ন্ত্রনের জন্য নির্বাচন-মূলক ঋণ নিয়ন্ত্রন পদ্ধতিও গ্রহন করা যেতে পারে। এই পদ্ধতির মাধ্যমে কেন্দ্রীয় ব্যাংক বাণিজ্যিক ব্যাংকগুলিকে কোনো বিশেষ ক্ষেত্রে বিনিয়োগের জন্য ঋণ দিতে নিষেধ করতে পারে।

রাজস্ব সংক্রান্ত পদ্ধতি: বর্তমানে অধিকাংশ অর্থনীতিবিদ্‌রা মনে করেন যে আর্থিক পদ্ধতি (monetary policy) দ্বারা মুদ্রাস্ফীতিকে সম্পূর্ণভাবে নিয়ন্ত্রন করা সম্ভব নয়। আর্থিক পদ্ধতি অপেক্ষা সরকারের রাজস্ব সংক্রান্ত পদ্ধতি (fiscal policy) অধিকতর কার্যকরী হতে পারে। রাজস্ব সংক্রান্ত পদ্ধতির মধ্যে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি উল্লেখ করা যেতে পারে।

প্রথমত, সরকার নিজের ব্যয় কমাতে পারে। আমরা জানি যে সামগ্রিক চাহিদার একটি অংশ সরকারি ব্যয়। কাজেই সরকার যদি নিজের ব্যয় হ্রাস করে, তাহলে সামগ্রিক চাহিদা কমবে।

দ্বিতীয়ত, সরকারি ব্যয় হ্রাসের সঙ্গে সঙ্গে বেসরকারি ব্যয়ের পরিমানও কমাতে হবে। বেসরকারি ব্যয় কমানোর একটি উপায় করের পরিমান বৃদ্ধি ও নতুন কর স্থাপন করা।

তৃতীয়ত, কেন্দ্রীয় ব্যাংক খোলা বাজারে সরকারি জনসাধারণের কাছ থেকে ঋণ গ্রহণ করেও মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রণ করতে পারে। কর বৃদ্ধির একটা সীমা আছে। যথাসম্ভব করের হার বৃদ্ধি করার পরও জনগণের নিকট বাড়তি ক্রয় ক্ষমতা থেকে যেতে পারে। সরকার জনসাধারণের কাছে বন্ড বা ঋণপত্র বিক্রি করে ঋণ গ্রহণ করতে পারে। এই ভাবে বাড়তি অর্থ জনসাধারণের কাছ থেকে সরকার তুলে নিতে পারে। তার ফলে সামগ্রিক চাহিদা হ্রাস পায়। অনেক সময় সরকার আয় থেকে ব্যয় বেশি করে এবং নতুন অর্থ সৃষ্টি করে এই ঘাটতি ব্যয় মেটায়। ঘাটতি ব্যয়ের ফলে দেশে অর্থের পরিমাণ বৃদ্ধি পায় এবং তা মুদ্রাস্ফীতির সৃষ্টি করে। মুদ্রাস্ফীতির সময় সরকারের উচিত ঘাটতি ব্যয়কে একেবারেই পরিত্যাগ করা, সম্ভব হলে সরকারের ব্যয় কমিয়ে এবং আয় বাড়িয়ে বাজেটে উদ্বৃত্ত সৃষ্টি করা।

চতুর্থত, সরকার বাধ্যতামূলক সঞ্চয় প্রকল্পও চালু করতে পারে। এই প্রকল্পের মাধ্যমে জনগণকে তাদের আয়ের একটা অংশ বাধ্যতামূলকভাবে সঞ্চয় করতে হয়। মুদ্রাস্ফীতির অবসান ঘটলে এই সঞ্চয় ব্যক্তিকে ফেরত দেওয়া হয়, এইভাবে বাধ্যতামূলক সঞ্চয়ের মাধ্যমে সামগ্রিক চাহিদা কমানো সম্ভব।

অন্যান্য পদ্ধতি, আর্থিক পদ্ধতি ও রাজস্ব সংক্রান্ত পদ্ধতি ছাড়াও মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রণের অন্যান্য পদ্ধতি রয়েছে। এদের মধ্যে প্রথমেই উৎপাদন বৃদ্ধির কথা উল্লেখ করতে হয়। যদি দেশে পুর্ণনিয়োগ অবস্থা না আসে এবং তার আগেই যদি দ্রব্য সামগ্রীর দাম বাড়তে থাকে তাহলে উৎপাদন বৃদ্ধি করা সম্ভব, উৎপাদনের পরিমাণ বৃদ্ধি করতে পারলে মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রণ করা সহজ হয়। তাছাড়া অন্যান্য পদ্ধতির মধ্যে দাম নিয়ন্ত্রণ ব্যবস্থা, বরাদ্দ ব্যবস্থা, বা র‍্যাশনিং ব্যবস্থা প্রবর্তন করা যেতে পারে। এই ব্যবস্থার মাধ্যমে প্রয়োজনীয় দ্রব্য সামগ্রীর দাম সরকার বেঁধে দিতে পারে। আবার রেশন ব্যবস্থার মাধ্যমে সরকার ন্যায্যমূল্যের দোকানে প্রয়োজনীয় দ্রব্যসামগ্রী জনসাধারণের কাছে বিক্রির ব্যবস্থা করতে পারে। এইভাবে দাম নিয়ন্ত্রণ এবং রেশনিং ব্যবস্থার মাধ্যমে দামস্তর কম রাখা সম্ভব হয়।

এছাড়া মজুরিও নিয়ন্ত্রণ করা যেতে পারে। দামস্তর যখন বাড়তে থাকে তখন শ্রমিকরা তাদের মজুরি বৃদ্ধির জন্য চাপ দিতে থাকে, অবশেষে মালিককে অধিক মজুরি দিতে বাধ্য হতে হয়। মজুরি বৃদ্ধির ফলে মালিকের উৎপাদন ব্যয় বৃদ্ধি পায় এবং তার ফলে আবার দ্রব্য সামগ্রীর দাম বৃদ্ধি পায়। এইভাবে দাম বৃদ্ধি এবং মজুরি বৃদ্ধির একটি দুষ্টচক্র সৃষ্টি হয়, এই দুষ্টুচক্র প্রতিরোধ করার জন্য মজুরি বৃদ্ধি সাময়িকভাবে বন্ধ রাখা যেতে পারে। মজুরির হার এইরূপ ভাবে নিয়ন্ত্রণ করা দরকার যাতে মজুরি বৃদ্ধির ফলে জিনিসপত্রের দাম না বাড়ে, সর্বোপরি অনেক সময় অত্যাবশ্যকীয় দ্রব্য সামগ্রীর ফটকা কারবাবের জন্যও মুদ্রাস্ফীতি দেখা যায়। কালোবাজারি ও চোরাকারবারিদের বিরুদ্ধে আইনগত শাস্তি মূলক ব্যবস্থা গ্রহণ করে চোরাই-চালান প্রতিরোধ করে এবং অত্যাবশ্যকীয় দ্রব্যাদির মজুদ নিয়ন্ত্রন করে মুদ্রাস্ফীতি দমন করা যেতে পারে।

উপসংহারে বলা যেতে পারে যে ওপরে সে ব্যবস্থাগুলির কথা বলা হয় হলো সেগুলো কমবেশি একত্রে প্রয়োগ করতে হবে। শুধু আর্থিক ব্যবস্থা বা রাজস্ব সংক্রান্ত ব্যবস্থার যে-কোনো একটি গ্রহণ করা মুদ্রাস্ফীতি দমনে পক্ষে যথেষ্ট নয়। মুদ্রাস্ফীতিকে অনেক সময়ই বহুমুখী দানব বলে অভিহিত করা হয়। এই দানবের সঙ্গে মোকাবিলা করার জন্য নানা দিক থেকে নানাবিধ ব্যবস্থা গ্রহণ করা দরকার। তবেই মুদ্রাস্ফীতি প্রতিরোধ করা সম্ভব হবে।

1.9 সংক্ষিপ্তসার

- **মুদ্রাস্ফীতি কাকে বলে ঃ-** মুদ্রাস্ফীতি বলতে আমরা একটি অবস্থাকে বুঝি যখন অধিকাংশ দ্রব্য সামগ্রীর দাম ক্রমাগত বৃদ্ধি পাচ্ছে। মুদ্রাস্ফীতির বৈশিষ্ট্য হল যে মুদ্রাস্ফীতির সময়ে দাম ক্রমাগত বাড়তে থাকবে। দাম যদি খুব বেশি হয় কিন্তু সেই দাম যদি স্থির থাকে তাহলে তাকে আমরা মুদ্রাস্ফীতি বলব না। তাছাড়া মুদ্রাস্ফীতির সময়ে যে দামবৃদ্ধি ঘটে থাকে সেই দামবৃদ্ধি একটি সাময়িক বা স্বল্পকালীন ঘটনা নয়। এই দামবৃদ্ধি একটি স্থায়ী ঘটনা।

- **মুদ্রাস্ফীতির প্রকারভেদ ঃ-** বিভিন্ন প্রকার মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে আমরা পার্থক্য উল্লেখ করতে পারি।

পূর্ণমুদ্রাস্ফীতি এবং অর্ধমুদ্রাস্ফীতি ঃ- পূর্ণ কর্মসংস্থান অবস্থায় যখন দ্রব্য চাহিদা বৃদ্ধি পায় তখন যে মুদ্রাস্ফীতি দেখা দেয় তাকে বলা হয় পুর্ণ মুদ্রাস্ফীতি। অন্যদিকে পুর্ণ কর্মসংস্থান আসার আগেই যদি মুদ্রাস্ফীতি দেখা দেয় তাকে বলে অর্ধ মুদ্রাস্ফীতি।

- **মুক্ত মুদ্রাস্ফীতি ও দমিত মুদ্রাস্ফীতি ঃ-** যদি সরকার দামস্তর বৃদ্ধি রোধ করার জন্য কোনরূপ ব্যবস্থা গ্রহন না করেন এবং যদি দামস্তর অবাধে বাড়তে পারে তাহলে সেই মুদ্রাস্ফীতিকে মুক্ত বা অবাধ মুদ্রাস্ফীতি বলে। অন্যদিকে যদি মুদ্রাস্ফীতি রোধ করার জন্য সরকার নানাবিধ ব্যবস্থা গ্রহন করেন তাহলে সেই অবস্থায় যে মুদ্রাস্ফীতি ঘটে তাকে দমিত মুদ্রাস্ফীতি বলে।

- *মৃদু গতি বিশিষ্ট মুদ্রাস্ফীতি ও দ্রুত গতি বিশিষ্ট মুদ্রাস্ফীতি ঃ* যদি দামস্থর মৃদু গতিতে বাড়তে খাকে তাহলে থাকে মৃদু গতিসম্পন্ন মুদ্রাস্ফীতি বলে। অন্যদিকে যদি দামস্তর দ্রত গতিতে বাড়তে থাকে তাহলে তাকে দ্রুতগতিসম্পন্ন মুদ্রাস্ফীতি বলে। তবে মৃদু গতি বা দ্রুত গতির কোন নির্দিষ্ট পরিমাপ বলা সম্ভব নয়।

চাহিদা বৃদ্ধি জনিত মুদ্রাস্ফীতি ও ব্যয় বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি ঃ দেশে দ্রব্য সামগ্রীর চাহিদা যদি

বৃদ্ধি পায় কিন্তু জোগান যদি স্থির থাকে তখন যে মুদ্রাস্ফীতি দেখা দেয় তাকে বলে চাহিদা বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি। অন্যদিকে উৎপাদনের উপাদানগুলি দামবৃদ্ধি পেলে উৎপাদন ব্যয় যদি বৃদ্ধি পায় তার প্রভাবে যে দামবৃদ্ধি ঘটে তাকে বলে ব্যয়বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি।

♦ **মুদ্রাস্ফীতির ফলাফল ঃ-** তিনটি দিক থেকে আমরা মুদ্রাস্ফীতির ফলাফল আলোচনা করতে পারি- উৎপাদনের উপর প্রভাব, বন্টনের উপর প্রভাব এবং অন্যান্য প্রভাব। যদি দেশে পুর্ণ কর্মসংস্থান বজায় থাকে তাহলে মুদ্রাস্ফীতির ফলে মোট উৎপাদন আর বাড়বে না। কিন্তু যদি দেশে পুর্ননিয়োগ অবস্থার আগেই মুদ্রাস্ফীতি দেখা দেয় তাহলে মুদ্রাস্ফীতির প্রভাবে উৎপাদন কিছুটা বাড়ে। তবে মুদ্রাস্ফীতি যদি খুব দ্রুতগতিসম্পন্ন হয় তাহলে তা কখনই উৎপাদন বৃদ্ধির পক্ষে সহায়ক হতে পারে না।

বিভিন্ন শ্রেণির লোকেদের আয়ের উপর মুদ্রাস্ফীতির বিভিন্ন প্রভাব পড়ে থাকে। যেমন মুদ্রাস্ফীতির ফলে পাওনাদাররা ক্ষতিগ্রস্ত হয় ও দেনাদাররা লাভবান হয়। মুদ্রাস্ফীতির ফলে স্থির আয়ের ব্যক্তিরা ক্ষতিগ্রস্ত হয় কিন্তু পরিবর্তনশীল আয়ের ব্যক্তিরা লাভবান হয় অথবা একই অবস্থায় থাকে। কৃষিজীবিদের উপর মুদ্রাস্ফীতির প্রভাব নিশ্চিত করে বলা মুশকিল। কৃষিজাত দ্রব্য সামগ্রীর দাম যদি অন্য দ্রবের তুলনায় বেশি হারে বাড়ে তাহলে কৃষকরা লাভবান হয়। যারা শেয়ারে বিনিয়োগ করে তারা লাভবান হয় কিন্তু যারা ডিবেঞ্চার বা ঋণপত্র কিনতে অর্থ বিনিয়োগ করেছে তারা ক্ষতিগ্রস্ত হয়, ব্যবসাদার, মজুতদার ও ফটকা কারবারীরা লাভবান হয়। স্বয়ং নিযুক্ত পেশায় যারা নিযুক্ত থাকে তারাও মুদ্রাস্ফীতির সময়ে নিজেদের অবস্থা অপরিবর্তিত রাখতে পারে। মুদ্রাস্ফীতির অন্যান্য প্রভাবের মধ্যে উল্লেখ করা যেতে পারে যে মুদ্রাস্ফীতির ফলে বৈদেশিক বাণিজ্যে ঘাটতি দেখা দেয়, আয় এবং সম্পদের বন্টনে বৈষম্য দেখা দেয়। জনসাধারণকে বাধ্যতামূলকভাবে সঞ্চয় করতে হয়। তবে যদি মুদ্রাস্ফীতি দ্রুতহারে হয় তাহলে জনসাধারণের হাতে অর্থ রাখতে চায় না। সঞ্চয়কে সোনা অথবা জমি অথবা বৈদেশিক মুদ্রার মাধ্যমে রাখতে চায়। মৃদু মুদ্রাস্ফীতি অর্থনৈতিক উন্নয়নের পক্ষে সহায়ক হলেও মুদ্রাস্ফীতিকে দমিয়ে রাখা সম্ভব হয় না।

♦ **মুদ্রাস্ফীতির নিয়ন্ত্রন ঃ-** মুদ্রাস্ফীতির নিয়ন্ত্রন করার জন্য তিন ধরনের ব্যবস্থা নেওয়া যেতে পারে ঃ আথির্ক পদ্ধতি, রাজস্ব সংক্রান্ত পদ্ধতি এবং অন্যান্য পদ্ধতি, আর্থিক পদ্ধতি দেশের কেন্দ্রীয় ব্যাঙ্ক গ্রহন করে থাকে। আর্থিক পদ্ধতির মধ্যে উল্লেখযোগ্য হল ব্যাঙ্ক রেট বৃদ্ধি, রির্জাভের অনুপাত বৃদ্ধি, খোলা বাজারে সরকারী ঋণপত্র বিক্রি এবং নির্বাচকমূলক ঋণ নিয়ন্ত্রন পদ্ধতি। রাজস্ব সংক্রান্তপদ্ধতির মধ্যে উল্লেখযোগ্য হল সরকারের ব্যয় কমানো, নতুন কর স্থাপন অথবা করের পরিমান বৃদ্ধি, সরকার কর্তৃক জনসাধারণের কাছ থেকে ঋণ গ্রহন, বাধ্যতামূলক সঞ্চয় প্রকল্প চালু প্রভৃতি। অন্যান্য পদ্ধতির মধ্যে উল্লেখযোগ্য হল উৎপাদন বৃদ্ধি, দাম নিয়ন্ত্রন এবং র‍্যাশনিং ব্যবস্থা প্রবর্তন, মজুরি বৃদ্ধি নিয়ন্ত্রন।

1.10 অনুশীলনী

উত্তর ভিত্তিক প্রশ্ন-

১. মুদ্রাস্ফীতি কী?

২. চাহিদা-বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতি কী?

৩. ব্যয়বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতির সংজ্ঞা কী?

৪. অল্পকথায় উত্তর দাও ঃ

a) স্ট্যাগফ্লেশন

b) মুদ্রাস্ফীতি সৃষ্টিকারী ব্যবধান

৫. পার্থক্য নির্ণয় কর ঃ

a) পূর্ণ ও অর্ধ মুদ্রাস্ফীতি

b) মুক্ত ও দমিত মুদ্রাস্ফীতি

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন-

১. মুদ্রাস্ফীতি উদ্ভবের প্রধান কারণগুলি কী কী?

২. মুদ্রাস্ফীতি কয় প্রকার হয় ও কী কী?

৩. রাজস্ব সংক্রান্ত পদ্ধতির সাহায্যে মুদ্রাস্ফীতি কীভাবে নিয়ন্ত্রন করা যায়?

দীর্ঘ উত্তর ভিত্তিক প্রশ্ন-

১. মুদ্রাস্ফীতির ফলাফল সবিস্তারে আলোচনা কর।

২. কীভাবে মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রন করা যায় তা আলোচনা কর।

৩. চাহিদা-বৃদ্ধিজনিত ও ব্যয়-বৃদ্ধিজনিত মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় কর।

1.11 গ্রন্থপঞ্জী

Abel, A. B., Blanchard, O.J., Bernanke, B., & Croushore, D. (2017). *Macroeconomics.* London : Pearson UK

Ackley. G. (1978). The costs of inflation. *The American Economic Review, 68(2),* 149-154.

Fischer, S., & Modigliani, F. (1978). Towards an understanding of the real effects and costs of inflation. *Review of World Economics, 1114*(4), 810-833.

Mankiw, N. G. (2020). *Principles of Macroeconomics.* New Delhi : Cengage learning.

একক 2 ❑ মুদ্রাস্ফীতি ও বেকারত্ব

গঠন

2.0 উদ্দেশ্য

এই এককের বিষয়বস্তু পাঠ করলে জানা যাবে ঃ

- ফিলিপ্‌স রেখা কী? স্বল্পকালীন ও দীর্ঘকালীন ফিলিপ্‌স রেখার আকৃতি কী?
- প্রত্যশা-প্রভাবযুক্ত ফিলিপ্‌স রেখা এবং
- যুক্তি নির্ভর প্রত্যশা ও মুদ্রাস্ফীতির মধ্যে সম্পর্ক

2.1 প্রস্তাবনা

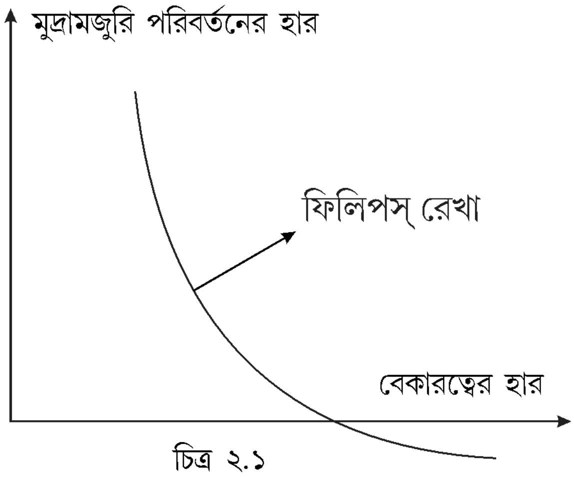
ষাটের দশকের মাঝামাঝি দু'জন অর্থনীতিবিদ এডমান্ড পেলপ্‌স (Edmand Phelps) ও মিলটন ফ্রিডম্যান ভবিষ্যৎবাণী করেন যে, মুদ্রাস্ফীতির হার শুধুমাত্র বেকারত্বের হারের উপর নির্ভর করে না প্রত্যাশিত মুদ্রাস্ফীতির হারের উপর ও নির্ভর করে। পরবর্তী কালে দেখা যায় যে তাদের ভবিষ্যৎবাণী অক্ষরে অক্ষরে মিলেও যায়।

সত্তরের দশকে তেল রপ্তানিকারী OPEC দেশগুলি তেলের দাম অনেকটা বাড়িয়ে দেয়। যেহেতু বেশিরভাগ ধনতান্ত্রিক দেশই তেলের আমদানির ওপর নির্ভরশীল সেহেতু তাদের উৎপাদন ব্যবস্থা বিপর্যস্ত হয়ে পড়ে। উৎপাদন ব্যয় এবং তার ফলে মুদ্রাস্ফীতি প্রভূত পরিমানে বৃদ্ধি পায়। উপরিউক্ত কারণ গুলির জন্য বর্তমানে ফিলিপ্‌স রেখার সমীকরণে মুদ্রাস্ফীতির হারের নিধারক হিসেবে শুধুমাত্র বেকারত্বের হারকেই দেখলে চলবে না, প্রত্যাশিত মুদ্রাস্ফীতির হার ও জোগান বিপযর্য়কেও (supply stock) দেখতে হবে।

বর্তমানে অর্থনীতিবিদরা ফিলিপ্‌স রেখাকে সামগ্রিক জোগান রেখা হিসেবেও ব্যাখ্যা করে থাকেন। মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রনে প্রত্যাশার প্রকৃতির গুরুত্ব অপরিসীম। প্রত্যাশা যদি অতীত নির্ভর হয় তাহলে মুদ্রাস্ফীতিকে কমিয়ে আনতে গেলে তীবরে মন্দার সৃষ্টি হয়। কিন্তু প্রত্যাশা যদি অতীত নির্ভর হয় তাহলে এই অসুবিধার সৃষ্টি হয় না।

2.3 ফিলিপ্‌স রেখা স্বল্পকালীন ও দীর্ঘকালীন

১৯৫৮ সালে ইকনমিকা পত্রিকায় লন্ডন স্কুল অফ ইকনমিকসের অধ্যাপক অ্যালবান উইলিয়াম ফিলিপস্ (A. W. Phillips) একটি প্রবন্ধ লেখেন যেখানে তিনি দেখান যে মুদ্রা মজুরির হারের পরিবর্তন এবং বেকারত্বের হারের মধ্যে একটি বিপরীতমুখী সম্পর্ক (inverse relation) বিদ্যমান। অর্থাৎ একটি কমলে বা বাড়লে অন্যটি বাড়ে বা কমে। তিনি ব্রিটিশ যুক্তরাজ্যের (U.K.) ১৮৫১ থেকে ১৯৫৭ এই সময়কালের পরিসংখ্যান পর্যালোচনা করেই এই সম্পর্কটি আবিষ্কার করেন। সুতরাং বলা চলে যে এই রেখাটি সম্পূর্ণ পরিসংখ্যানভিত্তিক (Statistical); এর পেছনে প্রাথমিক স্তরে কোনো তত্ত্বের কথা ফিলিপ্‌স বলেননি। নিম্নের দ্বিমাত্রিক চিত্রে রেখাটি এইরকম হবে (চিত্র ২.১)



চিত্র ২.১
ফিলিপ্‌স রেখা *(Phillips curve)*

ফিলিপ্‌স লক্ষ্য করেন যে ইংল্যান্ডে যখনই বেকারত্ব কমেছে তখনই মুদ্রামজুরির হার বেড়েছে, এবং যখনই বেকারত্ব বেড়েছে তখনই মুদ্রামজুরির হার কম হয়েছে। এই বিপরীতমুখী সম্পর্কের জন্যই ফিলিপ্‌স রেখার ঢাল ঋণাত্মক। সাংকেতিক চিহ্নে আমরা এই রেখার সমীকরণটিকে এইভাবে লিখতে পারি: $\Delta W_t = f\,(U_t)$

এখানে ΔW= t সময়কালে মুদ্রামজুরির সামান্য পরিবর্তন; U_t = t সময়কালে বেকারত্বের হার এবং f = অপেক্ষকের চিহ্ন বা 'ফাংশান'।

ফিলিপ্‌স রেখার মর্মার্থ হল এই যে, যেহেতু আর্থ-ব্যবস্থায় বেকারত্বের হারের সঙ্গে মুদ্রামজুরি বৃদ্ধির হারের বিপরীতমুখী সংযোগ আছে, সেহেতু কম বেকারত্ব এবং কম হারের মূল্যস্ফীতি একসঙ্গে আশা করা

সংগত নয়। এই দুই চলকের মধ্যে একটি বিনিময়-সম্পর্ক (trade – off) আছে যা বিচার করেই সরকারকে কর্মপন্থা ঠিক করতে হবে।

আগেই বলা হয়েছে যে অধ্যাপক ফিলিপ্স এই রেখার অস্তিত্বের পেছনে কোনো তত্ত্ব আছে, এমন কথা নিজের প্রবন্ধে বলেননি। এর তাত্ত্বিক যুক্তি আমরা পরে পেয়েছি অধ্যাপক আর. জি. লিপসের (R. G. Lipsey) কাছ থেকে। ১৯৬০ সালে লেখা এক প্রবন্ধে তিনি বলেন যে মুদ্রামজুরির হারের পরিবর্তন নির্ভর করে মূলত শ্রমের বাজারে চাহিদার মাত্রাধিক্যের পরিমাণের ওপর। সুতরাং, লিপসের মতে, বেকারত্বের হারকে দেখতে হবে শ্রমের বাজারে চাহিদার (ঋণাত্মক) মাত্রাধিক্যের সূচক হিসাবে। অর্থাৎ বেকারত্বের পরিমাণ বেশি মানেই শ্রমের বাজারে চাহিদার স্বল্পতা; এবং বেকারত্ব কম মানেই শ্রমের চাহিদার আধিক্য। ফিলিপ্স যে-হিসাব করেছেন তাতে দেখা যায়, ইংল্যান্ডের ক্ষেত্রে যদি বেকারত্বের হার ২.৫% থাকে তাহলে দামস্তর সুস্থির থাকবে। বেকারত্বের এই হার বজায় থাকলে মুদ্রামজুরি বছরে ২% হিসেবে বাড়বে, কিন্তু তাতে মূল্যস্ফীতি ঘটবে না এই কারণে যে দেশের উৎপাদনশীলতাও শতকরা ২ হারে বাড়বে। অন্যদেশে এই শতকরা হিসেব স্বাভাবিক কারণে আলাদা হবে।

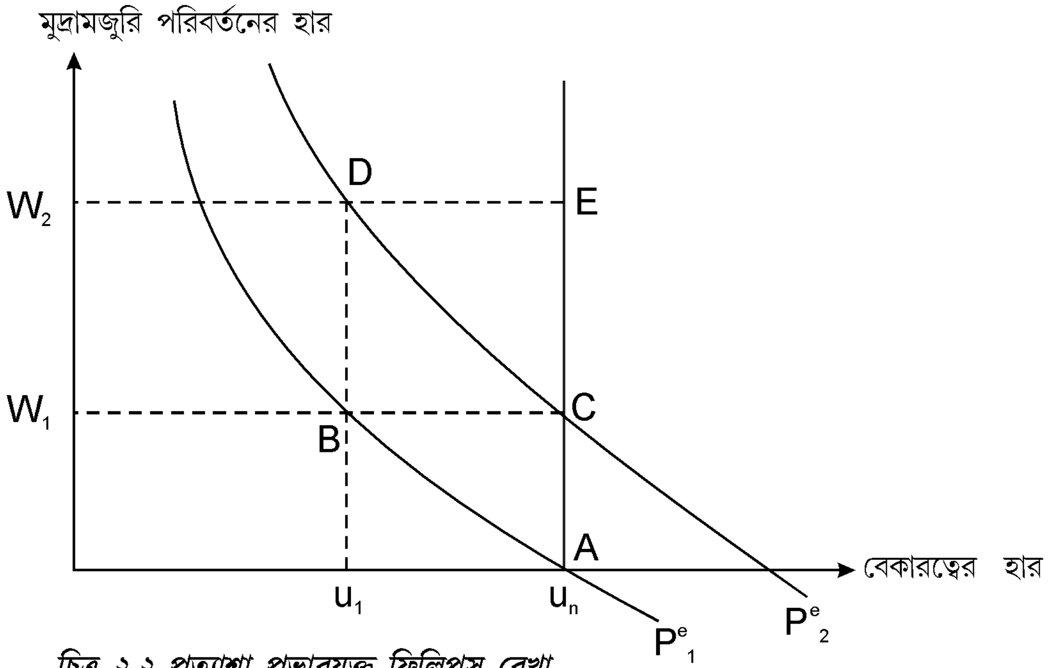
ফিলিপ্স রেখার একটি প্রধান দুর্বলতা হল যে এখানে মুদ্রামজুরির ওপরেই শুধু নজর দেওয়া হয়েছে। কিন্তু সমালোচকদের মতে শ্রমিকেরা প্রকৃত মজুরির (real wage) জন্যই আবেদন-নিবেদন বা আন্দোলন করে, মুদ্রা মজুরির জন্য নয়। সুতরাং এই রেখায় যে বিনিময়-সম্পর্কের কথা বলা হয়েছে তা খাটে শুধু স্বল্পমেয়াদি সম্পর্কের ক্ষেত্রেই। স্বল্পমেয়াদে নানা প্রাতিষ্ঠানিক কারণে মুদ্রামজুরির পরিবর্তন ঘটানো সহজ নয় এবং তা খরচ সাপেক্ষও বটে। তাছাড়া শ্রমিকেরা মুদ্রা বিভ্রমের (money illusion) কবলেও আটকা পড়তে পারে। এই সব কারণে স্বল্পমেয়াদে মুদ্রামজুরির পরিবর্তন একটি গুরুত্বপূর্ণ চলক হতে পারে। কিন্তু দীর্ঘমেয়াদে এসব বাধা কিছুই থাকবে না এবং শ্রমিকেরা শুধু প্রকৃত মজুরির প্রভাব দ্বারাই চালিত হবে। ফলে তথাকথিত বিনিময়-সম্পর্কের কথা আর বলা যাবে না, এবং এর কোনো অস্তিত্বই থাকবে না। সেক্ষেত্রে ফিলিপ্স রেখাটি একটি vertical straight line অর্থাৎ উল্লম্ব সরলরেখায় রূপান্তরিত হবে।

2.4 প্রত্যাশা-প্রভাবযুক্ত ফিলিপ্স রেখা

ওপরের এই সূত্রেই মিলটন ফ্রিডম্যানের Expectations-augmented Phillips curve বা প্রত্যাশা-প্রভাবযুক্ত ফিলিপ্স রেখার ধারণাটি প্রাসঙ্গিক হয়ে পড়ে। ফ্রিডম্যানের বক্তব্য হল যে শ্রমিকেরা তাদের প্রকৃত মজুরির কথাই ভাবে, মুদ্রামজুরির কথা নয়। তাই যদি মূল ফিলিপ্স রেখার সমীকরণে প্রত্যাশিত দাম চলককে সংযুক্ত করি তাহলে ছবিটা পাল্টে যায়। সমীকরণটি তখন এই দাঁড়ায়:

$\Delta W_t = f\,(U_t) + a\Delta P^e_t$ এহ সমীকরণে শুধু একটি নতুন পদ- $a\Delta P^e_t$ - সংযোজিত হয়েছে। ΔP^e_t হচ্ছে t সময়কালে দামস্তরের প্রত্যাশিত বৃদ্ধি এবং a দামস্তরের প্রত্যাশিত বৃদ্ধির একটি গুণাঙ্ক। এই সংযোজনের জন্যই একে augmented Phillips curve বা বর্ধিত আকারের ফিলিপ্স রেখা বলা হচ্ছে। a-র মানকে শূন্য থেকে ১-এর মধ্যে থাকতে হবে। যদি মূল্যস্ফীতি খুবই সামান্য হয় তাহলে মুদ্রামজুরি এবং প্রকৃত মজুরির মধ্যে তফাত করা নিষ্প্রয়োজন। তখন $a = 0$ হবে। অন্যদিকে যদি

দামস্তর বৃদ্ধির প্রত্যাশিত হার খুব বেশি হতে থাকে তাহলে শ্রমিকদের প্রত্যাশার স্থিতিস্থাপকতা বাড়তে থাকবে এবং শেষমেশ a-র চরম মান হবে 1-এর সমান। এর অর্থ হল শ্রমিকদের নিখুঁত ভবিষ্যৎ দৃষ্টি থাকলে তাদের বাড়তি মুদ্রামজুরির চাহিদা এবং দামস্তর বৃদ্ধির হারের মধ্যে সমতা বজায় থাকবে। রেখাচিত্রে এই ঘটনাটি প্রতিফলিত হবে স্বল্পমেয়াদি ফিলিপ্‌স রেখাগুলি ক্রমান্বয়ে ডান দিকে সরে সরে গিয়ে পরিশেষে দীর্ঘমেয়াদে ফিলিপ্‌স রেখাটি অনুভূমিক অক্ষে সেই বিন্দুতে একেবারে উল্লম্ব বা vertical হয়ে যাবে যা স্বাভাবিক বেকারত্বের হার সূচিত করে। এই মতবাদে ধরে নেওয়া হয় যে অর্থ-ব্যবস্থায় পূর্ণনিয়োগ ঘটলেও কিছু শ্রমিক বেকার থাকবে; এই বেকারত্বকেই natural rate of unemployment বা স্বাভাবিক বেকারত্বের হার বলা হয়।



চিত্র ২.২ প্রত্যাশা প্রভাবযুক্ত ফিলিপ্‌স রেখা
(Expectation augmented Phillips curve)

ফ্রিডম্যান তত্ত্বের মূল বক্তব্য হল যে সরকার কিছুতেই, কোনো কৌশলের সাহায্যে, বেকারত্বকে প্রভাবিত করতে পারবে না। সুতরাং মূল ফিলিপ্‌স রেখাতে যে বিনিময় সম্পর্কের কথা বলা হয়েছে বাস্তবে (অন্তত দীর্ঘমেয়াদি বাস্তবে) তার কোনো অস্তিত্ব নেই এবং ফিলিপ্‌স কার্ভ তাই একটি খাড়া রেখা। প্রদত্ত রেখাচিত্রটি (চিত্র 49) এই মতের ব্যাখ্যা বুঝতে সাহায্য করে।

চিত্রে দুটি মাত্র স্বল্পমেয়াদি ফিলিপ্‌স রেখা টানা হয়েছে। প্রথমটি P^e_1 -এর ভিত্তিতে এবং দ্বিতীয়টি P^e_2 -এর ভিত্তিতে টানা হয়েছে। বিভিন্ন প্রত্যাশার ভিত্তিতে এরকম অসংখ্য স্বল্পমেয়াদি ফিলিপ্‌স রেখা টান যায়। মনে করা যাক অর্থব্যবস্থা A বিন্দুতে সমস্থিতিতে আছে। এই বিন্দুতে বেকারত্বের স্বাভাবিক হার U_n। সরকার এই বেকারত্বের হার U_n থেকে U_1 এ কমাতে চাইছে। এর জন্য সরকার সামগ্রিক

চাহিদা বাড়িয়ে বেকারত্ব বাড়িয়ে বেকারত্ব কমানোর চেষ্টা করবে। এখন সামগ্রিক চাহিদা বাড়লে শ্রমের চাহিদাও বাড়বে। কিন্তু বাড়তি শ্রমিক নিয়োগ করতে হলে মুদ্রামজুরির হারও বাড়াতে হবে। সুতরাং চিত্র অনুযায়ী অর্থব্যবস্থা A থেকে B বিন্দুতে সরে যাবে এবং মুদ্রামজুরি বেড়ে W_1 হবে। এখন যদি শ্রমের উৎপাদনশীলতা না-বাড়ে তাহলে মুদ্রামজুরি বৃদ্ধি পাবার দরুন দামস্তরও বাড়বে এবং প্রকৃত মজুরির হার কমে যাবে। শ্রমিকেরা তাদের প্রকৃত মজুরি বজায় রাখতে আগ্রহী বলে তাদের প্রত্যাশার মানও বদলে যাবে। ফল হবে এই যে অর্থব্যবস্থা আবার B থেকে C বিন্দুতে সরে যাবে। এই অবস্থায় সরকার ফের বেকারত্ব কমাতে চাইলে অর্থব্যবস্থা প্রথমে D বিন্দুতে এবং পরে E বিন্দুতে সরে যাবে। এইভাবে প্রকৃত মজুরির হার এবং বেকারত্বের হারের টানাপোড়েনে দীর্ঘমেয়াদি ফিলিপ্‌স রেখাটি A বিন্দুতে উল্লম্ব চেহারা নেবে, অর্থাৎ ACE সরল রেখাটির জন্ম দেবে।

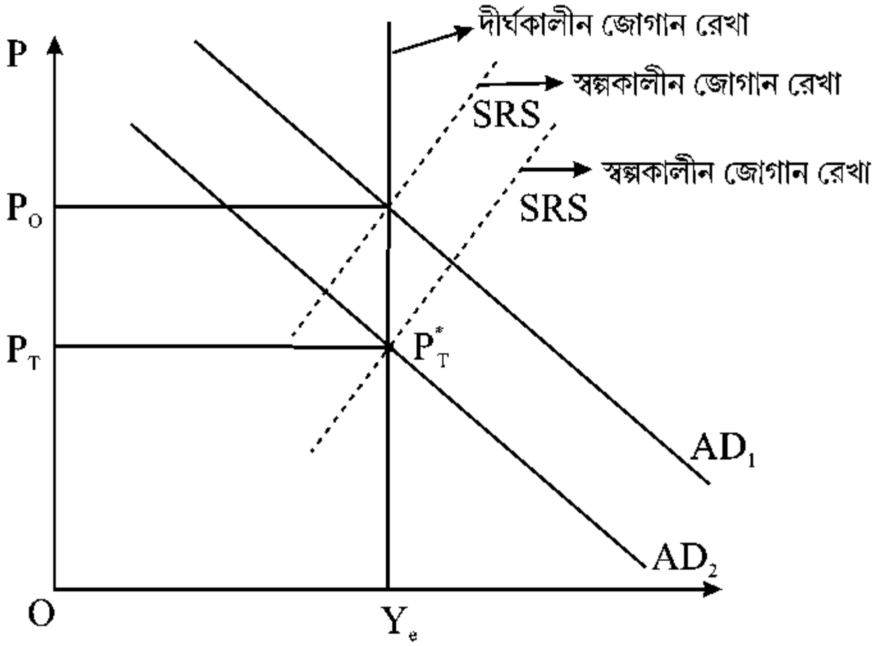
ফিলিপ্‌স রেখা সম্বন্ধে শেষ একটি মন্তব্যের প্রয়োজন। সমষ্টিগত তত্ত্বের দিক থেকে বিচার করলে এর গুরুত্ব অনস্বীকার্য। পল স্যামুয়েলসন এবং রবার্ট সোলো ১৯৬০ সালে আমেরিকান ইকনমিক রিভিউ-তে 'Analytical Aspects of Anti-inflation Policy' এই শিরোনামে একটি প্রবন্ধ প্রকাশ করেন। এই দুই অর্থনীতিবিদ দেখান যে মার্কিনি রাশিতথ্যে ফিলিপ্‌স রেখার অস্তিত্ব অবশ্যই প্রমাণিত। এঁরা আরও বলেন মজুরির জন্য যে খরচ তার সঙ্গে লভ্যাংশের একটি মাত্রা (mark-up) যুক্ত করে যদি দাম প্রধানত নির্ধারিত হয় তাহলে ফিলিপ্‌স সম্পর্ক হবে, বেকারত্ব মূল্যস্ফীতির একটি অপেক্ষক বিশেষ। স্যামুয়েলসন সোলোর এই সিদ্ধান্তের গুরুত্ব হল যে ফিলিপ্‌স সম্পর্ককে এইভাবে দেখলে কেইনসীয় তাত্ত্বিক কাঠামোর যে একটি প্রধান ত্রুটি তা দূর করা সম্ভব। কেইন্‌সীয় তত্ত্বে প্রকৃত চাহিদা কীভাবে সৃষ্টি হয় তার ব্যাখ্যা আছে। কিন্তু সেখানে মুদ্রামজুরি এবং দামকে প্রতিকল্প-বহির্ভূত (exogenous) দুটি চলক হিসাবে গণ্য করা হয়। কিন্তু ফিলিপ্‌স সম্পর্ককে এইভাবে মূল্যস্ফীতির অপেক্ষক হিসাবে দেখলে মুদ্রামজুরি এবং দামকে প্রতিকল্প অন্তর্ভুক্ত (endogenous) দুটি চলক হিসাবে গণ্য করা চলে। এর কারণ হল বেকারত্বকে তখন সহজেই উৎপন্নের পরিমাণ দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায়। কেইন্‌সীয় তত্ত্বে এই উৎপন্ন কীভাবে প্রকৃত চাহিদার দ্বারা নির্ধারিত হয় তার বিস্তারিত ব্যাখ্যা মেলে।

2.5 যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা ও মুদ্রাস্ফীতি

যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশার প্রথম উদ্‌গাতা হল জন মুথ (১৯৬১)। এই যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা বলতে বোঝায় যে ব্যক্তিবর্গ 'বর্তমানের সব প্রাপ্ত তথ্যাদি' ব্যবহার করে তাদের প্রত্যাশা গঠন করে ভবিষ্যতের কাম্য ভবিষ্যৎবাণীকে কাজে লাগিয়ে। "কাম্য ভবিষ্যদবাণী" বলতে বোঝায় যে ব্যক্তিবর্গের ভবিষ্যৎ ঘটনার একটা সম্ভাব্য বন্টন (Probability distribution) তাদের কাছে আছে এবং প্রত্যাশা গঠনের সময় তারা গড় এবং ভেদমান উভয়েই বিবেচনায় মধ্যে আনে। "বর্তমানের সব প্রাপ্ত তথ্যাদি" এ বোঝায় না যে নিখুঁত তথ্যাদি ব্যক্তিবর্গের কাছে আছে কেননা কিছু কিছু তথ্য জনসাধারণের কাছে সুগম নয় এবং কিছু কিছু তত্ত্ব সত্য সত্যই বহু ব্যয়বহুল (অর্থাৎ, এই ধরণের তথ্যের প্রান্তিক ব্যয় তার প্রন্তিক সুবিধার (benifit)-এর চেয়ে বেশি)।

এখন প্রত্যাশা যদি অতীত নির্ভর হয় তবে মুদ্রাস্ফীতিকে কমিয়ে আনতে গেলে তীব্র মন্দার সৃষ্টি হয়। কিন্তু প্রত্যাশা যদি যুক্তি নির্ভর হয় তাহলে এই অসুবিধার সৃষ্টি হয় না। কেন? তার ব্যাখ্যা নীচে দেওয়া হল।

যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশার ক্ষেত্রে অর্থনৈতিক এককেরা (Economic Agent) জানে যে, প্রত্যাশা বাস্তবায়িত না হলে প্রভূত ক্ষতি। সেই কারণে তারা শুধুমাত্র অতীতে অভিজ্ঞতার ভিত্তিতে প্রত্যাশা গঠন করে না। তারা তাদের প্রত্যাশা গঠন করার জন্য সবচেয়ে ভালো যে অর্থনৈতিক পরিকাঠামো রয়েছে তা ব্যবহার করে এবং এই পরিকাঠামোর মধ্যে প্রত্যাশা গঠন করার জন্য যা যা তথ্য প্রয়োজন তা ব্যবহার করে এবং যা যা সংগ্রহ করা সম্ভব তা তারা জোগার করে। উদাহরণস্বরূপ আমরা বলতে পারি যে কারো প্রত্যাশা যদি হয় যুক্তিনির্ভর হয় তাহলে ভবিষ্যতে মুদ্রাস্ফীতির হার সম্পর্কে তার প্রত্যাশা গঠন করার জন্য তার সবচেয়ে ভালো অর্থনৈতিক পরিকাঠামোটি, অর্থাৎ যে পরিকাঠামোটি চিত্রে বর্ণনা করা হয়েছে তা ব্যবহার করে।



চিত্র ২.৩ ঃ মুদ্রাস্ফীতি হ্রাসে যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা

শুধু তাই নয়, এই পরিকাঠামো থেকে ভবিষ্যতে মুদ্রাস্ফীতির হার কীভাবে পরিবর্তিত হবে তা সরকারের ফিসক্যাল ও আর্থিক নীতি, বিনিয়োগকারীদের প্রত্যাশা, ভোক্তাদের রুচি ও পছন্দ ইত্যাদি পরিবর্তনের ওপর নির্ভর করে। সে তখন এই সমস্থ বিষয়গুলি সম্পর্খে যত তথ্য সম্ভব তা সংগ্রহ করে।

প্রত্যাশা যদি এই ধরনের যুক্তিনির্ভর হয় তাহলে দেখা যাবে যে, সরকারকে মুদ্রাস্ফীতি কমিয়ে আনার জন্য কোনো বেগই পেতে হবে না। বিষয়টি বোঝাবার জন্য আমরা আবার P_O থেকে P_T-তে রেখাচিত্রে ফিরে যাই। ধরাযাক যে, সরকার দামস্তরকে কমিয়ে আনার জন্য টাকার জোগানকে এমনভাবে যাতে রেখা সরাসরি দীর্ঘকালীন জোগান রেখাকে P_T-তে ছেদ করে। অর্থনৈতিক একককদের প্রত্যাশা যদি হয় যুক্তিনির্ভর তাহলে তারা এই টাকার জোগানের কমিয়ে দেওয়ার কথা জানবে। এবং এই পরিকাঠামো থেকে তারা এও জানাবে যে, দামস্তর P^*_T-তে এসেই ভারসাম্য অবস্থা লাভ করবে। ফলে আমরা এখন অনায়াসেই বলতে পারি যে মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রনে প্রত্যাশার প্রকৃতির গুরুত্ব অপরিসীম।

2.6 সারসংক্ষেপ

বর্তমানে উন্নত গণতান্ত্রিক দেশগুলির মুদ্রাস্ফীতির আলোচনায় ফিলিপ্‌স রেখা একটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। এই রেখা থেকে আমরা জানতে পারি যে, এই ধরণের অর্থব্যবস্থায় মুদ্রাস্ফীতির হার বেকারত্বের হার, প্রত্যশিত মুদ্রাস্ফীতির হার এবং জোগান বিপর্যয় (Supply stock)-এর ওপর নির্ভরশীল। ফিলিপ্‌স রেখাকে অর্থনীতিতে সামগ্রিক জোগান রেখা হিসেবেও ব্যাখ্যা করা যায়।

মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রনে প্রত্যাশার প্রকৃতির গুরুত্ব অনেক। প্রত্যাশা যদি অতীত নির্ভর (adaptive) হয়। তাহলে মুদ্রাস্ফীতিকে কমিয়ে আনতে গেলে তীব্র মন্দার সৃষ্টি হয়। কিন্তু প্রত্যাশা যদি যুক্তি নির্ভর হয় তাহলে এই অসুবিধার সৃষ্টি হয় না।

2.7 অনুশীলনী

উত্তর ভিত্তিক প্রশ্নঃ

১. ফিলিপ্‌স রেখা কী?

২. বেকারত্বের হার কী?

৩. প্রত্যাশা-প্রভাবযুক্ত-ফিলিপ্‌স রেখা কী?

৪. যুক্তি-নির্ভর প্রত্যাশা কী?

৫. স্বাভাবিক বেকারত্বের হার বলতে কী বোঝ?

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্নঃ

১. চিত্রসহ প্রত্যাশা-প্রভাবযুক্ত ফিলিপ্‌স রেখা ব্যাখ্যা কর।

২. স্বল্পকালীন ও দীর্ঘকালীন ফিলিপ্‌স রেখা ব্যাখ্যা কর।

দীর্ঘ উত্তর ভিত্তিক প্রশ্নঃ

১. ফিলিপ্‌স রেখা ও একটি প্রধান দুর্বলতা উল্লেখ করে, স্বল্পকালীন ও দীর্ঘকালীন ফিলিপ্‌স রেখা ব্যাখ্যা কর। এ প্রসঙ্গে পল্‌ স্যামুয়েলসন ও রবার্ট সোলোর মন্তব্য ব্যাখ্যা কর।

২. যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা কাকে বলে? মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রনে যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশার গুরুত্ব অপরিসীম কেন?

2.8 গ্রন্থপঞ্জী

Edgmand, M.R (1985) *Macroeconomics:Theory and Policy*

Gupta, G.S. (2004) *Macroeconomics:Theory and Applications*
Tata McgrawHill

একক 3 ❑ সমষ্টিকেন্দ্রিক অর্থবিদ্যায় প্রত্যাশাতত্ত্বের বিশ্লেষণ

গঠন

3.1 উদ্দেশ্য

এই এককের বিষয়বস্তু পাঠ করলে জানা যাবে

- অতীত নির্ভর বা অভিজ্ঞতা ভিত্তিক প্রত্যাশা ও যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান
- হলের যুক্তিনির্ভর তত্ত্ব, এবং
- সরকারি কর্মনীতির কাঙ্খিত ফললাভে ব্যর্থতা সম্পর্কিত বিতর্ক

3.2 প্রস্তাবনা

প্রত্যাশা সম্পর্কে ধারণা তৈরি করার ক্ষেত্রে কালের গুরুত্ব অপরিসীম। আমাদের প্রত্যাশা পরিবর্তিত হতে সময় লাগে। যে সময়ের মধ্যে আমাদের প্রত্যাশা পরিবর্তিত হয় না সেই সময়টুকুকে বলা হয় স্বল্প কাল। আবার প্রত্যাশা বাস্তবে পরিপূর্ণ হতে যে সময় লাগে তাকে বলে দীর্ঘকাল। স্বল্পকাল ও দীর্ঘকালের মধ্যের সময়টিই মধ্যবর্তীকাল। এই মধ্যবর্তীকালে প্রত্যাশা পূর্ণ হয় না। বাস্তব ও প্রত্যাশার মধ্যে একটি ব্যবধান থাকে এবং তার ফলে প্রত্যাশা পরিবর্তিত হতে থাকে। এই একককে আমরা প্রত্যাশা তত্ত্ব ও তার সাথে ফিলিপস্ রেখার সমীকরণ আলোচনা করব।

আর যে বিষয়টির প্রতি দৃষ্টি আকর্ষণ করা প্রয়োজন তা হল প্রত্যাশা (expectation)। মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রণে প্রত্যাশার গুরুত্ব অপরিসীম। প্রত্যাশা দুই ধরনের হয়, অতীতনির্ভর (adaptive) ও যুক্তিনির্ভর (rational)। জাতীয় আয় ও মুদ্রাস্ফীতি বিভিন্ন বাহ্যিক আঘাতের (exogenous shocks) ফলে

সময়ের মধ্যে দিয়ে কীভাবে পরিবর্তিত হবে, মুদ্রাস্ফীতি নিয়ন্ত্রণের জন্য বা জাতীয় আয় ও শ্রমনিয়োগ বাড়ানোর জন্য সরকারি নীতি কি প্রকারের হবে তা খুব বেশিরকম ভাবে প্রত্যাশার প্রকৃতির উপর নির্ভর করবে। এই সব কিছুই এখানে পরিষ্কার হবে।

এখানে আমরা দেখাব কীভাবে সামগ্রিক চাহিদা ও জোগানের ঘাত-প্রতিঘাতে স্বল্পকালে, মধ্যবর্তীকালে ও দীর্ঘকালে মুদ্রাস্ফীতি ও জাতীয় আয় নির্ধারিত হয়। এই আলোচনা করতে হলে প্রথমেই আমাদের প্রত্যাশা কি প্রকৃতির তা নির্দিষ্ট করে দিতে হবে। প্রথমে আমরা ধরে নেব যে প্রত্যাশা অতীতনির্ভর, অর্থাৎ ভবিষ্যৎ সম্বন্ধে আমাদের প্রত্যাশা অতীত অভিজ্ঞতার উপর ভিত্তি করে গঠিত। আরও নির্দিষ্ট করে বললে বলতে হয় যে, এক্ষেত্রে আমরা ধরে নিচ্ছি যে, প্রত্যাশিত মুদ্রাস্ফীতির হার অতীতের মুদ্রাস্ফীতির হার সমুদয়ের কোনো প্রকারের গড়। আলোচনার সুবিধার জন্য আমরা একটি অত্যন্ত সরল অনুমান করব। আমরা ধরে নেব যে, যে কোনো কালের (period-এর) প্রত্যাশিত দামস্তর তার ঠিক আগের কালের দামস্তরের সঙ্গে সমান। অর্থাৎ $P^e_t=P_{t-1}$। এখানে $P^e_t \equiv P_t$ কালের প্রত্যাশিত দামস্তর এবং $P_{t-1} \equiv P_t$ কালের ঠিক আগের কালের অর্থাৎ (t-1) কালের আসল (actual) দামস্তর। এ ছাড়া আমরা ধরে নেব যে, একটি কাল স্বল্পকালের সঙ্গে সমান।

3.3 অতীত নির্ভর-প্রত্যশা (বা অভিজ্ঞতাভিত্তিক প্রত্যাশা)

অতীতনির্ভর প্রত্যাশা হল একটি অনুমানিত প্রক্রিয়া যার মাধ্যমে মানুষ অতীতে যা ঘটেছে তার ওপর ভিত্তি করে ভবিষ্যতে কী ঘটবে সে সম্পর্কে তাদের প্রত্যাশা তৈরি করে। উদাহরণস্বরূপ, যদি লোকেরা ভবিষ্যতে মুদ্রাস্ফীতির হারের একটি প্রত্যাশা তৈরি করতে চায়, তারা কিছু ধারাবাহিকতা অনুমান করার জন্য অতীতের মুদ্রাস্ফীতির হার উল্লেখ করতে পারে এবং তারা যত বেশি বছর বিবেচনা করবে তত বেশি সঠিক প্রত্যাশা অর্জন করতে পারে। অভিজ্ঞতা ভিত্তিক বা অতীত নির্ভর প্রত্যাশা তত্ত্বের মূল বক্তব্য হলো যে লোকের প্রত্যাশা গঠন কোন চলকের বর্তমান মূল্য কী শুধু সেই তথ্যের উপর নির্ভর করে না, তা নির্ভর করে অতীতের মূল্যগুলির তৎকালীন প্রত্যাশিত মূল্যের ওপরও। অতীত মূল্যগুলির খাপ খাইয়েই বর্তমান মূল্যকে নির্ধারণ করা হয়। সর্বপ্রথম এটি ব্যবহার করেন ফিলিপ কেগান ১৯৫৬ সালে তাঁর একটি প্রবন্ধে যার নাম The Monetary Dynamics of Hyperinflation.

অতীতনির্ভর প্রত্যাশার একটি সহজ সংস্করণ নিম্নলিখিত সমীকরণে বলা হয়েছে-

$$P^e=P_{-1}+\lambda(P-P^e_{-1}) \qquad [৩.১]$$

যেখানে λ 0 আর 1 এর মধ্যে । λ $(P-P_{e-1})$ টিকে বলা হয় আংশিক সমন্বয় ত্রুটি (Partial adjustment error)

সমীকরণ [৩.১] বলতে চাইছে যে ভবিষ্যতের মুদ্রাস্ফীতি কি হতে পারে বলে মানুষ যে প্রত্যাশা করে তা নির্ভর করে t কালের আগের কালের অর্থাৎ (t-1) কালের মুদ্রাস্ফীতির হারের ওপর ও আংশিক সমন্বয় ত্রুটির উপর যেটি নির্ভর করে P এর ওপর-যা হল t কালের মুদ্রাস্ফীতির হার ও P^e_{-1}এর ওপর যা কিনা t কালের যে মুদ্রাস্ফীতির হার (t-1) কালে প্রত্যাশিত করা হয়েছিল।

এই পদ্ধতিতে প্রত্যাশা গঠনে কিছু ত্রুটি আছে তবু অর্থনীতিবিদরা এটি ব্যবহার করেন। তবে পরবর্তীকালে যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা গঠন পদ্ধতিটি (rational expectation) অনেক বেশি জোরালো পদ্ধতি। এখন আসছি সে কথায়

3.4 যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা

যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা তত্ত্ব এই ধরনের প্রত্যাশাকে ভবিষ্যতের সর্বোত্তম অনুমান (অনুকূল পূর্বাভাস) হিসাবে সংজ্ঞায়িত করে যা সমস্ত উপলব্ধ তথ্য ব্যবহার করে। এইভাবে, এটা অনুমান করা হয় যে যে ফলাফলগুলি পূর্বাভাস করা হচ্ছে যা বাজারের ভারসাম্যের ফলাফল থেকে পদ্ধতিগতভাবে আলাদা নয়।

ফলস্বরূপ, যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশাগুলি ভারসাম্যের ফলাফল থেকে পদ্ধতিগতভাবে বা অনুমানযোগ্যভাবে আলাদা হয় না। অর্থাৎ, এটি অনুমান করে যে ভবিষ্যতের পূর্বাভাস দেওয়ার সময় লোকেরা পদ্ধতিগত ত্রুটি করে না এবং নিখুঁত দূরদর্শিতা থেকে বিচ্যুতিগুলি খুবই নগণ্য। (Rational expectation means that individuals form their expectationals by making an optimal forecast of the future using all currently available information)। যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশার একটি সহজ সমীকরণ হল:

$P= P^{*}+ \varepsilon$

যেখানে

P^{*} হল যুক্তি নির্ভর প্রত্যাশা

ε হল এলোমেলো (বা যদৃচ্ছ) ত্রুটি

যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশার ক্ষেত্রে অর্থনৈতিক এককেরা জানে যে প্রত্যাশা বাস্তবায়িত না হলে প্রভূত ক্ষতি সেই কারণে তারা শুধুমাত্র অতীত অভিজ্ঞতার ভিত্তিতে প্রত্যাশা গঠন করে না। তারা তাদের প্রত্যাশা গঠনের জন্য যা যা তথ্য প্রয়োজন তা সংগ্রহ করে এবং শুধুই অতীতে কী বলা হয়েছে তাও সীমিত থাকে না। কিছু এলোমেলো বিচ্যুতি ঘটে -যা প্রত্যাশার ক্ষেত্রে স্বাভাবিক। কিন্তু তথ্যের ভিত্তিতে সেগুলিকে আয়ত্তের মধ্যেই রাখে অর্থনৈতিক এককেরা। যুক্তিভিত্তিক প্রত্যাশা কীভাবে সমষ্টিগত অর্থনীতিতে নিজের ঠাঁই পাকা করে নিয়েছে তা এখন আলোচনা করা হবে।

ভবিষ্যৎ সম্পর্কে প্রত্যাশা গঠনের তত্ত্ব ১৯৬১ সালে জন মুথ (John Muth) এই মতবাদ তুলে ধরেন বিখ্যাত Econometrica পত্রিকায় শিকাগো বিশ্ববিদ্যালয়ের নোবেল পুরস্কার বিজয়ী অধ্যাপক রবার্ট লুকাস এই তথ্যকে প্রসারিত করে আরো সুপ্রতিষ্ঠা করেন।

ভবিষ্যৎ সম্পর্কে প্রত্যাশা গঠনের ব্যাখ্যা দেওয়া সত্যিই দুরূহ। অধ্যাপক কেইনস এই প্রত্যাশা গঠনের গুরুত্ব সম্পর্কে আমাদের প্রথমে সচেতন করেন তিনি এ প্রসঙ্গে কোন ঠিকঠাক তত্ত্ব প্রতিষ্ঠা করতে পারেণনি; তিনি শুধু উদ্যোগকারীদের জৈবিক উদ্যম এই প্রত্যাশাকে নির্ধারণ করেন বলে মত প্রকাশ করেন। এই ভাবে তিনি সমস্যাটিকে এড়িয়ে গেলেন। এই দুর্বলতা দূর করতে চেয়ে মুদ্রাপ্রধান্যবাদী

অর্থনীতিবিদরা অভিজ্ঞতাভিত্তিক প্রত্যাশা গঠনের তত্ত্ব প্রতিষ্ঠিত করতে চেষ্টা করেছেন। এ সম্পর্কে কীভাবে তা প্রতিষ্ঠা করতে চেয়েছেন তা এই একক-এর ৩.৫ এ লিপিবদ্ধ করা হয়েছে এর ত্রুটিও বলা হয়েছে যেমন শুধু অতীতের অভিজ্ঞতার উপর নির্ভর করলে এমন হতে পারে যে সিদ্ধান্ত গ্রহণের এই পদ্ধতিটিতে নিয়মানুগ ভ্রম (systemic error) দেখা দিতে পারে।

যেহেতু সমস্ত তথ্যই যুক্তির সাহায্যে যাচাই করা হয়, সেহেতু এই যুক্তিভিত্তিক প্রত্যাশা গঠনের তত্ত্বে কোন নিয়মানুগ ভ্রম থাকে না। এই তত্ত্বের মূল বক্তব্যগুলি হল যে নির্ভুল ধারণা গঠন করার জন্য মানুষ তার কাছে উপলব্ধ সমস্ত তথ্য যথাযথ বিশ্লেষণ ও ব্যবহার করার পর তবেই এই প্রত্যাশা গঠন করে থাকে। অন্যভাবে বলতে গেলে প্রত্যাশা এবং নিখুঁত দূরদর্শিতা এই দুই এর মধ্যে তখন আর কোনো পার্থক্য থাকে না।

যুক্তিভিত্তিক প্রত্যাশা গঠন ও দক্ষ বাজার ব্যবস্থা-এই দুই খুঁটির ওপর নির্ভর দিয়ে সাম্প্রতিককালে নব্য-ধ্রুপদি সমষ্টিকেন্দ্রিক অর্থবিদ্যা প্রতিষ্ঠা লাভ করেছে। এই মতবাদের প্রবক্তরা অর্থাৎ মুথ,সার্জেন্ট মনে করেন যে যুক্তিভিত্তিক প্রত্যাশা গঠনের ভিত্তিতে যদি অর্থব্যবস্থা চালিত হতে থাকে, তাহলে সরকারি নীতিই অর্থব্যবস্থার গতিকে প্রভাবিত করতে পারে না। সেক্ষেত্রে স্বল্প সময়েই হোক বা দীর্ঘকালীন বিচারেই হোক, ফিলিপ্‌স রেখাটি সর্বদাই উলম্ব হয়ে যায়। সরকারি নীতির মাধ্যমে অর্থনৈতিক ব্যবস্থাকে প্রভাবিত করার কোন সুযোগই তখন থাকেনা, কারণ সরকারি নীতির সম্ভাব্য প্রভাব সব মানুষের প্রত্যাশার মধ্যেই অন্তর্ভুক্ত হয়ে যায়, যাকে বলা হয় নীতি সংক্রান্ত ব্যর্থতার উপপাদ্য।

যাহোক যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা তত্ত্বের তিনটি উল্লেখযোগ্য ফলিতার্থ সমষ্টিরকেন্দ্রিক প্রতিকল্পে অন্তর্ভুক্ত: প্রথমত, অর্থনীতি-গত মডেলগুলি বিকল্প আর্থিক নীতি সমূহের স্বরূপ উদ্ভাবনে খুব বেশি কার্যকর নয়। যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা তত্ত্বের প্রবক্তাদের বক্তব্য হলো যে এই অর্থমিতিক মডেলগুলি যথেষ্ট সীমাবদ্ধ, কেননা যখন কোন নয়া নীতির প্রবর্তন হয় তখন এই মডেলগুলির প্যারামিটারগুলিও পরিবর্তিত হয়।

এই প্রত্যাশা তত্ত্বের দ্বিতীয় ফলিতার্থ হলো এই যে মুদ্রাস্ফীতি ও বেকারত্বের মধ্যে কোন বিনিময় সম্পর্ক নেই। এই তত্ত্বের প্রবক্তারা এ যুক্তিও দেয় যে স্বল্পকালে মুদ্রাস্ফীতি ও বেকারত্বের মধ্যে কোনো সম্পর্ক থাকে না।

তৃতীয় ফলিতার্থ (যা দ্বিতীয়টির সঙ্গে অঙ্গাঙ্গিভাবে জড়িত) হল এই যে বিচার-বিবেচনা সম্পর্কিত মুদ্রানীতি ও রাজকোষ নীতিকে অর্থনীতির স্থায়িত্ব নির্ধারণে ব্যবহার করতে পারা যায় না

3.5 হলের যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা তত্ত্বের বর্ণনা

যুক্তিনির্ভর তত্ত্বের প্রতিকল্পটি প্রথমে জন মুথ এবং পরে টমাস সার্জেন্টের হাত ধরে বিবর্তিত হয়েছে। যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা হল আসল আধার (basic element) যাকে কেন্দ্র করে অনেক উল্লেখযোগ্য তত্ত্বের উদ্ভব হয়েছে যার মধ্যে হলের random walk বা যদৃচ্ছ-বিচরণ প্রতিকল্পটি একটি বিশেষ জায়গা করে নিয়েছে যার মোদ্দাকথা নিম্নে বর্ণিত হলো।

পারতপক্ষে, বর্তমান আয় বর্তমান ভোগের একটি নিদের্শক, যদিও কোনো কোনো তত্ত্বে এটা অতীত আয় অথবা প্রত্যশিত ভবিষ্যৎ আয়ের ওপরও নির্ভর করে। যেখানে জীবন-পর্যায় তত্ত্ব এবং স্থায়ী আয়

তত্ত্ব যথেষ্ট আর্কষনীয় কেননা এই দুই তত্ত্ব সময়ের পেক্ষিতে ভোগ ব্যয়ের মসৃনতার ওপর জোর দেয়, অন্য দিকে পরম আয় তত্ত্বও যথেষ্ট কার্যকরী কেননা এটি বর্তমান আয়ের সঙ্গে বর্তমান ভোগের সঙ্গে সংবেদনশীলতার ওপর গুরুত্ব আরোপ করে। কিন্তু এই তিনটি তত্ত্বই অনিশ্চয়তাকে উপেক্ষা করে, যা কিনা জীবন সত্য (fact of life)।

ভোগ তত্ত্বে অনিশ্চয়তাকে প্রবেশ করালেই আমরা হলের ভোগতত্ত্বকে পাই যে ১৯৭৮ সালের ডিসেম্বর মাসে 'জার্নাল অব্ পলিটিক্যাল ইকোনমি'তে প্রকাশিত হয়েছিল'। এটিই হল জীবল-পর্যায় উপতত্ত্ব এবং স্থায়ী আয় প্রতিকল্পের আধুনিক রূপ, যেখানে আয় অনিশ্চয়তা এবং ভোগ ব্যয়ের পরিবর্তনের মধ্যে যে সম্পর্ক (link) আছে তার ওপর গুরুত্ব আরোপ করে। এখানে ভোগব্যয় থেকে সব বছরের জন্য উপভোগ সর্বধিকরণের কথা বলা হয়, জীবন পর্যায় আয়ের বাধ্যবাধকতার মধ্যে এবং এটি যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশাকে প্রত্যাশিত ভবিষ্যৎ আয়কে উপস্থাপিত করে ব্যবহার করে। এটাই হলের যদৃচ্ছ-বিচরণ মডেল যেখানে পরবর্তী বছরের ভোগব্যয় বর্তমান বছরের ভোগব্যয় একটি যদৃচ্ছ টার্ম-এর সমান হয়। এটি ধনাত্মক মূল্যযুক্ত হতে পারে আবার ঋনাত্মক মূল্যযুক্তও হতে পারে।

বলাবাহুল্য রবার্ট হল ১৯৭৮ সালে এই প্রবন্ধে ভোগের পরিবর্তন (যা আগে থেকে কত হবে বলা যাবে না) এবং আয় অনিশ্চয়তার মধ্যে একটি সম্পর্ক বিশ্লেষণ করেন। ধারণাটা এইরূপ যে আয়ের অপ্রত্যাশিত পরিবর্তনসমূহের জন্যই ভোগের উদ্ভব হয়। যদি আয়ের কোন অপ্রত্যাশিত পরিবর্তন না থাকে তবে Ct=Ct-1 হবে। হল যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা প্রয়োগ করেছিলেন এবং প্রমাণ করেছেন যে ভোগ যদৃচ্ছ বিচরণকে (random walk) অনুসরণ করে। তিনি Euler-এর সমীকরণ ব্যবহার করেছিলেন ভোগকে model করার জন্য।

$$C_{t-1} = E\,(C_{t-1}) + \text{Surprise}$$

$C_{t-1} = C_t + \varepsilon$ (যদৃষ্ট বিচরণ মডেল বা র‍্যানডম ওয়াক মডেল)

ওপরের সমীকরণের ওপর ভিত্তি করে, বর্তমানে ভোগের স্তর যে ভবিষ্যৎ ভোগের এক ভালো প্রাককলন (good entimator), একথা স্পষ্ট ভাবেই বলা যায়।

3.6 সরকারি কর্মনীতির কাঙ্ক্ষিত ফললাভে ব্যর্থতার বিতর্ক

সরকারী কর্মনীতির ব্যর্থতা-সম্পর্কিত উপপাদ্যে বলা হয় যে যদি দাম সমূহ ও মজুরি সম্পূর্ণভাবে নমনীয় হয় এবং যদি জনসাধারণের প্রত্যাশা যুক্তিনির্ভর হয়, তাহলে সামগ্রিক চাহিদাকে বাড়ানোর জন্য সরকারি যে-কোনো কর্মসূচিই উৎপন্ন ও শ্রম নিয়োগের ওপর কোন প্রকৃত প্রভাব ফেলতে পারবে না-সরকারি নীতি অকেজো (বা ineffective) হয়ে যাবে। অবশ্য জনসাধারণ যদি সঠিকভাবে সরকারি কর্মপন্থাগুলির আগে থাকতে না করতে পারে, সরকারী কর্মপন্থাগুলি যদি অপ্রত্যাশিত হয়, তাহলে সরকারি নীতির প্রকৃত প্রভাব সামগ্রিক চাহিদার ওপর বর্তাবে-কর্মনীতির উদ্দেশ্য ব্যাহত হবে না। এই উপপাদ্যটি নয়া ধ্রুপদি অর্থতত্ত্বের একটি মৌলিক সিদ্ধান্ত। এ প্রসঙ্গেঁ বলা চলে যে সরকারি অর্থনৈতিক রণকৌশল বোঝার ত্রুটি থাকলে সাময়িকভাবে জনসাধারণ ঠকতে পারে। কিন্তু অচিরেই এই ত্রুটি তারা

দূর করতে পারে। লুকাস তত্ত্বের একটি বলিষ্ঠ উপপাদ্য হল যে-কোনো সরকারি কর্মনীতিতেই কাঙ্ক্ষিত ফল লাভের ব্যর্থতা দেখা যায়।

লুকাসের আর একটি তাৎপর্যপূর্ণ সিদ্ধান্ত হলো যে সরকারি কর্মপন্থার ফলাফল পরিমাপ করার জন্য যে সমস্ত সমষ্টিকেন্দ্রিক প্রতিকল্প চালু আছে তা নির্ভরযোগ্য নয়। সরকারি কোনো একটি নীতি অর্থ-ব্যবস্থায় কী প্রভাব ফেলবে সঠিকভাবে তা ভবিষ্যৎবাণী করা একেবারেই অসম্ভব। জনসাধারণের প্রত্যাশার সঙ্গে সরকারি নীতি সঙ্গতি না থাকলে ভবিষ্যৎবাণী সর্বদাই ভুল হবে। গতানুগতিক প্রতিকল্পগুলি এই কারণেই ব্যবহারের অযোগ্য। লুকাসের এই মন্তব্য অর্থশাস্ত্রে 'Lucas Critique' নামে খ্যাত।

3.7 সংক্ষিপ্তসার

জন মেনার্ড কেইন্‌স প্রত্যাশা গঠনের গুরুত্ব সম্পর্কে আমাদের সচেতন করলেও তিনি এ বিষয়ে কোনো সুদৃঢ় তত্ত্ব প্রতিষ্ঠা করতে পারেননি। এই দুর্বলতা দূর করতে চেয়ে emmonitarists-রা বা মুদ্রা প্রাধান্য বাদী অর্থনীতিবিদরা অভিজ্ঞতাভিত্তিক প্রত্যাশা গঠনের তত্ত্ব প্রতিষ্টা করতে চেষ্টা করেছেন। এই তত্ত্বে নিয়মানুগ ভ্রম (systematic error) ছাড়াও আর অনেক ক্রটি আছে, যেটি বহুলাংশে দূর হয়েছে যখন অর্থনৈতিক জগতে মুথ, ওয়ালস্‌, সার্জেন্ট ও হল এর হাত ধরে যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা তত্ত্ব হাজির হল।

যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা ক্ষেত্রে অর্থনৈতিক এককেরা জানে যে প্রত্যাশা বাস্তবায়িত না হলে প্রভূত ক্ষতি। সেই কারণে তারা অতীত অভিজ্ঞতার ভিত্তিতে প্রত্যাশা গঠন করে না। তারা তাদের প্রত্যাশা গঠন করার জন্য সবচেয়ে ভালো যে অর্থনৈতিক পরিকাঠামো রয়েছে তা ব্যবহার করে এবং এই পরিকাঠামো থেকে প্রত্যাশা গঠন করার জন্য যা যা তথ্য প্রয়োজন এবং সংগ্রহ করা সম্ভব তা তারা জোগাড় করে। উদাহরণস্বরূপ আমরা বলতে পারি যে কারুর প্রত্যাশা যদি হয় যুক্তিনির্ভর তাহলে ভবিষ্যতে মুদ্রাস্ফীতির হার সম্পর্কে তার প্রত্যাশা গঠন করার জন্য সবচেয়ে ভালো অর্থনৈতিক পরিকাঠামোটিকে ব্যবহার করবেন। সে প্রত্যাশা যদি যুক্তিনির্ভর হয় তাহলে লক্ষ্য করা যাবে মুদ্রাস্ফীতিকে সরকারকে কমিয়ে আনার জন্য কোনই বেগ পেতে হবে না।

3.8 অনুশীলনী

উত্তর ভিত্তিক প্রশ্ন-

১. অতীত নির্ভর প্রত্যাশা কী?

২. যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা কী?

৩. লুকাসের সমালোচনা বা (Lucas Critique) কী?

৪. প্রত্যাশা কত প্রকারের?

৫. সরকারী নীতি সংক্রান্ত ব্যর্থতার উপপাদ্য বলতে কী বোঝায়?

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন-

১. হলের যুক্তিনির্ভর তত্ত্বের বর্ণনা দাও।

২. যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশাতত্ত্বের তিনটি ফলিতার্থ আলোচনা কর?

দীর্ঘ উত্তর ভিত্তিক প্রশ্ন-

১. অতীতনির্ভর ও যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশার তুলনামূলক আলোচনা কর।

২. সরকারি কর্মনীতির অকার্যকরতা বির্তকের আলোচনা বিশদভাবে কর।

৩. যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা কী? এই যুক্তিনির্ভর প্রত্যাশা কেন অর্থনীতি জগতে আলোড়ন সৃষ্টি করেছে

3.9 গ্রন্থপঞ্জী

Barro, R.J. (1976). Rational expectations and the role of monetary policy. *Journal of Monetary economics,* 2(1),1-32.

Hall, R.E. (1978). Stochastic Implications of the life cycle- parmanent scheme Hypothesis. *Journal, Political economy* 86, 971-987.

Lucas, R.J. (1976) 'Econometric Polilcy evaluation: A critique' Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 1 (1),pp 19-46.

Mankiw, N.G. (2020). *Intermediate Macronomics.* New Delhi: Cengage Learning.

Mulhiern, Chris and Vane, Howard R (2011). *Economics for business.*

Muller-Kademann. C. (2018). The Lucas Critique. *Economic Thought,* 7(2), 54-62.

একক 4 ❑ সমষ্টিগত মুক্ত অর্থনীতিতে মুদ্রাবিনিময় ব্যবস্থার ধারণা এবং প্রয়োগ

গঠন

4.1 উদ্দেশ্য

এই এককের বিষয়বস্তু পাঠ করলে জানা যাবে:

- মুদ্রা বিনিময় হারের ব্যবস্থার মধ্যে যে সব সরঞ্জাম আছে, যেমন স্থির মুদ্রাবিনিময় হার ও নমনীয় মুদ্রাবিনিময় হার, আপাত কার্যকরী বিনিময় হার ও কার্যকরী আসল বিনিময় হার, তৎসহ
- চলতি বাজার এবং আগাম (ফটকা) বাজার; এবং
- বাণিজ্য উন্মুক্ততার পরিমান কীভাবে করা হয়

4.2 প্রস্তাবনা

ধরা যাক, ভারতে বসবাসকারী কুমুদ বিদেশে ছুটি কাটাতে যাবে, তাহলে তাকে তার টাকাকে অন্য মুদ্রায় পরিবর্তিত করতে হবে। তার টাকার বিনিময়ে সে যে পরিমান বৈদেশিক মুদ্রা পাবে তা নির্ভর করে বিনিময় হারের উপর। কখনও কখনও সে অনুভব করতে পারবে যে সে তার টাকার বিনিময়ে প্রচুর অর্থ পেয়েছে; অন্য সময়, সে অনুভব করতে পারবে যে সে যে অর্থ পেয়েছে, তা খুব বেশি নয়। বিনিময় হার মান বা মূল্য স্পষ্টতই পর্যটকের কাছে গুরুত্বপূর্ণ এবং এটি ভারতীয় ও অন্যান্য অর্থনীতির একটি গুরুত্বপূর্ণ দিকও বটে। এটি বিদিশে পণ্য ক্রয় ও বিক্রয় কোনো ফার্মের জন্যও গুরুত্বপূর্ণ। ভারত এখন একটি উন্মুক্ত অর্থনীতি, যার মানে রপ্তানি ও আমদানির একটি উচ্চ অনুপাত তাঁর রয়েছে এবং সেই বাণিজ্য অর্থনীতি নিকট খুবই তাৎপর্যপূর্ণ এবং বিনিময় হারের পরিবর্তন কর্মনিয়োগ, দাম এবং প্রবৃদ্ধির ওপর এক গুরুত্বপূর্ণ অভিঘাত ফেলে।

এখানে জানার বিষয় এই যে, দুটি দেশের প্রচলিত মুদ্রার পারস্পরিক পরিবর্তনের হারই হল মুদ্রা বিনিময়, যাকে দ্বিপাক্ষীক আপাত মুদ্রাবিনিময় হার বা (Bilateral nominal exchange rate ও) বলা যায়। উদাহরণস্বরুপ যদি মার্কিনি ডলার কিনতে ভারতীয় মুদ্রায় ৯০ টাকা দিতে হয়। তাহলে উভয় দেশের মুদ্রা বিনিময় হার হবে Rs ৯০ = $১ (এক ডলার)।

একটি অন্যধরনের মতবাদও চালু আছে। এই মতবাদ অনুযায়ী বিনিময় হারকে একটি দাম হিসেবে ধরা হয়। পরিবর্তে বিনিময় হারকে দুটি দেশের প্রচলিত মুদ্রার আপেক্ষিক দাম (relative price) হিসেবে দেখতে হবে।

নানা কারণে কোনো দেশের মুদ্রা বিনিময় হারের মূল্য বা মান অত্যন্ত গুকুত্বপূর্ণ। উদাহরণস্বরুপ বলা যায় যে মুদ্রা বিনিময় আপেক্ষিক দামকে প্রভাবান্বিত করে। জাপান থেকে আমদানি করা মোটরগাড়ী আমেরিকার ডলার দাম ইয়েন-এর দামের উপরই শুধু নির্ভর করবে না, বিনিময় হারের মূল্যের ওপরও নির্ভর করবে।

মুদ্রাবিনিময় হার অন্য একটি কারণে গুরুত্বপূর্ণ কারণ মুদ্রা বিনিময় হার বৈদেশিক ধার (loans)-এর 'সার্ভিসিং ব্যয়' কে প্রভাবান্বিত করে। যদি জাপানি কারেন্সি ইয়েন (Yen)-এর তুলনায় মার্কিনি ডলারের মূল্য কমে যায় তবে ইয়েন -এর মার্কিনি ধার গ্রহণকারীরা বেশি বেশি মার্কিনি ডলার পাবে তাদের ধার শোধ করার জন্য, যা ইয়েন এর সাপেক্ষে পরিমাপ করা যাবে।

4.3 মুদ্রাবিনিময় হার ব্যবস্থা

4.3.1 স্থির মুদ্রাবিনিময় হার

এটি হল বৈদেশিক মুদ্রাবিনিময় হার যা কেন্দ্রীয় ব্যাঙ্ক একটি বিশেষ মানে বেঁধে দেয়। মুদ্রা বিনিময় হারকে স্থির রাখার জন্য কেন্দ্রীয় ব্যাঙ্ক একটি পূর্বনির্ধারিত হারে দেশীয় মুদ্রা কেনা-বেচা করে বিদেশি মুদ্রার জোগান দিয়ে থাকে। ১৯৪৯ এবং ১৯৬৭ সালের সময়সীমার মধ্যে, আন্তর্জাতিক মুদ্রা তহবিল

(IMF)-এর স্থির মুদ্রাবিনিময় হারের অধীনে। গ্রেট ব্রিটেন আমেরিকা যুক্তরাষ্ট্রের সঙ্গে একটি মুদ্রা বিনিময় হার ঠিক করে ছিল : ১ = $২.৮০। যখন বৈদেশিক মুদ্রার বাজারে পাউন্ডের দাম বাড়তো তখন গ্রেট ব্রিটেন ডলার কিনতো এবং পাউন্ড বিক্রি করতো। এবং পাউন্ডের দাম কমলে, কর্তপক্ষ ডলার বিক্রি করতো এবং পাউন্ড কিনতো যা ৪.১ রেখাচিত্রে দেখানো হল:

চিত্র ৪.১ : স্থির মুদ্রাবিনিময় হার ব্যবস্থা : ১৯৪৯ এবং ১৯৬৭ সালের মধ্যে পাউন্ড ও ডলারের মুদ্রা বিনিময় হার

আর একটি উল্লেখযোগ্য স্থির বিনিয়োগ হারের উদাহরণ হল বিট্রন উড্‌স ব্যবস্থা যা ১৯৪৫ সাল থেকে ১৯৭২ সাল অব্দি চালু ছিল। এই ব্রিটন উড্‌স স্থির মুদ্রাবিনিময় ব্যবস্থা ভেঙ্গে গিয়েছিল এই কারণে যে তখন মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রের লেনদেন ব্যালেন্সে অনেক ঘাটতি দেখা গিয়েছিল (১৯৬০এর দশকের শেষে) কিন্তু মার্কিন মুলুক সোনার সাপেক্ষে ডলারের দামের অবমূল্যয়নে (devaluation) রাজি হয়নি। উপরন্তু জাপান ও পশ্চিম জার্মানীও এ ব্যবস্থা থেকে সরে এল কেননা এই দুটি দেশের হল লেনদেন ব্যালেন্স পর্যাপ্ততা (surplus)।

স্থির বিনিয়োগ হারের আরেকটি অন্তিম বা সবশেষ উদাহরণ হল 'কারেন্সি বোর্ড' গঠন। ১৯৯০-এর দশকে আর্জেন্টিনা নিজেকে কারেন্সি বোর্ডের আওতাভুক্ত করল যেখানে তার দেশজ কারেন্সিকে দেশের ডলারের মজুতভাণ্ডারের সঙ্গে যুক্ত করল। এটা এক প্রকার স্বর্ণমানই (golden standrad) ছিল, যেখানে সোনার জায়গা দখল করে ডলারই কার্যকর ছিল।

4.3.2 নমনীয় মুদ্রা-বিনিময় হার

মুদ্রাবিনিময় হার যখন সম্পূর্ণরূপে চাহিদা ও জোগানের টানাপোড়েনে বাজারের শক্তির দ্বারা নির্ধারিত হয়। তখনই তা নমনীয় মুদ্রাবিনিময় হার (flexible exchange rate)। এখানে কেন্দ্রীয় ব্যাঙ্ক বা

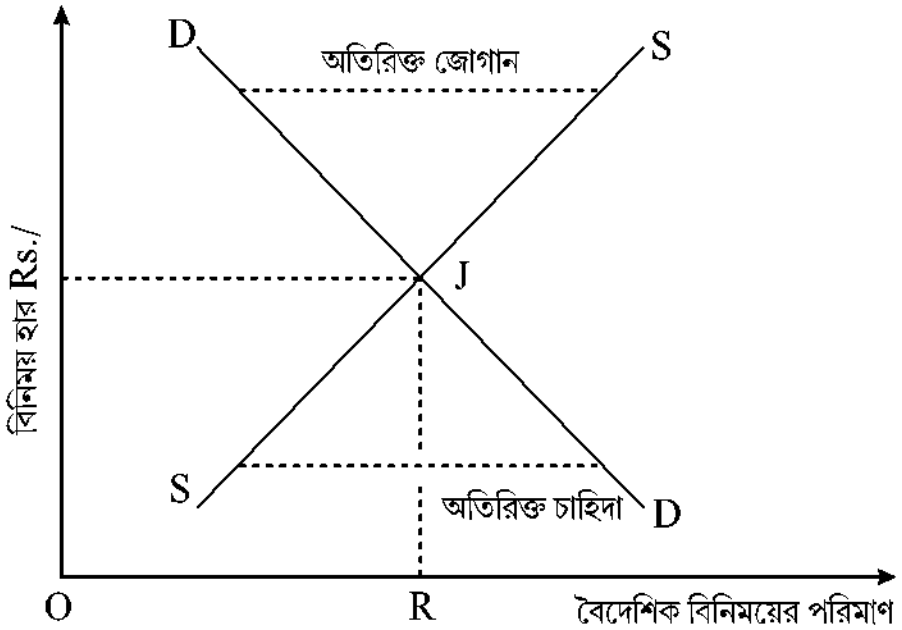
সরকার বিনিময় হার নিয়ন্ত্রনে কোন রকম হস্তক্ষেপ (intervention) করেন না। এর ফলে মুদ্রাবিনিময় হারের ওঠানামা, স্থির মুদ্রাবিনিময় হারের তুলনায় অনেক বেশি হয়ে থাকে।

এখন দেখা যাক বৈদেশিক মুদ্রাবিনিময়ের বাজারে কীভাবে ভারসাম্য নির্ধারিত হয়। বৈদেশিক মুদ্রাবিনিময়ের বাজারে, বৈদেশিক মুদ্রার জন্য একটি চাহিদার শক্তি তৈরি হয় এবং জোগানও তৈরি হয়। এই দুই শক্তি-বৈদেশিক মুদ্রার জন্য চাহিদার শক্তি এবং জোগানের শক্তিই মুদ্রা বিনিময় হারকে নির্ধারিত করে। যখন দেশজ বাসিন্দারা অন্যান্য দেশ থেকে আমদানি করতে চায় তখন বৈদেশিক বিনিময়ের জন্য চাহিদা বাড়ে, আবার যখন বিদেশি বাসিন্দারা আমাদের দেশ থেকে আমদানির জন্য উন্মুখ থাকে তখন জোগানের ক্ষেত্রে বৈদেশিক বিনিময় তৈরি হয়।

চিত্র ৪.২ এ দেখানো হল, বৈদেশিক বিনিময়ের চাহিদা রেখা উর্দ্ধমুখী (বাম থেকে ডানে) কেননা মুদ্রাবিনিময় হার ও বৈদেশিক বিনিময়ের জন্য চাহিদা পরিমানের সম্পর্ক বিপরীত মুখী। অন্য দিকে বৈদেশিক বিনিময়ের জন্য যোগান রেখা নিম্নমুখী কেননা মুদ্রাবিনিময়ের হারের সঙ্গে এবং বৈদেশিক বিনিময়ের যোগান এর সম্পর্ক প্রত্যক্ষ।

J বিন্দুতে চাহিদা ও জোগানের জন্য বৈদেশিক বিনিময় রেখা পরস্পর পরস্পরকে ছেদ করে এবং সেখানেই ভারসাম্য নির্ধারিত হয়। বৈদেশিক বিনিময় হার যেখানে এই চাহিদা ও যোগান শক্তি সমান হয় তাকেই বলে ভারসাম্য বিনিময় হার (ER)

চিত্র ৪.২: বৈদেশিক মুদ্রাবিনিময়ের হার নির্ধারণের জন্য চাহিদা ও জোগান



চিত্রে লক্ষ্য করা যাচ্ছে যে, DD চাহিদা রেখা ও SS জোগান রেখা পরস্পর J বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখানে দেখা যাচ্ছে, যখন মুদ্রাবিনিময় হার JR হয় তখন বৈদেশিক মুদ্রার চাহিদা ও জোগান

পরস্পর সমান হয় ও ইহাদের পরিমান হয় OR। অতএব এই বিনিময় হারই বৈদেশিক মুদ্রার বাজারে নির্ধারিত হার রূপে পরিগণিত হবে। DD চাহিদা রেখার ও SS জোগান রেখার আকার (Shape) নিম্নলিখিত চার প্রকার স্থিতিস্থাপক ওপর নির্ভর করে।

১) রপ্তানির বিদেশে চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা

২) রপ্তানির দেশীয় জোগানের স্থিতিস্থাপকতা

৩) আমদানির বিদেশের জোগানের স্থিতিস্থাপকতা

৪) আমদানির দেশীয় চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা

বৈদেশিক মুদ্রার বিনিময় হারের স্থিতিশীলতা উপরোক্ত স্থিতিস্থাপকতা সমূহের ওপর নির্ভরশীল। রবিনমন ও মেটসলারের (Robinson and Metzler) মতানুযায়ী মুদ্রাবিনিময় হারের স্থিতিস্থাপকতার প্রবণতা তখনই দেখা যায়। যখন চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা বেশি এবং জোগানের স্থিতিস্থাপকতা কম হয়। সাধারনত মুক্ত ও অনিয়ন্ত্রিত অর্থনীতিতে প্রতিদিনই দেশীয় মুদ্রা ও বৈদেশিক মুদ্রার চাহিদা ও জোগানের অবস্থানের দ্বারা বিনিময় হার প্রভাবিত হয়।

4.3.3 স্থির বিনিময় হার বনাম নমনীয় মুদ্রা বিনিময় হার

বিনিময় হার একটি মুদ্রার জন্য অন্য মুদ্রার পরিপেক্ষিতে একটি মুদ্রার মান পরিমাপ করে। উদাহরণস্বরুপ মার্কিন ডলার বা জাপানি ইয়েনের পরিপেক্ষিতে এর টাকার মান। এটি একটি মুদ্রার বাহ্যিক মান (external value). একটি মুদ্রার বাহ্যিক মূল্য অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ কারণ আর্ন্তজাতিক বাণিজ্যে এর প্রভাব অপরিসীম। রপ্তানি আয় ও বাণিজ্যে এর প্রভাব অপরিসীম। রপ্তানি আয় ও আমদানি ব্যয়ের ওপর এর প্রভাব অনস্বীকার্য।

এখন আমরা স্থির বনাম নমনীয় মুদ্রা বিনিময় হার সম্পর্কে আলোচনা করব নীম্নের টেবিলের সাহায্যে।

টেবিল ৪.১ স্থির বিনিময় হার বনাম নমনীয় মুদ্রা বিনিময় হার

	আসল বৈশিষ্ট্য	সুবিধাসমূহ	অসুবিধাসমূহ
স্থির মুদ্রা বিনিময় হার	(১) একটি নির্দিষ্ট হারে বিনিময় হার আসল কারেন্সি বা কারেন্সির বাস্কেটের সঙ্গে pegged বা স্থির থাকে।	(১) স্থির বিনিময় হার পদ্ধতির সুবিধা হল যে এই পদ্ধতি আমদানিকারী ও রপ্তানীকারীদের স্থায়িত্ব (stability) প্রদান করে কারণ তারা জানে যে কী হারে ব্যবসা বাণিজ্য চলবে।	(১) দেশটি যদি আন্তর্জাতিক মূলধনের বাজারে উন্মুক্ত থাকে, তবে তার মুদ্রা বা কারেন্সি সংকটের মধ্যে পড়তে পারে।

	আসল বৈশিষ্ট্য	সুবিধাসমূহ	অসুবিধাসমূহ
স্থির মুদ্রা বিনিময় হার	(২) আর্থিক কর্তৃপক্ষ অনির্দিষ্ট সময়ের জন্য peg বা স্থির রাখার জন্য প্রতিজ্ঞাবদ্ধ থাকে। (৩) সরাসরি হস্তক্ষেপ বা মুদ্রানীতির সাহায্যে আর্থিক কর্তৃপক্ষ ওই নির্দিষ্ট হার (peg) রক্ষা করার জন্য সচেষ্ট হয়।	(২) সুদের হার সমূহ কম মাত্রায় থাকে। (৩) মুদ্রাস্ফীতিজনিত প্রত্যাশা অদল-বদল করে (moderating) যে দেশে মুদ্রাস্ফীতির মাত্রা অধিক তাকে কমিয়ে আনতে সাহায্য করে।	(২) বৈদেশিক ঋনের বোঝা বাড়াতে উৎসাহিত করে। (৩) এটি বজায় রাখতে অতি উচ্চমাত্রায় আন্তর্জাতিক মুদ্রা ভাণ্ডারের প্রয়োজন। তাছাড়া বিপর্যয় সামলানোর ক্ষমতা এর কম থাকে। এছাড়া ও বাজারের অবস্থা পরিবর্তিত হলে মুদ্রা বা কারেন্সির স্থির মূল্য খুব বেশি বা খুব কমও হতে পারে। এটি একটি দেশের লেনদেন ব্যালেন্সে এবং সেই দেশের দ্রব্যের প্রতিযোগীতামূলক (competi-tiveness)সুযোগকে কে প্রভাবান্বিত করে।
নমনীয় মুদ্রা বিনিময় হার	(১) চাহিদা ও জোগানের ঘাত প্রতিঘাতে এই নমনীয় মুদ্রা বিনিময় হার বাজারে নিধারিত হয়। (২) আর্থিক কর্তৃপক্ষ বৈদেশিক মুদ্রার বাজারে হস্তক্ষেপ করে না। (৩) মুদ্রানীতি মুদ্রাবিনিময় হারের ওপর নির্ভর করে না।	(১) খুব সহজে এই ব্যবস্থা আকস্মিক অভিঘাত (shock) হজম করতে পারে। (২) কারেন্সি বা মুদ্রা সংকটের ক্ষেত্রে এই ব্যবস্থা স্পর্শকাতর নয়। (৩) এই ব্যবস্থাকে চালু রাখতে গেলে খুব বেশি পরিমান আন্তর্জাতিক মুদ্রা ভাণ্ডারের প্রয়োজন পড়ে না। তাছাড়া এখানে কারেন্সির মূল্য বাজারের পরিবর্তিত	(১)স্বল্পকালীন ওঠানামা (volatility) এই পদ্ধতিতে অত্যন্ত বেশি। (২) মুদ্রাস্ফীতি ঠিক ভাবে পরিচালিত না হলে, তা মুদ্রাস্ফীতির বৃদ্ধি ঘটাতে পারে। (৩) এটিতে অনুপযুক্ত ব্যবস্থার উচ্চ সম্ভাবনা থাকে। তাছাড়া এই ব্যবস্থা চালু থাকলে মুদ্রার মূল্য প্রতি মিনিটে মিনিটে নিয়ম মাফিক পরিবর্তিত হবে,

	আসল বৈশিষ্ট্য	সুবিধাসমূহ	অসুবিধাসমূহ
নমনীয় মুদ্রা বিনিময় হার		অবস্থার প্রতিফলন ঘটিয়ে এক সামঞ্জস্য বিধান করবে। এখানে সরকারি হস্তক্ষেপের কোনো খরচ নেই। মুদ্রা ক্রয় ও বিক্রয়ের জন্য সরকারকে তার সম্পদ ব্যবহার করতে হবে না। ফলে সরকরেকে শুধু অভ্যন্তরীণ অর্থনৈতিক বিষয়গুলি ভাবনাচিন্তা করলেই হবে।	ফলে প্রতিষ্টানগুলির ভবিষ্যতে এগিয়ে যাওয়ার সংকল্প কঠিন হয়ে পড়বে। প্রতিমিনিটে মিনিটে মুদ্রার মান পরিবর্তিত হলে, তা ফটকা কারবারকে উৎসাহিত করবে। বাস্তবে বিনিময় হার ভারসাম্য আনার ক্ষেত্রে সামঞ্জস্য করতে সক্ষম নাও হতে পারে। উদাহরণস্বরুপ জোগান রেখা নিম্নমুখী হলে কারেন্সি বাজার ভারসাম্য না পৌঁছে দূরে সরে যাবে।

4.3.4 পরিস্কার বাজার-নির্ভর ভাসমানতা বনাম ন্যক্কারজনক ভাসমানতা

১৯৭৩ সালের পর থেকে আন্তর্জাতিক বাজারে বিনিময় হারের যে অস্থিতিশীলতা দেখা দিয়েছিল তার যুক্তিসংগত ব্যাখ্যা একমাত্র মুদ্রা প্রধান্যবাদী গোষ্টীর অর্থতাত্ত্বিকেরাই বলতে পেরেছেন। এই মতবাদ অনুয়ায়ী মুদ্রাবিনিময় হার দাম হিসেবে এখানে চিহ্নিত যা মুদ্রার জোগান এবং চাহিদার মধ্যে সমতা আনে বলে মনে করা ঠিক হবে না। পরিবর্তে বিনিময় হারকে দুটি দেশের প্রচলিত মুদ্রার আপেক্ষিক দাম (relative price) হিসেবে দেখতে হবে। যার ফলে একটি মুদ্রার উপর যে-কোনো প্রভাব পড়লেই তা সেই দেশের মুদ্রার আন্তর্জাতিক বিনিময় হারকেও প্রভাবিত করবে। এই মতবাদ অনুয়ায়ী একটি দেশের মুদ্রার ওপর সবচেয়ে বেশি গুরুত্বপূর্ণ প্রভাব হল সেই দেশের মুদ্রার অভ্যন্তরীণ জোগানের পরিবর্তন। যেহেতু কিছু লোক এই জাতের পরিবর্তনের সম্ভাবনা ও তার প্রভাব সম্মন্ধে কিছু প্রত্যাশা (expectation) গঠন করে থাকে, সেই কারণেই বিনিময় হারের নির্ধারনের ক্ষেত্রে প্রত্যাশার ওপর গুরুত্ব আরোপ করা সমাচীন।

বিদেশি মুদ্রার বাজারে যদি কোনো সরকারি হস্তক্ষেপ না থাকে, তাহলে বিনিময় হার হবে স্বতন্ত্রভাবে পরিস্কার ভাসমান (freely clean floating) অর্থাৎ বিনিময় হার হবে সম্পূর্ণ বাজার নির্ভর এবং এই হারের সমস্থিতি আসবে মুদ্রার জোগান ও চাহিদার সমতার মাধ্যমে।

সরকারি হস্তক্ষেপ ঘটলে চিত্রটি সম্পূর্ণ বদলে যাবে। সেক্ষেত্রে মুদ্রা বিনিময় হার নানভাবে নির্ধারিত

হতে পারে। সরকার বিনিময় হারকে একটি নির্দিষ্ট মানে আটকে রাখতে পারে (pegged exchange rate), অথবা প্রয়োজন অনুসারে এই হারকে পূণবির্নস্ত করে নতুন হার (adjustable pegg) ঠিক করে দেওয়া হতে পারে। এই নিয়ন্ত্রনাধীন বা পরিচালিত পরিবর্তনীয়তার বা ভাসমানতার (managed floting) পরিস্থিতিকে অনেক সময় বিনিময় হারের 'ন্যক্কারজনক ভারসাম্যতা' (dirty floting) আখ্যা দেওয়া হয় এই কারণে যে ওই ক্ষেত্রে দেশগুলি তাদের নিজেদের সংকীর্ন স্বার্থে বিনিময় হারকে অপব্যবহার করে থাকে।

4.3.5 সংকর মুদ্রা বিনিময় হার ব্যবস্থা

সংকর মুদ্রাবিনিময় হার ব্যবস্থা হল এমন একটি ব্যবস্থা, যার সঙ্গে জড়িত কতকগুলি কারেন্সি বা মুদ্রা, যাদের মূল্য কখনো স্বতন্ত্রভাবে ভাসমান কখন-বা অন্য কতকগুলি কারেন্সি যাদের মূল্য বাজার ও সরকারি হস্তক্ষেপের যুগ্মপ্রয়াসে নির্ধারিত হয়। তাছাড়াও আছে কতকগুলি কারেন্সি যারা নির্দিষ্ট বা একরাশ কারেন্সি বাস্কেটের সঙ্গে pegged বা স্থির (fixed) যার অর্থ হল বিনিময় হারকে একটি নির্দিষ্ট মানে আটকে রাখে (pegged exchange rate).

