স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৭ ও জুন, ২০১৮

(December-2017 & June-2018)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম **(Elective Course)**

গণিত (Mathematics)

তৃতীয় পত্র **(3rd Paper)**

Classical Algebra & Abstract Algebra : EMT-3

সময় ঃ দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান ঃ ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) x, y, z ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $x+y+z=1$, প্রমাণ করুন $8xyz \le (1-x)(1-y)(1-z) \le \frac{8}{27}$. ৬

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ এবং n ও p পরস্পর মৌলিক সংখ্যা হলে, প্রমাণ করুন যে, $1+\alpha^{p}+\alpha^{2p}+\alpha^{3p}+\ldots+\alpha^{(n-1)p}=0$. ৪

২। (ক) দেকার্তের চিহ্নের নিয়ম অনুসারে দেখান যে $3x^5-4x^2+8=0$-এর অন্তত দুটি কাল্পনিক বীজ আছে। ৫

(খ) যদি α, β, γ, $x^3+px-q=0$ সমীকরণের বীজ হয়, এমন একটি সমীকরণ গঠন করুন যার বীজগুলি হবে $\alpha^2+\beta^2$, $\beta^2+\gamma^2$, $\gamma^2+\alpha^2$. ৫

৩। (ক) যদি $x^4+4x^3-8x^2+k=0$-এর চারটি পৃথক বাস্তব বীজ থাকে, তবে দেখান যে, $0<k<3$. ৫

(খ) $5x+12y=80$-এর পূর্ণসংখ্যায় সমগ্র সমাধান নির্ণয় করুন। এই সমীকরণের ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যায় সমাধান আছে কি ? ৫

৪। (ক) প্রমাণ করুন $(G, \bullet)$ গ্রুপের একটি অধতন্ত্র H, একটি অধদল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি H-এর যে-কোনো দুটি উপাদান h, k-এর জন্য (i) $hk \in H$, (ii) $h^{-1} \in H$ হয়। ৫

(খ) যদি $(R, +, \bullet)$ একটি অঙ্গন হয় ও a, b, c অঙ্গনের যে কোনো তিনটি উপাদান হয়, তাহলে প্রমাণ করুন, (i) $-(-a)=a$, (ii) $-(a+b)=-a-b$. ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। $4x^4-10x^2+1$-কে $(x-2)$ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল এবং ভাগশেষ নির্ণয় করুন।

৬। সমাধান করুন : $x^4-8x^3+40x+32=0$.

৭। প্রমাণ করুন, যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা b ও c-এর গ.সা.গু. g হয়, তা হলে পূর্ণসংখ্যা x_0 এবং y_0 আছে যার জন্য $g=\gcd(b,c)=bx_0+cy_0$ হবে।

৮। A, B, C তিনটি যে-কোনো সেটের জন্য ডি মর্গানের সূত্রটি বিবৃত করুন ও প্রমাণ করুন।

৯। যদি R যে-কোনো একটি সেট A-এর ওপর তুল্যতা সম্পর্ক হয়, তবে প্রমাণ করুন যে $a,b\in A$-এর জন্য

(i) $[\,a\,]\cap[\,b\,]=\phi$ অথবা $[a]=[b]$ এবং

(ii) $\cup\{[a]:a\in A\}=A$. ৪ + ২

১০। প্রমাণ করুন যে, কোনো পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্রের বৈশিষ্ট্যাঙ্ক হয় শূন্য অথবা মৌলিক সংখ্যা। এরূপ দুটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্রের উদাহরণ দিন। ৪ + ২

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। উদাহরণ সহযোগে দেখান যে $A-B\neq B-A$, যেখানে A, B দুটি সেট। ৩

১২। ধরুন Q হল মূলদ সংখ্যার সেট এবং $f:Q\to Q$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত : $f(x)=2x+3$, $\forall x\in Q$। দেখান যে, f সমরূপ (bijective) এবং f^{-1} নির্ণয় করুন। ৩

১৩। x, y, z ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা এবং $xy+yz+zx=12$ হলে, $x.y.z$ -এর বৃহত্তম মান নির্ণয় করুন। ৩

