স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৭ ও জুন, ২০১৮

(December-2017 & June-2018)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম **(Elective Course)**

গণিত (Mathematics)

অষ্টম পত্র **(8th Paper)**

Mathematical Analysis-II : EMT-8

সময় ঃ দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান ঃ ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) মনে করুন $f : [\,a,\,b\,] \to R$ একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক এবং ঐ অন্তরালে শুধুমাত্র সসীম সংখ্যক বিন্দুতে f অসন্তত। প্রমাণ করুন, f ঐ অন্তরালে রিমান সমাকলনযোগ্য হবে। ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) $[\,a,\,b\,]$ অন্তরে সংজ্ঞায়িত একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক f রিমান সমাকলনযোগ্য হলে প্রমাণ করুন $|\,f\,|$ অপেক্ষকটি ঐ অন্তরে রিমান সমাকলনযোগ্য এবং $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx = \int_a^b |\,f\,|\,x\,dx$ । এটির বিপরীত প্রতিজ্ঞাটি কি সত্য ? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন। ৫

২। (ক) দেখান যে $4 < \int_1^3 \sqrt{3+x^2}\,dx < 4\sqrt{3}$. ২

(খ) মনে করুন, অপেক্ষকের অনুক্রম $\{f_n\}$, $[\,a,\,b\,]$ অন্তরালে অপেক্ষক f অভিমুখে সমভাবে অভিসারী এবং প্রতিটি f_n ঐ অন্তরালে রিমান সমাকলনযোগ্য। প্রমাণ করুন f ঐ অন্তরালে রিমান সমাকলনযোগ্য এবং $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. ৫

(গ) সমাকলের সাহায্যে মান নির্ণয় করুন :

$$\lim_{n \to \infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+3n}\right]$$ ৩

৩। (ক) অভিসারী কিনা পরীক্ষা করুন :

i) $\int_1^\infty \frac{(x-1)\sqrt{x}}{1+x+x^3}\,dx$

ii) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\log x}\,dx$ ৩ + ২

(খ) দেখান যে $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ শ্রেণীটি x-এর প্রত্যেক বাস্তব মানের জন্য পরমভাবে অভিসারী। ৩

(গ) $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{4^3}+\ldots$ শ্রেণীটি অভিসারী কিনা নির্ণয় করুন যেখানে x একটি সসীম সংখ্যা। ২

৪। (ক) $[-\pi,\pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞাত নিম্নোক্ত অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী নির্ণয় করুন :

$$f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x\le 0,\\ x, \ \ 0\le x\le \pi,\end{cases}$$

$$f(x+2\pi)=f(x).$$

এর থেকে দেখান যে, $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. ৬

(খ) xy তলে $y=2x$ রেখা এবং $y=2x^2$ বক্র দ্বারা বেষ্টিত স্থানের উপরিভাগে $z=7-3x^2-y^2$ তল দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের আয়তন নির্ণয় করুন। ৪

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। মনে করুন $f:[a,b]\to R$ অপেক্ষকটি $[a,b]$ অন্তরালে রিমান সমাকলনযোগ্য এবং $F:[a,b]\to R$ অপেক্ষকটি নিম্নোক্ত উপায়ে সংজ্ঞাত :

$$F(x)=\begin{cases}\int_a^x f(t)\,dt, & a<x\le b\\ 0, & x=a\end{cases}$$

প্রমাণ করুন যে F অপেক্ষকটি $[a,b]$ অন্তরালে সন্তত। অধিকন্তু, $[a,b]$ অন্তরালের মধ্যস্থিত যে কোনো বিন্দু c-তে f অপেক্ষকটি সন্তত হলে প্রমাণ করুন $F'(c)$-এর অস্তিত্ব থাকবে এবং $F'(c)=f(c)$ হবে। ৩ + ৩

৬। (ক) Weierstrass আকারে সমাকলনবিদ্যার দ্বিতীয় মধ্যম মান উপপাদ্যটি বিবৃত করুন। অতঃপর $[\pi,2\pi]$ অন্তরে $x\sin x$ অপেক্ষকটির জন্য উক্ত উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করুন। ৪

(খ) $\log x=\int_1^x\frac{dt}{t}$, $0<x<\infty$ সংজ্ঞা ধরে প্রমাণ করুন, $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0$ যখন $\alpha>0$. ২

৭। (ক) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x^{1+n}}dx$ অযথার্থ সমাকলটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন। ৩

(খ) প্রমাণ করুন যে অযথার্থ সমাকল $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^\mu}$, $a>0$ অভিসারী হবে যখন $\mu>1$ এবং অপসারী হবে যখন $\mu\le 1$. ৩

৮। (ক) বিটা অপেক্ষক $B(m,n)$-এর সংজ্ঞা দিন। দেখান যে $B(m,n)=B(n,m)$. ৩

(খ) প্রমাণ করুন যে $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. ৩

৯। (ক) যদি $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ঘাত শ্রেণীর অভিসরণের ব্যাসার্ধ R হয় তাহলে প্রমাণ করুন $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ঘাত শ্রেণীর অভিসরণের ব্যাসার্ধ ও R হবে। ৩

(খ) $1-\frac{2^2}{3^2}x+\frac{2^2.4^2}{3^2.5^2}x^2-\frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2}.x^3+\ldots$ এই ঘাত শ্রেণীটির অভিসরণের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন। ৩

১০। (ক) $\{f_n\}$ অপেক্ষকের অনুক্রমটি $[\ 0,1\ ]$ অন্তরালে সমঅভিসারী কিনা পরীক্ষা করুন যেখানে $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0,1]$. ৪

(খ) ফুরিয়ার শ্রেণীর অভিসরণের জন্য Dirichlet-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করুন। ২

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। বাস্তব রাশি e -এর জন্য $\int_1^e \frac{1}{t}\mathrm{d}t=1$ এই সংজ্ঞার সাহায্যে দেখান যে $2<e<3$.

