স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৭ ও জুন, ২০১৮

(December-2017 & June-2018)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম **(Elective Course)**

গণিত (Mathematics)

দ্বাদশ পত্র **(12th Paper)**

Probability Theory : EMT-12

সময় ঃ দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান ঃ ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

প্রতীক চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থবহ।

Symbols have their usual meaning.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) ধরা যাক, E একটি প্রদত্ত যদৃচ্ছ পরীক্ষা। যদি $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ যে কোনো n ঘটনা হয়, তাহলে

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

প্রমাণ করুন যে

i) $P(A_1A_2\ldots A_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i)$,

ii) $P(A_1A_2\ldots A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$. ৩ + ২

(খ) যদি $P(A\,|\,B) = 1$, তাহলে প্রমাণ করুন যে- $P(ABC) = P(BC)$, যেখানে A, B, C হল তিনটি ঘটনা। ৫

২। (ক) একটি পরীক্ষার ফল ত্রিমাত্রিক দেশে 4 টি বিন্দুর যে কোনো একটি সমসম্ভাবনায় হতে পারে যাদের কার্তীয় স্থানাঙ্ক হল (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) এবং (1,1,1)। যদি A, B, C যথাক্রমে এই ঘটনাগুলি নির্দেশ করে : 'x-স্থানাঙ্ক 1', 'y-স্থানাঙ্ক 1' 'z-স্থানাঙ্ক 1', তাহলে A, B, C পরস্পর স্বাধীন বা অনপেক্ষ কিনা যাচাই করুন। ৫

(খ) যদি n টি পরস্পর স্বাধীন ঘটনার সম্ভাবনা $p_1, p_2, \ldots, p_n$ হয়, তাহলে দেখান যে এদের মধ্যে অন্তত একটি ঘটার সম্ভাবনা হবে $1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$. ৫

৩। (ক) যদি X পোয়াসঁ-μ চলক হয়, তবে প্রমাণ করুন

$$P(X \leq n) = \frac{1}{n!}\int_{\mu}^{\infty} e^{-x} x^n \, dx,$$

যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। ৫

(খ) $2a$ দৈর্ঘ্যের একটি রেখাদণ্ড AB-র উপর যদৃচ্ছভাবে একটি P বিন্দু নেওয়া হল। AP, PB এই আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{a^2}{2}$ অতিক্রম না করবার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন। ৫

৪। (ক) পোয়াসঁ μ-নিবেশনের জন্য দেখান যে

$$\mu_{k+1} = \mu\left(k\mu_{k-1} + \frac{d\mu_k}{d\mu}\right)$$

এর থেকে অসমপক্ষতার মাপকাঙ্ক ও আধিক্যের মাপকাঙ্ক নির্ণয় করুন। ৫

(খ) যদি যদৃচ্ছ চল X এবং Y-এর দ্বিমাত্রিক ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x,y) = 3x^2 - 8xy + 6y^2,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

হয়, তাহলে দেখান যে অপেক্ষকদুটি অনপেক্ষ নয়। ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। X, Y-এর যুগ্ম ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x, y) = \begin{cases} (6-x-y)/8;\ 0 < x < 2,\ 2 < y < 4 \\ 0;\ \text{অন্যত্র} \end{cases}$$

$p(X+Y<3)$ এবং $p(X<1|Y=3)$ নির্ণয় করুন। ৬

৬। যদি X, Y অনপেক্ষ γ-চলক হয় যার প্রচল যথাক্রমে l ও m তাহলে দেখান যে $\frac{X}{X+Y}$ একটি $\beta_1(l,m)$ চলক। ৬

৭। যদি $X_1, X_2, \ldots, X_n$ অনপেক্ষ বা পরস্পর স্বাধীন স্বাভাবিক $(0,\sigma)$ চলক হয়, তাহলে দেখান যে

$$\operatorname{var}\left(\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{n}\right) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$ ৬

৮। যদি X, Y-এর যুগ্ম ঘনত্ব অপেক্ষক হয়

$$f(x,y) = a^2e^{-ay},\ 0 \le x \le y,\ 0 \le y < \infty,$$

তাহলে $\rho(X,Y)(a>0)$ নির্ণয় করুন। ৬

৯। যদি X একটি χ^2-নিবেশন হয় যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা n, তাহলে দেখান যে $\frac{X}{2}$ একটি $\gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ চলক। ৬

১০। একটি মুদ্রা 2000 বার ছোঁড়া হলে, স্বাভাবিক আসন্নতা ব্যবহার করে Head পড়ার সংখ্যা 900 ও 1100-এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন। ধরুন $\Phi(2\sqrt{5}) = 0\cdot99$. ৬

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। নীচের সূত্রগুলি প্রমাণ করুন :

$P(\overline{A}+\overline{B}) = 1 - P(AB)$ এবং $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$.