১৪। α, $x^n-1=0$ সমীকরণের একটি কাল্পনিক বীজ হলে, প্রমাণ করুন, $(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n-1})=n$, যেখানে n একটি মৌলিক সংখ্যা। ৩

১৫। H ও K যদি (G, $\bullet$) দলটির স্বাভাবিক অধদল হয় প্রমাণ করুন, $H\cap k$, (G, $\bullet$)-এর স্বাভাবিক অধদল হবে। ৩

১৬। Z সেটের উপর একটি প্রতিসম সম্বন্ধ (symmetric relation)-এর উদাহরণ দিন যা পরিযায়ী (transitive) নয়। (Z = সকল পূর্ণসংখ্যার সেট) ৩

১৭। ($5Z$, +, $\bullet$) কি (Z, +, $\bullet$)-এর অঙ্গনাল (ideal) হবে ?

১৮। ধরা যাক, a এবং b, F ফিল্ডের দুটি উপাদান এবং $a\neq 0$। প্রমাণ করুন, F ফিল্ডে $ax=b$ সমীকরণের একটিমাত্র অনন্য সমাধান থাকবে। ৩

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) If *x, y, z* are positive real numbers and $x+y+z=1$, prove that
$8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{8}{27}$. 6

b) If $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, n and p are prime to each other, prove that $1+\alpha^{p}+\alpha^{2p}+\alpha^{3p}+\ldots+\alpha^{(n-1)p}=0$. 4

2. a) Apply Descartes' rule of sign to show that $3x^5-4x^2+8=0$ has at least two imaginary roots. 5

b) If α, β and γ are the roots of the equation $x^3+px-q=0$, construct an equation whose roots are $\alpha^2+\beta^2$, $\beta^2+\gamma^2$, $\gamma^2+\alpha^2$. 5

3. a) If $x^4+4x^3-8x^2+k=0$, has four distinct real roots, then show that $0 < k < 3$. 5

b) Find general integral solution of $5x+12y=80$. Does there exists a positive integral solution of it ? 5

4. a) Prove that H will be a subgroup of the group $(G, \bullet)$ if and only if (i) $hk \in H$ and (ii) $h^{-1} \in H$, *h, k* are any two elements of *H*. 5

b) If $(R, +, \bullet)$ is a ring and *a, b, c* are three elements of *R*, then prove that (i) $-(-a)=a$, (ii) $-(a+b)=-a-b$. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Determine quotient and remainder when $4x^4-10x^2+1$ is divided by $(x-2)$.

6. Solve : $x^4-8x^3+40x+32=0$.

7. If g is the g.c.d. of two positive integers b and c, then there exists two integers x_0 and y_0 such that $g=\gcd(b,c)=bx_0+cy_0$.

8. For any three sets *A, B* and *C* state and prove de Morgan's law.

9. If *R* is an equivalence relation on a set *A* then prove that (i) $[\,a\,]\cap[\,b\,]=\phi$ or $[a]=[b]$ and (ii) $\cup\{[a]: a\in A\}=A$, $a,b\in A$. 4 + 2

10. Prove that characteristic of an Integral Domain is either zero or a prime number. Give examples of these two types of Integral Domains. 4 + 2

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Give examples to show that $A-B \neq B-A$, where *A, B* are two sets. 3

12. If Q is the set of all rational numbers and $f : Q \to Q$ is defined as $f(x) = 2x + 3$, $\forall x \in Q$, then show f is bijective and determine f^{-1}. 3

13. If x, y, z are positive rational numbers and $xy + yz + zx = 12$, then find the greatest value of $x.y.z.$ 3

14. If α is an imaginary root of $x^n - 1 = 0$, then prove that $(1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n-1}) = n$, where n is a prime number. 3

15. If H and K are normal subgroups of a group $(G,\bullet)$, then prove that $H \cap k$ is a normal subgroup of $(G, \bullet)$. 3

16. Give example of a symmetric relation on Z, which is not transitive, where Z is the set of all integers.

17. Is $(5Z, +, \bullet)$ an ideal of $(Z, +, \bullet)$? 3

18. Let us suppose a and b are two elements of a field F, $(a \neq 0)$. Prove that the equation $ax = b$ has unique solution in F. 3

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য