স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

চতুর্থ পত্র (4th Paper : **Vector Algebra & Vector Calculus**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা — **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours — Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) *ABCD* একটি চতুর্ভুজ এবং *P, Q, R, S* যথাক্রমে *AB, BC, CD, DA* বাহুর মধ্যবিন্দু হলে প্রমাণ করুন *PQRS* একটি সামান্তরিক। ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) প্রমাণ করুন যে তিনটি বিন্দু *A, B, C* যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$, $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$ এবং $3\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$ একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ৫

২। (ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন : ৫

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

(খ) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$ -এর বিস্তার থেকে

$$[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}]\vec{a}+[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{d}]\vec{b}+[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]\vec{c}+[\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}]\vec{d}=0$$

সম্পর্কটি নির্ণয় করুন। ৫

৩। (ক) স্টোক্সের উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে

$$\int_C (y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z)=-2\sqrt{2}\pi a^2 .$$ ৫

(খ) প্রমাণ করুন যে একটি ভেক্টর ফাংশন $\vec{r}=\vec{f}(t)$-এর দিক নির্দিষ্ট বা ধ্রুবক থাকার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল $\vec{f}\times\dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}=\vec{0}$. ৫

৪। (ক) প্রমাণ করুন যে

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\vec{f})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{f})-\nabla^2\vec{f} .$$ ৫

(খ) প্রমাণ করুন যে স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন $\phi(x,y,z)$-এর দিশা অবকলজ-এর চরম মান $\phi(x,y,z)=C$ লেভেল তলের অভিলম্বের দিকে হয় এবং তার মান $\vec{\nabla}\phi$-এর মানের সমান হয়। ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। $\vec{\rho}=\vec{\alpha}+t\vec{\beta}$ এবং $\vec{\rho}=\vec{\gamma}+s\vec{\delta}$ সরলরেখা দুটির মধ্যে হ্রস্বতম দূরত্ব k সম্বলিত রাশিতে প্রকাশ করুন। এখানে t ও s দুটি স্কেলার এবং $\vec{\alpha}=(1,2,3)$, $\vec{\beta}=(2,3,4)$, $\vec{\gamma}=(k,3,4)$ এবং $\vec{\delta}=(3,4,5)$। k-এর কোন্ মানের জন্য সরলরেখা দুটি সমতলীয় হবে ? ৬

৬। $t\vec{r}+\vec{r}\times\vec{a}=\vec{b}$ ভেক্টর সমীকরণটি $\vec{r}$-এর জন্য সমাধান করুন। এখানে t একটি স্কেলার যার মান শূন্য নয় এবং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি প্রদত্ত ভেক্টর। ৬

৭। $(\vec{b}\times\vec{c}).(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{c}\times\vec{a}).(\vec{b}\times\vec{d})+(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d})=0$ সূত্রটি প্রমাণ করুন এবং এর সাহায্যে দেখান যে, $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

যেখানে A ও B দুটি সূক্ষ্মকোণ। ৬

৮। $\frac{d}{dt}(\vec{a}.\vec{b})=\frac{d\vec{a}}{dt}.\vec{b}+\vec{a}.\frac{d\vec{b}}{dt}$ এবং

$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$ সূত্র দুটি ধরে নিয়ে

যেখানে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ উভয়ে t-এর অপেক্ষক, দেখান যে,

$$\frac{d}{dt}[\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{r}]=\left[\frac{d\vec{p}}{dt}\,\vec{q}\,\vec{r}\right]+\left[\vec{p}\,\frac{d\vec{q}}{dt}\,\vec{r}\right]+\left[\vec{p}\,\vec{q}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right]$$

যেখানে $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ ভেক্টরগুলি t-এর অপেক্ষক এবং $[\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{r}]$ ইত্যাদি প্রচলিত অর্থ বহন করে।

