স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :
ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

দ্বাদশ পত্র (12th Paper : **Probability Theory**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা | **পূর্ণমান ঃ ৫০**
Time : 2 Hours | Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)
(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।
অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

প্রতীক চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থবহ।

Symbols have their usual meaning.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) যদি $\{A_n\}_n$ একটি একান্বয়ী ঘটনার ক্রম হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে $P(\lim A_n) = \lim P(A_n)$. ৫

(খ) যে কোনো n ঘটনাসমূহ $A_1, A_2, \ldots, A_n$-এর ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত বুলের অসমীকরণটি প্রমাণ করুন : ৫

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

২। (ক) একটি লটারীতে 100 টি পুরস্কার আছে এবং 10,000 টি টিকিট ছাড়া হল। এক ব্যক্তি ন্যূনতম কয়টি টিকিট কিনলে তার অন্তত একটি পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$-এর চেয়ে বেশী হবে ? ৫

(খ) শর্তাধীন সম্ভাবনার সংজ্ঞাটি লিখুন। দেখান যে তিনটি ঘটনা *A, B, C*-এর জন্য গুণ নিয়ম হবে

$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$. ৫

৩। (ক) পোয়াসঁ নিবেশনের সংজ্ঞা লিখুন। একটি 500 পাতার বইতে 500 টি মুদ্রণ ত্রুটি থাকে। তাহলে একটি নির্দিষ্ট পাতায় সর্বাধিক 3 টি মুদ্রণ ত্রুটি থাকার সম্ভাবনা কত ? ৫

(খ) অবিচ্ছিন্ন যদৃচ্ছ চলের রূপান্তরের সূত্রটি লিখুন। উক্ত সূত্রটি প্রয়োগ করে দেখান যে, যদি X স্বাভাবিক (m, σ) চলক হয়, তবে $Y = aX + b$ (a, b ধ্রুবক) একটি স্বাভাবিক $(am + b, |a|\sigma)$ চলক হবে। ৫

৪। (ক) একটি চলক X-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} e^{-\frac{x}{40}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{অন্যত্র} \end{cases}$$

এক্ষেত্রে নির্ণয় করুন

(i) $P(X \leq 15)$, (ii) $P(40 < X \leq 50)$ এবং

(iii) $P(X > 10)$. ৫

(খ) a ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের পরিধির উপর একটি বিন্দু যদৃচ্ছভাবে নেওয়া হল। বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত একটি স্থির বিন্দু থেকে এই যদৃচ্ছ বিন্দুর দূরত্বের প্রত্যাশা কত ? ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। কোন চলকের আদর্শ বিচ্যুতির সংজ্ঞা দিন। X-চলকের আদর্শ-বিচ্যুতি σ হলে, দেখান যে

i) $\sigma^2 = \alpha_2 - m^2$

ii) $\sigma^2 = E\{X(X-1)\} - m(m-1)$ ৬

৬। কোন যদৃচ্ছ চলকের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক বলতে কি বোঝায় ? দেখান যে দ্বিপদ (n, p) নিবেশনের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক হবে $(pe^{it} + q)^n$ এবং পোয়াসঁ (μ) নিবেশনের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষক হবে $e^{\mu(e^{it}-1)}$. ৬

৭। X, Y চলকদুটির অনপেক্ষতার সংজ্ঞা দিন। দেখান যে দুটি চলক X, Y-এর অনপেক্ষতার একটি আবশ্যিক ও পর্যাপ্ত শর্ত হল এই যে তাদের যুগ্ম নিবেশন অপেক্ষক $F(x, y)$-কে দুটি অপেক্ষকের গুণফল হিসেবে লেখা যায় যার একটি কেবলমাত্র x-এর অপেক্ষক ও অন্যটি কেবলমাত্র y-এর অপেক্ষক। ৬

৮। একটি খাড়া বোর্ডের উপর সমদূরত্বে অনুভূমিক সমান্তরাল রেখা টানা আছে যেখানে দুটি পরপর সমান্তরাল রেখার মধ্যে দূরত্ব b । একটি সূঁচ যার দৈর্ঘ্য a ($< b$) যদৃচ্ছভাবে বোর্ডের উপর ছোঁড়া হলে সূঁচটি একটি রেখাকে ছেদ করার সম্ভাবনা কত ? ৬

৯। অনুবন্ধ সহগাঙ্কের সংজ্ঞা দিন। $\rho(X,Y)$, X ও Y-এর অনুবন্ধ সহগাঙ্ক হলে দেখান যে $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$. ৬

১০। চেবিশেফের অসমতার দ্বারা দেখান যে একটি পক্ষপাতদুষ্টহীন মুদ্রা 2000 বার ছুঁড়লে 'মাথা' পড়ার সংখ্যা 900 এবং 1100-এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা অন্ততপক্ষে $\frac{19}{20}$. ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। একটি অবিচ্ছিন্ন চলক X-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক

$f(x) = 12x^2(1-x),\ 0 < x < 1.$

$P(|X - m| \geq 2\sigma)$ নির্ণয় করুন এবং এর মান চেবিশেফের অসমতার দ্বারা প্রদত্ত সীমার সঙ্গে তুলনা করুন। ৩

১২। একটি চলকের ক্রমের 'সম্ভাবনায়' অভিসরণের সংজ্ঞা দিন। যদি $X_n \xrightarrow{p} a$ যখন $n \to \infty$ এবং c একটি অশূন্য ধ্রুবক হয়, তাহলে দেখান যে $cX_n \xrightarrow{p} ca$ যখন $n \to \infty$. ৩

