স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৭ ও জুন, ২০১৮

(December-2017 & June-2018)

সহায়ক পাঠক্রম **(Subsidiary Course)**

গণিত (Mathematics)

প্রথম পত্র **(1st Paper)**

Mathematics-I : SMT-I

সময় ঃ তিন ঘণ্টা (Time : 3 Hours)

পূর্ণমান ঃ ১০০ (Full Marks : 100)

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ - ক

[পূর্ণমান : ২০]

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন । ১০ × ২ = ২০

১। (ক) i) যদি $\sqrt[3]{x+iy}=a+ib$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=4(a^2-b^2)$. ৫

ii) $x^5-x^4+8x^2-9x-15=0$ সমীকরণের দুটি বীজ হল $-\sqrt{3}$ এবং $1+2i$। সমীকরণটির অন্যান্য বীজগুলি নির্ণয় করুন। ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) i) কার্ডনের পদ্ধতিতে সমাধান করুন :

$x^3-9x+28=0$. ৫

ii) A ম্যাট্রিক্সের মাত্রা নির্ণয় করুন :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ -2 & -4 & 4 & -7\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$ ৫

(গ) i) $\begin{vmatrix}(a-x)^2 & (a-y)^2 & (a-z)^2\\ (b-x)^2 & (b-y)^2 & (b-z)^2\\ (c-x)^2 & (c-y)^2 & (c-z)^2\end{vmatrix}$ কে দুটি নির্ণায়কের গুণফল হিসেবে প্রকাশ করুন এবং এর থেকে নির্ণায়কটির মান নির্ণয় করুন। ৫

ii) যদি $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ হয়, তবে A^{50} নির্ধারণ করুন। ৫

(ঘ) i) ধরুন ($G, \bullet$) একটি দল এবং H, G-এর একটি অশূন্য উপসেট। প্রমাণ করুন যে, ($H, \bullet$), ($G, \bullet$)-এর একটি উপদল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a.b^{-1}\in H$ সকল $a,b\in H$-এর জন্য হয়। ৫

ii) প্রমাণ করুন যে, $\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} : a,b\in \mathbb{R}\right\}$ ম্যাট্রিক্স সমূহের এই মণ্ডলটি একটি ক্ষেত্র। ৫

বিভাগ - খ

[পূর্ণমান : ১৮]

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন। ৬ × ৩ = ১৮

২। i) প্রমাণ করুন : $\sin\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$. ৬

ii) ক্র্যামারের নিয়মে সমাধান করুন :

$x+y+z=5$

$x-y+z=3$

$2x+y=3$. ৬

iii) $\mathbb{R}$-এ ζ সম্পর্কটি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$\zeta=\{(a,b)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ a.b\geq 0\}$, ζ প্রতিবর্তী, প্রতিসম ও অনুবর্তী হবে কী ? ৬

iv) প্রমাণ করুন একটি চক্রজ দলের যথার্থ উপদল চক্রজ হবে। এর বিপরীতটি কি সত্য ? ৬

v) দেওয়া আছে $S=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}: x,y,z,w\in\mathbb{Z}\right\}$, ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণ সাপেক্ষে বলয় গঠন করে ।

$T=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}: a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$ ও

$U=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & 0\end{pmatrix}: a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$ হলে T ও U, S-এর উপবলয় হবে কিনা নির্ধারণ করুন। ৬

vi) $f: A\to B$ এবং $g: B\to C$ (A,B,C অশূন্য সেট) প্রদত্ত চিত্রণ। দুটি চিত্রণই একৈক হলে দেখান যে gof একৈক হবে। যদি gof একৈক হয়, তবে দেখান যে f একৈক হবে কিন্তু g একৈক নাও হতে পারে। ৬

বিভাগ - গ

[পূর্ণমান : ১২]

