স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৭ ও জুন, ২০১৮

(December-2017 & June-2018)

সহায়ক পাঠক্রম **(Subsidiary Course)**

গণিত (Mathematics)

দ্বিতীয় পত্র **(2nd Paper)**

Mathematics-II : SMT-II

সময় ঃ তিন ঘণ্টা (Time : 3 Hours)

পূর্ণমান ঃ ১০০ (Full Marks : 100)

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ – ক (পূর্ণমান : ৪০)

১। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ২০ × ১ = ২০

(ক) i) Cauchy-এর মধ্যম মান উপপাদ্যটি বিবৃত ও প্রমাণ করুন। ২ + ৩

ii) দেখান যে, $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$, যখন $0 < x < \frac{\pi}{2}$. ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

iii) $x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ অপেক্ষকটির স্থির বিন্দুগুলি নির্ণয় ও তাদের শ্রেণীবিভাগ করুন। ২ + ৩

iv) সমপরাবৃত্ত $xy = a^2$-এর মূলবিন্দু O এবং P উপরিস্থিত বিন্দু, OP-কে ব্যাস করে যে বৃত্ত পাওয়া যায় তার পরিস্পর্শক নির্ণয় করুন। ৫

(খ) i) r ব্যাসার্ধের গোলকের মধ্যে সর্বোচ্চ আয়তন যুক্ত লম্ব শঙ্কুর উচ্চতা নির্ণয় করুন। ৫

ii) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ অপেক্ষকটিকে $(x-2)$-এর ধনাত্মক পূর্ণ ঘাত শ্রেণী অনুসারে বিস্তৃত করুন। ৫

iii) দেখান যে $\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\}$ সিকুয়েন্সটির মান 2-এর অভিসারী হবে। ৫

iv) শ্রেণীটির অভিসারিতা যাচাই করুন, যখন $a \neq b$,

$$1 + \frac{1+a}{1+b} + \frac{(1+a)(2+a)}{(1+b)(2+b)} + \frac{(1+a)(2+a)(3+a)}{(1+b)(2+b)(3+b)} + \ldots$$

৫

২। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ২০ × ১ = ২০

(ক) i) যদি সম্ভব হয় মান নির্ণয় করুন, $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$. ১ + ৪

ii) $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n \, dx$ -কে বিটা অপেক্ষক রূপে প্রকাশ করুন। এখান থেকে $\int_3^7 (x-3)^4 \sqrt[3]{(7-x)} \, dx$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৩ + ২

iii) যদি $I_n = \int_0^1 x^n \tan^{-1} x \, dx$ হয়, তবে দেখান যে $(n+1)I_n + (n-1)I_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$, $n(>2) \in \mathbb{N}$. ৫

iv) $r = a(1+\cos\theta)$ -এর পরিসীমা নির্ণয় করুন। ৫

(খ) i) $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ বক্রটি x-অক্ষের চারিদিকে আবর্তনের ফলে যে ঘন তৈরী হয় তার বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন। ২$\frac{১}{২}$ + ২$\frac{১}{২}$

ii) মান নির্ণয় করুন $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dx\, dy$, যেখানে $R = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. ৫

iii) মান নির্ণয় করুন : $\int \frac{dx}{4+5\sin 7x}$. ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

iv) যদি $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx$ হয় তবে দেখান যে $I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$, $n(\ge 1) \in \mathbb{N}$। এখান থেকে I_4 -এর মান নির্ণয় করুন। ৩ + ২

বিভাগ – খ (পূর্ণমান : ৩৬)

৩। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১২ × ১ = ১২

(ক) i) যদি $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ -কে x, y, z-এর কোন অপেক্ষক দিয়ে গুণ করলে যথার্থ অবকল হয় তবে প্রমাণ করুন যে

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

৬

ii) যদি ρ_1 এবং ρ_2 কোন অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ -এর নাভি জ্যা-র দুই প্রান্তবিন্দুর চক্রগতি ব্যাসার্ধ হয় তবে দেখান যে $\rho_1^{-2/3} + \rho_2^{-2/3} = (2a)^{-2/3}$. ৬

(খ) i) ভিন্ন দুই উপায়ে x^{2n} -এর n-তম অবকল গুণাঙ্ক নির্ণয় করে দেখান যে

$$1+\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2}+\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2.2^2.3^2}+\ldots=\frac{(2n)!}{n!n!}.$$

৬

ii) x-এর ঘাত অনুসারে $\log_e(1+x)$ -এর অসীম শ্রেণীর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন। এখান থেকে $\log_e 2$ -এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন। ৫ + ১

৪। **'ক'** অথবা **'খ'** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১২ × ১ = ১২

(ক) i) মান নির্ণয় করুন : $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+5^x}\mathrm{d}x$;

$$\int_{-1/2}^{1/2}\cos x\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x.$$ ৩ + ৩

ii) সমাধান করুন :

