মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

— রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে ; সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নূতন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

— সুভাষচন্দ্র বসু

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

— Subhas Chandra Bose

Price : Rs. 225.00

Published by : Netaji Subhas Open University, 1 Woodburn Park, Kolkata–700 020 and
Printed at : Calcutta Repro Graphics, 36/8B Sahitya Parishad Street, Kolkata-700 006

NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

ELECTIVE MATHEMATICS HONOURS

EMT 14

Linear Programming and Game Theory

Block - 1

একক 10 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় দ্বৈততা (Duality in L.P.P)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

যে কোন একটি প্রদত্ত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সঙ্গে বিশেষভাবে সম্পর্কিত অপর একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা পাওয়া যায়। এক্ষেত্রে দ্বিতীয় সমস্যাটিকে দ্বৈত (Dual) সমস্যা এবং প্রথমটিকে মুখ্য (Primal) সমস্যা বলা হবে। বিষয়টি স্পষ্ট করার জন্যে নিম্নের সমস্যাটি ধরা যাক।

মনে করুন কোন পশুপালন কেন্দ্রে প্রতিটি পশুর খাদ্যে A, B, C এই তিন প্রকার পুষ্টিকর পদার্থের প্রয়োজন। দোকান মালিকেরা কোন পুষ্টিকর পদার্থ বিক্রয়কারী ব্যবসায়ীর কাছ থেকে উক্ত তিন প্রকার পুষ্টিকর পদার্থ ক্রয় দুই প্রকার পশুখাদ্য X ও Y প্রস্তুত করে। পুষ্টিকর পদার্থ বিক্রয়কারী ব্যবসায়ী দুই প্রকার খাদ্য X ও Y এর বাজার দর জানো নিজের সারণীতে একক পরিমাণ X ও Y খাদ্যে পুষ্টিকর

পদার্থ A, B, C এর পরিমাণ, প্রতিটি পশুর ইহাদের ন্যূনতম প্রয়োজনে এবং একক পরিমাণ X ও Y খাদ্যের বাজারদর দেওয়া হল :

খাদ্য	**পুষ্টিকর পদার্থ**			**প্রতি এককের বাজার দর**
	A	**B**	**C**	
x	1	2	2	2
y	3	4	1	3
ন্যূনতম প্রয়োজন	10	9	3	

এখন ব্যববসায়ীর উদ্দেশ্য হবে A, B, C পদার্থগুলির বিক্রয়মূল্য এমনভাবে ঠিক করা যাতে X ও Y খাদের মূল্য যেন বাজারদরের বেশী না হয় এবং একই সঙ্গে যেন তার মোট বিক্রয়মূল z সবচেয়ে বেশী হয়। যদি একক পরিমাণ A, B, C এর বিক্রয়মূল্য যথাক্রমে x_1, x_2, x_3 স্থির করা হয় তবে ব্যবসায়ীর উদ্দেশ্য থেকে আমরা নিচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটি পাই :

$z = 10x_1 + 9x_2 + 3x_3$ এর চরম (maximum) মান নির্ণয় করতে হবে,

যেখানে, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 4$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 9$$

এখন উপরোক্ত সমস্যাটিকে অন্যভাবে দেখা যাক।

কোন দোকান মালিকের উদ্দেশ্য হবে X ও Y দুই প্রকার খাদ্য কি পরিমাণ প্রস্তুত করবে তা ঠিক করা যাতে প্রতিটি পশুর A, B, C তিন প্রকার পুষ্টিকর পদার্থের নূন্যতম প্রয়োজন মেটানো যায় এবং একই সঙ্গে X ও Y খাদ্যের মোট ক্রয়মূল্য (?) সবচেয়ে কম হয়। যদি প্রতি পশুর জন্য যথাক্রমে v_1, v_2 একক X ও Y খাদ্য প্রস্তুত করা হয় তবে দোকান মালিকের উদ্দেশ্য থেকে আমরা নিচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি পাই :

$w = 4v_1 + 3v_2$ এর চরম (minimum) মান নির্ণয় করতে হবে,

যেখানে, $v_1 + 3v_2 \ge 10$

$$2v_1 + 4v_2 + x_3 \ge 9$$
$$2v_1 + v_2 + x_3 \ge 3,$$
$$v_1 \ge 0, v_2 \ge 0$$

উপরের দুটি সমস্যার যে কোন একটিকে মুখ্য সমস্যা বললে অন্যটিকে দ্বৈত সমস্যা বলা হবে।

এখানে মনে রাখতে হবে যে দুটি সমস্যার মধ্যে কোন্‌টিকে মুখ্য সমস্যা বলা হল তার ওপর দ্বৈত সমস্যা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলি নির্ভর করে না। [কারণ 10·5 অনুচ্ছেদে প্রথম উপপাদ্যে প্রমাণ করা হয়েছে যে দ্বৈত সমস্যাটিকে একটি মুখ্য সমস্যারূপে দেখলে, দ্বৈত সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যা প্রথম মুখ্য সমস্যা হবে।]

উপরের উদাহরণে পুষ্টিকর পদার্থ বিক্রয়কারী ব্যবসায়ীর সমস্যাটিকে (যা একটি চরম মান নির্ণয়

সংক্রান্ত সমস্যা) মুখ্য সমস্যা বলা হয়েছে এবং দোকান মালিকের সমস্যাটিকে (যা একটি অবম মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা) দ্বৈত সমস্যা বলা হয়েছে। আমরা এই রীতি অনুযায়ী, পরবর্তী অনুচ্ছেদে যে কোন প্রদত্ত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার দ্বৈত সমস্যার গাণিতিক রূপের সংজ্ঞা দেব।

10.2 কোন প্রদত্ত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার দ্বৈত সমস্যার গাণিতিক রূপ

এখানে আমরা মুখ্য রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটিকে নিম্নলিখিত প্রকার করব :

$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n x_n$ এর চরম মান নির্ণয় করতে হবে, যেখানে

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n} x_n &\le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n} x_n &\le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn} x_n &\le b_m, \\ x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n &\ge 0 \end{aligned}$$

নিচের **বিশেষ রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটিকে** উপরের সমস্যাটির **দ্বৈত সমস্যা** বলা হবে।

$w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots\ldots\ldots + b_m v_m$ এর অবম মান নির্ণয় করতে হবে, যেখানে

$$\begin{aligned} a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m1} v_m &\ge c_1 \\ a_{12} v_2 + a_{22} v_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m2} v_m &\ge c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn} v_m &\ge c_n \\ v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots v_m &\ge 0 \end{aligned}$$

সমস্যা দুটিকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করলে আমরা পাই :

মুখ্য সমস্যা

চরম $z = \bar{c}\,\bar{x}, \quad \bar{x} \ge 0$

যেখানে $A\,\bar{x} \le \bar{b}$ ....(1)

দ্বৈত সমস্যা

অবম $w = \bar{b}, \bar{v}, \quad \bar{v} \ge \bar{0}$

যেখানে $A'\bar{v} \ge \bar{c}'$

এখানে $\bar{x} = [x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_2]$

$\bar{c} = [c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_2]$

যথাক্রমে n×1 ক্রমের স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স (Column matrix) ও $1{\times}n$ ক্রমের সারি ম্যাট্রিক্স (row metrix, A একটি m×n ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং $\bar{v} = [v_1, v_2 \ldots\ldots\ldots v_m]$ হল $m{\times}1$ ক্রমের স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স।

[কোন ম্যাট্রিক্স এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্সকে দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে।]

এখানে কোন মুখ্য সমস্যাকে (1) নং আকারে প্রকাশ করলে, এই রূপকে সমস্যাটির **প্রমাণ আকার (standard form)** বলা হবে।

মন্তব্য : দ্বৈত সমস্যার সংজ্ঞা থেকে আমরা লক্ষ্য করছি যে,

(i) মুখ্য সমস্যার শর্তের সংখ্যা ($\bar{x} \geq \bar{0}$ ছাড়া) = দ্বৈত সমস্যার চলের সংখ্যা (number of variables) এবং বিপরীতক্রমে দ্বৈতসমস্যার শর্তের সংখ্যা ($\bar{v} \geq \bar{0}$ ছাড়া) $\bar{v}$ = মুখ্য সমস্যার চলের সংখ্যা।

(ii) এখানে মুখ্য সমস্যাটি চরম মান নির্ণয় সংক্রান্ত ও প্রধান শর্তগুলি "$\leq$" আকারের এবং দ্বৈত সমস্যাটি অবম মান নির্ণয় সংক্রান্ত ও প্রধান শর্তগুলি "$\geq$" আকারের।

(iii) এখানে $b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots b_m$ এর মান ধনাত্মক নাও হতে পারে।

(iv) মুখ্য সমস্যাটির শর্তগুলির সহগ ম্যাট্রিক্সটির পরিবর্তন ম্যাট্রিক্সটি (Transpose matrix) হবে দ্বৈত সমস্যার শর্তগুলির সহগ ম্যাট্রিক্স।

(v) $\bar{x} \geq \bar{o}$ বা $[x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n] \geq \begin{bmatrix} o \\ o \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ o \end{bmatrix}$

এর অর্থ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n \geq 0$

এবং $\bar{v} \geq \bar{0}$ এর অর্থ $v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots v_m \geq 0$

কোন মুখ্য সমস্যা (বা তার দ্বৈত সসম্যা) কে **symmetric** বলা হবে যদি সমস্যাটির প্রত্যেকটি শর্তক অসকমীকরণ (inequations) আকারে থাকে এবং সমস্যাটিকে **unsymmetric** বলা হবে যদি প্রত্যেকটি শর্ত সমীকরণ (equations) আকারে থাকে। যদি মুখ্য সমস্যা (বা তার দ্বৈত সমস্যা) টির শর্তগুলি সমীকরণ ও অসমীকরণ উভয় আকারেই থাকে তবে সমস্যাটিকে **mixed type** সমস্যা বলা হবে এবং এই আকারের সমস্যার ক্ষেত্রে এক বা একাধিক চলের মান ধনাত্মক, ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে অর্থাৎ এই চলগুলি ≥ 0 শর্তটি মানে না—এই চলগুলিকে চিহ্ন সাপেক্ষ অবাধ (unrestricted in sign) বলে উল্লেখ করা যায়।

(10·3) অনুচ্ছেদে কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে আমরা দেখব কিভাবে একটি প্রদত্ত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার (symmetric, unsymmetric, mixed type) দ্বৈত সমস্যা গঠন করা যায় এবং নিচে বিবৃত উপপাদ্যগুলির সত্যতা যাচাই করব।

উপপাদ্য 1 যদি মুখ্য সমস্যাটির কোন শর্ত (constraint) সমীকরণ আকারে থাকে তাহলে দ্বৈত সমস্যার অনুরূপ চলটি "unrestricted in sign" হবে।

উপপাদ্য 2 যদি মুখ্য সমস্য সমস্যাটির কোন চল "unrestricted in sing" হয় তবে দ্বৈত সমস্যার অনুরূপ শর্তটি একটি সমীকরণ হবে।

10.3 উদাহরণ

1. নিচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি (L.P.P.) দ্বৈত সমস্যাটি নির্ণয় করুন।

$z = 3x_1 - 2x_2$ এর চরম মান নির্ণয় করতে হবে যেখানে, $x_1 \le 4$, $x_2 \le 6$, $x_1 + x_2 \le 5$, $-x_2 \le -1, x_1, x_2 \ge 0$ ।

সামধান : এখানে প্রদত্ত প্রমাণ আকারের (standard form) সমস্যাটি মাট্রিক্স আকারে লিখলে আমরা পাই চরম $z = (3, -2)\,[x_1, x_2]$

যেখানে $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

এবং $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

উপরের সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি হবে অবম $w = (4, 6, 5, -1)\,[v_1, v_2, v_3, v_4]$

যেখানে, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

এবং $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

অর্থাৎ অবম $w = 4v_1 + 6v_2 + 5v_3 - v_4$,

যেখানে $v_1 + v_2 \ge 3$

$v_2 + v_3 - v_4 \ge -2$

এবং $v_1, v_2, v_3, v_4 \ge 0$।

2. অবম $z = x_1 + 2x_2 - v_4$

যেখানে $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 5$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 \ge -5$

$-3x_1 + 2x_3 \geq 0,$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত মুখ্য সমস্যাটি প্রমাণ আকারে (standard form) লিখলে আমরা পাই,

চরম $\quad z_1 = -x_1 - 2x_2 + x_3,$

যেখানে $\quad -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq -5$

$$\left.\begin{array}{ll} -2x_1 - x_2 & \leq 2 \\ -2x_1 - x_2 & \leq 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

এবং যেখানে $(z)_{\text{অবম}} = -(z)_{\text{চরম}}$।

এখন প্রমাণ

এখন প্রমাণ আকারের এই মুখ সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি হবে,

অবম $\quad w_1 = -5v_1 + 2v_2 + 0v_3$

যেখানে
$$\left.\begin{array}{ll} -2v_1 - 2v_1 + 3v_3 & \geq -1 \\ 3v_1 - v_2 + 0v_3 & \geq -2 \\ -4v_1 + 0v_2 - 2v_3 & \geq 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

এবং $\quad v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0$ ।

[এখানে লক্ষণীয় যে (1) নং মুখ সমস্যাটির শর্তগুলির সারি সহগগুলি হল (2) নং দ্বৈত সমস্যাটির শর্তগুলির স্তম্ভ সহগ]

এখন (2) নং সমস্যাটির সমতুল্য আকার হল

চরম $\quad w = 5v_1 - 2v_2,$

যেখানে
$$\left.\begin{array}{ll} 2v_1 + 2v_2 - 3v_2, & \leq 1 \\ -3v_1 \_ v_2 & \leq 2 \\ 4v_1 + 2v_3 & \leq -1 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

এবং $\quad v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0$ ।

(3) নং রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটি নির্ণেয় দ্বৈত সমস্যা।

3. নিচের মুখ সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন :

চরম $\; z = x_1 - 3x_2,$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$3x_1 + x_2 = 4;$

$x_1, \quad x_2 \geq 0$

সমাধান : এখানে প্রদত্ত মুখ্য সমস্যাটি মিশ্র আকারে (mixed type) আছে।

প্রথমে মুখ্য সমস্যাটিকে প্রমাণ আকারে প্রকাশ করা যাক।

এখানে $3x_1 - x_2 = 4$ শর্তটি $3x_1 - x_2 \le 4,\ -3x_1 - x_2 \le -4$ এই শর্ত দুটির সমতুল্য।

সুতরাং মুখ্য সমস্যাটি হল

চরম $\quad z = x_1 - 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 - x_2 \le 4 \\ -3x_1 + x_2 \le -4 \end{array}\right\}$............(1)

এবং $\quad v_1 \ge 0,\ v_2' \ge 0,\ v_2'' \ge 0$

(1) নং সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি হবে

অবম $\quad w = 6v_1 + 4v_2' - 4v_2''$,

শর্তসাপেক্ষে $3v_1 + 3v_2' - 3v_2'' \ge 1$

$\quad 2v_1 + v_2' - v_2'' \ge 3$

এবং $\quad v_1 \ge 0,\ v_2' \ge 0,\ v_2'' \ge 0$

এখন $v_2' - v_2'' = v_2$ লিখলে, v_2 একটি চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল হয় (অর্থাৎ v_2 ‘‘unrestrieted) in singn’’ হবে)।

তাহলে উপরের দ্বৈত সমস্যাটিকে লেখা যায়,

অবম $\quad w = 6v_1 + 4v_2$,

শর্তসাপেক্ষে $\left.\begin{array}{l} 3v_1 + 3v_2 \le 1, \\ 2v_1 - v_2 \le -3; \end{array}\right\}$............(2)

$v_1 \le 0,\ v_2$ চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল।

(2) নং সমস্যাটি হল নির্ণেয় দ্বৈত সমস্যা।

মন্তব্য : এখানে আমরা লক্ষ্য করছি যে মুখ্য সমস্যাটির (in the given from) চলের সংখ্যা 2 যা (2) নং দ্বৈত সমস্যার শর্তের সংখ্যার সমান। পুনরায় মুখ্য সমস্যাটির দ্বিতীয় শর্তটি একটি সমীকরণ হওয়ায়, সমস্যাটির v_2 চলটি চিহ্নে অবাধ (unrestricted in sign)।

4. নিচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি নির্ণয় করুন :

চরম $\quad z = 7x_1 + 5x_2 - 2x_3$,

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 + x_3 = 10$

$\quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 16$

$\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3$ চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল।

সমাধান : এখানে মুখ্য সমস্যাটিকে লেখা যায়,

চরম $\quad z = 7x_1 + 5x_2 - 2(x_3' - x_3'')$,

শর্তসাপেক্ষে
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' \le 10 \\ -(x_1 + x_2 - x_3' - x_3'') \le -10 \\ 2x_1 - x_2 + 3\,(x_3' - x_3'') \le 16 \\ -3x_1 - x_2 + 2\,(x_3' - x_3'') \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3' \ge 0,\ x_3'' \ge 0 \end{array}\right\} \text{.............(1)}$$

(যেখানে, $x_3 = x_3' - x_3''$)

(1) নং সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি হবে,

অবম $\quad w = 10v_1' - 10v_1'' + 16v_2 + 5v_3'$

শর্তসাপেক্ষে
$$\left.\begin{array}{l} v_1' - v_1'' + 2v_2 - 3v_3 \ge 7, \\ v_1' - v_1'' - v_2 - v_2 \ge 5, \\ v_1' - v_1'' + 3v_2 + 2v_3 \ge -2, \\ -v_1' + v_1'' - 3v_2 - 2v_3 \ge 2, \end{array}\right\} \text{.............(2)}$$

$$v_1' \ge 0,\quad v_1'' \ge 0,\quad v_2 \ge 0,\quad v_3 \ge 0$$

এখন $v_1' - v_1'' = v_1$ লিখলে (2) নং সমস্যাটিকে লেখা যায়,

অবম $\quad w = 10v_1 + 16v_2 + 5v_3,$

শর্তসাপেক্ষ
$$\left.\begin{array}{l} v_1 + 2v_2 - 3v_3 \ge 7 \\ v_1 - v_2 - v_3 \ge 5 \\ v_1 + 3v_3 \ge -2 \\ -v_1 - 3v_2 - 2v_3 \ge 2, \end{array}\right\} \text{.............(3)}$$

$v_2 \ge 0,\quad v_3 \ge 0,\quad v_1$ চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল।

আমরা লক্ষ্য করেছি যে (3) নং সমস্যাটির তৃতীয় ও চতুর্থ শর্ত দুটি শর্তের সমতুল্য।

সুতরাং নির্ণেয় দ্বৈত সমস্যাটি হল,

অবম $\quad w = 10v_1 + 16v_2 + 5v_3,$

শর্তসাপেক্ষে
$$\left.\begin{array}{l} v_1 + 2v_2 - 3v_3 \ge 7 \\ v_1 - v_2 - v_3 \ge 5 \\ v_1 + 3v_2 + 2v_3 = -2, \end{array}\right\} \text{.............(4)}$$

মন্তব্য : এখানে আমরা লক্ষ্য করছি যে মুখ্য সমস্যাটির **প্রথম শর্তটি** সমীকরণ হওয়ায় দ্বৈত সমস্যাটির v_1 চলটি চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ (unrestricted in sign) এবং মুখ্য সমস্যাটির x_3 চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল হওয়ায়, দ্বৈত সমস্যাটির তৃতীয় শর্তটি একটি সমীকরণ।

10.4 দ্বৈততা সংক্রান্ত উপপাদ্যসমূহ

নিচের উপপাদ্যগুলিতে মুখ্য সমস্যাটি প্রমাণ আকারে (standared form) ধরা হয়েছে অর্থাৎ মুখ্য সমস্যাটি হল

চরম $z = \bar{c}\ \bar{x}$, ... (1)

শর্তসাপেক্ষে $A\ \bar{x} \le \bar{b}$, $\bar{x} \ge \bar{0}$,

যেখানে $\bar{x} = [x_1, x_2, ... x_n]$, $\bar{c} = (c_1, c_2, ...c_n)$, $\bar{b} = [b_1, b_2, ...b_m]$ এবং A একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

এখানে (1) এর দ্বৈত সমস্যাটি হবে

অবম $w = \bar{b}'\ \bar{v}$ ....(2)

শর্তসাপেক্ষে $A'\ \bar{v} \ge \bar{c}'$, $\bar{v} \ge \bar{0}$

যেখানে $\bar{v} = [v_1, v_2\ ....v_m]$

উপপাদ্য 1 : কোন মুখ্য রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার দ্বৈত সমস্যার দ্বৈত সমস্যা হবে মুখ্য সমস্যা।

প্রমাণ : এখানে (1) নং সমস্যাটি এবং (2) নং সমস্যাটি (1) এর দ্বৈত সমস্যা।

এখন (2) নং সমস্যাটিকে নিম্নলিখিতভাবে একটি চরম সমস্যা রূপে প্রকাশ করা যায় :

চরম $w_1 = -\bar{b}'\ \bar{v}$, ...(3)

যেখানে $-A'\ \bar{v} \le -\bar{c}$, $\bar{v} \ge \bar{0}$

এবং $-(w_1)_{\text{চরম}} = (w)_{\text{অবম}}$।

দ্বৈত সমস্যার সংজ্ঞা অনুযায়ী (3) এর দ্বৈত সমস্যাটি হবে,

অবম $z_1 = (-\bar{c}')'\ \bar{x}$,

যেখানে $(-A)'\ \bar{x} \ge (-\bar{b}')'$, $\bar{x} \ge \bar{0}$

অর্থাৎ অবম $z_1 = \bar{c}\ \bar{x}$,

যেখানে $-A\ \bar{x} \ge -\bar{b}$, ... (4)

পুনরায় (4) নং সমস্যাটিকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ যায় :

চরম $z = -(-\bar{c}\ \bar{x})$,

যেখানে $-(-A\ \bar{x}) \le -(-\bar{b})$, $\bar{x} \ge \bar{0}$

অর্থাৎ চরম $z = \bar{c}\ \bar{x}$, ...(5)

যেখানে $A\ \bar{x} \le \bar{b}$, $\bar{x} \ge \bar{0}$

এখন (5) নং সমস্যাটি হল প্রথম মুখ্য সমস্যা। সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উপপাদ্য 2 : যদি $\bar{x}$ এবং $\bar{v}$ যথাক্রমে (1) নং মুখ্যসমস্যার এবং (2) নং অনুষঙ্গী দ্বৈত সমস্যার কার্যকর সমাধান হয়, তাহলে, $\bar{c}\ \bar{x} \le \bar{b}'\ \bar{v}$ ।

প্রমাণ : (1) নং মুখ্য সমস্যার একটি কার্যকর সমাধান $\bar{x}$ হলে আমরা পাই

$A\ \bar{x} \le \bar{b},\ \ \bar{x} \ge \bar{0}$ ....(6)

অনুরূপভাবে (2) নং দ্বৈত সমস্যার $\bar{v}$ একটি কার্যকর সমাধান হলে আমরা পাই

$A'\bar{v} \ge \bar{c},\ \ \bar{v} \ge \bar{0}$ ....(7)

এখন (6) থেকে আমরা পাই,

বা, $\bar{v}'A\ \bar{x} \le \bar{v}'\bar{b},\ (\because \bar{v}' \ge \bar{0})$

পুনরায় (7) থেকে আমরা পাই,

$(A'\bar{v})' \ge \bar{c}$

অতএব $(A'\bar{v})'\bar{x} \ge \bar{c}\ \bar{x},\ \ (\because \bar{x} \ge \bar{0})$

অর্থাৎ $\bar{c}\ \bar{x} \le (A'\bar{v})'\bar{x}$ ....(9)

এখন (8) ও (9) থেকে আমপা পাই $\bar{c}\ \bar{x} \le \bar{v}'\bar{b}$

বা, $\bar{c}\ \bar{x} \le (\bar{b}'\bar{v})'$

এখানে $\bar{b}'\bar{v}$ একটি 1×1 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হওয়ায়, $(\bar{b}'\bar{v})' = \bar{b}'\bar{v}$

সুতরাং প্রমাণিত হল যে, $\bar{c}\ \bar{x} \le \bar{b}'\bar{v}$

উপপাদ্য 3 : যদি $\bar{x}^*$ এবং $\bar{v}^*$ যথাক্রমে (1) নং মুখ্য সমস্যার এব (2) নং দ্বৈত সমস্যার কার্যকর সমাধান হয় যেখানে $\bar{c}\ \bar{x}^* = b'\bar{v}^*$, তাহলে $\bar{x}^*, \bar{v}^*$, যথাক্রমে সমস্যাদুটির চরম (optimal) সমাধান হবে।

প্রমাণ : এখানে দেওয়া আছে $\bar{c}\ \bar{x} = \bar{b}'\bar{v}^*$ ....(10)

এখন ধরা যাক $\bar{x}$ (1) নং সমস্যার যে কোন কার্যকর সমাধান।

আবার $\bar{v}^*$ (2) নং এর একটি কার্যকর সমাধান হওয়ার জন্য, উপপাদ্য 2 অনুযায়ী আমরা পাই,

$\bar{c}\ \bar{x} \le \bar{b}'\bar{v}^*$ ....(11)

এখন (10) ও (11) থেকে আমরা পাই $\bar{c}\ \bar{x} \le \bar{c}\ \bar{x}^*$, যা থেকে আমরা বলতে পারি যে হল $\bar{x}^*$ মুখ্য সমস্যাটির একটি চরম সমাধান [এখানে $\bar{c}\ \bar{x}^*$ হল বিষয়াত্মক অপেক্ষকের (objective function) চরম মান (maximum value)]।

অনুরূপভাবে $\bar{x}^*$ মুখ্য সমস্যাটির একটি কার্যকর সমাধান হওয়ায় দ্বৈত সমস্যার যে কোন সমাধান $\bar{v}$ হলে আমরা পাই $\bar{c}\ \bar{x}^* \le \bar{b}'\bar{v}$ ....(12)

এখন (10) ও (12) থেকে আমরা পাই $\bar{b}'\bar{v} \ge \bar{c}\ \bar{x}^* = \bar{b}'\bar{v}^*$।

সুতরাং $\bar{b}'\bar{v} \ge \bar{b}'\bar{v}^*$, যা থেকে বলা যায় যে $\bar{v}^*$ হল দ্বৈত সমস্যার একটি চরম সমাধান।

[এখানে $\bar{b}'\bar{v}$ হল বিষয়াত্মক অপেক্ষকের (objective function) অবম মান (minimum value)]।

সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উপপাদ্য 4 : যদি মুখ্য সমস্যা এবং দ্বৈত সমস্যার যে কোনটির একটি সসীম চরম সমাধান (finite optimal solution) থাকে তবে অপরটিরও একটি সসীম চরম সমাধান থাকবে।

[এই উপপাদ্যটিকে **দ্বৈততার মৌল উপপাদ্য বলা হয় (Fundamental Duality Theoren)]**

এই উপপাদ্যটি নিম্নলিখিতভাবেও বিবৃত করা যায়:

(1) নং মুখ্য সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান চরম সমাধান $\bar{x}^*$ সমস্যাটির চরম সমাধান হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি (2) নং দ্বৈত সমস্যাটির একটি কার্যকর সমাধান $\bar{v}^*$ পাওয়া যায় যেখানে $\bar{c}\ \bar{x}^* = \bar{b}'\ \bar{v}^*$ ।

প্রমাণ : এখানে (1) নং সমস্যাটি মুখ্য সমস্যা এই সমস্যাটিকে Simplex পদ্ধতিতে সমাধান করার জন্য m সংখ্যক Stack variable যোগ করতে হবে।

এখানে লক্ষনীয় $\bar{b} = [b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots. b_m]$ ভেক্টরটির ক্ষেত্রে $b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots. b_m$ সংখ্যাগুলির প্রত্যেকে ≥ 0 নাও হতে পারে।

m সংখ্যক slack variable কে $\bar{x} = [x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots. x_{s_m}]$ স্তম্ভ (column) ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করলে, (1) নং সমস্যাটিকে এখন লেখা যায়।

চরম $z = \bar{c}\ \bar{x}$,

শর্তসাপেক্ষে $A\ \bar{x} + I_m\ \bar{x}, = \bar{b}$ ....(13)

$$\bar{x} \geq \bar{0}, \quad \bar{x}_s \geq \bar{0}$$

যেখানে I_m হল $m \times m$ ক্রমের একসম ম্যাট্রিক্স (unit matrix)।

এখন মনে করা যাক যে (1) নং মুখ্য সমস্যাটির একটি সসীম চরম সমাধান আছে। তাহলে (13) নং সমস্যাটির একটি চরম মৌল কার্যকর সমাধান (basic feasible solution) পাওয়া যাবে।

ধরা যাক (13) নং সমস্যাটির চরম মৌল কার্যকর সমাধানের মৌল চলগুলির (basic bariables) ভেক্টরটি $\bar{x}_B^*$ = $[x_{B_1}, x_{B_2} \ldots\ldots.. x_{b_m}]$ এবং B ও $\bar{C}_B = (c_{B_1}, c_{B_2}, \ldots\ldots\ldots.. c_{B_m})$ হল যথাক্রমে অনুরূপ ভিত্তি ম্যাট্রিক্স (basis matrix) ও বিষয়াত্মক অপেক্ষকে অনুরূপ মৌল চলগুলির সহগদের সারি ভেক্টর (row vector)।

আমরা জানি $\bar{x}_B^*$ = $\bar{C}_B\ B^{-1}$

এখন $\bar{x}_B^*$ থেকে (13) নং সমস্যার একটি চরম মৌল সমাধান পাওয়া যায় বলে, আমরা পাই $z_j - c_j \geq 0 j$-এর যে কোন গ্রহণযোগ্য মানের জন্য, যেখানে

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} C_{B_i}\ y_{ij}$$

এবং $[y_{1j,}\ y_{2j}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{mj}]$

$$= B^{-1}\,(A, I_m)$$

তাহলে আমরা লিখতে পারি $\bar{C}_B\ B^{-1}\,(A, I_m) \geq (\bar{c}, \bar{0})$ ....(14)

এখন $\bar{C}_B\ B^{-1}$ এই row ম্যাট্রিক্সকে $\bar{v}^*$ দ্বারা নির্দেশ করা যাক।

তাহলে (14) থেকে আমরা পাই

$$\bar{v}^* A \geq \bar{c},\ \bar{v}^* \geq \bar{0} ....(15)$$

বা, $A' \bar{v}^* \geq \bar{c}, \quad \bar{v}^* \geq \bar{0}$ ....(16)

[এখানে (15) তে $\bar{0}$ একটি row ম্যাট্রিক্স এবং (16) তে $\bar{0}$ একটি column ম্যাট্রিক্স।]

এখন (16) থেকে বলা যায় যে $\bar{v}^*$ (2) নং দ্বৈত সমস্যাটির শর্তগুলি মেনে চলে এবং তাহলে $\bar{v}^*$ হল (1) নং মুখ্য সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যার একটি কার্যকর সমাধান।

আমরা প্রমাণ করব যে $\bar{v}^* = (\bar{C}_B\ B^{-1})'$, (2) নং দ্বৈত সমস্যাটির একটি চরম সমাধান (optimal solution)।

এখানে মুখ্য সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষকের (objective function) চরম মান (maximum value) হবে $(z)_{\text{চরম}} = \bar{c}_B\ \bar{x}_B^*$

$$= \bar{C}_B\ B^{-1}\ \bar{b},\ [\because \bar{x}^*{}_B = \bar{C}_{B,}\ B^{-1}]$$

$$= (\bar{v}^*)' \bar{b}$$

$$= (\bar{v}^*\ \bar{b})' = \bar{b}, \bar{v}^*$$

[$\bar{v}^*\ \bar{b}$ একটি 1×1 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হওয়ার জন্য $\bar{v}^*\ \bar{b} = (\bar{v}^*{}'\ \bar{b})'$]

এখন উপরের সমাধান দুটির (একটি মুখ্য সমস্যার ও অপরটি দ্বৈত সমস্যার) ক্ষেত্রে মুখ্য সমস্যা ও দ্বৈত সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকদের মান সমান হওয়ার জন্য, **উপপাদ্য 3** থেকে আমরা বলতে পারি যে, $\bar{v}^* = (\bar{C}_B\ B^{-1})'$ দ্বৈত সমস্যাটির একটি চরম সমাধান হবে।

এখন অনুরূপভাবে (2) নং দ্বৈত সমস্যাটির একটি চরম সমাধান $\bar{v}^*$ আছে ধরে নিলে আমরা প্রমাণ করতে পারি যে (1) নং মুখ্য সমস্যাটির একটি চরম সমাধান পাওয়া যাবে এবং $(z)_{\text{চরম}} = (w)_{\text{অবম}}$।

অনুসিন্ধান্ত : কোন রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সসীম চরম সমাধান পাওয়া যাবে এবং কেবলমাত্র যদি মুখ্য সমস্যা ও দ্বৈত সমস্যার উভয়েরই অন্তত একটি করে কার্যকর সমাধান পাওয়া যায়।

প্রমাণ : নিজে করুন।

মন্তব্য : Simplex পদ্ধতিতে মুখ্য রৈখিক প্রোগ্রাবিধি সমস্যার চরম সমাধান নির্ণয় করলে, উপপাদ্য (4) থেকে আমবা দ্বৈত সমস্যাটির চরম সমাধান নির্ণয় করার নিচের পদ্ধতিটি পাই :

যদি মুখ সমস্যাটিকে চরম সমস্যা (maximization problem) রূপে এবং "$\leq$" আকারের শর্ত $z_j - c_j$এর মানগুলি থেকে দ্বৈত সমস্যার চরম সমাধান পাওয়া যাবে।

অনুরূপভাবে বলা যায় যে মুখ্য সমস্যাটি অবম মান নির্ণয় সংক্রান্ত (minimization problem) সমস্যারূপে এবং "$\geq$" আকারের শর্তসাপেক্ষে সমাধান করা হয়, তাহলে চরম সমাধান নির্ণয়ের simplex table থেকে surplus চলদের নিচে এর মানগুলির চিহ্ন পরিবর্তন করে দ্বৈত সমস্যার চরম সমাধান পাওয়া যাবে।

উপপাদ্য 5 : যদি মুখ্য সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষকের (objective function) মান অবাধ (unbounded) হয় তবে দ্বৈত সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান থাকবে না।

প্রমাণ : মনে করা যাক (1) নং মুখ্য সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষক অবাধ (unbounded)। যদি সম্ভব হয়, ধরা যাক (2) নং দ্বৈত সমস্যার কার্যকর সমাধান (feasible soulution) আছে। এমন মুখ্য সমস্যা ও দ্বৈত সমস্যা উভয়েরই কার্যকর সমাধান থাকায়, উপপাদ্য 4 এর অনুসির্দ্ধান্ত থেকে বলা যায় যে মুখ্য সমস্যা এবং দ্বৈত সমস্যা উভয়েরই চরম সমাধান (optimal solution) থাকবে—যা এখানে অসম্ভব কারণ মুখ্য সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষক অবাধ অর্থাৎ ইহার সসীম চরম সমাধান নেই। সুতরাং প্রমাণিত হল যে দ্বৈত সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান থাকবে না যদি মুখ্য সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষক অবাধ হয়।

