স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

সহায়ক পাঠক্রম (Subsidiary-2)

দ্বিতীয় পত্র (S-2, SMT-II : **Mathematics-II**)

সময় ঃ তিন ঘণ্টা | পূর্ণমান ঃ ১০০

Time : 3 Hours | Full Marks : 100

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ – ক (পূর্ণমান : ৪০)

১। 'ক' অথবা 'খ' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ২০ × ১ = ২০

ক) i) Cauchy sequence-এর সংজ্ঞা দিন। দেখান যে $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_n$ একটি Cauchy sequence

$k \in IN$-এর কোন মানের জন্য

$\left|\frac{2n+3}{5n-12}-\frac{1}{7}\right| < 0\cdot0001,\ \forall\ n > k$ হবে ?

১ + ২ + ২

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

ii) $y = x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ হলে দেখান যে

$$y_n = (-1)^n (n-2)!\left[\frac{x-n}{(x-1)^n}-\frac{x+n}{(x+1)^n}\right].$$

৫

iii) $f(x) = \log_e(1+x)$-এর শর্তাধীন বিস্তৃতি নির্ণয় করুন। ৫

iv) কেন্দ্র-এর সাপেক্ষে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের পাদ-সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৫

খ) i) Cauchy-এর মধ্যম মান তত্ত্বটি বিবৃত ও প্রমাণ করুন। ১ + ৪

ii) $y^2 = 4ax$-এর কোন নাভি জ্যা-র প্রান্তবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ যদি ρ_1 এবং ρ_2 হয় তবে দেখান যে $\rho_1^{-2/3}+\rho_2^{-2/3} = (2a)^{-2/3}$. ৫

iii) যদি $u = \frac{x^2y^2}{x+y}$ হয় তবে দেখান যে

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6u.$$ ৫

iv) $f(x) = |x|+|x-1|+|x-2|$,

$x \in (-\infty,\infty)$-এর সন্ততা নির্ণয় করুন। ৫

২। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ২০ × ১ = ২০

ক) i) দেখান যে

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{1-a^2}, & \text{যখন } a<1 \\ \frac{\pi}{-1+a^2}, & \text{যখন } a>1 \end{cases}$$

৫

ii) সমাধান করুন :

$p^3 - p(x^2+xy+y^2) + xy(x+y) = 0$,

$p = \frac{dy}{dx}$. ৫

iii) $s = c\tan\psi$ বক্রের সমীকরণটি কার্তেসীয় সমীকরণ $y = c\cos h\frac{x}{c}$-এ রূপান্তরিত করুন, যেখানে, $\psi = 0$ যখন $x = 0$, $y = c$. ৫

iv) $y^3 + x^3 = 3axy$ বক্র দ্বারা গঠিত লুপের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। ৫

খ) i) সমাকলন বিদ্যার মৌলিক উপপাদ্যটি বিবৃত ও প্রমাণ করুন। ১ + ৪

ii) $I_n = \int x^n e^{ax}dx$-এর লঘুকরণ করে $\int x^3 e^{2x}dx$-এর মান নির্ণয় করুন। ৩ + ২

iii) সমাধান করুন: $\frac{dy}{dx} + y\cos x = y^n \sin 2x$. ৫

iv) $\iint_E \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$-এর মান নির্ণয় করুন যেখানে E , $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তের উপরিভাগ। ৫

বিভাগ – খ (পূর্ণমান : ৩৬)

৩। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১২ × ১ = ১২

ক) i) অবকলনের প্রথম নীতি থেকে x^{2x}, $x > 0$-এর অবকল গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন। ৬

ii) যদি $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ কে কোন (x,y,z)-এর অপেক্ষক দিয়ে গুণ করলে perfect differential হয় প্রমাণ করুন যে

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

৬

খ) i) শ্রেণীগুলির অভিসারিতা যাচাই করুন :

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots$

(b) $\sum_2^{\infty} 1/\log n$ ৩ + ৩

ii) যদি

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)\ , & \text{যখন } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{যখন } x^2+y^2=0\end{cases}$$

হয় তবে দেখান যে $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$. ৬

৪। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১২ × ১ = ১২

ক) i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{n^2}{(n+1)^3}+\frac{n^2}{(n+2)^3}+\ldots+\frac{1}{8n}\right]$

-এর মান নির্ণয় করুন। ৬

ii) যদি $U_n=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$ এবং

$V_n=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$ হয় তবে দেখান যে

$U_n=V_n$ এবং $U_n=\frac{n-1}{n}V_{n-2}$ $(n\geq 2)$. ৬

খ) i) প্রচল ভেদের পদ্ধতি ব্যবহার করে সমাধান করুন :

$(D^2+2D+1)y=e^{-x}\log x$, $D\equiv\frac{d}{dx}$.

