স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৭ ও জুন, ২০১৮

(December-2017 & June-2018)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম **(Elective Course)**

গণিত (Mathematics)

সপ্তম পত্র **(7th Paper)**

Mathematical Analysis-I : EMT-7

সময় ঃ দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান ঃ ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) মনে করুন A ও B, $I\!R$-এর দুটি অশূন্য বদ্ধ সেট। দেখান যে $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$ যেখানে $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) অনুক্রমের ক্ষেত্রে Bolzano-Weierstrass উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং অনুক্রম $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos n\pi$ -এর ক্ষেত্রে উপপাদ্যটির যথার্থতা প্রতিপন্ন করুন। ১ + ২

(গ) মনে করুন $a_n = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \cdots \frac{1}{\lfloor n}$ । অনুক্রমটি $I\!R$-এ কশি (Cauchy) অনুক্রম কিনা পরীক্ষা করুন। ৪

২। (ক) মনে করুন

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{x}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

অপেক্ষকটি $[0,1]$-এ সীমিত ভেদযুক্ত কিনা পরীক্ষা করুন। ৩

(খ) $A\,(\subset I\!R)$ গণনযোগ্য হলে প্রমাণ করুন যে $A \times A$ ও গণনযোগ্য সেট হবে। ৩

(গ) মনে করুন $f : [0, 1] \to [0, 1]$ সন্তত অপেক্ষক। দেখান যে এমন বিন্দু $c \in [0,1]$-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $f(c) = c^2$ হবে। ৪

৩। (ক) প্রদত্ত ঘাত শ্রেণীর অভিসরণ-ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন :

$$1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{4}\right)^4 + \ldots .$$ ৩

(খ) প্রমাণ করুন যে কোন যদৃচ্ছ বিন্দু সেট $E\,(\subset I\!R)$-এর অন্তরকলিত সেটটি রুদ্ধ সেট হবে। ৩

(গ) মনে করুন $\{[a_n, b_n]\}_n$ অনুক্রমটি $I\!R$-এ রুদ্ধ ও বদ্ধ সেটের এমন অনুক্রম যে প্রতিটি তার আগেরটির মধ্যে অন্তর্ভুক্ত। দেখান যে $\bigcap_{n\in N} [a_n, b_n] \neq \phi$. ৪

৪। (ক) মনে করুন অনুক্রম $\{a_n\}_n$ নিম্ন আবৃত্ত সূত্রের দ্বারা সংজ্ঞাত আছে।

$$a < a_1 < 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n},\ n \geq 1.$$

দেখান যে $\{a_n\}_n$ অভিসারী এবং এর সীমা নির্ণয় করুন। ২ + ১

(খ) মনে করুন $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $x \in I\!R$ । অনুক্রম $\{f_n\}_n$, $I\!R$-এ সম-অভিসারী হবে কি ? উত্তরের পক্ষে যুক্তি দিন। ৩

(গ) মনে করুন $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4 + x^2}$, প্রমাণ করুন যে

(i) f, number scale -এ সন্তত হবে,

(ii) $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. ২ + ২

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। মনে করুন f ও g, $[\ a,\ b\ ]$-তে সীমিত ভেদযুক্ত অপেক্ষক। প্রমাণ করুন যে fg, যেখানে $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $x \in [a, b]$, অন্তরাল $[\ a,\ b\ ]$-তে সীমিত ভেদযুক্ত হবে। আরও দেখান যে বাস্তব ধ্রুবক A ও B-এর অস্তিত্ব আছে এমন যে $V_a^b(fg) \leq AV_a^b(g) + BV_a^b(f)$,

চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থবহ। ৬

৬। (ক) দেখান যে $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\cos nx$ শ্রেণীটির, $0 < a \leq x \leq b$-তে প্রত্যেক পদ পৃথকভাবে অন্তরকলনযোগ্য (term-by-term differentiable).

