

QP Code : 18UT102EMT1

স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা  
( BDP Term End Examination )  
ডিসেম্বর, ২০১৭ ও জুন, ২০১৮  
( December-2017 & June-2018 )  
ঐচ্ছিক পাঠক্রম ( Elective Course )  
গণিত ( Mathematics )  
প্রথম পত্র ( 1st Paper )

Differential Calculus and its Geometrical  
Applications : EMT-1

সময় : দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান : ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব : ৭০% ( Weightage of Marks : 70% )

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।  
অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর  
কেটে নেওয়া হবে। উপাত্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।  
**Special credit will be given for accuracy and relevance  
in the answer. Marks will be deducted for incorrect  
spelling, untidy work and illegible handwriting.**  
**The weightage for each question has been  
indicated in the margin.**

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :  $১০ \times ২ = ২০$

১। (ক) দেখান যে  $f(x) = \frac{x-1}{x}$ ,  $x > 0$ ,  $x$ -এর ক্রমবর্ধমান  
অপেক্ষক এবং  $g(x) = \frac{1-x}{x}$ ,  $x > 0$ ,  $x$ -এর  
ক্রমক্ষীয়মান অপেক্ষক। ৩

B.Sc.-11160-P

[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

QP Code : 18UT102EMT1 2

- (খ) নির্ণয় করুন :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{1-x^2}$ . ৩
- (গ)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন করুন  
এবং এর থেকে  $x = 0$  বিন্দুতে  $f(x)$  সম্মত কিনা  
পরীক্ষা করুন। ২ + ২
- ২। (ক) লাইবনিৎস-এর উপপাদ্যটির বিবৃতি দিন এবং প্রমাণ  
করুন। ৫
- (খ) যদি  $y = \cos(10 \cos^{-1} x)$  হয় তবে প্রমাণ করুন  
 $(1-x^2)y_{12} = 21xy_{11}$ . (এখানে  $y_n = \frac{d^n y}{dx^n}$ ) ৫
- ৩। (ক) রোলের উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং রোলের  
উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্য ব্যাখ্যা করুন। ৪
- (খ) রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করে  
 $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$  অপেক্ষকটির  
অন্তরকলজের,  $(-1,1)$  অন্তরালে, অন্তত একটি বীজ  
আছে প্রমাণ করুন। ৩
- (গ) যদি কোনও অন্তরালের সকল মান  $x$ -এর জন্য  
 $f'(x) = 0$  হয়, তবে দেখান যে ঐ অন্তরালে  $f(x)$   
একটি ধ্রুবক। ৩
- ৪। (ক)  $u = e^{xyz}$  হলে প্রমাণ করুন যে  
 $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$ . ৫
- (খ) যদি  $u = x \sin^{-1} \frac{y}{x} + y \tan^{-1} \frac{x}{y}$  হয়, তবে  $(1,1)$   
বিন্দুতে  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৫

B.Sc.-11160-P

## বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :  $৬ \times ৩ = ১৮$

৫। প্রমাণ করুন  $ax^2 + by^2 = 1$  এবং  $a'x^2 + b'y^2 = 1$  পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করবে যদি  $\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b'}$  হয়। ৬

৬। যদি  $p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$  রেখাটি

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$$
 বক্ররেখাকে স্পর্শ করে তবে

প্রমাণ করুন যে,  $p^n = (a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n$ . ৬

৭। দেখান যে  $r = 2a \cos \theta$  বৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর সাপেক্ষে সেটির পেডাল সমীকরণ  $2pa = r^2$ . ৬

৮।  $y - x = x^2 + 2xy + y^2$  কণিকটির মূলবিন্দুতে সেটির বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন। ৬

৯।  $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$  অধিবৃত্ত পরিবারের পরিস্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন যেখানে  $ab = k^2$ ,  $a$  ও  $b$  চলমান প্যারামিটার ( $k$  একটি ধ্রুবক)। ৬

১০। প্রমাণ করুন যে  $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 + x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$  বক্ররেখার অসীম পথগুলি, বক্ররেখার সঙ্গে যে সকল বিন্দুতে ছেদ করে তারা একটি সমপরাবৃত্তের উপর অবস্থিত। ৬

## বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :  $৩ \times ৪ = ১২$

১১। যে কোন তিনটি অপেক্ষক  $f, g, h$  -এর ক্ষেত্রে যদি  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  এবং  $h: C \rightarrow D$  হয় ( $A, B, C, D$  গুলি সেট), তাহলে প্রমাণ করুন  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ . ৩

১২। দেখান যে,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 2x - 2x \tan x}{(1 - \cos 2x)^2} = \frac{1}{2}$ . ৩

