স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

প্রথম পত্র (1st Paper : **Differential Calculus and its Geometrical Applications**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা | **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) যুগ্ম ও অযুগ্ম x-অপেক্ষকের সংজ্ঞা দিন। একটি অপেক্ষকের উদাহরণ দিন যা যুগ্ম বা অযুগ্ম কোনোটিই নয়।

বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা অপেক্ষক (greatest integer function) $f(x)=[x]$-এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন। ২ + ১ + ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) যদি $f(a)=3$, $f'(a)=2$, $g(a)=-2$ এবং $g'(a)=5$ হয়, তাহলে $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x).f(a)-g(a).f(x)}{x-a}$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৪

২। (ক) লাইবনিৎস (Leibnitz)-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করুন। $y=x^{n-1}.\log x$ হলে, প্রমাণ করুন যে $y_n=\dfrac{(n-1)!}{x}$. ২ + ৪

(খ) প্রমাণ করুন যে একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত বৃহত্তম ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ হবে। ৪

৩। (ক) ল্যাগরাঞ্জ (Lagrange)-এর মধ্যমান উপপাদ্যটির বিবৃতি দিন।

কোনো এক অন্তরালে x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f'(x)=0$ হলে, প্রমাণ করুন যে ঐ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকটি ধ্রুবক। ২ + ৪

(খ) মান নির্ণয় করুন : $\lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\log x}\right\}$. ৪

৪। (ক) যদি $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, যখন $x^2+y^2\neq 0$

এবং $f(0,0)=0$ হয় তবে

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$-এর অস্তিত্ব আছে কিনা পরীক্ষা করুন। ৪

(খ) যদি $u = x\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + y\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ হয়, তবে (1, 1) বিন্দুতে $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$-এর মান নির্ণয় করুন। ৬

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। $ax^2 + by^2 = 1$ এবং $a'x^2 + b'y^2 = 1$ কণিক দুটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করবে তার শর্ত নির্ণয় করুন।

৬। যদি $lx + my = n$ সরলরেখাটি $\frac{x^p}{a^p} + \frac{y^p}{b^p} = 1$ বক্ররেখাটিকে স্পর্শ করে তবে দেখান যে, $(al)^{\frac{p}{p-1}} + (bm)^{\frac{p}{p-1}} = n^{\frac{p}{p-1}}$, $p \neq 1$.

৭। $by^2 = (x+a)^3$ বক্ররেখার যে কোনো বিন্দুতে প্রমাণ করুন, (উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য) ^{2} $\propto$ (উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য)।

৮। দেখান যে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের পরাক্ষের একটি প্রান্ত বিন্দুতে, উহার বক্রতা ব্যাসার্ধ, উপবৃত্তটির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক।

৯। দেখান যে, $x^2y - y^3 - 2ay^2 + 5x - 7 = 0$ বক্ররেখাটির অসীমপথগুলি a^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

১০। $x\sec^3\theta + y\,\text{cosec}^3\theta = c$, (θ হচ্ছে প্যারামিটার) সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় করুন।

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। দেওয়া আছে $A = R$ বাস্তব সংখ্যার সেট, $B = \{y \in R \mid -1 < y < 1\}$. দেখান যে $f : A \to B$ এবং $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ অপেক্ষকটি এক-এক সম্বন্ধযুক্ত এবং অনটু (onto) অপেক্ষক।

১২। সকল বাস্তব মান x এবং y-এর জন্য f অপেক্ষকটি যদি $f(x+y) = f(x) + f(y)$ সম্পর্ক সিদ্ধ করে, তবে প্রমাণ করুন যে, (i) $f(0) = 0$, (ii) $f(-x) = -f(x)$ এবং (iii) $f(x) = kx$,

যেখানে $f(1) = k$ এবং x একটি যে কোনো পূর্ণসংখ্যা।

১৩। $x = 0$ বিন্দুতে নিম্নলিখিত অপেক্ষকটি সন্তত কিনা আলোচনা করুন :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2 x}{3x}, & x \neq 0 \\ \frac{2}{3}, & x = 0 \end{cases}$$

১৪। $\sin u = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ এবং $\tan v = \frac{2x}{1-x^2}$ হলে $\frac{du}{dv}$ নির্ণয় করুন।

১৫। x-এর কোন্ মান (range of values of x)-এর জন্য $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ অপেক্ষকটি ক্রমহ্রাসমান হবে যখন x-এর মান ক্রমবর্ধমান ?

