স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

পঞ্চম পত্র (5th Paper : **Linear Algebra & Transformation**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ একটি n মাত্রিক বর্গ ম্যাট্রিক্স। প্রমাণ করুন যে $\det(adjA)=|\det A|^{n-1}$, $n\in N$ এবং $n\geq 3$. ৫

(খ) দেখান যে $\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটি অন্য একটি নির্ণায়কের বর্গ। এর সাহায্যে বা অন্য উপায়ে দেখান যে এটির মান $(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$ হবে। ২ + ৩

২। (ক) $A=\begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি অরথোগোনাল হলে x, y, z -এর মান নির্ণয় করুন এবং A^{-1} ম্যাট্রিক্সটি লিখুন। ৪ + ১

(খ) $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে স্বাভাবিক আকারে রূপান্তরিত করে মাত্রা নির্ণয় করুন। ৪ + ১

৩। (ক) প্রমাণ করুন যে কোন সসীম ভেক্টরদেশের একটি বনিয়াদ (basis) থাকবেই। ৫

(খ) ইউক্লিডিয় ভেক্টরদেশের সংজ্ঞা দিন। সসীম n মাত্রিক ইউক্লিডিয় ভেক্টরদেশে $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ একটি লম্ব ভেক্টরের সেট হলে দেখান যে এগুলি রৈখিক অনির্ভরশীল হবে। ২ + ৩

৪। (ক) i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ এবং $T(x,y,z)=(2xz, yz)$ হলে T একটি রৈখিক রূপান্তর হবে কি ? উত্তরের পক্ষে যুক্তি দিন।

ii) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ একটি রৈখিক রূপান্তর যেখানে $T_1(1,0)=(2,3,1)$, $T_1(1,1)=(3,0,2)$ হলে $T_1(x,y)$ নির্ণয় করুন।

২ + ৩

(খ) একটি বাস্তব দ্বিঘাত রূপ কখন ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকার হবে ? $6x^2+y^2+18z^2-4yz-12zx$-কে স্বাভাবিক আকারে রূপান্তরিত করে অনুসন্ধান করুন যে এটি ধনাত্মক আকারের হবে কিনা। এটির মাত্রা নির্ণয় করুন। ১ + ৩ + ১

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। Cayley-Hamilton-এর (ম্যাট্রিক্স সম্পর্কিত) উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন। ১ + ৫

৬। 'a' এবং 'b'-এর কোন্ কোন্ বাস্তব মানের জন্য

$x+y+z=1,\ x+2y-z=b,\ 5x+7y+az=b^2$

সমীকরণত্রয়ের (i) কেবলমাত্র একটি সমাধান থাকে, (ii) অসংখ্য সমাধান থাকে, (iii) কোন সমাধান থাকে না ? যুক্তিসহ উদাহরণ দিন। ২ + ২ + ২

৭। $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix};\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$

$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & c\end{pmatrix};\ \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ a+c=0\end{matrix}\right\}$

দেখান যে W, V ভেক্টরদেশের একটি উপ-ভেক্টরদেশ হবে। W-এর মাত্রা নির্ণয় করুন ও W-এর একটি বনিয়াদ লিখুন।

৩ + ২ + ১

৮। $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটিকে চারটি রৈখিক উৎপাদকের (linear factors) গুণফল রূপে প্রকাশ করুন। x, y, z যদি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য হয় তবে দেখান যে নির্ণায়কটি শূন্য মান নিতে পারে না। ৫ + ১

৯। $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মানগুলি নির্ণয় করুন। এদের জন্য আইগেন ভেক্টরগুলিও নির্ণয় করুন। এই আইগেন ভেক্টরগুলি কি রৈখিক নির্ভরশীল ? উত্তরের পক্ষে যুক্তি দিন। ৬

১০। একটি বাস্তব ভেক্টরদেশ V তে দুটি ভেক্টরের অভ্যন্তরীণ গুণনের সংজ্ঞা দিন। একটি ইউক্লিডিয় ভেক্টরদেশে যে কোন দুইটি ভেক্টর α, β-এর জন্য দেখান যে $\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\|+\|\beta\|$, আরও দেখান যে $\|\alpha+\beta\|^2+\|\alpha-\beta\|^2 = 2\,[\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2]$ ২ + ২ + ২

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। দেখান যে $\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0.$ ৩

১২। $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হলে দেখান যে $A^2 - 4A - 5I_3$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স হবে, যেখানে $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$। এর থেকে দেখান যে A একটি অবিশিষ্ট (non-singular) ম্যাট্রিক্স হবে।

