স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১২ ও জুন, ২০১৩

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

অষ্টম পত্র (8th Paper : **Mathematical Analysis-II**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা | **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ – ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) একটি অপেক্ষক $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, যেটি [a, b] অন্তরে সন্তত। প্রমাণ করুন যে [a, b] অন্তরে f রিমান সমাকলনযোগ্য। ৫

(খ) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ অপেক্ষকটি [a, b] অন্তরে সমাকলনযোগ্য এবং $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\ \forall x\in[a,b]$ হলে প্রমাণ করুন যে (a,b) মুক্ত অন্তরে F অপেক্ষকটি সন্তত হবে। ৫

২। (ক) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ এবং $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ অপেক্ষকদুটি উভয়েই [a, b] অন্তরে সমাকলনযোগ্য হলে প্রমাণ করুন যে $f+g$ অপেক্ষকটি [a, b] অন্তরে সমাকলনযোগ্য। আরও প্রমাণ করুন যে, $\int_a^b (f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$. ৫

(খ) সমাকলনবিদ্যার প্রথম মধ্যম মান উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখান যে, $\frac{1}{4}\le\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\le\frac{1}{\sqrt{15}}$. ৫

৩। (ক) $1-x^2+x^4-x^6+\ldots$ ঘাত শ্রেণীটির অভিসরণ অন্তরালে যোগফল $(1+x^2)^{-1}$ ধরে নিয়ে দেখান যে, $\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ যখন $|x|\le 1$ এবং এর থেকে দেখান যে, $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ ৫ + ১

(খ) দেখান যে, $\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = \beta(m,n), \begin{matrix} m>0 \\ n>0 \end{matrix}$

৪

৪। (ক) $f(x)=x\sin x$ অপেক্ষকটির $[-\pi,\pi]$ অন্তরালে Fourier শ্রেণী নির্ণয় করুন। আরও দেখান যে, $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}-\ldots$ ৫

(খ) মান নির্ণয় করুন $\iiint_E (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$

যেখানে E হল $x=0$, $y=0$, $z=0$ স্থানাঙ্ক তলসমূহ এবং $x+y+z=1$ সমতলটি দ্বারা বেষ্টিত অঞ্চল। ৫

বিভাগ – খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। $f:[0,1]\to \mathbb{R}$ অপেক্ষকটি নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিত :

$f(x)=x$, যখন x মূলদ সংখ্যা

$=0$, যখন x অমূলদ সংখ্যা

$\int_{\underline{0}}^{1} f(x)\,dx$ এবং $\int_0^{\overline{1}} f(x)\,dx$ নির্ণয় করুন।

এর থেকে $[0,1]$ অন্তরালে f অপেক্ষকটির সমাকলনযোগ্যতা নির্ণয় করুন। ৫ + ১

৬। $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx$ সমাকলের মান নির্ণয় করুন।

৭। $1+2.4x+3.4^2x^2+4.4^3x^3+\ldots+n.4^{n-1}x^{n-1}+\ldots$

ঘাত-শ্রেণীটির অভিসরণের অন্তরাল নির্ণয় করুন। ঐ অন্তরালে ঘাত-শ্রেণীটির যোগফল $f(x)$ হলে $\int_0^{\frac{1}{8}} f(x)\,dx$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩ + ৩

৮। $[a, b]$ অন্তরে f একটি সন্তত অপেক্ষক। ঐ অন্তরে g একটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক এবং $x\in[a,b]$ হলে $g(x)$-এর মান সর্বদাই সমচিহ্নবিশিষ্ট। প্রমাণ করুন যে, $[a, b]$ অন্তরে একটি বিন্দু c পাওয়া যাবে যাতে $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ হবে।

৯। দেখান যে $\int_0^1 yx^{y-1}dx$ সমাকলটি $0\le y\le 1$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী নয় যদিও এটি প্রদত্ত অন্তরালের প্রতিটি বিন্দুতে অভিসারী।

১০। $f(x)=e^x$, $0 \le x \le 2\pi$ অপেক্ষকটিকে Fourier শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন। এটি প্রয়োগ করে $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করুন।

বিভাগ – গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। $0 \le x \le \pi$ অন্তরে $f(x)=x$ অপেক্ষকটির Fourier সাইন শ্রেণী নির্ণয় করুন।

১২। $0 < a < 2$ হলে দেখান যে $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^x}\,dt$ সমাকলটি $0 \le x \le 2-a$ অন্তরে সমভাবে অভিসারী।

১৩। দেখান যে, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \log(3+2\sqrt{2})$.