উপপাদ্য 6 : যদি দ্বৈত সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান না থাকে এবং মুখ্য সমস্যার কার্যকর সমাধান থাকে, তবে মুখ্য সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষক (objective function) অবাধ (un bounded) হবে।

প্রমাণ : নিজে করুন।

10.5 দ্বৈততা Simplex এবং পদ্ধতি

আমরা লক্ষ্য করেছি যে দ্বৈততার মৌল উপপাদ্যের সাহায্যে মুখ্য সমস্যার (বা দ্বৈত সমস্যার) চরম সমাধান (যদি পাওয়া যায়) simplex পদ্ধতিতে নির্ণয় করলে একই সঙ্গে দ্বৈত সমস্যার (বা মুখ সমস্যার) চরম সমাধান নির্ণয় করা যায়। এই প্রসঙ্গে আমরা নিচে তিনটি উপযোগী নিয়ম উল্লেখ করব—

প্রথম নিয়ম : উপপাদ্য (4) এর অনুসিদ্ধান্তের নিচে মন্তব্যের মধ্যে এই নিয়মটি পূর্বেই বলা হয়েছে।

দ্বিতীয় নিয়ম : যদি মুখ্য সমস্যার (বা দ্বৈত সমস্যার) কোন চল দ্বৈত সমস্যার (বা মুখ্য সমস্যার) কোন artificial চলের সঙ্গে সম্পর্কিত (related) হয় তাহলে দ্বৈত সমস্যার (মুখ্য সমস্যার) চরম সমাধান নির্ণয়ের Simplex Table এর "net evaluation" সারির অনুরূপ artificial চল এর নিচের সংখ্যাটিতে penalty cost M এর মান শূন্য ধরে চরম সমাধানে অনুরূপ মুখ্য চলের (দ্বৈত চলের) মান পাওয়া যাবে—এই নিয়মটির প্রমাণ এখানে দেওয়া হবে না।

(10.6) অনুচ্ছেদের উদাহরণ থেকে নিয়মটি স্পষ্ট হবে।

তৃতীয় নিয়ম : যদি মুখ্য সমস্যার বা দ্বৈত সমস্যার কোন একটির বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান অবাধ (unbounded) হয় তবে অন্যটির কোন কার্যকর সমাধান থাকবে না। উপপাদ্য (5) এবং উপপাদ্য (6) থেকে এই নিয়মটির আমরা প্রমাণ পাই।

মন্তব্য : দ্বৈততার সাহায্য নিলে অনেক রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার (L.P.P.) সমাধান করা সহ হয়। যেমন কোন L.P.P.-তে, যদি শর্তের সংখ্যা চলের সংখ্যা অপেক্ষা বেশি হয় তাহলে সেক্ষেত্রে দ্বৈত সমস্যাটি (যার শর্তের সংখ্যা মুখ্য সমস্যার চলের সংখ্যা সমান) সমাধান করে মুখ্য সমস্যাটির সমাধান নির্ণয় অনেক সহজ হবে।

10.6 উদাহরণ

1. দ্বৈততার সাহায্যে নিচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি (L.P.P.) সমস্যাটির চরম সমাধান (যদি পাওয়া যায়) নির্ণয় করুন :

চরম $z = 3x_1 + 2x_2$,

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \le 1$,

$x_1 + x_2 \le 7$,

$x_1 + 2x_2 \le 10$,

$x_2 \le 3$

$x_1, x_2 \ge 0$ ।

সমাধান : এখানে মূল্য সমস্যার শর্তের সংখ্যা 4 এবং চলের সংখ্যা 2।

প্রদত্ত মুখ্য সমস্যাটিকে লেখা যায়,

চরম $z = 3x_1 + 2x_2$,

শর্তসাপেক্ষে $x_1 - x_2 \le -1$

$x_1 - x_2 \le 7$,

$x_1 - 2x_2 \le 10$,

$x_2 \le 3$

$x_1, x_2 \ge 0$ ।

তাহলে প্রদত্ত মুখ্য সমস্যার দ্বৈত সমস্যা হবে,

অবম $w = -v_1 + 7v_2 + 10v_3 + 3v_4$

শর্তসাপেক্ষে $v_1 + v_2 + v_3 + 0v_4 \le 3$

$-v_1 + v_2 + 2v_3 + 0v_4 \le 3$

$v_1, v_2, v_3, v_4 \le 0$

এখন উপরের দ্বৈত সমস্যাটি নিচের আকারে (standard form) প্রকাশ করা যায়,

চরম $w_1 = v_1 - 7v_2 - 10v_3 - 3v_4 + 0v_5 + 0v_6$,

যেখানে $-v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - v_5 = 3$, ...(1)

$-v_1 + v_2 + 2v_3 + v_4 - v_6 = 2$,

এবং যেখানে v_6 ও v_6 হল চল।

এখন (1) নং সমস্যার সহগ ম্যাট্রিক্সটি হল

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

যেখানে একটি স্তম্ভ ভেক্টর $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ।

সুতরাং প্রাথমিক ভিত্তি (basis) ম্যাট্রিক্সে দ্বিতীয় ভিত্তি ভেক্টর $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ পাওয়ার জন্য চল পাওয়ার জন্য v_7 এর সাহায্যে, (1) নং দ্বৈত সমস্যাটি নিচের modified আকারে লেখা যায়।

চরম $\quad w_2 = v_1 - 7v_2 - 10v_3 - 3v_4 + 0v_5 + 0v_6 - Mv_7,$

শর্তসাপেক্ষে $\quad -v_1 + v_2 + 0v_4 - v_5 + v_7 = 3$

$$v_1 + v_2 + 2v_3 + v_4 + 0v_5 - v_6 + 0v_7 = 2$$

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_5,\ v_6,\ v_7 = \geq 0$$

এবং M (>0) একটি সংখ্যা যা যে কোন প্রাপ্ত সংখ্যার চেয়ে বড় ধরা হবে।

এখন Simplex পদ্ধতিতে সমাধান করতে গিয়ে নিচের সারণীগুলি পাওয়া যায় (প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহার করা হয়েছে)।

			c_j	1	-7	-10	-3	0	0	$-M$
$\bar{c}_B$	B	$\bar{v}_B$	$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$
$-M$	$\bar{a}_7$	v_7	3	-1	1	1	0	-1	0	1
-3	$\bar{a}_4$	v_4	2	-1	$\boxed{1}$	2	1	0	-1	0
$z_j - c_j$				$M+2$	$\uparrow -M+4$	$-M+4$	$\downarrow 0$	M	3	0
$-M$	$\bar{a}_7$	v_7	1	0	0	-1	-1	-1	$\boxed{1}$	1
-7	$\bar{a}_2$	v_2	2	-1	1	2	1	0	-1	0
$z_j - c_j$				6	0	$M-4$	$M-4$	M	$-M+7$	$0 \downarrow$
0	$\bar{a}_6$	v_6	1	0	0	-1	-1	-1	$\uparrow 1$	
-7	$\bar{a}_2$	v_2	3	-1	1	1	0	-1	0	
$z_j - c_j$				6	0	3	3	7	0	

শেষ সারণীতে মৌল চলদের মধ্যে artificial চল নাই এবং j-এর সকল মানের জন্য $z_j - c_j \geq 0$। সুতরাং শেষ সারণী থেকে দ্বৈত সমস্যার চরম সমাধান (optimal solution) পাওয়া যাবে। দেখা যাচ্ছে দ্বৈত সমস্যার চরম সমাধান হল $v_1 = 0, v_2 = 3, v_3 = 0, v_4 = 0$ যেখানে $(w)_{\text{অবম}} = 21$। আবার শেষ সারণীর $z_j - c_j$ এর সারিতে surplus চল v_5 ও v_6 এর স্তম্ভের নিচের সংখ্যাগুলি যথাক্রমে 7, 0।

সুতরাং মুখ্য সমস্যার চরম সমাধান $x_1 = 7,\ x_2 = 0$ যেখানে $(z)_{\text{চরম}} = 21$ ।

2. নিচের মুখ্য সমস্যাটি সমাধানের Simplex সারণী থেকে ইহার দ্বৈত সমস্যাটির চরম সমাধান (যদি পাওয়া যায়) নির্ণয় করুন :

চরম $\quad z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3,$

শর্তসাপেক্ষে $\quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5,$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2,$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \geq 0।$$

সমাধান : এখানে দ্বৈত সমস্যায় দুটি চল v_1, v_2 থাকবে যেখানে v_2 চলটি হবে চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ (unrestricted in sign), কারণ মুখ্য সমস্যায় দুটি শর্ত আছে এবং যেখানে দ্বিতীয় শর্তটি সমীকরণ আকারে আছে।

এখন slack চল x_4 এবং artificial চল x_5 ব্যবহার করে মুখ্য সমস্যাটির নিচের modified আকারটি পাওয়া যায়।

চরম $\quad z_1 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4 - Mx_5,$

শর্তসাপেক্ষে $\quad x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 5$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 0x_4 - x_5 = 2,$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

এবং M (>0) একটি সংখ্যা যা যে কোন প্রাপ্ত সংখ্যার থেকে বড় ধরা হবে।

এখন Simplex পদ্ধতিতে সমাধান করতে গিয়ে নিচের সারণীগুলি পাওয়া যায় (প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহার করা হয়েছে)।

			c_j	5	12	4	0	– M
$\bar{c}_B$	B	$\bar{x}_B$	$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$
0	$\bar{a}_4$	x_4	5	1	2	1	1	0
– M	$\bar{a}_5$	x_5	2	2	– 1	$\boxed{3}$	0	1
$z_j - c_j$				–2M–5	M–12	–3M–4	0	0 ↓
0	$\bar{a}_4$	x_4	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{7}{3}}$	↑ 0	1	$-\frac{1}{3}$
4	$\bar{a}_3$	x_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j$				$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0 ↓	$M+\frac{4}{3}$
12	$\bar{a}_2$	x_2	$\frac{13}{7}$	$\frac{1}{7}$	↑ 1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$
4	$\bar{a}_3$	x_3	$\frac{9}{7}$	$\boxed{\frac{5}{7}}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
$z_j - c_j$				↑ $-\frac{3}{7}$	0	↓ 0	$\frac{40}{7}$	$M-\frac{4}{7}$
12	$\bar{a}_2$	x_2	$\frac{8}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
5	$\bar{a}_1$	x_1	$\frac{9}{5}$	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$z_j - c_j$				0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$M-\frac{2}{5}$

শেষ সারণীতে মৌল চলদের মধ্যে artificial চল নাই এবং j এর সকলমানের জন্য $z_j - c_j \geq 0$। সুতরাং শেষ সারণী থেকে মুখ্য সমস্যার চরম সমাধান (optimal solution) পাওয়া যাবে।

দেখা যাচ্ছে মুখ্য সমস্যার চরম সমাধান হল $x_1 = \frac{9}{5},\ x_2 = \frac{8}{5},\ x_3 = 0$

যেখানে $(z)_{\text{অবম}} = 28\frac{1}{8}$

আবার শেষ সারণীর $z_j - c_j$ এর সারিতে slack চল x_4 এবং artificial চল এর স্তম্ভের নিচের সংখ্যাগুলি যথাক্রমে $\frac{29}{5}, \mathrm{M} - \frac{2}{5}$ ।

এখন M = 0 ধরে, দ্বৈত সমস্যার চরম সমাধান হবে $v_1 = \frac{29}{5}, v_2 = -\frac{2}{5}$

এবং $(w)_{\text{অবম}}\ (z)_{\text{চরম}} = 28\frac{1}{8}$

এখানে লক্ষণীয় যে v_1 চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ (unrestricted in sign) এবং $v_1 - \frac{2}{5} < 0$ ।

সুতরাং দ্বৈত সমস্যার চরম সমাধান হল $v_1 = \frac{29}{5},\ v_1 = -\frac{2}{5}$

যেখানে $(w)_{\text{অবম}} = (5v_1 + 2v_2)_{\text{অবম}}$

$= \frac{141}{5} = 28\frac{1}{5}$ ।

3. দ্বৈততার সাহায্যে দেখান যে নিচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান নেই।

অবম $\quad z = x_1 - x_2,$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + x_2 \geq 2,$

$x_1 + x_2 \leq 1,$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

সমাধান : প্রদত্ত সমস্যাটিকে লেখা যায়

অবম $\quad z = x_1 - x_2,$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + 2x_2 \geq 2$

$-x_1 - x_2 \geq 1,$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

এই মুখ্য সমস্যার দ্বৈত সমস্যাটি হবে

চরম $\quad w = 2v_1 - v_2,$

শর্তসাপেক্ষে $2v_1 - v_2 \leq 1,$

$v_1 - v_2 \leq -1,$

$v_1 \geq 0,\ \ v_2 \geq 0$

এখন দ্বৈত সমস্যাটিকে নিচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যারূপে প্রকাশ করা যায় :

চরম $\quad w = 2v_1 - v_2$

শর্তসাপেক্ষে $2v_1 - v_2 \leq 1$

$-v_1 - v_2 \geq -1,$

$v_1,\ v_2 \geq 0$

এই সমস্যাটির সমতুল্য (equivalent) আকার হল

চরম $\qquad w = 2v_1 + v_2 + 0v_3 + 0v_4$

শর্তসাপেক্ষে $\quad 2v_1 - v_2 + v_3 = 1$

$\qquad - v_1 + v_2 - v_4 = 1$

$\qquad v_1, \ v_2, \ v_3 , \ v_4 \geq 0$, যেখানে v_3 slack চল এবং v_4 surplus চল।

এখন artifical চল v_5 ব্যবহার করে আমরা দ্বৈত সমস্যাটির নিচের modified আকারটি পাই।

চরম $\qquad w = 2v_1 + v_2 + 0v_3 + 0v_4 - Mv_5,$

শর্তসাপেক্ষে $\quad 2v_1 - v_2 + v_3 = 1$

$\qquad - v_1 + v_2 - v_4 + v_5 = 1,$

$\qquad - v_1, v_2, v_4, v_5 \geq 0$, যেখানে M(>0) একটি যা যে কোন প্রাপ্ত সংখ্যার থেকে বড় ধরা হবে।

এখন Simplex পদ্ধতিতে সমাধান করতে গিয়ে নিচের সারণীগুলি পাওয়া যায় (প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহার করা হয়েছে)।

			c_j	2	1	0	0	– M
$\bar{c}_B$	B	$\bar{v}_B$	$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$
0	$\bar{a}_3$	v_3	1	2	– 1	1	0	0
– M	$\bar{a}_5$	v_5	1	– 1	$\boxed{1}$	0	– 1	1
	$z_j - c_j$			M–2	–M–1	0	M	0
0	$\bar{a}_3$	v_3	2	$\boxed{1}$	0	1	– 1	1
1	$\bar{a}_2$	v_2	1	– 1	1	0	– 1	1
	$z_j - c_j$			– 3	0	0	– 1	
2	$\bar{a}_1$	v_1	2	1	0	1	– 1	
1	$\bar{a}_2$	v_2	3	0	1	1	– 2	
	$z_j - c_j$			0	0	3	– 4	

এখানে দেখা যাচ্ছে যে শেষ সারণীতে $z_j - c_j$ এর ঋণাত্মক মান (যার পরম মান সবচেয়ে বেশী) হল – 4 এবং এই মানটি $\bar{a}_4$ এর নিচে। কিন্তু $y_{14} = -1 < 0$, $y_{24} = -2 < 0$ অর্থাৎ এই স্তম্ভের কোন পদ ধনাত্মক নয়।

সুতরাং দ্বৈত সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষক অবাধ (un bounded) হবে। তাহলে প্রদত্ত মুখ্য সমস্যাটির কোন কার্যকর সমাধান নাই।

10.7 সারাংশ

প্রথমে, চরম $z=\bar{c}\,\bar{x}$, শর্তসাপেক্ষে $A\,\bar{x}\le\bar{b}, \bar{x}\ge\bar{0}$ আকারের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার (মুখ্য সমস্যা) দ্বৈত সমস্যার সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। এর পর যে কোন আকারের মুখ্য সমস্যার (চরম মান বা অবম মান নির্ণয় সংক্রান্ত শর্তগুলি "$\le$" "$\ge$" "="যে কোন আকারের থাক এবং এক বা একাধিক চল অবাধ থাকলেও) দ্বৈত সমস্যা নির্ণয় করার পদ্ধতি বলা হয়েছে। এখানে লক্ষ্য করা গেছে (i) **মুখ্য সমস্যার শর্তের সংখ্যা = দ্বৈত সমস্যার চলের সংখ্যা** এবং **মুখ্য সমস্যার চলের সংখ্যা = দ্বৈ সমস্যার শর্তের সংখ্যা**। (ii) মুখ্য সমস্যার কোন চল চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ হলে, দ্বৈত সমস্যার অনুরূপ শর্তটি "=" আকারে হবে এবং মুখ্য সমস্যার কোন শর্ত "=" আকারের হলে, দ্বৈত সমস্যার অনুরূপ চলটি চিহ্ন সাপেক্ষে হবে।

সর্বশেষে দ্বৈততা (Duality) সংক্রান্ত গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যগুলি থেকে নিচের বিষয়গুলি জানা গেছে :

(ক) Simplex পদ্ধতিতে মুখ্য সমস্যা এবং দ্বৈত সমস্যা **উভয়েরই একই সারণী থেকে চরম সমাধান** (যদি এর অস্তিত্ব থাকে) **নির্ণয় করা যায়।**

(খ) মুখ্য সম ও দ্বৈত সমস্যা উভয়ের বিষয়াত্ম অপেক্ষকের চরম মান (optimal value) একই হবে [যখন চরম সমাধান পাওয়া যায়]।

(গ) যদি মুখ্য সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান **অবাধ (un bounded)** হয় তবে **দ্বৈত সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান** (feasible solution) **থাকবে না** এবং **দ্বৈত সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান অবাধ হলে, মুখ্য সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান থাকবে না।**

10.8 অনুশীলনী

নিচের প্রত্যেকটি (1–5) রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার দ্বৈত সমস্যাটি নির্ণয় করুন :

1. চরম $z = 3x_1 + 4x_2$,

শর্তসাপেক্ষে
$$x_1 + x_2 \le 12,$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 21$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_2 \le 6,$$
$$x_1,\ x_2 \le 0।$$

2. অবম $z = 3x_1 + x_2$,

শর্তসাপেক্ষে
$$2x_1 + 3x_2 \ge 2,$$
$$x_1 + x_2 \ge 1,$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0।$$

3. চরম $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$,

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7$,

$2x_1 - 5x_2 \leq 3$,

$3x_1 - x_3 \geq 5$,

$x_1, \ x_2 \geq 0$

এবং x_3 অবাধ (unrestricted in sign)।

4. চরম $z = 2x_1 - 6x_2$,

শর্তসাপেক্ষে $x_1 - 3x_2 \leq 6$,

$2x_1 - 4x_2 \geq 8$,

$x_1 - 3x_3 \geq -6$,

$x_1, \ x_2 \geq 0$

5. চরম $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$,

শর্তসাপেক্ষে $4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$,

$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$,

$x_1, \ x_2 \ x_3 \geq 0$।

6. দ্বৈত সমস্যাটি সমাধান করে, নিচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার চরম সমাধান (যদি থাকে নির্ণয় করুন :

চরম $z = 3x_1 + 2x_2$,

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \leq 5$,

$x_1 \leq 4$

$x_2 \leq 6$

$-x_2 \leq -1$

এবং $x_1, \ x_2 \geq 0$

7. Simplex পদ্ধতিতে নিচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটি সমাধান করুন এবং শেষ সারণী থেকে দ্বৈত সমস্যাটির চরম সমাধান নির্ণয় করুন :

চরম $z = 30x_1 + 23x_2 + 29x_3$,

শর্তসাপেক্ষে $6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 26$,

$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7$,

$x_1, \ x_2, \ x_3 \geq 0$

8. দ্বৈততার সাহায্যে দেখান যে নিচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান অবাধ (unbounded) হবে।

চরম $z = 3x_1 + 4x_2$,

শর্তসাপেক্ষে $x_1 - x_2 \le 1,$

$x_1 + x_2 \ge 4,$

$x_1 - 3x_2 \le 3,$

$x_1, \ \ x_2 \ge 0$

9. Simplex পদ্ধতি ব্যবহার করে দেখান যে নিচের L.P.P.-টির দ্বৈত সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান নাই।

চরম $x_1 + 2x_2,$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 \ge 1,$

$- x_1 + x_2 \le 1,$

$x_1 - 0, \ \ x_2 \ge 0$

10. Artifical চল ব্যবহার না করে Simplex পদ্ধতিতে নিচের L.P.P.-টি সমাধান করুন :

অবম $z = x_1 + x_2,$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 \ge 12,$

$5x_1 + 6x_2 \ge 48,$

$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0$

[সংকেত : দ্বৈত সমস্যাটি সমাধান করুন]

10.8 উত্তরমালা

1. অবম $w = 21v_1 + 21v_2 + 8v_3 + 6v_4,$

শর্তসাপেক্ষে $v_1 + 2v_2 + v_3 \ge 3,$

$v_1 + 3v_2 + v_4 \ge 4,$

$v_1, \ \ v_2, \ \ v_3, \ \ v_4 \ge 0$।

2. চরম $w = 21v_1 + v_2,$

শর্তসাপেক্ষে $2v_1 + v_2, \le 3,$

$3v_1 + v_2 \le 1,$

$v_1, \ \ v_2 \ge 0$।

3. অবম $w = 7v_1 + 3v_2 - 5v_3,$

শর্তসাপেক্ষে $v_1 + 2v_2 \ge 2,$

$-5v_1 - 5v_2 - 3v_3 \ge 3,$

$3v_1 + v_3 = 4,$

$v_2, \ \ v_3 \ge 0$ এবং v_1 চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ।

4. অবম $w = 6v_1 - 8v_2 + 6v_3$,

শর্তসাপেক্ষে $v_1 - 2v_2 - v_3 \geq 2$,

$-3v_1 - 4v_2 + 3v_3 \geq -6$,

$v_1,\ v_3 \geq 0$।

3. অবম $w = 6v_1 + 4v_2$,

শর্তসাপেক্ষে $4v_1 + v_2 \geq 2$,

$v_1 - 5v_2 \geq 3$, এবং v_1, v_2 চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ (unrestricted in sign)।

6. $x_1 = 4,\ x_1 = 1$ এবং $(z)_{\text{চরম}} = 10$

7. $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{7}{2},\ x_3 = 0$ এবং $(z)_{\text{চরম}} = \frac{161}{2}$,

$v_1 = 0,\ v_2 = \frac{23}{2}$ এবং $(z)_{\text{অবম}} = \frac{161}{2}$

8. $x_1 = 0,\ x_2 = 8$; এবং $(z)_{\text{অবম}} = 8$।

একক 11 ❑ পরিবহণ মডেল ও L.P.P হিসাবে লেখন (Transportation Model as L.P.P)

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

সাধারণ রৈখিক প্রোগ্রাবিধি সমস্যার (general linear programming problem) একটি বিশেষ রূপ হল পরিবহণ সমস্যা (transportation problem)। এই সমস্যায় কোন বিশেষ দ্রব্যকে (commodity) কয়েকটি বিশেষ জায়গা (উৎস) থেকে অন্য কয়েকটি গন্তব্যে পৌঁছে দিতে মোট পরিবহণ খরচ (transportation cost) যা হয় তাকে সবচেয়ে করতে হবে। দ্রব্যটির উৎসের (origins) কেন্দ্রগুলিতে উৎপাদন সংখ্যা (availability), গন্তব্য স্থলগুলির (destinations) চাহিদা (requirements) ও দ্রব্যটির প্রতি এককের পরিবহণ খরচ transportation cost) দেওয়া থাকবে। বাস্তব ক্ষেত্রে পরিবহণ সমস্যার একটি উদাহরণ দেওয়া যাক :

মনে করুন; একটি ঠাণ্ডা পানীয় প্রস্তুতকারক সংস্থার ভারতের বিভিন্ন প্রান্তে 8টি উৎপাদন কারখানা আছে। উৎপাদিত পানীয় ভারতের 50টি প্রধান শহরে পাঠানো হচ্ছে। বিভিন্ন কারখানায় ঠাণ্ডা পানীয়ের উৎপাদনের পরিমাণ (কোন নির্দিষ্ট সময়ে, বিভিন্ন শহরের ঠাণ্ডা পানীয়ের চাহিদা এবং প্রত্যেক কারখানা থেকে অন্য যে কোন শহরে এই দ্রব্যের প্রতি এককের পরিবহণ খরচ দেওয়া আছে। এখন প্রত্যেক কারখানা থেকে প্রত্যেক শহরে পাঠানো দ্রব্যের পরিমাণ (প্রত্যেক উৎসের মোট উৎপাদন ব্যবহার করে এবং প্রত্যেক গন্তব্যের চাহিদা মিটিয়ে) নির্ণয় করতে হবে যাতে মোট পরিবহণ খরচ সবচেয়ে কম হয়।

11.2 পরিবহণ সমস্যার গাণিতিক রূপ (Mathematical formulation of transportation problem)

ধরা যাক কোন দ্রব্যের m টি উৎসস্থল (origins) $O_1, O_2, \ldots\ldots O_m$ এবং n টি গন্তব্যস্থল $D_1, D_2 \ldots\ldots D_n$.

মনে করুন O_i উৎসস্থলে উৎপাদন সংখ্যা $a_i (>0)$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots m)$ এবং D_j গন্তব্যস্থলে চাহিদা $b_j (>0)$ $(j = 1, 2, \ldots\ldots n)$.

ধরুন O_i উৎসস্থল থেকে D_j গন্তব্যস্থলে পাঠানো দ্রব্যের পরিমাণ x_{ij} একক $(i = 1, 2, \ldots m;$ $j=1, 2, \ldots\ldots n)$.

তাহলে, $x_{ij} \geq 0$.

এখন mn সংখ্যক চল x_{ij} $(i=1, 2, \ldots\ldots m; j=1, 2, \ldots\ldots n)$ এর মান নির্ণয় করতে যাতে

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = 1, 2, \ldots\ldots m)$$

এবং $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (j = 1, 2, \ldots\ldots n)$$

সমীকরণগুলি সিদ্ধ (satisfied) হয়।

আবার মনে করুন উৎপাদিত দ্রব্যের এক একক O_i উৎস থেকে D_j গন্তব্যস্থলে পাঠাতে পরিবহণ খরচ হয় c_{ij} $(i = 1, 2, \ldots\ldots m; j = 1, 2, \ldots\ldots n)$.

তাহলে পরিবহণের মোট খরচ ধরলে আমরা পাই

$$\begin{aligned} z = {} & (c_{11} x_{11} + c_{12} x_{12} + \ldots\ldots + c_{1n} x_{1n}) \\ & + (c_{21} x_{21} + c_{22} x_{22} + \ldots\ldots + c_{2n} x_{2n}) \\ & + \ldots\ldots + (c_{m1} x_{m1} + c_{m2} x_{m2} + \ldots\ldots + c_{mn} x_{mn}) \\ = {} & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}. \end{aligned}$$

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে পরিবহণ সমস্যাকে নিচের L.P.P. হিসাবে লেখা যায় :

অবম $$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij},$$

শর্তসাপেক্ষে $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, n;$$

$$x_{ij} \geq 0, \ (i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\, m; \ j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\, n)$$

যদি $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ হয় তবে পরিবহণ সমস্যাটিকে **সমতাপূর্ণ** (balanced) বলা হয় এবং $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ হলে সমস্যাটিকে **অসমতাপূর্ণ** (unbalanced) বলা হবে।

তাহলে সমতাপূর্ণ পরিবহণ সমস্যার ক্ষেত্রে মোট উৎপাদিত দ্রব্যের পরিমাণ এবং মোট চাহিদা সমান হবে।

আমরা লক্ষ্য করছি কোন পরিবহণ সমস্যাকে নিচের ছকের সাহায্যে বিবৃত করা যায়। এই ছক্‌কে পরিবহণ ছক (transportation table) বলে।

গন্তব্য স্থল

উৎস স্থল	D_1	D_2	— — —	D_n	
O_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	a_1
O_2	c_{21}	c_{22}	— — —	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
O_m	c_{m1}	c_{m2}	— — —	c_{mn}	a_{ii}
	b_1	b_2	— — —	b_n	

পরিবহণ সমস্যার (L.P.P. হিসাবে) ম্যাট্রিক্স রূপ :

m-টি উসস্থল এবং n-টি গন্তব্যস্থল বিশিষ্ট পরিবহণ সমস্যাকে (1) নং ছক্ দ্বারা বিবৃত করলে সমস্যাটিকে (L.P.P. হিসাবে) ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে নিচের আকারে প্রকাশ করতে পারি :

অবম $z = \bar{c}\ \bar{x}$,

শর্তসাপেক্ষে $A\bar{x} = \bar{b}, \quad \bar{x} \geq \bar{0}$

যেখানে $\bar{x} = [x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots\ldots x_{ij}, \ldots\ldots\ldots\ldots x_{mn}]$ হল mn উপাংশ (component) বিশিষ্ট একটি স্তম্ভ ভেক্টর (column-vector), $\bar{c} = (c_{11}, c_{12}, \ldots\ldots\ldots c_{ij}, \ldots\ldots\ldots\ldots c_{mn})$ হল mn উপাংশ বিশিষ্ট একটি সারি ভেক্টর (row-vector), $\bar{b} = [a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_m, b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots b_n]$ একটি $(m + n)$ উপাংশবিশিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টর এবং $A = [\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{a}_{ij}, \ldots\ldots\ldots \bar{a}_{mn}]$ হল $(m + n) \times mn$ ক্রমের সহগ ম্যাট্রিক্স (coefficient matrix) যেখানে $\bar{a}_{ij}$ হল x_{ij} চলের স্তম্ভ ভেক্টর।

এখন A $\bar{x} = \bar{b}$ শর্তগুলিকে বিশদ্‌ভাবে (in details) লিখলে আমরা পাই

$$
\begin{array}{lllr}
x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{1n} & & & = a_1 \\
 & & x_{21} + x_{22} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{2n} & = a_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
 & & x_{m1} + x_{m2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{mn} & = a_m \\
x_{11} & + x_{21} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{m1} & & = b_1 \\
x_{21} & + x_{21} + x_{22} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{m2} & & = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
 & x_{1n} & + x_{2n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{mn} & = b_n
\end{array}
$$

একটি উদাহরণ দেওয়া যাক

কোন পরিবহণ সমস্যার পরিবহণ ছক্‌টি নিচে দেওয়া হল।

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	2	1	3	10
O_2	2	4	1	15
O_3	1	1	5	5
O_4	6	2	4	20
b_j	30	10	10	

এখানে 4টি উৎসস্থল এবং 3টি গন্তব্যস্থল আছে এবং সমস্যাটি সমতাপূর্ণ কারণ

$$\sum_{i=1}^{4} a_i \sum_{j=1}^{3} b_j = 50$$

সমস্যাটিকে L.P.P হিসাবে লিখলে আমরা পাই,

অবম $z = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + 52x_{33} + 6x_{41} + 2x_{42} + 4x_{43}$,

$$
\begin{array}{lr}
x_{11} + x_{12} + x_{13} & =10 \\
\quad x_{12} + x_{22} + x_{23} & =15 \\
\quad\quad x_{31} + x_{32} + x_{33} & =5 \\
\quad\quad\quad x_{41} + x_{42} + x_{43} & =20 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} & =30 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} & =10 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} & =10
\end{array}
$$

এখানে প্রধান শর্তের (constraints) সংখ্যা 4 + 3 = 7 এবং চলের সংখ্যা 12।

$x_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2, 3$)

এখানে প্রধান শর্তের (constrains) সংখ্যা 4 + 3 = 7 এবং চলের সংখ্যা 12।

এখানে, $\bar{b} = [10, 15, 5, 20, 30, 10, 10]$

$\bar{c} = (2, 1, 3, 2, 4, 1, 1, 1, 5, 6, 2, 4)$

এখানে সহগ ম্যাট্রিক্স A হল

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

যা একটি 7 × 12 ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

আমরা লক্ষ্য করছি x_{12} চলের স্তম্ভ ভেক্টর

$$\bar{a}_{12} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \bar{e}_1 + \bar{e}_6$$

যেখানে $\bar{e}_i$ হল (4+3) × (4+3) অর্থাৎ 7×7 ক্রমের একসম ম্যাট্রিক্সের (unit matrix) i তম স্তম্ভ ভেক্টর। সাধারণ ভাবে আমরা পাই

$$\bar{a}_{ij} = \bar{e}_i + \bar{e}_{m+j} \quad [\text{এখনে } m = 4, n = 3]$$
$$= \bar{e} + \bar{e}_{4+2}$$

11.2 পরিবহণ সমস্যার বিশেষ কয়েকটি বৈশিষ্ট্য

নিচের উপপাদ্যগুলি থেকে পরিবহণ সমস্যার বিশেষ কয়েকটি বৈশিষ্ট্য জানা যাবে যেগুলি পরিবহণ সমস্যার সমাধানে সাহায্য করবে।

উপপাদ্য 1 m সংখ্যক উৎস এবং n সংখ্যক গন্তব্যস্থল বিশিষ্ট সমতাপূর্ণ (balanced) পরিবহণ সমস্যার ক্ষেত্রে মৌল চলের (basic variables) সংখ্যা সর্বাধিক $m + n - 1$ হবে।

প্রমাণ : প্রতীকগুলির প্রচলিত অর্থে, পরিবহণ সমস্যাটিকে নিচের আকারে প্রকাশ করা যায় :

অবম $z = \sum_{i-1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \ x_{ij}$,

শর্তসাপেক্ষে $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = 1, 2, ...m)$ .... (1)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, (j = 1, 2, ...n); .... (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \; (i = 1, 2 ....m; \; j = 1, 2, ...n)$$

এখানে $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \; a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \; .... (3)$$

এখন (1) নং শর্তগুলি (constraints) থেকে আমরা পাই

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right] = \sum_{j=1}^{n} b_j \; .... (4)$$

এখন (3) ও (4) থেকে আমরা পাই

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n-1} b_j;$$

বা, $\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij}\right] = b_n$

বা, $\sum_{i=1}^{m} x_{in} = b_n$, নং শর্তগুলির n তম শর্ত।

তাহলে দেখা গেল যে (1) ও (2) এর মোট $(m + n)$ টি শর্তের মধ্যে একটি শর্ত বাদ দেওয়া যেতে পারে। সুতরাং (1) ও (2) দ্বারা নির্দেশিত সমীকরণ মণ্ডলীর যে কোন মৌল সমাধানে (basic solution) মৌল চলের সংখ্যা সর্বাধিক $m + n - 1$ হবে।

উপপাদ্য 2 যে কোন সমতাপূর্ণ পরিবহণ সমস্যার সর্বদা কার্যকর সমাধান (feasible solution) পাওয়া যাবে।

প্রমাণ : প্রতীকগুলির প্রচলিত অর্থে, m সংখ্যক উৎস এবং n সংখ্যক গন্তব্যস্থল বিশিষ্ট পরিবহণ সমস্যার $(m+n)$ সংখ্যক শর্তগুলি ধরা যায়,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = 1, \; 2, ...m) \; ....(1)$$

এবং $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ (j = 1, \ 2, \dots\dots\dots n) \dots\dots\dots\dots (2)$$

এখানে $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = S$$ (মনে করুন)

যেহেতু $a_i > 0$, $b_j > 0$ (i=1, 2, ... m; j=1, 2, ... n), S অবশ্যই ধনাত্মক হবে।

এখন আমরা প্রমাণ করব যে $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{S}$ (i=1, 2 .... m, j=1, 2, ... n) পরিবহণ সমস্যাটির একটি কার্যকর সমাধান হবে। আমরা লক্ষ্য করছি যে i, j এর সকল মানের জন্য $x_{ij} > 0$।

আবার $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{S}$ ধরে আমরা পাই

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{S} = \frac{a_i}{S} \sum_{i=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{S} S = a_i, \ (i = 1, \ 2, \dots\dots\dots\dots n).$$

এবং $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{S}$$

$$= \frac{b_j}{S} \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$= \frac{b_j}{S} . S = b_j, \ (j = 1, \ 2, \dots\dots\dots n)$$

সুতরাং i, j এর সকল মানের জন্য $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{S}$ ধরলে পরিবহণ সমস্যার (1) নং ও (2) নং এর সবগুলি শর্ত সিদ্ধ হয় এবং $x_{ij} > 0$ (i = 1, 2, ... m; j=1, 2, ... n).৫

অতএব পরিবহণ সমস্যাটর কার্যকর সমাধান পাওয়া গেল।

উপপাদ্য 3 যে কোন পরিবহণ সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান কখনই অবাধ (un bounded) হবে না এবং যে কোন কার্যকর সমাধানে কোন চলের মান যদৃচ্ছভাবে বাড়ানো (arbitrarily large) যাবে না।

প্রমাণ : মনে করুন পরিবহণ সমস্যাটি হল

অবম $$z = \sum_{i-1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \ x_{ij},$$

শর্তসাপেক্ষে $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ (i = 1, 2, \dots\dots\dots m).$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, ... n).$$

$x_{ij} \geq 0$ (i = 1, 2, ... m; j = 1, 2, ... n).

