স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

তৃতীয় পত্র (3rd Paper : **Classical Algebra & Abstract Algebra**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) যদি $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n সংখ্যক ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $p_1, p_2, \ldots, p_n$, n সংখ্যক ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হয়, প্রমাণ করুন যে,

$$\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \geq \left(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}}.$$

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ হলে উপরোক্ত অসমতাটি কি আকারে হবে ? ৬

(খ) প্রমাণ করুন $\sin[\log i^i] = -1$. ৪

২। (ক) দেকার্তের নিয়ম প্রয়োগ করে $x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$ -এর বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করুন। ৫

(খ) যদি α, β, γ, $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণটির বীজ হয় তবে প্রমাণ করুন $\sum \alpha^5 = 5qr$. ৫

৩। (ক) $24x^3 - 14x^2 - 63x + 45 = 0$ সমীকরণের দুটি বীজের ভাগফল 2 হলে বীজগুলি নির্ণয় করুন। ৫

(খ) প্রমাণ করুন, এককের n-তম বীজগুলি জটিল সংখ্যার প্রচলিত গুণনের সাপেক্ষে একটি দল গঠন করে। ৫

৪। (ক) প্রমাণ করুন একটি চক্রীয় দলের যে-কোনো অধদল একটি চক্রীয় দল। ৫

(খ) $(M, \cdot)$ ও $(N, \cdot)$ যদি $(G, \cdot)$ দলটির স্বাভাবিক অধদল এবং $M \cap N = \{e\}$ (e , G -এর একক উপাদান) হয়, তবে প্রমাণ করুন $mn = nm$, $\forall m \in M$ এবং $\forall n \in N$. ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। দুটি পূর্ণসংখ্যা $a, b \, (b > 0)$ প্রদত্ত হলে প্রমাণ করুন এমন দুটি পূর্ণসংখ্যা q ও r খুঁজে পাওয়া যাবে যে ক্ষেত্রে $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ হবে। প্রমাণ করুন q ও r অনন্য (unique) হবে। ৬

৬। কার্ডানের পদ্ধতিতে সমাধান করুন :

$x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$ ৬

৭। ফেরারির পদ্ধতিতে $x^4 - 18x^2 + 32x - 15 = 0$ সমীকরণটি সমাধান করুন। ৬

৮। Lagrange-এর উপপাদ্যটি বিবৃত ও প্রমাণ করুন। ২ + ৪

৯। কোনো একটি অঙ্গনে, শূন্য বিভাজকের সংজ্ঞা দিন। এমন একটি অঙ্গনের উদাহরণ দিন যেখানে শূন্য বিভাজকের অস্তিত্ব আছে। $(Q,+,\cdot)$ অঙ্গনটিতে শূন্য বিভাজক আছে কি ? যুক্তি সহকারে বোঝান। (Q = মূলদ সংখ্যার সেট) ৬

১০। প্রমাণ করুন $(z_7,+_7,\cdot_7)$ একটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র। কিন্তু $(z_8,+_8,\cdot_8)$ একটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র নয়। z_7-এর বৈশিষ্ট্যাঙ্ক নির্ণয় করুন। z_7-কি একটি প্রাঙ্গন ? যুক্তিসহকারে বোঝান। ৩ + ১ + ১ + ১

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। $S = \{a, b, c\}$ সেটের উপর একটি সম্পর্ক ρ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত :

$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$.

