স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

চতুর্দশ পত্র (14th Paper : **Linear Programming and Game Theory**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা | **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) কোনো হাসপাতালে ন্যূনতম নার্সের চাহিদা নিচের সারণীতে প্রদত্ত :

অবধি	সময় (২৪ ঘন্টায়)	ন্যূনতম নার্সের চাহিদা
1	6 AM - 10 AM	60
2	10 AM - 2 PM	70
3	2 PM - 6 PM	80
4	6 PM - 10 PM	50
5	10 PM - 2 AM	30
6	2 AM - 6 AM	40

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

নার্সেরা প্রত্যেক অবধির শুরুতে হাসপাতালে উপস্থিত হবে এবং টানা আট ঘন্টা কাজ করবে। হাসপাতাল ন্যূনতম সংখ্যার নার্স রাখতে চায় যাতে সমস্ত অবধিতে যথেষ্ট সংখ্যক নার্স থাকে। সমস্যাটি রৈখিক সমস্যা হিসেবে প্রকাশ করুন। ৫

(খ) লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটিকে সমাধান করুন বা সমাধানযোগ্য না হলে তাও ইঙ্গিত করুন : ৫

অবম $Z = 3x_1 - 2x_2$

শর্ত সাপেক্ষে, $3x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1 - 3x_2 \leq 6$

$x_1 - 2x_2 \leq -4$

$x_1, x_2 \geq 0$

২। (ক) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$ নীচের সমীকরণগুলির একটি কার্যকর সমাধান। তা থেকে মৌল কার্যকর সমাধানগুলি নির্ণয় করুন। ৫

$4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 16$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11$

(খ) প্রমাণ করুন যে E^n দেশে, $AX = b$ এই সমীকরণতন্ত্রের প্রতিটি মৌল কার্যকর সমাধানই কার্যকর সমাধানের উত্তল সেটের কোনো প্রান্তিক বিন্দু হবে। ৫

৩। (ক) দ্বৈত সমস্যাটির সমাধানের মাধ্যমে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটির সমাধান করুন : ৫

অবম $Z = x_1 + x_2$

শর্ত সাপেক্ষে, $x_1 + 2x_2 \geq 12$

$5x_1 + 6x_2 \geq 48$

$x_1, x_2 \geq 0$

(খ) দ্বৈততার মৌল উপপাদ্যটি বিবৃত করুন। ৫

৪। (ক) নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটির সমাধান করুন : ৫

অবম $Z = -3x_1 + 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে, $-x_1 + 4x_2 \geq 14$

$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

(খ) যদি কোনো রৈখিক সমস্যার অন্ততঃ দুটি চরম (optimum) সমাধান থাকে তবে প্রমাণ করুন যে ঐ সমস্যাটির অসংখ্য চরম সমাধান থাকবে যারা ঐ চরম সমাধানগুলির উত্তল সমাবেশ হবে। ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। নিম্নের পরিবহন সমস্যাটির সমাধান করুন : ৬

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	10	7	3	6	3
O_2	1	6	8	3	5
O_3	7	4	5	3	7
	4	6	6	4	

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

৬। নিম্নের আরোপ সমস্যাটি সমাধান করুন : ৬

	I	II	III	IV	V
A	14	18	20	16	16
B	12	17	15	15	16
C	14	14	13	16	20
D	12	15	16	14	19
E	15	22	13	14	16

৭। নীচের ভ্রাম্যমান বিক্রেতা সমস্যাটির সমাধান করুন : ৬

	A	B	C	D	E
A	—	14	7	17	9
B	8	—	13	20	12
C	10	10	—	15	12
D	13	11	13	—	14
E	9	11	10	12	—

৮। লেখচিত্রের সাহায্যে নীচের ক্রীড়া সমস্যাটির সমাধান করুন : ৬

	খেলোয়াড় B					
খেলোয়াড় A	3	2	−1	4	3	4
	2	5	6	−2	4	2

৯। কোনো ক্রীড়া সমস্যা L.P.P.-তে প্রকাশ করুন এবং দেখান যে A এবং B-এর সমস্যা একে অপরের দ্বৈত সমস্যা হবে। ৬

১০। $(a_{ij})_{m\times n}$ ম্যাট্রিক্সটি কোনো ক্রীড়ার মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্স হলে প্রমাণ করুন যে ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দুর অস্তিত্ব থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \text{ হয়।} \qquad ৬$$

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $৩ \times ৪ = ১২$

১১। প্রমাণ করুন E^3 দেশে

$S = \{(x,y,z) : 2x + 3y + 4 = 0\}$ একটি উত্তল সেট। ৩

১২। (1, 2, 3)-কে (1, 0, 1), (1, 1, 0) এবং (2, 1, 1)-এর রৈখিক সমবায় হিসেবে প্রকাশ করুন। এটি কি অনন্য হবে ?