$(3x+2y-5)\mathrm{d}x+(2x+3y-5)\mathrm{d}y=0$. ৬

(খ) i) $x^2p^2+(2x+y)py+y^2=0$ -কে $y=u$, $xy=v$ প্রতিস্থাপনের সাহায্যে Clairaut-এর আকারে রূপান্তরিত করুন। এর বিশিষ্ট সমাধান নির্ণয় করুন। ৪ + ২

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

ii) Double Integration-এর সাহায্যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং এটির সাহায্যকারী বৃত্তের মধ্যবর্তী অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। ৬

৫। **'ক'** অথবা **'খ'** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১২ × ১ = ১২

(ক) i) $(x+y)(x^2-y^2)^2-2(x+y)^2(x-y)^2$

$-2(x^2+y^2)(x+y)+2(x-y)^2+4(x-y)=0$

বক্রের সমস্ত অসীমপথগুলি নির্ণয় করুন। ৬

ii) $y^2=x(x+a)^2$ বক্রের যদি কোন double point থাকে তাহলে তাদের অবস্থান ও প্রকৃতি নির্ণয় করুন। ৬

(খ) i) হাইপো-সাইক্লয়েড $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। ৬

ii) যদি $I_{m,n}=\int\frac{\sin^m x}{\cos^n x}\mathrm{d}x$ হয় তাহলে দেখান যে

$$I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{(m-n+2)}{n-1}I_{m,n-2},$$

$m,n\in\mathbb{N}$.

৬

বিভাগ – গ (পূর্ণমান : ২৪)

৬। যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

i) যদি $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

ii) $\sin x - x + 1 = 0$ সমীকরণের কী কোন বীজ আছে ?

iii) a ও b নির্ণয় করুন যখন
$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1.$$

iv) অভিসারিতা যাচাই করুন :
$$\frac{1+2}{2^3}+\frac{1+2+3}{3^3}+\frac{1+2+3+4}{4^3}+\ldots$$

v) যদি $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ হয় তবে দেখান যে
$$\frac{\partial x}{\partial r} \neq \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial x}}, \frac{\partial x}{\partial \theta} \neq \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial x}}.$$

vi) যদি $u=\tan^{-1}\left(\frac{x^{5/2}+y^{5/2}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)$ হয় তবে
$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

vii) $r=a\sin 2\theta$ ও $r=a\cos 2\theta$ বক্রদুটির ছেদবিন্দুতে কোণ নির্ণয় করুন।

viii) $\frac{ds}{dx}$ -এর মান নির্ণয় করুন যেখানে $x=a(1-\cos\theta)$, $y=a(\theta+\sin\theta)$.

৭। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ২ = ৬

i) মান নির্ণয় করুন : $\int \frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x} e^{-\frac{x}{2}} dx$.

ii) $\int_0^{\pi} |\cos x + \sin x| dx$ -এর মান নির্ণয় করুন।

iii) $\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1-x} dx$ -এর অভিসারিতা পরীক্ষা করুন।

iv) সম কোণ সম্পন্ন স্পাইরাল $r=ae^{\theta\cot\alpha}$ -এর r_1 ও r_2 দূরকের মধ্যবর্তী চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

৮। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ২ = ৬

i) সমাধান করুন : $\frac{d^2y}{dx^2}=\tan y\sec^2 y$,
যেখানে $\frac{dy}{dx}=0$ যখন $y=0$.

ii) কোন বক্রের যে-কোন বিন্দুতে স্পর্শকের নতি $(y+2x)$ হলে এবং এটি মূলবিন্দুগামী হলে, বক্রের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

iii) $(D^2+3D+2)y=e^{e^x}$ -এর সমাধান নির্ণয় করুন, যেখানে $D\equiv\frac{d}{dx}$.

iv) যদি $y^3=C_1x$ এবং $x^2+ay^2=C_2$ পরস্পরের লম্বপ্রাস হয় তাহলে a-এর মান নির্ণয় করুন।

QP Code : 18UT118SMT(II)

(English Version)

Group – A (Marks : 40)

1. Answer **(a)** or **(b)** : 20 × 1 = 20

a) i) State and prove Cauchy's Mean Value Theorem. 2 + 3

ii) Show that $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$ for $0 < x < \frac{\pi}{2}$. 5

iii) Determine the stationary points of the function $x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ and classify the points. 2 + 3

iv) Find the envelope of the circles described upon *OP* as diameters, where *O* is the origin and *P* is a point on the rectangular hyperbola $xy = a^2$. 5

b) i) Find altitude of the right cone of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius *r*. 5

ii) Expand the polynomial $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ in a series of positive integral powers of $(x - 2)$. 5

iii) Show that the sequence $\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...\}$ converges to 2. 5

iv) Examine the convergence of the series, for $a \neq b$,

$$1 + \frac{1+a}{1+b} + \frac{(1+a)(2+a)}{(1+b)(2+b)} + \frac{(1+a)(2+a)(3+a)}{(1+b)(2+b)(3+b)} + ...$$

5

2. Answer **(a)** or **(b)** : 20 × 1 = 20

a) i) Evaluate, if possible $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$.