পূর্বের প্রচলিত স্বর্ণমান (gold standrad) বা ব্রিটন উড্‌স ব্যবস্থা আজ অচল। বর্তমানের মুদ্রা বিনিময় হার কোনো নির্দিষ্ট নিয়মে বা মোড়কে বাঁধা যাবে না। বর্তমানে বিশ্ব সংকর মুদ্রা বিনিময় ব্যবস্থার দিকে ঝুকে পড়েছে।

মুক্ত ভাসমান মুদ্রা বিনিময় বার কতিপয় দেশে প্রচলিত। এই দৃষ্টিভঙ্গিতে দেশগুলি তাদের কারেন্সি নির্ধারিণে বাজারি ব্যবস্থার ওপর নির্ভরশীল এবং কর্তৃপক্ষ এখানে কোনো হস্তক্ষেপ করে না। আমেরিকা যুক্তরাষ্ট্র গত দু-দশক ধরে এই ব্যবস্থা চলে এসেছে।

কতিপয় উল্লেখযোগ্য দেশ নমনীয় কিন্তু নিয়ন্ত্রিত (managed) করে ভাসমান (floting) রাখে তার অধীনে। যেমন কানাডা, জাপান ও ভারতের ন্যায় অন্যান্য দেশগুলি।

4.3.6 আপাত কার্যকরী মুদ্রাবিনিময় হার ও আসল কার্যকরী মুদ্রাবিনিময় হার

একটি অর্থনীতির মুদ্রাবিনিময় হার-এর বহুপাক্ষিক (multilateral) পরিমাপই হল আপাত কার্যকরী মুদ্রা বিনিময় হার (nominal effective exchange rate) এটি সচারচার বাণিজ্য ভাবযুক্ত সূচক (TWI) (trade weighted index) নামেও সুপরিচিত। এটি মুদ্রা বিনিময় হারের গড় গতিবেগের একটি উজ্জ্বল উদাহরণ। এটি Laspeyres সূচকের একটি উদাহরণও বটে। এই আপাত কার্যকরী মুদ্রাবিনিময় হার, অন্যান্য বিশেষ বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ দেশের বাণিজ্য শরিকদের কারেন্সির সাপেক্ষে নিজের দেশের কারেন্সির মূল্য পরিমাপ করে (It measures the value of the currency relative to the currencies of the economy's major trading partners)। এই TWI-কে পরিমাপ করা হয় একটি ভিত্তি বছর (base period) ব্যবহার করে, যখন তার মান১০০.০- এর সমান হয়।

আসল কার্যকরী মুদ্রাবিনিময় হার

বিনিময় হারের পরিবর্তনের প্রভাব আলোচনা করার সময়, যেটি খুব গুরুত্বপূর্ণ তা হল সংশিষ্ট দেশগুলির দাম সকলের ক্ষেত্রে কী ঘটে তা দেখা। উদাহরণস্বরুপ ধরা যাক যদি মুদ্রার মান কমে যায়, তবে অন্যান্য বিষয় অপরিবর্তিত থাকলে, এর অর্থ হবে যে দেশের দ্রব্য বিদেশি কারেন্সির সাপেক্ষে সস্তা হয়ে গেল। যদি কারেন্সির মূল্য অর্ধেক হয়ে যায়, কিন্তু দামস্তর দ্বিগুন হয় তবে আসল অর্থে মুদ্রা বিনিময় হার একই থাকে। তাহলে আসল কার্যকরী বিনিময় হার আপেক্ষিক দামস্তরের জন্য আপাত বিনিময় হারের সঙ্গে সামঞ্জস্য বিধান করে (ভিন্ন ভিন্ন দেশে)।

উদাহরণস্বরুপ ধরা যাক Rs.১০০ টাকায় ভারতীয় দ্রব্য আছে এবং ডলারে সাপেক্ষে তার বিনিময় মূল্য হল $ ২ : Rs.১, কিন্তু ৫০% শতাংশ কমে তা দাড়াঁয় $ ১ : Rs.১ তবে দ্রব্যটি Rs.২০০ টাকায় বদলে ১০০ টাকায় বিক্রি হবে।

এইভাবে আসল কার্যকরী বিনিময় হার নিম্নলিখিত ভাবে পরিমাপ করা হয়।

$$\text{আসল কার্যকরী বিনিময় হার} = \frac{\text{আপাত বিনিময় হার} \times \text{ভারতীয় দামসমূহ}}{\text{বৈদেশিক (overseas) দামসমূহ}}$$

উদাহরণস্বরুপ : ধরা যাক আপাত বিনিময় হার হল ঃ $২ : £১, কিন্তু একজোড়া জিনস্ প্যান্ট UK -তে £১০ -এ বিক্রি হয়। যেখানে জিনস্ প্যান্ট সাধারনত USA তে বিক্রি হয় $১২-তে।

$$\text{এক্ষেত্রে আসল কার্যকরী বিনিময় হার} = \frac{(\$২ \text{ x } £১০)}{(\$১২)} = \frac{\$২০}{\$১২}$$

$$= \$১.৬৭$$

অতএব কার্যকরী আসল বিনিময় হার হল : $১.৬৭ : £১

বাস্তবে, আপাত কার্যকরী মুদ্রা বিনিময় হারের দোলাচল (swings), আসল কার্যকরী বিনিময় হারকে স্বল্পমেয়াদে বেশি নড়াচড়া করতে সাহায্য করে। আসল কার্যকারী মুদ্রা বিনিময় হারের দোলাচল (movement) স্বল্পমেয়াদে গুরুত্বপূর্ণ কেননা তা রপ্তানি ও আমদানির পরিমাণকে (volume) প্রভাবাহিত করে।

4.3.7 চলতি বাজার এবং আগাম (ফটকা) বাজার

যে বাজারে দ্রব্যসামগ্রী, শেয়ার অথবা প্রচলিত মুদ্রা হাতে হাতে বিলি করা হয়ে থাকে, সেই বাজারকে চলতি বাজার (spot market) বলে। কোনো কোনো ক্ষেত্রে অবশ্য অল্প কয়েক দিনের মধ্যেই 'ডেলিভারি' দেওয়া হয়। চলতি বাজারকে আগাম (ফটকা) বাজারের (forward market) থেকে আলাদা করে দেখা হয়।

আগাম (ফটকা) বাজার বলতে বোঝায় এমন কার্যকলাপ যাতে দ্রব্য বা শেয়ার ইত্যাদি কেনাবেচার করার ক্ষেত্রে এমন চুক্তি সংযুক্ত থাকে যে দ্রব্য বা শেয়ারের বাজার দর আজকে ঠিক হবে, কিন্তু দ্রব্য বা

শেয়ারের হাত বদল করা হবে ভবিষ্যতের কোনো নির্দিষ্ট তারিখে অর্থাৎ Forward transactions imply a delivery at a different date. স্পষ্টতই এই জাতীয় আগাম বাজার মুদ্রা বিনিময় হারের আগাম চুক্তির বাজারের (forward exchange market) অংশ বিশেষ। যেমন দুটি দেশের পৃথক প্রচলিত মুদ্রা অর্থাৎ কারেন্সি, ভবিষ্যতে কোনো নির্দিষ্ট তারিখে কী হারে বিনিময় করা হবে, সে সম্বন্ধে প্রাপক ও দেনাদারের মধ্যে আগাম চুক্তি ও ঝুঁকির সম্পাদিত হয় বর্তমানে, ভবিষ্যতের অনিশ্চয়তার কথা ভেবে। ঝুঁকির সম্ভাবনা থাকে এই কারণে মধ্যবর্তী কালে মুদ্রার বিনিময় হারের পরিবর্তন হতে পারে।

এখন এখানে চলতি মুদ্রাবিনিময় বাজারের (Spot Exchange Market)- এর আলোচনায় আসি। মুদ্রাবিনিময় হারের ব্যবসা (trading) দু ধরনের বাজারে হয়: চলতি বৈদেশিক মুদ্রাবিনিময় বাজরে (Spot Exchange Market) এবং আগাম বাজারে (forward Market)। যাহোক, নিচে চলতি মুদ্রাবিনিময় বাজারের কার্যাবলী এবং এই বাজারে যে নানাধরনের কোট্স (Quotes) ব্যবহৃত হয় তার কথা আলোচনায় আসা যাক।

'স্পট' বাজারের মাধ্যমে দৈনিক প্রচুর পরিমান কারেন্সির আদান-প্রদান হয় ইন্টার-ব্যাংকের ব্যবসার খাতিরে। স্পট মার্কেটে নিত্য আদান-প্রদান ঘটে স্পট মুদ্রাবিনিময় হারের মাধ্যমে। স্পট মুদ্রাবিনিময় হারকে প্রকাশ করা হয় অন্য কারেন্সির সাপেক্ষে একটি হারকে প্রকাশ করা হয় অন্য কারেন্সির সাপেক্ষে একটি কারেন্সির এককের সংখ্যা দ্বারা। ব্যাংকের ডিপোজিটে দুটি কারেন্সিকেই রাখা হয়। যা কিনা যথা সময়ে বিক্রেতা থেকে ক্রেতার কাছে স্থানান্তরিত হয় ব্যাংকের মাধ্যমে আমরা বিভিন্ন ধরনের কোটস্ (Quotes) পাই যার মাধ্যমে স্পট মার্কেটে লেনদেন সংঘটিত হয়। মুদ্রাবিনিময় হারের কোটেশন একটি কারেন্সির সাপেক্ষে অন্য ক্যরেন্সির দাম। যখন কারেন্সিগুলোকে ডলার দ্বারা প্রকাশিত করা হয়, তখন আমরা একটি কোটকে বিন্যাস করতে পারি হয় ইউরোপিয়ান কোটে বা আমেরিকান কোটে উদাহরণস্বরুপ টাকা ৫/\$১ হল ইউরোপিয়ান কোট, যেখানে \$০.০২২/Rs. ১ হল আমেরিকান কোন বেশির ভাগ দেশিই মুদ্রাবিনিময় হার সমুহ ইউরোপিয়ান কোটে করা হয়।

(a) প্রত্যক্ষ কোট : যখন বৈদেশিক কারেন্সির সাপেক্ষে দেশিয় কারেন্সির একক সংখ্যায় তা প্রকাশ করা হয়, তখন তাকে বলি প্রত্যক্ষ কোর্ট উদাহরণস্বরুপ বলা যায় Rs/\$ প্রকাশ করে যে ডলারের এক একক (বৈদেশিক কারেন্সি)-এর খরচ পড়ে Rs৭০/- (দেশীয় কারেন্সি)

(b) অপ্রত্যক্ষ কোটসমূহ : যখন মুদ্রাবিনিময় হারকে দেশিয় কারেন্সির একক সমূহের নিদিষ্ট (fixed) সংখ্যায় জন্য বিদেশি কারেন্সির এককসমূহের সংখ্যার দ্বারা প্রকাশিত করা হয়, তখন তাকে বলে অপ্রত্যক্ষ কোট উদাহরণস্বরুপ \$২.২২/Rs.১০০/- এই নির্দেশ করে যে ১০০ একক দেশিয় কারেন্সির জন্য ডলার কেনা যাবে \$২.২২ হারে। এইভাবে আমরা বলতে পারি যে অপ্রত্যক্ষ কোটসমূহ প্রত্যক কোটসমূহের ঠিক উল্টোটাই। ভারতে আগস্ট ২, ১৯৯৩ সালের আগে অপ্রত্যক্ষ কোট চালু ছিল, কিন্তু তারপর থেকেই প্রত্যক্ষ কোট ব্যবহার করা হয়।

(c) বিড (নিলাম ডাক) এবং Ask (আস্ক) হার : নামীদামী প্রায় সব খবরের কাগজেই প্রত্যক দিন মুদ্রাবিনিময় হার বলা থাকে। কিন্তু, আমরা দেখি কোটস্ সম্বন্ধে কাগজে যা লেখা হয় তা সর্বদাই জোড়ায় জোড়ায় থাকে, কেননা একজন ডিলার সাধারণত জানে না যে বাজারে যে খদ্দের আছে সে বৈদেশিক

মুদ্রা কিনবে না বেচবে। নিলাম ডাক সর্বদাই আস্ক হারের নিম্নে যাকে যাতে ডিলার এই দুইয়ের পার্থক্য (যা আস্ক-বিড দাম)থেকে মুনাফা অর্জন করতে পারে।

বৈদেশিক মুদ্রাবিনিময়ের বাজারে কারেন্সির জন্য বিড ও আস্ক হারের পার্থক্য যা বিড-আস্ক বিস্তৃতি শতকরা হিসেবে গণনা করা হয়, যেমন

$$\text{শতকরা বিস্তৃতি} = \frac{\text{আস্ক দাম} - \text{নিলাম ডাক দাম}}{\text{আস্ক দাম}} \times ১০০$$

এগুলি ছাড়াও নান ধরনের কোট আছে যেমন ইন্টার-ব্যাংক কোট এবং মার্চেন্ট কোট, উল্টো বা বিপ্রতীপ কোটসমূহ এবং ক্রশ হার।

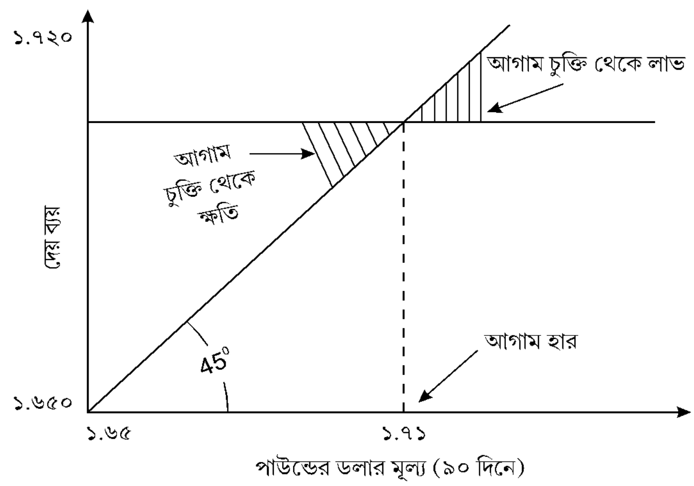
আগাম বাজার : অন্য এক ধরণের বাজার আছে যেখানে বৈদেশিক মুদ্রাবিনিময়ের লেনদেন (transaction) ঘটে, যার পোশাকি নাম আগাম বাজার (forward mrket)। একটি আগাম চুক্তি হল তাই যেখানে ব্যবসাকারীরা (parties) অম্য কারেন্সির নির্দিষ্ট পরিমানের পরিপেক্ষিতে একটি কারেন্সির নিদিষ্ট পরিমান কেনাবেচা করতে হয়। এখানে চুক্তির সময় যে মুদ্রাবিনিময় হার নিদিষ্ট হবে সেই হিসেবেই ভবিষ্যদে্ কোন একটি নিদিষ্ট দিনে তাই ধার্য থাকবে।

এই আগাম বাজারের ধারণা উন্নত দেশগুলিতেই বেশি চালু নয় অনুন্নত দেশে।

ধরাযাক, একটি আমেরিকান কোম্পানী ইংল্যান্ড থেকে £১মিলিয়ন দিয়ে টেক্সটাইল কিনল ৯০ দিনে পাওনা চুকিয়ে দেওয়ার জন্য। সুতরাং যে আমদানি করল সে ভবিষ্যদে্ পাউন্ড পাবে। ধরা যাক পাউন্ডের বর্তমান মূল্য $ ১.৭১ কিন্তু পরবর্তী তিন মাসের মধ্যে পাউন্ডের দাম ডলারের সাপেক্ষে বাড়তে পারে। এই ধরণের মুদ্রাবিনিময় ঝুঁকিকে রক্ষা করার জন্য আমদানীকারী একটি ব্যাঙ্কের সঙ্গে ৯০ দিনের আগাম চুক্তি করল এই ভাবে £১পাউন্ডের দাম = $ ১.৭২, যা কিনা স্পট দামের চেয়ে কিঞ্চিত বেশি।

এখন আগাম চুক্তির নিয়মানুসারে, ওই ৯০দিনে ব্যাঙ্ক আমদানীকারীকে দেবে $ ১.৭২/£ মিলিয়ন পাউন্ড। এবং আমদানিকারী ব্যাংককে দেবে $ ১.৭২ মিলিয়ন ডলার।

আগাম চুক্তি থেকে আগত লাভ ও ক্ষতির উদ্ভব হয় চুক্তিবদ্ধ আগাম দাম এবং স্পট দামের পার্থক্য হেতু। চিত্র ৪.৩-এ ৪৫° রেখা দেখায় নানা পরিমান যা আমদানিকারীকে দৈনিক মুদ্রাবিনিময় হারের মাধ্যমে দিতে হয়। যদি মুদ্রাবিনিময় হার $ ১.৭২-এর ওপরে হয়, তবে আগাম চুক্তির দ্বারা



চিত্র ৪.৩ ঃ আগাম চুক্তি থেকে লাভ ও ক্ষতি

লাভ হল, এবং তা যদি $ ১.৭২-এর কম হয়,তবে তা আগাম চুক্তির ফলে ক্ষতির দ্যোতক বলে চিহ্নিত হবে।

আগাম চুক্তি সাধারণত ঝুঁকি প্রতিবিদানকারী (hedgers) দ্বারা প্রধামত বহুজাতিক ফার্ম দ্বারা ব্যবহৃত হয় যাতে দেশীয় কারেন্সির মূল্য তারা রক্ষা করতে পারে। ঝুঁকি প্রতিবিদানকারী ছাড়াও ফটকা কারবারী ও ব্যবসায়ীরাও এই আগাম বাজারে অংশগ্রহন করে আসলে আগাম চুক্তি আসলে ডেরিভেটিভ (মূলধন সংস্থান-বিষয়ক) মার্কেটের একটি অংশ বিশেষ।

4.4 বাণিজ্য উন্মুওতার পরিমাপ

দেশসমূহের (Nation states) মধ্যে অর্থনৈতিক নির্ভরতার (interdependence) উৎপত্তি হয় বাণিজ্য গতয়াতে (flows), আন্তর্জাতিক পণ্যের দাম এবং বিশ্ব মূলধনের গতায়াতে। মুদ্রাবিনিময় হার এক্ষেত্রে একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। কেননা ওটি এইসব চলকগুলির পরিবর্তনের প্রভাব দেশীয় অর্থনীতিতে কীভাবে পড়বে তা আগাম জানান দেয়। আন্তর্জাতিক মুদ্রা তহবিল (IMF) আন্তর্জাতিক বাণিজ্যে এইসব চলকগুলির গতিবিধি লক্ষ্য করে।

একটি অর্থনীতির উন্মুকতার মাত্রার দ্যোতক (indicator) হল রপ্তানি (X) ও আমদানির (M) যোগফলের শতাংশ মূল্য যা কিনা GDP এর একটি অংশও বটে।

অর্থাৎ বাণিজ্য উন্মুক্ততার অনুপাত (Trade orinentation ratio) $= \dfrac{X+M}{GDP} \times 100$

এই পরিমাপ বর্তমান দশকে খুব উল্লেখযোগ্য ভাবে বৃদ্ধি পেয়েছে।

এই পরিমাপের ভিত্তিতে, বর্তমানে দেখা গিয়েছে যে- জাপান ও আমেরিকা যুক্তরাষ্ট্র উন্নত দেশ হয়েও ততটা মুক্ত নয়। আবার এও দেখা গেছে যে উন্নত দেশগুলির বেশির ভাগই মালয়েশিয়া, এবং সিংগাপুরের থেকে কম মুক্ত।

উন্মুক্ততার পরিমাপ জানার জন্য অন্য একটি উপায়ও প্রচলিত যেখানে দ্রব্য ও সেবা সামগ্রির উন্মুক্ততা মাপা হয় GDP-তে বাণিজ্যযোগ্য (tradable) এবং অবাণিজ্যযোগ্য (non-tradable) উৎপাদনে। তার আপেক্ষিক অংশ কতটা, তার দ্বারা এখানে বাণিজ্যযোগ্য উৎপাদনের (tradable output) অন্তর্ভুক্ত হল দ্রব্য ও সেবাকার্যাদি যা রপ্তানিও করা যায় না বা আমদানিও করা যায় না। তবে বিদেশিদের কাছে তা বিক্রি করা যায়, অন্যদিকে অবাণিজ্যযোগ্য উৎপাদন হল সেই সব দ্রব্য ও সেবাকাযাদি যা বিশ্ব বাণিজ্যে কখনই প্রবেশধিকার পায় না।

মোট উৎপাদনের ও বাণিজ্যযোগ্য অর্থনৈতিক কর্মকান্ডের অনুপাত যত বেশি হবে ততই সেই দেশটি তত উন্মুক্ত।

উন্মুক্ততার অন্য দিকও অবশ্য আছে। উদাহরণস্বরুপ বলা যায় একটি অর্থনীতি তুলনামূলকভাবে বেশি উন্মুক্ত যদি তার আর্থিক (financial) এবং সম্পদ (asset) বাজার খুব কম নিয়ন্ত্রিত (regulated) এবং আর্ন্তজাতিক বিনিময়ের দিকে বেশি বেশি অবারিত।

4.5 সংক্ষিপ্তসার

পৃথিবীর সব অথনীতি কমবেশি আন্তর্জাতিক বাণিজ্যে লিপ্ত। দেশসমূহের মধ্যে মুদ্রা বিনিময় হার হল একটি উল্লেখযোগ্য উপাদান যা কিনা বাণিজ্যের পরিমাপ এবং মূল্য নির্ধারনে এক গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। এই ভূমিকা আরও গুরুত্বপূর্ণ কারণ ১৯৯০ সাল থেকে সমসাময়িক সময়ে বৈদেশিক মুদ্রা বিনিময় হারের বাজারের কার্যকারিতা বৃদ্ধি পেয়েছে প্রধানত তিনটি কারণে: আন্তর্জাতিক বাজারের উন্নয়ন, মূলধনের গতায়াতের উদারিকরণ এবং নব নব আর্থিক উদ্বাবন (financial technique) যা আর্থিক ঝুঁকিকে প্রশামিত করে।

4.6 অনুশীলনী

উত্তর ভিত্তিক প্রশ্ন:

১.স্থির মুদ্রাবিনিময় হার কী?

২.নমনীয় মুদ্রাবিনিময় হার কী?

৩.পরিস্কার বাজার-নির্ভর ভাসমানতা কী?

৪.ন্যক্কারজনক ভাসমানতা কী?

৫.আসল কার্যকারী মুদ্রাবিনিময় হার কী?

৬.চলতি বাজার এবং আগাম (ফটকা) বাজার বলতে কী বোঝ?

৭.বাণিজ্য উন্মুক্ততার অনুপাত কী?

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

১.স্থির বিনিময় হার ও নমনীয় মুদ্রাবিনিময় হারের সুবিধা ও অসুবিধাগুলো লেখ।

২.আপাত কার্যকারী মুদ্রাবিনিময় হার ও আসল মুদ্রাবিনিময় হারের মধ্যে পার্থক্য নির্দেশ কর।

৩.কীভাবে বৈদেশিক মুদ্রাবিনিময় হার নির্ধারিত হয়, তা চিত্র সহযোগে দেখাও।

৪.টীকা লিখ ঃ

(১) চলতি বাজার ও আগাম (ফটকা) বাজার।

(২) সংকর মুদ্রাবিনিময় হার।

৫.বাণিজ্য উন্মুক্ততার পরিমাপ কীভাবে করা হয়? আর্ন্তজাতিক বাজারে এর গুরুত্ব কী?

দীর্ঘ উত্তর ভিত্তিক প্রশ্ন-

১.স্থির মুদ্রাবিনিময় হার ও নমনীয় মুদ্রাবিনিময় হারের বৈশিষ্ট্য উল্লেখ কর। এই দুই পদ্ধতির সুবিধা ও অসুবিধা গুলি বর্ণনা কর।

২.আপাত কার্যকারী মুদ্রাবিনিময় হার ও আসল মুদ্রা বিনিময় হারের কী ভাবে অর্থনীতিতে কাজ করে।

৩.পরিস্কার বাজার-নির্ভর ভাসমানতা ও ন্যক্কারজনক ভাসমানতা বলতে কী বোঝায় ব্যাখ্যা কর।

4.7 গ্রন্থপঞ্জী

Abel, A. B., Blanchard, O.J., Bernanke, B., & Croushore, D. (2017). *Macroeconomics.* London : Pearson UK

Ackley. G. (1978). The costs of inflation. *The American Economic Review, 68(2),* 149-154.

Fischer, S., & Modigliani, F. (1978). Towards a understanding of the real effects and costs of inflation. *Review of World Economics, 1114*(4), 810-833.

Hall, R. E. (1982). Introduction to" Inflation: Causes and Effects". In *Inflation: Causes and Effects* (pp. 1-10). University of Chicsago Press.

Mankiw, N. G. (2020). *Principles of Macroeconomics.* New Delhi : Cengage learning.

একক 5 ❑ লেনদেন ব্যালেন্সের তত্ত্ব

গঠন

5.1 উদ্দেশ্য

এই একটি পাঠ করলে জানা যাবে:

- বৈদিশিক লেনদেন ব্যালেন্স কাকে বলে;
- লেনদেন ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপক বিচার পদ্ধতি
- লেনদেন ব্যালেন্সের ক্রয় সমষ্টি বিচার পদ্ধতি; এবং
- লেনদেন ব্যালেন্সের আর্থিক বিচার পদ্ধতি।

5.2 প্রস্তাবনা

একটি দেশের অধিবাসীরা অন্যান্য দেশের অধিবাসীদের সঙ্গে বাণিজ্যে লিপ্ত হলে বৈদেশিক বাণিজ্যের উদ্ভব হয়। এই বাণিজ্য দুই ধরণের-আমদানি ও রপ্তানি। বিদেশের কোনো ব্যক্তি বা সংস্থার কাছ থেকে জিনিসপত্র কেনাকে বলে আমদানি, আর বিদেশের ব্যক্তি ও সংস্থার কাছ থেকে জিনিস বিক্রি করাকে বলে রপ্তানি। একটি দেশের আনদানি ও রপ্তানির হিসেবও রাখতে হয়। তাছাড়া আন্তর্জাতিক বাণিজ্যে অন্যান্য হিসাবও রাখতে হয় যথা মূলধন খাতে আয়-ব্যয়। তার অর্থ হল কোন নির্দিষ্ট সময়ে (সাধারণত এক বছরে) একটি দেশ পৃথিবীর অন্যান্য সব দেশের সঙ্গে সব রকম আর্থিক লেনদেনের একটি সামগ্রিক ও পূনাঙ্গ হিসেব রাখতে হয়। একেই বলে বৈদেশিক লেনদেনের ব্যালেন্স (Balance of payments)। প্রতিটি অর্থনীতি লেনদেনে পাওনা ও দেনার উৎপত্তি হয়। রপ্তানিজনিত লেনদেন হল পাওনার দিক

(credit side) এবং আমদানিজনিত লেনদেন হয় দেনার দিক (debit side)। বৈদেশিক লেনদেনের হিসেবের মধ্যে নিম্নলিখিতি বিষয়গুলি অর্ন্তভূক্ত করা হয় যা দেনা ও পাওয়ার উভয় দিকেই রয়েছে।

(১) দৃশ্যমান সামগ্রী (visible items) (২) অদৃশ্য সামগ্রী (ivisible items): এগুলি হল বিভিন্ন ধরনের সেবাকার্য। যথা বিদেশ ভ্রমন, ব্যাঙ্কিং বিমা প্রভৃতি সেবাকার্য বিক্রয় বা ক্রয়বাবদ প্রাপ্ত বা দেয় অর্থ ইত্যাদি। (৩) প্রতিদানহীন দেনা পাওনা, যা হল বিনিময়বিহীন একতরফা লেনদেন যার পাশাপাশি কোনোরুপ দেনা ও পাওনার উদ্ভব ঘটে না যেমন উপহার দান ইত্যাদি (৪) মূলধনী দেনা–পাওনা।

বৈদেশিক লেনদেনের হিসাবকে সাধারণত দুটি হিসেবে আলাদা করে দেখানো হয় (ক) চলতি হিসেবের খাতে বৈদেশিক লেনদেনের হিসাব (খ) এবং মূলধন হিসাবের খাতে বৈদেশিক লেনদেনের হিসেব।

কোনো দেশের বৈদেশিক লেনদেনের সামগ্রিক হিসেব পেতে হলে তার চলতি হিসেব এবং মূলধনি হিসেব একত্র করে দেখাতে হয় এবং সামগ্রিক হিসেবে হিসেবশাস্ত্রেয় (Bookkeeping) নিয়মানুযায়ী মোট–পাওনা ও মোট দেনা পরস্পর সমান হয়ে দাঁড়ায়। এই জন্য বলা হয় বৈদেশিক লেনদেনের হিসেবে সবসময়ই সমতা থাকে (Blance of payments always balances) তাহলে বৈদেশিক বাণিজ্যের লেনদেনে প্রতিকূল পরিস্থিতি ঘটবে কেমন করে। এই প্রসঙ্গেই বলাহয় যে যদি কোনা দেশের তলতি যাতে রপ্তানির পরিমাণ আমদানির চেয়ে বেশি থাকে। এবং এই অবস্থা অনেকদিন ধরেই চলতে থাকে। এবং এর ফলে বৈদেশিক মুদ্রার সঞ্চয় ভান্ডার ফুলেফেঁপে ওঠতে থাকে, তাহলে লেনদেনের হিসাব ধনাত্মক (active balance of payments) বলে বুঝতে হবে। তবে এই অবস্থার দীর্ঘদিন ধরে বজায় রাখা নান কারণে সম্ভব নয়।

এই লেনদেন ব্যালেন্সের কয়েকটি উল্লেকযোগ্য তত্ত্ব আছে। যার অবতারণা আমরা এখানে করব। যেমন লেনদেন ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপক বেচার পদ্ধতি, লেনদেন ব্যালেন্সের ক্রয় সমষ্টি বিচার পদ্ধতি এবং লেনদেন ব্যালেন্সের আর্থিক বিচার পদ্ধতি।

5.3 লেনদেন ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপক বিচার পদ্ধতি

লেনদেন ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপক বিচার পদ্ধতি এমন একটি বিশ্লেষণ পদ্ধতি প্রদান করে, যেখানে জানা যায় যে দেশটি যদি–তার মুদ্রার অবমূল্যায়ণ করে তখন লেনদেন ব্যালেন্সের চলতি খাতে কী ঘটে। অন্যভাবে বলা যায়, অবমূল্যায়ন কী লেনদেনের ব্যালেন্সের উন্নতি ঘটায়? যদি তাই হয় তবে কোন্ সুনির্দিষ্ট শর্তাবলীর অধীনে এই ধরনের নীতি সফল হবে? এগুলি ছিল কতক মৌলিক প্রশ্ন যা ১৯২০ এবং ১৯৪০ এর দশকে কিছু তাত্ত্বিককে আছন্ন করে রেখেছিল এবং যা একটি পদ্ধতির বিকাশের দিকে পরিচালিত করেছিল যা লেনদেন ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপক বিচারপদ্ধতি হিসাবে পরিচিত হয়েছিল। স্থিতিস্থাপক পদ্ধতির প্রাথমিক বিকাশে সর্বাধিক উদ্বৃত অবদানের মধ্যে যাদের নাম আছে, তা হল বিকারডিক (১৯২০), মার্শ্যাল (১৯২৩), লার্নার (১৯৪৪), রবিনসন (১৯৪৭), এবং মেট্জলার (১৯৪৯)। স্ট্যান্ডর্ডি মডেলটি স্বদেশে উৎপাদিত এবং বিদেশে উৎপাদিত পণ্যগুলির জন্য পৃথক বাজারের পরিপেক্ষিতে চলতি খাতে বিনিময়হারের পরিবর্তনের প্রভাব বিশ্লেষণ করে। বিকারডিককে (Bickerdicke) অনুসরণ করে,

আমরা বাণিজ্য ব্যালেন্সে দিয়ে শুরু করি যেখানে:

$$BOT = Ex - Im = Pex.ex - Pim.im \quad \text{......(১)}$$

যেখানে BOT - বাণিজ্যে ব্যালেন্সে, Ex = রপ্তানির মূল্য, Im = আমদানির মূল্য, Pex= রপ্তানির দাম, Pim = আমদানির দাম, ex = রপ্তানির আয়তন বা মূল্য im = আমদানির মূল্য বা আয়তন।

মোট ডিফারেনশিয়াল গ্রহণ করলে দাঁড়ায়:

$$dBOT = dEx - d\,Im \quad \text{......(২)}$$

অথবা, $$\frac{dBOT}{Im} = \frac{dEx}{Im} - \frac{dIm}{Im} \quad \text{......(৩)}$$

এখন আমরা সংজ্ঞায়িত করি,

$$\eta BOT = \left(\frac{dBOT}{Im}\right) \Big/ \frac{de}{e}$$

= বিনিময় হারের (e) সাপেক্ষে বাণিজ্য ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপকতা।

$$\eta Ex = \left(\frac{dEx}{Ex}\right) \Big/ \left(\frac{de}{e}\right)$$

= বৈদেশিক বিনিময়ের জন্য জোগানের স্থিতিস্থাপকতা।

$$\eta Im = \left(\frac{dIm}{Im}\right) \Big/ \left(\frac{de}{e}\right)$$

= বৈদেশিক বিনিময়ের জন্য চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা।

এখন (৩) নং সমীকরণের বামপক্ষ ও ডানপক্ষকে $\frac{de}{e}$ দ্বারা ভাগ করে পাই

$$\eta BOT = \left(\frac{Ex}{Im}\right) \eta Ex - \eta Im \quad \text{......(৪)}$$

চাহিদা ও জোগান দামের ওপর নির্ভর করে, রপ্তানি দ্রব্যের বাজারে ভারসাম্য ধরে নিলে আমরা পাই

$$ex = Sex(Pex.e) = Dex\,(Pex) \quad \text{......(৫)}$$

যেখানে (S = জোগান এবং D = চাহিদা। উভয় পক্ষে ডিফারেনশিয়াল নিয়ে আমরা পাই

$$dex = (\delta Sex/\delta Pex)\,(1/Sex)\,(e.dPex + Pex.de) \quad \text{......(৬)}$$

$$= (\delta\, Dex/\delta Pex)\,(1/Dex)\,dPex \quad \text{......(৭)}$$

de/e দ্বারা ভাগ করে এবং লব ও হরকে উভয়কেই P দ্বারা গুন করে পাই:

$$\frac{\frac{dex}{ex}}{\frac{de}{e}} = \left[\frac{\frac{dPex}{Pex}}{\frac{de}{e}} + 1\right]$$

$$= \left[\frac{\partial\ Dex.Pex}{\partial\ Pex.Dex}\right]\frac{\frac{dPex}{Pex}}{\frac{de}{e}} \quad \text{..(৮)}$$

বামদিকের বর্গাকার বন্ধনীর মধ্যে যা পাওয়া গেল, তা হল রপ্তানি জোগানের দাম স্থিতিস্থাপকতা, Sex এবং ডানদিকের বর্গাকার বন্ধনীর মধ্যে, যা পাওয়া গেল যা হল আমদানি পণ্যের চাহিদার বিদেশি মূল্যের দাম স্থিতিস্থাপকতা, ηf ৮নং সমীকরনের জন্য আমরা অতএব লিখতে পারি:

$$\frac{\frac{dex}{ex}}{\frac{de}{e}} = Sex\left(\frac{\frac{dPex}{Pex}}{\frac{de}{e}} + 1\right) + 1$$

$$= \eta f\ \frac{\frac{dPex}{Pex}}{\frac{de}{e}} \quad \text{..(৯)}$$

সমীকরণ (৯) থেকে আমরা বিনিময় হার পরিবর্তনের সাপেক্ষে বৈদেশিক মুদ্রার পরিপেক্ষিতে রপ্তানি মূল্যের আপেক্ষিক পরিবর্তন বের করতে পারি:

$$\left(\frac{dPex}{Pex}\right) / \frac{de}{e} = \frac{Sex}{(\eta f\text{-}Sex)} \quad \text{..(৯ক)}$$

যেহেতু জোগানের স্থিতিস্থাপক শূণ্য বা ধনাত্মক এবং চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা শূণ্য বা ধণাত্মক (গিফেন দ্রব্য বাদ দিলে), ফলে এই অভিব্যক্তটি অব্যশই শূণ্য বা ধণাত্মক মান থাকতে হবে।

সামান্য পরিবর্তনের জন্য, রপ্তানি আয়ের পরিবর্তনকে পরিমানের পরিবর্তন এবং মূল্যের বা আয়তনের পরিবর্তনের যোগফল হিসাবে উপস্থাপিত করা যাবে:

$$\eta\ Ex = (dex/ex)(de/e) + (dPex/Pex)(\frac{de}{e}) \quad \text{..................................(১০)}$$

১০নং সমীকরণে ৯ এবং ৯(ক) সমীকরণকে প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই:

$$\eta\ Ex = (\eta f\ Sex)/(\eta f\text{-}Sex) + (Sex/\eta f\text{-}Sex)$$

$$= (\eta f+1)/[(\eta\ f/Sex)-1] \quad \text{..(১১)}$$

আমদানিকৃত দ্রব্যের জন্য, আমরা আবার ভারসাম্য শর্ত থেকে শুরু করতে পারি:

$$Im = Sim\ (Pim)=Dim\ (Pim.e) \ldots\ldots (১২)$$

একই পন্থা ব্যবহার করে আবার আমারা পাই

$$\eta Im = (Sim+1)/[(Sim/\eta d)-1]<0 \ldots\ldots (১৩)$$

যেখানে Sim হল আমদানির জোগান স্থিতিস্থাপকতা আর ηd হল আমদানিকৃত চাহিদার জন্য দেশীয় দাম স্থিতিস্থাপকতা সমীকরণ ১১ এবং ১৩নং সমীকরণকে ৪নং সমীকরণে প্রতিস্থাপিত করে। আমরা বাণিজ্য ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপকতা পাই:

$$\eta BOT=(Ex/Im).\{(nf+1)/[(nf/Sex)-1\}-(Sim+1)/[(Sim/\eta d)-1]..(১৪)$$

এটিই হল বিকারডিক–মেটজ্লার--রবিনসন শর্ত।

অনমনীয় দাম এবং অসীমভাবে জোগান স্থিতিস্থাপকতাসমূহের ক্ষেত্রে, সমীকরণ (১৪)–কে সহজ করে লিখলে দাঁড়ায়:

$$\eta BOT=(Ex/Im)\ (-\eta f-1)-\eta d$$

যদি আমরা ভারসাম্য থেকে শুরু করি, অর্থাৎ যেখানে Ex=Im, সেখানে তখন আমরা পাব ম্যার্শ্যাল–লারনার শর্ত। ১৮৭৯ সালে আলফ্রেড ম্যার্শ্যাল এবং ১৯৪৪ সালে ফের একবার স্বাধীনভাবে আবার লারনার এই পদ্ধতির প্রধান উপ্যপাদ্যটি তৈরি করেছিলেন। এখন এটি দুটি নামের সাথেই যুক্ত হয়ে তা চিহ্নিত হয়েছে। যদি $\eta f+\eta d<-1$ হয়, $\eta BOT>0$ হবে। সেক্ষেত্রে তখন লেনদেন ব্যালেন্সের চলতি খাতের উন্নতি হবে। যদি $Ex/Im<1$ হয়, অর্থাৎ আমরা যদি বাণিজ্য ঘাটতি দিয়ে শুরু করি, তখন ম্যার্শ্যালি–লারনার শর্তটি পর্যাপ্ত (sufficient) হলেও, বাণিজ্য বানিজ্যের উন্নতির ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় (necessary) শর্ত পালন করবে না।

এখন আমরা ব্যণিজ্য শর্তের (Terms of Trade) – ওপর অর্থমূল্যায়নের প্রভাব বিশ্লেষন করি সামান্য পরিবর্তনের জন্য, আমরা বিনিময়হারের সাপেক্ষে বাণিজ্য শর্তের স্থিতিস্থাপকতা এভাবে লিখতে পারি:

$$\eta ToT=\left(\frac{dPex}{Pex}-\frac{dPim}{Pm}\right)/\frac{de}{e} \qquad \text{যার অর্থ}$$

$$\eta TOT=\ Sex/(\eta f-Sex)-\eta d/(Sim-\eta d)$$

$$= (Sex.Sim-\eta f\eta d)/[(\eta f-Sex)\ (Sim-\eta d)] \ldots\ldots (১৫)$$

এখন অবমূল্যায়ন হলে, বাণিজ্য শর্ত তখনই উন্নতি করবে যদি $\eta f\eta d>Sex.Sim$ হয়। তবে বাণিজ্য শর্তের পরিবর্তন হবে না, যদি $\eta f\eta d=Sex-\eta d^2$ হয়, তবে বাণিজ্য শর্তের অবনতি হবে।

একবার কারেন্সির অবমূল্যায়ন হলে, এর দুটি প্রভাব কাজ করে:

(১) দাম প্রভাব – বৈদেশিক কারেন্সির পরিমাপে রপ্তানি সস্তা হবে। দাম প্রভাব লেনদেন ব্যালেন্সের চলতি খাতের অবনতি ঘটাবে।

(২) আয়তন প্রভাব – আয়তন প্রভাব লেনদেন ব্যালেন্সের চলতি খাতের উন্নতি ঘটাবে। নেট এফেক্ট নির্ভর করবে দাম বা আয়তন প্রভাব প্রাধান্য পায় কিনা তার ওপর।

লেনদেন ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপক পদ্ধতির সীমাবদ্ধতা :

প্রথমত, আমদানি চাহিদা অপেক্ষক এবং রপ্তানি জোগান অপেক্ষক শুধুমাত্র ভারসাম্য পূণ্য পণ্যের নামমাত্র মূল্যের ওপর নির্ভর করে। আপেক্ষিক দামের এখানে কোন স্থান নেই।

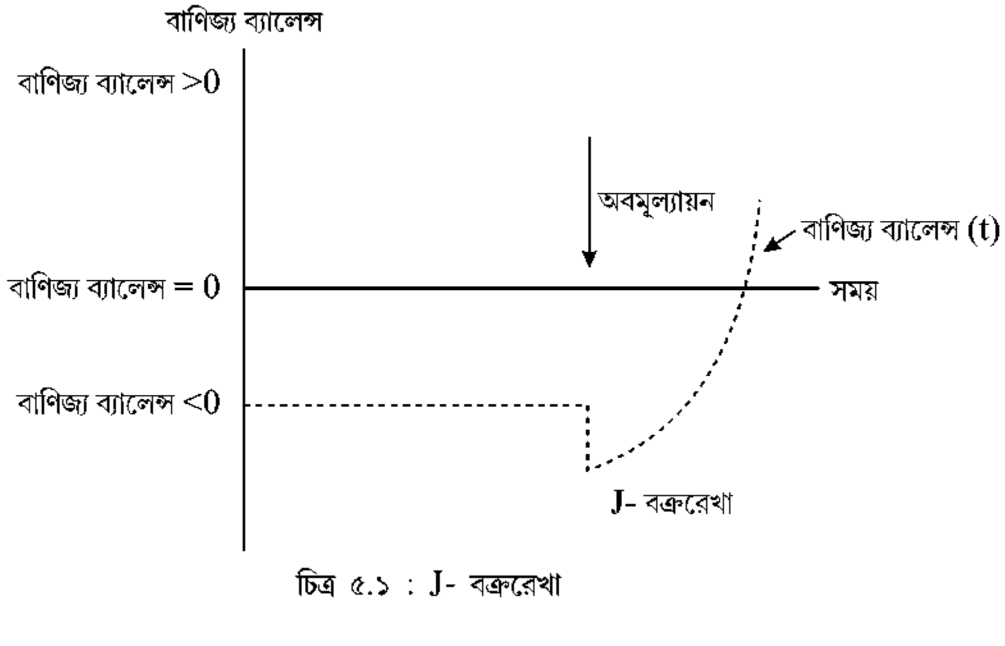
দ্বিতীয়ত, এখানে ক্রয় সমষ্টি বা C+I+G এর কোনা উল্লেখ নেই

তৃতীয়ত, সমীকরণগুলি কেবল আংশিক ভারসাম্যের কাঠাথেকে বিশ্লেষণ করে।

চতুর্থত, এই পদ্ধতির সমালোচকরা বলে থাকে যে অবমূল্যয়ণ উন্নতশীল শিল্প সমৃদ্ধ দেশে যতটা কাজ করে। উন্নয়নশীল দেশে ততটা কার্যকরী নয়। যেমন মার্শ্যাল–লারনার শর্তটি ভারতে কার্যকরী নয়।

অবমূল্যায়নের জন্য স্থিতিস্থাপক পদ্ধতির ক্রটি থাকা সত্ত্বেও এবং এটি অবাস্তব অনুমানের ওপর ভিত্তি করে গঠিত হলেও, এখনও অনেক অর্থনীতিবিদ লেনদেন ব্যালেন্সের ঘাটতি সংশোধনে এ পদ্ধতির ওপর আস্থা রেখেছেন। তবে বেশিরভাগ অর্থনীতিবিদরা এই ঐক্যমতে পৌঁছেছেন যে দীর্ঘমেয়াদের তুলনায় স্বল্পমেয়াদে স্থিতিস্থাপকতা কম থাকে, সেক্ষেত্রে মার্শ্যালি–লারনার শর্ত মাঝারি থেকে দীর্ঘমেয়াদে কাজ নাও করতে পারে, যেহেতু স্বল্পমেয়াদে রপ্তানিও আমদানির আয়তন প্রতিক্রিয়া জানতে সময় নেয়।

সাধারণত দীর্ঘমেয়াদে মার্শ্যাল–লারনার শর্ত পূরিত হয়। কিন্তু অল্প সময়ে মধ্যে এই শর্ত পূরিত মাও হতে পারে একেই J –রেখা এফেক্ট বলে চিহ্নিত কার হয় যা রেখাচিত্র ৫.১-এ প্রদর্শিত হল। এই রেখাটি সময়ের প্রক্ষিতে লেনদেন ব্যালেন্সের চলতি খাত প্লট করে।



চিত্র ৫.১ : J- বক্ররেখা

গোড়ার দিকে এই J–রেখা নিম্নাভিমুখী হবার অল্পপরেই রেখাটি উর্দ্বগামী হতে থাকে। এমনটিই সচারাচর দেখা যায়, মুদ্রার অবমূল্যায়নের পর দেশের বাণিজ্য–ব্যালেন্সের গতিবিধিতে। মুদ্রার অবমূল্যায়নের পর পরই বাণিজ্য–ব্যালেন্সে ঘাটতি বেড়ে গেলেও খুব অল্পদিনেই উদ্‌বৃত্ত ব্যণিজ্য দেখা দেবেই।

গোড়ার দিকে ব্যাণিজ্য-ব্যালেন্সে দুর্বলতা দেখা দেওয়ার দুটি কারণ

(১) অবমূল্যায়নের ফলে দেশীয় মুদ্রার হিসাবে আমদানির দর বৃদ্ধি পেলেও আগেকার অভ্যাস অনুযায়ী আমদানি চলতে থাকে, তাকে কমিয়ে আনতে কিছু সময় লাগে।

(২) রপ্তানির বাজারে অবমূল্যায়ন রপ্তানি পণ্য বিদেশীদের কাছে সস্তা করে দিলেও তারা চট করে নতুন উৎস থেকে কেনার পরিমান বাড়ায় না, পুরোনো উৎস থেকেই কেনাকাটা করতে থাকে। ফলে অবমূল্যায়নের ফলে দেশের রপ্তানি তৎক্ষনাৎ বেড়ে যায় না।

5.4 মার্শ্যাল-লারনার নির্দেশিত শর্ত

বিনিময় হারের অবমূল্যায়ণকে সফল করতে হলে কয়েকটি বিশেষ শর্ত মানা প্রয়োজন। মার্শ্যলে–লারনার শর্তটি অন্যতম একটি শর্ত। শর্তটি আমদানি-রপ্তানির চাহিদা স্থিতিস্থাপকতার ওপর প্রতিষ্ঠিত। অর্থশাস্ত্রী এ.পি.লারনার তাঁর 'Economics of Control' (১৯৪৪) গ্রন্থটিতে মার্শ্যালের চাহিনা স্থিতিস্থাপকতা ধারনাটিকে ব্যবহার করে একটি সূত্র খাড়া করেন। সেই সূত্রটিই মার্শ্যাল–লারনার নির্দেশিত শর্ত নামে অর্থশাস্ত্রে পরিচিত। সহজ ভাষায় সূত্রটিকে এইভাবে পরিবেশিত হয়: অবমূল্যায়নের ফলে বহির্বাণিজ্যের হিসাবে উন্নতি ঘটাতে হলে আমদানি এবং রপ্তাহি উভয়ের চাহিদা স্থিতিস্থাপকতার যোগফলকে একের চেয়ে বেশি হতে হবে।

অবমূল্যায়নের ফলে রপ্তানি বাড়বে কিনা তা নির্ভর করে বৈদেশিক বাজারে অবমূল্যায়নকারী দেশের রপ্তানি দ্রব্যের চাহিদা স্থিতিস্থাপকতার ওপর। রপ্তানি দ্রব্যের চাহিদা স্থিতিস্থাপকতা যত বেশি হবে, আমদানি তত কমবে। অবমূল্যায়ন ঘটলে রপ্তানি দ্রব্যের দাম কমে এবং আমদানি দ্রব্যের দাম বাড়ে। তাই অনুমান করা হয় যে এর ফলে রপ্তানি বাড়বে এবং আমদানি কমবে এবং বহির্বাণিজ্যের হিসাবে উন্নতি ঘটবে,বলাই বহুল্য।

সূত্রটিকে একটু লক্ষ করলেই বোঝা যাবে যে বাহিবাণিজ্যের উন্নতি ঘটাতে হলে চাহিদা স্থিতিস্থাপকতা দুটির যোগফলকে একের চেয়ে বেশি হতে হবে। যোগফল যদি একের কম হয় তাহলে বহির্বাণিজ্যের হিসাবে উন্নতি ঘটাতে বিনিময় হারের মূল্যবৃদ্ধি (appreciation) করতে হবে। অবমূল্যায়নে কোন লাভ হবে না।

উপসংহারে বলা প্রয়োজন যে সূত্রাকারে মার্শ্যাল-লারনারের যে শর্তটির কথা বলা হয়েছে সেটি কয়েকটি বিশেষ সরলীকৃত অনুমানের ওপর প্রতিষ্ঠিত।

১. অনুমান করা হয় যে জোগানের স্থিতিস্থাপকতার মান খুব বেশি। প্রায় অসীমের কাছাকাছি।

২. এও অনুমান করা হয় যে, যখন মুদ্রার হারের অবমূল্যায়ন করা হয় তখন বহির্বাণিজ্যে ভারসাম্য বজায় আছে।

যাই হোক না কেন, শর্তটির মূল বক্তব্য হল যে দুটি চাহিদা স্থিতিস্থাপকতার মান যত বেশি হবে ততই অবমূল্যায়ন বহির্বাণিজ্যের ওপর সুপ্রভাব ফেলবে।

5.5 লেনদেন ব্যালেন্সের ক্রয়সমষ্টি বিচার পদ্ধতি

বিনিময় হারের অবমূল্যায়ন (devaluation) অথবা মূল্যহ্রাস (depreciation) কোনো দেশের বহির্বাণিজ্যের হিসাবের ওপর কী প্রভাব ফেলে তার একটি বিশেষ বিশ্লেষণ পদ্ধতি হল–লেনদেন ব্যালেন্সের ক্রয়সমষ্টি বিচার পদ্ধতি (Absorption approach to balance of payments)। এই পদ্ধতিতে জাতীয় উৎপাদন (Y) এবং জাতীয় ক্রয়সমষ্টি (A=C+I+G)-র মধ্যে যে সম্পর্ক আছে তার ওপর জোর দেওয়া হয়। ক্রয়সমষ্টি বলতে দেশের অভ্যন্তরে ভোগব্যয়, বিনিয়োগব্যয়, এবং সরকারিব্যয় যোগ করে যে পরিমাণ কেনাকাটা করা সম্ভব তাকেই বোঝানো হয়। এখন A যদি Y এর তুলনায় বেশি হয় তবে স্বাভাবিক কারনেই এই ক্রয়ের কিছু অংশ আমদানির ওপর ব্যয়িত হবে। ফলে দেশে বাণিজ্য ঘাটতি দেখা যাবে। এখন Y যদি A-এর চেয়ে বেশি হয়, তবে বহির্বাণিজ্যের হিসাবে উদ্বৃত্ত হবে।

সুতরাং এই সম্পর্কটিকে খুব সাদামাটা হিসেবে দেখলে B = Y – A, এইভাবে দেখানো য়ায়। একটু স্পষ্টভাবে লিখলে দাঁড়ায় এই যে মুক্ত অর্থনীতির আয়-ব্যয় সমীকরণ তখন হবে:

$$Y = C+I+G+X-M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(১)$$

সাজিয়ে অন্যভাবে লিখলে দাঁড়ায় ঃ

$$M+Y = C+I+G+X \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(২)$$

বামপক্ষ দেখায় দেশজ উৎপাদন ও আমদানির ফলে মোট সম্পদ অর্থব্যবস্থার কাছে কত আছে তা। ডানপক্ষ দেখায় দেশজ ও বিদেশি উৎস উভয়েরই থেকে কতটা মোট ব্যয় হয়েছে। সমীকরণটি অবার সাজিয়ে লিখলে দাঁড়ায় :

$$X - M = Y - (C+I+G) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(৩)$$

এইক্ষেত্রে, বামপক্ষ লেনদেন ব্যালেন্সের হিসেব প্রদত্ত করে, যেখানে ডানপক্ষ দেখায় যে এটি দেশজ উৎপাদন (Y) এবং দেশজ ব্যয় বা ক্রয়সমষ্টি (C+I+G)

ব্যালেন্সের ভারসাম্য্য থেকে শুরু করলে, এই ক্রয়সমষ্টির পরিবর্তন ব্যালেন্সের ঘাটতি এনে দেবে। বিশেষ করে বললে :

$$\Delta BP = \Delta Y - \Delta A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(৪)$$

যেখানে ΔBP হল লেনদেন ব্যালেন্সের পরিবর্তন, ΔY হল দেশজ উৎপাদনের পরিবর্তন এবং ΔA হল দেশজ ক্রয়সমষ্টি (C+I+G)-এর পরিবর্তন।

এখানে Y এবং A একে অপরের উপর নির্ভরশীল নয়। যদি Y-এর পরিবর্তন হয়, তবে তা A-তেও পরিবর্তন আনবে যেমন:

$$\Delta A = c\Delta Y ....(৫)$$

যেখানে c হল ব্যয়ের প্রান্তিক প্রবণতা। ওপরের সমীকরনটি আবার অন্যভাবেও উপস্থাপিত করা যায়:

$$\Delta A = c\Delta Y + \Delta Z ....(৬)$$

যেখানে ΔZ অন্য প্রভাবের পরিবর্তনের কথা বলে। (৪) এবং (৬) নং সমীকরণকে একসাথে যুক্ত করে আমরা পাই

$$\Delta BP = \Delta Y - (c\Delta Z + \Delta Z) ....(৭)$$

এবং

$$\Delta BP = \Delta Y - c\Delta Z - \Delta Z ....(৮)$$

এই উপস্থাপনা অনুসারে, লেনদেন ব্যালেন্সের চলতি খাতে তখনই পরিবর্তন হবে যদি দেশজ উৎপাদন এবং আয়, ব্যয়ের প্রান্তিক প্রবণতা অথবা স্বয়ংচালিত (autonomous) ব্যয়ের পরিবর্তন হয়।

ভোগের ওপর জোর না দিয়ে সঞ্চয়ের ওপর জোর দেয় এই লেনদেন ব্যালেন্সের ক্রয়সমষ্টি বিচার পদ্ধতিটি যা কিনা চলতি খাতে লেনদেন ব্যালেন্সের হিসেব দেয়। খানিকটা অন্যভাবেও উপস্থাপিত করা যায়।

ওপরের সমীকরণ (৩) এর স্থানে, আমরা লিখতে পারি

$$X - M = (S - I) + (T - G) ....(৩^{*})$$

ওপরের সমীকরণটি থেকে আমর বলতে পারি যে লেনদেন ব্যালেন্সের অসমস্থিতি (disequilibria) বেসরকারি ক্ষেত্রের সঞ্চয় ও বিনিয়োগ অসংঙ্গতি (inbalance) অথবা রাজকোষ অসমস্থিতির সঙ্গে জড়িত। চলতি খাতে ঘাটতি উদ্‌বৃত্ত ভোগ বা ঘাটতি (deficit) সঞ্চয়ের সঙ্গে জড়িত। ক্রয়সমষ্টি বিচরপদ্ধতিকে এইভাবে ভাবা অত্যন্ত কার্যকরী কেননা এই বিচারপদ্ধতি এই কথাই জানান দেয় যে, রাজকোষ, ঘাটতি হলেই যে তা চলতিখাতে উন্নতি ঘটবে এমন কোনো অর্থ নেই।

যেহেতু বিনিয়োগ, তার নিজের প্রকৃতিতেই ভবিষ্যতের দিকে দূরদৃষ্টি সম্পন্ন (forword-looking) এবং সঞ্চয় হল deferred ভোগ, সুতরাং সিডনী আলেক্সজান্ডারের লেনদেন ব্যালেন্সের এই বিচারপদ্ধতি মূলত: ইনটার–টেমপোরাল (inter-temporal)।

এই বিচার পদ্ধতির সমালোচনা ঃ

১। লেনদেন ব্যালেন্সের এই ক্রয়সমষ্টি বিচারপদ্ধতি অবমূল্যায়ণ-এর দাম প্রভাবকে উপেক্ষা করে, যা কিনা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

২। লেনদেন ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপক পদ্ধতির চেয়ে এটি উন্নততর হলেও, ভোগ প্রবণতা, সঞ্চয় প্রবণতা সঠিকভাবে পরিমাপ করা যায় না।

৩। এই বিচারপদ্ধতি এই অর্থে দুর্বল যে এটি শুধুমাত্র দেশজ ক্রয়সমষ্টির ও তদ্ধাত কর্মনীতির ওপরেই গুরুত্ব দেয়।

৪। স্থির মুদ্রাবিনিময় হার সিস্টেমে, লেনদেন ব্যালেন্সের ঘাটতি দূর করতে এই পদ্ধতি খুব একটা বেশি সহায়ক হয় না।

৫। এই বিচারপদ্ধতি আপেক্ষিক দামস্তরের ওপর তেমন আলোকপাত করে, যেমনটি করে দেশজ ভোগের উপর।

৬। এই বিচারপদ্ধতিতে মনেটারি বা আর্থিক ক্ষেত্র উপেক্ষিত হয়েছে।

5.6 লেনদেন ব্যালেন্সের আর্থিক বিচার পদ্ধতি

রবার্ট মানডেল ও হ্যারি জি জনসনের মতো একটি গ্রুপের কাছ থেকে এই পদ্ধতির উদ্ভব হয়েছিল। পোলাক এবং অন্যান্যরা ১৯৫০-এর দশকের শেষের দিকে এবং ১৯৬০-এর দশকের শুরুতে আইএমএফ এই কাজটি শুরু করেছিল। এটি মুক্ত-অর্থনীতির আর্থিক তত্ত্বের সম্প্রসারণ হিসাবে দেখা দেয়।

অনুমান ঃ

১। এখানে অনুমান করা হয় দেশটি ছোট।

২। সম্পর্ণরূপে কর্ম নিযুক্ত

৩। এটির একটি স্থির বিনিময় হার রয়েছে এবং পন্য ও আর্থিক সম্পদের একটি নিঁখুত আন্তর্জাতিক গতিশীলতা রয়েছে।

৪। আর্থিক ব্যবস্থা বেকারত্বের ন্যূনতম স্বাভাবিক হারে (natural rate of unemployment)।

৫। টাকাকড়ির জন্য চাহিদা আপাত আয়ের সঙ্গে এক সুস্থির অপেক্ষক, যেখানে টাকাকড়ি বিনিময়ের মাধ্যম।

৬। দীর্ঘকালে নিশ্চিতভাবে, টাকাকড়ির জোগানের পরিবর্তন অর্থনীতির আসল চলকের ওপর কোনো প্রভাব ফেলবে না।

তাত্ত্বিক ভিত্তি

এখানে অর্থের যোগান (M_s) হল উচ্চক্ষমতাসম্পন্ন অর্থের স্টক (H) এবং মুদ্রার গুণকের সমাহার

$$M_s = mH \qquad \text{(১)}$$

সজ্ঞানুসারে

$$H = eR + D \qquad \text{(২)}$$

যেখানে e হল বিনিময় হার, বৈদেশিক মুদ্রার অভ্যন্তরীন মুদ্রার মূল্য হিসাবে সজ্ঞায়িত এবং R হল আন্তর্জাতিক রিজার্ভের বৈদেশিক মুদ্রার মান এবং D হল দেশীয় সম্পদ [দায় (Liability) নয়]

টাকার চাহিদা নামমাত্র পদে (nominal terms) এভাবে লেখা যেতে পারে ঃ

$$Md = Pf\ (Y,\ i)........................(৩)$$

যেখানে P অভ্যন্তরীণ মূল্যস্তরে নির্দেশ করে, Y হল দেশজ প্রকৃত আয়ের স্তর এবং i হল দেশজ নামমাত্র সুদের হার।

অর্থ বাজারের ভারসাম্য তখনই হবে যখন, Ms = Md হবে। সমীকরণ (১), (২) এবং (৩) ব্যবহার করে আন্তর্জাতিক রিজার্ভের (আন্তর্জাতিকভাবে নির্ধারিত) স্টক (R) হিসাবে নির্দেশ করা যেতে পারে

$$R = g\ (P,\ Y,\ i,\ m,\ D)..........(৪)$$

সমীকরণ (৪) একটি নির্দিষ্ট বিনিময় হার পদ্ধতির অধীনে অর্থপ্রদানের ভারসাম্যর জন্য আর্থিক পদ্ধতির দ্বারা নিহিত মূল সম্পর্ককে উপস্থাপন করে। Ms এবং Md এর অনুমানকৃত স্পেসিফিকেশনগুলি বোঝায় যে প্রকৃত আয় এবং বিশ্বের মূল্য বৃদ্ধি আন্তর্জাতিক রিজার্ভের স্টক বাড়ায়।

রিজার্ভের স্টকের এই পরিবর্তনসমূহ লেনদেন ব্যালেন্সের উদ্বৃত্ত বা ঘাটতিতে প্রতিফলিত হয়। এই সরলীকৃত মডেলে খোলা বাজারের ক্রয়ের মাধ্যমে অর্থসরবরাহের বৃদ্ধি (D বৃদ্ধি) রিজার্ভের অনুরূপ পতন দ্বারা সম্পূর্ণ রূপে অফ্সেট হয়।

এই লেনদেন ব্যালেন্সের এই আর্থিক পদ্ধতির মৌলিক অবদান এই সত্যে নিহিত যে এটি স্থির বিনিময় হারের অধীনে বা নমনীয় বিনিময় হারের অধীনে বিনিময় হারের নিধারকদের 'স্টক-ফ্লো' সমন্বয় প্রকৃতির ওপর জোর দেয়।

লেনদেন ব্যালেন্সের এই 'মনিটারি অ্যাপ্রোচ' এর উদ্দেশ্য হল, লেনদেন ব্যালেন্সের এমন একটি তত্ত্ব খাড়া করা যা এই সত্যের উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত হবে, যেখানে লেনদেন ব্যালেন্স হল আন্তর্জাতিক একটি আর্থিক ঘটনা এবং আর্থিক ধারণার পরিপ্রেক্ষিতেই এর বিচার বিশ্লেষন করা উচিত।

লেনদেন ব্যালেন্সের ক্রয়সমষ্টি বিচার পদ্ধতি ও লেনদেন ব্যালেন্সের আর্থিক বা মনেটারি বিচার পদ্ধতি– একটি তুলনামূলক আলোচনা :

মনেটারি বিচারপদ্ধতির প্রধান বৈশিষ্ট্য নিম্নরূপ ঃ

১। টাকাকড়ির চাহিদা ও জোগানের মধ্যে যে স্টক অসংগতি (imbalance) আছে, তাই প্রতিফলিত হয় লেনদেন ব্যালেন্সের অসংঙ্গতি দ্বারা। অপরদিকে ক্রয়সমষ্টি বিচার পদ্ধতি ব্যয় প্রবাহ (expenditure flow) প্রাসঙ্গিকতার ওপর গুরুত্ব আরোপ করে।

২। মনেটারি বিচারপদ্ধতিতে লেনদেন অসমস্থিতি স্বল্পকালীন এবং নিজে নিজেই এটি অসমস্থিতির অবসান ঘটাতে পারে।

৩। এই মনেটারি বিচার পদ্ধতি সমগ্র লেনদেন ব্যালেন্সের হিসাবই পর্যালোচনা করে, মূলধনী খাতকেও ধর্তব্যের মধ্যে এনে।

৪। মনেটারি বিচার পদ্ধতির কর্মনীতি ফলিতার্থ হল, হয় কিছু না করা বা নিজে নিজে সংশোধিত

(self-correcting) হোক এমন একটি mechanism-র ওপর ছেড়ে দেওয়া। অবশ্য নিজে নিজে সংশোধিত হওয়ার পদ্ধতি কিছু সময় নেবে।

৫। সর্বশেষ বৈশিষ্ট্য হল এই যে আর্থিক বিচার পদ্ধতি বিশ্লেষণ দীর্ঘকালীন। স্বল্পকালীন সমস্যা এখানে উপেক্ষিত হয়।

5.7 সংক্ষিপ্তসার

এই এককে বৈদেশিক লেনদেনের ব্যালেন্সের বিভিন্ন তত্ত্বের মধ্যে শুধুমাত্র তিনটি তত্ত্ব আলোচনা করা হল, যার মধ্যে লেনদেন ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপক বিচার পদ্ধতি জানায় যে, একটি দেশ যদি মুদ্রার অবমূল্যায়ন ঘটায় তখন লেনদেন ব্যালেন্সের চলতি খাতে কী ঘটবে? অন্যদিকে লেনদেন ব্যালেন্সের ক্রয়সমষ্টি বিচারপদ্ধতি হল একটি বিশ্লেষণ পদ্ধতি যেখানে বিনিময় হারের মূল্যহ্রাস বা অবমূল্যয়ন হলে তা বহির্বাণিজ্যের হিসাবের ওপর তা কী প্রভাব ফেলবে। অন্যদিকে লেনদেন ব্যালেন্সের আর্থিক বিচার পদ্ধতি মূলত: মুক্ত–অর্থনীতির আর্থিক তত্ত্বের সম্পসারণ।

5.8 অনুশীলনী

উত্তরভিত্তক প্রশ্ন:

১) লেনদেন ব্যালেন্স বলতে কী বোঝ?

২) ব্যাণিজ্য ব্যালেন্স কী?

৩) মার্শ্যাল–লারণার নির্দেশিত শর্ত কী? ভারতের ক্ষেত্রে এই শর্ত কার্যকর কী?

৪) লেনদেন ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপক বিচারপদ্ধতি কী বিশ্লেষণ করে?

৫) লেনদেন ব্যালেন্সের ক্রয়সমষ্টি বিচারপদ্ধতি কী?

৬) J–বক্ররেখার বৈশিষ্ট কী?

৭) ক্রয় সমষ্টি বলতে কী বোঝ?

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

১) লেনদেন ব্যালেন্সের ক্রয়সমষ্টি বিচারপদ্ধতি কীভাবে সমালোচিত হয়েছে ব্যাখ্যা কর।

২) লেনদেন ব্যালেন্সের ক্রয়সমষ্টি বিচারপদ্ধতি ও লেনদেন ব্যালেন্সের আর্থিক বিচারপদ্ধতির একটি তুলনামূলক আলোচনা কর।

৩) লেনদেন ব্যালেন্সের আর্থিক বিচারপদ্ধতির অনুমানগুলি কী কী?

৪) J–বক্ররেখার এফেক্ট বলতে কী বোঝ, চিত্র সহকারে ব্যাখ্যা কর।

দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

১) লেনদেন ব্যালেন্সের স্থিতিস্থাপক পদ্ধতি আলোচনা কর। এই পদ্ধতি কা এখনও প্রাসঙ্গিক।

২) ''লেনদেন ব্যালেন্সের হল আন্তর্জাতিক এক আর্থিক ঘটনা । সুতরাং আর্থিক ধারণার

পরিপেক্ষিতে এর বিচার করা উচিত"– তুমি কী এই মতের সঙ্গে একমত? তোমার উত্তরের সাপেক্ষে যুক্তি দেখাও।

৩) J–বক্ররেখা এফেক্ট কী, চিত্রসহযোগে আলোচনা কর।

৪) লেনদেন ব্যালেন্সের ক্রয়সমষ্টি পদ্ধতি আলোচনা কর। এই পদ্ধতি কী? স্থিতিস্থাপক পদ্ধতি থেকে উন্নতর? ব্যাখ্যা কর।

5.9 গ্রন্থপঞ্জী

Karmakar, A.K. (2010) *Balance of payments theory and policy*, Deep & Deep Publications, New Delhi

Meade, (2007) *Balance of Payments Policy.*

একক 6 ❑ মুক্ত অর্থনীতির সমষ্টিগত তত্ত্বের মডেল

গঠন

6.1 উদ্দেশ্য

এই এককের বিষয়বস্তু পাঠ করলে জানা যাবে:

- অবাধ ও বাধাযুক্ত মূলধনের চলাচল সম্পর্কে ধারণা;
- একটি কেইন্সীয় মুক্ত অর্থনীতির মডেল কীভাবে কাজ করে;
- তাছাড়া, অভ্যন্তরীন ও বৈদেশিক বহিঃস্থ ব্যালেন্স সম্পর্কে ধারণা;
- মানডেল-ফ্লেমিং এবং ডর্নবুশের ওভার সুটিং মডেল সম্পর্কে সম্যক তত্ত্ব কথা; এবং
- অসম্ভব ত্রিপুটি, যা মুক্ত অর্থনীতিতে এক বিপ্লব এনেছে।

6.2 প্রস্তাবনা

অভ্যন্তরীণ বাণিজ্য এবং আন্তর্জাতিক বাণিজ্যের মধ্যে মূল পার্থক্য হল যে বৈদেশিক বাণিজ্যে কেবল একটি প্রচলিত মুদ্রা ব্যবহিত হয় না; দেশ অনুযায়ী আলাদা আলাদা মুদ্রা ব্যবহৃত হয়। এখন মুদ্রাবিনিময় হার স্থির হলে যেসব দেশে বাণিজ্য উদবৃত্ত দেখা দিচ্ছে সেসব দেশে আন্তজাতিক আর্থিক সম্পদ প্রবেশ করবে। ঠিক তখন উল্টোটাই ঘটবে ঘাটতি বাণিজ্যের দেশগুলিতে। যা হোক, এখানে আমরা নিখুঁত ও

খুঁতযুক্ত মূলধনের চলাচল সম্পর্কে ধারণার অবতারনা করব। তাছাড়া বিভিন্ন মডেলের সাহায্যে আন্তর্জাতিক বাণিজ্য গতিবিধি আলোচনা করব যেমন মানডেল-ফ্লেমিং মডেল এবং ডর্নবুশের ওভারসুটিং মডেল।

6.3 অবাধ ও বাধাযুক্ত মূলধনের যাতায়াত

মুক্ত অর্থনীতির সমষ্টিগত তত্ত্বের (Open economics macroeconomics) আলোচনায় মূলধনের আগমন-নির্গমন বিষয়টি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। আমরা জানি যে যে-কোনো একটি অর্থব্যবস্থার আচরণ ও প্রকৃতি নির্ভর করে সেই অর্থব্যবস্থাটি কী ধরনের বিনিময় হার অনুসরণ করছে তার ওপর। মুদ্রাবিনিময় হারের প্রকৃতির ওপরই নির্ভর করে প্রসাবণশীল মুদ্রানীতি (expantionary monetary policy) এবং রাজকোষ-নীতি (fiscal policy) কার্যকরী হবে কিনা। আর্ন্তজাতিক ক্ষেত্রে মূলধনের চলাচল বা যাতায়াত যদি সম্পূর্ণ অবাধ হয় (perfect capital mobility) তাহলে স্থির বিনিময়-হারের ক্ষেত্রে মুদ্রানীতি সম্পূর্ণ অকেজো হবে এবং রাজকোষ নীতি অকেজো হবে নমনীয় মুদ্রাবিনিময় হার চালু থাকলে।

মূলধনের চলাচল সম্পূর্ণ অবাধ হওয়ার অর্থ সুদের হার, বিশ্ব সুদের হারের থেকে আলাদা হবে না (অন্যথায় মূলধন প্রাপ্তি বা yeild এর অনুসন্ধানে আগমন ও নির্গমন অবিরত চলতে থাকবে)'। এটিকে অনুভূমিক সুদের হার আরব্রিটেস-এর শর্ত রেখা দ্বারা চিহ্নিত করা যাবে।

6.4 একটি সরলীকৃত কেইন্‌সীয় মুক্ত অর্থনীতির মডেল

সরলীকৃত কেইন্‌সীয় মুক্ত অর্থনীতির মডেলটি শুরু হয়েছিল যখন জন মেনার্ড কেইন্‌স (১৮৮৩–১৯৪৬) তার বক্তব্য পেশ করেছিল জাতীয় আয়ের পরিমাপ সম্পর্কিত একটি মৌলিক অভেদ (identity) থেকে।

জাতীয় আয় $Y= C+I+G+(X-M)$ যেখানে সমান চিহ্নের ডানদিকে রয়েছে চাহিদার বিভিন্ন প্রকার; যেমন C = উপভোগ্য বস্তুর জন্য চাহিদা, I = উপভোগ্য বস্তু তৈরি করার জন্য নানা উপকরণের চাহিদা, G = সরকার যেসব বস্তুর জোগান দেয় (প্রতিরক্ষা প্রশাসন বিচার ব্যবস্থা ইত্যাদি) তাদের জন্য চাহিদা, $X-M$ স্বদেশের বস্তু পরিসেবার জন্য বিদেশিদের চাহিদা (X) থেকে বিদেশিদের নিকট থেকে নেওয়া বস্তু পরিসেবার (M) বিয়োগফল। Y-কে মোট জোগান ধরে তাকে বাজারজাত করতে প্রয়োজন হবে $C+I+G+(X-M)$ এই সামগ্রিক চাহিদার।

এই অভেদ্যটি আবার অন্য ভাবে লেখা যায় ঃ

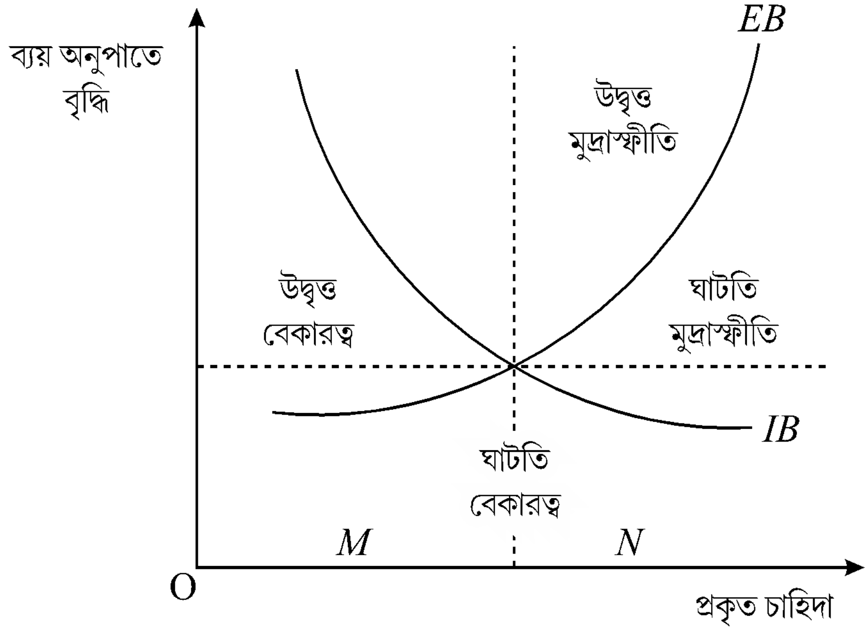
$$I+G+X-M= Y-C$$

যেহেতু $Y-C=S$, অথবা লিখতে পারি $X-M=S-(I+G)$; যদি G-কেও I-এর অন্তর্ভূক্ত অযৌক্তিক না হয়, তবে $X-M=S-I$ এর তাৎপর্য হল যে বৈদেশিক লেনদেন-ব্যালেন্সে উদ্বৃত্ত দেবে শুধু তখনই যখন S হবে I-এর চেয়ে বেশি। S যদি I এর থেকে কম হয় তবে স্বাভাবিক নিয়মেই দেখা যাবে লেনদেন ব্যালেন্সের ঘাটতি, সংক্ষেপে এটিই হল একটি সরলীকৃত কেইন্‌সীয় মুক্ত অর্থনীতির মডেল।

6.5 অভ্যন্তরীণ ও বৈদেশিক বহিঃস্থ্-ব্যালেন্স

এখানে আমরা মুক্ত অর্থনীতিতে সোয়ান (Swan) প্রদত্ত অভ্যন্তরীণ বা বৈদেশিক লেনদেন ব্যালেন্স (বা সমস্থিতি) সম্পর্কে আলোচনা করব।

চিত্রে EB রেখাটি ব্যয় অনুপাত (দেশীয় দামের সঙ্গে বিদেশি দামের অনুপাত) এবং প্রকৃত চাহিদার (যা বাহ্যিক ব্যালেন্স প্রদান করে) সমন্বয়ের প্রতিনিধিত্ব করে। এটির ঢাল উর্দ্ধমুখী কেননা অভ্যন্তরীন চাহিদার বৃদ্ধি লেনদেন ব্যালেন্সে খারাপ ফল ফেলবে, যতক্ষন না ব্যয় অনুপাত যথোপযুক্ত বাড়তে পারে। IB তদ্রুপ ব্যয়-অনুপাত এবং প্রকৃত সমন্বয় পূর্ণ কর্মসংস্থান ঘটাবে। IB রেখাটি নিম্নাভিমুখী রেখা, কেননা ব্যয় অনুপাতের অবনতি হলে এবং তার জন্য রপ্তানির মূল্য হ্রাস পেলে অভ্যন্তরীন চাহিদাকে এর জন্য ক্ষতিপূরণ দিতে হয়, যদি পূর্ণনিয়োগ স্তর আমরা বজায় রাখতে চাই।



চিত্র ৬.১ : অভ্যন্তরীন ও বৈদেশিক লেনদেন ব্যালেন্স

EB এবং IB চিত্রটিকে অঞ্চলে ভাগ করে। EB-এর ডানদিকে লেনদেন ব্যালেন্স ঘাটতি থাকবে কেননা প্রদত্ত ব্যয় অনুপাতের সাথে, অভ্যন্তরীণ চাহিদা প্রসারিত হয়েছে। অন্যদিকে EB -এর বামদিকে লেনদেন ব্যালেন্সের উদ্বৃত্ত থাকবে। IB-এর ডানদিকে আবার মুদ্রাস্ফীতি হবে কেননা প্রদত্ত ব্যয় অনুপাতের সাথে বৃহত্তর অভ্যন্তরীন চাহিদা রয়েছে। IB রেখার বামদিকে থাকবে বেকারত্ব।

উপযুক্ত কর্মনীতির মিশ্রনে যে অঞ্চলে অর্থনীতি অবস্থিত তার দ্বারা নির্ধারিত হবে না কিন্তু তা হবে একটি অঞ্চলের মধ্যে অর্থনীতির (economy) অবস্থান দ্বারা। IB এবং EB রেখার মধ্যে ছেদবিন্দুর মাধ্যমে অনুভূমিক ও উল্লম্ব রেখা অঙ্কন করলে দেখা যাবে যে M বিন্দু এবং N বিন্দু উভয়ই ঘাটতি ও বেকারত্ব নির্দেশ করে। M-এ উপযুক্ত কর্মনীতি হল এক উন্নত ব্যয় অনুপাত ও প্রকৃত চাহিদা বৃদ্ধি,

যেখানে N বিন্দুতে এটি উন্নততর একটি ব্যয়-অনুপাত এবং প্রকৃত চাহিদা হ্রাস। এইভাবে শোয়ান, দেখান যে সংকেত আকারে আসা উদ্বৃত্ত, ঘাটতি, মুদ্রাস্ফীতি ও বেকারত্ব নীতিনির্ধারকদের কাছে এক বিভ্রান্তিকর নির্দেশিকা এনে দিতে পারে। যা হোক এই পদ্ধতিটি ব্যাপকভাবে আমাদের অভ্যন্তরীন ও বাহ্যিক ব্যালেন্সের সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা দেয়।

6.6 ম্যানডেল-ফ্লেমিং মডেল (প্রতিকল্প)

মুক্ত অর্থনীতিতে (open economy) স্বল্পমেয়াদে মুদ্রাস্ফীতি (monetary policy) এবং রাজকোষনীতি (fiscal policy) সামগ্রিক আয়কে কীভাবে প্রভাবিত করে তার বিশ্লেষনের উদ্দেশ্যই এই প্রতিকল্পটি গঠিত হয়। নোবেল পুরস্কার বিজয়ী অর্থনীতিবিদ রবার্ট মানডেল এবং আন্তর্জাতিক মুদ্রা ভান্ডারের প্রখ্যাত গবেষক অর্থশাস্ত্রী মারকাস ফ্লেমিং স্বতন্ত্রভাবে প্রতিকল্পটি গঠন করেন এবং পরে উভয়ের যুগ্ম নামেই প্রতিকল্পটি আখ্যায়িত হয়। এই প্রসঙ্গে ক্যানাডিয়ান জার্নাল অফ্ ইকনমিকস্ প্রত্রিকায় ১৯৬৩ সালে প্রকাশিত ম্যানডেলের লেখা 'Capital Mobility and Stabilizingtion Policy under Fixed and Flexible Exchange Rates' এবং ১৯৬২ সালে IMF Staff Paper এ প্রকাশিত Marcus Fleming-এর লেখা 'Domestic Financial Policies Under Fixed and Under Rates Floating Exchange Rates' প্রবন্ধ দুটির উল্লেখ করা যেতে পারে।

মানডেল-ফ্লেমিং প্রতিকল্পটিতে বস্তুতপক্ষে IS-LM প্রতিকল্পটিকে মুক্ত অর্থনীতিতে প্রয়োগ করলে সিদ্ধান্তে কী, কী পরিবর্তন করার প্রয়োজন হয় তারই ব্যাখ্যা করা হয়েছে। উভয় প্রতিকল্পেই অনুমান করা হয়েছে যে দামস্তর অনড়। মানডেল-ফ্লেমিং প্রতিকল্পে ধরা হয়েছে একটি ক্ষুদ্রায়তন মুক্ত অর্থব্যবস্থার অস্তিত্ব।

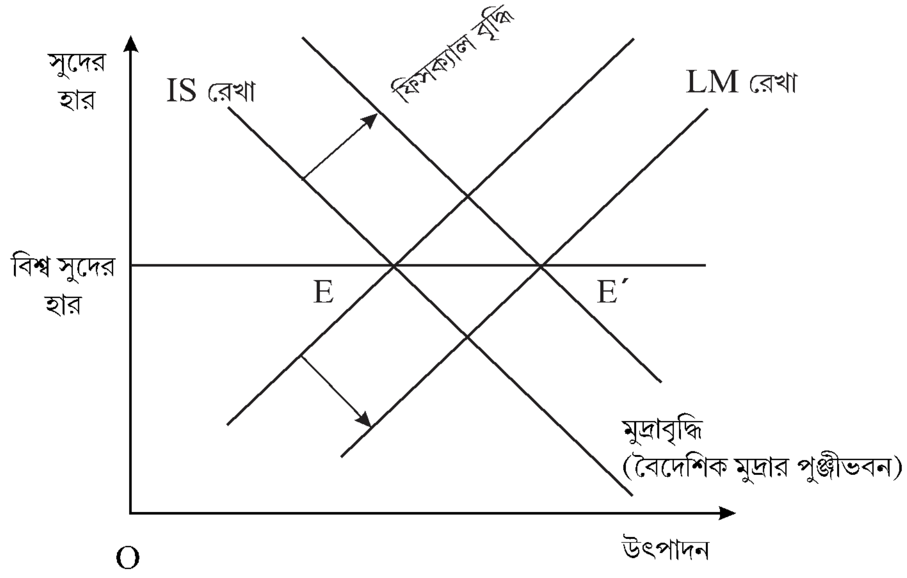
আলোচ্য প্রতিকল্পের অন্যতম একটি সিদ্ধান্ত হল যে কোনো একটি অর্থব্যবস্থার আচরণ ও প্রকৃতি নির্ভর করে সেই অর্থব্যবস্থাটি কী ধরণের বিনিময় হার (exchange rate) অনুসরণ করছে তার ওপর। বিনিময় হারের প্রকৃতির ওপরেই নির্ভর করে প্রসারণশীল মুদ্রানীতি ও রাজকোষনীতি কার্যকরী হবে কিনা।

আন্তর্জাতিক ক্ষেত্রে মূলধনের যাতায়াত যদি সম্পূর্ণ অবাধ (perfect mobility of capital) হয়, তাহলে এই প্রতিকল্প অনুসারে স্থির বিনিময়–হারের (fixed exchange rate)–এর ক্ষেত্রে মুদ্রানীতি সম্পূর্ণ অকেজো হবে এবং রাজকোষ-নীতি অকেজো হবে নমনীয় মুদ্রা বিনিময়-হার (flexible exchange rate) চালু থাকলে।

মূলধনের সম্পূর্ণ অবাধ যাতায়াত–এর অর্থ হল যে সুদের হার বিশ্ব সুদের হারের থেকে আলাদা হবে না। এটিকে আমরা একটি অনূভূমিক সুদের হার অন্তঃপণন বা আরবিট্রাজ শর্ত রেখা দ্বারা চিহ্নিত করতে পারি। সেই সঙ্গে অভ্যন্তরীণ ভারসাম্যকে IS এবং LM রেখা দ্বারা দেখতে পারি, যা যথাক্রমে দ্রবের বাজার ভারসাম্য ও টাকার বাজারের ভারসাম্য দ্বারা চিহ্নিত হয়। মডেলটি কীভাবে কাজ করে তা বোঝানোর জন্য স্থির বিনিময় হার এবং ভাসন্ত বিনিময় হারের মধ্যে পাথর্ক্য করতে হবে।

স্থির বিনিময় হার ও মূলধনের সম্পূর্ণ অবাধ যাতায়াতের ক্ষেত্রে মানডেল-ফ্লেমিং প্রতিকল্প :

এখন ধরা যাক যে মুদ্রাবিনিময় হার স্থির। এর অর্থ হল কেন্দ্রীয় ব্যাঙ্ক বৈদেশিক মুদ্রা কেনা বেচার



চিত্র ৬.২: স্থির বিনিময় হার ও মূলধনের সম্পূর্ণ অবাধ যাতায়াতের ক্ষেত্রে ফিসক্যাল সম্প্রসারন

মাধ্যমে বৈদেশিক মুদ্রার বাজারে হস্তক্ষেপ করবে। মূলধনের আগমন (iflows) রাজকোষ বা ফিসক্যাল বৃদ্ধি ঘটাবে। তখন কেন্দ্রীয় ব্যাঙ্ক বৈদেশিক মুদ্রা পাবার জন্য দেশজ মুদ্রা বিক্রি করবে এবং কেন্দ্রীয় ব্যাঙ্কের বৈদেশিক মুদ্রাভাণ্ডার বৃদ্ধি পাবে। এই হস্তক্ষেপের ফলে দেশজ মুদ্রার জোগান বৃদ্ধি পাবে এবং তার ফলে LM রেখা ডান দিকে স্থান পরিবর্তন করবে। অন্যদিকে ফিসক্যাল সম্পসারণের ফলে IS রেখা ডানদিকে সরে যাবে (চিত্র ৬.২)।

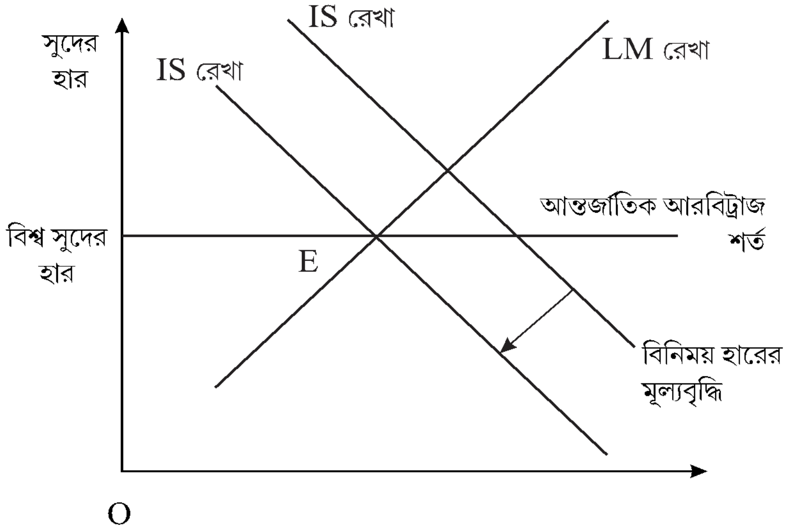
এক্ষেত্রে ফিসক্যাল গুনক ধনাত্বক কেননা ভারসাম্যটি E বিন্দু থেকে E' বিন্দুতে সরে যাবে।

প্রতিকল্পটির মূল সিদ্ধান্ত হল যে স্থির মুদ্রা বিনিময় হার এবং মূলধনের অবাধ যাতায়াত ব্যবস্থা চালু থাকলে কোনো দেশ স্বাধীনভাবে তার মুদ্রানীতি চালু করতে পারে না। সুদের হারকে সেক্ষেত্রে বিশেষ সুদের হারের সঙ্গে তাল রেখে ওঠা–নামা করতে হয়। রাজকোষ-নীতির ক্ষেত্রে ব্যাপারটা হবে ঠিক উল্টো। সরকার যদি মন্দা এড়াতে কোন সম্প্রসারণ রাজকোষনীতি গ্রহণ করে তাহলে স্থির বিনিময় হার এবং অবাধ মূলধনের আগমন-নির্গমন–এই অনুমান দুটির ভিত্তিতে রাজকোষনীতি সম্পূর্ণ কার্যকর হবে।

ভাসমান বিনিময় হার ও মূলধনের অবাধ যাতায়াতের ক্ষেত্রে মানডেল-ফ্লেমিং প্রতিকল্প:

ভাসমান মুদ্রাবিনিময়-হারকে ধার্তব্যের মধ্যে আনলে কী হবে? ধরা যাক, কেন্দ্রীয় ব্যাঙ্ক টাকাকড়ির জোগায় ধ্রুবক রেখে দিল এবং বিনিময় হার বাজার কতৃক নির্ধারিত হবে। ফিসক্যাল সম্পসারণ উৎপাদন

ও আয় বাড়বে এবং সেক্ষেত্রে টাকাকড়ির জন্য চাহিদাও বাড়বে এবং অর্থের জোগানের সাথে সাথে সুদের হারের ওপর এর উর্দ্ধমুখী প্রভাব পড়বে। এটি আবার মূলধনের আগমনকে সুনিশ্চিত করবে যা কিনা বিনিময় হারের মূল্য বৃদ্ধি (appreciation) ঘটাবে এবং রপ্তানি প্রতিযোগিতার ক্ষমতা কমাবে।



চিত্র ৬.৩ ভাসমান বিনিময় হার এবং মূলধনের সম্পূর্ণ অবাধ যাতায়াতের ক্ষেত্রে ফিসক্যাল সম্পসারন

ফলত IS রেখা বামদিকে সরে যাবে (চিত্র ৬.৩) কেননা দেশের উৎপন্ন দ্রব্যের চাহিদা সংকুচিত হবে। এখানে মুক্ত-অর্থনীতির ভারসাম্য নির্ধারিত হবে LM রেখা এবং আন্তর্জাতিক আরবিট্রাজ সুদের হারের মধ্যে ঘাত-প্রতিঘাতের দ্বারা। IS রেখা ভারসাম্য নির্ধারণে কোনো ভূমিকাই পালন করে না। এবং রাজকোষ-নীতিরও উৎপাদনের ওপর কোনো প্রভাব নেই। ফলে নমনীয় মুদ্রাবিনিময়-হার চালু থাকলে রাজকোষ-নীতি অকেজো হবে।

মুক্ত অর্থনীতির সমষ্টিগত তত্ত্বের (open economy macronomics) আলোচনা এবং মুদ্রাবিনিময়-হারের নির্ধারণ সম্পকির্ত তত্ত্বে মানডেল-ফ্লেমিং প্রতিকল্পটি প্রথম পদক্ষেপ এবং সেই কারণেই গুরুত্বপূর্ণ।

6.7 ডর্নবুশের ওভারসুটিং মডেল (প্রতিকল্প)

১৯৭৬ সালে রুডিগার ডর্নবুশ প্রায় অনঢ় দাম (বা sticky price)–এর সাহায্যে একটি সমষ্টিগত অর্থনীতির মডেল তৈরি করেন। যেখানে sticky price বলতে বোঝায় স্বল্পকালে দামসকল সব অনঢ় থাকে কিন্তু দীর্ঘকালীন সময়ে তা নমনীয় (flexible) হয়। কেননা তিনি লক্ষ্য করেছেন যে সুদের হারের পরিবর্তনের ফলে মুদ্রাবিনিময় হার ভীষণভাবে সাড়া দেয়। তাঁর মডেলে দীর্ঘ-কালীন টাকাকড়ির নিরপক্ষতার সঙ্গে সামঞ্জস্য রেখে দেখা গেল, টাকাকড়ির জোগানের ১% বৃদ্ধি হলে তা দীর্ঘকালে ১% দামের বৃদ্ধি

হবে এবং আপাত মুদ্রাবিনিময় হারে ১% মূল্যহ্রাস হবে। কীভাবে? সে উত্তর নিম্নে দেওয়া হল ধ্রুবক এব সমীকরণের সাহায্যে ১৯৭৬ সালের তাঁরই আবিস্কৃত মডেলের সাহায্যে (Box)।

Box : ডর্নবুশের মুদ্রাবিনিময় হার নির্ধারণের প্রায় অনঢ় দাম মডেল

মডেলটি চারটি সমীকরণের ওপর ভিত্তি করে গঠিত :

টাকার বাজারের ভারসাম্য : $m_t = p_t + \lambda y - \beta i$ ....(১)

সামগ্রিক চাহিদা রেখা : $d_t = \gamma y - \delta (s_t + p_t)$ ....(২)

: $p_{t+1} - p_t = \theta(d_t - \delta y) \;\; \theta > 0$ ....(৩)

অনাবৃত সুদের হার সংগতি : $i_t = i^*_t - (s_{t+1} - s_t)$ ....(৪)

যেখানে m_t হল টাকাকড়ির জোগানের লগা্রিদম

d_t হল সামগ্রিক চাহিদার লগা্রিদম,

y হল উৎপাদনের লগা্রিদম। মুদ্রাবিনিময় হার এবং দামস্তরের মধ্যে দুটি গতিশীল সম্পর্ক উপরোক্ত চারটি সমীকরণ থেকে পেতে পারি :

$$s_{t+1} - s_t = \frac{I}{\beta}(\overline{p} - p_t) \text{ ....(৫)}$$

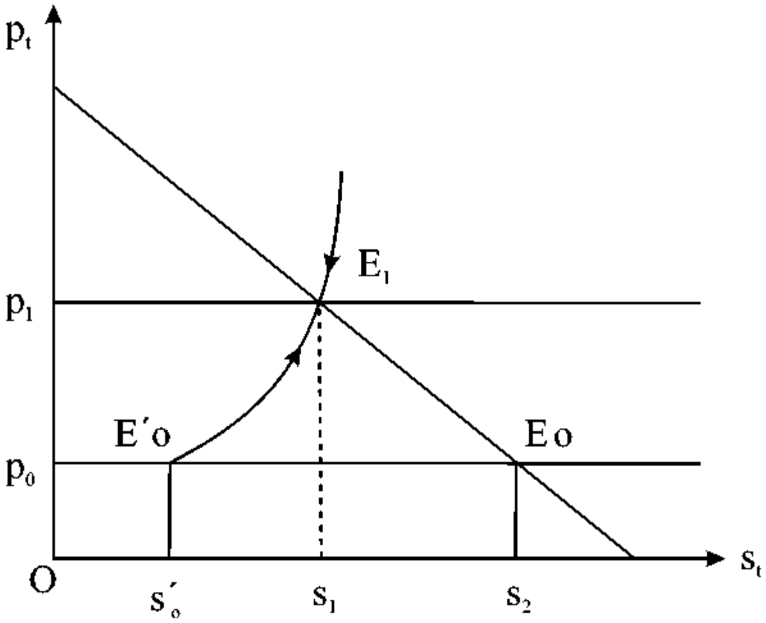
$$p_{t+1} - p_t = \theta(\overline{s} - s_t) + \theta\delta(\overline{P} - p_t) \text{....(৬)}$$

যেখানে $\overline{s}$ এবং $\overline{p}$ যথাক্রমে সামান্য বিনিময় হার এবং দামস্তরের দীর্ঘকালীন মূল্য নির্ধারণের দ্যোতক দীর্ঘকালীন মুদ্রার নিরপেক্ষতা / প্রভাবশূন্যতার সঙ্গে সংগতি রেখে দীর্ঘকালে টাকাকড়ির জোগানের ১% বৃদ্ধি হলে, (অন্যান্য বিষয় অপরিবর্তিত থাকলে) দামস্তরের ১% বৃদ্ধি হবে এবং ১% মুদ্রার বিনিময় হারের ১% মূল্যহ্রাস (depreciation) হবে ঃ

$$\overline{p} = m - \lambda y - \beta i^* \text{ ....(৭)}$$

$$\overline{s} = -\overline{p} - \frac{I - \Upsilon}{\delta} y \text{ ....(৮)}$$

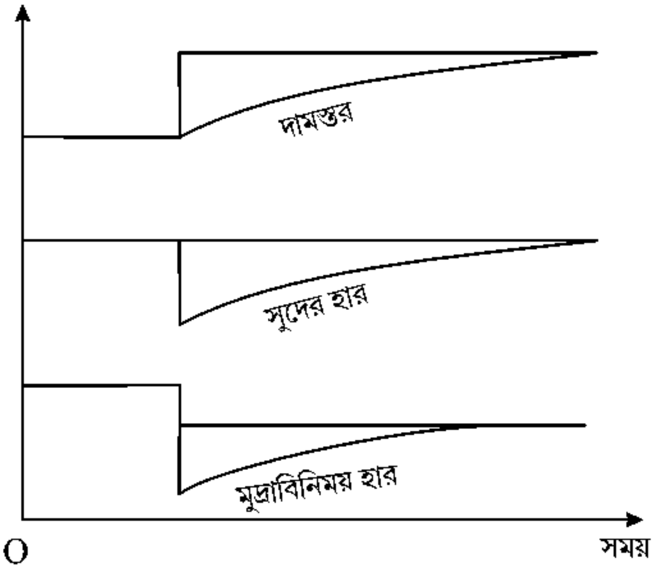
চিত্র ৬.৪তে (৭) নং সমীকরণকে অনুভূমিক রেখা দ্বারা এবং (৮) নং সমীকরণকে নিম্নভিমুখি রেখা দ্বারা চিহ্নিত করা যাবে।



চিত্র ৬.৪ টাকাকড়ির জোগানের স্থায়ী বৃদ্ধিকে অনুসরণ করে দামস্তর এবং মুদ্রা বিনিময় হারের মধ্যে গতিশীল ব্যবস্থা (adjustment)

চিত্রে একটি মাত্র সঞ্চার পথই পাওয়া যাবে যাকে স্যাড্‌ল বিন্দু বলে। এখানে আমরা অনুমান করছি যে দীর্ঘকালীন-ভারসাম্যে পৌঁছাতে গেলে অর্থনীতির গতিপথ (trajectory) এই স্যাড্‌ল বিন্দুকেই অনুসরণ করবে। ধরা যাক টাকাকড়ির ক্ষেত্রে এক আকস্মিক অভিঘাত (monetary shock) হল। তখন আমরা মুদ্রাবিনিময় হারের একটি evolution ব্যাখ্যা করতে পারব। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক, টাকাকড়ির বা মুদ্রা জোগান স্থায়ী ভাবে বৃদ্ধি পেল। তার ফলে অনুভূমিক রেখা ওপরের দিকে ওঠবে এবং দীর্ঘকালীন ভারসাম্য E_0 স্থান পরিবর্তন করে E_1 -এ পৌঁছবে, যদিও স্বল্পকালে দামসকল সুদৃঢ় (rigid)। এই কারণেই ভারসাম্য লম্ফ দিয়ে E_0 থেকে E'_0–তে যাবে, যা কিনা আবার স্যাড্‌ল পথ-এর ওপরই অবস্থিত যেখানে প্রারম্ভিক (initial) দাম হল P_o। সামান্য বিনিময় হার s'_o, s_o এবং নূতন দীর্ঘকালীন স্তর s_1 এর থেকে কম : অর্থাৎ মুদ্রাবিনিময় হার তার দীর্ঘকালীন স্তরে Overshoot করল। এই স্বল্পকালীন ভারসাম্য থেকে দামস্তর ও মুদ্রাবিনিময় হার স্যাডল পথ বেয়ে উপরের দিকে ওঠতেই থাকবে যতক্ষন না দীর্ঘকালীন ভারসাম্য E_1 পৌঁছায়।

স্বল্পকালে, সাধারণ মুদ্রা বিনিময় হারেব ১% এর চেয়ে বেশি মুল্য হ্রাস হয়। একেই 'মুদ্রাবিনিময় ওভার সুটিং' বলে। কারণ হল দামস্তরের প্রায় অনঢ়তা (price stickiness), তবে সঙ্গে আছে সামনে তাকানোর নানা প্রত্যাশা (forward-looking expectations)।



চিত্র ৬.৫ : ডর্নবুশের ওভার সুটিং মডেল অর্থের জোগানের একবার ও এককালীন বৃদ্ধিতে কীভাবে দামস্তর, সুদের হার এবং মুদ্রাবিনিময় হার সাড়া দেয়।

যেহেতু স্বল্পকালে দামস্তর বাড়ে না, কিন্তু অর্থের জোগান আসল অর্থে বাড়ে সেইহেতু, সুদের হার কমে। মুদ্রাবিনিময় হারের দীর্ঘকালের চেয়ে স্বল্পকালে বেশি হারে মুল্যহ্রাস হয়। দামস্তর তখন বাড়ে; যা কিনা অর্থের জোগানের আসল মূল্যহ্রাস করে: সুদের হার তার আন্তর্জাতিক স্তরে আবার বৃদ্ধি পায়। মুদ্রাবিনিময় হার ধীরে ধীরে স্থায়িত্ব পায় তখনই তখন সুদের পার্থক্য (interest rate differential) শূন্যেতে আবার পৌঁছে যায় (চিত্র ৬.৫)।

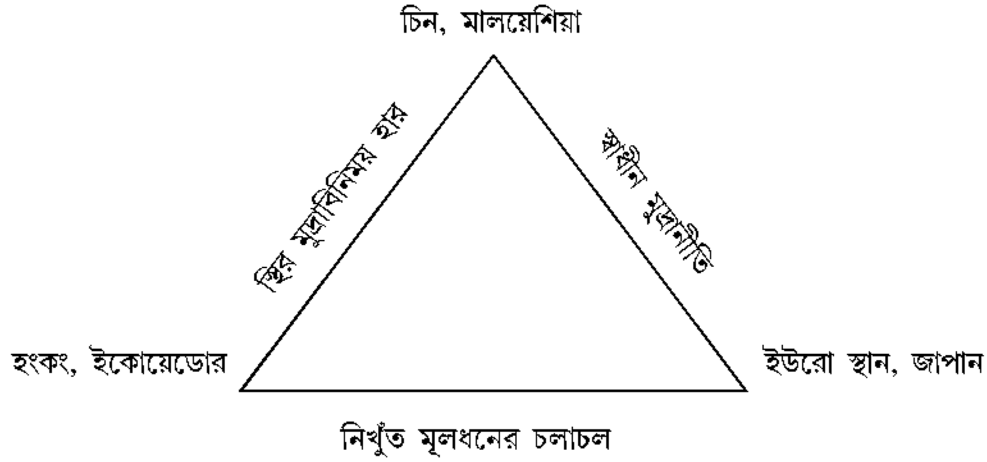
6.8 অসম্ভব ত্রিপুটি

এখানে আমরা মানডেলের অসম্ভব ত্রিপুটির কথা আলোচনা করব। পূর্বে মানডেল-ফ্লেমিং মডেলকে ব্যবহার করে, আমরা প্রতিষ্ঠিত করেছি যে উৎপাদন-স্থায়িত্বকরণের রণনীতি (policy) মুলধনের যাতায়াতের মাত্রা এবং মুদ্রা-বিনিয়ম হার ব্যবস্থার ওপর নির্ভর করে। যখন মূলধনের গতিবিধি অবাধ (mobile) এবং মুদ্রাবিনিময় হার নমনীয় তখন মুদ্রানীতি রাজকোষনীতির চেয়ে বেশি মাত্রায় গ্রহণীয়। অন্যদিকে মূলধনের আগমন রাজকোষের বৃদ্ধি ঘটাবে এবং তা বৈদেশিক মুদ্রার তহবিলে যোগ হবে।

মুদ্রাবিনিময় হার ব্যবস্থার ক্ষেত্রে এটি একটি উল্লেখযোগ্য ফলাফল তৈরি করে। একটা উদ্দেশ্য সাধনের জন্য দুটি রণনীতি কৌশল গ্রহণের কোনো অর্থ হয় না। একথা আমরা টিনবার্জেন কৌশল (Tinbergen Rule) থেকেই জানতে পারি। যখন মূলধনের গতিবিধি অবাধ (free) এবং মুদ্রাবিনিময় হার ভাসন্ত তখন উৎপাদন-স্থিতিকরণের জন্য প্রয়োজনীয় যন্ত্র (instrument) হল মুদ্রানীতির ব্যবহার। তবে মুদ্রা-বিনিময় হারের স্থায়িত্বকরণের জন্য অবাধ মূলধনের গমনাগমনের সঙ্গে স্থির বিনিময় হার জুড়ে দিল কেন্দ্রীয় ব্যাঙ্ক তখন মুদ্রানীতি নিতে পারবে না। সেক্ষেত্রে

রাজকোষ নীতির সহায়ে উৎপাদন-স্থায়িত্বকরণ করতে হবে।

গবেষণালব্ধ এই ধরনের ফলাফল সংক্ষেপিত করার একটি জনপ্রিয় উপায় হল ''অসম্ভব ত্রিপুটি'' বা ''মানডেলের ত্রিভুজ'' যা কিনা আসলে বলে যে একটি দেশ কোনোভাবেই একসাথে একটি স্বাধীন মুদ্রানীতি, একটি সুস্থিত (stable) আপাত মুদ্রা বিনিময় হার এবং একটি নিখুঁত মূলধনের যাতায়াত ভোগ করতে পারে না। (চিত্র ৬.৬)। যে–কোনো দুইটি লক্ষ্য নির্ধারিত করা যাবে।



চিত্র ৬.৬ : মানডেলের অসম্ভব ত্রিপুটি

অর্থাৎ অর্থনীতি নির্ধারকেরা হয় ত্রিভুজের একটি শীর্ষ (বা summit) চয়ন করবে, নতুবা দুটির মধ্যে সঠিক বিনিময় বজায় রাখবে যেমন, কতক মুদ্রানীতির স্বাধীনতা এবং কতক মুদ্রাবিনিময় হারের সুস্থিতি। এই ত্রিভুজটি বিংশশতাব্দীর মুদ্রাবিনিময় হারের পদ্ধতিতে অনেক স্ববিরোধীতার ওপর কার্যকরী আলোকপাত করে।

১৯৩০ এর দশকে ইউরোপীয় দেশগুলি স্বর্নমান স্থির মুদ্রাবিনিময় হার, মূলধনের চলাচল এবং সুদের অর্থনৈতিক ফলাফলের মধ্যে, এই স্ববিরোধীতার সম্মুখীন হয়েছিল, যার জন্য বিভিন্ন দেশ বিভিন্ন মুদ্রানীতি নিতে বাধ্য হয়েছিল। শেষ পযর্ন্ত সেই দেশগুলিকে মুদ্রাবিনিময় হারকে হয় ঠিকঠাক করতে হয়েছিল, নতুবা তাদের স্বর্নমান (gold standard) ত্যাগ করতে হয়েছিল। ১৯৯০ দশকের শেষ পর্বে, পূর্ব এশিয়া এবং লাতিন আমেরিকার দেশগুলিও ওই একই ধরনের স্ববিরোধীতার সম্মুখীন হয়েছিল। যা হোক, কোনো কোনো দেশ ত্রিভুজটির অন্য শীর্ষ চয়ন করেছিল। মালয়েশিয়া ডলারের সাপেক্ষে তার মুদ্রাকে স্থির হারে নির্দিষ্ট করেছিল এবং মুলধনের যাতায়াত–কে নিয়ন্ত্রন করেছিল। যেখানে ইকয়োডোর মুদ্রা স্বাধীনতা ত্যাগ করেছিল এবং তার অর্থনীতিকে dollarized করল। ২০০৮ সালের বিশ্ব মন্দার পরিপেক্ষিতে ইউরো বনাম স্থির মুদ্রা বিনিময়ের হার বজায় রাখতে লাটভিয়া সমস্যায় পড়েছিল। ভারত এই অসম্ভব ত্রিভুজটির সমস্যাকে অনেকাংশে সমাধান করতে সমর্থ হয়েছিল এবং ভারত তা করেছে Managed Flexibility এবং আংশিক মূলধনী খাতের নিয়ন্ত্রনের দ্বারা। ভারত কখনই তিনটি option–কে একইসঙ্গে নেয়নি।

একে অসম্ভব ত্রিপুটী বলা হয় কেন?

মুদ্রা বিনিময়হার ব্যবস্থার তিনটি রীতি প্রচলিত:

১) স্থির মুদ্রা বিনিময়হার ব্যবস্থা

২) নমনীয় বা ভাসমান মুদ্রা বিনিময় হার ব্যবস্থা

৩) নিয়ন্ত্রণাধীন পরিবর্তনীয় মুদ্রা–বিনিময় হার ব্যবস্থা

এই তিনটি ব্যবস্থার মধ্যে কোনটি শ্রেষ্ঠ? দুঃখজনকভাবে, এই তিনটি ব্যবস্থারই ভালো–মন্দ আছে। স্থির মুদ্রাবিনিময় হারের ক্ষেত্রে, কেন্দ্রীয় ব্যাংক স্থির বিনিময় হার বজায় রাখার জন্য দায়বদ্ধ। ফলে তাকে অন্যান্য অর্থনৈতিক লক্ষ্য যেমন আর্তিক প্রবৃদ্ধি, সুস্থিত দাম ও অন্যান্য লক্ষ্যকে ত্যাগ করতে হয়। যখন বৈদেশিক কারেন্সির জন্য অতিরিক্ত চাহিদা তৈরি হয় এবং ফলে ওই কারেন্সির মূল্যের ওপর উর্দ্ধমুখী চাপ তৈরি হয়তখন কেন্দীয় ব্যাংককে কতিপয় বিদেশি কারেন্সিকে বিক্তি করতে হয়। যা আবার টাকাকড়ির জোগানকে হ্রাস করে। সুতরাং, স্থির মুদ্রাবিনিময় হার ব্যবস্থার অধীনে, কেন্দ্রীয় ব্যাংক কোনো নির্দিষ্ট (desirable) স্তরে টাকাকড়ির জোগানকে পরিচালিত (regulate) করতে পারে না। এই প্রসঙ্গেই, সুবিখ্যাত আন্তর্জাতিক ত্রিপুটি বা অসম্ভব ত্রিপুটি উদ্ভব। এখানে তিনটি option বা পছন্দমত বেছে নেওয়ার ক্ষমতা আছে (১) দ্রব্যাদি, সেবাকার্যাদি এবং দেশে দেশে মূলধনের অবাধ যাতায়াত (অর্থাৎ, চলতি ও মূলধনী খাতে রূপান্তর যোগ্যতা) (২) স্থির বিনিময় হার এবং (৩) টাকাকড়ির জোগানে চয়নের ক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় ব্যাংকের স্বাধীনতা কোনো একটি দেশ এই তিনটি মধ্যে যে–কোনো দুটি বেছে নিতে পারে, কিন্তু একই সঙ্গে চিনটি বেছে নিতে পারবে না। উদাহরণস্বরুপ ধরা যাক, একটি দেশ যদি চলতি ও মূলধনী খাতে রুপান্তর যোগ্যতা এবং স্থির মুদ্রাবিনিময় হার বেছে নেয়, তবে সেই দেশটি টাকাকড়ির জোগানের ক্ষেত্রে স্বাধীনতা বা সার্বভৌমতার মতো বিলাসিতা ভোগ করতে পারবে না।

এটিকে ব্যাখ্যা করার জন্য, ধরা যাক দেশটি (১) এবং (২)নং টি নিজের পছন্দ বেছে নিল এবং তৎসহ সেই দেশটি টাকাকড়ির জোগান বাড়াতে সচেষ্ট হল (অন্যান্য বিষয় অপরিবর্তিত রেখে)। এবার টাকাকড়ির জোগান বাড়াবার সাথে সাথে, সুদের হার কমে যাবে, যা আবার পক্ষান্তরে মূলধনের দেশান্তরী (capital flight) ঘটাবে (কেননা মূলধন সেখানেই যাবে যেখানে বেশী রোজগার করতে পারবে), যা আবার পক্ষান্তরে বৈদেশিক কারেন্সির চাহিদা বাড়াবে এবং সেইজন্যই তা দেশীয় কারেন্সির ওপর চাপ বাড়াবে টাকার মূল্যহ্রাসের জন্য সওয়ার করে। যেহেতু টাকার মূল্যহ্রাস স্থির মূদ্রাবিনিময় ব্যবস্থার গ্রহণযোগ্য নয়, সেইহেতু এই ঘটনা কেন্দ্রীয় ব্যাংকের ওপর চাপ বাড়িয়ে বৈদেশিক মুদ্রা বিক্রি করতে বাধ্য করবে, যা কিনা পক্ষান্তরে কেন্দ্রীয় ব্যাংকের বৈদেশিক মূদ্রা কমিয়ে দেবে। শেষমেশ, প্রথমে যে টাকাকড়ির জোগান কেন্দ্রীয় ব্যাংক দিয়েছিল তা তুলে নিতে হবে। সুতরাং তিনটি বিষয় (option) পছন্দমতো সেই দেশ নিতে পারবে না।

6.9 সংক্ষিপ্তসার

এই অধ্যায়ে মুক্ত অর্থনীতিতে সরল কেইন্‌সীয় অর্থনীতি কীভাবে কাজ করে। তা যেমন দেখানো গেল, ঠিক তেমনি সোয়ানের অভ্যন্তরীন ও বৈদেশিক বহিঃস্থ ব্যালেন্স সম্পর্কেও জানা গেল।

তাছাড়া মুক্ত অর্থনীতিতে মূলধনের যাতায়াতের প্রেক্ষিতে মানডেল-ফ্লেমিং মডেল সম্পর্কে সম্যক জ্ঞান পরিবেশিত হল।

'অসম্ভব ত্রিপুটি' আধুনিক অর্থনীতিতে একটা সমস্যা। এই সমস্যায় সমাধানে ভারত সহ অন্যান্য দেশ কীভাবে এই সমস্যার সম্মুখীন হয়েছে তাও জানা গেল।

6.10 অনুশীলনী

উত্তর ভিত্তিক প্রশ্ন-

১. মূলধনের অবাধ যাতায়াত বলতে কী বোঝ?