২ + ১

১৩। $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ একটি রৈখিক রূপান্তর, যখন $T(1,0,0) = (1,2,1)$, $T(1,1,0) = (2,2,2)$, $T(1,1,2) = (2,4,0)$, $T(x,y,z)$ নির্ণয় করুন। ৩

১৪। $x^2 + y^2 + 2yz + 2zx$ এই বাস্তব দ্বিঘাত রূপটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন। ৩

১৫। $W_1 = L\{(1,2,1),(2,1,1),(1,1,2)\}$

$W_2 = L\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$

দেখান, $W_1 = W_2$. ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

১৬। a, b, c মূলদ সংখ্যা হলে দেখান যে,

$\begin{vmatrix} a^2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & b^2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & c^2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান কখনই শূন্য হবে না। ৩

১৭। $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ এবং

$T(x,y,z) = (x+y+z,\ 2x-y-z)$ হলে

$\ker(T)$ নির্ণয় করুন। ৩

১৮। a_i, b_i, $i = 1, 2, 3$ অসমান বাস্তব সংখ্যা এবং $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ হলে BA ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা নির্ণয় করুন। ৩

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1\. a) $A = (a_{ij})_{n \times n}$ is a square matrix of order n.

Show that $\det(adjA) = |\det A|^{n-1}$, $n \in N$ and $n \geq 3$. 5

b) Show that $\begin{vmatrix} 2bc - a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac - b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix}$ is square of another determinant. Hence or otherwise show that its value is $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$. 2 + 3

2\. a) Find the values of x, y, z when the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ is orthogonal matrix. Write down the matrix A^{-1}. 4 + 1

b) Reduce the matrix $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ to normal form and find its rank. 4 + 1

3\. a) Prove that a finite dimensional vector space has a basis. 5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

b) Define Euclidean vector space. In a n (finite) dimensional Euclidean space if $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ is a set of orthogonal vectors then show that they are linearly independent. 2 + 3

4\. a) i) Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be defined by $T(x, y, z) = (2xz, yz)$. Is T a linear transformation ? Give reason in favour of your answer.

ii) Let $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, be a linear transformation, where $T_1(1, 0) = (2, 3, 1)$, $T_1(1, 1) = (3, 0, 2)$. Find $T_1(x, y)$. 2 + 3

b) When a real quadratic form will be positive definite ? Reduce the quadratic form $6x^2 + y^2 + 18z^2 - 4yz - 12zx$ to canonical form and determine whether it is positive definite. Find its rank. 1 + 3 + 1

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5\. State Cayley-Hamilton theorem related to matrix and prove it. 1 + 5

6. For what real values of *'a'* and *'b'* the equations

$$x+y+z=1, \quad x+2y-z=b, \quad 5x+7y+az=b^2$$

have (i) only one solution, (ii) infinite number of solutions, (iii) no solution ? Answer with proper reason. 2 + 2 + 2

7. $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$

$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & c \end{pmatrix};\ \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ a+c=0 \end{matrix}\right\}$

Show that W is a substance of vector space V. Find rank of W and write down a basis of W.

3 + 2 + 1

8. Express $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$

as product of four linear factors. If x, y, z are lengths of three sides of a triangle then show that the determinant cannot vanish. 5 + 1

9. Find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Are the eigenvectors linearly independent ? Give reason to your answer. 6

10. Define inner product of two vectors in a real vector space. In an Euclidean vector space, show that for any two vectors α, β $\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$ and $\|\alpha+\beta\|^2 + \|\alpha-\beta\|^2 = 2\,[\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2]$.

2 + 2 + 2

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Show that $\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$. 3

12. Let $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Show that $A^2-4A-5I_3$ is a null matrix, where $I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. From this, show that A is a non-singular matrix. 2 + 1

13. Let $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation, where $T(1,0,0)=(1,2,1)$, $T(1,1,0)=(2,2,2)$, $T(1,1,2)=(2,4,0)$. Find $T(x,y,z)$. 3

14. Find the nature of the quadratic form $x^2+y^2+2yz+2zx$. 3

15. $W_1 = L\{(1,2,1),(2,1,1),(1,1,2)\}$

$W_2 = L\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$

Show that $W_1 = W_2$. 3

16. If a, b, c are rational numbers, then show that the determinant $\begin{vmatrix} a^2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & b^2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & c^2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ can never be zero. 3

17. Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be given by
$T(x, y, z) = (x + y + z,\ 2x - y - z)$.
Find $\ker(T)$. 3

18. Let a_i, b_i, $i = 1, 2, 3$ be unequal real numbers and let $A = [a_1\ a_2\ a_3]$ and $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Find the rank of the matrix BA. 3