স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :
ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

দশম পত্র (10th Paper : **Analytical Statics and Fluid Statics**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা | **পূর্ণমান ঃ ৫০**
Time : 2 Hours | Full Marks : 50
(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)
(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

১। প্রত্যেক বিভাগ থেকে একটি করে মোট **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

বিভাগ – অ

(ক) কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল সমতলীয় বলগোষ্ঠীর নিরপেক্ষ কেন্দ্রের অস্তিত্ব, বিশ্লেষিতাংশ পদ্ধতিতে প্রতিষ্ঠা করুন।

নিরপেক্ষ সাম্যাবস্থার শর্তটি নির্ণয় করুন।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) একটি দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল অসমতলীয় বলগোষ্ঠীর কল্পিত কার্যের সূত্র বিবৃত ও প্রমাণ করুন।

বিভাগ – আ

(গ) একটি পাত্রে রক্ষিত কিছু পরিমাণ সমসত্ত্ব তরল উল্লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে সমভাবে ঘূর্ণায়মান। এটির যে কোনো বিন্দুতে চাপ ও সমচাপের তল নির্ণয় করুন।

ρ ঘনত্ব বিশিষ্ট তরলের z গভীরতায় পৃথিবীর আকর্ষণ $a + bz$ হলে সেই গভীরতায় চাপ নির্ণয় করুন। ৮ + ২

(ঘ) কোন বস্তুর পরাকেন্দ্রের (metacentre) অস্তিত্বের শর্ত নির্ণয় করুন এবং সমসত্ত্ব স্থির তরলে অভিকর্ষের দ্বারা প্রভাবিত অবাধে ভাসমান বস্তুর যথাযথ প্রতীক চিহ্নসহ $HM = \frac{Ak^2}{V}$ সূত্রটি প্রমাণ করুন।

২। প্রত্যেক বিভাগ থেকে অন্তত একটি প্রশ্ন নির্বাচন করে যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

বিভাগ – অ

(ক) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুত্রয় বরাবর তিনটি বল P, Q, R একই অভিমুখে সক্রিয়। যদি এদের লব্ধি লম্ববিন্দু দিয়ে যায়, তবে দেখান যে, $P\sec A + Q\sec B + R\sec C = 0$.

(খ) $OBDC$ একটি আয়তক্ষেত্র, যেখানে $OB = b$ এবং $OC = c$; আবার OA ঐ সমতলের উপর লম্ব। OA, CD এবং BD বরাবর, যথাক্রমে X, Y এবং Z বল ক্রিয়াশীল হলে, দেখান যে, লস্কি রেন্চ (wrench)-এর বিশ্লেষিতাংশ বল R এবং দ্বন্দ্ব K-এর মান যথাক্রমে $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ এবং $X(Zb-Yc)\div\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ হবে।

(গ) একটি বস্তুকণা $y=f(x)$ সমীকরণ বিশিষ্ট একটি অমসৃণ সামতলিক বক্ররেখার উপর স্থিতাবস্থায় আছে এবং তাদের উপর প্রযুক্ত বলের x এবং y-অক্ষ বরাবর বিশ্লেষিতাংশ দুটি (X, Y) । প্রমাণ করুন যে, বস্তুকণাটি সেই সমস্ত বিন্দুতেই সাম্যাবস্থায় থাকবে, যেখানে $\left(X+Y\frac{dy}{dx}\right)^2 \le \mu^2\left(X\frac{dy}{dx}-Y\right)^2$, যেখানে μ ঘর্ষণাংক।

বিভাগ – আ

(ঘ) একটি তরলে নিমজ্জিত সমতলীয় ক্ষেত্রের C.G. এবং C.P.-এর তরলের মুক্তক্ষেত্র থেকে প্রারম্ভিক গভীরতা যথাক্রমে z এবং ζ হলে এবং তরলের গভীরতা y পরিমাণ বর্ধিত হলে, নতুন মুক্তক্ষেত্র থেকে নতুন C.P. (C') -এর গভীরতা $\bar{\zeta}$ নির্ণয় করুন।

(ঙ) একটি বায়বীয় পদার্থের বায়ুমণ্ডল পরিচলনী সাম্যাবস্থায় থেকে নিম্নলিখিত সূত্রটি সমর্থন করে :