অতএব $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$-এর মান নির্ণয় করুন, যেখানে $\vec{r}$ ভেক্টর t-এর অপেক্ষক। ৬

৯। দেখান যে $\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{\nabla}\frac{1}{r})=\frac{3(\vec{A}.\vec{r})}{r^5}\vec{r}-\frac{\vec{A}}{r^3}$

যেখানে $r^2=x^2+y^2+z^2$, $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ এবং $\vec{A}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর এবং $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ হল একক লম্ব ভেক্টরসমূহ। ৬

১০। $x^2+y^2=4$, $z=0$ এবং $z=3$ দ্বারা বেষ্টিত ঘনক-এর উপর নেওয়া $\vec{A}=4x\hat{i}-2y^2\hat{j}+z^2\hat{k}$-এর ক্ষেত্রে ডাইভারজেন্স উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করুন। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। প্রমাণ করুন A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখীয় যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $-2\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}$, $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$, $7\vec{a}-\vec{c}$ । ৩

১২। $ABCD$ চতুস্তলকের ঘনফল নির্ণয় করুন যার শীর্ষবিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে (0, 1, 2), (3, 0, 1), (4, 3, 6) এবং (2, 3, 2)। ৩

১৩। এমন একটি ভেক্টর $\vec{\delta}$ নির্ণয় করুন যেটি $\vec{\alpha} = 4\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{\beta} = \hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ প্রত্যেকের উপর লম্ব এবং $\vec{\delta}.\vec{\gamma} = 21$ যেখানে $\vec{\gamma} = 3\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k}$ হবে। ৩

১৪। 15 এককের একটি বল একটি কণাতে প্রয়োগের ফলে কণাটি (1, 1, 1) বিন্দু থেকে (2, 1, 3) বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়। যদি বলের ক্রিয়া রেখা $\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টর হয় তবে বলের দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাপ নির্ণয় করুন। ৩

১৫। যদি $\vec{F} = (x^2+y)\hat{i}+(x^2+y^2)\hat{j}$ এবং $y = x^2+1$ বক্ররেখা বরাবর (1, 2) থেকে (2, 5) বিন্দু পর্যন্ত রেখাংশ C হয় তাহলে $\int_C \vec{F}.\mathrm{d}\vec{r}$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

১৬। যদি $\vec{f}$ এবং $\vec{g}$ ভেক্টর ফাংশন দুটি অনাবর্তনশীল হয় তবে প্রমাণ করুন যে $\vec{f}\times\vec{g}$ ভেক্টর ফাংশনটি সোলেনয়ডাল। ৩

১৭। সমতলে $y = x$ এবং $y = x^2$ দ্বারা বদ্ধ বক্রটিকে C ধরে এবং C কর্তৃক সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটিকে S ধরে গ্রীনের উপপাদ্যের সাহায্যে $\oint_C [(xy+y^2)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y]$ সমাকলটির মান নির্ণয় করুন। ৩

১৮। একটি বৃত্তের যে কোনো বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন। ৩

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) If the midpoints *P, Q, R, S* of the consecutive sides *AB, BC, CD, DA* of any quadrilateral *ABCD* are connected by straight lines, prove that the resulting quadrilateral *PQRS* is a parallelogram. 5

b) Prove that the three points *A, B, C*, whose position vectors are respectively $2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$, $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$ and $3\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$, form a right angled isosceles triangle. 5

2. a) Prove by vector method that

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ 5

b) From the expansion of $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$ establish the relation

$$[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]\vec{a}+[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{d}]\vec{b}+[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]\vec{c}+[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]\vec{d}=0.$$

5

3. a) Using Stokes theorem prove that

$\int_C (y\,dx+z\,dy+x\,dz)=-2\sqrt{2}\pi a^2$. 5

b) Prove that the necessary and sufficient condition for a vector function $\vec{r}=\vec{f}(t)$ to have constant direction is $\vec{f}\times\frac{d\vec{f}}{dt}=\vec{0}$. 5

4. a) Prove that $\text{curl}(\text{curl}\,\vec{f})=\text{grad}(\text{div}\,\vec{f})-\nabla^2\vec{f}$.