১২। কোন অপেক্ষকের সমাকল মূলের সংজ্ঞা দিন। উদাহরণ সহযোগে দেখান যে কোন অপেক্ষক সমাকলনযোগ্য না হলেও সমাকল মূল থাকতে পারে।

১৩। দেখান যে $\int_{-\infty}^{\infty} x^{1/3}\mathrm{d}x$ এই অযথার্থ সমাকলটি অভিসারী নয় যদিও এটির Cauchy's মুখ্য মান আছে এবং Cauchy মানটি নির্ণয় করুন।

১৪। দেখান যে $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x=\pi$.

১৫। দেখান যে $\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sqrt{\pi}$.

১৬। মনে করুন $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+3}{x^n+1}, 0\le x\le 2$.

f অপেক্ষকটি রিমান সমাকলনযোগ্য কিনা যুক্তিসহ যাচাই করুন।

১৭। $f:[-\pi,\pi]\to R$ অপেক্ষকটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞাত :

$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ এবং $f(x+2\pi)=f(x)$.

f অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী নির্ণয় করুন।

১৮। $\frac{3}{7}+\frac{3.6}{7.10}+\frac{3.6.9}{7.10.13}+\ldots$ শ্রেণীটি অভিসারী কিনা পরীক্ষা করুন।

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Let $f : [\, a, b\,] \to R$ be a bounded function having finite number of points of discontinuity on $[\, a, b\,]$. Show that f is Riemann integrable on $[\, a, b\,]$. 5

b) If f is Riemann integrable on $[\, a, b\,]$, prove that $|\, f\,|$ is Riemann integrable on $[\, a , b\,]$ and $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\, f(x)\,|\,dx = \int_a^b |\, f\,|\, x\,dx$.

Does the converse of this result hold ? Justify your answer. 5

2. a) Show that $4 < \int_1^3 \sqrt{3+x^2}\,dx < 4\sqrt{3}$. 2

b) Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions converging uniformly to a function f on $[\, a, b\,]$ and let each f_n be Riemann integrable on $[\, a, b\,]$. Prove that f is Riemann integrable on $[\, a, b\,]$ and

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$ 5

c) Evaluate with the help of integration :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+3n}\right]$$ 3

3. a) Test for convergence :

i) $\int_1^\infty \frac{(x-1)\sqrt{x}}{1+x+x^3}\,dx$

ii) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\log x}\,dx$ 3 + 2

b) Show that the series

$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ converges absolutely for every real x. 3

c) Examine if the given series $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{4^3}+\ldots$ converges where x is a finite number. 2

4. a) Find the Fourier series of the function defined in the interval $[-\pi, \pi]$ where

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

$f(x+2\pi) = f(x)$.

Hence show that $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. 6

b) Find the volume over the region bounded by the straight line $y = 2x$ and the curve $y = 2x^2$ in the xy plane and by the surface $z = 7 - 3x^2 - y^2$. 4

Group – B

Answer any *three* questions. $6 \times 3 = 18$

5. Let the function $f : [a, b] \to R$ be Riemann integrable on $[a, b]$ and $F : [a, b] \to R$ be a function defined by

$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f(t)\,dt, & a < x \le b \\ 0, & x = a \end{cases}$$

Prove that the function F is continuous on $[a, b]$. Moreover if f is continuous at a point $c \in [a,b]$, then prove that $F'(c)$ exists and $F'(c) = f(c)$. 3 + 3

6. a) State Second Mean Value theorem of integral calculus in Weierstrass form. Hence verify the above theorem for the function $x \sin x$ in the interval $[\pi, 2\pi]$. 4

b) Assuming the definition $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, $0 < x < \infty$ prove that $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}} = 0$ when $\alpha > 0$. 2

7. a) Test for convergence of the improper integral $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{1+n}} dx$. 3

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

b) Prove that the improper integral $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}}$, $a > 0$ converges when $\mu > 1$ and diverges when $\mu \le 1$. 3

8. a) Define Bita function $B(m,n)$. Show that $B(m,n) = B(n,m)$. 3

b) Show that $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. 3

9. a) If the radius of convergence of the power series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is R then show that the radius of convergence of the power series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ is also R. 3

b) Find the radius of convergence of the power series

$$1 - \frac{2^2}{3^2} x + \frac{2^2.4^2}{3^2.5^2} x^2 - \frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2}.x^3 + \ldots.$$ 3

10. a) Examine if the sequence of functions $\{f_n\}$ converges uniformly on $[0,1]$ where $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0,1]$. 4

b) State Dirichlet's theorem for convergence of Fourier series. 2

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. If the real number e is defined by $\int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1$, then show that $2 < e < 3$.

12. Define primitive of a function. With the help of an example show that a function which is not integrable may have primitive.

13. Show that the improper integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^{1/3}\,dx$ is not convergent although it has Cauchy's principal value and find it.

14. Show that $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx = \pi$.

15. Show that $\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{\pi}$.

16. Let $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n + 3}{x^n + 1}, 0 \le x \le 2$. Examine if f is Riemann integrable with reason.

17. Let $f : [-\pi, \pi] \to R$ be defined by

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

and $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Find the Fourier series of f.

18. Examine if the series $\frac{3}{7} + \frac{3.6}{7.10} + \frac{3.6.9}{7.10.13} + \ldots$ converges.