1 + 4

ii) Express $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx$ in terms of Beta function. Hence, evaluate $\int_3^7 (x-3)^4 \sqrt[3]{(7-x)} \, dx$. 3 + 2

iii) Show that

$(n+1) I_n + (n-1) I_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$, where

$I_n = \int_0^1 x^n \tan^{-1} x \, dx$, $n (> 2) \in \mathbb{N}$. 5

iv) Find the length of the perimeter of the cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$. 5

b) i) Find the surface and volume of the solid of revolution of $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ about *x*-axis. $2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$

ii) Evaluate : $\iint_R \frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$, where

$R = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$. 5

iii) Evaluate : $\int \frac{dx}{4+5\sin 7x}$. 5

iv) Show that

$I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$, where

$I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x\,dx$, $n(\ge 1) \in N$. Hence

find I_4. 3 + 2

Group – B (Marks : 36)

3. Answer **(a)** or **(b)** : 12 × 1 = 12

a) i) If $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ can be made a perfect differential of some functions x, y, z on multiplying by a factor; prove that

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

6

ii) If ρ_1 and ρ_2 be the radii of curvature at the ends of any focal chord of the parabola $y^2 = 4ax$, then show that $\rho_1^{-2/3} + \rho_2^{-2/3} = (2a)^{-2/3}$. 6

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

b) i) By forming in two different ways, the n^{th} derivatives of x^{2n}; show that

$$1 + \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2} + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2.2^2.3^2} + \ldots = \frac{(2n)!}{n!\,n!}.$$

6

ii) Expand $\log_e(1+x)$ in an infinite series in power of x. Hence find the expansion of $\log_e 2$. 5 + 1

4. Answer **(a)** or **(b)** : 12 × 1 = 12

a) i) Evaluate: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+5^x}\,dx$;

$\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$. 3 + 3

ii) Solve :

$(3x + 2y - 5)\,dx + (2x + 3y - 5)\,dy = 0$. 6

b) i) Reduce the differential equation $x^2p^2 + (2x+y)py + y^2 = 0$ to its Clairaut's form by substitution $y = u$, $xy = v$. Find its singular solution.

4 + 2

ii) Find, by double integration, the area of the region bounded by $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and its auxiliary circle. 6

5. Answer **(a)** or **(b)** : 12 × 1 = 12

a) i) Find all the asymptotes of the curve

$$(x+y)(x^2-y^2)^2-2(x+y)^2(x-y)^2$$

$$-2(x^2+y^2)(x+y)+2(x-y)^2+4(x-y)=0.$$

6

ii) Find the position and nature of double point, if any, of the curve $y^2=x(x+a)^2$. 6

b) i) Find the area of the hypo-cycloid $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$. 6

ii) If $I_{m,n}=\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\,dx$, then show that

$$I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{(m-n+2)}{n-1}I_{m,n-2},$$

$m,n\in\mathbb{N}$.

6

Group – C (Marks : 24)

6. Answer any *four* questions : 3 × 4 = 12

i) If $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$, find $\frac{dy}{dx}$.

ii) Does the equation $\sin x-x+1=0$ have a root ?

iii) Find *a, b* such that

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1.$$

iv) Test the convergence of the series

$$\frac{1+2}{2^3}+\frac{1+2+3}{3^3}+\frac{1+2+3+4}{4^3}+\ldots$$

v) If $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$; prove that

$$\frac{\partial x}{\partial r}\neq\frac{1}{\frac{\partial r}{\partial x}},\frac{\partial x}{\partial\theta}\neq\frac{1}{\frac{\partial\theta}{\partial x}}.$$

vi) If $u=\tan^{-1}\left(\frac{x^{5/2}+y^{5/2}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)$ then find the value of $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$.

vii) Find the angle of intersection of the curves $r=a\sin 2\theta$ and $r=a\cos 2\theta$.

viii) Find $\frac{ds}{dx}$ for the curve $x=a(1-\cos\theta)$, $y=a(\theta+\sin\theta)$.

7. Answer any *two* questions : 3 × 2 = 6

i) Evaluate $\int \frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x}\,e^{-\frac{x}{2}}dx$.

ii) Evaluate $\int_0^{\pi}|\cos x+\sin x|\,dx$.

iii) Examine the convergence of $\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1-x}dx$.

iv) Find the length of the arc of the equi-angular spiral $r=ae^{\theta\cot\alpha}$ between the radii vectors r_1 and r_2.

8. Answer any *two* questions : $3 \times 2 = 6$

i) Solve $\frac{d^2y}{dx^2} = \tan y \sec^2 y$, given that $\frac{dy}{dx} = 0$ when $y = 0$.

ii) Find the equation of the curve whose slope at any point is $(y + 2x)$ and which passes through the origin.

iii) Solve : $(D^2 + 3D + 2)y = e^{e^x}$, where $D \equiv \frac{d}{dx}$.

iv) If $y^3 = C_1 x$ and $x^2 + ay^2 = C_2$ are orthogonal trajectories to each other, find the value of a.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য