স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৬ ও জুন, ২০১৭

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

দ্বিতীয় পত্র (2nd Paper : **Integral Calculus and Differential Equations**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা | পূর্ণমান ঃ ৫০

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞার সাহায্যে $\int_0^5 (3x-1)\,dx$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৪

(খ) মান নির্ণয় করুন : $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$. ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(গ) নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞার সাহায্যে দেখান যে

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\theta}{n}+\sin\frac{2\theta}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\theta}{n}\right]=\frac{1-\cos\theta}{\theta}.$$

৩

২। (ক) মান নির্ণয় করুন :

i) $\int_0^{\pi}\frac{x\,dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x},(a,b>0)$

ii) $\int\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}\,dx$. ৩ + ৩

(খ) মান নির্ণয় করুন :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+2k}+\frac{1}{n+3k}+\ldots\frac{1}{n+nk}\right],\ k\neq 0$$

৪

৩। (ক) দেখান যে $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ এবং অতঃপর দেখান $\Gamma(n+1)=n!$. ৩ + ১

(খ) প্রমাণ করুন : $\int_0^{\infty}e^{-x^4}\,dx.\int_0^{\infty}e^{-x^4}x^2\,dx=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

৩

(গ) মান নির্ণয় করুন : $\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos(x-\alpha)}}$. ৩

৪। (ক) সমাধান করুন : $\frac{dy}{dx}+\frac{y(\log y)}{x}=\frac{y(\log y)^2}{x^2}$. ৫

(খ) $r=a(1+\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েড প্রারম্ভিক রেখার চারিদিকে আবর্তিত হলে উদ্ভূত আয়তন নির্ণয় করুন।

৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। $\int \sec^n x\,dx$; (যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)-এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় করুন এবং তারপর $\int \sec^6 x\,dx$-এর মান নির্ণয় করুন। ৪ + ২

৬। মান নির্ণয় করুন : $\iint_E \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)}$; যেখানে E হল $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$-এর একটি লুপ। ৬

৭। একগুচ্ছ সমফোকাস যুক্ত উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$; যেখানে λ যদৃচ্ছ ধ্রুবক। এই সমীকরণের অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৬

৮। সমাধান করুন : $(y^2+2x^2y)dx+(2x^3-xy)dy=0$. ৬

৯। নিচের সমীকরণটিকে স্বভাবী আকারে প্রকাশ করুন, তারপর সমাধান করুন : ৬

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+(4x^2-1)y=-3e^{x^2}\sin 2x\,.$$

১০। মান নির্ণয় করুন : $\int_C \{(x+y^2)dx+(x^2-y)dy\}$,

যেখানে C : $y^3=x^2$ এবং $y=x$-এর মধ্যবর্তী আবদ্ধ বক্ররেখা দক্ষিণাবর্ত বরাবর (positively oriented)। ৬

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। সমাকল করুন : $\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

১২। মান নির্ণয় করুন : $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x.\cos^5 x\,dx$.

১৩। স্বাধীন চলের পরিবর্তন দ্বারা নিচের সমীকরণের সমাধান করুন : $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x(1+x^2)\frac{dy}{dx}+4y=0$.

১৪। সমাধান করুন :

$$p^3-p(x^2+xy+y^2)+xy(x+y)=0\,;\left[p=\frac{dy}{dx}\right].$$

১৫। লিমিট পরীক্ষার সাহায্যে পরীক্ষা করুন যে $\int_1^\infty \frac{x\tan^{-1}x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$ অভিসারী না অপসারী।

১৬। সমাকল করুন : $\int \frac{\cos^{-1}x}{x^3}dx$.

১৭। যদি $u_n=\int_0^{\pi/2} x^n\tan^{-1}x\,dx$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $(n+1)u_n+(n-1)u_{n-2}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}$.

১৮। মান নির্ণয় করুন : $\iint_E (x^2+y^2)dx\,dy$,

যেখানে E : $xy=1$, $y=0$, $y=x$, $x=2$ রেখাগুলি দিয়ে আবদ্ধ ক্ষেত্র।

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Using the definition of definite integral, evaluate $\int_0^5 (3x-1)\,dx$. 4

b) Evaluate : $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$. 3

c) Using the definition of definite integral, show that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{\theta}{n}+\sin\frac{2\theta}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\theta}{n}\right]=\frac{1-\cos\theta}{\theta}.$$

3

2. a) Evaluate :

i) $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}, (a,b>0)$

ii) $\int \frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}\,dx$. 3 + 3

b) Evaluate :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+2k}+\frac{1}{n+3k}+\ldots\frac{1}{n+nk}\right],\ k\neq 0$$

4

3. a) Show that $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ and hence show that $\Gamma(n+1)=n!$. 3 + 1

b) Prove that $\int_0^{\infty} e^{-x^4}\,dx . \int_0^{\infty} e^{-x^4}x^2\,dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

3

c) Evaluate : $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos(x-\alpha)}}$. 3

4. a) Solve : $\frac{dy}{dx}+\frac{y(\log y)}{x}=\frac{y(\log y)^2}{x^2}$. 5

b) Evaluate the volume enclosed by the surface obtained by revolving the cardioid $r=a(1+\cos\theta)$ about its initial line. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Obtain the reduction formula of $\int \sec^n x\,dx$ (where n is a $+ve$ integer) and hence evaluate $\int \sec^6 x\,dx$. 4 + 2

6. Evaluate : $\iint_E \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)}$; where E is a loop of $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$. 6

7. Obtain the differential equation of the family of confocal ellipses $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$; where λ is a parameter. 6

8. Solve : $(y^2+2x^2y)dx+(2x^3-xy)dy=0$. 6

9. Reduce the differential equation
$\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + (4x^2 - 1)y = -3e^{x^2}\sin 2x$ to normal form and then solve it. 6

10. Evaluate : $\int_C \{(x + y^2)dx + (x^2 - y)dy\}$, where C is the positively oriented curve enclosed by $y^3 = x^2$ and $y = x$. 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Evaluate : $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$.

12. Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x . \cos^5 x\, dx$.

13. Solve by change of independent variable :
$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

14. Solve : $p^3 - p(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y) = 0$;
$\left[p = \frac{dy}{dx}\right]$.

15. Using limit test check whether $\int_1^{\infty} \frac{x\tan^{-1} x}{\sqrt[3]{1 + x^4}} dx$ is divergent or not.

16. Integrate : $\int \frac{\cos^{-1} x}{x^3} dx$.

17. If $u_n = \int_0^{\pi/2} x^n \tan^{-1} x\, dx$, then prove that $(n + 1)u_n + (n - 1)u_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$.

18. Evaluate : $\iint_E (x^2 + y^2)dx\, dy$, where E is the region enclosed by $xy = 1$, $y = 0$, $y = x$, $x = 2$.