স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৭ ও জুন, ২০১৮

(December-2017 & June-2018)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম **(Elective Course)**

গণিত (Mathematics)

পঞ্চম পত্র **(5th Paper)**

Linear Algebra & Transformation : EMT-5

সময় ঃ দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান ঃ ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) মনে করুন $A = (a_{ij})_{n\times n}$; $n > 2$ এবং $|A| \neq 0$. যদি $A\, adj\, A = |A|^m I_n$ হয় তবে m-এর মান কত ?

এটির সাহায্যে বা অন্য উপায়ে দেখান যে

(i) $|adj A| = |A|^{n-1}$ এবং

(ii) $adj(adj\, A) = |A|^{n-2} A$. ১ + ২ + ২

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) দেখান যে

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2(bc+ca+ab)^3,$$

$(abc \neq 0)$.

৫

২। (ক) V ভেক্টর দেশে প্রমাণ করুন যে $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in V$ ভেক্টরগুলি পরস্পর নির্ভরশীল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি এদের কোনো একটি ভেক্টর পূর্ববর্তী ভেক্টরগুলির সাথে রৈখিক বন্ধনে আবদ্ধ থাকে। ৩ + ২

(খ) উদাহরণসহ একটি ইউক্লিডিয় দেশের সংজ্ঞা দিন। মনে করুন V একটি অন্তর গুণফল দেশ এবং $y, z \in V$. যদি সকল $x \in V$ -এর জন্য $(x, y) = (x, z)$ হয়, তবে দেখান যে $y = z$. ৩ + ২

৩। (ক) দেখান যে

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

এর থেকে দেখান যে

$\Delta = (ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)$. ২ + ৩

(খ) W_1 এবং W_2 একটি ভেক্টর দেশ V-এর দুটি ভেক্টর উপদেশ। দেখান যে

$W_1 + W_2 = \{(\alpha_1 + \alpha_2); \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$

V-এর একটি উপদেশ হবে। উদাহরণ দিয়ে দেখান, $W_1 \cup W_2$, V এর উপদেশ না হতেও পারে। ৩ + ২

৪। (ক) A ম্যাট্রিক্সটির সারি মাত্রা এবং স্তম্ভমাত্রা নির্ণয় করুন এবং ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা লিখুন।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$ ২ + ২ + ১

(খ) $2x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 4xy + 6zx + 12yz$ দ্বিঘাত রূপটির সাথে সম্পর্কিত ম্যাট্রিক্সটি লিখুন। একে স্বভাবী আকারে পরিণত করে সেটির মাত্রা নির্ণয় করুন এবং দ্বিঘাতটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন। ১ + ২ + ২

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। ম্যাট্রিক্স সম্পর্কিত কেইলি-হ্যামিলটন (Cayley-Hamilton) -এর উপপাদ্যটি বিবৃত করুন ও প্রমাণ করুন। ১ + ৫

৬। একটি ভেক্টরদেশের ভিত্তির সংজ্ঞা দিন। V একটি সসীম ভেক্টর দেশ; $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r \in V$ রৈখিক অনির্ভর ভেক্টরসমূহ। দেখান যে সেট $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_r\}$ নিজেই V-এর একটি ভিত্তি গঠন করবে অথবা এদের বর্ধিত সেট একটি ভিত্তি হবে। ২ + ৪

৭। লম্ব ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 6$-কে স্বভাবী আকারে প্রকাশ করুন এবং কণিকটি কি প্রকারের তা নির্ণয় করুন। ২ + ২ + ২

৮। λ এবং μ-এর বাস্তব মান নির্ণয় করুন, যাতে $x + y + z = 1$, $x + 2y - z = \mu$ এবং $5x + 7y + \lambda z = \mu^2$ সমীকরণতন্ত্রের (i) একটি মাত্র সমাধান, (ii) অসংখ্য সমাধান, (iii) কোনো সমাধান থাকবে না। ২ + ২ + ২

৯। $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির আইগেন (eigen) মানগুলি নির্ণয় করুন এবং ঋণাত্মক আইগেন (eigen) মানের অনুষঙ্গী আইগেন (eigen) ভেক্টরগুলিও লিখুন। ৩ + ৩

১০। $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ একটি রৈখিক রূপান্তর যাতে $T(1,1) = (-2,3)$, $T(1,-1) = (4,5)$। $I\!R^2$-এর ভিত্তি $\{(1,0), (0,1)\}$-এর সাপেক্ষে T-এর ম্যাট্রিক্সটি লিখুন। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। 'a'-এর কোন্ বাস্তব মানের জন্য $I\!R^3$-তে $(1,-2,1)$ এবং $(1, a, a^2)$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে ? এই ভেক্টরদ্বয় নিয়ে $I\!R^3$-এর একটি লম্ব ভিত্তি (orthogonal basis) গঠন করুন। ১ + ২

১২। $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স হলে দেখান যে

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 1 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ সমীকরণত্রয়ের একটি

সমাধান থাকবে। ৩

১৩। মনে করুন $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ একটি রৈখিক রূপান্তর, যেখানে $T(0,1,0) = (2,1,1)$, $T(1,1,0) = (2,2,2)$ এবং $T(1,1,2) = (4,6,4)$ । $T(x,y,z)$ নির্ণয় করুন, যেখানে $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. ৩