এখানে আমরা লক্ষ্য করছি য়ে কোন কার্যকর সমাধান [x_{11}, x_{12},.............x_{ij},.......... x_{mn}] এর

জন্য $x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ ($\because$ x_{ij} 0, i, j-এর সকল মানের জন্য)

(i =1, 2, ... m)

এবং $x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, ($j$ = 1, 2, ... n).

সুতরাং i, j এর সকল মানের জন্য আমরা পাই

$0 \leq x_{ij} \leq m\ a\ x$ {a_1, a_2, ... a_m; b_1, b_2, ... b_n} .... (1)

আবার এখানে $c_{ij} \geq 0$ (i, j এর সকল মানের জন্য)।

তাহলে, যে কোন কার্যকর সমাধানের জন্য $z \geq 0$ হবে।

এখন পরিবহণ সমস্যাটি অবম মান নির্ণয় সংক্রান্ত L.P.P. হওয়ায় এবং যে কোন কার্যকর সমাধানের জন্য বিষয়াত্মক অপেক্ষক z এর মান ≥ 0 হওয়ায় z এর মান কখনই অবাধ (un bounded) হবে না।

আবার (1) থেকে আমরা বলতে পারি যে কোন x_{ij} এর মান যদৃচ্ছভাবে বাড়ানো যাবে না। অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

মন্তব্য : যেহেতু যে কোন সমতাপূর্ণ পরিবহণ সমস্যার কার্যকর সমাধান থাকে এবং এরূপ সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান কখনই অবাধ হতে পারে না সুতরাং **যে কোন সমতাপূর্ণ পরিবহণ সমস্যার চরম সমাধান** (optimal solution) পাওয়া যাবে।

এখন পরিবহণ সমস্যার কয়েকটি বিশেষ বৈশিষ্ট্য থাকার জন্য পরবর্তী এককে আমরা দেখবো যে **সাধারণ** L.P.P.-**র মত** simplex **পদ্ধতি ব্যবহার না করে অন্য বিশেষ পদ্ধতিতে পরিবহণ সমস্যা সমাধান করা সম্ভব।**

11.4 Loop এর ধারণা এবং পরিবহণ সমস্যার সমাধানে এর প্রয়োগ

m সংখ্যক উৎসস্থল এবং n সংখ্যক গন্তব্য'ল বিশিষ্ট পরিবহণ সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান,

$[x_{11}, x_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots x_{ij}, \ldots\ldots\ldots\ldots x_{mn}]$কে নিচের ছকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

	D_1	D_1	....	D_n
O_1	x_{11}	x_{12}	....	x_{1n}
O_2	x_{21}	x_{22}	....	x_{2n}
.	....	....	....	....
.	....	....	....	....
O_m	x_{m1}	x_{m2}	....	x_{mn}

.... (1)

এখানে প্রতিটি চলকে একটি box এর মধ্যে দেখানো হয়েছে। মেটি mn সংখ্যক চলকে mn সংখ্যক box এর মধ্যে দেখানে হয়েছে। x_{ij} চলটি i তম সারি এবং j তম স্তম্ভের box এর মধ্যে আছে এবং এই box টিকে আমরা (i, j) cell বলবো।

আমরা লক্ষ্য করছি যে যদি $m = 3$, $n = 2$ হয় তাহলে মোট 6টি চল এবং 6টি cell থাকবে এবং চলগুলি হল $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}$, ও অনুরূপ cell গুলি হল (1, 1), (1, 2), (2 1), (2 2), (3, 1), (3, 2) [যা নিচের ছকে দেখানো হয়েছে]।

	D_1	D_2
O_1	x_{11}	x_{12}
O_2	x_{21}	x_{22}
O_3	x_{31}	x_{32}

আমরা আগেই উল্লেখ করেছি যে (1) নং ছকের অনুরূপ ছকে পরিবহণ খরচ $c_{11}, c_{12}, \ldots\ldots\ldots c_{ij}, \ldots\ldots\ldots\ldots c_{mn}$ কে দেখানো হয় এবং এরূপ ছককে পরিবহণ ছক (transportation table) বলে। এখানে (i, j) cell এর মধ্যে c_{ij} দেখানো হয়।

লুপ (Loop) : পরিবহণ ছকে সমীম সংখ্যক cell এর অনুক্রমকে (sequence) লুপ বলা হয় যদি—

(i) যে কোন দুটি সন্নিহিত (adjacent) cell পরিবহণ ছকের স্তম্ভে বা একই সারিতে থাকে।

(ii) অনুক্রমের পরপর (consecutive) দুটির বেশি cell একই সারি বা একই স্তম্ভে থাকে না।

(iii) অনুক্রমের প্রথম এবং শেষ cell একই সারি বা একই স্তম্ভে থাকে।

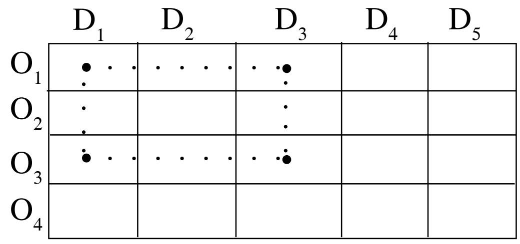
(iv) অনুক্রমে পরিবহণ ছকের কমপক্ষে দুটি সারি বা দুটি স্তম্ভ ব্যবহার করতে হবে।

নিচের পরিবহণ ছকের ক্ষেত্রে চিত্রের সাহায্যে কয়েকটি লুপ দেখানো হল :

[লুপ এর cell গুলি ‘·’ এর সাহায্যে বোঝানো হয়েছে।]

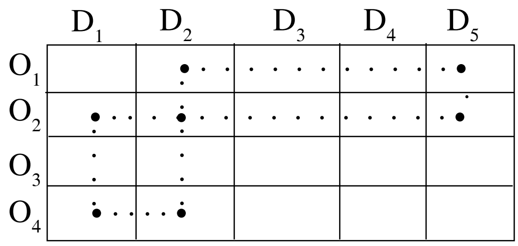
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
O_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}
O_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}
O_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}

(a)



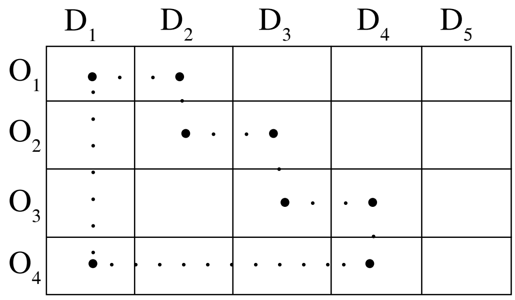
এখানে loop এর cell গুলি হল (1, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 1)।

(b)



এখানে loop এর cell গুলি হল (1, 2), (1, 5), (2, 5), (2, 1), (4, 1), (4, 2)।

(c)



এখানে cell গুলি হল (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3) (3, 4), (4, 4), (4, 1)।

আমরা লক্ষ্য করঠি যে কোন লুপে cell এর সংখ্যা অবশ্যই জোড় সংখ্যা (even number) হবে এবং কমপক্ষে 4টি cell থাকবে।

পরিবহণ সমস্যায় লুপের ব্যবহার

আমরা দেখেছি যে পরিবহণ সমস্যা বিশেষ আকারের L.P.P। আমরা আরও দেখেছি যে m সংখ্যক উৎসস্থল ও n সংখ্যক গন্তব্যস্থল বিশিষ্ট পরিবহণ সমস্যার ক্ষেত্রে মোট mn সংখ্যক চলের মধ্যে মৌল চলের (basic variables) সংখ্যা সর্বাধিক $m + n - 1$ হবে।

এখন আমরা A $\bar{x} = \bar{b}$ জানি যে দ্বারা নির্দেশিত সমীকরণমণ্ডলীর কোন মৌল সমাধানের (basic solution) ক্ষেত্রে, সহগ ম্যাট্রিক্স A-তে মৌল চলগুলির স্তম্ভ ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন (linearly independent) হবে।

পরিবহণ সমস্যার সমাধানের ক্ষেত্রে সহগ ম্যাট্রিক্সের প্রদত্ত কয়েকটি স্তম্ভ ভেক্টর রৈখিকভাবে স্বাধীন হবে কি না তা লুপের ব্যবহারের সহজে বলা যাবে এবং এর জন্য নিচের উপপাদ্যটি (যা প্রমাণ ছাড়া বিবৃত করা হয়েছে) প্রয়োগ করতে হবে।

উপপাদ্য : পরিবহণ সমস্যার সহগ ম্যাট্রিক্সের প্রদত্ত যে কোন সংখ্যক স্তম্ভ ভেক্টর রৈখিকভাবে নির্ভরশীল (linearly dependent) হবে **যদি এবং কেবলমাত্র যদি পরিবহণ ছকে এই ভেক্টরগুলির অনুরূপ cell গুলির সবগুলি বা কয়েকটি লুপ তৈরী করে।**

11.5 উদাহরণ

নিচের পরিবহণ সমস্যাটি বিবেচনা করা যাক :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2	4	6	1	40
O_2	3	4	2	3	30
O_3	5	2	7	1	50
b_j	35	35	25	25	

এই সমস্যাটির দুটি কার্যকর সমাধান (ছকের সাহায্যে) নিচে দেওয়া হল :

(i)

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20	10	10		40
O_2		15	15		30
O_3	15	10		25	50
b_j					

(ii)

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	35	5			40
O_2		30			30
O_3			25	25	50
b_j	35	35	25	25	

প্রথমে আমরা বলে রাখি যে ছকের সাহায্যে পরিবহণ সমস্যার কোন সমাধান প্রকাশ করলে আমরা ধরে নেব যে কোন empty cell এর চলের মান 0 হবে এবং সমাধান লেখার সময় এই চলগুলির (যাদের মান 0 উল্লেখ করা হবে না।

তাহলে (1) নং ছকে প্রদত্ত কার্যকর সমাধানটি হল :

$x_{11} = 20$, $x_{12} = 10$, $x_{13} = 10$, $x_{22} = 15$, $x_{23} = 15$, $x_{31} = 15$, $x_{32} = 10$, $x_{33} = 25$.

এখানে $m = 3$, $n = 4$ সুতরাং মৌল চলের সংখ্যা সর্বাধিক $4 + 3 - 1 = 6$ হবে। তাহলে এই সমস্যার ক্ষেত্রে যে কোন মৌল সমাধানে (এখানে মোট চলের সংখ্যা 12) কমপক্ষে $12 - 6$ অর্থাৎ 6টি চলের মান 0 হবে। উপরের কার্যকর সমাধানটিতে মাত্র 4টি চলের মান 0। সুতরাং এই সমাধানটি মৌল সমাধান নয়। সুতরাং এখানে যে চলগুলির মান ধনাত্মক সেই চলগুলির অনুরূপ cell গুলির সবকটি বা কয়েকটি নিয়ে লুপ করা যাবে। এখানে (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3) cell গুলি লুপ তৈরী করেছে।

এখন (ii) নং ছকে প্রদত্ত সমাধানটি হল $x_{11}= 35$, $x_{12} = 5$, $x_{22} = 30$, $x_{33} = 25$, $x_{34} = 25$ যেখানে বাকী 7টি চলের মান 0, এখানে আমরা লক্ষ্য করছি যে ধনাত্মক মান বিশিষ্ট চলদের cell গুলি হল (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 4) এবং cell গুলির সবগুলি বা কয়েকটি নিয়ে কোন লুপ করা যায় না। আরও লক্ষ্য করছি যে এই cell গুলির সঙ্গে একটি অতিরিক্ত cell, যেমন (1, 3) cell [এখানে $x_{13}= 0$] নিয়ে যে 6টি cell পাওয়া যায় তাদের নিয়েও (সবগুলি বা কয়েকটি) লুপ করা যায় না। আমরা আগেই বলেছি যে এখানে মৌল চলের সংখ্যা সর্বাধিক 6 হবে। তাহলে (ii) নং ছকে প্রদত্ত সমাধানটি একটি মৌল কার্যকর সমাধান যেখানে মৌল চলের সংখ্যা 6 এবং একটি মৌল চলের মান 0। সুতরাং এই কার্যকর সমাধানটি একটি **degenerate মৌল কার্যকর সমাধান** (basic feasible solution) হবে।

যে কোন মৌল কার্যকর সমাধানের ক্ষেত্রে, মৌল চলদের (যাদের মান > 0) cell গুলিকে আমরা **basic cell** বা **occupied cell** বলব এবং অন্য চলদের cell গুলিকে **unoccupied cell** বলব।

11.6 সারাংশ

এই এককে প্রথমে পরিবহণ সমস্যাকে আমরা বিশেষ আকারের L.P.P. হিসাবে বর্ণনা করেছি এবং তারপর প্রমাণ করেছি যে কোন সমতাপূর্ণ (balanced) পরিবহণ সমস্যার চরম সমাধান (optimal solution) পাওয়া যাবে।

সবশেষে পরিবহণ ছকের কয়েকটি cell এর লুপ তৈরী করতে পারার সঙ্গে সহগ ম্যাট্রিক্সের অনুরূপ স্তম্ভ ভেক্টরদের রৈখিকভাবে নির্ভর (linearly dependent) হওয়ার সম্বন্ধটি আমরা একটি উপপাদ্যের সাহায্যে বিবৃত করেছি।

11.7 অনুশীলনী

1. নিচের প্রত্যেক পরিবহণ সমস্যাকে L.P.P হিসাবে লিখুন :

(i)

	D_1	D_2	a_i
O_1	2	1	10
O_2	3	4	12
b_j	8	14	

(ii)

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2	1	3	2	30
O_2	3	1	0	4	50
O_3	5	3	2	4	20
b_j	20	40	30	10	

2. 1-এর (ii) নং পরিবহণ সমস্যার ক্ষেত্রে নিচের ছকে বিবৃত সমাধানটি মৌল কার্যকর সমাধান কি না পরীক্ষা করুন। এই সমাধানটি কি non-degeneratere?

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20	10			30
O_2		30	20		50
O_3			10	10	20
b_j	20	40	30	10	

3. 1 (i) রে সহগ ম্যাট্রিক্সটি লিখুন এবং দেখান যে হৈ ম্যাট্রিক্সটির rank হবে 2 + 2 – 1 অর্থাৎ 3।

11.8 উত্তরমালা

1\. (i) অবম $z = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{21} + 4x_{22}$,

শর্তসাপেক্ষে, $x_{11} + x_{12} = 10$

$x_{21} + x_{22} = 12$

$x_{11} + x_{21} = 8$

$x_{12} + x_{22} = 14$

$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0$

2\. (ii) অবম $z = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14}$

$+ 3x_{21} + x_{22} + 4x_{24}$

$+ 5x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + 8x_{32}$

শর্তসাপেক্ষে, $x_{11} + x_{12} + x_{13} + 2x_{14} = 30,$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50,$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20,$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20,$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40,$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30,$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10,$

$x_{ij} + 0, (i = 1 , 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$

2\. Non-degenerate মৌল কার্যকর সমাধান :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

একক 12 ❑ পরিবহণ মডেলে বিভিন্ন পদ্ধতির প্রয়োগ [Application of Different Methods in Transportation Model]

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

একক 11-তে আমরা পরিবহন সমস্যাকে বিশেষ আকারের L.P.P. হিসাবে প্রকাশ করেছি এবং প্রমাণ করেছি যে কোন সমতাপূর্ণ পরিবহন সমস্যার চরম সমাধান (optimal solution) পাওয়া যাবে। এখন L.P.P.-এর মৌল উপপাদ্য (Fundamental Theorem) থেকে আমরা জানি যে কোন L.P.P.-র চরম সমাধান পাওয়া গেলে অন্তত একটি চরম সমাধান মৌল কার্যকর সমাধান হবে।

কোন পরিবহন সমস্যা সমাধান করতে বললে সমস্যাটির যে কোন চরম সমাধান (optimal solution) এবং ন্যূনতম পরিবহন খরচের মান নির্ণয় করতে হবে। এর জন্য এখানে আমরা যে কোন একটি পদ্ধতিতে (পরবর্তী অনুচ্ছেদে প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি বলা হয়েছে) সমস্যাটির একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করব। এর পর মৌল কার্যকর সমাধানটি চরম সমাধান হবে কিনা তা পরীক্ষা করে দেখা হবে। যদি প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধানটি চরম সমাধান না হয় তাহলে বিশেষ পদ্ধতিতে

(যা 12·4 অনুচ্ছেদ বলা হয়েছে) সমস্যারি অন্য একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করা হবে যেখানে দ্বিতীয় মৌল কার্যকর সমাধানের জন্য মোট পরিবহন খরচের মান প্রারম্ভিক সমাধানের জন্য মোট পরিবহন খরচের মানের চেয়ে কম হবে। এইভাবে আমরা একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করতে পারব যে সমাধানের জন্য মোট পরিবহন খরচ সবচেয়ে কম হবে। যদি সমস্যাটি সমতাপূর্ণ না হয় তাহলে সমস্যাটিকে সমতাপূর্ণ সমস্যায় রূপান্তর করে সমাধান করা যায় (অনুচ্ছেদ 12·6 দেখুন)।

12.2 সমতাপূর্ণ পরিবহন সমস্যার প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান (Initial basic feasible solution) নির্ণয়ের কয়েকটি পদ্ধতি

(a) North-West corner পদ্ধতি :

এই পদ্ধতিতে পরিবহন ছকের বামদিকের (West-এর) সর্বাপেক্ষা উপরের cell-এ অর্থাৎ North position-এর cell এ অর্থাৎ (1, 1) Cell-এ চাহিদা অনুসারে জিনিস প্রদান (allocate) করতে হবে। যদি উৎসের (origin) ক্ষমতা গন্তব্যস্থলের (Destination) চাহিদার থেকে বেশি হয়, তাহলে তার ঠিক ডান দিকের cell-এ অর্থাৎ (1, 2) cell-এ চাহিদা ও যোগানের অনুসারে জিনিস প্রদান করতে হবে। আবার গন্তব্যস্থলের চাহিদা যদি উৎসের ক্ষমতার থেকে বেশি হয় তাহলে (1, 1) cell-এর ঠিক নিচের cell অর্থাৎ (2, 1) cell-এ চাহিদা ও যোগানের অনুসারে জিনিস প্রদান করতে হবে। এই পদ্ধতি প্রয়োগ করে যখন গন্তব্যস্থলগুলির চাহিদা মেটানো সম্পূর্ণ হয়, তখন প্রারম্ভিক সমাধানটি পাওয়া যাবে।

একটি উদাহরণের সাহায্যে পদ্ধতিটি বোঝানো হচ্ছে :

নিচের পরিবহন সমস্যাটির একটি প্রারম্ভিক কার্য্যকর সমাধান নির্ণয় করতে হবে।

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	5	3	6	4	30
O_2	3	4	7	8	15
O_3	9	6	5	8	15
b_j	10	25	18	7	

এখানে, $\sum a_i = 30 + 15 + 15 = 60$

$\sum b_j = 10 + 25 + 18 = 60$

$\therefore \sum a_i = \sum b_j$

$\therefore$ পরিবহণ-সমস্যাটি সমতাপূর্ণ (balanced)।

পরিবহণ ছকটির বামদিকের সবথেকে উপরের position অর্থাৎ (1, 1) cell-এ x_{12} = min (10,30)=10 পরিমাণ জিনিষ প্রদান (allocate) করা হল।

D_1 গন্তব্যস্থলের চাহিদা ছিল 10টি জিনিষ। এই পরিমাণ জিনিষ D_1 এ পৌঁছানোর ফলে D_1 এর আর কোন চাহিদা থাকছে না। D_1 উৎসে (orgin) আরও 20টি জিনিষ যোগান দেওয়ার ক্ষমতা আছে।

আমরা ঠিক তার ডানদিকের পাশের cell (1, 2) cell-এ x_{12} = min (30-10-25) = min (20, 25) = 20 প্রদান করব। এখন দেখা যাচ্ছে O_1 উৎসের আর কোন যোগান দেওয়ার ক্ষমতা নেই। কিন্তু D_1 গন্তব্যস্থলের চাহিদা পুরোপুরি মেটেনি। সুতরাং (1, 2) cell-এর ঠিক নিচে অর্থাৎ (2, 2) cell-এ x_{22} = min (5, 15) = 5 প্রদান করা হবে। Q_1 উৎসের এখনও দেওয়ার ক্ষমতা থাকল 10। (2, 2) cell-এর ঠিক ডানদিকে অর্থাৎ (2, 3) cell-এ x_{23} = min (10, 18) = 10 প্রদান করা হল। O_2 উৎসে আর কোনও জিনিষ অবশিষ্ট নেই। (2, 3) cell-এর ঠিক নিচের cell অর্থাৎ (3, 3) cell-এ min (8, 15) = 8 প্রদান করা হল (7, 7) = 7 প্রদান করা হল। কোন উৎসেই আর কোন অবশিষ্ট জিনিষ থাকল না এবং সমস্ত গন্তব্যস্থলের চাহিদা মিটে গেছে। সুতরাং সমস্যাটির একটি প্রারম্ভিক সমাধান পাওয়া গেছে।

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	$\boxed{10}$ 5	$\boxed{20}$ 3	6	4	~~30~~ ~~20~~
O_2	3	$\boxed{5}$ 4	$\boxed{10}$ 7	8	~~15~~ ~~10~~
O_3	9	6	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{7}$ 8	~~15~~ ~~7~~
	~~10~~	~~15~~ ~~5~~	~~18~~ ~~8~~	~~7~~	

সমাধানিটি হল : $x_{11} = 10,\ x_{12} = 20,\ x_{22} = 5,\ x_{23} = 10,\ x_{33} = 8,\ x_{34} = 7$

এবং এক্ষেত্রে পরিবহণ খরচ $= 10 \times 5 + 20 \times 3 + 5 \times 4 + 10 \times 7 + 8 \times 5 + 7 \times 8$

$= 50 + 60 + 20 + 70 + 40 + 56 = 256$ একক।

সমাধানটি নিটের ছকে দেখানো হল :

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	$\boxed{10}$ 5	$\boxed{20}$ 3	6	4	30
O_2	3	$\boxed{5}$ 4	$\boxed{10}$ 7	8	15
O_3	9	6	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{7}$ 8	15
	10	15	18	7	

সমাধানিটি হল : $x_{11} = 10,\ x_{12} = 20,\ x_{22} = 5,\ x_{23} = 10,\ x_{33} = 8,\ x_{34} = 7$

এবং এক্ষেত্রে পরিবহণ খরচ $= 10 \times 5 + 20 \times 3 + 5 \times 4 + 10 \times 7 + 8 \times 5 + 7 \times 8$

$= 50 + 60 + 20 + 70 + 40 + 56 = 256$ একক।

এই সমাধানের যে যে cell-এ জিনিষ প্রদান করা হয়েছে সেগুলো বা তার কোন সাব-সেট্ (subset কোন লুপ (loop) তৈরি করছে না। সুতরাং এই সমাধানটি একটি মৌল কার্যকর সমাধান হবে।

(b) Matrix Minima Method :

এই পদ্ধতিতে পরিবহণ ছকের যে cell-এ পরিবহণ খরচ (cost) সবথেকে কম সেই cell-এ জিনিষ প্রদান করতে হবে। যদি একাধিক cell-এ min cost থাকে যে কোন cell-ই গ্রহণ করা যেতে পারে।

উদাহরণের সাহায্যে পদ্ধতিটি বোঝানো হল :

নিচের পরিবহণ সমস্যাটির প্রারম্ভিক কার্যকর সমাধান নির্ণয় করতে হবে।

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	1	2	1	4	30
O_2	3	3	2	1	50
O_3	4	2	5	9	20
b_j	20	40	30	10	

সমাধান : এখানে, $\sum a_i = 30 + 50 + 20 = 100$

$\sum b_j = 20 + 40 + 30 = 100$

$\therefore \ \sum a_i = \sum b_j$

$\therefore$ পরিবহণ সমস্যাটি সমতাপূর্ণ (balanced)।

পরিবহণ ছকে min খরচ হচ্ছে 1, যা (1, 1), (1, 3) এবং (2, 4) cell-এ বিদ্যমান। আমরা এদের মধ্যে যে কোন একটি cell-কে বেছে নিই। (1, 1) cell-এ x_{11} = min (20, 30) = 20 প্রদান করি। D_1 গন্তব্যস্থলের চাহিদা ঘটেযাওয়ায় D_1 অর্থাৎ প্রথম স্তম্ভকে ম্যাট্রিক্স থেকে বাদ দিয়ে দেওয়া হল। নিচের ছকটি পাওয়া গেল।

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	$\boxed{20}$ 1	2	1	4	$\cancel{30}$ 10
O_2	3	3	2	1	50
O_3	4	2	5	9	20
	20	40	30	10	

	D_2	D_3	D_4	
O_1	2	$\boxed{10}$ 1	4	$\cancel{10}$
O_2	3	2	1	50
O_3	2	5	9	20
	40	$\cancel{30}$ 20	10	

এই ম্যাট্রিক্সে (1, 2) cell-এ x_{12} = min (30, 10) প্রদান করা হল। O_1 উৎসে আর কোন জিনিষ অবশিষ্ট থাকল না। O_2-কে অর্থাৎ প্রথম সারিকে বাদ দিয়ে দেওয়া হল।

নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া গেল।

	D_2	D_3	D_4	
O_2	3	2	$\boxed{10}$ 1	~~40~~
O_3	2	5	9	20
	40	20	~~10~~	

উপরের পদ্ধতি আবার প্রয়োগ করা হল :

	D_2	D_3	
O_2	3	$\boxed{20}$ 2	~~40~~ 20
O_3	2	5	20
	40	~~20~~	

	D_2	
O_2	$\boxed{20}$ 30	20
O_3	$\boxed{20}$ 2	20
	40	

সমাধানটি পাশের ছকে দেখানো হল।

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	$\boxed{20}$ 1	2	$\boxed{10}$ 1	4	30
O_2	3	$\boxed{20}$ 3	$\boxed{20}$ 2	$\boxed{10}$ 1	15
O_3	4	$\boxed{2}$ 2	5	9	15
	20	40	30	10	

সমাধানটি হল : $x_{11} = 20,\ x_{13} = 10,\ x_{22} = 20,\ x_{23} = 20,\ x_{24} = 10,\ x_{32} = 20$

এবং এক্ষেত্রে পরিবহণ খরচ $= 20 \times 1 + 10 \times 1 + 20 \times 3 + 20 \times 2 + 10 \times 1 + 20 \times 2$

$= 20 + 10 + 60 + 40 + 10 + 40 = 100$ একক।

এই সমাধানের যে যে cell-এ জিনিষ প্রদান করা হয়েছে সেগুলো বা তার কোন সাব-সেট্ (subset) কোন লুপ (loop) তৈরি করছে না। সুতরাং এই সমাধানটি একটি প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান হবে।

(c) Vogel's Approximation Method (VAM) :

এই পদ্ধতিতে পরিবহণ ছকের প্রতিটি সারির সবথেকে কম খরচ ও তার পরবর্তী খরচের বিয়োগফল বের করে প্রতিটি সরির (row) পাশে (এর মধ্যে) লিখতে হবে। অনুরূপভাবে প্রতিটি স্তম্ভ (column) এর সবথেকে কম খরচ ও তার পরবর্তী খরচের বিয়োগফল বের করে প্রতিটি স্তম্ভের নিচে ( ) এর মধ্যে লিখতে হবে। এই বিয়োগফল (penalty) গুলির মধ্যে সবথেকে বড় penalty টি যে সারি বা স্তম্ভে আছে সেই সারি বা স্তম্ভের সবথেখে কম খরচ (min cost) যে cell-এ আছে। সেই cell-এ জিনিষ প্রদান করতে হবে।

উদাহরণের সাহায্যে পদ্ধতিটি বোঝানো হল :

নিচের পরিবহণ সমস্যাটির প্রারম্ভিক কার্য্যকর সমাধান নির্ণয় করতে হবে।

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2	3	11	7	6
O_2	1	2	6	1	1
O_3	5	8	15	9	10
b_j	7	5	3	2	

সমাধান : এখানে, $\sum a_i = 6 + 1 + 10 = 17$

$$\sum b_j = 7 + 5 + 3 + 2 = 17$$

$$\therefore \quad \sum a_i = \sum b_j$$

$\therefore$ পরিবহণ সমস্যাটি সমতাপূর্ণ (balanced)।

প্রতিটি সারির সবথেকে কম খরচ ও তার পরবর্তী খরচের বিয়োগফল বের করে প্রতিটি সারির পাশে লেখা হল। আবার প্রতিটি স্তম্ভের সবথেকে কম খরচ এবং পরবর্তী খরচের বিয়োগফল বের করে প্রতিটি স্তম্ভের নিচে লেখা হল। এই বিয়োগফলগুলির মধ্যে বৃহত্তম হল 6 এবং ইহা চতুর্থ স্তম্ভে অবস্থিত। এই চতুর্থ স্তম্ভে min cost = 1 যা, (2, 4) cell-এ আছে। (2, 4) cell-এ $x_{24} = \min(2, 1) = 1$ প্রদান করা হল। O_2 উৎসে আর কোন জিনিস অবশিষ্ট না থাকায় দ্বিতীয় সারিটি বাদ দেওয়া হল।

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	
O_1	2	3	11	7	6	(1)
O_2	~~1~~	~~2~~	~~6~~	$\boxed{1}$ ~~1~~	~~1~~	(0)
O_3	5	8	15	9	10	(4)
b_j	7	5	3	~~2~~ 1		
	(1)	(1)	(5)	(6)		

নিচের ছকটি পাওয়া গেল :

	D_1	D_2	D_3	D_4		
O_2	2	$\boxed{5}$ 3	11	7	~~6~~ 1	(1)
O_3	5	8	15	9	10	(3)
	7	~~5~~	3	1		
	(3)	(5)	(4)	(2)		

বৃহত্তম বিয়োগফলটি দ্বিতীয় স্তম্ভে অবস্থিত। দ্বিতীয় স্তম্ভে min cost = 3। (1, 2) cell-এ min (5, 6) = 5 প্রদান করা হল। D_2 এর সমস্ত চাহিদা মিটে গেছে।

	D_1	D_3	D_4	
O_1	$\boxed{1}$ 2	11	7	~~1~~ (5)
O_3	5	15	9	10 (4)
	~~7~~ 6 (3)	3 (4)	1 (2)	

	D_1	D_3	D_4	
O_3	$\boxed{1}$ 5	$\boxed{5}$ 15	$\boxed{1}$ 9	10
	6	3	1	

সমাধানটি নিচের ছকে দেখানো হল :

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{5}$ 3	11	7	6
O_2	1	2	6	$\boxed{1}$ 1	1
O_3	$\boxed{6}$ 5	8	$\boxed{3}$ 15	$\boxed{1}$ 9	10
	7	5	3	2	

সমাধানটি হল : $x_{11} = 1, x_{12} = 5, x_{24} = 1, x_{31} = 6, x_{33} = 3, x_{34} = 1$

এবং এক্ষেত্রে পরিবহণ খরচ $= 1 \times 2 + 5 \times 3 + 1 \times 1 + 6 \times 5 + 3 \times 15 + 1 \times 9$

$= 2 + 15 + 1 + 30 + 45 + 9 = 102$ একক।

এই সমাধানের যে যে cell-এ জিনিষ প্রদান করা হয়েছে সেগুলো বা তার কোন সাব-সেট (subset) কোন লুপ (loop) তৈরি করছে না। সুতরাং এই সমাধানটি একটি মৌল কার্যকর সমাধান হবে।

(d) Row-minima পদ্ধতি :

এই পদ্ধতিতে প্রথম সারিতে সব থেকে কম পরিবহণ খরচ যে cell-এ আছে তা বেছে নিতে হবে। তারপর ঐ cell-এ যত বেশি সম্ভব জিনিষ প্রদান করতে হবে। যদি একাধিক cell-এ min cost থাকে তাহলে যে কোন cell-ই নেওয়া যেতে পারে।

উদাহরণের সাহায্যে পদ্ধতিটি বোঝানো হল :

নিচের পরিবহণ সমস্যাটির প্রারম্ভিক কার্যকর সমাধান নির্ণয় করতে হবে।

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	23	27	$\boxed{25}$ 16	$\boxed{5}$ 18	~~30~~ ~~5~~
O_2	$\boxed{16}$ 12	$\boxed{18}$ 17	20	51	~~40~~ ~~18~~
O_3	22	$\boxed{17}$ 28	12	$\boxed{36}$ 32	~~53~~ ~~36~~
b_j	~~22~~	~~35~~ ~~17~~	25	~~41~~ ~~36~~	