১৩। X ও Y দুটি যদৃচ্ছ চল যা একই ঘটনাদেশ S-এ সংজ্ঞায়িত। X ও Y-এর যুগ্ম নিবেশন অপেক্ষক $F(x,y)$ হলে এবং $b > a$ হলে প্রমাণ করুন যে $F(b,c) \geq F(a,c)$. ৩

১৪। যদি X ও Y যদৃচ্ছ চলকদ্বয়ের দ্বিমাত্রিক ঘনত্ব অপেক্ষক

$f(x,y) = 3x^2 - 8xy + 6y^2;\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ হয়, তাহলে দেখান যে চলকদ্বয় অনপেক্ষ নয়। ৩

১৫। যদি যদৃচ্ছ চল X-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব হয়

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{অন্যত্র} \end{cases}$$

তবে $g(x) = e^{\frac{3x}{4}}$ অপেক্ষকের প্রত্যাশা নির্ণয় করুন। ৩

১৬। যদৃচ্ছ চল X দ্বিপদ (n, p) নিবেশন মেনে চলে। X-এর গড় নির্ণয় করুন। ৩

১৭। মধ্যমা কাকে বলে ? দেখান যে স্বাভাবিক (m, σ) নিবেশনের মধ্যমা m হবে। ৩

১৮। যদি $P(A) = \frac{3}{4}$ এবং $P(\overline{B}) = \frac{3}{8}$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে $\frac{3}{8} \leq P(AB) \leq \frac{5}{8}$. ৩

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) If $\{A_n\}_n$ be a sequence of events of a random experiment and be monotonic, then prove that $P(\lim A_n) = \lim P(A_n)$. 5

   b) For any n events $A_1, A_2, ..., A_n$, prove the Boole's inequality :
   $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.
   5

2. a) There are 100 prizes in a lottery consisting of 10,000 tickets. How many minimum number of tickets are required to buy so that the chance of getting at least one prize is greater than $\frac{1}{2}$. 5

   b) Define conditional probability. For any three events *A, B, C,* show that product rule is $P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$. 5

3. a) Define Poisson distribution. There are 500 printing mistakes in a book of 500 pages. Find the probability that a particular page contains at most 3 printing mistakes ? 5

   b) Write down the law of transformation of a continuous random variable. If X be a normal (m, σ) variate, then show that $Y = aX + b$ (a, b are constants) is a normal $(am + b, |a|\sigma)$ variate. 5

4. a) Let the probability density function of a random variable X be

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} e^{-\frac{x}{40}}, & x \ge 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

   Find (i) $P(X \le 15)$, (ii) $P(40 < X \le 50)$ and (iii) $P(X > 10)$. 5

   b) A point is chosen at random on the circumference of a circle of radius *a*. Find the expectation of the distance of this point from a fixed point on the circumference. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Define standard deviation of a random variable. If σ be the standard deviation of the random variable X, then show that

   i) $\sigma^2 = \alpha_2 - m^2$

   ii) $\sigma^2 = E\{X(X-1)\} - m(m-1)$ 6

6. What do you mean by characteristic function of a random variable ? Show that the characteristic function of a Binomial (n, p) distribution is $(pe^{it} + q)^n$ and that of the Poisson (μ) distribution is $e^{\mu(e^{it}-1)}$. 6

7. Define independence of two random variables X, Y. Show that a necessary and sufficient condition for the independence of two random variables X and Y is that their joint distribution function $F(x, y)$ can be expressed as the product of two functions, one being a function of x alone and the other being a function of y alone.

6

8. A vertical board is ruled with horizontal parallel lines at a constant distance b apart. A needle of length a ($< b$) is thrown at random on the board. What is the probability that it will intersect one of the lines ? 6

9. Define correlation coefficient. If $\rho(X,Y)$ be the correlation coefficient between the random variables X, Y, then show that $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$. 6

10. Show by Tchebycheff's inequality that in 2000 throws of an unbiased coin the probability that the number of heads lies between 900 and 1100 is at least $\frac{19}{20}$. 6

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

Group – C

Answer any *four* questions. $3 \times 4 = 12$

11. The probability density function of a continuous random variable X is $f(x) = 12x^2(1-x)$, $0 < x < 1$.

Find $P(|X - m| \ge 2\sigma)$ and compare it with the bounds of Tchebycheff's inequality. 3

12. Define convergence in probability of a sequence of random variables.

If $X_n \xrightarrow[p]{} a$ when $n \to \infty$ and c is a non-zero constant, show that $cX_n \xrightarrow[p]{} ca$ when $n \to \infty$.

3

13. Let X, Y be two random variables defined on the same event space S. If $F(x,y)$ be their joint distribution function and $b > a$ then prove that $F(b,c) \ge F(a,c)$. 3

14. If $f(x,y) = 3x^2 - 8xy + 6y^2$; $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ is the joint probability density function of two random variables X, Y ; then show that X and Y are not independent. 3

15. If $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$

be the probability density function of a random variable X, then find the expectation of $g(X) = e^{\frac{3x}{4}}$. 3

16. Let a random variable X follows binomial (n, p) distribution. Find the mean of X. 3

17. What is median ? Show that the median of a normal (m, σ) distribution is m. 3

18. If $P(A) = \frac{3}{4}$ and $P(\overline{B}) = \frac{3}{8}$, then prove that $\frac{3}{8} \leq P(AB) \leq \frac{5}{8}$. 3

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য