১৪। একটি বাস্তব অন্তর গুণফল দেশ V তে, $\alpha, \beta \in V$ -এর জন্য দেখান যে $\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$, চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থবহ। ৩

১৫। $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির জন্য কেইলি-হ্যামিলটন (Cayley Hamilton)-এর উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন এবং A^{-1} নির্ণয় করুন। ২ + ১

১৬। বিস্তার না করে দেখান যে $\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$. ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

১৭। $2x_1 + x_2 = 6$
$x_1 + x_2 = 1$
$x_1 + x_2 - x_3 = 8$

সমীকরণগুলির বর্ধিত ম্যাট্রিক্সটিকে (augmented matrix) সারি সমতুল্য ইশিলন (echelon) আকারে পরিণত করে দেখান যে সমীকরণ তিনটি সমাধানযোগ্য নয়। ৩

১৮। $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$

$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

দেখান যে V, M_2 ভেক্টর দেশের একটি উপদেশ হবে। V-এর একটি ভিত্তি লিখুন। ২ + ১

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Let $A=(a_{ij})_{n\times n}$; $n > 2$ and $|A|\neq 0$. If $A\,adj\,A=|A|^m I_n$ then what will be the value of *'m'* ? With the help of this or otherwise, show that (i) $|adjA|=|A|^{n-1}$ and (ii) $adj(adj\,A)=|A|^{n-2}.A$. 1 + 2 + 2

   b) Show that

$$\begin{vmatrix}(b+c)^2 & c^2 & b^2\\ c^2 & (c+a)^2 & a^2\\ b^2 & a^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}=2(bc+ca+ab)^3,$$

$(abc\neq 0)$.

5

2. a) In a vector space V, prove that vectors $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n\in V$ will be linearly dependent if and only if one of the vectors is a linear combination of the preceding vectors.

3 + 2

   b) Define Euclidean space and give an example of it. Let V be an inner product space and $y,z\in V$. If $(x,y)=(x,z)$ for all $x\in V$, then show that $y = z$. 3 + 2

3. a) Show that

$$\Delta=\begin{vmatrix}a^3 & a^2 & 1\\ b^3 & b^2 & 1\\ c^3 & c^2 & 1\end{vmatrix}=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix}a^2 & a & 1\\ b^2 & b & 1\\ c^2 & c & 1\end{vmatrix}.$$

Hence show that

$\Delta=(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)$. 2 + 3

   b) W_1 and W_2 are two subspaces of a vector space V, show that $W_1+W_2=\{(\alpha_1+\alpha_2);\alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2\}$ is a subspace of V. Show by an example that $W_1\cup W_2$ may not be a subspace of V. 3 + 2

4. a) Find row rank and column rank of A and write the rank of the matrix A.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & -4\\ 2 & 3 & -1 & -1\\ 3 & 1 & 3 & -2\\ 6 & 3 & 0 & -7\end{bmatrix}$$ 2 + 2 + 1

   b) Write down the matrix related to the quadratic form

$2x^2+5y^2+10z^2+4xy+6zx+12yz$;

reduce it to canonical form and find rank and nature of the quadratic form. 1 + 2 + 2

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. State and prove Cayley-Hamilton theorem related to matrices. 1 + 5

6. Define a basis of vector space. In a finite dimensional vector space V, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r \in V$ are linearly independent vectors. Show that the set $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_r\}$ will form a basis of V or can be extruded to a basis of V. 2 + 4

7. With the help of orthogonal matrices reduce $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 6$ to canonical form and find the nature of the conic. 2 + 2 + 2

8. Find the real values of λ & μ, such that the system of equations

$x + y + z = 1$

$x + 2y - z = \mu$

$5x + 7y + \lambda z = \mu^2$

have (i) unique solution (one only), (ii) infinite number of solutions, (iii) no solution. 2 + 2 + 2

9. Find the eigenvalues of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Find also the eigenvectors corresponding to negative eigenvalue. 3 + 3

10. Let $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a linear transformation, such that $T(1,1) = (-2,3)$, $T(1,-1) = (4,5)$.

Relative to the ordered basis $\{(1,0), (0,1)\}$ of $\mathbb{R}^2$ find the matrix of the transformation T. 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. For what real values of 'a' the vectors $(1,-2,1)$ and $(1, a, a^2)$ of $\mathbb{R}^3$ are orthogonal ? Taking these two vectors form an orthogonal basis of $\mathbb{R}^3$. 1 + 2

12. If $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ is an orthogonal matrix then show that the equations

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 1 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0 \end{array}\right\} \text{ have a solution.}$$ 3

13. Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that $T(0,1,0) = (2,1,1)$, $T(1,1,0) = (2,2,2)$, $T(1,1,2) = (4,6,4)$. Find $T(x,y,z)$, for $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. 3

14. In a real inner product space V, for $\alpha, \beta \in V$ show that $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$, symbols have usual meaning. 3

15. Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and find A^{-1}. 2 + 1

16. Without expanding show that

$$\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0.$$ 3

17. Transform the augmented matrix of

$2x_1 + x_2 = 6$

$x_1 + x_2 = 1$

$x_1 + x_2 - x_3 = 8$

to row reduced echelon form and show that the system is inconsistent. 3

18. $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Show that V is a subspace of M_2. Find a basis of V. 2 + 1