স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

সপ্তম পত্র (7th Paper : **Mathematical Analysis-I**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) মনে করুন $0 < x < y$ দেওয়া আছে। $\mathbb{R}$-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা স্বতঃসিদ্ধটি ব্যবহার করে দেখান যে স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $nx > y$ হবে। ৩

(খ) মনে করুন $x > 1$ দেওয়া আছে। বিবৃতিটি সঠিক থাকলে যুক্তি দিন, ভুল থাকলে সংশোধন করুন :

$S = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ সেটটি ঊর্ধ্বসীমা বদ্ধ নয়। ৩

(গ) মনে করুন $f : [\, a, b\,] \to \mathbb{R}$ নিম্নভাবে সংজ্ঞাত আছে :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{যখন } x \text{ মূলদ} \\ 1, & \text{যখন } x \text{ অমূলদ} \end{cases}$$

f কি $[\, a, b\,]$-তে সীমিত ভেদযুক্ত অপেক্ষক হবে ? উত্তরের পক্ষে যুক্তি দিন। ৪

২। (ক) মনে করুন $S = \{\, x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0 \,\}$.

যুক্তিসহ সঠিক উত্তরটি নিরূপণ করুন :

i) S , $\mathbb{R}$-এ বদ্ধ সেট

ii) S , $\mathbb{R}$-এ মুক্ত সেট

iii) S , $\mathbb{R}$-এ বদ্ধ সেটও নয়, মুক্ত সেটও নয়

iv) S , $\mathbb{R}$-এ বদ্ধ ও মুক্ত উভয় ধরনের সেট। ৩

(খ) মনে করুন $S = \{\, x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \,\}$,

$I_n = \{\, x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \,\}$ এবং

$G = \{\, I_n : n \in \mathbb{N} \,\}$.

দেখান যে $S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ কিন্তু G-এর কোন সসীম উপ-সমষ্টি S-এর আবরণী হতে পারে না। ৩

(গ) প্রমাণ করুন যে একটি সসীম সেট ও একটি গণনযোগ্য সেটের সংযোগ সেটটি গণনযোগ্য হবে। ৪

৩। (ক) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ হলে দেখান যে $\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = 0$ হবে। ৩

(খ) মনে করুন $f : [\ a,\ b\ ] \to I\!R$ অপেক্ষকটি $[\ a,\ b\ ]$-তে সন্তত। যদি $x_1, x_2, \ldots, x_n$ বিন্দু সমূহ $[\ a,\ b\ ]$-এর অন্তর্ভূক্ত হয় তবে দেখান যে $[\ a,\ b\ ]$-তে ξ বিন্দুর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ হবে। ৩

(গ) মনে করুন f, মুক্ত অন্তরাল $(\ a,\ b\ )$-তে সন্তত এবং $\lim_{x \to a+} f(x)$ ও $\lim_{x \to b-} f(x)$-এর সসীম অস্তিত্ব আছে। দেখান যে f , $(\ a,\ b\ )$-তে সমসন্তত হবে। ৪

৪। (ক) দেওয়া আছে $f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$, $x \in [0,1]$, $x \in I\!N$. দেখান যে $\{f_n(x)\}_n$,$[\ 0,\ 1\ ]$-এ সম অভিসারী নয়। ৩

(খ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ শ্রেণীটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন, যেখানে p একটি বাস্তব রাশি। ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(গ) মনে করুন ঘাত শ্রেণী $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ -এর অভিসরণ ব্যাসার্ধ ρ, $0 < \rho < \infty$. মনে করুন $0 < r < \rho$. প্রমাণ করুন যে ঘাত শ্রেণীটি $[\,x_0 - r, x_0 + r\,]$ বদ্ধ অন্তরালে সমঅভিসারী হবে। ৪

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = **১৮**

৫। মনে করুন ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার ক্রমহ্রাসমান অনুক্রম $\{a_n\}_n$, শূন্য অভিমুখে অভিসারী। প্রমাণ করুন যে $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ শ্রেণীটি অভিসারী হবে। ৬

৬। প্রমাণ করুন যে একটি ঘাতশ্রেণীকে তার অভিসরণ অন্তরালের অন্তর্গত যে কোন বদ্ধ অন্তরালে পদভিত্তিক অবকল করা যায়। ৬

৭। মনে করুন $f : S \to I\!R$ যেখানে S, $I\!R^2$-এর মুক্ত উপসেট এবং $(\ a,\ b\ )$, S-এর একটি বিন্দু। মনে করুন $(\ a,\ b\ )$ বিন্দুতে f_x -এর অস্তিত্ব আছে এবং $(\ a,\ b\ )$ বিন্দুর সামীপ্যে f_y সীমাবদ্ধ। প্রমাণ করুন যে f , $(\ a,\ b\ )$ বিন্দুতে সন্তত হবে। ৬