সমাধান : এখানে, $\sum a_i = 30 + 40 + 53 = 123$

$$\sum b_j = 22 + 35 + 25 + 41 = 123$$

$$\therefore \quad \sum a_i = \sum b_j$$

$\therefore$ পরিবহণ সমস্যাটি সমতাপূর্ণ (balanced)।

প্রথম সারিতে (row) সব থেকে কম খরচ 16 যা (1, 3) cell-এ অবস্থিত। a(1, 3) cell-এ x_{13} = min (25, 30) = 25 প্রদান করা হল। D_3 গন্তব্যস্থলের চাহিদা মিটে যাওয়ায় D_3 অর্থাৎ তৃতীয় স্তম্ভকে ম্যাট্রিক্স থেকে বাদ দেওয়া হল। O_1 উৎসে এখন 5টি জিনিষ পড়ে রাইল। আবার প্রথম সারিতে তার পরের ক্ষুদ্রতম খরচ 18 যা (1, 4) cell-এ অবস্থিত। (1, 4) cell-এ x_{14} = min (41, 4) = 5 প্রদান করা হল। O_1 উৎসের আর কোন জিনিস অবশিষ্ট থাকছে না। O_1 উৎসকে বাদ দেওয়া হল। এখন, দ্বিতীয় সারিতে সবথেকে কম খরচ (2, 1) cell-এ, (2, 1_ cell-এ x_{21} = min (22, 40) = 22 প্রদান করা হল। D_1 গন্তব্য স্থলের চাহিদা পুরোপুরি মিটে যাওয়ায় প্রথম স্তম্ভটি বাদ দেওয়া হল। দ্বিতীয় সারিতে এখন ক্ষুদ্রতম খরচ (2, 2) cell-এ, (2, 2) cell-এ x_{22} = min (35, 18) = 18 প্রদান করা হল। O_2 উৎসের আর কোন জিনিষ দেওয়ার ক্ষমতা নেই। সেজন্য দ্বিতীয় সারি বাদ দেওয়া হল। তৃতীয় সারিতে ক্ষুদ্রতম খরচ (3, 2) cell, (3, 2) cell-এ x_{32} = min (17, 53) = 17 প্রদান করা হল। D_2 গন্তব্যস্থলের সমস্ত চাহিদা মিটে গেছে। সুতরাং দ্বিতীয় স্তম্ভটি বাদ দেওয়া হল। এখন অবশিষ্ট স্থান (3, 4) cell-এ min (36, 36) প্রদান করা হল। কোন উৎসেই আর কোন অবশিষ্ট জিনিস থাকল না বরং সমস্ত গন্তব্যস্থলের চাহিদা মিটে গেছে। সুতরাং সমস্যাটির একটি প্রারম্ভিক সমাধান পাওয়া গেছে।

সমাধানটি হল : $x_{13} = 25,\ x_{14} = 5,\ x_{21} = 2,\ x_{22} = 18,\ x_{32} = 17,\ x_{34} = 36$

এবং এক্ষেত্রে পরিবহণ খরচ $= 25 \times 16 + 18 \times 22 \times 12 + 18 + 17 \times 17 + 28 \times 36 \times 32$

$= 400 + 90 + 264 + 306 + 476 + 1125 = 2688$ একক।

এই সমাধানের যে যে cell-এ জিনিষ প্রদান করা হয়েছে সেগুলো বা তার কোন সাব-সেট (subset) কোন লুপ (loop) তৈরি করছে না। সুতরাং এই সমাধানটি একটি মৌল কার্যকর সমাধান হবে।

(f) Column-Minima Method :

এই পদ্ধতি ঠিক আগের পদ্ধতির অনুরূপ। কেবলমাত্র সারির জায়গায় স্তম্ভ ধরে আগের পদ্ধতিতে এগিয়ে গেলেই সমাধান পাওয়া যাবে।

12.3 কোন মৌল কার্যকর সমাধান চরম সমাধান হবে কিনা তার পরীক্ষা (Test for optimality of a basic feasible solution)

আমরা জানি যে m সংখ্যক উৎসস্থল ও n সংখ্যক গন্তব্যস্থল বিশিষ্ট পরিবহন সমস্যার ক্ষেত্রে মৌল চলের সংখ্যা সর্বাধিক $m + n - 1$ হবে। সুতরাং এক্ষেত্রে কোন মৌল কার্যকর সমাধান কে পরিবহণ ছকে দেখানো হলে সর্বাধিক $m + n - 1$ সংখ্যক occupied cell পাওয়া যাবে।

এখন নিচে একটি উপপাদ্য (প্রমাণ ছাড়া) বিবৃত করা হল যে উপপাদ্য কোন মৌল কার্যকর সমাধান **চরম সমাধান** (Optimal solution) **হবে কিনা তা পরীক্ষা করতে সাহায্য করবে।**

উপপাদ্য : যদি কোন মৌল কার্যকর সমাধানে মৌল চলের সংখ্যা $m + n - 1$ হয় (m, n প্রচলিত অর্থে ব্যবহার করা হয়েছে) এবং কোন মৌল চলের মান শূন্য না হয় অর্থাৎ যদি সমাধানটি non-degenerate হয় এবং যদি $(m + n)$ সংখ্যক সংখ্যা $u_i v_j$ $(i=1, 2 \ldots\ldots m; j=1, 2, \ldots\ldots n)$ নির্ণয় করা যায় যেখানে প্রত্যেক occupied cell (i, j) এর জন্য $c_{ij} = u_i + v_j$, তাহলে প্রত্যেক un occupied (i, j)-এ cell evaluation Δ_{ij} হবে $c_{ij} = (u_i + v_j)$ এবং মৌল কার্যকর সমাধানটি চরম সমাধান হবে (optimal solution) যদি পরিবহণ ছকের প্রত্যেক cell (i, j) এর জন্য $\Delta_{ij} \geq 0$ হয়। [c_{ij} হল i-তম উৎস স্থল থেকে j-তম গন্তব্য স্থলে পাঠানো commodity-র এক এককের পরিবহণ খরচ]

মন্তব্য :

1. যদি occupied cell-এর সংখ্যা $m + n - 1$ হয় তাহলে $c_{ij} = u_i + v_j$ [প্রতি occupied cell (i, j)-র জন্য থেকে $(m + n)$ অজ্ঞাত রাশি $u_1 = u_2 \ldots\ldots u_m$; $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$ কে নিয়ে $(m + n - 1)$ -টি সমীকরণ পাওয়া যায় এবং এক্ষেত্রে যে কোন একটি u_i বা v_j এর মান যদৃচ্ছভাবে (arbitraily) নিয়ে u_i $(i=1, 2 \ldots\ldots m)$ এবং v_j $(j=1, 2 \ldots\ldots n)$ এর মান নির্ণয় করা যাবে। সাধারণত যে সারি বা যে স্তম্ভে সবচেয়ে বেশী সংখ্যক cell-এ allocation দেওয়া হয়েছে এর পর corresponding u_i বা $v_j = 0$ ধরা হয়।

2. যদি প্রত্যেক unoccupied cell (i, j) এর জন্য $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) > 0$ হয় **তাহলে একটি মাত্র চরম সমাধান** (unique optimal solution) থাকবে। যদি প্রত্যেক unoccupied cell (i, j) এর জন্য $\Delta_{ij} \geq 0$ হয় এবং অন্তত একটি un occupied cell (i, j) এর জন্য $\Delta_{ij} = 0$ হয়।

তাহলে একাধিক চরম সমাধান পাওয়া যাবে অর্থাৎ এক্ষেত্রে চরম সমাধান unique হবে না।

3. যদি অন্তত একটি unoccupied cell এর ক্ষেত্রে $\Delta_{ij}<0$ হয় তাহলে corresponding মৌল কার্যকর সমাধানটি চরম সমাধান হবে না। এক্ষেত্রে চরম সমাধানের জন্য নিম্নলিখিত উপায়ে অন্য একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করতে হবে :

যে unoccupied cell (i, j) তে $\Delta_{ij}<0$ এবং $|\Delta_{ij}|$ সবচেয়ে বেশী, সেই cell-টিকে একটি basic cell রূপে ধরা হবে এবং এই cell-এ সবচেয়ে বেশী পরিমাণ (সমস্যার শর্ত মেনে যা সম্ভব) allocation করতে হবে ও পরিবর্তে আগের কোন basic cell (যা occupied cell ছিল) এর allocation এর পরিমাণ শূন্য করতে হবে। এর ফলে নতুন যে মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া যাবে তার জন্য মোট পরিবহণ খরচ আগের সমাধানের মোট পরিবহণ খরচের চেয়ে কম হবে।

এই নতুন সমাধানটি নিয়ে আবার optimality test করতে হবে।

যতি নতুনসমাধানটি চরম সমাধান হয় তাহলে পরিবহণ সমস্যাটির চরম সমাধান পাওয়া গেল। যদি নতুন সমাধানটি চরম সমাধান না হয় তাহলে পূর্বের নিয়ম অনুসরণ করে আর একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করতে হবে এবং এইভাবে শেষ পর্যন্ত পরিবহণ সমস্যাটির চরম সমাধান পাওয়া যাবে।

এই পদ্ধতিটি ভাল করে বোঝার জন্য (12.4) অনুচ্ছেদের উদাহরণের দেখুন।

4. যথারীতি প্রত্যেক **cell**-এ **allocation এর পরিমাণ** (শূন্য না হলে) **ঐ cell এর উপরের left এ hand corner ছোট square এর মধ্যে দেখানো হবে এবং ঐ cell এ প্রদত্ত পরিবহণ খরচকে cell এর নিচের right hand corner এ ছোট square এর মধ্যে দেখানো হবে।** প্রত্যেক unoccupied cell (i, j) এর জন্য $u_i + v_j$ এর মান **ছোট বৃত্তের মধ্যে display করা হবে।**

12.4 উদাহরণ

1. নিচের পরিবহণ সমস্যাটি সমাধান করুন :

					a_i
O_1	5	4	6	14	15
O_2	2	9	9	6	4
O_3	6	1	7	13	8
b_j	9	7	5	6	

সমাধান : প্রথমে **VAM**-এর সাহায্যে প্রদত্ত পরিবহণ সমস্যাটির একটি প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করা যাক :

[এখানে সমস্যাটি সমতাপূর্ণ (balanced) কারণ $\sum a_i = \sum b_j = 27$]

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	
O_1	5	4	6	14	15	(1)
O_2	2	9	9	$\boxed{4}$ 6	4	(4)
O_3	6	1	7	13	8	(1)
	9	7	5	~~6~~ 2		
	(3)	(5)	(2)	(7)		

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	
O_1	5	$\boxed{7}$ 4	6	14	~~15~~ 8	(1)
O_3	6	1	7	13	8	(1)
	9	7	5	2		
	(3)	(5)	(2)	(7)		

	D_1	D_3	D_4		
O_1	$\boxed{8}$ 5	6	14	~~8~~	(1)
O_3	6	7	13	8	(1)
	~~9~~	5	2		
	(1)	(1)	(1)		

	D_1	D_3	D_4	
O_3	$\boxed{1}$ 6	$\boxed{5}$ 7	$\boxed{2}$ 13	8
	1	5	2	

VAM-এর সাহায্যে পাওয়া সমাধানটি নিচের পরিবহণ ছকে দেখানে হল :

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{7}$ 4	6	14	30
O_2	2	9	9	$\boxed{4}$ 6	15
O_3	$\boxed{1}$ 6	11	$\boxed{5}$ 7	$\boxed{2}$ 13	15
	9	7	5	6	

মৌল কার্যকর সমাধানটি হল—

$x_{11} = 8,\ x_{12} = 7,\ x_{24} = 4,\ x_{31} = 1,\ x_{33} = 5,\ x_{34} = 2,$

এখানে মৌল চলের সংখ্যা = 3 + 4 – 1 = 6 এবং উপরের সমাধানে কোন মৌল চলের মান 0 নয় সুতরাং এই সমাধানটি একটি non-degenerate মৌল কার্যকর সমাধান।

Test for Optimality :

	D_1	D_2	D_3	D_4		u_i
	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{7}$ 4	6 6	12 14	15	– 1
	–1 2	–2 9	0 9	$\boxed{4}$ 6	4	– 7
	$\boxed{1}$ 6	7 11	$\boxed{5}$ 7	$\boxed{2}$ 13	8	0
	9	7	5	6		
v_j	6	5	7	13		

Table—1

আমরা জানি $u_i\ (i = 1,\ 2,\ 3),\ v_j\ \ (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ এই 7টি সংখ্যা $u_i + v_j = c_{ij}$ [প্রত্যেক occupied cell $(i,\ j)$ ধরে] থেকে যে 6টি সমীকরণ পাওয়া যায় সেগুলি সমাধান করে পাওয়া যাবে যেখানে $u_i\ (i = 1,\ 2,\ 3),\ v_j\ \ (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ এর মধ্যে একটি মান যদৃচ্ছভাবে ধরা যায়।

রীতি অনুযায়ী একানে আমরা $u_3 = 0$ ধরলাম (কারণ 3নং সারিতে সবচেয়ে বেশীসংখ্যক cell-এ allocation আছে)।

তাহলে অঅমরা পাই $u_1 = –1,\ u_2 = –7,\ u_3 = 0,\ v_1 = 6,\ v_2 = 5,\ v_3 = 7,\ v_4 = 13.$

এখন প্রত্যেক un occupied cell $(i,\ j)$ এর জন্য $u_i + v_j$-এর মান corresponding cell-এ ছোট বৃত্তের মধ্যে দেখানো হয়েছে। [Table–1 দেখুন]

Cell evalution $\Delta_{ij} = c_{ij} – (u_i + v_j)$ এর মানগুলি (প্রত্যেক unoccupied cell-এর জন্য) নিচের ছকে দেখান হল :

	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1	·	·	0	2
O_2	3	11	9	·
O_3	·	4	·	·

এখানে 'dots' গুলি basic cell নির্দেশ করে।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে প্রত্যেক unoccupied cell $(i,\ j)$-এর জন্য $\Delta_{ij} \geq 0$ [যেমন (1, 4) cell-এর জন্য $\Delta_{14} = c_{14} – (u_i + v_j) = 14 – (– 1 + 13) = 2$]

সুতরাং, VAM-এর সাহায্যে পাওয়া সমাধানটি চরম সমাধান (optimal solution) হবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে একটি চরম মৌল কার্যকর সমাধান হল—

$x_{11} = 8,\ x_{12} = 7,\ x_{14} = 4,\ x_{31} = 1,\ x_{33} = 5,\ x_{34} = 2$

এবং সর্বনিম্ন পরিবহণ খরচ হবে—

$8 \times 5 + 7 \times 4 + 4 \times 6 + 1 \times 6 + 5 \times 7 + 2 \times 13 = 159$ একক।

মন্তব্য : এখানে unoccupied cell (1, 3) এর জন্য $\Delta_{14} = 0$। সুতরাং, প্রদত্ত সমস্যাটির একাধিক চরম সমাধান পাওয়া যাবে (সর্বনিম্ন পরিবহণ খরচ প্রত্যেক চরম সমাধানের জন্য একই হবে)।

2. নিচের পরিবহণ সমস্যাটি সমাধান করুন :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	1	5	8	6	8
O_2	4	2	5	4	9
O_3	6	4	3	1	13
b_j	10	3	4	13	

সমাধান : প্রদত্ত সমস্যাটি সমতাপূর্ণ (balanced) কারণ $\sum a_i = \sum b_j = 30$।

এখানে 'Row-minima' পদ্ধতিতে প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করা হল এবং সমাধানটি নিচের ছকে দেখানো হল।

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	8				8
O_2	2	3		4	9
O_3			4	9	13
	10	3	4	13	

এখানে $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ উপরের ছকে 6টি occupied cell আছে এবং আমরা লক্ষ্য করছি যে এই সমাধানটি non-degenerate মৌল কার্যকর সমাধান।

সমাধানটি হল—

$x_{11} = 8,\ x_{21} = 8,\ x_{22} = 3,\ x_{24} = 4,\ x_{33} = 4,\ x_{34} = 9$।

Optimality test

	D_1	D_2	D_3	D_4	u_i
	$\boxed{8}$ $\boxed{1}$	–1 $\boxed{5}$	3 $\boxed{8}$	1 $\boxed{6}$	8 – 3
	$\boxed{2}$ $\boxed{4}$	$\boxed{3}$ $\boxed{2}$	6 $\boxed{5}$	$\boxed{4}$ $\boxed{4}$	9 0
	1 $\boxed{6}$	–1 $\boxed{4}$	$\boxed{4}$ $\boxed{3}$	$\boxed{9}$ $\boxed{1}$	13 – 0
	10	3	4	13	
v_j	4	2	6	4	

Table–II

$u_i (i = 1, 2, 3)$, v_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ এই 7টি সংখ্যা যথরীতি $c_{ij} – u_i + v_j$ [প্রত্যেক occupied cell (i, j) ধরে] সমীকরণগুলি সমাধান করে নির্ণয় করা যেখানে ধরা $u_2 = 0$ হয়েছে।

এখন প্রত্যেক un occupied cell (i, j) এর জন্য $u_i + v_j$-এর মান ঐ cell-এ ছোট বৃত্তের মধ্যে দেখানো হয়েছে। [Table–II দেখুন]

এখন cell evalution $\Delta_{ij} = c_{ij} – (u_i + v_j)$ এর মানগুলি (প্রত্যেক unoccupied cell-এর জন্য) নিচের ছকে দেখান হল :

	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1	·	6	5	5
O_2	3	·	–1	·
O_3	5	5	·	·

দেখা যাচ্ছে $\Delta_{14} = – 1 < 0$

সুতারং, 'row-minima' পদ্ধতিতে পাওয়া সমাধানটি চরম সমাধান হবে না। এখন একটি মাত্র unoccupied cell-এর cell evaluative ঋণাত্মক এবং cell-টি হল (2, 3)

সুতরাং, আমরা অন্য একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করব যেখানে (2, 3) cell-টি একটি basic cell হবে।

এখন (2, 3) এই un occupied cell-টি এবং (2, 4), (3, 4), (3, 3) occupied cell গুলি নিয়ে একটি লুপ পাওয়া যায় (নিচের ছকটি দেখুন)।

	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1				
O_2			θ	$4-\theta$
O_3			$4-\theta$	$9+\theta$

মনে করুন (2, 3) cell-এ θ (>0) allocation করা হল। তাহলে প্রদত্ত পরিবহণ সমস্যার শর্তগুলি যাতে সিদ্ধ হয়, লুপটির অন্য cell গুলির allocations এর সঙ্গে alternately θ যোগ ও বিয়োগ করা হল [উপরের ছকটি দেখুন]।

এখন যাতে প্রত্যেক allocation এর মান ≥ 0 হয় এবং θ (>0) এর মান সবচেয়ে বেশী হয় $\theta = \min\,[4, 9, 4] = 4$ ধরা হল।

নতুন মৌল কার্যকর সমাধানটি নিচের ছকে দেখানো হল :

	D_1	D_2	D_3	D_4	u_i
	$\boxed{8}$ $\boxed{1}$	−1 $\boxed{5}$	3 $\boxed{8}$	1 $\boxed{6}$	8 – 3
	$\boxed{2}$ $\boxed{4}$	$\boxed{3}$ $\boxed{2}$	6 $\boxed{5}$	$\boxed{4}$ $\boxed{4}$	9 0
	1 $\boxed{6}$	−1 $\boxed{4}$	$\boxed{4}$ $\boxed{3}$	$\boxed{9}$ $\boxed{1}$	13 – 0
	10	3	4	13	
v_j	4	2	6	4	

Table–III

এই সমাধানে 5টি occupied basic cell আছে। কিন্তু এখানে মৌল চলের সংখ্যা 6। তাহলে উপরের সমাধানটি একটি degenerate মৌল কার্যকর সমাধান।

সমাধানটি হল—

$x_{11} = 8,\ x_{21} = 8,\ x_{22} = 3,\ x_{23} = 4,\ x_{34} = 13$

Optimality test (নতুন সমাধানের জন্য)

এখানে occupied cell এর সংখ্যা 5 যা $m+n-1 = 6$ এর চেয়ে কম। এখানে 5টি occupied basic cell এর সঙ্গে যে কোন একটি unoccupied cell নেওয়া হবে যাতে 6টি cell লুপ তৈরি না করে।

আমরা (3, 3) cell টি নেওয়া হল এবং এই cell এ ε (>0) পরিমাণ যেখানে ε এর মান যথেষ্ট

ছোট যাতে যে কোন সংখ্যা a-র জন্য $a \pm \varepsilon$ কে a ধরা যায়। এর ফলে প্রদত্ত সমস্যাটির পরিবর্তন হলেও, optimal stage-এ $\varepsilon = 0$ ধরলে প্রদত্ত সমস্যাটিরই optimal solution পাওয়া যাবে।

তাহলে যথারীতি $c_{ij} = u_i + v_j$ (প্রত্যেক occupied cell ধরে) সমীকরণগুলি (6টি) সমাধান করে $u_i (i = 1, 2, 3)$, v_i $(j = 1, 2, 3, 4)$ এর মান নির্ণয় করা যাবে।

এখানে $u_2 = 0$ ধরা হয়েছে। u_i, v_j-র মানগুলির জন্য Table–III দেখুন। যথারীতি $u_j + v_j$ এর মানগুলি Table–III-তে ছোট বৃত্তের মধ্যে দেখানো হয়েছে।

Cell evaluations $[\Delta_{ij} = C_{ij} - (v_i + v_i)]$

	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1	·	6	6	6
O_2	·	·	·	4
O_3	4	4	·	·

এখন দেখা যাচ্ছে যে প্রত্যেক cell-এর জন্য $\Delta_{ji} \geq 0$। সুতরাং $\varepsilon = 0$ ধরে যে সমাধানটি পাওয়া যাবে তা হবে প্রদত্ত সমস্যাটির একটি চরম মৌল কার্যকর সমাধান।

তাহলে চরম সমাধানটি হল $x_{11} = 8$, $x_{21} = 2$, $x_{22} = 3$, $x_{23} = 4$, $x_{34} = 13$ যা একটি degenerate মৌল কার্যকর সমাধান।

$1 \times 8 + 4 \times 2 + 2 \times 3 + 5 \times 4 + 1 \times 13 = 55$ একক।

12.5 অসমতাপূর্ণ পরিবহণ সমস্যা (Unbalanced Transportation problem)

যদি কোন পরিবহন সমস্যায় মোট যোগানের (availability) পরিমাণ এবং মোট চাহিদার (requirements) পরিমাণ সমান না হয় অর্থাৎ যদি $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ হয় তাহলে আমরা সমস্যাটিকে অসমতাপূর্ণ পরিবহণ সমস্যা বলব।

এক্ষেত্রে সমস্যাটিকে প্রথমে একটি সমতাপূর্ণ সমস্যায় রূপান্তর করতে হবে। এর জন্য একটি fictitious উৎসস্থল (যদি $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ হয়) বা fictitious গন্তব্যস্থল (যদি $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ হয়) introduce করতে হবে যেখানে fictitious উৎস্থল থেকে ও fictitious গন্তব্যস্থলে পাঠানো একক পরিমাণ জিনিষের পরিবহন খরচ শূন্য ধরতে হবে।

যদি ficititious উৎসস্থলের প্রয়োজন হয় তাহলে এই উৎসে যোগানের পরিমাপ ধরতে হবে $\sum_{i=1}^{m} b_i > \sum_{j=1}^{m} a_j$ এবং যদি fictitions গন্তব্যস্থলের প্রয়োজন হয় তাহলে এই গন্তব্যস্থলে চাহিদার পরিমাণ ধরতে হবে $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$ ।

একটি উদাহরণ দেওয়া যাক :

নিচের পরিবহণ সমস্যাটি আমরা বিবেচনা করব।

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	10	8	2	7	50
O_2	5	6	4	3	40
O_3	12	21	9	8	30
b_j	60	40	20	30	

এখানে $\Sigma a_i = 120$ এবং $\Sigma b_i = 150$। তাহলে এক্ষেত্রে $\Sigma b_j > \Sigma a_i$।

সুতরাং, এখানে একটি fictitious উৎস O_4-এ যোগানের পরিমাণ ধরতে হবে 150 – 120 = 30 এবং রূপান্তরিত সমতাপূর্ণ পরিবহণ সমস্যাটি হবে—

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	10	8	2	7	50
O_2	5	6	4	3	40
O_3	12	21	9	8	30
O_4	0	0	0	0	
b_j	60	40	20	30	

এখান সমতাপূর্ণ সমস্যাটিকে যথারীতি সমাধান করা হবে। এই সমস্যার চরম সমাধান fictitious উৎসের সারির যে কোন cell-এর allocation-কে (যদি থাকে) বাদ দিলে আমরা প্রদত্ত অসমতাপূর্ণ সমস্যাটির চরম সমাধান পাব। এক্ষেত্রে fictitious উৎস O_4-এর 30 একক পরিমাণের যোগান কোন গন্তব্যস্থলে পাঠানো যাবে না অর্থাৎ এক্ষেত্রে গন্তব্যস্থলগুলির মোট চাহিদার ৩০ একক মেটানো যাবে না।

যদি হয় তাহলে একটি fictious গন্তব্যস্থল নিয়ে একইভাবে আমরা অসমতা পূর্ণ সমস্যাটির চরম সমাধান নির্ণয় করতে পারব।

[অনুশীলনী 12.7-এ 7 নং সমস্যাটি দেখুন]

12.6 সারাংশ

এই এককে প্রথমে সমতাপূর্ণ পরিবহন সমস্যার প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে। এর পর প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধানটি চরম সমাধান কি না তা পরীক্ষা করার পদ্ধতি বলা হয়েছে এবং চরম সমাধান না হলে কিভাবে অন্য একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করা যায় তাও আমরা জেনেছি। সবশেষে অসমতাপূর্ণ পরিবহন সমস্যা কিভাবে সমাধান করা যায় তা বলা হয়েছে।

12.7 অনুশীলনী

1. নিচের পরিবহন সমস্যাটির (i) North-West Corner, (ii) Vogel's approximation পদ্ধতির সাহায্যে প্রারম্ভিক কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন :

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	5	1	8	12
O_2	2	4	0	14
O_3	3	6	7	4
b_j	9	10	11	

কোন পদ্ধতির সমাধান অপেক্ষাকৃত ভাল?

2. Matrix Minima পদ্ধতিতে নিচের পরিবহণ সমস্যাটির একটি প্রারম্ভিক কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	2	11	10	3	7	4
O_2	1	4	7	2	1	8
O_3	3	9	4	8	12	9
b_j	3	3	4	30		

3. নিচের পরিবহণ সমস্যাগুলি সমাধান করুন :

(i)

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	30	20	10	500
O_2	5	15	25	500
b_j	300	300	400	

(ii)

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	7	3	4	2
O_2	2	1	3	3
O_3	3	4	6	5
b_j	4	1	5	

4. নিচের পরিবহণ সমস্যাটির একটি চরম মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন :

	W_1	W_2	W_3	W_4	a_i
O_1	19	30	50	10	7
O_2	70	30	40	60	9
O_3	40	8	70	20	18
b_j	60	40	20	30	

5. নিচের পরিবহণ সমস্যাটি সমাধান করুন এবং পরীক্ষা করে দেখুন সমস্যাটির চরম সমাধান unique কিনা :

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	6	8	4	14
O_2	4	9	3	12
O_3	1	2	6	5
b_j	6	10	15	

6. নিচের পরিবহণ সমস্যাটি সমাধান করুন :

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	0	2	1	5
O_2	2	1	5	10
O_3	2	4	3	5
b_j	5	5	10	

7. নিচের অসমতাপূর্ণ পরিবহণ সমস্যাটি সমাধান করুন :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	3	8	7	4	50
O_2	5	2	9	5	40
O_3	4	3	6	2	30
b_j	60	40	20	30	

সমাধান : এখানে $\Sigma a_i = 160$ এবং $\Sigma b_j = 175$। সুতরাং সমস্যাটি একটি অসমতাপূর্ণ পরিবহণ সমস্যা। এখানে $\Sigma b_i - \Sigma a_i = 15$।

তাহলে এখানে একটি fictitious উৎসস্থল O_4 ধরা হল যেখানে যোগানের পরিমাণ 15 একক।

এখন রূপান্তরিত পরিবহণ সমস্যাটি হবে—

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	3	8	7	4	30
O_2	5	2	9	5	50
O_3	4	3	6	2	80
O_4	0	0	0	0	15
b_j	20	60	55	40	

এখানে VAM এর সাহায্যে একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করা হল যা নিচের ছকে দেখানো হয়েছে।

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	[20] 3	8	[10] 7	4	30
O_2	5	[50] 2	9	5	50
O_3	4	[10] 3	[30] 6	[40] 2	80
O_4	0	0	[15] 0	0	15
b_j	20	60	55	40	

Optimality test

এখানে occupied basic cell এর সংখ্যা 7 (= $m + n - 1 = 4 + 4 - 1$)।

যথারীতি $c_{ji} = u_i + v_j$ (প্রত্যেক occupied cell ধরে) 7টি সমীকরণ ($u_3 = 0$ ধরে) সমাধান করে আমরা পাই $u_1 = 1, u_2 = -1, u_3 = 0, u_4 = -6, v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 6, v_4 = 2$। তারপর প্রত্যেক unoccupied cell ধরে cell evaluation Δ_{ji}-র মানগুলি নির্ণয় করে নীচের ছোট বৃত্তের মধ্যে দেখানো হল [নিচের ছকটি দেখুন]।

	D_1	D_2	D_3	D_4	u_i
O_1	[20] 3	(4) 8	[10] 7	(1) 4	1
O_2	(4) 5	[50] 2	(4) 9	(4) 5	– 1
O_3	(2) 4	[10] 3	[30] 6	[40] 2	0
O_4	(4) 0	(3) 0	[15] 0	(4) 0	– 6
v_j	2	3	6	2	

এখানে আমরা দেখছি যে i, j-এর সকল মানের জন্য $\Delta_{ji} = c_{ji} - (u_i + v_i) \geq 0$।

সুতরাং VAM-এর সাহায্যে পাওয়া মৌল কার্যকর সমাধানটি চরম সমাধান (optimal solution) হবে।

তাহলে প্রদত্ত অসমতাপূর্ণ সমস্যাটির চরম সমাধান হবে—

$x_{11} = 20$, $x_{13} = 10$, $x_{22} = 50$, $x_{32} = 10$, $x_{33} = 30$, $x_{34} = 40$

এবং minimum cost $= 20 \times 3 + 10 \times 7 + 50 \times 2 + 10 \times 3 + 30 \times 6 + 40 \times 2 = 520$ একক।

[এখানে লক্ষ্য করুন অসমতাপূর্ণ সমস্যার ক্ষেত্রে $x_{43} = 15$-কে বাদ দেওয়া হয়েছে—এর অর্থ হল যে D_3 গন্তব্যস্থলের 15 একক চাহিদা মেটানো যাবে না।]

8. নিচের অসমতাপূর্ণ পরিবহণ সমস্যার ক্ষেত্রে minimum পরিবহণ খরচ নির্ণয় করুন :

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	4	3	2	10
O_2	1	5	0	13
O_3	3	8	6	12
b_j	8	5	7	

12.8 উত্তরমালা

1. (i) $x_{11} = 9$, $x_{12} = 3$, $x_{22} = 7$, $x_{23} = 7$, $x_{33} = 4$; খরচ = 104
   (ii) $x_{11} = 2$, $x_{12} = 10$, $x_{21} = 3$, $x_{23} = 11$, $x_{31} = 4$; খরচ = 38
   Vogel-এর পদ্ধতি অপেক্ষাকৃত ভাল।
2. $x_{11} = 1$, $x_{14} = 3$, $x_{21} = 2$, $x_{25} = 6$, $x_{32} = 3$; $x_{33} = 4$, $x_{34} = 2$
3. (i) $x_{12} = 100$, $x_{13} = 400$, $x_{21} = 300$, $x_{22} = 200$; Minimum খরচ = 10500
   (ii) $x_{13} = 2$, $x_2 = 1$, $x_{23} = 2$, $x_{31} = 4$, $x_{33} = 1$; Minimum খরচ = 33
4. $x_{11} = 5$, $x_{14} = 2$, $x_{22} = 2$, $x_{23} = 7$, $x_{32} = 6$, $x_{34} = 12$
5. $x_{12} = 5$, $x_{13} = 9$, $x_{21} = 6$, $x_{23} = 6$, $x_{32} = 5$; Unique.
6. $x_{13} = x_{21} = x_{22} = x_{33} = 5$; Minimum খরচ = 35.
8. Minimum পরিবহণ খরচ = 23.

