স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৭ ও জুন, ২০১৮

(December-2017 & June-2018)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম **(Elective Course)**

গণিত (Mathematics)

চতুর্দশ পত্র **(14th Paper)**

Linear Programming and Game Theory : EMT-14

সময় ঃ দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান ঃ ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) নিম্নলিখিত সমস্যাটিকে একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা রূপে উপস্থাপিত করুন :

এক ব্যক্তির বাগানের জন্য *A, B, C* কেমিক্যালের যথাক্রমে 10, 12, 12 এককের প্রয়োজন। প্রতি পাত্র তরল পদার্থে *A, B, C*-র যথাক্রমে 3, 2, 1 একক আছে এবং প্রতি প্যাকেট শুষ্ক পদার্থে *A, B, C*-র যথাক্রমে 1, 2, 4 একক আছে। ব্যক্তিটি বাগানের জন্য ন্যূনতম অর্থ লগ্নি করতে চান, যেখানে দেওয়া আছে যে প্রতি পাত্র তরল পদার্থ Rs. 20 দরে এবং প্রতি প্যাকেট শুষ্ক পদার্থ Rs. 10 দরে বিক্রয় হয়। ৫

(খ) লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটিকে (যদি সমাধানযোগ্য হয়) সমাধান করুন :

চরম $Z = 4x_1 + 7x_2$

শর্ত সাপেক্ষে $2x_1 + 5x_2 \le 40$

$x_1 + x_2 \le 11,$

$x_2 \ge 4,$

$x_1, x_2 \ge 0.$ ৫

২। (ক) প্রমাণ করুন যে $Ax = b$, $x \ge 0$ এই সমীকরণ সমূহের কার্যকর সমাধান দ্বারা গঠিত উত্তল সেটের প্রত্যেক প্রান্তিক বিন্দুই ঐ সমাধানসমূহের একটি মৌল কার্যকর সমাধান হবে। ৬

(খ) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির একটি কার্যকর সমাধান :

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$

$6x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1$

এই কার্যকর সমাধানটিকে মৌল কার্যকর সমাধানে রূপান্তরিত করুন। ৪

৩। (ক) চরম $Z = cx$ যেখানে $Ax = b$, $x \geq 0$; এই রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার একটি মৌল কার্যকর সমাধান যদি x_B হয়, এবং A-র প্রতি a_j-এর জন্য $z_j - c_j \geq 0$ হয়, তবে x_B ঐ সমস্যার একটি চরম সমাধান — এটি প্রমাণ করুন। ৫

(খ) নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটির সমাধান করুন :

চরম $Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$

শর্ত সাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$ ৫

৪। (ক) প্রদত্ত মুখ্য রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার দ্বৈত সমস্যার সংজ্ঞা লিখুন।

প্রদত্ত সমস্যা : চরম $Z = cx$

যেখানে $Ax \leq b$, $x \geq 0$.

প্রমাণ করুন যদি মুখ্য সমস্যার একটি সসীম চরম সমাধান থাকে তাহলে দ্বৈত সমস্যারও একটি সসীম চরম সমাধান থাকবে। ২ + ৪

(খ) প্রাধান্য তত্ত্ব ব্যবহার করে নিম্নলিখিত ক্রীড়া সমস্যার সমাধান করুন : ৪

		খেলোয়াড় B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
খেলোয়াড় A	A_1	-5	3	1	15
	A_2	5	5	4	6
	A_3	-4	-2	0	-5

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। নীচের পরিবহন সমস্যাটি সমাধান করুন :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	6	1	9	3	70
O_2	11	5	2	8	55
O_3	10	12	4	7	70
b_j	85	35	50	45	

৬। নীচের ভ্রাম্যমান বিক্রেতা সমস্যাটি সমাধান করুন :

	A	B	C	D	E
A	∞	7	6	8	4
B	7	∞	8	5	6
C	6	8	∞	9	7
D	8	5	9	∞	8
E	4	6	7	8	∞

৭। দ্বৈত সমস্যার সমাধান করে নিচের মৌলিক রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার চরম সমাধান নির্ণয় করুন :

অবম $Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$

শর্ত সাপেক্ষে $x_1 + x_3 \geq 2$

$x_2 + x_3 \geq 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

৮। নীচের আরোপ সমস্যাটি সমাধান করুন :

		Machines					
		1	2	3	4	5	6
Workers	1	12	3	6	—	5	9
	2	4	11	—	5	—	8
	3	8	2	10	9	7	5
	4	—	7	8	6	12	10
	5	5	8	9	4	6	1

৯। প্রদত্ত ক্রীড়া সমস্যাটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করুন :

$$A \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \quad (B)$$

১০। দুই ব্যক্তির শূন্য-যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের যদি কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু না থাকে, প্রমাণ করুন যে সর্বদাই ব্যক্তি-দুটির শ্রেষ্ঠ কৌশলই পাওয়া যাবে।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। দেখান যে (1,5,7), (4,0,6) এবং (1,0,0) ভেক্টর তিনটি E^3 দেশের একটি ভিত্তি গঠন করে।

১২। নিম্নলিখিত সমীকরণদ্বয়ের সমস্ত মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