১৪। E ক্ষেত্রটি xy-তলে $y=x^2$ এবং $y^2=x$ অধিবৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ হলে দেখান যে, $\iint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{6}{35}$.

১৫। $x^2+y^2+z^2 \le 4$, $z=0$ অর্ধগোলকটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় করুন।

১৬। $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ ত্রিকোণমিতিক শ্রেণীটি Fourier শ্রেণী হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

১৭। কোন বদ্ধ অন্তরে $|f|$ সমাকলনযোগ্য হলে ঐ বদ্ধ অন্তরে f সমাকলনযোগ্য হবে কি ? আপনার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দিন।

১৮। মান নির্ণয় করুন : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^6\theta\,d\theta$.

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) A function $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ is continuous on [*a, b*]. Show that *f* is Riemann integrable on [*a, b*]. 5

b) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ is Riemann integrable on [*a, b*] and $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\ \forall x\in[a,b]$. Prove that *F* is continuous on the open interval (*a, b*). 5

2. a) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ and $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ are both integrable functions on [*a, b*]. Prove that *f* + *g* is integrable on [*a, b*]. Also prove that $\int_a^b (f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$. 5

b) Using first mean value theorem of Integral Calculus, prove that $\frac{1}{4}\le\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\le\frac{1}{\sqrt{15}}$. 5

3. a) Assuming that the sum of the power series $1-x^2+x^4-x^6+\ldots$ is $(1+x^2)^{-1}$ in its interval of convergence, show that $\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$, when $|x|\le 1$. From this, show that $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ 5 + 1

b) Show that $\int_0^1\frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx=\beta(m,n),\ \begin{matrix}m>0\\ n>0\end{matrix}$ 4

4. a) Find the Fourier series of the function $f(x)=x\sin x$ in $[-\pi,\pi]$. Also show that $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}-\ldots$ 5

b) Evaluate $\iiint_E (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, where *E* is the region enclosed by the planes *x* = 0, *y* = 0, *z* = 0 and *x* + *y* + *z* = 1. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ is defined as follows :

$f(x)=x$ if x is rational

$=0$ if x is irrational.

Evaluate $\int_{\underline{0}}^{1} f(x)\,dx$ and $\int_{0}^{\overline{1}} f(x)\,dx$. Hence examine the integrability of f on [0, 1]. 5 + 1

6. Evaluate the integral $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\;dy\,dx$.

7. Find the interval of convergence of the power series $1+2.4x+3.4^2x^2+4.4^3x^3+\ldots+n.4^{n-1}x^{n-1}+\ldots$. If $f(x)$ be the sum function of the power series in that interval, find the value of $\int_0^{\frac{1}{8}} f(x)\,dx$. 3 + 3

8. f is a continuous function on [a, b]. If g be an integrable function on that interval and if $g(x)$ does not change its sign $x\in[a,b]$, prove that there exists c in [a, b] such that $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$.

9. Show that the integral $\int_0^1 yx^{y-1}dx$ is not uniformly convergent on the interval $0\le y\le 1$ although it is convergent at every point in the given interval.

10. Expand $f(x)=e^x$, $0\le x\le 2\pi$ in Fourier series. Using it, find the sum of the series $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}$.

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Find the Fourier sine series of the function $f(x)=x$ in $0\le x\le\pi$.

12. If 0 < a < 2, show that the integral $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^x}dt$ is uniformly convergent in $0\le x\le 2-a$.

13. Show that $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=\log(3+2\sqrt{2})$.

14. If E be the region in xy-plane enclosed by the parabolas $y=x^2$ and $y^2=x$ then show that $\iint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{6}{35}$.

15. Find the centre of gravity of the hemisphere $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z = 0$.

16. Examine if the trigonometric series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ is a Fourier series in $[-\pi, \pi]$.

17. If $|f|$ be integrable on a closed interval, then does it imply that f is also integrable there ? Justify your answer.

18. Evaluate : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^6\theta \, d\theta$.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

B.Sc.-2101-G