২. অভ্যন্তরীন ও বহিঃস্থ ব্যালেন্স বলতে কী বোঝ?

৩. অসম্ভব ত্রিপুটি কী?

৪. মানডেল-ফ্লেমিং মডেলের গুরুত্ব কী?

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন-

১. টিকা লিখ ঃ

(১) একটি সরল কেইন্‌সীয় মুক্ত অর্থনৈতিক মডেল

২. ভাসমান বিনিময় হার ও মূলধনের অবাধ যাতায়াতের ক্ষেত্রে মানডেল-ফ্লেমিং মডেলের বক্তব্য কী?

৩. অসম্ভব ত্রিপুটি বলতে কী বোঝ? একে অসম্ভব ত্রিপুটি বলা হয় কেন? এটি বিভিন্ন দেশে কী কী সমস্যা করেছিল?

দীর্ঘ উত্তর ভিত্তিক প্রশ্ন-

১. চিত্র সহযোগে অভ্যন্তরীন ও বহিঃস্থ ব্যালেন্স আলোচনা কর।

২. চিত্র সহযোগে ডর্নবুশ ওভারসুটিং মডেল ব্যাখ্যা কর।

৩. চিত্র সহযোগে মানডেল ফ্লেমিং মডেল ব্যাখ্যা কর।

৪. স্থির বিনিময় হার ও মূলধনের অবাধ যাতায়াতের ক্ষেত্রে মানডেল-ফ্লেমিং মডেলের বক্তব্য কী?

6.11 গ্রন্থপঞ্জী

Bird, graham (2007). An Intoduction to *International Macroeconomics : Theory and Applications.* Third edition. Palgrane Macmillan.

পাঠক্রম ঃ Advanced Statistics

Course Cord : CC-EC-10

একক-1 ❑ সম্ভাবনা তত্ত্ব –I

গঠন

1.1 উদ্দেশ্য

আধুনিক রাশিবিজ্ঞানে সম্ভাবনাতত্ত্ব একটি মুখ্য কৌশল। সপ্তদশ শতাব্দীর মধ্যভাগে এই সম্ভাবনা তত্ত্বের প্রচলন হয় মুদ্রাক্ষেপণ (tossing of coins) তাস টানা (drawing of cards), পাশা বা ছক্কার দান ফেলা (throwing of a die) ইত্যাদি অনিশ্চয়তা নির্ভর খেলার মাধ্যমে। রাশিবিজ্ঞানে সম্ভাবনা

তত্ত্বের সাহায্যে সংগৃহীত রাশিতথ্যের বিশ্লেষণ করে সঠিক সিদ্ধান্ত নেওয়া সম্ভব হয়। তাই সম্ভাবনা বিষয়ক ধারণা প্রায় সবক্ষেত্রেই ব্যবহৃত হয় যেমন অর্থনীতি, ব্যবসা, শিল্পক্ষেত্রে এবং বিজ্ঞানের সমস্ত শাখায়। রাশি বিজ্ঞানের এই ব্যপ্তি সম্ভব হয়েছে শুধুমাত্র অনিশ্চয়তা নির্ভর সম্ভাবনা তত্ত্বের সৌজন্যে। আধুনিক যুগে এই সম্ভাবনা তত্ত্বের উপর ভিত্তি করে গাণিতিক উৎকর্ষতাই রাশিবিজ্ঞানের এই জনপ্রিয়তার মূলে।

1.2 প্রস্তাবনা

সম্ভাবনা তত্ত্ব ভবিষ্যৎ অনিশ্চিৎ ফলাফল বা অনিশ্চয়তা নির্ভর ঘটনাবলী নিয়ে পর্যালোচনা করে। সম্ভাবনা দুই রকমের হয়। বিষয়গত সম্ভাবনা (Subjective Probability) এবং বস্তুগত সম্ভাবনা (Objectie Probability)। বিষয়গত সম্ভাবনা ব্যক্তির মানসিক বিশ্লেষণ এবং বিচক্ষণতার উপর নির্ভর করে। যেমন আকাশে মেঘ দেখে বৃষ্টি হবে কি হবে না সে সম্পর্কে একটা আভাস দেওয়া যেতে পারে। কিন্তু বস্তুগতভাবে সেটা পরিমাপ করা কখনই সম্ভব নয়। সঠিক ফলাফল কী হবে সেটা একেবারেই অনিশ্চিৎ।

কিন্তু বস্তুগত সম্ভাবনা পরিমাপযোগ্য। একই ঘটনা একই পরিবেশে ক্রমাগত ঘটিয়ে তার গাণিতিক সম্ভাবনার (Mathematical probability) মান গণনা করা সম্ভব। সম্ভাবনার যত তত্ত্বগত আলোচনা করা হবে তার সবটাই এই বস্তুগত সম্ভাবনার বিচার। ভবিষ্যৎ ফলাফল অনিশ্চিৎ হলেও কিছু নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসরণ করে ভবিষ্যদ্বাণী করা সম্ভব। আবার সেই ভবিষ্যদ্বাণীর কত অংশ সত্য হবে তাও গাণিতিক গণনার মাধ্যমে বলা সম্ভব।

1.3 সম্ভাবনার সংজ্ঞায় ব্যবহৃত কিছু ধারণা

সম্ভাবনার আলোচনায় কিছু পরিভাষা ব্যবহার করা হয়। নীচে সেগুলি দেওয়া হল।

1. পক্ষপাতহীন পরীক্ষা (Random Experiment)

এটা এক প্রকার পর্যবেক্ষণ পদ্ধতি যেখানে একই পরিবেশে একটি পরীক্ষা বার বার করা হয় এবং ফলাফলগুলি অনিশ্চয়তা নির্ভর অর্থাৎ ঘটনাগুলি সম্ভাবনাযুক্ত। ফলে ঘটনাগুলির প্রত্যেকটি ঘটার সম্ভাবনা একেবারে সমান।

2. পরীক্ষা এবং ঘটনা (Trial and Event)

একই পরিবেশে যদি কোন পর্যবেক্ষণের ব্যবস্থা করা যায় যেমন একটি ঝোঁকশূন্য (unbaised) মুদ্রা ছোঁড়া হচ্ছে—এটিকে বলা হবে পরীক্ষা (trial) এবং এই পরীক্ষার ফলগুলিকে ঘটনা (event)

বলা হয়। এক্ষেত্রে দুটি ফলের সম্ভাবনা আছে একটি Head এবং একটি Tail. এই দুটি হ'ল ঘটনা (event)।

3. দুই ধরনের ঘটনা (Two types of Events)

পরীক্ষার ফলাফল অথবা ঘটনা দুরকমের হয়।

(i) মৌলিক ঘটনা (Elementary Event)

(ii) যৌগিক ঘটনা (Compound or Composite Event)

মৌলিক ঘটনাকে আর ভাঙ্গা যায় না। কিন্তু যৌগিক ঘটনাকে ভাঙ্গালে একাধিক মৌলিক ঘটনা পাওয়া যায়। ধরা যাক একটি মুদ্রা ছোঁড়া হ'ল ফলে একটি Head অথবা একটি Tail পাওয়া যাবে। এর প্রত্যেকটিকে মৌলিক ঘটনা বলে ধরা হবে। কিন্তু দুটি ছক্কার দান ফেললে যদি বলা হয় "৪টি পয়েন্ট পাওয়া গিয়েছে" তাহলে এই ঘটনাটি যৌগিক ঘটনা বলা হবে। কারণ ৪টি পয়েন্ট দুটি ছক্কার 5 রকমের দানে পাওয়া সম্ভব। যেমন (6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6)। এদের প্রত্যেকটি মৌলিক ঘটনা।

4. পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা (Mutually Exclusive Events)

কোনো পরীক্ষার ফলাফল বা ঘটনা যদি এমন হয় যে কেবলমাত্র একটি ঘটনাই ঘটতে পারে, দুই বা ততোধিক ঘটনা কখনই ঘটতে পারে না তবেই এই ধরনের ঘটনা সমূহকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা বলে।

যেমন ঝোঁকশূন্য একটি মুদ্রা ছুঁড়লে হয় Head হবে নয়তো Tail হবে। Head এবং Tail এক সঙ্গে কখনই ঘটতে পারে না। সুতরাং এই দুটি ঘটনাকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা বলা হবে। একটি ছক্কার দান ফেললে 1, 2, 3, 4, 5 এবং 6 এতগুলো পয়েন্টের যেকোনো একটি পয়েন্ট মাত্র পাওয়া যাবে। সুতরাং 1, 2, 3, 4, 5, 6 পয়েন্ট পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা।

5. সমান সম্ভাবনাযুক্ত ঘটনা (Equally Likely Events)

পক্ষপাতহীন ভাবে পরীক্ষা করলে ফলাফল (ঘটনা) গুলির মধ্যে কোন একটি ফল (ঘটনা) পাওয়ার প্রত্যাশা করার পেছনে কোন যুক্তি যদি না থাকে তবে সমস্ত ফলগুলি বা ঘটনা সমূহকে সমান সম্ভাবনাযুক্ত ঘটনা বলে ধরা হয়। যেমন একটি মুদ্রাকে পক্ষপাতহীন ভাবে ছুঁড়লে Head ও Tail পাওয়ার সম্ভাবনা কিন্তু সমান হবে।

6. স্বাধীন ঘটনা (Independent Events)

দুটি ঘটনা যদি পরস্পরকে প্রভাবিত না করে তবে ঘটনা দুটিকে স্বাধীন ঘটনা বলে মনে করা হয়। ধরা যাক্ একটি মুদ্রাকে পক্ষপাতহীন ভাবে দুইবার ছোঁড়া হল। এখন দুবার ছোঁড়ায় যে দুটি ফল

(ঘটনা) পাওয়া গেল তারা পরস্পরকে প্রভাবিত করেনি। অর্থাৎ প্রথম বারের ছোঁড়ায় যদি Head পাওয়া যায়, দ্বিতীয় বারের ছোঁড়ায় Head-ও পাওয়া যেতে পারে অথবা Tail-ও পাওয়া যেতে পারে। দ্বিতীয় বারের ছোঁড়ার ফল প্রথম বারের ছোঁড়ার ফলের উপর নির্ভর করে না। আবার উল্টোটাও সত্যি, সুতরাং দুটি ঘটনা (ফল) কে স্বাধীন ঘটনা বলা হয়।

7. অনুকূল ঘটনা (Favourable Events)

সম্ভাবনা বিষয়ক কোন পরীক্ষা থেকে যেসকল ফল (Outcome) পাওয়া যায় তার মধ্যে কোন বিশেষ ফল (ঘটনা) কতবার পাওয়া যায় সেটা গণনা করা হয়। গণনা করা এই সংখ্যাটি হল অনুকূল ঘটনা। যেমন দুটি ছক্কার দান ফেলে মোট "7 পয়েন্ট পাওয়ার" ঘটনা ঘটার সংখ্যা হল ছয়—(6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6)। দুটি ছক্কার দান ফেললে মোট ঘটনা হল $(6)^2 = 36$। অর্থাৎ 36টি ঘটনার মধ্যে 6টি হ'ল অনুকূল ঘটনা কারণ আমাদের মোট পয়েন্ট চাই 7।

8. সমগ্র ঘটনা বা ঘটনাসমূহের সমগ্র দল (Set) [Exhaustive Events]

সম্ভাবনাপূর্ণ কোন পরীক্ষায় মোট যতগুলি সম্ভাব্য ঘটনা (ফল) পাওয়া যায় তাকেই সেই ঘটনা সমূহের সমগ্র দল (Set) বা সমগ্র ঘটনা (Exhaustive Events) বলা হয়। যেমন—

1. একটি মুদ্রা ছোঁড়া হলে Head (H) এবং Tail (T) পাওয়া যায়। অর্থাৎ সমগ্র ঘটনা = 2

2. দুটি মুদ্রা একত্রে ছোঁড়া হলে সম্ভাব্য ঘটনাগুলি হবে (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) $\therefore$ সমগ্র ঘটনা = 4

3. একটি ছক্কার একত্রে দান ফেললে সম্ভাব্য পয়েন্ট হয় 1, 2, 3, 4, 5, 6 অর্থাৎ সমগ্র ঘটনা = 6

4. দুটি ছক্কার একত্রে দান ফেললে সমগ্র ঘটনা হবে $(6)^2 = 36$

9. নমুনা ক্ষেত্র (Sample Space)

পক্ষপাতহীন কোনো পরীক্ষার সমস্ত সম্ভাব্য মৌলিক ঘটনাকে একত্রে একটি দলভুক্ত করলে নমুনা ক্ষেত্র পাওয়া যায়। প্রতিটি মৌলিক ঘটনাকে নমুনা বিন্দু (Sample point) বলা হয়। সম্পূর্ণ নমুনা ক্ষেত্রকে (Sample space) S সাংকেতিক চিহ্ন দ্বারা উপস্থাপিত করা হয়। যেমন একটি ঝোঁকশূন্য (unbiased) ছক্কার দান ফেললে ছয়টি মৌলিক ঘটনা পাওয়া যায় 1, 2, 3, 4, 5, 6 সুতরাং এখানে নমুনা ক্ষেত্র হবে $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং নমুনা কিছু অথবা ঘটনা (event) অথবা পরীক্ষা লব্ধ ফলগুলি হল 1, 2, 3, 4, 5, 6-এর প্রত্যেকটি। উপরের নমুনা ক্ষেত্রের আয়তন সীমিত। কিন্তু যদি পরীক্ষাটি একটি মুদ্রা ছোঁড়ার হয় যতক্ষণ না Tail পাওয়া যাবে তাহলে নমুনা ক্ষেত্র হবে অসীম $S = \{T, HT, HHT, HHHT, ...\}$।

1.4 সম্ভাবনার সংজ্ঞা

সম্ভাবনার তিনটি প্রচলিত সংজ্ঞা আছে।

(i) ক্ল্যাসিক্যাল বা প্রাথমিক সংজ্ঞা (Classical or a-priori definition)

(ii) অবেক্ষণভিত্তিক বা পরিসংখ্যানীয় সংজ্ঞা (Empirical or Statistical definition)

(iii) স্বতঃসিদ্ধ সংজ্ঞা (Axiomatic definition)

1.5 সম্ভাবনার ক্ল্যাসিক্যাল বা প্রাথমিক সংজ্ঞা

সম্ভাবনার ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞার অনুমানগুলি হ'ল—

(i) নমুনা ক্ষেত্রের আয়তন সীমিত হতে হবে।

(ii) সম্ভাব্য সকল ঘটনাই সম-সম্ভাবনা সম্পন্ন। অর্থাৎ পরীক্ষালব্ধ ঘটনা (ফল) গুলির প্রত্যেকটির ঘটার সম্ভাবনা সমান।

এই অনুমানের উপর ভিত্তি করে সম্ভাবনার ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞা হ'ল :

যদি n সংখ্যক পরস্পর বিচ্ছিন্ন, সমগ্র এবং সম-সম্ভাবনাযুক্ত ফলাফল থাকে এবং যদি তাদের মধ্যে m সংখ্যক ফলাফল কোন একটি বিশেষ ঘটনা 'E' ঘটার অনুকূলে ঘটে, তবে E ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা হবে $\left(\frac{m}{n}\right)$ এই অনুপাতে। $\therefore\ P(E) = \frac{m}{n}$।

উদাহরণ 1.1 দুটি ঝোঁকশূন্য মুদ্রা একবার ছোঁড়া হ'ল। (i) কমপক্ষে 1টি Tail (ii) ঠিক একটি Head পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

সমাধান : দুটি ঝোঁকশূন্য মুদ্রা একবার ছুঁড়লে সম-সম্ভাবনাযুক্ত পরীক্ষাটির নমুনা ক্ষেত্র হবে S = {HH HT TH TT}

অর্থাৎ মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 4 $\quad \therefore\ n = 4$

(i) এখন কমপক্ষে 1টি Tail পাওয়া যাচ্ছে {HT TH TT} তিন বার। $\therefore\ m = 3$

$\therefore\ P(E) = P$ (কমপক্ষে 1টি Tail) $= \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$

(ii) ঠিক একটি Head পড়ার সম্ভাবনা {HT TH} দুই বার। $\therefore\ m = 2$

$\therefore$ P(E) = P (ঠিক একটি Head পড়ার ঘটনা) = $\frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

উদাহরণ 1.2 এক প্যাকেট তাসের থেকে যথেচ্ছভাবে এবং পক্ষপাতহীনভাবে 3টি তাস টানা হল। তিনটি তাসের মধ্যে (i) 2টি গোলাম হওয়ার (ii) 2টি হরতন হওয়ার (iii) 1টি ইস্কাবন, 1টি রুহিতন ও 1টি চিড়েতন হওয়ার (iv) 2টি ছবিযুক্ত তাস (সাহেব, বিবি বা গোলাম) হওয়ার (v) কমপক্ষে 1টি টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

সমাধান : তাসের একটি প্যাকেটে 52টি তাস থাকে। তার থেকে 3টি তাস টানা যায় $^{52}c_3$ উপায়ে।

(i) ঘটনা A = 3টির মধ্যে 2টি গোলাম হওয়ার ঘটনা

(ii) ঘটনা B = 3টির মধ্যে 2টি হরতন হওয়ার ঘটনা

(iii) ঘটনা C = 3টির মধ্যে 1টি ইস্কাবন, 1টি রুহিতন ও 1টি চিড়েতন হওয়ার ঘটনা

(iv) ঘটনা D = 3টির মধ্যে 2টি ছবিযুক্ত তাস্ হওয়ার ঘটনা

(v) ঘটনা E = 3টির মধ্যে কমপক্ষে 1টির টেক্কা হওয়ার ঘটনা

(i) ঘটনা A-র মধ্যে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা ধরা যাক্ m

$\therefore$ m = $^4c_2 \times {}^{48}c_1$ [52টি তাসের মধ্যে 4টি গোলাম থাকে। সুতরাং 4টি গোলামের থেকে 2টি গোলাম টানা যায় $4c_2$ উপায়ে। বাকী থাকে 48টি তাস। সুতরাং তার থেকে 1টি তাস টানা যায় $^{48}c_1$ উপায়ে]

নমুনা ক্ষেত্রে 52টি তাস থেকে 3টি তাস টানা যায় $52c_3$ উপায়ে। $\therefore$ n = $^{52}c_3$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{{}^4c_2 \times {}^{48}c_1}{{}^{52}c_3} = \frac{72}{5525}$$

(ii) B ঘটনার মধ্যে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা m = $^{13}c_2 \times {}^{39}c_1$

[কারণ 52টি তাসের মধ্যে 13টি হরতন থাকে ও অন্যান্য তাস 39টি থাকে]

$$\therefore \quad P(B) = \frac{{}^{13}c_2 \times {}^{39}c_1}{{}^{52}c_3} = \frac{117}{850}$$

(iii) C ঘটনার মধ্যে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা m = $^{13}c_1 \times {}^{13}c_1 \times {}^{13}c_1$

[52টি তাসের মধ্যে ইস্কাবন, রুহিতন ও চিড়িতন 13টি করে থাকে]

$$\therefore \quad P(C) = \frac{{}^{13}c_1 \times {}^{13}c_1 \times {}^{13}c_1}{{}^{52}c_3} = \frac{169}{1700}$$

(iv) D ঘটনার মধ্যে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $m = 12c_2 \times 40c_1$

[52টি তাসের মধ্যে ছবিযুক্ত তাস থাকে 12টি (4টে সাহেব, 4টে বিবি ও 4টে গোলাম) এবং অন্যান্য তাস থাকে $52 - 12 = 40$ টা]

$$\therefore \quad P(D) = \frac{{}^{12}c_2 \times {}^{40}c_1}{{}^{52}c_3} = \frac{132}{1105}$$

(v) E ঘটনা যদি হয় কমপক্ষে 1টি টেক্কা হওয়ার ঘটনা, তাহলে E^c ঘটনা হবে একটাও টেক্কা না হওয়ার ঘটনা।

$$\therefore \quad P(E^c) = \frac{{}^{48}c_3}{{}^{52}c_3} = \frac{4324}{5525}$$

52টি তাসের মধ্যে টেক্কা থাকে 4টি। সুতরাং অন্যান্য তাস থাকবে 48টি। যাদের মধ্যে একটিও টেক্কা নেই।

$$\therefore \quad P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{4324}{5525} = \frac{1201}{5525}$$

মন্তব্য : 1. ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞা অনুযায়ী $0 \le P(E) \le 1$ অর্থাৎ E ঘটনা ঘটার সম্ভাবনার মান '0' এবং '1' এর মধ্যে অবস্থান করে।

প্রমাণ : যদি একটি সম-সম্ভাবনা সম্পন্ন পরীক্ষার ফলাফলের সংখ্যা হয় n এবং ঘটনা E এর অনুকূলে ঘটা ঘটনার সংখ্যা হয় m, তাহলে আমরা জানি

$$0 \le m \le n$$

অথবা, $$\frac{0}{n} \le \frac{m}{n} \le \frac{n}{n}$$

অথবা, $$0 \le \frac{m}{n} \le 1$$

অথবা, $$0 \le P(E) \le 1 \qquad (\because P(E) = \frac{m}{n})$$

2. একটি অসম্ভব ঘটনার (Impossible event) সংখ্যামান হবে শূন্য অর্থাৎ $m = 0$

$$\therefore \text{ E যদি একটি অসম্ভব ঘটনা হয়, তবে } P(E) = \frac{0}{n} = 0$$

3. ভবিষ্যৎ নিশ্চিত, এরকম কোনো ঘটনার সম্ভাবনার সংখ্যামান = 1. যদি E একটি নিশ্চিত ঘটনা হয় তবে কোন সম-সম্ভাবনাযুক্ত পরীক্ষার সকল ঘটনাই E-এর অনুকূলে হবে অর্থাৎ $m = n$ হবে।

$$\therefore \quad P(E) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

টীকা : সুতরাং দেখা গেল যে অসম্ভব ঘটনার সম্ভাবনা = 0 এবং একটি নিশ্চিত ঘটনার সম্ভাবনা = 1। কিন্তু এর উল্টোটা (converse) সব সময় সত্যি নয়। কিন্তু যদি নমুনা ক্ষেত্র সীমিত হয় তবেই এর উল্টোটা (converse) সত্যি হবে। অর্থাৎ সম্ভাবনা '1' হলে নিশ্চিত ঘটনা এবং সম্ভাবনা '0' হলে অসম্ভব ঘটনা।

4. একটি সম-সম্ভাবনাযুক্ত পরীক্ষায় ধরা যাক্ A_1 এবং A_2 দুটি আলাদা ঘটনা। কিন্তু যদি A_1 ঘটলে A_2 ও ঘটেছে বোঝায়, তবে $P(A_1) \leq P(A_2)$

যেহেতু A_1 ঘটনা ঘটা মানেই A_2 ঘটনা ঘটা, A_1 কে A_2-র অধীনস্ত দল (subset) বলতে হবে। অর্থাৎ সমস্ত মৌলিক ঘটনা যেগুলো A_1-এর অনুকূল, তারা আবার A_2-রও অনুকূল হবে।

$$\therefore \quad n(A_1) \leq n(A_2) \quad \text{অথবা, } \frac{n(A_1)}{n} \leq \frac{n(A_2)}{n} \quad \text{অথবা, } P(A_1) \leq P(A_2)$$

যখন A_1 ঘটনা এবং A_2 ঘটনা সর্বসম (equivalent) হয়, তখন $n(A_1) = n(A_2)$ অর্থাৎ $P(A_1) = P(A_2)$

5. নমুনা ক্ষেত্র (Sample space)-তে যদি n সংখ্যক মৌলিক ঘটনা থাকে এবং A ঘটনার অনুকূলে মৌলিক ঘটনার সংখ্যা যদি m হয়, তবে A ঘটনা না ঘটার অনুকূলে মৌলিক ঘটনার সংখ্যা হবে $(n - m)$ 'A ঘটনা না ঘটার' সাংকেতিক উপস্থাপনা যদি A^c হয় তবে

$$P(A^c) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$$

$$\therefore \quad P(A) + P(A^c) = 1$$

6. সাধারণত ফাটকা খেলায় আমরা দেখি "কোন নির্দিষ্ট ঘটনার (ধরা যাক E) অনুকূলে বাজির হার $m : n$"। এর অর্থ হল $P(E) = \frac{m}{m+n}$ ।

একই ভাবে "ঘটনা E এর বিপক্ষে বাজির হার হ'ল m : n"। এর অর্থ হল $P(E^c) = \frac{m}{m+n}$

1.6 দল (সেট) সম্পর্কিত কিছু ধারণা

সমগ্র দল (Universal Set) কোনো পরীক্ষার ফলাফলগুলির একত্রিত সমন্বয়কে সমগ্র দলের আকারে উপস্থাপিত করা হয়। যেমন একটি ঝোঁকশূন্য ছক্কার দান ফেললে 1, 2, 3, 4, 5, 6 (point) অঙ্ক পাওয়া যায়। সমগ্র দলকে S বা Ω দ্বারা সূচিত করা হয়। $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ অথবা $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$।

অধীনস্ত দল (Sub set) যদি একটি ছোট দল ধরা যাক্ $A = \{1, 2, 3\}$র সব অঙ্কগুলি $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এর মধ্যে থাকে, তাহলে A কে S এর অধীনস্ত দল বলে। $A \subseteq S$।

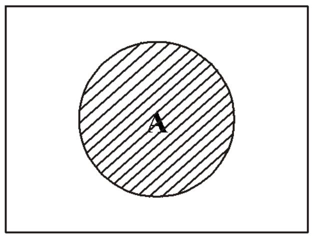
শূন্য দল (Null Set) যদি কোন দলের (set) মধ্যে কোন উপাদান বা অঙ্ক বা সংখ্যা না থাকে তবে সেই দল কে শূন্য দল বলা হয়। $A = (\ ) = \phi$।

একক দল (Unit Set) যদি কোন দলের মধ্যে একটি মাত্র সংখ্যা বা উপাদান থাকে তবে তাকে একক দল বলা হয়। $A = \{5\}$।

ভেন্ চিত্র (Venn Diagram) দলগুলিকে চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপিত করতে যে চিত্র ব্যবহার করা হয় তাকে ভেন্ চিত্র বলে।

চিত্রে (1.1) যে আয়তক্ষেত্রটি দেখানো হয়েছে সেটি হ'ল সমগ্র দল (Universal Set) S অথবা Ω, ছায়াঞ্চলযুক্ত বৃত্তটি একটি অধীনস্ত দল (Sub set) A।

S বা Ω



চিত্র 1.1 ভেন্ চিত্র

দলতত্ত্ব ব্যবহারের নিয়মাবলী (Set operations)

(i) দলের যোগ (Union of Sets) (চিত্র 1.2)

দুটি দল A এবং B এর যোগ বলতে বোঝায় এমন কিছু উপাদান বা সংখ্যা যারা হয় A-র মধ্যে আছে অথবা B-এর মধ্যে আছে অথবা A এবং B দুয়ের মধ্যেই আছে। এই যোগ (Union) $A \cup B$ দ্বারা সুচিত হয়। যেমন— $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = (3, 4, 5, 6\}$ তাহলে $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$।

(ii) দলের গুণ বা ছেদ (Intersection of Sets) (চিত্র 1.3)

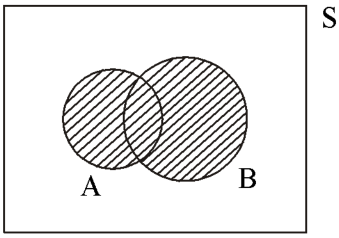
দুটি দল A ও B এর গুণফল বলতে সেই উপাদানগুলি বোঝায় যারা A এবং B দুই দলের মধ্যেই রয়েছে। এই গুণফল (intersection) $A \cap B$ দ্বারা সূচিত হয়। যেমন—$A = \{1, 2, 3, 4)$, $B = (3, 4, 5, 6\}$ তাহলে $A \cap B = \{3, 4\}$।

(iii) দলের পূরক (Complement Set) (চিত্র 1.4)

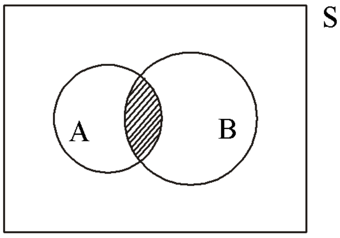
ধরা যাক সমগ্র দলের মধ্যে একটি দল হচ্ছে $A = \{1, 2, 3, 4\}$ আর সমগ্র দল হ'ল $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, তাহলে A-র পূরক দল যার সাংকেতিক উপস্থাপনা A^c অথবা $\bar{A}$ অথবা A' এর মাধ্যমে হয়, সেটি হবে $A^c = \{5, 6\}$ অর্থাৎ যে উপাদানগুলি A-র মধ্যে নেই।

(iv) দলের বিয়োগ (Difference of Sets) (চিত্র 1.5)

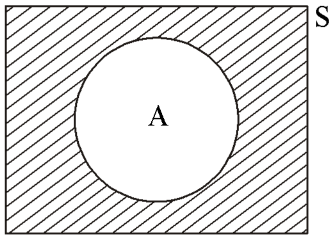
দুটি দল A ও B এর বিয়োগফল বলতে বোঝায় এমন কয়টি উপাদান বা সংখ্যা যারা A দলের মধ্যে আছে কিন্তু B দলের মধ্যে নেই। সাংকেতিক ভাবে লিখলে এটা হবে $(A - B)$। যেমন— $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$ তাহলে $A - B$ হবে $\{1, 3\}$



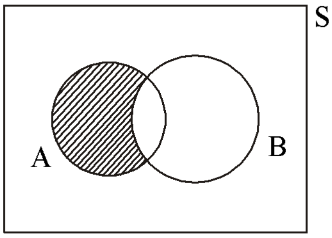
চিত্র 1.2 $A \cup B$



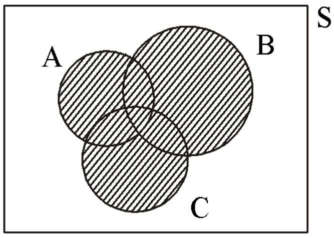
চিত্র 1.3 $A \cap B$



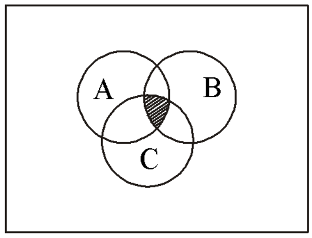
চিত্র 1.4 $A^c = S–A$



চিত্র 1.5 $(A – B)$



চিত্র 1.6 $A \cup B \cup C$



চিত্র 1.7 $A \cap B \cap C$

প্রতীকসমূহ (Notations)

মনে করা যাক্ S একটি সম-সম্ভব পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র। A ও B হ'ল পরীক্ষার সঙ্গে সংশ্লিষ্ট দুটি ঘটনা।

(i) $P(A)$ প্রতীক A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা নির্দেশ করে (চিত্র 1.1)

(ii) $P(A^c)$ অথবা $P(A')$ অথবা $P(\bar{A})$ প্রতীক A ঘটনা না ঘটার সম্ভাবনা নির্দেশ করে (চিত্র 1.4)

(iii) $P(A \cup B)$ প্রতীক A ও B ঘটনা দুটির অন্ততপক্ষে একটি ঘটার সম্ভাবনা অর্থাৎ 'হয় A অথবা B' অন্ততপক্ষে একটি ঘটার সম্ভাবনা নির্দেশ করে (চিত্র 1.2)।

(iv) $P(A \cap B)$ প্রতীকে A ও B ঘটনা দুটির একসঙ্গে ঘটার সম্ভাবনা সূচিত হয়। (চিত্র 1.3)।

(v) $P(A/B)$ প্রতীক A ঘটনাটি ঘটার শর্তযুক্ত সম্ভাবনা (Conditional Probability) নির্দেশিত হয় যখন জানা আছে যে B ঘটনাটি আগেই ঘটে গেছে।

দলতত্ত্ব ব্যবহারের নিয়মাবলী ও সূত্র (Operational Rules for Sets)

নিয়ম (Rules)	**যোগ (Union)**	**গুণ বা ছেদ (Intersection)**
1. Commutative Laws	$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
2. Associative Laws	$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
3. Distributive Laws	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4. De Morgan's Laws	$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$	$(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

উদাহরণ 1.3 ধরা যাক্ A, B এবং C তিনটি ঘটনা। দলতত্ত্বের নিয়মাবলী ও সূত্রের অনুসরণে নীচের ঘটনাগুলি উপস্থাপিত কর।

(i) অন্ততপক্ষে একটি ঘটনা ঘটবে।

(ii) তিনটি ঘটনাই একই সঙ্গে ঘটবে।

(iii) শুধুমাত্র A ঘটবে।

(iv) A ও B ঘটবে কিন্তু C ঘটবে না।

(v) অন্ততপক্ষে দুটি ঘটনা ঘটবে।

(vi) শুধুমাত্র একটি ঘটনা ঘটবে, একটির বেশী ঘটবে না।

(vii) শুধুমাত্র দুটি ঘটনা ঘটবে, তার বেশী নয়।

(viii) একটিও ঘটনা ঘটবে না।

(ix) সর্বোচ্চ দুটি ঘটনা ঘটবে।

সমাধান : (i) $A \cup B \cup C$ (চিত্র 1.6)

(ii) $A \cap B \cap C$ (চিত্র 1.7)

(iii) $A \cap B^c \cap C^c$

(iv) $A \cap B \cap C^c$

(v) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(vi) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

(vii) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$

অথবা, $[(A \cap B) \cup ((A \cap C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)$

(viii) $A^c \cap B^c \cap C^c$ অথবা, $(A \cup B \cup C)^c$

(ix) $(A \cap B \cap C)^c$ অথবা, $A^c \cup B^c \cup C^c$

1.7 সম্ভাবনার সমষ্টি বিষয়ক উপপাদ্য

সম্ভাবনার সমষ্টি বিষয়ক উপপাদ্য আমরা দুভাবে বিশ্লেষণ করতে পারি—

(i) যখন ঘটনাগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন (for mutually exclusive events)

(ii) যখন ঘটনাগুলি পরস্পর অবিচ্ছিন্ন (for non-mutually exclusive events)

উপপাদ্য-1. পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সমষ্টি বিষয়ক উপপাদ্য (Theorem of Total Probability in case of Mutually Exclusive Events)

যদি A_1 ও A_2 দুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা হয়, তবে

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

অর্থাৎ, “হয় A_1 নতুবা A_2” ঘটবার সম্ভাবনা হ'ল A_1 ও A_2 ঘটনা দুটির পৃথকভাবে ঘটবার সম্ভাবনার যোগফল।

প্রমাণ : ধরা যাক্ কোন একটি সমসম্ভব পরীক্ষার (random experiment) নমুনা ক্ষেত্রে (Sample space) S এর মধ্যে সমভাবে সম্ভাব্য n সীমিত সংখ্যক নমুনা বিন্দু (Sample point) আছে এবং আগেই বলা হয়েছে যে A_1 ও A_2 হল পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা। ধরা যাক $n(A_1)$ সংখ্যক নমুনা বিন্দু A_1 ঘটনার অনুকূলে আছে এবং $n(A_2)$ সংখ্যক নমুমা বিন্দু A_2 ঘটনাটির অনুকূলে আছে। এখন সম্ভাবনার ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞা থেকে বলা যায়

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n} \text{ ও } P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n}$$

এখন A_1 ও A_2 যেহেতু পরস্পর বিচ্ছিন্ন, তাদের অন্তর্গত নমুনা বিন্দুগুলিও পরস্পর বিচ্ছিন্ন, অর্থাৎ এদের মধ্যে কোন সাধারণ বিন্দু নেই। এখন $(A_1 \cup A_2)$ ঘটনার অন্তর্গত নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $n(A_1) + n(A_2)$।

$\therefore$ সম্ভাবনার ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞা অনুযায়ী বলা যায়

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{n(A_1)+n(A_2)}{n} = \frac{n(A_1)}{n} + \frac{n(A_2)}{2} = P(A_1) + P(A_2)$$

$\therefore\ P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

অনুরূপে তিনটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা A_1, A_2, A_3 দেওয়া থাকলে $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$ হবে।

অনুরূপে n সংখ্যক পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা $A_1, A_2 \ldots, A_n$ দেওয়া থাকলে $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত (Corollary) 1. যদি দুটি পৃথক ঘটনা A_1 ও A_2 সমগ্র ঘটনা (exhaustive events) হয়, তবে

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{n(A_1)+n(A_2)}{n} = \frac{n}{n} = 1 \quad [\because\ n(A_1) + n(A_2) = n]$$

$\therefore\ P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 1$

$\therefore\ P(A_1) = 1 - P(A_2)$ অথবা, $P(A_2) = 1 - P(A_1)$

এক্ষেত্রে A_1 ও A_2 ঘটনা দুটিকে একে অপরের পরিপূরক (complement) বলা হবে।

উদাহরণ : 1.4 এক প্যাকেট তাস থেকে একটি তাস টানা হ'ল। তাসটি সাহেব অথবা বিবি হবে তার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ এক প্যাকেট তাসের মধ্যে 52টি তাস থাকে। তার মধ্যে 4টি সাহেব ও 4টি বিবি থাকে।

ধরা যাক্ A_1 ঘটনায় সাহেব উঠবে এবং A_2 ঘটনায় বিবি উঠবে।

A_1 এবং A_2 এই দুটি ঘটনা পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা। সম্ভাবনার সমষ্টি বিষয়ক সূত্র থেকে আমরা জানি $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

P (তাসটি হয় সাহেব নয় বিবি) $= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

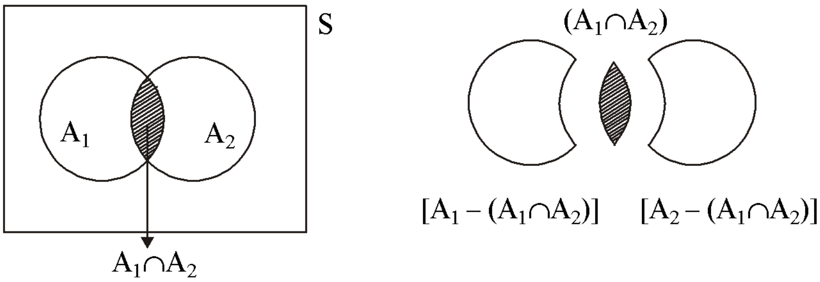
এবার, $P(A_1) = \frac{{}^{4}c_1}{{}^{52}c_1} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ এবং $P(A_2) = \frac{{}^{4}c_1}{{}^{52}c_1} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$\therefore\ P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$ তাসটির হয় সাহেব নয় বিবি হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{13}$

উপপাদ্য : 2 পরস্পর অবিচ্ছিন্ন ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সমষ্টি বিষয়ক সুত্র (Theorem of Total Probability when the Events are Non-Mutually Exclusive)

দুটি ঘটনা A_1 ও A_2 পরস্পর অবিচ্ছিন্ন। $\therefore A_1 \cap A_2 \neq 0$

যদি মনে করি A_1, A_2 দুটি অবিচ্ছিন্ন ঘটনা, $(A_1 \cap A_2)$ এর সাহায্যে তিনটি বিচ্ছিন্ন ঘটনা সৃষ্টি করেছে, তবে তিনটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন অধীনস্ত দলগুলি হবে $[A_1 - (A_1 \cap A_2)]$, $(A_1 \cap A_2)$ ও $[A_2 - (A_1 \cap A_2)]$ (চিত্র 1.8 দ্রষ্টব্য)



চিত্র 1.8 দুটি পরস্পর অবিচ্ছিন্ন ঘটনাকে তিনটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনায় রূপান্তর

এখন $(A_1 \cup A_2) = (A_1 - A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 - A_1 \cap A_2)$

$\therefore P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 - A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 - A_1 \cap A_2)$ [উপপাদ্য 1 অনুযায়ী]

$$= P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$= P(A_1) + (P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

অনুসিদ্ধান্ত : 1. A_1 ও A_2 যদি পরস্পর অবিচ্ছিন্ন ঘটনা হয় তবে $P(A_1 \cap A_2) > 0$ আর A_1 ও A_2 যদি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা হয় তবে $P(A_1 \cap A_2) = 0$

$\therefore P(A_1 \cap A_2) \geq 0$ অর্থাৎ, $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$

2. ধরা যাক্ তিনটি ঘটনা A_1, A_2 ও A_3 পরস্পর অবিচ্ছিন্ন। এক্ষেত্রে $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P[(A_1 \cup A_2) \cup A_3]$

$= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]$

$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3]$

(Distributive নিয়ম অনুযায়ী)

$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - [P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_3)$

$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

অথবা, $$P\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right)=\sum_{i=1}^{3} P(A_i)-\sum_{i,j=1}^{3} P(A_i \cap A_j)+(-1)^{3-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

অনুরূপে n সংখ্যক পরস্পর অবিচ্ছিন্ন ঘটনার ক্ষেত্রে সূত্রটি হবে

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i,j=1}^{n} P(A_i \cap A_j)+\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}} P(A_i \cap A_j \cap A_k + \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots\ldots \cap A_n)$$

Boole-এর অসমতা (Boole's Inequality)

ধরা যাক A_1 এবং A_2 দুটি ঘটনা। আমরা লিখতে পারি

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \le P(A_1) + P(A_2)$

যেহেতু $P(A_1 \cap A_2) \ge 0$

তিনটি ঘটনা A_1, A_2, A_3-র জন্য আমরা লিখতে পারি

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P[(A_1 \cup A_2) \cup A_3] \le P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) \le P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

এইভাবে ঘটনা সংখ্যা বাড়িয়ে আমরা লিখতে পারি

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad \text{(n সংখ্যক ঘটনার জন্য)}$$

এই ফলাফলকেই Boole-এর অসমতা বলে।

Bonferroni-র অসমতা (Bonferroni's Inequality)

যেহেতু কোনো ঘটনার সম্ভাবনা কখনোই 1 এর বেশী হতে পারে না,

তাই আমরা লিখতে পারি $P(A_1 \cup A_2) \le 1$

অথবা, $P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \le 1$

$\therefore \quad P(A_1 \cap A_2) \ge P(A_1) + P(A_2) - 1$

এই ফলাফলকে ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি—

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P\{(A_1 \cap A_2) \cap A_3\} \geq P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - 1$

অথবা, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1 + P(A_3) - 1$

$$\geqq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2$$

ঘটনা সংখ্যা ক্রমশঃ বৃদ্ধি পেলে n সংখ্যক ঘটনার জন্য আমরা লিখতে পারি—

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

এই ফলাফলকেই Bonferroni-র অসমতা বলা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত : 2 দুটি ঘটনা A_1 ও A_2-র জন্য নীচের অসমতা পাওয়া যায়

$P(A_1 \cap A_2) \leq \min\ [P(A_1), P(A_2)]$

যেখানে $\min\ [P(A_1), P(A_2)]$ বলতে বোঝায় $P(A_1)$ এবং $P(A_2)$ এই দুয়ের মধ্যে সর্বনিম্ন।

প্রমাণ : যেহেতু A_2 ঘটনাটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন, নীচের দুটি দলের মধ্যে হয় $(A_1^c \cap A_2)$ নয় $(A_1 \cap A_2)$ তে উপস্থিত থাকে।

সুতরাং $P(A_2) = P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2)$

অথবা, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2) - P(A_1^c \cap A_2) \leq P(A_2)$ ...... (i)

$$[\because P(A_1^c \cap A_2) \geq 0]$$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়

$$P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) \text{ .... (ii)}$$

(i) এবং (ii) দুটিকে একত্র করলে পাওয়া যায়

$$P(A_1 \cap A_2) \leq \min.\ [P(A_1), P(A_2)]$$

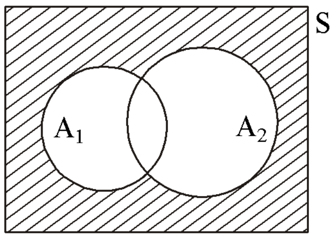
উদাহরণ : 1.5 কলকাতায় দুটি খবরের কাগজ প্রকাশিত হয় X এবং Y। অনুসন্ধানের মাধ্যমে পরিমাপ করা গিয়েছে যে X খবরের কাগজটি জনসংখ্যার 16% পাঠ করে থাকে, 14% Y খবরের কাগজটি পাঠ করে থাকে এবং 5% উভয় কাগজই পাঠ করে থাকে। ধরা যাক্ একটি লোককে পক্ষপাতহীন ভাবে পছন্দ করা হল। এখন ঐ লোকটি (i) কোন খবরের কাগজই পড়ে না এই ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয় কর এবং (ii) শুধুমাত্র Y খবরের কাগজ পড়ে তার সম্ভাবনাও নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরা যাক্ পক্ষপাতীহন ভাবে যে লোকটিকে পছন্দ করা হয়েছে সে যে X কাগজ পড়ে সেটা A_1 নির্দেশ করে এবং সে যে Y কাগজ পড়ে সেটা A_2 নির্দেশ করে।

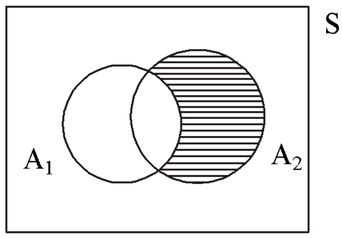
$\therefore\ P(A_1) = 0.16,\quad P(A_2) = 0.14,\quad P(A_1 \cap A_2) = 0.05$

(i) পছন্দ করা লোকটি যে কোন কাগজই পড়ে না তার সম্ভাবনা হ'ল—

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cap A_2^c) &= P(A_1 \cup A_2)^c = 1 - (P(A_1 \cup A_2)) \\ &= 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1 \cap A_2) \\ &= 1 - 0.16 - 0.14 + 0.05 \\ &= 0.75 \end{aligned}$$



চিত্র 1.9 লোকটি কোন কাগজ পড়ে না



চিত্র 1.10 লোকটি শুধু মাত্র Y কাগজ পড়ে

(ii) লোকটির শুধুমাত্র Y কাগজ পড়ার সম্ভাবনা হল—

$$P\left(A_1^c \cap A_2\right) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0.14 - 0.05 = 0.09$$

1.8 সম্ভাবনার যৌগিক (বা গুণবিষয়ক উপপাদ্য ও শর্তযুক্ত সম্ভাবনা

ধরা যাক্ একটি সমান সম্ভাবনা যুক্ত পরীক্ষার সমগ্র দল বা নমুনা ক্ষেত্র হ'ল S এবং ঐ পরীক্ষা লব্ধ দুটি ঘটনা হ'ল A ও B। এখন B ঘটেছে এই শর্ত সাপেক্ষে A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে A ঘটনার শর্তযুক্ত সম্ভাবনা (Conditional Probability of occurence of the event A) বলা হয় এবং এই শর্তযুক্ত সম্ভাবনাকে উপস্থাপিত করা হয় P(A/B) সাংকেতিক চিহ্নের সাহায্যে।

এখন $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, যখন $P(B) > 0$ .... (1)

অনুরূপে, A ঘটেছে এই শর্তসাপেক্ষে B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে B ঘটনার শর্তযুক্ত সম্ভাবনা বলা হয়। এই শর্তযুক্ত সম্ভাবনাকে উপস্থাপিত করা হয় P(B/A) এই সাংকেতিক চিহ্নের সাহায্যে।

$$\therefore\ P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},\ \text{যখন } P(A) > 0 \ \ldots\ldots\ (2)$$

আমরা (1) এবং (2) সমীকরণ দুটিকে নীচের মত করে লিখতে পারি---

$$\left.\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B)\,.\,P(A/B) \qquad \text{যখন } P(B) > 0 \\ &= P(A)\,.\,P(B/A) \qquad \text{যখন } P(A) > 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(3)$$

$P(A \cap B)$ কে যৌগিক সম্ভাবনা বলে $P(A)$ এবং $P(B)$ কে শর্তবিহীন সম্ভাবনা ও $P(A/B)$ এবং $P(B/A)$ কে শর্তযুক্ত সম্ভাবনা বলে।

সুতরাং (3) নং সমীকরণে আমরা দেখি যৌগিক সম্ভাবনা = শর্তহীন সম্ভাবনা × শর্তযুক্ত সম্ভাবনা। (3) সমীকরণকে সম্ভাবনার যৌগিক উপপাদ্য (Theorem of Compound Probability) বলা হয়।

প্রমাণ : ধরা যাক্ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রে মোট n সংখ্যক নমুনা বিন্দু আছে। তার মধ্যে $n(A)$ সংখ্যক নমুনা বিন্দু A ঘটনার অনুকূলে, $n(B)$ সংখ্যক নমুনাবিন্দু B ঘটনার অনুকূলে এবং $n(A \cap B)$ সংখ্যক নমুনা বিন্দু $(A \cap B)$ ঘটনার অনুকূলে আছে।

এখন ঘটনাগুলির শর্তবিহীন সম্ভাবনা আমরা লিখতে পারি—

$$P(A) = \frac{n(A)}{n},\quad P(B) = \frac{n(B)}{n}\ \text{এবং } P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n}$$

এবার শর্তযুক্ত সম্ভাবনার সংজ্ঞা অনুযায়ী $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, যখন $P(B) > 0$

$$= \frac{n(A \cap B)/n}{n(B)/n} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

একইভাবে, $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, যখন $P(A) > 0$

$$= \frac{n(A \cap B)/n}{n(A)/n} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

এখন, $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n} = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} \cdot \dfrac{n(A)}{n} = P(B/A)\,.\,P(A)$

আবার, $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n} = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} \cdot \dfrac{n(B)}{n} = P(A/B)\,.\,P(B)$

অতএব, সম্ভাবনার যৌগিক উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

যদি তিনটি ঘটনা যথাক্রমে A_1, A_2 ও A_3 হয়, তবে সম্ভাবনার যৌগিক উপপাদ্য অনুযায়ী লেখা যায় :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).\ P(A_2/A_1).\ P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

প্রমাণ : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3]$

$= P[A_1 \cap A_2).\ P[A_3/(A_1 \cap A_2)]$

$= P(A_1).\ P(A_2/A_1).\ P[A_3/(A_1 \cap A_2)]$ প্রমাণিত

ঘটনার সংখ্যা বাড়িয়ে যদি n করা হয়, তবে যৌগিক উপপাদ্যটি সাধারণভাবে হবে—

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .....\cap A_n) = P(A_1).\ P(A_2/A_1).\ P(A_3/\ A_1 \cap A_2)\ .....P\left(\frac{A_n}{A_1 \cap A_2 \cap ....A_n}\right)$$

1.9 স্বাধীন ও অধীন ঘটনা

কোন নমুনা ক্ষেত্রের মধ্যে অবস্থিত দুটি ঘটনা A ও B কে স্বাধীন বা রাশিবিজ্ঞান অনুযায়ী স্বাধীন (independent or statistically independent) বলা যায় যদি B ঘটনা A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে কোনভাবেই প্রভাবিত করতে পারে না, সে B ঘটনা ঘটুক বা নাই ঘটুক।

অর্থাৎ, A ও B কে স্বাধীন বলা হবে যখন

$$P(A/B) = P(A/B^c) = P(A)$$

সম্ভাবনার যৌগিক উপপাদ্য থেকে পাই $P(A \cap B) = P(B).\ P(A/B) = P(B).P(A)$

সুতরাং, A ও B দুটি স্বাধীন ঘটনা হবে যখন $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$.

তিনটি ঘটনা A_1, A_2 ও A_3 স্বাধীন ঘটনা হবে যখন $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)$

A ও B অধীন (dependent) ঘটনা হবে যখন—

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

এবং $$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

*** জোড়ায় জোড়ায় স্বাধীন ঘটনা এবং পরস্পর স্বাধীন ঘটনা** (Pair-wise Independent events and Mutually Independent events)।

(i) জোড়ায় জোড়ায় স্বাধীন ঘটনা :

কোনা নমুনা ক্ষেত্রে n সংখ্যক ঘটনাগুলি প্রতি জোড়ায় স্বাধীন হবে

যদি $P(A_i \cap A_j) = P(A_i).\ P(A_j)$ যখন, i, j = 1, 2, 3, ..., n

এখানে $^nc_2$ সংখ্যক শর্ত আছে।

উদাহরণ স্বরূপ তিনটি ঘটনা A_1, A_2, A_3-এর ক্ষেত্রে $3c_2 = 3$টি শর্ত মানতে হবে অর্থাৎ A_1 A_2 A_3 ঘটনা তিনটি প্রতি জোড়ায় স্বাধীন হবে যখন—

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).\ P(A_2)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2).\ P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1).\ P(A_3)$$

একইভাবে যদি চারটি ঘটনা A_1, A_2, A_3 ও A_4 থাকে তবে তারা প্রতি জোড়ায় স্বাধীন হবে যদি $4c_2 = 6$টি শর্ত মানা হয়।

(ii) পরস্পর স্বাধীন ঘটনা :

n সংখ্যক ঘটনা A_1, A_2, ..., A_n কে পরস্পর স্বাধীন (mutually independent) বলা যেতে পারে যদি নিম্নলিখিত শর্তগুলি মান্যতা পায় :

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).\ P(A_2)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2).\ P(A_3)$...... $P(A_{n-1} \cap A_n) = P\ (A_{n-1}).\ (PA_n)$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).\ P(A_2).\ P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_2).\ P(A_3).\ P(A_4)$ .... $P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) = P(A_{n-2}).\ P(A_{n-1}).\ P(A_n)$

....

....

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ ......\ \cap A_n) = P(A_1).\ P(A_2).\ P(A_3)\ ....\ P(A_n)$

অর্থাৎ মোট শর্ত সংখ্যা হল $^nc_2 + {^nc_3} + ... + {^nc_n} = 2^n - n - 1$

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক্ n = 3 অর্থাৎ তিনটি ঘটনা A_1, A_2, A_3-এর ক্ষেত্রে ঘটনাগুলি পরস্পর স্বাধীন হবে যদি $2^3 - 3 - 1 = 4$টি শর্ত মান্যতা পায়।

অর্থাৎ $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).\ P(A_2)$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2).\ P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1).\ P(A_3)$$

এবং $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).\ P(A_2).\ P(A_3)$

টীকা : কোনো n সংখ্যক ঘটনা পরস্পর স্বাধীন হলেই তারা প্রতি জোড়ায় স্বাধীন হবেই। কিন্তু এর বিপরীতটা সব সময় সত্য নাও হতে পারে অর্থাৎ ঘটনাগুলি প্রতি জোড়ায় স্বাধীন হলেও তারা পরস্পর স্বাধীন নাও হতে পারে।

উদাহরণ 1.6 : ধরা যাক্ দুটি ঘটনা A ও B এবং $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ প্রমাণ কর (i) A ও B স্বাধীন ঘটনা হতে পারে না যদি তারা পরস্পর বিচ্ছিন্ন হয়। (ii) A ও B কখনই পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা হতে পারে না যদি তারা স্বাধীন হয়।

সমাধান : (i) যদি A ও B ঘটনা দুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন হয়, তবে $P(A \cap B) = 0$

কিন্তু, $P(A).\ P(B) > 0 \quad [\because P(A) > 0$ এবং $P(B) > 0]$

$\therefore P(A \cap B) \neq P(A).\ P(B)$ $\therefore$ A ও B স্বাধীন নয়।

(ii) যদি A ও B ঘটনা দুটি স্বাধীন হয়, তবে

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

$\therefore \quad P(A).\ P(B) > 0 \quad [\because P(A) > 0$ এবং $P(B) > 0]$

$\therefore \quad P(A \cap B) > 0$ অর্থাৎ $P(A \cap B) \neq 0$

সুতরাং A ও B পরস্পর বিচ্ছিন্ন হতে পারে না, যদি তারা স্বাধীন হয়।

উদাহরণ 1.7 যদি A ও B দুটি ঘটনা স্বাধীন হয়, তাহলে দেখাও (i) A^c ও B স্বাধীন (ii) A^c ও B^c স্বাধীন (iii) A ও B^c স্বাধীন।

সমাধান : (i) B ঘটনার দুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন অংশ হ'ল $A^c \cap B$ এবং $A \cap B$

$\therefore \quad P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$

অথবা, $\quad P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

অথবা, $\quad P(A^c \cap B) = P(B) - P(A).\ P(B)$ $[\because$ A এবং B স্বাধীন$]$

$$= P(B)\,[1 - P(A)]$$

$$= P(A^c).\ P(B).$$

$\therefore \quad A^c$ এবং B স্বাধীন।

(ii) আমরা জানি $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

$\therefore \quad P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$

$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A)P(B)\}$

[$\because$ A ও B স্বাধীন]

$= \{1 - P(A)\} - P(B)\ \{1 - P(A)\}$

$= \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\} = P(A^c).\ P(B^c)$

$\therefore$ A^c ও B^c স্বাধীন।

(iii) $(A \cap B)$ এবং $(A \cap B^c)$ ঘটনা A-র দুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন অংশ।

$\therefore\ P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

$\therefore\ P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A).\ P(b)$

($\because$ A এবং B স্বাধীন)

অথবা, $P(A \cap B^c) = P(A)\ [1 - P(B)] = P(A).\ P(B^c)$

$\therefore$ A এবং B^c স্বাধীন।

উদাহরণ 1.8 : একটি থলিতে 6টি লাল এবং 4টি সাদা বল আছে। দুটি বল পরপর থলি থেকে উঠানো হল কিন্তু কোন বল ফেরৎ দেওয়া হয় নাই। এখন দ্বিতীয় বলটির লাল হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর যখন জানা আছে যে প্রথম বলটি লাল পাওয়া গিয়েছে।

সমাধান : ধরা যাক্ প্রথম বলটি লাল হবার ঘটনাটি হল A_1 এবং দ্বিতীয় বলটি লাল হবার ঘটনাটি A_2। আমাদের নির্ণয় করতে হবে $P(A_2/A_1)$ অর্থাৎ শর্তযুক্ত সম্ভাবনা।

আমরা জানি $P(A_2/A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$

এখানে $P(A_1) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

এবং $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{6}{10}.\dfrac{5}{9}$

$= \dfrac{1}{3}$

$$\therefore\quad P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{9}$$

উদাহরণ 1.9 : কোন একটি নির্দিষ্ট দিনে এক চড়ুইভাতির ব্যবস্থা করা হয়েছে। আবহাওয়ার পূর্ব অনুমানে বলা হয়েছে যে ঐদিন বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা 80%। যদি বৃষ্টি হয়, তবে ভালো চড়ুইভাতি হওয়ার সম্ভাবনা 0.3 আর যদি বৃষ্টি না হয় তবে ভালো চড়ুইভাতি হওয়ার সম্ভাবনা 0.9। তাহলে ভালো চড়ুইভাতি হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান : ধরা যাক্ ঐদিন বৃষ্টি হওয়ার ঘটনা A_1 এবং বৃষ্টি না হওয়ার ঘটনা A_2, চড়ুইভাতি ভালোভাবে হওয়ার ঘটনা হল B আমাদের P(B) নির্ণয় করা দরকার যেহেতু A_1 ও A_2 ঘটনা দুটি সমগ্র ঘটনা (Exhaustive events) এবং পরস্পর বিচ্ছিন্ন (mutually exclusive)।

$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2)$$

$$= P(A_1).\ P(B/A_1) + P(A_2).\ P(B/A_2)$$

এখানে $P(A_1) = 0.8$, $P(A_2) = 0.2$, $P(B/A_1) = 0.3$ এবং $P(B/A_2) = 0.9$

$$\therefore\ P(B) = 0.8 \times 0.3 + 0.2 \times 0.9$$

$$= 0.24 + 0.18$$

$$= 0.42$$

উদাহরণ 1.10 : ধরা যাক্ একটি থলির মধ্যে 2টি লাল ও 4টি সবুজ গুলি আছে। 2টি গুলিকে পরপর উদ্দেশ্যহীন ভাবে তোলা হ'ল কিন্তু প্রথমবার গুলি তোলার পর গুলি ফেরৎ দেওয়া হল। তাহলে (i) দ্বিতীয় বারে তোলা গুলিটির সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর যখন জানা আছে যে, প্রথম গুলিটিও সবুজ উঠেছে (ii) দ্বিতীয় গুলিটির সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর যখন জানা আছে যে প্রথম গুলিটি লাল।

সমাধান : মনে করি প্রথম গুলিটির সবুজ হওয়ার ঘটনাটি A_1 এবং দ্বিতীয় গুলিটির সবুজ হওয়ার ঘটনাটি A_2 যেহেতু গুলি দুটি উদ্দেশ্যহীনভাবে তোলা হয়েছে এবং প্রথমবার তোলার পর গুলি থলিতে ফেরৎ দেওয়া হয়েছে, তাই A_1 ও A_2 ঘটনাটি স্বাধীন।

(i) অর্থাৎ $P(A_2/A_1) = P(A_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(ii) এবং $P(A_2/A_1^c) = P(A_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

1.10 শর্তযুক্ত সম্ভাবনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সমষ্টিগত উপপাদ্য

মনে করি কোনো একটি সমসম্ভব পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রে n সংখ্যক ঘটনা A_1, A_2, ..., A_n যেগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং ঘটনাসমূহের সমগ্র দল তৈরী করে (mutually exclusive and exhaustive) এবং কোনো ঘটনার সম্ভাবনা 'শূন্য' নয় এমত অবস্থায় এদের সঙ্গে যদি আরো একটি ঘটনা B ঘটে থাকে, তখন সমষ্টিগত উপপাদ্য অনুসারে—

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

প্রমাণ : যেহেতু A_1, A_2, ..., A_n ঘটনাগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং সমগ্র ঘটনা (mutually exclusive and exhaustive), তাই B ঘটনাটি এদের সঙ্গে নিম্নলিখিত উপায়ে পরস্পর বিচ্ছিন্নভাবে ঘটতে পারে। অর্থাৎ B ঘটনার পরস্পর বিচ্ছিন্ন অংশগুলি হল—

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \text{............} \cup (A_n \cap B)$$

যেহেতু A_1, A_2 ......, A_n ঘটনাগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন তাই $(A_1 \cap B)$, $(A_2 \cap B)$, ... , $(A_n \cap B)$ এই ঘটনাগুলিও পরস্পর বিচ্ছিন্ন হবে। সুতরাং আমরা লিখতে পারি—

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \quad \text{...............} \quad \text{(i)}$$

আমরা জানি, যে $P(B/A_i) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$, যখন $P(A_i) \neq 0$

$$\therefore \quad P(A_i \cap B) = P(A_i).\ P(B/A_i), \text{ যখন } P(A_i) \neq 0$$

এই সম্পর্কটি (i) সমীকরণে বসাইয়া পাই—

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).\ P(B/A_i); \quad \text{যখন } P(A_i) \neq 0।$$

1.11 Bayes-এর উপপাদ্য

একটা ঘটনা B ঘটতে পারে যদি n সংখ্যক পরস্পর বিচ্ছিন্ন ও ঘটনা সমূহের সমগ্র দল সৃষ্টিকারী ঘটনাগুলি A_1, A_2, ..., A_n এর মধ্যে একটি ঘটে। এখানে $P(A_1)$, $P(A_2)$...... $P(A_n)$ সম্ভাবনাগুলি এবং $P(B/A_1)$, $P(B/A_2)$...... $P(B/A_n)$ শর্তযুক্ত সম্ভাবনাগুলির মান ধনাত্মক এবং এই সবগুলি মান জানা থাকলে, B ঘটনা ঘটেছে এই শর্তে A_i ঘটনার শর্তযুক্ত সম্ভাবনার মান অর্থাৎ $P(A_i/B)$ এর মান নিম্নলিখিত সমীকরণের সাহায্যে পাওয়া যায় :

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

এই উপপাদ্যকে Baye's উপপাদ্য বলা হয়।

প্রমাণ : আমরা জানি A_1, A_2,......., A_n ঘটনাগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ও সমগ্র ঘটনা (Mutually exclusive and exhaustive)

$\therefore A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_n = S$. এখানে S নিশ্চিত ঘটনা নির্দেশ করে। এখন যে কোনো ঘটনা B ক্ষেত্রে, যখন $P(B) > 0$

$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n) \cap B$

অথবা, $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup .... \cup (A_n \cap B)$

যেহেতু A_1, A_2, ..., A_n ঘটনাগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন, সুতরাং $(A_1 \cap B)$, $(A_2 \cap B)$, ..., $(A_n \cap B)$ ঘটনাগুলিও পরস্পর বিচ্ছিন্ন।

সম্ভাবনার সমষ্টিগত উপপাদ্য প্রয়োগ করে লিখতে পারি

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) .... + P(A_n \cap B)$

$= P(A_1).\ P(B/A_1) + P(A_2).\ P(B/A_2) + ...+ P(A_n).\ P(B/A_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i) \quad .... (1)$$

এখন সম্ভাবনার যৌগিক উপপাদ্য থেকে লিখতে পারি

$P(A_i \cap B) = P(B).\ P(A_i/B) = P(A_i).\ P(B/A_i)$ .... (2)

$$\therefore \quad P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(B)} \quad \text{[(2) নং সমীকরণের ডান দিকটা থেকে পাই]}$$

$$= \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)} \quad \text{[(1) নং সমীকরণ প্রয়োগ করে পাই]}$$

উদাহরণ 1.11 : একই রকম দেখতে তিনটি বাক্সতে কালো ও সাদা বল আছে। প্রথম বাক্সতে 5টা কালো ও 3টি সাদা বল, দ্বিতীয় বাক্সে 6টি কালো ও 2টি সাদা বল এবং তৃতীয় বাক্সেটিতে 3টি কালো ও 5টি সাদা বল আছে। উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি বাক্স পছন্দ করা হ'ল এবং তার থেকে একটি বল তোলা হল আবারও উদ্দেশ্যহীনভাবে। (i) বলটির কালো হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। (ii) যদি জানা থাকে যে বলটি কালো, তবে বলটির তৃতীয় বাক্স থেকে বেরোনোর সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরা যাক্ A_1, A_2 ও A_3 হল যথাক্রমে প্রথম বাক্স, দ্বিতীয় বাক্স ও তৃতীয় বাক্স পছন্দ করার ঘটনা এবং একটি কালো বল তোলার ঘটনাটি B দিয়ে নির্দেশ করা হবে।

এখানে A_1, A_2, A_3 ঘটনা তিনটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং সমগ্র ঘটনা। (mutually exclusive and exhaustive)। বাক্স তিনটি উদ্দেশ্যহীন ভাবে পছন্দ করা হয়েছে তাই—

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

আবার, $P(B/A_1) = \frac{5}{8}$, $P(B/A_2) = \frac{6}{8}$, $P(B/A_3) = \frac{3}{8}$

(i) বলটির কালো হওয়ার সম্ভাবনা হ'ল—

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i).\ P(B/A_i) = \frac{1}{3}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{6}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{14}{8} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

(ii) Bayes উপপাদ্য অনুযায়ী সম্ভাবনাটি—

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3).P(B/A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i).\ P(B/A_i)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{24}\times\frac{12}{7} = \frac{3}{14}$$

উদাহরণ 1.12 : X, Y, Z-এর কোনো কলেজের অধ্যক্ষ হওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে 0.3, 0.5 এবং 0.2। X, Y, Z-এর অধ্যক্ষ হওয়ায় ছাত্র সহায়তা তহবিল প্রবর্তন করার সম্ভাবনা যথাক্রমে 0.4, 0.6 এবং 0.1. যদি ছাত্র সহায়তা তহবিল প্রবর্তিত হয় তাহলে Y-এর অধ্যক্ষ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরা যাক্, X, Y, Z-এর অধ্যক্ষ হওয়ার ঘটনা যথাক্রমে A_1, A_2 ও A_3 দিয়ে নির্দেশিত হয়। A_1, A_2, A_3 ঘটনা তিনটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং সমগ্র ঘটনা।

$P(A_1) = 0.3$, $P(A_2) = 0.5$, $P(A_3) = 0.2$ দেওয়া আছে।

ধরা যাক্ ছাত্র সহায়তা তহবিলের প্রবর্তন B ঘটনা নির্দেশ করে।

$P(B/A_1) = 0.4$, $P(B/A_2) = 0.6$, $P(B/A_3) = 0.1$ দেওয়া আছে। আমাদের $P(A_2/B)$ নির্ণয় করতে হবে।

Bayes-র উপপাদ্য অনুযায়ী

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2).P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i).\ P(B/A_i)} = \frac{0.5\times0.6}{0.3\times0.4+0.5\times0.6+0.2\times0.1} = \frac{0.3}{0.44} = 0.68$$

1.12 সম্ভাবনা বিষয়ক ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞার ত্রুটি

1. কোন পরীক্ষায় যদি সংশ্লিষ্ট নমুনা ক্ষেত্রটি (Sample space) অসীম হয় অর্থাৎ যদি $n \to \infty$ দেখা যায় তবে ক্লাসিক্যাল সংজ্ঞা ব্যবহার করা যায় না। সেক্ষেত্রে যে কোন ঘটনার সম্ভাবনা ঐ নমুনা ক্ষেত্রর জন্য শূন্য হয়ে যায়। অর্থাৎ—

যদি $n \to \infty$ হয় তবে $P(A) = \frac{m}{n} \to 0$

সুতরাং ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞা তখনই কাজ করবে যখন n সসীম (অসীম নয়)।

2. যদি সমস্ত ঘটনা সমভাবে সম্ভাব্য (equally likely) না হয় তাহলে ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞা প্রয়োগ করা যাবে না।

3. এই সংজ্ঞাটি চক্রাকার দোযে (Circular Reasoning) দুষ্ট। এখানে সম্ভাবনার সংজ্ঞাতে সমভাবে সম্ভাব্য ঘটনা শর্ত হিসাবে রাখা হয়েছে। অর্থাৎ সম্ভাবনার সংজ্ঞাতে সম্ভাবনা কথাটি ব্যবহার করা হয়েছে।

4. যদি একটি মুদ্রা যেটিকে ছোঁড়া হচ্ছে তার কোন বিশেষ দিকে ঝোঁক থাকার ফলে ক্রমাগত Head বা ক্রমাগত tail পড়ছে, সেক্ষেত্রে ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞা প্রযোজ্য হবে না।

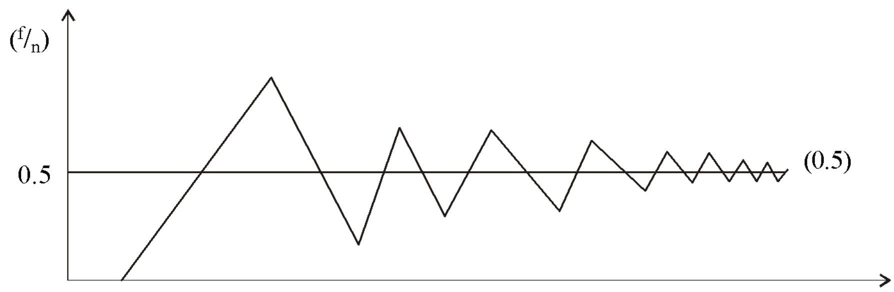
1.13 সম্ভাবনার অবেক্ষণভিত্তিক বা পরিসংখ্যানীয় সংজ্ঞা

সম্ভাবনার সংজ্ঞা নির্ধারণ করতে ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞার ত্রুটিগুলি লক্ষ্য করে Von Mises সম্ভাবনার একটি বিকল্প সংজ্ঞা দিয়েছেন। এই সংজ্ঞায় কোন একটি ঘটনার সম্ভাবনাকে ঘটনাটির পরিসংখ্যা অনুপাত (relative frequency) হিসাবে ধরা হয় যখন আবশ্যিক ভাবে একই শর্ত মেনে পরীক্ষাটি অসংখ্য বার পুনরাবৃত্তি করা হয়। ঘটনাটি ঘটার সংখ্যা (f) এবং যতবার পরীক্ষাটি করা হয় (n) এই অনুপাতের সীমান্তবর্তী মান (limiting value) কে ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা বলা হয়।

ধরা যাক ঘটনা A যতবার ঘটেছে তার সংখ্যা হল f এবং পরীক্ষাটি n সংখ্যক বার পুনরাবৃত্তি করা হয়েছে।

$\therefore$ A ঘটনার সম্ভাবনা হবে $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f}{n}\right)$

যদি একটি চিত্রের সাহায্যে দেখানো যায় তবে চিত্রটিতে সম্ভাবনা নিম্নলিখিত ভাবে গণনা করা হয়।



চিত্র 1.11 পরীক্ষার পুনরাবৃত্তির সংখ্যা = n

পরিসংখ্যার অনুপাত $\left(f/n\right)$ প্রথমদিকে উচ্চহারে উঠা-নামা করলেও (fluctuations) পরীক্ষার পুনরাবৃত্তির সংখ্যা n যত বাড়বে তত এই উঠানামা হ্রাস পেতে থাকে ও অবশেষে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্থির হয়ে যায়। যে বিন্দুতে $\left(f/n\right)$ এর মান স্থির হয়ে যায় সেটিকেই ঘটনা (A) টির সম্ভাব্য মান বলে মনে করা হয়।

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f}{n}\right) = 0.5 \quad (\text{চিত্র } 1.11)$$

এই সংজ্ঞায় কিছু সুবিধা আছে।

1. কোন পরীক্ষার পুনরাবৃত্তির সংখ্যা যদি অসীমও হয় তা হলেও এই সংজ্ঞাটি ব্যবহার যোগ্য।

2. এই সংজ্ঞা অনুযায়ী ঘটনাগুলি সব সম-সম্ভাবনা যুক্ত না হলেও চলে।

এই সংজ্ঞার অসুবিধা হ'ল এই সংজ্ঞার ভিত্তিতে কোনো ঘটনার সম্ভাবনার সাংখ্য মান নিশ্চিতরূপে নির্ণয় করা যায় না। যেহেতু এখানে অবেক্ষণভিত্তিক নীতি ব্যবহৃত হয় এবং কোন গাণিতিক সুনির্দিষ্ট নিয়ম ব্যবহার করা হয় না তাই গাণিতিক বিচারে এটি গ্রহণযোগ্য নয়। এই অসুবিধার জন্য সম্ভাবনার আর একটি সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে যেটিকে স্বতঃসিদ্ধ সংজ্ঞা হিসাবে বিবেচনা করা হয়।

1.14 সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধ সংজ্ঞা

A. N. Kolmogrov এই স্বতঃসিদ্ধ সংজ্ঞার প্রবক্তা। ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞা ও অবেক্ষণভিত্তিক সংজ্ঞা দুটির অসঙ্গতিগুলি বাদ দিয়ে দেওয়া হয়েছে।

এই সংজ্ঞাটি কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ সত্যের (Axioms) এর উপর নির্ভরশীল

(i) কোন একটি ঘটনা A-র জন্য $P(A) \geq 0$

(ii) নমুনা ক্ষেত্র S কে নিশ্চিত ঘটনা বলা হয়। এক্ষেত্রে $P(S) = 1$

(iii) পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র S এর মধ্যে সসীম সংখ্যক পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনাগুলি যথাক্রমে A_1, A_2, ……, A_n হলে—

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots\ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots\ldots\ldots$ হবে।

দুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা A_1 ও A_2-র ক্ষেত্রে

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ হবে।

(iv) যে কোন দুটি শর্তনির্ভর ঘটনা A_1 ও A_2-র ক্ষেত্রে

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}, \quad P(A_1) > 0$$

এবং $$P(A_1/A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}, \quad P(A_2) > 0$$

এই স্বতঃসিদ্ধ সত্যগুলির প্রেক্ষাপটে সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধ সংজ্ঞায় কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে দীর্ঘকালীন আপেক্ষিক পরিসংখ্যা (Long run Relative Frequency) হিসোব দেখা হয়। যদি একটি পরীক্ষার পুনরাবৃত্তির সংখ্যা 'n' হয় এবং ঐ পরীক্ষায় একটি ঘটনা A যতবার ঘটেছে তার সংখ্যা 'f' হয়, তাহলে দীর্ঘকালীন আপেক্ষিক পরিসংখ্যা হবে $\lim_{n \to \infty} \left(f/n \right)$

$$\text{অর্থাৎ } P(A) = \lim_{n \to \infty} \left(f/n \right)$$

এই আপেক্ষিক পরিসংখ্যার উঠানামা যে বিন্দু বা মানকে কেন্দ্র করে স্থির হয়, সেই সাংখ্য মানকেই ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনার মান হিসাবে ধরা হয়।

1.15 সারাংশ

সম্ভাবনা তত্ত্ব অনিশ্চয়তা নির্ভর ঘটনাবলী নিয়ে পর্যালোচনা করে। বস্তুগত সম্ভাবনা পরিমাপযোগ্য। একই ঘটনা একই পরিবেশে ক্রমাগত ঘটিয়ে তার গাণিতিক সম্ভাবনার মান গণনা করা যায়। ভবিষ্যত ফলাফল অনিশ্চিত হলেও কিছু নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসরণ করলে ভবিষ্যদ্বাণীও করা যায়। আবার সেই ভবিষ্যদ্বাণীর কত অংশ সত্য হবে তাও গাণিতিক গণনার মাধ্যমে বলা সম্ভব।

একই পরিবেশে কোন পর্যবেক্ষণ বার বার করাকে পরীক্ষা বলে এবং পরীক্ষার ফলগুলিকে ঘটনা বলে। ঝোঁকশূন্য পর্যবেক্ষণ পদ্ধতিকে পক্ষপাতহীন পরীক্ষা বলে। এই পরীক্ষার ঘটনাগুলি ঘটার সম্ভাবনা একেবারে সমান হয়। যদি একবার পরীক্ষার ফলে কেবলমাত্র একটি ঘটনাই ঘটতে পারে একসঙ্গে দুই বা ততোধিক ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা না থাকে তবে এই ঘটনা সমূহকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা বলে। দুটি ঘটনা যদি পরস্পরকে প্রভাবিত না করে তবে ঘটনা দুটিকে স্বাধীন ঘটনা বলা হবে। সম্ভাবনা বিষয়ক কোন পরীক্ষা থেকে যত ফল পাওয়া যায় তার মধ্যে কোন বিশেষ ফল (ঘটনা) কতবার পাওয়া যায় সেটা গণনা করা হয়। গণনা করা এই সংখ্যাটিকে অনুকূল ঘটনা বলে। কোন পরীক্ষায় মোট যতগুলি সম্ভাব্য ফল (ঘটনা) পাওয়া যায় তাকেই সমগ্র দল বা সমগ্র ঘটনা বলে। পক্ষপাতহীন কোন পরীক্ষার সমস্ত সম্ভাব্য মৌলিক ঘটনাকে একত্রে একটি দলভুক্ত করলে নমুনা ক্ষেত্র পাওয়া যায়। প্রতিটি মৌলিক ঘটনাকে নমুনা বিন্দু বলে।

সম্ভাবনার তিনটি সংজ্ঞা আছে—(i) ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞা (ii) পরিসংখ্যানীয় সংজ্ঞা ও (iii) স্বতঃসিদ্ধ সংজ্ঞা।

(i) নমুনা ক্ষেত্রের আয়তন যদি সীমিত হয়, সম্ভাব্য সকল ঘটনাই যদি সম-সম্ভাবনা সম্পন্ন হয়, তাহলে এই দুই অনুমানের উপর ভিত্তি করে ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞাটি হল ঃ n সংখ্যক পরস্পর বিচ্ছিন্ন, সমগ্র এবং সমসম্ভাবনা যুক্ত ফলাফলগুলির মধ্যে m সংখ্যক ফলাফল কোন একটি বিশেষ ঘটনা E ঘটার অনুকূলে ঘটে তবে E ঘটনার সম্ভাবনা হবে $\left(\frac{m}{n}\right)$। $\therefore P(E) = \frac{m}{n}$

কিন্তু কোন পরীক্ষায় যদি সংশ্লিষ্ট নমুনা ক্ষেত্রটি অসীম হয় অর্থাৎ যদি $n \to \infty$ হয় তবে $P(A) = \frac{m}{n} \to 0$ এক্ষেত্রে ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞাটি ব্যবহার করা যায় না।

আবার, সমস্ত ঘটনা যদি সমানভাবে সম্ভাব্য না হয় তাহলেও ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞা প্রয়োগ করা অসম্ভব হয়ে পড়ে। তাই সম্ভাবনার পরিসংখ্যানীয় সংজ্ঞাটি এক্ষেত্রে ব্যবহার করা সমীচিন। এই সংজ্ঞায় কোন একটি ঘটনার সম্ভাবনা ঘটনাটির পরিসংখ্যা অনুপাত হিসাবে ধরা হয় যখন একই শর্তে পরীক্ষাটি অসংখ্য বার পুনরাবৃত্তি করা হয়। কিন্তু যেহেতু এখানে অবেক্ষণভিত্তিক নীতি ব্যবহার করা হয়, কোন সুনির্দিষ্ট নিয়ম এখানে ব্যবহার করা যায় না। তাই সম্ভাবনার সংখ্যামান নিশ্চিতরূপে নির্ণয় করা অসম্ভব।

তৃতীয় সম্ভাবনার সংজ্ঞাকে সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধ সংজ্ঞা বলা হয়। সংজ্ঞাটি কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ সত্যের উপর নির্ভরশীল।

(i) কোন একটি ঘটনা A-র জন্য $P(A) \geq 0$

(ii) নুমানক্ষেত্র S কে নিশ্চিত ঘটনা বলা হয়। $P(S) = 1$

(iii) দুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা A_1 ও A_2-র ক্ষেত্রে $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

(iv) যে কোন দুটি শর্ত নির্ভর ঘটনা A_1 ও A_2-র ক্ষেত্রে

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}, \quad P(A_1) > 0$$

এবং $$P(A_1/A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}, \quad P(A_2) > 0$$

এবার যদি পরীক্ষার পুনরাবৃত্তির সংখ্যা 'n' হয় এবং ঐ পরীক্ষায় একটি ঘটনা A যতবার ঘটেছে তার সংখ্যা যদি 'f' হয়, তাহলে দীর্ঘকালীন আপেক্ষিক পরিসংখ্যা হবে $P(A) = \lim_{n \to \infty} \left(f/n \right)$

সম্ভাবনা বিষয়ক উপপাদ্যগুলি নিম্নরূপ ঃ

1. পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সমষ্টিবিষয়ক উপপাদ্য ঃ

যদি A_1 ও A_2 দুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা হয় তবে,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

2. পরস্পর অবিচ্ছিন্ন ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সমষ্টি বিষয়ক উপপাদ্য ঃ

যদি A_1 ও A_2 দুটি পরস্পর অবিচ্ছিন্ন ঘটনা হয় $A_1 \cap A_2 \neq 0$ তবে

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

3. সম্ভাবনার যৌগিক উপপাদ্য ও শর্তযুক্ত সম্ভাবনা ঃ

$P(A \cap B)$ কে যৌগিক সম্ভাবনা বলে; $P(A)$ ও $P(B)$ কে শর্তহীন সম্ভাবনা ও $P(A/B)$ এবং $P(B/A)$ কে শর্তযুক্ত সম্ভাবনা বলে।

B ঘটনা ঘটেছে এই শর্ত সাপেক্ষে A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে A ঘটনার শর্তযুক্ত সম্ভাবনা বলে।

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{যখন } P(B) > 0$$

আবার A ঘটনা ঘটেছে এই শর্তসাপেক্ষে B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে B ঘটনার শর্তযুক্ত সম্ভাবনা বলে।

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{যখন } P(A) > 0$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(B).\ P(A/B), \quad \text{যখন } P(B) > 0$$

$$= P(A).\ P(B/A), \quad \text{যখন } P(A) > 0$$

4. কোন নমুনাক্ষেত্রের মধ্যে অবস্থিত দুটি ঘটনা A ও B কে স্বাধীন বলা হয় যদি B ঘটনা A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে কোন ভাবেই প্রভাবিত করতে না পারে অর্থাৎ $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$

5. Bayes'-র উপপাদ্য ঃ যদি $P(A_1)$, $P(A_2)$ .... $P(A_n)$ সম্ভাবনাগুলি এবং $P(B/A_1)$, $P(B/A_2)$ .... $P(B/A_n)$ শর্তযুক্ত সম্ভাবনাগুলির মান যদি ধনাত্মক হয় এবং সবগুলির মান জানা থাকলে, B ঘটনা ঘটেছে এই শর্তে A_i ঘটনার শর্তযুক্ত সম্ভাবনার মান অর্থাৎ $P(A_i/B)$ এর মান হবে—

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).\ P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).\ P(B/A_i)}$$

1.16 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা ঃ (সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন, প্রতিটির মান 2.5)

1. 52টি তাসের এক গুচ্ছ থেকে উদ্দেশ্যহীন ভাবে একটি তাস নেওয়া হল। তাসটি টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। উঃ 1/13

2. $P(A_1) = \frac{1}{8}$, $P(A_2) = \frac{2}{5}$ এবং $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{3}$ দেওয়া আছে, $P(A_1 \cup A_2)$ -র মান নির্ণয় কর। উঃ $\frac{23}{120}$

3. শর্তযুক্ত সম্ভাবনার সংজ্ঞা দাও।

4. $P(A_1) = \frac{1}{4}$, $P(A_2) = \frac{2}{5}$ এবং $P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{2}$ দেওয়া আছে।

   (i) $P(A_1/A_2)$ এবং (ii) $P(A_2/A_1)$ নির্ণয় করো। উঃ (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{3}{5}$

5. যদি তিনটি ঘটনা পরস্পর বিচ্ছিন্ন হয়, তবে সম্ভাবনার সমষ্টি বিষয়ক উপপাদ্যটি কি হবে?

6. স্বাধীন ও অধীন ঘটনাবলী ব্যাখ্যা কর।

7. প্রতিজোড়ায় স্বাধীন ও পরস্পর স্বাধীন ঘটনার মধ্যে পার্থক্য কী?

8. দুটি ঝোঁকবিহীন মুদ্রা একসঙ্গে ছোঁড়া হলে অন্ততপক্ষে একটি Head পড়ার সম্ভাবনা কত? উঃ $\frac{3}{4}$

9. দুটি আদর্শ ছক্কা উদ্দেশ্যবিহীন ভাবে ছোঁড়া হ'ল। উপরি পৃষ্ঠে প্রাপ্ত সংখ্যার যোগফল 11 হবে তার সম্ভাবনা কত? উঃ $\frac{1}{18}$

10. 52টি তাসের মধ্যে উদ্দেশ্যহীন ভাবে একটি তাস উঠানো হল। তাসটি হরতন অথবা গোলাম হবে তার সম্ভাবনা কত? উঃ $\frac{4}{13}$

প্রশ্নমালা : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 5)

11. ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞার ত্রুটিগুলি ব্যাখ্যা কর।

12. HOME শব্দের অক্ষরগুলি থেকে উদ্দেশ্যহীন ভাবে দুটি অক্ষর নেওয়া হল। পরীক্ষাটির নমুনা ক্ষেত্র কি? সম্ভাবনা নির্ণয় কর যখন (i) দুটি অক্ষরই স্বরবর্ণ (ii) কমপক্ষে একটি স্বরবর্ণ (iii) একটি নির্বাচিত অক্ষর M হবে।

    উঃ S = [(H, O), (H, M), (H, E), (O, M), (O, E), (M, E)]

    (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{1}{2}$

13. একটি থলিতে 7টি লাল ও 5টি সাদা বল আছে। থলি থেকে উদ্দেশ্যহীন ভাবে 4টি বল তোলা হল। সম্ভাবনা নির্ণয় করো (i) যখন 4টি বলই লাল। (ii) যখন ছটি লাল 2টি সাদা।

উঃ (i) $\frac{7}{99}$ (ii) $\frac{14}{33}$

14. যদি A_1 ও A_2 দুটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা (mutually exclusive events) ও $P(A_1 \cup A_2) \neq 0$, তবে প্রমাণ কর যে $P\left[\frac{A_1}{(A_1 \cup A_2)}\right] = \frac{P(A_1)}{P(A_1)+P(A_2)}$

প্রশ্নমালা ঃ (প্রতিটি প্রশ্নের মান 10)

15. Bayes এর উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।

16. সম্ভাবনার যৌগিক উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।

17. (i) দুটি ঘটনা পরস্পর বিচ্ছিন্ন হলে তারা কি স্বাধীন ঘটনা হবে?
(ii) দুটি ঘটনা স্বাধীন হলে তারা পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা হতে পারে?

18. একটি থলিতে 6টি সাদা ও 9টি কালো গুলি আছে। থলি থেকে 4টি গুলি উদ্দেশ্যহীন ভাবে তোলা হল। প্রথমবার তোলা 4টি গুলি সাদা হবে এবং দ্বিতীয় বার তোলা 4টি গুলি কালো হবে তার সম্ভাবনা কত হবে তা নিম্নলিখিত দুটি ক্ষেত্রের সাপেক্ষে নির্ণয় কর ঃ
(i) দ্বিতীয় বার গুলি তোলার সময় প্রথমবার তোলা গুলি যদি থলিতে ফেরৎ দেওয়া না হয়।
(ii) দ্বিতীয় বার গুলি তোলার সময় প্রথমবার তোলা গুলি যদি থলিতে ফেরৎ দেওয়া হয়।

উঃ (i) $\frac{3}{715}$ (ii) $\frac{6}{5929}$

[**Hint :** কোন পরীক্ষার কোন নমুনা তোলার পর ফেরৎ দেওয়া হলে ঘটনাগুলি স্বাধীন হয়। কিন্তু তোলার পর ফেরৎ না দেওয়া হলে ঘটনাগুলি হবে অধীন।]

1.17 গ্রন্থপঞ্জী

1. Goon, Gupta, Dasgupta – Fundamentals of Statistics Vol. I. The world press Pvt. Ltd, Calcutta, 1968
2. N. G. Das – Statiscical Method's Vol. I & II, Mac Graw Hill, India, 2008
3. Mathai and Rathie – Probability and Statistics, Palgrave Macmillan, 1977
4. Spiegel – Probability and Statistics, McGraw Hill.

একক-2 ❑ সম্ভাবনা তত্ত্ব –II

গঠন

2.1 উদ্দেশ্য

আমরা আগের একক এর আলোচনায় জেনেছিলাম যে এই সম্ভাবনাতত্ত্ব অনিশ্চয়তা নির্ভর ক্রীড়া (games of chance) সমূহের মাধ্যমে উৎপত্তি লাভ করে। প্রাত্যহিক জীবনে যেমন এর ব্যবহার আছে তেমনি অনিশ্চয়তাদীর্ণ ব্যবসা বাণিজ্যে সঠিক সিদ্ধান্ত নিতে সম্ভাবনা তত্ত্বের জুড়ি পাওয়া ভার। আবার বৈজ্ঞানিক আবিষ্কার কতটা তাত্ত্বিক বিষয়ে সুদৃঢ় তা গণনা করতেও সম্ভাবনাতত্ত্বের প্রয়োজন হয়। সম্ভাবনা বিষয়ক তাত্ত্বিক আলোচনায় শুধুমাত্র বস্তুগত সম্ভাবনা নিয়েই আলোচনা করা হয়।

2.2 প্রস্তাবনা

রাশিবিজ্ঞান ফলিত গণিতশাস্ত্রের (Applied Mathematics) একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা। এখানে বিভিন্ন ধরনের পরিমাপ ও সমস্ত ধরনের গবেষণার তথ্য বিশ্লেষণ ও সেখান থেকে উপযুক্ত সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা হয়।

রাশিবিজ্ঞান শাস্ত্রের মূল দুটি কাজ হল (1) রাশিতথ্য সংগ্রহ ও উপস্থাপনা, (2) সংগৃহীত রাশিতথ্য রাশিবিজ্ঞানের বিভিন্ন পরিমাপ ও পদ্ধতি ব্যবহার করে যথাযথ ব্যাখ্যা করা ও একটি যুক্তিপূর্ণ সিদ্ধান্তে পৌঁছানো। এই দুটি কাজ সুসম্পন্ন করার জন্য দুটি উল্লেখযোগ্য বিভাগ হ'ল—(1) বর্ণনামূলক রাশিবিজ্ঞান (Descriptive Statistics) (2) অনুমিতিমূলক রাশিবিজ্ঞান (Inferential Statistics)

বর্ণনামূলক রাশিবিজ্ঞানে যে ধরনের চলক আমরা ব্যবহার করি সেগুলি অনিশ্চয়তা নির্ভর নয় কিন্তু অনুমিতিমূলক রাশি বিজ্ঞানে যে ধরনের চলক নিয়ে আমরা কাজ করি সেগুলি সম্পূর্ণ অনিশ্চয়তা নির্ভর এবং তাদের মানের সঙ্গে সবসময় একটি সম্ভাবনার মান যুক্ত থাকে। যেমন একটি ছক্কার দান চাললে তার উপরিপৃষ্ঠে যে অঙ্ক আসে তাকে যদি চলকের মান ধরা হয় তাহলে আমরা 1, 2, 3, 4, 5, 6 এই ছয়টি অঙ্ক পাবো। এই ছয়টি অঙ্কের প্রতিটি পাওয়ার সম্ভাবনা মান হল $\left(\frac{1}{6}\right)$ অর্থাৎ চলকের নিজস্ব মানের সঙ্গে একটি সম্ভাবনা মান যুক্ত আছে। এই ধরনের চলকের নাম সমসম্ভব চলক (Random Variable)। সম্ভাবনা তত্ত্বে আমরা এই সমসম্ভব চলক নিয়েই কাজ করি।

2.3 সমসম্ভব চলক

সমসম্ভব চলক বলতে এমন একটি চলককে বোঝায় যার প্রতিটি মানের সঙ্গে একটা নির্দিষ্ট সম্ভাবনা মান যুক্ত থাকে। একটি ঝোঁক শূন্য ছক্কার দান চালানো হলে তার উপরিপৃষ্ঠে যে অঙ্কগুলি আসে সেগুলিকে x দিয়ে নির্দেশ করা হ'ল। এক্ষেত্রে x এর 6টি মান পাওয়া যাবে। x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) এর বিভিন্ন মানগুলি হবে 1, 2, 3, 4, 5, 6 এবং x_i এর প্রতিটি মানের সঙ্গে একটি করে সম্ভাবনার

মান P(x) যুক্ত থাকবে। এক্ষেত্রে x_i এর প্রতিটি মানের সঙ্গে $P(x) = \frac{1}{6}$ যুক্ত হবে। এবং $\sum P(x_i) = 1$ হবে।

এখন যদি সমসম্ভব চলকের মানগুলি শ্রেণীবদ্ধ ভাবে সাজানো যায় তাহলে তাকে সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা বিভাজন (Probability Distribution of a Random Variable) বলা হয় যেখানে সম্ভাবনার মানগুলিকে $P(x_i)$ পরিসংখ্যার মান হিসাবে ধরা হয়।

ছক সংখ্যা : 2.1 সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা বিভাজন

x_i (সমসম্ভব চলকের মান)	$P(x_i)$ ঐ চলকের সম্ভাবনার মান
$x_1 = 1$	$P(x_1) = \frac{1}{6}$
$x_2 = 2$	$P(x_2) = \frac{1}{6}$
$x_3 = 3$	$P(x_3) = \frac{1}{6}$
$x_4 = 4$	$P(x_4) = \frac{1}{6}$
$x_5 = 5$	$P(x_5) = \frac{1}{6}$
$x_6 = 6$	$P(x_6) = \frac{1}{6}$
মোট	$\sum_{i=1}^{6} P(x_i) = 1$

একটি সমসম্ভব চলক যদি সীমিত পরিসরে বিচ্ছিন্ন মান ধারণ করে তবে ঐ চলককে বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক (Discrete Random Variable) বলা হয়। মুদ্রা ছোঁড়া বা ছক্কার চাল দেওয়া বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের উদাহরণ। যদি কোন সমসম্ভব চলক অসীম সংখ্যক অবিচ্ছিন্ন মান ধারণ করে তবে ঐ চলককে অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক বলা হয়। সদ্যোজাত শিশুর ওজন, তেজস্ক্রিয় পদার্থের ক্ষয় হওয়ার সময় ইত্যাদি অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের উদাহরণ।

2.4 বিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা বিভাজন

ধরা যাক্ X একটি বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক যার বিচ্ছিন্ন মানগুলি যথাক্রমে $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ছোট থেকে বড় হিসাবে সাজানো) এবং প্রতিটি মানের সঙ্গে সম্ভাবনা মানগুলি যথাক্রমে $P_1, P_2, \ldots\ldots,$ P_n. সম্ভাবনা মানগুলির যোগফল $\sum P_i = 1$

চলক X এর সমস্ত নির্দ্দিষ্ট মান x_i এর সঙ্গো যুক্ত তাদের সম্ভাবনা মান P_i (i = 1, 2, ..., n) সমসম্ভব চলকের বিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা বিভাজন উপস্থাপিত করে। চলক X এর একটি নির্দ্দিষ্ট মান x ধরে তার সম্ভাবনা প্রকাশ করা হয় f(x) এর সাহায্যে অর্থাৎ $f(x) = P[X = x]$ বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের ক্ষেত্রে f(x) অপেক্ষকটিকে চলকের "সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক" (probability mass function) বা সংক্ষেপে p.m.f বলা হয়।

এই p.m.f দুটি শর্ত মেনে চলে :

(i) $f(x) \geq 0$, x এর যে কোন মানের জন্য

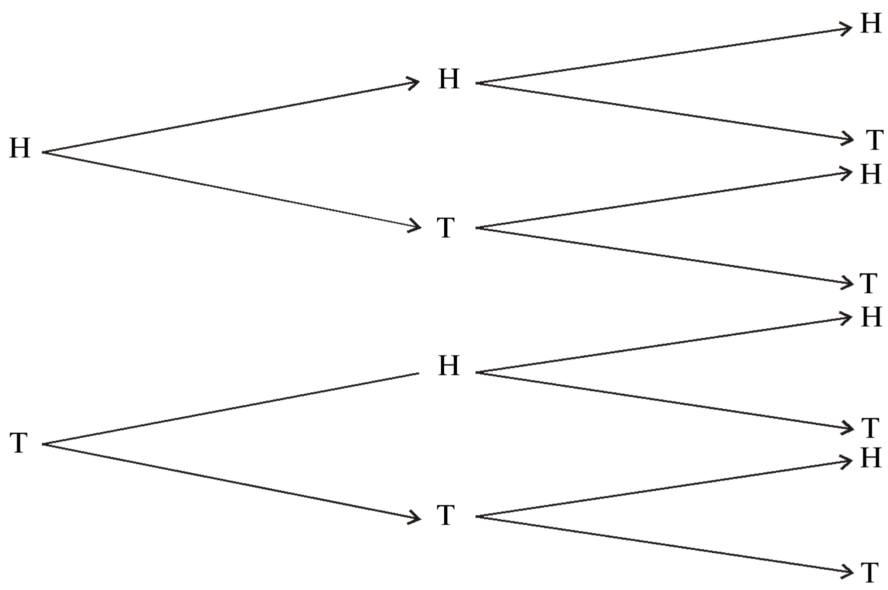
(ii) $\sum f(x) = 1$

অর্থাৎ $f(x) = p_i$, যখন $x = x_i$ (i = 1, 2, ..., n)

$= 0$, অন্যথায়

উদাহরণ : 2.1 একটি ঝোঁকশূন্য মুদ্রা তিনবার ছোঁড়া হ'ল। চলক x হবে কতবার Head পড়েছে তার উপর নির্ভর করে। এই x চলকটি একটি সমসম্ভব চলক কারণ তার মানগুলি হবে যথাক্রমে 0, 1, 2, 3 আর তার প্রতিটা মানের সঙ্গো যুক্ত হবে সম্ভাবনার মান। এই তিনবার ছোঁড়ার ফলে যে ফলাফল দেখা যাবে সেটা একটি প্রবাহ চার্টের মাধ্যমে দেখানো হল।

প্রথম বার ছোঁড়ার ফল **দ্বিতীয় বার ছোঁড়ার ফল** **তৃতীয় বার ছোঁড়ার ফল**



চিত্র : **2.1**

এই পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রটি হবে

S = [HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT]

এখানে মোট ৪টি সম্ভাব্য নমুনা বিন্দু পাওয়া যাবে।

ছক সংখ্যা : 2.2

পরীক্ষার ফল/ঘটনা	**Head এর সংখ্যা (x)**	**সম্ভাবনা (Probability)**
HHH	3	$\frac{1}{8}$
HHT	2	$\frac{1}{8}$
HTH	2	$\frac{1}{8}$
HTT	1	$\frac{1}{8}$
THH	2	$\frac{1}{8}$
TTH	1	$\frac{1}{8}$
THT	1	$\frac{1}{8}$
TTT	0	$\frac{1}{8}$

উপরোক্ত ৪টি ফল/ঘটনার প্রত্যেকটি ঘটার সম্ভাবনা = $\frac{1}{8}$

সুতরাং বলা যায় যে এটি একটি সমসম্ভব ঘটনার উদাহরণ।

এখানে ফলাফল যা পাওয়া গেল সেটা ব্যাখ্যা করা হল ঃ

3টি Head 1 বার পাওয়া গিয়েছে সুতরাং P(x = 3টি Head) = $\frac{1}{8}$

2টি Head 3 বার পাওয়া গিয়েছে সুতরাং P(x = 2টি Head) = $\frac{3}{8}$

1টি Head 3 বার পাওয়া গিয়েছে সুতরাং P(x = 1টি Head) = $\frac{3}{8}$

0টি Head 1 বার পাওয়া গিয়েছে সুতরাং P(x = 0টি Head) = $\frac{1}{8}$

এখন বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক X-এর সম্ভাবনা বিভাজন নীচে দেওয়া হল—

ছক সংখ্যা : 2.3

X-এর মান x_i (Head-এর সংখ্যা)	P(x)
$x_1 = 0$	$P_1 = \frac{1}{8}$
$x_2 = 1$	$P_2 = \frac{3}{8}$
$x_3 = 2$	$P_3 = \frac{3}{8}$
$x_4 = 3$	$P_4 = \frac{1}{8}$
মোট	$\sum P_i = 1$

সুতরাং দেখা গেল $f(x) \geq 0$ x-এর প্রতিটি মানের জন্য

অথবা $P_i \geq 0$ i-এর প্রতিটি মানের জন্য $i = 1, 2, ..., 4$

এবং $\sum_x f(x) = 1$ অথবা $\sum P_i = 1$

উদাহরণ : 2.2 নীচের অপেক্ষকটিকে কি কোন বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা অপেক্ষক বলে মনে হয়?