$p = k\rho^\gamma = R\rho T$,

যেখানে p, ρ , T যথাক্রমে চাপ, ঘনত্ব ও উষ্ণতা এবং k, γ , R ধ্রুবক। দেখান যে, $\frac{dT}{dz} = -\alpha = -\frac{g}{R}\frac{\gamma-1}{\gamma}$, যেখানে α একটি ধ্রুবক।

(চ) শীর্ষকোণ 2α বিশিষ্ট ও নিম্নস্থ কারিকারেখা অনুভূমিক, এরূপ একটি শঙ্কু তরল দ্বারা সম্পূর্ণ ভর্তি; প্রমাণ করুন, বক্রতলের উপর লস্কি ঘাতের উল্লম্ব এবং অনুভূমিক বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে $W(1+3\sin^2\alpha)$ এবং $3W\sin\alpha\cos\alpha$, যেখানে শঙ্কুতে রক্ষিত তরলের ওজন W ।

৩। প্রত্যেক বিভাগ থেকে দুটি করে মোট **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

বিভাগ – অ

(ক) একটি যুগ্মবলের বলদুটির প্রয়োগবিন্দু A এবং B এবং তাদের ভ্রামক G । যদি বলদুটির ক্রিয়ারেখা 90° ঘুরে যায়, তবে ওরা H ভ্রামক বিশিষ্ট যুগ্মবল গঠন করে। যখন বল দুটির ক্রিয়ারেখা AB-এর উপর লম্ব হবে, তখন দেখান যে, বল দুটি $\sqrt{G^2+H^2}$ ভ্রামক বিশিষ্ট যুগ্মবল গঠন করে।

(খ) রেন্চ (wrench) বলতে কি বোঝানো হয় ? ব্যাখ্যা করুন।

(গ) একটি সুষম ভারী সুতো অভিকর্ষ অধীনে মুক্তভাবে ঝুলতে থাকলে, ঐ সুতো দ্বারা গঠিত রেখার সমীকরণ লিখুন।

দেখান যে, রেখার নিম্নস্থ বিন্দুর নিকটবর্তী অংশে, সেটি অধিবৃত্তের কাছাকাছি হবে।

(ঘ) বৃত্তাকার পাতের একটি পাদ AOB, যার যে কোনো বিন্দুতে বেধ, OA এবং OB থেকে দূরত্ব দ্বয়ের গুণফলের সমানুপাতী। OA এবং OB-কে অক্ষ ধরে দেখান যে, পাতটির ভরকেন্দ্র $\left(\frac{8a}{15}, \frac{8a}{15}\right)$, যেখানে a পাতটির ব্যাসার্ধ।

বিভাগ – আ

(ঙ) একটি সামন্তরিক ক্ষেত্র যদি যে কোনরকম ভাবে সমসত্ত্ব তরলের মধ্যে নিমজ্জিত থাকে, তবে দেখান যে প্রতিটি কর্ণের প্রান্তবিন্দু দুটিতে চাপের যোগফল সমান।

(চ) ρ এবং σ ঘনত্ব বিশিষ্ট দুটি তরলের মধ্যে a বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র উল্লম্বভাবে ডুবানো হল, যাতে সেটির উপরস্থ বাহুটি মুক্ত তলে থাকে। ρ ঘনত্ব বিশিষ্ট উপরস্থ তরলের গভীরতা $b\ (< a)$। বর্গক্ষেত্রটির উপর ঘাত নির্ণয় করুন।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(ছ) h উচ্চতা ও ρ ঘনত্ব বিশিষ্ট একটি ঘন শঙ্কু, $\sigma(>\rho)$ ঘনত্ব বিশিষ্ট একটি তরলের মধ্যে, শীর্ষবিন্দু নীচস্থ ভাবে ভাসমান। দেখান যে, শঙ্কুটির অক্ষের $h\left(1-\sqrt[3]{\rho/\sigma}\right)$ পরিমাণ দৈর্ঘ্য তরলের বাইরে থাকবে।

(জ) দেখান যে, মিশ্রিত হয় না এরূপ দুটি ভারী সমসত্ত্ব তরলের সাধারণ তল, অনুভূমিক সমতল হবে।

(English Version)

1. Answer any *two* questions taking *one* from each Group : 10 × 2 = 20

Group – A

(a) Establish analytically the existence of an astatic centre for a system of coplanar forces acting on a rigid body. Determine the condition of astatic equilibrium.