একক 13 ❑ আরোপ সমস্যা (Assignment Problem)

গঠন

13.1 প্রস্তাবনা

বাস্তবক্ষেত্রে আমরা এমন কিছু সমস্যা পাই যেগুলিকে আরোপ সমস্যা (assignment problem) বলা হয়। এরূপ সমস্যার একটি উদাহরণ দেওয়া যাক। মনে করুন কোন কারখানার মালিক পাঁচ ব্যক্তি A, B, C, D, E -কে পাঁচটি কাজ 1, 2, 3, 4, 5 সম্পন্ন করার দায়িত্ব দিতে চায়। এক্ষেত্রে আমরা মনে করতে পারি যে এই পাঁচ ব্যক্তি পাঁচটি কাজের প্রত্যেক কাজে সমান দক্ষ (efficient) নয় এবং ফলে কোন ব্যক্তিকে দিয়ে কোন কাজ করালে যে cost (মজুরি ইত্যাদি) পড়বে তা ব্যক্তি ও কাজের উপর নির্ভর করবে। এখন কারখানার মালিক মাত্র একজন ব্যক্তিকে একটি মাত্র কাজ দেবে এবং এইভাবে পাঁচ ব্যক্তি A, B, C, D, E-কে 1, 2, 3, 4, 5 পাঁচটি কাজের দায়িত্ব দিতে হবে। এই শর্তে কোন্ ব্যক্তিকে কোন্ কাজের দায়িত্ব দিলে মোট cost সবচেয়ে কম হবে বা কাজগুলি সম্পন্ন হলে মোট লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী হবে তা নির্ণয় করার সমস্যাই হল আরোপ সমস্যা (assignment problem)।

এখন মনে করুন m সংখ্যক job-কে m সংখ্যক ব্যক্তিকে (machine বা অন্য facilities) আরোপ (assign) করতে হবে। মনে করুন i-তম job যদি j-তম facility তে আরোপ করা হয় তাহলে cost হবে c_{ij} (i = 1, 2, ... m; j = 1, 2, ... m)।

নিচের ছকটিকে cost matrix বলে।

$$\begin{array}{cc} & \text{Facilities} \\ & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & m \end{array} \\ \text{Jobs} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \vdots \\ m \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots\cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots\cdots & c_{2m} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots\cdots & c_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots\cdots & c_{mm} \end{array}\right] \end{array}$$

এখানে Job গুলিকে facilities দের মধ্যে কিরূপে আরোপ করলে (প্রত্যেকটি job-কে কেবলমাত্র একটি facility-তে এবং প্রত্যেক facility-তে একটি মাত্র Job) মোট cost সবচেয়ে কম হয় তা নির্ণয় করার সমস্যাই হল আরোপ সমস্যা যেখানে cost matrix দেওয়া থাকবে।

Profit matrix দেওয়া থাকলে, Job গুলিকে facilities দের মধ্যে কিরূপে আরোপ করলে মোট লাভ (profit) সবচেয়ে বেশী হয় তা নির্ণয় করার সমস্যাই হল আরোপ সমস্যা। এখানে আমরা লক্ষ্য করছি Job-এর সংখ্যা এবং facilities-দের সংখ্যা সমান অর্থাৎ cost matrix (বা profit matrix বর্গ ম্যাট্রিক্স (square matrix) হবে।

আরোপ সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে কিছু উল্লেখ না থাকলে আমরা ধরে নেব যে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি cost matrix।

13.2 আরোপ সমস্যার গাণিতিক রূপ (Mathematical formulation of an assignment problem)

মনে করুন আরোপ সমস্যাটিতে m সংখ্যক job ও m সংখ্যক facilities আছে এবং মনে করুন প্রদত্ত cost matrixটি $[C_{ij}]_{m \times m}$ যেখানে i-তম Job-কে j-তম facility-তে আরোপ করা হলে cost এর পরিমাণ c_{ij} হবে।

এখন x_{ij} (i = 1, 2, ...m; j = 1, 2,.........m) চলগুলির সংজ্ঞা নিচে দেওয়া হল :

x_{ij} = 1 যদি i-তম Job টি j-তম facility তে আরোপ করা হয়

= 0 অন্যথায়।

আরোপ সমস্যার শর্ত অনুসারে i-এর যে কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য j-রে একটি মাত্র মানের জন্য $x_{ij}=1$ হবে এবং j-এর একটি মানের জন্য $x_{ij}=1$ হবে। এই শর্তগুলির গাণিতিক রূপ হল

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots m$$

এবং $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots m$

আমরা লক্ষ্য করছি যে মোট cost-এর মান z-কে লেখা যায়

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\ x_{ij},$$

তাহলে আরোপ সমস্যার (cost matrix এর ক্ষেত্রে) গাণিতিক রূপটি হবে

অবম $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\ xij,$

শর্তসাপেক্ষে $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots m;$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots m;$$

এবং $x_{ij}=1$ বা 0।

এখানে x_{ij}-দের মান ঠিক নির্ণয় করতে পারলেই আরোপ সমস্যার সমাধান হয়ে যাবে।

মন্তব্য ঃ আরোপ সমস্যার গাণিতিক রূপ থেকে আমরা লক্ষ্য করছি যে x_{ij} চলগুলির মান কেবলমাত্র 0 এবং 1 হতে পারে (সাধারণ L.P.P-র ক্ষেত্রে এরূপ শর্ত থাকে না)। **সুতরাং আরোপ সমস্যাকে যথার্থ L.P.P** বলা যায় না।

13.3 আরোপ সমস্যার সমাধান

এখানে আমরা ধরে নেব যে Cost matrix $[c_{ij}]_{m\times m}$ এর ক্ষেত্রে i, j-এর সকল মানের জন্য $c_{ij} \geq 0$। এখন যদি i-তম Job j-তম facility-তে আরোপ করা হয় তাহলে $x_{ij}=1$ নতুবা $x_{ij}=0$।

তাহলে যদি এরূপে আরোপ করা সম্ভব হয় যে corresponding প্রত্যেক c_{ij}-এর মান 0 হয় তবে এই assignment-এর জন্য মোট cost 0 হবে এবং যা সবচেয়ে কম cost এবং এটি মনে রেখে আমরা

আরোপ সমস্যার সমাধানের উপযুক্ত algorithm নির্ধারণ করতে পারি যা নিচে বিবৃত দুটি উপপাদ্যের (প্রমাণ ছাড়া) উপর নির্ভর করে।

উপপাদ্য 1 : যদি কোন ধ্রুবক সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) cost matrix এর কোন সারি এবং/বা স্তম্ভের প্রত্যেক পদের সঙ্গে যোগ করা হয় তাহলে রূপান্তরিত আরোপ সমস্যা এবং প্রদত্ত আরোপ সমস্যার চরম সমাধান (optimal solution) একই হবে।

[যে assignment এর জন্য আরোপ সমস্যার মোট cost সবচেয়ে কম হয় তাকে বলা হবে **optimal assignment** বা **optimal solution**]

উপপাদ্য 2 : যদি i, j-এর সকল মানের জন্য $c_{ij} \geq 0$ হয় এবং যদি $x_{ij}=x^*_{ij}$ $(i=1, 2.....m; j=1, 2,.....m)$ নির্ণয় করা যায় যাতে $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \; x^*_{ij}=0$ হয় (অবম মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যায়) তাহলে সমাধানটি $(x^*_{ij};\ i=1, 2,.....m\ ;\ j=1, 2,.....m)$ চরম সমাধান (optimal solution) হবে।

তাহলে উপরের দুটি উপপাদ্য থেকে বোঝা গেল যে cost matrix-এর সারি এবং বা স্তম্ভের প্রত্যেক পদের সঙ্গে উপযুক্ত ধনাত্মক সংখ্যা বিয়োগ করে matrix-টির বেশ কয়েকটি পদের মান শূন্য করা যাবে। তাহলে এইভাবে আমরা এরূপ **assignment নির্ণয় করতে পারব যাতে corresponding প্রত্যেক c_{ij} এর মান শূন্য হবে** এবং এই **assignment অবশ্যই optimal assignment হবে।**

এখন আমরা আরোপ সমস্যা (assignment problem) **সমাধানের Step-গুলি (assignment algorithum) লিখতে পারি (নিচে দেখুন)।**

যদি প্রদত্ত cost matrix-এর এক বা একাধিক পদ (element) ≥ 0 না হয় তাহলে উপপাদ্য 1 প্রয়োগ করে প্রত্যেক পদকে non-negative (বা ≥ 0) করতে পারি। এরপর নিম্নলিখিত Step গুলি অনুসরণ করতে হবে।

Step 1 : Cost matrix-এর প্রত্যেক সারির minimum পদটি ঐ সারির প্রত্যেক পদ থেকে বিয়োগ করতে হবে। এখন ম্যাট্রিক্সটির প্রত্যেক সারিতে অন্তত একটি শূন্য পাওয়া যাবে। এরপর প্রত্যেক স্তম্ভের minimum পদটি ঐ স্তম্ভের প্রত্যেক পদ থেকে বিয়োগ করতে হবে। এখন যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে তা হবে **staring cost matrix**।

এখন শূন্য cost এর cell গুলিতে assigment করতে হবে এবং assigment গুলি optimal assignments হবে যদি সবগুলি assignment কেবলমাত্র শূন্য cost এর cell গুলিতে করা সম্ভব হয়।

পরবর্তী step-এ আমরা একটি পদ্ধতি উল্লেখ করব যা থেকে steop 1 এর assignments optimal হবে কি না আমরা বলতে পারব।

Step 2 : Starting matrix এর সবগুলি zero দিয়ে সবচেয়ে কম সংখ্যক vertical এবং horizontal lines টানতে হবে।

এখন হয় পাওয়া যাবে (i) সরলরেখার মোট সংখ্যা cost matrix এর ক্রমের সমান বা (ii) সরলরেখার মোট সংখ্যা cost martix এর ক্রমের চেয়ে কম। এখন (i) এর ক্ষেত্রে Step 3-তে যেতে হবে এবং এখানে optimal assignments পাওয়া যাবে।

Step 3 : Starting matrix এর প্রথম সারি থেকে শুরু করে প্রত্যেক সারি পরীক্ষা করে একটি মাত্র 0 পেলে 0-কে □ এর মধ্যে আবদ্ধ করুন (assignment এর জন্য) এবং তারপর চিহ্নিত 0 দিয়ে vertical লাইন টানুন। সব সারিগুলি এইভাবে পরীক্ষা করা হয়ে গেলে স্তম্ভগুলি একইভাবে পরীক্ষা করুন। এক্ষেত্রে প্রথম স্তম্ভ থেকে শুরু করুন এবং সমস্ত uncrossed স্তম্ভে একটি মাত্র 0 পেলে 0-কে □ এর মধ্যে আবদ্ধ করুন (assignment এর জন্য) এবং এরূপ প্রত্যেক চিহ্নিত O-এর মধ্য দিয়ে horizontal line টানুন। এখন সমস্ত চিহ্নিত O গুলি ধরে (□ এর মধ্যে) optimal assignments পাওয়া যাবে।

Step 2 তে (ii) এর ক্ষেত্রে আমাদের Step 4-এ যেতে হবে।

Step 4 : Step 2 তে যে লাইনগুলি টানা হয়েছে লাইনগুলির বাইরে যে পদগুলি আছে তাদের মধ্যে যেটি সবচেয়ে ছোট সেই পদটি লাইনগুলির বাইরের প্রত্যেকটি পদ থেকে বিয়োগ করতে হবে এবং horizontal line ও vertical line এর intersection এ কোন পদ থাকলে তার সঙ্গে যোগ করতে হবে। এর ফলে modified matrix এ আরও বেশী সংখ্যাক শূন্য পাওয়া যাবে।

এরপর modified matrix নিয়ে Step 2 তে যেতে হবে। এখনও যদি সবগুলি assignments না পাওয়া যায় তাহলে Step 4 এবং Step 2 বার বার প্রয়োগ করে শেষ পর্যন্ত Step 3-কে গিয়ে optimal assignments পাওয়া যাবে।

Step 5 : Step 3 এর দুটি operation (সারি বা স্তম্ভ নিয়ে) পর পর করলে শেষ পর্যন্ত আমরা পাব—(i) কোন unmarked শূন্য থাকবে না। বা (ii) একই সারি বা স্তম্ভে একাধিক unmarked শূন্য থাকবে।

প্রথম ক্ষেত্রে unique optimal assignment পাওয়া যাবে।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে একটি সারির (বা স্তম্ভের) একাধিক unmarked শূন্যগুলির মধ্যে একটিকে যদৃচ্ছভাবে (arbitrarily) বেছে নিয়ে ঐ সারি বা স্তম্ভের বাকি শূন্যদের ignore করতে হবে। এই প্রক্রিয়াটি বার বার সম্পন্ন করলে শেষ পর্যন্ত ম্যাট্রিক্সটিতে কোন unmarked শূন্য থাকবে না। এক্ষেত্রে একাধিক optimal assignments পাওয়া যাবে। কিন্তু প্রত্যেক **optimal assignment এর জন্য minumum cost একই হবে।**

[ভাল করে বোঝার জন্য 13.5 এর উদাহরণগুলি দেখুন]

মন্তব্য : উপরের Step গুলি দ্বারা আরোপ সমস্যা সমাধানের যে algorithm বলা হল তাকে **Hungarian Method** বলে।

13.4 চরম মান নির্ণয় সংক্রান্ত (Maximization Problem) আরোপ সমস্যা

প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি profit matrix হলে আরোপ সমস্যাটি চরম মান নির্ণয় সংক্রান্ত আরোপ সমস্যা হবে। এক্ষেত্রে profit matrix এর সবচেয়ে বড় পদটি (element) থেকে matrix-টির প্রত্যেক পদকে (element) বিয়োগ করতে হবে এবং এর ফলে যে নতুন matrix-টি পাওয়া যাবে তাকে কোন আরোপ সমস্যার cost matrix ধরে optimal assignments নির্ণয় করতে হবে।

আমরা লক্ষ্য করছি যে এই optimal assignment-এর জন্য নতুন আরোপ সমস্যার cost সবচেয়ে কম হবে এবং তার ফলে প্রদত্ত আরোপ সমস্যার profit সবচেয়ে বেশী হবে। সুতরাং এই optimal assignment-ই প্রদত্ত আরোপ সমস্যার optimal assignment হবে।

[অনুচ্ছেদ 3.5 এর উদাহরণ 4 দেখুন]

13.5 উদাহরণ

1. একটি গাড়ী ভাড়ার কোম্পানীর I, II, III, ও IV এই পাঁচটি জায়গা থেকে গাড়ী ভাড়া দেয়। প্রত্যেক জায়গাতেই একটি করে গাড়ী আছে। A, B, C ও D এই চারটি শহরের প্রত্যেকটিতেই দুজন লোকের একটি করে গাড়ী দরকার। ঐ জায়গাগুলি থেকে শহরের যেখানে গাড়ীর প্রয়োজন আছে এদের দূরত্ব কিলোমিটারে নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে প্রকাশ করা হল—

	I	II	III	IV
A	10	14	19	13
B	15	19	7	18
C	13	15	22	14
D	18	20	10	9

সমাধান : প্রথম সারির সর্বনিম্ন উপাদান 10 ; ওই সারির অন্য উপাদানগুলি থেকে 10 বিয়োগ করা হল। অনুরূপভাবে অপর সারিগুলির ক্ষেত্রেও সর্বনিম্ন উপাদান অপর উপাদানগুলি থেকে বিয়োগ করা হল। আমরা নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাব।

	I	II	III	IV
A	0	4	9	3
B	8	12	0	11
C	0	2	9	1
D	9	11	1	0

এখন প্রতিটি স্তম্ভের সর্বনিম্ন উপাদান ওই স্তম্ভের অন্য উপাদানগুলি থেকে বিয়োগ করা হল। নিরে ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া গেল :

	I	II	III	IV
A	0	2	9	3
B	8	10	0	11
C	13	15	22	14
D	18	20	10	9

দেখা যাচ্ছে যে, (1, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2) ও (4, 4) cell এর প্রত্যেকটিতে 0 (শূন্য) আছে।

সমস্ত শূন্যগুলিকে minimum সংখ্যক সরলরেখা দ্বারা কাটা হল। এখানে সরলরেখার সংখ্যা = 4 = ম্যাট্রিক্সের ক্রম।

	I	II	III	IV
A	0	2	9	3
B	8	10	0	11
C	0	0	9	1
D	9	9	1	0

	I	II	III	IV
A	$\boxed{0}$	2	9	3
B	8	10	$\boxed{0}$	11
C	0	$\boxed{0}$	9	1
D	9	9	1	$\boxed{0}$

প্রথম সারির (1, 1) cell-এ কেবলমাত্র একটি শূন্য আছে। এই zero-কে □ চিহ্নের মধ্যে রেখে প্রথম স্তম্ভকে বাদ দেওয়া হল অর্থাৎ A-কে I নং জায়গা থেকে গাড়ী দেওয়া হল। দ্বিতীয় সারির (2, 3) cell-এ কেবলমাত্র একটি শূন্য আছে। এই শূন্যকে □ চিহ্নের মধ্যে রেখে তৃতীয় স্তম্ভকে কেটে দেওয়া হল অর্থাৎ B-কে III নং জায়গা থেকে গাড়ী দেওয়া হল। তৃতীয় সারিতে এখন কেবলমাত্র (3, 2) cell-এ শূন্য আছে। এই শূন্যকে □ চিহ্নের মধ্যে রেখে দ্বিতীয় স্তম্ভকে কেটে দেওয়া হল অর্থাৎ C-কে II নং জায়গা থেকে গাড়ী দেওয়া হল। চতুর্থ সারিতে কেবলমাত্র (4, 4) cell-এ শূন্য আছে। এই শূন্যকে □ চিহ্নের মধ্যে রেখে চতুর্থ স্তম্ভকে কেটে দেওয়া হল অর্থাৎ D-কে IV নং জায়গা থেকে গাড়ী দেওয়া হল।

$\therefore$ আরোপ সমস্যাটির সমাধান হল : $A \rightarrow I$, $B \rightarrow III$, $C \rightarrow II$, $D \rightarrow IV$

এবং অবম দূরত্ব (minimum distance) = 10 + 7 + 15 + 9 = 41 কিলোমিটার।

2. A, B, C, D চারজন্য ব্যক্তিকে চারটি মেশনি I, II, III ও IV-এ কাজে নিয়োগ করতে হবে। টাকায় আরোপের খরচ (assignment cost) দেওয়া হল। আরোপের অবম খরচ (minumum cost) নির্ণয় করুন।

	I	II	III	IV
A	18	26	17	11
B	13	38	14	26
C	38	39	18	15
D	19	26	24	10

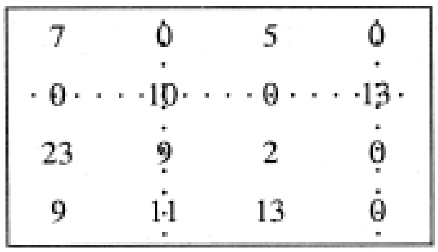
সমাধান : প্রথম সারির সর্বনিম্ন খরচ 11, ঐ সারির অন্য উপাদানগুলি থেকে বিয়োগ করা হল। অনুরূপভাবে অপর সারিগুলির ক্ষেত্রেও সর্বনিম্ন খরচ অপর উপাদানগুলি থেকে বিয়োগ করা হল। আমরা নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাব :

	I	II	III	IV
A	7	15	6	0
B	0	25	1	13
C	23	24	3	0
D	9	16	14	0

এখন প্রতিটি স্তম্ভের সর্বনিম্ন খরচ ওই স্তম্ভের অন্য উপাদানগুলি থেকে বিয়োগ করা হল। নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া গেল :

	I	II	III	IV
A	7	0	5	0
B	0	10	0	13
C	23	9	2	0
D	9	11	13	0

দেখা যাচ্ছে যে (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4) ও (4, 4) cell-এর প্রত্যেকটিতে শূন্য আছে।



7	0	5	0
0	10	0	13
23	9	2	0
9	11	13	0

সমস্ত শূন্যগুলিকে minimum সংখ্যক সরলরেখা দ্বারা কাটা হল। এখানে এরকম সরলরেখার সংখ্যা = 3 = $\neq$ ম্যাট্রিক্সের ক্রম।

$\therefore$ আরোপ সমস্যাটির সমাধান পাওয়া যায়নি।

উপরের ম্যাট্রিক্সটিতে সরলরেখা দ্বারা কাটা হয়নি কারণ উপাদানগুলির মধ্যে ক্ষুদ্রতম উপাদানটি হল 2। কাটা হয়নি এমন উপাদানগুলির প্রত্যেকটির থেকে 2 বিয়োগ করতে হবে, সরলরেখাগুলি যে যে জায়গায় নিজেদের মধ্যে ছেদ করেছে সেখানে 2 যোগ করতে হবে ; বাকী ছেদিত উপাদানগুলি অপরিবর্তিত থাকবে। তাহলে নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া যাবে।

5	0	3	0
0	12	0	15
21	9	0	0
7	11	11	0

আবার, সমস্ত শূন্যগুলিকে minimum সংখ্যক সরলরেখা দিয়ে কাটা হল।

এখানে এরকম সরলরেখার সংখ্যা = 4 = ম্যাট্রিক্সে ক্রম।

	I	II	III	IV
A	5	0	3	0
B	0	12	0	15
C	21	9	0	0
D	7	11	11	0

	I	II	III	IV
A	5	$\boxed{0}$	3	0
B	$\boxed{0}$	12	0	15
C	21	9	$\boxed{0}$	0
D	7	11	11	$\boxed{0}$

আরোপ সমস্যাটির সমাধান পাওয়া গেল।

সমাধানটি হল : $A \to II$, $B \to I$, $C \to III$, $D \to IV$

এবং অবম খরচ (minimum cost) = 26 + 13 + 18 + 10 + = 67 টাকা।

3. চারটি মেশিন চালানোর জন্য চারজন অপারেটর নিয়োগ করা হবে। কোন বিশেষ মেশিনে কোন অপারেটারকে নিয়োগ করলে তার দরুণ খরচ কি হবে তা নিচে (টাকায় হিসাবে) দেওয়া হল। 3 নং মেশিনে A অপারেটরকে ও 4 নং মেশিনে C অপারেটরকে নিয়োগ করা যাবে না। কাকে কোথায় নিয়োগ করলে মোট খরচ সর্বনিম্ন হবে?

		মেশিন			
		1	2	3	4
অপারেটর	A	5	5	∞	2
	B	7	4	2	3
	C	9	3	5	∞
	D	7	2	6	7

সমাধান : যেহেতু A অপারেটরকে 3 নং মেশিনে এবং C অপারেটরকে 4নং মেশিনে নিয়োগ করা যাবে না, আমরা (1, 3) ও (2, 4) cell-এ অন্যান্য খরচগুলোর তুলনায় একটু বেশি খরচ 10 ধরে নেব। তাহলে ম্যাট্রিক্সটি হবে—

	1	2	3	4
A	5	5	10	2
B	7	4	2	3
C	9	3	5	10
D	7	2	6	7

প্রথম সারির সর্বনিম্ন খরচ 2, ঐ সারির অন্যান্য খরচগুলি থেকে বিয়োগ করা হল। অনুরূপভাবে অন্যান্য সারিগুলির ক্ষেত্রেও সর্বনিম্ন খরচ অন্যান্য খরচগুলি থেকে বিয়োগ করা হল। আমরা নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাব।

	1	2	3	4
A	3	3	8	0
B	5	2	0	1
C	6	0	2	7
D	5	0	4	5

আবার, প্রতিটি স্তম্ভের সর্বনিম্ন খরচ ওই স্তম্ভের অন্যান্য খরচগুলি থেকে বিয়োগ করা হল। নিচের ম্যাট্রিক্সটি

	1	2	3	4
A	0	3	8	0
B	2	2	0	1
C	3	0	2	7
D	2	0	4	5

	1	2	3	4
A	0	3	8	0
B	2	2	0	1
C	3	0	2	7
D	2	0	4	5

সমস্ত শূন্যগুলিকে সব থেকে কম সংখ্যক সরলরেখা দ্বারা কাটা হল।

এখানে রকম সরলরেখার সংখ্যা = 3 ম্যাট্রিক্সের ক্রম।

$\therefore$ আরোপ সমস্যাটির সমাধান পাওয়া গেল না।

উপরের ম্যাট্রিক্সটিতে কাটা যায়নি এমন উপাদানগুলির মধ্যে ক্ষুদ্রতম উপাদান হল 1 (এক)। কাটা হয়নি এমন উপাদানগুলি থেকে 1 বিয়োগ করা হল। সরলরেখাগুলি যে যে জায়গায় নিজেদের মধ্যে ছেদ করেছে সেখানে 1 যোগ করতে হবে ; বাকী ছেদিত উপাদানগুলি অপরিবর্তিত থাকবে। তাহলে নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া যাবে :

	1	2	3	4
A	0	4	9	0
B	1	2	0	0
C	2	0	2	6
D	1	0	4	4

সমস্ত শূন্যগুলিকে সবথেকে কম সংখ্যক সরলরেখা দ্বারা কাটা হল। এমন সরলরেখার সংখ্যা $=3 \neq$ ম্যাট্রিক্সের ক্রম।

$\therefore$ এখনও পর্যন্ত আরোপ সমস্যার সমাধান পাওয়া গেল না। আবার, এই ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলির ক্ষেত্রে উপরের পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া গেল।

	1	2	3	4
A	0	5	9	0
B	1	3	0	0
C	1	0	1	5
D	0	0	3	3

	1	2	3	4
A	0	5	9	$\boxed{0}$
B	1	3	$\boxed{0}$	0
C	1	$\boxed{0}$	1	5
D	$\boxed{0}$	0	3	3

সমস্ত শূন্যগুলিকে সবথেকে কম সংখ্যক সরলরেখা দ্বারা কাটা হল।

এখানে, এরকম সরলরেখা সংখ্যা = 4 = ম্যাট্রিক্সের ক্রম।

আরোপ সমস্যাটির সমাধান পাওয়া গেল।

সমাধানটি হল : $A \to 4$, $B \to 3$, $C \to 2$, $D \to 1$

সর্বনিম্ন খরচ $= 2 + 2 + 3 + 7 = 14$ টাকা।

4. একটি সাবান প্রস্তুতকারী সংস্থায় 4 জন সেলস্ম্যান A, B, C ও D-কে চারটি শহর 1, 2, 3, এবং 4-এ সাবান বিক্রীর জন্য পাঠায়। প্রতিটি সেলস্ম্যান এর ক্ষেত্রে বিভিন্ন শহরে সাবান লাভের পরিমাণ (টাকার) দেওয়া হল। কাকে কোথায় নিয়োগ করলে ওই সংস্থায় মোট লাভ সবথেকে বেশি হবে?

		শহর			
		1	2	3	4
সেলস্ম্যান	A	42	35	28	21
	B	30	25	20	15
	C	30	25	20	15
	D	24	20	16	12

সমাধান : এখানে সম্যসাটি হল সবচেয়ে বেশি লাভের পরিমাণ নির্ণয় করা। প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের সবথেকে বড় উপাদান হল 42। 42 থেকে ম্যাট্রিক্সের সমস্ত উপাদানগুলোকে বিয়োগ করে নতুন একটা ম্যাট্রিক্স তৈরি করা হল। এর উপাদানগুলি ক্ষতির পরিমাণ নিদেশ করবে। নতুন ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে সর্বনিম্ন ক্ষতির পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে।

নতুন ম্যাট্রিক্সটি হল :

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & 0 & 7 & 14 & 21 \\ B & 12 & 17 & 22 & 27 \\ C & 12 & 17 & 22 & 27 \\ D & 18 & 22 & 26 & 30 \\ \hline \end{array}$$

প্রতিটি সারির ক্ষেত্রে সর্বনিম্ন উপাদান অপর উপাদানগুলি থেকে বিয়োগ করে নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া গেল।

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & 0 & 7 & 14 & 21 \\ B & 0 & 5 & 10 & 15 \\ C & 0 & 5 & 10 & 15 \\ D & 0 & 4 & 8 & 12 \\ \hline \end{array}$$

প্রতিটি স্তম্ভের ক্ষেত্রে সর্বনিম্ন উপাদান অপর উপাদানগুলির থেকে বিয়োগ করে নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া গেল।

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & 0 & 3 & 6 & 9 \\ B & 0 & 1 & 2 & 3 \\ C & 0 & 1 & 2 & 3 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

সমস্ত শূন্যগুলির উপর দিয়ে সবথেকে কম সংখ্যক সরলরেখা টানা হল। এমন সরলরেখার সংখ্যা $= 2 \neq$ ম্যাট্রিক্সের ক্রম।

যে উপাদানগুলি কাটা হয়নি তাদের মধ্যে সর্বনিম্ন সংখ্যা হল 1। যে উপাদানগুলি ছেদিত হয়নি তাদের প্রত্যেকের থেকে 1 বিয়োগ করা হল। সরলরেখাদুটির ছেদবিন্দুতে 1 যোগ করা হল ; অন্যান্য ছেদিত উপাদানগুলি অপরিবর্তিত থাকল। নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া গেল :

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & 0 & 2 & 5 & 8 \\ B & 0 & 0 & 1 & 2 \\ C & 0 & 0 & 1 & 2 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

সমস্ত শূন্যগুলি সবথেকে কম সংখ্যক সরলরেখা দ্বারা কাটা হল। এমন সরলরেখার সংখ্যা = 3 ম্যাট্রিক্সের ক্রম।

আবার উপরের পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিচের ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া গেল।

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & 0 & 2 & 4 & 7 \\ B & 0 & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

সমস্ত শূন্যগুলি সবথেকে কম সংখ্যক সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করলে সরলরেখার সংখ্যা = 4 = ম্যাট্রিক্সের ক্রম।

আরোপ সমস্যাটির সমাধান পাওয়া গেল।

$A \rightarrow 1$, $B \rightarrow 3$, $C \rightarrow 2$, $D \rightarrow 4$

সবথেকে বেশি লাভ = 42 + 20 + 25 + 12 = 99 টাকা।

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & \boxed{0} & 2 & 4 & 7 \\ B & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ C & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \\ D & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & \boxed{0} & 2 & 4 & 7 \\ B & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \\ C & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ D & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ \hline \end{array}$$

সমস্যাটির বিকল্প সমাধান :

$A \rightarrow 1$, $B \rightarrow 2$, $C \rightarrow 3$, $D \rightarrow 4$

সর্বোচ্চ লাভ = 42 + 25 + 20 + 12 = 99 টাকা।

13.6 'ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতা সমস্যা (Travelling Salesman Problem)

'ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতা' সমস্যা বলতে কি বোঝায় তা নিচে বলা হল :

মনে করুন একজন ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতাকে n সংখ্যক শহর visit করতে হবে। এখন ধরুন যে কোন শহর থেকে অন্য যে কোন শহরের দূরত্ব (বা একটি শহর থেকে অন্য শহরে যাওয়ার সময় বা পরিবহণ খরচ) জানা আছে। যে কোন শহর থেকে ভ্রমণ শুরু করে প্রত্যেক শহরকে একবার visit করে ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতাকে starting শহরে ফিরে আসতে হবে। ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতার সমস্যা হল এমন route ঠিক করতে হবে যাতে route টির মোট দৈর্ঘ্য (বা সময় বা খরচ) সবচেয়ে কম হয়। আমরা লক্ষ্য করছি যে এখানে যে কোন শহরকে starting শহর হিসাবে নেওয়া যায়।

সমস্যাটির গাণিতিক রূপ :

মনে করুন i-তম শহর থেকে j-তম শহরে যাওয়ার সময় (বা দূরত্ব বা খরচ) হল c_{ij} এবং ধরুন $x_{ij}=1$, যদি বিক্রেতা সরাসরি i-তম শহর থেকে j-তম শহর যায়।

$= 0$ অন্যথায়।

এখন বিক্রেতার সমস্যা হল চল x_{ij} দের মান নির্ণয় করা যাতে প্রত্যেক শহর visit করে tour সম্পূর্ণ করার আগে যেন কোন শহর সে দুবার visit না করে এবং মোট দূরত্ব (বা খরচ বা সময়)

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \; x_{ij}\text{, সবচেয়ে কম হয়।}$$

এই সমস্যার ক্ষেত্রে আর একটি শর্ত হল যে কোন শহর থেকে সেই শহরেই যাওয়ার ঘটনা কখনই হবে না এবং ফলে রীতি অনুযায়ী $c_{ii}=\infty$, ধরতে হবে (i=1, 2,....n)। সুতরাং x_{ii}-এর মান কখনই 1 হবে না।

তাহলে 'ভ্রাম্যমান বিক্রেতা' সমস্যাটির গাণিতিক রূপ হল :

$$\text{অবম } z = \sum_{i-1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \; x_{ij},$$

$$\text{শর্তসাপেক্ষে } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i=1, 2,.....n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j=1, 2,.....n;$$

এবং $x_{ij}=1$ বা 0, $x_{ii} \neq 1$, (i=1, 2,.....n ; j=1, 2,.....n)

আমরা লক্ষ্য করছি যে যদি ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতাকে n সংখ্যক শহর visit করতে হয় তাহলে distance (or cost or time) matrix টি নিচের আকার হবে :

	1	2	....	n
1	∞	c_{12}	....	c_{1n}
2	c_{21}	∞	....	c_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	c_{m1}	c_{m2}	....	∞

'ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতা সমস্যার গণিতিক রূপ থেকে আমরা বলতে পারি যে এই সমস্যা এবং আরোপ সমস্যা অনেকটাই একই রকম—শুধু পার্থক্য হল এই যে প্রথম সমস্যাটিতে অতিরিক্ত শর্ত (কোন শহর থেকে শুরু করে tour সম্পূর্ণ করে সেই শহরেই ফিরে আসতে হবে) থাকার জন্য সমস্যাটিকে আরোপ সমস্যা হিসাবে সমাধান করে যদি $1 \to 2 \to 3 \to 4.....n \to 1$ বা অনুরূপ আকারের optimal assignment পাওয়া যায় (যাতে কোন sub-loop নাই) তাহলে এই optimal assignment থেকে 'ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতা' সমস্যার চরম সমাধান পাওয়া যাবে।

কিন্তু আরোপ সমস্যা হিসাবে সমাধান করতে গিয়ে যদি optimal assignment এ একাধিক sub-loop পাওয়া যায় তাহলে 'ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতা' সম্যসাটির সমাধান নির্ণয় করতে হলে enumerative (গণনামূলক) পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হবে (13.7 এর উদাহরণ দেখুন)। যেমন 4টি শহর 1, 2, 3, 4 এর ক্ষেত্রে যদি optimal assignment $1 \to 4$, $2 \to 3$, $3 \to 2$, $4 \to 1$ হয় তাহলে এক্ষেত্রে enumerative (গণনামূলক) পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হবে কারণ এখানে (1, 4), (4, 1) এবং (2, 3), (3, 2) দুটি sub-loop আছে।

13.7 উদাহরণ

নিচের 'ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতা সমস্যাটি সমাধান করূন :

	A	B	C	D	E
A	∞	6	12	0	4
B	6	∞	10	5	4
C	∞	7	∞	11	3
D	5	4	11	∞	5
E	5	2	7	∞	∞

সমাধান : প্রদত্ত সমস্যাটিকে Hungarian পদ্ধতিতে আরোপ সমস্যা (minumumization) হিসাবে সমাধান করতে গিয়ে নিচের ম্যাট্রিক্সগুলি পর পর পাওয়া যায় :

	A	B	C	D	E
A	∞	6	12	0	4
B	2	∞	6	1	0
C	5	4	∞	8	0
D	1	0	7	∞	1
E	3	0	5	6	∞

(i)

	A	B	C	D	E
A	∞	6	7	0	4
B	1	∞	1	1	0
C	4	4	∞	8	0
D	0	0	2	∞	1
E	2	0	0	6	∞

এখানে minimum সংখ্যক লাইনের সংখ্যা = 4 < 5

(ii)

	A	B	C	D	E
A	∞	5	6	$\boxed{0}$	4
B	$\boxed{0}$	∞	0	1	0
C	3	3	∞	8	$\boxed{0}$
D	0	$\boxed{0}$	2	∞	2
E	2	0	$\boxed{0}$	7	∞

minimum সংখ্যক লাইনের সংখ্যা = 5

(iii)

এক্ষেত্রে আরোপ সমস্যা হিসাবে optimal assignments হবে—

$A \rightarrow D$, $B \rightarrow A$, $C \rightarrow E$, $D \rightarrow B$, $E \rightarrow C$ অর্থাৎ (A, D), (B, A), (C, E), (D, B), (E, C) Cell গুলিতে assignment করা হয়েছে। এখানে minimum cost = 0 + 6 + 3 + 4 + 7 = 20।

কিন্তু এই optimal assignments 'ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতা সমস্যার শর্ত satisfy করে না কারণ এখানে (A, D, (D, B), (B, A), (C, E), (E, C) এই দুটি sub-loop আছে।

এখন আমরা enumerative (গণনামূলক) পদ্ধতিতে 'ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতা' সমস্যাটির সমাধান নির্ণয় করব।

আমরা লক্ষ্য করছি যে (iii) নং ম্যাট্রিক্সে minimum nonzero element হল 1 যা (B, D) cell-এ আছে।

কিন্তু (A, D), (D, B), (B, A) লুপের ক্ষেত্রে (B, A)-র পরিবর্তে (B, D) ধরা যাবে না কারণ এই লুপে (D, B) cell আছে। এই ম্যাট্রিক্সে next non-zero minimum element হল 2 যা (E, A) ও (D, C) cell-এ আছে। এখানে (D, B) cell-এর পরিবর্তে (D, C) নিলে এবং (E, C) cell-এর পরিবর্তে (E, A) নিলে আমরা কোনো route পাই না।

পুনরায় (B, C) cell-এ 0 থাকায় $A \to D \to B \to A$ লুপের ক্ষেত্রে (B, A) cell-এর পরিবর্তে (B, C) cell নিলে এবং (E, C)-র পরিবর্তে (E, A) নিলে আমরা পাই—

$A \to D \to B \to C \to E \to A$ যা একটি route যেখানে cost=$20 + (10 - 6) + (5 - 7) = 22$ একক। আমরা লক্ষ্য করছি অন্য route-এর ক্ষেত্রে cost 22 এর চেয়ে বেশী হবে।

সুতরাং, ভ্রাম্যমাণ সমস্যাটির সমাধন হল $A \to D \to B \to C \to E \to A$ এবং minumum cost = 22।

13.8 সারাংশ

এই এককে প্রথমে আরোপ সমস্যা বলতে কি বোঝায় তা বলা হয়েছে। এর পর আরোপ সমস্যা সমাধানের Hungarian পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হয়েছে। সবশেষে ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতা সমস্যা এবং আরোপ সমস্যার মধ্যে যে অনেকটাই মিল আছে তা লক্ষ্য করে 'ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতা' সমস্যা সমাধানের গণনামূলক (enumerative) পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

13.9 অনুশীলনী

1. সর্বনিম্ন খরচ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিচের আরোপ সমস্যাগুলি সমাধান নির্ণয় করুন।

(i)

	J_1	J_2	J_3	J_4
1	10	12	19	11
2	5	10	7	8
3	12	14	13	11
4	8	15	11	9

(ii)

	A	B	C	D
I	1	4	6	3
II	9	7	10	9
III	4	5	11	7
IV	8	7	8	5

(iii)

	1	2	3	4	5
A	8	4	2	6	1
B	0	9	5	5	4
C	3	8	9	2	6
D	4	3	1	0	3
E	9	5	8	9	5

(iv)

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
1	4	2	7	3	1
2	2	9	2	7	1
3	6	8	7	6	1
4	4	6	5	3	1
5	5	3	9	5	1

2. সর্বোচ্চ লাভ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিচের আরোপ সমস্যাগুলির সমাধান নির্ণয় করুন :

(i)

	A	B	C	D	E
A	32	38	40	28	40
B	40	24	28	21	36
C	41	27	33	30	37
D	22	38	41	36	36
E	29	33	40	35	39

(ii)

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
A	2	4	3	5	4
B	7	4	6	8	4
C	2	9	8	10	4
D	8	8	12	7	4
E	2	8	5	8	8

3. সর্বনিম্ন খরচ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিচের unbalanced আরোপ সমস্যাগুলির সমাধান নির্ণয় করুন :

(i)

	A	B	C	D
1	10	12	8	6
2	6	9	12	14
3	3	8	7	12

(ii)

	W	X	Y	Z
A	18	24	28	32
B	8	13	17	19
C	10	15	19	22

4. পাঁচটি কূপ সংস্কার জন্য পাঁচটি পাম্প মজুত আছে। বিভিন্ন কূপে পাম্প চালালে একটি পাম্পের সাহায্যে সর্বোচ্চ কতটা সংস্কার হয় সেই নিরিখে পাম্পটির কর্মক্ষমতা নিচে প্রদত্ত হল। কিভাবে বিভিন্ন কূপে একটি করে পাম্প নিযুক্ত করলে সর্বোচ্চ কার্যক্ষমতা পাওয়া যায় তা নির্ণয় কর।

পাম্প \ কূপ	1	2	3	4	5
1	45	40	65	30	55
2	50	30	25	60	30
3	25	20	15	20	40
4	35	25	30	25	20
5	80	60	60	70	50

5. 5টি মেশিনের জন্য 5 জন অপারেটরকে নিয়োগ করতে হবে। প্রত্যেক অপারেটরের প্রতিটি কাজের জন্য যে সময় (ঘণ্টায়) লাগে তা নিচের ম্যাট্রিক্সে দেওয়া আছে অপারেটর A, 3নং মেশিনে এবং অপারেটর C, 4নং মেশিনে কাজ করতে পারে না। কি ভাবে কোন্ কাজটি কোন্ অপারেটরকে দিলে সর্বনিম্ন সময়ে কাজগুলি সম্পন্ন করা যাবে?

