স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

দ্বিতীয় পত্র (2nd Paper : **Integral Calculus and Differential Equations**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা | পূর্ণমান ঃ ৫০

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞার সাহায্যে মান নির্ণয় করুন :

$$\int_0^1 2^x \, dx .$$ ৩

(খ) সমাকল করুন : $\int \frac{dx}{\sin x + \sec x}$. ৪

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(গ) মান নির্ণয় করুন :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1^2}{n^3+1^3} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \frac{3^2}{n^3+3^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3+n^3} \right].$$ ৩

২। (ক) মান নির্ণয় করুন :

i) $\int \frac{x - \cos^2 x}{x-1} \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

ii) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2}, \; 0 < a < 1.$ ৩ + ৪

(খ) অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন : $\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx$. ৩

৩। (ক) গামা অপেক্ষকের সংজ্ঞা দিন। দেখান যে,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$ ১ + ৪

(খ) যদি $I_n = \int (x^2 + a^2)^n \, dx, \quad (n > 1, a \neq 0)$ হয়

তবে দেখান যে $I_n = \frac{x(x^2+a^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$. ৫

৪। (ক) সমাধান করুন : $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$. ৫

(খ) মান নির্ণয় করুন : $\iint_R \sin(x+y) dx \, dy$ যেখানে

$R : \left(0, \frac{\pi}{2}; 0, \frac{\pi}{2}\right)$. ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। $I_{mn} = \int \cos^m x \sin nx \, dx$ (m = একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)-এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় করুন ও অতঃপর $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 3x \, dx$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৬

৬। $r(1+\cos\theta) = 2$ এই অধিবৃত্তের $\theta = 0$ থেকে $\theta = \frac{\pi}{2}$ -এর মধ্যবর্তী চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। ৬

৭। দ্বি-সমাকলের সাহায্যে দেখান যে xy-তল ও অধিবৃত্তক (paraboloid) $z = 2 - x^2 - y^2$ -এর মধ্যবর্তী দেশের আয়তন 2π. ৬

৮। $x^2 + y^2 = 2ax$ বৃত্ত ও $y^2 = ax$ অধিবৃত্তের মধ্যবর্তী ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। ৬

৯। $x = u$, $y^2 = v$ চল পরিবর্তন দ্বারা $yp^2 - 2xp + y = 0$, $\left(p = \frac{dy}{dx}\right)$ সমীকরণটিকে Clairaut-এর সমীকরণের আকারে প্রকাশ করুন। তারপর সমীকরণটির বিশিষ্ট সমাধান (singular solution) ও সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন। ৬

১০। প্রচলের ভেদের পদ্ধতিতে (method of variation of parameters) সমাধান করুন : ৬

$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^2 e^x$; দেওয়া আছে যে, সমীকরণটির একটি পূরক-অপেক্ষক $y_c = ax + \frac{b}{x}$.

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। সমাধান করুন :

$(D^2 - 5D + 6)y = 50\sin 4x$, $\left(D = \frac{d}{dx}\right)$. ৩

১২। সমাধান করুন :

$p^3 - p(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y) = 0$, $\left(p = \frac{dy}{dx}\right)$. ৩

১৩। সমাধান করুন : $x^2 \frac{d^4y}{dx^4} + 1 = 0$. ৩

১৪। $\int_C (x^2 + y^2)\, dy$ -এর মান নির্ণয় করুন যেখানে $C : y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের (0, 0) ও (a, $2a$)-এর মধ্যবর্তী চাপ। ৩

১৫। দেখান যে, $\int_0^\infty 5^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\log 5}}$. ৩

১৬। সমাকল করুন : $\int \frac{dx}{2e^{3x} + 3e^x + 1}$. ৩

১৭। $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

১৮। মান নির্ণয় করুন : $\int_1^2 \int_0^z \int_0^{x\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 + y^2} dx\, dy\, dz$. ৩

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Using the definition of definite integral evaluate $\int_0^1 2^x \, dx$. 3

   b) Integrate : $\int \frac{dx}{\sin x + \sec x}$. 4

   c) Evaluate

   $$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1^2}{n^3 + 1^3} + \frac{2^2}{n^3 + 2^3} + \frac{3^2}{n^3 + 3^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3 + n^3} \right].$$ 3

2. a) Evaluate :

   i) $\int \frac{x - \cos^2 x}{x - 1} \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

   ii) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2}$, $0 < a < 1$. 3 + 4

   b) Test the convergence of $\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx$. 3

3. a) Define Gamma function. Show that

   $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$ 1 + 4

   b) If $I_n = \int (x^2 + a^2)^n \, dx$, $(n > 1, a \neq 0)$, then show that $I_n = \frac{x(x^2 + a^2)^n}{2n + 1} + \frac{2na^2}{2n + 1} I_{n-1}$. 5

4. a) Solve : $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$. 5

   b) Evaluate : $\iint_R \sin(x + y) dx \, dy$,

   where $R : \left(0, \frac{\pi}{2}; 0, \frac{\pi}{2}\right)$. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Find the reduction formula of $I_{mn} = \int \cos^m x \sin nx \, dx$ (m is a positive integer) and hence find the value of $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 3x \, dx$. 6

6. Find the length of the arc of the parabola $r(1 + \cos\theta) = 2$ between $\theta = 0$ and $\theta = \frac{\pi}{2}$. 6

7. Using double integral method, show that the volume of the region enclosed by xy-plane and the paraboloid $z = 2 - x^2 - y^2$ is 2π. 6

8. Find the area enclosed by the circle $x^2 + y^2 = 2ax$ and the parabola $y^2 = ax$. 6

9. Using the substitution $x = u$ and $y^2 = v$, reduce the equation $yp^2 - 2xp + y = 0$, $\left(p = \frac{dy}{dx}\right)$ to a Clairaut's equation and hence find the singular solution and general solution of the equation. 6

10. Solve by the method of variation of parameters : $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^2e^x$; given that $y_c = ax + \frac{b}{x}$ is a complementary function of the given equation. 6

Group – C

Answer any *four* questions. $3 \times 4 = 12$

11. Solve : $(D^2 - 5D + 6)y = 50\sin 4x$, $\left(D = \frac{d}{dx}\right)$. 3

12. Solve : $p^3 - p(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y) = 0$, $\left(p = \frac{dy}{dx}\right)$. 3

13. Solve : $x^2\frac{d^4y}{dx^4} + 1 = 0$. 3

14. Evaluate $\int_C (x^2 + y^2)\,dy$, where C : length of the arc of the parabola $y^2 = 4ax$, between (0, 0) and (a, $2a$). 3

15. Show that $\int_0^\infty 5^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\log 5}}$. 3

16. Integrate : $\int \frac{dx}{2e^{3x} + 3e^x + 1}$. 3

17. Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx$. 3

18. Evaluate : $\int_1^2 \int_0^z \int_0^{x\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz$. 3