১ + ২

১২। প্রমাণ করুন যে

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$ ৩

১৩। দেখান যে $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-0)$. ৩

১৪। প্রমাণ করুন যে $F(-\infty) - F(+\infty) = -1$. ৩

১৫। যদি X_n একটি দ্বিপদ (n, p) চলক হয়, তাহলে দেখান যে $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[in\ p]{} p$ যেখানে $n \to \infty$. ৩

১৬। যদি $X_n \xrightarrow[in\ p]{} X$ এবং $Y_n \xrightarrow[inp]{} Y$ যখন $n \to \infty$, তাহলে দেখান যে $X_n.Y_n \xrightarrow[in\ p]{} X.Y$ যখন $n \to \infty$. ৩

১৭। যদি দুটি চলক X ও Y-এর লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ সরলরেখাগুলি $3x+2y=26$ ও $6x+y=31$ হয় তাহলে $E(X)$, $E(Y)$ ও $\rho(X,Y)$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩

১৮। $\gamma(n)$ চলকের বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকটি নির্ণয় করুন। ৩

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) If $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ be any n events connected to a random experiment E, then prove that

i) $P(A_1 A_2 \ldots A_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i)$,

ii) $P(A_1 A_2 \ldots A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$. 3 + 2

b) Let A,B,C be three events such that $P(A \mid B) = 1$, then prove that $P(ABC) = P(BC)$. 5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

2. a) Let the equally likely outcomes of an experiment be one of the four points in the three-dimensional space with rectangular coordinates (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) and (1,1,1). Let A,B,C denote the events 'x-coordinate 1', 'y-coordinate 1' and 'z-coordinate 1' respectively. Verify whether the three events A,B,C are mutually independent. 5

b) The probabilities of n independent events are $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Then show that the probability that at least one of the events occur is $1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$. 5

3. a) Let X be a Poisson variate with parameter μ. Show that $P(X \leq n) = \frac{1}{n!}\int_{\mu}^{\infty} e^{-x} x^n \, dx$, where n is a positive integer. 5

b) A point P is chosen at random on a line segment AB of length $2a$. Find the probability that the area of the rectangle AP, PB will not exceed $\frac{a^2}{2}$. 5

4. a) Obtain the recurrence relation

$$\mu_{k+1} = \mu\left(k\mu_{k-1} + \frac{d\mu_k}{d\mu}\right)$$

for the Poisson distribution with parameter μ. Hence find the coefficient of skewness and the coefficient of excess of the Poisson μ distribution. 5

b) The random variables X and Y have the joint density function

$f(x,y) = 3x^2 - 8xy + 6y^2$ for $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

Then prove that X and Y are not independent. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. The joint probability density function of two random variables X, Y is given by

$$f(x, y) = \begin{cases} (6-x-y)/8;\ 0 < x < 2,\ 2 < y < 4 \\ 0;\ \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Calculate the following probabilities :

$p(X+Y<3)$ and $p(X<1 \mid Y=3)$. 6

6. If X and Y be independent γ variates with parameters l and m respectively, then prove that the distribution of $\frac{X}{X+Y}$ is $\beta_1(l,m)$. 6

7. If $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be mutually independent normal $(0,\sigma)$ variates, then show that $\mathrm{var}\left(\frac{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}{n}\right) = \frac{2\sigma^4}{n}$. 6

8. If the joint probability density function of X and Y be $f(x,y) = a^2 e^{-ay}$, $0 \le x \le y$, $0 \le y < \infty$, then find the value of $\rho(X,Y)(a>0)$. 6

9. If X has χ^2-distribution with n degree of freedom, then show that $\frac{X}{2}$ is a $\gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ variate. 6

10. Find the probability that the number of heads in 2000 throws with a fair coin lies between 900 and 1100. Assume $\Phi(2\sqrt{5}) = 0 \cdot 99$. 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Prove the following formulae :

$P(\overline{A}+\overline{B}) = 1 - P(AB)$ and $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$. 1 + 2

12. Prove that

$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$. 3

13. Show that $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-0)$. 3

14. Prove that $F(-\infty) - F(+\infty) = -1$. 3

15. If X_n be a binomial (n, p) variate, then prove that $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[in\ p]{} p$ as $n \to \infty$. 3

16. Let $X_n \xrightarrow[in\ p]{} X$ and $Y_n \xrightarrow[in\ p]{} Y$ as $n \to \infty$, then show that $X_n . Y_n \xrightarrow[in\ p]{} X.Y$ as $n \to \infty$. 3

17. Two random variables X, Y have the least square regression lines with equations $3x + 2y = 26$ and $6x + y = 31$, then find the values of $E(X)$, $E(Y)$, $\rho(X,Y)$. 3

18. Find the characteristic function of $\gamma(n)$ variate. 3