QP Code : 19UT2EMT2

স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৮ ও জুন, ২০১৯ **(December-2018 & June-2019)**

ঐচ্ছিক পাঠক্রম **(Elective Course)**

গণিত (Mathematics)

দ্বিতীয় পত্র **(2nd Paper)**

Integral Calculus and Differential Equations : EMT-2

সময় ঃ দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান ঃ ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে। Scientific Calculator ব্যবহার করা কঠোরভাবে নিষিদ্ধ।

Special credit will be given for precise and correct answer. Marks will be deducted for spelling mistakes, untidiness and illegible handwriting. The figures in the margin indicate full marks. Use of scientific calculator is strictly prohibited.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $10 \times 2 = 20$

1. a) যোগফলের সীমা রূপে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞার সাহায্যে $\int_0^1 5^x dx$-এর মান নির্ণয় করুন। 4

b) মান নির্ণয় করুন : $\int \frac{dx}{\sin x + \sec x}$. 3

c) মান নির্ণয় করুন :

$$\lim_{n \to \infty}\left[\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\frac{3^2}{n^3+3^3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right].$$ 3

2. a) মান নির্ণয় করুন : $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$. 3

b) মান নির্ণয় করুন : $\int e^x \frac{1+x+x^3}{(1+x^2)^{3/2}} dx$. 4

c) অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. 3

3. a) প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx \times \int_0^{\infty} e^{-x^4} x^2 dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$ 4

b) $I_n = \int \tan^n x \, dx$ হলে দেখান যে,

$$I_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}.$$ 3

c) মান নির্ণয় করুন : $\int \frac{2+3\cos x}{4+5\cos x} dx$. 3

4. a) প্রমাণ করুন যে,

$\int_C [(x-y)^3 dx + (x-y)^3 dy] = 3\pi a^4$, যেখানে $C : x^2 + y^2 = a^2$ (বৃত্তের বামাবর্ত বরাবর)। 5

b) সমাধান করুন :

$3e^x \tan y \, dx + (1-e^x)\sec^2 y \, dy = 0$. 5

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $6 \times 3 = 18$

5. $J_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx$ হলে প্রমাণ করুন যে,
$J_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} J_{m-2,n} = \frac{n-1}{m+n} J_{m,n-2}$. 6

6. প্রমাণ করুন : $\iiint_E \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} = \frac{\pi^2}{8}$. 6

7. বক্ররেখা $y^2(a+x) = x^2(a-x)$-এর লুপটিকে x -অক্ষের সাপেক্ষে ঘোরালে যে ঘনবস্তু পাওয়া যাবে, তার আয়তন নির্ণয় করুন। 6

8. সমাধান করুন : $(y^2 + 2x^2y)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$. 6

9. $x = u$ এবং $y^2 = v$ প্রতিস্থাপন দ্বারা $yp^2 - 2xp + y = 0$ সমীকরণটিকে Clairaut-এর আকারে প্রকাশ করুন এবং তারপর সমাধান করুন। 6

10. $p = r\sin\alpha$ বক্ররেখাটির স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় করুন। 6

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $3 \times 4 = 12$

11. $I_n = \int x^n \sqrt{a-x}\, dx$ হলে প্রমাণ করুন যে,
$(2n+3) I_n = 2an\, I_{n-1} - 2x^n (a-x)^{3/2}$. 3

12. সমাধান করুন : $(D^2 - 5D + 6)y = 100\sin 4x$. 3

13. প্রচলের ভেদের পদ্ধতিতে সমাধান করুন :
$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \text{cosec}\, x$. 3

14. সমাধান করুন :
$(1+2x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6(1+2x)\frac{dy}{dx} + 16y = 8(1+2x)^2$. 3

15. মান নির্ণয় করুন : $\iint_E \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$, যেখানে E হল $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তের উপরিভাগ। 3

16. সমাকল করুন : $\int \frac{dx}{13 + 3\cos x + 4\sin x}$. 3

17. মান নির্ণয় করুন : $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r + \sqrt{r^2 + n^2}}$. 3

18. প্রমাণ করুন : $\Gamma\left(\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(\frac{2}{9}\right)\Gamma\left(\frac{3}{9}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{9}{16}\pi^4$. 3

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Using the definition of definite integral as limit of sum, evaluate $\int_0^1 5^x \, dx$. 4

   b) Evaluate : $\int \frac{dx}{\sin x + \sec x}$. 3

   c) Evaluate :
   $$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1^2}{n^3 + 1^3} + \frac{2^2}{n^3 + 2^3} + \frac{3^2}{n^3 + 3^3} + \ldots + \frac{1}{2n} \right].$$
   3

2. a) Evaluate : $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$. 3

   b) Evaluate : $\int e^x \frac{1 + x + x^3}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$. 4

   c) Test the convergence of $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. 3

3. a) Prove that $\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx \times \int_0^{\infty} e^{-x^4} x^2 \, dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$. 4

   b) If $I_n = \int \tan^n x \, dx$, then show that
   $$I_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}.$$ 3

   c) Evaluate : $\int \frac{2 + 3\cos x}{4 + 5\cos x} dx$. 3

4. a) Prove that
   $\int_C [(x-y)^3 dx + (x-y)^3 dy] = 3\pi a^4$, where
   $C : x^2 + y^2 = a^2$ [negatively oriented]. 5

   b) Solve : $3e^x \tan y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. If $J_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx$, then prove that
   $J_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} J_{m-2,n} = \frac{n-1}{m+n} J_{m,n-2}$. 6

6. Prove that $\iiint_E \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} = \frac{\pi^2}{8}$. 6

7. Find the volume of the solid generated by revolving the loop of $y^2(a + x) = x^2(a - x)$ about x-axis. 6

8. Solve : $(y^2 + 2x^2 y) dx + (2x^3 - xy) dy = 0$. 6

9. Substituting $x = u$ and $y^2 = v$, reduce the equation $yp^2 - 2xp + y = 0$ to Clairaut's form and then solve it. 6

10. Find the intrinsic equation of $p = r \sin \alpha$. 6

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. If $I_n = \int x^n \sqrt{a-x}\, dx$ then prove that $(2n+3) I_n = 2an\, I_{n-1} - 2x^n (a-x)^{3/2}$. 3

12. Solve : $(D^2 - 5D + 6) y = 100 \sin 4x$. 3

13. Solve by the method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x.$$ 3

14. Solve :

$$(1+2x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6(1+2x)\frac{dy}{dx} + 16y = 8(1+2x)^2.$$ 3

15. Evaluate : $\iint_E \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$, where E is the upper part of the circle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. 3

16. Integrate : $\int \frac{dx}{13 + 3\cos x + 4\sin x}$. 3

17. Evaluate : $\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r + \sqrt{r^2 + n^2}}$. 3

18. Prove that $\Gamma\left(\frac{1}{9}\right) \Gamma\left(\frac{2}{9}\right) \Gamma\left(\frac{3}{9}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{9}{16}\pi^4$. 3