৮। যদি p, q, r ত্রিঘাত সমীকরণ

$\frac{x}{a+\lambda}+\frac{y}{b+\lambda}+\frac{z}{c+\lambda}=1$-এর তিনটি বীজ হয় (a, b, c বাস্তব ধ্রুবক), দেখান যে

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(p,q,r)}=\frac{(p-q)(q-r)(r-p)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$ ৬

৯। মনে করুন $f: S \to I\!R$ যেখানে S, $I\!R^2$ -এর মুক্ত উপসেট। মনে করুন $(a,b) \in S$. মনে করুন f_x ও f_y, (a, b)-এর সামীপ্যে সংজ্ঞাত এবং f_{xy} , (a, b) বিন্দুতে সন্তত। প্রমাণ করুন যে (a, b) বিন্দুতে f_{yx} -এর অস্তিত্ব আছে এবং $f_{yx}(a,b)=f_{xy}(a,b)$ হবে। ৬

১০। মনে করুন অপেক্ষকসমূহের অনুক্রম $\{f_n(x)\}_n$, $f(x)$ অভিমুখে বদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে সম অভিসারী এবং প্রতি $f_n(x)$, [a, b]-তে সন্তত। প্রমাণ করুন যে f, [a, b]-তে সম সন্তত হবে। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৪ × ৩ = ১২

১১। মনে করুন $u=F\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-x}{xz}\right)$ অবকলনযোগ্য অপেক্ষক। দেখান যে $x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$. ৪

১২। $1+xy-ln(e^{xy}+e^{-xy})=0$ সমীকরণটি y-কে x-এর দ্বি-অবকলনযোগ্য অপেক্ষক হিসেবে সংজ্ঞাত করে ধরে নিয়ে দেখান যে $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y}{x^2}$. ৪

১৩। মনে করুন $z=\sqrt{|xy|}$, $x=t$, $y=t+t^3$ যেখানে $t \geq 0$. $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$ সূত্রটি t = 0-তে সিদ্ধ হবে কিনা পরীক্ষা করুন। ৪

১৪। প্রতিটি ক্ষেত্রে $lim\ \mathrm{Sup}\, S_n$ ও $lim\ \inf S_n$ নির্ণয় করুন :

i) $S_n=\sin\frac{n\pi}{2}+(-1)^n$

ii) $S_n=\begin{cases}1+\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \text{ যুগ্ম}\\ -\frac{1}{n}, & n \text{ অযুগ্ম}\end{cases}$ ৪

১৫। মনে করুন $\varphi:[0,2] \to I\!R$ নিম্নভাবে সংজ্ঞাত আছে :

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}-\cos x}{x^{2n}+1}$$

দেখান যে $\varphi(0)\varphi(2)<0$ কিন্তু (0, 2)-তে এমন কোন বিন্দুর অস্তিত্ব নেই যার জন্য $\varphi(x)=0$ হবে। মধ্যবর্তী মান ধর্মটি কেন এখানে প্রযোজ্য হচ্ছে না তার ব্যাখ্যা দিন। ৪

১৬। দেখান যে $x+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots$ শ্রেণীটি $|x|<1$-এর জন্য পদভিত্তিক অবকলনযোগ্য। এর থেকে দেখান যে $f(x)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}$. ২ + ২

১৭। যদি $f:[\,a,\,b\,]\to\mathbb{R}$ অবকলযোগ্য অপেক্ষক হয় এবং $[\,a,\,b\,]$-তে f' সীমাবদ্ধ হয়, তবে দেখান যে f, $[a,\,b\,]$-তে সীমিত ভেদযুক্ত অপেক্ষক হবে। ৪

১৮। যদি $\{a_n\}_n$, শূন্য অভিমুখে অভিসারী হয় এবং $\{b_n\}_n$ সীমাবদ্ধ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে $\{a_nb_n\}_n$, শূন্য অভিমুখে অভিসারী হবে। ৪

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. $10\times 2=20$

1. a) Let $0<x<y$ be given. Using the least upper bound axiom of $\mathbb{R}$, show that there exists natural number n for which $nx>y$. 3

   b) Let $x>1$. Correct or justify the statement : The set $S=\{x^n : n\in\mathbb{N}\}$ is unbounded above. 3

   c) Let $f:[\,a,\,b\,]\to\mathbb{R}$ be defined by

   $$f(x)=\begin{cases}0, & \text{when } x \text{ is rational}\\ 1, & \text{when } x \text{ is irrational}\end{cases}$$

   Is f bounded variation in $[\,a,\,b\,]$? Justify your answer. 4

2. a) Let $S=\{\,x\in\mathbb{R}:\cos x\neq 0\,\}$.