৩

১৩। $CX = b$ একটি পরাসমতল যেখানে $C = (3,2,4,7)$, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ এবং $b = 8$। (–6, 1, 7, 2)এবং (1, 2,– 4,1) বিন্দু দুটি কোন অর্ধদেশে থাকবে ? ৩

১৪। উত্তল আধার ও উত্তল বহুতলকের মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় করুন। ৩

১৫। দেখান যে S = { (0,1,–1), (0,1,1), (1,–1, 0), (1,1,0) } E^3 দেশের একটি ব্যাপ্তি সেট গঠন করে। S-এর একটি উপসেট বের করুন যা E^3 -এর একটি ভিত্তি হবে। এটি কি অনন্য ? ৩

১৬। Maximin এবং minimax নীতি অবলম্বন করে ক্রীড়াটির সমাধান করুন : ৩

$$A \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \overset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

১৭। $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0$ কি

$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 21$

$6x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 42$

সমীকরণতন্ত্রের একটি মৌল কার্যকর সমাধান হবে ? একই সাথে সমস্ত মৌল কার্যকর সমাধানগুলি বের করুন। ৩

১৮। প্রদত্ত প্রাথমিক সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন : ৩

চরম $Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$

শর্ত সাপেক্ষে, $x_1 - x_2 - x_3 \le 1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 6$

$x_1, x_2 \ge 0$

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) A hospital has the following minimum requirement for nurses :

Period	Clock time 24 hours / day	Min. number of nurses required
1	6 AM - 10 AM	60
2	10 AM - 2 PM	70
3	2 PM - 6 PM	80
4	6 PM - 10 PM	50
5	10 PM - 2 AM	30
6	2 AM - 6 AM	40

Nurses report to the hospital wards at the beginning of each period and work for eight consecutive hours. The hospital wants to determine the minimum number of nurses so that there may be sufficient number of nurses available for each period. Formulate this as an L.P.P. 5

b) Solve the following L.P.P. graphically, indicate also if it is not solvable : 5

Minimize $Z = 3x_1 - 2x_2$

subject to $3x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1 - 3x_2 \leq 6$

$x_1 - 2x_2 \leq -4$

$x_1, x_2 \geq 0$

2. a) Reduce the feasible solution $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$ to basic feasible solutions of the following set of equations : 5

$4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 16$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11$

b) Prove that in E^n space every basic feasible solution of the system of equation $AX = b$ will be a vertex of the convex set of all feasible solutions. 5

3. a) Solve the following L.P.P. by solving its dual : 5

Minimize $Z = x_1 + x_2$

subject to $x_1 + 2x_2 \geq 12$

$5x_1 + 6x_2 \geq 48$

$x_1, x_2 \geq 0$

b) Write down fundamental theorem of duality. 5

4. a) Solve the following L.P.P. : 5

Minimize $Z = -3x_1 + 2x_2$

subject to $-x_1 + 4x_2 \geq 14$

$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

b) If an L.P.P. possesses at least two optimal feasible solutions then prove that there exist an infinite number of optimal solutions which are convex combination of the optimal solutions. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Solve the following transportation problem : 6

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	10	7	3	6	3
O_2	1	6	8	3	5
O_3	7	4	5	3	7
	4	6	6	4	

6. Solve the following assignment problem : 6

	I	II	III	IV	V
A	14	18	20	16	16
B	12	17	15	15	16
C	14	14	13	16	20
D	12	15	16	14	19
E	15	22	13	14	16

7. Solve the following Travelling Salesman problem : 6

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	—	14	7	17	9
B	8	—	13	20	12
C	10	10	—	15	12
D	13	11	13	—	14
E	9	11	10	12	—

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

8. Solve the following game problem graphically : 6

Player *B*

Player *A*	3	2	–1	4	3	4
	2	5	6	–2	4	2

9. Deduce a game problem into an L.P.P. and prove that problems of *A* and *B* are dual of one another. 6

10. If $(a_{ij})_{m\times n}$ be the pay off matrix of a game then prove that the saddle point exists if and only if

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$ 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Show that in E^3, $S = \{(x,y,z) : 2x + 3y + 4 = 0\}$ is a convex set. 3

12. Express (1, 2, 3) as a linear combination of (1, 0, 1), (1, 1, 0) and (2, 1, 1). Is it unique ? 3

13. Consider the hyperplane $CX = b$ where $C = (3,2,4,7)$, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ and $b = 8$. Find the half space on which $(-6, 1, 7, 2)$ and $(1, 2, -4, 1)$ lie. 3

14. What is the difference between convex hull and convex polyhedron ? 3

15. Prove that $S = \{(0,1,-1), (0,1,1), (1,-1,0), (1,1,0)\}$ generates E^3. Find a subset of S which is a basis of E^3. Is it unique ? 3

16. Using maximin and minimax principle solve the game : 3

		B			
		4	2	3	4
A		–2	–1	4	–3
		5	2	3	3
		4	0	0	1

17. Find whether $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ is a basic feasible solution of

$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 21$

$6x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 42$

Find also all basic feasible solutions. 3

18. Write down dual of the primal problem : 3

Maximize $Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$

subject to $x_1 - x_2 - x_3 \leq 1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য