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন। ৩ × ৪ = ১২

৩। i) $3A-B=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 1\\ -3 & -4 & 7\\ 3 & -17 & 5\end{pmatrix}, A+2B=\begin{pmatrix}4 & -5 & -2\\ 6 & 8 & -7\\ 1 & 34 & -10\end{pmatrix}$ দেওয়া আছে। A ও B নির্ণয় করুন। ৩

ii) দেখান যে $\sin(\log i^i)$ বাস্তব সংখ্যা। ৩

iii) A, B, C, a, b, c, m বাস্তব হলে দেখান যে $\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}+\frac{C^2}{x-c}=x-m$ সমীকরণের কোন কাল্পনিক বীজ নেই। ৩

iv) সার্বিক সেট S-এর A, B, C তিনটি অশূন্য উপসেট হলে প্রমাণ করুন $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$. ৩

v) প্রমাণ করুন যে, দল (G, *) বিনিময়যোগ্য দল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি সকল $a,b\in G$-এর জন্য $(a*b)^2=a^2*b^2$ হয়। ৩

vi) সঠিক কিনা বিচার করুন এবং উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন।

$(Q,+)$ একটি চক্রজ দল। ৩

vii) ক্ষেত্র $(F,+,\bullet)$-এ $a^2=b^2$ হলে দেখান যে $a=b$ বা $a=-b$. ৩

viii) $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান ও আইগেন ভেক্টর নির্ণয় করুন। ৩

বিভাগ - ঘ

[পূর্ণমান : ৫০]

৪। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন : ১০ × ২ = ২০

(ক) i) $\vec{\alpha}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{\beta}=\vec{i}-2\vec{k}$ ও $\vec{\gamma}=\vec{j}+\vec{k}$ হলে $\vec{\alpha}.(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$ এবং $\vec{\alpha}\times(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$-এর মান নির্ণয় করুন। ৫

ii) ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে দেখান যে, যে-কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বগুলি একটি বিন্দুতে ছেদ করে। ৫

(খ) i) দুটি বল $4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ এবং $3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ একটি কণার উপর ক্রিয়া করে কণাটিকে $\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ বিন্দু থেকে $5\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে বলদ্বয় দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করুন। ৫

ii) দেখান যে
$$4x^2+12xy+9y^2-6x-9y+2=0$$
সমীকরণটি একজোড়া সমান্তরাল সরলরেখা সূচিত করে। সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করুন। ৫

(গ) i) $\frac{l}{r}=1-e\cos\theta$ কণিকের উপর অবস্থিত P এবং Q-বিন্দু দুটির ভেক্টরীয় কোণ $(\alpha-\beta)$ এবং $(\alpha+\beta)$, যেখানে β ধ্রুবক। দেখান যে মেরু (পোল) থেকে PQ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ $r^2(e^2-\sec^2\beta)+2ler\cos\theta+l^2=0$. ৫

ii) একটি লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে, অক্ষ $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ সরলরেখা এবং অর্ধশীর্ষ কোণ $\frac{\pi}{3}$ হলে শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৫

(ঘ) i) $(-1,1,-3)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যেটি $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-4}$ সরলরেখার উপর লম্ব। ৫

ii) $(4,1,1)$ বিন্দু থেকে $x+y+z=4=x-2y-z$ সরলরেখার দূরত্ব নির্ণয় করুন। ৫

৫। যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন : ৬ × ৩ = ১৮

i) $7x^2 - 6xy - y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে পরিণত করুন এবং এর থেকে কণিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন। ৬

ii) ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করুন যে

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$ ৬

iii) প্রমাণ করুন যে

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}).(\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) + (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}).(\vec{\alpha} \times \vec{\delta}) + (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}).(\vec{\beta} \times \vec{\delta}) = 0.$$ ৬

iv) দেখান যে $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ এবং $4x - 3y + 1 = 0 = 5x - 3z + 2$ সরলরেখাদ্বয় সমতলীয় এবং সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৬

v) $x + 2y + 2z - 13 = 0 = x + 4y - 2z - 5$ এবং $2x - 2y + z - 1 = 0 = 2x - 4y - z - 9$ এই দুই নৈকতলীয় সরলরেখার মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করুন। ৬

vi) একটি সমতল অক্ষত্রয়কে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। ΔABC মূলবিন্দু থেকে $3p$ একক দূরে আছে। ΔABC-এর ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন। ৬

