স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৭ ও জুন, ২০১৮

(December-2017 & June-2018)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম **(Elective Course)**

গণিত (Mathematics)

চতুর্থ পত্র **(4th Paper)**

Vector Algebra & Vector Calculus : EMT-4

সময় ঃ দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান ঃ ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) প্রদত্ত দুটি ভেক্টর হল $\vec{\alpha} = 3\hat{i} - \hat{j}$ এবং $\vec{\beta} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ । $\vec{\beta}$ ভেক্টরকে $\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ রূপে প্রকাশ করুন, যেখানে $\vec{\beta}_1$ হল $\vec{\alpha}$ -র সমান্তরাল এবং $\vec{\beta}_2$ হল $\vec{\alpha}$ -র উপর লম্ব। ৫

(খ) কোনো ত্রিভুজ ABC-র ক্ষেত্রে ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. ৫

২। (ক) A (6,6,2) বিন্দুগামী ও (1,–2,2) ভেক্টরের সমান্তরাল এবং B (–4,0,–1) বিন্দুগামী ও (3,–2,2) ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখা দুটির মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করুন। সাধারণ লম্বটি ঐ দুটি সরলরেখাকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাদের অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করুন। ৫

(খ) ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করুন যে কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু। ৫

৩। (ক) $\vec{r} = a\{(3t - t^3)\hat{i} + 3t^2\hat{j} + (3t + t^3)\hat{k}\}$ বক্রটির κ এবং τ-এর মান নির্ণয় করুন। ৫

(খ) একটি কণা কেন্দ্রীয় বলের দ্বারা এমনভাবে গতিশীল যে বলের মান বলকেন্দ্র থেকে কণার দূরত্বের (r) বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। প্রমাণ করুন যে $\frac{\alpha}{r} = 1 + \beta \cos\theta$, যেখানে α ও β হল ধ্রুবক। ৫

৪। (ক) যদি $\vec{B} = (2x - 2y)\hat{i} + (-2x + 2y + z^2)\hat{j} + 2yz\hat{k}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন $curl\,\vec{B} = 0$ । স্কেলার অপেক্ষক ϕ-এর মান নির্ণয় করুন যাতে $\vec{B} = grad\,\phi$. ৩ + ২

(খ) গ্রীনের উপপাদ্যটির সত্যতা বিচার করুন :

$$\int_C (x^2 - xy^2)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$$

যেখানে C হল (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2) বিন্দু চারটির দ্বারা সীমাবদ্ধ বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু। ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। প্রমাণ করুন যে,

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{d}) + (\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{d}) + (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = -2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\,\vec{d}\,.$$

৬

৬। রেখা সমাকলনে পরিবর্তন করে, মান নির্ণয় করুন :

$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{A}.\hat{n}\,\mathrm{d}S$ যেখানে

$\vec{A} = (x-z)\,\vec{i} + (x^3 + yz)\,\vec{j} - 3xy^2\,\vec{k}$,

এবং S হল $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ শঙ্কুর xy-তলের উপরের অংশ। ৬

৭। মান নির্ণয় করুন : $\int_V \vec{F}\,\mathrm{d}V$ যেখানে

$\vec{F} = 2xz\,\hat{i} - x\,\hat{j} + y^2\,\hat{k}$ এবং V হল $x = 0,\ y = 0,\ y = 6,\ z = 4,\ z = x^2$ দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চল। ৬

৮। প্রমাণ করুন যে

$$grad(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\times curl\,\vec{A}) + (\vec{A}\times curl\,\vec{B})\,.$$

৬

৯। $\vec{F} = (2-x)\,\hat{i} - y\,\hat{j} + xyz\,\hat{k}$ এবং $x^2 + y^2 = 4,\ \ z = 0$ বৃত্তটি C হলে C-এর বেষ্টনীতে $\vec{F}$-এর সঞ্চলন (circulation) নির্ণয় করুন। ৬

১০। যদি V অঞ্চলটি $z = 4 - x^2$ চোঙ এবং $x = 0,\ y = 0,\ y = 2,\ z = 0$ তলগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ হয়, এবং $\phi = 5xy^2$ হয়, তবে $\iiint_V \phi\,\mathrm{d}V$ -র মান নির্ণয় করুন। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। যদি $\hat{e}_1$ এবং $\hat{e}_2$ দুটি একক ভেক্টর হয়, এবং θ হল দুটি ভেক্টরের মধ্যে কোণ, তাহলে দেখান যে

$$2\sin\frac{\theta}{2} = |\,\hat{e}_1 - \hat{e}_2\,|\,.$$

৩

১২। যদি $|\vec{a}| = 3,\ \ |\vec{b}| = 4,\ \ |\vec{c}| = 5,$ দেখান যে $\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a} = -25\,.$ ৩

১৩। প্রমাণ করুন যে, $\vec{\nabla}.\left(r\,\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) = \frac{3}{r^4}\,.$ ৩

১৪। যদি $u = 3x^2 y$ এবং $v = xz^2 - 2y$ হয়, প্রমাণ করুন যে

$grad(grad\, u . grad\, v) = (6yz^2 - 12x)\hat{i} + 6xz^2\hat{j} + 12xyz\hat{k}$. ৩