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}, && \text{যখন } x = -1 \\
&= \frac{1}{4}, && \text{যখন } x = 0 \\
&= \frac{1}{2}, && \text{যখন } x = 1 \\
&= 0, && \text{অন্যথায়}
\end{aligned}
$$

সমাধান : আমরা দেখতে পাচ্ছি যে সমস্ত x-এর মানের জন্য $f(x) \geq 0$

এবং $\sum_x f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 = 1$

যেহেতু বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষকে দুইটি শর্তই এখানে পালিত হচ্ছে তাই এটিকে কোন বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা অপেক্ষক বলে ধরা যায়।

উদাহরণ : 2.3 একটি বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের (X) সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষকটি নীচে দেওয়া হল—

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{যখন } x = 0 \\ 2c - 3c^2, & \text{যখন } x = 1 \\ 4c - 1, & \text{যখন } x = 2 \\ 0, & \text{অন্যথায়} \end{cases}$$

(i) c-এর মান নির্ণয় করো।

(ii) P (X > 0 / X < 2) এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান :

(i) যেহেতু f(x) একটি বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক, তাই নীচের শর্তগুলি সিদ্ধ হবে।

(i) $f(x) \geq 0$, x-এর সমস্ত মানের জন্য

(ii) $\sum_x f(x) = 1$

আমরা দ্বিতীয় শর্ত থেকে পাই

$$\sum_x f(x) = 1$$

অথবা, $c + 2c - 3c^2 + 4c - 1 = 1$

অথবা, $3c^2 - 7c + 2 = 0$

অথবা, $3c^2 - 6c - c + 2 = 0$

অথবা, $3c(c - 2) - 1(c - 2) = 0$

অথবা, $(3c - 1)(c - 2) = 0$

$\therefore \quad c = \frac{1}{3}$ অথবা 2

কিন্তু, $c \neq 2$ কারণ $c = 2$ হলে $f(0) = 2$ হবে অর্থাৎ $f(0) > 1$ যেটা একেবারেই অসম্ভব এবং শর্ত (ii) এর পরিপন্থী।

সুতরাং $c = \frac{1}{3}$

(ii) যেহেতু $c = \frac{1}{3}$, $\therefore\ f(0) = f(1) = f(2) = \frac{1}{3}$

এখন, $P(X > 0 \ / \ X < 2) = \dfrac{P\left[(X>0)\cap(X<2)\right]}{P(X<2)}$

$$= \frac{P(X=1)}{P(X=0)+P(X=1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

2.5 অবিচ্ছিন্ন বা সন্তত চলকের সম্ভাবনা বিভাজন

এবার X চলকটিকে একটি অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক মনে করা যাক্। একটি নির্দ্দিষ্ট সীমার মধ্যে X-এর অগুন্তি মান ধরা যেতে পারে। এইজন্য বিচ্ছিন্ন চলকের মত সহজেই সম্ভাবনা বিভাজন উপস্থাপিত করা যায় না। এখানে f(x) অপেক্ষকটিকে অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক (Probability density function) বা সংক্ষেপে p.d.f বলা হয়। এক্ষেত্রেও এই সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক f(x) দুটি শর্ত মেনে চলে ঃ

(i) $f(x) \geq 0$ x-এর যে কোনো মানের জন্য

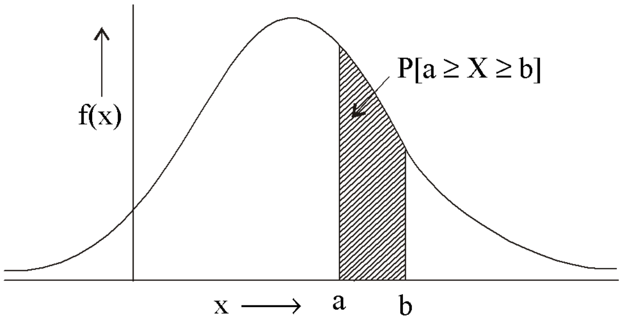
(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

এইবার অবিচ্ছিন্ন চলক X যদি একটি নির্দ্দিষ্ট সীমার মধ্যে অবস্থান করে (ধরা যাক্ a ও b এর মধ্যে X এর মান থাকবে, যেখানে $a \leq b$) তাহলে X এর সম্ভাবনা হবে—

$$P\ [a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

এই ধরনের অপেক্ষক যা উপরের দুটি শর্ত (i) এবং (ii) মেনে চলে তাকে X-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক বলে।

এখানে মনে রাখা দরকার যে একটি অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের (X) কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য সম্ভাবনা মান শূন্য হবে। এর কারণ হ'ল—



চিত্র : 2.2 সম্ভাবনা রেখা

$$P(a \le X \le a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

অর্থাৎ, $P(X = a) = 0$, X-এর মান ‘a’ র জন্য।

সুতরাং $P(a < X < b)$, $P(a \le X < b)$, $P(a < X \le b)$ এবং $P(a \le X \le b)$

সব কটি $\int_a^b f(x)\,dx$ এর সঙ্গো সমান হবে।

উদাহরণ : 2.4 নীচের অপেক্ষকটি কি সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক?

$$f(x) = 2x, \quad \text{যখন } 0 < x \le 1$$
$$= 4 - 2x, \quad \text{যখন } 1 < x \le 2$$
$$= 0, \quad \text{অন্যথায়}$$

সমাধান : f(x) অপেক্ষকটি সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক হবে যদি নীচের দুটি শর্ত মেনে চলে।

(i) $f(x) \ge 0$, সমস্ত x এর মানের জন্য

এবং (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

এখন $f(x) \ge 0$, সমস্ত x এর মানের জন্য সুতরাং প্রথম শর্তটি সিদ্ধ হল। এখন দেখা যাক দ্বিতীয় শর্তের ক্ষেত্রে কী হয়।

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 (4-2x)\,dx$$

$$= \left[2.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[4x - 2.\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= 1 + [(8-4) - (4-1) = 2 \neq 1$$

সুতরাং f(x) সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক হবে না কারণ দ্বিতীয় শর্তটি পূরণ হয়নি।

উদাহরণ : 2.5 একটি অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক X এর সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক নীচে দেওয়া হল।

$f(x) = \frac{1}{2} - ax,$ যখন $0 \leq x \leq 4$ এবং 'a' একটি ধ্রুবক

$= 0,$ অন্যথায়

(i) 'a'-র মান নির্ণয় কর (ii) P $(1 < x < 2)$ এর মান নির্ণয় কর (iii) P$(2x + 3 > 5)$ এর মান কত?

সমাধান :

(i) যেহেতু f(x) একটি সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক,

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

অথবা, $\int_0^4 \left(\frac{1}{2} - ax\right)dx = 1$

অথবা, $\left(\frac{x}{2} - a.\frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^4 = 1$

অথবা, $2 - 8a = 1$

$\therefore a = \frac{1}{8}$

$\therefore$ সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{8}$, যখন $0 \le x \le 4$

$= 0$, অন্যথায়

(ii) $P(1 < x < 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8}\right)dx$

$$= \left(\frac{x}{2} = \frac{x^2}{16}\right)\Bigg]_1^4 = \left(\frac{4}{2} - \frac{16}{16}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right)$$

$$= (2 - 1) - \left(\frac{8-1}{16}\right)$$

$$= 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

2.6 সমসম্ভব চলক ও তার বিভাজন অপেক্ষক

ধরা যাক্ X একটি সমসম্ভব বিচ্ছিন্ন চলক।

চলকটির সম্ভাবনা ক্ষেত্রে (Probability space) বাস্তব মানযুক্ত অপেক্ষকটি (real valued function) আমাদের সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক নামে পরিচিত।

সমসম্ভব চলকটির (X) বিচ্ছিন্ন মানগুলি যথাক্রমে $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ এবং এই মানগুলির সঙ্গে সংযুক্ত সম্ভাবনার মানগুলি যথাক্রমে $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$. ধরা যাক্ $x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n$. তাহলে আমরা লিখতে পারি :

$P(X < x_1) = 0$

$P(X \le x_1) = P_1$

$P(X < x_2) = P_1$

$P(X \le x_2) = P_1 + P_2$

$P(X < x_i) = P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_{i-1}$

$P(X \le x_i) = P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_i$

$P(X < x_n) = P_1$ +öiöi $P_2 + \ldots\ldots + P_{n-1}$

$P(X \le x_n) = P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_n = 1$

বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের বিভাজন অপেক্ষক (distribution function) অথবা ক্রমযৌগিক বিভাজন অপেক্ষক (Cumulative distribution function) কে F(x) দিয়ে উপস্থাপিত করা হয়।

$$F(x) = P\ (X \le x) = \sum_{y \le x} f(y)$$

এই বিভাজন অপেক্ষক নিম্নলিখিত শর্তগুলি পালন করে।

(i) $0 \le F(x) \le 1$

(ii) $F\ (-\infty) = 0$

(iii) $F\ (\infty) = 1$

(iv) $F(a) \le F(b)$ যখন $a < b$

এবং (v) F(x) ডান দিকে অবিচ্ছিন্ন যদিও বামদিকে বিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ : 2.6 নিম্নলিখিত সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক এর সাহায্যে সমসম্ভব চলকটির বিভাজন অপেক্ষক নির্ণয় কর এবং লেখচিত্রের সাহায্যে ঐটিকে উপস্থাপিত কর।

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}, && \text{যখন } x = 0 \\ &= \frac{1}{4}, && \text{যখন } x = 1 \\ &= \frac{1}{4}, && \text{যখন } x = 5 \\ &= 0, && \text{অন্যথায়} \end{aligned}$$

সমাধান : বিভাজন অপেক্ষক বলতে আমরা বুঝি

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{y \le x} f(y)$$

সুতরাং, যখন $x < 0$, $F(x) = 0$

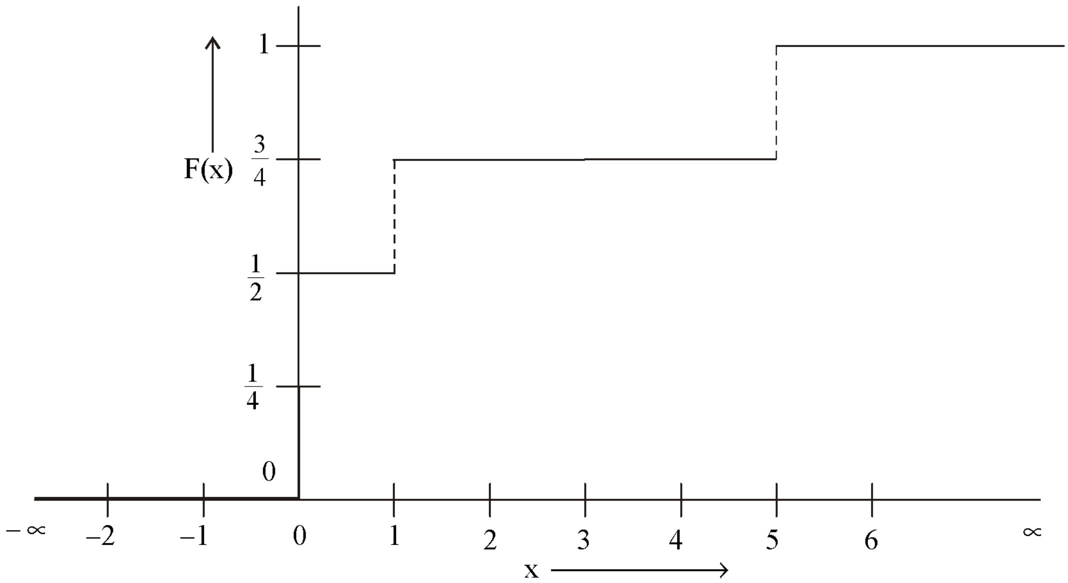
যখন $0 \le x < 1$, $F(x) = 0 + f(0) = \frac{1}{2}$

যখন $1 \le x < 5$, $F(x) = \frac{1}{2} + f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

যখন $x \ge 5$, $F(x) = \frac{3}{4} + f(5) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

অতএব আমরা লিখতে পারি

$$F(x) = 0, \quad \text{যখন } x < 0$$
$$= \frac{1}{2}, \quad \text{যখন } 0 \leq x < 1$$
$$= \frac{3}{4}, \quad \text{যখন } 1 \leq x < 5$$
$$= 1, \quad \text{যখন } x \geq 5$$



চিত্র : 2.3 লেখচিত্রের সাহায্যে একটি বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের বিভাজন অপেক্ষকের উপস্থাপনা (সোপান চিত্র)

অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের বিভাজন অপেক্ষক (Distribution function of a continuous random variable) :

যদি X একটি অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক হয় এবং তার সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক যদি f(x) হয় তবে X এর বিভাজন অপেক্ষক হবে

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

যখন x-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক f(x) নিম্নলিখিত শর্তগুলি পালন করে

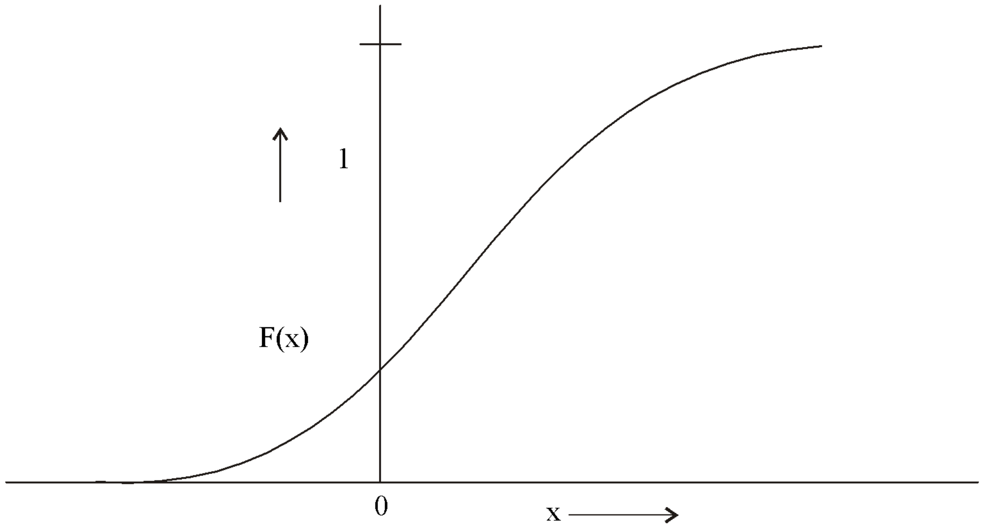
(i) $f(x) \geq 0$, সমস্ত x-এর মানের জন্য

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

আবার বিভাজন অপেক্ষক F(x) দেওয়া থাকলে x-এর সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক f(x) নীচের প্রক্রিয়ায় অনায়াসে নির্ণয় করা যায়।

$$f(x) = \frac{d}{dx}(F(x))$$

লেখচিত্রের সাহায্যে বিভাজন অপেক্ষক F(x) কে প্রকাশ করা যায়।



চিত্র ঃ 2.4 লেখ চিত্রের সাহায্যে একটি অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের বিভাজন অপেক্ষকের উপস্থাপন

উদাহরণ : 2.7 নীচের ঘনত্ব অপেক্ষকের সাহায্যে বিভাজন অপেক্ষক নির্ণয় কর এবং F(2) এর মান গণনা কর।

$$f(x) = \frac{x}{3}, \quad \text{যখন } 0 < x \le 1$$

$$= \frac{5}{27}(4-x), \quad \text{যখন } 1 < x \le 4$$

$$= 0, \quad \text{অন্যথায়}$$

সমাধান ঃ আমরা জানি বিভাজন অপেক্ষক

$$F(x) = P\ (X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

$\therefore$ যখন $x \le 0,\qquad F(x) = P(X \le x) = 0$

যখন $0 < x \le 1,\qquad F(x) = P\ (X \le 0) + P(0 < X \le x)$

$$= F(0) + \int_{0}^{x} \frac{y}{3}.dy$$

$$= 0 + \frac{x^2}{6} = \frac{x^2}{6}$$

যখন $1 < x \le 4,\quad F(x) = P\ (X \le 1) + P\ (1 < X \le x)$

$$= F(1) + \int_{1}^{5} \frac{5}{27}(4-y)\,dy$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{27}\left[\left(4y - \frac{y^2}{2}\right)\right]_1^x$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{27}\left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{7}{2}\right)$$

$$= -\frac{13}{27} + \frac{20}{27}x - \frac{5}{54}x^2$$

$$= 1 - \frac{5}{54}(x-4)^2$$

যখন $x > 4,\quad F(x) = P(X \le 4) + P\ (X > 4)$

$$= F(4) + 0$$

$$= 1$$

সুতরাং বিভাজন অপেক্ষকটি হবে—

$F(x) = 0,\qquad$ যখন $x < 0$

$= \frac{x^2}{6}$ যখন $0 < x \leq 1$

$= 1-\frac{5}{54}(x-4)^2$ যখন $1 < x \leq 4$

$= 1$ যখন $x > 4$

যেহেতু $x = 2$, $1 < x \leq 4$ এই সীমার মধ্যে পড়ছে,

তাই $F(2) = 1-\frac{5}{54}(2-4)^2 = \frac{17}{27}$

উদাহরণ : 2.8 বিভাজন অপেক্ষক দেওয়া আছে সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক নির্ণয় কর।

$F(x) = 0,$ যখন $x \leq 0$

$= \frac{2x^2}{5}$ যখন $0 < x \leq 1$

$= -\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)$ যখন $1 < x \leq 2$

$= 1$ যখন $x > 2$

সমাধান : যদি $f(x)$ চলকটির সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক হয় তবে

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

সুতরাং, যখন $x \leq 0$ তখন $f(x) = \frac{d}{dx}(0) = 0$

যখন $0 < x \leq 1$ তখন $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2}{5}\right) = \frac{4x}{5}$

যখন $1 < x \leq 2$ তখন $f(x) = \frac{d}{dx}\left[-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\right]$

$$= \frac{2}{5}(3-x)$$

যখন $x > 2$ তখন $f(x) = \frac{d}{dx}(1) = 0$

সুতরাং সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষকটি হবে—

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{4x}{5}, && \text{যখন } 0 < x < 1 \\
&= \frac{2}{5}(3 - x), && \text{যখন } 1 < x \le 2 \\
&= 0 && \text{অন্যথায়}
\end{aligned}
$$

2.7 সমসম্ভব চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা ও তার ধর্মাবলী

যদি কোন সমসম্ভব বিচ্ছিন্ন চলক X এর মানগুলি যথাক্রমে $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ও তাদের সঙ্গে যুক্ত সম্ভাবনা মানগুলি যথাক্রমে $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ হয়, তবে চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা $E(x)$ উপস্থাপিত হয় নীচের সূত্রের মাধ্যমে :

$$E(x) = p_1.x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \text{যখন,} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

কিন্তু যদি X একটি সমসম্ভব অবিচ্ছিন্ন চলক হয় এবং X-এর মান একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে $(a \le x \le b)$ থাকা অবস্থায় যদি সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক $f(x)$ যথার্থভাবে সংজ্ঞায়িত হয়, তবে অবিচ্ছিন্ন চলক X এর গাণিতিক প্রত্যাশা হবে—

$$E(x) = \int_a^b f(x)dx$$

টীকা : কোন চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা তার দীর্ঘকালীন গাণিতিক গড় ছাড়া আর কিছুই নয়।

আমরা জানি, $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots\cdots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_k}$

অথবা, $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots\cdots + f_kx_k}{n}$ যখন $\sum_{i=1}^{k} f_i = n$

অথবা, $\overline{x} = x_1 . \frac{f_1}{n} + x_2 . \frac{f_2}{n} + \cdots\cdots + x_k . \frac{f_k}{n}$

$$\therefore \ \lim_{n\to\infty} \overline{x} = x_1 . \lim_{n\to\infty} \frac{f_1}{n} + x_2 \lim_{n\to\infty} . \frac{f_2}{n} + \cdots\cdots + x_k \lim_{n\to\infty} \frac{f_k}{n}$$

$$= x_1p_1 + x_2.p_2 + \ldots\ldots + x_kp_k = \sum x_i p_i = E(x)$$

সুতরাং $\lim_{n\to\infty} \overline{x} = E(x)$, যখন $\lim_{n\to\infty} \frac{f_i}{n} = p_i$

অথবা, $\overline{x} \to E(x)$ যখন $n \to \infty$

উদাহরণ : 2.9 যদি কোন ব্যক্তি একটি ঝোঁকশূন্য ছক্কার দান একবার ফেলার পর ছক্কার উপরিভাগে যে নম্বর পাওয়া যায় সেটি যদি জোড় সংখ্যা হয় তবে ব্যক্তিটির লাভ হবে আর যদি বিজোড় সংখ্যা হয় তবে ক্ষতি হবে। এবার দীর্ঘকালে ব্যক্তিটি কত টাকা প্রতি দানে আয়ের প্রত্যাশা করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান : ক্ষতিকে আমরা ঋণাত্মক লাভ হিসাবে দেখতে পারি।

ধরা যাক্, প্রতি দানে ব্যক্তিটির লাভকে X দিয়ে চিহ্নিত করা হল।

সুতরাং X এর বিভিন্ন মানগুলি হবে –1, +2, –3, +4, –5, +6 এবং প্রতিটি মানের সঙ্গে যুক্ত হবে সম্ভাবনা $\left(\frac{1}{6}\right)$

$$\therefore \text{ প্রত্যাশা হবে } E(x) = -1 . \frac{1}{6} + 2 . \frac{1}{6} - 3 . \frac{1}{6} + 4 . \frac{1}{6} - 5 . \frac{1}{6} + 6 . \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ব্যক্তিটির প্রত্যাশিত আয় = $\frac{1}{2}$ অর্থের একক প্রতি দানের জন্য (দীর্ঘকালে)।

উদাহরণ : 2.10 একটি অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক X এর সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক দেওয়া হ'ল

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8}\right) \quad \text{যখন } 0 \le x \le 4$$

$$= 0 \quad \text{অন্যথায়}$$

X-এর গাণিতিক প্রত্যাশার মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রত্যাশার সংজ্ঞা অনুযায়ী $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

$$\therefore\ E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{4} x\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{8}\right)dx = \left[\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{24}\right)\right]_0^4 = \frac{4}{3}$$

উদাহরণ : 2.11 একটি অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক X এর সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক নীচে দেওয়া আছে :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x}{5}, && \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ &= \frac{2}{5}(3 - x), && \text{যখন } 1 < x \le 2 \\ &= 0 && \text{অন্যথায়} \end{aligned}$$

X-এর গাণিতিক প্রত্যাশার মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রত্যাশার সংজ্ঞানুসারে $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

$$\therefore\ E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{1} x.\frac{4x}{5}dx + \int_{1}^{2} x\frac{2}{5}(3-x)dx$$

$$= \left[\frac{4}{5}.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{5}\left(3.\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right]_1^2$$

$$= \frac{4}{15}+\frac{2}{5}\left[\left(6-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{15}+\frac{13}{15}=\frac{17}{15}$$

2.7.1 গাণিতিক প্রত্যাশার ধর্মাবলী (Properties of Mathematical Expectation)

সমসম্ভব চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা কিছু ধর্ম মেনে চলে :

ধর্মাবলী :

1. সমসম্ভব চলক x এর গাণিতিক প্রত্যাশার মান সাধারণ সসীম হয়, কিছু বিশেষ ক্ষেত্র ছাড়া।

2. যদি x = a হয়, যখন a একটি ধ্রুবক, তখন E(x) = a হবে।

প্রমাণ : প্রত্যাশার সংজ্ঞা অনুসারে

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \quad \text{যখন} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

যেহেতু $x_i = a$, $i = 1, 2, \ldots, n$ এবং a একটি ধ্রুবক।

$$\therefore \; E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} a.p_i = a.\sum_{i=1}^{n} p_i = a.1 = a$$

3. যদি x এবং y দুটি সমসম্ভব চলক হয় এবং তাদের মধ্যে সম্পর্ক যদি y = bx হয়, তবে E(y) = bE(x) হবে।

প্রমাণ : প্রত্যাশার সংজ্ঞা অনুসারে

$$E(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i, \quad \text{যখন,} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

এখন, $y_i = bx_i, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

$$\therefore \; E(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \sum_{i=1}^{n} bx_i p_i = b\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = bE(x)$$

4. যদি x ও y দুটি সমসম্ভব চলক হয় এবং তাদের মধ্যে সম্পর্ক যদি y = a + bx হয় যখন a এবং b দুটি ধ্রুবক, তখন E(y) = a + bE(x) হবে।

প্রমাণ : প্রত্যাশার সংজ্ঞা অনুসারে $E(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i$ যখন $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

এখন $y_i = a + bx_i$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

$$\therefore\ E(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i) p_i = a\sum_{i=1}^{n} p_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$= a.1 + bE(x) = a + bE(x)$$

$$\left[\because \sum_{i=1}^{n} p_{i=1} \text{ এবং } \sum_{i-1}^{n} x_i p_i = E(x)\right]$$

5. যদি x, y ও z তিনটি সমসম্ভব চলক হয় এবং এদের সম্পর্ক যদি হয় $z = ax + by$, যেখানে a ও b দুটিই ধ্রুবক, তবে $E(z) = aE(x) + bE(y)$ হবে।

আর যদি $a = b = 1$ হয় তবে $E(z) = E(x) + E(y)$ হবে।

প্রমাণ : প্রত্যাশার সংজ্ঞা অনুসারে $E(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i p_i$, যখন $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

এখন, $Z_i = ax_i + by_i$, যখন $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$

$$\therefore\ E(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i p_i = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i)\ p_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i p_i$$

$$= aE(x) + bE(y)$$

$$\left[\because \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = E(x) \text{ এবং } \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = E(y)\right]$$

$$\therefore\ E(z) = aE(x) + bE(y)$$

এখন $a = b = 1$ হলে সম্পর্কটি হবে $E(z) = E(x) + E(y)$

2.8 সমসম্ভব চলকের ভেদমান ও তার ধর্মাবলী

সমসম্ভব চলকের ভেদমানে (Variance) তার অত্যন্ত প্রয়োজনীয় একটি চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য। এই ভেদমান সমসম্ভব চলকের বিচ্যুতির একটি পরিমাপ। ভেদমানকে Var(X) অথবা σ_X^2 দিয়ে নির্দেশ করা হয়।

$$Var(X) = E\ [X - E\ (X)]^2$$

এই Var(X) এর ধনাত্মক বর্গমূলকে চলকটির সমক পার্থক্য (Standard Deviation) বলা হয়। Var(X) কে অন্যভাবেও নির্ণয় করা যায়।

$$Var(X) = E\ [X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2X.\ E(X) + E^2\ (X)]$$

[যখন $E^2(X) = [E(X)]^2$] $= E(X^2) - 2E(X).\ E(X\ ) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$

অর্থাৎ Var(X) = (X চলকের মানগুলির বর্গের বড়) – (x চলকের মানগুলির গড়ের বর্গ)

উদাহরণ : 2.12 একটি বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক X-এর সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক f(x) নীচে দেওয়া আছে। x এর ভেদমান নির্ণয় কর।

$$f(0) = f(1) = f(2) = \frac{1}{3}$$

সমাধান : $E(X) = \sum x.f(x) = 0.\frac{1}{3}+1.\frac{1}{3}+2.\frac{1}{3}=1$

$$E(X)^2 = 0^2.\frac{1}{3}+1^2.\frac{1}{3}+2^2.\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ Var(X) = E(X)^2 - E^2(X) = \frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$$

উদাহরণ : 2.13 একটি অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক X-এর সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক f(x) নীচে দেওয়া হ'ল। X-এর ভেদমান ও সমক পার্থক্য নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x}{5}, && \text{যখন } 0 < x \leq 1 \\ &= \frac{2}{5}(3 - x), && \text{যখন } 1 < x \leq 2 \\ &= 0 && \text{অন্যথায়} \end{aligned}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x.\frac{4x}{5}dx + \int_1^2 x.\frac{2}{5}(3-x)dx$$

$$= \left[\frac{4}{5}.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{5}\left(3.\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right]_1^2 = \frac{4}{5}+\frac{2}{5}\left[\left(6-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{4}{15}+\frac{13}{15}=\frac{17}{15}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2.\frac{4x}{5}dx + \int_1^2 x^2.\frac{2}{5}(3-x)dx$$

$$= \left[\frac{4}{5}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{5}\left(3\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\right]_1^2 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\left[(8-4) - \left(1 - \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{13}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \ Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{3}{2} - \frac{289}{225} = \frac{97}{2 \times 225}$$

সমক পার্থক্য $= \sigma = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{194}}{30}$

2.8.1 সমসম্ভব চলকের ভেদমানের ধর্মাবলী (Properties of Variance of a Random Variable)

ভেদমানের ধর্মাবলীগুলি নিম্নরূপ :

1. যদি $x = c$ হয়, যেখানে c = একটি ধ্রুবক, তবে $var(x) = 0$ হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক্ $x = c$ যখন c একটি ধ্রুবক।

$\therefore$ প্রত্যাশা $E(x) = E(c) = c$

এখন, $[x - E(x)] = c - c = 0$

অথবা, $[x - E(x)]^2 = 0 \quad \therefore E\,[x - E(x)]^2 = 0$

অর্থাৎ, $Var(x) = 0$

2. যদি $y = bx$ হয়, যখন b একটি ধ্রুবক, তখন $Var(y) = b^2\ Var(x)$

প্রমাণ : ধরা যাক্ $y = bx$, যেখানে b একটি ধ্রুবক।

$\therefore E(y) = bE(x)$

এখন $y - E(y) = bx - bE(x) = b[x - E(x)]$

$\therefore \ [y - E(y)]^2 = b^2\ [x - E(x)]^2$

অথবা, $E[y - E(y)]^2 = b^2E[x - E(x)]^2$

অথবা, $Var(y) = b^2\ Var(x)$

3. যদি $y = a + bx$ হয়, যখন a ও b দুটি ধ্রুবক, তবে $Var(y) = b^2\ Var(x)$

প্রমাণ : ধরা যাক্ $y = a + bx$ যখন a ও b দুটি ধ্রুবক।

$\therefore E(y) = a + bE(x)$

এখন $y - E(y) = a + bx - a - bE(x) = b[x - E(x)]$

$\therefore \; [y - E(y)]^2 = b^2 \; [x - E(x)]^2$

অথবা, $E[y - E(y)]^2 = b^2 \; E[x - E(x)]^2$

$\therefore \; Var(y) = b^2 \; Var(x)$

4. যদি $z = ax \pm by$ হয়, যেখানে a ও b দুটি ধ্রুবক, তবে

$Var(z) = a^2 \; Var(x) + b^2 \; Var(y) \pm 2ab \; Cov \; (x, y)$

2.9 দুটি সমসম্ভব চলকের যুগপৎ বিভাজন

ধরা যাক আমরা X ও Y দুটি সমসম্ভব চলকের মান ও তাদের সম্ভাবনা সহ তাদের যুগপৎ সম্ভাবনা বিভাজন (Joint probability distribution) অধ্যয়ন করছি। এখানে x-এর মানগুলি হল x_1, x_2, ...x_k এবং y-এর মানগুলি হ'ল y_1, y_2,......y_ℓ

ধরা যাক p_{ij} = x-এর মান x_i (i = 1, 2, ...k) এবং y-এর মান y_j (j = 1, 2, ..., ℓ) হবার সম্ভাবনা

অর্থাৎ, $P_{ij} = P \; [(x = x_i) \cap (y = y_j)]$

যেমন $P_{21} = P \; [(x = x_2) \cap (y = y_1)]$

$P_{io} = \sum_j p_{ij} = P[x = x_i]$ এবং $P_{oj} = \sum_i p_{ij} = P[y = y_j]$

ছক সংখ্যা 2.4 : দুটি সমসম্ভব চলক x ও y-এর যুগপৎ সম্ভাবনা বিভাজন

x / y	x_1	x_2		x_k	y-এর প্রান্তিক যোগফল (Marginal Total of y)
y_1	P_{11}	P_{21}	———————	P_{k1}	P_{01}
y_2	P_{12}	P_{22}	———————	P_{k2}	P_{02}
	|	|		|	|
	|	|		|	|
	|	|		|	|
y_ℓ	$P_{1\ell}$	$P_{2\ell}$	———————	$P_{k\ell}$	$P_{0\ell}$
x-এর প্রান্তিক যোগফল (Marginal Total of x)	P_{10}	P_{20}	———————	P_{k0}	$P_{00} = 1$

উপরের ছকটিতে (x_i, y_j) x ও y চলকের মানের সঙ্গে p_{ij} তাদের সম্ভাবনাসহ যুগপৎ সম্ভাবনা বিভাজন দেখানো হয়েছে।

ছকটির প্রথম ও শেষ স্তম্ভ (column) Y-এর সম্ভাবনা বিভাজন দেখায়। এটিকে Y-এর প্রান্তিক বিভাজন (Marginal Distribution) ও বলা হয়। একই ভাবে প্রথম ও শেষ সারি (row) x চলকের প্রান্তিক বিভাজন দেখায়।

আবার কোন নির্দ্দিষ্ট স্তম্ভের বিভিন্ন ঘরে (cell) যে সম্ভাবনা দেওয়া আছে অর্থাৎ P_{2j} (ধরা যাক্) কে P_{20} দিয়ে ভাগ দিলে Y-এর শর্তযুক্ত সম্ভাবনা বিভাজন পাওয়া যাবে যখন জানা আছে যে X-এর মান x_2। একইভাবে কোন নির্দ্দিষ্ট সারির বিভিন্ন ঘরে যে সম্ভাবনা দেওয়া আছে, মনে করা যাক্ P_{il} কে P_{0l} দিয়ে ভাগ দিলে x-এর শর্তযুক্ত সম্ভাবনা বিভাজন পাওয়া যাবে যখন জানা আছে যে Y-এর মান y_1

দুটি সমসম্ভব চলক X ও Y কে স্বাধীন চলক (independent random variable) বলা যাবে যদি—

$P[(x = x_i) \cap (y = y_j)] = P[x = x_i].\ P[y = y_j]$ হয়।

অর্থাৎ $P_{ij} = P_{io} \times P_{oj}$ হবে।

কিন্তু যদি $P_{ij} \neq P_{io} \times P_{oj}$ হয় তবে X ও Y নির্ভরশীল চলক (Dependent variable) হিসাবে গণ্য হবে।

অর্থাৎ X ও Y চলক দুটি একে অপরের উপর নির্ভরশীল। এ থেকে আমরা ধরে নিতে পারি যে চলক দুটি পরস্পরের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। এই দুটি চলকের সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক (Correlation coefficient) তাদের মধ্যে সরলরৈখিক সম্পর্কের একটি পরিমাপ।

$$\text{সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক } P_{xy} = \frac{\text{Cov }(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x)}\sqrt{\text{Var}(y)}} = \frac{\text{সহভেদাঙ্ক }(x, y)}{\sqrt{\text{ভেদমান }(x)}\sqrt{\text{ভেদমান }(y)}}$$

যেখানে সহভেদাঙ্ক $\text{Cov}(x, y) = E[\{x - E(x)\}\{y - E(y)\}]$

$$\begin{aligned} E[(x - E(x)\}\{y - E(y)] &= E[xy - xE(y) - yE(x) + E(x).\ E(y)] \\ &= E(xy) - E(x)\ E(y) - E(y).\ E(x) + E(x)\ E(y)] \\ &= E(xy) - E(x)E(y) \end{aligned}$$

$\therefore\ \text{Cov}(xy) = E(xy) - E(x)E(y)$

2.10 প্রত্যাশার যোগফলের নিয়ম

যদি x ও y দুটি স্বাধীন সমসম্ভব চলক হয় তবে প্রত্যাশার যোগফলের নিয়ম অনুযায়ী বলা যায়

$$E(x + y) = E(x) + E(y)$$

প্রমাণ : ধরা যাক্ সমসম্ভব চলক x-এর প্রদত্ত মান x_1 (i = 1, 2, ..., k) এবং y-এর প্রদত্ত মান y_j (j = 1, 2, ..., ℓ)

এখন P_{ij} বলতে বোঝায় x-এর মান x_i এবং y-এর মান y_j হবার সম্ভাবনা। ধরা যাক (x+y)-এর প্রদত্ত মান $(x_i + y_j)$ (যখন i = 1, 2, ..., k এবং j = 1, 2, ...ℓ)। সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$E(x+y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}(x_i + y_j)\, P_{ij} = \sum_i x_i \sum_j P_{ij} + \sum_j y_j \sum_i P_{ij}$$

$$= \sum_i x_i P_{io} + \sum_j y_j P_{oj} = E(x) + E(y)$$

2.11 প্রত্যাশার গুণফলের নিয়ম

যদি X ও Y দুটি স্বাধীন সমসম্ভব চলক হয় তবে প্রত্যাশার গুণফলের নিয়ম অনুযায়ী

$$E(XY) = E(X).\ E(Y).$$

প্রমাণ : ধরা যাক্ X-এর মান ধরা হ'ল x_i (i = 1, 2, ..., k), Y-এর মান ধরা হ'ল y_j (j = 1, 2, ..., ℓ) সুতরাং XY-এর মান হবে x_iy_j এবং P_{ij} হ'ল X-এর মান x_i ও Y-এর মান y_j হওয়ার সম্ভাবনা।

এখন সংজ্ঞা অনুযায়ী $E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j P_{ij}$

যদি X এবং Y দুটি স্বাধীন চলক হয় তবে $P_{ij} = P_{io} \times P_{oj}$ হবে।

$$\therefore\ E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j P_{ij} = \sum_i \sum_j x_i y_j P_{io} . P_{oj}$$

$$= \sum_i x_i P_{io} . \sum_j y_j P_{oj} = E(X).\ E(Y)$$

$\therefore\ E(XY) = E(X).\ E(Y)$

সূত্র : 1. যদি X ও Y দুটি সমসম্ভব চলক যদি স্বাধীন হয় তবে $E(XY) = E(X)\ .\ E(Y)$ এবং $Cov\ (X, Y) = 0$ হবে।

আমরা জানি $Cov\ (X, Y) = E[\{X - E(X)\}\ .\ \{Y - E(Y)]$

$= E\ [XY - XE(Y) - E(X).Y + E(X)\ .\ E(Y)]$

$= E(XY) - E(X)\ .\ E(Y) - E(X)\ E(Y) + E(X)\ E(Y)$

$= E(XY) - E(X)\ .\ E(Y)$

$= 0$ [$\because$ x এবং y দুটি সমসম্ভব চলকই স্বাধীন। $\therefore\ E(xy) = E(x).E(y)$]

সূত্র : 2. যদি X ও Y দুটি স্বাধীন সমসম্ভব চলক হয় তবে $Var\ (X + Y) = Var\ (X - Y) = Var\ (X) + Var\ (Y)$ হবে।

প্রমাণ : সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$\begin{aligned}
Var\ (X + Y) &= E\ [(X + Y) - E\ (X + Y)]^2 \\
&= E\ [X + Y - E\ (X) - E\ (Y)]^2 \\
&= E\ [\{X - E\ (X)\} + \{Y - E\ (Y)\}]^2 \\
&= E\ [X - E\ (X)]^2 + 2.E[\{X - E(X)\}.\{Y - E(Y)\}] + E[Y - E(Y)]^2 \\
&= Var\ (X) + 2\ Cov\ (X, Y) + Var\ (Y)
\end{aligned}$$

যেহেতু X ও Y দুটি স্বাধীন চলক তাই $Cov\ (X, Y) = 0$

$$\therefore\ Var\ (X + Y) = Var\ (X) + Var\ (Y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

একইভাবে প্রমাণ করা যায় $Var\ (X - Y) = Var\ (X) - 2Cov\ (X, Y) + Var\ (Y)$

কিন্তু X ও Y স্বাধীন চলক হওয়ায় $Cov\ (X, Y) = 0$

$$\therefore\ Var\ (X - Y) = Var\ (X) + Var\ (Y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

সমীকরণ (1) ও সমীকরণ (2) একত্রে লেখা যায়

$$Var\ (X + Y) = Var\ (X - Y) = Var\ (X) + Var\ (Y)$$

সূত্র : 3. যদি x_1 x_2 ও x_3 তিনটি সমসম্ভব চলক হয়, তবে

$$\text{Var }(x_1 + x_2 + x_3) = \sum_{i=1}^{3} \text{Var}(x_i) + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{3} \text{Cov}(x_i, x_j)$$

প্রমাণ : সংজ্ঞানুসারে,

$\text{Var}(x_1 + x_2 + x_3) = E[x_1 + x_2 + x_3 - E(x_1 + x_2 + x_3)]^2$

$= E[x_1 + x_2 + x_3 - E(x_1) - E(x_2) - E(x_3)]^2$

$= E[\{x_1 - E(x_1)\}+\{x_2 - E(x_2)\} + \{x_3 - E(x_3)\}]^2$

$= E\{x_1 - E(x_1)\}^2 + E\{x_2 - E(x_2)\}^2 + E\{x_3 - E(x_3)\}^2 + 2E[\{x_1 - E(x_1)\}$
$\{x_2 - E(x_2)\}] + 2E\ [[x_2 - E(x_2)\}\{x_3 - E(x_3)\}] + 2E[\{x_1 - E(x_1)\}\{x_3 - E(x_3)\}$

$= \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + \text{Var}(x_3) + 2\text{Cov}\ (x_1,x_2) + 2\text{Cov}\ (x_2, x_3) + 2\ \text{Cov}(x_1, x_3)$

$$\therefore\ \text{Var }(x_1 + x_2 + x_3) = \sum_{i=1}^{3} \text{Var}(x_i) + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{3} \text{Cov}(x_i, x_j)$$

এবার n সংখ্যক সমসম্ভব চলকের ক্ষেত্রে লিখতে পারি

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}\{x_i - E(x_i)\}\right]^2$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}\{x_i - E(x_i)\}^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n}\{x_i - E(x_i)\}\{x_j - E(x_j)\}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(x_i) + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \text{Cov}(x_i, x_j)$$

এখন যদি n সংখ্যক সমসম্ভব চলকগুলি প্রত্যেকে স্বাধীন হয় তবে $\text{Cov}(x_i, x_j) = 0$ হবে এবং সেক্ষেত্রে

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(x_i) \text{ হবে।}$$

উদাহরণ : 2.14 একটি ছক্কা চালনা করলে তার উপরিভাগে যে অঙ্ক আসে তাকে X দিয়ে নির্দেশিত করা হল। ধরা যাক্ Y অপর একটি চলক যেখানে

$$Y = \begin{cases} +1 \text{ যখন X বিজোড় সংখ্যা} \\ -1 \text{ যখন X জোড় সংখ্যা} \end{cases}$$

X ও Y চলক দুটির যুগপৎ বিভাজন থেকে Var (Z) নির্ণয় কর যখন জানা আছে Z = XY. X ও Y চলক দুটি কি স্বাধীন?

সমাধান : X-এর বিভিন্ন মানগুলি হল 1, 2, ..., 6 এবং প্রতিটি মানের সম্ভাবনা হল $\frac{1}{6}$.

Y-এর মাত্র দুটি মান +1 এবং –1, প্রতিটি মানের সম্ভাবনা হল $\frac{1}{2}$. এখন X ও Y এর যুগপৎ বিভাজন হ'ল :

y \ x	1	2	3	4	5	6	মোট
– 1	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
+ 1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$
মোট	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(Z) = E(XY) = 0 + (-1).\ 2.\frac{1}{6} + (-1).\,4.\ \frac{1}{6} + (-1).\,6.\frac{1}{6}$$

$$+ 1.\ 1.\ \frac{1}{6} + 1.\ 3.\ \frac{1}{6} + 1.\ 5.\ -\frac{3}{6} = = -\ \frac{1}{2}$$

$$E(Z)^2 = E(X^2Y^2) = 0 + (-1)^2.\ 2^2.\frac{1}{6} + (-1)^2.\ 4^2.\frac{1}{6} + (-1)^2\ 6^2.\frac{1}{6}$$

$$+ 1^2.\ 1^2.\frac{1}{6} + 1^2.3^2.\frac{1}{6} + 1^2.5^2.\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$\therefore$ Var (Z) = $E(Z^2) - E^2(Z) = \frac{91}{6} - \frac{1}{4} = \frac{182-3}{12} = \frac{179}{12}$

X এবং Y কে স্বাধীন বলা যাবে যখন—

$P(X = i, Y = j) = P(X = i).\ P(Y = j),\ \forall\ i, j$

এখানে $P(X = 1, Y = -1) = 0 \neq P(X = 1).\ P(Y = 1) = \frac{1}{12}$

$\therefore$ X এবং Y চলক দুটি স্বাধীন নয়।

2.12 দুটি সমসম্ভব চলকের সংযুক্ত সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষক ও সংযুক্ত-সম্ভাবনা -ঘনত্ব-অপেক্ষক

*** সংযুক্ত সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক :**

দুটি সমসম্ভব চলক যদি বিচ্ছিন্ন হয় ধরা যাক, X ও Y এবং আমরা যদি তাদের সংযুক্ত-সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক যেমন f(x, y) এর অনুসন্ধান করি, যখন—

$f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ এবং

x ও y বলতে আমরা X ও Y-এর সাধারণ মান বুঝি, তাহলে f(x, y) নীচের দুটি শর্ত পালন করে—

শর্তগুলি হল—

(i) $f(x, y) \geq 0$, সমস্ত x ও y এর জন্য

এবং (ii) $\sum_x \sum_y f(x.y) = 1$

যদি f(x, y) সংযুক্ত সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক হয়, তবে X ও Y-এর প্রান্তিক বিভাজন (marginal distribution) অথবা, X ও Y-এর সম্ভাবনা অপেক্ষক g(x) এবং h(y) নিম্নলিখিত উপায়ে পাওয়া যাবে।

$$g(x) = \sum_{y} f(x, y)$$

এবং $$h(y) = \sum_{x} f(x, y)$$

আবার, X-এর শর্তসাপেক্ষে বিভাজন (conditional distribution), যখন Y = y, যদি g(x/y) দিয়ে নির্দেশ করা হয় তবে,

$$g(x/y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}, \text{ যখন } h(y) > 0$$

একইভাবে Y-এর শর্তসাপেক্ষে বিভাজন (conditional distribution), যখন X = x, যদি h(y/x) দিয়ে নির্দেশ করা হয় তবে—

$$h(y/x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \quad \text{যখন } g(x) > 0$$

X ও Y সমসম্ভব চলকদ্বয়কে স্বাধীন (Independent) বলা যাবে যখন—

$f(x, y) = g(x).\ h(y)$

হবে, সমস্ত x ও y এর জন্য। অন্যথায় X ও Y সহযোগী সমসম্ভব চলক হবে যখন $f(x, y) \neq g(x).\ h(y)$ হবে। X ও Y-এর সরলরৈখিক সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করা যায় নীচের সূত্র অনুযায়ী।

$$P_{xy} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}.\sqrt{var(Y)}}$$

যেখানে, $Cov(X, Y) = E\{X - E(X)\}.\{Y - E(Y)\}]$

$$= \sum_{x} \sum_{y} (x - \mu_x)(y - \mu_y).f(x, y)$$

$$= \sum_{x} \sum_{y} xy\ f(x, y) - \mu_x.\mu_y$$

এখানে, $\mu_X = E(X) = \sum_x xg(x)$

এবং $\mu_Y = E(Y) = \sum_y y.h(y)$

উদাহরণ : 2.15 দুটি বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের (X ও Y-এর) যুগপৎ সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক (Joint probability mass function) নীচে দেওয়া হল :

$$f(x, y) = \frac{1}{8}, \text{ যখন } x = 0, y = 0$$

$$= \frac{1}{8}, \text{ যখন } x = 0, y = 1$$

$$= \frac{1}{8}, \text{ যখন } x = 1, y = 0$$

$$= \frac{5}{8}, \text{ যখন } x = 1, y = 1$$

$$= 0, \text{ অন্যথায়}$$

তাহলে (i) X-এর প্রান্তিক বিভাজন নির্ণয় কর।

(ii) Y-এর শর্তসাপেক্ষে বিভাজন নির্ণয় কর যখন X = 1

(iii) E (XY) নির্ণয় কর

সমাধান : X-এর প্রান্তিক বিভাজন হবে

$$g(x) = \sum_y f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, & \text{যখন } x = 0 \\ \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{3}{4}, & \text{যখন } x = 1 \\ 0, & \text{অন্যথায়} \end{cases}$$

(ii) Y-এর শর্তসাপেক্ষে বিভাজন হবে যখন X = 1 দেওয়া আছে,

$$h\ (y/x=1) = \left.\frac{f(x,y)}{g(x)}\right|_{x=1} = \frac{f(1,y)}{g(1)} = \begin{cases} \frac{1}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{6}, & \text{যখন } y = 0 \\ \frac{5}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{6}, & \text{যখন } y = 1 \\ 0, & \text{অন্যথায়} \end{cases}$$

(iii) $E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f(x,y) = 0.0.\frac{1}{8} + 0.1.\frac{1}{8} + 1.0.\frac{1}{8} + 1.1.\frac{5}{8} = \frac{5}{8}$

*** সংযুক্ত সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক :**

দুটি অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক X ও Y-এর সংযুক্ত সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক f(x, y) বলতে আমরা বুঝি

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = P(a \le X \le b, c \le Y \le d)$$

এবং f(x, y) নিম্নলিখিত শর্তদ্বয় পালন করে

(i) $f(x, y) \geq 0$, সমস্ত x ও y-এর জন্য

এবং (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$

যদি f(x, y), X ও Y চলকদ্বয়ের সংযুক্ত সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হয়, তবে X ও Y-এর প্রান্তিক বিভাজন (marginal distribution) হবে—

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

এবং $$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

আবার, X-এর শর্তসাপেক্ষে বিভাজন হবে, যখন Y = y দেওয়া আছে,

$$g(x/y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \text{ যদি } h(y) > 0 \text{ হয়}$$

এবং Y-এর শর্তসাপেক্ষে বিভাজন হবে, যখন X = x দেওয়া আছে,

$$h(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \text{ যদি } g(x) > 0 \text{ হয়।}$$

এখন যদি f(x, y) = g(x). h(y) হয়, সমস্ত x ও y-এর জন্য, তাহলে X ও Y চলক দুটিকে স্বাধীন বলে গণ্য করা হয়। কিন্তু যদি f(x, y) ≠ g(x). h(y) হয় তবে, ঐ দুই চলককে সহপরিবর্তনশীল বলা হবে। এক্ষেত্রে X ও Y-এর মধ্যে সরলরৈখিক সম্পর্কের পরিমাপ হিসাবে আমরা সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক ব্যবহার করতে পারি। সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক (ρ_{xy}) হবে

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)}}$$

এখানে, $Cov(X, Y) = Cov(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_y)f(x,y)dx\,dy$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy - \mu_X\mu_y$$

যেখানে $\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx$ এবং $\mu_y = \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy$

উদাহরণ : 2.16 নিম্নলিখিত অপেক্ষকটি কি একটি সংযুক্ত-সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক? উত্তর যদি হ্যাঁ হয় তবে চলকদ্বয় স্বাধীন কিনা পরীক্ষা কর।

$f(x, y) = \frac{2}{3}(x + 1).\ e^{-y}$, যখন $0 < x < 1$ এবং $y > 0$

$= 0$, অন্যথায়

সমাধান : দেখা যাচ্ছে যে f(x, y) ≥ 0, সমস্ত x ও y এর জন্য

$$\text{এবং} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{2}{3}(x+1)e^{-y}dx\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_{0}^{\infty} e^{-y}dy.\int_{0}^{1}(x+1)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[-e^{-y}\right]_0^{\infty}.\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 = \frac{2}{3}.1.\frac{3}{2} = 1$$

সুতরাং f(x, y) একটি সংযুক্ত-সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক।

যদি X ও Y-এর প্রান্তিক বিভাজন g(x) এবং h(y) দিয়ে নির্দেশ করা যায়, তবে—

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{\infty}\frac{2}{3}(x+1)e^{-y}dy$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)\int_{0}^{\infty} e^{-y}dy = \frac{2}{3}(x+1).1 = \frac{2}{3}(x+1)$$

$$\text{এবং } h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{1}\frac{2}{3}(x+1)e^{-y}dx = \frac{2}{3}e^{-y}\int_{0}^{1}(x+1)dx$$

$$= \frac{2}{3}.e^{-y}.\frac{3}{2} = e^{-y}$$

$\therefore$ $f(x, y) = \frac{2}{3}(x + 1)\ e^{-y} = g(x)\ h(y)$, সমস্ত x ও y এর জন্য

সুতরাং X এবং Y চলক দুটি স্বাধীন।

উদাহরণ : 2.17 ধরা যাক্ X ও Y চলকদ্বয়ের সংযুক্ত-ঘনত্ব-অপেক্ষক দেওয়া আছে :

$f(x, y) = e^{-x-y}$, যখন $x > 0,\ y > 0$

$= 0$, অন্যথায়

এখন X ও Y-এর সহভেদাংক (covariance) নির্ণয় কর।

সমাধান : $Cov\ (X, Y) = E[\{X - E(X)\}\ \{Y - E(Y)\}]$

$= E(XY) - E(X).\ E(Y)$

এখানে, x-এর প্রান্তিক বিভাজন (marginal distribution) হবে—

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_{0}^{\infty} e^{-x-y} dy$$

$$= e^{-x}\int_{0}^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x}.1 = e^{-x},\ \text{যখন } x > 0$$

এবং $g(x) = 0$, অন্যথায়

একইভাবে, y-এর প্রান্তিক বিভাজন হবে,

$h(y) = e^{-y}$, যখন $y > 0$

$= 0$, অন্যথায়

$$\therefore\ E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x.e^{-x} dx = \overline{|(2)} = 1$$

একইভাবে, $E(Y) = 1$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy.f(x, y) dx\, dy = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} xye^{-x-y} dx\, dy$$

$$= \int_{0}^{\infty} x.e^{-x} dx. \int_{0}^{\infty} y.e^{-y} dy$$

$= \overline{|(2)}.\overline{|(2)} = 1.1 = 1$

$\therefore$ Cov (X, Y) = 1 – 1.1 = 0

2.13 সারাংশ

রাশিবিজ্ঞান শাস্ত্রের কাজ হ'ল একদিকে রাশিতথ্য সংগ্রহ ও উপস্থাপিত করা আর অপরদিকে সংগৃহীত রাশিতথ্য বিভিন্ন পরিমাপ ও পদ্ধতির সাহায্যে উপযুক্ত ব্যাখ্যা করে একটি যুক্তিপূর্ণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া। এই দুই কাজের জন্য দুটি বিভাগ আছে। একটি হল বর্ণনামূলক রাশিবিজ্ঞান ও দ্বিতীয়টি হল অনুমিতিমূলক রাশিবিজ্ঞান। বর্ণনামূলক রাশিবিজ্ঞানে ব্যবহৃত চলকগুলি অনিশ্চয়তা নির্ভর নয়। কিন্তু অনুমিতিমূলক রাশিবিজ্ঞানে ব্যবহৃত চলকগুলি সম্পূর্ণ অনিশ্চয়তা নির্ভর এবং তাদের মানের সঙ্গে সর্বদা একটি সম্ভাবনার মান যুক্ত থাকে। এই ধরনের চলকের নাম হল সমসম্ভব চলক (Random Variable)।

সমসম্ভব চলকের মানগুলি ও তাদের সম্ভাবনার মানগুলিকে (পরিসংখ্যা গণ্য করে) শ্রেণীবদ্ধ ভাবে উপস্থাপিত করলে সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা বিভাজন পাওয়া যায়। চলকটি যদি সীমিত পরিসরে বিচ্ছিন্ন মান ধারণ করে, তবে তাকে বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক বলে। যেমন মুদ্রা ছোঁড়া বা ছক্কার চাল দেওয়া বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের উদাহরণ। আবার অসীম সংখ্যক অবিচ্ছিন্ন মান ধারণ করলে চলকটিকে অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক বলা হয়। যেমন সদ্যোজাত শিশুর ওজন।

বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক X-এর একটি নির্দিষ্ট মান x ধরে তার সম্ভাবনা প্রকাশ করা হয় f(x) অপেক্ষকের সাহায্যে। f(x) অপেক্ষকটিকে চলকের 'সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক' বলে। এই অপেক্ষক দুটি শর্ত মেনে চলে

(i) $f(x) \geq 0$, x এর যে কোন মানের জন্য

(ii) $\sum f(x) = 1$

বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের বিভাজন অপেক্ষক অথবা ক্রমযৌগিক বিভাজন অপেক্ষক F(x) হবে—

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} f(y)$$

এই বিভাজন অপেক্ষক F(x) নিম্নলিখিত শর্তগুলি পালন করে।

(i) $0 \leq F(x) \leq 1$

(ii) $F(-\infty) = 0$

(iii) $F(\infty) = 1$

(iv) $F(a) \leq F(b)$ যখন $a < b$

এবং (v) $F(x)$ ডান দিকে অবিচ্ছিন্ন যদিও বামদিকে বিচ্ছিন্ন।

আবার, অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের ক্ষেত্রে, X যদি একটি অবিচ্ছিন্ন চলক হয় এবং তার সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক যদি $f(x)$ হয় তবে X-এর বিভাজন অপেক্ষক হবে—

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy$$

যখন, X-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x)$ নিম্নলিখিত শর্তগুলি পালন করে—

(i) $f(x) \geq 0$, সমস্ত x এর মানের জন্য

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

যদি বিভাজন অপেক্ষক $F(x)$ দেওয়া থাকে, তবে X-এর সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক $f(x)$ হবে।

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left[F(x)\right]$$

যদি কোন বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের মানগুলি যথাক্রমে x_1, x_2, ……, x_n এবং তাদের সম্ভাবনা মানগুলি যথাক্রমে p_1, p_2,……, p_n হয়, তবে চলকের গাণিতিক প্রত্যাশ্যা $E(X)$ হবে।

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{ যখন, } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

অবিচ্ছিন্ন চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা হবে—

$$E(X) = \int_a^b f(x)dx$$ যেখানে $f(x)$ চলকটির সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক এবং $a \leq x \leq b$

কোন চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা তার দীর্ঘকালীন গাণিতিক গড়। সমসম্ভব চলকের ভেদমান $Var(X)$ হবে—

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

দুটি সমসম্ভব চলক X ও Y-এর মান যথাক্রমে x_i ও y_j হবার সম্ভাবনা যদি P_{ij} হয় তবে, X ও Y কে স্বাধীন চলক বলা হবে যদি—

$$P[(x = x_i) \cap (y = y_j)] = P[x = x_i].\ P[y = y_j]$$

অর্থাৎ $P_{ij} = P_{io}.\ P_{oj}$

যেখানে $P_{ij} = P[(x = x_i) \cap (y = y_j)]$

এবং $P_{io} = \sum_j P_{ij} = P[X = x_i]$

$$P_{0j} = \sum_i P_{ij} = P\left[Y = y_j\right]$$

যদি X ও Y দুটি স্বাধীন সমসম্ভব চলক হয় তবে প্রত্যাশার যোগফলের নিয়ম হবে—

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

এবং প্রত্যাশার গুণফলের নিয়ম হবে $E(XY) = E(X).\ E(Y)$

2.14 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা : (সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন, প্রতিটির মান 2.5)

1. একটি অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক X এর জন্য অপেক্ষক $f(x) = \frac{1}{2};\ (4 \le x \le 6)$ কি সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক? যাচাই কর। উঃ হ্যাঁ
2. সমসম্ভব চলকের গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞা দাও।
   উঃ বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন দুরকমের চলকের জন্য সংজ্ঞা দিতে হবে।
3. x এবং y দুটি সমসম্ভব চলক যদি স্বাধীন হয়, তবে প্রমাণ কর $Cov(x, y) = 0$
4. এক ব্যক্তি একটি লটারীর টিকিট কিনল। ঐ ব্যক্তি 5000 টাকার প্রথম পুরস্কার অথবা 2000 টাকার দ্বিতীয় পুরস্কার পাবে তাদের সম্ভাবনা যথাক্রমে 0.001 ও 0.003 হলে লটারী টিকিটের সঠিক প্রত্যাশিত দাম কত হওয়া উচিৎ? উঃ 11 টাকা

5. একটি সমসম্ভব চলরাশি X-এর সম্ভাবনা বিভাজন নিম্নরূপ :

X	–1	0	1	2
সম্ভাবনা	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

E(X)-এর মান নির্ণয় কর। উঃ $\frac{1}{2}$

প্রশ্নমালা : (প্রতিটির মান 5)

6. নিম্নে প্রদত্ত বিভাজন অপেক্ষক থেকে সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক (pdf) নির্ণয় কর।

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ -\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right), & \text{যখন } 1 < x \le 2 \\ 1, & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$$

উঃ এখানে $F(x) = \int_0^2 f(x)dx = 1$

$$\therefore \text{ pdf} = f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \begin{cases} \frac{4x}{5}, & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ \frac{2}{5}(3-x), & \text{যখন } 1 < x \le 2 \\ 0, & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$$

7. যদি দুটি সমসম্ভব চলরাশি X ও Y পরস্পর স্বাধীন হয় তবে দেখাও যে, Var (X + Y) = Var (X – Y) = Var (X) + Var (Y)

8. যদি $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ হয়, তবে E(Y) ও E(Y^2)-এর মান নির্ণয় কর।

উঃ E(Y) = 0, E(Y^2) = 1

প্রশ্নমালা : (প্রতিটির মান 10)

9. সমসম্ভব কোন চলক x-এর সম্ভাবনা বিভাজন হল—

x :	4	5	6	8
p(x) :	0.1	0.3	0.4	0.2

সমসম্ভব চলক x-এর গাণিতিক প্রত্যাশা ও সমক বিচ্যুতি নির্ণয় কর।

উঃ $E(x) = 36.3$, $SD(x) = 1.22$

10. 6টি ছক্কা এক সঙ্গে চালনা করা হল। পৃষ্ঠদেশে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলির যোগফলের প্রত্যাশা ও ভেদমান নির্ণয় কর।

উঃ $E(x) = 21$; $Var(x) = 17\frac{1}{2}$

2.15 গ্রন্থপঞ্জী

1. দাশগুপ্ত ভাগবত, চৌধুরী অরিজিৎ, দাস বিশ্বনাথ: রাশিবিজ্ঞানের পরিভাষা, বিশ্বভারতী (১৯৭২)।
2. সেন রাজকুমার : সংখ্যাতত্ত্ব, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্যদ (১৯৮৬)।
3. Cramer, H : The Elements of Probability Theory, John Wiley (1955).
4. Yule, G. U. & Kendall, M. G. : An Introduction to the Theory of Statistics, Griffin (1953).
5. Spiegel, M.R. : Theory and Problems of Statistics, Schaum Publishing Co. (1982).

একক-3 ❑ সমসম্ভব চলকের ভ্রামক ও ভ্রামক-উৎপাদক-অপেক্ষক এবং কয়েকটি নির্দিষ্ট তত্ত্বগত সম্ভাবনা বিভাজন

গঠন

3.1 উদ্দেশ্য

রাশিবিজ্ঞানে কোনো অনুসন্ধানের সমগ্র ক্ষেত্রটিকে অর্থাৎ ঐ ক্ষেত্রের মধ্যে সমস্ত ব্যক্তি বা বস্তুর সমষ্টিকে সমগ্রক (population) বলা হয়। অপরদিকে ঐ সমগ্রকের একটি নির্বাচিত সামান্য অংশকে নমুনা (sample) বলা হয়। রাশিবিজ্ঞান শাস্ত্রে ঐ নমুনা পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে সমগ্রকের এক বা একাধিক বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে সিদ্ধান্তে উপনীত হতে হয়।

যেমন একটি নমুনার কোন একটি চলক x এর সম্ভাবনা বিভাজন পরীক্ষা করে সমগ্রকের মধ্যে x চলকের সম্ভাবনা বিভাজন সম্পর্কে একটা সম্যক ধারণা পাওয়ার চেষ্টা করা হয়।

আমরা এই অংশে কিছু সম্ভাবনা বিভাজনের আলোচনা করব। কিন্তু সেগুলি সবই তত্ত্বগত সম্ভাবনা বিভাজন (Theoretical Probability Distribution) কারণ এগুলি হল সম্ভাবনা বিভাজনের কিছু আদর্শ রূপ এবং বাস্তবে এদের উদাহরণ পাওয়া সম্ভব নয়। কিন্তু আমরা এই সমস্ত তত্ত্বগত সম্ভাবনা বিভাজনের সাহায্যে বাস্তবে কোন চলকের সম্ভাবনা বিভাজনকে যথাসম্ভব ঘনিষ্ঠভাবে অনুসরণ করে সেই সম্ভাবনা বিভাজনের প্রকৃতি সম্পর্কে একটা সম্যক ধারণা করে কিছু সিদ্ধান্ত গ্রহণ করতে পারি। তত্ত্বগত সম্ভাবনা বিভাজনের আলোচনার গুরুত্ব এইখানেই।

3.2 প্রস্তাবনা

একক-2-এ আমরা সমসম্ভব চলকের (Random Variable) সম্পর্কে সম্যকরূপে অবগত হয়েছি। সমসম্ভব চলক আমরা জানি দুইরকমের হয়। বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক এবং অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক। এই পর্যায়ে আমরা বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের প্রতিটির জন্য দুটি করে তত্ত্বগত সম্ভাবনা বিভাজনের চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য ও প্রয়োগ আলোচনা করব। এইগুলি বাস্তবে সংখ্যাতাত্ত্বিক কাজে বিশেষ প্রয়োজনীয়। এই কারণে বিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে দ্বিপদ (Binomial) এবং পয়র্জঁ (Poisson) সম্ভাবনা বিভাজন দুটিকে এবং অবিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে আয়তাকার (Regtangular) ও সুষম বা স্বাভাবিক (Normal) সম্ভাবনা বিভাজন দুটিকে নির্বাচন করা হয়েছে। এগুলি হল একচলক তত্ত্বগত সম্ভাবনা বিভাজনের কয়েকটি রূপ। ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষকের (Moment-generating function এর) সাহায্যে এই চারটি তত্ত্বগত সম্ভাবনা বিভাজনের রাশিবিজ্ঞান সম্পর্কিত বিভিন্ন পরিমাপ যেমন গড়, ভেদমান, সংখ্যাগুরু মান ইত্যাদি নির্ণয় করা যায়।

3.3 সমসম্ভব চলকের ভ্রামক

1. যদি $y = x^r$ হয় তবে $E(y) = E(x^r) = \mu'_r$ কে বলা হয় সমসম্ভব চলকের (x) r তম কাঁচা ভ্রামক (rth raw moment)

2. যদি $y = (x - a)^r$ হয় যেখানে 'a' একটি ধ্রুবক, $\bar{x} = E(x)$ সমসম্ভব চলকের (x-এর) গাণিতিক গড় মান, তবে—

   $E(y) = E[(x - a)^r] = \mu'_r(a)$ কে বলা হয় 'a'র সাপেক্ষে চলকের r তম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক (rth non-central moment around 'a').

3. যদি $a = \bar{x} = x$-এর গাণিতিক গড় মান $= E(x)$ হয় তবে, $E(y) = E[(x - \bar{x})^r] =$ $E[\{x - E(x)\}^r] = \mu_r$ কে বলা হয় চলকের r তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক (rth central moment)

   প্রথম চারটি কেন্দ্রীয় ভ্রামক ও কাঁচা ভ্রামকের মধ্যে সম্পর্ক নিম্নরূপ :

   $\mu_1 = 0$

   $\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$

   $\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu'^3_1$

   $\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'_2\mu'^2_1 - 3\mu'^4_1$

   বিভিন্ন প্রকার সম্ভাবনা বিভাজনের ক্ষেত্রে সমসম্ভব চলকের কেন্দ্রীয় ভ্রামকের মানগুলি এইভাবে নির্ণয় করা হয় এবং এদের সাহায্যে রাশিবিজ্ঞানের বিভিন্ন পরিমাপ যেমন গড়, ভেদমান, মধ্যমা, সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করে সম্ভাবনা বিভাজনের বৈশিষ্ট্য তুলে ধরা হয়।

3.4 সমসম্ভব চলকের ভ্রামক উৎপাদক অপেক্ষক

একটি সমসম্ভব চলক X-এর (অথবা তার সম্ভাবনার) ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষক $M_X(t)$, যদি বিদ্যমান থাকে তবে তার সংজ্ঞা হল :

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \sum\limits_x e^{tx}.f(x), & \text{যখন X একটি বিচ্ছিন্ন চলক} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx}.f(x)dx, & \text{যখন X একটি অবিচ্ছিন্ন চলক} \end{cases}$$

যেখানে t একটি প্রকৃত ধ্রুবক।

টেলর ক্রম সম্প্রসারণ (Taylor's Series Expansion)-এর সাহায্যে e^{tx} এর ক্রম সম্প্রসারণ করে পাই—

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$= E\left(1+\frac{tX}{1!}+\frac{t^2X^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{t^rX^r}{r!}+\cdots\cdots\text{to}\propto\right)$$

$$= 1+\frac{tE(X)}{1!}+\frac{t^2}{2!}E(X^2)+\cdots\cdots+\frac{t^r}{r!}E(X^r)+\cdots\cdots\text{to}\propto$$

$$= 1+\mu_1'(0)\frac{t}{1!}+\mu_2'(0).\frac{t^2}{2!}+\cdots\cdots+\mu_r'(0).\frac{t^r}{r!}+\cdots\cdots$$

$\therefore$ $M_X(t)$ অপেক্ষকটি সম্প্রসারণ করলে $\frac{t^r}{r!}$-এর সহগ হবে r তম মূলকেন্দ্রিক ভ্রামক। অর্থাৎ শূন্যের সাপেক্ষে ভ্রামক। আরও লক্ষ করার বিষয় হল যখন $M_X(t)$ অবকলনযোগ্য (differentiable),

$$\mu_r'(0) = \left[\frac{d^r}{dt^r}M_X(t)\right]_{t=0}$$

উদাহরণ 3.1 নিম্নের সম্ভাবনা বিভাজনের ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষক হবে :

$$\text{সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = -2 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & \text{অন্যথায়} \end{cases}$$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} f(x) = e^{-2t} \cdot \frac{1}{2} + e^0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{-2t} + 1\right)$$

'a'-র সাপেক্ষে r-তম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক নির্ণয় করতে ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষকটি নিতে হবে $M_{X-a}(t) = E[e^{t(x-a)}]$

$$\because \ E\left[e^{t(x-a)}\right] = E\left[1 + \frac{t(X-a)}{1!} + \frac{t^2(X-a)^2}{2!} + \cdots\cdots\right]$$

$$= 1 + \mu_1'(a) \cdot \frac{t}{1!} + \mu_2'(a) \cdot \frac{t^2}{2!} + \cdots\cdots$$

$\therefore$ 'a'-র সাপেক্ষে অকেন্দ্রীয় ভ্রামকটি হবে $\frac{t^r}{r!}$-এর সহগ $= \mu_r'(a)$

একইভাবে r-তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক বা গড়কেন্দ্রিক ভ্রামক নির্ণয় করতে ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষকটি নিতে হবে—

$$M_{X-\mu}(t) = E\left[e^{t(x-\mu)}\right]$$

$$\because \ E\left[e^{t(x-\mu)}\right] = E\left[1 + \frac{t(X-\mu)}{1!} + \frac{t^2(X-\mu)^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{t^r(X-\mu)^r}{r!} + \cdots\cdots\right]$$

$$= 1 + tE(X-\mu) + \frac{t^2}{2!}E(X-\mu)^2 + \cdots\cdots + \frac{t^r}{r!}E(X-\mu)^r + \cdots\cdots$$

$$= 1 + t\mu_1 + \frac{t^2}{2!}.\mu_2 + \cdots\cdots + \frac{t^r}{r!}\mu_r + \cdots\cdots$$

$\therefore$ r-তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক m_r হবে ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষক $M_{X-\mu}(t)$ কে সম্প্রসারণ করলে $\frac{t^r}{r!}$ এর সহগ। এটিকে আমরা r তম গড় কেন্দ্রিক ভ্রামকও বলতে পারি।

3.5 বিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে তত্ত্বগত সম্ভাবনা বিভাজন

বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের ক্ষেত্রে তত্ত্বগত সম্ভাবনা বিভাজন অনেকগুলি আছে। কিন্তু আমরা এখানে দুটি সম্ভাবনা বিভাজন আলোচনা করবো। (1) দ্বিপদ বিভাজন (Binomial Distribution) এবং (2) পয়জঁ বিভাজন (Poisson Distribution)।

3.5.1 দ্বিপদ বিভাজন (Binomial Distribution)

দ্বিপদ বিভাজন James Bernoulli 1700 সালে আবিষ্কার করেন। একটি সমসম্ভব বিচ্ছিন্ন চলক x দ্বিপদ বিভাজন অনুসরণ করে বলা যাবে যদি চলকটি একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে শুধুমাত্র বিচ্ছিন্ন ও ধনাত্মক মানগুলি গ্রহণ করে এবং বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষক (p.m.f) হবে।

$$f(x) = {}^nc_x\ p^x q^{n-x},\ \text{যখন}\ x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$
$$= 0, \qquad \text{অন্যথায়}$$

দ্বিপদ বিভাজনের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত শর্তগুলি প্রযোজ্য হয়—

1. কোন পৌনঃপুনিক প্রয়াসের পরীক্ষায় কোন সমগ্রকের মোট উপাদান সংখ্যা হল n। পরস্পর স্বতন্ত্র প্রয়াসের সংখ্যা n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং n এর মান খুব বড়।
2. পৌনঃপুনিক প্রয়াসের পরীক্ষায় পৌনঃপুনিক প্রয়াসসমূহ n হল সসীম এবং নির্দিষ্ট।
3. প্রতিটি প্রয়াসে দুটি সম্ভাব্য পরস্পর বর্জনকারী ফল—সাফল্য (success) ও ব্যর্থতা (failure) আছে।
4. পৌনঃপুনিক প্রয়াসগুলি পরস্পর স্বতন্ত্র এই অর্থে যে, একটি প্রয়াসের ফল পরবর্তী অন্য প্রয়াসের ফলকে প্রভাবিত করে না বা পূর্ববর্তী কোন প্রয়াসের ফল দ্বারা প্রভাবিত হয় না।
5. প্রতিটি প্রয়াসের ক্ষেত্রে সাফল্যের সম্ভাবনা হল p, ব্যর্থতার সম্ভাবনা হল q এবং p ও q সব প্রয়াসেই অপরিবর্তিত থাকে। $0 < p < 1;\ 0 < q < 1;\ p + q = 1\ \therefore\ q = 1 - p$

   এইরূপ একটি পরীক্ষাকে বার্নোলীর পরীক্ষা (Bernoullian trials) বলা হয়।

n মোট দুই ধরনের উপাদানে বিভক্ত ও এই দুই ভাগের উপাদান সংখ্যা হল যথাক্রমে np ও nq

$[n = np + nq = n (p + q) = n \quad \because p + q = 1]$

এই দ্বিপদ বিভাজনে সমসম্ভব চলক X সাফল্যের সংখ্যা নির্দেশ করে যখন n সংখ্যক বার্নৌলীর পরীক্ষা করা হয়। প্রতি পরীক্ষায় সাফল্যের সম্ভাবনা হবে p. এই বিভাজনে স্থিতিমাপদ্বয় (parameters) হল n এবং p. যে কোন নির্দিষ্ট অবস্থায় n এবং p ধ্রুবক কিন্তু n এবং p-এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন দ্বিপদ সম্ভাবনা বিভাজন পাওয়া যায়।

ধরা যাক পরীক্ষাটি n সংখ্যক বার পুনরাবৃত্তি করা হল। এখন n সংখ্যক বার পুনরাবৃত্তির মধ্যে x বার সাফল্য ও (n – x) বার ব্যর্থতা পাওয়া গেল। ধরা যাক্ সাফল্য (S) ও ব্যর্থতা (F) পাওয়ার ধারাটি এইরকম : SFFSSSFSF.......FSS. যেহেতু ঘটনাগুলি স্বাধীন (independent), তাই সম্ভাবনার যৌগিক উপপাদ্য (compound Probability Theorem) অনুযায়ী লিখতে পারি—

$P\ [S, F, F, S, S, S, F, S, F.......... F\ S\ S]$

$= P\ (S), P(F). P(F). P(S). P(S). P(S). P(F). P(S). P(F)...... P(F). P(S). P(S)$

$= p.q.q.p.p.p.q.p.q.......... q.p.p$

$= (p.p.p.p. ....p) \times (q.q.q.........q)$

x-সংখ্যক (n – x) সংখ্যক

সাফল্যের সম্ভাবনা ব্যর্থতার সম্ভাবনা

$= p^x.q^{n-x}$

এখন n সংখ্যক বার পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি থেকে x সংখ্যক বার সাফল্য ^nc_x রকমভাবে ঘটতে পারে যার প্রত্যেকটির সম্ভাবনা $p^x.q^{n-x}$

সুতরাং x সংখ্যক বার সাফল্য ও (n – x) সংখ্যক বার ব্যর্থতা পাওয়ার সম্ভাবনা আমরা লিখতে পারি :

$f(x) = {}^nc_x\ p^xq^{n-x}$ যখন $x = 0, 1, 2, ..., n$

$= 0$ অন্যথায়

f(x) অপেক্ষকটিকে দ্বিপদ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক (pmf) বলেই আমরা জানি। দ্বিপদ বিভাগকে স্থিতিমাপ (parameter) সহযোগেও প্রকাশ করা হয় যেমন $x \sim B\ (n, p)$ অর্থাৎ সমসম্ভব চলক x দ্বিপদ বিভাজনের মাধ্যমে প্রকাশিত হয় যখন স্থিতিমাপ (parameters) দুটি n এবং p।

মন্তব্য : দ্বিপদ বিভাজনটি একটি তত্ত্বগত বিভাজন কারণ বিভাজনটি দুটি বৈশিষ্ট্য মেনে চলে :

(1) $f(x) \geq 0$ এবং (2) $\sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$

প্রমাণ : ধরা যাক দ্বিপদ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষকটি হ'ল—

$f(x) = {}^nc_x p^x q^{n-x}$, যখন $x = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n$

যদি $x = 0$ হয়, তবে $f(0) = {}^nc_0\ p^0.q^{n-0} = 1.1.q^n = q^n > 0$

এবার x এর মান $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ ধরলে $f(x)$ এর মান হবে :

যখন $x = 0,\ f(0) = {}^nc_0\ p^0.q^{n-0} = q^n > 0$

যখন $x = 1,\ f(1) = {}^nc_1\ p^1 q^{n-1} > 0$

যখন $x = 2,\ f(2) = {}^nc_2\ p^2 q^{n-2} > 0$

যখন $x = 3,\ f(3) = {}^nc_3\ p^3 q^{n-3} > 0$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

যখন $x = n\ f(x),\ {}^nc_n.p^n.q^{n-n} = p^n > 0$

$$\therefore \sum_{x=0}^{n} f(x) = q^n + {}^nc_1\, p^1.q^{n-1} + {}^nc_2\, p^2 q^{n-2} + \cdots\cdots + p^n$$

$$= (q + p)^n = (1)^n = 1 \qquad [\because\ p + q = 1]$$

$\therefore$ দ্বিপদ বিভাজনের ক্ষেত্রে $f(x) > 0$ এবং $\sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$

$\therefore$ দ্বিপদ বিভাজন একটি তত্ত্বগত বিভাজন।

3.5.1.1 দ্বিপদ বিভাজনের ভ্রামকসমূহ (Moments of Binomial Distribution)

দ্বিপদ বিভাজনের ক্ষেত্রে সমসম্ভব চলক x এর r তম কাঁচা ভ্রামক (raw moment) হবে—

$$\mu_r' = \sum_{x=0}^{n} x^r f(x) = \sum_{x=0}^{n} x^r.{}^nc_x p^x.q^{n-x}$$

দ্বিপদ বিভাজনের প্রথম কাঁচা ভ্রামক (First Raw Moment of Binomial Distribution)

যদি r = 1 হয় তবে $\mu_1' = \sum_{x=0}^{n} xf(x) = E(x) =$ গাণিতিক গড়

$\therefore$ $\mu_1' =$ গাণিতিক গড় $= E(x) = \sum_{x=0}^{n} x.{}^nc_x\ p^x.q^{n-x}$

$= 0.\ {}^nc_0\, p^0.q^{n-0} + 1.{}^nc_1\ p^1.q^{n-1} + 2.\ {}^nc_2\ p^2.q^{n-2} + 3.\ {}^nc_3\,.p^3.q^{n-3} +$

$\ldots\ldots\ldots + n.\ {}^nc_n\ p^nq^{n-n}$

$$= 0 + npq^{n-1} + 2.\frac{n(n-1)}{1.2}.p^2.q^{n-2} + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.p^3q^{n-3} + \cdots\cdots + np^n$$

$$= np\left[q^{n-1} + (n-1)pq^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}p^2.q^{n-3} + \cdots\cdots + p^{n-1}\right]$$

$$= np(q+p)^{n-1} = np\ [\because (p+q) = 1]$$

$\therefore$ $\mu_1' = E(x) = \mu = np =$ দ্বিপদ বিভাজনের গাণিতিক গড়

*** দ্বিপদ বিভাজনের দ্বিতীয় কাঁচা ভ্রামক (Second Raw Moment of Binomial Distribution)**

যদি r = 2 হয় তবে,

$$\mu_2' = E(x^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 f(x) = \sum_{x=0}^{n} x^2.{}^nc_x.p^xq^{n-x}$$

মনে করা যাক, $x^2 = x + x\ (x - 1)$

$$\therefore\ \mu_2' = \sum_{x=0}^{n} x^2.{}^nc_xp^xq^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} x + x(x-1).\ {}^nc_xp^x.q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x.{}^nc_xp^x.q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x(x-1).{}^nc_xp^xq^{n-x}$$

$$= np + \sum_{x=0}^{n} x(x-1).{}^{n}c_x p^x q^{n-x}$$

$$\left[\because \sum_{x=0}^{n} x.{}^{n}c_x.p^x q^{n-x} = \mu_1' = E(x) = np\right]$$

এবার, $\sum_{x=0}^{n} x(x-1).{}^{n}c_x.p^x q^{n-x}$

$$= 0\ (0-1).\ {}^{n}c_0.\ p^0 q^{n-0} + 1(1-1).\ {}^{n}c_1\, p^1.q^{n-1} + 2\ (2-1).\ {}^{n}c_2\, p^2 q^{n-2}$$
$$+3(3-1).{}^{n}c_3 p^3 q^{n-3} + \cdots\cdots + n(n-1).{}^{n}c_n p^n q^{n-n}$$

$$= 0 + 0 + 2.\frac{n(n-1)}{1.2}.p^2 q^{n-2} + 3.2\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.p^3 q^{n-3} + \cdots\cdots + n(n-1).p^n$$

$$= n\ (n-1)p^2\left[q^{n-2} + {}^{(n-2)}c_1 p^1 q^{n-3} + {}^{n-2}c_2.p^2 q^{n-4} + \cdots\cdots + p^{n-2}\right]$$

$$= n(n-1)p^2.(q+p)^{n-2} = n(n-1)p^2.1 \quad [\because\ (p+q) = 1]$$

$$\therefore\ \mu_2' = np + n(n-1)p^2 = np + n^2p^2 - np^2$$

কেন্দ্রীয় ভ্রামক ও কাঁচা ভ্রামকের সম্পর্ক অনুযায়ী $\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$

$$= np + n^2p^2 - np^2 - (np)^2 = np + \cancel{n^2p^2} - np^2 - \cancel{n^2p^2}$$

$$= np(1-p) = npq \quad [\because p + q = 1,\ \therefore q = 1 - p]$$

আমরা জানি μ_2 = ভেদমান (variance) = σ^2 = npq

$\therefore$ সমক পার্থক্য (Standard Deviation) = σ = $\sqrt{npq}$

$\because$ P + q = 1, $\therefore$ p, q < 1 $\therefore$ npq < np

অর্থাৎ **দ্বিপদ বিভাজনের গাণিতিক গড় (np) তার ভেদমান (npq) থেকে বড়ো।**

আবার, ভেদমান σ^2 = npq = $n\left[\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-\left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right]$

$$= n\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right]\le\frac{n}{4}\left[\because\left(\frac{P-q}{2}\right)^2\ge 0\right]$$

সুতরাং n একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য দ্বিপদ বিভাজনের ভেদমান $\frac{n}{4}$-এর বেশী হতে পারে না।

ভেদমান সর্বোচ্চ মানে পৌঁছাতে পারে যখন $\left(\frac{p-q}{2}\right)^2=0$ হয়, অর্থাৎ, যখন $p=q=\frac{1}{2}$

*** দ্বিপদ বিভাজনের তৃতীয় কাঁচা ভ্রামক (Third raw moment of Binomial Distribution)**

$$\mu_3' = E(X^3) = \sum_{x=0}^{n} x^3.f(x) = \sum_{x=0}^{n} x^3.\,{}^{n}c_x p^x q^{n-x}$$

মনে করা যাক, $x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$

তাহলে, $\mu_3' = \sum_{x=0}^{n}\{x(x-1)(x-2)+3x(x-1)+x\}.\,{}^{n}c_x p^x q^{n-x}$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)(x-2).\,{}^{n}c_x p^x q^{n-x} + 3\sum_{x=0}^{n} x(x-1).\,{}^{n}c_x p^x q^{n-x}$$

$$+\sum_{x=0}^{n} x.\,{}^{n}c_x p^x q^{n-x}$$

এখন আগের মতো গণনা করলে পাওয়া যাবে—

$\mu_3' = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$

এবার কেন্দ্রীয় ভ্রামক ও কাঁচা ভ্রামকের সম্পর্ক অনুযায়ী

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$

μ_3', μ_2' এবং μ_1'-এর মান বসিয়ে পাওয়া যাবে

$\mu_3 = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np - 3(np + n^2p^2 - np^2)np + 2(np)^3$

$= \cancel{n^3p^3} - \cancel{3n^2p^3} + 2np^3 + \cancel{3n^2p^2} - 3np^2 + np - \cancel{3n^2p^2} - \cancel{3n^3p^3} + \cancel{3n^2p^3} + \cancel{2n^3p^3}$

$= np - 3np^2 + 2np^3 = np\ [1-3p + 2p^2]$

$= np\ (1-p)\ (1-2p)$

$= npq\ (q-p)$

$[\because\ p+q = 1,\ \therefore\ 1-p = q \text{ and } (1-2p) = (1-p-p) = (q-p)]$

এখন **দ্বিপদ বিভাজনের প্রতিবিষম গুণাঙ্ক (Co-efficient of Skewness) ভ্রামকের মাধ্যমে নির্ণয় করা যায় নীচের পদ্ধতিতে :**

প্রতিবিষম গুণাঙ্ক $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\dfrac{\mu_3^2}{\mu_2^3}} = \sqrt{\dfrac{[npq(q-p)]^2}{(npq)^3}}$

$= \sqrt{\dfrac{(q-p)^2}{npq}} = \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}} = \dfrac{1-2p}{\sqrt{npq}}$

$\therefore$ প্রতিবিষম গুণাঙ্ক $\gamma_1 = \dfrac{1-2p}{\sqrt{npq}}$

যদি $p = q = \dfrac{1}{2}$ হয়, তবে $\gamma_1 = 0$ এবং দ্বিপদ বিভাজনটিকে প্রতিসম (Symmetrical) বিভাজন বলা যাবে।

যদি $P \neq q$ হয়, তবে $\gamma_1 \neq 0$ হবে ও দ্বিপদ বিভাজনটি প্রতিবিষম (asymmetrical) বিভাজন হবে।

যদি $p<\frac{1}{2}$ হয়, তবে $\gamma_1>0$ হবে এবং দ্বিপদ বিভাজনটি ধনাত্মক প্রতিবিষম (positively Skewed) বিভাজন হবে।

আর যদি $p>\frac{1}{2}$ হয় তবে $\gamma_1<0$ হবে এবং দ্বিপদ বিভাজনটি ঋণাত্মক প্রতিবিষম (negatively Skewed) বিভাজন হবে।

*** দ্বিপদ বিভাজনের চতুর্থ কাঁচা ভ্রামক (Fourth raw moment of Binomial Distribution)**

$$\mu_4' = E\left(x^4\right) = \sum_{x=0}^{n} x^4 . f(x) = \sum_{x=0}^{n} x^4 . {}^{n}c_x p^x . q^{n-x}$$

মনে করা যাক্ $x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x$

এবার, $$\mu_4' = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)(x-2)(x-3) . {}^{n}c_x p^x q^{n-x}$$

$$+6\sum_{x=0}^{n} x(x-1)(x-2) . {}^{n}c_x p^x q^{n-x}$$

$$+7\sum_{x=0}^{n} x(x-1) . {}^{n}c_x p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x . {}^{n}c_x p^x q^{n-x}$$

এখন আগের মতো গণনা করলে পাওয়া যাবে—

$$\mu_4' = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np$$

কিন্তু কেন্দ্রীয় ও কাঁচা ভ্রামকের সম্পর্ক অনুযায়ী

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 = 3\mu_1'^4$$

এই সমীকরণে μ_4', μ_3', μ_2' ও μ_1' এর মান বসিয়ে পাওয়া যাবে—

$$\mu_4 = n^4(p^4 - p^4) + n^3[-6p^4 + 6p^3 - 6p^3 + 6p^4]$$

$$+n^2[11p^4 - 18p^3 + 7p^2 - 4p^2 + 12p^3 - 8p^4 + n[-6p^4 + 12p^3 - 7p^2 + p]$$

$= 3n^2p^2\ [1 - p]^2 + np\ (1 - p)(1 - 6p + 6p^2)$

$= 3n^2p^2q^2 + npq\ (1 - 6pq)$

$= npq\ [1 + 3(n - 2)\ pq]$

$\therefore\ \mu_4 = npq\ [1 + 3(n - 2)\ pq]$

এখন **দ্বিপদ বিভাজনের তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক (Coefficient of Kurtosis)**

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{npq[1+3(n-2)pq]}{(npq)^2} - 3$$

$$= \frac{1+3(n-2)pq}{npq} - 3 = \frac{1+\cancel{3npq} - 6pq - \cancel{3npq}}{npq} = \frac{1-6pq}{npq}$$

$$\therefore\ \gamma_2 = \frac{1-6pq}{npq}$$

এখন দ্বিপদ বিভাজনটির তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্কর (γ_2) মান নির্ভর করছে (p.q) এর মানের উপর।

যদি $(p.q) = \frac{1}{6}$ হয় তাহলে $\gamma_2 = 0$ হবে অর্থাৎ দ্বিপদ বিভাজনটি হবে মেসোকার্টিক (Mesokurtic)।

যদি $(p.q) > \frac{1}{6}$ হয় তবে $\gamma_2 < 0$ হবে অর্থাৎ দ্বিপদ বিভাজনটি হবে প্লেটিকার্টিক (Platykurtic)

যদি $(p.q) < \frac{1}{6}$ হয় তবে $\gamma_2 > 0$ হবে অর্থাৎ দ্বিপদ বিভাজনটি হবে লেপ্টোকার্টিক (Leptokurtic)।

3.5.1.2 দ্বিপদ বিভাজনে ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষক-এর প্রয়োগ (Moment generating function in the Binomial Distribution)

দ্বিপদ বিভাজনে যেখানে স্থিতিমাপ (parameters) দুটি যথাক্রমে n এবং p [B ~ (n, p)], ভ্রামক-উৎপাদক অপেক্ষকটি হবে—

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx}.f(x) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}.\,{}^nc_x p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} {}^nc_x.(pe^t)^x.q^{n-x} = (q + p.e^t)^n$$

এখন মূলবিন্দু '0' সাপেক্ষে r-তম অকেন্দ্রীয় ভ্রামক বা কাঁচা ভ্রামক নির্ণয় করার সূত্র হল

$$\mu'_r(0) = \left[\frac{d^r}{dt^r} M_X(t)\right]_{t=0}$$

কাঁচা ভ্রামক নির্ণয় করার পর কেন্দ্রীয় ভ্রামক কীভাবে গণনা করা হয় আমরা আগেই দেখেছি। এখানে আমরা গাণিতিক গড় ও ভেদমান কীভাবে গণনা করা হয় দেখাবো।

$$\mu = \text{গাণিতিক গড়} = \mu'_1(0) = \left[\frac{d}{dt} M_X(t)\right]_{t=0} = \left[n\left(q + pe^t\right)^{n-1} .pe^t\right]_{t=0}$$

$$= n\,(q + p)^{n-1}.p = np$$

$$\text{দ্বিতীয় কাঁচা ভ্রামক} = \mu'_2(0) = \left[\frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt} M_X(t)\right\}\right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\left\{np\left(q + pe^t\right)^{n-1} .e^t\right\}\right]_{t=0}$$

$$= \left[np\left\{(n-1)(q + p.e^t)^{n-2}.pe^t.e^t + (q + pe^t)^{n-1}.e^t\right\}\right]_{t=0}$$

$$= np\{(n-1)p + 1\} = n(n-1)p^2 + np$$

$$\therefore \text{ ভেদমান } \sigma^2 = \text{Var }(x) = \mu_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$$

$$= -\ np^2 + np = np\ (1 - p) = npq$$

3.5.1.3 দ্বিপদ বিভাজনের ভ্রামকদের পুনরাবৃত্তি সম্পর্কের ব্যবহার (Use of Recursion relation for moments of Binomial Distribution)

আমরা জানি যে μ = গাণিতিক গড় = np

সুতরাং r-তম কেন্দ্রীয় ভ্রামকের সূত্র হল :

$$\mu_r = E(X - \mu)^r = \sum_{x=0}^{n} (x - np)^r.\,{}^n c_x p^x q^{n-x}$$

'p'-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন (differentiating with respect to p) করে পাই

$$\frac{d\mu_r}{dp} = \sum_{x=0}^{n} {}^n c_x \left[r(x-np)^{r-1}.(-n)p^x q^{n-x} + (x-np)^r \right.$$

$$\left. \left\{ x.p^{x-1} q^{n-x} + p^x (n-x) q^{n-x-1}.(-1) \right\} \right]$$

$$= \sum_{x=0}^{n} {}^n c_x \left[(-nr)(x-np)^{r-1} p^x q^{n-x} + (x-np)^r \left\{ p^{x-1} q^{n-x-1} (x-np) \right\} \right]$$

$$= -nr \sum_{x=0}^{n} (x-np)^{r-1}.{}^n c_x p^x q^{n-x} + \frac{1}{pq} \sum_{x=0}^{n} (x-np)^{r+1}.{}^n c_x p^x.q^{n-x}$$

$$= -nr\,\mu_{r-1} + \frac{1}{pq}.\mu_{r+1}$$

$$\therefore\ \mu_{r+1} = pq\left[nr\mu_{r-1} + \frac{d}{dp}\mu_r \right]$$

এটাই দ্বিপদ বিভাজনের ভ্রামকদের পুনরাবৃত্তিক সম্পর্কের সমীকরণ (Recursion Relation) আমরা জানি $\mu_0 = 1$ এবং $\mu_1 = 0$ এই কেন্দ্রীয় ভ্রামকদ্বয় যে কোন বিভাজনের জন্য সত্য।

এখন ভ্রামকদের পুনরাবৃত্তিক সম্পর্কের (Recursion relation of the moments) সাহায্যে দ্বিপদ বিভাজনের উচ্চতর ভ্রামকগুলি অনায়াসে নির্ণয় করা যায়। যেমন $r = 2$ বসিয়ে আমরা পাই

$$\mu_2 = pq\left[n.1.\mu_0 + \frac{d\mu_1}{dp} \right] = pq\left[n.1.1. + \frac{d}{dp}(0) \right]$$

$$= npq = \text{দ্বিপদ বিভাজনের ভেদমান}$$

আবার $r = 3$ বসিয়ে পাই

$$\mu_3 = pq\left[n.2.\mu_1 + \frac{d\mu_2}{dp} \right]$$

$$= pq\left[n.2.0+\frac{d}{dp}(npq)\right]$$

$$= pq\left[0+n\{1.q+p.(-1)\}\right]$$

$$= npq\ (q - p)$$

এইভাবে আমরা দ্বিপদ বিভাজনের সমস্ত কেন্দ্রীয় ভ্রামক গণনা করতে পারি।

3.5.1.4 দ্বিপদ বিভাজনের সংখ্যাগুরুর মান (Mode of the Binomial Distribution)

সংখ্যাগুরু মান (Mode) হ'ল সমসম্ভব চলক (X) এর সেই মান যার জন্য সম্ভাবনা অপেক্ষকের মান সর্বোচ্চ হয়। যদি $X = r$ সংখ্যাগুরু মান হয় তবে,

$P(X = r - 1) < P(X = r) > P(X = r + 1)$

এবার দেখা যাক দ্বিপদ বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান কিভাবে নির্ণয় করা যায়। ধরা যাক্ X একটি দ্বিপদ চলক যার স্থিতিমাপ (Parameter) দুটি হল n এবং p.

অবস্থা 1 : যখন $(n + 1)p$ একটি পূর্ণসংখ্যা (integer)

ধরা যাক, $(n + 1)p = k$ (যেখানে K একটি পূর্ণসংখ্যা)

এইরকম ক্ষেত্রে দ্বিপদ বিভাজনটির সংখ্যাগুরু মান (Mode) হবে দুটি। একটি সংখ্যাগুরুমান $X = K$ এবং দ্বিতীয় সংখ্যাগুরু মান হবে $X = K - 1$ একটি উদাহরণ সহযোগে বোঝানো যায় যদি $n = 9$ এবং $p = 0.4$ হয়, তাহলে $(n + 1)p = 10 \times 0.4 = 4$ অর্থাৎ একটা পূর্ণসংখ্যা পাওয়া গেল। সুতরাং দ্বিপদ বিভাজনটি দুই সংখ্যাগুরু মান বিশিষ্ট হবে। প্রথম সংখ্যাগুরু মানটি হবে $X = 4$ এবং দ্বিতীয় সংখ্যাগুরু মানটি হবে $X = 4 - 1 = 3$।

অবস্থা 2 : যখন $(n+1)p$ কোন পূর্ণসংখ্যা নয়।

ধরা যাক $(n+1)p = k_1 + f$ যেখানে k_1 একটি পূর্ণসংখ্যা এবং f হল একটি ভগ্নাংশ। এখানে দ্বিপদ বিভাজনটির সংখ্যাগুরু মান হবে $X = k_1$ অর্থাৎ $(n+1)p$ এর পূর্ণসংখ্যা সম্বলিত অংশটি।

উদাহরণ : যদি $n = 7$ এবং $p = 0.6$ হয় তাহলে $(n+1)p = 8 \times 0.6 = 4.8$. এক্ষেত্রে দ্বিপদ বিভাজনটির সংখ্যাগুরু মান হবে $X = 4$, অর্থাৎ 4.8 এর পূর্ণসংখ্যা সম্বলিত অংশটি।

মন্তব্য : যদি np একটি পূর্ণসংখ্যা হয় তবে দ্বিপদ বিভাজনটি এক সংখ্যাগুরু মান (unimodal) বিশিষ্ট হবে এবং গাণিতিক গড় = সংখ্যাগুরু মান = np হবে।

3.5.1.5 দ্বিপদ বিভাজনের কিছু বাস্তব দৃষ্টান্ত (Some Real life Examples of Binomial Distribution)

নীচে কিছু বাস্তব উদাহরণ দেওয়া হ'ল যখন একটি বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক দ্বিপদ বিভাজন অনুসরণ করে—

(ক) মুদ্রা ছোঁড়ার সময়ে হেড ও টেল পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করা।

(খ) ছক্কা চালনার সময় ছক্কার উপরিপৃষ্ঠের সংখ্যার অথবা একাধিক ছক্কা চালনা করলে সম্ভাব্য সংখ্যার সমন্বয়ের সম্ভাবনা নিরূপণ করা।

(গ) কোন সংক্রামক রোগে আক্রান্ত হওয়া বা না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করা।

(ঘ) কোন উৎপাদন ব্যবস্থায় ত্রুটিপূর্ণ ও ত্রুটিমুক্ত দ্রব্যের অনুপাত নির্ণয়।

(ঙ) কোন পরীক্ষায় সফলতা ও ব্যর্থতার সম্ভাবনা নির্ণয় করা।

(চ) কোন সমগ্রকের মধ্যে নিরামিষাশী ও আমিষাশী ব্যক্তির সংখ্যা নির্ণয়।

(ছ) কোন সমাজে সাক্ষর ও নিরক্ষরের অনুপাত নির্ণয় করা ইত্যাদি।

3.5.1.6 দ্বিপদ বিভাজনের ধর্মাবলী (Properties of Binomial Distribution)

1. দ্বিপদ বিভাজন একটি সমসম্ভব বিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা বিভাজন যেখানে চলকটি একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সসীম সংখ্যক মান নিয়ে থাকে যেমন মানগুলি 0, 1, 2, 3, ……., n. এই বিভাজনটির দুটি স্থিতিমাপ (parameter) n এবং p (p এখানে সাফল্যের সম্ভাবনার মান) সাফল্যের বিপরীত হ'ল ব্যর্থতা। ব্যর্থতার সম্ভাবনার মান q দিয়ে নির্দেশ করা হয়। $(p + q) = 1$

   দ্বিপদ বিভাজনটির সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষক (p.m.f.) হ'ল

   $f(x) = {}^{n}c_{x}\, p^{x} q^{n-x}$, যখন $x = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n$

   $= 0$, অন্যথায়

2. দ্বিপদ বিভাজনটির গাণিতিক গড় মান $= np$ ও ভেদমান $= npq$

   $\because\ p + q = 1,\ 0 < q < 1 \quad \therefore\ np > nqp$ অর্থাৎ গড়মান > ভেদমান

3. দ্বিপদ বিভাজনটির একটি অথবা দুটি সংখ্যাগুরু মান থাকতে পারে।

4. বিভাজনটির প্রতিবৈষম্য $\gamma_1 = \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$ ও তীক্ষ্ণতা $\gamma_2 = \dfrac{1-6pq}{npq}$ বিভাজনটি প্রতিসম (Symmetrical) যখন $p = q = \dfrac{1}{2}$ এবং বিভাজনটি মেসোকার্টিক (mesokurtic) যখন $pq = \dfrac{1}{6}$

5. দ্বিপদ বিভাজনটি হাইপার জিওম্যাট্রিক বিভাজন-এর একটি সীমান্ত রূপ।

6. পয়র্জঁ বিভাজন দ্বিপদ বিভাজনের সীমান্ত রূপ।

উদাহরণ : 3.5.1 একটি দ্বিপদ বিভাজনের গড় মান 4 ও ভেদমান 3 হলে বিভাজনটির সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরা যাক্ x একটি সমসম্ভব বিচ্ছিন্ন চলক যা একটি দ্বিপদ বিভাজন অনুসরণ করে : $f(x) = {}^{n}c_{x}p^{x}q^{n-x}$; $x = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n$

যার গড় মান $E(x) = np = 4$ ও ভেদমান $\sigma^2 = npq = 3$

$\therefore \ \dfrac{npq}{np} = q = \dfrac{3}{4}$; আবার $p = 1 - q = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore \ np = 4$ অথবা, $n \times \dfrac{1}{4} = 4 \qquad \therefore \ n = 16$

$\therefore$ দ্বিপদ বিভাজনটি এইভাবে লেখা যায় : $B \sim (n, p)$ অথবা, $B \sim \left(4, \dfrac{1}{4}\right)$

এবার সংখ্যাগুরু মান নির্ণয়ের সময় দেখা উচিৎ $r = (n+1)p$ একটি পূর্ণসংখ্যা না খণ্ড সংখ্যা।

$r = (n+1)p = (16+1).\dfrac{1}{4} = 4.25$

$\therefore$ দ্বিপদ বিভাজনটির সংখ্যাগুরু মান হবে 4

কারণ $r = 4.25$ মানটির পূর্ণসংখ্যার অংশটি 4

যেহেতু r একটি খণ্ডসংখ্যা তাই সংখ্যাগুরুর মান একটিই হবে।

উদাহরণ : 3.5.2 একটি ঝোঁকশূন্য মুদ্রা 5 বার নিক্ষেপ করা হ'ল।

(i) 0 সংখ্যক হেড, 2টি হেড, 3টি হেড, 4টি হেড, 5টি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(ii) 1 এর থেকে বেশী বার হেড পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

(iii) অন্ততঃপক্ষে 1টি হেড পাওয়ার সম্ভাবনাই বা কত?