   With proper reason, choose the correct answer : 3

   i) S is closed set in $\mathbb{R}$

   ii) S is open set in $\mathbb{R}$

   iii) S is neither open nor closed set in $\mathbb{R}$

   iv) S is both open and closed set in $\mathbb{R}$.

   b) Let $S=\{\,x\in\mathbb{R}:0<x<1\,\}$,

   $I_n=\{\,x\in\mathbb{R},\ \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n}\,\}$ and

   $G=\{I_n : n\in\mathbb{N}\}$.

   Show that $S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ but no finite sub-collection of G can cover S. 3

c) Prove that the union of a finite set and an enumerable set is enumerable. 4

3. a) If $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, show that

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = 0 .$$ 3

b) Let $f : [\, a, b \,] \to I\!R$ be continuous in $[\, a, b \,]$. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be points of $[\, a, b \,]$. Show that there exists a point $\xi \in [\, a, b \,]$ such that $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. 3

c) Let f be continuous in open interval $(\, a, b \,)$ and let $\lim_{x \to a+} f(x)$ and $\lim_{x \to b-} f(x)$ both exist finitely. Prove that f is uniformly continuous in $(\, a, b \,)$. 4

4. a) Let $f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$, $x \in [0,1]$, $x \in I\!N$. Show that $\{f_n(x)\}_n$ is not uniformly convergent in $[\, 0, 1 \,]$. 3

b) Test the convergence of the series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ where p is real number. 3

 [পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

c) Let ρ be the radius of convergence of the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $0 < \rho < \infty$. Let $0 < r < \rho$. Prove that the power series is uniformly convergent in the closed interval $[\, x_0 - r, x_0 + r \,]$. 4

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Let $\{a_n\}_n$ be a decreasing sequence of positive real numbers, converging to zero. Prove that $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ is convergent. 6

6. Prove that a power series can be differentiated term-by-term strictly in every closed interval within its interval of convergence. 6

7. Let $f : S \to I\!R$ where S is open subset of $I\!R^2$ and let $(\, a, b \,)$ be a point of S.

Let f_x exist at $(\, a, b \,)$ and f_y be bounded in some neighbourhood of $(\, a, b \,)$. Prove that f is continuous at $(\, a, b \,)$. 6

8. If p, q, r be the roots of the cubic equation

$$\frac{x}{a + \lambda} + \frac{y}{b + \lambda} + \frac{z}{c + \lambda} = 1$$

(where a, b, c are real constants), show that $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p, q, r)} = \frac{(p - q)(q - r)(r - p)}{(a - b)(b - c)(c - a)}$. 6

9. Let $f: S \to \mathbb{R}$ where S is open subset of $\mathbb{R}^2$ and let $(a,b) \in S$. Let f_x, f_y be defined in some neighbourhod of (a, b) and let f_{xy} be continuous at (a, b). Prove that f_{yx} exists at (a, b) and $f_{yx}(a,b) = f_{xy}(a,b)$. 6

10. Let the sequence of functions $\{f_n(x)\}_n$ converge uniformly to $f(x)$ in [a, b] and each $f_n(x)$ be continuous in [a, b]. Prove that f is uniformly continuous in [a, b]. 6

Group – C

Answer any *three* questions. 4 × 3 = 12

11. Let $u = F\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$ be a differentiable function. Show that $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. 4

12. Assuming that $1 + xy - ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ defines y as a twice differentiable function of x, show that $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$. 4

13. Let $z = \sqrt{|xy|}$, $x = t$, $y = t + t^3$ where $t \geq 0$. Examine whether the relation $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$ holds at $t = 0$. 4

14. Find $\lim \operatorname{Sup} S_n$ and $\lim \inf S_n$ in each case where
   i) $S_n = \sin\frac{n\pi}{2} + (-1)^n$
   ii) $S_n = \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{where } n \text{ is even} \\ -\frac{1}{n}, & \text{where } n \text{ is odd.} \end{cases}$ 4

15. Let $\varphi : [0,2] \to \mathbb{R}$ be defined by
$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+2} - \cos x}{x^{2n} + 1}$$
Show that $\varphi(0)\,\varphi(2) < 0$ but there does not exist any point in (0, 2) at which $\varphi(x) = 0$. Explain why the intermediate value property does not hold here. 4

16. Show that the series
$$x + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots$$
is term-by-term differentiable where $|x| < 1$.
Hence show that $f(x) = \frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}$.
2 + 2

17. If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a derivable function and f' be bounded in [a, b], show that f is of bounded variation function in [a, b]. 4

18. If $\{a_n\}_n$ converges to zero and $\{b_n\}_n$ be bounded, prove that $\{a_n b_n\}_n$ converges to zero.
4