স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

পঞ্চদশ পত্র (15th Paper : **Complex Analysis & Laplace Transformation**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা — **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours — Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

ব্যবহৃত প্রতীকগুলি সাধারণ অর্থবহ।

Used symbols have their usual meaning.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ — ১০ × ২ = ২০

১। (ক) দেখান যে $(z+1)^n - z^n = 0$ (n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা >1) সমীকরণের বীজসমূহ আরগঁ সমতলে সমরেখ। ৫

(খ) প্রমাণ করুন যে

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \frac{1}{2}t^2 + \cos t - 1 .$$ ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

২। (ক) একটি বিশ্লেষণযোগ্য অপেক্ষক $f(z) = u + iv$ নির্ণয় করুন যেখানে $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2$. ৫

(খ) দুটি অপেক্ষক $F(t)$ এবং $G(t)$-এর কনভলিউশন-এর সংজ্ঞা দিন। $F(t)$ এবং $G(t)$-এর কনভলিউশন নির্ণয় করুন যখন $F(t) = e^{at}$ এবং $G(t) = e^{bt}$, $a \neq b$. ৫

৩। (ক) সমাধান করুন : $\sin z = 2$. ৫

(খ) ল্যাপ্লাস রূপান্তরের সাহায্যে সমাধান করুন :

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 .$$ ৫

৪। (ক) মনে করুন আরগঁ সমতলে D একটি ক্ষেত্র এবং $f : D \to C$ একটি বিশ্লেষণযোগ্য অপেক্ষক। যদি $\arg f(z) =$ ধ্রুবক হয়, দেখান যে $f(z)$ একটি ধ্রুবক, যখন $z \in D$. ৫

(খ) ল্যাপ্লাস রূপান্তরের সাহায্যে নিম্নলিখিত সমাকলটি নির্ণয় করুন : ৫

$$\int_0^\infty te^{-3t} \sin t\, dt$$

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ — ৬ × ৩ = ১৮

৫। মনে করুন $D(\subset C)$ একটি ক্ষেত্র এবং $Z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. $f : D \to C$ অপেক্ষকটি $Z = Z_0$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য। $f = u + iv$ হলে দেখান যে $Z = Z_0$ বিন্দুতে আংশিক অন্তরকলজসমূহ u_x, u_y, v_x, v_y বর্তমান এবং (x_0, y_0) বিন্দুতে $u_x = v_y$ এবং $u_y = -v_x$ । ৬

৬। মনে করুন $f = u + iv$ যেখানে $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$ এবং $v(x,y) = 0$. $z = 0$ বিন্দুতে f অন্তরকলনযোগ্য কিনা বিচার করুন। আবার $z = 0$ বিন্দুতে কোশী-রীমান সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ কিনা পরীক্ষা করুন। ৬

৭। একটি দ্বি-রৈখিক রূপান্তর নির্ণয় করুন যা $z = 1, 0, \infty$ বিন্দুগুলিকে যথাক্রমে $\omega = -1, i, -i$ বিন্দুগুলিতে রূপান্তরিত করে। আরও দেখান যে, এই রূপান্তরটি

i) z-তলে $Im\,(z) = 0$ রেখাকে ω-তলে $|\omega| = 1$ বৃত্তে রূপান্তরিত করে ;

ii) ঊর্ধ্ব অর্ধতল $Im(z) > 0$-কে $|\omega| < 1$ অঞ্চলে রূপান্তরিত করে;

iii) নিম্ন অর্ধতল $Im(z) < 0$-কে $|\omega| > 1$ অঞ্চলে রূপান্তরিত করে। ৬

৮। ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমাধান করুন :

$y'' + 9y = \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = -1$. ৬

৯। কনভলিউশন উপপাদ্যের সাহায্যে দেখান যে,

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$$ ৬

১০। দেওয়া আছে

$$F(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t \le \pi . \\ 0, & t > \pi \end{cases}$$

$F(t)$ অপেক্ষকের ল্যাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় করুন। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। $\omega = \dfrac{z-1}{z+1}$ রূপান্তরের অবিচল বিন্দুগুলি নির্ণয় করুন। ৩