সমাধান : এখানে হেড-কে সাফল্য এবং টেল পাওয়াটা ব্যর্থতা ধরা হল। মুদ্রাটি ঝোঁকশূন্য হলে সাফল্যের সম্ভাবনা $P = \dfrac{1}{2}$।

$\therefore$ ব্যর্থতার সম্ভাবনা $q = 1 - p = \frac{1}{2}$

পরীক্ষা করার সময় 5 বার মুদ্রা ছোঁড়া হয়েছে। $\therefore$ $n = 5$

প্রতিটি ছোঁড়াই স্বাধীন $\therefore$ দ্বিপদ বিভাজনটি $B \sim \left(5, \frac{1}{2}\right)$

দ্বিপদ বিভাজনটির সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষক হবে $f(x) = {}^{n}c_{x} p^{x} q^{n-x}$, যখন $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$।

(i) এখানে x সমসম্ভব চলকটি সাফল্যের সংখ্যা বোঝায়। এবার সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষক f(x) এর মধ্যে x-এর বিভিন্ন মান বসিয়ে পাই :

P (0 সংখ্যক হেড) = $f(0) = {}^{5}c_{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}.\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{32}$

P (1টি হেড) = $f(1) = {}^{5}c_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 5\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{5}{32}$

P (2টি হেড) = $f(2) = {}^{5}c_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5\times4}{1\times2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = 10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{10}{32}$

P (3টি হেড) = $f(3) = {}^{5}c_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}.\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{10}{32}$

P (4টি হেড) = $f(4) = {}^{5}c_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{5}{32}$

P (5টি হেড) = $f(4) = {}^{5}c_{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{5}.1 = \frac{1}{32}$

অঙ্কটি ঠিক করা হয়েছে কিনা সেটা পরীক্ষা করার উপায় হল সব কটি সম্ভাবনা যোগ করে দেখা। যদি যোগফল 1 হয় তবে অঙ্কটি ঠিক হয়েছে মনে করা হয়।

উপরের সবকটি সম্ভাবনার যোগফল = $\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32} = \frac{32}{32} = 1$

(ii) 1 এর থেকে বেশী হেড পাওয়ার সম্ভাবনা = (P > 1টি হেড) = $f(x > 1)$

$= f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = \frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32} = \frac{26}{32}$

(iii) অন্ততঃপক্ষে 1টি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা = P (≥ 1টি হেড)

= 1 – P (< 1টি হেড) = 1 – P(x = 0) = 1 – f(0) = $1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

উদাহরণ : 3.5.3 যদি কোন বাল্‌ব কারখানায় পরীক্ষা করে দেখা গেলো ত্রুটিযুক্ত বাল্‌ব তৈরীর সম্ভাবনা $\frac{1}{10}$, তবে 400টি বাল্‌ব-এর জন্য ধরা যাক কোন দ্বিপদ বিভাজন অনুসৃত হচ্ছে। এক্ষেত্রে (i) গাণিতিক গড় (ii) ভেদমান ও (iii) প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : দ্বিপদ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষক ধরা যাক

$f(x) = {}^nc_x\, p^x\, q^{n-x}$, যখন x = 0, 1, 2, ..., n

এখানে n দেওয়া আছে 400, $P=\frac{1}{10}=0.1 \quad \therefore\ q = 1-P = 1-0.1 = 0.9$

(i) দ্বিপদ বিভাজনটির গাণিতিক গড় হবে $np = 400 \times 0.1 = 40$

(ii) ভেদমান = npq = $400 \times 0.1 \times 0.9 = 36$

(iii) প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $\gamma_1 = \frac{(q-p)}{\sqrt{npq}} = \frac{0.9-01}{\sqrt{36}} = \frac{0.8}{6} = 0.133 > 0$

এখানে বিভাজনটি ধনাত্মক প্রতিবৈষম্য (Positively Skewed) বিশিষ্ট।

উদাহরণ : 3.5.4 কোন কলেজে ছাত্রের স্নাতক পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা 0.6. এবার ধরা যাক কলেজটিতে 10 জন ছাত্র ভর্ত্তি হ'ল। এই 10 জন ছাত্রের মধ্যে (i) একজনও উত্তীর্ণ না হওয়া (ii) একজনের উত্তীর্ণ হওয়া (iii) অন্ততঃপক্ষে একজনের স্নাতক পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি সাফল্যের সম্ভাবনা অর্থাৎ স্নাতক পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা p = 0.6

সুতরাং ব্যর্থতার সম্ভাবনা q = 1 – P = 1 – 0.6 = 0.4

এখানে n = 10 কারণ 10 জন ছেলে কলেজে ভর্ত্তি হয়েছে। এবার, সম্ভাবনা ভর-অপেক্ষক

$f(x) = {}^nc_x\, p^x\, q^{n-x}$, যখন x = 0, 1, 2, 3, ..., 10

(i) P (একজনও উত্তীর্ণ হবে না) = $P(x = 0) = f(0) = {}^{10}c_0\,(0.6)^0\,(0.4)^{10-0}$

$= 1.1.\ (0.4)^{10} = 0.0001048576 = 0.0001$

(ii) P (একজন উত্তীর্ণ হবে) = P (x = 1) = $f(1) = {}^{10}c_1\, p^1\, q^{10-1}$

$= {}^{10}c_1 (0.6)^1 (0.4)^{10-1} = 10.(0.6).(0.4)^9 = 0.001572864 = 0.0016$

(iii) P (অন্ততঃপক্ষে একজন উত্তীর্ণ হবে) = $P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1)$

$= 1 - P(X = 0) = 1 - 0.0001 = 0.9999$

3.5.2 পয়জঁ বিভাজন (Poisson Distribution)

একটি বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক x পয়জঁ বিভাজন অনুসরণ করবে যখন বিভাজনটির সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষক (pmf) হয় :

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \text{ যখন } x = 0, 1, 2, \ldots\ldots, \infty$$

$$= 0, \quad \text{অন্যথায়}$$

এখানে λ (λ > 0) হ'ল বিভাজনটির একমাত্র স্থিতিমাপ (parameter) পয়জঁ বিভাজন একটি তত্ত্বগত বিচ্ছিন্ন বিভাজন (discrete theoretical distribution) কারণ নীচের দুটি শর্ত এই বিভাজন পালন করে।

(i) $f(x) \geq 0$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে x এর যেকোন মানের জন্য সত্য (x = 0, 1, 2, ..., ∞)

(ii) $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$

প্রমাণ : পয়জঁ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষক অনুযায়ী

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \text{ যখন } x = 0, 1, 2, \ldots\ldots, \infty$$

যদি x = 0 হয় তবে, $f(0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} > 0$ [$\because \lambda^0 = 1$, এবং $0! = 1$]

x এর অন্যান্য মানের জন্য অর্থাৎ 1, 2, 3, ..., ∞ ইত্যাদির জন্য $f(x) > 0$ হবে। অর্থাৎ প্রথম শর্ত পূরণ হ'ল।

এবার, $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$

$$= e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots\cdots+\infty\right]$$

$$= e^{-\lambda}.e^{\lambda}$$

$$\left[\because e^{\lambda}=\frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots\cdots+\infty\right]$$

$$= e^0 = 1$$

$\therefore \sum_{x=0}^{\infty} f(x)=1$, অর্থাৎ দ্বিতীয় শর্ত পূরণ হ'ল।

সুতরাং পয়জঁ বিভাজন একটি তত্ত্বগত বিভাজন।

3.5.2.1 পয়জঁ বিভাজনকে দ্বিপদ বিভাজনের সীমান্ত রূপ বলা হয় (Poisson Distribution is regarded as the Limiting form of Binomial Distribution)

পয়জঁ বিভাজনকে দ্বিপদ বিভাজনের সীমান্ত রূপ বলা হয় যখন পরীক্ষার (trial) সংখ্যা $n\rightarrow\infty$, সাফল্যের সম্ভাবনা একটি পরীক্ষাতে যদি p হয় তবে $p \rightarrow 0$, কিন্তু $np = \lambda$ (একটি সসীম সংখ্যা)।

দ্বিপদ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষকের সীমান্ত রূপ হল—

$$\text{Lim}\ {}^{n}c_{x}p^{x}q^{n-x}$$

$$= \text{Lim}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-x+1)}{x!}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$= \text{Lim}\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}(np)^{x}\left(1-\frac{np}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \text{Lim}\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}\lambda^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}.\text{Lim}\left\{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right\}\frac{\text{Lim}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\text{Lim}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$= e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

যেহেতু, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right\} = 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

এবং $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x = 1$, x এর প্রদেয় কোন মানের জন্য।

এই ফলটির ব্যবহারিক উপযোগিতা একটা অবশ্যই আছে। যদি n-এর মান যথেষ্ট বড় হয়, p-এর মান যথাসম্ভব ছোট হয়, কিন্তু np (= λ) কোন সসীম মান হয় তবে দ্বিপদ সম্ভাবনা $^nc_x\, p^x\, q^{n-x}$ কে পয়জঁ সম্ভাবনা $\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ এর সঙ্গে সমান ধরা যেতে পারে এবং এক্ষেত্রে λ দ্বিপদ সম্ভাবনার তুলনায় পয়জঁ সম্ভাবনা নিয়ে গণনা করা অতি সহজ।

উদাহরণ : 3.5.5 ধরা যাক্ n = 100, p = $\frac{1}{400}$ দেওয়া আছে। x = 2-এর সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : এই অঙ্কটি দ্বিপদ বিভাজন ধরে নিয়ে সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায়, আবার পয়জঁ বিভাজন ধরে নিয়েও সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায়।

দ্বিপদ বিভাজনের জন্য গণনা : $p(x=2) = {}^{100}c_2\left(\frac{1}{400}\right)^2\left(\frac{399}{400}\right)^{100-2} = 0.0242$

পয়জঁ বিভাজনের জন্য গণনা : $np(=\lambda) = 100.\frac{1}{400} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\therefore\ P(x=2) = e^{-0.25}.\frac{(0.25)^2}{2!} = 0.0243$$

উত্তর দুই ক্ষেত্রে প্রায় একই, কিন্তু পয়জঁ বিভাজনের জন্য গণনা অনেকটাই সহজ।

3.5.2.2 পয়জঁ বিভাজনের ভ্রামকসমূহ (Moments of Poisson Distribution)

সূত্র অনুযায়ী পয়জঁ বিভাজনের r-তম কাঁচা ভ্রামক (rth raw moment)

$$\mu_r' = E(x^r) = \sum_{x=0}^{\infty} x^r f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^r \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

*** যদি r = 1 হয় তবে μ'_1 প্রথম কাঁচা ভ্রামক = E(x) = গাণিতিক গড়**

$$\therefore\ \mu_1' = E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

$$= 0.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^0}{0!} + 1.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^1}{1!} + 2.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^2}{2!} + 3.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^3}{3!} + \cdots\cdots$$

$$= 0 + e^{-\lambda}.\lambda + \frac{e^{-\lambda}.\lambda^2}{1!} + \frac{e^{-\lambda}.\lambda^3}{2!} + \frac{e^{-\lambda}.\lambda^4}{3!} + \cdots\cdots$$

$$= e^{-\lambda}.\lambda\left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\cdots \infty\right]$$

$$\left[\because \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\cdots\right) = e^{\lambda}\right]$$

$$= e^{-\lambda}.\lambda.e^{\lambda}$$

$$= \lambda \quad [\because e^0 = 1]$$

$\therefore\ \mu_1' = E(x) =$ পয়জঁ বিভাজনের গড় মান $= \lambda$

= পয়জঁ বিভাজনের একমাত্র স্থিতিমাপ (parameter)

*** পয়জঁ বিভাজনের দ্বিতীয় কাঁচাভ্রামক (যেখানে $r = 2$)**

$$\mu_2' = E(x^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 . \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

ধরা যাক্ $x^2 = x + x(x-1)$

$$\therefore \ \mu_2' = \sum_{x=0}^{\infty} [x + x(x-1)] \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x . \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

$$= \mu_1' + \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) . \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

$$\therefore \ \mu_2' = \lambda + \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} \qquad [\because \mu_1' = \lambda]$$

এখন $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$

$$= 0(0-1)\frac{e^{-\lambda}.\lambda^0}{0!} + 1(1-1)\frac{e^{-\lambda}.\lambda^1}{1!} + 2(2-1).\frac{e^{-\lambda}.\lambda^2}{2!} + 3(3-1)\frac{e^{-\lambda}.\lambda^3}{3!} + \cdots\cdots$$

$$= e^{-\lambda}.\lambda^2 \left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\cdots\right]$$

$$= e^{-\lambda}.\lambda^2.e^{\lambda} \left[\because \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\right) = e^{\lambda}\right]$$

$= e^0 . \lambda^2 = \lambda^2$

$\therefore \quad \mu'_2 = \lambda + \lambda^2$

এখন কেন্দ্রীয় ভ্রামক ও কাঁচা ভ্রামকের সম্পর্ক অনুযায়ী

$\mu_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

$\therefore\ \mu_2 =$ ভেদমান $= \sigma^2 = \lambda$

$\therefore$ পয়জঁ বিভাজনের জন্য গাণিতিক গড় = ভেদমান = λ = পয়জঁ বিভাজনের স্থিতিমাপ (parameter)

*** পয়জঁ বিভাজনের তৃতীয় কাঁচা ভ্রামক (যেখানে r = 3)**

$$\mu'_3 = E(x^3) = \sum_{x=0}^{\infty} x^3 . \frac{e^{-\lambda} . \lambda^x}{x!}$$

ধরা যাক্ $x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$

এখন, $\mu'_3 = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)(x-2)\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} + 3\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1).\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} x.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$

আগের মত গণনা করে পাওয়া যায়

$\mu'_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$

এবার, কেন্দ্রীয় ভ্রামক ও কাঁচা ভ্রামকের সম্পর্ক অনুযায়ী

$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2(\mu'_1)^3$

$= (\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) - 3(\lambda^2 + \lambda). \lambda + 2(\lambda)^3$

$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda^3$

$= \lambda =$ পয়জঁ বিভাজনের স্থিতিমাপ (parameter)

*** পয়জঁ বিভাজনের প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক (Coefficient of Skewness)**

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^3}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$\because \lambda > 0, \quad \therefore \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} > 0$

অর্থাৎ পয়জঁ বিভাজনটি ধনাত্মক প্রতিবিষম (Positively Skewed)

*** পয়জঁ বিভাজনের চতুর্থ কাঁচা ভ্রামক (যখন r = 4)**

$$\mu_4' = E(x^4) = \sum_{x=0}^{\infty} x^4 \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

ধরা যাক্, $x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x$

$$\therefore \mu_4' = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)(x-2)(x-3)\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} + 6\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)(x-2).\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

$$+7\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1).\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} x.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

আগের মত গণনা করে পাওয়া যায়

$\mu'_4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$

কেন্দ্রীয় ও কাঁচা ভ্রামকের সম্পর্ক অনুযায়ী

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4$$

এখন $\mu_4', \mu_3', \mu_2', \mu_1'$ এর মান বসিয়ে পাই

$\mu_4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 4(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda).\lambda + 6(\lambda^2 + \lambda)\lambda^2 - 3(\lambda)^4$

$= \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 4\lambda^4 - 12\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda^4 + 6\lambda^3 - 3\lambda^4$

$= 3\lambda^2 + \lambda$

পয়জঁ বিভাজনের তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক (Co-efficient of Kurtosis of Poisson Distribution)

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{3\lambda^2 + \lambda}{\lambda^2} - 3 = \frac{3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda^2}{\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\therefore \quad \gamma_2 = \frac{1}{\lambda} > 0 \ (\because \lambda > 0)$$

অর্থাৎ পয়জঁ বিভাজনটি লেপ্টোকার্টিক বিভাজন।

3.5.2.3 পয়জঁ বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান (Mode of Poisson Distribution)

কোন সমসম্ভব চলক x-এর সংখ্যাগুরু মান চলকটির যে মানের সঙ্গো সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনার মান সর্বোচ্চ হয়, সেই মানটিকেই বোঝায়। পয়জঁ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষক হল :

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}, \text{ যখন } x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, \infty \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\therefore \ f(x-1) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

এখন (1) ÷ (2) থেকে পাই $\frac{f(x)}{f(x-1)} = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} \bigg/ \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$

$$\therefore \ \frac{f(x)}{f(x-1)} = \frac{\lambda}{x!} \times (x-1)! = \frac{\lambda(x-1)!}{x(x-1)!} = \frac{\lambda}{x}$$

অথবা, $f(x) = \frac{\lambda}{x}.f(x-1)$

f(x) এবং f(x – 1)-এর সম্পর্কটা নীচের মতো লেখা যায় :

(ক) $f(x-1) < f(x)$, যখন $x < \lambda$

(খ) $f(x-1) = f(x)$, যখন $x = \lambda$

(গ) $f(x-1) > f(x)$, যখন $x > \lambda$

এখানে দুটি অবস্থা পাওয়া যেতে পারে।

অবস্থা 1 : যখন λ একটি পূর্ণসংখ্যা নয় (λ is not an integer)

ধরা যাক্ n_0 হল λ-এর অখণ্ড অংশ (integral part of λ) এবং n_0-এর সঙ্গো যুক্ত আছে একটি ভগ্নাংশ।

এবার $\frac{f(x)}{f(x-1)} = \frac{\lambda}{x}$ এই সমীকরণ-এর মধ্যে x চলকের বিভিন্ন মান (x = 1, 2, 3, ..., n_0) বসিয়ে পাই—

$\frac{f(x)}{f(x-1)} > 1,$ যখন $x < \lambda$ .... (ক) সমীকরণ

অর্থাৎ $f(0) < f(1) < f(2)$ .... $< f(n_0)$ .... (ঘ)

এবং $x = (n_0 + 1), (n_0 + 2), (n_0 + 3)$ .... $\propto$ এই মানগুলির ক্ষেত্রে

$\frac{f(x)}{f(x-1)} < 1,$ যখন $x > \lambda$ .... (গ) সমীকরণ

অর্থাৎ $f(n_0) > f(n_0 + 1) > f(n_0 + 2)$ .... (ঙ)

এখন (ঘ) ও (ঙ) এই সম্পর্ক দুটিকে একত্র করলে পাওয়া যায়

$f(0) < f(1) < f(2)$ ...... $< f(n_0) > f(n_0 + 1) > f(n_0 + 2)$.........

সুতরাং এখানে সম্ভাবনার মান সর্বোচ্চ যখন $x = n_0$ এবং এটিকে পয়জঁ বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান বলে যখন λ একটি পূর্ণসংখ্যা নয়।

অবস্থা 2 : যখন $\lambda = n_0$ একটি পূর্ণসংখ্যা (λ is an integer)

(ক) থেকে আমরা পাই $f(x-1) < f(x)$ যখন $x < \lambda$ অর্থাৎ $x = 1, 2, 3,$ ..... (n_0-1)

$\therefore f(0) < f(1) < f(2)$ ...... $< f(n_0 - 1)$ .... (চ)

আবার (খ) থেকে আমরা পাই $f(x-1) = f(x)$ যখন $x = \lambda$ অর্থাৎ $x = n_0$

$\therefore f(n_0 - 1) = f(n_0)$ .... (ছ)

এবার, (গ) থেকে আমরা পাই $f(x-1) > f(x)$ যখন, $x > \lambda$ অর্থাৎ $x = (n_0 + 1), (n_0 + 2)$...

$\therefore f(n_0) > f(n_0 + 1) > f(n_0 + 2) >$ .... (জ)

এখন (চ), (ছ) ও (জ) এই তিনটি সম্পর্কের সমীকরণকে একত্রিত করলে পাই

$f(0) < f(1) < f(2) <$ .... $< f(n_0 - 1) = f(n_0) > f(n_0 + 1) > f(n_0 + 2)$.......

উপরের সমীকরণে দেখা যাচ্ছে দুটি সম্ভাবনার মান সর্বোচ্চ $f(n_0 - 1)$ ও $f(n_0)$

সুতরাং পয়জঁ বিভাজনটি দ্বিসংখ্যাগুরু (Bimodal) যখন λ একটি পূর্ণসংখ্যা এবং সংখ্যাগুরু মান হবে দুটি λ ও $(\lambda - 1)$।

3.5.2.4 পয়জঁ বিভাজনে ভ্রামক উৎপাদক অপেক্ষকের প্রয়োগ (Moment generating function in the poisson Distribution)

পয়জঁ বিভাজনে ভ্রামক উৎপাদক অপেক্ষকের সমীকরণ হ'ল

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}.e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}.e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

এখন, r-তম কাঁচা ভ্রামক/মূলবিন্দুর অর্থাৎ '0'-র সাপেক্ষে r-তম ভ্রামক নীচের সম্পর্কের সূত্র থেকে গণনা করা যায়।

$$\mu'_r = \mu'_r(0) = \left[\frac{d^r}{dt^r}M_X(t)\right]_{t=0}$$

পয়জঁ বিভাজনের প্রথম কাঁচা ভ্রামক : $\mu'_1 = \mu'_1(0) = \left[\frac{d}{dt}e^{\lambda(e^t-1)}\right]_{t=0}$

$$= \left[e^{\lambda(e^t-1)}.\lambda e^t\right]_{t=0} = 1.\lambda.1 = \lambda$$

পয়জঁ বিভাজনের দ্বিতীয় কাঁচা ভ্রামক : $\mu'_2 = \mu'_2(0) = \left[\frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda(e^t-1)}\right]_{t=0}$

$$= \left[\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(e^t-1)}.\lambda e^t\right)\right]_{t=0} = \lambda\left[e^{\lambda(e^t-1)}.\lambda(e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)}.e^t\right]_{t=0}$$

$$= \lambda\ (\lambda + 1)$$

$\therefore$ পয়জঁ বিভাজনের গাণিতিক গড় = $\mu = \mu'_1 = \lambda$

এবং ভেদমান = $\mu_2 = \sigma^2 = \mu'_2 - \mu_1'^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$

$\therefore$ পয়জঁ বিভাজনের গাণিতিক গড় ও ভেদমান দুইই সমান।

3.5.2.5 পয়জঁ বিভাজনে ভ্রামকদের পুনরাবৃত্তি সম্পর্কের ব্যবহার (Use of Recursion relation for moments of Poisson Distribution)

আমরা জানি পয়জঁ বিভাজনের গাণিতিক গড় = μ = λ

$\therefore$ r-তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক অর্থাৎ গাণিতিক গড়ের সাপেক্ষে r-তম ভ্রামক হবে :

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \sum_{x=0}^{\infty}(x-\lambda)^r . e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

এবার λ এর সাপেক্ষে μ_r এর অন্তরকলন (differentiation) করলে পাই

$$\frac{d\mu_r}{d\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}\left[r(x-\lambda)^{r-1}(-1)e^{-\lambda}.\lambda^x + (x-\lambda)^r\left\{e^{-\lambda}(-1)\lambda^x + e^{-\lambda}x.\lambda^{x-1}\right\}\right]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}\left[(-r)(x-\lambda)^{r-1}e^{-\lambda}.\lambda^x + (x-\lambda)^r e^{-\lambda}\lambda^{x-1}(x-\lambda)\right]$$

$$= -r\sum_{x=0}^{\infty}(x-\lambda)^{r-1}.e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!} + \frac{1}{\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}(x-\lambda)^{r+1}e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= -r\mu_{r-1} + \frac{1}{\lambda}.\mu_{r+1}$$

$$\therefore \quad \mu_{r+1} = \lambda\left[r\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{d\lambda}\right]$$

এই সমীকরণকেই পয়জঁ বিভাজনের ভ্রামকদের পুনরাবৃত্তি সম্পর্ক (Recursion relation) বলা হয়। আমাদের জানা আছে μ_0 = 1 এবং μ_1 = 0।

এবার r = 1, 2, 3, 4 ইত্যাদি বসিয়ে আমরা উচ্চতর কেন্দ্রীয় ভ্রামক নির্ণয় করতে পারি শুধুমাত্র ভ্রামকদের এই পুনরাবৃত্তি সম্পর্কের মাধ্যমে। ঐ কেন্দ্রীয় ভ্রামকদের সাহায্যে আমরা পয়জঁ বিভাজনের ভেদমান, প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক ও তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক নির্ণয় করতে পারি। (3.5.2.2 অংশ দ্রষ্টব্য)।

3.5.2.6 পয়জঁ বিভাজনের ধর্মাবলী (Properties of Poisson Distribution)

(i) পয়জঁ বিভাজন একটি বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা বিভাজন যেখানে বিচ্ছিন্ন চলক x অসীম সংখ্যক বিচ্ছিন্ন মান ধারণ করে x = 0, 1, 2, ... ∞।এই বিভাজনটির

সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক হবে $f(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, ... \propto$ এখানে λ হল বিভাজনটির একটিমাত্র স্থিতিমাপ (parameter)

(ii) পয়জঁ বিভাজনের গাণিতিক গড় = ভেদমান = λ বিভাজনটির স্থিতিমাপ।

(iii) পয়জঁ বিভাজনটি ধনাত্মক প্রতিবিষম (positively Skewed) সম্পন্ন কারণ

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} > 0 \ (\because \lambda > 0)$$

(iv) পয়জঁ বিভাজন একটি লেপ্টোকার্টিক বিভাজন। কারণ $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda} > 0 \ (\because \lambda > 0)$

(v) পয়জঁ বিভাজনের একটি অথবা দুটি সংখ্যাগুরু মান থাকতে পারে। বিভাজনটির স্থিতিমাপ (parameter) λ একটি অপূর্ণ সংখ্যা হলে একটি সংখ্যা গুরুমান পাওয়া যাবে। সংখ্যাগুরু মান হবে λ আবার λ একটি পূর্ণসংখ্যা হলে দুটি সংখ্যাগুরু মান পাওয়া যাবে। একটি সংখ্যাগুরু মান λ এবং অপরটি $(\lambda - 1)$

(vi) যদি x_1 ও x_2 দুটি স্বাধীন পয়জঁ চলক হয় এবং তাদের স্থিতিমাপ দুটি যথাক্রমে λ_1 ও λ_2 হয় তবে চলক দুটির সমষ্টি $x_1 + x_2$ একটি পয়জঁ চলক হবে যার স্থিতিমাপ (parameter) হবে $\lambda_1 + \lambda_2$. এখন এই নিয়মটি দুটির বেশী সংখ্যক স্বাধীন পয়জঁ চলকের জন্যও প্রযোজ্য হবে।

(vii) পয়জঁ বিভাজনের প্রথম চারটি কাঁচা ভ্রামক (raw moments) হ'ল

$$\mu_1' = \lambda$$

$$\mu_2' = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mu_3' = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

$$\mu_4' = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

পয়জঁ বিভাজনের প্রথম চারটি কেন্দ্রীয় ভ্রামক (Central Moments) হ'ল

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \lambda$$

$$\mu_3 = \lambda$$

$$\mu_4 = 3\lambda^2 + \lambda$$

(viii) শর্তসাপেক্ষে পয়জঁ বিভাজন দ্বিপদ বিভাজনের একটি সীমান্তরূপ।

3.5.2.7 পয়জঁ চলকের কিছু বাস্তব দৃষ্টান্ত (Real life Situation of Poisson Variable)

(i) ধরা যাক্ গড়ে প্রতি পৃষ্ঠায় ভ্রান্তি হল 1.2, তাহলে ভ্রান্তির সংখ্যা সমসম্ভব ভাবে পছন্দ করা একটি পৃষ্ঠায় পয়জঁ বিভাজন অনুসরণ করবে যার স্থিতিমাপ (parameter) $\lambda = 1.2$

অর্থাৎ বহু পৃষ্ঠা সম্পন্ন কোন পুস্তকের পৃষ্ঠা পিছু ভ্রান্তির সংখ্যা পয়জঁ বিভাজন অনুসরণ করবে।

(ii) ধরা যাক্ অফিস টাইমে একটি টেলিফোন বুথে প্রতি দুই মিনিট অন্তর গড়ে টেলিফোন কল আসার সংখ্যা হল 5। তাহলে সমসম্ভব ভাবে পছন্দ করা দুই মিনিট অন্তর টেলিফোন কলের সংখ্যা পয়জঁ বিভাজন অনুসরণ করবে যার স্থিতিমাপ $\lambda = 5$।

অর্থাৎ কোন ব্যস্ত সময়ে কোন টেলিফোন বুথে টেলিফোন বক্সে একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর টেলিফোন কল আসার সংখ্যা পয়জঁ বিভাজন অনুসরণ করবে।

(iii) কোন নামী কোম্পানী দ্বারা প্রস্তুত ত্রুটিপূর্ণ ইলেকট্রিক বাল্‌বের সংখ্যা পয়জঁ বিভাজন অনুসরণ করে।

(iv) কোন বড় শহরে বছর পিছু জন্মান্ধ শিশুর সংখ্যা পয়জঁ বিভাজন অনুসরণ করে।

উদাহরণ : 3.5.6 যদি কোন পয়জঁ বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান দুটি হয় $X = 2$ এবং 3 তবে চলকটির মান 2 অথবা 3 হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান : ধরা যাক্ পয়জঁ বিভাজনটির স্থিতিমাপ (Parameter) হল λ

আমরা জানি যখন λ একটি পূর্ণসংখ্যা তখনই সংখ্যাগুরু মান দুটি হয়।

সুতরাং $\lambda = 3$ [কারণ দুটি সংখ্যাগুরু মান হবে λ এবং $\lambda - 1$]

পয়জঁ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষক হবে $P(X = x) = \dfrac{e^{-3}.3^x}{x!}$, যখন $x = 0, 1, 2, \ldots, \infty$

এখন সম্ভাবনা $P(X = 2$ অথবা $3) = P(X=2) + P(X=3) = 2\,P(X=2)$

$$= \frac{2e^{-3}.3^2}{2!} = 9e^{-3}$$

উদাহরণ : 3.5.7 কোন কোম্পানীর উৎপাদিত ইলেকট্রিক বাল্‌বের 5% ত্রুটিপূর্ণ। 100টি বাল্‌বের একটি নমুনা নিয়ে পয়জঁ বিভাজনের সহায়তায় (i) কোনটিই ত্রুটিপূর্ণ নয়। (ii) 5টি বাল্‌ব ত্রুটিপূর্ণ হবে তার সম্ভাবনা নিরূপণ কর। [দেওয়া আছে $e^{-5} = 0.007$]

সমাধান : ধরা যাক্, নমুনায় ত্রুটিপূর্ণ বাল্‌ব পাওয়াকে আমরা সাফল্য বলে ধরব। তাহলে $P = \frac{5}{100} = 0.05$ এবং $n = 100$ (নমুনা সংখ্যা)

$\therefore$ দ্বিপদ বিভাজনের গড় মান (np) = পয়জঁ বিভাজনের গড়মান (λ) = $0.05 \times 100 = 5$

অর্থাৎ পয়জঁ বিভাজনের স্থিতিমাপ (parameter) = λ = 5

পয়জঁ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর অপেক্ষক :

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} \quad \text{যখন } x = 0, 1, 2, \ldots\ldots, \infty$$

$$= \frac{e^{-5}.5^{x}}{x!}$$

(i) যখন কোন বাল্‌বই ত্রুটিপূর্ণ নয় তখন x = 0

$$\therefore P(x = 0) = f(0) = \frac{e^{-5}.(5)^{0}}{0!} = e^{-5} = 0.007$$

(ii) যখন 5টি বাল্‌ব ত্রুটিপূর্ণ তখন x = 5

$$\therefore P(x = 5) = f(5) = \frac{e^{-5}.5^{5}}{5!} = \frac{0.007 \times 3125}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 0.182$$

3.6 অবিচ্ছিন্ন চলকের সঙ্গে যুক্ত তত্ত্বগত বিভাজন

এতক্ষণ আমরা সমসম্ভব বিচ্ছিন্ন চলকের সঙ্গে যুক্ত তত্ত্বগত বিভাজনগুলি বিশ্লেষণ করেছি। এখন সমসম্ভব অবিচ্ছিন্ন চলকের সঙ্গে যুক্ত তত্ত্বগত বিভাজন নিয়ে আলোচনা করব। এই ধরনের বিভাজন অনেকগুলি আছে। কিন্তু আমরা এখানে মূলতঃ দুটি তত্ত্বগত বিভাজন নিয়ে আলোচনা করব। (1) আয়তাকার বা সমবিভাজন (Rectangular or Uniform distribution) এবং (2) স্বাভাবিক বিভাজন বা গ্যসিয়ান বিভাজন (Normal Distribution or Gaussian Distribution)।

3.6.1 আয়তাকার বিভাজন বা সমবিভাজন (Rectangular or Uniform Distribution)

অবিচ্ছিন্ন ধরনের একচলক বিভাজনের সরলতম রূপ হল আয়তাকার (rectangular) বা সম (uniform) বিভাজন। এটির সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষকের সমীকরণ হল—

$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}$, যেখানে $\alpha \le x \le \beta$

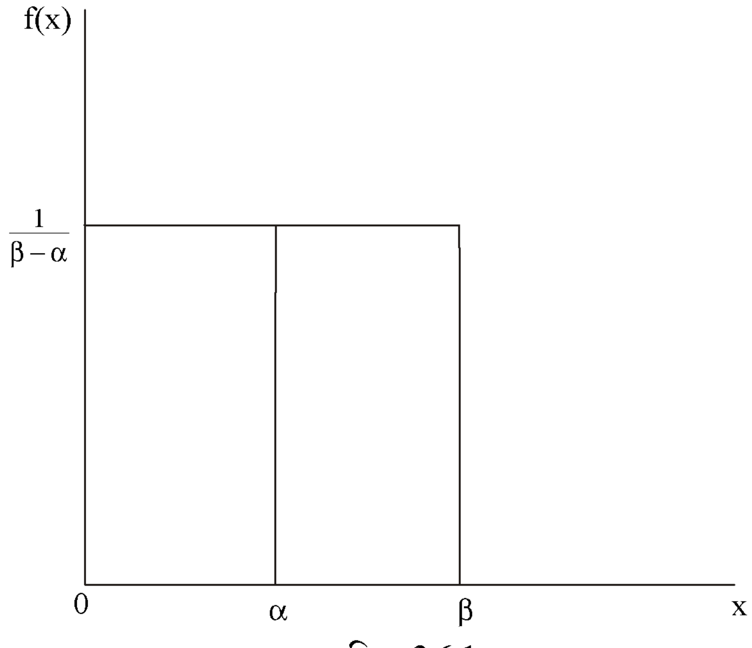
$= 0$, অন্যথায়

যেহেতু $\alpha < \beta$, সেজন্য x-এর যে কোন মানের জন্য $f(x) \ge 0$ এবং

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{1}{(\beta-\alpha)}\left\{\int_{\alpha}^{\beta} dx\right\} = \frac{1}{(\beta-\alpha)}.[x]_{\alpha}^{\beta} = \frac{(\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)} = 1$$

সুতরাং, এই সম্ভাবনা বিভাজন অপেক্ষকের সাহায্যে আমরা যে কোন অবিচ্ছিন্ন চল X এর মান (a, b) অন্তরের অন্তর্গত কোন বিশেষ অন্তর (α, β) এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারি।

এখানে $P[a \le X \le b] = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}.\int_{a}^{b} dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}$,



চিত্র : **3.6.1**

যেখানে $\alpha \le a \le b \le \beta$ এবং এই সম্ভাবনার মান কেবলমাত্র (a, b) অন্তরের দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভরশীল। এই বিভাজনকে আয়তাকার বিভাজন বলা হয় কারণ f(x) এর রেখচিত্র অঙ্কন করলে একটি আয়তক্ষেত্র পাওয়া যায়। চিত্র 3.6.1-এ x অক্ষে α ও β বিন্দু দুটির সাপেক্ষে f(x) অক্ষ অনুযায়ী

প্রাপ্ত $f(\alpha)$ ও $f(\beta)$ বিন্দুগুলিকে চারটি সরলরেখার সাহায্যে যোগ করে একটি আয়তাকার ক্ষেত্র গঠিত হয়। এই বিভাজনকে সমবিভাজন বলাও হয়ে থাকে কারণ α ও β-এর মধ্যবর্তী সমদৈর্ঘ্যের যে কোন অন্তরের মধ্যে X এর মান পাওয়ার সম্ভাবনার মান সর্বদা সমান থাকে।

3.6.1.1 আয়তাকার বিভাজনের বৈশিষ্ট্যসমূহ (Characteristics of Rectangular Distribution)

আয়তকার বা সমবিভাজন $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$-এর সাপেক্ষে প্রতিসম (Symmetrical)

সুতরাং গাণিতিক গড় = মধ্যমা = $\frac{\alpha+\beta}{2}$

μ_2 = ভেদমান = $\sigma^2 = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2$

$\mu_3 = 0$; $\mu_4 = \frac{1}{80}(\beta-\alpha)^4$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0;\ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 1.8$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = 0;\quad \gamma_2 = \beta_2 - 3 = -1.2 < 0$$

সুতরাং উপরের ফলগুলি থেকে বোঝা যাচ্ছে যে আয়তাকার বিভাজনটি প্রতিসম (symmetric) এবং আয়তাকার বিভাজনটি প্লেটিকার্টিক (platykurtic)।

এবার আয়তাকার বিভাজনটির α বিন্দুর সাপেক্ষে r-তম ভ্রামক হবে

$$\mu_r'(\alpha) = E(X-\alpha)^r = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\alpha)^r f(x)dx = \frac{1}{(\beta-\alpha)}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^r dx$$

$$= \frac{1}{(\beta-\alpha)}\int_0^{\beta-\alpha} t^r dt,\quad \text{যেখানে } t = (x-\alpha)$$

$$= \frac{1}{(\beta-\alpha)}\cdot\left[\frac{t^{r+1}}{r+1}\right]_0^{\beta-\alpha} = \frac{1}{(\beta-\alpha)}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^{r+1}}{r+1} = \frac{(\beta-\alpha)^r}{r+1} \quad \ldots\ldots\ (I)$$

এখন সমীকরণ (I) এ r = 1, 2, 3, ... ইত্যাদি বসিয়ে $\mu_1'(\alpha), \mu_2'(\alpha)$ পাওয়া যাবে।

$\therefore$ $E(X - \alpha) = \mu_1'(\alpha) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$

সুতরাং, $\mu = E(X) = \int_\alpha^\beta \frac{x dx}{(\beta-\alpha)} = \frac{1}{(\beta-\alpha)}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{(\beta-\alpha)}.\left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right)$

$$= \frac{1}{(\beta-\alpha)}.\frac{(\beta^2-\alpha^2)}{2} = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \mu_2 = \mu_2'(\alpha) - \mu_1'^2(\alpha)$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^2}{3} - \frac{(\beta-\alpha)^2}{4} = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2$$

$\mu_3 = \mu_3'(\alpha) - 3\mu_2'(\alpha)\mu_1'(\alpha) + 2\mu_1'^3(\alpha)$

$$= (\beta-\alpha)^3\left(\frac{1}{4} - 3.\frac{1}{3}.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{8}\right) = 0$$

এবং $\mu_4 = \mu_4'(\alpha) - 4\mu_3'(\alpha)\mu_1'(\alpha) + 6\mu_2'(\alpha)\mu_1'^2(\alpha) - 3\mu_1'^4(\alpha)$

$$= (\beta-\alpha)^4\left(\frac{1}{5} - 4.\frac{1}{4}.\frac{1}{2} + 6.\frac{1}{3}.\frac{1}{4} - 3.\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{80}(\beta-\alpha)^4$$

$\therefore$ $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0$ এবং $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{144}{80} = \frac{9}{5} = 1.8$

সুতরাং, $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = 0$

এবং $\gamma_2 = \beta_2 - 3 = -1.2$

অর্থাৎ আয়তাকার বিভাজনটি প্রতিসম (Symmetric) এবং প্লেটিকার্টিক (platykurtic)

উদাহরণ : 3.6.1 আয়তাকার বিভাজন (1, 3)-এর চতুর্থক পার্থক্যের (Quartile deviation) মান নির্ণয় কর।

সমাধান : বিভাজনটির সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক (p.d.f) হবে

$$f(x) = \frac{1}{2}, \qquad 1 < x < 3$$

$$= 0, \qquad \text{অন্যথায়}$$

যদি Q_1 এবং Q_3 বিভাজনটির প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক হয়, তবে

$$F(Q_1) = P(X \le Q_1) = \frac{1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

এবং $F(Q_3) = P(X \le Q_3) = \frac{3}{4}$ .... (ii)

(i) থেকে পাওয়া যায় $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{4}$ অথবা $\frac{1}{2}\int_{1}^{Q_1} dx = \frac{1}{4}$

অথবা, $[X]_1^{Q_1} = \frac{1}{2}$ অথবা, $Q_1 - 1 = \frac{1}{2}$ $\therefore Q_1 = \frac{3}{2}$

(ii) থেকে পাওয়া যায় $\frac{1}{2}\int_{1}^{Q_3} dx = \frac{3}{4}$ অথবা, $[X]_1^{Q_3} = \frac{3}{2}$

অথবা, $Q_3 - 1 = \frac{3}{2}$ $\quad\therefore\quad Q_3 = \frac{5}{2}$

সুতরাং চতুর্থক পার্থক্য (Quartile deviation) = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}$

3.6.2 স্বাভাবিক বিভাজন বা গ্যসিয়ান বিভাজন (Normal Distribution or Gaussian Distribution)

কোনো সমসম্ভব অবিচ্ছিন্ন চলক 'x' স্বাভাবিক বিভাজন অনুসরণ করবে যখন তার বিভাজনের সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক (probability density function or, p.d.f) এর ধরন হবে নীচের মতন :

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\Pi}} e^{-h^2(x-a)^2} \quad \ldots\ldots(1), \qquad -\infty < x < +\infty$$

এখানে 'h' এবং 'a' বিভাজনটির দুইটি স্থিতিমাপ (parameter)

যখন a = μ (বিভাজনের গড় মান) এবং $h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}>0$ (σ = বিভাজনের সমকপার্থক্য)

এখন (1) সমীকরণে a = μ এবং $h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ বসিয়ে পাই

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad ....(2), \quad -\infty < x < +\infty$$

এখানে স্থিতিমাপ দুটি হল গড়মান μ এবং সমক পার্থক্য σ

সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষকের এই ধরণটি বেশী ব্যবহৃত হয়।

(2) নং সমীকরণ থেকে অনায়াসেই বলা যায় যে x চলকের যে কোনো মানের জন্য f(x) এর মান সর্বদাই ধনাত্মক হবে।

আবার, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad \text{[আমরা } t=\frac{x-\mu}{\sigma} \text{ বসিয়ে পাই এবং } dx=\sigma dt\text{]}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad [\because e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ একটি শূন্য কেন্দ্রীক সুষম (symmetric) অপেক্ষক}]$$

এখন, $\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\infty}e^{-y}.y^{-\frac{1}{2}}dy$

[আমরা $y=\frac{t^2}{2}$ বসিয়ে পাই এবং $t=\sqrt{2}.y^{\frac{1}{2}}$ থেকে পাই $dt=\sqrt{2}.\frac{1}{2}.y^{-\frac{1}{2}}dy$ অথবা $dt=\frac{1}{\sqrt{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy$]

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\Pi}{2}} \left[\because \overline{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\Pi}\right]$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

3.6.2.1 স্বাভাবিক বিভাজনের ধর্মাবলী (Properties of Normal Distribution)

1. স্বাভাবিক বিভাজনটি গড় মান μ কে কেন্দ্র করে প্রতিসম (symmetric)
2. বিভাজনটির গড় মান = মধ্যমা = সংখ্যাগুরু মান = μ
3. বিভাজনটির ভেদমান var(x) = μ_2 = σ^2
4. চতুর্থকগুলি মধ্যক থেকে সমদূরত্বসম্পন্ন।

   $Q_1 = \mu - 0.67\sigma, \quad Q_3 = \mu + 0.67\sigma \quad \therefore$ চতুর্থক পার্থক্য = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = 0.67\sigma$

   সুতরাং $\frac{\text{চতুর্থক পার্থক্য}}{\text{সমক পার্থক্য}} = \frac{0.67\sigma}{\sigma} = 0.67 = \frac{67}{100}$

5. বিভাজনটির আকৃতি ঘণ্টার মত।
6. $\mu_3 = 0, \ \mu_4 = 3\sigma^4$
7. $\beta_1 = 0, \ \beta_2 = 3; \ \gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = 0, \ \gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0$ তাই বিভাজনটি প্রতিসম এবং মেসোকার্টিক (mesokurtic)
8. স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখার বক্রতা পরিবর্তনের বিন্দু দুটি হ'ল $x = \mu \pm \sigma$।

   প্রমাণ : বক্রতা পরিবর্তনের বিন্দু দুটি নীচের সমীকরণের সমাধান। $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0$

   এখানে $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \cdot \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right).2(x-\mu)$

$$= \frac{-(x-\mu)}{\sigma^3\sqrt{2\Pi}} . e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\Pi}}\left[1.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} + (x-\mu)e^{-\frac{1}{2\sigma}(x-\mu)^2}.\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right).2(x-\mu)\right]$$

$$= -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\Pi}}.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\left[1-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\Pi}}\left\{(x-\mu)^2-\sigma^2\right\}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

সুতরাং $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0$ থেকে আমরা পাই

$(x - \mu)^2 - \sigma^2 = 0$ অথবা, $x - \mu = \pm\sigma$ অথবা, $x = \mu \pm \sigma$

9. একটি স্বাভাবিক বিভাজন $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ প্রমিত স্বাভাবিক বিভাজনে (Standard Normal Distribution) রূপান্তরিত হলে $Z \sim N(0, 1)$ হবে যখন $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

প্রমাণ : $E(Z) = E\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}.[E(x)-E(\mu)] = \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu] = 0$

আবার, $Var(Z) = E\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2 = \frac{1}{\sigma^2}E[x-\mu]^2$

$$= \frac{1}{\sigma^2}E[x-E(x)]^2 = \frac{1}{\sigma^2}.\sigma^2 = 1$$

10. প্রমিত স্বাভাবিক চলক (Standard Normal Variable) Z-এর সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক হবে

$$\phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}, \; -\infty < z < \infty$$

11. **স্বাভাবিক বিভাজনের গড় মান**

গড়মান $= E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt\left[t=\frac{x-\mu}{\sigma}\text{ বসিয়ে পাই}\right]$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \frac{2\mu}{\sqrt{2\Pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+0$$

[যেহেতু $e^{-\frac{t^2}{2}}$ একটি জোড় অপেক্ষক এবং $te^{-\frac{t^2}{2}}$ একটি বিজোড় অপেক্ষক]

$$= \frac{2\mu}{\sqrt{2\Pi}}.\sqrt{\frac{\Pi}{2}}\left[\because \int_{0}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{\Pi}{2}}\right]$$

$= \mu$

স্বাভাবিক বিভাজনের মধ্যমা (μ_e)

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{\mu}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx=\frac{1}{2}$$

অথবা, $\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\mu_e-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}$, $\left[\text{যেখানে } t=\frac{x-\mu}{\sigma}\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\left[\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\Pi}{2}}\right]$$

উপরের সমীকরণের সমান চিহ্নের দুই দিক তুলনা করলে লিখতে পারি

$\therefore \frac{\mu_e - \mu}{\sigma} = 0$ অর্থাৎ $\mu_e = \mu$ সুতরাং মধ্যমা $= \mu$

স্বাভাবিক বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান

এখানে সংখ্যাগুরু মান (Mode) টিও μ এর সঙ্গে সমান। এর কারণ হল

$f'(\mu) = 0$ এবং $f''(\mu) < 0$

এছাড়া $(x - \mu)^2$ যখন বাড়তে থাকে f(x) তখন কমতে থাকে। অর্থাৎ x এবং μ-এর দূরত্ব যখন বৃদ্ধি পেতে থাকে এবং μ-এর দুই দিকের (direction) জন্য যখন এটা ঘটে তখন দুই ক্ষেত্রেই f(x)-এর মান কমতে থাকে। ফলে সংখ্যাগুরু মান μ এর সমান হয়।

12. স্বাভাবিক বিভাজনের ক্ষেত্রফল বিষয়ক বৈশিষ্ট্য

$P[(\mu - \sigma) < x < (\mu + \sigma)] = 0.6826$

$P[(\mu - 2\sigma) < x < (\mu + 2\sigma)] = 0.9544$

$P[(\mu - 3\sigma) < x < (\mu + 3\sigma)] = 0.9973$

$(\mu + 3\sigma) - (\mu - 3\sigma) = 6\sigma$ কে স্বাভাবিক বিভাজনের কার্যকর সীমা (effective range) বলা হয়, কারণ চলকের 99.7% মানগুলি এই সীমার অন্তর্ভুক্ত।

13. স্বাভাবিক বিভাজন দ্বিপদ বিভাজন (Binomial Distribution) ও পয়জঁ বিভাজনের (Poisson Distribution) আসন্ন রূপ (Limiting form)।

3.6.2.2 স্বাভাবিক বিভাজনের ভ্রামকসমূহ (Moments of Normal Distribution)

স্বাভাবিক বিভাজনের অবিচ্ছিন্ন চলক x এর r-তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক।

$$\mu_r = E(x-a)^r = E(x-\mu)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)$$

এখানে, $a = \mu =$ গড় মান

$$\therefore \ \mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r . \frac{h}{\sqrt{\Pi}} e^{-h^2(x-\mu)^2} dx$$

মনে করা যাক, $h(x-\mu) = u \quad \therefore \ x-\mu = \frac{u}{h}$ অথবা, $hdx = du$

$$\therefore \ \mu_r = \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u}{h}\right)^r . e^{-u^2} . du = \frac{1}{h^r\sqrt{\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^r . e^{-u^2} du$$

$$\therefore \quad \mu_r = \frac{1}{h^r\sqrt{\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(u)^r . e^{-u^2} + (-u)^r . e^{-u^2}\right] du,$$ এটি একটি বিজোড় অপেক্ষক।

$$\mu_r = \frac{1}{h^r\sqrt{\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^r . e^{-u^2} du [(-1)^r + (1)^r] \ .... \ (I)$$

ধরা যাক্ $r = 2s + 1$, এখন $s = 0, 1, 2, 3, ...$ (I) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\mu_{2s+1} = \frac{1}{h^{2s+1}\sqrt{\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2s+1} . e^{-u^2} du \left[(-1)^r + (1)^r\right] = 0$$

যখন $s = 0, 1, 2, 3, ...$

সুতরাং, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = ... = 0$

অর্থাৎ স্বাভাবিক বিভাজনের সমস্ত বিজোড় মাত্রাযুক্ত কেন্দ্রীয় ভ্রামকগুলির মান শূন্য।

স্বাভাবিক বিভাজনের প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক হল

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{0}{\mu_2^{3/2}} = 0$$

অর্থাৎ প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $\gamma_1 = 0$ সুতরাং স্বাভাবিক বিভাজনটি প্রতিসম (symmetric)। এখন

বোঝা গেল যে একটি প্রতিসম বিভাজনের সকল বিজোড় মাত্রাযুক্ত কেন্দ্রীয় ভ্রামকের মান শূন্য হয়। এখন সমীকরণ (I) এ r = 2s, s = 1, 2, 3, 4 বসিয়ে জোড় মাত্রাযুক্ত কেন্দ্রীয় ভ্রামকগুলি পাওয়া যাবে।

$$\mu_{2s} = \frac{1}{h^{2s}\sqrt{\Pi}}\int_0^{\infty} u^{2s}e^{-u^2}\left[(1)^{2s} + (-1)^{2s}\right]du$$

$$= \frac{1}{h^{2s}\sqrt{\Pi}}\int_0^{\infty} u^{2s}e^{-u^2}.2du = \frac{1}{h^{2s}\sqrt{\Pi}}\int_0^{\infty} u^{2s}e^{-u^2}.du$$

মনে করা যাক $u^2 = z$ $\therefore$ $2udu = dz$ অথবা $du = \frac{dz}{2u} = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$

$$\therefore\ \mu_{2s} = \frac{2}{h^{2s}\sqrt{\Pi}}\int_0^{\infty} z^s e^{-z}\frac{dz}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{h^{2s}\sqrt{\Pi}}\int_0^{\infty} e^{-z}.z^{s-\frac{1}{2}}.dz$$

$$= \frac{1}{h^{2s}\sqrt{\Pi}}\int_0^{\infty} e^{-z}z^{\left(s+\frac{1}{2}\right)-1}dz = \frac{1}{h^{2s}\sqrt{\Pi}}\left\lceil\left(s+\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$= \frac{1}{h^{2s}\sqrt{\Pi}}\left(s+\frac{1}{2}-1\right)\left(s+\frac{1}{2}-2\right)\left(s\frac{1}{2}-3\right)\ldots\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\left\lceil\left(\frac{1}{2}\right)\right.$$

কারণ, $\lceil n = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$ সুতরাং $\lceil s + \frac{1}{2} = \int_0^{\infty} e^{-z}z^{\left(s+\frac{1}{2}\right)-1}dz$

আরও জানি $\lceil n = (x-1)!$ সুতরাং $\lceil s + \frac{1}{2} = \left(s + \frac{1}{2} - 1\right)!$

$$\therefore\ \mu_{2s} = \frac{1}{h^{2s}\sqrt{\Pi}}\left(\frac{2s-1}{2}\right)\left(\frac{2s-3}{2}\right)\left(\frac{2s-5}{2}\right)\ldots\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\Pi}\quad\left(\text{কারণ } \lceil\frac{1}{2} = \sqrt{\Pi}\right)$$

অথবা, $\mu_{2s} = \frac{1}{h^{2s}} \cdot \frac{(2s-1)(2s-3)(2s-5)..........3.1}{2^S}$ ....(II)

এখন সমীকরণ (II) তে s = 1 বসালে পাওয়া যাবে

$\mu_2 = \frac{1}{h^2}\left[\frac{(2-1)}{2}\right] = \frac{1}{2h^2}$ $\therefore$ $\mu_2 = \sigma^2$ = ভেদমান = $\frac{1}{2h^2}$

$\therefore$ $h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$ অথবা, $h = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} > 0$

একইভাবে S = 2 সমীকরণ (II) এ বসিয়ে পাই

$$\mu_4 = \frac{1}{h^4}\left[\frac{(4-1)(4-3)}{2^2}\right] = \frac{1}{h^4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4h^4}$$

$$\therefore \quad \mu_4 = \frac{3}{4h^4} = \frac{3}{4(h^2)^2} = \frac{3}{4\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^2} = \frac{3}{4}.4\sigma^4 = 3\sigma^4$$

অর্থাৎ $\mu_4 = 3\sigma^4$

স্বাভাবিক বিভাজনের তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক আমরা জানি

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{3\sigma^4}{(\sigma^2)^2} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3$$

= 3 – 3 = 0

সুতরাং $\gamma_2 = 0$ অর্থাৎ স্বাভাবিক বিভাজনটি মেসোকার্টিক (Mesokurtic)।

3.6.2.3 স্বাভাবিক বিভাজনের ভ্রামক উৎপাদক অপেক্ষক (Moment generating function of Normal Distribution)

$$M_X(t) = E\left(e^{tx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

$$= e^{tu}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-\mu)}.\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx$$

$$= e^{t\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}.e^{-\frac{1}{2\sigma 2}\{(x-\mu)^2-2\sigma^2.t(x-\mu)\}}dx$$

$$= e^{t\mu}.e^{t^2\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x-\mu)^2-2.(x-\mu).t\sigma^2+t^2\sigma^4\right\}}dx$$

$$= e^{t\mu+t^2\frac{\sigma^2}{2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu-t\sigma^2)^2}dx\right]$$

$= e^{t\mu+t^2\frac{\sigma^2}{2}}$ [স্বাভাবিক বিভাজনের সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক যখন গড় মান = μ $+t\sigma^2$ এবং সমক পার্থক্য (S.D)= σ]

এখন মূল বিন্দুটিকে সরিয়ে μ-এর জায়গায় নিয়ে এলে লিখতে পারি

$$M_{x-\mu}(t) = E\left[e^{t(x-\mu)}\right] = e^{-t\mu}.E(e^{tx})$$

$$= e^{-t\mu}M_x(t)$$

$$= e^{t^2\frac{\sigma^2}{2}}$$

অথবা, $M_{x-\mu}(t) = 1+\frac{1}{1!}.\frac{t^2\sigma^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)^r+\cdots\cdots$

সুতরাং, $\mu_{2r+1} = 0$ [যেহেতু উপরের সমীকরণের সমান চিহ্নের ডানদিকে t-এর বিজোড় ঘাত (odd power) সম্বলিত কোন অংশ নেই]

এবং $\mu_{2r} = \frac{(2r)!}{r!2^r}.\sigma^{2r}$ [এটি হল $\frac{t^{2r}}{(2r)!}$-এর সহগ (Co-efficient)]

$$= (2r - 1)(2r - 3) \ldots\ldots\ldots 3.1.\sigma^{2r}$$

এখন r-এর জায়গায় (r – 1) বসিয়ে পাই

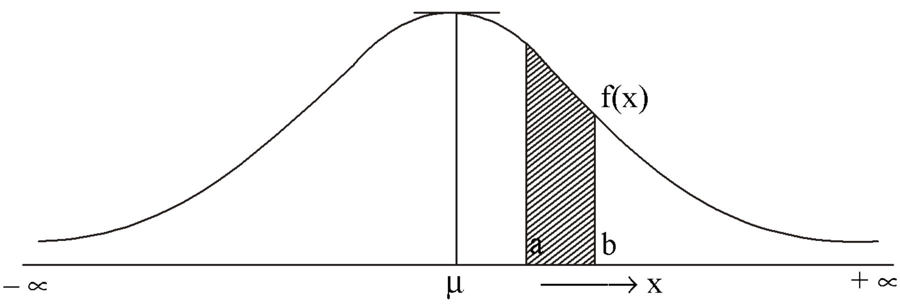
$$\mu_{2r-2} = (2r-3)(2r-5)\ldots\ldots\ldots 3.1.\sigma^{2r-2}$$

$$\therefore \ \mu_{2r} = \sigma^2(2r-1)\mu_{2r-2}$$

এটি হ'ল স্বাভাবিক বিভাজনের ভ্রামকগুলির মধ্যে পৌনঃপুনিক সম্পর্ক যা ভ্রামক নির্ণয়ে ব্যবহৃত হয়।

3.6.2.4 স্বাভাবিক বিভাজনের ক্ষেত্রফল বিষয়ক বৈশিষ্ট্য (Area property of a Normal Distribution) ।

স্বাভাবিক বিভাজন নির্দেশ করে যে রেখা আঁকা হয় তাকে স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখা বলে।



চিত্র : 3.6.2

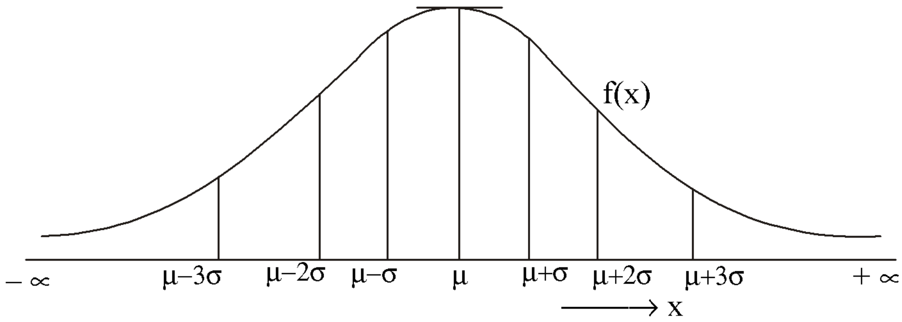
এই রেখাটির দ্বারা বেষ্টিত x অক্ষের সঙ্গে ($-\infty < x < +\infty$) যে ক্ষেত্র উৎপাদিত হয় তার মান 1 (বা 100%) অর্থাৎ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

যদি একটি স্বাভাবিক চলক x (যার গড় মান μ এবং সমকপার্থক্য σ) একটি নির্দিষ্ট সীমার [a থেকে b, যেখানে a < b] মধ্যে অবস্থান করে, তবে ঐ x-এর সমস্ত মানের সম্ভাবনা

$$P[a \le x \le b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

উপরের চিত্র 3.6.2-এ ছায়াঞ্চলটিকে নির্দেশ করে।



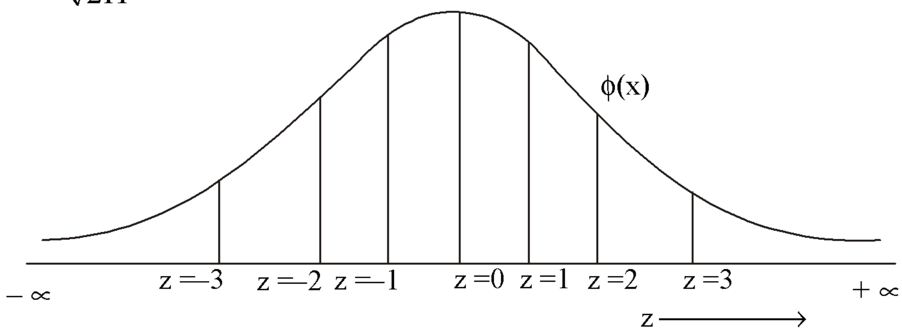
চিত্র : 3.6.3 স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখা

উপরের চিত্র 3.6.3 থেকে প্রতীয়মান হয় যে স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখাটি $x = \mu$ অর্থাৎ গড় মানের উপর লম্বটিকে কেন্দ্র করে প্রতিসম (symmetrical) ও ঘণ্টার আকৃতিতে উপস্থাপিত হয়। রেখাটি বক্রতা পরিবর্তনের বিন্দু দুটির অর্থাৎ $(x - \sigma)$ ও $(x + \sigma)$-এর ভিতরের দূরত্বের মধ্যে উপরের দিক থেকে উত্তল এবং ঐ বিন্দু দুটির বাইরে অবতল।

ধরা যাক, z একটি প্রমাণ স্বাভাবিক চলক এবং $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ তাহলে, $\frac{x-\mu}{\sigma}$ বা $z \sim N$ $(0, 1)$

z-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক (p.d.f) হ'ল

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}, \quad -\infty < z < +\infty$$



চিত্র : 3.6.4 প্রমিত স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখা

চিত্র 3.6.4-তে z একটি প্রমাণ স্বাভাবিক চলক (যার সঙ্গে x স্বাভাবিক চল)-এর একটি রৈখিক সম্বন্ধ আছে।) যার পরিসংখ্যা রেখাটি হবে x-এর পরিসংখ্যা রেখার (চিত্র 3.6.3) একেবারে অনুরূপ।

যখন $x = \mu$, তখন $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = 0 \quad (\because \sigma > 0)$

যখন $x = \mu + \sigma$ তখন $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sigma} = 1$

যখন $x = \mu - \sigma$ তখন $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} = \dfrac{-\sigma}{\sigma} = -1$

যখন $x = \mu + 2\sigma$ তখন $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma} = \dfrac{2\sigma}{\sigma} = 2$

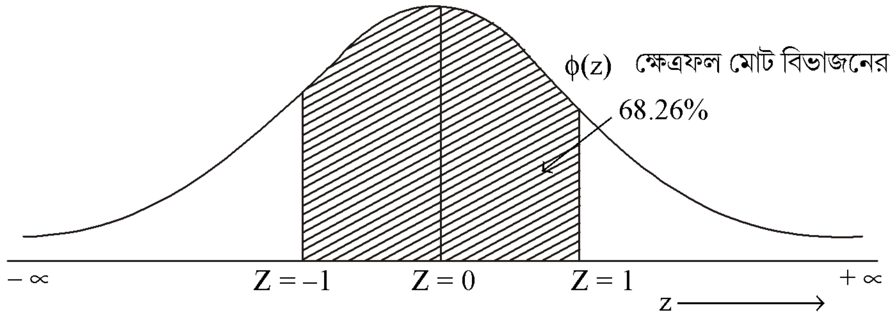
যখন $x = \mu - 2\sigma$ তখন $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma} = \dfrac{-2\sigma}{\sigma} = -2$

যখন $x = \mu + 3\sigma$ তখন $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma} = \dfrac{3\sigma}{\sigma} = 3$

যখন $x = \mu - 3\sigma$ তখন $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma} = \dfrac{-3\sigma}{\sigma} = -3$

প্রমিত স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখাবেষ্টিত ও $z = -1$ এবং $z = 1$ বিন্দুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের মধ্যের ক্ষেত্রফলটি বিভাজনের মোট ক্ষেত্রফলের 68.26% হবে। বিভাজনের পরিসংখ্যা বেষ্টিত মোট ক্ষেত্রফল সর্বদাই 100% ধরা হয়।

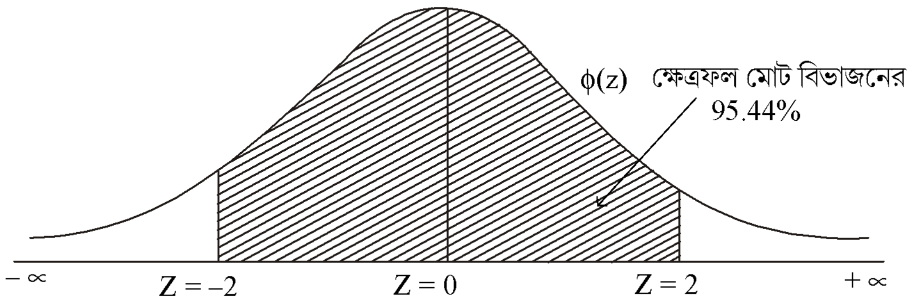
নীচের চিত্রে (চিত্র : 3.6.5) বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখা বেষ্টিত এবং $z = -1$ বিন্দু ও $z = 1$ বিন্দু দুটির উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রফলটি ছায়াঞ্চল হিসাবে দেখানো হয়েছে।



চিত্র : 3.6.5

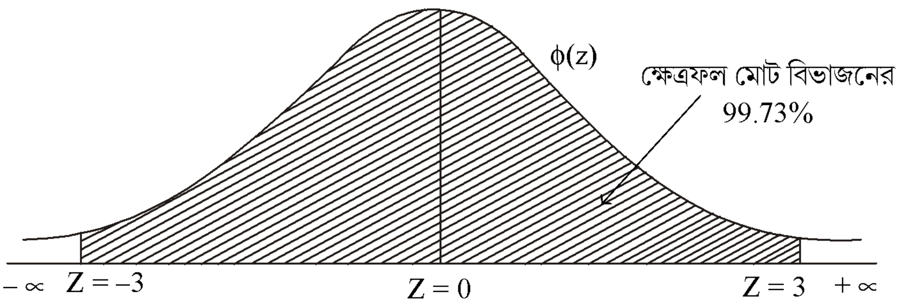
অনুরূপভাবে, বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখা বেষ্টিত ও $z = -2$ এবং $z = 2$ বিন্দুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত

লম্বদ্বয়ের মধ্যের ক্ষেত্রফলটি আবার নীচের চিত্রে ছায়াঞ্চল হিসাবে দেখানো হয়েছে। এটি বিভাজনের মোট ক্ষেত্রফলের 95.44% হবে।



চিত্র : 3.6.6

একইভাবে বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখাবেষ্টিত ও $Z = -3$ এবং $Z = 3$ বিন্দুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের মধ্যের ক্ষেত্রফলটি নীচের চিত্রে ছায়াঞ্চল হিসাবে দেখানো হয়েছে যা বিভাজনের মোট ক্ষেত্রফলের 99.73% হবে। এই ক্ষেত্রটিকে অর্থাৎ $Z = \pm 3$ ব্যবধানটিকে প্রমিত স্বাভাবিক বিভাজনের কার্যকরী সীমা (effective range) বলা হয়।



চিত্র : 3.6.7

এর বাইরে মোট বিভাজনের মাত্র 0.27% ক্ষেত্রফল উদ্বৃত্ত থাকে।

x একটি সমসম্ভব অবিচ্ছিন্ন চলক যার পরিসংখ্যা বিভাজনটি ধরা যাক স্বাভাবিক বিভাজনের রূপ পরিগ্রহ করেছে, যার গড় মান μ এবং সমক পার্থক্য σ। এখন ঐ চলক যদি $(\mu - \sigma)$ এবং $(\mu + \sigma)$ এই দুই সীমার মধ্যে অবস্থান করে তবে, তার সম্ভাবনা হবে :

$$P[(\mu-\sigma) < x < (\mu+\sigma)] = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\,dx$$

অথবা x-এর সঙ্গে রৈখিক সমীকরণে আবদ্ধ z, একটি প্রমাণ স্বাভাবিক চলক যার প্রমিত স্বাভাবিক বিভাজনের গড়মান ‘0’ এবং সমক পার্থক্য ‘1’। এখন ঐ চলক Z তার দুই সীমা $z = -1$ এবং $z = +1$-এর মধ্যে অবস্থানের সম্ভাবনা হবে—

$$P[-1 < Z < +1] = \int_{-1}^{+1} \phi(Z)\,dz$$

এখানে এই দুই সম্ভাবনাই এক হবে। এই সম্ভাবনাকেই আমরা ক্ষেত্রফল বলে জেনেছি যেটা চিত্র 3.6.5-এ ছায়াঞ্চল হিসাবে দেখানো হয়েছে। অর্থাৎ

$P[(\mu - \sigma) < x < (\mu + \sigma)] = P[-1 < Z < +1] = 0.6826$

এইভাবে $P[(\mu - 2\sigma) < x < (\mu + 2\sigma)] = P[-2 < Z < +2] = 0.9544$

এবং $P[(\mu - 3\sigma) < x < (\mu + 3\sigma)] = P[-3 < Z < +3] = 0.9973$

আর $P[(x \geq \mu + 3\sigma$ ও $x \leq \mu - 3\sigma)] = P[Z \geq +3$ ও $Z \leq -3] = 0.0027$

$Z \sim N(0, 1)$ কে প্রমাণ স্বাভাবিক চলক বলা হয় যার সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$\phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < +\infty$$

এখন $Z = k$ মানের জন্য তার কোটি (ordinate) $\phi(k)$ দিয়ে এবং $Z \leq k$-এর সম্ভাবনা মান অর্থাৎ $P[Z \leq k] = \Phi(k)$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ Z-এর মান k হওয়ার সম্ভাবনা কত, সেটা $\phi(k)$ দিয়ে বোঝা যায় এবং Z-এর মান $-\infty$ থেকে k বিন্দু পর্যন্ত ব্যবধানের মধ্যে থাকার সম্ভাবনা কত, সেটা $\Phi(k)$ দিয়ে বোঝা যাবে। সংখ্যাতত্ত্বের তালিকা (Statistical Tables) থেকে $\phi(k)$ এবং $\Phi(k)$ এর মান পাওয়া যায়। কিন্তু ঐ তালিকায় $\phi(k)$ এবং $\Phi(k)$-এর মানগুলি শুধুমাত্র k-এর ধনাত্মক (positive) মানের সাপেক্ষে দেওয়া থাকে। কিন্তু ক্ষেত্রফল গণনায় অসুবিধা হয় না কারণ পরিসংখ্যা দ্বারা বেষ্টিত $Z = -\infty$ থেকে $Z = -k$ ব্যবধানের ক্ষেত্রফল এবং $Z = k$ থেকে $Z = \infty$ ব্যবধানের ক্ষেত্রফল একই হয় কারণ স্বাভাবিক বিভাজনটি সর্বদাই প্রতিসম।

অর্থাৎ $$\int_{-\infty}^{-k} \phi(Z)\,dz = \int_{k}^{\infty} \phi(Z)\,dz$$

বিভাজনটি যেহেতু প্রতিসম তাই আমরা লিখতে পারি—

$\Phi(-Z) = 1 - \Phi(Z)$

কেননা, $\Phi(-Z) + \Phi(Z) = 1$

অর্থাৎ [পরিসংখ্যা রেখা বেষ্টিত $Z = -k$-এর বামদিকের ক্ষেত্রফল]

= [পরিসংখ্যা রেখা বেষ্টিত $Z = k$-এর ডানদিকের ক্ষেত্রফল]

এখানে, $\Phi(Z) = \int_{-\infty}^{Z} \phi(Z)dz$

এখন ধরা যাক্ $\Phi(Z)$ = Z-এর উপর অঙ্কিত কোটির বামদিকের প্রমাণ স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা বেষ্টিত ক্ষেত্রফল = $\int_{-\infty}^{z} \phi(Z)dz$

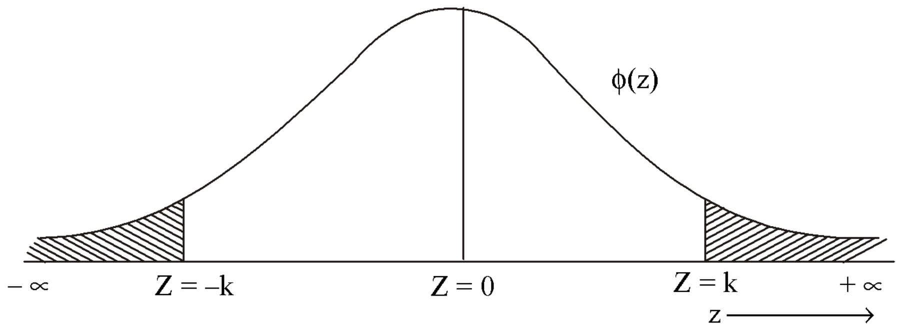
$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

আবার, $\Phi(-Z)$ = $-Z$-এর উপর অঙ্কিত কোটির (ordinate) বামদিকের প্রমাণ স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখাবেষ্টিত ক্ষেত্রফল = $\int_{-\infty}^{-z} \phi(Z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{-z} e^{-\frac{1}{2}z^2} .dz$ = Z -এর উপর অঙ্কিত কোটির ডানদিকের প্রমাণ স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখাবেষ্টিত ক্ষেত্রফল

$$\therefore \; \Phi(Z) = 1 - \Phi(-Z) = 1 - \int_{-\infty}^{-z} \phi(Z)dz$$

কারণ $\phi(Z)$ পরিসংখ্যা রেখাটি প্রতিসম।

সুতরাং বোঝা গেল যে Z-এর কোনো একটি নির্দিষ্ট মান $Z = k$ হলে, $\Phi(-k) = 1 - \Phi(k)$ হবে এবং $\phi(k) = \phi(-k)$ হবে। চিত্রের সাহায্যে এই সম্পর্কটি দেখানো হল (চিত্র 3.6.7)



চিত্র : 3.6.8 : $\Phi(-k) = 1 - \Phi(k)$

উদাহরণ : 3.6.2 কোনা ড্রাই সেল ব্যাটারীর 100টি নমুনা পরীক্ষা করে দেখা গেল ব্যাটারীগুলির গড় আয়ু $\mu = 12$ ঘণ্টা ও সমক পার্থক্য $\sigma = 3$ ঘণ্টা। তথ্যগুলি স্বাভাবিক বিভাজন অনুসরণ করে ধরে নিয়ে ব্যাটারীগুলির কত শতাংশের আয়ু

(i) 15 ঘণ্টার বেশি

(ii) 6 ঘণ্টার কম

(iii) 10 থেকে 14 ঘণ্টার মধ্যে হবে?

সমাধান : এখানে ব্যাটারীর আয়ু হ'ল একটি সমসম্ভব অবিচ্ছিন্ন চলক (ধরা যাক্ x) যা স্বাভাবিক বিভাজন অনুসরণ করে। এখানে গড় মান $\mu = 12$ ঘণ্টা ও সমক পার্থক্য $\sigma = 3$ ঘণ্টা

$\therefore$ আমরা লিখতে পারি $x \sim N(\mu = 12, \sigma = 3)$

ধরা যাক্, Z একটি প্রমাণ স্বাভাবিক চলক যেটি একটি প্রমিত স্বাভাবিক বিভাজন অনুসরণ করে যার গড় মান $\mu_1 = 0$ এবং সমক পার্থক্য $\sigma_1 = 1$

অর্থাৎ $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-12}{3}$ এবং $Z \sim N(0, 1)$

(i) এখানে সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হবে $P(x > 15)$

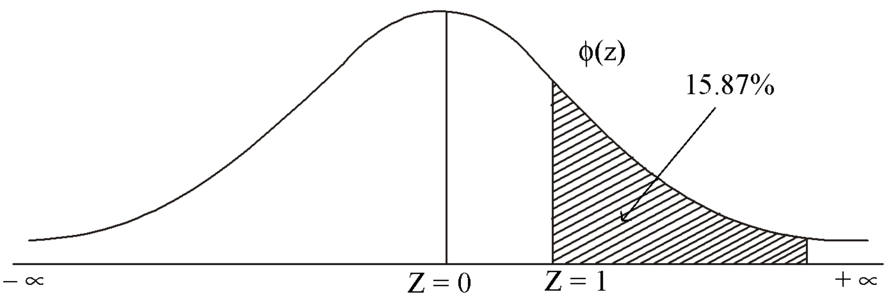
$$P(x > 15) = P\left[\frac{x-12}{3} > \frac{15-12}{3}\right] = P[Z > 1]$$

$$= 1 - P(Z \le 1) = 1 - \int_{-\infty}^{1} \phi(Z)\,dz$$

$= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 = 15.87\%$

[সংখ্যাতত্ত্ব তালিকা (Statistical Table) থেকে পাই $\Phi(1) = 0.8413$]

অর্থাৎ 15.87% ব্যাটারীর আয়ু 15 ঘণ্টার বেশি।



চিত্র : 3.6.9

ছবিতে এই শতাংশটি ছায়াঞ্চল হিসাবে দেখানো হয়েছে

(ii) এখানে ব্যাটারীগুলির 6 ঘণ্টার কম আয়ু হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ

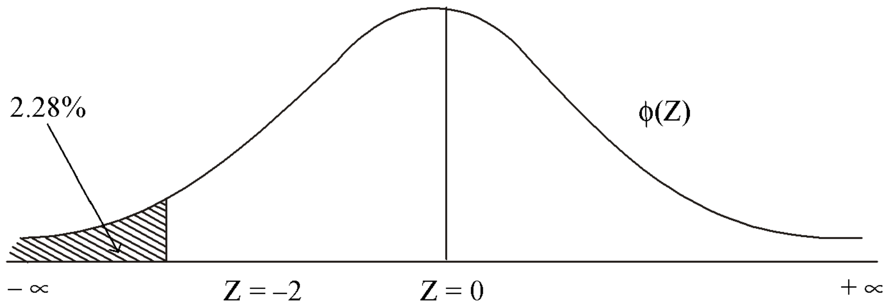
$$P(x < 6) = P\left[\frac{x-12}{3} < \frac{6-12}{3}\right] = P\left[Z < -2\right]$$

$= \int_{-\infty}^{-2} \phi(Z)dz = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772$ [সংখ্যাতত্ত্ব তালিকা (Statistical Table) থেকে পাই $\Phi(2) = 0.9772$]

$= 0.0228 = 2.28\%$

অর্থাৎ 2.28% ব্যাটারীর আয়ু 6 ঘণ্টার কম।

ছবিতে (চিত্র 3.6.10) এই ধরনের ব্যাটারীর শতাংশ ছায়াঞ্চল হিসাবে দেখানো হয়েছে।



চিত্র : 3.6.10

(iii) ব্যাটারীর আয়ু 10 থেকে 14 ঘণ্টার মধ্যে হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করার জন্য $P[10 \le x \le 14]$ নির্ণয় করতে হবে।

$$P[10 \le x \le 14] = P\left[\frac{10-12}{3} \le \frac{x-12}{3} \le \frac{14-12}{3}\right]$$

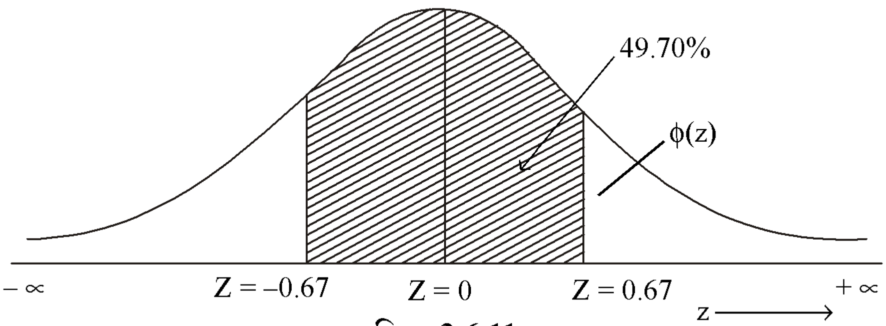
$$= P[-0.67 \le Z \le 0.67] = \int_{-\infty}^{0.67} \phi(Z)dz - \int_{-\infty}^{-0.67} \phi(Z)\,dz$$

$$= \Phi(0.67) - \Phi(-0.67) = \Phi(0.67) - [1 - \Phi(0.67)]$$

সংখ্যাতত্ত্ব তালিকা থেকে পাই $\Phi(0.67) = 0.7485$

$\therefore\ (0.7485) - [1 - 0.7485] = 0.7485 - 0.2515 = 0.4970 = 49.7\%$

সুতরাং, 49.70% ব্যাটারীর আয়ু 10 থেকে 14 ঘণ্টার মধ্যে। ছবিতে (চিত্র : 3.6.11) এই শতাংশটি ছায়াঞ্চল হিসাবে দেখানো হয়েছে।



চিত্র : 3.6.11

উদাহরণ : 3.6.3 10,000 জন লোকের উচ্চতার বিভাজনের (বিভাজনটি স্বাভাবিক বিভাজন মনে করা হোল) গড় মান 64.5″ ও সমক পার্থক্য 4.5″ এখন যাদের উচ্চতা (ক) 69″-র কম কিন্তু 55.5″ র বেশি (খ) 55.5″ র কম (গ) 73.5″-র বেশি তাদের সংখ্যা কত নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে $x \sim N(\mu = 64.5'', \sigma = 4.5'')$

$$\therefore\ Z \text{ (প্রমাণ স্বাভাবিক চলক)} = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-64.5}{4.5} \sim N(0, 1)$$

(ক) যাদের উচ্চতা 55.5″-এর বেশি কিন্তু 69″-এর কম তাদের মোট জনসংখ্যার মধ্যে অনুপাতটি সম্ভাবনাতত্ত্বের সাহায্যে বের করা যায়। তাদের অনুপাত হবে

$P\,[69 < x < 55.5]$

$$= P\left[\frac{69-64.5}{4.5} < \frac{x-64.5}{4.5} < \frac{55.5-64.5}{4.5}\right]$$

$= P\,[-2 < Z < 1]$

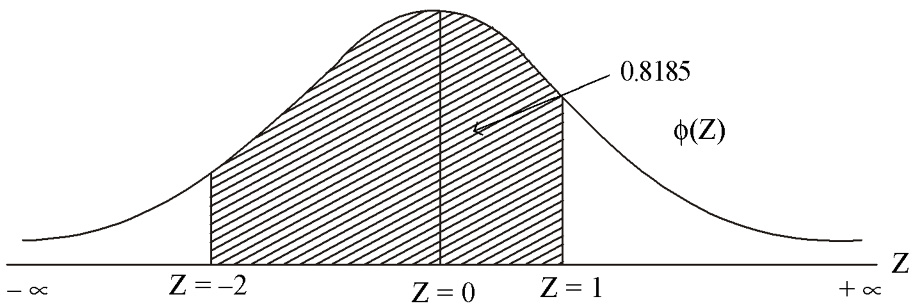
$$= \int_{-\infty}^{1} \phi(Z)\,dz - \int_{-\infty}^{-2} \phi(Z)\,dz$$

$= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - [1 - \Phi(2)]$

$= 0.8413 - [1 - 0.9772] = 0.8413 - 0.228$

$= 0.8185$

চিত্র : 3.6.12-তে ছায়াঞ্চলের সাহায্যে এই অনুপাতটি দেখানো হয়েছে।



চিত্র : 3.6.12

এবার, 10,000 জন লোকের মধ্যে যাদের উচ্চতা 69″ থেকে 55.5″-এর মধ্যে তাদের সংখ্যা $= 0.8185 \times 10{,}000 = 8185$ জন।

(খ) যাদের উচ্চতা 55.5″-এর কম তাদের অনুপাত হবে

$$P\,(x < 55.5) = P\left[\frac{x-64.5}{4.5} < \frac{55.5-64.5}{4.5}\right]$$

$= P\;(Z < -2)$

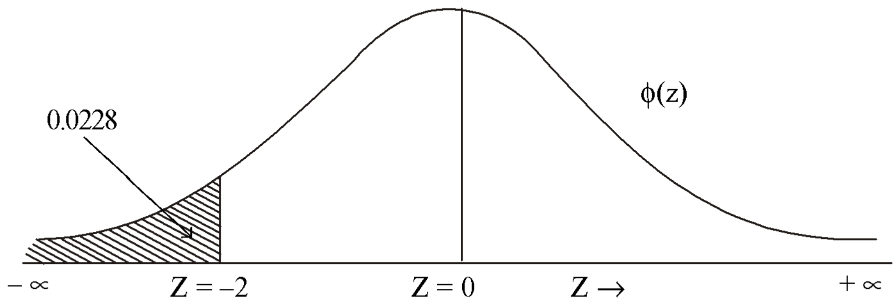
$$= \int_{-\infty}^{-2} \phi(Z)\,dz = 1 - \int_{-\infty}^{+2} \phi(Z)\,dz = 1 - \Phi(2)$$

$= 1 - 0.9772$

$= 0.0228$

সুতরাং, 10,000 জন লোকের মধ্যে যাদের উচ্চতা 55.5″-এর কম তাদের সংখ্যা = 10,000 × 0.0228 = 228 জন।

চিত্র 3.6.13-তে এই অনুপাতটি (শতাংশ) ছায়াঞ্চলের সাহায্যে দেখানো হয়েছে।



চিত্র : 3.6.13

(গ) যাদের উচ্চতা 73.5″-এর বেশি তাদের অনুপাত হবে

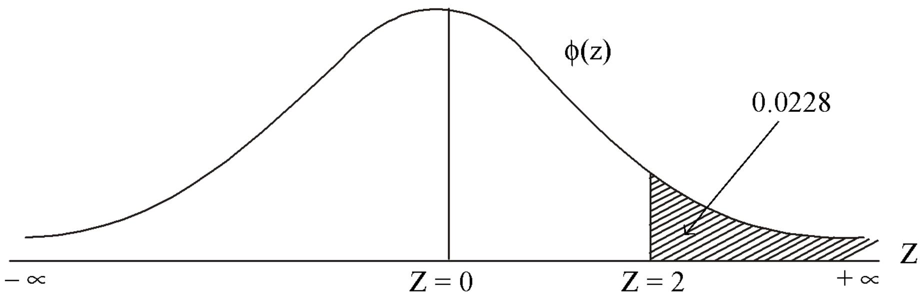
$$P\ (x > 73.5) = P\left[\frac{x-64.5}{4.5} > \frac{73.5-64.5}{4.5}\right]$$

$$= P\ (Z > 2) = 1 - P\ (Z \le 2)$$

$$= 1-\int_{-\infty}^{+2}\phi(Z)\,dz = 1-\Phi\ (2)$$

$$= 1 - 0.9772 \quad = 0.0228$$

চিত্রে 3.6.14-তে এই অনুপাতটি (শতাংশ) ছায়াঞ্চলের সাহায্যে দেখানো হয়েছে।



চিত্র : 3.6.14

অতএব 10,000 জন লোকের মধ্যে যাদের উচ্চতা 73.5″-এর বেশি তাদের সংখ্যা = 10,000 × 0.0228 = 228 জন।

যদি একটি অবিচ্ছিন্ন স্বাভাবিক চলক x (যার গড়মান μ ও সমক পার্থক্য σ) একটি নির্দিষ্ট সীমার (a থেকে b, যেখানে $a < b$) মধ্যে অবস্থান করে তার সম্ভাবনা $\phi(Z)$ প্রদত্ত সংখ্যাতাত্ত্বিক তালিকাভুক্ত (Statistical Table) মান থেকে সহজেই নির্ণয় করা যায়।

এখানে $P[a \le x \le b] = P[x \le b] - P[x \le a]$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

আবার কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে (যেখানে $x = a$) তার কোটির (ordinate) মান অর্থাৎ f(a) এবং ক্রমযৌগিক সম্ভাবনা (Cumulative probability) যেমন $P[x \le a]$-এর মান ও সংখ্যাতাত্ত্বিক তালিকা থেকে নির্ণয় করা যায়। এই মানগুলি প্রকৃতপক্ষে নিম্নলিখিত সমীকরণের উপর নির্ভরশীল।

$$f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\big/2}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \cdot \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

এবং $$P[x \le a] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

উদাহরণ : 3.6.4 কোনো কারখানার মজুরদের মজুরীর পরিসংখ্যা বিভাজন ধরা যাক্ স্বাভাবিক বিভাজন হয়, যার গড় মান 400/- এবং সমক পার্থক্য 50/-। যদি 80 জন মজুরের মজুরী 350/-

এর কম হয় তবে মোট মজুরদের সংখ্যা নির্ণয় কর। এইসঙ্গে কতজন মজুরের মজুরী 450/- এর উপরে হবে তা নির্ণয় কর। [দেওয়া আছে $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.34$]

সমাধান : ধরা যাক মজুরদের মোট সংখ্যা N

$\therefore$ N.P (x < 350) = 80 যেখানে x হ'ল মজুরী

অথবা, $N.\Phi\left(\frac{350-400}{50}\right) = 80$

অথবা, N. $\Phi(-1)$ = 80

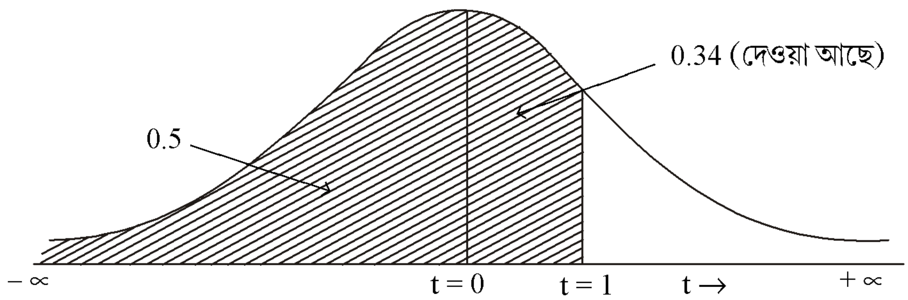
অথবা, N [1 – $\Phi(1)$] = 80

[আমরা জানি $\Phi(1) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

= 0.5 + 0.34 ($\because \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.34$ দেওয়া আছে)

= 0.84 (চিত্র : 3.6.15 দ্রষ্টব্য)



চিত্র : **3.6.15**

অথবা, N. [1 – 0.84] = 80

অথবা, N . 0.16 = 80

$\therefore$ N = 500

যে সব মজুরদের মজুরী 450/- এর বেশি তাদের মোট সংখ্যা

= 500. P(x > 450)

= 500. [1 – P (x ≤ 450)]

$$= 500.\ \left[1-\Phi\left(\frac{450-400}{50}\right)\right]$$

= 500. [1 – Φ (1)]

= 500. [1 – 0.84] (চিত্র : 3.6.15 দ্রষ্টব্য)

= 500. 0.16 Φ (1) = 0.84

= 80

3.6.2.5 স্বাভাবিক বিভাজনটি দ্বিপদ বিভাজন ও পঁয়জ বিভাজনের আসন্ন রূপ (Nornal Distribution is the Limiting form of Binomial and Poisson Distribution

স্বাভাবিক বিভাজন (Normal Distribution) হ'ল দ্বিপদ বিভাজন (Binomial Distribution) এবং পঁয়জ বিভাজনের (Poisson Distribution) প্রান্তিক রূপ, কিন্তু অবশ্যই শর্ত সাপেক্ষ।

*** দ্বিপদ বিভাজন থেকে স্বাভাবিক বিভাজনে উত্তরণ :**

ধরা যাক্, x একটি সমসম্ভব বিচ্ছিন্ন চলক একটি দ্বিপদ বিভাজন অনুসরণ করে যার স্থিতিমাপ (paramter) দুটি হল n ও p, যেখানে n হল কোন পরীক্ষার সসীম সংখ্যা প্রচেষ্টা এবং p হল সফল ঘটনার সম্ভাবনা সেই সঙ্গে q = 1 – p হল অসফল ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা।

এখন দ্বিপদ বিভাজনের প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $\gamma_1 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$ এবং তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক $\gamma_2 = \frac{1-6pq}{npq}$

এখন দুটি শর্তের সাপেক্ষে দ্বিপদ বিভাজন প্রান্তিক অবস্থায় স্বাভাবিক বিভাজনে রূপান্তরিত হবে।

শর্ত এক : সমসম্ভব পরীক্ষার প্রচেষ্টার সংখ্যা (n) অসীম হতে হবে অর্থাৎ যত অন্তিম অবস্থার দিকে অগ্রসর হবে তত n অসীম সংখ্যার কাছাকাছি আসবে ($n \to \infty$)

শর্ত দুই : p এবং q দুটি ঘটনার সম্ভাবনা কখনই '0' হবে না।

সুতরাং, $n \to \infty$ থেকে আমরা পাই $\gamma_1 = 0$ এবং $\gamma_2 = 0$ অর্থাৎ পরীক্ষায় প্রচেষ্টার সংখ্যা (n) অসীম সংখ্যক হ'লে দ্বিপদ বিভাজনটি স্বাভাবিক বিভাজনের মতো প্রতিসম ও মেসোকার্টিক বিভাজনে পর্যবসিত হবে। দ্বিপদ বিভাজনটি যখন স্বাভাবিক বিভাজনে রূপান্তরিত হয় তখন সেই স্বাভাবিক বিভাজনের গড় মান হবে np এবং সমক পার্থক্য হবে $\sqrt{npq}$ অথবা ভেদমান হবে npq। এক্ষেত্রে প্রমাণ স্বাভাবিক চলক (Standard Normal variate) Z হবে

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0, 1)$$

যেহেতু এই পদ্ধতির মধ্যে দিয়ে আমরা একটি বিচ্ছিন্ন চলককে (দ্বিপদ বিভাজনের চলককে) একটি অবিচ্ছিন্ন চলকে (স্বাভাবিক বিভাজনের চলকে) রূপান্তরিত করতে চলেছি তাই

$$P(x = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

এর আনুমানিক মান নির্ণয় করতে স্বাভাবিক বিভাজনের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকের (probability density function বা p.d.f) সমাকল (integrate) করতে হবে। ধরা যাক স্বাভাবিক বিভাজনের p.d.f হল—

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\, npq}} e^{-\frac{1}{2npq}(x-np)^2}$$

যেখানে গড় মান = np এবং ভেদমান = npq)

এই f(x) অপেক্ষককে $\left(a - \frac{1}{2}\right)$ থেকে $\left(a + \frac{1}{2}\right)$ পর্যন্ত সীমার মধ্যে সমাকল (integrate) করতে হবে। এই পদ্ধতি Stirling's approximation নামে পরিচিত। এখন সমাকল করে পাই

$$\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\Pi npq}} . e^{-\frac{1}{2npq}(x-np)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Pi npq}} \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2npq}(x-np)^2} dx$$

$$= \Phi\left[\frac{a+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}\right]-\Phi\left[\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}\right]$$

একইভাবে, $P(a \leq x \leq b) = \Phi\left[\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}\right]-\Phi\left[\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}\right]$

*** পয়জঁ বিভাজন থেকে স্বাভাবিক বিভাজনে উত্তরণ :**

পয়জঁ বিভাজনের গড় মান ও ভেদমান λ হল বিভাজনটির প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ও তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$ হয়। এখন যদি $\lambda \to \infty$ হয় তবে $\gamma_1 \to 0$ এবং $\gamma_2 \to 0$ হবে এবং বিভাজনটি স্বাভাবিক বিভাজনের মত প্রতিসম ও মেসোকার্টিক হবে।

অর্থাৎ যখন পয়জঁ বিভাজন প্রায় স্বাভাবিক বিভাজনের মতো হয় তখন ঐ পয়জঁ বিভাজনের মতই স্বাভাবিক বিভাজনের গড় মান λ ও ভেদমান λ (অথবা সমক পার্থক্য $\sqrt{\lambda}$) হবে।

প্রমাণ স্বাভাবিক চলক $Z = \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0, 1)$ হবে যখন স্বাভাবিক চলক $x \sim N(\lambda, \lambda)$ হয়।

কিন্তু পয়জঁ বিভাজন একটি বিচ্ছিন্ন চলকের সঙ্গে যুক্ত বিভাজন যেখানে স্বাভাবিক বিভাজন একটি অবিচ্ছিন্ন চলকের সঙ্গে যুক্ত বিভাজন। সুতরাং পয়জঁ বিভাজনকে প্রান্তিক অবস্থায় স্বাভাবিক বিভাজনে রূপান্তরিত করার সময় স্বাভাবিক বিভাজনের সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষকের (p.d.f) সমাকলন (integration) করা হয়।

এই রূপান্তরের ফলে পয়জঁ বিভাজনের বিচ্ছিন্ন চলক (x)-টির মান a হওয়ার সম্ভাবনার আনুমানিক মান নিম্নলিখিত উপায়ে স্বাভাবিক বিভাজনের p.d.f-এর সমাকলনের (integration) মাধ্যমে পাওয়া যায়। অর্থাৎ $P(x = a) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^a}{a!}$ -এর আনুমানিক মান হবে স্বাভাবিক বিভাজনের p.d.f এর সমাকলন (integration) $a-\frac{1}{2}$ থেকে $a+\frac{1}{2}$ পর্যন্ত সীমার মধ্যে।

$$\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\Pi\lambda}} e^{-\frac{1}{2\lambda}(x-\lambda)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Pi\lambda}} \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\lambda}(x-\lambda)^2} dx$$

$$= \Phi\left[\frac{a+\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right]-\Phi\left[\frac{a-\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right]$$

একইভাবে $P(a \le x \le b) = \Phi\left[\frac{b+\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right]-\Phi\left[\frac{a-\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right]$

3.6.2.6 স্বাভাবিক বিভাজনের গুরুত্ব (Importance of Normal Distribution)

স্বাভাবিক বিভাজন রাশিবিজ্ঞানের তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক ক্ষেত্রে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে কারণ এই বিভাজনের ধর্মগুলির জন্য এটির মাধ্যমে রাশিতথ্যের বিশ্লেষণ খুবই সহজ। অনেকগুলি আনুমানিক বিভাজন যেমন দ্বিপদ বিভাজন, পয়জঁ বিভাজন প্রভৃতি শর্তসাপেক্ষে, বিশেষ করে বৃহদাকার নমুনার (large sample) সাপেক্ষে স্বাভাবিক বিভাজনের বৈশিষ্ট্যগুলিই মেনে চলে।

তাছাড়া বিভিন্ন নমুনা চয়ন বিষয়ক বিভাজন (Sampling distributions) যেমন student 't', F, χ^2 (chi-square) প্রভৃতি বিভাজন ও বৃহদাকার নমুনার ক্ষেত্রে স্বাভাবিক বিভাজনের ধর্মই মেনে চলে।

যদি $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ হয় তাহলে $P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 0.9973$

অথবা, $P[-3 < Z < 3) \therefore 0.9773$, এখানে $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

অথবা, $P[|Z| < 3] = 0.9773$

অথবা, $P[|Z| > 3] = 0.0027$

স্বাভাবিক বিভাজনের এই ক্ষেত্রফল বিষয়ক ধর্ম সমস্ত ধরনের বৃহদাকার নমুনা বিষয়ক তত্ত্বের (large sample theory) প্রধান ভিত্তি।

পদার্থবিদ্যা বিষয়ক, মনোবিদ্যা বিষয়ক ও জীববিদ্যা বিষয়ক রাশি তথ্য বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে বেশির ভাগ সময়ে স্বাভাবিক বিভাজন ব্যবহৃত হয়।

সমগ্রকের স্থিতিমাপক (Population Parameters) আস্থাসীমা (confidence limits) নির্ণয়ের ক্ষেত্রে স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখা ব্যবহৃত হয়।

নমুনা চয়নের মাধ্যমে কোন ধারণা (hypothesis) গ্রহণ বা বর্জনের নিয়ম নির্ধারণের মূল ভিত্তি হল স্বাভাবিক বিভাজন।

শিল্পে উৎপাদিত দ্রব্যের গুণমান নিয়ন্ত্রণের সীমা (Quality Control limits) নির্ণয়ের ক্ষেত্রে স্বাভাবিক বিভাজনটি বিশেষভাবে ব্যবহৃত হয়।

তথ্যের ভ্রান্তি নির্ণয়ের তত্ত্বের (Theory of errors of observations) প্রধান ভিত্তিই হল স্বাভাবিক বিভাজন।

3.7 সারাংশ

সমসম্ভব চলক (Random Variable) দুই প্রকার। বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন। আমরা এই অংশে বিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে দুটি তত্ত্বগত সম্ভাবনা বিভাজন নিয়ে আলোচনা করেছি—দ্বিপদ সম্ভাবনা বিভাজন ও পয়জঁ সম্ভাবনা বিভাজন। অপরপক্ষে অবিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে দুটি তত্ত্বগত সম্ভাবনা বিভাজন নিয়ে আলোচনা করেছি—আয়তাকার সম্ভাবনা বিভাজন ও সুষম বা স্বাভাবিক সম্ভাবনা বিভাজন।

দ্বিপদ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক হবে—

$f(x) = {}^{n}c_{x}\, p^{x} q^{n-x}$, যেখানে x একটি বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক যা দ্বিপদ বিভাজন অনুসরণ করে $x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$

x সংখ্যক সাফল্যের সম্ভাবনা এবং $(n - x)$ ব্যর্থতার সম্ভাবনা

$= 0,$ অন্যথায়

p এখানে সাফল্যের সম্ভাবনার মান আর q হ'ল ব্যর্থতার সম্ভাবনার মান। বার্নোলীর পৌনঃপুনিক প্রয়াস n দ্বিপদ বিভাজনের গড় মান হল np এবং তার ভেদমান হল npq।

এই বিভাজনের প্রতিবিষম গুণাঙ্ক $\gamma_1 = \frac{1-2P}{\sqrt{npq}}$ এবং তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক $\gamma_2 = \frac{1-6pq}{npq}$

প্রতিবিষম গুণাঙ্ক $\gamma_1 = \frac{1-2P}{\sqrt{npq}}$ এর অর্থ হ'ল

যদি $P = q = \frac{1}{2}$ হয় তবে $\gamma_1 = 0$ অর্থাৎ দ্বিপদ বিভাজনটি প্রতিসম হবে।

যদি $p \neq q$, তবে $\gamma_1 \neq 0$ হবে ও দ্বিপদ বিভাজনটি প্রতিবিষম হবে।

যদি $P < \frac{1}{2}$ হয়, তবে $\gamma_1 > 0$ হবে এবং দ্বিপদ বিভাজনটি ধনাত্মক প্রতিবিষম হবে।

আর যদি $P > \frac{1}{2}$ হয়, তবে $\gamma_1 < 0$ হবে এবং দ্বিপদ বিভাজনটি ঋণাত্মক প্রতিবিষম হবে।

তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক $\gamma_2 = \frac{1-6pq}{npq}$-এর অর্থ হ'ল

দ্বিপদ বিভাজনটির তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্কর (γ_2) মান নির্ভর করছে (pq)-এর মানের উপর।

যদি $(pq) = \frac{1}{6}$ হয়, তবে $\gamma_2 = 0$ হবে এবং দ্বিপদ বিভাজনটি মেসোকার্টিক হবে।

যদি $(pq) > \frac{1}{6}$ হয়, তবে $\gamma_2 < 0$ হবে এবং দ্বিপদ বিভাজনটি প্লেটিকার্টিক হবে।

যদি $(pq) < \frac{1}{6}$ হয়, তবে $\gamma_2 > 0$ হবে এবং দ্বিপদ বিভাজনটি লেপ্টোকার্টিক হবে।

একটি বিচ্ছিন্ন সমসম্ভব চলক x পয়র্জঁ বিভাজন অনুসরণ করবে যখন বিভাজনটির সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক হয়

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad \text{যখন } x = 0, 1, 2, \ldots\ldots, \infty$$

$$= 0 \quad , \text{ অন্যথায়}$$

λ বিভাজনটির একমাত্র স্থিতিমাপ (parameter)

পয়জঁ বিভাজনের গড়মান = λ এবং বিভাজনটির ভেদমান = λ

পয়জঁ বিভাজনের প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক (Coefficient of Skewness)

$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} > 0$ $(\because \lambda > 0)$ অর্থাৎ পয়জঁ বিভাজনটি ধনাত্মক প্রতিবিষম।

পয়জঁ বিভাজনের তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda} > 0$ $(\because \lambda > 0)$ অর্থাৎ পয়জঁ বিভাজনটি লেপ্টোকার্টিক।

অবিচ্ছিন্ন একচলক বিভাজনের সরলতম রূপ হল আয়তাকার বা সম বিভাজন।

এটির সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক হ'ল

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad \text{যেখানে } \alpha \le x \le \beta$$

$$= 0 \quad , \text{অন্যথায়}$$

আয়তাকার বিভাজনটি $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$-এর সাপেক্ষে প্রতিসম। সুতরাং এটির গাণিতিক গড়মান = মধ্যমা = $\frac{\alpha+\beta}{2}$

বিভাজনটির ভেদমান = $\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2$

আয়তাকার বিভাজনের প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক = γ_1 = 0

এবং তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক $\gamma_2 = -1.2 < 0$

অর্থাৎ আয়তাকার বিভাজনটি প্রতিসম এবং প্লেটিকার্টিক।

কোনো সমসম্ভব অবিচ্ছিন্ন চলক 'x' স্বাভাবিক বিভাজন (Normal Distributionb) অনুসরণ করবে যখন তার বিভাজনের সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক (p.d.f) হবে

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad \text{যখন } -\infty < x < \infty$$

এখানে স্থিতিমাপ (parameter) দুটি হ'ল গড় মান μ এবং সমক পার্থক্য σ

স্বাভাবিক বিভাজনটি গড় মান μ-কে কেন্দ্র করে প্রতিসম।

বিভাজনটির গড়মান = মধ্যমা = সংখ্যাগুরু মান = μ

বিভাজনটির আকৃতি ঘণ্টার মত।

স্বাভাবিক বিভাজনের প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক $\gamma_1 = 0$ অর্থাৎ বিভাজনটি প্রতিসম।

এই বিভাজনের তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক $\gamma_2 = 0$ অর্থাৎ বিভাজনটি মেসোকার্টিক।

প্রমিত স্বাভাবিক চলক Z এর সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক হবে—

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} . e^{-\frac{Z^2}{2}}, \text{ যেখানে } Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ এবং } -\infty < z < +\infty$$

স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখার বক্রতা পরিবর্তনের বিন্দু দুটি হল—

$$x = \mu \pm \sigma$$

স্বাভাবিক বিভাজন হ'ল দ্বিপদ বিভাজন ও পয়জঁ বিভাজনের আসন্ন রূপ (limiting form)।

স্বাভাবিক বিভাজনের ক্ষেত্রফল বিষয়ক বৈশিষ্ট্য হ'ল—

$$P[\mu - \sigma) < x < (\mu + \sigma)] = 0.6826$$

$$P[\mu - 2\sigma) < x < (x + 2\sigma)] = 0.9544$$

$$P[\mu - 3\sigma) < x < (x + 3\sigma)] = 0.9973$$

স্বাভাবিক বিভাজনের এই ক্ষেত্রফল বিষয়ক ধর্ম সমস্ত ধরনের বৃহদাকার নমুনা বিষয়ক তত্ত্বের (Large sample theory) প্রধান ভিত্তি।

নমুনা চয়নের মাধ্যমে কোন ধারণা বা প্রকল্প (hypothesis) গ্রহণ বা বর্জনের নিয়ম নির্ধারণের মূল ভিত্তি হ'ল স্বাভাবিক বিভাজন।

3.8 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা : (সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন, প্রতিটির মান 2.5)

1. দ্বিপদ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষকের গঠন প্রণালী বর্ণনা কর।
2. প্রমাণ কর যে দ্বিপদ বিভাজনটি একটি তাত্ত্বিক বা আনুমানিক বিভাজন।
3. দ্বিপদ বিভাজনের ভ্রামকদের পুনরাবৃত্তি সম্পর্কের (Recursion relation) সমীকরণটি নির্ণয় কর।

4. মনে কর কোনো অসুখের থেকে রোগীর সুস্থ হওয়ার সম্ভাবনা 0.75. এখন 4 জন রোগীর মধ্যে সুস্থ হওয়ার সম্ভাবনা বিভাজনটি নির্ণয় কর। এই সম্ভাবনা বিভাজনের গড় মান ও সমক পার্থক্য নির্ণয় কর। উ: $f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{4-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, 4$

$= 0$, অন্যথায়

গড় মান = 3, সম্যক পার্থক্য = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. মনে কর X এবং Y হ'ল দুটি স্বাধীন (independent) পয়জঁ চলক যার জন্য $P(X = 2) = P(X = 3)$ এবং $P(Y = 4) = P(Y = 5)$ পাওয়া যায়। এখন $(2X - Y)$ এর সম্যক পার্থক্য নির্ণয় কর। উ: $\sqrt{17}$

6. একটি দ্বিপদ বিভাজনের স্থিতিমাপদ্বয় (Parameters) $n = 8$ এবং $p = \frac{1}{3}$। বিভাজনটির সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কর। উ: দুটি সংখ্যাগুরু মান '2' ও '3'

7. একটি দ্বিপদ বিভাজনের স্থিতিমাপদ্বয় (Parameters) n এবং P। ইহার গড় মান '3' ও ভেদমান '2'. এখন n, p ও $p(x = 5)$-এর মান নির্ণয় কর।

উ: $n = 9$, $p = \frac{1}{3}$, $p(x = 5) = \frac{224}{2187}$

8. একটি সমসম্ভব বিচ্ছিন্ন চলক x ধরা যাক একটি পয়জঁ বিভাজন অনুসরণ করে এমনভাবে যাতে $P(x = 1) = P(x = 2)$ তবে বিভাজনটির গড় মান, ভেদমান ও $P(x = 0)$ এর মান নির্ণয় কর। উ: গড় মান = ভেদমান = 2, $P(x = 0) = e^{-2}$

প্রশ্নমালা : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 5)

9. যদি x অবিচ্ছিন্ন চলকটি স্বাভাবিক বিভাজন অনুসরণ করে অর্থাৎ $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ তাহলে প্রমাণ কর যে

(i) $f(x) \geq 0$, x এর সকল মানের জন্য

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

10. প্রমাণ কর যে পয়জঁ বিভাজন দ্বিপদ বিভাজনের একটি সীমান্ত রূপ।

11. পয়জঁ বিভাজনের ধর্মাবলী বর্ণনা কর।

12. মনে করা যাক্ x একটি পয়জঁ চলক ও তার একমাত্র স্থিতিমাপ হ'ল 2, তাহলে নিম্নের

সম্ভাবনাগুলি নির্ণয় কর (যখন $e^{-2} = 0.1365$)

(i) $P(x = 3)$

(ii) $P(x \leq 2)$

(iii) $P(x > 1)$ উ: (i) 0.182 (ii) 0.6825 (iii) 0.5905

প্রশ্নমালা : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 10)

13. স্বাভাবিক বিভাজনের ধর্মাবলী বর্ণনা কর।

14. পয়জঁ বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কর (যখন স্থিতিমাপ λ একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং λ একটি অখণ্ড সংখ্যা নয়)

15. স্বাভাবিক বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখার বক্রতা বদলের বিন্দু দুটি নির্ণয় কর।

16. স্বাভাবিক বিভাজনের ক্ষেত্রফল বিষয়ক বৈশিষ্ট্য বলতে কী বোঝ? একটি স্বাভাবিক বিভাজনের গড়মান 50 এবং বিভাজনটির 5% পর্যবেক্ষণের মান 60 এর চেয়ে বেশি। তাহলে বিভাজনটির সমক পার্থক্যের মান নির্ণয় কর। [জানা আছে $Z = 0$ এবং $Z = 1.64$ এর মধ্যবর্তী সম্ভাবনার মান = 0.45] উ: $\sigma = 6.1$

17. দেখাও যে স্বাভাবিক বিভাজনটি দ্বিপদ বিভাজন ও পয়জঁ বিভাজনের আসন্ন রূপ।

3.9 গ্রন্থপঞ্জী

1. Goon, Gupta, Dasgupta – Fundamentals of Statistics Vol. I, The World Press Pvt. Ltd. Calcutta 1968
2. Mathai and Rathie – Probability and Statistics, Palgrave Macmillan, 1977
3. N.G. Das – Statistical Methods Vol I + II MacGraw Hill, India, 2008
4. Spiegel – Probability and Statistics, McGraw Hill.