(খ) মনে করুন $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ n(2-nx), & \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} < x \leq 1 \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}\mathrm{d}x \text{ হবে}$$

কিনা পরীক্ষা করুন। ৩ + ৩

৭। মনে করুন

$f(u,v,x,y) = u + v - x$, $g(u,v,x,y) = x - y + u$,
$h(u,v,x,y) = u - 2v + 5x - 3y$.

দেখান যে f, g, h -এর মধ্যে অপেক্ষকীয় সম্পর্ক রয়েছে। ৬

৮। (ক) দেখান যে $\mathbb{R}$-এ যে-কোনো যদৃচ্ছ সংখ্যক মুক্ত সেটের সংযোগ মুক্ত সেট হবে।

(খ) মনে করুন $a_n = \left(2\cos\frac{n\pi}{2}\right)^{(-1)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\overline{lim}\, a_n$, $\underline{lim}\, a_n$ নির্ণয় করুন। ৪ + ২

৯। মনে করুন $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ -এর অভিসরণ-ব্যাসার্ধ হল ρ এবং $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ শ্রেণীটি অভিসারী। প্রমাণ করুন যে ঘাতশ্রেণীটি $[0,\rho]$ -এ সম-অভিসারী হবে। ৬

১০। মনে করুন $f(x,y) = \begin{cases} x, & |y| < |x| \\ -x, & |y| \geq |x| \end{cases}$

f , (0,0) বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য কিনা পরীক্ষা করুন। ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। নির্দেশিত বিন্দুর সামীপ্যে অন্তর্নিহিত অপেক্ষকের অস্তিত্ব পরীক্ষা করুন : ৩

$xy + 2\ln x + 3\ln y - 1 = 0$, $(1,1)$.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

১২। $\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)x^k$ শ্রেণীটির যোগ-অপেক্ষক নির্ধারণ করুন। ৩

১৩। মনে করুন $u(x,y)$ এমন যে $xu_x + yu_y = mu(x,y)$, $(m \neq 0)$ এবং u-এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত এবং $u_{xx} + u_{yy} = 0$ । অপেক্ষক $v(x,y)$ এভাবে সংজ্ঞাত আছে যে $v(x,y) = m^{-1}(yu_x - xu_y)$ । প্রমাণ করুন যে

$v_{xx} + v_{yy} = 0$. ৩

১৪। মনে করুন $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ অপেক্ষকটি $[a, b]$-তে সন্তত। প্রমাণ করুন যে f , $[a, b]$-তে লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা ও গরিষ্ঠ নিম্নসীমা পরিগ্রহ করে। ৩

১৫। $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^{n+1}} \cos\frac{3}{2^{n+1}}$ অসীম শ্রেণীটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন। ৩

১৬। মনে করুন A, $\mathbb{R}$-এ মুক্ত সেট এবং $S(\subset \mathbb{R})$ এমন যে $A \cap S = \phi$ । দেখান যে $A \cap S' = \phi$ (এখানে S' , S-এর অন্তরকলিত সেট বোঝায়)। ৩

১৭। দেখান যে $\sin x^2$, $\mathbb{R}$ -এ সমসন্তত নয়। ৩

১৮। মনে করুন $H_n = (-1, n)$ যেখানে $n \in N$ এবং $G = [0, \infty)$। দেখান যে $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ কিন্তু $\{H_n : n \in N\}$-এর এমন কোন সসীম উপ-সমষ্টি (sub-collection) নেই যা G-এর আবরণী হতে পারে। ৩

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Let A and B be two non-void bounded subsets of $\mathbb{R}$. Show that $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$, where $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. 3

   b) State Bolzano-Weierstrass theorem on sequence and verify it for the sequence $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos n\pi$. 1 + 2

   c) Let $a_n = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \ldots \frac{1}{\lfloor n}$. Examine whether $\{a_n\}_n$ is a Cauchy sequence in $\mathbb{R}$. 4

2. a) Let

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{x}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   Examine whether f is a bounded variation in $[0,1]$. 3

   b) If A ($\subset \mathbb{R}$) be a countable set, prove that $A \times A$ is also countable. 3

   c) Let $f : [0, 1] \to [0, 1]$ be a continuous function. Show that there exists a point $c \in [0,1]$ such that $f(c) = c^2$. 4

