

QP Code : 18UT116EMT15

স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা  
( BDP Term End Examination )  
ডিসেম্বর, ২০১৭ ও জুন, ২০১৮  
( December-2017 & June-2018 )  
ঐচ্ছিক পাঠক্রম ( Elective Course )  
গণিত ( Mathematics )  
পঞ্চদশ পত্র ( 15th Paper )  
Complex Analysis & Laplace  
Transformation : EMT-15

সময় : দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান : ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব : ৭০% ( Weightage of Marks : 70% )

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।  
অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর  
কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

**Special credit will be given for accuracy and relevance  
in the answer. Marks will be deducted for incorrect  
spelling, untidy work and illegible handwriting.**

**The weightage for each question has been  
indicated in the margin.**

ব্যবহৃত প্রতীকগুলি সাধারণ অর্থবহ।

Used symbols have their usual meaning.

বিভাগ — ক

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :  $10 \times 2 = 20$

১। (ক) জটিল তলে একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার  
একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুটি হল  $A(z_1)$  এবং  
 $B(z_2)$ .

B.Sc.-11601-P

[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

QP Code : 18UT116EMT15 2

(খ) ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া দ্বারা নিম্নলিখিত  
অপেক্ষক নির্ণয় করুন :

$$\frac{s}{s^4 + 4a^4} . \quad 5 + 5$$

২। (ক) যখন  $\tan^{-1}(x+iy) = \alpha + i\beta$  যেখানে  $x, y, \alpha$   
এবং  $\beta$  বাস্তব, এবং  $z(=x+iy) \neq \pm i$ , দেখান যে  
 $x^2 + y^2 + 1 - 2y \coth(2\beta) = 0$ .

(খ) ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমাধান করুন :  
 $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2, y(0) = 0,$   
 $y'(0) = 1.$  5 + 5

৩। (ক) মনে করুন আরগঁ সমতলে  $D$  একটি ক্ষেত্র এবং  
 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  একটি বিশ্লেষণযোগ্য অপেক্ষক। দেখান যে  
 $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2$ .

(খ) কনভলিউশন উপপাদ্যের সাহায্যে দেখান যে

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^3} \right\} = \frac{1}{8} \{ (3 - t^2) \sin t - 3t \cos t \} .$$

5 + 5

৪। (ক) দেখান যে  $\omega = \frac{2z+3}{z-4}$  রূপান্তরের মাধ্যমে  
 $x^2 + y^2 - 4x = 0$  বৃত্তটি  $4u+3=0$  সরলরেখায়  
রূপান্তরিত হয়।

B.Sc.-11601-P

3 QP Code : 18UT116EMT15

(খ) দেখান যে  $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$  একটি হরাত্মক অপেক্ষক। এটির অনুবন্ধী হরাত্মক অপেক্ষক এবং সংশ্লিষ্ট বিশ্লেষণযোগ্য অপেক্ষকটি  $z$ -এর আকারে নির্ণয় করুন।

বিভাগ — খ

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন :  $৬ \times ৩ = ১৮$

৫।  $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$  হলে দেখান যে

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \bar{f}(s), n = 1, 2, 3, \dots$$

৬। ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমাধান করুন :

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 4e^t,$$

প্রদত্ত আছে  $y(0) = y'(0) = 0$ .

৭। দেখান যে  $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}\right\} = \frac{t}{2a} \sinh at$ .

৮। ধরুন  $f(z) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, z \neq 0$

$$= 0, \quad z = 0.$$

দেখান যে মূলবিন্দুতে অপেক্ষকটি কোশী-রীমান সমীকরণ সিদ্ধ করে কিন্তু মূলবিন্দুতে অপেক্ষকটি অন্তরকলনযোগ্য নয়।

৯। মনে করুন  $f(z) = u + iv$  অপেক্ষকটি  $D$  ক্ষেত্রে বিশ্লেষণযোগ্য এবং  $\arg f(z)$  ধ্রুবক। দেখান যে  $D$  ক্ষেত্রে  $f(z)$  অপেক্ষকটি ধ্রুবক।

B.Sc.-11601-P

[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

QP Code : 18UT116EMT15 4

১০। চারটি প্রদত্ত বিন্দু  $z_1, z_2, z_3$  ও  $z_4$ -এর দ্বৈত-অনুপাতের সংজ্ঞা দিন। দেখান যে দ্বৈত-অনুপাত একটি দ্বি-রৈখিক রূপান্তরের অধীনে অবিচল থাকে।