৬

ii) $y^2(a-x)=x^3$ এবং এটির অসীম পথের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। ৬

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

৫। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১২ × ১ = ১২

ক) i) $f(x,y)=4x^2-xy+4y^2+x^3y+xy^3-4$

বক্রের চরম ও অবম মান নির্ণয় করুন। ৬

ii) মান নির্ণয় করুন :

(x) $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^4}\,dx$

(y) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ৩ + ৩

খ) i) $x^2(x^2-y^2)(x-y)+2x^3(x-y)-4y^3=0$

বক্রের অসীম পথসমূহ নির্ণয় করুন। ৬

ii) মান নির্ণয় করুন: $I=\int\limits_0^{\pi}\log(1+\cos x)\,dx$. ৬

বিভাগ – গ (পূর্ণমান : ২৪)

৬। যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

i) $r=f(\theta)$ বক্রের বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

ii) $x^2=4y$, $y(x^2+4)=8$ বক্রদ্বয়ের মধ্যেকার কোণ নির্ণয় করুন।

iii) $u = \dfrac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$ হলে

$x^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2 u_{yy}$ -এর মান কত হবে ?

iv) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

v) দেখান যে $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x) < x,\ x > 0$.

vi) $p^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$ হলে দেখান যে $p + \dfrac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}\theta^2} = \dfrac{a^2 b^2}{p^3}$.

vii) দেখান যে $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্রের স্পর্শক অক্ষদ্বয়কে যে দূরত্বে ছেদ করে তাদের যোগফল ধ্রুবক।

viii) $f(x) = x^n$ হলে দেখান যে

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \frac{f'''(1)}{3!} + \ldots + \frac{f^n(1)}{n!} = 2^n .$$

৭। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ২ = ৬

i) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x + 2\sin x}$ -এর সমাকল করুন।

ii) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-y^2} [(x-1)^2 + y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ -এর মান কত ?

iii) $x^2 = 4y$ -এর শীর্ষবিন্দু থেকে যে বিন্দুর কোটি $x = 2$ সেই বিন্দু পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

iv) দেখান যে $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}$.

৮। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ২ = ৬

i) সমাধান করুন : $(D^2 + 3D + 2)y = e^{e^x}$.

ii) $y^3 = c_1 x$ এবং $x^2 + by^2 = c_2$ পরস্পর লম্ব প্রক্ষেপ পথগোষ্ঠী হলে b-এর মান নির্ণয় করুন, যেখানে c_1 , c_2 ধ্রুবক।

iii) সমাধান করুন : $x^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = x + 6y$.

iv) যদি $\dfrac{l\,\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + g\theta = 0$, যখন $\theta = \alpha$, $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$, $t = 0$ হলে দেখান যে $\theta = \alpha \cos\left(\dfrac{\sqrt{g}}{l}\, t\right)$.

(English Version)

Group – A (Marks : 40)

1. Answer **(a)** or **(b)** : 20 × 1 = 20

a) i) Define a Cauchy sequence. Show that $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_n$ is a Cauchy sequence. Find $k \in \mathbb{N}$ for which $\left|\frac{2n+3}{5n-12}-\frac{1}{7}\right|<0\cdot0001,\ \forall\ n>k$.

1 + 2 + 2

ii) If $y=x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ then show that $y_n=(-1)^n(n-2)!\left[\frac{x-n}{(x-1)^n}-\frac{x+n}{(x+1)^n}\right]$.

5

iii) Find the expansion of $f(x)=\log_e(1+x)$ with restriction. 5

iv) Find the pedal equation of $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ w.r.t. the centre. 5

b) i) State and prove Cauchy's mean value theorem. 1 + 4

ii) If ρ_1,ρ_2 are the radii of curvatures at the ends of a focal chord to $y^2=4ax$ then show that $\rho_1^{-2/3}+\rho_2^{-2/3}=(2a)^{-2/3}$. 5

iii) If $u=\frac{x^2y^2}{x+y}$ then prove that $x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=6u$. 5

iv) Discuss the continuity of the function $f(x)=|x|+|x-1|+|x-2|$, $x\in(-\infty,\infty)$. 5

2. Answer **(a)** or **(b)** : 20 × 1 = 20

a) i) Show that $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}=\begin{cases}\frac{\pi}{1-a^2}, \text{if } a<1\\ \frac{\pi}{-1+a^2}, \text{if } a>1\end{cases}$

