স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

প্রথম পত্র (1st Paper : **Differential Calculus and its Geometrical Applications**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা | **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।

অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $১০ \times ২ = ২০$

১। (ক) ধরুন $f : A \to B$ যেখানে $y = f(x)$, $x \in A$, $y \in B$ এবং $g : B \to C$ যেখানে $z = g(y)$, $y \in B$, $z \in C$ দুটি অপেক্ষক।

এখন যদি $\lim_{x \to a} f(x) = b$ এবং

$\lim_{y \to b} g(y) = g(b)$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$\lim_{x \to a} g\{f(x)\} = g\left\{\lim_{x \to a} f(x)\right\}$. ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

দেখান, $x = 0$ বিন্দুটি $f(x)$-এর অপসারণযোগ্য অসন্তত বিন্দু। ৫

২। (ক) রোলের উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যাটি দিন। ৫

(খ) সংজ্ঞা থেকে $f(x) = \log(\sin x)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$-এর অন্তর কলজ $f'(x)$ নির্ণয় করুন। ৫

৩। (ক) $\lim_{x \to 0} \dfrac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = 2$ হলে দেখান যে $a = 1$, $b = 2$ এবং $c = 1$. ৫

(খ) $\tan y = \dfrac{2t}{1-t^2}$ এবং $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন। ৫

৪। (ক) যদি $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ যখন $x^2 + y^2 \neq 0$ এবং $f(0, 0) = 0$ হয়, তবে দেখান যে $f_x(0,0)$ ও $f_y(0,0)$-এর অস্তিত্ব বিদ্যমান, কিন্তু (0, 0) বিন্দুতে $f(x, y)$ সন্তত নয়। ৫

(খ) যদি $y = f(x + ct) + \phi(x - ct)$ হয় তবে দেখান যে, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। $y^2 = 4a\left(x + a\sin\frac{x}{a}\right)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল সেই সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন। ৬

৬। $x = a(2\cos t + \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$ বক্ররেখাটির 't' বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৬

৭। $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ এবং $\frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} = 1$ বক্ররেখাদুটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করলে প্রমাণ করুন যে $a - b = a' - b'$. ৬

৮। $9x^2 + 4y^2 = 36x$ বক্ররেখাটির (2, 3) বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন। ৬

৯। $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$ বক্ররেখাটির অসীমপথগুলির সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৬

১০। নীচের সরলরেখা পরিবারের (a এবং b প্রাচল), পরিস্পর্শক নির্ণয় করুন :

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ যেখানে $a^2 + b^2 = c^2$, c একটি ধ্রুবক। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। অপেক্ষক $f(x) = \sqrt{8 + 2x - 3x^2}$ -এর সংজ্ঞাত অঞ্চলটি নির্ণয় করুন। ৩

১২। যদি $2.f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f(x) = 6x$ হয়, তবে $f(x+1)$ নির্ণয় করুন। ৩

১৩। $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{2x + \sqrt{3x}}}}$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

১৪। ৩

যদি $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, \text{ যখন } -8 \le x \le 0 \\ 2 + 3x, \text{ যখন } 0 < x \le 4, \end{cases}$ হয়

তবে $f'(0)$-এর অস্তিত্ব আছে কিনা পরীক্ষা করুন। ৩

১৫। $(x-2)^2 = y(y-1)^2$ বক্ররেখাটির দ্বিবিন্দু যদি থাকে তা নির্ণয় করুন। ৩

১৬। যদি $\sqrt{1-x^2}.y = \sin^{-1}x$, $|x| < 1$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে $(1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$, যেখানে $y_1 = \frac{dy}{dx}$ এবং $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$. ৩

১৭। অপেক্ষক $\log_e(1+x)$ বিস্তৃতির n পদের পরে Lagrange-এর অবশেষ নির্ণয় করুন। ৩

১৮। $3x + 4y = 5$ হলে দেখান যে xy-এর চরম মান $\frac{25}{48}$. ৩

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Suppose $f : A \to B$ where $y = f(x)$, $x \in A$, $y \in B$ and $g : B \to C$ where $z = g(y)$, $y \in B$, $z \in C$ are two functions.

If $\lim_{x \to a} f(x) = b$ and $\lim_{y \to b} g(y) = g(b)$, then prove that

$$\lim_{x \to a} g\{f(x)\} = g\left\{\lim_{x \to a} f(x)\right\}.$$ 5

b) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Show that $x = 0$ is a point of removable discontinuity of $f(x)$. 5

2. a) State Rolle's theorem and give its geometrical interpretation. 5

b) From definition, find $f'(x)$ when $f(x) = \log(\sin x)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. 5

3. a) If $\lim_{x \to 0} \dfrac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = 2$, show that $a = 1$, $b = 2$ and $c = 1$. 5

b) If $\tan y = \dfrac{2t}{1-t^2}$ and $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, find $\dfrac{dy}{dx}$. 5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

4. a) If $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ when $x^2 + y^2 \neq 0$ and $f(0, 0) = 0$, then prove that $f_x(0,0)$ and $f_y(0,0)$ exist, but $f(x, y)$ is not continuous at (0, 0). 5

b) If $y = f(x + ct) + \phi(x - ct)$, then prove that $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Find the coordinates of all the points at which the tangents to the curve $y^2 = 4a\left(x + a\sin\dfrac{x}{a}\right)$ are parallel to x-axis. 6

6. Find the equation of the normal at the point $'t'$ to the curve $x = a(2\cos t + \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$. 6

7. If the curves $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 1$ and $\dfrac{x^2}{a'} + \dfrac{y^2}{b'} = 1$ cut orthogonally, then prove that $a - b = a' - b'$. 6

8. Find the radius of curvature of the curve $9x^2 + 4y^2 = 36x$ at the point (2, 3). 6

9. Find the asymptotes of the curve $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$. 6

10. Find the envelopes of the family of straight lines $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ where the parameters a and b are connected by the relation $a^2+b^2=c^2$, c being constant. 6

Group – C

Answer any *four* questions. $3 \times 4 = 12$

11. Find the domain of definition of $f(x)=\sqrt{8+2x-3x^2}$. 3

12. If $2.f\left(\frac{1}{x}\right)-3f(x)=6x$, find $f(x+1)$. 3

13. Find $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}}$. 3

14. If $f(x)=\begin{cases}2-3x, \text{ when } -8\le x\le 0\\ 2+3x, \text{ when } 0<x\le 4,\end{cases}$

then examine whether $f'(0)$ exists. 3

15. Find the double points, if any, of the curve $(x-2)^2=y(y-1)^2$. 3

16. If $\sqrt{1-x^2}.y=\sin^{-1}x$, $|x|<1$, then prove that $(1-x^2)y_2-3xy_1-y=0$, where $y_1=\frac{dy}{dx}$ and $y_2=\frac{d^2y}{dx^2}$. 3

17. Find Lagrange's form of remainder after n terms in the expansion of the function $\log_e(1+x)$. 3

18. If $3x+4y=5$, then show that the maximum value of xy is $\frac{25}{48}$. 3