৬। যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

i) যদি চলনের ফলে $x^2 + y^2 - 2x + 14y + 20 = 0$ সমীকরণটি রূপান্তরিত হয়ে $x'^2 + y'^2 - 30 = 0$ সমীকরণে পরিণত হয় তবে রূপান্তরটি নির্ণয় করুন। ৩

ii) যে বিন্দুর কার্টেসিয়ান স্থানাঙ্ক $(-1, -1)$ ঐ বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন। ৩

iii) $3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণটির মান নির্ণয় করুন. ৩

iv) k -এর কোন্ মানের জন্য $6x^2 + xy + ky^2 + 2x - 31y - 20 = 0$ একজোড়া সরলরেখা সূচিত করে ? ৩

v) দেখান যে, $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ এবং $3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$ একটি সমকোণী ত্রিভূজের তিনটি বাহু নির্দেশিত করে। ৩

vi) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ তিনটি একক ভেক্টর এবং $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ হলে, দেখান যে, $\vec{\alpha}.\vec{\beta} + \vec{\beta}.\vec{\gamma} + \vec{\gamma}.\vec{\alpha} = -\dfrac{3}{2}$. ৩

vii) λ ও μ-এর কোন্ কোন্ মানের জন্য $-3\vec{i}+4\vec{j}+\lambda\vec{k}$ এবং $\mu\vec{i}+8\vec{j}+6\vec{k}$ ভেক্টর দুটি সমরেখ তা নির্ণয় করুন। ৩

viii) (1,–1,2) বিন্দুতে $\vec{F}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ বল প্রযুক্ত হলে বলটির (2,–1,3) বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামকের (moment) মান নির্ণয় করুন। ৩

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(English Version)

Group – A

[Full Marks : 20]

Answer any *two* questions. $10 \times 2 = 20$

1. a) i) If $\sqrt[3]{x+iy}=a+ib$, then show that $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=4(a^2-b^2)$. 5

ii) Two roots of the equation $x^5-x^4+8x^2-9x-15=0$ are $-\sqrt{3}$ and $1+2i$. Find the other roots of the equation. 5

b) i) Solve by Cardon's method :

$x^3-9x+28=0$. 5

ii) Find the rank of the matrix A :

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ -2 & -4 & 4 & -7\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$. 5

c) i) Express $\begin{vmatrix}(a-x)^2 & (a-y)^2 & (a-z)^2\\ (b-x)^2 & (b-y)^2 & (b-z)^2\\ (c-x)^2 & (c-y)^2 & (c-z)^2\end{vmatrix}$ as a product of two determinants and hence find the value of the determinant. 5

ii) If $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, then find the value of A^{50}. 5

d) i) Let ($G, \bullet$) be a group and H be a non-empty subset of G. Prove that ($H, \bullet$) is a subgroup of ($G, \bullet$) if and only if $a.b^{-1} \in H$ for all $a, b \in H$. 5

ii) Prove that the ring of matrices $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ is a field. 5

Group – B

[Full Marks : 18]

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

2. i) Prove that $\sin\left(i \log \dfrac{a-ib}{a+ib}\right) = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$. 6

ii) Solve the following system of equations by Cramer's rule :

$x+y+z=5$

$x-y+z=3$

$2x+y=3$. 6

iii) Let ζ be a relation on $\mathbb{R}$ defined as follows :

$\zeta = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a.b \geq 0\}$

Examine whether ζ is reflexive, symmetric and transitive. 6

iv) Prove that every proper subgroup of a cyclic group is cyclic. Is the converse true ? 6

v) Given that $S = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : x, y, z, w \in \mathbb{Z}\right\}$ is a ring with respect to matrix addition and matrix multiplication. Examine whether T & U are subrings of S or not where

$T = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$

and $U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$. 6

vi) Let $f : A \to B$ and $g : B \to C$ $(A, B, C \neq \phi)$ be two mappings. If f, g are injective then prove that gof is injective. If gof is injective then show that f is injective but g is not necessarily injective. 6

Group – C

[Full Marks : 12]

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

3. i) Given that $3A - B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -3 & -4 & 7 \\ 3 & -17 & 5 \end{pmatrix}$,