5

ii) Solve : $p^3-p(x^2+xy+y^2)+xy(x+y)=0$ where $p=\frac{dy}{dx}$. 5

iii) Convert $s=c\tan\psi$ into its Cartesian equation $y=c\cos h\frac{x}{c}$ when $\psi=0$ at $x=0,\ y=c$. 5

iv) Find the area of the loop of the curve $y^3 + x^3 = 3axy$. 5

b) i) State and prove the fundamental theorem of integral calculus. 1 + 4

ii) Form the reduction formula of $I_n = \int x^n e^{ax} dx$. Hence find the value of $\int x^3 e^{2x} dx$. 3 + 2

iii) Solve $\frac{dy}{dx} + y \cos x = y^n \sin 2x$. 5

iv) Evaluate $\iint_E \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$

where E is the upper part of the circle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. 5

Group – B (Marks : 36)

3. Answer **(a)** or **(b)** : 12 × 1 = 12

a) i) From the first principle find the differential coefficient of x^{2x}, $x > 0$. 6

ii) If $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ becomes a perfect differential after multiplying by a function of (x, y, z) then prove that

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

6

b) i) Test the convergence of the series

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots$

(b) $\sum_2^\infty 1/\log n$ 3 + 3

ii) If

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\log(x^2 + y^2) & \text{, when } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{when } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

then show that $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$. 6

4. Answer **(a)** or **(b)** : 12 × 1 = 12

a) i) Find the value of

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \ldots + \frac{1}{8n}\right]$$

6

ii) If $U_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ and

$V_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ then show that

$U_n = V_n$ and $U_n = \frac{n-1}{n} V_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

6

b) i) Solve by variation of parameters method :

$(D^2 + 2D + 1)y = e^{-x} \log x$ where

$D \equiv \frac{d}{dx}$. 6

ii) Find the area between the curve $y^2(a-x)=x^3$ and its asymptote. 6

5. Answer **(a)** or **(b)** : 12 × 1 = 12

a) i) Find the maximum, minimum values of the function

$f(x,y)=4x^2-xy+4y^2+x^3y+xy^3-4$ 6

ii) Evaluate :

(x) $\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$

(y) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 3 + 3

b) i) Determine the asymptotes of the curve

$x^2(x^2-y^2)(x-y)+2x^3(x-y)-4y^3=0$ 6

ii) Evaluate : $I=\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\,dx$. 6

Group – C (Marks : 24)

6. Answer any *four* questions : 3 × 4 = 12

i) Determine the formula of radius of curvature to the curve $r=f(\theta)$.

ii) Find the angle between the curves $x^2=4y$, $y(x^2+4)=8$ at the pts of intersection.

iii) If $u=\frac{x^{1/4}+y^{1/4}}{x^{1/5}+y^{1/5}}$ then find the value of $x^2u_{xx}+2xy\,u_{xy}+y^2u_{yy}$.

iv) Find the value of $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

v) Show that $\frac{x}{1+x}<\log(1+x)<x$, $x>0$.

vi) If $p^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$ then show that $p+\frac{d^2p}{d\theta^2}=\frac{a^2b^2}{p^3}$.

vii) Show that sum of the intercept parts to the axes of the tangent to the curve $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ is constant.

viii) If $f(x)=x^n$, then show that

$f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f''(1)}{2!}+\frac{f'''(1)}{3!}+\ldots+\frac{f^n(1)}{n!}=2^n$.

7. Answer any *two* questions : 3 × 2 = 6

i) Integrate : $\int \frac{dx}{2+\cos x+2\sin x}$.

ii) Evaluate $\int_0^1\int_0^{1-y^2}[(x-1)^2+y^2]\,dx\,dy$.

iii) Find the length of the arc $x^2 = 4y$ from the vertex to the point whose ordinate is $x = 2$.

iv) If $n \in \mathbb{N}$ then show that $\lceil (n+1) = n!$.

8. Answer any *two* questions : $3 \times 2 = 6$

i) Solve : $(D^2 + 3D + 2)y = e^{e^x}$.

ii) If $y^3 = c_1 x$ and $x^2 + by^2 = c_2$ are orthogonal trajectory to each other then find the value of b, where c_1 and c_2 are constants.

iii) Solve : $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = x + 6y$.

iv) If $\frac{l\,d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0$, when $\theta = \alpha$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, $t = 0$ then show that $\theta = \alpha \cos\left(\frac{\sqrt{g}}{l}\, t\right)$.