১৬। $f(x) = x(x-1)(x-3)$ অপেক্ষকটিতে $[0, 4]$ অন্তরালে ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করা যায় কিনা আলোচনা করুন।

১৭। প্রমাণ করুন যে, $y = x^3 - 3x^2$ বক্ররেখাটির $(1, -2)$ বিন্দুটি একটি ইনফ্লেকশন বিন্দু।

১৮। যদি (i) $f(x)$, $[a-h, a+h]$ অন্তরালে সন্তত হয়, (ii) $(a-h, a+h)$ অন্তরালে $f'(x)$-এর অস্তিত্ব থাকে, $(h > 0)$ এবং (iii) $f''(a)$-র অস্তিত্ব থাকে, তবে দেখান যে,

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Define even and odd functions of x. Give an example which is neither even nor odd function of x.
Draw the graph of the function $f(x) = [x]$, where $[x]$ denotes the greatest integer not exceeding x. 2 + 1 + 3

b) If $f(a) = 3$, $f'(a) = 2$, $g(a) = -2$ and $g'(a) = 5$, then find the value of $\lim_{x \to a} \frac{g(x).f(a) - g(a).f(x)}{x - a}$. 4

2. a) State Leibnitz's theorem.
If $y = x^{n-1}.\log x$, show that $y_n = \frac{(n-1)!}{x}$. 2 + 4

b) Show that the maximum triangle which can be inscribed in a circle is equilateral. 4

3. a) State Lagrange's Mean Value Theorem.
If $f'(x) = 0$ for all real values of x in an interval, then prove that $f(x)$ is constant in that interval. 2 + 4

b) Evaluate : $\lim_{x \to 1} \left\{ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right\}$. 4

4. a) If $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, when $x^2 + y^2 \neq 0$ and $f(0,0) = 0$, then examine the existence of $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$. 4

b) If $u = x\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + y\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, find the value of $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ at (1, 1). 6

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Find the condition that the conics $ax^2 + by^2 = 1$ and $a'x^2 + b'y^2 = 1$ shall cut orthogonally.

6. If $lx + my = n$ touches the curve $\frac{x^p}{a^p} + \frac{y^p}{b^p} = 1$, show that $(al)^{\frac{p}{p-1}} + (bm)^{\frac{p}{p-1}} = n^{\frac{p}{p-1}}$, $p \neq 1$.

7. Show that at any point on the curve $by^2 = (x+a)^3$, (length of subtangent)$^2 \propto$ (length of subnormal).

8. Show that for the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, the radius of curvature at an extremity of the major axis is equal to half the latus rectum.

9. Prove that the asymptotes of the curve $x^2y - y^3 - 2ay^2 + 5x - 7 = 0$ form a triangle of area a^2.

10. Find the envelope of the family of straight lines $x\sec^3\theta + y\,\mathrm{cosec}^3\theta = c$, θ being parameter.

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Given, the set of real numbers being *R*, $A = R$, $B = \{y \in R \mid -1 < y < 1\}$. Show that $f : A \to B$ and $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ is one to one and onto.

12. If the function f satisfies the relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$, for all real values of x and y, prove that (i) $f(0) = 0$, (ii) $f(-x) = -f(x)$ and (iii) $f(x) = kx$ where x is an integer and $f(1) = k$.

13. Discuss the continuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2 x}{3x}, & x \neq 0 \\ \frac{2}{3}, & x = 0 \end{cases}$$

at the point $x = 0$.

14. If $\sin u = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ and $\tan v = \frac{2x}{1-x^2}$, find $\frac{du}{dv}$.

15. For what range of values of x, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ decreases as x increases ?

16. Discuss the applicability of Lagrange's Mean Value Theorem to $f(x) = x(x-1)(x-3)$ in [0, 4].

17. Prove that $(1, -2)$ is a point of inflexion of the curve $y = x^3 - 3x^2$.

18. If (i) $f(x)$ is continuous in $[a-h, a+h]$,
(ii) $f'(x)$ exists in $(a-h, a+h)$, $(h > 0)$ and
(iii) $f''(a)$ exists,
then show that

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$