একক-4 ❑ নমুনা চয়ন তত্ত্ব

গঠন

4.1 উদ্দেশ্য

পরিসংখ্যান সংক্রান্ত কোনো অনুসন্ধানের সময় অনুসন্ধানের সমগ্র ক্ষেত্রের অধীনস্ত সমস্ত ব্যক্তি বা বস্তুর কোনো বৈশিষ্ট্যের (Characteristics) পর্যালোচনা (Study) করা হয়। অনুসন্ধানের ক্ষেত্রের সমস্ত ব্যক্তি বা বস্তুর সমষ্টিকে সমগ্রক (Population or Universe) বলা হয়। যেমন সমগ্রক বলতে কোনো রাজ্যের সমস্ত নাগরিক অথবা একটি বৃহদাকার ঝুড়ির মধ্যে সমস্ত আপেলকে বোঝায়। ধরা যাক কোনো রাজ্যের সমস্ত নাগরিকের বাৎসরিক আয় কত? অথবা একটি বৃহদাকার ঝুড়ির অন্তর্গত সমস্ত আপেলের গুণমান কেমন? এগুলোই আমাদের অনুসন্ধানের উদ্দেশ্য। উদাহরণটিতে নাগরিকদের মোট সংখ্যা অথবা ঝুড়ির আপেলের মোট সংখ্যাকে সমগ্রকের আয়তন ধরা হয়।

কিন্তু সমীক্ষার সময় সমগ্রকের প্রতিটি সদস্যকে ধরে ধরে তাদের বৈশিষ্ট্য পর্যালোচনা করা একটি দুরুহ কাজ। তাই সমগ্রকের থেকে একটি নমুনা চয়ন করা হয় অর্থাৎ সমগ্রকের কিছু অংশ বেছে নেওয়া হয় এবং ঐ অংশের অন্তর্ভুক্ত সদস্যদের বৈশিষ্ট্য পর্যালোচনা করে সমগ্রকের সদস্যদের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে একটি ধারণা করা হয়। সুতরাং, নমুনা চয়নের (Sampling) পদ্ধতিটি বিজ্ঞানভিত্তিক হওয়া চাই।

4.2 প্রস্তাবনা

নমুনা চয়ন (Sampling) বলতে আমরা সমগ্রক সম্পর্কে একটা সম্যক ধারণার জন্য সমগ্রকের প্রতিনিধিত্ব (representative) করতে পারে এরকম একটি ক্ষুদ্র অংশ নির্বাচন করাকে বুঝি। যখন সমগ্রকের আয়তন (Population size) খুবই বড় হয় তখন সমগ্রকের পূর্ণ তদন্ত (Complete enumeration) করা সম্ভব হয় না। সেক্ষেত্রে ঐ সমগ্রকের একটি ক্ষুদ্র অংশ বৈজ্ঞানিক উপায়ে নির্বাচন করা হয়। ঐ ক্ষুদ্র অংশের থেকে তথ্য সংগ্রহ করে গবেষকরা পর্যালোচনা করেন যাতে তার বিশ্লেষণের মাধ্যমে সমগ্রকের কোনো বিশেষ বৈশিষ্ট্যের সম্পর্কে কোন নির্দ্দিষ্ট সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যেটার একটা বৈজ্ঞানিক ভিত্তি আছে। উপরের উদাহরণে বৃহদাকার ঝুড়ির অসংখ্য আপেলের মধ্যে থেকে গুটিকয় আপেল নমুনা হিসাবে সংগ্রহ করে ঐ নমুনার গুণাগুণ বিচার করে আমরা ঝুড়ির সমস্ত আপেলের গুণাগুণ সম্পর্কে একটা নির্দিষ্ট সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি।

এখন নমুনা চয়ন পদ্ধতি কীরূপ হলে নমুনাটি সমগ্রককে যথার্থভাবে প্রতিনিধিত্ব করতে পারবে সেটাই হবে আমাদের এই এককের মূল লক্ষ্য অর্থাৎ নমুনা চয়নের সঠিক কৌশল নির্বাচন করতে হবে।

4.3 নমুনা সমীক্ষার মূল নীতিসমূহ

নমুনা সমীক্ষার ভিত্তি দুটি মূলনীতির উপর নির্ভরশীল (1) বৈধতা (validity) এবং (2) সর্বাধিককরণ (optimisation) আবার সর্বাধিককরণের মূল উৎস হল দক্ষতা (efficiency) ও ব্যয় (cost).

কোনো নমুনার নকশাটির বৈধতা বলতে বুঝায় ঐ নমুনার চয়ন এমনভাবে করা উচিৎ যাতে সমীক্ষার ফলাফল বস্তুগতভাবে সম্ভাবনার সাপেক্ষে ব্যাখ্যা করা যায়। এই বৈধতা নীতি সঠিক ভাবে পালিত হবে যখন সমসম্ভব নমুনা কৌশল (Random probability Sample) অনুসরণ করা হয়। অর্থাৎ সমগ্রকের প্রতিটি সদস্যের নমুনাতে অন্তর্ভুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা সমান।

সর্বাধিককরণের নীতি, দক্ষতা ও ব্যয়ের উপর নির্ভর করে। দক্ষতা (efficiency) নমুনা প্রাক্‌কলকের ভেদমানের (sampling variance of estimator) দ্বারা পরিমাপ করা হয়। এই ভেদমানের সঙ্গে দক্ষতার সম্পর্ক কিন্তু বিপরীতমুখী। অর্থাৎ নমুনার প্রাক্‌কলকের ভেদমান যত কম হয়, দক্ষতা তত বেশী হবে।

অপরদিকে, নমুনা সমীক্ষার ব্যয় (cost) নির্ভর করে কত টাকা অথবা কত শ্রম (man hour) খরচ হয়েছে তার উপর।

এখন সর্বাধিককরণের নীতি বলতে আমরা বুঝি সব থেকে কম ব্যয়ে যদি একটা নির্দিষ্ট স্তরের দক্ষতা অজর্ন করা যায় অথবা একটা নির্দিষ্ট ব্যয়ে সব থেকে বেশী দক্ষতা যদি অর্জন করা যায়।

4.4 নমুনা সমীক্ষার বিভিন্ন সোপান

নমুনা সমীক্ষাকে সাধারণতঃ তিনটি প্রধান ভাগে ভাগ করা হয়। পরিকল্পনার পর্যায়, কার্যকর করার পর্যায় এবং বিশ্লেষণ ও বিবরণ দেওয়ার পর্যায় (planning stage, execution stage and analysis and reporting stage).

পরিকল্পনার পর্যায়ে নীচের ধাপগুলি অনুসরণ করা হয় :

(ক) সমীক্ষার মূল উদ্দেশ্য বর্ণনা করা (Defining the purpose of the survey)

সমীক্ষার মূল লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যটি স্পষ্টভাবে জানানো দরকার। নমুনা সমীক্ষার জন্য প্রয়োজনীয় তহবিল, নির্দ্দিষ্ট সময়সীমা ও কতখানি নির্ভুল তথ্য সংগ্রহ করা দরকার সেইসব বিষয়ে লক্ষ রাখা দরকার।

(খ) সমগ্রকের সঠিক সংজ্ঞা নিরূপণ (Defining the population)

সমীক্ষার অন্তর্গত সমগ্রকের সম্বন্ধে সম্যক পরিচিতি থাকা জরুরী। যেমন, কোন গ্রামাঞ্চলের শিশু মৃত্যুর হার সম্বন্ধে জানতে হলে যেগুলো জানা আবশ্যক তা হলো (i) কোন ভৌগলিক অবস্থানের বা

লোকসংখ্যার ভিত্তিতে একটি জায়গাকে গ্রাম বলা যেতে পারে (ii) শিশু বলতে কোন বয়সের বাচ্চাদের বুঝায় (iii) শিশু মৃত্যুহার নির্ণয়ের ক্ষেত্রে মৃত্যুজনিত কোন কারণগুলো ধরে রাশি তথ্য সংগ্রহ করতে হবে ইত্যাদি।

(গ) নমুনা চয়নের পদ্ধতি নির্বাচন (Sampling method selection)

একটি নির্দিষ্ট সমগ্রক থেকে নানা উপায়ে নমুনা চয়ন করা যায়। কোন পরিস্থিতিতে কোন পদ্ধতি অনুসরণ করা উচিৎ তা নিরূপণ করতে হয়। নমুনা চয়নের বিভিন্ন পদ্ধতি যেমন, উদ্দেশ্যহীন (random), ইচ্ছাধীন (purposive), বহুপর্যায়ী (multistage), স্তরীভূত সমসম্ভব (stratified random) প্রভৃতি বিভিন্ন পদ্ধতি প্রয়োজন অনুযায়ী নির্বাচন করা হয়।

(ঘ) প্রশ্নমালা প্রস্তুত করা (Preparation of questionnaire)

সমীক্ষা ক্ষেত্র থেকে নমুনা চয়নের জন্য একটি আদর্শ প্রশ্নমালা প্রস্তুত করতে হয়। প্রশ্নগুলি যথাসম্ভব সহজ, ছোট, বস্তুগত এবং বাস্তবসম্মত হতে হবে। প্রশ্নের মাধ্যমে অনেকসময় তথ্য যাচাই (cross checking) করা হয়।

(ঙ) রাশিতথ্য সংগ্রহের বিভিন্ন পদ্ধতি (Methods of collecting information)

নমুনা সমীক্ষার জন্য প্রয়োজনীয় তথ্য প্রত্যক্ষ ব্যক্তিগত পর্যবেক্ষণ পদ্ধতি (direct personal observation method) অথবা অপ্রত্যক্ষ মৌখিক সাক্ষাৎকার পদ্ধতি (Indirect oral interview method) অথবা ডাকযোগে প্রশ্নমালা প্রেরণ পদ্ধতি (mailing of questionnaire method) অবলম্বন করে তথ্য সংগ্রহ করা যায়।

(চ) নমুনা চয়নের অন্তিম একক নির্বাচন (Choice of the final sampling unit)

নমুনা চয়নের অন্তিম একককে নমুনার একক বলে ধরা হয়। উদাহরণ স্বরূপ কোনো আর্থ সামাজিক সমীক্ষায় প্রথমেই স্থির করতে হয় যে পরিবারের সদস্যকে নমুনার একক ধরা হবে, না পরিবারটিকেই নমুনার একক ধরা হবে। কৃষি সমীক্ষার ক্ষেত্রে একটি চাষযোগ্য জমির প্লটকে না কয়েকটি প্লটগুচ্ছকে না গ্রামের সমস্ত চাষযোগ্য জমিকে একক হিসাবে নেওয়া হবে।

নমুনা একক ঠিক করার পর সমগ্রকের অন্তর্ভুক্ত সমস্ত নমুনা এককের একটি সুসংবদ্ধ পূর্ণ তালিকা গঠন করা প্রয়োজন এবং দেখা উচিৎ তালিকাটি ত্রুটিমুক্ত কিনা অর্থাৎ দেখা দরকার সমগ্রকের বাইরে থেকে কোন একক তালিকাভুক্ত হয়েছে কিনা বা সমগ্রকের এক বা একাধিক সদস্য একাধিক বার এসেছে কিনা। নমুনা সংগ্রহের আগে এইরকম কোনও ত্রুটিযুক্ত ঘটনা ঘটে থাকলে তা সংশোধন করে সুসম্পূর্ণ তালিকা প্রকাশ করা উচিৎ।

(ছ) প্রকৃত সমীক্ষার পূর্বে যথাযথ প্রশিক্ষণের ব্যবস্থা (Provision of proper training before actual survey)

নমুনা পরীক্ষার ঠিক আগে নমুনা সংগ্রহকারীদের ও পর্যবেক্ষকদের উপযুক্ত প্রশিক্ষণের ব্যবস্থা করা প্রয়োজন।

(জ) নমুনা সমীক্ষা পরিকল্পনার বাস্তবায়ন (Execution of the plan of the survey)

নমুনা সমীক্ষার পরিকল্পনার পর্যায় শেষ হলে তার বাস্তবায়নের পর্যায় শুরু হয়। এই পর্যায় সুচারু রূপে পরিচালনা করা প্রয়োজন।

(ঝ) তথ্য বিশ্লেষণ (Analysis of data)

সংগৃহীত তথ্যাবলী নিখুঁতভাবে পরীক্ষা করা দরকার। কোথাও সন্দেহ হলে, তা পুনরায় সমীক্ষার ব্যবস্থা করা উচিৎ। সংগৃহীত তথ্যাবলী উপযুক্ত ছকে সাজানো উচিৎ। বৃহদাকার নমুনার ক্ষেত্রে যান্ত্রিক ছক বিন্যাস (mechanical tabulation) পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়।

পরবর্তী পর্যায়ে আরও নিখুঁত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার জন্য আরও উন্নতমানের কৌশল হিসাবে প্রাক্কলন (Estimation) ও প্রকল্প সমীক্ষা (testing of hypothesis) পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়।

(ঞ) সমীক্ষার বিবরণী (Report of the Survey)

সমীক্ষা পদ্ধতি শেষ হলে তার বিস্তারিত বিবরণী (report) প্রস্তুত করা হয় ও অনুসন্ধানের মূল বিষয়বস্তুগুলিতে আলোকপাত করা হয়। এখানে তথ্যের প্রকৃতির যথাযথ ব্যাখ্যা সহ কোনো নির্দিষ্ট সিদ্ধান্তে পৌঁছানোর চেষ্টা করা হয়। তথ্য বিশ্লেষণের ভিত্তিতে বিভিন্ন ধরনের নীতির সুপারিশ করা হয়। তাছাড়া ভবিষ্যতে এই ধরনের আরও সমীক্ষার প্রয়োজনীয়তার কথাও লিপিবদ্ধ করা হয়।

4.5 পূর্ণ তদন্ত বনাম নমুনা সমীক্ষা

যদি সমগ্রক (population) থেকে একটি অংশ সংগ্রহ করে তার এককগুলির সম্বন্ধে তথ্য সংগ্রহ করা হয় তবে তাকে নমুনা তদন্ত (Sample survey) বলে। অপরদিকে, পূর্ণ তদন্ত (census method) বলতে সমগ্রকের প্রতিটি একক আলাদাভাবে তদন্ত করা বোঝায়। পূর্ণ তদন্তের তুলনায় নমুনা সমীক্ষার সুবিধাগুলি নিম্নরূপ :

(ক) অর্থের সাশ্রয় : নমুনা সমীক্ষায় নমুনার অন্তর্গত একক পিছু বিশ্লেষণের ব্যয় বেশী হলেও মোট এককের সংখ্যা কম হওয়ায় পূর্ণ তদন্তের তুলনায় নমুনা সমীক্ষায় মোট ব্যয়ের পরিমাণ স্বাভাবিকভাবে কম হবে।

(খ) সময়ের সাশ্রয় : জরুরীভিত্তিক কম সময়ের মধ্যে কোন সিদ্ধান্ত নিতে গেলে বা পূর্ণ-তদন্ত চালানোর মত প্রয়োজনীয় অর্থ বা সময় না থাকলে নমুনা সমীক্ষা করাই উচিৎ। কারণ নমুনা সমীক্ষায় সময় খুব কম লাগে।

(গ) অধিকতর নির্ভুল : যেহেতু পূর্ণ তদন্তের তুলনায় নমুনা সমীক্ষা ছোট, নমুনালব্ধ তথ্যের উপর যথাযথ সতর্কতামূলক ব্যবস্থা অবলম্বন করে ত্রুটি সংশোধন করা সম্ভব হয়। এজন্য নমুনালব্ধ মান উচ্চমান বিশিষ্ট বলে মনে করা হয়। তাছাড়া অনমুনাজ ভ্রান্তি নমুনা সমীক্ষায় তুলনামূলকভাবে কম হয়।

(ঘ) অধিকতর পরিধি : যদি দেখা যায় যে কোন সমীক্ষায় তথ্য আহরণে ও বিশ্লেষণের জন্য উচ্চ ট্রেনিং প্রাপ্ত বিশেষজ্ঞ বা ব্যয়বহুল আধুনিক যন্ত্রের প্রয়োজন, তাহলে সেই সমীক্ষার ক্ষেত্রে পূর্ণ তদন্ত কার্যত অসম্ভব হয়ে পড়বে এবং নমুনা সমীক্ষাকেই একমাত্র বিকল্প পথ হিসাবে নেওয়া হবে। এছাড়া নমুনা সমীক্ষায় অন্তর্ভুক্ত এককের সংখ্যা কম থাকায় এবং প্রয়োজনীয় সময় কম লাগায় অনেক অতিরিক্ত বিষয়ের উপর তথ্য সহজেই গ্রহণ করার সুযোগ থাকে। এছাড়া সমগ্রকের পরিধি বাড়িয়ে নেওয়ার সুযোগও থাকে।

(ঙ) অধিকতর প্রয়োগ : সমগ্রক যদি আয়তনের দিক থেকে বা সদস্য সংখ্যার দিক দিয়ে অস্বাভাবিক ভাবে বড় হয়ে থাকে তবে নমুনা সমীক্ষা ছাড়া উপায় থাকে না। যেমন মহাকাশের নক্ষত্রপুঞ্জের ক্ষেত্রে বা মুদ্রা নিক্ষেপণের ক্ষেত্রে পূর্ণ তদন্ত করা অসম্ভব।

উপরের আলোচনায় আমরা নমুনা সমীক্ষার সুবিধাগুলি জানতে পারলাম। তাহলে পূর্ণ তদন্ত কি কখনই সম্ভব হবে না? যদি সমগ্রক খুব বড় না হয়, সমীক্ষা চালানোতে যদি ব্যাপক খরচ ও সময় না লাগে এবং যদি পরিচালনাগত কোন অসুবিধা না থাকে তাহলে পূর্ণ তদন্ত নমুনা সমীক্ষার তুলনায় শ্রেয়। এছাড়া পূর্ণ তদন্ত সম্ভব হলে সমীক্ষার ফল অনেক উচ্চমানের হবে।

4.6 নমুনা সমীক্ষার পক্ষপাত দুষ্টতা

নমুনা সমীক্ষার জন্য যদি সঠিক পদ্ধতি অনুসরণ করা না হয় তবে সিদ্ধান্ত অনেকক্ষেত্রে ভুল এবং পক্ষপাত দুষ্ট হয়। এই পক্ষপাত দুষ্টতা দুই প্রকারের : (i) অ-নমুনা চয়নের জন্য (non-sampling bias) এবং (ii) নমুনা চয়নের পদ্ধতির জন্য (Sampling bias).

(i) অ-নমুনা চয়নের জন্য পক্ষপাত দুষ্টতা :

(ক) ভুল উত্তরের জন্য পক্ষপাত দুষ্টতা (Response Bias) :

সাধারণতঃ কোন ব্যক্তি কর ফাঁকি দেওয়ার জন্য তাঁর মাসিক /বার্ষিক আয় কম করে বলে থাকেন। এছাড়া শিক্ষাগত যোগ্যতা বাড়িয়ে এবং বয়স কমিয়ে বলার প্রবণতা লক্ষ করা যায়।

(খ) তথ্য সংগ্রহকারীর দেখার ভুল পক্ষপাত দুষ্টতা (Observational Bias) :

অনেক সময় তথ্য সংগ্রহকারী চোখে দেখে একর প্রতি শস্য উৎপাদন আন্দাজ করে নেন। এছাড়া তথ্য অনেক সময় তথ্য সংগ্রহকারীর পছন্দ-অপছন্দের উপর নির্ভর করে।

(গ) প্রত্যুত্তর না দেওয়ার ফলে পক্ষপাত দুষ্টতা (Non-response Bias) :

অনেক সময় উত্তর দাতার কাছ থেকে অন্য তথ্য সংগ্রহ করা সম্ভব হয় না। এটা হতে পারে তাঁর বাড়ীতে না থাকার জন্য অথবা উত্তরদাতার প্রকৃত সত্য গোপন করার অভ্যাসের জন্য।

(ঘ) তথ্য সংগ্রহকারীর নিজের কারণে পক্ষপাত দুষ্টতা (Interviewer Bias) :

অনেক সময় তথ্য সংগ্রহকারী সাক্ষাৎকারের সময় নিজস্ব মত ব্যক্ত করে উত্তরদাতাদের প্রভাবিত করেন। যেমন নিরক্ষর উত্তর দাতার চেহারার আন্দাজে তথ্য-সংগ্রহকারী বয়সের একটা ধারণা দেওয়ার চেষ্টা করেন এবং উত্তরদাতা নিরক্ষর হওয়ায় সেই বয়স মেনে নেন। বাস্তবের বয়স হয়তো অন্য কিছু।

(ii) নমুনা চয়নের পদ্ধতির জন্য পক্ষপাত দুষ্টতা :

(ক) নমুনা চয়নের ত্রুটিপূর্ণ কৌশল নির্বাচনের জন্য পক্ষপাত দুষ্টতা (Bias for using defective sampling technique) :

তথ্য সংগ্রহকারী যদি উদ্দেশ্য প্রণোদিত ভাবে সমগ্রকের কোনো বিশেষ অংশ যদি নমুনা হিসাবে নির্বাচিত করেন তবে তা পক্ষপাত দুষ্ট হবে। ধরা যাক্ ভারত সরকারের "100 দিনের কাজের প্রকল্প" ঠিকভাবে চলছে কিনা জানবার জন্য সরকারের তরফে নমুনা সংগ্রহ করা হোল। এখন তথ্য সংগ্রহকারীরা সরকারের ব্যর্থতা ঢাকতে যদি সেই সব রাজ্য থেকে নমুনা সংগ্রহ করে যেখানে এই প্রকল্প খুব ভালোভাবে চলছে তাহলে সরকারী সিদ্ধান্ত এই ত্রুটিপূর্ণ নমুনা চয়ন কৌশলের জন্য ভুল হয়ে যাবে।

(খ) পরিবর্ততার জন্য পক্ষপাত দুষ্টতা (Bias due to substitution) :

ধরা যাক্ তথ্য সংগ্রহের জন্য কোন এলাকার একটি পরিবারকে নির্বাচিত করা হোল। কিন্তু সেই পরিবার থেকে কোনো কারণে তথ্য সংগ্রহের অসুবিধা থাকলে পাশের কোনো প্রতিবেশীর কাছ থেকে তথ্য সংগ্রহ করলে সেটা ত্রুটিপূর্ণ এবং পক্ষপাত দুষ্ট হবে।

(গ) নমুনা চয়নের একক-এর সীমানা ত্রুটিপূর্ণভাবে চিহ্নিতকরণ করার জন্য পক্ষপাত দুষ্টতা (Bias due to faulty demarcation of sampling units) :

কৃষি উৎপাদন সমীক্ষায় সাধারণভাবে একটি কৃষি জমির মধ্যে একটি ক্ষুদ্র অংশ একটি বৃত্তের সাহায্যে চিহ্নিত করা হয়। ফসল কাটার সময়ে ঐ বৃত্তের সামান্য বাইরের ফসল কেটে নেওয়ার একটা প্রবণতা দেখা যায়। ফলে নমুনার উৎপাদন প্রকৃত উৎপাদন অপেক্ষা বেশী হয়ে যায়। সুতরাং কৃষি উৎপাদনের হিসাব ধনাত্মক হিসাব ধনাত্মকভাবে পক্ষপাত দুষ্ট (Positively biased) হয়। তবে কৃষি জমির ক্ষুদ্র অংশের আয়তন বাড়িয়ে এই পক্ষপাত দুষ্টতা রোধ করা যায়।

(ঘ) ভুল নমুনাঙ্ক (Statistic) নির্বাচন করলে পক্ষপাত দুষ্টতা হয় (Bias due to wrong choice of statistic)

সমগ্রকের পূর্ণাকাঙ্ক (Population parameter) প্রাক্‌কলন (estimation) করার উদ্দেশ্যে যে প্রাক্‌কলন (estimator) বা নমুনাঙ্ক (statistic) ব্যবহার করা হয় সেটি নিজেই পক্ষপাত দুষ্ট হতে পারে। যেমন নমুনার ভেদমান $S^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$

সমগ্রকের ভেদমান σ^2-এর একটি পক্ষপাত দুষ্ট প্রাক্‌কলক। কিন্তু নমুনার ভেদমান $S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$ হল σ^2-এর একটি পক্ষপাতহীন প্রাক্‌কলক (unbiased estimator) সুতরাং σ^2-এর প্রাক্‌কলনের সময়ে নমুনাঙ্ক (statistic) S'^2-কেই ব্যবহার করা উচিৎ।

4.7 বৃহদাকার নমুনা পরীক্ষার বিভিন্ন পর্যায়

একটি বৃহদাকার নমুনা সমীক্ষার পুরো ব্যাপারটিকে প্রধানত তিনটি পর্যায়ে ভাগ করা হয়—(ক) সুষ্ঠু পরিকল্পনা (Planning) (খ) পরিকল্পনার বাস্তবায়ন (Execution) এবং (গ) বিশ্লেষণ ও বিবরণী তৈরী (Analysis and Reporting)

প্রতিটি পর্যায়ের আবার বিভিন্ন অংশ বা ধাপ রয়েছে।

সুষ্ঠু পরিকল্পনার জন্য নিম্নলিখিত ধাপগুলি অনুসরণ করা হয় :

(i) উদ্দেশ্য নির্ধারণ করা : এখানে নমুনা সমীক্ষার উদ্দেশ্যগুলি পরিষ্কার ও সঠিকভাবে নিরূপণ করতে হবে কেননা পরবর্তী কার্যক্রম অনেকাংশে এটার উপর নির্ভর করবে। নমুনা সমীক্ষা কেন করা হচ্ছে, এর উপযোগিতা, এর সঠিক পরিচালনা এবং এর মাধ্যমে প্রাপ্ত ফল সুদূরপ্রসারী বৃহত্তর কোনো ক্ষেত্রে কাজে আসবে কিনা—এসব ব্যাপারে সংশ্লিষ্ট ব্যক্তিদের স্বচ্ছ ধারণা থাকা প্রয়োজন। এছাড়া গননাকারী এবং অন্যান্য কর্মী সংখ্যা, কর্মীদের যোগ্যতা ও মান, সময়সীমা, সম্ভাব্য ব্যয়ের হিসাবের খসড়া (estimate), নমুনা ভ্রান্তি ইত্যাদি ব্যাপারে সঠিক সিদ্ধান্ত নেওয়া প্রয়োজন।

(ii) সমগ্রকের সঠিক সংজ্ঞা নিরূপণ : সমগ্রক (Population) সম্পর্কে পরিষ্কার ধারণা থাকা অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। ধরা যাক কোন গ্রামাঞ্চলে শিশু মৃত্যুর হার সম্পর্কে সমীক্ষা করা হবে। এক্ষেত্রে, কোন্ ভৌগলিক অবস্থানের বা লোকসংখ্যার ভিত্তিতে একটি জায়গাকে গ্রাম বলা যেতে পারে, শিশু বলতে কোন্ বয়সের বাচ্চাদের বোঝাবে, শিশু মৃত্যুহার নির্ণয়ের ক্ষেত্রে মৃত্যুজনিত কোন কারণগুলো ধরে কাজ করতে হবে—এসব সম্বন্ধে স্পষ্ট জ্ঞান থাকা দরকার।

(iii) রাশিতথ্যের ধরণ নির্ণয় : যদিও উদ্দেশ্য ঠিক হওয়ার সাথে পরিষ্কার হয়ে যায় কোন্ কোন্ বিষয়ের উপর রাশিতথ্য আহরণ করতে হবে, তবুও উচিৎ কাজ হ'ল যে মূল সমীক্ষার আগে বিষয়ের সাথে সঙ্গতি রেখে কিছু সহজ সরল প্রশ্ন দিয়ে একটি প্রাথমিক বিবরণ পত্র (Schedule) তৈরী করা এবং তা কিছু সংখ্যক সমীক্ষায় অন্তর্ভুক্ত ব্যক্তির উপরে পরীক্ষামূলকভাবে প্রয়োগ করা। এই পরীক্ষামূলক সমীক্ষার (Pilot study) ভিত্তিতে প্রাথমিক বিবরণ পত্রের অসঙ্গতি সংশোধন করে মূল বিবরণপত্র প্রকাশ করা হয়। সাধারণত এই পরীক্ষামূলক সমীক্ষা থেকেই একটা স্পষ্ট ধারণা হয়ে যায় কোন্ কোন্ বিষয়ের উপর রাশিতথ্য আহরণ করা উচিৎ এবং কি প্রকারের রাশিতথ্য [নৈর্ব্যক্তিক (objective) না বিষয়মুখী (Subjective)] গ্রহণ করা হবে। বিবরণ পত্র প্রকাশের আগে দেখতে হবে যে কত কমসংখ্যক প্রশ্নের মাধ্যমে কত বেশী তথ্য সংগ্রহ করা যায়, প্রশ্নগুলো সহজবোধ্য এবং পরস্পর সঙ্গতিপূর্ণ কিন্তু প্রশ্নগুলো ধর্মনিরপেক্ষ এবং ব্যক্তি নিরপেক্ষ কিনা।

(iv) রাশিতথ্য সংগ্রহের পদ্ধতি নির্ণয় : সাধারণতঃ এখানে সিদ্ধান্ত নেওয়া হয় যে কোন্ পদ্ধতির মাধ্যমে রাশিতথ্য সংগ্রহ করতে হবে—প্রকাশ্য সাক্ষাতের ভিত্তিতে না ডাকযোগে বিবরণপত্র পাঠিয়ে না সরাসরি পর্যবেক্ষণের ভিত্তিতে। তবে প্রত্যেক পদ্ধতির সুবিধা ও অসুবিধাগুলো যথাযথ বিচার করে সঠিক সিদ্ধান্ত নেওয়া উচিৎ।

(v) নমুনা চয়নের পদ্ধতি নির্বাচন : কোনো সমগ্রক থেকে নানা উপায়ে বা পদ্ধতিতে নমুনা চয়ন করা যায়। নমুনা চয়নের বিভিন্ন পদ্ধতি, যেমন উদ্দেশ্যহীন (random), ইচ্ছাধীন (purposive), বহু পর্যায়ী (multi stage), স্তরীভূত সমসম্ভব (stratified random) প্রভৃতি পদ্ধতি প্রয়োজন অনুযায়ী নির্বাচন করা হয়। সমীক্ষার খরচ ও উৎকর্ষতার দিকে দৃষ্টি রেখে নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতি ও নমুনা সংখ্যা ঠিক করা হয়।

(vi) নমুনা-একক ঠিক করা : সমীক্ষার উদ্দেশ্য অনুযায়ী নমুনা-একক সম্বন্ধে পরিষ্কার ধারণা থাকা উচিৎ। যেমন, কৃষি সমীক্ষার ক্ষেত্রে একটি চাষযোগ্য জমির প্লটকে না কয়েকটি প্লটগুচ্ছকে না গ্রামের সমস্ত চাষযোগ্য জমিকে একক হিসাবে নেওয়া হবে সেটা স্থির করা দরকার। আবার কোন্ আর্থ-সামাজিক সমীক্ষায়, একটি পরিবারকে না পরিবারভুক্ত সদস্যকে একক হিসাবে নেওয়া হবে সেটা দেখা দরকার। নমুনা-একক ঠিক করার পরে সমগ্রকের অন্তর্ভুক্ত সমস্ত নমুনা-এককের একটি সুসংঘবদ্ধ পূর্ণ তালিকা গঠন করা আবশ্যক এবং দেখতে হবে যে তালিকাটি ত্রুটিমুক্ত কিনা অর্থাৎ দেখা প্রয়োজন সমগ্রকের বাইরে থেকে কোন একক তালিকাভুক্ত হয়েছে কিনা বা সমগ্রকের এক বা একাধিক সদস্য একাধিকবার এসেছে কিনা। নমুনা সংগ্রহের আগে এইরকম কোনো ত্রুটিযুক্ত ঘটনা ঘটে থাকলে তা সংশোধন করে সুসম্পূর্ণ তালিকা প্রকাশ করা উচিৎ।

(vii) সমীক্ষা কর্মীবৃন্দের অনুশীলন : এই স্তরে সমীক্ষায় নিযুক্ত সর্বস্তরের কর্মীবৃন্দের সমীক্ষা সম্বন্ধীয় যাবতীয় কাজ, বিবরণপত্রের যথার্থ ব্যবহার ও তার পূরণ সম্বন্ধে বিশদভাবে তাত্ত্বিক ও বাস্তব অনুশীলনের ব্যবস্থা থাকা প্রয়োজন।

উপরের ধাপগুলি অনুসরণ করার পর আসে পরবর্তী পর্যায় অর্থাৎ মূলসমীক্ষা। এখানে নমুনা তালিকা থেকে কোন উপযুক্ত নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতিতে নির্বাচিত নমুনা-এককগুলির কাছ থেকে প্রয়োজনীয় তথ্যাবলী সংগ্রহ করে বিবরণ পত্রে লিপিবদ্ধ করা হয়।

এর পরে পর্যায়ে আসে সংগৃহীত রাশিতথ্যের বিশ্লেষণ ও প্রতিবেদন তৈরী করা। প্রথমেই ভাল করে পরীক্ষা করা উচিৎ যে সংগৃহীত উপাত্তগুলির (data) মধ্যে কোন অসঙ্গতি বা বৈসাদৃশ্য আছে কিনা। সন্দেহজনক বিবরণপত্র পুনঃসমীক্ষার জন্য ফেরৎ পাঠানো উচিৎ। সংশোধনী নিরীক্ষণের (scrutiny) বিচারে উত্তীর্ণ উপাত্তগুলি কতকগুলো প্রয়োজনীয় সারণীতে (table) বিন্যাস করে উপযুক্ত রাশিবিজ্ঞানসম্মত পরীক্ষা নিরীক্ষার মাধ্যমে বিশ্লেষণ করা হয়।

4.8 নমুনা সংগ্রহের বিভিন্ন পদ্ধতি

আমরা জানি যে নমুনা সংগ্রহের গোড়ার কথা হ'ল নমুনা যেন সমগ্রকের প্রতিনিধিত্ব করতে পারে। অর্থাৎ সমগ্রকের পূর্ণ চরিত্র যেন নমুনায় সঠিকভাবে প্রতিফলিত হয়। এই উদ্দেশ্য সিদ্ধির জন্য নমুনা সাধারণতঃ ব্যক্তি-নির্ভর (Subjective) ও ব্যক্তি-নিরপেক্ষ (Objective) হয়ে থাকে। যদি কোন ব্যক্তি কোন বিশেষ উদ্দেশ্য সাধনের জন্য তাঁর ইচ্ছা-অনিচ্ছার উপর নির্ভর করে খেয়াল খুশিমতো নমুনা সংগ্রহ করেন, তাহলে সেই নমুনা ব্যক্তি-নির্ভর হয়ে পড়ে। আবার যদি খেয়াল-খুশি মাফিক নমুনা সংগ্রহ না করে বিশেষ নিয়ম নীতি অনুযায়ী নমুনা সংগ্রহ করা হয়, তাহলে সেই নমুনাকে ব্যক্তি-নিরপেক্ষ হিসাবে গণ্য করা হয়।

ব্যক্তি-নিরপেক্ষ (objective) নমুনা চয়ন আবার তিন প্রকারের হয়—সম্ভাবনাশ্রয়ী (probabilistic), সম্ভাবনা বিহীন (non-probabilistic) এবং মিশ্র (mixed)। যদি সমগ্রকের প্রতিটি এককের নমুনায় অন্তর্ভুক্ত হওয়ার পূর্ব নির্দিষ্ট ধনাত্মক সম্ভাবনা থাকে, তাহলে সেই নমুনা চয়নকে সম্ভাবনাশ্রয়ী (probability sampling) বলা হয়। আবার যদি দেখা যায় সমগ্রকের এককের নমুনায় আসার নির্দিষ্ট কোন সম্ভাবনা নেই তাহলে সেই নমুনা চয়ন সম্ভাবনা বিহীন হবে যেমন, কোন কারখানায় উৎপাদিত বৈদ্যুতিক বাতির ক্ষেত্রে প্রতি পঞ্চম বাতিকে নির্বাচন করা হয়। মিশ্র ধরনের নমুনা চয়ন পদ্ধতিটি আংশিক সম্ভাবনা নির্ভর ও আংশিক সম্ভাবনা অনির্ভর। যেমন রীতিবদ্ধ নমুনা চয়ন (systematic sampling) পদ্ধতিটি মিশ্র ধরনের কেননা প্রথম পদটির নির্বাচনে সম্ভাবনা নির্ভর নমুনা চয়ন পদ্ধতি অনুসরণ করা হয় এবং বাকী পদগুলির ক্ষেত্রে অ-সম্ভাবনা নির্ভর নমুনা চয়ন পদ্ধতি অনুসৃত হয়। যেমন আমাদের উপরের উদাহরণের ক্ষেত্রে যদি প্রথম পাঁচটি বৈদ্যুতিক বাতি থেকে একটিকে কোন সম্ভাবনাশ্রয়ী পদ্ধতি দ্বারা নির্বাচন করা হয় এবং তারপর প্রতি পঞ্চম বাতিকে নির্বাচন করা হয়, তাহলে সেই নমুনা চয়নকে মিশ্র বলা হয়ে থাকে।

রাশিবিজ্ঞানে নিম্নলিখিত নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতিগুলি ব্যবহার করা হয় :

(i) সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ (Simple Random Sampling)

(ii) স্তর-বিন্যস্ত সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ (Stratified Random Sampling)

(iii) নিয়মানুগ (বা রীতিবদ্ধ) নমুনা সংগ্রহ (Systematic Sampling)

(iv) বহুবিভাগী নমুনা সংগ্রহ (Multistage Sampling)

(v) বহুপর্যায়ী নমুনা সংগ্রহ (Multi phase Sampling)

(vi) গুচ্ছ নমুনা সংগ্রহ (Cluster Sampling)

(vii) বরাদ্দ নির্দিষ্ট (বা কোটাভিত্তিক) নমুনা সংগ্রহ (Quota Sampling)

4.8.1 সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ

এটি একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী নমুনাচয়ন পদ্ধতি। এই নমুনা চয়নের ক্ষেত্রে সমগ্রকের প্রতিটি এককের নমুনায় অন্তর্ভুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা সমান। অর্থাৎ সমগ্রকের কোন বিশেষ একককে অন্য কোন এককের তুলনায় পক্ষপাতিত্ব করা হয় না।

সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ দুই ধরনের হয়—পুনঃস্থাপনাসহ সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ (Simple randon sampling with replacement বা সংক্ষেপে, SRSWR) এবং পুনঃস্থাপনাবিহীন সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ (Simple random sampling without replacement বা সংক্ষেপে, SRSWOR)

পুনঃস্থাপনাসহ সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রে সমগ্রক থেকে প্রতিবারে একটি করে একক নির্বাচন করা হয় এবং নির্বাচিত একককটিকে পরীক্ষা-নিরীক্ষার পরে সমগ্রকে ফিরিয়ে দেওয়া হয় পরবর্তী একককটিকে নির্বাচিত করার আগে। এক্ষেত্রে সমগ্রকের আয়তন (population size) অপরিবর্তিত থাকে এবং সমগ্রকের এককগুলির নমুনায় একাধিকবার আসার সম্ভাবনা থাকে। যদি সমগ্রক এবং নমুনার আয়তন যথাক্রমে N এবং n হয়, তাহলে পুনঃস্থাপনাসহ সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রে সহজেই দেখা যায় যে সমগ্রক থেকে কোন একক চয়নের সময় সমগ্রকের N সংখ্যক এককের প্রত্যেকটার নমুনায় অন্তর্ভুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা সমান এবং তা হ'ল $\frac{1}{N}$।

পুনঃস্থাপনা বিহীন সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রে সমগ্রক থেকে একটি একটি করে একক চয়ন করলেও একবার নির্বাচিত একককটিকে কখনই সমগ্রকে ফেরৎ দেওয়া হয় না। এই কারণে প্রতিবার একক চয়নের পরে সমগ্রকের আয়তন ক্রমশ কমতে থাকে এবং তার গঠনেরও পরিবর্তন হয়। এই ধরনের

নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রে সমগ্রকের কোন একক একাধিকবার নমুনায় আসতে পারে না। এখানে প্রতি নির্বাচনের সময় সমগ্রকের অবশিষ্ট এককগুলির প্রতিটার নমুনাতে অন্তর্ভুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা সমান থাকে অর্থাৎ i-তম একক নির্বাচনের সময় সমগ্রকে অবস্থিত (N – i + 1) অবশিষ্ট এককগুলির প্রত্যেকটার নির্বাচনের সম্ভাবনা সমান এবং তা হল $\frac{1}{N-i+1}$।

উপরে বর্ণনা দেওয়া দুটি সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রে সহজেই দেখা যায় যে, কোন একটি নির্দিষ্ট এককের (ধরা যাক, K-তম একক) যে কোনও চয়নের ক্ষেত্রে (ধরা যাক, i-তম উত্তোলনের সময়) নমুনাতে অন্তর্ভুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{N}$. পুনঃস্থাপনাসহ সরল সমসম্ভব (SRSWR) নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রে এটা সহজেই বোঝা যায়। পুনঃস্থাপনা বিহীন সরল সমসম্ভব (SRSWOR) নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রে, K-তম এককের i-তম উত্তোলনে আসার সম্ভাবনা হ'ল—

$$\frac{N-1}{N}\times\frac{N-2}{N-1}\times\cdots\cdots\cdots\cdots\times\frac{N-i+1}{N-i+2}\times\frac{1}{N-i+1}=\frac{1}{N}$$ যেটি SRSWR-এর ক্ষেত্রে সমগ্রকের প্রতিটি পদ নির্বাচনের সম্ভাবনার সমান।

এবার পুনঃস্থাপনাসহ ও পুনঃস্থাপনাবিহীন সরল সমসম্ভব নমুনার সম্ভাবনা আমরা স্থির করব। যদি N সংখ্যক একক বিশিষ্ট সমগ্রক থেকে n সংখ্যক একককে একের পর এক নেওয়া হয়, তাহলে পুনঃস্থাপনাসহ পদ্ধতিতে মোট N^n সংখ্যক নমুনা সংগ্রহ করা যেতে পারে এবং পুনঃস্থাপনা বিহীন পদ্ধতিতে মোট ^NP_n নমুনা সংগ্রহ করা সম্ভব (এখানে এককগুলির আসার ক্রমকে গুরুত্ব দেওয়া হয়েছে অর্থাৎ নমুনাতে সংগৃহীত এককগুলির সমস্ত সম্ভবপর বিন্যাস বিবেচনা করা হয়েছে)।

কিন্তু পুনঃস্থাপনাবিহীন পদ্ধতিতে মোট ^Nc_n সংখ্যক নমুনা সংগৃহীত হবে যদি এককগুলির অন্তর্ভুক্তির ক্রমকে উপেক্ষা করা হয় অর্থাৎ নমুনাতে সংগৃহীত এককগুলির বিন্যাস অগ্রাহ্য করা হয়।

সুতরাং SRSWR-এর ক্ষেত্রে N^n সংখ্যক নমুনা চয়ন করা যায় যার প্রতিটির সম্ভাবনা $\frac{1}{N^n}$

একইভাবে বলতে পারি যে SRSWOR-এর ক্ষেত্রে ^Nc_n সংখ্যক নমুনা চয়ন করা যায় (এককগুলির ক্রমবিন্যাস উপেক্ষা করে) যার প্রত্যেকের সম্ভাবনা $\frac{1}{^Nc_n}$. অবশ্য SRSWOR-এ একক গুলির ক্রমবিন্যাস ধরে নিলে ^Np_n সংখ্যক নমুনা পাওয়া সম্ভব এবং প্রতিটি নমুনার সম্ভাবনা $\frac{1}{^Np_n}$

উদাহরণ : 4.8.1 ধরা যাক্ একটি সমগ্রকের 5টি পদ যথাক্রমে a, b, c, d এবং e। একটি চলক x এর সাপেক্ষে এই সংখ্যাগুলি যথাক্রমে 2, 1, 3, 4 এবং 6. ধরা যাক্ এই সমগ্রক থেকে 2 আয়তন

বিশিষ্ট একটি সমসম্ভব নমুনা চয়ন করা হল এবং পরিসংখ্যক/নমুনাঙ্ক (statistic) হিসাবে নমুনা গড় $\overline{x}$ হিসাব করা হল। এখন 2 আয়তন বিশিষ্ট সম্ভাব্য সংখ্যক নমুনা, নমুনাগুলির গড়মান, তাদের সম্ভাবনাসহ (i) SRSWR ও (ii) SRSWOR উভয় ক্ষেত্রে নমুনা গড়ের $(\overline{x})$ সম্ভাবনা বিভাজন ছক প্রস্তুত কর।

সমাধান : এখানে দেখা যাচ্ছে সমগ্রকের আয়তন (সমগ্রকের মধ্যে অবস্থিত পদ সংখ্যা), N = 5 এবং নমুনার আয়তন (নমুনার পদ সংখ্যা) n = 2

সুতরাং (i) SRSWR-এর ক্ষেত্রে সম্ভাব্য নমুনা সংখ্যা হবে $N^n = 5^2 = 25$ অর্থাৎ 25টি সমসম্ভব নমুনা পাওয়া যাবে যাদের প্রত্যেকের সম্ভাবনা হবে $\frac{1}{N^n} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

সারণী সংখ্যা 4.8.1 : SRSWR-এর ক্ষেত্রে সম্ভাব্য সংখ্যক নমুনা ও তাদের গড় মান $(\overline{x})$

ক্রমিক নং (1)	সম্ভাব্য নমুনা (2)	নমুনার পদগুলি (3)	মোট (4)	নমুনার গড় $(\overline{x})$ (5)
1	a, a	2, 2	4	2
2	a, b	2, 1	3	1.5
3	a, c	2, 3	5	2.5
4	a, b	2, 4	6	3
5	a, e	2, 6	8	4
6	b, a	1, 2	3	1.5
7	b, b	1, 1	2	1
8	b, c	1, 3	4	2
9	b, d	1, 4	5	2.5
10	b, e	1, 6	7	3.5
11	c, a	3, 2	5	2.5
12	c, b	3, 1	4	2
13	c, c	3, 3	6	3
14	c, d	3, 4	7	3.5
15	c, e	3, 6	9	4.5
16	d, a	4, 2	6	3

ক্রমিক নং (1)	সম্ভাব্য নমুনা (2)	নমুনার পদগুলি (3)	মোট (4)	নমুনার গড় $(\bar{x})$ (5)
17	d, b	4, 1	5	2.5
18	d, c	4, 3	7	3.5
19	d, d	4, 4	8	4
20	d, e	4, 6	10	5
21	e, a	6, 2	8	4
22	e, b	6, 1	7	3.5
23	e, c	6, 3	9	4.5
24	e, d	6, 4	10	5
25	e, e	6, 6	12	6

টীকা : Col(5) = নমুনার গড় $(\bar{x})$ = নমুনার পদগুলির যোগফল ÷ নমুনার আয়তন = Col(4) ÷ 2

আমরা উপরের সারণী থেকে দেখছি যে SRSWR-এর ক্ষেত্রে 2 আয়তন বিশিষ্ট $N^n = 5^2 = 25$টি নমুনা পাওয়া গেল যাদের প্রত্যেকের সম্ভাবনা = $\frac{1}{N^n} = \frac{1}{25}$

এখানে বিভিন্ন নমুনায় নমুনা গড়ের মানগুলি লক্ষ করলে দেখা যাবে যে একই মান একাধিকবার এসেছে।

নমুনা গড়ের $(\bar{x})$ সম্ভাবনা বিভাজন (SRSWR-এর ক্ষেত্রে)

নমুনা গড় $(\bar{x})$:	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	6
সম্ভাবনা (p) :	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

টীকা : প্রতিটি নমুনা গড়ের সম্ভাবনা $\frac{1}{25}$ এবং $\sum P = \frac{1}{25} + \frac{2}{25} + \cdots\cdots + \frac{1}{25} = 1$

কিন্তু $\bar{x}$ এর মান 1 মাত্র 1 বার আছে, তাই তার সম্ভাবনা $\frac{1}{25}$

$\bar{x} = 1.5$ 2 বার আছে, তাই তার সম্ভাবনা $\frac{2}{25}$

$\bar{x} = 2$ 3 বার আছে, তাই তার সম্ভাবনা $\frac{3}{25}$ ইত্যাদি

(ii) SRSWOR এর ক্ষেত্রে সমগ্রকের আয়তন N ও নমুনার আয়তন n হলে মোট $^{N}c_{n}$ সংখ্যক নমুনা চয়ন করা হবে যাদের প্রত্যেকের সম্ভাবনা $\frac{1}{^{N}c_{n}}$. এখানে N = 5 এবং n = 2

সুতরাং মোট $^{N}c_{n} = {}^{5}c_{2} = 10$টি নমুনা চয়ন করা যাবে। এবং প্রতিটি নমুনার সম্ভাবনা = $\frac{1}{^{N}c_{n}} = \frac{1}{10}$ ।

সারণী সংখ্যা 4.8.2 : SRSWOR-এর ক্ষেত্রে সম্ভাব্য সংখ্যক নমুনা ও নমুনার গড় মান $(\bar{x})$

ক্রমিক নং (1)	সম্ভাব্য নমুনা (2)	নমুনার পদগুলি (3)	মোট (4)	নমুনার গড় $(\bar{x})$ (5)
1	a, b	2, 1	3	1.5
2	a, c	2, 3	5	2.5
3	a, d	2, 4	6	3
4	a, e	2, 6	8	4
5	b, c	1, 3	4	2
6	b, d	1, 4	5	2.5
7	b, e	1, 6	7	3.5
8	c, d	3, 4	7	3.5
9	c, e	3, 6	9	4.5
10	d, e	4, 6	10	5

SRSWOR এর ক্ষেত্রেও নমুনা গড়ের $(\bar{x})$ কোন কোন মান একাধিকবার পাওয়া গেছে।

SRSWOR এর ক্ষেত্রে নমুনা গড়ের $(\bar{x})$ সম্ভাবনা বিভাজন

নমুনা গড় $(\bar{x})$:	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
সম্ভাবনা (p) :	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

এবং $\sum P = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{10} = 1$

টীকা : প্রতিটি নমুনা গড়ের $(\bar{x})$ সম্ভাবনা = $\frac{1}{10}$

যেহেতু $\bar{x} = 1.5$ একবার আছে তাই সম্ভাবনা $\frac{1}{10}$

কিন্তু $\bar{x} = 2.5$ দুবার আছে তাই সম্ভাবনা $\frac{2}{10}$ ইত্যাদি

4.8.2 সরল সমসম্ভব নমুনা চয়ন পদ্ধতিসমূহ (Methods of Drawing Simple Random Sample)

সমগ্রক থেকে সরল সমসম্ভব নমুনা চয়নের দুটি প্রচলিত পদ্ধতি আছে (ক) লটারীর মাধ্যমে এবং (খ) সমসম্ভব সংখ্যা সারণী থেকে।

(ক) লটারী পদ্ধতি : এটি একটি বহুল প্রচলিত পদ্ধতি। এই পদ্ধতিতে প্রথমে সমগ্রকের অনুকরণে একটি ব্যবহার যোগ্য বিকল্প সমগ্রক তৈরী করা হয়। সমগ্রকের প্রতিটা একককে সমআকার ও সমআয়তনের কাগজ, কার্ড বা সিলিন্ডারের সাহায্যে বিকল্প সমগ্রক তৈরী করা হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় কোন ছোট লটারী প্রতিযোগিতায় পুরস্কার বিজেতাদের নির্বাচন করার জন্য বিক্রীত টিকিটের অংশগুলিকে (যেগুলি নির্দিষ্ট সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত) ছোট ধাতব মসৃণ সিলিন্ডারের মধ্যে ঢোকানো হয় এবং এই সিলিন্ডারগুলিকে একটি ঘূর্ণায়মান ড্রামের মধ্যে রাখা হয় যাতে এগুলি পুরোপুরিভাবে সংমিশ্রিত হয় এবং প্রতিটি সিলিন্ডার নির্বাচন সমসম্ভব হয়। এখন লটারীতে যতগুলি পুরস্কার দেওয়ার কথা থাকে, এই পদ্ধতিতে এক এক করে টিকিট ভর্তি সিলিন্ডার ড্রাম থেকে তোলা হয়। এখন ড্রাম থেকে তোলা নির্বাচিত টিকিটগুলি একটি সমসম্ভব নমুনা গঠন করে। যেহেতু প্রতিটি টিকিট তাদের ক্রমিক সংখ্যাবাদে একই রকম এবং যেহেতু টিকিটগুলি সমগ্রকের মধ্যে সম্পূর্ণভাবে সংমিশ্রিত করা হয়, তাই তাদের মধ্যে থেকে প্রত্যেকের নমুনায় নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা সমান।

যতই লটারী পদ্ধতি জনপ্রিয় এবং প্রচলিত হোক, রাশিবিজ্ঞানীরা সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহের জন্য এটিকে আদৌ সুপারিশ করেন না কেননা এই পদ্ধতিতে ব্যক্তিগত পক্ষপাত (personal bias) থাকার সম্ভাবনা উড়িয়ে দেওয়া যায় না। তাছাড়া, বিকল্প সমগ্রক সঠিকভাবে গঠন নাও হতে পারে—এককগুলির মধ্যে কমবেশী তফাৎ অধিকাংশ ক্ষেত্রেই দেখা যায়। সমগ্রক যদি খুব বড় হয় তাহলে বিকল্প সমগ্রক গঠন বাস্তবে অসম্ভব হয়ে পড়ে।

রাশিবিজ্ঞানীরা যে পদ্ধতিতে সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহের নির্দেশ দেন তা হ'ল সমসম্ভব সংখ্যা সারণীর (Random Sampling Numbers) ব্যবহার।

(খ) সমসম্ভব সংখ্যা সারণী থেকে নমুনা চয়ন :

এটি 0, 1, 2, ..., 9 অঙ্কগুলিকে নিয়ে তৈরী এমন একটি ঋজুরৈখিক (linear) বা আয়তাকার (Rectangular) সংখ্যা সারি যেখানে প্রত্যেক অঙ্কের যে কোন স্থানে আসার সম্ভাবনা সমান এবং যে কোন দুটি স্থানে অবস্থিত দুটি অঙ্কই পরস্পর স্বাধীন (independent)। এই সংখ্যা সারি এমনভাবে তৈরী করা হয়েছে যে, যে কোন জায়গা থেকে 0, 1, 2, ..., 9 এই দশটি অঙ্কের যে কোন একটি

অঙ্কের নির্বাচনের সম্ভাবনা সমান এবং তা হ'ল $\frac{1}{10}$। অনুরূপভাবে, এই সংখ্যা সারির যে কোন অংশ থেকে দুই-অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা (মোট এরূপ একশটি সম্ভাব্য সংখ্যা আছে—00, 01, 02, ..., 98, 99) বা তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা (এরূপ মোট হাজারটি সম্ভাব্য সংখ্যা আছে—000, 001, 002, ..., 998, 999) নেওয়ার সম্ভাবনা সমান এবং তা হ'ল যথাক্রমে $\frac{1}{100}$ এবং $\frac{1}{1000}$। এই পদ্ধতি পরপর তিনটির বেশী অঙ্কের ক্ষেত্রেও সমভাবে প্রযোজ্য। পাঠের সুবিধার জন্য সচরাচর এই রাশিমালা চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। সেইজন্য সমসম্ভব সংখ্যাসারিতে প্রতি পাঁচটা লাইনের পরে এবং প্রতি চারটে স্তম্ভের পরে একটু ফাঁক রাখা হয় (পরিশিষ্ট দ্রষ্টব্য)। বিভিন্ন সমসম্ভব সংখ্যা সারির মধ্যে Tippetts Series, Kendall and Babington Smith's Series, Fisher and Yate's series, Rand Corporation Series, ISI Series ইত্যাদি উল্লেখযোগ্য। এই বই-এর শেষে এরূপ একটি সমসম্ভব সংখ্যা সারণী দেওয়া আছে।

উদাহরণ 4.8.2 একটি বিশ্ববিদ্যালয়ে দ্বিতীয় বর্ষে বাণিজ্য বিভাগে পাঠরত 240 জন ছাত্র আছে যাদের শ্রেণী রোল নং 1 থেকে 240। এখন 240 জন ছাত্র থেকে SRSWOR কৌশল অবলম্বন করে 10 জন ছাত্রের একটি নমুনা চয়ন কর।

সমাধান : এখানে সমগ্রকের আয়তন N = 240 কেননা বিশ্ববদ্যালয়ের দ্বিতীয় বর্ষে বাণিজ্য বিভাগে পাঠরত মোট ছাত্রসংখ্যা 240 জন। এখানে সমগ্রকের আয়তন একটি তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা।

নমুনা চয়নের জন্য আমরা নিম্নলিখিত ধাপগুলি অনুসরণ করব।

ধাপ 1 : সমসম্ভব সংখ্যা সারণীর (Random Sampling Numbers) 20 তম সারি থেকে পরপর তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যাগুলি নেওয়া হয়েছে। নির্বাচিত প্রতিটি তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যাই সমসম্ভব (অর্থাৎ প্রত্যেকের সম্ভাবনা = $\frac{1}{240}$) এটা নিশ্চিত করার জন্য সারণী থেকে তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যাগুলি যথাক্রমে 001 থেকে 960 (240 এর সর্বোচ্চ তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার গুণিতক) পর্যন্ত গ্রহণ করব এবং অন্যান্য তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাগুলি (000 এবং 960-এর বেশী) বাদ দেব।

ধাপ 2 : সমসম্ভব সংখ্যা সারণী থেকে প্রাপ্ত তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যাকে সমগ্রকের আয়তন N = 240 দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ নথিবদ্ধ করব। এই ভাগশেষ 000 থেকে 239 এর মধ্যেই থাকবে। এখন ভাগশেষ 001 থেকে 239 ছাত্রদের শ্রেণী রোল নং কেই নির্দেশ করবে। আর ভাগশেষ যদি 000 হয় তবে যে ছাত্রটির শ্রেণী রোল নং 240, নমুনায় সে নির্বাচিত হবে।

ধাপ 3 : যেহেতু নমুনাটি SRSWOR ধরনের, তাই নমুনায় একজন ছাত্র নির্বাচিত হলে সেই ছাত্রটি পরে আর নির্বাচিত হতে পারবে না। অবশ্য SRSWR এর ক্ষেত্রে একজন ছাত্র নমুনায় একাধিকবার নির্বাচিত হতে পারে। নীচের ছকে নমুনা চয়নের প্রক্রিয়াটি বিস্তারিত ভাবে দেখানো হল।

সারণী নং 4.8.3 : 240 জন ছাত্রের সমগ্রক থেকে SRSWOR অনুযায়ী 10 জন ছাত্রের নমুনা

সমসম্ভব সংখ্যা সারণী থেকে গৃহীত তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা	240 দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ	নির্বাচিত ছাত্রের শ্রেণী রোল নং
037	037	37
341	101	101
535	055	55
199	199	199
576	096	96
520	040	40
676	196	196
627	147	147
310	070	70
057	057	57

টীকা : Random Sampling Number Table-এর 20 তম সারি (row) থেকে সংখ্যাগুলি সংগ্রহ করা হয়েছে যা পুস্তকের শেষে দেওয়া আছে।

নমুনা চয়নের কৌশল SRSWR ধরনের হলে একজন ছাত্র একবার নির্বাচিত হলেও সে পরে পুনরায় নির্বাচিত হতে পারে।

নমুনা চয়নের কৌশল SRSWOR ধরনের হলে একজন ছাত্র একবার নির্বাচিত হলে পরে আর নির্বাচিত হতে পারে না। যেহেতু বর্তমান ক্ষেত্রে একই ছাত্র একাধিকবার নির্বাচিত হয়নি, তাই SRSWR ও SRSWOR কৌশলের ফলাফল একই।

কিন্তু যদি SRSWOR কৌশলে দেখা যায় যে কোন ছাত্র একাধিকবার নির্বাচিত হয়েছে, তখন সেই ছাত্রের প্রথম নির্বাচন বৈধ ও পরবর্তী নির্বাচন অবৈধ ধরে নিয়ে পরবর্তী নির্বাচনগুলি খারিজ করে সমসম্ভব সংখ্যা সারণী থেকে আবার সমান সংখ্যক সংখ্যা নিয়ে একই পদ্ধতিতে নমুনা চয়ন করা হয়।

4.8.3 স্তরবিন্যস্ত সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ (Stratified Random Sampling)

যদি কোন সমগ্রকের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত তথ্যাবলী পৃথক বৈশিষ্ট্যযুক্ত (heterogeneous) হয় তবে সেখান থেকে সরাসরি সমসম্ভব নমুনা চয়ন করলে গবেষকের মুল লক্ষ্য পুরণ হয় না। এরূপ ক্ষেত্রে সমগ্রকের তথ্যগুলিকে পৃথক পৃথক বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী কতকগুলি উপদলে (Subgroups) বা স্তরে (Strata) বিভক্ত করা হয় যাতে বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী এগুলি নিজেরা একইরকম (homogeneous)। এবার সমগ্রকের প্রতিটি

উপদল থেকে পৃথকভাবে উপদলের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত পদসংখ্যা অনুযায়ী আনুপাতিক হারে সরল সমসম্ভব নমুনা চয়ন করা হয় এবং প্রতিটি উপদল থেকে সংগৃহিত নমুনাগুলি (Sub samples) একত্রে স্তরীভূত সমসম্ভব নমুনা গঠন করে।

প্রতিটি স্তর থেকে কতগুলো একক নেওয়া হবে সে সম্পর্কে বিভিন্ন মত আছে। n_i যদি i-তম স্তর থেকে নেওয়া নমুনা সংখ্যা হয়, প্রকৃষ্ট বণ্টনের (optimum allocation) ক্ষেত্রে n_i এর মান এমনভাবে নির্ণয় করা হয় যে, নির্দিষ্ট খরচের সাপেক্ষে প্রাক্কলকের মোট ভেদমান (Variance) যেন কম হয় অর্থাৎ সূক্ষ্মতা (precision) যেন বেশী হয়। প্রাক্কলকের সূক্ষ্মতা হিসাবে ভেদমানের অন্যোন্যক বা পূরক (reciprocal) কেই ধরা হয়। নানা বণ্টনের ক্ষেত্রে n_i এর মান নিম্নরূপ :

(i) প্রকৃষ্ট বণ্টন : $n_i \propto \dfrac{Ni\sigma_i}{\sqrt{C_i}}$

যেখানে N_i হ'ল i-তম স্তরের অন্তর্গত সমগ্রকের একক সংখ্যা, σ_i হ'ল i-তম স্তরের অন্তর্গত N_i সংখ্যক এককের সমক-বিচ্যুতি (Standard Deviation) এবং C_i হ'ল i-তম স্তরের কোন একককে নমুনায় অন্তর্ভুক্তি করার খরচ।

(ii) নেম্যান (Neyman)-এর বণ্টন : $n_i \propto N_i\sigma_i$ (এখানে ধরে নেওয়া হয় যে একক প্রতি খরচ প্রতিটি স্তরের ক্ষেত্রে সমান।

(iii) বোলের (Bowley's) সমানুপাতিক বণ্টন : $n_i \propto N_i$ (এই বন্টন অনুযায়ী সচরাচর বড় আয়তনের স্তর থেকে বেশী সংখ্যক একক নেওয়া হয় এবং কম আয়তনের স্তর থেকে কম সংখ্যক একক নেওয়া হয় নমুনা সংগ্রহের উদ্দেশ্যে। এক্ষেত্রে প্রতিটা স্তরের সমক পার্থক্য (standard deviation) ও একক প্রতি খরচ সমান ধরা হয়।

সমগ্রকের পূর্ণাকাঙ্ক (parameter) প্রাককলনে বা কোনো বৈশিষ্ট্য বিশ্লেষণে স্তরীভূত নমুনার নমুনাঙ্ক (statistic) অনেক উন্নতমানের প্রাককলক (estimator) হিসাবে বিবেচিত হয়।

উদাহরণস্বেরূপ বলা যায় যখন একজন গবেষক কোন কলেজে পাঠরত ছাত্রছাত্রীদের নিয়ে একটি স্তরীভূত সমসম্ভব নমুনা চয়ন করতে চান, তখন কলেজের ছাত্রছাত্রীদের (সমগ্রক) বিভিন্ন বিভাগ, নবাগত, প্রথম বর্ষ, দ্বিতীয় বর্ষ, তৃতীয় বর্ষ ইত্যাদি উপদলে ভাগ করে প্রতি উপদল থেকে সমসম্ভব নমুনা চয়ন করেন ও তাদের একত্রিত করে স্তরীভূত সমসম্ভব নমুনা গঠন করেন যেটি সমগ্রকের যথার্থ প্রতিনিধি।

যদি দেখা যায় যে সমগ্রকটিকে বিভিন্ন স্তরে ভাগ করা ব্যয়সাপেক্ষ এবং অসুবিধাজনক এবং পর্যাপ্ত পরিমাণে ভ্রমশূন্যতা (accuracy) পাওয়ার মত যদি বিভিন্ন স্তরের মধ্যে যথেষ্ট তফাৎ বা পার্থক্য না থাকে তাহলে স্তর বিন্যস্ত সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহকে উপযোগী হিসাবে ধরা উচিৎ নয়।

4.8.4 নিয়মানুগ (বা রীতিবদ্ধ) নমুনা সংগ্রহ (Systematic Sampling)

যে সব সমগ্রকের এককগুলো কোন নিয়ম অনুসারে—হয় বর্ণানুক্রমিক ভাবে (alphabetically) নয় কালক্রমানুসারে (chronologically) সাজানো থাকে এবং প্রতিটা এককের সাথে একটি ক্রমিক সংখ্যা দেওয়া থাকে, সেইসব সমগ্রক থেকে নমুনা সংগ্রহ করতে হ'লে এই বিশেষ পদ্ধতিতে নমুনা সংগ্রহ করা যেতে পারে। যদি সমগ্রকের আয়তন N এবং নমুনার আয়তন n হয় এবং $N/n = k$ (যেখানে k একটি অখণ্ড সংখ্যা), তাহলে নিয়মানুগ পদ্ধতিতে সমগ্রক তালিকার প্রথম k সংখ্যক একক থেকে যে কোন একটি একককে সরল সমসম্ভব পদ্ধতিতে নির্বাচন করা হয় এবং তারপর থেকে পর পর k-তম একক সংগ্রহ করে যাওয়া হয়, যতক্ষণ না প্রয়োজনীয় সংখ্যক n একককে পাওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক কোন জেলার অন্তর্গত 5000 গ্রাম থেকে 50টা গ্রামকে নমুনা হিসাবে চয়ন করতে হবে। এখানে $N = 5000$, $n = 50$ এবং $k = 100$। এবার প্রথম 1 থেকে 100-র মধ্যে কোন একটি সংখ্যা, ধরা যাক, 35 সমসম্ভব সংখ্যাসারির মাধ্যমে নির্বাচন করা হ'ল। তাহলে 35 ক্রমিক সংখ্যার গ্রামটিকে প্রথমেই নমুনার জন্য চয়ন করা হল। এরপর তালিকা থেকে প্রতি 100-তম গ্রামকে চয়ন করা হবে অর্থাৎ তালিকাভুক্ত 135, 235, 335, ... ইত্যাদি ক্রমিক সংখ্যা বিশিষ্ট গ্রামগুলিকে নমুনাতে অন্তর্ভুক্ত করা হবে। তাহলে দেখা যাচ্ছে যে, সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতির মত এখানেও নমুনা সংগ্রহের আগে সমগ্রকের এককগুলোর পূর্ণতালিকা তৈরী করা বিশেষ প্রয়োজন। সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রে যেখানে সমসম্ভব সংখ্যাসারির সাহায্যে নমুনা-এককগুলিকে নির্বাচন করা হয়, নিয়মানুগ নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রে শুধু প্রথম একককটিকেই সমসম্ভবভাবে নির্বাচন করা হয়। এইজন্যে নিয়মানুগ নমুনা সংগ্রহের পদ্ধতিকে মিশ্র নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতি হিসাবে ভাবা যেতে পারে—অংশত সম্ভাবনাশ্রয়ী (প্রথম নমুনা একককটি নির্বাচনের ক্ষেত্রে) ও অংশত সম্ভাবনা-নিরপেক্ষ (প্রথম নমুনা একক ছাড়া বাকী নমুনা একক সংগ্রহের ক্ষেত্রে কেননা বাকী এককগুলি নির্দিষ্ট হয়ে পড়ে যেইমাত্র প্রথম একককটিকে নির্বাচন করা হয়।)

কিন্তু যখন নমুনাজ অন্তর (Sampling interval) $\frac{N}{n}$ অখণ্ড সংখ্যা হয় না, তখন বৃত্তীয় নিয়মানুগ নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতিতে (Circular Systematic Sampling) নমুনা সংগ্রহ করা হয়। এখানে সমগ্রকের N সংখ্যক একক থেকে যে কোন একটিকে সমসম্ভব পদ্ধতিতে নির্বাচন করা হয় এবং নমুনায় অন্তর্ভুক্ত করা হয়। তারপর থেকে প্রতি k তম একককে নির্বাচন করে যাওয়া হয় বৃত্তাকারে যতক্ষণ না প্রয়োজনীয় n সংখ্যক এককে নেওয়া হয়। এখানে k হল $\frac{N}{n}$ এর সবচেয়ে কাছের অখণ্ড সংখ্যা।

ধরা যাক্ সমগ্রকের আয়তন $N = 31$ ও নমুনার আয়তন $n = 4$. 31টি একক থেকে যে কোন একটিকে সমসম্ভব পদ্ধতিতে নির্বাচন করা হ'ল। ধরা যাক্ নির্বাচিত একককটির ক্রমিক সংখ্যা 13. যেহেতু $k = \frac{N}{n} = \frac{31}{4} = 7.75$ যা 8 এর আসন্ন, তাহলে অন্যান্য নির্বাচিত ক্রমিক সংখ্যা বৃত্তাকারে নিলে হবে 21, 29 ও 6.

নিয়মানুগ নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতি ব্যবহারিক দিক থেকে অত্যন্ত সুবিধাজনক। পদ্ধতিটি খুব সহজ ও কম সময়ের মধ্যে এই পদ্ধতিতে নমুনা সংগ্রহ করা যায়। অসুবিধার মধ্যে দেখা যায় যে এই পদ্ধতিতে প্রাপ্ত প্রাককলক বেশ ভালরকম পক্ষপাত দুষ্ট (baised) হয়, যদি k-তম এককগুলিতে বা k-র কোন গুণিতক এককগুলির ক্ষেত্রে পুনরাবৃত্ত বৈশিষ্ট্য (periodic features) দেখা যায়। যদি ক্রমানুসারে সাজানো মানগুলির মধ্যে ক্রমশ বৃদ্ধি পাওয়ার বা ক্রমশ হ্রাস পাওয়ার প্রবণতা দেখা যায় তাহলে এই পদ্ধতির প্রাককলক সরল সমসম্ভব পদ্ধতির থেকে অধিকতর নিখুঁত। এই সব অসুবিধা সত্ত্বেও এই পদ্ধতি বেশ ভালভাবে ব্যবহৃত হয় উৎপন্ন দ্রব্যের নমুনা নেওয়ার সময়, কৃষিভিত্তিক সমীক্ষায়, বনাঞ্চলে ও আর্থ সামাজিক সমীক্ষার জন্য।

4.8.5 বহুবিভাগী নমুনা সংগ্রহ (Multi Stage Sampling)

বিভিন্ন বিভাগ বা ধাপ অনুযায়ী নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতিকে বহুবিভাগী নমুনা সংগ্রহ বলা হয়। এখানে প্রথমে সমগ্রককে কয়েকটা বড় অংশে ভাগ করা হয়, যেগুলোকে প্রথম বিভাগীয় একক (First stage unit) হিসাবে গণ্য করা হয়। এরপর প্রথম বিভাগীয় এককগুলোকে তুলনামূলকভাবে কয়েকটা ছোট অংশে ভাগ করা হয়, যেগুলোকে বলা হয় দ্বিতীয় বিভাগীয় একক (Second stage unit)। এইভাবে দ্বিতীয় বিভাগীয় একককে তৃতীয় বিভাগীয় এককে (Third stage unit), তৃতীয় বিভাগীয় একককে চতুর্থ বিভাগীয় এককে (Fourth stage unit) ইত্যাদিতে ভাগ করে যাওয়া হয়, যতক্ষণ না প্রয়োজনীয় গ্রহণযোগ্য নমুনা এককে পৌঁছতে পারা যায়।

এই নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতিতে প্রথমে প্রথম বিভাগীয় এককগুলি থেকে সমসম্ভব উপায়ে কিছু একককে নেওয়া হয়। এরপর প্রত্যেক নির্বাচিত প্রথম বিভাগীয় একক থেকে কয়েকটা দ্বিতীয় বিভাগীয় একককে সমসম্ভব উপায়ে নেওয়া হয়। এইভাবে নমুনা সংগ্রহ করে যেতে হবে যতক্ষণ না সর্বশেষ নমুনা এককের বাঞ্ছিত নমুনা নেওয়া হয়।

উদাহরণ : যখন কোন রাজ্য সরকার পরীক্ষামূলকভাবে কোন গ্রাম উন্নয়নমূলক প্রকল্প চালু করতে চায়, তখন সেই রাজ্যের কিছু সংখ্যক গ্রাম নির্বাচন করার দরকার হয়ে পড়ে। এরূপ ক্ষেত্রে বহুবিভাগী নমুনা সংগ্রহ বিশেষ উপযোগী। একটি রাজ্যে কিছু সংখ্যক জেলা নিয়ে গঠিত, প্রতিটি জেলা কিছু সংখ্যক মহকুমা নিয়ে গঠিত, প্রতিটি মহকুমা কিছু সংখ্যক ব্লক নিয়ে গঠিত, প্রতিটি ব্লক কিছু সংখ্যক গ্রাম পঞ্চায়েত নিয়ে গঠিত এবং প্রতিটি গ্রাম পঞ্চায়েত কিছু সংখ্যক গ্রাম নিয়ে গঠিত। এক্ষেত্রে আমরা নির্বাচিত জেলাগুলিকে প্রথম বিভাগীয় একক এবং গ্রামগুলিকে শেষ বিভাগীয় একক হিসাবে গণ্য করা হয়। শুরু থেকে শেষ পর্যন্ত প্রতি বিভাগেই নমুনা চয়ন করা হয়। সমসম্ভব নমুনা চয়ন কৌশল অবলম্বন করে প্রথমে প্রয়োজনীয় সংখ্যক জেলা, পরবর্তী বিভাগে প্রতিটি নির্বাচিত জেলা থেকে প্রয়োজনীয় সংখ্যক মহকুমা ও পরবর্তী বিভাগে নির্বাচিত প্রতিটি মহকুমা থেকে প্রয়োজনীয় সংখ্যক ব্লক, তার পরবর্তী বিভাগে প্রতিটি নির্বাচিত ব্লক থেকে প্রয়োজনীয় সংখ্যক গ্রাম পঞ্চায়েত ও শেষ বিভাগে নির্বাচিত প্রতিটি গ্রাম পঞ্চায়েত

থেকে প্রয়োজনীয় সংখ্যক গ্রাম নির্বাচন করা হয় এবং প্রতিক্ষেত্রেই সমসম্ভব নমুনা চয়ন কৌশল অবলম্বন করা হয়।

বহুবিভাগী নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতির ব্যবহারিক সুবিধাগুলির মধ্যে প্রথমেই উল্লেখ করতে হয় এর বিস্তৃতি প্রয়োগসীমা। এছাড়া এখানে দ্বিতীয় নমুনা এককের পূর্ণ তালিকা করা প্রয়োজন শুধুমাত্র নির্বাচিত প্রথম বিভাগীয় এককগুলির ক্ষেত্রে। পরবর্তী বিভাগীয় নমুনা একক সম্বন্ধে একই কথা প্রযোজ্য। এইজন্য এই পদ্ধতির সাহায্যে নমুনা সংগ্রহ সর্বোপরি খরচ কম হয়। এছাড়া দুর্গমস্থান যুক্ত সমগ্রকের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতিতে নমুনা সংগ্রহ করা বেশ সুবিধাজনক। অসুবিধার মধ্যে অন্যান্য নমুনাসংগ্রহ পদ্ধতিগুলোর তুলনায় এই পদ্ধতি যথেষ্ট নিখুঁত নয়। তাছাড়া বিভাগ বেড়ে যাওয়ার সাথে রাশিবিজ্ঞানসম্মত বিশ্লেষণও জটিল হয়ে পড়ে।

4.8.6 বহুপর্যায়ী নমুনা সংগ্রহ

যদি কোন সমীক্ষা ক্ষেত্রে দেখা যায় যে, যে সকল তথ্য সংগ্রহ করতে হবে তারা সমান গুরুত্বপূর্ণ নয় এবং তাদের সংগ্রহ করার খরচ এক নয়, তাহলে সেই সমীক্ষায় এই প্রক্রিয়ায় নমুনা সংগ্রহ করা যেতে পারে। এখানে প্রথম পর্যায়ে কিছু একককে নির্বাচন করে, অতি সহজেই এবং কম খরচে পাওয়া যায় এরকম কিছু গুরুত্বপূর্ণ তথ্য সংগ্রহ করা হয়। পরবর্তীকালে, দ্বিতীয় পর্যায়ে, প্রথম পর্যায়ে নির্বাচিত নমুনার একটি অংশ নির্বাচন করার পরে অন্যান্য তথ্য গ্রহণ করা হয়। প্রথম পর্যায়ে পাওয়া তথ্যবলীকে দ্বিতীয় পর্যায়ে নমুনা সংগ্রহের ব্যাপারে ব্যবহার করা যেতে পারে। এইভাবে পর্যায় সংখ্যা প্রয়োজনমত বাড়ানো যেতে পারে। উদাহরণ স্বরূপ, যদি জানতে চাওয়া হয় কোন শিল্পাঞ্চলে শতকরা কতজন যক্ষ্মা রোগাক্রান্ত, তাহলে এইভাবে এগোন যাবে। প্রথম পর্যায়ে সমগ্রকের N সংখ্যক ব্যক্তির মধ্য থেকে নির্বাচিত n-সংখ্যক ব্যক্তির ক্ষেত্রে প্রাথমিক ডাক্তারি পরীক্ষার মাধ্যমে জানা ভাল যে n_1 জনের মধ্যে যক্ষ্মার জীবাণু থাকতে পারে এবং অবশিষ্ট $n_2 = (n - n_1)$ জনের মধ্যে যক্ষ্মার জীবাণু হয়তো নেই। এরপর দ্বিতীয় পর্যায়ে, প্রথম পর্যায়ে পাওয়া তথ্যের ভিত্তিতে তৈরী করা দুটো ভাগ থেকে যথাক্রমে m_1 এবং m_2 জনকে নির্বাচিত করা হল এবং X-Ray পরীক্ষার মাধ্যমে দেখা গেল যে তাদের মধ্যে যথাক্রমে x_1 এবং x_2 জন যক্ষ্মা রোগাক্রান্ত। এইভাবে বহুপর্যায়ী নমুনা সংগ্রহ করা হয়। বর্তমানে উদাহরণে সমগ্রকের মধ্যে যক্ষ্মা রোগাক্রান্ত ব্যক্তির শতকরা হিসাবের প্রাক্কলক হিসাব নেওয়া যেতে পারে।

$$\frac{\frac{n_1x_1}{m_1} + \frac{n_2x_2}{m_2}}{n_1 + n_2} \times 100$$

লক্ষ্যণীয় যে, বহুবিভাগী ও বহুপর্যায়ী নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতি দুটি কিন্তু আলাদা—বহু পর্যায়ী নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রে নমুনা-একক একই থাকে, শুধুমাত্র বিভিন্ন পর্যায়ে নমুনা সংখ্যার পরিবর্তন ঘটে, অথচ বহু বিভাগী নমুনা সংগ্রহের ক্ষেত্রে বিভিন্ন বিভাগের নমুনা একক আলাদা।

4.8.7 গুচ্ছ নমুনা সংগ্রহ

এই নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতিতে প্রথমে সমগ্রককে কয়েকটা গুচ্ছ বা ব্লকে ভাগ করা হয় যেখানে কোন গুচ্ছের অন্তর্গত নমুনা-এককগুলোর মধ্যে বৈশাদৃশ্য থাকতে পারে কিন্তু বিভিন্ন গুচ্ছগুলোর মধ্যে তারতম্য খুব একটা লক্ষ্য করা যায় না। এরপর গুচ্ছগুলোর মধ্য থেকে কয়েকটাকে উপযুক্ত নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতির মাধ্যমে, সাধারণতঃ সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতি দ্বারা নির্বাচন করে প্রত্যেকটার উপর সম্পূর্ণ সমীক্ষা করা হয়। যদিও এই পদ্ধতি খুব সহজ ও সাধারণ কিন্তু এটা মোটেই বিজ্ঞানসম্মত নয় এবং এখানে ব্যক্তিগত পক্ষপাত (personal bias) থাকা অস্বাভাবিক নয়। তবু পরিচালনগত ও প্রশাসনিক স্তরে কিছু সুবিধা থাকায় এই পদ্ধতিতে নমুনা সংগ্রহ অনেক ক্ষেত্রে পছন্দ করা হয়।

মন্তব্য : গুচ্ছ নমুনা সংগ্রহের সঙ্গে স্তর বিন্যস্ত সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহের মিল খুঁজে পেলেও গুচ্ছের সঙ্গে স্তরকে এক করলে হবে না কেননা স্তরের অন্তর্ভুক্ত নমুনা-এককগুলোর মধ্যে মোটামুটি সাদৃশ্য থাকলেও গুচ্ছের ক্ষেত্রে তা নাও হতে পারে।

4.8.8 বরাদ্দ নির্দিষ্ট (বা কোটা ভিত্তিক) নমুনা সংগ্রহ

এই পদ্ধতিতে কোন অর্ন্তসম (homogeneous) সমগ্রককে কয়েকটি অংশে (segments) ভাগ করা হয় এবং পূর্ব নির্দিষ্ট অংশ পিছু বরাদ্দ করা অনুপাত অনুযায়ী গণনাকারীকে বলা হয় প্রতি অংশ থেকে নমুনা সংগ্রহ করতে। এখানে গণনাকারী তার নিজস্ব বিচারবুদ্ধি কাজে লাগিয়ে অংশ পিছু বরাদ্দ করা নমুনা সংগ্রহ করতে পারেন। উদাহরণ স্বরূপ কোন বিশ্ববিদ্যালয়ে 20টি বিভাগের মোট 3000 জন ছাত্রছাত্রীর মধ্যে যদি 300 জনকে নির্বাচন করতে হয়, তাহলে 20টি বিভাগের প্রত্যেকটির জন্য বরাদ্দ করা নির্দিষ্ট অনুপাত অনুযায়ী ছাত্র-ছাত্রী নির্বাচন করে এই 300 জনকে নিতে হবে। মনে রাখতে হবে, বিভাগ-পিছু বরাদ্দ করা অনুপাত, সেই বিভাগের ছাত্র ছাত্রীর মোট সংখ্যার উপর নির্ভর করছে। বরাদ্দ নির্দিষ্ট নমুনা সংগ্রহকে এক প্রকার বিবেচনা নির্ভর নমুনা সংগ্রহ (Judgement Sampling) হিসাবে ভাবা যেতে পারে। যদিও এই পদ্ধতি সহজ ও খরচ কম, এই পদ্ধতিতে অনেক ধরনের ভুল ও পক্ষপাত ঘটার সম্ভাবনা থাকে।

আর্থ-সামাজিক সমীক্ষা, জনমত সমীক্ষা এবং বাজার বিশ্লেষণ (Market research)-এর ক্ষেত্রে এই নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতির বহুল প্রচলন লক্ষ করা যায়।

4.9 একক পূর্ণাকাঙ্ক, নমুনাঙ্ক (বা পরিসংখ্যক) ও নমুনাবিন্যাস

ধরা যাক নেতাজী সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের কোন এক বছরে স্নাতক স্তরে প্রথম বর্ষে যত ছাত্র আছে সবাই মিলে একটা সমষ্টি বা সমগ্রক (population) তৈরী করে। প্রত্যেক ছাত্র এক একটা একক।

আমরা এই সমগ্রকের সব ছাত্রের গড় উচ্চতা জানতে চাই। এই গড় উচ্চতা গোটা শ্রেণীর (বা সমগ্রকের) জন্য প্রযোজ্য। তবে এই গড় উচ্চতা মাপতে গেলে প্রত্যেক ছাত্রের উচ্চতা মাপতে হবে।

আবার ধরা যাক্ ঐ একই শ্রেণীর (প্রথম বর্ষের) ছাত্রদের পারিবারিক সদস্য পিছু গড় মাসিক আয় জানতে চাই। একই সমগ্রক ও একই একক রইল। এখানে প্রত্যেক ছাত্রের জন্য দুটি চলক একইসঙ্গে জানতে হবে। এক, তার পরিবারের সদস্য সংখ্যা, দুই, পারিবারিক মাসিক মোট আয়।

এখানে একই সমগ্রকের দুটি বৈশিষ্ট্য—গড় উচ্চতা ও গড় মাসিক আয় আমরা জানতে চাইছি। এই দুটিই হ'ল সমগ্রকের পূর্ণাকাঙ্ক (parameters)।

একক : অবেক্ষণ (Statistical investigation) করা যায় এমন এক বা একাধিক সত্তাকে আমরা একক বলি। এককগুলি অবশ্যই সুনির্দ্দিষ্ট এবং পরস্পর বিচ্ছিন্ন হবে। তবে অনুসন্ধানের প্রয়োজন অনুসারেই এককের মনোনয়ন করা হয়। একটা পরিবার, একটা বাসগৃহ, একটা গ্রাম বা শহর, একটা গাছ ইত্যাদি যে কোনটাই একক হতে পারে। একক সমীক্ষার উদ্দেশ্যের উপর নির্ভরশীল। একটি সমগ্রকে যতগুলো একক থাকে তাকে সমগ্রকের আয়তন বলে। একইভাবে একটি নমুনাতে যতগুলো একক থাকে তাকে নমুনার আয়তন বলে।

পূর্ণাকাঙ্ক : পরিসংখ্যনীয় অনুসন্ধানের (Statistical Investigation) আসল লক্ষ্য হল সমগ্রকের এক বা একাধিক বৈশিষ্ট্য বিশ্লেষণ করে তার সম্পর্কে একটা স্পষ্ট ধারণা করা। ধরা যাক্ একটি সমগ্রকের আয়তন হ'ল N এবং সমগ্রকের এককগুলি বা পদগুলি হ'ল X_1, X_2, X_3, ……., X_N সুতরাং সমগ্রকটি গড়মান এবং ভেদমান হবে যথাক্রমে :

সমগ্রকের গড় মান : $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$

সমগ্রকের ভেদমান : $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2$

এখন এইসব পরিসংখ্যনীয় হিসাব (Statistical Calculation) যা সমগ্রকের সমস্ত এককের কোন বৈশিষ্ট্য চলকের (যেমন ছাত্রদের উচ্চতা) মানগুলির উপর নির্ভর করে গঠিত (যেমন গড়মান, ভেদমান ইত্যাদি), তাদের বলা হয় সমগ্রকের পূর্ণাকাঙ্ক (parameters)। এখানে সমগ্রকের গড় মান (μ) ও ভেদমান (σ^2) সমগ্রকের এককগুলির মানের উপর নির্ভর করে গঠিত তাই μ ও σ^2 কে বলা হয় সমগ্রকের পূর্ণাকাঙ্ক।

নমুনাঙ্ক : এখন ধরা যাক্ এই সমগ্রক থেকে একটা নমুনা সংগ্রহ করা হ'ল যার আয়তন হ'ল n এবং নমুনার এককগুলি হ'ল x_1, x_2, x_3, ………, x_n.

এই নমুনা সংগ্রহের মাধ্যমে আমরা সমগ্রকের এক বা একাধিক বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে একটা ধারণা করার চেষ্টা করি।

এবার নমুনাটির গড় মান ও ভেদমান আমরা লিখতে পারি যথাক্রমে :

নমুনার গড় মান : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

নমুনার ভেদমান : $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$

এইসব পরিসংখ্যনীয় হিসাব (Statistical Calculation) যেগুলি নমুনার এককগুলির কোন বৈশিষ্ট্য চলকের মানগুলির উপর নির্ভর করে গঠিত তাদের বলা হয় নমুনার পরিসংখ্যক বা নমুনাঙ্ক (Statistic) তাই এখানে নমুনা গড় ($\overline{x}$) ও নমুনার ভেদমান (s^2) হল নমুনাটির পরিসংখ্যক বা নমুনাঙ্ক (Statistic)।

নমুনার পরিসংখ্যকের (বা নমুনাঙ্কের) বিন্যাস/বিভাজন (Sampling distribution of the Statistic) :

সমগ্রকের পূর্ণাকাঙ্কের মান সর্বদা একই হয় অর্থাৎ সমগ্রকের গড় মান (μ) এবং ভেদমান (σ^2) কখনই পরিবর্তিত হয় না—সর্বদা একই থাকে। কিন্তু ঐ সমগ্রক থেকে যদি একই আয়তনের বিভিন্ন নমুনা (SRSWR ও SRSWOR কৌশলের মাধ্যমে) চয়ন করা যায় তবে দেখা যাবে যে নমুনার গড় মান ($\overline{x}$) বা ভেদমান (s^2) এক নমুনা থেকে অন্য নমুনায় পরিবর্তিত হতে পারে। একইভাবে যদি N আয়তনের একটি সমগ্রক থেকে n আয়তন বিশিষ্ট নমুনা এক এক করে সংগ্রহ করা যায় ও তাদের পরিসংখ্যকের মান গণনা করা যায় তবে দেখা যাবে পরিসংখ্যকের মান এক নমুনা থেকে অন্য নমুনায় পরিবর্তিত হচ্ছে। এখন যদি নমুনার সংখ্যা বেশী হয় তবে নমুনার পরিসংখ্যকের (statistic) মান অনুযায়ী একটি সম্ভাবনা বিভাজন বা পরিসংখ্যা বিভাজন প্রস্তুত করা যায়। পরিসংখ্যকের বা নমুনাঙ্কের এই সম্ভাবনা বিভাজনকে বলা হয় নমুনার পরিসংখ্যকের (বা নমুনাঙ্কের) বিন্যাস/বিভাজন (Sampling distribution of the Statistic). এই নমুনাঙ্কের সম্ভাবনা বিভাজনের দুটি মাত্রা থাকে—গড় ও সমক বিচ্যুতি। এই গড়কে বলা হয় নমুনাঙ্কের প্রত্যাশা (expectation) এবং এই সমক বিচ্যুতিকে বলা হয় নমুনাঙ্কের প্রমাণ ভ্রান্তি (Standard error of the statistic)।

4.10 নমুনা গড়ের গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণ ভ্রান্তি বা সমক ভ্রান্তি

ধরা যাক্ N আয়তন বিশিষ্ট একটি সমগ্রক থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে n আয়তন বিশিষ্ট একটি নমুনা চয়ন করা হল। সমগ্রকের এককগুলির মান যথাক্রমে $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ অপরদিকে সমগ্রক থেকে সংগৃহীত নমুনার এককগুলির মান যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ (এখানে x_i হ'ল নমুনায় i-তম টানে প্রাপ্ত সমগ্রকের একক।

লক্ষ্যণীয় বিষয় হ'ল x_1 কিন্তু X_1 হতেও পারে আবার নাও হতে পারে। x_1 হ'ল সমগ্রক থেকে প্রথমবার যে এককটিকে টানা হ'ল তার মান, যেটি $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_n$ এর মধ্যে যে কোনও মান হতে পারে। এখন সংজ্ঞানুসারে, সমগ্রকের গড় মান $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ ও ভেদমান,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2$$

একইভাবে, নমুনার গড় মান ও ভেদমান যথাক্রমে $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ এবং $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

এখন আমরা নমুনা গড়ের $(\bar{x})$ প্রমাণ ভ্রান্তি নির্ণয় করব।

এখানে আমরা দুটি ভিন্ন পদ্ধতিতে সংগৃহীত নমুনা SRSWR এবং SRSWOR-এর পরিপ্রেক্ষিতে আলাদাভাবে নমুনা গড়ের $(\bar{x})$ প্রমাণ ভ্রান্তি নির্ণয় করব।

(ক) প্রথমত, প্রতিস্থাপনযোগ্য নমুনা চয়নের ক্ষেত্রে নমুনা গড়ের গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণ ভ্রান্তি (Expectation and Standard error of Sample mean under SRSWR)

নমুনা গড় : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

নমুনা চয়নের জন্য আমরা SRSWR কৌশল অবলম্বন করেছি।

সুতরাং নমুনার এককের মানগুলি $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ পরস্পর স্বাধীন। কারণ প্রতিটি একক চয়নের

পরেই সেই একককে সমগ্রকে ফেরৎ দেওয়া হয়েছে। অর্থাৎ নমুনা চয়নের সময় i-তম টান কোনোভাবেই j-তম টানকে প্রভাবিত করে না।

সুতরাং নমুনা গড়ের গাণিতিক প্রত্যাশা হবে—

$$E(\overline{x}) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} E(x_i)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}.n\mu = \mu$$

যেহেতু $E(x_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i\, P(x_i = X_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i.\frac{1}{N} = \mu$

[কারণ i-তম টান ও j-তম টান সম্পূর্ণ স্বাধীন এবং উভয় ক্ষেত্রেই সম্ভাবনা মান হবে $\frac{1}{N}$]

সুতরাং দেখা গেল যে নমুনা গড়ের প্রত্যাশাই হ'ল সমগ্রকের গড় মান। অথবা বলতে পারি নমুনাগুলির গড় মান হবে সমগ্রকের গড় মান।

এবার x_i (i = 1, 2, ..., n) এর ভেদমান হবে,

$Var(x_i) = E[x_i - E(x_i)]^2 = E[x_i - \mu]^2$, যেহেতু $E(x_i) = \mu$

$$= \sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2 P(x_i = X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2 . \frac{1}{N}$$

$$= \sigma^2$$

$\therefore Var(x_i) = \sigma^2$, i-এর যে কোন মানের জন্য (i = 1, 2, ..., n)

এখন, নমুনা গড়ের সমক পার্থক্য = নমুনা গড়ের সমক ভ্রান্তি

$$= SE(\overline{x}) = \sqrt{Var(\overline{x})}$$

এবার, $Var(\overline{x}) = Var\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right]$

$$= \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} Var(x_i) + 2\sum_{i,j} Cov(x_i, x_j)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(x_i),$$

$$= \frac{1}{n^2}.n\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

যেহেতু Cov $(x_i, x_j) = 0$, i, j-এর যে কোন মানের জন্য সত্য। $(i < j)$

$[Cov\ (x_i, x_j) = E\ [(x_i - \mu)\ (x_j - \mu)]$

{কারণ, $E(x_i) = \mu$ এবং $E(x_j) = \mu$}

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} (X_i - \mu)(X_j - \mu).P[x_i = X_i]P[x_j = X_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} (X_i - \mu)(X_j - \mu).\frac{1}{N}.\frac{1}{N}$$

$$\left\{\text{যেহেতু, } P\left[x_i . X_i\right] = P\left[x_j = X_j\right] = \frac{1}{N}\right\}$$

$$\therefore \text{ Cov } (x_i, x_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j-1}^{N} (X_i - \mu)(X_j - \mu) . \frac{1}{N^2}$$

$$= \frac{1}{N^2} . \sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu) \sum_{j=1}^{N} (X_j - \mu)$$

$$= \frac{1}{N^2} . 0.0 = 0$$

$$\left\{\text{কারণ, } \sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu) = \sum_{j=1}^{N} (X_j - \mu) = 0\right\}$$

$\therefore$ Cov $(x_i, x_j) = 0$, i,j,-র যে কোন মানের জন্য সত্যি।]

$$\therefore \quad \text{Var}(\overline{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\text{কিন্তু } SE(\overline{x}) = \sqrt{\text{Var}(\overline{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{n}$$

সুতরাং, SRSWR পদ্ধতিতে নমুনা চয়ন করলে নমুনা গড়ের প্রত্যাশা, $E(\overline{x}) = \mu$ এবং নমুনা গড়ের প্রমাণ ভ্রান্তি

$$SE(\overline{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(খ) দ্বিতীয়ত, অপ্রতিস্থাপনযোগ্য নমুনা চয়নের সময় নমুনা গড়ের গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণ ভ্রান্তি (Expectation and Standard error of Sample mean under SRSWOR)

SRSWOR পদ্ধতিতে নমুনা চয়ন করলে n সংখ্যক নমুনার এককগুলি অর্থাৎ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ পরস্পর স্বাধীন নয়। প্রথম টানে সমগ্রকের যে একটি নির্বাচিত হয়, তা আর সমগ্রকের মধ্যে ফিরিয়ে দেওয়া হয় না ফলে একটি পদ নির্বাচিত হলে, পরে আর সেটি নির্বাচিত হতে পারে না। সমগ্রকের আয়তন ক্রমশ কমতে থাকে। যদি প্রথম টানে (i-তম টান ধরা যাক্) সমগ্রকের আয়তন N হয়, তাহলে j-তম টানে সমগ্রকের আয়তন হবে (N – 1)

তাহলে $P(x_i = X_i) = \frac{1}{N}$ এবং $P[x_j = X_j] = \frac{1}{N-1}$ হবে।

এক্ষেত্রে, $\text{Cov}(x_i, x_j) \neq 0$

$\therefore \text{Cov}(x_i, x_j) = E[\{x_i - E(x_i)\}.\{x_j - E(x_j)\}]$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N-1}(X_i-\mu)(X_j-\mu).P[x_i = X_i].P[x_j = X_j] \quad [\because E(x_i) = E(x_j) = \mu]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N-1}(X_i-\mu)(X_j-\mu).\frac{1}{N}.\frac{1}{N-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu).\sum_{j=1}^{N-1}(X_j-\mu).\frac{1}{N(N-1)}$$

$$= -\frac{1}{N(N-1)}.\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu)^2$$

$$\left[\text{যেহেতু} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N-1}(X_j-\mu)+(X_i-\mu)=0\right.$$

$$\left.\therefore \sum_{j=1}^{N-1}(X_j-\mu) = -(X_i-\mu)\right]$$

$$= -\frac{1}{N-1}.\sum_{i=1}^{N}\frac{(X_i-\mu)^2}{N} = -\frac{\sigma^2}{N-1} < 0$$

$$\therefore \text{ Cov } (x_i, x_j) = -\frac{\sigma^2}{N-1} < 0$$

সুতরাং SRSWOR এর ক্ষেত্রে নমুনা গড়ের গাণিতিক প্রত্যাশা ও সমক ভ্রান্তি =

$$E(\bar{x}) = E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(x_i) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n^{\mu}}{n} = \mu$$

$\therefore$ নমুনা গড়ের গাণিতিক প্রত্যাশা : $E(\bar{x}) = \mu$

এখন, নমুনা গড়ের ভেদমান : $Var(\bar{x}) = Var\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}Var(x_i) + 2\sum_{i<j}Cov(x_i, x_j)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 + 2.\frac{n(n-1)}{2}.\frac{-\sigma^2}{N-1}\right]$$

$$\left[\because Var(x_i) = \sigma^2,\ Cov(x_i, x_j) = \frac{-\sigma^2}{N-1} \text{ এবং } \sum_{i<j} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\right]$$

$$\therefore \ Var(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2 - 2.\frac{n(n-1)}{2}.\frac{\sigma^2}{N-1}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2 - n(n-1).\frac{\sigma^2}{N-1}\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\sigma^2}{N-1} = \frac{\sigma^2}{n}\left[1 - \frac{n-1}{N-1}\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{N-1-n+1}{N-1}\right] = \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$$

সুতরাং, SRSWOR পদ্ধতিতে নমুনা গড়ের সমক ভ্রান্তি :

$$SE(\overline{x}) = \sqrt{Var(\overline{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

টীকা : (ক) SRSWR ও SRSWOR উভয় পদ্ধতিতে নমুনার আয়তন (n) বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে নমুনা গড়ের সমক ভ্রান্তি $\{SE(\overline{x})\}$ ক্রমশ কমতে থাকে।

(খ) SRSWR-এর তুলনায় SRSWOR-এর ক্ষেত্রে $Var(\overline{x})$ এবং $SE(\overline{x})$ দুয়েরই মান কম হয় কারণ $(N - n) < (N - 1)$

(গ) যদি সমগ্রকের আয়তন খুব বড় হয়, তবে $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ এই অনুপাতের মান প্রায় 1-এর কাছাকাছি হবে এবং এর জন্য এটিকে সসীম সমগ্রক সংশোধন (Finite Population Correction) বলে।

(ঘ) SRSWOR-এর ক্ষেত্রে $Var(\overline{x}) = 0$ হবে যখন $N = n$ হয়। অর্থাৎ যখন সমগ্রকটিকে সম্পূর্ণভাবে পরীক্ষা করা হয় তখন প্রমাণ ভ্রান্তি বলে কিছু থাকে না।

উদাহরণ 4.10.1 অর্থনীতির পরীক্ষায় 5 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর হ'ল 20, 24, 20, 30 ও 26. অপ্রতিস্থাপন যোগ্য নমুনা চয়নের পদ্ধতিতে একটি 2-আয়তনের সরল সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হ'ল। সমস্ত সম্ভাব্য নমুনার নমুনা গড় নির্ণয় কর ও এই নমুনাগড়ের নমুনা বিভাজন উপস্থাপিত কর। এবার ঐ নমুনা গড়ের গাণিতিক প্রত্যাশা সমগ্রকের গড়ের সমান কিনা যাচাই কর। নমুনা গড়ের প্রমাণ ভ্রান্তি সোজাসুজি নমুনা বিভাজন থেকে নির্ণয় কর। উপযুক্ত ফর্মুলার সাহায্যেও এই প্রমাণ ভ্রান্তি নির্ণয় করে দেখাও।

সমাধান : ধরা যাক 5টি ছাত্রের ক্রমিক সংখ্যা যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5। এক্ষেত্রে মোট সমগ্রকের আয়তন N = 5 এবং নমুনার আয়তন n = 2। সুতরাং মোট নমুনার সংখ্যা হবে, অপ্রতিস্থাপযোগ্য নমুনা চয়নের পদ্ধতি অনুসারে (SRSWOR) $^5c_2$ অথবা 10টি (চয়নের ক্রম এখানে ধরা হয়নি) এই 10টি নমুনার প্রতিটির চয়নের সম্ভাবনা $\frac{1}{10}$। সম্ভাব্য সমস্ত নমুনা ও তাদের নমুনা গড় $(\overline{x})$ সারণী নং 4.10.1 এ দেওয়া হ'ল। এছাড়া সারণী 4.10.2-তে $\overline{x}$ নমুনা বিভাজন দেখানো হয়েছে।

সারণী নং 4.10.1

সম্ভাব্য সমস্ত নমুনা ও তাদের নমুনা গড় ($\bar{x}$) অপ্রতিস্থাপনযোগ্য পদ্ধতিতে SRSWOR

সম্ভাব্য নমুনা (ছাত্রদের ক্রমিক সংখ্যা অনুসারে)	সম্ভাব্য নমুনা (প্রাপ্ত নম্বর অনুযায়ী)	নমুনা গড়ের মান
1, 2	20, 24	22
1, 3	20, 20	20
1, 4	20, 30	25
1, 5	20, 26	23
2, 3	24, 20	22
2, 4	24, 30	27
2, 5	24, 26	25
3, 4	20, 30	25
3, 5	20, 26	23
4, 5	30, 26	28

সারণী নং 4.10.2

নমুনা গড়ের ($\bar{x}$) নমুনা বিভাজন SRSWOR পদ্ধতিতে

$\bar{x}$ এর মান	সম্ভাবনা
20	$\frac{1}{10}$
22	$\frac{2}{10}$
23	$\frac{2}{10}$
25	$\frac{3}{10}$
27	$\frac{1}{10}$
28	$\frac{1}{10}$
মোট	1

টীকা : $\bar{x}$ এর মান 20, 27, 28 একবার করে আছে (সারণী 4.10.1) কিন্তু 22 ও 23 দুবার করে ও 25 তিনবার করে আছে।

$\therefore$ নমুনা গড়ের $(\bar{x})$ গাণিতিক প্রত্যাশা হবে

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{10}[20 + 22 \times 2 + 23 \times 2 + 25 \times 3 + 27 + 28]$$

$$= \frac{240}{10} = 24$$

এবার, সমগ্রকের গড় মান হবে

$$\mu = \frac{1}{5} = [20 + 24 + 20 + 30 + 26]$$

$$= \frac{120}{5} = 24$$

অর্থাৎ, $E(\bar{x}) = \mu$

আবার, নমুনা গড়ের $(\bar{x})$ ভেদমান হবে

$$Var(\bar{x}) = E(\bar{x} - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{10}[(20-24)^2 + (22-24)^2 \times 2 + (23-24)^2 \times 2 + (25-24)^2 \times 3 + (27-24)^2 + (28-24)^2]$$

$$= \frac{1}{10}[16 + 8 + 2 + 3 + 9 + 16]$$

$$= \frac{1}{10} \times 54 = 5.4$$

সুতরাং নমুনা গড়ের প্রমাণ ভ্রান্তি হবে

$$S.E(\bar{x}) = \sqrt{Var(\bar{x})} = \sqrt{5.4} = 2.32 \text{ (প্রায়)}$$

এখন, সমগ্রকের ভেদমান হবে

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}[(20-24)^2 + (24-24)^2 + (20-24)^2 + (30-24)^2 + (26-24)^2]$$

$$= \frac{1}{5}(16 + 0 + 16 + 36 + 4) = \frac{72}{5}$$

এখন আমরা জানি $Var(\overline{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

$$\therefore \quad Var(\overline{x}) = \frac{72}{5 \times 2} \cdot \frac{5-2}{5-1} = \frac{36}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$\therefore \quad SE(\overline{x}) = \sqrt{Var(\overline{x})} = \sqrt{5.4} = 2.32 \text{ (প্রায়)}$$

4.11 প্রতিস্থাপনযোগ্য (SRSWR) ও অপ্রতিস্থাপনযোগ্য (SRSWOR) নমুনা চয়নের ক্ষেত্রে নমুনা অনুপাতের গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণ ভ্রান্তি

N আয়তন বিশিষ্ট একটি সমগ্রকের NP সংখ্যক একক কোন বিশেষ বৈশিষ্ট্য যুক্ত (ধরা যাক্ বৈশিষ্ট্যটি হ'ল C) এবং NQ সংখ্যক একক এই C বৈশিষ্ট্য যুক্ত নয়। এখন P হ'ল সমগ্রকের মধ্যে C বৈশিষ্ট্য যুক্ত এককগুলির অনুপাত (অর্থাৎ NP/N = P)। Q হল সমগ্রকের মধ্যে C বৈশিষ্ট্যযুক্ত নয় এমন এককগুলির অনুপাত (অর্থাৎ NQ/N = Q) এখানে P + Q = 1।

এখন সমগ্রকের i-তম একককে X_i (i = 1, 2, ..., N) দিয়ে চিহ্নিত করা হ'ল এবং এর মান ধরা হ'ল 1 যখন এককটি C বৈশিষ্ট্যযুক্ত হয় এবং এর মান ধরা হ'ল 0 যখন এককটি C বৈশিষ্ট্যযুক্ত না হয়।

এখন সমগ্রক থেকে n আয়তনের একটি নমুনা চয়ন করা হ'ল এবং ঐ নমুনায় f সংখ্যক একক C বৈশিষ্ট্য যুক্ত। সুতরাং C বৈশিষ্ট্য যুক্ত নমুনার অনুপাত হবে f/n।

সমগ্রক থেকে নির্বাচিত নমুনার i-তম এককটিকে x_i (i = 1, 2, ..., n) দিয়ে চিহ্নিত করা হ'ল। এই x_i এর মান 1 হবে যখন এককটি (x_i) C বৈশিষ্ট্যযুক্ত হয়। যখন এককটি (x_i) C বৈশিষ্ট্যযুক্ত হয় না তখন আর মান ধরা হবে 0.