বিভাগ — গ

যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন :  $৩ \times ৪ = ১২$

১১। ল্যাপ্লাস রূপান্তরের প্রাথমিক চলন ধর্ম এবং স্কেল পরিবর্তনের ধর্মটি বিবৃত করুন।

১২।  $L\{f(t)\} = \frac{s^2 - s + 1}{(2s + 1)^2(s - 1)}$  হলে  $L\{f(2t)\}$  নির্ণয় করুন।

১৩।  $t \sin 3t \cos 2t$  অপেক্ষকটির ল্যাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় করুন।

১৪। কনভলিউশন উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

১৫।  $(1 + z)^5 = (1 - z)^5$  সমীকরণের সকল বীজগুলি নির্ণয় করুন।

১৬।  $i^i$ -এর সাধারণ মানসমূহ নির্ণয় করুন।

১৭। দেখান যে  $e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$  একটি হরাত্মক অপেক্ষক।

১৮। একটি দ্বি-রৈখিক রূপান্তর নির্ণয় করুন যা  $z_1 = i, z_2 = 1, z_3 = \infty$  বিন্দুগুলিকে যথাক্রমে  $w_1 = -i, w_2 = \infty, w_3 = -1$  বিন্দুগুলিতে রূপান্তরিত করে।

B.Sc.-11601-P

**QP Code : 18UT116EMT15**

**( English Version )**

**Group - A**

Answer any *two* questions.  $10 \times 2 = 20$

1. a) Find the equation of a circle in the complex plane joining the points  $A(z_1)$  and  $B(z_2)$  as diameter.
- b) Using inverse Laplace transform, find the following function :

$$\frac{s}{s^4 + 4a^4}. \quad 5 + 5$$

2. a) If  $\tan^{-1}(x + iy) = \alpha + i\beta$  where  $x, y, \alpha$  and  $\beta$  are real, and  $z (= x + iy) \neq \pm i$ , then show that  $x^2 + y^2 + 1 - 2y \coth(2\beta) = 0$ .
- b) Solve the following by Laplace transform :
- $$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2, \quad y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \quad 5 + 5$$

3. a) Suppose that  $D \subseteq \mathbb{C}$  and  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  is analytic in  $D$ . Show that

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2.$$

- b) Using convolution theorem show that

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^3} \right\} = \frac{1}{8} \{ (3 - t^2) \sin t - 3t \cos t \}.$$

5 + 5

**B.Sc.-11601-P**

[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

**QP Code : 18UT116EMT15 2**

4. a) Show that the transformation  $\omega = \frac{2z+3}{z-4}$  maps the circle  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  onto the line  $4u + 3 = 0$ .
- b) Show that the function  $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$  is harmonic. Find its harmonic conjugate and the corresponding analytic function in terms of  $z$ .

**Group - B**

Answer any *three* questions.  $6 \times 3 = 18$

5. If  $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ , then show that
- $$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \bar{f}(s), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
6. Using Laplace transform solve
- $$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 4e^t, \quad \text{given that} \\ y(0) = y'(0) = 0.$$

7. Show that  $L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 - a^2)^2} \right\} = \frac{t}{2a} \sinh at$ .

8. Let  $f(z) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \quad z \neq 0$   
 $= 0, \quad z = 0.$

Show that though Cauchy-Riemann equations are satisfied at  $(0,0)$ ,  $f'(0)$  does not exist.

**B.Sc.-11601-P**

9. Let  $f(z) = u + iv$  be analytic in a domain  $D$  and  $\arg f(z)$  is constant in  $D$ . Show that  $f(z)$  is constant in  $D$ .
10. Define cross ratio of four complex numbers  $z_1, z_2, z_3$  and  $z_4$ . Show that a bilinear transformation leaves a cross ratio invariant.

**Group - C**

Answer any *four* questions.  $3 \times 4 = 12$

11. State first shifting property and change of scale property of a Laplace transformation.
12. If  $L\{f(t)\} = \frac{s^2 - s + 1}{(2s + 1)^2(s - 1)}$ , find  $L\{f(2t)\}$ .
13. Find Laplace transformation of the function  $t \sin 3t \cos 2t$ .
14. State and prove convolution theorem.
15. Find all the roots of  $(1 + z)^5 = (1 - z)^5$ .
16. Find the general values of  $i^i$ .
17. Prove that the function  $e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$  is harmonic.
18. Find the bilinear transformation which maps  $z_1 = i$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = \infty$  into  $w_1 = -i$ ,  $w_2 = \infty$ ,  $w_3 = -1$  respectively.

---