5

b) Prove that the maximum directional derivative of scalar point function $\phi(x,y,z)$ takes place in the direction of the normal to the level surface $\phi(x,y,z)=C$ and has magnitude equal to the magnitude of $\vec{\nabla}\phi$. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Find in terms of *k*, the shortest distance between the lines $\vec{\rho}=\vec{\alpha}+t\vec{\beta}$ and $\vec{\rho}=\vec{\gamma}+s\vec{\delta}$, *t, s* being scalars, where $\vec{\alpha}=(1,2,3)$, $\vec{\beta}=(2,3,4)$, $\vec{\gamma}=(k,3,4)$ and $\vec{\delta}=(3,4,5)$. For what value of *k* are the lines coplanar ? 6

6. Solve the vector equation for $\vec{r}$ if $t\vec{r} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{b}$ where t is a non-zero given scalar and $\vec{a}, \vec{b}$ are two given vectors. 6

7. Prove the formula

$$(\vec{b} \times \vec{c}).(\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \times \vec{a}).(\vec{b} \times \vec{d}) + (\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d}) = 0$$

and use it to show that

$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$ for any two acute angles A and B. 6

8. Assuming that $\frac{d}{dt}(\vec{a}.\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}.\vec{b} + \vec{a}.\frac{d\vec{b}}{dt}$ and $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$ where $\vec{a}, \vec{b}$ are functions of t, show that

$$\frac{d}{dt}[\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}] = \left[\frac{d\vec{p}}{dt}\ \vec{q}\ \vec{r}\right] + \left[\vec{p}\ \frac{d\vec{q}}{dt}\ \vec{r}\right] + \left[\vec{p}\ \vec{q}\ \frac{d\vec{r}}{dt}\right]$$

where $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ are functions of t and $[\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}]$ etc. have their usual meaning. Hence find $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\ \frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$, where $\vec{r}$ is a function of t. 6

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

9. Show that $\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{\nabla}\frac{1}{r}) = \frac{3(\vec{A}.\vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{A}}{r^3}$, where $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{A}$ is a constant vector and $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ are orthogonal unit vectors. 6

10. Verify the divergence theorem for $\vec{A} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ taken over the region bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 3$. 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Prove that the points *A, B, C,* whose position vectors are $-2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $7\vec{a} - \vec{c}$ are collinear. 3

12. Find the volume of the tetrahedron *ABCD*, the position vector of whose vertices are respectively (0, 1, 2), (3, 0, 1), (4, 3, 6) and (2, 3, 2). 3

13. Determine a vector $\vec{\delta}$ which is perpendicular to each of the vectors $\vec{\alpha} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{\beta} = \hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ and $\vec{\delta}.\vec{\gamma} = 21$ where $\vec{\gamma} = 3\hat{i} + 7\hat{j} - 4\hat{k}$. 3

14. A force of 15 unit acting on a particle displaces it from the point (1, 1, 1) to (2, 1, 3). If the force acts in the direction of the vector $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, then find the work done by the force. 3

15. If $\vec{F} = (x^2 + y)\hat{i} + (x^2 + y^2)\hat{j}$ and C is the part of the curve $y = x^2 + 1$ from the point (1, 2) to the point (2, 5), then find the value of $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$. 3

16. If the vector functions $\vec{f}$ and $\vec{g}$ are irrotational, then prove that the vector function $\vec{f} \times \vec{g}$ is solenoidal. 3

17. Use Green's theorem in the plane to evaluate the integral

$$\oint_C [(xy + y^2)dx + x^2 dy]$$

where C is the closed curve of the region bounded by $y = x$ and $y = x^2$ and the bounded region is S. 3

18. Find the radius of curvature at any point of a circle. 3