স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

অষ্টম পত্র (8th Paper : **Mathematical Analysis-II**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ অপেক্ষকটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরে ক্রমহ্রাসমান হলে প্রমাণ করুন যে, $[a, b]$ অন্তরে f রিমান সমাকলনযোগ্য হবে। ৫

(খ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2^n}$ ঘাত শ্রেণীটির সমঅভিসরণের অন্তরালটি নির্ণয় করুন। ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

২। (ক) f অপেক্ষকটি $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য এবং $a < c < b$ হলে প্রমাণ করুন যে $[a, c]$ এবং $[c, b]$ এই দুই বদ্ধ উপান্তরেও f সমাকলনযোগ্য। ৫

(খ) প্রমাণ করুন যে $\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \log \sin x \, dx$ সমাকলনটি অভিসারী। ৫

৩। (ক) 'সমাকলন চিহ্নের ভিতর অন্তরকলন' পদ্ধতি ব্যবহার করে, সঠিক যুক্তিসহ দেখান যে

$$\int_0^{\theta} \log(1 + \tan\theta \tan x)\, dx = \theta \log \sec\theta,$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right).$$ ৫

(খ) $\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ সমীকরণটি থেকে দেখান যে,

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \ldots$$

(যেখানে $|x| < 1$)। ৫

৪। (ক) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ অপেক্ষকটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞাত :

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$[-\pi,\pi]$ অন্তরালে f অপেক্ষকটির Fourier শ্রেণী নির্ণয় করুন। এর সাহায্যে দেখান যে

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$$ ৪ + ১

(খ) সমাকলের প্রথম মধ্যম মান উপপাদ্যের সাহায্যে দেখান যে f অপেক্ষকটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরে সন্তত হলে

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)=f(x),\ x\in[a,b].$$ ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। দেখান যে $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ অযথার্থ সমাকলটি অভিসারী কিন্তু নিঃশর্ত অভিসারী নয়। ৬

৬। সমাকলনের ক্রম পরিবর্তন করে প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{1/x}\frac{y^2\mathrm{d}y}{(x+y)^2\sqrt{1+y^2}}=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$ ৬

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

৭। $f(x)=\sin cx,\ x\in[0,\pi]$ অপেক্ষকটি $[0,\pi]$ অন্তরালে Fourier কোসাইন শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন যেখানে 'c' কোন পূর্ণসংখ্যা নয়। ৬

৮। দেখান যে, $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^k$ অসীম শ্রেণীটি [0, 1] অন্তরালে নিঃশর্তভাবে অভিসারী হলেও সমভাবে অভিসারী নয়। ৬

৯। $f(x)$ অপেক্ষকটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞাত :

$$f(x)=1+2.4x+3.4^2x^2+4.4^3x^3+\ldots+n.4^nx^n+\ldots$$

দেখান যে f অপেক্ষকটি $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ অন্তরালে সন্তত।

$\int_0^{1/8} f(x)\mathrm{d}x$ সমাকলটির মান নির্ণয় করুন। ৬

১০। যদি $0<n<1$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$$\Gamma(n).\Gamma(1-n)=\pi\,\mathrm{cosec}\,n\pi.$$ ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। মান নির্ণয় করুন : $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t}{x^2}$. ৩

১২। চলের পরিবর্তন করে মান নির্ণয় করুন :

$$\int_0^{\pi/2} (x^2 \sin x \cos x + x \sin^2 x)\,dx$$ ৩

১৩। মান নির্ণয় করুন :

$\iint_E \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$ যেখানে E অঞ্চলটি xy-সমতলে $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তটি দ্বারা সীমাবদ্ধ। ৩

১৪। মান নির্ণয় করুন : $\int_0^{\infty} e^{-ax^n} x^m\,dx$ যেখানে m, n এবং a ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। ৩

১৫। $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[4]{n}}$ ত্রিকোণমিতিক শ্রেণীটি $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে ফ্যুরিয়ে শ্রেণী হবে কিনা পরীক্ষা করুন। ৩

১৬। প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} < \frac{\pi}{4}$. ৩

১৭। $\frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \ldots$ শ্রেণীটির অভিসরণের পরীক্ষা করুন যেখানে α একটি বাস্তব রাশি। ৩

১৮। প্রমাণ করুন যে $\int_0^{\infty} \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}\,dx = 0$. ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. $10 \times 2 = 20$

1. a) If function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be monotonic decreasing on the closed interval $[a, b]$, then show that f is Riemann integrable on $[a, b]$. 5

   b) Find the interval of uniform convergence of the power series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2^n}$. 5

2. a) If the function f be integrable on $[a, b]$ and if $a < c < b$, then show that f is also integrable on the closed subintervals $[a, c]$ and $[c, b]$. 5

   b) Show that the integral $\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \log \sin x\,dx$ is convergent. 5

3. a) Using the method of differentiation under the sign of integration, with proper justification, show that

$$\int_0^{\theta} \log(1+\tan\theta\tan x)\,dx = \theta\log\sec\theta\,,$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right). \qquad 5$$

b) From the equation $\sin^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$,

show that

$$\sin^{-1}x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

(where $|x| < 1$) 5

4. a) The function $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ is defined as follows :

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Find the Fourier series of f on the interval $[-\pi, \pi]$. Using it, show that

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots. \qquad 4 + 1$$

b) Using first mean value theorem of integral calculus, show that if f is continuous on the closed interval $[a, b]$, then

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),\ x \in [a,b]. \qquad 5$$

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Show that the improper integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ is convergent but not absolutely convergent. 6

6. By changing the order of integration, show that

$$\int_0^1 dx \int_x^{1/x} \frac{y^2 dy}{(x+y)^2\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}-1\right). \qquad 6$$

7. Expand $f(x) = \sin cx$, $x \in [0, \pi]$ in a Fourier cosine series in interval $[0, \pi]$ where *'c'* is not an integer. 6

8. Show that the infinite series $\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)x^k$ is absolutely convergent but not uniformly convergent on interval [0, 1]. 6

9. The function $f(x)$ is defined as follows :

$$f(x) = 1 + 2.4x + 3.4^2x^2 + 4.4^3x^3 + \ldots + n.4^n x^n + \ldots$$

Show that f is continuous on $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Find the value of the integral $\int_0^{1/8} f(x)\,dx$. 6

10. If $0 < n < 1$, then show that $\Gamma(n).\Gamma(1-n) = \pi \operatorname{cosec} n\pi$. 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Evaluate : $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{\sqrt{1+t}}\,dt}{x^2}$. 3

12. Evaluate by the method of substitution :

$$\int_0^{\pi/2} (x^2 \sin x \cos x + x \sin^2 x)\,dx$$ 3

13. Evaluate $\iint_E \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$ where E is the region in xy-plane bounded by the circle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. 3

14. Evaluate $\int_0^{\infty} e^{-ax^n} x^m\,dx$ where m, n and a are positive integers. 3

15. Examine whether the trigonometric series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[4]{n}}$ is a Fourier series in $[-\pi, \pi]$. 3

16. Prove that $\frac{1}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{1 + x + x^2} < \frac{\pi}{4}$. 3

17. Test the convergence of the series

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\ldots$$

where α is a real number. 3

18. Prove that $\int_0^{\infty}\frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}dx=0$. 3

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

EMT-VIII (UT-224/15) 4

B.Sc.-215-G