আমরা এখন SRSWR ও SRSWOR পদ্ধতি অবলম্বন করে এই নমুনা অনুপাতের (Sample proportion) প্রত্যাশা ও প্রমাণ ভ্রান্তি নির্ণয় করব।

সমগ্রকের গড় মান অথবা সমগ্রকের অনুপাত = $\frac{1}{N}\sum X_i = P = \mu$

[কেননা C বৈশিষ্ট্যযুক্ত না হলে $X_i = 0$ হবে]

সমগ্রকের ভেদমান $\sigma^2 = \frac{\sum X_i^2}{N} - \left(\frac{\sum X_i}{N}\right)^2 = P - P^2$

[কেননা C বৈশিষ্ট্যযুক্ত না হলে $X_i = 0$ হবে। $\therefore \frac{\sum X_i^2}{N} = P$]

$= P(1 - P) = PQ$ [$\because$ $P + Q = 1$] $\quad \therefore \sigma^2 = PQ$

$\therefore \frac{\sigma^2}{n} = \frac{PQ}{n}$ ।

একইভাবে নমুনা গড় $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{f}{n}$

(কারণ C বৈশিষ্ট্যযুক্ত না হলেই $x_i = 0$ হবে)

এখন যদি আমরা $\bar{x} = \frac{f}{n}$

$\sigma^2 = PQ$

এবং $\mu = P$ বসিয়ে দিই তাহলে

SRSWR-এর ক্ষেত্রে নমুনা অনুপাতের গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণ ভ্রান্তি হবে

$$E\left(\frac{f}{n}\right) = E(\bar{x}) = P = \mu$$

$$Var\left(\frac{f}{n}\right) = Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{b} = \frac{PQ}{n}$$

$$\therefore SE\left(\frac{f}{n}\right) = \sqrt{Var\left(\frac{f}{n}\right)} = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$$

এবং SRSWOR-এর ক্ষেত্রে নমুনা অনুপাতের গাণিতিক প্রত্যাশা ও প্রমাণ ভ্রান্তি হবে

$$E\left(\frac{f}{n}\right) = E(\bar{x}) = P = \mu$$

$$Var\left(\frac{f}{n}\right) = Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{N-n}{N-1}\right] = \frac{PQ}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$\therefore SE\left(\frac{f}{n}\right) = \sqrt{Var\left(\frac{f}{n}\right)} = \sqrt{\frac{PQ}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

উদাহরণ 4.11.1 একটি ঝাঁকায় 500 আপেল আছে। একটি প্রতিস্থাপন যোগ্য সমসম্ভব নমুনা চয়ন করে তাদের মধ্যে 50টি আপেল পচা পাওয়া গেল। পচা আপেলের নমুনা অনুপাতের প্রমাণ ভ্রান্তি নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে নমুনার আয়তন n = 500 এবং পচা আপেলের নমুনা অনুপাত = $\frac{f}{n} = \frac{50}{100} = 0.1$।

এখানে সমগ্রকের মধ্যে পচা আপেলের অনুপাত P এর মান অজানা। তাই তার বদলে সেখানে আমরা পচা আপেলের নমুনা অনুপাত $\frac{f}{n}$ নেব।

আমরা জানি SRSWR-এর জন্য

$$SE\left(\frac{f}{n}\right) = \sqrt{\frac{PQ}{n}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{500}}$$

$$= \sqrt{0.000018} = 0.00424$$

$\therefore$ পচা আপেলের প্রমাণ ভ্রান্তি = 0.00424

4.12 সারাংশ

রাশিবিজ্ঞানে সমগ্রক (বা পূর্ণক) বলতে সমীক্ষার অন্তর্গত এককগুলির সমষ্টি বোঝায়। সমগ্রকের (বা পূর্ণকের) পূর্ণকাঙ্কের প্রাক্কলনের উদ্দেশ্যে সম্পূর্ণ সমীক্ষার বদলে নমুনা সমীক্ষাই বেশীর ভাগ ক্ষেত্রেই করা হয়। নমুনা সমীক্ষার নানা সুবিধা আছে সম্পূর্ণ সমীক্ষার তুলনায়। যেমন, অর্থের সাশ্রয়, সময়ের সাশ্রয়, অধিকতর নির্ভুল, অধিকতর পরিধি এবং অধিকতর প্রয়োগ করা সম্ভব হয়।

নমুনা চয়ন বলতে আমরা সমগ্রক সম্পর্কে একটা সম্যক ধারণার জন্য সমগ্রকের প্রতিনিধিত্ব করতে পারে এরকম একটি ক্ষুদ্র অংশ নির্বাচন করাকে বুঝি। নমুনা দুই প্রকারের ব্যক্তি-নির্ভর ও ব্যক্তি-নিরপেক্ষ।

ব্যক্তি-নিরপেক্ষ নমুনা চয়ন আবার তিন প্রকারের হয়—সম্ভাবনাশ্রয়ী, সম্ভাবনা বিহীন এবং মিশ্র। যদি সংগ্রকের প্রতিটি এককের নমুনায় অন্তর্ভুক্ত হওয়ার পূর্বনির্দিষ্ট ধনাত্মক সম্ভাবনা থাকে তাহলে সেই নমুনা চয়নকে সম্ভাবনাশ্রয়ী বলা হয়। আর যদি কোন নির্দিষ্ট সম্ভাবনা না থাকে সেটা সম্ভাবনা বিহীন নমুনা চয়ন। যদি কোন নমুনা চয়নে এই দুই ধরনের অর্থাৎ সম্ভাবনাশ্রয়ী এবং সম্ভাবনা বিহীন পদ্ধতি অবলম্বন করা হয় সেটিকে মিশ্র নমুনা চয়ন বলা হয় যেমন, রীতিবদ্ধ নমুনা চয়ন (Systematic sampling)।

রাশি বিজ্ঞানে নিম্নলিখিত নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতিগুলি ব্যবহৃত হয়। সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ, স্তর-বিন্যস্ত সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ, নিয়মানুগ (বা রীতিবদ্ধ) নমুনা সংগ্রহ, বহুবিভাগী নমুনা সংগ্রহ, বহু পর্যায়ী নমুনা সংগ্রহ, গুচ্ছ নমুনা সংগ্রহ, বরাদ্দ নির্দিষ্ট (বা কোটা ভিত্তিক) নমুনা সংগ্রহ।

বহুল প্রচলিত নমুনা চয়ন পদ্ধতি হ'ল সরল সমসম্ভব নমুনা চয়ন পদ্ধতি। এই নমুনা চয়নের ক্ষেত্রে সমগ্রকের প্রতিটি এককের নমুনায় অন্তর্ভুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা সমান। এই সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ আবার দুই ধরনের—পুনঃস্থাপনাসহ ও পুনঃস্থাপনাহীন। পুনঃস্থাপনাসহ সরল সম্ভব নমুনা সংগ্রহে প্রতিবার নির্বাচনের পরে নির্বাচিত একরকটিকে সমগ্রকে ফিরিয়ে দেওয়া হয়। অর্থাৎ সমগ্রকের আয়তন অপরিবর্তিত থাকে ও সমগ্রকের এককগুলির একাধিক বার নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। পুনঃস্থাপনাবিহীন সরল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহে নির্বাচিত এককটিকে কখনই সমগ্রকে ফেরৎ দেওয়া হয় না।

সমগ্রক থেকে সরল সমসম্ভব নমুনা চয়নের দুটি প্রচলিত পদ্ধতি আছে। (ক) লটারীর মাধ্যমে (খ) সমসম্ভব সংখ্যা সারণী থেকে।

পরিসংখ্যানীয় অনুসন্ধানের আসল লক্ষ্য হ'ল সমগ্রকের এক বা একাধিক বৈশিষ্ট্য বিশ্লেষণ করা। সমগ্রকের সমস্ত এককের কোন বৈশিষ্ট্য চলকের (যেমন মজুরদের বয়স) মানগুলির উপর নির্ভর করে গঠিত পরিসংখ্যনীয় হিসাব (যেমন সমগ্রকের গড় মান ও ভেদমান) গুলিকে বলা হয় সমগ্রকের পূর্ণাকাঙ্ক (parameters)।

একইভাবে নমুনা গড় ($\bar{x}$) ও নমুনার ভেদমান (s^2) হ'ল নমুনাটির নমুনাঙ্ক (Statistic)। নমুনার সংখ্যা যদি খুব বেশী হয় তবে ঐ নমুনাঙ্কের একটি সম্ভাবনা বিভাজনে প্রস্তুত করা যায়। এই নমুনাঙ্কের সম্ভাবনা বিভাজনের দুটি মাত্রা—গড় ও সমক বিচ্যুতি। এই গড় হ'ল নমুনাঙ্কের প্রত্যাশা এবং সমক বিচ্যুতিকে বলা হয় নমুনাঙ্কের প্রমাণ ভ্রান্তি।

4.13 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা : (সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন, প্রতিটির মান 2.5)

1. সমগ্রক ও নমুনার সংজ্ঞা দাও। প্রত্যেকের একটি করে উদাহরণ দাও।

2. সম্পূর্ণ সমীক্ষার তুলনায় নমুনা সমীক্ষার সুবিধা সমূহ সংক্ষেপে বর্ণনা কর।
3. নমুনা সমীক্ষার বিভিন্ন পর্যায়গুলি কী কী?
4. নমুনা সমীক্ষার মূল নীতি কী?
5. নমুনার আয়তন কাকে বলে?
6. পূর্ণাকাঙ্ক, নমুনাঙ্ক কাকে বলে?

প্রশ্নমালা : (প্রতিটি প্রশ্নে মান 5)

1. নমুনাঙ্কের প্রমাণ ভ্রান্তির ধারণাটি ব্যাখ্যা কর। SRSWR-এর ক্ষেত্রে নমুনা গড়ের প্রমাণ ভ্রান্তি কত হবে?
2. লটারী পদ্ধতিতে নমুনা চয়নের প্রধান ত্রুটিগুলি কি? সমসম্ভব সারণী ব্যবহার করলে কি এই ত্রুটিগুলি দূর করা সম্ভব?
3. নমুনা তদন্তের পক্ষপাত দুষ্টতা কীভাবে হয় ব্যাখ্যা কর।
4. প্রতিস্থাপনযোগ্য (SRSWR) সমসম্ভব নমুনা সমসম্ভব সারণীর ব্যবহার করে কীভাবে চয়ন করা হয়?
5. 2, 3, 5, 7 এই সংখ্যাগুলি থেকে (i) SRSWR এবং (ii) SRSWOR কৌশল অবলম্বন করে 2 আয়তন বিশিষ্ট সম্ভাব্য নমুনাগুলি লেখ।

প্রশ্নমালা : (প্রতিটি প্রশ্নে মান 10)

1. সরল সমসম্ভব নমুনা চয়ন SRSWR এবং SRSWOR কৌশলে কীভাবে হয়?
2. সমগ্রক থেকে রীতিবদ্ধ নমুনা কীভাবে চয়ন করা হয়?
3. স্তরীভূত সমসম্ভব নমুনা চয়নের প্রণালী বর্ণনা কর।

4.14 গ্রন্থপঞ্জী

1. Goon, Gupta, Dasgupta – Fundamentals of Statistics Vol. II, The World Press, 2001.
2. Cochran – Sampling Techniques, Wiley India, 1999
3. দাশগুপ্ত, গুহঠাকুরতা, অধিকারী — রাশিবিজ্ঞানের প্রয়োগ পদ্ধতি, 1976

একক-5 ❑ পরিসংখ্যানগত অনুমান তত্ত্ব –I : প্রাক্‌কলন তত্ত্ব

গঠন

5.1 উদ্দেশ্য

এই এককে আমরা প্রাক্কলনের (Estimation) বিভিন্ন পদ্ধতি সম্বন্ধে জ্ঞান সঞ্চয় করব। কোন্ নমুনাঙ্ককে প্রাক্কলনের কাজে ব্যবহার করা হয় তা জানা যাবে। আরও জানতে পারব প্রাক্কলক (Estimator) ও প্রাক্কলনী মান (Estimate) কী। একই প্রাক্কলক বিভিন্ন প্রাক্কলনী মান যে নিতে পারে তাও জানা যাবে। এই বিভিন্নতা এক নমুনা থেকে অন্য নমুনাতে সদস্য পার্থক্য হওয়ার কারণেই হয়ে থাকে। সমগ্রক থেকে একটার পর একটা নমুনা সংগ্রহ করলে দেখা যাবে যে নমুনাগুলির সদস্য বিভিন্ন। ফলে নমুনার গড় বা ভেদমানের মানও বিভিন্ন। একে বলা হয় নমুনাজ চাঞ্চল্য (Sampling fluctuation)। একটি নির্দিষ্ট পূর্ণাকাঙ্কের মান বা তার কোন অপেক্ষকের মান জানার জন্য বিভিন্ন প্রাক্কলকের মধ্যে কোন্‌টা গ্রহণ করা যুক্তিযুক্ত হবে সেটাও স্থির করা হবে। এছাড়া পক্ষপাতশূন্য (unbiased) ও লঘিষ্ঠ-ভেদমান—অপক্ষপাতী প্রাক্কলক (Minimum Variance unbaised estimator) কাকে বলে সেটাও জানা যাবে। আরও জানব যে কোন পূর্ণাকাঙ্কের বা তার কোন অপেক্ষকের জন্য যদি কোন পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক থাকে, সেটা অদ্বিতীয় নাও হতে পারে। সমঞ্জস ও দক্ষ (Consistent and efficient) প্রাক্কলক কাকে বলে তাও জানা যাবে। আরও জানব গরিষ্ঠ আশংসামান পদ্ধতি (Method of Maximum likelihood) কী এবং তা দিয়ে কীভাবে প্রাক্কলন করা হয়। উপরোক্ত প্রাক্কলন পদ্ধতিগুলি হ'ল বিন্দু প্রাক্কলন (point estimation)। কিন্তু তারও কিছু সমস্যা আছে। এই সমস্যা দুর করতে আমরা অন্তর প্রাক্কলন (Interval estimation) নিয়ে আলোচনা করব।

5.2 প্রস্তাবনা

একটি সমগ্রকের কোন বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে পরিষ্কার ধারণা করতে আমরা সমগ্রক থেকে নমুনা সংগ্রহ করি। সাধারণতঃ আমরা সরল সমসম্ভব নমুনা পছন্দ করি কারণ সেটা সম্ভাবনাশ্রয়ী। যুক্তিনিষ্ঠ ও গাণিতিক পদ্ধতিতে এই নমুনার উপর ভিত্তি করে সমগ্রকের ঐ বৈশিষ্ট্যের ধারণা করা সম্ভব। এই আলোচনাকে আমরা পরিসংখ্যানগত অনুমানতত্ত্ব (Statistical inference) বলব।

এই পরিসংখ্যাগত অনুমানতত্ত্বের দুটি প্রধান ক্ষেত্র আছে। একটি হ'ল পূর্ণাকাঙ্কের প্রাক্কলনতত্ত্ব (theory of estimation of parameters) এবং অপরটি হল রাশিবিজ্ঞানের প্রকল্প বিচার (testing of statistical hypotheses)। একক 5-এ আমরা প্রাক্কলনতত্ত্ব আলোচনা করব আর একক 6-এ আমরা রাশিবিজ্ঞানের প্রকল্প বিচার করব।

প্রাক্কলন আবার দুই প্রকারের—বিন্দু প্রাক্কলন ও অন্তর প্রাক্কলন। সমগ্রকের কোন বৈশিষ্ট্য বর্ণনা করতে আমরা এক বা একাধিক পূর্ণাকাঙ্ক নিতে পারি আর তাদের মান আমাদের কাছে অজানা। নমুনার উপরে ভিত্তি করে এই পূর্ণাকাঙ্কগুলির মান সম্বন্ধে ধারণা করা যায়। এই পদ্ধতিকে প্রাক্কলন পদ্ধতি (Estimation) বলা হয়।

প্রাক্কলন পদ্ধতিতে একটি নির্দিষ্ট মানকে (যেটা বিন্দুর সঙ্গে তুলনীয়) পূর্ণাকাঙ্কের মান হিসাবে নমুনাঙ্কের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়। তাই তখন একে আমরা বিন্দু প্রাক্কলন (Point estimation) বলি।

আবার যখন নমুনা থেকে দুটি মান নির্ণয় করা হয় এবং এই দুই মানের অন্তরের মধ্যে পূর্ণাকাঙ্কের প্রকৃত মানের থাকার একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা থাকে তাকে আমরা অন্তর প্রাক্কলন (Interval estimation) বলি।

5.3 বিন্দু প্রাক্কলনের ধারণা ও সংজ্ঞা

আমরা এখন বিন্দু প্রাক্কলনের তত্ত্ব আলোচনা করব। তার জন্য ধরে নেব যে সমগ্রকটির গাণিতিক রূপ জানা আছে। ধরা যাক সমসম্ভব চলকটি (x) যদি বিচ্ছিন্ন হয় তবে তার p.m.f জানা থাকছে আর X যদি অবিচ্ছিন্ন হয় তবে p.d.f. জানা থাকছে। এর ক্রমযৌগিক নিবেশন অপেক্ষক (c.d.f) কে ধরা যাক $F(x; \theta)$, যেখানে θ হ'ল একটি পূর্ণাকাঙ্ক যার মান আমাদের অজানা। θ এক্ষেত্রে আবার এক বা একাধিক স্থানাঙ্কবিশিষ্ট হতে পারে।

5.3.1 প্রাক্কলনী মান (estimate) ও প্রাক্কলক (estimator)

$F(x, \theta)$ থেকে সমসম্ভব নমুনা $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ পছন্দ করা হ'ল যার মধ্যে n সংখ্যক অবেক্ষক (observations) আছে। $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ এর মান যথাক্রমে $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ এখন θ যদি পূর্ণাকাঙ্কের গড় হয় তবে আমরা নমুনার নমুনাঙ্ক গাণিতিক গড় হিসাবে ধরতে পারি যা কিনা পূর্ণাকাঙ্কের প্রাক্কলন হিসাবে কাজ করবে।

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

বিকল্পরূপে আমরা X_{mode}, X_{median} বা $G = (X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)^{\frac{1}{n}}$ নিতে পারি যেগুলি প্রত্যেকে পূর্ণাকাঙ্কের (অজানা) মান θ র কাছাকাছি যাবে। এই চার রকমের গড় (গাণিতিক গড়, সংখ্যাগুরু মান, মধ্যমা এবং গুণোত্তর গড়) সবগুলিই আমাদের কাছে নমুনাঙ্ক (statistic)। এই নমুনাঙ্কগুলির মানকে প্রাক্কলনী মান (estimate) বলা হবে যারা প্রত্যেকে পূর্ণাকাঙ্কের মান θ-র প্রাক্কলক (estimator) হিসাবে কাজ করছে। এভাবে একাধিক প্রাক্কলক ভাবা যেতে পারে। সুতরাং একটা যুক্তিযুক্ত নমুনাঙ্কের সাহায্যে অজানা মান বিশিষ্ট পূর্ণাকাঙ্ক θ-র প্রাক্কলনী মান নির্ণয় করাই বিন্দু প্রাক্কলনের মূল কাজ। এর ফলে আমরা θ-র মান দেশের একটি নির্দিষ্ট মান বা বিন্দু পেতে পারি। তাই এই ধরনের প্রাক্কলনকে "বিন্দু প্রাক্কলন" নামে অভিহিত করা হয়।

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$-এর একটি অপেক্ষক $t(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ কে θ-র একটি প্রাক্কলক হিসাবে নেওয়া হ'ল। তাহলে $X_1, X_2, \ldots, X_n$-এর মূল মান অপেক্ষকটিতে বসিয়ে যে মান পাওয়া যায় সেটি হবে θ-র একটা প্রাক্কলনী মান। θ-র প্রাক্কলক হবে—

$$\hat{\theta} = t\,(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n)$$

অর্থাৎ নমুনাঙ্ক t কে বলা হবে θ-র প্রাক্কলক এবং t-এর মান যেটা নমুনা থেকে পাওয়া গিয়েছে তাকে বলা হবে θ-র প্রাক্কলনী মান। t নমুনাঙ্ক একটি θ-র সন্তোষজনক প্রাক্কলক (satisfactory estimator) হবে যখন $|t-\theta|$ পার্থক্যটি যতদূর সম্ভব ছোট হবে। t যেহেতু একটি সমসম্ভব চলক, $|t-\theta|$ পার্থক্যটিও সমসম্ভব চলক হবে। অর্থাৎ $|t-\theta|$ পার্থক্যটির খুব ছোট হওয়ার সম্ভাবনা (probability) খুবই বেশী হবে। এটি সম্ভব হবে যখন t-এর নমুনা বিভাজনটির কেন্দ্রীয় প্রবণতা θ-র কাছাকাছি হবে এবং বিস্তৃতি খুবই ছোট হবে।

5.3.2 পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলন (Unbiased estimator)

পূর্ণাকাঙ্ক θ-র প্রাক্কলক যদি নমুনাঙ্ক 't' হয় তবে t কে পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক বলা যাবে যখন

$E(t) = \theta$ হবে, θ-র প্রকৃত মান যাই হোক না কেন।

বোঝা যাচ্ছে যে একই পূর্ণকাঙ্কের জন্য অনেক প্রাক্কলক পাওয়া সম্ভব। তাহলে এদের মধ্যে কোনটা ভালো বা অনেকগুলো ভালোর মধ্যে কোনটা শ্রেষ্ঠ তা ঠিক করতে হবে। এর জন্য প্রয়োজন কতকগুলো যুক্তিযুক্ত ধর্ম (logical properties) যা সঠিক প্রাক্কলকটা খুঁজতে সাহায্য করবে।

অনেক সময় θ-র একটা অপেক্ষক $g(\theta)$-র মান জানার প্রয়োজন হয়। তখন $t(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ কে $g(\theta)$-র প্রাক্কলক হিসাবে নিতে হবে।

একটা প্রাক্কলক $t(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ কে তখনই θ-র অপেক্ষক $g(\theta)$-র জন্য পক্ষপাতশূন্য বলা হবে যখন

$E_\theta(t)$-এর অস্তিত্ব থাকবে এবং

$E_\theta(t) = g(\theta) \quad \forall\, \theta \in H,$

যেখানে H হ'ল পূর্ণাকাঙ্ক দেশ (parameter space)

t যদি $g(\theta)$-র জন্য পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক হয় তার অর্থ হ'ল—t-এর মান $g(\theta)$-র সঠিক মানের আশেপাশে থাকবে অর্থাৎ $g(\theta)$-র চেয়ে সামান্য বড় বা ছোট হতে পারে। মোট কথা, t-এর প্রত্যাশার (expectation) মান $g(\theta)$-র সঙ্গে সমান হবে, θ-এর প্রকৃত মান যাই হোক না কেন। পূর্ণাকাঙ্ক অপেক্ষক $g(\theta)$ কে প্রাক্কলনীয় (estimable) বলা হবে যদি এর জন্য অন্তত একটা অপক্ষপাতী প্রাক্কলক থাকে।

উদাহরণ 5.3.1 ধরা যাক্ একটি মুদ্রা ছোঁড়া হলে তার Head পড়ার সম্ভাবনাহ'ল p এবং তার মান অজানা। প্রাক্কলনের মাধ্যমে p-এর প্রাক্কলনী মান বের করতে হবে।

আমরা মুদ্রাটিকে 15 বার ছুঁড়লাম এবং ধরা যাক Head পড়ার সংখ্যা পাওয়া গেল 'a' তাহলে 'a' একটি সমসম্ভব চলক যা একটি দ্বিপদ নিবেশন অনুসরণ করে যার পূর্ণাকাঙ্কদ্বয় হ'ল 15 এবং p।

সুতরাং $E(a) = 15p$, p-এর প্রকৃত মান যাই হোক না কেন।

$\therefore\ E(a/15) = p$

অতএব এখানে Head পড়ার নমুনা অনুপাত (a/15), p-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক বলা যায়।

মুদ্রা ছোঁড়ার ফলে যদি a = 7 পাওয়া যায়, তবে (7/15)-কে লঘিষ্ঠ ভেদমান পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক বলা যেতে পারে। (7/15)-কে লঘিষ্ঠ ভেদমান (Minimum variance) যুক্ত বলা হচ্ছে কারণ 7/15 একটি ধ্রুবক যার পরিবর্তন = 0 কেননা এটি স্থির।

উদাহরণ 5.3.2 একটি সসীম ভেদমান যুক্ত সমগ্রকের গড় μ ধরা যাক্ অজানা। μ-এর মান সম্বন্ধে ধারণা করার জন্য এই সমগ্রক থেকে সমসম্ভাবনাযুক্ত নমুনা $X_1, X_2 \ldots\ldots, X_n$ নেওয়া হল।

আমরা জানি, $E(X_i) = \mu$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ সুতরাং $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$-এর প্রত্যেকটি m-এর জন্য পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক।

আবার, $$E\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) = \frac{E(X_1)+E(X_2)}{2} = \mu$$

সুতরাং, $\left(\dfrac{X_1+X_2}{2}\right)$ ও μ-এর জন্য একটি পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক। এখন দেখা যাক্ μ-এর জন্য এমন ঋজুরৈখিক ও পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক কতগুলো পাওয়া যেতে পারে।

ধরা যাক্ $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ -এর একটি ঋজুরৈখিক অপেক্ষক T এমনভাবে নেওয়া হ'ল যে

$T = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_nX_n$

যেখানে $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ এমন nটা ধ্রুবক যাদের মান যেমন ইচ্ছা তেমনই নেওয়া যায়।

$$\text{এক্ষেত্রে } E(T) = C_1E(X_1) + C_2E(X_2) + \ldots\ldots\ldots + C_nE(X_n)$$
$$= C_1\mu + C_2\mu + \ldots\ldots\ldots + C_n\mu$$
$$= (C_1 + C_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n)\mu$$

এবার আমরা খুঁজে বের করব কোন শর্তে T কে μ-এর পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক বলতে পারি। এটা সম্ভব অর্থাৎ μ-এর যে কোন মানের জন্য T তার পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক হবে যখন

$$E(T) = \mu \text{ হবে}$$

$$\text{অর্থাৎ} \Rightarrow (C_1 + C_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n)\,\mu = \mu$$
$$\Rightarrow C_1 + C_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_n = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

অসীম সংখ্যক উপায়ে $C_1, C_2 \ldots\ldots\ldots, C_n$-এর মান পেতে পারি যাতে এগুলো (i)-এর শর্তটি মেনে চলে। অর্থাৎ আমরা বলতে পারি যে μ-এর অসীম সংখ্যক পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক আছে। পক্ষপাতহীনতার নিরিখে এগুলো সবই সমান যোগ্য। কিন্তু প্রশ্ন হ'ল এদের মধ্যে কোন প্রাক্কলকটি μ-এর প্রাক্কলক হবার জন্য যোগ্যতম?

যে প্রাক্কলকটির অন্য প্রাক্কলকগুলির তুলনায় μ-এর বেশী কাছাকাছি থাকার প্রবণতা আছে সেটাই যোগ্যতম বলে মেনে নেওয়া হবে। এজন্যে প্রাক্কলক T-এর ভেদমান বিচার করার প্রয়োজন আছে।

5.3.3 লঘিষ্ঠ ভেদমান ও অপক্ষপাতী প্রাক্কলক

T_1 ও T_2 যদি উভয়েই $g(\theta)$-র জন্য পক্ষপাতশূন্য হয় $V_\theta(T_1) \le V_\theta(T_2) \quad \forall\, \theta \in H$ তাহলে T_1 ও T_2-র তুলনায় বেশী গ্রহণযোগ্য বলা হবে। যখন দুটো ভেদমান সমান হবে তখন T_1 ও T_2 সমযোগ্য হয়ে যাবে।

উদাহরণ 5.3.2-এর শেষ অংশে দেখলাম যে ঋজু রৈখিক প্রাক্কলক একই পূর্ণাকাঙ্ক্ষার জন্য অসীম সংখ্যক হতে পারে। সুতরাং এদের মধ্যে কোনটা যে কোন এক নির্দিষ্ট অর্থে সর্বোত্তম হবে তা ঠিক করার প্রয়োজন। এই সমস্যার সমাধান হ'ল এমন একটা প্রাক্কলক পছন্দ করা যার ভেদমান হবে অন্য সব অপক্ষপাতী প্রাক্কলকগুলোর ভেদমানের মধ্যে সবচেয়ে ছোট। এই প্রাক্কলক-কে আমরা সর্বোত্তম-ঋজু রৈখিক-অপক্ষপাতী প্রাক্কলক (Best Linear Unbiased Estimator) বা লঘিষ্ঠ-ভেদমান-ঋজুরৈখিক অপক্ষপাতী প্রাক্কলক (Minimum–Variance–Linear–Unbiased–Estimator) বলব।

উদাহরণ 5.3.3 ধরা যাক্ $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ একটি সমসম্ভব নমুনা যা সংগ্রহ করা হয়েছে অসীম সমগ্রক থেকে যার ভেদমান σ^2. নমুনার গড় দেওয়া আছে $\bar{X}$. প্রমাণ করতে হবে যে $\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ একটি পক্ষপাতদুষ্ট প্রাক্কলক σ^2-এর জন্য। আবার পক্ষপাতদুষ্টতা খুবই নগণ্য হয়ে যাবে যখন n খুব বড় হয়। σ^2-এর জন্য পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরা যাক্ সমগ্রকের গড় মান μ। তাহলে সরল সমসম্ভব নমুনা চয়নের নিয়ম অনুসারে আমরা লিখতে পারি—

$$E(X_i) = \mu, \forall\, i$$

এবং $\text{Var}(X_i) = \sigma^2, \forall\, i$

$$E(\bar{X}) = \mu$$

এবং $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

এখন $E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \bar{X}^2\right]$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right) - E\left(\bar{X}\right)^2$$

$\left[\because\ V(X_i) = E\left[X_i - E(X_i)^2\right] = E[X_i - \mu]^2 = E\left[X_i^2 + \mu^2 - 2X_i.\mu\right]\right.$

$$= E\left(X_i^2\right) + E(\mu)^2 - 2\mu E(X_i) = E\left(X_i^2\right) + \mu^2 - 2\mu^2$$

$$= E\left(X_i^2\right) - \mu^2$$

$\therefore\ E\left(X_i^2\right) = V(X_i) + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$

একইভাবে, $\left. E\left(\bar{X}^2\right) = V\left(\bar{X}\right) + \mu^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right]$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[\mathrm{Var}(X_i)+E^2(X_i)\Big]-\Big[\mathrm{Var}\overline{X}+E^2(\overline{X})\Big]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}.n\left(\sigma^2+\mu^2\right)-\frac{\sigma^2}{n}-\mu^2$$

$$= \sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{(n-1)}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

সুতরাং নমুনাঙ্কটি একটি পক্ষপাত দুষ্ট প্রাক্কলক σ^2-এর জন্য।

প্রাক্কলকটির পক্ষপাত দুষ্টতার পরিমাণ $= \dfrac{(n-1)}{n}\sigma^2-\sigma^2$

$$= -\frac{\sigma^2}{n},$$

যেটি n-এর খুব বড় মানের জন্য খুবই নগণ্য।

উপরের গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে আমরা লিখতে পারি

$$E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\sigma^2$$

$\therefore$ σ^2-এর জন্য পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক হবে $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ নমুনাঙ্কটি। অর্থাৎ নমুনা ভেদমান $s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$, সমগ্রক ভেদমান σ^2-এর একটি পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক।

উদাহরণ 5.3.4 ধরা যাক্ সমগ্রক $N(\mu, \sigma^2)$ থেকে আমরা মাত্র দুটি অবেক্ষক (observation)

x_1 এবং x_2 সমসম্ভব পদ্ধতিতে পছন্দ করলাম। আমরা এখানে μ-এর প্রাক্কলনে আগ্রহী। μ-এর জন্য আমরা একটি প্রাক্কলক T প্রস্তুত করলাম যেটি সমীকরণ $T = ax_1 + bx_2$-এর মাধ্যমে x_1 এবং x_2-র সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত। এখন a এবং b-এর কোন মানের জন্য (i) T একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক হবে μ-এর জন্য হবে (ii) T একটি লঘিষ্ঠ ভেদমান পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক হবে μ-এর জন্য?

সমাধান : যেহেতু x_1 এবং x_2 অবেক্ষক দুটি সমসম্ভব পদ্ধতিতে একটি সমগ্রক $N(\mu, \sigma^2)$ থেকে চয়ন করা হয়েছে,

$\therefore\ E(x_1) = E(x_2) = \mu$

এবং $Var(x_1) = Var\ (x_2) = \sigma^2$

আবার, যেহেতু x_1 এবং x_2 সমসম্ভব পদ্ধতির অবেক্ষক একটি অসীম সমগ্রক থেকে নেওয়া, তাই x_1 এবং x_2 স্বাধীন (independent)।

$\therefore\ Cov\ (x_1, x_2) = 0$

(i) যদি T একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক হয় μ-এর জন্য,

তাহলে $E(T) = \mu$

অথবা, $E(ax_1, + bx_2) = \mu$

অথবা, $aE\ (x_1) + bE\ (x_2) = \mu$

অথবা, $a\mu + b\mu = \mu$

অথবা, $a + b = 1$

সুতরাং a ও b-এর যে কোন মান বা $a + b = 1$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে সেগুলি সবই T নমুনাঙ্কটিকে পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক করবে μ পূর্ণাকাঙ্ক প্রাক্কলনের সময়।

(ii) যদি T একটি লঘিষ্ঠ ভেদমান পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক হবে μ পূর্ণাকাঙ্কের জন্য, তখন

$E(T) = \mu$ হবে এবং Var(T) নূন্যতম হবে।

আবার, $Var(T) = Var\ (ax_1 + bx_2)$

$$= a^2\ Var(x_1) + b^2\ Var\ (x_2)$$

$$= a^2\sigma^2 + b^2\sigma^2 = (a^2 + b^2)\ \sigma^2$$

$\therefore$ Var (T) ন্যূনতম হবে যখন $(a^2 + b^2)$ ন্যূনতম হবে। তাহলে বোঝা গেল যে T একটি লঘিষ্ঠ ভেদমান পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক হবে μ-এর জন্য যখন (1) $a^2 + b^2$ ন্যূনতম হবে এবং (2) $a + b = 1$ হবে।

এখন $a^2+b^2=\frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2\right)=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[1+(a-b)^2\right]$$

$\therefore$ $(a^2 + b^2)$ ন্যূনতম মান হবে যখন $(a - b)^2 = 0$ হবে। অর্থাৎ যখন $a = b$ হবে।

$\therefore$ T একটি লঘিষ্ঠ ভেদমান = পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক হবে μ এর জন্য যখন $a=b=\frac{1}{2}$

5.3.4 সমঞ্জস প্রাক্কলক ও দক্ষ প্রাক্কলক (Consistency and Efficiency)

এতক্ষণ আমরা যে নমুনা চয়নের আলোচনা করেছি সেখানে n (নমুনার সদস্য সংখ্যা) স্থির ছিল। এখন যদি n এর মান আমরা বাড়াতে থাকি তাহলে আমরা পূর্ণাকাঙ্ক সম্বন্ধে আরো ভালভাবে ধারণা করতে পারব। অর্থাৎ পূর্ণাকাঙ্কটির মান আমরা আরো সঠিকভাবে অনুমান করতে পারব। যখন n এর মান বাড়ানো সম্ভব হবে তখন আমরা প্রাক্কলকের মান কীভাবে পরিবর্তিত হচ্ছে সেটা লক্ষ্য রাখব। দেখব যে ঐ মান অজানা পূর্ণাকাঙ্কটির (বা তার অপেক্ষকের) কাছে বা আরো কাছে যাচ্ছে কিনা। যদি কাছে যায় তবে আমরা প্রাক্কলকটিকে সমঞ্জস (consistent) প্রাক্কলক বলব।

সমঞ্জসতা ও দক্ষতা দুটিই প্রাক্কলকের সুবৃহৎ নমুনার ধর্ম অর্থাৎ n (নমুনার সদস্য সংখ্যা) এর মান যখন অনেক বেশী। ধরা যাক্ t_n একটি প্রাক্কলক, পূর্ণাকাঙ্ক θ-র জন্য। আসলে t_n একটি নমুনাঙ্ক যেটি n আয়তন বিশিষ্ট নমুনা থেকে নেওয়া হয়েছে। এখন t_n কে একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক বলা যাবে, θ-র জন্য যদি দেখা যায় t_n এর সম্ভাব্যতার সুত্রাবলী নিয়ন্ত্রিত অভিসরণ (Stochastically converging) ঘটেছে পূর্ণাকাঙ্ক θ-র অভিমুখে যখন $n \to \infty$ অর্থাৎ কোন একটি নির্দিষ্ট $\in > 0$-এর জন্য

$$P\left[|t_n-\theta|>\in\right]\to 0, \text{ যখন } n \to \infty$$

অর্থাৎ যত নমুনার আয়তন বৃদ্ধি করা হবে, ততই প্রাক্কলকটির মানগুলি ক্রমাগত পূর্ণাকাঙ্কর প্রকৃত মানের কাছে ভিড় করবে। অন্যভাবে বললে বলতে হয় প্রাক্কলকটির নমুনা বিভাজনের বিস্তৃতি পূর্ণাকাঙ্কের প্রকৃত মানের সাপেক্ষে ক্রমাগত হ্রাস পাবে যত অসীমভাবে নমুনার আয়তন বাড়িয়ে যাওয়া হবে।

এবার সমঞ্জসতার পর্যাপ্ত শর্ত (Sufficient condition) হ'ল (i) $E(t_n) \to \theta$ এবং (ii) Var $(t_n) \to 0$ যত $n \to \infty$

এখন প্রয়োজন এত অসংখ্য সমঞ্জস প্রাক্কলকের মধ্যে তুলনা করা যাতে θ-র সবথেকে উপযুক্ত সমঞ্জস প্রাক্কলকটা পাওয়া সম্ভব হয়। এর জন্য আমরা দেখব কোন্ প্রাক্কলকটির θ-র দিকে সবচেয়ে দ্রুত অভিকরণ (Convergence) ঘটছে। এই কাজ সাধারণভাবে সব প্রাক্কলকের ক্ষেত্রে সম্ভব নয়। তাই

আমরা লক্ষ্য করব, n-এর মান অসীমের দিকে যাওয়ার ফলে কোন্ কোন্ প্রাক্কলকের নমুনাজ বিভাজন (Sampling distribution) সীমাস্থ অবস্থায় নর্ম্যাল হচ্ছে। তখন যে প্রাক্কলকের সীমাস্থ নর্ম্যাল অবস্থার ভেদমান অন্য সবগুলোর চেয়ে ছোট তাকেই আমরা দক্ষ প্রাক্কলক বলব।

$\gamma\theta$-র একটা সমঞ্জস প্রাক্কলক T-এর যদি সীমাস্থ নর্ম্যাল বিভাজন থাকে ও ভেদমান $C(\theta)$ হয় এবং অন্য যে কোন সমঞ্জস প্রাক্কলক T'-এর ক্ষেত্রে সীমাস্থ নর্ম্যাল বিভাজনের ভেদমান $C'(\theta)$ হয় যাতে—

$$C(\theta) \leq C'(\theta) \ \forall \ \theta$$

তবে T কে **দক্ষ প্রাক্কলক** বলা হবে।

উদাহরণ 5.3.5 ধরা যাক্ t_n একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক, θ-র জন্য এখন ধরা যাক্ $t'_n = \frac{n-1}{n-2}.t_n$

এখানে t'_n প্রাক্কলকটি কি θ-র একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক বলে মনে হয়?

সমাধান : যেহেতু t_n একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক, θ-র জন্য

$\therefore \ \lim\limits_{n\to\infty} E(t_n) = \theta$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty} Var(t_n) = 0$

এখন $\lim\limits_{n\to\infty} E(t'_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-1}{n-2}.E(t_n)\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\right].\lim_{n\to\infty} E(t_n)$$

$$= 1.\theta = \theta$$

এবং $\lim\limits_{n\to\infty} Var(t'_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^2.\lim\limits_{n\to\infty} Var(t_n)$

$$= 1^2.\ 0$$

$$= 0$$

$\therefore$ t'_n ও একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক, θ-র জন্য।

5.4 বিন্দু প্রাক্কলন পদ্ধতি

এর আগে আমরা বিন্দু প্রাক্কলনের সংজ্ঞা ও তার বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য আলোচনা করেছি। এই বিন্দু প্রাক্কলন বিভিন্ন পদ্ধতিতে করা হয়। এই পদ্ধতিগুলি হ'ল—

1. পরিঘাত পদ্ধতি (Method of Moments)
2. গরিষ্ঠ আশংসামান পদ্ধতি (Method of Maximum Likelihood)
3. লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি (Method of Least squares)
4. লঘিষ্ঠ কাই-বর্গ পদ্ধতি (Method of Minimum Chi-square)

5.4.1 পরিঘাত পদ্ধতি (Method of Moments)

এই পদ্ধতিতে আমরা নমুনার ভ্রামকগুলিকে সমগ্রকের অনুরূপ ভ্রামকগুলির প্রাক্কলনী মান (estimate) বলে ধরব। এই নিয়ম অনুসারে নমুনার ভ্রামকগুলির সঙ্গে সমান করে সমগ্রকের ভ্রামকগুলিকে (যার মধ্যে অজানা পূর্ণাকাঙ্কগুলিও আছে) সমীকরণ আকারে রাখা হ'ল। এই সমীকরণগুলির সমাধান করে পূর্ণাকাঙ্কগুলির প্রাক্কলনী মান পাওয়া সম্ভব হবে। সমীকরণগুলি নিম্নরূপ

$$\mu_r' = m_r', \quad r = 1, 2, \ldots\ldots$$

যেখানে μ_r' এবং m_r' যথাক্রমে সমগ্রক ও নমুনার মূলবিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক। আমরা একই ভাবে সমগ্রক ও নমুনার কেন্দ্রীয় ভ্রামকগুলিকে সমান ধরে নিয়ে সমীকরণ লিখতে পারি। অবশ্য গণনার সুবিধার জন্য আমরা নীচু ক্রমের ভ্রামকগুলি ব্যবহার করব।

উদাহরণ : 5.4.1 ধরা যাক্ পয়জঁ বিভাজনের পূর্ণাকাঙ্ক λ-র প্রাক্কলনীমান (estimate) নির্ণয় করার জন্য n আয়তনবিশিষ্ট নমুনা $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ নেওয়া হ'ল। আমরা জানি, পয়জঁ বিভাজনের জন্য

$$E(x) = \lambda = \mu_1'$$

এবং নমুনা গড় $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = m_1'$$

বিন্দু প্রাক্কলনের নিয়মানুসারে আমরা লিখতে পারি

$$\mu_1' = m_1'$$

তাহলে আমরা λ-র প্রাক্কলনী মান হিসাবে লিখতে পারি

$$\hat{\lambda} = \bar{x}$$

উদাহরণ : 5.4.2 ধরা যাক্ সমগ্রকটি হ'ল $N(\mu, \sigma^2)$ আমাদের উদ্দেশ্য হ'ল পূর্ণাকাঙ্ক μ এবং σ^2-এর প্রাক্কলনী মান নির্ণয় করা। এর জন্য আমরা সমসম্ভব নমুনা $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$-এর সাহায্য নেব।

এখানে নমুনা গড় $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = m_1'$

এবং সমগ্রকের গড় $\mu = \mu_1'$ সুতরাং μ-এর প্রাক্কলনী মান হ'ল

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

একইভাবে, নমুনার ভেদমান দ্বিতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামকের সমান

$$\therefore s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2 = m_2$$

অনুরূপভাবে, সমগ্রকের ভেদমান হবে

$$\sigma^2 = \mu_2$$

$\therefore$ σ^2-র প্রাক্কলনী মান হবে, $\hat{\sigma}^2 = s^2$

5.4.2 গরিষ্ঠ আশংসামান পদ্ধতি (Method of Maximum Likelihood)

ধরা যাক্ একটি সমগ্রক, যার সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক (যখন x চলকটি বিচ্ছিন্ন) অথবা সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক (যখন x চলকটি অবিচ্ছিন্ন) $f(x; \theta)$ দেওয়া আছে। এরূপ সমগ্রক থেকে একটি নমুনা চয়ন করা হল $[x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n]$. এখন এই সমগ্রকের পূর্ণাকাঙ্ক θ-র প্রাক্কলন করা হবে।

যদি θ-র মান স্থির (fixed) হয় তাহলে সমগ্রকের সম্ভাবনা অপেক্ষকটি নমুনা অবেক্ষণগুলির (Sample observations) অপেক্ষক হিসাবে দেখা যেতে পারে।

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

$$= f(x_1;\theta).f(x_2;\theta),\ldots\ldots\ldots f(x_n;\theta) \quad \ldots\ldots\ldots(A)$$

কিন্তু, যখন $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ দেওয়া থাকে তখন সমীকরণ (A) কে θ-র অপেক্ষক হিসাবে মনে করা হয়। এই অপেক্ষকটিকেই আমরা θ-র আশংসা অপেক্ষক (Likelihood function) বলব এবং $L(\theta)$ দিয়ে এই আশংসা অপেক্ষককে চিহ্নিত করব।

$L(\theta) = f(x_1, \theta). f(x_2, \theta) \ldots\ldots\ldots f(x_n, \theta)$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

এবার, গরিষ্ঠ আশংসামানের নিয়ন অনুযায়ী আমরা θ-র সেই মানকে গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলনী মান (Maximum Likelihood estimate) বলব যার জন্য $L(\theta)$-র মান সর্বোচ্চ হবে। অর্থাৎ $\hat{\theta}$ গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলক হবে যখন নীচের দুটি শর্ত পালিত হচ্ছে।

$$\left.\frac{dL(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

এবং $$\left.\frac{d^2L(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

যেহেতু Log $L(\theta)$ একটি $L(\theta)$-র সাপেক্ষে ক্রমাগত বৃদ্ধি যুক্ত অপেক্ষক (Monotonic increasing function) অর্থাৎ $L(\theta)$-র মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পেলে Log $L(\theta)$-র মানও ক্রমাগত বৃদ্ধি পাবে। Log $L(\theta)$-র মানটিও সর্বোচ্চ হবে θ-র ঐ একই মানের $(\hat{\theta})$ জন্য, যার জন্য $L(\theta)$-র মান সর্বোচ্চ হয়। $L(\theta)$ কে সরাসরি কাজে লাগিয়ে $\hat{\theta}$ নির্ণয় করা অনেক সময় সহজ হয় না। বরং Log $L(\theta)$ দিয়ে অনেক সহজেই $\hat{\theta}$ নির্ণয় করা যায়।

মন্তব্য : (i) যখন $\theta = \hat{\theta}$ মানের জন্য $L(\theta)$-র অন্তরকলনী মানের (Derivative) অস্তিত্ব থাকে না, তখন এই গরিষ্ঠ আশংসামান পদ্ধতির প্রয়োগ অসম্ভব হয়ে পড়ে।

(ii) গাণিতিক পদ্ধতি হিসাবে অন্তরকলন পদ্ধতি খুবই সুবিধাজনক কিন্তু সব অঙ্কের ক্ষেত্রে এটির প্রয়োজন নাও পড়তে পারে।

(iii) যদি কোন অঙ্কে $L(\theta)$-র সর্বোচ্চ মান একাধিক হয় তখন $L(\theta)$-র সামগ্রিক গরিষ্ঠ মানের (global maximum) পরিপ্রেক্ষিতে অনুভূমিক অক্ষের নির্দিষ্ট মানটি হবে θ-র গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলক।

উদাহরণ : 5.4.3 ধরা যাক্ $N(\mu, \sigma^2)$ সমগ্রক থেকে $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ নমুনা চয়ন করা হয়েছে। এখানে μ এবং σ দুটিই অজানা। এখন μ ও σ-র গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : এখানে আশংসা-অপেক্ষক (Likelihood function) হবে

$$L(\mu,\sigma)=\frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\Pi}\right)^n}.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\therefore\ \log_e L(\mu,\ \sigma)\ =\ -n\log_e^{\sigma}-n\log_e^{\sqrt{2\Pi}}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

μ ও σ-র প্রাক্‌কলনী মানের (estimate) জন্য নীচের দুটি সমীকরণের সমাধান করতে হবে।

$$\frac{\partial\log_e L(\mu,\sigma)}{\partial\mu}=0\ \text{.............}(i)$$

এবং $$\frac{\partial\log_e L(\mu,\sigma)}{\partial\sigma}=0\ \text{...........}\ (ii)$$

(i) থেকে পাই

$$-\frac{1}{2\sigma^2}.2.\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu).(-1)=0$$

অথবা, $$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$$

অথবা, $$\sum_{i-1}^{n}x_i-n\mu=0$$

$\therefore\ \hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$ যেটা আসলে নমুনার গড় মান

(ii) থেকে পাই $-\frac{n}{\sigma}-\frac{1}{2\sigma^3}.(-2).\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$

অথবা, $n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$

μ এর পরিবর্তে $\overline{x}$ লিখে পাই

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, যেটা আসলে নমুনার ভেদমান

অথবা, $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$

উদাহরণ : 5.4.4 ধরা যাক্ n সংখ্যক বারনৌলী ট্রায়ালের মধ্যে সফলতার সম্ভাবনা p. আরও ধরা যাক্ i-তম ট্রায়ালে একটি চলক x_i যুক্ত করা হ'ল যাতে—

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{যদি } i \text{ -তম ট্রায়ালে সফলতা পাওয়া যায়} \\ 0 & \text{অন্যথায়} \end{cases}$$

এখানে গরিষ্ঠ আশংসামান পদ্ধতিতে p-এর প্রাক্কলক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : x_i-এর সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক হবে—

$$f(x_i; p) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, \quad x_i = 0, 1$$

∴ আমাদের আশংসামান অপেক্ষক (Likelihood function) হবে—

$$L(p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\therefore \ \text{Log}_e \ L(p) = \sum x_i \log_e p + \left(n - \sum x_i\right)\log_e(1-p)$$

এবং $\frac{d\log_e L(p)}{dp} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n - \sum x_i}{1-p} = \frac{(1-p)\sum x_i - p\left(n - \sum x_i\right)}{p(1-p)}$

$$= \frac{\sum x_i - np}{p(1-p)}$$

এখানে, $\frac{d \log_e L(p)}{dp} = 0$ হবে যখন $p = \frac{\sum x_i}{n}$, যদি $0 < \sum x_i < n$ হয়।

যখন $\sum x_i = 0$, আমরা সোজাসুজি (i) থেকে পাই

L(P)-র মান সর্বোচ্চ হবে যখন p-এর মান সব থেকে কম অর্থাৎ $p = 0$

আবার যখন $\sum x_i = n$, আমরা (i) থেকে পাই

L(P)-র সর্বোচ্চ মান p-এর মান সর্বোচ্চ অর্থাৎ $p = 1$

সুতরাং, $\sum x_i$ -এর মান যাই হোক না কেন, p-এর গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলক হবে

$$\hat{p} = \frac{\sum x_i}{n} = \text{ যেটা হ'ল সাফল্যের নমুনা অনুপাত।}$$

*** গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলকের কয়েকটা বিশেষ বৈশিষ্ট্য বা ধর্ম আছে।**

1. **পক্ষপাত শূন্যতা (Unbiasedness) :** গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলক পক্ষপাতশূন্য নাও হতে পারে। উদাহরণ 5.3.2-তে দেখানো হয়েছে $\hat{\sigma}^2$ কিন্তু σ^2-এর জন্য পক্ষপাতশূন্য নয়। তবে একটু সহজ করলে আমরা পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক পেতে পারি। $\frac{n\hat{\sigma}^2}{n-1}$ নিলে দেখা যাবে এটা σ^2-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক হবে।

2. **সমঞ্জস অবস্থা (Consistency) :** কতকগুলি সাধারণ শর্ত পূর্ণ হলেই গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলক সমঞ্জস প্রাক্কলক হবে।

3. **সীমাস্থ নর্ম্যাল অবস্থা (Asymptotic Normality) :** সাধারণ কতকগুলি শর্ত সাপেক্ষে গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলকের সীমাস্থ নিবেশন নর্ম্যাল হবে।

4. **দক্ষতা (Efficiency) :** যে সব সমঞ্জস প্রাক্কলকের সীমাস্থ অবস্থার নিবেশন নর্ম্যাল, তাদের মধ্যে গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলকের ভেদমান সবচেয়ে ছোট। তাই এটা দক্ষ।

5. **অপরিবর্তনীয়তা (Invariance) :** θ-র একমান-বিশিষ্ট (Single valued) অপেক্ষক $\psi(\theta)$ যদি এমন হয় যে এর একটা স্থির বিপরীত মান (unique inverse) আছে এবং θ-র গরিষ্ঠ

আশংসামান প্রাক্কলক যদি $\hat{\theta}$ হয়, তবে $\psi(\hat{\theta})$ ও $\psi(\theta)$-র গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলক হবে।

5.5 নমুনার বিভাজন সংক্রান্ত কয়েকটি উল্লেখযোগ্য ফলাফল

(ক) যদি $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ নর্ম্যাল নিবেশন $N(\mu, \sigma^2)$ থেকে গৃহীত একটি সমসম্ভব নমুনা হয়, তখন—

(i) $\bar{x}$-এর নিবেশন নর্ম্যাল $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ হবে।

(ii) $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$-এর নিবেশন নর্ম্যাল N (0, 1) হবে।

(iii) $\bar{x}$ এবং s^2-এর নিবেশন পরস্পর নিরপেক্ষ হবে যেখানে $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

(iv) $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$-এর নিবেশন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা (degrees of freedom) যুক্ত χ^2 (chi-square) নিবেশন হবে।

(v) $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$-এর নিবেশন $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত t নিবেশন হবে।

(vi) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}$-এর নিবশেন n স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2 (chi-square) নিবেশন হবে।

(খ) যদি X এবং Y-এর নিবেশন যথাক্রমে n_1 ও n_2 স্বাতন্ত্র্য মাত্রাযুক্ত χ^2 (chi-square) নিবেশন হয়, তখন X + Y-এর নিবেশন $n_1 + n_2$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 নিবেশন হবে, যেখানে X এবং Y পরস্পর নিরপেক্ষ।

(গ) যদি $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_1}$ নর্ম্যাল নিবেশন $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ থেকে গৃহীত একটি সমসম্ভব নমুনা হয় এবং $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_{n_2}$ অপর একটি নর্ম্যাল নিবেশন $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ থেকে গৃহীত আর একটি সমসম্ভব নমুনা হয় (যেখানে নিবেশন দুটি পরস্পর নিরপেক্ষ) তখন—

(i) $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ -এর নিবেশন N (0, 1) হবে।

(ii) যদি $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ হয়, তখন $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ -এর নিবেশন N (0, 1) হবে।

(iii) σ^2-এর মান যদি অজানা থাকে, $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ -এর নিবেশন $n_1 + n_2 - 2$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত t নিবেশন হবে যেখানে $s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2}{n_1+n_2-2}$

(iv) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2\sigma_2^2}$ -এর নিবেশন n_1, n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত F নিবেশন হবে।

(v) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2/n_1\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2/n_2\sigma_2^2}$ -এর নিবেশন $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত F নিবেশন হবে।

5.6 বিন্দু প্রাক্কলনের সমস্যা

বিন্দু প্রাক্কলক তত্ত্বে আমরা দেখেছি সমসম্ভব নমুনার দ্বারা যথাযোগ্যভাবে মনোনীত বিন্দু প্রাক্কলনী মান, অজানা পূর্ণাকাঙ্কের প্রাক্কলিত মান নির্ণয় করে। স্পষ্টতই আমরা আশা করতে পারি যে পূর্ণকাঙ্কের

প্রাক্কলিত মান পূর্ণকাঙ্কটির সঠিক (বা প্রকৃত) মানের সমান হবে না। যখন পূর্ণকাঙ্ক θ-র বিন্দু প্রাক্কলক $\hat{\theta}$, তখন নমুনা-ভ্রান্তি হবে $(\hat{\theta}-\theta) \neq 0$ ফলে বিন্দু প্রাক্কলক খুব একটা নির্ভরযোগ্য হবে না যদি সঠিকভাবে পূর্ণকাঙ্কের মান নির্ণয় করতে হয়। বিন্দু প্রাক্কলকের এই সমস্যাকে দূর করার জন্য প্রচলিতভাবে আমরা অন্তর প্রাক্কলনের মাধ্যমে পূর্ণকাঙ্কের (θ) জন্য একটি প্রসার (range) গণনা করতে পারি। এই প্রসারের মধ্যে সজ্ঞাত কারণে পূর্ণকাঙ্কের সঠিক মান থাকার একটা নির্দিষ্ট উচ্চ সম্ভাবনা থাকবে। এই প্রসারকে অনেক সময় আস্থা-অন্তর বলেও অভিহিত করা হয়। এবারে আমরা অন্তর প্রাক্কলন তত্ত্ব দিয়ে আলোচনা করব।

5.7 অন্তর প্রাক্কলন

ধরা যাক্ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ একটি সমসম্ভব n আয়তন বিশিষ্ট নমুনা যা একটি সমগ্রক থেকে নেওয়া হয়েছে যার সম্ভাবনা-ঘনত্ব (বা ভর) অপেক্ষক $f(x_i; \theta)$, যেখানে θ একটি অজানা পূর্ণকাঙ্ক। θ-র অন্তর প্রাক্কলক নির্ণয় করার জন্য আমরা দুটি অপেক্ষক

$$T_1 = T_1\ (X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n)$$

এবং

$$T_2 = T_2\ (X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n)$$

খুঁজে বের করব। যেখানে T_1, T_2 তাদের অন্তর্গত প্রসার (T_1, T_2) এর মধ্যে পূর্ণকাঙ্ক θ-র সঠিক মান (তা সে যাই হোক না কেন) অন্তর্ভুক্ত রাখার সম্ভাবনা $(1 - \alpha)$

$$P\,(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1 - \alpha$$

[α সাধারণত 0.01 কিংবা 0.05 নেওয়া হয়]

5.7.1 আস্থা সীমা

সংজ্ঞা : কোনও সমগ্রকের পূর্ণকাঙ্ক θ-এর $100\,(1 - \alpha)\%$ আস্থা সীমা হ'ল একটি সমসম্ভব অন্তর $[T_1, T_2]$ যার জন্য

$$P\,[T_1 \leq \theta \leq T_2] = 1 - \alpha,$$

θ-র মান যাই হোক না কেন।

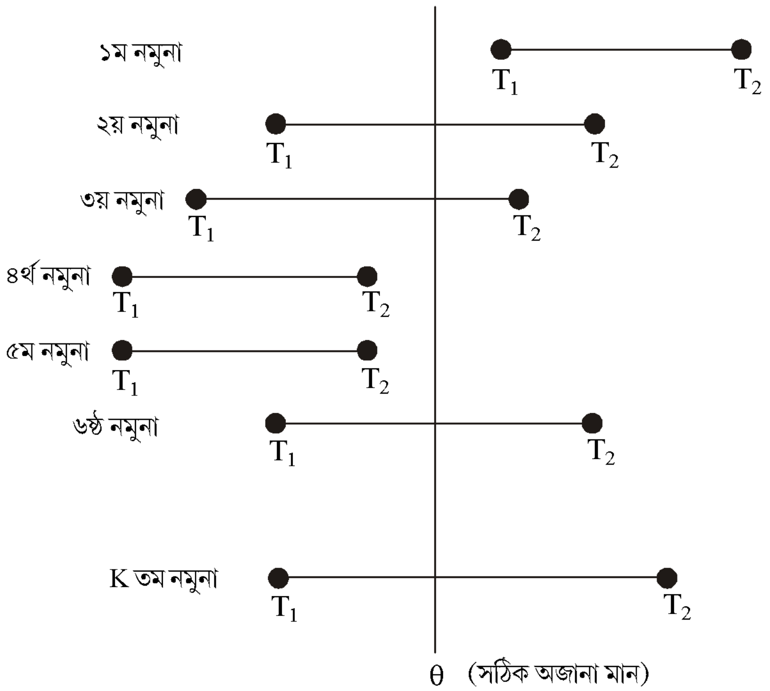
T_1 কে বলা হয় অধঃ আস্থা-সীমা।

T_2 কে বলা হয় ঊর্ধ্ব আস্থা-সীমা।

$(1 - \alpha)$ কে বলা হয় আস্থা-অঙ্ক।

উপরের সংজ্ঞাটিকে ব্যাখ্যা করার প্রয়োজন আছে।

সমগ্রকটির পূর্ণকাঙ্ক θ একটি অজানা ধ্রুবক। কিন্তু অন্তর $[T_1, T_2]$ পরিবর্তনীয়। বিভিন্ন সমসম্ভব নমুনা থেকে পাওয়া অবেক্ষণগুলি (observations) $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$-এর জন্য বিভিন্ন অন্তর $[T_1, T_2]$ পাওয়া যাবে। এই সমস্ত অন্তর θ-কে হয় অন্তর্ভুক্ত করবে নয় করবে না। নীচের চিত্রে θ এবং অন্তর-এর মধ্যে সম্পর্কটা বোঝানো হয়েছে।



চিত্র : 5.7.1

সংজ্ঞাটির সম্ভাবনার দিকটি বিশ্লেষণ করলে এটাই বোঝায় যে যদি বারংবার সমগ্রক থেকে নমুনা সংগ্রহ করা হয় তাহলে অবশেষে $100\,(1-\alpha)\%$ অন্তর পূর্ণকাঙ্ক θ-কে অন্তর্ভুক্ত করবে এবং $100\alpha\%$ অন্তর θ-কে অন্তর্ভুক্ত করবে না।

5.7.2 আস্থা সীমা নির্ণয়ের প্রচলিত পদ্ধতি

ধরা যাক্ কোন সমগ্রক থেকে $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ একটি সমসম্ভব নমুনা দেওয়া হ'ল যেখানে সমগ্রকের সম্ভাবনা ঘনত্ব (ভর) অপেক্ষক $f(x_i; \theta)$ এবং পূর্ণকাঙ্ক θ।

তিনটি পর্যায়ে আমরা পূর্ণকাঙ্ক θ-র $100\,(1-\alpha)$ শতাংশ আস্থাসীমা পেতে পারি।

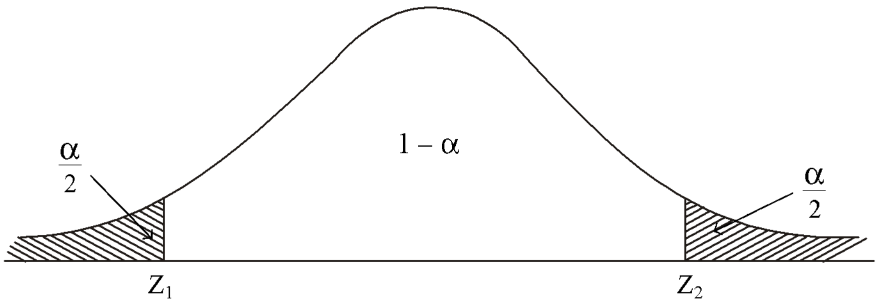
প্রথম পর্যায় : এখন একটি সমসম্ভব চলক $Z\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ খুঁজে বের করতে হবে যা একটি সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$-এর অপেক্ষক এবং যার সম্ভাবনা নিবেশন θ-এর উপর নির্ভরশীল নয়। এই Z-কে পর্যাপ্ত (Sufficient) নমুনা অপেক্ষক বলা হয়।

দ্বিতীয় পর্যায় : এবার দুটি ধ্রুবক Z_1, Z_2 খুঁজতে হবে যার জন্য

$$P(Z_1 \le Z \le Z_2) = 1 - \alpha$$

θ-র মান যাই হোক না কেন।

(Z_1, Z_2) (চিত্র নং 5.7.2), Z এর সম্ভাবনা নিবেশনকে বিভাজন করবে।



চিত্র : 5.7.2 Z এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক

তৃতীয় পর্যায় : যদি প্রভেদ $Z_1 \le Z \le Z_2$ কে অবস্থান পরিবর্তন করে $T_1 \le \theta \le T_2$ করা সম্ভব হয় যেখানে T_1 এবং T_2 উভয়েই সমসম্ভব নমুনা $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$-এর অপেক্ষক কিন্তু θ-র উপর নির্ভরশীল নয়, তখন $[T_1, T_2]$ θ-র $100(1 - \alpha)\%$ কাঙ্খিত আস্থা সীমা।

5.8 প্রামাণ্য পূর্ণাকাঙ্কগুলির আস্থা সীমা

ধরা যাক্ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ একটি সমসম্ভব নমুনা যার আয়তন n। এই নমুনা একটি নর্ম্যাল নিবেশন $N(\mu, \sigma^2)$ থেকে নেওয়া হয়েছে। মনে করা যাক্, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ = নমুনা গড় এবং

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \text{নমুনা ভেদমান}$$

এখন আমরা নর্ম্যাল বিভাজনের গড় (μ) এবং সমক পার্থক্যের (σ) আস্থা সীমা নির্ণয় করব।

5.8.1 সমগ্রক গড়ের (μ) আস্থা সীমা

ক্ষেত্র-I : যখন σ^2-এর মান জানা আছে।

আমরা জানি $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$-এর নিবেশন N (1, 0) এবং Z এর নিবেশন μ -এর উপর নির্ভর করছে

না। সুতরাং Z-কে আমরা পর্যাপ্ত (Sufficient) নমুনা অপেক্ষক হিসাবে ধরতে পারি। এবার ধ্রুবক Z_1, Z_2-কে এমনভাবে বের করতে হবে যাতে—

$$P\left[Z_1 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_2\right] = 1-\alpha \text{ হয়।}$$

স্পষ্টত : $Z_1 = -Z_{\alpha/2}$ এবং $Z_2 = Z_{\alpha/2}$

অর্থাৎ $Z_{\alpha/2}$ হবে N (0, 1) নিবেশনের ঊর্ধ্ব $\frac{\alpha}{2}$ বিন্দু এবং $-Z_{\alpha/2}$ হবে N (0, 1) নিবেশনের অধঃ $\frac{\alpha}{2}$ বিন্দু (চিত্র 5.7.2)

আবার, $$P\left[Z_1 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_2\right] = 1-\alpha$$

অথবা, $$P\left[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2} \le \mu \le \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

সুতরাং μ-এর $100(1-\alpha)\%$ আস্থা-সীমা হবে

$$I = \left[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right]$$

এবং আস্থা-সীমার দৈর্ঘ্য = $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}$

ক্ষেত্র-II : σ^2-এর মান অজানা।

আমরা জানি $T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ এর নিবেশন (n – 1) স্বাতন্ত্র্য মাত্রা যুক্ত **t** নিবেশন এবং T-এর নিবেশন μ এর উপর নির্ভর করছে না। সুতরাং T-কে আমরা পর্যাপ্ত (Sufficient) অপেক্ষক হিসাবে ধরতে পারি।

এখন ধ্রুবক Z_1, Z_2 -কে এমনভাবে বের করতে হবে যাতে

$$P\left[Z_1 \le \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le Z_2\right] = 1-\alpha \text{ হয়।}$$

স্পষ্টত $Z_1 = -t_{\alpha/2},\ n-1$ এবং $Z_2 = -t_{\alpha/2},\ n-1$

যেখানে $t_{\alpha/2}, (n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত t নিবেশনের উর্ধ্ব $\frac{\alpha}{2}$ বিন্দু এবং $-t_{\alpha/2}, (n-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত t নিবেশনের অধঃ $\frac{\alpha}{2}$ বিন্দু।

আবার, $$P\left[Z_1 \le \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le Z_2\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \quad P\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \le \mu \le \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

সুতরাং এ ক্ষেত্রে μ-এর $100(1-\alpha)\%$ আস্থাসীমা হবে

$$I = \left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2},\ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right]$$

এবং আস্থা-সীমার দৈর্ঘ্য = $\frac{2S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}$

5.8.2 সমগ্রক ভেদমানের (σ^2) আস্থা-সীমা

μ-এর মতো এখানেও আমরা দুটি ক্ষেত্রে σ^2-এর আস্থাসীমা নির্ণয় করব যখন μ-এর মান জানা এবং অজানা।

ক্ষেত্র-I : যখন μ-এর মান জানা আছে।

আমরা জানি যদি μ জানা থাকে $\chi^2 = \frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$-এর নিবেশন n স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2 (Chi-square) নিবেশন হবে এবং χ^2-এর নিবেশন σ^2-এর উপর নির্ভর করছে না। সুতরাং χ^2 কে আমরা পর্যাপ্ত অপেক্ষক হিসাবে ধরতে পারি।

ধ্রুবক Z_1, Z_2 এমন ভাবে বের করতে হবে যাতে

$$P\left[Z_1 \le \frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \le Z_2\right] = 1-\alpha$$

অথবা, $$P\left[\frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{Z_2} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{Z_1}\right] = 1-\alpha$$

স্পষ্টত : $Z_1 = \chi^2_{1-\alpha/2,n}$ এবং $Z_2 = \chi^2_{\alpha/2,n}$

সুতরাং σ^2-এর $100(1-\alpha)\%$ আস্থা-সীমা হবে

$$I : \left[\frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2,n}}, \frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n}}\right]$$

ক্ষেত্র-II : μ-এর মান অজানা।

আমরা জানি $\chi^2 = \dfrac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$-এর নিবেশন $n-1$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2 নিবেশন এবং χ^2 নিবেশন σ^2-এর উপর নির্ভর করছে না। সুতরাং χ^2 কে আমরা পর্যাপ্ত নমুনা অপেক্ষক হিসাবে ধরতে পারি।

এবার Z_1, Z_2 ধ্রুবক দুটিকে আমরা এমন ভাবে বের করতে হবে যাতে

$$P\left[Z_1 \le \sum_i \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \le Z_2\right] = 1-\alpha$$

অথবা, $$P\left[\frac{\sum_i (X_i-\bar{X})^2}{Z^2} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_i (X_i-\bar{X})^2}{Z_1}\right]=1-\alpha$$

স্পষ্টত : $Z_1=\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}$ এবং $Z_2=\chi^2_{\alpha/2,\, n-1}$

সুতরাং σ^2-এর 100 $(1-\alpha)$% আস্থা সীমা হবে

$$I=\left[\frac{\sum_i (X_i-X)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}},\ \frac{\sum_i (X_i-X)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}}\right]$$

5.8.3 সমগ্রক অনুপাতের (P) আস্থা-সীমা

ধরা যাক্, সমগ্রক থেকে nটি সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হ'ল যেখানে Xটি নমুনা একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যমূলক। তখন নমুনাঙ্ক X-এর নিবশেন হবে দ্বিপদ নিবেশন যার পূর্ণাকাঙ্কগুলি n এবং P। আমরা জানি $\frac{X}{n}$-এর নিবেশনটি প্রায় সঠিক নর্ম্যাল নিবেশন $N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$।

সুতরাং, $\dfrac{\frac{X}{n}-P}{\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}}$-এর নিবেশনও প্রায় সঠিক।

নর্ম্যাল N(0, 1) নিবেশন হবে যখন n যথেষ্ট বড়। অতএব, যখন n যথেষ্ট বড়, P-এর আস্থা-সীমা বের করার জন্য $\dfrac{\frac{X}{n}-P}{\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}}$ কে মুখ্য অপেক্ষক হিসাবে ধরতে পারি।

আবার, $$P\left[-Z_{\alpha/2} \le \frac{\frac{X}{n}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \le Z_{\alpha/2}\right]=1-\alpha$$

যেহেতু উপরের মন্তব্য থেকে P এর আস্থা-সীমা বের করতে গেলে দ্বিপদ সমীকরণের সমাধান করতে হবে, যেটা খুব সহজ হবে না। সেহেতু আমরা মুখ্য অপেক্ষকের হরে P-এর পরিবর্তে $\hat{P} = \frac{X}{n}$ ব্যবহার করব।

সুতরাং উপরের মন্তব্যকে সরলীকরণ করে P এর $100(1 - \alpha)\%$ আস্থা সীমা পাই

$$I = \left[\hat{P} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}};\ \hat{P} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right]$$

উদাহরণ 5.8.1 ধরা যাক্ একটি নর্ম্যাল সমগ্রক থেকে 10 আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা চয়ন করা হ'ল। সমগ্রকের গড় 40 এবং সমক পার্থক্য 12 দেওয়া আছে। সমগ্রকের গড়ের 99% আস্থা সীমা নির্ণয় কর। (দেওয়া আছে $t_{0.005} = 3.25$ যখন স্বাতন্ত্র্যমাত্রা 9)

সমাধান : ধরা যাক্ সমগ্রকের গড় μ এবং নমুনার গড় ও সমক পার্থক্য যথাক্রমে $\bar{x}$ এবং S। নমুনার আয়তন ধরা যাক্ n, তাহলে—

$$t = \frac{(\bar{x}-\mu)}{S'\sqrt{n}}, \quad [\text{যেখানে } (n-1)\ S'^2 = ns^2]$$

$$= \frac{(\bar{x}-\mu)}{S/\sqrt{n-1}}$$

t-নিবেশন অনুসরণ করবে যখন স্বাতন্ত্র্যমাত্রা $n - 1$

$$\therefore \quad P\left[-t_{\alpha/2,n-1} \le \frac{(x-\mu)}{S/\sqrt{n-1}} \le t_{\alpha/2,n-1}\right] = 1-\alpha$$

অথবা, $P\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n-1}}.t_{\alpha/2,n-1} \le \mu \le \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n-1}}.t_{\alpha/2,n-1}\right] = 1 - \alpha$ ....(i)

এখানে, $\bar{x} = 40$, $s = 12$, $n = 10$ এবং $\alpha = 0.01$

মানগুলি যথাস্থানে (i) সমীকরণের মধ্যে বসালে পাই—

$$P\left[40-\frac{12}{\sqrt{10-1}}.3.25 \le \mu \le 40+\frac{12}{\sqrt{10-1}}.3.25\right]=0.99$$

অথবা, $P[27 \le \mu \le 53] = 0.99$

সুতরাং সমগ্রকের গড়ের 99% আস্থা-সীমা হ'ল 27 এবং 53.

উদাহরণ 5.8.2 ধরা যাক্ কোন নর্ম্যাল সমগ্রক থেকে একটি 20 আয়তন বিশিষ্ট সমসম্ভব নমুনা চয়ন করা হ'ল এবং নমুনাটির সমক পার্থক্য দেখা গেল 12। সমগ্রকের ভেদমানের 95% আস্থা-সীমা নির্ণয় করতে হবে যখন 19 স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত $\chi^2_{0.975} = 8.907$ এবং $\chi^2_{0.025} = 32.852$ দেওয়া আছে।

সমাধান : ধরা যাক্ নমুনা আয়তন, নমুনার সমক পার্থক্য ও সমগ্রকের ভেদমানকে যথাক্রমে n, s এবং σ^2 দিয়ে চিহ্নিত করা হ'ল। তাহলে, $\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$,

n − 1 স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2 নিবেশন অনুসরণ করবে।

$$\therefore\ P\left[\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \le \frac{ns^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right] = 1-\alpha$$

অথবা, $$P\left[\frac{ns^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right] = 1-\alpha \ \ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

এখানে $n = 20$, $s^2 = 144$ এবং $\alpha = 0.05$

সুতরাং এই মানগুলি (a) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$P\left[\frac{20.144}{32.852} \le \sigma^2 \le \frac{20.144}{8.907}\right] = 0.95$$

অথবা, $P\,[87.666 \le \sigma^2 \le 323.341] = 0.95$

সুতরাং সমগ্রক ভেদমানের 95% আস্থা-সীমা হ'ল (87.666, 323.341)

5.9 সারাংশ

সমগ্রকের কোন বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে একটা ধারণ করতে সমগ্রক থেকে নমুনা সংগ্রহ করা হয়। সাধারণত šŸ$\%$y॥þ ¥ëû ¤î µ ¤Ÿ¤½þ šŸ$\%$yÐ ~¥z x yöj y|šyöjþ þ!î â, ‡Äyš^ • þ x š$\%$yš • þ ´ (Statistical inference) বলে।

এই পরিসংখ্যাগত অনুমান তত্ত্বের দুটি প্রধান ক্ষেত্র আছে। একটি হ'ল পূর্ণকাঙ্কের প্রাক্কলনতত্ত্ব (Theory of estimation of parameters) ও অপরটি হল রাশিবিজ্ঞানের প্রকল্প বিচার (Testing of statistical hypotheses)।

প্রাক্কলন আবার দুই প্রকার। বিন্দু প্রাক্কলন ও অন্তর-প্রাক্কলন। প্রাক্কলন পদ্ধতিতে পূর্ণাকাঙ্কের একটি নির্দিষ্ট মান নমুনাঙ্কের সাহায্যে নির্ণয় করা হলে সেটিকে বিন্দু প্রাক্কলন বলে।

আবার যখন নমুনা থেকে দুটি মান নির্ণয় করা হয় এবং এই দুই মানের অন্তরের মধ্যে পূর্ণাকাঙ্কের প্রকৃত মানের থাকার একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা থাকে তাকে অন্তর প্রাক্কলন বলা হয়।

পূর্ণকাঙ্ক θ-র প্রাক্কলক যদি নমুনাঙ্ক t হয় তবে t কে পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক বলা যাবে যখন

$E(t) = \theta$ হবে

θ-র প্রকৃত মান যাই হোক না কেন।

$E(t)$ = t-এর প্রত্যাশা

ঋজুরৈখিক প্রত্যাশা পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক একই পূর্ণকাঙ্কের জন্য অসীম সংখ্যক হতে পারে। এর মধ্যে থেকে এমন একটা প্রাক্কলক পছন্দ করা প্রয়োজন যার ভেদমান হবে অন্য সব অপক্ষপাতী প্রাক্কলকগুলোর ভেদমানের মধ্যে সব থেকে ছোট। এই প্রাক্কলককে আমরা সর্বোত্তম ঋজুরৈখিক অপক্ষপাতী প্রাক্কলক (Best linear unbiased Estimator) বলে।

নমুনা ভেদমান $s^2 = \underset{n-1}{L} \sum (x_i - \overline{x})^2$, সমগ্রক ভেদমান σ^2-র জন্য একটি পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক।

সমগ্রকের পূর্ণাকাঙ্কের (θ) প্রাক্কলক যদি নমুনাঙ্ক (t_n) হয় তবে t_n সমঞ্জস (consistent) হবে যখন—

$E(t_n) \rightarrow \theta$ এবং $\text{Var}\ (t_n) \rightarrow 0$ যত $n \rightarrow \infty$

এবার n-এর মান অসীমের দিকে যাওয়ার ফলে কোন কোন প্রাক্কলকের নমুনাজ বিভাজন সীমাস্থ

অবস্থায় নর্ম্যাল হচ্ছে দেখা দরকার। তখন সে প্রাক্কলকের সীমাস্থ নর্ম্যাল অবস্থার ভেদমান অন্য সবগুলোর চেয়ে ছোট তাকে আমরা দক্ষ প্রাক্কলক বলব।

বিন্দু প্রাক্কলক বিভিন্ন পদ্ধতিতে করা হয়। আমরা পরিঘাত পদ্ধতি (Method of moments) এবং গরিষ্ঠ আশংসামান পদ্ধতি (Method of Maximum likelihood) এই দুটি পদ্ধতিতে আলোচনা করেছি।

গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলক হবে পক্ষপাতশূন্য, সমঞ্জস, সীমাস্থ অবস্থায় নর্ম্যাল, দক্ষ এবং অপরিবর্তনীয়।

যখন পূর্ণকাঙ্ক θ-র বিন্দু প্রাক্কলক $\hat{\theta}$, তখন নমুনা ভ্রান্তি হবে।

$(\hat{\theta}-\theta)\neq 0$ ফলে বিন্দু প্রাক্কলক দিয়ে সঠিকভাবে পূর্ণাকাঙ্কের মান নির্ণয় করা অসম্ভব। অন্তর প্রাক্কলনের সাহায্যে আমরা θ-র জন্য একটি প্রকার গণনা করতে পারি। একে আস্থা-অন্তরও বলা হয়। পূর্ণকাঙ্কের সঠিক মান এই আস্থা সীমার মধ্যে থাকার একটা নির্দিষ্ট উচ্চ সম্ভাবনা থাকে।

5.10 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা : (সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন, প্রতিটির মান 2.5)

1. প্রাক্কলক (estimator) ও প্রাক্কলকীমানের (estimate) সংজ্ঞা কি?
2. পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক কাকে বলে?
3. সর্বোত্তম-ঋজুরৈখিক অপক্ষপাতী প্রাক্কলক (Best linear unbiased estimator) কাকে বলে?
4. সমঞ্জস ও দক্ষ প্রাক্কলকের পার্থক্য কী?
5. বিন্দু প্রাক্কলক ও অন্তর প্রাক্কলনের মধ্যে পার্থক্য কী?
6. সম্পূর্ণ সমীক্ষা ও নমুনার সমীক্ষার পার্থক্য কী?

প্রশ্নমালা : (প্রতিটির মান 5)

1. আস্থা-সীমা কাকে বলে?
2. কোন পরিবারের 10 জন সদস্য থেকে পুনঃস্থাপনাসহ পদ্ধতিতে 3 জনকে নির্বাচন করতে হবে। সমসম্ভব সংখ্যা সারির সাহায্যে নমুনা চয়ন বর্ণনা কর।

3. সরল সমসম্ভব নমুনা কাকে বলে? পুনঃস্থাপনাসহ ও পুনঃস্থাপনাবিহীন সরল সমসম্ভব নমুনার প্রভেদ কোথায়?

4. নমুনা সমীক্ষার বিভিন্ন পর্যায়গুলি কী কী?

5. নিয়মানুগ নমুনা সংগ্রহ সম্বন্ধে একটি টীকা লেখ।

প্রশ্নমালা : (প্রতিটির মান 10)

1. গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলন পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা কর। গরিষ্ঠ আশংসামান প্রাক্কলকের প্রধান ধর্মগুলি কী কী?

2. θ-র স্বাধীন পক্ষপাতহীন প্রাক্কলক T_1, T_2 ও T_3-র ভেদমানগুলির অনুপাত দেওয়া আছে 2 : 3 : 5, নীচের θ-র প্রাক্কলকগুলির মধ্যে কোনটিকে সর্বোত্তম বলে মনে হয়?

$$\frac{(2T_1+T_2+T_3)}{4}, \frac{(T_1+T_2+2T_3)}{4}, \frac{(T_1+2T_2+T_3)}{4}$$

5.11 গ্রন্থপঞ্জী

1. রাশিবিজ্ঞানের মূলতত্ত্ব I & II (1976)—Dr. Saliesh Bhusan Choudhuri, Dr. Ajit Choudhuri, Dr. Biswanath Das (WB State Book Syndicate)

2. Fundamentals of Statistics, Vol. I & II (2001)—Goon, Gupta & Dasgupta (World Press)

3. Cochran – Sampling Techniques (Wiley Eastern)

4. Murthy – Statistical Theory and Methods (Statistical Publishing Society)

একক-6 ❑ পরিসংখ্যানগত অনুমানতত্ত্ব-II প্রকল্প বিচার

গঠন

6.1 উদ্দেশ্য

এই অনুচ্ছেদে আমরা নীচের বিষয়গুলি জানতে পারব—

(ক) প্রকল্প বিচার সম্বন্ধীয় সমস্ত মৌলিক ধারণা

(খ) সাধারণ পরিসংখ্যানগত বিচার নির্ণয়

(গ) দুই প্রকারের ভ্রান্তি

(ঘ) সমগ্রকের গড় সম্বন্ধীয় বিচার

(ঙ) সমগ্রকের ভেদমান সম্বন্ধীয় বিচার

(চ) সমগ্রকের অনুপাত সম্বন্ধীয় বিচার

(ছ) দুটি সমগ্রকের গড়ের তুলনা সম্বন্ধীয় প্রকল্প বিচার

(জ) দুটি সমগ্রকের ভেদমানের তুলনা সম্বন্ধীয় প্রকল্প বিচার

(ঝ) দুটি সমগ্রকের অনুপাতের তুলনা সম্বন্ধীয় প্রকল্প বিচার

(ঞ) নর্ম্যাল, χ^2, **t** এবং **F** প্রভৃতি প্রচলিত পরিসংখ্যাগত বিচারের ব্যবহার

6.2 প্রস্তাবনা

একক 5-এ আমরা জেনেছি যে জানা নমুনার সাহায্যে অজানা সমগ্রকের সম্বন্ধে ধারণা করার জন্য যে বিজ্ঞানসম্মত তত্ত্ব ব্যবহার করা হয় তাকে পরিসংখ্যানগত অনুমান তত্ত্ব বলা হয়। পরিসংখ্যানগত অনুমানতত্ত্ব প্রধানত দুই প্রকার—

(ক) প্রাক্‌কলন তত্ত্ব এবং

(খ) প্রকল্প বিচার তত্ত্ব

প্রাক্‌কলন তত্ত্ব সম্পর্কে আমরা একক 5-এ বিস্তারিতভাবে আলোচনা করেছি। এখানে আমরা প্রকল্প

বিচারতত্ত্ব নিয়ে আলোচনা করব। রাশিবিজ্ঞানভিত্তিক সিদ্ধান্ত সংক্রান্ত সমস্যার সৃষ্টি হবে যখন আমরা রাশিতথ্যের উপর নির্ভর করে পূর্ণাকাঙ্ক θ সম্বন্ধীয় পূর্ব ধারণাকে যাচাই করতে আগ্রহী হব। নমুনা রাশি ব্যবহার করে দেখতে হবে θ সম্বন্ধে পূর্ব ধারণাকে আমরা গ্রহণ করব না বর্জন করব। যে তত্ত্বের উপর নির্ভর করে এই সিদ্ধান্ত নেওয়া হয় তাকে বলে প্রকল্প বিচার তত্ত্ব। আর এই পদ্ধতিকে বলা হয় প্রকল্প বিচার পদ্ধতি। এখানে আমরা প্রধানত প্রচলিত পরিসংখ্যানগত বিচার পদ্ধতি নিয়ে বিশদ আলোচনা করব।

6.3 প্রকল্প বিচার

পূর্ণাকাঙ্ক সম্বন্ধীয় কোন পূর্ব ধারণা বা মন্তব্যকে প্রকল্প বলে। একটি উদাহরণের সাহায্যে প্রকল্প বিচার সম্বন্ধে পরিষ্কার ধারণা পাওয়া যাবে। ধরা যাক্ একটি খনিজ পদার্থ সমৃদ্ধ ঝরনার জল (Mineral water) প্রস্তুতকারী সংস্থা 1 litre এর জলের বোতল স্বয়ংক্রিয় যন্ত্র দ্বারা ভর্তি করে। যদি যন্ত্রটি সঠিক ভাবে কাজ করে তবে সব বোতলে জলের পরিমাণ 1 litre-ই হবে। এখন, θ যদি সঠিক গড় জলের পরিমাণ প্রতিটি বোতলে হয় তবে সংস্থাটির ধারণা হবে $\theta = 1$ litre জল। এবার সংস্থাটির এই ধারণা করা মতটিকে যাচাই করার প্রয়োজন হতে পারে। প্রথমত: $\theta = 1$ litre জল, দ্বিতীয়ত: $\theta \neq 1$ litre জল। প্রথম θ সম্বন্ধীয় বিবৃতিকে বলা হয় মুখ্য প্রকল্প (Null hypothesis) এবং একে H_0 দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। দ্বিতীয় θ সম্বন্ধীয় বিবৃতিকে বলা হয় বৈকল্পিক প্রকল্প (Alternative hypothesis) এবং একে H_1 দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। সমসম্ভব নমুনার ভিত্তিতে মুখ্য প্রকল্প (Null hypothesis) বিচার করে দেখা যায় সেই প্রকল্প গ্রহণযোগ্য কিনা। মুখ্য প্রকল্প যদি গ্রহণযোগ্য না হয়, তাহলে বৈকল্পিক প্রকল্প (Alternative hypothesis) গ্রহণযোগ্য হবে। যে পদ্ধতির সাহায্যে নমুনার উপর নির্ভর করে মুখ্য প্রকল্প/বৈকল্পিক প্রকল্প-এর গ্রহণযোগ্যতা বিচার করা হয়, তাকেই প্রকল্প বিচার পদ্ধতি বলে।

6.3.1 পরিসংখ্যাগত প্রকল্প সম্বন্ধীয় বিবৃতি

সাধারণত পূর্ণাকাঙ্ক θ-র মান অজানা থাকে। θ একমাত্রিক কিংবা বহুমাত্রিক হতে পারে। θ-র সমস্ত পূর্ণাকাঙ্ক দেশ (parametric space) Θ থেকে গৃহীত হয়। ধরা যাক্ Θ_0, Θ এর একটি সাবসেট। তখন আমরা মুখ্য প্রকল্পকে $H_0 = \theta \varepsilon\ \Theta_0$ এভাবে বর্ণনা করতে পারি। বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 : \theta \varepsilon\ \overline{\Theta}_0$, যেখানে $\overline{\Theta}_0 = \Theta - \Theta_0$। সাধারণত Θ সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট। একটি রাশিবিজ্ঞান ভিত্তিক প্রকল্প বিচার এক পাক্ষিক (one sided) হতে পারে বা দ্বিপাক্ষিক (both sided) হতে পারে, সবকিছুই নির্ভর করছে বৈকল্পিক প্রকল্প বিচারের উপরে।

ধরা যাক্ আমরা একটি প্রকল্প বিচার করছি যেখানে মুখ্য প্রকল্প (Null hypothesis) $H_0 : \theta = \theta_0$ এবং বৈকল্পিক প্রকল্প (Alternative hypothesis) নীতির যে কোন একটি হবে—

(i) $H_1 : \theta = \theta_1\ (> \theta_0)$

(ii) $H_2 : \theta = \theta_2\ (< \theta_0)$

(iii) $H_3 : \theta > \theta_0$

(iv) $H_4 : \theta < \theta_0$

(v) $H_5 : \theta \neq \theta_0$

আমরা লক্ষ করছি যে পূর্ণকাঙ্ক θ-র যে মানগুলি বৈকল্পিক প্রকল্পতে বলা হচ্ছে সেগুলো মুখ্য প্রকল্পতে θ-র মানের থেকে আলাদা। দুটির তফাৎ কখনো শুধু ধনাত্মক আবার কখনো শুধু ঋণাত্মক আবার কখনো ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দুটোই। যখন পার্থক্যটা শুধুই ধনাত্মক বা শুধুই ঋণাত্মক [যেমন (i) থেকে (iv) পর্যন্ত বৈকল্পিক প্রকল্পের ক্ষেত্রে] তখন একে এক-পাক্ষিক বিচার বলা হয় (One sided or one tail test) আর যখন পার্থক্য ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুই-ই হয় তখন দ্বিপাক্ষিক বিচার (two sided or two tail test) বলা হয়।

মন্তব্য : H_0 (অর্থাৎ মুখ্য প্রকল্প) কে গ্রহণ করা মানে এটা প্রমাণ হয় না যে $\theta = \theta_0$ ধারণাটি ধ্রুব সত্য। এই টুকুই মানে দাঁড়ায় যে সংগৃহীত রাশি তথ্যের উপর নির্ভর করে আমরা H_0-র ধারণা সম্বন্ধে সন্দেহ প্রকাশ করার কোন কারণ দেখছি না। একইভাবে H_0 যদি আমরা বর্জন করি তাহলে তার মানে এই নয় যে আমরা H_0-র ধারণাটিকে (অর্থাৎ $\theta = \theta_0$) চূড়ান্ত ভাবে অস্বীকার করেছি। H_0 বর্জন করার মানে হ'ল সংগৃহীত নমুনার উপর নির্ভর করে আমরা H_0 কে খুব বিশ্বাসযোগ্য মনে করছি না।

6.3.2 সরল ও মিশ্র প্রকল্প

প্রকল্প দুই প্রকারের হয়—(ক) সরল প্রকল্প (খ) মিশ্র প্রকল্প।

(ক) যে প্রকল্প θ-কে স্বতন্ত্রভাবে উল্লেখ করে যাতে সমগ্রক সম্বন্ধে সম্পূর্ণ জানা হয়ে যায় তাকে সরল প্রকল্প বলে। উদাহরণস্বরূপ নর্ম্যাল $N(\mu, \sigma^2)$ নিবেশনের, যেখানে σ^2 জানা আছে $H_0 = \mu = \mu_0$ একটি সরল প্রকল্প। কিংবা $N(\mu, \sigma^2)$ নিবেশনের যেখানে μ জানা আছে, $H_0 : \sigma^2 = \sigma^2{}_0$ একটি সরল প্রকল্প।

(খ) যে প্রকল্প θ-কে স্বতন্ত্র্যভাবে উল্লেখ করে না যার ফলে সমগ্রক সম্বন্ধে সম্পূর্ণ জানা হয় না, তাকে মিশ্র প্রশ্ন বলে। উদাহরণ স্বরূপ $N(\mu, \sigma^2)$ নিবেশনের, $H_0 : \mu \leq \mu_0$ যেখানে σ^2 এর মান জানা থাক বা না থাক, একটি মিশ্র প্রকল্প। আবার $N(\mu, \sigma^2)$ সমগ্রকের যদি μ ও σ^2 অজানা হয় তাহলে $H_0 : \mu \leq \mu_0$ একটি মিশ্র প্রকল্প।

ধরা যাক্ একটি সমসম্ভব চলক x সম্পর্কে জানা আছে যে তা পয়জঁ বিভাজন অনুসরণ করে যার গড়টি λ অজানা। এখন মুখ্য প্রকল্পটি যদি $\lambda = 3$ হয় তবে প্রকল্পটি সরল হবে। কিন্তু মুখ্যপ্রকল্প যদি $\lambda \neq 3$ হয় তবে প্রকল্পটি হবে মিশ্র এবং তার স্বাতন্ত্র্যমাত্রা হবে 1 (স্বাতন্ত্র্য মাত্রা নির্ণয় করতে হলে অনির্দিষ্ট পূর্ণকাঙ্কের (unspecified parameters) সংখ্যা জানতে হবে।

6.3.3 পরিসংখ্যাগত বিচার

ধরা যাক্ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ n-আয়তন বিশিষ্ট সমসম্ভব নমুনা একটি সমগ্রক থেকে নেওয়া হ'ল যার গাণিতিক রূপ f_θ [$\theta \varepsilon$ Ⓗ] জানা আছে যেখানে f_θ দ্বিপদ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক, কিংবা পয়র্জঁ বিভাজনের সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক বা নর্ম্যাল বিভাজনের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হতে পারে। সাধারণত θ-র মান অজানা থাকে। নমুনার মধ্যে যে তথ্য আছে তাকে ব্যবহার করে আমরা দুটি সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি।

1. H_0 : θ ε Ⓗ$_0$ কে সঠিক বলে গ্রহণ করতে পারি।

2. H_0-কে বর্জন করতে পারি এবং H_1 : θ ε Ⓗ -কে সঠিক বলে গ্রহণ করতে পারি।

পরিসংখ্যাগত প্রকল্প বিচার একটি নিয়ম যা আমাদের উপরিউক্ত কোনও একটি সিদ্ধান্তে উপনীত হতে সাহায্য করে। সিদ্ধান্তে উপনীত হবার জন্য পর্যবেক্ষণীয় নমুনার উপর নির্ভর করতে হবে। পর্যবেক্ষণীয় নমুনা বিন্দু যে দেশ S-এর সৃষ্টি করে তাকে নমুনাদেশ বলে। পর্যবেক্ষণীয় নমুনা (X_1, X_2, ..., X_n) কে আমরা n মাত্রিক কোনও দেশ (S)-এর কোনও বিন্দু হিসাবে ভাবতে পারি। প্রথমত আমরা S-কে দুভাগে ভাগ করব। ধরা যাক্ একটি ভাগ C এবং অন্য ভাগটি $\bar{C} = S - C$। যদি পর্যবেক্ষণীয় নমুনা C-এর মধ্যে থাকে, তখন আমরা মুখ্য প্রকল্পকে বর্জন করব। আবার যদি নমুনা $\bar{C}$ এর মধ্যে থাকে, তখন আমরা মুখ্য প্রকল্পকে গ্রহণ করব এবং বৈকল্পিক প্রকল্পকে বর্জন করব। অঞ্চল C-কে বলে বর্জনাঞ্চল এবং $\bar{C}$ কে বলা হয় গ্রহণাঞ্চল। বর্জনাঞ্চলকে পর্যবেক্ষণীয় নমুনা X_1, X_2, ... X_n-এর অপেক্ষক $T(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ দ্বারা বর্ণনা করা যেতে পারে। T কে বলা হয় বিচার নমুনাঙ্ক।

6.3.4 দুই প্রকার ভ্রান্তি (Type I error and Type II error)

পরিসংখ্যাগত বিচার করে কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হতে গেলে আমরা দুই প্রকার ভ্রান্তির মুখোমুখি হই।

1. প্রথম প্রকার ভ্রান্তি : মুখ্য প্রকল্প H_0 সত্য হলেও পর্যবেক্ষণীয় নমুনা যদি বর্জনাঞ্চল C-তে পড়ে, তখন মুখ্য প্রকল্প H_0 বর্জন করা হয়। সুতরাং সঠিক মুখ্য প্রকল্পকে বর্জন করার ফলে যে ভ্রান্তির সৃষ্টি হয় তাকে প্রথম প্রকার ভ্রান্তি (Type I error) বলে।

2. দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তি : মুখ্য প্রকল্প H_0 সত্য না হলেও পর্যবেক্ষণীয় নমুনা যদি গ্রহণাঞ্চল $\bar{C}$-তে পড়ে তখন মুখ্য প্রকল্প গ্রহণ করা হয়। মুখ্য প্রকল্প সত্য না হলেও তাকে গ্রহণ করার ফলে যে ভ্রান্তির উৎপত্তি হয় তাকে দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তি (Type II error) বলে।

পরিসংখ্যানগত বিচার পদ্ধতি প্রয়োগ করার ফলে যে চার প্রকার পরিস্থিতির উদ্ভব হয় তা সারণী 6.3.1-এ দেখানো হ'ল।

সিদ্ধান্ত \ সঠিক অবস্থা	মুখ্য প্রকল্প H_0 সঠিক	বৈকল্পিক প্রকল্প H_1 সঠিক
মুখ্য প্রকল্প H_0 গ্রহণ	সঠিক সিদ্ধান্ত	দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তি
মুখ্য প্রকল্প H_0 বর্জন	প্রথম প্রকার ভ্রান্তি	সঠিক সিদ্ধান্ত

সারণী 6.3.1 দুই প্রকার ভ্রান্তি

প্রকল্প বিচারের উদ্দেশ্য হওয়া উচিৎ দুই প্রকারের ভ্রান্তিকে একসঙ্গে যথাসম্ভব কমানো এবং একটি বর্জনাঞ্চলকে চিহ্নিত করা। প্রথম প্রকার ও দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনাকে যথাক্রমে α এবং β দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। সুতরাং

$$\alpha(\theta) = P_\theta \text{ (}H_0 \text{ বর্জন করা)}$$

$$= P_\theta\,[(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)\ \varepsilon\ C],\ \theta\ \varepsilon\ \text{Ⓗ}_0$$

এবং

$$\beta(\theta) = P_\theta \text{ (}H_0 \text{ গ্রহণ করা)}$$

$$= P_\theta\,[(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)\ \varepsilon\ \bar{C}],\ \theta\ \varepsilon\ \text{Ⓗ}_1$$

আদর্শ বিচার এমন হওয়া উচিৎ যেখানে দুই প্রকারের ভ্রান্তি যেন শূন্যর কাছাকাছি যায়, যদি শূন্য নাও হয়। কিন্তু একটি স্থির আয়তনযুক্ত নমুনার (Sample of fixed size) পক্ষে উভয় প্রকারের ভ্রান্তির সম্ভাবনাকে সাধারণত একসঙ্গে হ্রাস করা সম্ভব নয়। যদি কোনও একটির সম্ভাবনা কমতে কমতে শূন্যের দিকে যায়, তখন অন্যটির সম্ভাবনা বাড়তে বাড়তে 1-এর দিকে যায়।

এটা বোঝার জন্য আমরা একটি প্রকল্প বিচার বিশ্লেষণ করব যার জন্য

$$\alpha(\theta) = 0\ \forall\ \theta\ \varepsilon\ \text{Ⓗ}_0$$

এটা তখনই সম্ভব যখন বর্জনাঞ্চল $C = \phi$ (Null set) অর্থাৎ যে সেটে কোন সদস্য নেই। অর্থাৎ পর্যবেক্ষণীয় নমুনা যাই হোক না কেন বিচার কখনই মুখ্য প্রকল্প H_0 কে বর্জন করবে না। তখন

$$\alpha(\theta) = P_\theta\,[(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)\ \varepsilon\ \phi] = 0\ \forall\ \theta\ \varepsilon\ \text{Ⓗ}_0$$

কিন্তু যেহেতু গ্রহণাঞ্চল $\bar{C} = S - \phi = S$

$$\beta(\theta) = P_\theta\,[(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)\ \varepsilon\ S] = 1\ \forall\ \theta\ \varepsilon\ \text{Ⓗ}_1$$

একইরকমভাবে পর্যবেক্ষণীয় নমুনা যাই হোক না কেন যদি একটি প্রকল্প বিচার মনোনীত করা হয়

যা সর্বদা মুখ্য প্রকল্প (H_0) কে বর্জন করে অর্থাৎ বর্জনাঞ্চল $C = S$, তখন $\alpha(\theta) = 1$, তার সঙ্গে $\beta(\theta) = 0$ হবে।

$\alpha(\theta)$ এবং $\beta(\theta)$ উভয়কে যেহেতু একসঙ্গে কমানো সম্ভব নয়, প্রথমে $\alpha(\theta)$-এর ঊর্ধ্বসীমা

$$\alpha(\theta) \le \alpha, \ \forall \ \theta \ \varepsilon \ Ⓗ_0$$

স্থির করে নেওয়া হয়। এই ঊর্ধ্বসীমা α সাধারণত 0.01 বা 0.05 হয়। α কে বলা হয় বিচারের অথবা বর্জনাঞ্চলের (C-এর) সংশয় মাত্রা (Level of significance of the test)। সংশয় মাত্রা একবার স্থির করা হয়ে গেলে, α সংশয়মাত্রা যুক্ত বিচারগুলির মধ্যে যে বিচারে দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির (Type II error) সম্ভাবনা

$$\beta(\theta), \ \forall \ \theta \ \varepsilon \ Ⓗ_1$$

সর্বনিম্ন, সেই বিচারটিকেই আমরা মনোনীত করব।

মন্তব্য : 1. সংশয়মাত্রা α কে শতকরা ভাবে $100\alpha\%$ হিসাবেও লেখা হয়।

2. সরল প্রকল্পে বিচারের সংশয়মাত্রা (Level of Significance) এবং প্রথম প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা (probability of type I error) দুটিই সমান।

6.3.5 বিচারের শক্তি অপেক্ষক

আমরা দেখছি যে প্রথম ও দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা দুটি পূর্ণাকাঙ্ক θ-এর অপেক্ষক। প্রথমটির ক্ষেত্রে $\theta \ \varepsilon \ Ⓗ_0$ এবং দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে $\theta \ \varepsilon \ Ⓗ_1$। এখন আমরা একটি অপেক্ষক উপস্থাপিত করব যার থেকে $\alpha(\theta)$ এবং $\beta(\theta)$ উভয়কেই নির্ণয় করা যায়। বিচারের শক্তি অপেক্ষক হ'ল দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনার পরিপূরক (complement) অর্থাৎ এটা হ'ল মুখ্যপ্রকল্প H_0 কে বর্জন করার সম্ভাবনা যখন পূর্ণকাঙ্কের সঠিক মান θ, $\theta \ \varepsilon \ Ⓗ_1$ বিচারের শক্তি অপেক্ষককে সাধারণত $\gamma(\theta)$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

সুতরাং $\gamma(\theta) = P_\theta$ (মুখ্য প্রকল্প H_0 বর্জন করা) যখন H_0 ভুল

$$= P_\theta \ [(X_1, \ X_2, \ \ldots\ldots\ldots, \ X_n) \ \varepsilon \ C \ ], \ \theta \ \varepsilon \ Ⓗ_1$$

সংজ্ঞা অনুসারে $\alpha(\theta)$ হচ্ছে মুখ্য প্রকল্পকে বর্জন করার সম্ভাবনা যখন মুখ্য প্রকল্প H_0 সঠিক অর্থাৎ $\theta \ \varepsilon \ Ⓗ_0$ সুতরাং

$$\alpha(\theta) = \gamma(\theta) \ \forall \ \theta \ \varepsilon \ Ⓗ_0$$

এবং $\beta(\theta)$ হচ্ছে মুখ্য প্রকল্প H_0 কে গ্রহণ করার সম্ভাবনা যখন মুখ্য প্রকল্প H_0 সত্যি নয় অর্থাৎ $\theta \ \varepsilon \ Ⓗ_1$ সুতরাং

$$\beta(\theta) = 1 - \gamma(\theta) \qquad \forall \ \theta \ \varepsilon \ Ⓗ_1$$

তাহলে আমরা দেখলাম

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} \alpha(\theta) & \forall\ \theta\ \varepsilon\ Ⓗ_0 \\ 1-\beta(\theta) & \forall\ \theta\ \varepsilon\ Ⓗ_1 \end{cases}$$

$\gamma(\theta)$ এর লেখচিত্রকে বিচারের শক্তি রেখা বলে। তাহলে শক্তি রেখার আকার কেমন হবে? আদর্শ শক্তি রেখা আমরা তাকেই বলব যার জন্য $\alpha(\theta) = 0$ এবং $\beta(\theta) = 0$ অর্থাৎ

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} 0 & \forall\ \theta\ \varepsilon\ Ⓗ_0 \\ 1 & \forall\ \theta\ \varepsilon\ Ⓗ_1 \end{cases}$$

কিন্তু আমরা জানি যে এই আদর্শ পরিস্থিতি কোনও বিচারের ক্ষেত্রেই অর্জন করা সম্ভব হয় না। যেটা আমরা করি সেটা হ'ল $\alpha(\theta)$ কে নিয়ন্ত্রণ করি সর্বোচ্চ α পর্যন্ত যখন $\theta\ \varepsilon\ Ⓗ_0$ এবং $\beta(\theta)$ কে হ্রাস করি যখন $\theta\ \varepsilon\ Ⓗ_1$

অর্থাৎ $\gamma(\theta) \leq \alpha\ \forall\ \theta\ \varepsilon\ Ⓗ_0$

এবং $\gamma(\theta)$, $\theta\ \varepsilon\ Ⓗ_1$ যতটা সম্ভব বেশী হওয়া উচিৎ

উদাহরণ 6.3.1 একটি মুদ্রা নিখুঁত কিনা পরীক্ষা করার জন্য মুদ্রাটি 5 বার ছোঁড়া হ'ল। নিখুঁত হওয়ার মুখ্যপ্রকল্প বর্জন করা হবে যদি 4টির বেশী হেড পাওয়া যায়। প্রথম প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা নির্ণয় কর। দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনাও নির্ণয় কর যখন হেড পড়ার সম্ভাবনা দেওয়া আছে 0.2।