ρ সম্পর্কটি কি তূল্যাঙ্ক সম্পর্ক ? ৩

১২। $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ হলে, f^{-1} নির্ণয় করুন। f^{-1} কি যুগ্ম বিন্যাস ? ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

১৩। $f : Z \to Z$, $f(z) = 4z^2 + 5$ হলে, f চিত্রণটি কি সমরূপ চিত্রণ হবে ? (Z = পূর্ণসংখ্যার সেট) ৩

১৪। কোন একটি দল $(G,\cdot)$ তে, $a = a^{-1} (\forall a \in G)$ হলে দেখান যে G একটি বিনিময়যোগ্য দল। ৩

১৫। প্রমাণ করুন, সকল $n \in N$-এর জন্য $3^{2n} - 8n - 1$, 64 দ্বারা বিভাজ্য। ৩

১৬। n একটি অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হলে দেখান যে $x^{2n} - 1 = 0$ এবং $x^n - 1 = 0$ সমীকরণ দুটির বিশেষ বীজের সংখ্যা সমান। ৩

১৭। প্রমাণ করুন ম্যাট্রিক্স যোগ ও গুণের সাপেক্ষে $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}; x, y \in R \right\}$ $M_2(R)$-এর একটি অধঅঙ্গন। (R = বাস্তব সংখ্যার সেট) ৩

১৮। প্রমাণ করুন একটি প্রাঙ্গণ F-এ, $a^2 = b^2$ হলে সর্বদা $a = b$ অথবা $a = -b$ হবে। $(a, b \in F)$. ৩

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) If $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be n positive real numbers and $p_1, p_2, \ldots, p_n$ be n positive rational numbers, then prove that

$$\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \geq \left(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}}.$$

What will be the form of inequality if $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ occurs ? 6

b) Prove that $\sin[\log i^i] = -1$. 4

2. a) Applying Descartes' rule of signs, find the nature of the roots of the equation $x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$. 5

b) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, then prove that $\sum \alpha^5 = 5qr$. 5

3. a) If quotient of two roots of the equation $24x^3 - 14x^2 - 63x + 45 = 0$ be 2, find the roots. 5

b) Prove that the n-th roots of unity form a group with respect to usual complex multiplication. 5

4. a) Prove that any subgroup of a cyclic group is cyclic. 5

b) If $(M, \bullet)$ and $(N, \bullet)$ be two normal subgroups of a group $(G, \bullet)$, and $M \cap N = \{e\}$ (e is the identity of the group G), then prove that $mn = nm$, $\forall m \in M$ and $\forall n \in N$. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Prove that corresponding to any two integers a, b $(b > 0)$, we can find two integers q and r with $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Also prove that q and r are unique. 6

6. Solve by Cardan's method :

$$x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$$ 6

7. Solve the equation $x^4 - 18x^2 + 32x - 15 = 0$ by Ferrari's method. 6

8. State and prove Lagrange's theorem. 2 + 4

9. Define divisors of zero in a ring. Give an example of a ring which contains divisors of zero. Does $(Q, +, \bullet)$ contain divisor of zero ? (Q = set of all rational numbers). Explain with justification. 6

10. Prove that $(z_7, +_7, \cdot_7)$ is an integral domain; but $(z_8, +_8, \cdot_8)$ is not an integral domain. Find the characteristic of z_7. Is z_7 a field ? Explain with justification. 3 + 1 + 1 + 1

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. A relation ρ is defined on $S = \{ a, b, c \}$ in the following way : $\rho = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$. Is ρ an equivalence relation ? 3

12. Determine f^{-1}, if $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Is f^{-1} an even permutation ? 3

13. If $f : Z \to Z$, $f(z) = 4z^2 + 5$ determine whether f is bijective mapping. (Z = set of all integers) 3

14. If in a group $(G, \cdot)$, $a = a^{-1}$, $\forall a \in G$, then prove that the group is commutative. 3

15. Prove that $3^{2n} - 8n - 1$ is always divisible by 64, $\forall n \in N$. 3

16. If n be an odd integer, then prove that the number of special roots of $x^{2n} - 1 = 0$ and $x^n - 1 = 0$ is the same. 3

17. Prove that the set $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} ; x, y \in R \right\}$ is a subring of the ring $M_2(R)$ with respect to usual matrix addition and multiplication. (R = set of all real numbers) 3

18. Prove that in a field F, $a^2 = b^2$ implies either $a = b$ or $a = -b$ $(a, b \in F)$. 3