$A + 2B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ 6 & 8 & -7 \\ 1 & 34 & -10 \end{pmatrix}$. Find A and B. 3

ii) Show that $\sin(\log i^i)$ is real. 3

iii) If A, B, C, a, b, c, m are real then show that the equation $\dfrac{A^2}{x-a} + \dfrac{B^2}{x-b} + \dfrac{C^2}{x-c} = x - m$ has no imaginary root. 3

iv) If A, B, C are three non-empty subsets of the universal set S then prove that $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$. 3

v) Prove that a group (G, *) is commutative if and only if $(a * b)^2 = a^2 * b^2$. 3

vi) Write true or false : $(Q,+)$ is a cyclic group. Justify your answer. 3

vii) In a field $(F,+,\bullet)$ if $a^2 = b^2$ then show that $a = b$ or $a = -b$. 3

viii) Find the eigenvalue and eigenvector of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Group – D

[Full Marks : 50]

4. Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

a) i) Find the value of $\vec{\alpha}.(\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ and $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ where $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{\beta} = \vec{i} - 2\vec{k}$ and $\vec{\gamma} = \vec{j} + \vec{k}$. 5

ii) Prove, by vector method that the perpendiculars from the vertices of a triangle to the opposite sides meet at a point. 5

b) i) A particle acted on by two forces $4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ and $3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ is displaced from the point $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ to the point $5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$. Find the total work done by the forces. 5

ii) Show that $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6x - 9y + 2 = 0$ represents a parallel straight lines and find the distance between them. 5

c) i) If P, Q be two points on the conic $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$ with $(\alpha - \beta)$ and $(\alpha + \beta)$ as vectorial angles where β is constant. Show that the locus of the foot of perpendicular from the pole on the line PQ is $r^2(e^2 - \sec^2\beta) + 2ler\cos\theta + l^2 = 0$. 5

ii) Find the equation of the right circular cone with its vertex at origin, semi-vertical angle $\frac{\pi}{3}$ and axis being the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. 5

d) i) Find the equation of the straight line passing through the point (–1,1,–3) and perpendicular to the straight line $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-4}$. 5

ii) Find the distance of the point (4,1,1) from the straight line given by $x + y + z = 4$, $x - 2y - z = 4$. 5

5. Answer any *three* questions : 6 × 3 = 18

i) Reduce the equation $7x^2 - 6xy - y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$ to its canonical form and find the nature of the conic. 6

ii) Prove by vector method that

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$ 6

iii) Prove that

$$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}).(\vec{\gamma}\times\vec{\delta})+(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}).(\vec{\alpha}\times\vec{\delta})$$

$$+(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}).(\vec{\beta}\times\vec{\delta})=0.$$ 6

iv) Prove that the straight lines

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ and

$4x-3y+1=0=5x-3z+2$ are coplanar.

Find also the equation of the plane. 6

v) Find the shortest distance between two skew lines

$x+2y+2z-13=0=x+4y-2z-5$ and

$2x-2y+z-1=0=2x-4y-z-9$. 6

vi) A plane intersects three co-ordinate axes at the points *A, B* & *C*. The distance of ΔABC from the origin is 3p. Find the locus of the centroid of ΔABC. 6

6. Answer any *four* questions : $3 \times 4 = 12$

i) Find the translation for which the equation

$x^2+y^2-2x+14y+20=0$ transforms to

the equation $x'^2+y'^2-30=0$. 3

ii) Find the polar coordinates of the point whose Cartesian coordinates are (–1,–1). 3

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

iii) Find the angle between the pair of straight lines represented by the equation $3x^2-10xy+3y^2=0$. 3

iv) Find the value of k, for which

$6x^2+xy+ky^2+2x-31y-20=0$

represents a pair of straight lines. 3

v) Show that $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ and $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ form the sides of a right angled triangle. 3

vi) If $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ be unit vectors satisfying the equation $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, then show that $\vec{\alpha}.\vec{\beta}+\vec{\beta}.\vec{\gamma}+\vec{\gamma}.\vec{\alpha}=-\frac{3}{2}$. 3

vii) Find the values of λ and μ if the vectors $-3\vec{i}+4\vec{j}+\lambda\vec{k}$ and $\mu\vec{i}+8\vec{j}+6\vec{k}$ are collinear. 3

viii) A force $\vec{F}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ is applied at the point (1,–1,2). Find the moment of $\vec{F}$ about the point (2,–1,3). 3