(b) State and prove the principle of virtual work for a system of non-coplanar forces acting on a rigid body.

Group – B

(c) Determine the pressure at any point and the surfaces of equal pressure when a mass of homogeneous liquid contained in a vessel revolves uniformly about a vertical axis. If earth's attraction be $a + bz$ at a depth z of a liquid of density ρ, find the pressure at the depth. 8 + 2

(d) Find the condition for existence of metacentre of a body and prove the formula $HM = \frac{Ak^2}{V}$ with usual notation for finding the metacentre of the body floating freely in a homogeneous liquid at rest under gravity.

2. Answer any *three* questions taking at least *one* from each Group : 6 × 3 = 18

Group – A

(a) Three forces P, Q, R act in the same sense along the sides BC, CA, AB of a triangle ABC. If their resultant passes through the orthocentre, then show that $P\sec A + Q\sec B + R\sec C = 0$.

(b) $OBDC$ is a rectangle such that $OB = b$ and $OC = c$; also OA is perpendicular to the plane. Forces X, Y and Z act along OA, CD and BD. Show that the component force R and the couple K of the resultant wrench are $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ and $X(Zb - Yc) \div \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ respectively.

(c) A particle rests on a plane rough curve whose equation is $y = f(x)$ and is acted upon by a force with components (X, Y) along x and y-axis. Prove that the particle will rest in equilibrium at those points for which $\left(X + Y\frac{dy}{dx}\right)^2 \le \mu^2\left(X\frac{dy}{dx} - Y\right)^2$, where μ is the coefficient of friction.

Group – B

(d) If z and ζ be the depths of the C.G. and C.P. respectively of a plane lamina immersed in a liquid, below the free surface in the original position and if the depth of the liquid be increased by y, then find $\bar{\zeta}$ which is the depth of new C.P. (C') below the new free surface.

(e) A gaseous atmosphere having convective equilibrium of temperature satisfies the law $p = k\rho^{\gamma} = R\rho T$, where p, ρ, T are pressure, density and temperature respectively and k, γ, R are constants. Show that $\frac{dT}{dz} = -\alpha = -\frac{g}{R}\frac{\gamma - 1}{\gamma}$, where α is a constant.

(f) A cone, whose vertical angle is 2α, has its lowest generator horizontal and is filled with liquid; prove that the vertical and horizontal components of the resultant pressure on the curved surface are respectively $W(1 + 3\sin^2\alpha)$ and $3W\sin\alpha\cos\alpha$, where W is the weight of the liquid contained in the cone.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

3. Answer any *four* questions taking *two* from each Group : 3 × 4 = 12

Group – A

(a) The constituent forces of a couple of moment G act at A and B. If their lines of action be turned through a right angle, they form a couple of moment H. When they both act at right angles to AB, show that they form a couple of moment $\sqrt{G^2 + H^2}$.

(b) What is meant by Wrench ? Explain.

(c) Write down equation of the curve formed by a uniform heavy inextensible string hanging freely under gravity. Show that in the neighbourhood of lowest point the curve approximates to a parabola.

(d) AOB is a quadrant of a circular plate, the thickness at any point of it varying as the product of the distances of the point from OA and OB. Taking OA and OB as axes, show that C.G. of the quadrant is $\left(\frac{8a}{15}, \frac{8a}{15}\right)$, a being the radius of the plate.

Group – B

(e) If a parallelogram be immersed in any manner in a homogeneous liquid, then prove that the sum of the pressures at the extremities of each diagonal is the same.

(f) A square of side a is dipped vertically in two liquids of densities ρ and σ with the upper side in the free surface. The depth of the upper liquid of density ρ is $b\,(<a)$. Find the thrust on the square.

(g) A solid cone of height h and density ρ is floating in a liquid of density $\sigma(>\rho)$ with its vertex downwards. Show that the length $h\left(1-\sqrt[3]{\rho/\sigma}\right)$ of axis of the cone is outside the liquid.

(h) Show that the common surface of two heavy homogeneous liquids which do not mix is a horizontal plane.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

B.Sc.-803-G