স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

পদার্থবিদ্যা (Physics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

প্রথম পত্র (1st Paper : Mathematical Methods in Physics)

সময় ঃ দুই ঘন্টা | **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%

Weightage of Marks : 70%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

১। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $10 \times 2 = 20$

ক) i) $\vec{r} = a \cos \omega t\, \hat{i} + a \sin \omega t\, \hat{j}$ সমীকরণটি কি ধরনের গতি নির্দেশ করে ? (যেখানে a এবং ω ধ্রুবক) $\frac{d\vec{r}}{dt}$ এবং $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ নির্ণয় করে তাদের দিক নির্দেশ করুন।

ii) গোলীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করে প্রমাণ করুন যে $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi = 0$. 5 + 5

খ) i) গাউসের উপপাদ্য ব্যবহার করে প্রমাণ করুন যে একটি অঞ্চলের আয়তন V হলে

$$\oint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} = 3V$$

এই সমীকরণ ব্যবহার করে গোলকের আয়তনের সঙ্গে তার তল ক্ষেত্রফলের সম্পর্ক নিরূপণ করুন।

ii) $5x - 7y + 3z = 8$ সমতলের লম্ব অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরটি নিরূপণ করুন। 6 + 4

গ) i) যদি $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ হয় ($\vec{\omega}$ = ধ্রুবক) তবে দেখান $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)$.

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$ অবকল সমীকরণটির ব্যাপক সমাধান নির্ণয় করুন । 4 + 6

ঘ) i) মান নির্ণয় করুন ঃ

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).$$

ii) Poisson-এর আবন্টনের ক্ষেত্রে দেখান যে

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1.$$ 6 + 4

2. যে কোন **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $6 \times 3 = 18$

ক) প্রমাণ করুন ঃ

$$\nabla^2 \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} + e^{ikr} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)$$

খ) একটি ছক্কাকে দুবার ফেললে দুটি দানের যোগফল 9 হওয়ার সম্ভাব্যতা কত ?

গ) i) কোন্ শর্তে একটি স্কেলার φ এবং ভেক্টর $\vec{f}$ কে নীচের সম্পর্ক দ্বারা লেখা সম্ভব ?

$$\vec{\nabla} . \left(\varphi \vec{f} \right) = \varphi \vec{\nabla} . \vec{f}$$ 3

ii) যে কোন অধিবর্ষে 53-টি সোমবার হওয়ার সম্ভাবনা কত ? 3

ঘ) একমাত্রিক তরঙ্গ সমীকরণের রূপ হল

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$; দেখান যে এর সাধারণ সমীকরণ $f = f(x \pm ct)$ হিসাবে লেখা যায় ।

ঙ) কার্তেজীয় স্থানাংক (x, y, z) এবং গোলীয় স্থানাংক (r, θ, φ) ব্যবহার করে প্রমাণ করুন

$$\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

চ) নিম্নলিখিত অপেক্ষককে ফুরিয়ের শ্রেণির সাহায্যে বিস্তৃত করুন ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & -\pi < x < 0 \\ \pi/2 , & 0 < x < \pi \end{cases}$$

3. যে কোন **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $3 \times 4 = 12$

ক) $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x^3 \ (x > 0)$

এই অবকল সমীকরণে $x = e^t$ রূপান্তর ব্যবহার করে দেখান যে সমীকরণটি একটি স্থির সহগযুক্ত রৈখিক সাধারণ অবকল সমীকরণে রূপান্তরিত হয় ।

খ) একটি ধাতব গোলককে q তড়িতাধান দ্বারা আহিত করা হল । গোলকের ব্যাসার্ধ a হলে গোলকের বাইরে তড়িৎ বিভব কত ?

গ) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ এবং $\vec{d}$ ভেক্টর চারটি সমতলীয় হলে প্রমাণ করুন যে $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d} \right) = 0$.

ঘ) α, β, γ ধ্রুবক এবং $\vec{a} = \alpha x \hat{i} + \beta y \hat{j} + \gamma z \hat{k}$ হলে, প্রমাণ করুন $\vec{\nabla} \left(\vec{a} . \vec{r} \right) = 2a$.

ঙ) $\vec{B} . \left(\vec{B} \times \vec{C} \right)$-এর মান নির্ণয় করুন ।

চ) $\vec{\nabla} (\ln r)$ এর মান নির্ণয় করুন ।

ছ) $f(x)$ অযুগ্ম পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হলে $f^{\prime}(x)$ কি ধরনের অপেক্ষক ?

জ) $(5x^2 + 3xy)\, dx + (2x^2 + 2y)\, dy = 0$
অবকল রাশিটি যথার্থ কিনা পরীক্ষা করুন।

(English Version)

1. Answer any *two* questions : 10 × 2 = 20

a) i) What type of motion is indicated by the equation

$\vec{r} = a \cos \omega t\, \hat{i} + a \sin \omega t\, \hat{j}$?

(a, ω are constants) Calculate $\frac{d\vec{r}}{dt}$ and $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ and indicate their directions.

ii) Prove that $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi = 0$ using spherical polar coordinates. 5 + 5

b) i) If the volume of a given region is V then using Gauss' theorem show that

$$\oint_s \vec{r} \cdot d\vec{s} = 3V$$

Using this equation find the relation between the volume and surface area of a sphere.

ii) Evaluate the unit vector along the perpendicular of the plane

$5x - 7y + 3z = 8$. 6 + 4

c) i) If $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ and $\vec{\omega}$ is a constant then show that $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)$.

ii) Evaluate the generalised solution of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x.$$ 4 + 6

d) i) Find the value of

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).$$

ii) In case of Poisson's distribution show that $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$. 6 + 4

2. Answer any *three* questions : 6 × 3 = 18

a) Prove that :

$$\nabla^2\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = -k^2\frac{e^{ikr}}{r} + e^{ikr}\,\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)$$

b) A dice is thrown twice. What is the probability of getting a sum of 9 in two throws ?

c) i) What is the condition that a scalar φ and a vector $\vec{f}$ can be written as following ?

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\varphi \vec{f}\right) = \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{f}$$ 3

ii) What is the probability that a leap year has 53 Mondays ? 3

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ is an one-dimensional wave equation. Show that its general solution is of the form $f = f(x \pm ct)$.

e) Using Cartesian co-ordinates (x, y, z) and Spherical polar co-ordinates (r, θ, φ) prove that

$$\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

f) Expand the following function in Fourier series :

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & -\pi < x < 0 \\ \pi/2 , & 0 < x < \pi \end{cases}$$

3. Answer any *four* questions : 3 × 4 = 12

a) In the differential equation $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$ ($x > 0$) using the transformation $x = e^t$ show that the equation can be transformed to a linear differential equation with constant coefficients.

b) A metallic sphere had been charged with charge q. If a is the radius of the sphere then calculate the electric potential outside the sphere.

c) If four vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ and $\vec{d}$ are in a plane then show that $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = 0$.

d) If $\vec{a} = \alpha x \hat{i} + \beta y \hat{j} + \gamma z \hat{k}$, (α, β, γ are constants) then prove that $\vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{r}\right) = 2a$.

e) Evaluate $\vec{B} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$.

f) Evaluate $\vec{\nabla}(\ln r)$.

g) If a periodic function $f(x)$ is odd then what type of function is $f^{\prime}(x)$?

h) Whether the following differential is exact ?
$(5x^2 + 3xy)\, dx + (2x^2 + 2y)\, dy = 0$.