১৩। যদি

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x - y}, & \text{যখন } x \neq y \\ 0, & \text{যখন } x = y \end{cases}$$

হয়, তবে  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ -এর অস্তিত্ব আছে কিনা পরীক্ষা করুন। ৩

১৪। যদি  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ , দেখান যে

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2 - ab}{(hx + by)^3}$$
 ৩

১৫। প্রমাণ করুন যে  $x$ -এর সকল ধনাত্মক মানের জন্য  $\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$ . ৩

১৬। যদি  $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(\theta h)$  হয়,  $0 < \theta < 1$ , তবে  $\theta$ -র মান নির্ণয় করুন যখন  $h = 1$  এবং  $f(x) = (1-x)^{5/2}$ . ৩

১৭।  $f(x) = 4 - 3(x-2)^{2/3}$  অপেক্ষকটির  $x = 2$  বিন্দুতে চরম ও অবম মান আছে কিনা পরীক্ষা করুন। ৩

১৮।  $y - 3 = 6(x - 2)^5$  বক্ররেখাটির কোনো ইন্ফ্লেকশন বিন্দু আছে কিনা নির্ণয় করুন। ৩

**QP Code : 18UT102EMT1****( English Version )****Group - A**Answer any *two* questions.  $10 \times 2 = 20$ 

1. a) Show that the function  $f(x) = \frac{x-1}{x}$ ,  $x > 0$  is a monotonic increasing function of  $x$  and the function  $g(x) = \frac{1-x}{x}$ ,  $x > 0$  is a monotonic decreasing function of  $x$ . 3
- b) Find  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{1-x^2}$ . 3
- c) Draw the graph of  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  and hence examine whether  $f(x)$  is continuous at  $x = 0$ . 2 + 2
2. a) State and prove Leibnitz's theorem. 5
- b) If  $y = \cos(10 \cos^{-1} x)$ , prove that  $(1-x^2)y_{12} = 21xy_{11}$ . (Here  $y_n = \frac{d^n y}{dx^n}$ ) 5
3. a) State Rolle's theorem and give its Geometrical Interpretation. 4
- b) Applying Rolle's theorem prove that, for the function  $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ ,  $f'(x) = 0$  has at least one root in  $(-1,1)$ . 3

**B.Sc.-11160-P**

[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

**QP Code : 18UT102EMT1 2**

- c) If  $f'(x) = 0$  for all values of  $x$  in an interval, then  $f(x)$  is constant in that interval. 3
4. a) If  $u = e^{xyz}$ , prove that  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$ . 5
- b) If  $u = x \sin^{-1} \frac{y}{x} + y \tan^{-1} \frac{x}{y}$ , find the value of  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$  at  $(1,1)$ . 5

**Group - B**Answer any *three* questions.  $6 \times 3 = 18$ 

5. Prove that the curves  $ax^2 + by^2 = 1$  and  $a'x^2 + b'y^2 = 1$  will cut orthogonally if  $\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b'}$ . 6
6. If  $p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$  touches the curve  $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$ , then prove that  $p^n = (a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n$ . 6
7. Prove that the pedal equation of the circle  $r = 2a \cos \theta$ , with regard to a point on its circumference, is  $2pa = r^2$ . 6

**B.Sc.-11160-P**

3 QP Code : 18UT102EMT1

8. Find the radius of curvature at the origin of the conic  $y - x = x^2 + 2xy + y^2$ . 6
9. Find the envelope of the parabola  $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ , where  $ab = k^2$ ,  $a$  and  $b$  being variable parameters ( $k$  is a constant). 6
10. Prove that the points of intersection of the asymptotes of  $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 + x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$  with the curve lie on a rectangular hyperbola. 6

**Group - C**

Answer any four questions.  $3 \times 4 = 12$

11. For any three functions  $f, g, h$ , if  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  and  $h : C \rightarrow D$ , ( $A, B, C, D$  are sets) then prove that  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ . 3
12. Show that  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 2x - 2x \tan x}{(1 - \cos 2x)^2} = \frac{1}{2}$ . 3
13. If  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x - y}, & \text{when } x \neq y \\ 0, & \text{when } x = y \end{cases}$  then examine whether  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  exists. 3

QP Code : 18UT102EMT1 4

14. If  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ , show that  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2 - ab}{(hx + by)^3}$ . 3
15. Prove that  $\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$ , for all  $x > 0$ . 3
16. If  $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(\theta h)$ ,  $0 < \theta < 1$ , then find  $\theta$  when  $h = 1$  and  $f(x) = (1-x)^{5/2}$ . 3
17. Examine the function  $f(x) = 4 - 3(x-2)^{2/3}$  for maxima and minima at  $x = 2$ . 3
18. Find, if there is any point of inflexion, on the curve  $y - 3 = 6(x-2)^5$ . 3