স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

ষষ্ঠ পত্র (6th Paper : **Analytical Geometry**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা | **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) দেখান যে $4a$ নাভিলম্ব (latus rectum) বিশিষ্ট অধিবৃত্তের স্পর্শকের মেরু সমীকরণকে $r = a\sec\frac{\alpha}{2}\sec\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)$ এইরূপে প্রকাশ করা যায়। ৫

(খ) দেখান যে $x = cy + bz$, $y = az + cx$ এবং $z = bx + ay$ এই তলগুলি যদি একই সরলরেখাগামী হয়, তাহলে $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ হবে। ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

২। (ক) যদি (α,β) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুর $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত সাপেক্ষে পোলার (polar) যদি $x^2 = 4by$ অধিবৃত্তটিকে স্পর্শ করে, দেখান যে (α,β) বিন্দুর সঞ্চারপথ হবে $xy + 2ab = 0$। ৫

(খ) এমন একটি গোলকের (sphere) সমীকরণ নির্ণয় করুন যেখানে $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$, $2x + 3y + 4z = 8$ এই বৃত্তটি একটি গুরুবৃত্ত (great circle)। ৫

৩। (ক) এমন একটি কণিকের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $x - 3y - 4 = 0$ এবং $x + y = 0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু ও $x^2 - 3xy + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ এবং $3x^2 + 7xy - 3y^2 - 14x - 2y + 23 = 0$ কণিক দুটির ছেদবিন্দুগামী। ৫

(খ) $\frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ এবং $5x - 2y - 3z + 6 = 0 = x - 3y + 2z - 3$ সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী ন্যূনতম দূরত্ব এবং ন্যূনতম দূরত্বের সমীকরণটি নির্ণয় করুন। ৫

৪। (ক) $x^2 + y^2 = ax + by$ এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এদের ছেদবিন্দুদ্বয়কে মূলবিন্দুর সাথে সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করলে যে দুটি সরলরেখা পাওয়া যায়, তাদের অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় করুন। ৫

(খ) যে সমতল $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{5}$ সরলরেখাগামী এবং $x-y+z+2=0$ সমতলের সাথে লম্ব, তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। $6x^2-5xy-6y^2-14x+5y+4=0$ সমীকরণটিকে আদর্শাকারে (canonical form) রূপান্তরিত করুন এবং কণিকাটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন। ৬

৬। $\frac{l}{r}=A\cos\theta+B\sin\theta$ সরলরেখাটির $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ কণিকের স্পর্শক হবার শর্ত নির্ণয় করুন। ৬

৭। দেখান যে $xy=c^2$ পরাবৃত্তের যে কোন স্পর্শকের $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের সাপেক্ষে মেরুবিন্দু (pole) সমকেন্দ্রিক এবং অনুরূপ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত। ৬

৮। $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx+x-4y+z+1=0$ সমীকরণটিকে তার আদর্শাকারে (canonical form) রূপান্তরিত করুন এবং দেখান যে এটি একটি অধিবৃত্তীয় বেলন সূচিত করে। ৬

৯। $2x-3y+6z=62;$
$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-58=0$
এই বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন। ৬

১০। একটি লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুর অর্ধশীর্ষ কোণ ϕ এবং এটি x-অক্ষ, y-অক্ষ ও $x=y=z$ সরলরেখা সমূহ দিয়ে অতিক্রান্ত হয়। দেখান যে $\sec^2\phi=9-4\sqrt{3}$. ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। প্রমাণ করুন যে অক্ষদ্বয়ের ঘূর্ণনের ফলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। ৩

১২। $r=\frac{2l}{5-2\cos\theta}$ এই বক্ররেখাস্থিত ক্ষুদ্রতম দূরক (radius vector) বিশিষ্ট বিন্দুটি নির্ণয় করুন। ৩

১৩। k-এর কোন্ মানের জন্য $x^2+kxy+y^2-5x-7y+6=0$ সমীকরণটি এক জোড়া সরলরেখার সমীকরণ হতে পারে ? ৩

১৪। $r^2=a^2\cos 2\theta$ মেরু সমীকরণটিকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ করুন। ৩

১৫। দুটি সরলরেখার অনুপাত দিগঙ্ক যথাক্রমে $5,-12,13$ এবং $-3, 4, 5$ হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণটি নির্ণয় করুন। ৩

১৬। a-এর কোন্ মানের জন্য $x+y+z=a\sqrt{3}$ সমতলটি $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$ গোলকের স্পর্শতল (tangent plane) হবে ? ৩

১৭। $(4,-3, 5)$ বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা y -অক্ষকে ধারণ করে। ৩

১৮। তিনটি ধনাত্মক অক্ষ ধারণকারী লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৩

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Show that polar equation of the tangent to a parabola with latus rectum $4a$ can be expressed in the form $r = a\sec\frac{\alpha}{2}\sec\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)$. 5

   b) Show that if the planes $x = cy + bz$, $y = az + cx$, $z = bx + ay$ pass through one straight line, then $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. 5

2. a) If the polar of a point (α,β) with respect to the parabola $y^2 = 4ax$ touches the parabola $x^2 = 4by$, show that the locus of the point (α,β) is $xy + 2ab = 0$. 5

   b) Find the equation of the sphere for which the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$, $2x + 3y + 4z = 8$ is a great circle. 5

3. a) Find the equation of the conic which passes through point of intersection of the straight lines $x - 3y - 4 = 0$ and $x + y = 0$ and the point of intersection of the conics $x^2 - 3xy + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ and $3x^2 + 7xy - 3y^2 - 14x - 2y + 23 = 0$. 5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

   b) Find the shortest distance between the straight lines $\frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ and $5x - 2y - 3z + 6 = 0 = x - 3y + 2z - 3$. Find also the equation of the shortest distance. 5

4. a) Find the angle between the lines joining the origin to the points of intersection of the curves $x^2 + y^2 = ax + by$ and $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. 5

   b) Find the equation of the plane which passes through the straight line $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{5}$ and perpendicular to the plane $x - y + z + 2 = 0$. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Reduce the equation
   $6x^2 - 5xy - 6y^2 - 14x + 5y + 4 = 0$
   to its canonical form and determine the nature of the conic. 6

6. Find the condition that the line $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ touches the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$. 6

7. Show that the poles of the hyperbola $xy = c^2$ with respect to the circle $x^2 + y^2 = a^2$ lies on concentric and similar hyperbola. 6

8. Reduce the equation
$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx + x - 4y + z + 1 = 0$
to canonical form and show that it represents a parabolic cylinder. 6

9. Find the centre and radius of the circle given by
$2x - 3y + 6z = 62$;
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 58 = 0$. 6

10. The semi-vertical angle of a right circular cone is ϕ and it passes through x-axis, y-axis and $x = y = z$ straight lines. Show that $\sec^2 \phi = 9 - 4\sqrt{3}$. 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Prove that the area of a triangle remains invariant under rotation of axes of coordinates. 3

12. Find the point on the conic $r = \frac{2l}{5 - 2\cos\theta}$ having minimum radius vector. 3

13. For which value of k will the equation $x^2 + kxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ represent a pair of straight lines ? 3

14. Transform the polar equation $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ to Cartesian one. 3

15. Find the angle between two straight lines whose direction ratios are $5, -12, 13$ and $-3, 4, 5$ respectively. 3

16. For what value of a will the plane
$x + y + z = a\sqrt{3}$ be a tangent plane to the sphere
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$? 3

17. Find the equation of a plane passing through the point $(4, -3, 5)$ and containing y-axis. 3

18. Find the equation of right circular cone passing through positive axes of coordinates. 3