## স্নাতক পাঠক্রম ( B.D.P.)

**শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা** ( Term End Examination ) :

**ডিসেম্বর, ২০১৬ ও জুন, ২০১৭**

# গণিত ( Mathematics )

*ঐচ্ছিক পাঠক্রম ( Elective )*

**প্রথম পত্র** ( 1st Paper : **Differential Calculus and its Geometrical Applications** )

**সময় ঃ দুই ঘণ্টা** | **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

( মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% )

( Weightage of Marks : 70% )

**পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।**

**অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।**

**Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.**

### বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) $f(x)=\dfrac{1}{2-\cos 4x}$ অপেক্ষকটির প্রসার (Range) নির্ণয় করুন। ৩

(খ) $f(x)=|x-1|+|x+1|$-এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন। ৩



[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য



(গ) একটি অপেক্ষক $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x},\ x\neq 0$

$= 0, \qquad x = 0$

এর জন্য দেখান যে এটি $x = 0$ তে সন্তত কিন্তু $f'(0)$-এর অস্তিত্ব নেই। ২ + ২

২। (ক) $f(x)=\tan x$ এবং $n$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। Leibnitz-এর উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে,

$$f^n(0)-{}^nC_2 f^{n-2}(0)+{}^nC_4 f^{n-4}(0)-\ldots=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

৫

(খ) $f(x)=x^{\frac{1}{x}},\ x>0$ অপেক্ষকটি ব্যবহার করে $e^\pi$ ও $\pi^e$-এর মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তর নির্ণয় করুন। ৫

৩। (ক) কসি (Cauchy)-র মধ্যমান উপপাদ্যটি বিবৃত করুন। যদি [ 0, 1 ] অন্তরালে $f'(x)$-এর অস্তিত্ব থাকে তাহলে কসি-র মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে $f(1)-f(0)=\dfrac{f'(x)}{2x}$ সমীকরণের ( 0, 1 ) অন্তরালে অন্তত একটি বীজ আছে। ৩ + ৩

(খ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin 2x-b\sin x}{x^3}=1$ হলে, $a$ ও $b$-এর মান নির্ণয় করুন। ৪

৪। (ক) যদি $u = x^y$ হয় তবে প্রমাণ করুন $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. ৪

(খ) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ এবং $r > 0$ হলে দেখান যে $f(x,y)$-এর ক্ষেত্রে $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}.\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}.\frac{\sin\theta}{r}$ এবং $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}.\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}.\frac{\cos\theta}{r}$. ৬

## বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। প্রমাণ করুন যে $r^n = a^n\cos n\theta$ এবং $r^n = b^n\sin n\theta$ স্পাইরাল দুটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করেছে। ৬

৬। $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $lx + my = 1$ একটি অভিলম্ব হলে প্রমাণ করুন যে $al^3 + 2alm^2 = m^2$. ৬

৭। প্রমাণ করুন যে একটি নাভির সাপেক্ষে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের পেডাল সমীকরণ (Pedal equation) হবে $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$. ৬

৮। প্রমাণ করুন যে $y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ বক্ররেখার যে কোনো বিন্দু $(x, y)$-এ বক্রতা ব্যাসার্ধ $\frac{y^2}{a}$. ৬





৯। $x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$ বক্ররেখাটির অসীম পথগুলি নির্ণয় করুন। ৬

১০। অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$-এর বক্রতা কেন্দ্রজ (evolute) নির্ণয় করুন। ৬

## বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ অপেক্ষক (চিত্রণ) দুটি 1-1 অপেক্ষক হলে প্রমাণ করুন যে সংযোজক অপেক্ষক $g\ o\ f$ 1-1 হবে (একৈক) অপেক্ষক (চিত্রণ)। ৩

১২। $f(0)$-এর মান কত হলে, $f$ অপেক্ষকটি, যেখানে $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$, $x \neq 0$ দ্বারা সংজ্ঞাত, $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত হবে ? ৩

১৩। যদি $f(x) = x$, $0 < x < 1$
$= 2 - x$, $1 \leq x \leq 2$
$= x - \frac{1}{2}x^2$, $x > 2$ হয় তবে $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে $f'(x)$-এর অস্তিত্ব আছে কি ? ৩