১৩। উত্তল সেট-এর সংজ্ঞা দিন। দেখান যে $X = \{\vec{X} : |\vec{X}| \leq 2\}$ একটি উত্তল সেট। ১ + ২

১৪। $S = \{(x, y): x - y + 1 \geq 0,\ 2x + y - 4 \leq 0,\ x \geq 0, y \geq 0\}$. সেটটির প্রান্তিক বিন্দুগুলি নির্ণয় করুন।

১৫। দেখান যে পরাসমতল একটি উত্তল সেট।

১৬। North-West Corner পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির একটি প্রাথমিক মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2	5	4	7	4
O_2	6	1	2	5	6
O_3	4	5	2	4	8
b_j	3	7	6	2	

১৭। প্রমাণ করুন যে দ্বৈত সমস্যার দ্বৈত হবে প্রদত্ত (মুখ্য) সমস্যা।

১৮। নীচের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট ক্রীড়ার সমাধান করুন :

		B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A	A_1	10	5	5	20	4
	A_2	11	15	10	17	25
	A_3	7	12	8	9	8
	A_4	5	13	9	10	5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. $10 \times 2 = 20$

1. a) Formulate the following problem as a linear programming problem :

A person requires 10, 12, 12 units of chemicals *A, B, C* respectively for his garden. A liquid product contains 3, 2, 1 units of *A, B, C* respectively per jar. A dry product contains 1, 2, 4 units of *A, B, C* per packet. The person wants to make the investment for his garden as minimum as possible, where it is given that the liquid product sells for Rs. 20 per jar and the dry product sells for Rs. 10 per packet. 5

b) Solve (if possible) graphically the following L.P.P. :

Maximize $Z = 4x_1 + 7x_2$

subject to $2x_1 + 5x_2 \le 40$

$x_1 + x_2 \le 11,$

$x_2 \ge 4,$

$x_1, x_2 \ge 0.$ 5

2. a) Prove that every extreme point of the convex set of all feasible solutions of the system $Ax = b$, $x \ge 0$, corresponds to a basic feasible solution. 6

b) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ and $x_3 = 3$ is a feasible solution of the set of equations

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$

$6x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1$

Reduce the feasible solution to a basic feasible solution. 4

3. a) Prove that if for a basic feasible solution x_B of the L.P.P. $Max\, Z = cx$, subject to $Ax = b$, $x \geq 0$, $z_j - c_j \geq 0$ for every column a_j of A, then x_B is an optimal solution. 5

b) Solve the following L.P.P. :

Maximize $Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$

subject to $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$

$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$. 5

4. a) Define the dual of a primal LPP

$Max\, Z = cx$

subject to $Ax \leq b$, $x \geq 0$.

Prove that if the primal problem has a finite optimal solution then the dual has also a finite optimal solution. 2 + 4

b) Use dominance property to solve the following problem of game : 4

		Player B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Player A	A_1	− 5	3	1	15
	A_2	5	5	4	6
	A_3	− 4	–2	0	− 5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Solve the following transportation problem :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	6	1	9	3	70
O_2	11	5	2	8	55
O_3	10	12	4	7	70
b_j	85	35	50	45	

6. Solve the following travelling salesman problem :

	A	B	C	D	E
A	∞	7	6	8	4
B	7	∞	8	5	6
C	6	8	∞	9	7
D	8	5	9	∞	8
E	4	6	7	8	∞

7. Find the optimal solution of the following L.P.P. by solving its dual :

Minimize $Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$

subject to $x_1 + x_3 \geq 2$

$x_2 + x_3 \geq 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

8. Solve the following assignment problem :

		Machines					
		1	2	3	4	5	6
Workers	1	12	3	6	—	5	9
	2	4	11	—	5	—	8
	3	8	2	10	9	7	5
	4	—	7	8	6	12	10
	5	5	8	9	4	6	1

9. Solve the following game problem graphically :

$$A \begin{matrix} \\ A_1 \\ A_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} B \\ B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

10. In a zero-sum two-person game, if the pay-off matrix has no saddle point, prove that there always exist optimal strategies for the two players.

Group – C

Answer any *four* questions. $3 \times 4 = 12$

11. Show that the vectors (1,5,7), (4,0,6) and (1,0,0) form a basis of the space E^3.

12. Find all the basic feasible solutions of the following system :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 \quad = 18$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 .$$

13. Define convex set. Show that $X = \{\vec{X} : |\vec{X}| \leq 2\}$ is a convex set. 1 + 2

14. Find the extreme points of the set

$$S = \{(x, y): x - y + 1 \geq 0,\ 2x + y - 4 \leq 0,\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

15. Show that a hyperplane is a convex set.

16. Determine an initial basic feasible solution of the following transportation problem by North-West Corner rule.

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2	5	4	7	4
O_2	6	1	2	5	6
O_3	4	5	2	4	8
b_j	3	7	6	2	

17. Prove that the dual of a dual problem will be the primal problem.

18. Solve the game whose pay-off matrix is given below :

$$A \begin{matrix} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} B \\ B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \quad B_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 20 & 4 \\ 11 & 15 & 10 & 17 & 25 \\ 7 & 12 & 8 & 9 & 8 \\ 5 & 13 & 9 & 10 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$