3. a) Find the radius of convergence of the power series $1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{4}\right)^4+\ldots.$ 3

b) Prove that the derived set of an arbitrary point set $E(\subset \mathbb{R})$, is a closed set. 3

c) Let $\{[a_n, b_n]\}_n$ be a sequence of closed and bounded intervals in $\mathbb{R}$ such that each is contained in preceding. Show that $\bigcap_{n\in N}[a_n, b_n]\neq \phi$. 4

4. a) Let $\{a_n\}_n$ be defined by the recursive formula $a<a_1<1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$ for all $n\geq 1$. Prove that $\{a_n\}_n$ is convergent and find its limit. 2 + 1

b) Let $f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $x\in\mathbb{R}$. Is $\{f_n\}_n$ uniformly convergent on $\mathbb{R}$? Justify your answer. 3

c) Let $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^2}$. Prove that (i) f is continuous throughout the number scale,

(ii) $\int_0^{\infty} f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. 2 + 2

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Let f, g be of bounded variation (BV) in [a, b]. Prove that fg, defined by $(fg)(x)=f(x)g(x)$ for all $x\in[a,b]$, is of BV over [a, b]. Moreover there are real constants A, B such that

$$V_a^b(fg)\leq AV_a^b(g)+BV_a^b(f),$$

symbols have their usual meaning. 6

6. a) Show that the series $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}\cos nx$ is term-by-term differentiable in [a, b] where $0<a\leq x\leq b$.

b) Let $f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\leq x\leq \frac{1}{n}\\ n(2-nx), & \frac{1}{n}<x\leq\frac{2}{n}\\ 0, & \frac{2}{n}<x\leq 1\end{cases}$

Examine whether

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\left\{\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right\}dx.$$ 3 + 3

7. Let $f(u,v,x,y)=u+v-x$, $g(u,v,x,y)=x-y+u$, $h(u,v,x,y)=u-2v+5x-3y$. Show that f, g, h are functionally related. 6

8. a) Prove that the union of an arbitrary collection of open sets in $\mathbb{R}$, is an open set in $\mathbb{R}$.

b) Let $a_n = \left(2\cos\frac{n\pi}{2}\right)^{(-1)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Find $\overline{\lim} a_n$, $\underline{\lim} a_n$. 4 + 2

9. Let ρ be the radius of convergence of $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ is convergent. Prove that the power series is uniformly convergent in $[0,\rho]$. 6

10. Let $f(x,y) = \begin{cases} x, & |y| < |x| \\ -x, & |y| \geq |x| \end{cases}$

Examine whether f is differentiable at (0,0). 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Test for the existence of implicit function in a neighbourhood of the indicated point :

$xy + 2\ln x + 3\ln y - 1 = 0$, (1,1). 3

12. Find the sum of the series $\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)x^k$. 3

13. Let $u(x,y)$ be such that $xu_x + yu_y = mu(x,y)$, $(m \neq 0)$ and $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Let second order partial derivatives of u are continuous. Let $v(x,y)$ be defined by $v(x,y) = m^{-1}(yu_x - xu_y)$. Prove that $v_{xx} + v_{yy} = 0$. 3

14. Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous in $[a, b]$. Prove that f attains its bounds in $[a, b]$. 3

15. Examine for the convergence of the infinite series

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^{n+1}} \cos\frac{3}{2^{n+1}}$. 3

16. Let A be an open set in $\mathbb{R}$ and $S (\subset \mathbb{R})$ be such that $A \cap S = \phi$. Show that $A \cap S' = \phi$ (Here S' denotes the derived set of S). 3

17. Show that $\sin x^2$ is not uniformly continuous on $\mathbb{R}$. 3

18. Let $H_n = (-1, n)$, where $n \in N$ & $G = [0, \infty)$.

Show that $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ but there exists no finite sub-collection of $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$, which covers G. 3