মেশিন

অপারেটর	1	2	3	4	5
1	5	5	–	2	6
2	7	4	2	3	4
3	9	3	5	–	3
4	7	2	6	7	2
5	6	5	7	9	1

6. নিচের প্রত্যেকটি 'ভ্রাম্যমাণ বিক্রেতা' সমস্যা সমাধান করুন :

(i)

	A	B	C	D	E
A	∞	5	8	4	5
B	5	∞	7	4	5
C	8	7	∞	8	6
D	4	4	8	∞	8
E	5	5	6	8	∞

(ii)

	A	B	C	D	E
A	∞	7	6	8	4
B	7	∞	8	5	6
C	6	8	∞	9	7
D	8	5	9	∞	8
E	4	6	7	8	∞

13.10 উত্তরমালা

1. (i) $1 \to J_2, 2 \to J_3, 3 \to J_4, 4 \to J_1$

সর্বনিম্ন খরচ=38 একক।

(ii) $I \to A,\ II \to C,\ III \to B,\ IV \to D$

সর্বনিম্ন খরচ = 21 একক।

(iii) $A \to 5,\ B \to 1,\ C \to 4,\ D \to 3,\ E \to 2$

সর্বনিম্ন খরচ = 9 একক।

(iv) $1 \to J_4,\ 2 \to J_3,\ 3 \to J_5,\ 4 \to J_1,\ 5 \to J_2$

or, $1 \to J_1,\ 2 \to J_3,\ 3 \to J_5,\ 4 \to J_4,\ 5 \to J_2$

সর্বনিম্ন খরচ = 13 একক।

2. (i) $1 \to B, 2 \to A, 3 \to E, 4 \to C, 5 \to D$
Or, $1 \to B, 2 \to E, 3 \to A, 4 \to C, 5 \to D$
Or, $1 \to B, 2 \to A, 3 \to E, 4 \to D, 5 \to C$
Or, $1 \to B, 2 \to E, 3 \to A, 4 \to D, 5 \to C$
সর্বোচ্চ লাভ = 191 একক।

(ii) $1 \to J_5, B \to J_1, C \to J_4, D \to J_3, E \to J_2$
Or, $A \to J_2, B \to J_1, C \to J_4, D \to J_3, E \to J_5$
Or, $A \to J_4, B \to J_1, C \to J_2, D \to J_3, E \to J_5$
সর্বোচ্চ লাভ = 41 একক।

3. (i) $1 \to D, 2 \to B, 3 \to A$
সর্বনিম্ন খরচ = 18 একক।

(ii) $A \to W, B \to X, C \to Y$ or $A \to W, B \to Y, C \to X$
সর্বনিম্ন খরচ = 50 একক।

4. $1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 5, 4 \to 2, 5 \to 1$
সর্বোচ্চ ক্ষমতা = 270 একক।

5. $A \to 4, B \to 3, C \to 5, D \to 2, E \to 1$
Or $A \to 4, B \to 3, C \to 2, D \to 1, E \to 5$
সর্বনিম্ন সময় = 15 ঘণ্টা।

6. (i) $A \to D \to C \to E \to B \to A$ min cost = 28 একক।

(ii) $A \to E \to B \to D \to C \to A$
Or, (i) $A \to C \to D \to B \to E \to A$; min cost = 30 একক।

একক 14 ❑ ক্রীড়া তত্ত্ব (Game Theory) অশ্বোপবেশন বিন্দু (Saddle Point) ও মিনিম্যাক্স নীতি

গঠন

14.1 প্রস্তাবনা

বাস্তবে আমরা অনেক সমস্যা পাই যেখানে দুই বা ততোধিক প্রতিপক্ষের (opponents) মধ্যে প্রতিযোগিতা (competition) এবং দ্বন্দ্ব (conflict) লক্ষ্য করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ দুই ব্যক্তির মধ্যে বা দুই দেশের মধ্যে বা দুই বাণিজ্যিক প্রতিষ্ঠানের মধ্যে এরূপ প্রতিযোগিতা লক্ষ্য করা যায়। এই ধরণের সমস্যাকে ক্রীড়া সমস্যা বলা হয়। এবং ক্রীড়া তত্ত্বের বিষয় হল—প্রত্যেক পক্ষ তার প্রদত্ত কৌশলগুলি (strategies) থেকে এমন কৌশল ঠিক করবে যে কৌশল অবলম্বন করলে সেই পক্ষ (অন্যরা যে কৌশলই অবলম্বন করুক) সর্বাধিক লাভজনক অবস্থায় থাকতে পারে। বিষয়টি স্পষ্ট করার জন্য আমরা একটি সমস্যা উল্লেখ করি।

ধরা যাক A এবং B দুজন ব্যবসাদার কোন দেশের কোন বিশেষ অঞ্চলে electronic goods ক্রয় বিক্রয়ের ব্যবসা করছে এবং ধরে নেওয়া যাক্ যে ঐ অঞ্চলে electronic goods ক্রয়-বিক্রয়ের অন্য কোন ব্যবসাদার নাই।

এখানে A এবং B-কে খেলোয়াড় (player) এবং ব্যবসাটিকে একটি ক্রীড়া (game) বলা হবে। মনে করুন ব্যবসা নিয়ন্ত্রণ করার জন্য A ব্যবসাদারের তিনজন executive A_1, A_2, A_3 এবং B ব্যবসাদারের চারজন executive B_1, B_2, B_3, B_4 আছে। আমরা ধরে নেব যে প্রত্যেক খেলোয়াড় (এখানে ব্যবসাদার) ব্যবসা নিয়ন্ত্রণের জন্য তার নিজের executive দের থেকে এক সঙ্গে (at a time) মাত্র একজনের সাহায্য গ্রহণ করবে। যেমন, A কেবলমাত্র A_3 এর সাহায্য নিতে পারে এবং B কেবলমাত্র B_1 এর সাহায্য নিতে পারে। এই executive নির্বাচন (কৌশল ঠিক করা) প্রত্যেক ব্যবসাদারের (খেলোয়াড়ের) সম্পূর্ণ নিজের ব্যাপার এবং অপর প্রতিপক্ষ ব্যবসাদারের (খেলোয়াড়ের) executive নির্বাচন উপেক্ষা (ignoring) করবেই এই নির্বাচন করা হয়। মনে করুন, দুজন খেলোয়াড়ের (এখানে ব্যবসাদারের) কৌশল (strategy-এখানে executive) নির্বাচন অনুযায়ী নিচের ছক্‌টি (যার ব্যাখ্যা পরে দেওয়া হয়েছে) দেওয়া আছে :

খেলোয়াড় B

খেলোয়াড় A		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	5	2	– 4	2
	A_2	0	– 3	3	7
	A_3	3	3	2	– 8

এখন এই ছক্‌টির ব্যাখ্যা নিচে দেওয়া হল। এখানে মোট 12টি ছোট বর্গাকার ঘর (Cell) আছে। এই ছক্ এর (1, 1) cell এর entry হল 5—এর অর্থ হল যে যদি খেলোয়াড় A, A_1 কৌশল (strategy) গ্রহণ করে এবং B, B_1 কৌশল গ্রহণ করে তাহলে এই খেলায় (এখানে ব্যবসায়) A-এর 5 একক লাভ হবে এবং ফলে B-এর 5 একক লোকসান হবে অর্থাৎ আমরা বলতে পারি যে A, B যথাক্রমে A_1, B_1 কৌশল অবলম্বন করলে খেলোয়াড় A, খেলোয়াড় B-র কাছ থেকে 5 একক মূল্য (payment) পাবে। আবার (1, 3) cellটি বিবেচনা করা যাক। এই cell টির entry (– 4) যার অর্থ হল যে যদি A, A_1 কৌশল অবলম্বন করে এবং B, B_3 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে A-র – 4 একক লাভ হবে অর্থাৎ A-র 4 একক লোকসান হবে এবং B, A-র কাছ থেকে 4 একক মূল্য (payment) পাবে যা B-র লাভ।

এই ছক্ এর (2, 1) cell এর entry হল 0—যার অর্থ হল যে যদি A, A_2 কৌশল গ্রহণ করে এবং B, B_2 কৌশল গ্রহণ করে তাহলে A ও B উভয় খেলোয়াড়ের কোন লাভ বা লোকসান কিছুই হবে না। অনুরূপভাবে ছক্‌টির বাকী যে কোন cell এর entry-র অর্থ পাওয়া যায়। এখানে খেলোয়াড় A (যার কৌশলগুলি সারিতে দেখানো হয়েছে) কে maximizing খেলোয়াড় বলা হবে এবং খেলোয়াড় B (যার কৌশলগুলি স্তম্ভে দেখানো হয়েছে) কে minimizing খেলোয়াড় বলা হবে। এখানে উপরের ছক্‌টিকে

maximizing খেলোয়াড় A-র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স (pay-off matrix) বলে। এই ছক্‌টির প্রত্যেক entry-র চিহ্ন পরিবর্তন করে (0 entry-র ক্ষেত্রে কোন পরিবর্তন হবে না) যে ছক্ পাওয়া যায় তা হবে minimizing player B-র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স।

ক্রীড়া তত্ত্বের সাহায্যে A ও B উভয় খেলোয়াড়ের শ্রেষ্ঠ কৌশল (optimum strategy) নির্ণয় করা যায় যাতে maximizing খেলোয়াড় A-র নিশ্চিত (guaranteed) লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী (মনে করুন ϑ) হয় এবং minimizing খেলোয়াড় B-র লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম ϑ রাখা যাবে। 1928 খ্রীস্টাব্দে J. V. Neuman এই তত্ত্বের সূচনা করেন এবং পরে G. B. Dantzig দ্বারা এই তত্ত্ব সমৃদ্ধ হয়।

পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলিতে—''মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স'', ''ক্রীড়া কৌশল'', ''উত্তম ক্রীক্তা কৌশল (optimal strategies)'', ''ক্রীড়া সমস্যার মান (value of a game)'' ইত্যাদি ধারণাগুলিকে পরিষ্কার করে বুঝিয়ে বলা হবে।

14.2 দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যা (Two-person zero sum game)—মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্স এবং ক্রীড়া কৌশল (Pay off matrix and strategies of a game)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে দুজন ব্যবসাদারের যে সমস্যা উল্লেখ করা হয়েছে সেক্ষেত্রে ব্যবসাটিকে একটি ''ক্রীড়া'' (game) বলা হয়েছে। দুই বা ততোধিক প্রতিপক্ষের মধ্যে প্রতিযোগিতা এবং দ্বন্দ্ব (conflict) আছে এমন যে কোন situation-কে আমরা **''ক্রীড়া''** (game) বলব। এখানে প্রত্যেক প্রতিপক্ষকে **''খেলোয়াড়''** (player) বলা হয়।

যে ক্রীড়ার দুজন খেলোয়াড় থাকে এবং একজন খেলোয়াড়ের লাভ (gain) অপর খেলোয়াড়ের লোকসানের (loss) সমান সেই ক্রীড়াকে **''দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়া''** বলে।

এখানে প্রত্যেক খেলোয়াড়ের পূর্বনির্ধারিত কয়েকটি পরিকল্পনা (course of action) থাকে যেখানে প্রত্যেক খেলোয়াড় তার পূর্বনির্ধারিত পরিকল্পনাগুলি থেকে এক সঙ্গে (at a time) কেবলমাত্র একটি পরিকল্পনা গ্রহণ করবে। প্রত্যেক খেলোয়াড়ের এই পূর্বনির্ধারিত পরিকল্পনাগুলিকে সেই খেলোয়াড়ের **''ক্রীড়া কৌশল''** (strategy) বলে। পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে উল্লিখিত দুজন ব্যবসাদারের সমস্যার ক্ষেত্রে A এবং B ব্যবসাদারদের (খেলোয়াড়দের) ক্রীড়া কৌশলগুলি হল যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 এবং B_1, B_2, B_3, B_4।

যদি কোন ক্রীড়ায় প্রত্যেক খেলোয়াড়ের ক্রীড়া কৌশলের সংখ্যা সসীম (finite) হয় তাহলে ক্রীড়াটিকে সসীম (finite) বলা হবে নতুবা ইহাকে অসীম ক্রীড়া (infinite game) বলা হবে।

আমরা ক্রীড়া বলতে **''দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট সসমী ক্রীড়া''** বুঝব।

মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্স (Pay off matrix) :

ধরা যাক কোন ক্রীড়ায় A এবং B দুজন খেলোয়াড়। মনে করুন A-র প্রদত্ত ক্রীড়া কৌশলগুলি হল A_1, A_2,.........A_m এবং B-র প্রদত্ত ক্রীড়া কৌশলগুলি হল B_1, B_2.........B_n। তাহলে এখানে A-র m সংখ্যক কৌশল এবং B-র n সংখ্যক কৌশল প্রদত্ত আছে। মনে করুন যদি A, A_i কৌশল ($i = 1, 2, ...m$) এবং B, B_i কৌশল ($j = 1, 2, ...n$) নির্বাচন করে তাহলে A-কে দেয় B-র অর্থমূল্যের মান a_{ji} অর্থাৎ A, A_i কৌশল এবং B, B_j কৌশল নির্বাচন করলে A-র লাভের পরিমাণ a_{ij} এবং B-র লোকসানের পরিমাণ a_{ij} এবং B-র লোকসানের পরিমাণ a_{ij}।

এক্ষেত্রে আমরা $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সটি পাই।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

এই ম্যাট্রিক্সটিকে প্রদত্ত ক্রীড়ার একটি মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্স (payoff matrix) বলে এবং ক্রীড়াটিকে নিচের আকারে প্রকাশ করা হয় :

খেলোয়াড় B

খেলোয়াড় A	B_1	B_2	. . . .	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	. . . .	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	. . . .	a_{2n}
:	. . . . . .	. . . . . .	. . . .	. . . . . .
:	. . . . . .	. . . . . .	. . . .	. . . . . .
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

এখানে খেলোয়াড় A-কে বলা হবে maximizing player যার লক্ষ্য হবে এমন ভাবে কৌশল নির্বাচন করা যাতে (খেলোয়াড় B যে কৌশলই নির্বাচন করুক না কেন) তার নিশ্চিত (guaranteed) লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী হয় এবং খেলোয়াড় B-কে বলা হবে minimizing player যার লক্ষ্য হবে এমনভাবে কৌশল নির্বাচন করা (খেলোয়াড় A যে কৌশলই নির্বাচন করুক না কেন) যাতে তার লোকসানের (loss) এর পরিমাণ সবচেয়ে কম রাখা যায়।

এখানে $[\,a_{ij}\,]_{m\times n}$ ম্যাট্রিক্সটিকে খেলোয়াড় A-র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বলে উল্লেখ করা হয় এবং ক্রীড়াটিকে একটি $m\times n$ ক্রীড়া বলা হবে। খেলোয়াড় B-র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হবে $[\,-a_{ij}\,]_{m\times n}$।

মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স এর একটি উদাহরণ দেওয়া হক :

মনে করুন খেলোয়াড় A-র কৌশলগুলি হল A_1, A_2, A_3 এবং B-র কৌশলগুলি হল B_1, B_2। কৌশল নির্বাচন অনুসারে দেয় অর্থমূল্যের পরিমাণ নিচে দেওয়া হল :

নির্বাচিত কৌশল	দেয় অর্থমূল্য
$A : A_1 ; B : B_1$	A-র কাছ থেকে B 3 টাকা পায়।
$A : A_1 ; B : B_2$	B-র কাছ থেকে A 2 টাকা পায়।
$A : A_2 ; B : B_1$	A-র কাছ থেকে B 4 টাকা পায়।
$A : A_2 ; B : B_2$	B-র কাছ থেকে A 5 টাকা পায়।
$A : A_3 ; B : B_1$	B-র কাছ থেকে A 1 টাকা পায়।
$A : A_3 ; B : B_2$	A-র কাছ থেকে B 8 টাকা পায়।

উপরের তালিকা থেকে দেখা যাচ্ছে যে খেলোয়াড় A-র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হল

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

এবং খেলোয়াড় B-র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স হল

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

14.3 বিশুদ্ধ ও মিশ্র কৌশল (Pure and Mixed strategies)

আমরা আগেই বলেছি যে কোন প্রদত্ত ক্রীড়ার ক্ষেত্রে, ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে (at each play) প্রত্যেক খেলোয়াড় তার প্রদত্ত কৌশলগুলি থেকে কেবলমাত্র একটি কৌশল নির্বাচন করে।

যদি ক্রীড়াটির **প্রত্যেক সম্পাদনে** কোন খেলোয়াড় একটি নির্দিষ্ট ক্রীড়া কৌশল নির্বাচন করে, তাহলে বলা হবে যে ঐ খেলোয়াড় বিশুদ্ধ কৌশল (pure strategy) অবলম্বন করেছে এবং নির্দিষ্ট কৌশলটিকে একটি বিশুদ্ধ কৌশল বলা হবে।

যদি কোন খেলোয়াড় ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে একটি নির্দিষ্ট কৌশল গ্রহণ না করে তার প্রদত্ত কৌশলগুলি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা (প্রতি কৌশল নির্বাচনের একই সম্ভাবনা নাও হতে পারে) নিয়ে নির্বাচন করে, তাহলে বলা হবে যে ঐ খেলোয়াড় মিশ্র কৌশল (pure strategy) অবলম্বন করেছে এবং নির্দিষ্ট কৌশলটিকে একটি বিশুদ্ধ কৌশল বলা হবে।

যদি কোন খেলোয়াড় ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে একটি নির্দিষ্ট কৌশল গ্রহণ না করে তার প্রদত্ত কৌশলগুলি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা (প্রতি কৌশল নির্বাচনের একই সম্ভাবনা নাও হতে পারে) নিয়ে নির্বাচন করে, তাহলে বলা হবে যে ঐ খেলোয়াড় মিশ্র কৌশল (mixed strategy) অবলম্বন করেছে। মিশ্র কৌশলের ধারণাটি আরও স্পষ্ট করে বলা যাক।

মনে করুন কোন ক্রীড়ার ক্ষেত্রে maximizing খেলোয়াড় A-র প্রদত্ত কৌশলগুলি হল A_1, A_2, A_3। যদি খেলোয়াড় A মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে তাহলে ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে A_1, A_2, A_3 কৌশলগুলি

থেকে উদ্দেশ্যহীন ভাবে (at random) **কেবলমাত্র একটি কৌশল** নির্বাচন করে। যদি A_1, A_2, A_3 কৌশলগুলি নির্বাচন করার সম্ভাবনা যথাক্রমে P_1, P_2, P_3 হয় তাহলে $P_1 \geq 0$, $P_2 \geq 0$, $P_3 \geq 0$, এবং $P_1+P_2+P_3=1$।

যদি $P_1 = \frac{1}{2}$, $P_2 = \frac{1}{3}$, $P_3 = \frac{1}{6}$ হয় তাহলে আমরা বুঝব যে ক্রীড়াটি অনেকবার (large number of times)।

ধরা যাক 6000 বার সম্পাদন করলে A_1, A_2, A_3 কৌশল তিনটি যথাক্রমে প্রায় $6000 \times \frac{1}{2} = 3000$, $6000 \times \frac{1}{3} = 2000$, $6000 \times \frac{1}{6} = 1000$, বার নির্বাচন করা হয়েছে।

এক্ষেত্রে খেলোয়াড় A-র যে মিশ্র কৌশল অনুসরণ করে তাকে $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

যদি বিশেষ ক্ষেত্রে $p_1=1, p_2=0, p_3=0$ হয় সে ক্ষেত্রে ক্রীড়াটির অনেকবার সম্পাদনে (large number of times), খেলোয়াড় A প্রায় প্রত্যেকবার A_1 নির্বাচন করে এবং A_2, A_3 প্রায় কোন বারই নির্বাচন করে না—সুতরাং, এখানে বলা যায় যে খেলোয়াড় A বিশুদ্ধ কৌশল A_1 অনুসরণ করে। অনুরূপভাবে $p_1=0, p_2=1, p_3=0$; $p_1=0, p_2=0, p_3=1$ হলে বলা যায় খেলোয়াড় A যথাক্রমে বিশুদ্ধ কৌশল A_2 এবং বিশুদ্ধ কৌশল A_3 অনুসরণ করে।

তাহলে **বিশুদ্ধ কৌশলকে বিশেষ মিশ্র কৌশল বলা যেতে পারে।**

মন্তব্য : অনেক সময় খেলোয়াড় A এবং খেলোয়াড় B-র প্রদত্ত কৌশলগুলিকে বিশুদ্ধ কৌশল বলে উল্লেখ করা হয়।

14.4 উত্তম কৌশল (Optimal strategies) এবং ক্রীড়ার মান Value of a game)

এই অনুচ্ছেদে আমরা ধরে নেব যে প্রত্যেক খেলোয়াড় বিশুদ্ধ কৌশল অনুসরণ করে।

ধরা যাক কোন ক্রীড়ার ক্ষেত্রে A হল maximizing খেলোয়াড় এবং B হল minimizing খেলোয়াড়।

যে কৌশল অবলম্বন করলে খেলোয়াড় A-র নিশ্চিত (guaranteed) লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী, ধরা যাক $\underline{\vartheta}$ (খেলোয়াড় B যে কোন কৌশল অবলম্বন করুক না কেন, খেলোয়াড় A-র লাভের পরিমাণ কখনই $\underline{\vartheta}$ অপেক্ষা কম হবে না), সেই কৌশলকে খেলোয়াড় A-র **শ্রেষ্ঠ কৌশল** (best strategy) বলা হবে। যে কৌশল অবলম্বন করলে খেলোয়াড় B-র লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম রাখা যায়, ধরাযাক $\overline{\vartheta}$ (খেলোয়াড় A-র কোন কৌশল অবলম্বনের দ্বারা এই লোকসানের পরিমাণ কখনই $\overline{\vartheta}$ এর চেয়ে বেশী হবে না), সেই কৌশলকে খেলোয়াড় B-র **শ্রেষ্ঠ কৌশল** (best strategy) বলা হবে এখানে মনে রাখা দরকার যে খেলোয়াড় B অন্য কোন কৌশল অবলম্বন করলে, খেলোয়াড় A কোন কৌশল অবলম্বনের দ্বারা B-এর লোকসানের পরিমাণ এর চেয়ে বেশী করে দিতে পারে।

যদি $\underline{\vartheta} = \overline{\vartheta}$ ($= \vartheta$ ধরা যাক) হয়, তাহলে কে **ক্রীড়ার মান** (value of the game) বলা হবে এবং

এক্ষেত্রে খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B এর শ্রেষ্ঠ কৌশল (best strategy) কে যথাক্রমে A ও B এর **উত্তম কৌশল** (optimal strategy) বলা হয়।

তাহলে আমরা বলতে পারি যে বিশুদ্ধ কৌশল অনুসরণের ক্ষেত্রে কোন ক্রীড়ার মান হলে, maximizing খেলোয়াড় A-র নিশ্চিত (guaranteed) লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী হবে এবং minizing খেলোয়াড় B-র লোকসানের পরিমাণ কখনই এর চেয়ে বেশী হবে না যদি উভয় খেলোয়াড় **উত্তম কৌশল** optimal strategies) অবলম্বন করে।

একটি উদাহরণের সাহায্যে উত্তম কৌশল এবং ক্রীড়ার মানের দারণা স্পষ্ট করা যাক :

আমরা নিচের মূল্যসূচক বিবেচনা করব।

		B B_1	B_2	B_3
A	A_1	18	5	6
	A_2	9	8	19
	A_3	–4	7	3

উপরের ছক থেকে দেখা যাচ্ছে যে (1, 1) cell-এ entry-র পরিমাণ (18) সবচেয়ে বেশী—এর থেকে মনে হতে পারে যে maximizing খেলোয়াড় A যদি A_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে তার লাভ (gain) সবচেয়ে বেশী (18) হতে পারে। কিন্তু এই লাভের পরিমাণ নিশ্চিত নয় কারণ এক্ষেত্রে খেলোয়াড় B, B_2 বা B_3 কৌশল অবলম্বন করলে A-র লাভের পরিমাণ কমে 5 বা 6 হবে। আবার দেখা যাচ্ছে যে (3, 1) cell এ entry-র পরিমাণ (–4) সবচেয়ে কম—এর থেকে মনে হতে পারে যে minumizing খেলোয়াড় B যদি B_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে তার লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম (–4) হতে পারে। কিন্তু এই লোকসানের পরিমাণ নিশ্চিত নয় কারণ খেলোয়াড় A, কৌশল A_1 বা কৌশল A_2 অবলম্বন করে B-র লোকসানের পরিমাণ বাড়িয়ে 18 বা 9 করতে পারে।

আমরা লক্ষ্য করছি যে যদি খেলোয়াড় A, কৌশল A_2 অবলম্বন করে তাহলে B যে কোন কৌশলই অবলম্বন করুক না কেন A-র লাভ কমপক্ষে 8 একক হবেই অর্থাৎ A-র এই পরিমাণ লাভ (8 একক) নিশ্চিত। আরও দেখা যাচ্ছে যে A যদি অন্য কৌশল A_1 বা A_3 অবলম্বন করে তাহলে এই নিশ্চিত লাভের পরিমাণ কমে 5 বা –4 হবে। সুতরাং খেলোয়াড় A যদি A_2 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে তার নিশ্চিত (guaranteed) লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী (8 একক) হবে।

আবার দেখা যাচ্ছে যে যদি খেলোয়াড় B, কৌশল B_2 অবলম্বন করে তাহলে তার লোকসানের পরিমাণ কখনই 8 একক এর বেশী হবে না এবং এই খেলোয়াড় যদি অন্য কৌশল B_1 বা B_3 অবলম্বন করে তাহলে তার লোকসানের পরিমাণ 8 একক থেকে বেড়ে 18 একক বা 10 একক হতে পারে। সুতরাং যদি খেলোয়াড় B, কৌশল B_2 অবলম্বন করে তাহলে সে তার লোকসানের পরিমাণ 8 একক রাখতে পারবে এবং অন্য কোন কৌশল অনুসরণ করে এর থেকে কম লোকসান নিশ্চিত করা যাবে না।

সুতরাং, এই ক্রীড়ার ক্ষেত্রে খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B এর উত্তম কৌশলগুলি হল যথাক্রমে A_2 ও B_2 এবং ক্রীড়ার মান (value of the game) হবে 8 একক।

মন্তব্য : কোন ক্রীড়া (game) সমাধান করতে বললে বুঝতে হবে যে খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B এর উত্তম কৌশল (optimal strategies) এবং ক্রীড়ার মান (যদি অস্তিত্ব স্বীকৃত হয়) নির্ণয় করতে হবে। পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা দেখব বিশুদ্ধ কৌশল (pure strategy) অবলম্বন করে কিভাবে উত্তম কৌশল ও ক্রীড়ার মান (value of the game) নির্ণয় করা যায় এবং **আরও দেখব যে কেবলমাত্র বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে যে কোন ক্রীড়া সমস্যার সমাধান করা সম্ভব নয়।**

14.5 মিনিম্যাক্স (বা ম্যাক্সিমিন) নীতি বা অশ্বোপবেশন বিন্দু (Saddle point)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের আলোচনা থেকে বোঝা গেল যে বিশুদ্ধ কৌশলের সাহায্যে ক্রীড়া সমস্যার সমাধান করার অর্থ হল—প্রত্যেক খেলোয়াড়ের এমন কৌশল নির্বাচন করা যাতে প্রতিপক্ষ খেলোয়াড়ের কাছ থেকে তার নিশ্চিত পাওনার (guranteed pay off) পরিমাণ সবচেয়ে বেশী হয় যেখানে প্রতিপক্ষের কোন কৌশল নির্বাচনের দ্বারা এই পাওনার পরিমাণ কমবে না। কৌশল নির্বাচনের এই নীতিটিকে মিনিম্যাক্স (বা ম্যাক্সিমিন) নীতি বলা হয়। এখন এই নীতিটি পরিষ্কার ভাবে নিচে বিবৃত করা হল

যদি কোন খেলোয়াড় তার প্রদত্ত কৌশলগুলির ক্ষেত্রে প্রত্যেক কৌশলের জন্য তার অনুকূলে সবচেয়ে খারাপ ফল (worst outcome) **নিয়ে একটি তালিকা তৈরী করে তাহলে এই তালিকার ফলগুলির মধ্যে যেটি তারপক্ষে সবচেয়ে ভাল** (best of the worst outcomes), **সেই ফলটির অনুরূপ কৌশলটিকে ওই খেলোয়াড় শ্রেষ্ঠ কৌশল হিসেবে নির্বাচন করবে।**

এখন এই নীতিটি নিচের মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যাক :

		B		
		B_1	B_2	B_3
	A_1	2	5	2
A	A_2	–1	2	–8
	A_3	–2	3	2

এখানে maximizing খেলোয়াড় A-র ক্ষেত্রে A_1, A_2, A_3 কৌশলগুলির জন্য সবচেয়ে খারাপ ফলগুলি (row minima) হলে যথাক্রমে 2, –8, –2।

এখন Max {2, –8, –2}=2।

সুতরাং, 'ম্যাক্সিমিন নীতি অনুযায়ী A-র A_1 কৌশলটি নির্বাচন করা উচিত।

আবার minimizing খেলোয়াড় B-র ক্ষেত্রে B_1, B_2, B_3 কৌশলগুলির জন্য সবচেয়ে খারাপ ফলগুলি (column maxima) হল যথাক্রমে 2, 5, 2।

এখন min {2, 5, 2}=2।

সুতরাং, 'মিনিম্যাক্স' নীতি অনুযায়ী, খেলোয়াড় B-এর B_1 বা B_3 কৌশল নীতি নির্বাচন করা উচিত। সুতরাং, এক্ষেত্রে ক্রীড়ার মান হবে 2 এবং বিশুদ্ধ উত্তম কৌশল হবে (A_1, B_1) বা (A_1, B_3) যেখানে প্রথম বন্ধনীর মধ্যে প্রথমটি A-র এবং দ্বিতীয়টি B-র উত্তম কৌশল নির্দেশ করে।

এখন 'row minima' দের বর্গাকার ঘর দ্বারা এবং 'column maxima' দের বৃত্তাকার ঘর দ্বারা বন্ধ করলে উপরের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স থেকে আমরা নিচের ছক্‌টি পাই :

B

A	B_1	B_2	B_3	row min
A_1	$\boxed{2}$	5	$\boxed{2}$	2
A_2	-1	2	$\boxed{-8}$	-8
A_3	$\boxed{-2}$	3	2	-2
column max	2	2	2	