১৪। $\sin y = x\sin(a + y)$ হলে প্রমাণ করুন যে $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$. ৩

১৫। প্রমাণ করুন যে একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পরম (বৃহত্তম) হবে যখন আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র। ৩

১৬। রোলের (Rolle) উপপাদ্য প্রয়োগ করে $f(x) = x^2 - 5x + 6$ অপেক্ষকের অন্তরকলজের [ $f'(x) = 0$ -এর ] ( 1, 4 ) এই অন্তরালে একটি বীজ আছে, প্রমাণ করুন। ৩

১৭। $y = (x-a)e^{x-a}$ বক্ররেখার ইনফ্লেক্শন বিন্দু নির্ণয় করুন। ৩

১৮। $(x-2)^2 = y(y-1)^2$ বক্ররেখাটির দ্বিবিন্দুর (double points) অস্তিত্ব আছে কিনা নির্ণয় করুন। ৩



[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য



**( English Version )**

**Group – A**

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Find the Range of the function $f(x) = \frac{1}{2 - \cos 4x}$. 3

   b) Draw the graph of the function $f(x) = |x-1| + |x+1|$. 3

   c) For the function $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$
   $= 0$, $x = 0$
   show that $f$ is continuous at $x = 0$ but $f'(0)$ does not exist. 2 + 2

2. a) Let $f(x) = \tan x$ and let $n$ be a positive integer. Prove, using Leibnitz's theorem, that
   $$f^n(0) - {}^nC_2 f^{n-2}(0) + {}^nC_4 f^{n-4}(0) - \ldots = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$
   5

   b) Use the function $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ to determine the greater of two numbers $e^\pi$ and $\pi^e$. 5

3. a) State Cauchy's Mean Value Theorem.
   If $f'(x)$ exists in [ 0, 1 ], then show by Cauchy's Mean Value Theorem that $f(1) - f(0) = \frac{f'(x)}{2x}$ has at least one solution in the interval ( 0, 1 ). 3 + 3

   b) Obtain the values of $a$ and $b$ so that $\lim_{x \to 0} \frac{a\sin 2x - b\sin x}{x^3} = 1$. 4

4. a) If $u = x^y$, prove that $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. 4

   b) If $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ and $r > 0$, then prove that for the function $f(x, y)$,

   $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos.\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}.\frac{\sin\theta}{r}$

   and $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}.\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}.\frac{\cos\theta}{r}$. 6

**Group – B**

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Prove that the curves $r^n = a^n \cos n\theta$ and $r^n = b^n \sin n\theta$ cut orthogonally. 6

6. If $lx + my = 1$ is a normal to the parabola $y^2 = 4ax$, then show that $al^3 + 2alm^2 = m^2$. 6

7. Show that the pedal equation of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ with respect to a focus is $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$. 6

8. Prove that the radius of curvature at any point $(x, y)$ for the curve $y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ is $\frac{y^2}{a}$. 6

9. Find the asymptotes of the cubic $x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$. 6

10. Find the evolutes of the parabola $y^2 = 4ax$. 6





**Group – C**

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Let $f : A \to B$ and $g : B \to C$ be two one-one mappings. Prove that the composite mapping $g\ o\ f$ is also one-one. 3

12. What should be the value of $f(0)$ so that $f$ defined by $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$ for $x \neq 0$ be continuous at $x = 0$ ? 3

13. If $f(x) = x$ for $0 < x < 1$

    $= 2 - x$ for $1 \leq x \leq 2$

    $= x - \frac{1}{2}x^2$ for $x > 2$, then

    does $f'(x)$ exist at $x = 1$ and $x = 2$ ? 3

14. If $\sin y = x\sin(a + y)$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a + y)}{\sin a}$. 3

15. Show that the maximum rectangle inscribable in a circle is a square. 3

16. Applying Rolle's theorem on the function $f(x) = x^2 - 5x + 6$, prove that $f'(x) = 0$ has a root in $1 < x < 4$. 3

17. Find the point of inflexion of the curve $y = (x - a)e^{x-a}$. 3

18. Determine the existence of the double points on the curve $(x - 2)^2 = y(y - 1)^2$. 3