১৫। প্রমাণ করুন, $\vec{V} = (y + \sin z)\hat{i} + x\hat{j} + x\cos z\hat{k}$ হল conservative ভেক্টর ক্ষেত্র। ϕ -এর মান নির্ণয় করুন যাতে $V = grad\ \phi$ হয়। ৩

১৬। প্রমাণ করুন যে,

$$\int_1^2 \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} dt = -14\hat{i} + 75\hat{j} + (-15\hat{k}),$$ যেখানে

$\vec{r}(t) = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} + (-t^3)\hat{k}$. ৩

১৭। যদি $\vec{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + at\tan\alpha\,\hat{k}$,

$\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

১৮। মান নির্ণয় করুন : $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{F} . d\vec{r}$, যেখানে

$\vec{F} = (y^2 + z^2)\hat{i} + (z^2 + x^2)\hat{j} + (x^2 + y^2)\hat{k}$ এবং

$t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ পথ বরাবর মান নির্ণয় করুন। ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Given two vectors are $\vec{\alpha} = 3\hat{i} - \hat{j}$ and $\vec{\beta} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$. Express $\vec{\beta}$ in the form $\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ where $\vec{\beta}_1$ is parallel to $\vec{\alpha}$ and $\vec{\beta}_2$ is perpendicular to $\vec{\alpha}$. 5

   b) Prove by using vector method that for a triangle *ABC*, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. 5

2. a) Find the shortest distance between the two lines through *A* (6,6,2) and *B* (–4,0,–1) and parallel to the vectors (1,–2,2) and (3,–2,2) respectively. Find position vectors where the lines meet the common perpendicular. 5

b) Show, by vector method, that the perpendicular bisectors of the sides of a triangle are concurrent. 5

3. a) Obtain κ and τ for the curve

$\vec{r} = a\{(3t - t^3)\hat{i} + 3t^2\hat{j} + (3t + t^3)\hat{k}\}$. 5

b) A particle moves under a central force obeying the law that is inversely proportional to the square of the distance r from the centre of force. Show that, $\frac{\alpha}{r} = 1 + \beta\cos\theta$, where α and β are constants. 5

4. a) Show that $curl\,\vec{B} = 0$, if

$\vec{B} = (2x - 2y)\hat{i} + (-2x + 2y + z^2)\hat{j} + 2yz\hat{k}$.

Find the scalar ϕ such that $\vec{B} = grad\,\phi$.

3 + 2

b) Verify Green's theorem in the plane for

$$\int_C (x^2 - xy^2)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$$

where C is the square with the vertices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Prove that $(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{d}) + (\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{d}) + (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = -2[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\,\vec{d}$. 6

6. By converting into line integral, evaluate

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\,.\,\hat{n}\,\mathrm{d}S$$

where $\vec{A} = (x - z)\,\vec{i} + (x^3 + yz)\,\vec{j} - 3xy^2\,\vec{k}$, where S is the surface of the cone $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ above xy-plane. 6

7. Evaluate $\int_V \vec{F}\,dV$ for $\vec{F} = 2xz\,\hat{i} - x\,\hat{j} + y^2\,\hat{k}$ and V is the region bounded by the surface $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$, $z = 4$, $z = x^2$. 6

8. Prove that

$$grad(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \times curl\,\vec{A}) + (\vec{A} \times curl\,\vec{B}).$$

6

9. If $\vec{F} = (2-x)\,\hat{i} - y\,\hat{j} + xyz\,\hat{k}$ and C is the circle $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, find the circulation of $\vec{F}$ over C. 6

10. If V is the region bounded by cylinder $z = 4 - x^2$ and planes $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ and $\phi = 5xy^2$, then evaluate $\iiint_V \phi\,dV$. 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. If $\hat{e}_1$ and $\hat{e}_2$ be two unit vectors and θ be the angle between them, show that $2\sin\frac{\theta}{2} = |\hat{e}_1 - \hat{e}_2|$. 3

12. If $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 5$, show that $\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a} = -25$. 3

13. Prove that $\vec{\nabla}.\left(r\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right) = \frac{3}{r^4}$. 3

14. If $u = 3x^2y$ and $v = xz^2 - 2y$, prove that

$$grad(grad\,u.grad\,v) = (6yz^2 - 12x)\,\hat{i} + 6xz^2\,\hat{j} + 12xyz\,\hat{k}.$$

3

15. Show that $\vec{V} = (y + \sin z)\,\hat{i} + x\,\hat{j} + x\cos z\,\hat{k}$ is conservative vector field. Find ϕ such that $V = grad\,\phi$. 3

16. Prove that $\int_1^2 \vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} dt = -14\hat{i} + 75\hat{j} + (-15\hat{k})$,

where $\vec{r}(t) = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} + (-t^3)\hat{k}$. 3

17. If $\vec{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + at\tan\alpha\,\hat{k}$, find the value of $\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$. 3

18. Calculate $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{F}.d\vec{r}$, where

$\vec{F} = (y^2 + z^2)\hat{i} + (z^2 + x^2)\hat{j} + (x^2 + y^2)\hat{k}$ along the path $t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$. 3