১২। দেখান যে $\sin \bar{z}$ অপেক্ষকটি আরগঁ সমতলে কোথাও বিশ্লেষণযোগ্য অপেক্ষক নয়। ৩

১৩। দেখান যে $D = C \setminus \{0\}$ ক্ষেত্রের উপর $u(x,y) = \log(x^2 + y^2)$ একটি হরাত্মক অপেক্ষক। ৩

১৪। $f = u + iv$ যেখানে $u(x,y) = xy$ এবং $v(x,y) = y$, অপেক্ষকটি $z = 1 + 2i$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য কিনা পরীক্ষা করুন। ৩

১৫। $-i$-এর বর্গমূল নির্ণয় করুন। ৩

১৬। $L\{f(t)\}$ নির্ণয় করুন যেখানে $f(t) = (t^2+1)^2$. ৩

১৭। প্রমাণ করুন যে $L\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}\bar{f}\left(\dfrac{s}{a}\right)$. ৩

১৮। $L\{f(t)\}$ নির্ণয় করুন যেখানে $f(t) = t^3 e^{-3t}$. ৩

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. $10 \times 2 = 20$

1. a) Show that the roots of the equation $(z+1)^n - z^n = 0$, [n (>1) being a positive integer] in Argand plane are collinear. 5

   b) Prove that $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \frac{1}{2}t^2 + \cos t - 1$. 5

2. a) Find an analytic function $f(z) = u + iv$ where $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2$. 5

   b) Define convolution of two functions $F(t)$ and $G(t)$. Find the convolution of $F(t)$ and $G(t)$ when $F(t) = e^{at}$ and $G(t) = e^{bt}$, $a \neq b$. 5

3. a) Solve : $\sin z = 2$. 5

   b) Solve the following by Laplace transformation :

   $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. 5

4. a) Assume that D is a domain in the Argand plane and $f : D \to C$ is an analytic function. If $\arg f(z) =$ constant then prove that $f(z)$ is constant when $z \in D$. 5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

   b) Find the following integral by Laplace transformation :

   $$\int_0^\infty te^{-3t} \sin t \, dt$$ 5

Group – B

Answer any *three* questions. $6 \times 3 = 18$

5. Let $D(\subset C)$ be a domain and $Z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Prove that a necessary condition for $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ to be differentiable at the point $z_0 = x_0 + iy_0$ is that $u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$ and $u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$. 6

6. Let $f = u + iv$ where $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$ and $v(x,y) = 0$. Verify whether f is differentiable at $z = 0$. Also verify whether Cauchy-Riemann equations are satisfied at $z = 0$. 6

7. Find a bilinear transformation which transforms the points $z = 1, 0, \infty$ into $\omega = -1, i, -i$. Show also that this transformation maps

   i) the real axis $Im(z) = 0$ on $|\omega| = 1$;

   ii) the upper half plane $Im(z) > 0$ on $|\omega| < 1$;

   iii) the lower half plane $Im(z) < 0$ on $|\omega| > 1$. 6

8. Solve the following by Laplace transformation :

   $y'' + 9y = \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = -1$. 6

9. Prove by convolution theorem :

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}=\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t$$ 6

10. Find $L\{F(t)\}$ where

$$F(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\le\pi. \\ 0, & t>\pi\end{cases}$$ 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Find the invariant points of the transformation $\omega=\frac{z-1}{z+1}$. 3

12. Show that the function $\sin\bar{z}$ is not analytic anywhere in the Argand plane. 3

13. Show that $u(x,y)=\log(x^2+y^2)$ is a Harmonic function in the domain $D=C\setminus\{0\}$. 3

14. Given that $f=u+iv$ where $u(x,y)=xy$ and $v(x,y)=y$. Examine whether f is differentiable at $z=1+2i$. 3

15. Find the square root of $-i$. 3

16. Find $L\{f(t)\}$ where $f(t)=(t^2+1)^2$. 3

17. Prove that $L\{f(at)\}=\frac{1}{a}\bar{f}\left(\frac{s}{a}\right)$. 3

18. Find $L\{f(t)\}$ when $f(t)=t^3e^{-3t}$. 3