সমাধান : ধরা যাক 5 বার ছোঁড়ার ফলে হেড পাওয়ার সংখ্যা হ'ল X এবং p হ'ল হেড পড়ার সম্ভাবনা মুদ্রা একবার ছোঁড়ার সময়ে। তাহলে X-এর সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক হবে—

$$P(X = x) = \binom{5}{x} p^x.(1-p)^{5-x}, \ x = 0(1)5$$

এখানে আমাদের মুখ্য প্রকল্প হ'ল $H_0 : p = \frac{1}{2}$ এবং

বর্জনাঞ্চল (Critical region) হ'ল $X > 4$, অর্থাৎ, $X = 5$

সুতরাং প্রথম প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা $= P(X = 5 | H_0)$

$$= P\left(X = 5 \mid p = \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা

$= P(X \leq 4 \mid p = 0.2)$

$= 1 - P(X = 5 \mid p = 0.2)$

$= 1 - (0.2)^5 = 1-\frac{1}{5^5} = \frac{3124}{3125}$

উদাহরণ 6.3.2 দেওয়া আছে $f(x) = \frac{1}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta$

$= 0,$ অন্যথায়

মুখ্যপ্রকল্প $H_0 : \theta = 1$ পক্ষান্তরে বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \theta = 2$ পরীক্ষা করার জন্য একমাত্র অবেক্ষণ x ব্যবহার করা হচ্ছে। প্রথম প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা এবং দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা নির্ণয় কর যদি বর্জনাঞ্চল (critical region) $x > 0.5$ হয়।

সমাধান : মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \theta = 1$

বৈকল্পিক প্রকল্প $H : \theta = 2$

H_0-র সাপেক্ষে x-এর p.d.f (সম্ভাবনা-ঘনত্ব-অপেক্ষক) হবে

$f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$

$= 0,$ অন্যথায়

এবং H-এর সাপেক্ষে x-এর p.d.f হবে

$f(x) = \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2$

$= 0,$ অন্যথায়

আমরা জানি বর্জনাঞ্চল (Critical region) হ'ল $x > 0.5$

সুতরাং প্রথম প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা

$= P(x > 0.5 \mid H_0)$

$= P(x > 0.5 \mid \theta = 1)$

$$= \int_{0.5}^{1} dx = x\Big]_{0.5}^{1} = 0.5$$

এবং দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা

$$= P(x \leq 0.5 \mid H)$$

$$= P(x \leq 0.5 \mid \theta = 2)$$

$$= \int_0^{0.5} \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} \Big]_0^{0.5} = 0.25$$

6.4 পরিসংখ্যানগত বিচার—একটি সমগ্রকের ক্ষেত্রে

এই অনুচ্ছেদে আমরা একটি সমগ্রকের গড় (μ), সমগ্রকের ভেদমান (σ^2) এবং সমগ্রকের অনুপাত (P)-এর কিছু প্রচলিত বিচার সম্বন্ধে আলোচনা করব। নীচে তিন প্রকার বৈকল্পিক প্রকল্প যথা বাম পাক্ষিক, দক্ষিণ পাক্ষিক এবং উভয় পাক্ষিকের জন্য বিচার সম্বন্ধীয় আলোচনা করা হ'ল।

6.4.1 সমগ্রকের গড় (μ) সম্বন্ধীয় প্রকল্প বিচার

(ক) প্রকল্প বিবৃতকরণ : প্রথমে সমগ্রকের গড় (μ) সম্বন্ধীয় একটি মুখ্য প্রকল্প (H_0) স্থির করা হ'ল যেমন : $H_0 : \mu = \mu_0$ এই মুখ্য প্রকল্পের বিপরীতে তিন রকমের বৈকল্পিক প্রকল্প নেওয়া হ'ল। এই বৈকল্পিক প্রকল্পের চরিত্রের উপর নির্ভর করে আমরা দ্বিপাক্ষিক বিচার করব না কি এক পাক্ষিক (দক্ষিণ অথবা বাম পাক্ষিক) বিচার করব।

প্রকল্প

I. $H_0 : \mu = \mu_0$
   $H_1 : \mu > \mu_0$ (দক্ষিণ পাক্ষিক বিচার)

II. $H_0 : \mu = \mu_0$
   $H_1 : \mu < \mu_0$ (বাম পাক্ষিক বিচার)

III. $H_0 : \mu = \mu_0$
   $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (উভয় পাক্ষিক বিচার)

(খ) বিচার নমুনাঙ্কের মনোনয়ন

প্রথমত : উপরের তিন প্রকার প্রকল্প থেকে একটি প্রকল্পকে বেছে নিতে হবে।

দ্বিতীয়ত : সমসম্ভব নমুনা $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$-এর উপর নির্ভর করে একটি বিচার নমুনাঙ্ক খুঁজে বের করতে হবে। এখানে $\bar{x}$-কে আমরা বিচার নমুনাঙ্ক হিসাবে নিতে পারি।

(গ) বিচারের সংশয় মাত্রা (Level of Confidence) নির্ধারণ

যে বর্জনাঞ্চল $\mu = \mu_0$ কে বর্জন করে, কিন্তু $\mu > \mu_0$ কে গ্রহণ করে তা অবশ্যই $\mu < \mu_0$-এর যে কোনও মানকে বর্জন করবে। একইরকমভাবে যে বর্জনাঞ্চল $\mu = \mu_0$ কে বর্জন করে $\mu < \mu_0$-এর অনুকূলে, তা অবশ্যই $\mu > \mu_0$-এর যে কোনও মানকে বর্জন করবে।

বামপাক্ষিক ও দক্ষিণ পাক্ষিক প্রকল্পের জন্য H_0-এর মধ্যে μ-এর সমস্ত মানের জন্য প্রথম প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা সর্বাধিক হবে যখন $\mu = \mu_0$। উপরের তিনটি প্রকল্পের জন্য সংশয়মাত্রা যদি α হয় তাহলে নিম্নোক্ত প্রকল্পগুলির জন্য সংশয়মাত্রাও α হবে।

$$\text{I}' \quad H_0 : \mu \le \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$
$$\text{II}' \quad H_0 : \mu \ge \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

সুতরাং I এবং II প্রকল্পের যা বিচার হবে, I′ ও II′-এর বিচারও যথাক্রমে একই হবে।

(ঘ) বর্জনাঞ্চল নিধারণ সমগ্রক নিবেশন এবং সমগ্রকের ভেদমান জানা থাকলে তিন রকম বৈকল্পিক প্রকল্প অনুযায়ী আমরা তিনটি ক্ষেত্রে তিন রকম বর্জনাঞ্চল নির্ধারণ করতে পারি।

ক্ষেত্র I ধরা যাক্, সমগ্রক নিবেশনটি $N(\mu, \sigma^2)$ **যেখানে σ^2 জানা আছে।** যদি $X_1, X_2, \ldots\ldots,$ X_n একটি n-আয়তন বিশিষ্ট সমসম্ভব নমুনা যা সমগ্রক $N(\mu, \sigma^2)$ থেকে নেওয়া হয়েছে, তখন $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ -এর নিবেশন হবে $N(0, 1)$. এখানে তিন রকম বৈকল্পিক প্রকল্পের জন্য বর্জনাঞ্চল তিন রকম হবে।

বিচার নমুনাঙ্ক হিসাবে $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ -কে ব্যবহার করব।

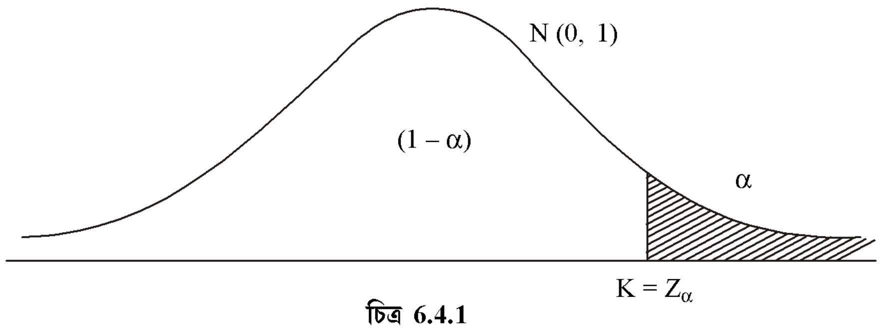
(ঙ) দক্ষিণ পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

মুখ্য প্রকল্প H_0 কে বর্জন করা হবে যদি $Z > K$ হয়, যেখানে K একটি ধ্রুবক এবং K-কে এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে—

$$\alpha(\mu_0) = P_{\mu_0}(Z > K) = \alpha$$

স্পষ্টত: K প্রমাণ নর্ম্যাল নিবেশনের উর্ধ্ব 100α% বিন্দু।

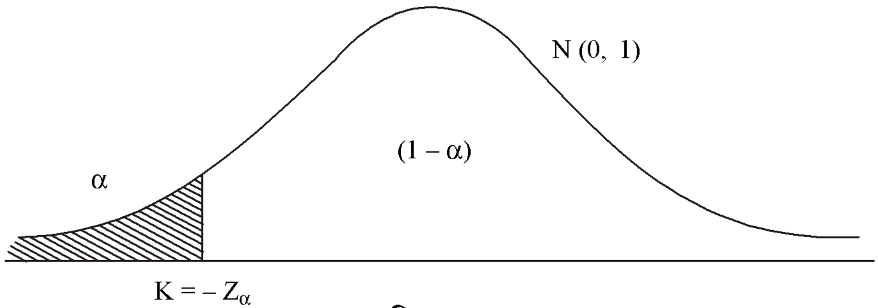
x í ৠ $K = Z_\alpha$ (চিত্র 6.4.1)



চিত্র 6.4.1

(চ) বাম পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

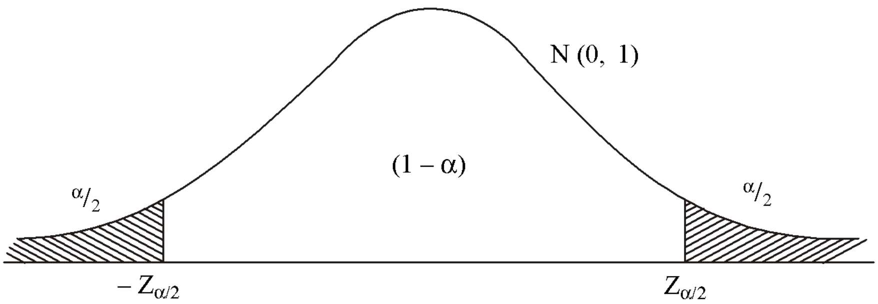
মুখ্য প্রকল্প H_0 কে বর্জন করা হবে যদি $Z < K'$ হয়, যেখানে K' একটি ধ্রুবক এবং একে এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে $\alpha(\mu_0) = P_{\mu_0}(Z < K') = \alpha$ হয়। স্পষ্টত K' প্রমাণ নর্ম্যাল নিবেশনের নিম্ন $100\alpha\%$ বিন্দু। অর্থাৎ $K' = -Z_\alpha$ (চিত্র 6.4.2)



চিত্র 6.4.2

(ছ) উভয় পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

মুখ্য প্রকল্প H_0 কে বর্জন করা হবে যদি $|Z| > K^*$ হয় যেখানে K^* একটি ধ্রুবক এবং একে এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে $\alpha(\mu_0) = P_{\mu_0}(|Z| > K^*) = \alpha$ হয়। স্পষ্টত K^* প্রমাণ নর্ম্যাল নিবেশনের ঊর্ধ্ব $100\frac{\alpha}{2}\%$ বিন্দু। অর্থাৎ $K^* = Z_{\alpha/2}$ (চিত্র 6.4.3)



চিত্র 6.4.3

ক্ষেত্র-II ধরা যাক সমগ্রক নিবেশনটি N (μ, σ^2) **যেখানে σ^2 অজানা।** যদি $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ একটি n-আয়তন বিশিষ্ট সমসম্ভব নমুনা N (μ, σ^2) থেকে নেওয়া হয়, তখন $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$-এর নিবেশন হবে N (0, 1), যেখানে $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \bar{X})^2$

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \mu = \mu_0$ অনুসারে $t = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$-এর নিবেশন হবে (n – 1) স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত t নিবেশন।

এখানে $t = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$-কে আমরা বিচার নমুনাঙ্ক হিসাবে ব্যবহার করব। তিন প্রকার বৈকল্পিক প্রকল্পের জন্য বর্জনাঞ্চল বিভিন্ন প্রকার হবে।

(জ) দক্ষিণপাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

মুখ্য প্রকল্প H_0 কে বর্জন করা হবে যদি t > K হয়, যেখানে K একটি ধ্রুবক এবং Kকে এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে $\alpha(\mu_0) = P_{\mu_0}(t > K) = \alpha$ হয়।

স্পষ্টত: K, (n – 1) স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত t নিবেশনের ঊর্ধ্ব 100α% বিন্দু। অর্থাৎ $K = -t_{\alpha,\ n-1}$

(ঝ) বাম পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

মুখ্য প্রকল্প H_0-কে বর্জন করা হবে যদি t > K′ হয়, যেখানে K′ একটি ধ্রুবক এবং একে এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে $\alpha(\mu_0) = P_{\mu_0}(t > K') = \alpha$ হয়।

স্পষ্টত: K′, (n – 1) স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত t নিবেশনের নিম্ন 100α% বিন্দু। অর্থাৎ $K' = t_{\alpha,\ n-1}$

(ঞ) উভয় পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

মুখ্য প্রকল্প H_0 কে বর্জন করা হবে যদি $|t| < K^*$ হয়, যেখানে K^* একটি ধ্রুবক এবং একে এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে $\alpha(\mu_0) = P_{\mu_0}(|t| < K^*) = \alpha$ হয়।

স্পষ্টত K^*, (n – 1) স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত t নিবেশনের ঊর্ধ্ব $100\dfrac{\alpha}{2}$% বিন্দু। অর্থাৎ $K^* = t_{\alpha/2,\ n-1}$

ক্ষেত্র-III ধরা যাক **সমগ্রক নিবেশনটি অজানা** এবং **নমুনা আয়তন (n) বৃহৎ (অর্থাৎ n > 30)**

মুখ্য প্রকল্প অনুসারে যেহেতু n বৃহৎ, নমুনাঙ্ক হবে $\dfrac{X-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ আবার যদি σ^2 অজানা

থাকে তবে σ এর পরিবর্তে S নিতে হবে এবং তখন মুখ্যপ্রকল্প অনুসারে নমুনাঙ্ক হবে $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ~ প্রায় সঠিক N (0, 1) বিচার করার সময় ক্ষেত্র-I-এর বিচারগুলি প্রায় সঠিকভাবে এক্ষেত্রে ব্যবহার করা যাবে। শুধুমাত্র σ^2-এর পরিবর্তে S^2 ব্যবহার করা হবে **যখন σ^2 অজানা**।

বিভিন্ন অবস্থায় সমগ্রক গড়ের (μ) বিচার নীচের সারণীতে দেওয়া হ'ল।

সারণী 6.4.1 : সমগ্রক গড় (μ)-এর বিচার

সমগ্রক নিবেশন সম্বন্ধে ধারণা	H_0	H_1	H_0 বর্জন করা হবে যদি	বিচার নমুনাঙ্ক	মন্তব্য
সমগ্রক নিবেশন N (μ, σ^2) σ^2 জানা আছে।	$\mu = \mu_0$ $\mu = \mu_0$ $\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$Z > Z_\alpha$ $Z < -Z_\alpha$ $\lvert Z \rvert > Z_{\alpha/2}$	$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	দক্ষিণ পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার বাম পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার উভয় পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার।
সমগ্রক নিবেশন N (μ, σ^2) σ^2 অজানা।	$\mu = \mu_0$ $\mu = \mu_0$ $\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$t > t_\alpha$ $t < -t_\alpha$ $\lvert t \rvert > t_{\alpha/2}$	$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	দক্ষিণ পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার বাম পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার উভয় পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার।
অজানা সমগ্রক নিবেশন এবং নমুনা আয়তন বৃহৎ (n > 30)	$\mu = \mu_0$ $\mu = \mu_0$ $\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$Z > Z_\alpha$ $Z < -Z_\alpha$ $\lvert Z \rvert > Z_{\alpha/2}$	$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ σ যদি অজানা থাকে, σ-র পরিবর্তে S নিতে হবে।	দক্ষিণ পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার বাম পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার উভয় পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার।

6.4.2 সমগ্রক ভেদমান (σ^2) সম্বন্ধীয় প্রকল্প বিচার

সমগ্রক গড়ের মতো এখানেও আমরা সমগ্রক ভেদমান (σ^2)-এর তিন প্রকার প্রকল্পের বিষয়ে আলোচনা করব।

(I) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $\quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ দক্ষিণ পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

(II) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $\quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ বাম পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

(III) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $\quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ উভয় পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

σ^2-এর মান পূর্ব ধারণা থেকে মুখ্যপ্রকল্পে ধরা হয়েছে σ_0^2

যখন কোন বস্তুর সাদৃশ্যগত নিয়ন্ত্রণের প্রয়োজন হয় তখন σ^2-এর বিচার প্রয়োজন। দেখতে হয় যে ভেদমান একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে আছে কিনা।

(ক) **বর্জনাঞ্চল নির্ধারণ** সমগ্রকের নিবেশন ও সমগ্রক গড় (μ)-এর উপর নির্ভর করে তিনটি ক্ষেত্রে তিনটি বিভিন্ন রকম বর্জনাঞ্চল নির্ণয় করতে পারি।

ক্ষেত্র-I : ধরা যাক্ সমগ্রক নিবেশনটি $N(\mu, \sigma^2)$, এবং **এখানে μ জানা আছে।** যদি X_1, X_2, ..., X_n একটি n-আয়তনবিশিষ্ট সমসম্ভব নমুনা যা $N(\mu, \sigma^2)$ থেকে সংগ্রহ করা হয়েছে, তাহলে নমুনাঙ্ক

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$$ -এর নিবেশন হবে n স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2 (Chi-square) নিবেশন।

(খ) দক্ষিণ পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

মুখ্য প্রকল্প H_0-কে বর্জন করা হবে যদি $\chi^2 > K$ হয়, যেখানে K একটি ধ্রুবক এবং K-কে এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে $\alpha\left(\sigma_0^2\right)=P_{\sigma_0^2}(\chi^2 > K)=\alpha$ হয়।

স্পষ্টত: K, n স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2 নিবেশনের ঊর্ধ্ব 100 α% বিন্দু। অর্থাৎ $K = \chi^2_{\alpha,n}$

(গ) বাম পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

মুখ্য প্রকল্প H_0 কে বর্জন করা হবে যদি $\chi^2 < K'$ হয়, যেখানে K' একটি ধ্রুবক এবং K'-কে এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে $\alpha\left(\sigma_0^2\right)=P_{\sigma_0^2}(\chi^2 < K')=\alpha$ হয়।

স্পষ্টত: K', n স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2 নিবেশনের ঊর্ধ্ব $100(1-\alpha)$% বিন্দু। অর্থাৎ $K' = \chi^2_{1-\alpha,n}$

(ঘ) উভয় পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প

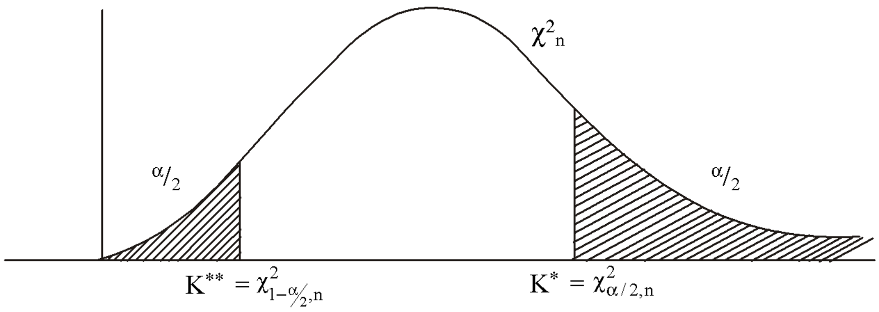
মুখ্য প্রকল্প H_0 কে বর্জন করা হবে যদি $\chi^2 > K^*$ হয়, কিংবা $\chi^2 < K^{**}$ হয়। এখানে K^* এবং K^{**} দুটি ধ্রুবক এবং এদের এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে $\alpha\left(\sigma_0^2\right)=\alpha$ হয় অর্থাৎ

$$\alpha\left(\sigma_0^2\right)=P_{\sigma_0^2}(\chi^2 > K^*)+P_{\sigma_0^2}(\chi^2 < K^{**})$$

$$= \alpha$$

সাধারণত উভয় পুচ্ছের পরিমাপ সমান $\frac{\alpha}{2}$ নেওয়া হয়। সেক্ষেত্রে $K^{*} = \chi^{2}_{\alpha/2, n}$ এবং

$K^{**} = \chi^{2}_{1-\alpha/2, n}$ (চিত্র 6.4.4)



চিত্র 6.4.4

ক্ষেত্র-II : ধরা যাক্ সমগ্রক নিবেশনটি N (μ, σ^2) **যেখানে μ এবং σ^2 দুইই অজানা**। যদি X_1, X_2, ..., X_n একটি n-আয়তন বিশিষ্ট নমুনা যেটা N (μ, σ^2) থেকে নেওয়া হয়, তাহলে মুখ্য প্রকল্প

H_0 : $\sigma^2 = \sigma_0^2$ অনুসারে আমাদের বিচার নমুনাঙ্ক হবে $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

যার নিবেশন হবে (n – 1) স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2 নিবেশন।

টীকা : এখানে **যেহেতু μ অজানা,** তাই μ-এর প্রাক্কলনী মান $\bar{X}$ দিয়ে নমুনাঙ্কে μ-কে প্রতিস্থাপন করা হয়েছে। আবার, **যেহেতু σ^2 ও অজানা,** তাই σ^2-কে প্রতিস্থাপন করা হয়েছে প্রাক্কলনীমান S^2 দিয়ে যেখানে $S^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2$. নমুনাঙ্ক $\chi^2 = \frac{\sum X_i - \bar{X}}{\sigma^2}$ -এর জায়গায় $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$।

এখন মুখ্য প্রকল্প H_0 : $\sigma^2 = \sigma_0^2$ অনুসারে বিচারের নমুনাঙ্ক হবে $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

1. প্রথমে n-আয়তন বিশিষ্ট নমুনার সাহায্যে বিচার নমুনাঙ্ক $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ -এর মান বের করতে হবে।

2. এবার সংশয় মাত্রা 100α% হলে

(ক) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ বর্জন করা হবে এবং $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ গৃহীত হবে যদি $\chi^2 > \chi^2_{\alpha, n-1}$ হয়।

(খ) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ বর্জন করা হবে এবং $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ গৃহীত হবে যদি $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha, n-1}$ হয়।

(গ) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ বর্জন করা হবে এবং $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ গৃহীত হবে যদি $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2, n-1}$ অথবা $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2, n-1}$

এখানে σ^2 -এর আস্থা-সীমা হবে $\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}}\right]$

এবং আস্থা-অঙ্ক (Confidence Co-efficient) = 1 − α

ক্ষেত্র-III ধরা যাক্ **সমগ্রক নিবেশনটি নর্ম্যাল [N (μ, σ^2)] এবং নমুনা আয়তন বৃহৎ (n ≥ 30)।**

এখানে S^2-এর প্রমাণ ভ্রান্তি (Standard error) = $\sigma^2\sqrt{\dfrac{2}{n}}$, যেখানে S^2 হ'ল নমুনার ভেদমান।

এখন মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ বিচার করার জন্য বিচারের নমুনাঙ্ক হবে—

$$Z = \frac{S^2 - \sigma_0^2}{S^2\text{-এর প্রমাণ ভ্রান্তি}} = \frac{S^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2\sqrt{\frac{2}{n}}}$$

এবং $Z \sim N(0, 1)$

সংশ্রয় মাত্রা 100α% হলে

(ক) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ বর্জন করা হবে এবং $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ গৃহীত হবে যদি $Z > Z_\alpha$ হয়।

(খ) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ বর্জন করা হবে এবং $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ গৃহীত হবে যদি $Z < -Z_\alpha$ হয়।

(গ) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ গৃহীত হবে যদি $|Z| > Z_{\alpha/2}$ হয়।

সারণী 6.4.2 : সমগ্রক ভেদমান (σ^2)-এর বিচার

সমগ্রক নিবেশন সম্বন্ধে ধারণা	H_0	H_1	H_0 বর্জন করা হবে যদি	বিচার নমুনাঙ্ক	মন্তব্য
সমগ্রক নিবেশন N (μ, σ^2) μ জানা আছে।	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha,n}$ $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha,n}$ $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2,n}$ অথবা, $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n}$	$\chi^2 = \sum_i \frac{(X-\mu)^2}{\sigma_0^2}$	দক্ষিণ পুচ্ছ বিচার বাম পুচ্ছ বিচার উভয় পুচ্ছ বিচার।
সমগ্রক নিবেশন N (μ, σ^2) μ অজানা।	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$ $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$ $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ অথবা, $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$	$\chi^2 = \sum_i \frac{(X-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}$ $= \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	দক্ষিণ পুচ্ছ বিচার বাম পুচ্ছ বিচার উভয় পুচ্ছ বিচার।
সমগ্রক নিবেশন N (μ, σ^2) নমুনা আয়তন বৃহৎ (≥ 30)	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$Z > Z_\alpha$ $Z < -Z_\alpha$ $\|Z\| > Z_{\alpha/2}$	$Z = \frac{S^2 - \sigma_0^2}{S.E}$ $= \frac{S^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2 \sqrt{\frac{2}{n}}}$	দক্ষিণ পুচ্ছ বিচার বাম পুচ্ছ বিচার উভয় পুচ্ছ বিচার।

6.4.3 সমগ্রক অনুপাত (P) সম্বন্ধীয় প্রকল্প বিচার

অনেক সময় আমাদের সমগ্রকের কোন নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যমূলক বস্তুর অনুপাত P-এর প্রকল্প বিচারের প্রয়োজন হতে পারে। ধরা যাক্ কোন কোম্পানীর উৎপাদিত বস্তুর ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা আছে। P অনুপাতটি $\left(\frac{\text{ত্রুটিপূর্ণ বস্তু}}{\text{মোট উৎপাদন}}\right)$ এই অনুপাতকে বোঝায়।

আমরা এখানে তিন প্রকারের প্রকল্পের বিষয়ে আলোচনা করব।

I. $H_0 : P = P_0 \qquad H_1 : P > P_0$

$H_0 : P = P_0 \qquad H_1 : P < P_0$

$H_0 : P = P_0 \qquad H_1 : P \neq P_0$

যেখানে P_0, P-এর পূর্ব ধারণালব্ধ একটি নির্দিষ্ট মান।

ধরা যাক্, n টি বস্তু আছে, যার মধ্যে X টি বস্তু নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যমূলক। তখন আমরা জানি $\left(\frac{X}{n}\right)$ এর নিবেশন প্রায় সঠিক $N\left(P, \frac{P(1-P)}{N}\right)$।

সুতরাং $\dfrac{\frac{X}{n}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$ -এর নিবেশন N (0, 1) হবে।

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : P = P_0$ অনুসারে $Z = \dfrac{\frac{X}{n}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$ -এর নিবেশন প্রায় সঠিক N (0, 1)

এক্ষেত্রে আমরা Z-কে বিচার নমুনাঙ্ক হিসাবে ব্যবহার করব। তিনটি বৈকল্পিক প্রকল্পের জন্য বিচার পদ্ধতিকে নিম্নলিখিত ভাবে বর্ণনা করা যেতে পারে।

1. n সংখ্যক নমুনা থেকে $Z = \dfrac{\frac{X}{n}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$ বের করতে হবে।

2. সংশয় মাত্রা 100α% হলে

(ক) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1 : P > P_0$ গৃহীত হবে যদি $Z > Z_\alpha$ হয়।

(খ) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1 : P < P_0$ গৃহীত হবে যদি $Z < -Z_\alpha$ হয়।

(গ) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1 : P \neq P_0$ গৃহীত হবে যদি $|Z| > Z_{\alpha/2}$ হয়।

এই P-এর বিচারগুলি সংক্ষিপ্ত আকারে সারণী 6.4.3-তে দেওয়া হল।

সারণী 6.4.3 সমগ্রক অনুপাত P-এর বিচার

সমগ্রক নিবেশন সম্বন্ধে ধারণা	H_0	H_1	H_0 বর্জন করা হবে যদি	বিচার নমুনাঙ্ক	মন্তব্য
নমুনা আয়তন বৃহৎ (≥ 100) $0 < P < 1$ কিন্তু, P, 0 বা 1 এর কাছাকাছি নয়	$P = P_0$	$P > P_0$	$Z > Z_\alpha$	$Z = \dfrac{\frac{x}{n} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$	দক্ষিণ পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার
	$P = P_0$	$P < P_0$	$Z < -Z_\alpha$		বাম পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার
	$P = P_0$	$P \neq P_0$	$\lvert Z \rvert > Z_{\alpha/2}$		উভয় পুচ্ছ নর্ম্যাল বিচার।

6.5 পরিসংখ্যানগত বিচার—দুটি সমগ্রকের ক্ষেত্রে

এতক্ষণ একটি সমগ্রকের ক্ষেত্রে μ (গড়), σ^2 (ভেদমান) এবং P (অনুপাত)-এর প্রকল্প নিয়ে বিভিন্ন অবস্থায় প্রকল্প বিচার করা হয়েছে এবং তাদের ফলাফল সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। অনেক সময় দুটি সমগ্রকের বিভিন্ন পূর্ণকাঙ্কের মধ্যে কোন তফাৎ আছে কিনা, এই ধরনের প্রকল্প বিচার করার প্রয়োজন হতে পারে। আমরা এই অনুচ্ছেদে দুটি সমগ্রকের পূর্ণকাঙ্কের বিভিন্ন ধরনের প্রকল্প বিভিন্ন অবস্থায় কি ফলাফল পাওয়া যেতে পারে সেই সম্পর্কে আলোচনা করব।

6.5.1 দুটি সমগ্রক গড়ের তুলনা সম্বন্ধীয় প্রকল্প বিচার

দুটি সমগ্রক নিয়ে আমাদের আলোচনা শুরু করছি। সমগ্রক—I-এর গড় μ_1 এবং ভেদমান $\sigma^2{}_1$ সমগ্রক—II এর গড় μ_2 এবং ভেদমান $\sigma^2{}_2$. আমরা দুটি সমগ্রকের গড় দুটির পার্থক্য $(\mu_1 - \mu_2)$-এর প্রকল্প বিচার করব। আমাদের সমসম্ভব দুটি নমুনা দুটি সমগ্রক থেকে নেওয়া হবে। সমগ্রক—I থেকে n_1 আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হল $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{n_1}$ এবং সমগ্রক—II থেকে n_2 আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হল $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_{n_2}$ সাধারণত নমুনা দুটি পরস্পর নিরপেক্ষ হয়। উদাহরণ স্বরূপ, দুটি সমগ্রক দুটি বিভিন্ন ক্লাস নেওয়ার পদ্ধতি হতে পারে যেমন অন্‌লাইন এবং অফ্‌লাইন ক্লাস। এই দুই বিভিন্ন পড়ানোর পদ্ধতিতে μ_1 হ'ল প্রথম পদ্ধতিতে এবং μ_2 হ'ল দ্বিতীয় পদ্ধতিতে পড়ানোর ফলে ছাত্রদের প্রাপ্ত গড় নম্বর। যদি দাবী করা হয় যে দ্বিতীয় পদ্ধতি প্রথম পদ্ধতি থেকে ভালো তখন আমাদের বিচার করতে হবে মুখ্যপ্রকল্প $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 : \mu_1 < \mu_2$-র সাপেক্ষে। এটি একটি বাম পাক্ষিক বৈকল্পিক প্রকল্প।

এখানে আমরা তিনটি বিভিন্ন ক্ষেত্রে বা তিনটি বিভিন্ন অবস্থায় প্রকল্প বিচার করব।

ক্ষেত্র-I : ধরা যাক্ দুটি সমগ্রকের নিবেশন যথাক্রমে $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ এবং $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, যেখানে σ_1^2 এবং σ_2^2 জানা আছে, কিন্তু μ_1 এবং μ_2 অজানা।

উপরের উদাহরণে ধরা যাক্ $\bar{X}$ এবং $S_1^2 = \frac{1}{(n_1 - 1)} \cdot \sum_i (X_i - \bar{X})^2$ প্রথম সমগ্রকের নমুনা $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{n_1}$ থেকে পাওয়া নমুনা গড় এবং নমুনা ভেদমান। $\bar{Y}$ এবং $S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \cdot \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$ দ্বিতীয় সমগ্রকের নমুনা $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_{n_2}$ থেকে পাওয়া নমুনা গড় এবং নমুনা ভেদমান। এখন $\bar{X}$ এবং $\bar{Y}$ দুটিই নর্ম্যাল চলক এবং তাদের নিবেশন যথাক্রমে $N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$ এবং $N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

যেহেতু $\bar{X}$ এবং $\bar{Y}$ দুটিই নিরপেক্ষ এবং নর্ম্যাল চলক, তাদের সরল রৈখিক অপেক্ষকটি $(\bar{X} - \bar{Y})$ ও নর্ম্যাল চলক হবে এবং তার নিবেশন হবে $N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

সুতরাং $Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ -এর নিবেশন হবে N (0, 1)

মুখ্যপ্রকল্প ধরা যাক্ $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$, যেখানে λ_0 একটি বাস্তব সংখ্যা। বেশীর ভাগ ক্ষেত্রেই $H_0 : \mu_1 - \mu_2$ ধরা হয় যেখানে $\lambda_0 = 0$ এখন আমরা Z কে বিচার নমুনাঙ্ক হিসাবে নিতে পারি। তিনটি বৈকল্পিক প্রকল্পের জন্য বিচার পদ্ধতিকে নীচের মতো করে বর্ণনা করা যায়।

1. প্রথম ও দ্বিতীয় থেকে যথাক্রমে n_1 এবং n_2 নমুনা নিয়ে

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \lambda_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$ গণনা করতে হবে।

2. সংশয় মাত্রা $100\alpha\%$ ধরা হলে

(i) H_0 বর্জন করা হবে এবং $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \lambda_0$ গৃহীত হবে যদি $Z > Z_\alpha$ হয়।

(ii) H_0 বর্জন করা হবে এবং $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \lambda_0$ গৃহীত হবে যদি $Z < -Z_\alpha$ হয়।

(iii) H_0 বর্জন করা হবে এবং $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \lambda_0$ গৃহীত হবে যদি $|Z| > Z_{\alpha/2}$ হয়।

ক্ষেত্র-II : ধরা যাক্ দুটি সমগ্রকের নিবেশন যথাক্রমে $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ এবং $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ এবং $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ যেখানে σ^2 অজানা অর্থাৎ σ_1^2, σ_2^2 দুটোই অজানা। যেহেতু σ^2 অজানা, তাই ক্ষেত্র-I এর নমুনাঙ্ক Z এখানে ব্যবহার করা যাবে না। এখানে σ^2 -এর পরিবর্তে মিলিত নমুনা ভেদমান S^2 ব্যবহার করব।

$$S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

আমরা জানি $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$-এর নিবেশন হ'ল $(n_1 + n_2 - 2)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত t নিবেশন।

মুখ্য প্রকল্প অনুসারে $t = \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\lambda_0}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$-এর নিবেশন হবে $(n_1 + n_2 - 2)$ স্বাতন্ত্র্য মাত্রা যুক্ত t নিবেশন। এক্ষেত্রে আমরা t-কে বিচার নমুনাঙ্ক হিসাবে ব্যবহার করতে পারি। তিনটি বৈকল্পিক প্রকল্পের জন্য বিচার পদ্ধতিকে নীচের মতো করে পর পর সাজানো যায়।

1. প্রথম ও দ্বিতীয় সমগ্রক থেকে যথাক্রমে n_1 এবং n_2 সংখ্যক নমুনা নিয়ে বিচার নমুনাঙ্ক $t = \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\lambda_0}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ গণনা করতে হবে।

2. সংশয় মাত্রা $100\alpha\%$ হ'লে—

(i) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \lambda_0$ গৃহীত হবে যদি $t > t_{\alpha}, n_1 + n_2 - 2$ হয়।

(ii) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \lambda_0$ গৃহীত হবে যদি $t < -t_{\alpha}, n_1 + n_2 - 2$ হয়।

(iii) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \lambda_0$ গৃহীত হবে যদি $|t| > t_{\alpha/2}, n_1 + n_2 - 2$ হয়।

ক্ষেত্র-III : ধরা যাক্ সমগ্রকের নিবেশন দুটি অজানা, দুটি নমুনার আয়তন n_1, n_2 (বৃহৎ ≥ 30)।

আমরা জানি বৃহৎ n_1 এবং n_2-এর জন্য $\bar{X}$, $\bar{Y}$ এর নিবেশন যথাক্রমে প্রায় সঠিক $N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$ এবং $N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$ হয়। সুতরাং $(\bar{X}-\bar{Y})$-এর নিবেশন হবে $N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$।

সুতরাং $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$-এর নিবেশন প্রায় সঠিক N (0, 1) হবে।

মুখ্য প্রকল্প অনুসারে $Z=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\lambda_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$-এর নিবেশন প্রায় সঠিক N (0, 1) হবে।

এখানে Z কে আমরা বিচার নমুনাঙ্ক হিসাবে ব্যবহার করতে পারি। ক্ষেত্র-I এর সমস্ত বিচারগুলি এখানেও প্রযোজ্য।

কিন্তু যখন, σ_1^2, σ_2^2 অজানা, তখন σ_1^2 এবং σ_2^2 এর পরিবর্তে যথাক্রমে s_1^2 এবং s_2^2 নেওয়া হলেও Z-এর নিবেশন প্রায় সঠিক N (0, 1)-ই হবে।

সুতরাং এক্ষেত্রেও ক্ষেত্র-I-এর সমস্ত বিচারগুলি প্রযোজ্য হবে।

নীচের সারণী 6.4.4 তে $(\mu_1 - \mu_2)$-এর বিচারগুলিকে সংক্ষিপ্ত আকারে উপস্থিত করা হ'ল।

সারণী 6.5.1 : দুটি সমগ্রকের গড়ে তুলনা সম্বন্ধীয় বিচার

সমগ্রক নিবেশন সম্বন্ধে ধারণা	H_0	H_1	H_0 বর্জন করা হবে যদি	বিচার নমুনাঙ্ক	মন্তব্য
ক্ষেত্র-I সমগ্রক নিবেশন দুটি $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ এবং $N(\mu_2, \sigma_2^2)$। σ_1^2 এবং σ_2^2 জানা আছে। নিবেশন দুটি নিরপেক্ষ	$\mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$	$\mu_1 - \mu > \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 < \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq \lambda_0$	$Z > Z_\alpha$ $Z < -Z_\alpha$ $\lvert Z \rvert > Z_{\alpha/2}$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - \lambda_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	দক্ষিণ পাক্ষিক নর্ম্যাল বিচার বাম পাক্ষিক নর্ম্যাল বিচার উভয় পাক্ষিক নর্ম্যাল বিচার।
ক্ষেত্র-II সমগ্রক নিবেশন দুটি $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ এবং $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$। σ^2 অজানা নিবেশন দুটি নিরপেক্ষ	$\mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$	$\mu_1 - \mu_2 > \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 < \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq \lambda_0$	$t > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$ $t < -t_{\alpha, n_1+n_2-2}$ $\lvert t \rvert > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$	$t = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - \lambda_0}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	দক্ষিণ পাক্ষিক t বিচার বাম পাক্ষিক t বিচার উভয় পাক্ষিক t বিচার।
ক্ষেত্র-III সমগ্রক নিবেশন অজানা n_1, n_2 দুটিই বৃহৎ ≥ 30 পরস্পর নিরপেক্ষ নমুনা	$\mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 = \lambda_0$	$\mu_1 - \mu_2 > \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 < \lambda_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq \lambda_0$	$Z > Z_\alpha$ $Z < -Z_\alpha$ $\lvert Z \rvert > Z_{\alpha/2}$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - \lambda_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ যদি σ_1^2, σ_2^2 অজানা হয় তখন তাদের পরিবর্তে S_1^2 এবং S_2^2 নিতে হয়।	দক্ষিণ পাক্ষিক নর্ম্যাল বিচার বাম পাক্ষিক নর্ম্যাল বিচার উভয় পাক্ষিক নর্ম্যাল বিচার।

ক্ষেত্র I এবং III-এর জন্য $\mu_1 - \mu_2$-এর আস্থাসীমা নীচে দেওয়া হ'ল (যখন আস্থা-অঙ্ক $1 - \alpha$)

$$\text{আস্থাসীমা} \left\{(\bar{X} - \bar{Y}) - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.Z_{\alpha/2}, (\bar{X} - \bar{Y}) + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.Z_{\alpha/2}\right\}$$

ক্ষেত্র II-এর জন্য $(\mu_1 - \mu_2)$-এর আস্থাসীমা নীচে দেওয়া হ'ল যখন আস্থা-অঙ্ক $(1 - \alpha)$;

আস্থাসীমা $\left\{(\bar{X}-\bar{Y})-S\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)^{1/2}.t_{\alpha/2, n_1+n_2-2},\right.$

$$\left.(\bar{X}-\bar{Y})+S\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)^{1/2}.t_{\alpha/2, n_1+n_2-2},\right\}$$

6.5.1 দুটি সমগ্রকের ভেদমানের তুলনা সম্বন্ধীয় প্রকল্প বিচার

ধরা যাক, কোনো কো-এড স্কুলের সমস্ত ছাত্র এবং সমস্ত ছাত্রীদের নিয়ে দুটি সমগ্রক আছে। σ_1^2, σ_2^2 যথাক্রমে ছাত্রদের এবং ছাত্রীদের উচ্চতার ভেদমান। যদি আমরা দেখতে চাই যে ছাত্রদের উচ্চতার তারতম্য ছাত্রীদের উচ্চতার তারতম্য অপেক্ষা বেশী কিনা, তাহলে আমাদের বিচার করতে হবে H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ বৈকল্পিক প্রকল্প H_1 : $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ এর সাপেক্ষে। এখানে আমরা তিন প্রকার বৈকল্পিক প্রকল্পের বিচার করব।

I. $H_0 = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \lambda_0^2$

$H_1 = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \lambda_0^2$

II. $H_0 = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \lambda_0^2$

$H_1 = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \lambda_0^2$

III. $H_0 = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \lambda_0^2$

$H_1 = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \lambda_0^2$

যেখানে λ_0 পূর্ব ধারণা থেকে পাওয়া একটি নির্দিষ্ট মান। উপরের উদাহরণে $\lambda_0 = 1$। ধরা যাক্ $\bar{X}$ এবং S_1^2 প্রথম সমগ্রকের নমুনা থেকে পাওয়া নমুনা $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{n_1}$ থেকে পাওয়া নমুনা গড় এবং নমুনা ভেদমান। আর $\bar{Y}$ এবং S_2^2 হ'ল দ্বিতীয় সমগ্রকের নমুনা $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_{n_2}$ থেকে পাওয়া নমুনা গড় এবং নমুনা ভেদমান। এখানে বর্জনাঞ্চল সমগ্রকের গড় μ_1 এবং μ_2 এর উপর নির্ভর করবে। এখানে আমরা দুটি আলাদা ক্ষেত্রে বিচার পদ্ধতি আলোচনা করব।

ক্ষেত্র-I : ধরা যাক্ দুটি সমগ্রক যথাক্রমে $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ এবং $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ দুটি পরস্পর নিরপেক্ষ নর্ম্যাল নিবেশন। **এখানে μ_1, μ_2 জানা আছে কিন্তু σ_1 এবং σ_2 অজানা।**

উপরোক্ত ধারণার পরিপ্রেক্ষিতে

$$\frac{\sum_i (X_i - \mu_1)^2 \Big/ \sigma_1^2 n_1}{\sum_i (Y_i - \mu_2)^2 \Big/ \sigma_2^2 n_2} \text{ -এর নিবেশন হবে}$$

n_1, n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত F নিবেশন। মুখ্যপ্রকল্প অনুসারে

$$F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\lambda_0^2} \text{ -এর নিবেশন হবে}$$

n_1, n_2 স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত F নিবেশন যেখানে $S_1 = \frac{1}{n_1}\sum_i (X_i - \mu_1)^2$ এবং

$S_2 = \frac{1}{n_2}\sum_i (Y_i - \mu_2)^2$। এখানে আমরা F কে বিচার নমুনাঙ্ক হিসাবে নিতে পারি। তিনটি বিভিন্ন বৈকল্পিক প্রকল্পের জন্য বিচার পদ্ধতিকে নীচের মতো করে সাজানো যেতে পারে।

1. প্রথম এবং দ্বিতীয় সমগ্রক থেকে n_1 এবং n_2 সংখ্যক নমুনা নিয়ে বিচার নমুনাঙ্ক $F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\lambda_0^2}$ গণনা করতে হবে।

2. সংশয় মাত্রা $100\alpha\%$ হলে

(ক) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \lambda_0^2$ গৃহীত হবে যদি $F > F_{\alpha, n_1, n_2}$ হয়।

(খ) H_0 বর্জিত হবে এবং $H: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \lambda_0^2$ গৃহীত হবে যদি $F < F_{1-\alpha, n_1, n_2}$ হয়।

(গ) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \lambda_0^2$ গৃহীত হবে যদি $F < F_{\alpha/2, n_1, n_2}$ অথবা $F > F_{1-\alpha/2, n_1, n_2}$

ক্ষেত্র-II ধরা যাক্ দুটি সমগ্রক যথাক্রমে $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_1, \sigma_2^2)$ **যেখানে μ_1, μ_2 অজানা।**

যেহেতু μ_1 এবং μ_2 এর মান অজানা সেজন্য ক্ষেত্র-I-এর নমুনাঙ্ক এখানে ব্যবহার করা যাবে না। μ_1 এবং μ_2 এর পরিবর্তে $\bar{X}, \bar{Y}$ ব্যবহার করা হবে। সুতরাং এক্ষেত্রে আমাদের বিচার নমুনাঙ্ক হবে

$$F = \frac{S_1'^2 / S_2'^2}{\lambda_0^2}$$

যেখানে $S_1'^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ ও $S_2'^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1} \sum (Y_i - \bar{Y})^2$ এবং এর নিবেশন হবে $(n_1 - 1)$, $(n_2 - 1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত F নিবেশন। তিনটি বৈকল্পিক প্রকল্পের জন্য বিচার পদ্ধতিকে নীচের মতো করে উপস্থাপিত করা হল।

1. প্রথম ও দ্বিতীয় সমগ্রক থেকে যথাক্রমে n_1 এবং n_2 নমুনা নিয়ে $F = \dfrac{S_1'^2 / S_2'^2}{\lambda_0^2}$ গণনা করতে হবে।

2. সংশয় মাত্রা $100\alpha\%$ হলে

(ক) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \lambda_0^2$ গৃহীত হবে যদি $F > F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$ হয়।

(খ) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \lambda_0^2$ গৃহীত হবে যদি $F > F_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$ হয়।

(গ) H_0 বর্জিত হবে এবং $H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \lambda_0^2$ গৃহীত হবে যদি $F > F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ অথবা $F > F_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ হয়।

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$-এর বিচারগুলিকে নীচের সারণী 6.5.2-তে দেওয়া হ'ল।

সারণী 6.5.2 : দুটি সমগ্রকের ভেদমানের তুলনা সম্বন্ধীয় বিচার

সমগ্রক নিবেশন সম্বন্ধে ধারণা	H_0	H_1	H_0 বর্জন করা হবে যদি	বিচার নমুনাঙ্ক	মন্তব্য
সমগ্রক নিবেশন দুটি $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ এবং $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ যেখানে μ_1, μ_2 জানা আছে। পরস্পর নিরপেক্ষ নিবেশন	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \lambda_0^2$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \lambda_0^2$	$F > F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2 \lambda_0^2}$	দক্ষিণ পাক্ষিক F বিচার
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \lambda_0^2$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \lambda_0^2$	$F < F_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$		বাম পাক্ষিক F বিচার
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \lambda_0^2$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \lambda_0^2$	$F > F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ অথবা $F < F_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$		উভয় পাক্ষিক F বিচার।
সমগ্রক নিবেশন দুটি $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ যেখানে μ_1, μ_2 অজানা। পরস্পর নিরপেক্ষ নিবেশন।	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \lambda_0^2$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \lambda_0^2$	$F > F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$	$F = \frac{S_1'^2}{S_2'^2 \lambda_0^2}$	দক্ষিণ পাক্ষিক F বিচার
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \lambda_0^2$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \lambda_0^2$	$F < F_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$		বাম পাক্ষিক F বিচার
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \lambda_0^2$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \lambda_0^2$	$F > F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ অথবা $F < F_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$		উভয় পাক্ষিক F বিচার।

6.5.3 দুটি অনুপাতের তুলনা সম্বন্ধীয় প্রকল্প বিচার

ধরা যাক্ P_1 এবং P_2 যথাক্রমে যন্ত্র I এবং II এর ত্রুটিপূর্ণ উৎপাদনের অনুপাত। যদি কোন বিশেষজ্ঞের ধারণা হ'ল যে যন্ত্র I, যন্ত্র II এর থেকে 5% বেশী ত্রুটিপূর্ণ বস্তু উৎপাদন করে তখন মুখ্য প্রকল্প হবে

$H_0 : P_1 - P_2 = 0.05$ এবং বৈকল্পিক প্রকল্প হবে

$H_1 : P_1 - P_2 > 0.05$

সাধারণত আমরা তিন প্রকার বৈকল্পিক প্রকল্পের বিচার করব।

I. $H_0 : P_1 - P_2 = \lambda$

$H_1 : P_1 - P_2 > \lambda$

II. $H_0 : P_1 - P_2 = \lambda$

$H_1 : P_1 - P_2 < \lambda$

III. $H_0 : P_1 - P_2 = \lambda$

$H_1 : P_1 - P_2 \neq \lambda$

যেখানে λ জানা আছে। উপরের উদাহরণে $\lambda = 0.05$

ধরা যাক্ দুটি সমগ্রক থেকে যথাক্রমে n_1 এবং n_2 নমুনা নেওয়া হয়েছে। X_1 এবং X_2 যথাক্রমে বিশেষ বৈশিষ্ট্য সম্পন্ন বস্তুর সংখ্যা প্রথম এবং দ্বিতীয় সমগ্রকের ক্ষেত্রে।

এখন $(P_1 - P_2)$ প্রকল্প বিচারের জন্য যথার্থ বিচার নমুনাঙ্ক হবে।

$$Z = \frac{\widehat{P_1} - \widehat{P_2} - \lambda}{\sqrt{\dfrac{\widehat{P_1}\left(1-\widehat{P_1}\right)}{n_1} + \dfrac{\widehat{P_2}\left(1-\widehat{P_2}\right)}{n_2}}}$$

যেখানে $\widehat{P_1} = \dfrac{X_1}{n_1}$ এবং $\widehat{P_2} = \dfrac{X_2}{n_2}$

Z-এর নিবেশন প্রায় সঠিক N (0, 1) হবে যখন n_1, n_2 বৃহৎ। সুতরাং Z কে আমরা $(P_1 - P_2)$-এর প্রকল্প বিচারের বর্জনাঞ্চল বের করার জন্য ব্যবহার করতে পারি। নীচের সারণী 6.5.3-তে $(P_1 - P_2)$-এর বিচারগুলি সংক্ষিপ্ত আকারে দেওয়া হ'ল।

টীকা : বিশেষ ক্ষেত্রে মুখ্য প্রকল্প $H_0 : P_1 = P_2 = P$ অথবা $P_1 - P_2 = 0$ হলে P-এর প্রাক্কলক $\hat{P}$ -এর প্রাক্কলনী মান (estimate) n_1 এবং n_2 যে দুটি নমুনা সমগ্রকের থেকে চয়ন করা হয়েছে তাদের উপর নির্ভর করে গণনা করা হবে।

$$\hat{P} = \frac{n_1 \hat{P}_1 + n_2 \hat{P}_2}{n_1 + n_2} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

এক্ষেত্রে বিচার নমুনাঙ্ক হবে, $Z = \dfrac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - 0}{\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$

সারণী 6.5.3 : দুটি অনুপাতের তুলনার দ্বারা প্রকল্প বিচার

সমগ্রক নিবেশন সম্বন্ধে ধারণা	H_0	H_1	H_0 বর্জন করা হবে যদি	বিচার নমুনাঙ্ক	মন্তব্য
পরস্পর নিরপেক্ষ নমুনা	$P_1 - P_2 = \lambda$	$P_1 - P_2 > \lambda$	$Z > Z_\alpha$	$Z = \dfrac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - \lambda}{\sqrt{\dfrac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}}$	দক্ষিণ পাক্ষিক নর্ম্যাল বিচার
	$P_1 - P_2 = \lambda$	$P_1 - P_2 < \lambda$	$Z < -Z_\alpha$	$\sim N(0, 1)$ যেখানে	বাম পাক্ষিক নর্ম্যাল বিচার
n_1, n_2 দুটিই বৃহৎ	$P_1 - P_2 = \lambda$	$P_1 - P_2 \neq \lambda$	$\lvert Z\rvert > Z_{\alpha/2}$	$\hat{P}_1 = \dfrac{X_1}{n_1}$, $\hat{P}_2 = \dfrac{X_2}{n_2}$	উভয় পাক্ষিক নর্ম্যাল বিচার

উদাহরণ : 6.4.1 500 আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হ'ল কমলালেবুর একটি বিপুল পরিমাণ জোগানের থেকে, যার মধ্যে 65টি কমলালেবু পচা পাওয়া গেল। এই রাশিতথ্য থেকে কি আমরা এই উপসংহারে উপনীত হতে পারি যে কমলালেবুর ঐ বিপুল পরিমাণ জোগানের মধ্যে 15%-ই পচা?

সমাধান : এখানে মুখ্যপ্রকল্প $H_0 : P = P_0$ (যেখানে $P_0 = 0.15$) এবং বৈকল্পিক প্রকল্প H_1 : $P \neq P_0$

বিচার নমুনাঙ্ক হবে, $Z = \dfrac{\dfrac{X}{n} - P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}}$ ~N (0, 1) যেখানে X হ'ল পচা কমলালেবুর সংখ্যা

ও n = নমুনার আয়তন

$$\text{সুতরাং } Z = \frac{\frac{65}{500} - 0.15}{\sqrt{\frac{0.15\ .\ 0.85}{500}}}$$

$$= \frac{\sqrt{500(0.13 - 0.15)}}{\sqrt{0.1275}} = \frac{-0.4476}{0.357} = -1.25$$

$\therefore \quad |Z| = 1.25$

কিন্তু $Z_{0.025} = 1.96$ সুতরাং $|Z| < Z_{0.025}$। তাই আমরা H_0 (মুখ্য প্রকল্পকে) 5% সংশয় মাত্রায় গ্রহণ করে এই উপসংহারে উপনীত হব যে ঐ বিপুল পরিমাণ কমলালেবুর চালানে পচা কমলালেবুর অনুপাত 15% হতে পারে।

উদাহরণ : 6.4.2 ধরা যাক্ কোন বস্তুর এক বিন্দু থেকে অন্য একটি বিন্দুতে যেতে যে সময় লাগে সেই সময় নর্ম্যাল বিভাজনের মাধ্যমে উপস্থাপিত করা যায় এবং নর্ম্যাল বিভাজনটি হ'ল $N(\mu, \sigma^2 = 4)$। এখন একটি 9 আয়তন বিশিষ্ট সমসম্ভব নমুনা চয়ন করা হ'ল যার গড় 50। এখন 1% সংশয় মাত্রা ধরে মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \mu = 52$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 = \mu \neq 52$-এর সাপেক্ষে বিচার কর।

সমাধান : মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \mu = 52$ কে বিচার করা হবে বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 : \mu \neq 52$-এর সাপেক্ষে, যখন সংশয় মাত্রা 1%।

এখানে বিচারের নমুনাঙ্ক মুখ্য প্রকল্প অনুযায়ী $Z = \dfrac{\bar{X}-52}{\sigma/\sqrt{n}}$ হবে। এবং এই নমুনাঙ্ক প্রমাণ নর্ম্যাল নিবেশনে উপস্থাপিত হয়।

এখানে নমুনার আয়তন = n = 9, নমুনা গড় = $\bar{X}$ = 50 এবং সমগ্রকের ভেদমান = 4

সুতরাং $Z = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-52)}{\sigma} = \dfrac{\sqrt{9}(50-52)}{2} = -3$

যেহেতু বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 = \mu \neq 52$-এর সংশয়মাত্রা 1% তে বর্জনাঞ্চল $|Z| > Z_{0.005}$ (=2.58).

এখানে $|Z| = 3 > 2.58$।

সুতরাং 1% সংশয় মাত্রা অনুযায়ী আমরা মুখ্যপ্রকল্প H_0 কে বর্জন করে এই উপসংহারে উপনীত হই যে সমগ্রক গড় সম্ভবত $\neq 52$।

উদাহরণ: 6.5.1 দুইটি 10 ও 12 আয়তন বিশিষ্ট নিরপেক্ষ সমসম্ভব নমুনা যথাক্রমে $N(\mu_1, \sigma_1^2 = 4)$ এবং $N(\mu_2, \sigma_2^2 = 9)$ সমগ্রকদ্বয় থেকে চয়নকরা হ'ল। এই দুই নমুনার গড় যথাক্রমে 20 এবং 22 দেওয়া আছে। এখন 10% সংশয় মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 5$ কে বিচার কর যেখানে বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 5$.

সমাধান : এখানে মুখ্যপ্রকল্প $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 5$ এবং বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 5$ কে বিচার করতে হবে।

আমাদের বিচার নমুনাঙ্ক হবে, $Z = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 5}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

যা মুখ্যপ্রকল্প H_0 অনুসারে নেওয়া হয়েছে এবং যার নিবেশন প্রমাণ নর্ম্যাল প্রদত্ত রাশিতথ্য অনুযায়ী আমরা পাই—

$n_1 = 10,\ n_2 = 12,\ \sigma_1^2 = 4,\ \sigma_2^2 = 9,\ \bar{X}_1 = 20$ এবং $\bar{X}_2 = 22$

$$\therefore \quad Z = \frac{(20-22)-5}{\sqrt{\frac{4}{10}+\frac{9}{12}}} = -\frac{7}{\sqrt{1.15}} = -6.53$$

আমরা জানি P $(Z \le -1.28) = 0.10$

সুতরাং বর্জনাঞ্চল (Critical region) হবে $Z \le -1.28$ এখানে $Z (= -6.53) < -1.28$

সুতরাং আমরা 10% সংশয় মাত্রায় মুখ্য প্রকল্প H_0 কে বর্জন করে এই উপসংহারে উপনীত হই যে $(\mu_1 - \mu_2)$ বোধ হয় 5-এর থেকে ছোট।

6.6 পিয়ারসোনীয় কাই-বর্গ $(\chi)^2$

ধরা যাক্ একটি সমগ্রককে k পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং সম্পূর্ণ (mutually exclusive and exhaustive) শ্রেণীতে বিভক্ত করা হ'ল কোন বৈশিষ্ট্য বা কোন চলকের সাপেক্ষে। আরো ধরা যাক্ ঐ সমগ্রকের শ্রেণীগুলির অনুপাত (বা সম্ভাবনা) i-তম শ্রেণীর জন্য p_i, $i = 1\ (1)k$। এখন ঐ সমগ্রক থেকে n-আয়তন বিশিষ্ট একটি সমসম্ভব নমুনা চয়ন করা হ'ল যাতে f_i হবে নমুনার i-তম শ্রেণীর, $i = 1(1)k$, পরিসংখ্যা। স্বভাবতই $f_1, f_2, \ldots\ldots\ f_k$ সবই সমসম্ভব চলক এবং f_i-এর প্রত্যাশা

$$E(f_i) = np_i\ ,\quad i = 1\ (1)k$$

তাহলে $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$$

হবে এমন একটি নমুনাঙ্ক যা প্রায় সঠিকভাবে χ^2 নিবেশনকে অনুসরণ করে যার স্বাতন্ত্র্যমাত্রা $(k-1)$। কিন্তু একটা শর্ত আছে। শর্তটি হ'ল মোট পরিসংখ্যাকে যথেষ্ট বড় হতে হবে যাতে কোন শ্রেণীর প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা 5-এর কম না হয়। এই ধরনের নমুনাঙ্ককে পিয়ারসোনীয় χ^2 বা পরিসংখ্যা χ^2 (Pearsonian χ^2 বা frequency χ^2) বলে।

এই নমুনাঙ্কের চিহ্নভিত্তিক সংজ্ঞা নীচে দেওয়া হল

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

যেখানে f_0 এবং f_e যথাক্রমে পর্যবেক্ষণ করা (observed) পরিসংখ্যা এবং প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা (expected frequency).

χ^2-এর এই চিহ্ন ভিত্তিক সংজ্ঞার আরও সরলীকরণ করা সম্ভব।

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(f_0^2 - 2f_0 f_e + f_e^2\right)}{f_e} = \sum \left[\frac{f_0^2}{f_e} - 2f_0 + fe\right]$$

$$= \sum \frac{f_0^2}{f_e} - 2\sum f_0 + \sum f_e \quad = \sum \frac{f_0^2}{f_e} - 2n + n = \sum \frac{f_0^2}{f_e} - n$$

6.6.1 পিয়ারসোনীয় χ^2-এর ব্যবহার

বহু "বৃহৎ নমুনার বিচার" এই নমুনাঙ্কের সাহায্যে করা যায়। মনে রাখা দরকার বৃহৎ নমুনার বিচারগুলি কিন্তু আনুমানিক (approximately) বিচার যেগুলি কেবলমাত্র বৃহৎ নমুনার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। অপরপক্ষে ক্ষুদ্র নমুনার জন্য যে বিচারগুলি আছে সেগুলি যথার্থ বিচার (exact tests) এবং সেই বিচারগুলি বৃহৎ নমুনার ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

পিয়ারসোনীয় χ^2 ব্যবহারের সময় একটা শর্ত সর্বদা মনে রাখতে হবে যে প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা (expected frequency) যে কোন শ্রেণীর জন্য 5 এর কম হতে পারবে না। যদি প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা কোন শ্রেণীর জন্য 5-এর কম হয়, তখন ঐ শ্রেণীর সঙ্গে আশেপাশের শ্রেণীর পরিসংখ্যা যোগ করে প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা 5 বা 5-এর বেশী করে রাখতে হবে। প্রয়োজনে এদের বেশী শ্রেণীকেও ঐ শ্রেণীর সঙ্গে জুড়ে দেওয়া যেতে পারে। এক্ষেত্রে, χ^2 এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা হবে জুড়ে দেওয়ার পর শ্রেণীসংখ্যা থেকে এক কম।

আবার যদি সমগ্রকের কিছু পূর্ণাকাঙ্ক অজানা (unspecified) থাকে তবে আমাদের প্রথম কাজ হবে ঐ অজানা পূর্ণাকাঙ্কগুলির প্রাক্কলনী মান (estimate) নমুনার উপর ভিত্তি করে বের করা আর তারপর প্রত্যাশিত পরিসংখ্যাগুলি গণনা করা। যদি অজানা পূর্ণাকাঙ্কগুলির (যাদের প্রাক্কলনীমান বের করা হ'ল) সংখ্যা হয় r তবে χ^2-এর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা হবে [(জুড়ে দেওয়ার পর শ্রেণীসংখ্যা) –1 – r]

6.6.2 উপযুক্ত নিবেশনের উৎকর্ষতা বিচার (Testing goodness of fit)

এখানে আমাদের সমস্যা হল সমগ্রকের নিবশেনের নির্দিষ্ট ধরণ বিচার করা। ধরা যাক্ একটি সমগ্রকে k শ্রেণী আছে যেখানে i-তম শ্রেণীর অজানা পরিসংখ্যা অনুপাত বা সম্ভাবনা) হ'ল p_i, $i = 1\ (1)k$।

আমরা মুখ্য প্রকল্প লিখতে পারি নীচের মতো করে—

$$H_0 : p_1 = p_1^0,\ p_2 = p_2^0,\ \dots\dots\dots, p_k = p_k^0$$

ধরা যাক্ n আয়তন বিশিষ্ট একটি সমসম্ভব নমুনা সমগ্রক থেকে চয়ন করা হ'ল এবং ধরা যাক্ f_i হ'ল i-তম শ্রেণীর নমুনা পরিসংখ্যা। সুতরাং মুখ্যপ্রকল্প অনুযায়ী প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা হবে np_i^0 যেটা f_i এর অনুরূপ। এখন নমুনাঙ্কটি লেখা যেতে পারে

$$\chi^2 = \sum_i \frac{\left(f_i - np_i^0\right)}{np_i^0}$$

যেটা মুখ্য প্রকল্প অনুসারে প্রায় সঠিকভাবে χ^2 নিবেশনকে অনুসরণ করে যে নিবেশনের স্বাতন্ত্র্যমাত্রা $(k-1)$। এই নমুনাঙ্ক মুখ্যপ্রকল্প H_0 বিচার করতে ব্যবহৃত হয়। এখানে পর্যবেক্ষণে প্রাপ্ত পরিসংখ্যার থেকে প্রত্যাশিত পরিসংখ্যার পার্থক্য যত বৃদ্ধি পাবে ততই χ^2 এর মান বৃদ্ধি পাবে। সুতরাং α সংশয়মাত্রা অনুযায়ী মুখ্যপ্রকল্প H_0 কে বর্জন করা হবে যখন $\chi^2_{\text{পর্যবেক্ষণে প্রাপ্ত}} > \chi^2_{\alpha,(k-1)}$ অন্যথায়, H_0 কে গ্রহণ করা হবে।

এখানে $\chi^2_{\alpha,(k-1)}$ হ'ল $(k-1)$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2 নিবেশনের ঊর্দ্ধ α বিন্দু।

6.6.3 সমগ্রকের দুটি বৈশিষ্ট্যের নিরপেক্ষতা বিচার (Testing independence of two characters of the population)

ধরা যাক্ কোন সমগ্রকের A এবং B বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী এমনভাবে বিভাজন করা হয়েছে যাতে যথাক্রমে K এবং ℓ শ্রেণীতে সমগ্রকটি বিভক্ত হয়।

ধরা যাক্, p_{ij} হ'ল সমগ্রকের পরিসংখ্যার অনুপাত যেটা (A_i, B_j) ঘরে অবস্থান করে। যেখানে $i = 1(1)k$, $j = 1\ (1)\ell$

B / A	B_1	B_2	....	B_j	....	B_ℓ	Total
A_1	p_{11}	p_{12}	....	p_{1j}	....	$p_{1\ell}$	p_{10}
A_2	p_{21}	p_{22}	....	p_{2j}	....	$p_{2\ell}$	p_{20}
....	....	....	....	....	....	....	....
A_i	p_{i1}	p_{i2}	....	p_{ij}	....	$p_{i\ell}$	P_{i0}
....	....	....	....	....	....	....	....
A_k	p_{k1}	p_{k2}	....	p_{kj}	....	$p_{k\ell}$	p_{k0}
Total	p_{01}	p_{02}	....	p_{oj}	....	$p_{o\ell}$	1

যখন p_{ij} আমাদের অজানা, আমরা এখানে বৈশিষ্ট্য A এবং B পরস্পর স্বাধীন কিনা সেটা বিচার করতে পারি। সুতরাং আমাদের মুখ্য প্রকল্প হবে—

$$H_0 : p_{ij} = p_{i0} \cdot p_{0j}, \quad \text{সমস্ত } i \text{ এবং } J\text{-র জন্য}$$

$$\text{যখন } p_{i0} = \sum_j p_{ij} = P(Ai) \text{ এবং } p_{0j} = \sum_i p_{ij} = P(B_j)$$

ধরা যাক্, আমরা একটি n আয়তন বিশিষ্ট সমসম্ভব নমুনা, সমগ্রক থেকে চয়ন করেছি এবং ধরা যাক্ f_{ij} নমুনার পরিসংখ্যা যেটা (A_i, B_j) ঘরের মধ্যে অবস্থান করে। মুখ্যপ্রকল্প (H_o) অনুযায়ী প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা হবে $(n\ p_{i0} \cdot p_{0j})$ যেটা f_{ij}-র অনুরূপ। যেহেতু p_{i0} এবং p_{0j} দুটিই অজানা, আমাদের প্রথমেই এই দুটির প্রাক্কলনী মান (estimate) বের করতে হবে। p_{i0} এবং p_{0j} এই দুয়ের প্রাক্কলনী মান হবে

$$\hat{p}_{i0} = \frac{f_{i0}}{n} \text{ এবং } \hat{p}_{0j} = \frac{f_{0j}}{n}$$

$$\text{যেখানে,} \qquad f_{i0} = \sum_j f_{ij} \quad \text{এবং} \quad f_{0j} = \sum_i f_{ij}$$

সুতরাং, f_{ij} এর অনুরূপে প্রত্যাশিত পরিসংখ্যার প্রাক্কলনী মান হবে—

$$n \cdot \hat{p}_{i0} \cdot \hat{p}_{0j} = n \cdot \frac{f_{i0}}{n} \cdot \frac{f_{0j}}{n} = \frac{f_{i0} \cdot f_{0j}}{n}$$

মুখ্য প্রকল্প H_0-র বিচারের জন্য আমরা নীচের নমুনাঙ্ক ব্যবহার করব—

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\left[f_{ij} - f_{io} \cdot f_{oj}\right]^2}{\frac{f_{io} \cdot f_{oj}}{n}} = n \sum_i \sum_j \frac{f_{ij}^2}{f_{io} \cdot f_{oj}} - n$$

এই নমুনাঙ্ক, মুখ্যপ্রকল্প H_0 অনুযায়ী প্রায় সঠিকভাবে একটি χ^2 নিবেশন অনুসরণ করে যার স্বাতন্ত্র্যমাত্রা হ'ল $k\ell - 1 - (k - 1) - (\ell - 1) = (k - l)(\ell - 1)$ সংশয়মাত্রা α অনুযায়ী আমরা মুখ্যপ্রকল্প H_0-কে বর্জন করব যদি $\chi^2_{\text{পর্যবেক্ষণে প্রাপ্ত}} > \chi^2_{\alpha,(k-1)(\ell-1)}$ হয়। অন্যথায় H_0 গ্রহণ করব।

উদাহরণ : 6.6.1 5টি শিশু বিশিষ্ট 320টি পরিবারের উপর একটি সমীক্ষা চালানো হয় এবং নীচের বিভাজনটি সমীক্ষার ফলস্বরূপ পাওয়া যায়—

ছেলের সংখ্যা :	5	4	3	2	1	0
মেয়ের সংখ্যা :	0	1	2	3	4	5
পরিবারের সংখ্যা :	14	56	110	88	40	12

সমীক্ষার ফল কি মুখ্যপ্রকল্প H_0-র সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ?

H_0 : ছেলে ও মেয়ে জন্মানোর সম্ভাবনা সমান।

(দেওয়া আছে : 5% সংশয়মাত্রা অনুযায়ী 5 স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত χ^2-এর মান = 11.07)

সমাধান : যদি X কন্যাসন্তানের সংখ্যা বুঝায় 5 সন্তান যুক্ত পরিবারের মধ্যে, তবে X, মুখ্যপ্রকল্প H_0 অনুযায়ী, দ্বিপদ নিবেশন অনুসরণ করে যার সম্ভাবনা-ভর-অপেক্ষক হ'ল—

$$P(X=x)=\binom{5}{x}\frac{1}{2^5},\quad \text{যেখানে, } x = 0\ (1)\ 5$$

সুতরাং মুখ্যপ্রকল্প অনুযায়ী x-এর প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা হবে—

$$320\times\binom{5}{x}\frac{1}{2^5},\quad \text{যখন } x = 0\ (1)\ 5$$

X-এর মান (x)	P(X = x)	প্রত্যাশিত পরিসংখ্যা (f_e)	পর্যবেক্ষণ প্রাপ্ত পরিসংখ্যা (f_0)	$(f_0 - f_e)^2$	$\frac{(f_0-f_e)^2}{fe}$
0	$\frac{1}{32}$	10	14	16	1.60
1	$\frac{5}{32}$	50	56	36	0.72
2	$\frac{10}{32}$	100	110	100	1.00
3	$\frac{10}{32}$	100	88	144	1.44
4	$\frac{5}{32}$	50	40	100	2.00
5	$\frac{1}{32}$	10	12	4	0.40
Total	1	320	320	—	7.16

এখানে যথার্থ প্রকল্পবিচারের নমুনাঙ্ক হবে—

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

যেটা মুখ্যপ্রকল্প H_0 অনুযায়ী প্রায় সঠিকভাবে একটি χ^2 নিবেশনকে অনুসরণ করে যার স্বাতন্ত্র্যমাত্রা = 5।

যেহেতু $\chi^2_{\text{পর্যবেক্ষণে প্রাপ্ত}} (= 7.16) < \chi^2_{0.05,5} (= 11.07)$

সুতরাং আমরা মুখ্যপ্রকল্পকে 5% সংশয়মাত্রা অনুযায়ী গ্রহণ করব এবং আমরা এই উপসংহারে উপনীত হব যে ছেলে বা মেয়ে জন্মানোর সম্ভাবনা সমান বলে মনে করা যেতে পারে।

উদাহরণ : 6.6.2 নীচের রাশিতথ্যে দুটি বৈশিষ্ট্যের উপর তথ্য সংগ্রহ করা হয়েছে :

	সিনেমার দর্শক	সিনেমার দর্শক নয়
শিক্ষিত	92	48
অশিক্ষিত	208	52

উপরের রাশিতথ্যের উপর নির্ভর করে কি বলা যায়, যে সিনেমা দেখার অভ্যাস এবং শিক্ষার মধ্যে কোন সম্পর্ক আছে?

(দেওয়া আছে : সংশয়মাত্রা 5% ধরে নিয়ে χ^2 নিবেশনের উর্দ্ধ বিন্দুগুলি হবে 3.841, 5.991 এবং 9.488 যখন স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যথাক্রমে 1, 2, 4 হবে)।

সমাধান : এখানে আমাদের মুখ্য প্রকল্প হবে—

H_0 : সিনেমা দেখার অভ্যাস এবং শিক্ষা দুটিই পরস্পর স্বাধীন।

যথার্থ বিচার নমুনাঙ্ক হবে, $\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$

এই নমুনাঙ্ক, মুখ্য প্রকল্প H_0 অনুযায়ী প্রায় সঠিকভাবে 1 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত χ^2 নিবেশনকে অনুসরণ করে।

প্রদত্ত রাশিতথ্যের উপর নির্ভর করে আমরা নীচের সারণী তৈরী করেছি :

	সিনেমার দর্শক	সিনেমার দর্শক নয়	মোট
শিক্ষিত	92 (a)	48 (b)	140
অশিক্ষিত	208 (c)	52 (d)	260
মোট	300	100	400 (n)

χ^2 এর সহজতর ফর্মুলা অনুযায়ী :

$$\chi^2_{\text{পর্যবেক্ষণে প্রাপ্ত}} = \frac{(ad-bc)^2.n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{(92\times52-48\times208)^2.400}{140.260.300.100}$$

$$= \frac{(4784-9984)^2.400}{14.\ 26.3.10^6} = \frac{52^2.\ 4.\ 10^6}{14.\ 26.\ 3.10^6}$$

$$= \frac{208}{21} = 9.90$$

যেহেতু $\chi^2_{\text{পর্যবেক্ষণে প্রাপ্ত}} (=9.90) > \chi^2_{0.05,1} (=3.841)$

সুতরাং আমরা 5% সংশয় মাত্রা অনুযায়ী মুখ্যপ্রকল্প H_0-কে বর্জন করব এবং আমরা এই উপসংহারে উপনীত হব যে সিনেমা দেখার সঙ্গে শিক্ষার যোগ থাকা অসম্ভব নয়।

6.7 সারাংশ

এই এককে যে বিষয়গুলি নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে তার সবটাই প্রকল্প বিচার তত্ত্বের ছাতার তলায় আসতে পারে।

সমগ্রকের কোন পূর্ণাকাঙ্ক সম্বন্ধে আমাদের কোন পূর্ব ধারণাকে যাচাই করাকে বলে প্রকল্প বিচার। নমুনা রাশি সমগ্রক থেকে চয়ন করে দেখতে হবে ঐ পূর্ব ধারণা আমরা গ্রহণ করব না বর্জন করব।

পূর্ণাকাঙ্ক সম্বন্ধীয় কোন পূর্ব ধারণা বা মন্তব্যকে প্রকল্প বলে। প্রথম বিবৃতিকে বলা হয় মুখ্য প্রকল্প এবং দ্বিতীয় পূর্ণাকাঙ্ক সম্বন্ধীয় বিবৃতিকে বলা হয় বৈকল্পিক প্রকল্প। সমসম্ভব নমুনার ভিত্তিতে মুখ্য প্রকল্প বিচার করে দেখা হয় সেই প্রকল্প গ্রহণযোগ্য কীনা। মুখ্যপ্রকল্প যদি গ্রহণযোগ্য না হয় তাহলে বৈকল্পিক প্রকল্প গ্রহণযোগ্য হবে।

নর্ম্যাল নিবেশনের N (μ, σ^2), σ^2 যদি জানা থাকে তাহলে মুখ্যপ্রকল্প $H_0 : \mu = \mu_0$ কে সরল প্রকল্প বলব। কারণ এই প্রকল্প বিচার করলে সমগ্রক সম্বন্ধে সম্পূর্ণ জানা হয়ে যায়। সমগ্রক সম্বন্ধে সম্পূর্ণ জানা না হলে সেই প্রকল্প হবে মিশ্র প্রকল্প।

প্রকল্প বিচারে দুই ধরনের ভ্রান্তি প্রকল্প দেখা যায়। সঠিক মুখ্য প্রকল্পকে বর্জন করার ফলে যে ভ্রান্তির সৃষ্টি হয় তাকে প্রথম প্রকার ভ্রান্তি (Type I error) বলে। আর মুখ্যপ্রকল্প ভুল হওয়া সত্ত্বেও তাকে গ্রহণ করার ফলে যে ভ্রান্তির সৃষ্টি হয় তাকে দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তি (Type II error) বলে।

এই দুই প্রকার ভ্রান্তি ন্যূনতম করাই প্রকল্প বিচারের মুখ্য উদ্দেশ্য হওয়া উচিত। কিন্তু উভয় প্রকারের

ভ্রান্তির সম্ভাবনা একসঙ্গে হ্রাস করা সম্ভব নয়। যদি একটির সম্ভাবনা কমতে কমতে শূন্যের দিকে যায়, তখন অন্যটির সম্ভাবনা বাড়তে বাড়তে 1 এর দিকে যায়।

প্রকল্প বিচার দক্ষিণ পাক্ষিক হবে না বামপাক্ষিক হবে না উত্তর পাক্ষিক হবে তা নির্ভর করে সম্পূর্ণভাবে বৈকল্পিক প্রকল্পের উপর।

মুখ্য প্রকল্পকে গ্রহণ করা মানে এই নয় যে মুখ্য প্রকল্পটি ধ্রুব সত্য। শুধু এটুকু বলতে পারি যে সংগৃহীত নমুনার উপর নির্ভর করে আমরা মুখ্য প্রকল্পের উপর সন্দেহ প্রকাশ করার কোন কারণ দেখছি না।

আবার মুখ্য প্রকল্পকে বর্জন করার মানে হ'ল সংগৃহীত নমুনার উপর নির্ভর করে আমরা মুখ্য প্রকল্পকে খুব বিশ্বাসযোগ্য মনে করছি না। এই এককে আমরা নীচের প্রকল্প বিচারগুলো আলোচনা করেছি।

(ক) একটি সমগ্রকের গড় (μ) প্রকল্প বিচারের জন্য নর্ম্যাল এবং t বিচার।

(খ) একটি সমগ্রকের ভেদমানের (σ^2) বিচারের জন্য χ^2 এবং বৃহৎ নমুনা নর্ম্যাল বিচার।

(গ) একটি সমগ্রকের অনুপাতের (p) প্রকল্প বিচারের জন্য বৃহৎ নমুনা নর্ম্যাল বিচার।

(ঘ) দুটি সমগ্রকের গড়ের তফাৎ ($\mu_1 - \mu_2$)-এর প্রকল্প বিচারের জন্য নর্ম্যাল এবং t বিচার।

(ঙ) দুটি সমগ্রকের ভেদমানের অনুপাতের $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2\right)$ প্রকল্প বিচারের জন্য F-বিচার।

(চ) দুটি অনুপাতের পার্থক্যের প্রকল্প বিচারের জন্য প্রায় সঠিক নর্ম্যাল বিচার।

(ছ) রবিনসোনীয় χ^2-এর বিভিন্ন ব্যবহারের মাধ্যমে প্রকল্প বিচার।

6.8 অনুশীলনী

প্রশ্নমালা : (সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন, প্রতিটির মান 2.5)

1. প্রকল্প বিচার কাকে বলে?
2. সরল ও মিশ্র প্রকল্পের পার্থক্য নির্দেশ কর।
3. বিচারের সংশয়মাত্রা কী?
4. প্রথম ও দ্বিতীয় প্রকারের ভ্রান্তির পার্থক্য নির্দেশ কর।
5. মুখ্য প্রকল্প ও বৈকল্পিক প্রকল্প-এর মধ্যে পার্থক্য কী?
6. বর্জনাঞ্চল কাকে বলে?
7. বিচার নমুনাঙ্কের সাহায্যে কীভাবে প্রকল্প বিচার করা হয়?

প্রশ্নমালা : (প্রতিটির মান 5)

8. কোন একটি শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের ছাত্রদের পরিসংখ্যানে প্রাপ্ত গড় নম্বর 60 এবং সমক বিচ্যুতি 10। কমপিউটার দিয়ে পড়ানোর নতুন পদ্ধতি ব্যবহার করার ফলে 52 জন ছাত্রদের প্রাপ্ত গড় নম্বর দেখা গেল 62.75। এই রাশিতথ্য ব্যবহার করে পুরোনো পদ্ধতি নতুনের থেকে ভাল কিনা তা বিচার কর। (সংশয় মাত্রা 5%।

9. খেলাধুলায় উৎসাহী 50টি ছাত্রের গড় দৈর্ঘ্য 68.2 inch এবং সমক বিচ্যুতি 2.5 inch, আবার খেলাধুলায় উৎসাহী নয় এমন 50টি ছাত্রের গড় দৈর্ঘ্য 67.5 inch এবং সমক বিচ্যুতি 2.8 inch/ যেখানে সংশয় মাত্রা 5%-এ বিচার কর খেলাধুলায় উৎসাহ উচ্চতা বৃদ্ধির সহায়ক কিনা।

10. 10টি শূকরকে খাদ্য A এবং 12টি শূকরকে খাদ্য B একটি নির্দিষ্ট সময় খাওয়ানোর পর তাদের ওজনের বৃদ্ধি হয়েছে যথাক্রমে—

    খাদ্য A 10, 6, 16, 17, 13, 12, 8, 14, 15, 9

    খাদ্য B 7, 13, 22, 15, 12, 14, 18, 8, 21, 23, 10, 17

    বিচার কর I. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

    এবং $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (যেখানে সংশয়মাত্রা 1%)

    II. দুটি ক্ষেত্রে গড় ওজন বৃদ্ধির পরিমাণ এক কিনা তা বিচার কর যখন সংশয়মাত্রা 5% (ওজনের নিবেশন দুটি ক্ষেত্রে যথাক্রমে $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ এবং $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ দেওয়া আছে)।

প্রশ্নমালা : (প্রতিটির মান 5)

11. একটি নতুন স্বয়ংক্রিয় কাগজ ছাপার মেসিন ক্রয়ের জন্য সিদ্ধান্ত নিতে হবে। যদি গ্রহণযোগ্য কাগজের গড় সংখ্যা/ঘণ্টা 1000 এর বেশী হয় তাহলে আমরা নতুন মেশিনটি সাশ্রয়ী বলতে পারি। এখন মুখ্যপ্রকল্প $H_0 : \mu = 1000$ এবং বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 : \mu > 1000$ কে বিচার করার জন্য পরীক্ষামূলক ভাবে মেসিনটিকে 1 ঘণ্টা করে 64 বার চালানো হ'ল। দেখা গেল গ্রহণযোগ্য কাগজের গড় সংখ্যা এবং সমক বিচ্যুতি যথাক্রমে 1028 এবং 126। এই রাশিতথ্য ব্যবহার করে প্রকল্প বিচার কর। (সংশয়মাত্রা 5%)।

12. একটি শহরে 600 জনের নমুনা নিয়ে দেখা গেল 400 জন ধূমপায়ী। অপরপক্ষে অন্য একটি শহরে 900 জনের নমুনা দিয়ে দেখা গেল 450 জন ধূমপায়ী। আমরা কি এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে প্রথম শহরের ধূমপায়ীর অনুপাত দ্বিতীয় শহরের থেকে বেশী? (সংশয় মাত্রা 1%)।

13. একটি মেশিনে উৎপাদিত বস্তুর 500 টির নমুনা নিয়ে দেখা গেল 16টি বস্তু ত্রুটি পূর্ণ। উপযুক্ত রক্ষণাবেক্ষণের জন্য প্রতিশোধক নেওয়ার ফলে দেখা গেল 100টি নমুনার মধ্যে 3টি নমুনা ত্রুটিপূর্ণ হচ্ছে। মেসিনটি প্রতিশোধক নেওয়ার ফলে উন্নত হ'ল কিনা বিচার কর। ($\alpha = 0.05$)

14. গুদামের ভিতরে এবং বাইরে মজুত করা কাঠ কতটা শক্ত, তার পরিমাণ নীচের সারণীতে দেওয়া আছে।

	ভিতর	**বাহির**
নমুনা আয়তন	13	11
নমুনা গড়	166	103
নমুনা ভেদমান	3500	2400

যখন সংশয় মাত্রা 5% গুদামের ভিতরে মজুত করা কাঠ, বাইরে মজুত করা কাঠের থেকে শক্ত হবে কিনা তা বিচার কর।

15. দুই ব্যক্তির পরিমাপের নির্ভুলতা বিচার করার জন্য প্রথম ব্যক্তি এবং দ্বিতীয় ব্যক্তিকে যথাক্রমে 25টি ও 30টি মাপ করতে দেওয়া হল। প্রথমও দ্বিতীয় ব্যক্তির মাপগুলির সমক বিচ্যুতি যথাক্রমে 1.34 এবং 0.98, বিচার কর দুই ব্যক্তির পরিমাপের নির্ভুলতা একই কিনা। (দেওয়া আছে $\alpha = 0.1$)

6.9 গ্রন্থপঞ্জী

1. রাশিবিজ্ঞানের মূলতত্ত্ব—প্রথম ও দ্বিতীয় খণ্ড (১৯৭৬)
   ডঃ শৈলেশভূষণ চৌধুরী, ডঃ অরিজিৎ চৌধুরী,
   ডঃ বিশ্বনাথ দাস (পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ)
2. রাশিবিজ্ঞানের প্রয়োগ পদ্ধতি—do
3. Fundamental of Statistics-vol I (1998) & II (2011)
   Goon, A M; Gupta M. K. & Dasgupta, B (World Press)
4. An Outline of Statistical Theory–Vol I & II (1998)
   Goon, A M; Gupta M. K. & Dasgupta, B (World Press)

পরিশিষ্ট : সারণিসমূহ

সারণি ১ : প্রামাণ্য নর্ম্যাল চলকের (গড় 0 ও সমকপার্থক্য 1) নিবেশনের অক্ষরেখা (ordinate) ও ক্ষেত্রফল (Area)

Z	$\phi(z)$	$\Phi(z)$	Z	$\phi(z)$	$\Phi(z)$	Z	$\phi(z)$	$\Phi(z)$
.00	.3989423	.5000000						
.01	.3989223	.5039894	.51	.3502919	.6949743	1.01	.2395511	.8437524
.02	.3988625	.5079783	.52	.3484925	.6984682	1.02	.2371320	.8461358
.03	.3987628	.5119665	.53	.3466677	.7019440	1.03	.2347138	.8484950
.04	.3986233	.5159534	.54	.3448180	.7054015	1.04	.2322970	.8508300
.05	.3984439	.5199388	.55	.3429439	.7088403	1.05	.2298821	.8531409
.06	.3982248	.5239222	.56	.3410458	.7122603	1.06	.2274696	.8554277
.07	.3979661	.5279032	.57	.3391243	.7156612	1.07	.2250599	.8576903
.08	.3976677	.5318814	.58	.3371799	.7190427	1.08	.2226535	.8599289
.09	.3973298	.5358564	.59	.3352132	.7224047	1.09	.2202508	.8621434
.10	.3969525	.5398278	.60	.3332246	.7257469	1.10	.2178522	.8643339
.11	.2965360	.5437953	.61	.3312147	.7290691	1.11	.2154582	.8665005
.12	.3960802	.5477584	.62	.3291840	.7323711	1.12	.2130691	.8686431
.13	.3955854	.5517168	.63	.3271330	.7356527	1.13	.2106856	.8707619
.14	.3950517	.5556700	.64	.3250623	.7389137	1.14	.2083078	.8728568
.15	.3944793	.5596177	.65	.3229724	.7421539	1.15	.2059363	.8749281
.16	.3938684	.5635595	.66	.3208638	.7453731	1.16	.2035714	.8769756
.17	.3932190	.5674949	.67	.3187371	.7485711	1.17	.2012135	.8789995
.18	.3925315	.5714237	.68	.3165929	.7517478	1.18	.1988631	.8809999
.19	.3918060	.5753454	.69	.3144317	.7549029	1.19	.1965205	.8829768
.20	.3910427	.5792597	.70	.3122539	.7580363	1.20	.1941861	.8849303
.21	.3902419	.5831662	.71	.3100603	.7611479	1.21	.1918602	.8868606
.22	.3894038	.5870644	.72	.3078513	.7642375	1.22	.1895432	.8887676
.23	.3885286	.5909541	.73	.3056274	.7673049	1.23	.1872354	.8906514
.24	.3876166	.5948349	.74	.3033893	.7703500	1.24	.1849373	.8925123
.25	.3866681	.5987063	.75	.3011374	.7733726	1.25	.1826491	.8943502
.26	.3856834	.6025681	.76	.2988724	.7763727	1.26	.1803712	.8961653
.27	.3846627	.6064199	.77	.2965948	.7793501	1.27	.1781038	.8979577
.28	.3836063	.6102612	.78	.2943050	.7823046	1.28	.1758474	.8997274
.29	.3825146	.6140919	.79	.2920038	.7852361	1.29	.1736022	.9014747
.30	.3813878	.6179114	.80	.2896916	.7881446	1.30	.1713686	.9031995

Z	$\phi(z)$	$\Phi(z)$	Z	$\phi(z)$	$\Phi(z)$	Z	$\phi(z)$	$\Phi(z)$
.31	.3802264	.6217195	.81	.2873689	.7910299	1.31	.1691468	.9049021
.32	.3790305	.6255158	.82	.2850364	.7938919	1.32	.1669370	.9065825
.33	.3778007	.6293000	.83	.2826945	.7967306	1.33	.1647397	.9082409
.34	.3765372	.6330717	.84	.2803438	.7995458	1.34	.1625551	.9098773
.35	.3752403	.6368307	.85	.2779849	.8023375	1.35	.1603833	.9114920
.36	.3739106	.6405764	.86	.2756182	.8051055	1.36	.1582248	.9130850
.37	.3725483	.6443088	.87	.2732444	.8078498	1.37	.1560797	.9146565
.38	.3711539	.6480273	.88	.2708640	.8105703	1.38	.1539483	.9162067
.39	.3697277	.6517317	.89	.2684774	.8132671	1.39	.1518308	.9177356
.40	.3682701	.6554217	.90	.2660852	.8159399	1.40	.1497275	.9192433
.41	.3667817	.6590970	.91	.2636880	.8185887	1.41	.1476385	.9207302
.42	.3652627	.6627573	.92	.2612863	.8212136	1.42	.1455641	.9221962
.43	.3637136	.6664022	.93	.2588805	.8238145	1.43	.1435046	.9236415
.44	.3621349	.6700314	.94	.2564713	.8263912	1.44	.1414600	.9250663
.45	.3605270	.6736448	.95	.2540591	.8289439	1.45	.1394306	.9264707
.46	.3588903	.6772419	.96	.2516443	.8314724	1.46	.1374165	.9278550
.47	.3572253	.6808225	.97	.2492277	.8339768	1.47	.1354181	.9292191
.48	.3555325	.6843863	.98	.2468095	.8364569	1.48	.1334353	.9305634
.49	.3538124	.6879331	.99	.2443904	.8389129	1.49	.1314684	.9318879
.50	.3520653	.6914625	1.00	.2419707	.8413447	1.50	.1295176	.9331928
1.51	.1275830	.9344783	2.01	.0529192	.9777844	2.51	0.170947	.9939634
1.52	.1256646	.9357445	2.02	.0518636	.9783083	2.52	.0166701	.9941323
1.53	.1237628	.9369916	2.04	.0508239	.9788217	2.53	.0162545	.9942969
1.54	.1218775	.9382198	2.04	.0498001	.9793248	2.54	.0158476	.9944574
1.55	.1200090	.9394292	2.05	.0487920	.9798178	2.55	.0154493	.9946139
1.56	.1181573	.9406201	2.06	.0477996	.9803007	2.56	.0150596	.9947664
1.57	.1163225	.9417924	2.07	.0468226	.9807738	2.57	.0146782	.9949151
1.58	.1145048	.9429466	2.08	.0458611	.9812372	2.58	.0143051	.9950600
1.59	.1127042	.9440826	2.09	.0449148	.9816911	2.59	.0139401	.9952012
1.60	.1109208	.9452007	2.10	.0439836	.9821356	2.60	.0135830	.9953388
1.61	.1091548	.9463011	2.11	.0430674	.9825708	2.61	.0132337	.9954729
1.62	.1074061	.9473839	2.12	.0421661	.9829970	2.62	.0128921	.9956035
1.63	.1056748	.9484493	2.13	.0412795	.9834142	2.63	.0125581	.9957308
1.64	.1039611	.9494974	2.14	.0404076	.9838226	2.64	.0122315	.9958547
1.65	.1022649	.9505285	2.15	.0395500	.9842224	2.65	.0119122	.9959754

Z	φ(z)	Φ(z)	Z	φ(z)	Φ(z)	Z	φ(z)	Φ(z)
1.66	.1005864	.9515428	2.16	.0387069	.9846137	2.66	.0116001	.9960930
1.67	.0989255	.9525403	2.17	.0378779	.9849966	2.67	.0112951	.9962074
1.68	.0972823	.09535213	2.18	.0370629	.9853713	2.68	.0109969	.9963189
1.69	.0956568	.9544860	2.19	.0362619	.9857379	2.69	.0107056	.9964274
1.70	.0940491	.9554345	2.20	.0354746	.9860966	2.70	.0104209	.9965330
1.71	.0924591	.9563671	2.21	.0347009	.9864474	2.71	.0101428	.9966358
1.72	.0908870	.9572838	2.22	.0339408	.9867906	2.72	.0098712	.9967359
1.73	.0893326	.9581849	2.23	.0331939	.9871263	2.73	.0096058	.9968333
1.74	.0877961	.9590705	2.24	.0324603	.9874545	2.74	.0093466	.9969280
1.75	.0862773	.9599408	2.25	.0317397	.9877755	2.75	.0090936	.9970202
1.76	.0847764	.9607961	2.26	.0310319	.9880894	2.76	.0088465	.9971099
1.77	.0832932	.9616364	2.27	.0303370	.9883962	2.77	.0086052	.9971972
1.78	.0818278	.9624620	2.28	.0296546	.9886962	2.78	.0083697	.9972821
1.79	.0803801	.9632730	2.29	.0289847	.9889393	2.79	.0081398	.9973646
1.80	.0789502	.9640697	2.30	.0283270	.9892759	2.80	.0079155	.9974449
1.81	.0775379	.9648521	2.31	.0276816	.9895559	2.81	.0076965	.9975229
1.82	.0761433	.9656205	2.32	.0270481	.9898296	2.82	.0074829	.9975988
1.83	.0747663	.9663750	2.33	.0264265	.9900969	2.83	.0072744	.9976726
1.84	.0734068	.9671159	2.34	.0258166	.9903581	2.84	.0070711	.9977443
1.85	.0720649	.9678432	2.35	.0252182	.9906133	2.85	.0068728	.9978140
1.86	.0707404	.9685572	2.36	.0246313	.9908625	2.86	.0066793	.9978818
1.87	.0694333	.9692581	2.37	.0240556	.9911060	2.87	.0064907	.9979476
1.88	.0681436	.9699460	2.38	.0234910	.9913437	2.88	.0063067	.9980116
1.89	.0668711	.9706210	2.39	.0229374	.9915758	2.89	.0061274	.9980738
1.90	.0656158	.9712834	2.40	.0223945	.9918025	2.90	.0059525	.9981342
1.91	.0643777	.9719334	2.41	.0218624	.9920237	2.91	.0057821	.9981929
1.92	.0631566	.9725711	2.42	.0213407	.9922397	2.92	.0056160	.9982498
1.93	.0619524	.9731966	2.43	.0208294	.9924506	2.93	.0054541	.9983052
1.94	.0607652	.9738102	2.44	.0203284	.9926564	2.94	.0052963	.9983589
1.95	.0595947	.9744119	2.45	.0198374	.9928572	2.95	.0051426	.9984111
1.96	.0584409	.9750021	2.46	.0193563	.9930531	2.96	.0049929	.9984618
1.97	.0573038	.9755808	2.47	.0188850	.9932443	2.97	.0048470	.9985110
1.98	.0561831	.9761482	2.48	.0184233	.9934309	2.98	.0047050	.9985588
1.99	.0550789	.9767045	2.49	.0179711	.9936128	2.99	.0045666	.9986051
2.00	.0539910	.9772499	2.50	.0175283	.9937903	3.00	.0044318	.9986501

Z	$\phi(z)$	$\Phi(z)$	Z	$\phi(z)$	$\Phi(z)$	Z	$\phi(z)$	$\Phi(z)$
3.01	.0043007	.9986938	3.21	.0023089	.9993363	3.41	.0011910	.9996752
3.02	.0041729	.9987361	3.22	.0022358	.9993590	3.42	.0011510	.9996869
3.03	.0040486	.9987772	3.23	.0021649	.9993810	3.43	.0011122	.9996982
3.04	.0039276	.9988171	3.24	.0020960	.9994024	3.44	.0010747	.9997091
3.05	.0038098	.9988558	3.25	.0020290	.9994230	3.46	.0010383	.9997197
3.06	.0036951	.9988933	3.26	.0019641	.9994429	3.46	.0010030	.9997299
3.07	.0035836	.9989297	3.27	.0019010	.9994623	3.47	.0009689	.9997398
3.08	.0034751	.9989650	3.28	.0018397	.9994810	3.48	.0009358	.9997493
3.09	.0033695	.9989992	3.29	.0017803	.9994991	3.49	.0009037	.9997585
3.10	.0032668	.9990324	3.30	.0017226	.9995166	3.50	.0008727	.9997674
3.11	.0031669	.9990646	3.31	.0016666	.9995335	3.51	.0008436	.9997759
3.12	.0030698	.9990957	3.32	.0016122	.9995499	3.52	.0008135	.9997842
3.13	.0029754	.9992360	3.33	.0015595	.9995658	3.53	.0007853	.9997922
3.14	.0028835	.9991553	3.34	.0015084	.9995811	3.54	.0007581	.9997999
3.15	.0027943	.9991836	3.35	.0014587	.9995959	3.55	.0007317	.9998146
3.16	.0027075	.9992112	3.36	.0014106	.9996103	3.56	.0007001	.9998146
3.17	.0026231	.9992378	3.37	.0013639	.9996242	3.57	.0006814	.9998146
3.18	.0025412	.9992636	3.38	.0013187	.9996376	3.58	.0006575	.9998282
3.19	.0024615	.9992886	3.39	.0012748	.9996505	3.59	.0006343	.9998347
3.20	.0023841	.9993129	3.40	.0012322	.9996631	3.60	.0006119	.9998409

সারণি ২ : প্রামাণ্য নর্ম্যাল চলকের নিবেশনে : Z_α -এর মানসমূহ

α	.05	.025	.01	.005
Z_α	1.645	1.960	2.326	2.576

সারণি ৩ : χ^2-এর নিবেশনে : $\chi^2_{\alpha,\upsilon}$-এর মানসমূহ

v \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	0.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.828
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750

α / v	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.833	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.688	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.706	22.164	24.433	26.509	55.759	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.535	37.485	40.482	43.188	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	90531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	124.342	129.561	135.807	140.169

v, এর বৃহত্তর মানের জন্য $\sqrt{2x^2} - \sqrt{2v-1}$ কে প্রমাণ নর্ম্যাল চলক হিসাবে ধরা যেতে পারে।

সারণি ৪ : t-নিবেশনে : $t_{\alpha,\upsilon}$-এর মানসমূহ

$\upsilon \backslash \alpha$	0.05	0.025	0.01	0.005
1	6.314	12.706	31.821	63.657
2	2.920	4.303	6.965	9.925
3	2.353	3182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.658	1.980	2.358	2.617
$\propto$	1.645	1.960	2.326	2.576

সারণি ৫ : F নিবেশনে : $F_{.05}$; ν_1, ν_2 এর মানসমূহ

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.2	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84

υ_2 \ υ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

সারণি ৫ : F নিবেশনে : $F_{.01}$; v_1, v_2 এর মানসমূহ

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∝
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49

$\upsilon_2 \backslash \upsilon_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
30	7.56	5.34	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

v_1 এবং v_2 এর মানের জন্য $1/v_1$ ও $1/v_2$ -কে অনপেক্ষ চলক ধরে অন্তঃপ্রক্ষেপণ করা যেতে পারে।

সারণি ৬ : সমসম্ভব সংখ্যাসারি

4652	3819	8431	2150	2352	2472	0043	3488
9031	7617	1220	4129	7148	1943	4980	1749
2030	2327	7353	6007	9410	9179	2722	8445
0641	1489	0828	0385	8488	0422	7209	4950
8479	6062	5593	6322	9439	4996	1322	4918
9917	3490	5533	2577	4348	0971	2580	1943
6376	9899	9259	5117	1336	0146	0680	4052
7287	0983	3236	3252	0277	8001	6058	4501
0592	4912	3457	8773	5146	2519	3931	6794
6499	9118	3711	8838	0691	1425	7768	9544
0769	1109	7909	4528	8772	1876	2113	4781
8678	4873	2061	1853	5054	5026	2967	6560
0178	7794	6488	7364	4094	1649	2284	7753
3392	0963	6364	5762	0322	2592	3452	9002
0264	6009	1311	5873	5926	8597	9051	8995
4089	7732	8163	2798	1984	1292	0041	2500
9376	7365	7987	1937	2251	3411	6737	0367
3039	3780	2137	7641	4030	1604	2517	9211
8971	8653	1855	5285	5631	2649	6696	5475
0373	4153	5199	5765	2067	6627	3100	5716
9092	4773	0002	7000	7800	2292	2933	6125
2464	1038	3163	3569	7155	2029	2538	7080
3027	6215	3125	5856	9543	3660	0255	5544
5754	9247	1164	3283	1865	5274	5471	1346
4358	3716	6949	8502	1573	5763	5046	7135
7178	8324	8379	7365	4577	4864	0629	5100
5035	5939	3665	2160	6700	7249	1738	2721
3318	0220	3611	9887	4608	8664	2185	7290
9058	1735	7434	6822	6622	8286	8901	5534

7886	5182	7595	0305	4903	3306	8088	3899
3354	8454	7386	1333	5345	6565	3159	3991
3415	7671	0846	7100	1790	9449	6285	2525
3918	5872	7898	6125	2268	1898	0755	6034
6138	9045	6950	8843	6533	0917	6673	5721
3825	1704	2835	4677	4637	7329	3156	3291
1349	0417	9311	9787	1284	0769	8422	1077
4234	0248	7760	6504	2754	4044	0842	9080
6880	3201	7044	3657	5263	0374	7563	6599
0714	5008	5976	1134	5342	1608	5179	0967
3448	6421	3304	0583	1260	0662	7257	0766
5711	7343	7539	3684	9397	5335	4031	1486
2588	3301	0553	2427	3598	2580	7017	9176
8581	4243	7404	5264	5411	3431	3092	8573
8475	6322	3949	9675	6533	1133	8776	2216
0272	5624	8549	5552	7469	2799	2822	9620
7383	7795	7939	2652	4456	6993	2950	8573
5126	2089	7729	0945	3901	4445	7117	8186
2064	3760	0939	7319	5939	3432	2030	4752
9315	8185	7805	6294	7072	6491	4012	1016
6814	8752	3462	6001	3302	3895	7371	3432
4433	0247	9747	0412	3893	2503	2972	4154
9193	7314	1501	4702	7030	9601	0630	3727
4246	0693	6041	0931	2952	4968	8239	7729
6974	1051	8966	5157	2154	9558	7647	3043
5673	1602	8741	0513	8713	6108	7329	7698
7370	7319	4104	6025	4209	5042	4501	7824
6934	0165	3319	6222	4129	6524	4322	9422
1592	6953	7868	5874	0805	1138	9428	0189
4683	7249	1998	0956	8325	4001	2261	8844

4206	3295	1732	6780	8409	6957	5292	5041
5885	3316	1187	1217	3912	1107	7220	0035
2584	4222	9438	9652	0338	9712	8715	9587
1275	5976	4273	4895	5751	3112	5082	6050
6801	1709	0038	1231	5222	2473	8909	9970
6853	9282	1196	0347	3135	5902	2384	7929
3210	4345	4448	0229	0371	8269	4448	3348
1684	5742	1897	2503	1656	5702	4613	4108
2391	2897	3406	4844	8756	8011	0246	3663
2543	3913	1429	6379	3369	9040	5983	0436
6793	5986	8153	0769	3347	4014	7007	9018
8118	4646	9668	3408	8878	3534	5549	6929
4970	2717	9943	1136	9504	0519	5240	0991
5596	1109	8238	9173	6244	7230	0991	1463
9022	5050	5383	9582	1326	2516	5589	4051
4816	1007	1067	2866	7916	2674	5578	1675
8897	4869	3221	3266	3567	3365	3675	2195
4232	7491	8194	5072	6555	0799	1940	1232
6933	5786	6675	7853	8325	9408	3252	6799
0502	3633	7793	1529	4067	5459	8641	3247
6440	9459	8896	1441	7718	4849	3192	5958
1248	0405	4572	6861	3737	9558	1025	8707
3110	1168	6046	5837	6243	6745	2362	7710
8822	3604	7844	2085	7923	7979	0648	9003
8680	1201	2536	0308	8733	9722	4556	4684
5327	1250	9502	0340	9894	0438	2677	9200
3798	0805	8037	7474	0516	8715	8398	5522
2688	7601	3408	6525	2701	4547	9156	1623
8552	8348	7934	1530	3523	6882	4334	7237
8713	5638	7620	3148	4508	3123	4023	4560
2104	4716	7582	4576	8105	7527	9082	2426

6503	8499	3100	2209	3406	6314	6910	8051
9985	0711	9557	8428	4332	9685	6492	7422
3822	3407	5603	5431	0083	7074	6929	7054
2193	9184	4815	0566	1241	8433	2282	0916
5392	1390	7100	4578	5107	7946	4502	2765
4635	6166	3085	4297	8619	0912	6917	5364
0495	3715	6053	1723	0114	8257	4650	9901
3296	3967	3040	0852	2939	4051	6927	7710
1348	5573	7270	6840	7450	5933	6472	3750
3132	2603	5574	1528	8104	5520	7279	7940

NOTES

NOTES