এই ক্রীড়া সমস্যার ক্ষেত্রে—

max (row min)=min (row max)=ক্রীড়ার মান=2।

মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের যে ঘরের (cell-এর) জন্য max (row min)=min (row max), সেই cell টিকে ক্রীড়ার অশ্বোপরেশন বিন্দু (saddle point) বলে।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে কোন ক্রীড়ার অশ্বোপরেশন বিন্দুর অস্তিত্ব থাকলে, এই বিন্দুতে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটির entry-র মানটিই হবে ক্রীড়ার মান (value of the game)।

যে কোন প্রদত্ত মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে অশ্বোপরেশন বিন্দুর সংজ্ঞা :

ধরা যাক কোন ক্রীড়া সমস্যার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হল $[a_{ij}]_{m\times n}$।

$[a_{ij}]_{m\times n}$ ম্যাট্রিক্সটির (p, q) position টিকে (যদি এর অস্তিত্ব থাকে) অশ্বোপরেশন বিন্দু (saddle point) বলা হবে। যদি p তম সারির minimum element এবং q তম সারির minimum element এবং q তম স্তম্ভের maximum element উভয়ই a_{pq} হয়

অর্থাৎ $a_{pq} \le a_{pj}$, $\quad j=1,\ 2,..........n$

এবং $a_{pq} \ge a_{iq}$, $\quad i=1,\ 2,..........m$

অশ্বোপরেশন বিন্দুর অস্তিত্বের সঙ্গে সম্পর্কিত কয়েকটি উপপাদ্য :

উপপাদ্য 1. কোন ক্রীড়া সমস্যার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি $[a_{ij}]_{m\times n}$ হলে,

$$\max_j \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$$

প্রমাণ : মনে করুন $\quad \max_j [\min_j a_{ij}] = a_{pq}$

এবং $\quad \min_j [\max_i a_{ij}] = a_{rs}$

তাহলে a_{pq} হল প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটির p তম সারির minimum উপাদান (element) এবং a_{rs} হল s তম স্তম্ভের maximum element। সুতরাং আমরা পাই—

$a_{pq} \leq a_{ps}$ .... (1)

$a_{rs} \geq a_{ps}$ .... (2)

(1) ও (2) থেকে আমরা পাই—

$$a_{pq} \leq a_{ps} \leq a_{rs}$$

$$\therefore \quad a_{pq} \geq a_{rs}$$

সুতরাং প্রমাণিত হল যে— $\max_i [\min_j a_{ij}] \leq \min_j [\max_i a_{ij}]$

উপপাদ্য 2. $[a_{ij}]_{m\times n}$ ম্যাট্রিক্সটি কোন ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স হলে, ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দুর অস্তিত্ব থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\max_i [\min_j a_{ij}] = \min_j [\max_i a_{ij}]$

প্রমাণ : মনে করুন (p, q) অবস্থানটি প্রদত্ত ক্রীড়ার একটি অশ্বোপবেশন বিন্দু। তাহলে আমরা পাই—

$a_{pq} \geq a_{iq}$ $i=1, 2, ... m$ .... (1)

এবং $a_{pq} \leq a_{pj}$ $j=1, 2, ... n$ ....(2)

এখন (1) থেকে বলা যায় $\max_i a_{iq} \leq a_{pq}$ এবং (2) থেকে বলা যায় $\min_j a_{pj} \geq a_{pq}$

তাহলে আমরা পাই $\max_i a_{iq} \leq a_{pq} \leq \min_j a_{pj}$

এখন $\min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{iq}$ এবং $\min_j a_{pj} \leq \max_i \max_j a_{ij}$

সুতরাং $\min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{iq} \leq \min_j a_{pg} \leq \max_i \min_j a_{ji}$

$\therefore \min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i \min_j a_{ij}$ .... (3)

পুনরায় উপপাদ্য 1 থেকে আমরা পাই— $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$ .... (4)

এখন (3) ও (4) থেকে প্রমাণিত হল— $\max_i [\min_j a_{ij}] = \min_j [\max_i a_{ij}]$

এখন মনে করুন $\max_i [\min_j a_{ij}] = \min_j [\max_i a_{ij}]$ .... (5)

ধরা যাক $\min_j a_{ij}$ এর মান সবচেয়ে বেশী হয় যখন $i = \mathrm{p}$।

তাহলে $\min_j a_{pj} = \max_i [\min_j a_{ij}]$ .... (6)

আবার ধরা যাক $\max_i a_{ij}$ এর মান সবচেয়ে কম হয় যখন $j = \mathrm{q}$।

তাহলে, $\max_i a_{iq} = \min_j [\max_i a_{ij}]$ .... (7)

এখন (5), (6) ও (7) থেকে আমরা পাই— $\min\limits_{j} a_{pj} = \max\limits_{i} a_{iq}$ .... (8)

আবার $\min\limits_{j} a_{pj} \leq \max\limits_{i} a_{iq}$ .... (8a)

সুতরাং (8) থেকে আমরা পাই—

$\max\limits_{i} a_{iq} \leq a_{pq}$ যা থেকে বলা যায় $a_{pq}\, a_{iq}$, $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots m$ .... (9)

আবার $\max\limits_{i} a_{iq} \geq a_{pq}$ .... (8b)

সুতরাং (8) থেকে আমরা পাই—

$\min\limits_{j} a_{pj} \geq a_{pq}$ যা থেকে বলা যায় $a_{pq}\, a_{pj}$, $j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n$ .... (10)

এখন (9) ও (10) থেকে আমরা বলতে পারি যে (p, q) অবস্থানটি ক্রীড়াটির একটি অশ্বোপবেশন বিন্দু হবে।

সুতরাং, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

মন্তব্য : (i) যদি (p, q) অবস্থানটি $[a_{ji}]_{m\times n}$ মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট ক্রীড়ার অশ্বোপবেশন বিন্দু হয় তাহলে (5), (8), (8a), (8b) থেকে আমরা বলতে পারি যে ক্রীড়ার মান (value of the game) হবে a_{pq} যেখানে $a_{pq} = \max\limits_{i} [\min\limits_{j} a_{ij}] = \min\limits_{j} [\max\limits_{i} a_{ij}]$ এবং এক্ষেত্রে maximizing খেলোয়াড় A ও minimizing খেলোয়াড় B-এর উত্তম কৌশল (optimal strategies) হবে যথাক্রমে বিশুদ্ধ কৌশল A_p ও বিশুদ্ধ কৌশল B_q।

(ii) **যদি ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দু পাওয়া না যায় তাহলে কেবলমাত্র বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে ক্রীড়ার মান নির্ণয় করা যাবে না।**

14.6 উদাহরণ

1. নীচের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট ক্রীড়াটির সমাধান করুন :

				B		
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	11	4	3	10	2
A	A_2	8	7	6	8	9
	A_3	4	6	6	5	10
	A_4	7	8	4	4	3

সমাধান :

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	row min
A_1	11	4	3	10	$\boxed{2}$	2
A_2	8	7	$\boxed{6}$	8	9	6
A_3	$\boxed{4}$	6	6	5	10	4
A_4	7	8	4	4	$\boxed{3}$	3
Col-man	11	8	6	10	10	

এখানে max (row min) = max {2, 6, 4, 3} = 6

এবং min (col max) = min {11, 8, 6, 10, 10} = 6

সুতরাং এখানে স্যং (row min) = min (col. max) = 6

অতএব প্রদত্ত ক্রীড়াটির (2, 3) অবস্থানটি একটি অশ্বোপবেশন বিন্দু। তাহলে ক্রীড়াটির মান 6 এবং বিশুদ্ধ উত্তম কৌশল হল (A_2, B_3)।

2. দেখান যে নিচের ক্রীড়াটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

		B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A	A_1	2	1	2	–1
	A_2	1	3	1	3
	A_3	3	2	3	–1
	A_4	–1	3	–1	7

সমাধান :

	B_1	B_2	B_3	B_4	row min
A_1	2	1	2	$\boxed{-1}$	–1
A_2	1	3	$\boxed{1}$	3	1
A_3	3	2	3	$\boxed{1}$	–1
A_4	$\boxed{-1}$	3	$\boxed{-1}$	7	–1
Col-man	3	3	3	7	

এখানে max (row min) = max $\{-1, 1, -1, -1\} = 1$

এবং min (col. max) = min $\{3, 3, 3, 7\} = 7$

সুতরাং, max (row min) $\neq$ min (col. max)

অতএব প্রদত্ত ক্রীড়াটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

3. যদি নিচের ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের (2, 2) বিন্দুতে অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকে তাহলে x ও y এর সকল মান নির্ণয় করুন। আরও প্রমাণ করুন যে x, y এর কোন মানের জন্য (2, 3) বিন্দুতে ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকতে পারে না।

		B		
		B_1	B_2	B_3
	A_1	5	x	9
A	A_2	y	8	13
	A_3	9	6	7

সমাধান : প্রথম অংশ : এখানে দেওয়া আছে যে (2, 2) অবস্থানটি একটি অশ্বোপবেশন বিন্দু। এখন (2, 2) অবস্থাননে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের উপাদান (element) হল 8। সুতরাং মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের 2 তম সারির minimum উপাদান 8 এবং 2 তম স্তম্ভের maximum উপাদান 8। তাহলে আমরা পাই $y \geq 8$ এবং $x \leq 8$। আবার $x \leq 8$ এবং $y \geq 8$ হলেই (2, 2) অবস্থানটি একটি অশ্বোপবেশন বিন্দু হবে। সুতরাং x ও y এর নির্ণেয় মানগুলি $x \leq 8$, $y \geq 8$ থেকে পাওয়া যাবে।

দ্বিতীয় অংশে : (2, 3) অবস্থানে মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্সটির element হল 13 যা তৃতীয় স্তম্ভের maximum element কিন্তু 13 কখনই দ্বিতীয় সারির minimum dlement হতে পারে না কারণ এই সারিতে 8 ($8 < 13$) একটি উপাদান (element)। সুতরাং x ও y এর কোন মানের জন্য (2, 3) বিন্দুতে ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকতে পারে না।

14.7 সারাংশ

প্রথমে দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়ার মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্সের (pay off matrix) ধারণা দেওয়া হয়েছে এবং পরে প্রমাণ করা হয়েছে যে কেবলমাত্র বিশুদ্ধ কৌশল (pure strategy) অবলম্বন করে এরূপ ক্রীড়ার মান (value of the game) নির্ণয় করা যাবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি ক্রীড়ার অশ্বোপবেশন বিন্দু (saddle point) পাওয়া যায়।

14.8 অনুশীলনী

1. maximin (minimiax) নীতি প্রয়োগ করে নিচের ক্রীড়াগুলি সমাধান করুন :

(i)

		B		
		B_1	B_2	B_3
	A_1	6	3	–3
A	A_2	–2	1	2
	A_3	5	4	6

(ii)

		B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	4	2	3	5
A	A_2	–2	–1	4	–3
	A_3	5	2	3	3
	A_4	4	0	0	1

(iii)

		B		
		B_1	B_2	B_3
	A_1	7	4	1
A	A_2	4	2	0
	A_3	3	–1	–2
	A_4	1	5	–3

2. নিচের মূল্য সূচক বিশিষ্ট ক্রীড়ার ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন যে ক্রীড়াটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

		B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_4
A	A_1	3	10	5	9	5
	A_2	4	5	12	10	6
	A_3	5	6	4	7	13
	A_4	11	7	8	5	2

3. প্রমাণ করুন যে x (> 0) এর যে কোন মানের জন্য

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	2	4
	A_2	-1	x

এই ক্রীড়াটির মান 21

4. প্রমাণ করুন যে মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট ক্রীড়াটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকতে পারে না। যখন $a < b,\ a < c,\ d < b,\ d < c$।

13.10 উত্তরমালা

1. (i) (A_3, B_2); $\vartheta = 4$

 (ii) (A_1, B_2), (A_3, B_2); $\vartheta = 2$

 (iii) (A_1, B_3); $\vartheta = 1$

একক 15 ❑ মিশ্র কৌশল (Mixed Strategies) সহ দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যা (Two-person Aero-sum game)

গঠন

15.1 প্রস্তাবনা

একক 14-তে আমরা দেখেছি যে কেবলমাত্র বিশুদ্ধ কৌশল (pure strategy) অবলম্বন করে যে কোন ক্রীড়া সমস্যার সমাধান করা যায় না। 14·3 অনুচ্ছেদে আমরা মিশ্র কৌশলের (mixed strategy) ধারণা পেয়েছি। এই এককে প্রথমে আমরা দেখব কিভাবে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে 2×2 ক্রমের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট ক্রীড়ার (যার কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই) সমাধান করা যায় এবং পরে দেখব কিভাবে প্রাধান্য তত্ত্ব (rules for dominance) প্রয়োগ করে, অনেক ক্ষেত্রে যে কোন ক্রমের কোন ক্রীড়া সমস্যার সমাধান 2×2 ক্রমের ক্রীড়া সমস্যার সমাধানের উপর নির্ভর করে।

15.2 2×2 ক্রমের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যার সমাধান

ধরা যাক কোন 2×2 ক্রীড়ার (যার কোন অশ্বেপবেশন বিন্দু নাই) মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হল—

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{B} \\
 & & \begin{array}{cc} \text{B}_1 & \text{B}_2 \end{array} \\
\text{A :} & \begin{array}{c} \text{A}_1 \\ \text{A}_2 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

এখন আমরা দেখব কিভাবে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে ক্রীড়াটির মান এবং উত্তম কৌশল (optimal strategies) নির্ণয় করা যায়।

খেলোয়াড় A-মিশ্র কৌশল অবলম্বন করার অর্থ হল যে ক্রীড়াটির যে কোন সম্পাদন A_1, A_2 কৌশলগুলির মধ্যে একটি কৌশল উদ্দেশ্যহীনভাবে (at random) নির্বাচন করা এবং মিশ্র কৌশল নির্ণয় করার অর্থ হল যে A_1, A_2 কৌশলগুলির নির্বাচনের সম্ভাবনা, ধরা যাক যথাক্রমে x_1, x_2, $(0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1)$ এর মান নির্ণয় করা। এখন যেহেতু A_1, A_2 কখনই একই সঙ্গে নির্বাচন করা হয় না এবং একটি কৌশল অবশ্যই নির্বাচন করা হবে আমরা পাই $x_1 + x_2 = 1$।
তাহলে A_1, A_2 কৌশলগুলি নির্বাচনের সম্ভাবনা যথাক্রমে ধরা যায় x, $1 - x$ যেখানে $0 \leq x_1 \leq 1$।

অনুরূপভাবে খেলোয়াড় B-র মিশ্র কৌশল নির্ণয় করার অর্থ হল যে B_1, B_2 কৌশলগুলি নির্বাচনের সম্ভাবনা, ধরা যাক যথাক্রমে y, $1 - y$ $(0 \leq y \leq 1)$ এর মান নির্ণয় করা।

প্রথমে maximizing খেলোয়াড় A-র সমস্যাটি বিবেচনা করা যাক।

যদি খেলোয়াড় B, B_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে A-র প্রত্যাশিত লাভ (expected gain) হবে $ax + \text{c}\,(1 - x) = \text{g}_1$ (মনে করুন) এবং যদি খেলোয়ার B, B_2 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে A-র প্রত্যাশিত লাভ হবে $bx + d\,(1 - x) = g_2$ (মনে করুন)। এখন মনে করুন $\min\,\{g_1, g_2) = g'$।

তালে দেখা যাচ্ছে যে minimizing খেলোয়াড় B যে কৌশলই নির্বাচন করুক না কেন, A-র নিশ্চিত (guaranteed) প্রত্যাশিত লাভের পরিমাণ হবে g' যখন A_1 কৌশলটি x সম্ভাবনা সহকারে A নির্বাচন করে। এখন A-র উদ্দেশ্য হল x_1 এর মান নির্ণয় করা যাতে g' এর মান সবচেয়ে বেশী হয়।

এখানে $g_1 \geq g'$, $g_2 \geq g'$ .... (1)

এবার minimizing খেলোয়াড় B-র সমস্যাটি বিবেচনা করা যাক।

যদি খেলোয়াড় A, A_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে B-র প্রত্যাশিত লোক্‌সান (expected loss) হবে, $ay + \text{b}\,(1 - \text{y}) = l_1$ (মনে করুন)।

এবং যদি খেলোয়াড় A, A_2 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে B-র প্রত্যাশিত লোক্‌সান হবে—$\text{cy} + d\,(1 - \text{y}) = l_2$ (মনে করুন)।

এখন মনে করুন max $(l_1, l_2) = l'$।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে maximizing খেলোয়াড় A যে কৌশলই নির্বাচন করুক না কেন, B-র প্রত্যাশিত লোক্‌সানের পরিমাণ কখনই l' এর বেশী হবে না যখন B_1 কৌশলটি y সম্ভাবনা সহকারে B নির্বাচন করে। এখন B-র উদ্দেশ্য হল y এর মান নির্ণয় করা যাতে l' এর মান সবচেয়ে কম হয়।

এখানে $l_1 \leq l', l_2 \leq l'$ .... (2)

এখন (1) ও (2) থেকে আমরা পাই—

$$ax + c\,(1 - x) \geq g', \quad bx + \mathrm{d}\,(1 - x) \geq g'$$

এবং $ay + b\,(1 - y) \leq l', \quad cy + \mathrm{d}\,(1 - y) \leq l'$

আমরা লক্ষ্য করছি যে যদি x, y $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ এর মান নির্ণয় করা যায় যাতে $l_1 = l_2 = l'$ এবং $g_1 = g_2 = g'$ হয় তাহলে x, y রে এরূপ মানে জন্য $(g')_{mxx} = (l')_{min} = \vartheta$ (মনে করুন) এবং এক্ষেত্রে ক্রীড়ার মান ϑ হবে ও x, y এর মান থেকে উভয় খেলোয়াড় এর উত্তম কৌশল নির্ণয় করা যাবে।

এখন প্রদত্ত ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দু না থাকায় a, b, c, d এর মান এরূপ হবে যাতে যে কোন ক্ষেত্রে $g_1 = g_2$, $l_1 = l_2$ সমীকরণ দুটি x, y এর জন্য $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ সমাধান করা যাবে। সুতরাং মিশ্র কৌশল ব্যবহার করে প্রদত্ত 2×2 ক্রীড়াটি সমাধান করা যাবে (উদাহরণ দেখুন)।

15.3 উদাহরণ

নিচের 2×2 ক্রীড়াটি সমাধান করুন—

		B	
		B_1	B_2
A :	A_1	8	5
	A_2	4	7

সমাধান : এখানে max (row min) = max {5, 4} = 5

এবং min (Col. max) = min {8, 7} = 8

সুতরাং max (row min) min $\neq$ (col. max)।

তাহলে প্রদত্ত ক্রীড়াটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

সুতরাং কেবলমাত্র বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে ক্রীড়াটি সমাধান করা যাবে না।

এখন মিশ্র কৌশল ব্যবহার করে ক্রীড়াটি সমাধান করা যাক।

মনে করুন খেলোয়াড় A যথাক্রমে x, $1 - x$ সম্ভাবনা নিয়ে A_1, A_2 নির্বাচন করে এবং খেলোয়াড় B যথাক্রমে y, $1 - \mathrm{y}$ সম্ভাবনা নিয়ে B_1, B_2 নির্বাচন করে, যেখানে $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$।

এখন খেলোয়াড় A-র উদ্দেশ্য হল x এর মান এমন ঠিক করা যাতে $\min \{g_1, g_2\} = g'$ (ধরুন) এর মান সবচেয়ে বেশী হয়, যেখানে $g_1 = 8x + 4(1-x)$ হল A-র প্রত্যাশিত লাভ যখন B, B_1 কৌশল গ্রহণ করে এবং $g_2 = 5x + 7(1-x)$ হল A-র প্রত্যাশিত লাভ যখন B, B_2 কৌশল গ্রহণ করে। তাহলে এক্ষেত্রে আমরা পাই—

$g_1 = 8x + 4(1-x) \geq g'$

$g_2 = 5x + 7(1-x) \geq g'$

অনুরূপে খেলোয়াড় B-র উদ্দেশ্য থেকে আমরা পাই—

$l_1 = 8y + 5(1-y) \leq l'$

$l_2 = 4y + 7(1-y) \leq l'$

যেখানে y এর মান এমন ঠিক করতে হবে যাতে $l' = \max \{l_1, l_2\}$ এর মান সবচেয়ে কম হয়।

এখন $g_1 = g_2$, $l_1 = l_2$ থেকে আমরা পাই—

$8x + 4(1-x) = 5x + 7(1-x)$,

$8y + 5(1-y) = 4y + 7(1-y)$,

বা, $6x = 3$, $6y = 2$

সুতরাং, $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$ যেখানে $0 < \frac{1}{2} < 1,\ 0 < \frac{1}{3} < 1$।

তাহলে $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$ মানের জন্য g' সবচেয়ে বেশী হবে এবং l' সবচেয়ে কম হবে এবং

$$(g')_{\max} = 8\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = 5\cdot\frac{1}{2} + 7\cdot\frac{1}{2} = 6$$

$$(l')_{\min} = 8\cdot\frac{1}{3} + 5\cdot\frac{2}{3} = 4\cdot\frac{1}{3} + 7\cdot\frac{2}{3} = 6$$

অতএব $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$ মানের জন্য g' এর মান সবচেয়ে বেশী ও l' এর মান সবচেয়ে কম এবং $(g')_{\max} = (l')_{\min} = 6$।

সুতরাং ক্রীড়ার মান (value of the game) 6 এবং উত্তম কৌশলগুলি (optimal strategies) হল

$$\text{A} : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \;;\; \text{B} : \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

15.4 প্রাধান্য তত্ত্ব (rules for dominance) ব্যবহার করে ক্রীড়া সমস্যার সমাধান

ক্রীড়া সমস্যায় যদি কোন খেলোয়াড়ের (মনে করুন A) ক্ষেত্রে দুটি কৌশল, ধরা যাক I, II পাওয়া যায় যেখানে দুটি কৌশলের মধ্যে একটি কৌশল, ধরা যাক I এমন হয় যে I নির্বাচন করলে, প্রতিপক্ষ খেলোয়াড় B-র যে কোন কৌশলের জন্য, খেলোয়াড় A-র ফল কৌশল II এর চেয়ে সর্বদা ভাল বা

একই রকম হয় তাহলে আমরা বলব "কৌশল I, কৌশল II এর তুলনায় প্রাধান্য পায়" এবং এক্ষেত্রে প্রদত্ত মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স (মনে করুন C) থেকে কৌশল II এর সারি (বা স্তম্ভ) বাদ দেওয়া যায়।

এইভাবে সারি (বা স্তম্ভ) বাদ দিলে যদি নতুন মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি C_1 হয় তাহলে C_1 এর উত্তম কৌশলগুলি (optimal strategies) থেকে original matrix C এর উত্তম কৌশলগুলি পাওয়া যাবে যেখানে বাদ দেওয়া কৌশলটির সম্ভাবনা (probability) 0 ধরতে হবে। **নিচে বিবৃত উপপাদ্যগুলি (প্রমাণ ছাড়া) থেকে প্রাধান্য তত্ত্বের নিয়মগুলি স্পষ্টভাবে বোঝা যাবে।**

উপপাদ্য 1 : যদি দুই ব্যক্তি শূন্য যোগফল বিশিষ্ট $m \times n$ ক্রীড়ার মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্সের i তম সারির প্রত্যেক পদ r তম সারির অনুরূপ পদের চেয়ে কম বা সমান হয় তাহলে i তম সারি বাদ দিলে maximizing খেলোয়াড়ের উত্তম কৌশলগুলির (optimal strategies) কোন পরিবর্তন হবে না।

[এক্ষেত্রে r তম সারির ক্রীড়া কৌশল i তম সারির ক্রীড়া কৌশলের তুলনায় প্রাধান্য পায়।]

উপপাদ্য 2 : যদি কোন $m \times n$ ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের j-তম স্তম্ভের প্রত্যেক পদ k-তম স্তম্ভের অনুরূপ পদের চেয়ে বেশী বা সমান হয় তাহলে j-তম স্তম্ভ বাদ দিলে minimizing খেলোয়াড়ের উত্তম কৌশলগুলি (optimal strategies) কোন পরিবর্তন হবে না।

[এখানে k-তম স্তম্ভের ক্রীড়া কৌশল j-তম স্তম্ভের ক্রীড়া কৌশলের তুলনায় প্রাধান্য পায়।]

উপপাদ্য 3 : যদি $m \times n$ ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের i তম সারির প্রত্যেক পদ অন্য সারিগুলির উত্তল সমবায়ের (convex combination) অনুরূপ পদের চেয়ে $\leq$ (অন্তত একটি পদের জন্য $<$) হয়, তাহলে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স থেকে i তম সারি বাদ দিলে maximizing খেলোয়াড়ের উত্তম কৌশলগুলির (optimal strategies) কোন পরিবর্তন হবে না।

যদি j তম স্তম্ভের প্রত্যেক পদ অন্য স্তম্ভগুলির উত্তর সমবায়ের অনুরূপ পদের চেয়ে (অন্তত একটি পদের জন্য $>$) হয়, তাহলে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স থেকে j-তম স্তম্ভ বাদ দিলে minimizing খেলোয়াড়ের উত্তম কৌশলগুলির কোন পরিবর্তন হবে না।

15.5 উদাহরণ

প্রাধান্য তত্ত্বের ব্যবহার করে নিচের ক্রীড়া সমস্যাটি সমাধান করুন :

		B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A	A_1	1	–1	2	1
	A_2	2	2	0	1
	A_3	3	–2	1	–2
	A_4	3	1	–3	2

সমাধান : এখানে A maximizing খেলোয়াড় এবং B minimizing খেলোয়াড়। আমরা লক্ষ্য ররছি যে B_1 স্তম্ভের প্রত্যেক পদ B_2 স্তম্ভের অনুরূপ পদের চেয়ে বেশী বা সমান এবং তিনটি পদের ক্ষেত্রে [B_1 স্তম্ভের 1, 3, 3 ; B_2 স্তম্ভের – 1, – 2, 1] আমরা পাই 1 > – 1, 3 > – 2, 3 >।

সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী, প্রদত্ত মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স থেকে B_1 এর স্তম্ভটি বাদ দেওয়া যায়। এখন রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হল—

	B_2	B_3	B_4
A_1	–1	2	1
A_2	2	0	1
A_3	–2	1	–2
A_4	1	–3	2

আবার দেখা যাচ্ছে যে $\frac{1}{2}(A_1+A_2)$ [A_1 সারি ও A_2 সারির একটি উত্তর সমবায়] এর পদগুলি হল $\frac{1}{2}$, 1, 1 এবং $\frac{1}{2} > -2$, 1=1, 1> –2 যেখানে A_3 সারির অনুরূপ পদগুলি হল –2, 1, –2।

সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_3 এর সারিটি বাদ দেওয়া যায় এবং রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হয়—

	B_2	B_3	B_4
A_1	–1	2	1
A_2	2	0	1
A_4	1	–3	2

এখন $\frac{1}{2}$ (B_2+B_3) এর পদগুলি হল $\frac{1}{2}$, 1, –1 এবং B_4 স্তম্ভের অনুরূপ পদগুলি হল 1, 1, 2 যেখানে $1>\frac{1}{2}$, 1=1, 2>–1।

তাহলে প্রাধান্য তত্ত্বের নিয়ম অনুযায়ী B_4 এর স্তম্ভ বাদ দেওয়া যায় এবং রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হয়—

	B_2	B_3
A_1	–1	2
A_2	2	0
A_3	1	–3

এই ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে আমরা লক্ষ্য করছি যে $\frac{1}{4}A_1+\frac{3}{4}A_2$ [A_1, A_2 এর একটি উত্তল সমবায়] এর পদগুলি হল $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{2}$ এবং A_4 সারির অনুরূপ পদগুলি হল 1, –3 যেখানে $\frac{5}{4}>1$, $\frac{1}{2}>-3$।

সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_4-র সারি বাদ দেওয়া যায়। তাহলে রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হল—

	B_2	B_3
A_1	–1	2
A_2	2	0

যা একটি 2×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

	B_2	B_3
A_1	–1	2
A_2	2	0

ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে

max (row min)=max {–1, 0}=0

এবং min (row max)=min {2, 2}=2

যেখানে $0 \neq 2$.

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

এখন মিশ্র কৌশল অবলম্বন করলে, উত্তম কৌশলের জন্য আমরা পাই—

$-1.x + 2(1-x) = 2x + 0.(1-x)$..........(1)

$-1.y + 2(1-y) = 2y + 0.(1-y)$..........(2)

যেখানে maximizing খেলোয়াড় A_1, A_2 কৌশলগুলি যথাক্রমে x, $1-x$ $(0 \leq x \leq 1)$ সম্ভাবনা নিয়ে নির্বাচন করে এবং minimizing খেলোয়াড় B_2, B_3 কৌশলগুলি যথাক্রমে y, $1-y$ $(0 \leq y \leq 1)$ সম্ভাবনা নিয়ে নির্বাচন করে।

এখন (1) ও (2) সমাধান করে আমরা পাই $x = \frac{2}{5},\ y = \frac{2}{5}$।

সুতরাং A_1, A_2-র সম্ভাবনা $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$। এবং B_2, B_3-র সম্ভাবনা $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$।

ক্রীড়ার মান হল $-1\cdot\frac{2}{5} + 2\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$।

সুতরাং প্রদত্ত ক্রীড়াটির উত্তম কৌশলগুলি (optimal strategies) হল :

$$A : \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right);\ B : \left(0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

এবং ক্রীড়ার মান (value of the game) $\frac{4}{5}$।

15.6 প্রত্যাশা অপেক্ষক (expectation function) এবং কয়েকটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য

ধরা যাক $m \times n$ ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি $[a_{ij}]_{m\times n}$, যেখানে ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে maximizing খেলোয়াড় A তার প্রদত্ত কৌশলগুলি A_1, A_2..........A_m থেকে একটি কৌশল নির্বাচন

করে এবং minimizing খেলোয়াড় B তার প্রদত্ত কৌশলগুলি B_1, B_2............B_n থেকে একটি কৌশল নির্বাচন করে।

মিশ্র কৌশল অবলম্বনের ক্ষেত্রে মনে করুন খেলোয়াড় A তার প্রদত্ত কৌশলগুলি A_1, A_2..........A_m যথাক্রমে x_1, x_2..........x_m সম্ভাবনা নিয়ে এবং খেলোয়াড় B তার প্রদত্ত কৌশলগুলি B_1, B_2..........B_n যথাক্রমে y_1, y_2,..........y_n সম্ভাবনা নিয়ে নির্বাচন করে যেখানে $x_1+x_2+..........+..........+x_m=1$, $y_1+y_2+....................-y_n=1$ এবং $x_i \geq 0$, $y_j \geq 0$ ($i=1, 2,..........m;\ j=1, 2,..........n$)

B

		y_1	y_2	y_3	....	y_n
	x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1n}
	x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}
A	x_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	....	a_{3n}
	⋮	....	....	....	....	....
	⋮	....	....	....	....	....
	x_m	a_{m1}	a_{m1}	a_{m3}	....	a_{mn}

এখানে a_{ij} হল খেলোয়াড় A-র পাওনা (pay off) যখন খেলোয়াড় A এবং B যথাক্রমে বিশুদ্ধ কৌশল A_i, B_j নির্বাচন করে। তাহলে খেলোয়াড় B যখন বিশুদ্ধ কৌশল B_j নির্বাচন করে, খেলোয়াড় A-র প্রত্যাশিত পাওনা (expected pay off) হবে $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i$ যখন A মিশ্র কৌশল $X=(x_1, x_2..........x_m)$ অবলম্বন করে। তাহলে খেলোয়াড় B মিশ্র কৌশল $Y=(y_1, y_2.........y_n)$ অবলম্বন করলে, A-র প্রত্যাশিত পাওনাকে A-র **প্রত্যাশা অপেক্ষক** (pay off function) বলে এবং ইহাকে E (X, Y) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

তাহলে আমরা পাই $E\ (X,\ Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_i\, y_j$

এখন ধরুন $\max_{xi}\ \min_{yj} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \ x_i y_j = \underline{\vartheta}$

এবং $\underset{yj}{\min}\ \underset{xi}{\max} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ x_i y_j = \bar{\vartheta}$

[এখানে $\bar{\vartheta}$ এবং $\underline{\vartheta}$ এর অস্তিত্ব স্বীকার করা হয়েছে।]

আমরা লক্ষ্য করছি যে—

$$\underline{\vartheta} = \underset{xi}{\max}\left[\min\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\ x_i,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\ x_i, \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{j=1}^{m} a_{in}\ x_i\right\}\right]$$

এবং $$\underline{\vartheta} = \underset{yj}{\min}\left[\max\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\ y_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\ y_j, \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\ y_i\right\}\right]$$

এখন মিশ্র কৌশলের সাহায্যে ক্রীড়া সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে, maximizing খেলোয়াড় A-এর লক্ষ্য হল $x_1, x_2, \ldots\ldots x_m$ এর মান ঠিক করা যাতে নিশ্চিত প্রত্যাশিত লভের (minimum expected gain) পরিমাণ সবচেয়ে বেশী হয় এবং আমরা লক্ষ্য করছি যে সবচেয়ে বেশী এই নিশ্চিত লাভের পরিমাণ $\underline{\vartheta}$। Minimizing খেলোয়াড় B-র লক্ষ্য হল $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ এর মান ঠিক করা যাতে $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n$ এর যে কোন প্রদত্ত মানের জন্য তার সবচেয়ে বেশী প্রত্যাশিত লোকসানের (expected loss) পরিমাণ সবচেয়ে কম হয় এবং আমরা লক্ষ্য করছি যে এই পরিমাণটি হল $\bar{\vartheta}$ । এখন যদি $\overset{\circ}{X} = (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{\circ}{x}_m)$, $\overset{\circ}{Y} = (\overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{\circ}{y}_n)$, , মিশ্র কৌশলের জন্য $\underline{\vartheta} = \bar{\vartheta}$ (= ϑ ধরুন) হয় তাহলে ϑ হবে **ক্রীড়ার মান** (value of the game) এবং (X, Y) একজোড়া **উত্তম ক্রীড়া কৌশল** (optimal strategies) হবে।

[এখানে মনে রাখা দরকার যে X= $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m)$ মিশ্র কৌশলটি বিশুদ্ধ কৌশল A_i হবে যদি x_i=1, $x_1=x_2=\ldots\ldots=x_{i-1}=x_{j+1}=\ldots\ldots x_m=0$ হয় এবং Y=$(y_1, y_2, \ldots\ldots y_n)$ মিশ্র কৌশলটি বিশুদ্ধ কৌশল B_j হবে যদি y_i=1, $y_1=y_2\ldots\ldots y_{j-1}=y_{j+1}=\ldots\ldots=y_n=0$ হয়।]

একক 16-র অনুচ্ছেদ 16.3-তে আমরা দেখব যে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করলে যে কোন "দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট" ক্রীড়ার ক্ষেত্রে ক্রীড়ার মান এবং উত্তম কৌশল নির্ণয় করা যায়।

কয়েকটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য :

