স্নাতক পাঠক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৮ ও জুন, ২০১৯ **(December-2018 & June-2019)**

ঐচ্ছিক পাঠক্রম **(Elective Course)**

গণিত (Mathematics)

প্রথম পত্র (1st Paper)

Differential Calculus and its Geometric Application : EMT-1

সময় ঃ দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান ঃ ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে। Scientific Calculator ব্যবহার করা কঠোরভাবে নিষিদ্ধ।

Special credit will be given for precise and correct answer. Marks will be deducted for spelling mistakes, untidiness and illegible handwriting.
The figures in the margin indicate full marks.
Use of scientific calculator is strictly prohibited.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $10 \times 2 = 20$

1. a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 5}{\sqrt{22x - 7 - 3x^2}}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় করুন। 3

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

b) যদি $f(x) = x$, যখন $0 < x < 1$

$= 2 - x$, যখন $1 \le x \le 2$

$= x - \frac{1}{2}x^2$, যখন $x > 2$, হয়

তবে অপেক্ষকটি $x = 2$ বিন্দুতে সন্তত কিনা পরীক্ষা করুন। 3

c) যদি $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + a \sin x}{x^3}$-এর অস্তিত্ব থাকে এবং সসীম হয়, তবে a-র মান ও লিমিট নির্ণয় করুন। 2 + 2

2. a) যদি $f(x) = x^n$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে,

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \frac{f'''(1)}{3!} + \ldots + \frac{f^n(1)}{n!} = 2^n.$$

5

b) $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$, $\left(0, \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$-এর চরম ও অবম মান নির্ণয় করুন। 3 + 2

3. a) ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যটি বিবৃত করুন ও প্রমাণ করুন। 2 + 4

b) মধ্যমান উপপাদ্য $f(h) = f(0) + hf'(\theta h)$, $(0 < \theta < 1)$ থেকে প্রমাণ করুন যে $\lim\limits_{h \to 0+}(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, যখন $f(x) = \sin x$. 4

4. a) যদি $V = z.\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

5

b) অয়লারের সমঘাতী দ্বিচল অপেক্ষক সম্পর্কিত উপপাদ্যটি বিবৃত করুন। যদি $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$. 2 + 3

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ 6 × 3 = 18

5. যদি $lx + my = 1$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের একটি অভিলম্ব হয় তবে দেখান যে, $al^3 + 2alm^2 = m^2$. 6

6. যদি $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ বক্ররেখার যে-কোনো বিন্দু (x, y)-এ অঙ্কিত স্পর্শক, x ও y-অক্ষ থেকে x_1 ও y_1 দৈর্ঘ ছিন্ন করে তবে প্রমাণ করুন যে, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. 6

7. $x^2 - y^2 = a^2$ ও $x^2 + y^2 = a^2\sqrt{2}$ বক্ররেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণটি নির্ণয় করুন। 6

8. Cycloid $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$-এর উপর $\theta = \frac{\pi}{3}$ বিন্দুতে সেটির বক্রতা-ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন। 6

9. $x(x-y)^2 - 3(x^2 - y^2) + 8y = 0$ বক্ররেখার অসীম পথের সমীকরণ নির্ণয় করুন। 6

10. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বক্ররেখার যে-কোনো বিন্দু (x, y)-এ সেটির বক্রতা কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন এবং এটি থেকে সেটির বক্রতাকেন্দ্রজ (Evolute)-এর সমীকরণ নির্ণয় করুন। 3 + 3

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ 3 × 4 = 12

11. যদি $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ উভয়ে onto অপেক্ষক হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে gof অপেক্ষকটিও onto অপেক্ষক হবে। 3

12. যদি $x^y + y^x = x^2$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন। 3

13. যদি $y^{\frac{1}{10}} + y^{-\frac{1}{10}} = 2x$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 - 100y = 0$. 3

14. $x^{\frac{1}{x}}$-এর চরম বা অবম মান আছে কিনা পরীক্ষা করুন এবং সেটি নির্ণয় করুন। 3

15. দেখান যে

$$\lim_{x \to 0}\lim_{y \to 0}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) \neq \lim_{y \to 0}\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right).$$

3

16. $u \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ অপেক্ষকটির একটি বিন্দু (a, b, c)-তে $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ দিকে দিশা-ডেরিভেটিভ নির্ণয় করুন। 3

17. $x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2$ অপেক্ষকটির চরম বা অবম মান আছে কিনা পরীক্ষা করুন। 3

18. প্রমাণ করুন যে $y = x^3 - 3x^2$ বক্ররেখাটির $(1, -2)$ বিন্দুটি একটি ইনফ্লেক্শন বিন্দু। 3

QP Code : 19UT1EMT1

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Find the domain of definition of the function :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 5}{\sqrt{22x - 7 - 3x^2}}.$$ 3

b) If $f(x) = x$, when $0 < x < 1$

$= 2 - x$, when $1 \le x \le 2$

$= x - \frac{1}{2}x^2$, when $x > 2$,

examine whether the function is continuous at $x = 2$. 3

c) If $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + a \sin x}{x^3}$ exists and be finite, find the value of a and the limit. 2 + 2

2. a) If $f(x) = x^n$, prove that

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \frac{f'''(1)}{3!} + \ldots + \frac{f^n(1)}{n!} = 2^n.$$

5

b) Find the maximum and minimum values of $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$, $\left(0, \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$. 3 + 2

3. a) State and prove Lagrange's Mean Value theorem. 2 + 4

b) From the mean value theorem $f(h) = f(0) + hf'(\theta h)$, $(0 < \theta < 1)$, show that $\lim_{h \to 0+} (\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, when $f(x) = \sin x$. 4

4. a) If $V = z.\tan^{-1}\frac{y}{x}$, prove that

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$ 5

b) State Euler's theorem on Homogeneous function of two variables.

If $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$, show that

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$$ 2 + 3

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. If $lx + my = 1$ be a normal to the parabola $y^2 = 4ax$, then show that $al^3 + 2alm^2 = m^2$. 6

6. If x_1, y_1 be the parts of the axes of x and y intercepted by the tangent at any point (x, y) to the curve $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$, show that

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$ 6

7. Find the angle of intersection of the curves $x^2 - y^2 = a^2$ and $x^2 + y^2 = a^2\sqrt{2}$. 6

8. Find the radius of curvature at the point $\theta = \frac{\pi}{3}$ on the cycloid $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$. 6

9. Find the asymptotes of the curve $x(x-y)^2 - 3(x^2 - y^2) + 8y = 0$. 6

10. Find the coordinates of the centre of curvature of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, at any point (*x*, *y*) and hence deduce the equation of its evolute. 3 + 3

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. If both the mappings $f : A \to B$ and $g : B \to C$ be onto, then prove that the mapping *gof* is also onto. 3

12. Find $\frac{dy}{dx}$ if $x^y + y^x = x^2$. 3

13. If $y^{\frac{1}{10}} + y^{-\frac{1}{10}} = 2x$, prove that $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 - 100y = 0$. 3

14. Examine whether $x^{\frac{1}{x}}$ possesses a maximum or minimum value and determine the same. 3

15. Show that $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \neq \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$. 3

16. Find the Directional Derivative of $u \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ at the point (*a, b, c*) in the direction $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$. 3

17. Examine for the extreme values of the function $x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2$. 3

18. Prove that the point (1, –2) is a point of inflexion on the curve $y = x^3 - 3x^2$. 3