উপপাদ্য 1 : যদি ϑ মান বিশিষ্ট কোন ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক পদের সঙ্গে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা P যোগ করা হয় তাহলে উত্তম ক্রীড়া কৌশলগুলির (optimal strategies) কোন পরিবর্তন হবে না, কিন্তু রূপান্তরিত ক্রীড়ার মান হবে ϑ+P।

প্রমাণ : মনে করুন মান বিশিষ্ট প্রদত্ত ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি $[a_{ij}]_{m\times n}$। এখন এই ম্যাট্রিক্সটির প্রত্যেক পদের সঙ্গে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা P যোগ করলে রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হয় $[a_{ij}+P]_{m\times n}$। যদি

প্রদত্ত ক্রীড়ার এবং রূপান্তরিত ক্রীড়ার প্রত্যাশা অপেক্ষক যথাক্রমে E (X, Y) এবং E′ (X, Y) হয় তাহলে আমরা পাই—

$$E(X, Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_i\,y_j,\quad E'(X, Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+P)\,x_i\,y_j$$ যেখানে

$X=(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m)$, $Y=(y_1, y_2\ldots\ldots y_n)$

এবং $\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{j=1}^{n}y_i=1$

এখন যদি প্রদত্ত ক্রীড়ার একজোড়া উত্তম ক্রীড়া কৌশল $(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y})$ হয় তাহলে—

$$\vartheta=E(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y})=\max_{xi}\min_{yj}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_i\,y_j।$$

এখন $E'(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+P)\,x_i\,y_j$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_i\,y_j+P\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i\,y_j$$

$=E(X, Y)+P\,(x_1+x_2+\ldots\ldots+x_m)\,(y_1+y_2+\ldots\ldots+y_n)$

$=E(X, Y)+P.1.1$

$=E(X, Y)+P$

সুতরাং আমরা পাই, $E'(X, Y)=E(X, Y)+P$ .... (1)

P একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা হওয়ায়, (1) থেকে আমরা পাই—

$$\max_{xi}\min_{yj}E'(X, Y)=\max_{xi}\min_{yj}E(X, Y)+P=E(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y})+P=\vartheta+P$$

তাহলে আমরা পাই— $E'\left(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y}\right)=E\left(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y}\right)+P=\vartheta+P$......(2)

এখন (২) থেকে বলা যায় যে রূপান্তরিত ক্রীড়ার ক্ষেত্রেও $(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y})$ একজোড়া উত্তম কৌশল হবে এবং এই ক্রীড়ার মান হবে $\vartheta+P$। সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উপপাদ্য 2 : যদি কোন ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (skew symmetric matrix) হয় তাহলে ক্রীড়ার মান (value of the game) শূন্য হবে।

প্রমাণ : প্রদত্ত ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ হলে, maximizing খেলোয়াড়ের প্রত্যাশা অপেক্ষক হবে $E(X, Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_i,\ y_j$, যেখানে $X=(x_1, x_2\ldots\ldots x_m)$, $Y=(y_1, y_2,\ldots\ldots y_n)$ যথাক্রমে maximizing খেলোয়াড় A ও minimizing খেলোয়াড় B এর মিশ্র কৌশল।

এখানে $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স। সুতরাং $m=n$ এবং $a_{ij}= -a_{ij}$ (i=1, 2, ...n; j=1, 2,.......n)।

তাহলে এখানে X=(x_1, x_2........x_n) ; Y=(y_1, y_2,........y_n) এবং $E(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_i\ y_j$

এখন $(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y})$ একজোড়া উত্তম কৌশল হলে এবং ক্রীড়ার মান ϑ হলে,

$\vartheta = E(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y}) = \max_x \min_y E(X,Y)$। তাহলে আমরা পাই—

$\vartheta = \min_y E(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y})$ ....(1)

এখন (1) থেকে আমরা পাই $E(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y}) \geq \vartheta$ যা minimizing খেলোয়াড় B এর যে কোন মিশ্র কৌশল Y=(y_1, y_2........y_n) এর জন্য সত্য। তাহলে Y $= \overset{o}{x} = (\overset{o}{x}_1, \overset{o}{x}_2, ...\overset{o}{x}_n)$ এর জন্য আমরা পাই $E(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y}) \geq \vartheta$..........(2)

কিন্তু $(\overset{o}{X}, \overset{o}{Y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \overset{o}{x}_i\ \overset{o}{x}_j$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \overset{o}{x}_i\ \overset{o}{x}_j \quad (\therefore \text{ এখানে } a_{ij} = -a_{ji})$$

$\therefore E(\overset{o}{X}, \overset{o}{X}) = -E(\overset{o}{X}, \overset{o}{X})$

বা $2E(\overset{o}{X}, \overset{o}{X}) = 0$

সুতরাং $E(\overset{o}{X}, \overset{o}{X}) = 0$। তাহলে (2) থেকে আমরা পাই $\vartheta \leq 0$ .... (3)

আবার $\vartheta = \min_Y \ \text{man}_X\ E(X, Y) = \text{man}_X\ E(X, \overset{o}{Y})$

সুতরাং maximizing খেলোয়াড় A-র যে কোন মিশ্র কৌশল X = (x_1, x_2............x_n) এর জন্য আমরা পাই $E(X, \overset{o}{Y}) \leq \vartheta$

তাহলে $X, \overset{o}{Y} = (\overset{o}{y}_1, \overset{o}{y}_2, ...\overset{o}{y}_n)$ ধরলে

আমরা পাই $E(\overset{o}{Y}, \overset{o}{Y}) \leq \vartheta$ .... (4)

আবার $E(\overset{o}{Y}, \overset{o}{Y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \overset{o}{y}_i, \overset{o}{y}_j$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \overset{o}{y}_i, \overset{o}{y}_j = -E(\overset{o}{Y}, \overset{o}{Y})$$

$\therefore\ 2E\ (\overset{o}{Y}, \overset{o}{Y}) = 0$

সুতরাং $E(\overset{o}{Y}, \overset{o}{Y}) = 0$

তাহলে (4) থেকে আমরা পাই $\vartheta \geq 0$ .... (5)

এখন (3) ও (5) থেকে আমরা পাই $\vartheta \geq 0$।

সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

15.7 সারাংশ

প্রথমে আমরা দেখেছি কিভাবে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে 2×2 ক্রীড়ার (যার অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই) সমাধান করা যায়। এর পর আমরা দেখেছি কিভাবে প্রাধান্য তত্ত্বের (rules of dominance) সাহায্যে অনেক ক্ষেত্রে কোন ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সকে 2×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্সে রূপান্তর করা যায়। পরিশেষে প্রত্যাশা অপেক্ষকের (expectation function) সংজ্ঞা দিয়ে দুটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের প্রমাণ দেওয়া হয়েছে।

15.8 অনুশীলনী

1. নিচের 2×2 ক্রীড়াগুলি সমাধান করুন :

(i)

	B_1	B_2
A_1	10	5
A_2	5	10

(ii) A :

	I	II
I	5	– 4
II	– 4	– 1

(iii)

	I	II
I	2	12
II	8	3

2. প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে নিচের 4×5 ক্রীড়াটি সমাধান করুন :

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	5	5	20	4
A_2	11	15	10	17	25
A_3	7	12	8	9	8
A_4	5	13	9	10	5

3. নিচের প্রত্যেকটি ক্রীড়াকে 2×2 ক্রমের মূল্যসূচক বিশিষ্ট ক্রীড়ায় রূপান্তর করুন :

(i)

7	7	6	3	2
9	8	9	3	5
10	6	7	10	11

(ii)

2	3	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	2	0
$\frac{1}{2}$	1	1

4. 3 (ii) এর ক্রীড়াটি সমাধান করুন।

5. কোন ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	0	2
	A_2	1	1

$E(X, Y) = 1 - 2x\left(y - \frac{1}{2}\right)$, যেখানে $X = (x, 1 - x)$, $Y = (y, 1 - y)$ যথাক্রমে খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B এর মিশ্রকৌশল।

এর থেকে ক্রীড়ার মান নির্ণয় করুন এবং দেখান যে খেলোয়াড় A-র উত্তম কৌশল একটি বিশুদ্ধ কৌশল এবং অসংখ্য মিশ্র কৌশল B-র উত্তম কৌশল হবে।

[সংকেত : $E(X, Y) = 0 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x\,(1 - y) + 1 \cdot (1 - x) \cdot y + 1 \cdot (1 - x)(1 - y)$

$$= 2x - 2xy + y - xy + 1 + xy - x - y$$
$$= 1 + x - 2xy$$
$$= 1 - 2x\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

এখানে y এর যে কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য $E(X, Y) \leq 1$, যখন $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ এবং $E(X, Y) \geq 1$ যখন $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ ।

সুতরাং $\max\limits_{0 \leq x \leq 1} E(X, Y) = 1$ যখন $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

এবং $\max\limits_{0 \leq x \leq 1} E(X, Y) > 1$ যখন $0 \leq y < \frac{1}{2}$.

$$\therefore \quad \min_{0 \leq y < \frac{1}{2}} \left[\max_{0 \leq x \leq 1} E(X, Y)\right] = 1 \text{ এবং}$$

$$\min_{\frac{1}{2} \leq y \leq 1} \left[\max_{0 \leq x \leq 1} E(X, Y)\right] = 1$$

সুতরাং $\max\limits_{0 \leq y \leq 1} \left[\max\limits_{0 \leq x \leq 1} E(X, Y)\right] = 1$

আমরা লক্ষ্য করছি যে $x = 0$ হলে এবং y এর যে কোন মানের জন্য যেখানে $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$, $E(X, Y) = 1$ হয়।]

6. নিচের প্রত্যেক 2×2 ক্রীড়ার প্রত্যাশা অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং এর সাহায্যে ক্রীড়ার মান ও উত্তম কৌশল বের করুন :

(i)

B

A		
	1	7
	6	2

(ii)

B

A		
	1	3
	4	2

7. যদি কোন 3×3 ক্রীড়ার মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্সটি (maximizing খেলোয়াড়ের) হয়।

d	c	c
a	f	e
b	d	c

যেখানে, $0 < a < b < c < d < e < f$

এবং (x_1, x_2, x_3) ও (y_1, y_2, y_3) যথাক্রমে maximizing খেলোয়াড় ও minimizing খেলোয়াড়ের উত্তম কৌশল হয়, তাহলে দেখান $x_3 = y_2 = 0$ এবং ক্রীড়ার মান ϑ হলে প্রমাণ করুন $c < \vartheta < d$।

15.9 উত্তর মালা

1. (i) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \ \vartheta = \frac{15}{2}$

   (ii) $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right); \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right); \ \vartheta = \frac{7}{4}$

   (iii) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right); \ \vartheta = 6$

2. বিশুদ্ধ কৌশল (A_2, B_3) ; $\vartheta = 10$

3. (i) $\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$

   (ii) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

4. $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right); \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right); \ \vartheta = \frac{7}{8}$

5. $\vartheta = 1$

6. (i) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right); \vartheta = \frac{5}{2}$

   (ii) $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \vartheta = 4$

একক 16 ❑ ক্রীড়া সমস্যাকে L.P.P হিসাবে সমাধান

গঠন

16.1 প্রস্তাবনা

একক 14-তে আমরা দেখেছি যে কোন ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকলে, ক্রীড়াটি বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে সমাধান করা যায়। একক 15-তে আমরা লক্ষ্য করেছি যে অনেক ক্ষেত্রে প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে কোন ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সকে 2×2 ক্রমের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সে রূপান্তর করে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে সমাধান করা যায়। এই এককে আমরা দেখাব যে প্রত্যেক ক্রীড়া সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় (L.P.P.) রূপান্তর করে সমাধান করা যায় অর্থাৎ দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট যে কোন ক্রীড়ার ক্ষেত্রে ক্রীড়ার মান এবং উত্তম কৌশল নির্ণয় করা সম্ভব।

16.2 ক্রীড়া সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় রূপান্তর [Reduction of a two-person zero-sum game to L.P.P]

মনে করুন ϑ মান বিশিষ্ট $m \times n$ ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হল $[a_{ji}]_{m \times n}$।
এখানে আমরা ধরে নিতে পারি যে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক পদ $a_{ji} > 0$ ($i = 1, 2, ...m$;

$j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n$) কারণ তা না হলে প্রত্যেক পদের সঙ্গে উপযুক্ত (appropriate) ধনাত্মক সংখ্যা P যোগ করে প্রত্যেক পদকে ধনাত্মক করা যায় এবং আমরা যানি এর ফলে রূপান্তরিত ক্রীড়ার মান হবে $\vartheta + P$। কিন্তু উত্তম কৌশলের কোন পরিবর্তন হবে না। এখন মনে করুন maximizing খেলোয়াড় A ও minimizing খেলোয়াড় B যথাক্রমে মিশ্রকৌশল $(x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_m)$ ও $(y_1, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n)$ অবলম্বন করে। তাহলে খেলোয়াড় A, A_1, $A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots A_m$ প্রদত্ত কৌশলগুলিকে যথাক্রমে x_1, $x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_m$ সম্ভাবনা নিয়ে এবং খেলোয়াড় B তার প্রদত্ত B_1, $B_2, \ldots\ldots\ldots B_n$ কৌশলগুলিকে যথাক্রমে y_1, $y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots y_n$ সম্ভাবনা নিয়ে উদ্দেশ্যহীনভাবে (at random) নির্বাচন করে, যেখানে $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ এবং $x_i \geq 0$, $y_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots m\,;\ j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n)$।

		y_1 B_1	y_2 B_2	....	y_n B_n
x_1	A_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}
x_2	A_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	....	....	....	....
		....	....	....	....
		....	....	....	....
x_m	A_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}

খেলোয়াড় A-র সমস্যা

যদি খেলোয়াড় B কৌশল B_1 নির্বাচন করে তাহলে মিশ্র কৌশল $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_m)$ এর জন্য খেলোয়াড় A-র প্রত্যাশিত লাভকে (expected gain) g_1 দ্বারা প্রকাশ করলে আমরা পাই,

$$g_1 = a_{11}\,x_1 + a_{21}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{ml}\,x_m$$

অনুরূপে আমরা পাই,

$$g_2 = a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m2}\,x_m$$
$$g_3 = a_{13}\,x_1 + a_{23}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m3}\,x_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g_n = a_{1n}\,x_1 + a_{2n}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}\,x_n$$

যেখানে A-র প্রত্যাশিত লাভ g_2, g_3, ... g_n যখন খেলোয়াড় B যথাক্রমে কৌশল B_2, $B_3 \ldots\ldots\ldots B_n$ নির্বাচন করে।

মনে করুন $\min\{g_1, g_2, \ldots\ldots\ldots\ldots g_n\} = g' \ldots\ldots\ldots\ldots$ (1)

এখানে $g' > 0$ কারণ $a_{ij} > 0$, i, j এর সকল মানের জন্য এবং $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots m)$।

তাহলে মিশ্র কৌশল (x_1, x_2............x_m) এর জন্য A-র প্রত্যাশিত লাভের পরিমাণ কমপক্ষে g' হবে। এখন খেলোয়াড় A-র উদ্দেশ্য হল x_1, x_2............x_m এর মান নির্ণয় করা যাতে g' এর মান সবচেয়ে বেশি হয় অর্থাৎ $\frac{1}{g'}$ এর মান সবচেয়ে কম হয় ($\therefore g' > 0$)।

(1) থেকে আমরা লখিতে পারি,

$$g_1 \geq g',\ g_2 \geq g',\ \ldots\ldots\ldots\ g_n \geq g'$$

বা, $\frac{g_1}{g'} \geq 1, \frac{g_2}{g'} \geq 1 \ldots\ldots\ldots \frac{g_n}{g'} \geq 1\ (\because g' > 0)$

তাহলে আমরা পাই,

$$a_{11}\frac{x_1}{g'} + a_{21}\frac{x_2}{g'} + \ldots\ldots\ldots + a_{m1}\frac{x_m}{g'} \geq 1,$$

$$a_{12}\frac{x_1}{g'} + a_{22}\frac{x_2}{g'} + \ldots\ldots\ldots + a_{m2}\frac{x_m}{g'} \geq 1,$$

....

....

$$a_{1n}\frac{x_1}{g'} + a_{2n}\frac{x_2}{g'} + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}\frac{x_m}{g'} \geq 1,$$

এবং $\frac{x_1}{g'} = X_1,\ \frac{x_2}{g'} = X_2,\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{x_m}{g'} = X_m$

ধরলে আমরা পাই,

$a_{ji} X_1 + a_{2j} X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mj} X_m \geq 1,\ g = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$

আবার, $\frac{1}{g'} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_m}{g'} = X_1 + X_2 + \ldots\ldots\ldots + X_m$

যেখানে, $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ \ldots\ldots\ldots\ X_m \geq 0.$

তাহলে খেলোয়াড় A-র সমস্যাকে নিচের L.P.P. হিসাবে লেখা যায় :

অবম $\frac{1}{g'} = x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_m,$

শর্তসাপেক্ষে,

$$a_{11} X_1 + a_{21} X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m1} X_m \geq 1,$$
$$a_{12} X_2 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m2} X_m\ 1,$$

....

....

$$a_{1n} X_n + a_{2n} X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn} X_m \geq 1,$$
$$X_1, X_2 \ldots\ldots\ldots X_m \geq 0$$

খেলোয়াড় B-র সমস্যা

মনে করুন max $\{l_1, l_2 \ldots\ldots\ldots\ldots l_m\} = l' \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$,

যেখানে মিশ্র কৌশল $(y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n)$ এর জন্য খেলোয়াড় B-র প্রত্যাশিত লোকসান (expected loss) হল $l_1, l_2, \ldots\ldots\ldots\ldots l_m$ যখন খেলোয়াড় A যথাক্রমে $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots A_m$ নির্বাচন করে।

তাহলে $l_i = a_{i1}\, y_1 + a_{i2}\, y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\, y_n \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots m)$।

এখন (2) থেকে আমরা লিখতে পারি $l_1 \leq l', l_2 \leq l', \ldots\ldots\ldots\ldots l_m \leq l'$ এবং $l' > 0$ হওয়ায় আমরা পাই, $\frac{l_i}{l'} \leq 1$, $(i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots m)$।

খেলোয়াড় B-র উদ্দেশ্য হল $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n$ এর মান নির্ণয় করা যাতে l' এর মান সবচেয়ে কম হয় অর্থাৎ $\frac{1}{l'}$ এর সবচেয়ে বেশী হয় $(\because l' > 0)$।

এখন $\frac{l_i}{l'} \leq 1$, $(i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots m)$। থেকে আমরা পাই,

$$a_{i1}\frac{y_1}{l'} + a_{i2}\frac{y_2}{l'} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\frac{y_n}{l'} \leq 1$$

এবং $\frac{y_1}{l'} = Y_1, \frac{y_2}{l'} = Y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{y_n}{l'} = Y_n$ ধরলে আমরা পাই

$a_{i1}\, Y_1 + a_{i2}\, Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\, Y_n \leq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots m)$।

আবার $\frac{1}{l'} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_n}{l'} = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + Y_n$,

যেখানে $Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots Y_n \geq 0$।

তাহলে খেলোয়াড় B-র সমস্যাকে নিচের L.P.P. হিসাবে লেখা যায় :

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + Y_n$,

শর্তসাপেক্ষে,

$$\begin{aligned}
&a_{11}\, Y_1 + a_{12}\, Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1\, Y_n \leq 1,\\
&a_{21}\, Y_1 + a_{22}\, Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}\, Y_n \leq 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}\, Y_1 + a_{m2}\, Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}\, Y_n \leq 1,\\
&Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots Y_n \geq 0
\end{aligned}$$

আমরা লক্ষ্য করছি যে B-র সমস্যাটি (L.P.P. হিসাবে) A-র সমস্যার (L.P.P. হিসাবে) দ্বৈত (Dual) সমস্যা এবং A-র সমস্যাটি B-র সমস্যার দ্বৈত সমস্যা।

এখন $(l')_{\text{অবম}} = \min\limits_{x_i} \max\limits_{y_j} \left[\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\, x_i\, y_j\right]$

এবং $(g')_{\text{চরম}} = \max\limits_{y_j} \min\limits_{x_i} \left[\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\, x_i\, y_j\right]$

পরবর্তী অনুচ্ছেদ আমরা প্রমাণ করব যে $(l')_{\text{অবম}} = (g')_{\text{চরম}} = \vartheta$ (ধরুন) বা ক্রীড়ার মান (Value of the game)।

তাহলে দেখা গেল যে কোন ক্রীড়া সমস্যাকে L.P.P-তে রূপান্তর করে সমাধান করা যায়।

16.3 দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যা সংক্রান্ত মৌল উপপাদ্য (Fundamental theorem on two-person zero sum game)

ক্রীড়া সমস্যা সংক্রান্ত মৌল উপপাদ্যের বিবৃতি ঃ

মিশ্র কৌশল অবলম্বন করলে যে কোন "দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট" ক্রীড়ার মান (value of the game) এবং উত্তম কৌশল (optimal strategies) পাওয়া যাবে।

প্রমাণ ঃ মনে করুন প্রদত্ত ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি $[a_{ji}]_{m \times n}$ যেখানে আমরা ধরে নিতে পারি যে ম্যাট্রিক্সটির প্রত্যেকটি পদ $a_{ij} > 0$ [16·2 অনুচ্ছেদে এর ব্যাখ্যা দেওয়া হয়েছে]।

মনে করুন maximizing খেলোয়াড় A-র মিশ্র কৌশল $(x_1, x_2............x_m)$ এবং minimizing খেলোয়াড় B-র একটি মিশ্র কৌশল $(y_1, y_2,............y_n)$ অর্থাৎ খেলোয়াড় A তার প্রদত্ত কৌশলগুলি $A_1, A_2,............Am$ কে যথাক্রমে $x_1, x_2,$ .... x_m সম্ভাবনা নিয়ে এবং খেলোয়াড় B তার প্রদত্ত কৌশলগুলি $B_1, B_2,............B_n$ কে যথাক্রমে $y_1, y_2,............y_n$ সম্ভাবনা নিয়ে উদ্দেশ্যহীন ভাবে (at random) নির্বাচন করে, যেখানে—

$\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$ এবং $x_i > 0,\ y_j > 0$ $(i = 1, 2,......... ; j = 1, 2, ...n)$।

তাহলে 16·2 অনুচ্ছেদে দেখেছি যে ক্রীড়া সমস্যাকে নিচের দুটি L.P.P. হিসাবে লেখা যায় :

খেলোয়াড় A-র সমস্যা

অবম $\dfrac{1}{g'} = X_1 + X_2 + ... + X_m,$

শর্তসাপেক্ষে,

$$a_{11}\,X_1 + a_{21}\,X_2 + \text{...........} + a_{m1}\,X_m \geq 1,$$
$$a_{21}\,X_1 + a_{22}\,X_2 + \text{...........} + a_{m2}\,X_m \geq 1,$$
$$\text{..}$$
$$\text{..}$$
$$a_{1n}\,X_1 + a_{2n}\,X_2 + \text{...........} + a_{mn}\,X_m \geq 1,$$

X_1, X_2 .... $X_m \geq 0$ যেখানে $X_i = \dfrac{x_i}{g'}$ $\quad (i = 1, 2, \text{...........} m)$।

খেলোয়াড় B-র সমস্যা

চরম $\dfrac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + \text{...........} + Y_n$,

শর্তাসাপেক্ষ,

$$a_{11}\,Y_1 + a_{12}\,Y_2 + \text{...........} + a_{1n}\,Y_n \leq 1,$$
$$a_{21}\,Y_1 + a_{22}\,Y_2 + \text{...........} + a_{2n}\,Y_n \leq 1,$$
$$\text{..}$$
$$\text{..}$$
$$a_{m1}\,Y_1 + a_{m2}\,Y_2 + \text{...........} + a_{mn}\,Y_n \leq 1,$$

Y_1, Y_2, ... $Y_n \geq 0$, যেখানে $Y_i = \dfrac{y_j}{l'}$ $(i = 1, 2, \text{...........} n)$।

এখানে আমরা লক্ষ্য করছি যে এই দুটি সমস্যার (L.P.P হিসাবে) যে কোনটি অন্যটির দ্বৈত্য সমস্যা এখন আমরা দেখাব যে A-র সমস্যাটির কার্যকর সমাধান (feasible solution) আছে।

ধরুন $a = \dfrac{1}{\min\{a_{11},\ a_{12}, \text{............} a_{1n}\}}$, যেখানে $\min\{a_{11}, a_{12}, \text{............} a_{1n}\} > 0$, যেহেতু এখানে a_{11}, a_{12}, ... $a_{1n} > 0$।

তাহলে $a > 0$ এবং $\dfrac{a_{11}}{a} \geq \dfrac{a_{11}}{a_{11}} = 1,\ \dfrac{a_{12}}{a} \geq \dfrac{a_{12}}{a_{12}} = 1, \text{...........} \dfrac{a_{1n}}{a} \geq 1$

সুতরাং $X_1 = a$, $X_2 = 0$, ... $X_m = 0$

A-র সমস্যার সমস্ত শর্তগুলি মানিয়া চলে।

তাহলে এই সমস্যাটির (a, 0,............0) একটি কার্যকর সমাধান হবে। আবার আমরা লক্ষ্য করছি যে এই সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষক যে কোন কার্যকর সমাধানের জন্য $X_1 + X_2 + \text{...........} X_m \geq 0$ এবং তাহলে অবম মান নির্ণয় সংক্রান্ত L.P.P টির বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান অবাধ (unbounded) হতে পারে না। তাহলে A-র সমস্যাটির (L.P.P হিসাবে) সসীম চরম সমাধান (finite optimal solution) থাকবে। এখন দ্বৈততার মৌল উপপাদ্য (Fundamental Theorem on. Duality) থেকে আমরা জানি "যদি মুখ্য সমস্যা বা দ্বৈত সমস্যা যে কোনটির সসমী চরম সমাধান পাওয়া যায় তাহলে অন্যটিরও সসীম চরম সমাধান পাওয়া যাবে এবং দুটি সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের optimal মানগুলি একই হবে।"

সুতরাং B-র সমস্যাটিও সসীম চরম সমাধান পাওয়া যাবে এবং $\left(\frac{1}{g'}\right)_{\text{অবম}} = \left(\frac{1}{l'}\right)_{\text{চরম}}$

অর্থাৎ $(g')_{\text{চরম}} = (l')_{\text{অবম}}$।

তাহলে ক্রীড়ার মান পাওয়া যাবে ও ক্রীড়ার মান হল $(g')_{\text{চরম}}$ [বা $(l')_{\text{অবম}}$] এবং দুটি সমস্যার চরম সমাধান (optimal solutions) থেকে ক্রীড়ার উত্তম কৌশলগুলি (optimal strategies) পাওয়া যাবে।

$\therefore$ উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

মন্তব্য ঃ যদি প্রদত্ত ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক পদের সঙ্গে কোন সংখ্যা P যোগ করে ক্রীড়া সমস্যাকে L.P.P-তে রূপান্তর করা হয় তাহলে প্রদত্ত ক্রীড়ার মান হবে $(g')_{\text{চরম}} - P$ বা $(l')_{\text{অবম}} - P$। কিন্তু উত্তম কৌশলগুলির কোন পরিবর্তন হবে না।

16.4 উদাহরণ

1. একটি ক্রীড়া সমস্যার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স নিচে দেওয়া হল। ক্রীড়া সমস্যাটিকে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা হিসাবে রূপান্তর করে সমাধান করুন।

		খেলোয়াড় B		
		B_1	B_2	B_3
খেলোয়াড় A	A_1	1	– 1	3
	A_2	3	5	– 3
	A_3	6	2	– 2

সমাধান ঃ এখানে প্রদত্ত মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক পদের সঙ্গে 4 যোগ করলে (যাতে প্রত্যেক পদ > 0 হয়) রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হয়—

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	3	7
A_2	7	9	1
A_3	10	6	2

মনে করুন খেলোয়াড় A মিশ্র কৌশল (x_1, x_2, x_3) এবং খেলোয়াড় B মিশ্র কৌশল (y_1, y_2, y_3) অবলম্বন করে যেখানে $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ ও $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$)।

তাহলে খেলোয়াড় A-র সমস্যাটি (L.P.P. হিসাবে) হবে—

অবম $\frac{1}{g'} = X_1 + X_2 + X_3,$

শর্তসাপেক্ষে,

$$5X_1 + 7X_2 + 10X_3 \geq 1$$
$$3X_1 + 9X_2 + 6X_3 \geq 1$$
$$7X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 1,$$
$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0$$

এবং খেলোয়াড় B-র সমস্যাটি (L.P.P হিসাবে) হবে—

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + Y_3,$

শর্তসাপেক্ষে,

$$5Y_1 + 7Y_2 + 7Y_3 \leq 1$$
$$7Y_1 + 9Y_2 + Y_3 \leq 1$$
$$10Y_1 + 6Y_2 + 2Y_3 \geq 1,$$
$$Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \geq 0$$

এখানে $X_i = \frac{x_i}{g'}$ $(i = 1, 2, 3)$ এবং $Y_i = \frac{y_i}{l'}$ $(j = 1, 2, 3)$

এখন B-র সমস্যাটি (যা চরম মান নির্ণয় সংক্রান্ত একটি L.P.P.) Simplex algorithm রে সাহায্যে সমাধান করা যাক :

Y_4, Y_5, Y_6 এই slack চলগুলির সাহায্যে B-র সমস্যাটি নিচের আকারে লেখা যায় ঃ

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6,$

শর্তসাপেক্ষে,

$$5Y_1 + 3Y_2 + 7Y_3 + Y_4 = 1$$
$$7Y_1 + 9Y_2 + Y_3 + Y_5 = 1$$
$$10Y_1 + 6Y_2 + Y_3 + Y_5 = 1$$
$$Y_j \geq 0,\ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Simplex Table—I

		c_j	1	1	1	0	0	0
$\overline{C}_B$	$\overline{Y}_B$	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	$\overline{a}_5$	$\overline{a}_6$
0	Y_4	1	5	3	7	1	0	0
0	Y_5	1	7	$\boxed{9}$	1	0	1	0
0	Y_6	1	10	6	2	0	0	1
$z_j - c_j$			−1	−1	−1	0	0	0
				↑			↓	

$$\min\left\{\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{6}\right\} = \frac{1}{9}$$

Simplex Table—II

		c_j	1	1	1	0	0	0
$\overline{C}_B$	$\overline{Y}_B$	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	$\overline{a}_5$	$\overline{a}_6$
0	Y_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	0	$\boxed{\frac{20}{3}}$	1	$-\frac{1}{3}$	0
1	Y_2	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{9}$	1	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0
0	Y_6	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1
$z_j - c_j$			$-\frac{2}{9}$	0	$-\frac{8}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0
					↑	↓		

$$\min\left\{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{20}{3}},\ \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}},\ \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}\right\} = \frac{1}{10}$$

Simplex Table—III

		c_j	1	1	1	0	0	0
$\overline{C}_B$	$\overline{Y}_B$	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	$\overline{a}_5$	$\overline{a}_6$
1	Y_3	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{20}$	0
1	Y_2	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{15}$	1	0	$-\frac{1}{60}$	$\frac{7}{60}$	0
0	Y_6	$\frac{1}{5}$	$-\frac{8}{15}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1
$z_j - c_j$			$\frac{2}{15}$	0	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	0

এখানে j-এর সকল মানের জন্য $z_j - c_j \geq 0$।

সুতরাং Simplex Table III থেকে দ্বৈত সমস্যা এবং মুখ্য সমস্যার চরম সমাধান (optimal solution) পাওয়া যাবে।

এখানে B-র সমস্যার ক্ষেত্রে $Y_1 = 0$, $Y_2 = \frac{1}{10}$, $Y_3 = \frac{1}{10}$, থেকে B-র উত্তম কৌশল পাওয়া যাবে, যেখানে $Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{1}{5}$ যা $\frac{1}{l'}$ এর চরম মান (maximium value)।

সুতরাং l' -এর অবম মান = 5 যা রূপান্তরিত ক্রীড়ার মান (value of the transformed game)।

সুতরাং এখানে প্রদত্ত ক্রীড়ার মান হবে 5 – 4 = 1।

এখন B-এর চরম কৌশলের জন্য $y_1 = 5Y_1 = 0$, $y_2 = 5Y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = 5Y_3 = \frac{1}{2}$ ।

আবার Simplex Table III-এর $z_j - c_j$ সারি থেকে আমরা বলতে পারি যে $X_1 = \frac{2}{15}$, $X_2 = \frac{1}{15}$, $X_3 = 0$ থেকে A-র চরম কৌশল পাওয়া যাবে। সুতরাং A-র চরম কৌশলের জন্য $x_1 = 5X_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 5X_2 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $x_3 = 0$।

তাহলে প্রদত্ত ক্রীড়াটির মান (ϑ) = 1 এবং খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B-এর উত্তম কৌশল যথাক্রমে $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ এবং $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

16.5 সারাংশ

এই এককে আমরা প্রমাণ করেছি “যে কোন ক্রীড়ার মান এবং উত্তম কৌশল পাওয়া যাবে (মিশ্র কৌশল ব্যবহার করলে)” এবং **যে কোন ক্রীড়ার সমস্যাকে** রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় রূপান্তর করে সমাধান করা যায়।

16.6 অনুশীলনী

1. নিচের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট প্রত্যেক ক্রীড়ার সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় (L.P.P.) রূপান্তর করুন ঃ

(i)

B

		B_1	B_2	B_3
	A_1	10	2	5
A	A_2	1	7	4
	A_3	6	3	9

(ii)

B

		B_1	B_2	B_3
A	A_1	2	– 2	3
	A_2	– 3	5	– 1

(iii)

	B_1	B_2
A_1	2	4
A_2	6	1

2. নিচের প্রত্যেকটি ক্রীড়া সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় রূপান্তর করে সমাধান করুন ঃ

(a)

B

		B_1	B_2	B_3
A	A_1	2	– 2	3
	A_2	– 3	5	– 1

(b)

		B	
		B_1	B_2
	A_1	4	–1
A	A_2	0	7
	A_3	5	5

(c)

		B		
		B_1	B_2	B_3
	A_1	1	– 1	– 1
A	A_2	– 1	– 1	3
	A_3	– 1	2	– 1

(d)

		খেলোয়াড় B		
		B_1	B_2	B_3
	A_1	10	2	5
খেলোয়াড় A	A_2	1	7	4
	A_3	6	3	9

16.7 উত্তরমালা

1\. (i) **B-এর সমস্যা**

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + Y_3,$

যেখানে $10Y_1 + 2Y_2 + 5Y_3 \leq 1$

$Y_1 + 7Y_2 + 4Y_3 \leq 1$

$6Y_1 + 3Y_2 + 9Y_3 \leq 1,$

$Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \geq 0$ এবং $y_i = l'\ \ Y_i\,(i = 1, 2, 3)$

A-র সমস্যা

অবম $\frac{1}{g'} = X_1 + X_2 + X_3,$

যেখানে $10X_1 + X_2 + 6X_3 \geq 1$

$2X_1 + 7X_2 + 3X_3 \geq 1$

$5X_1 + 4X_2 + 9X_3 \geq 1,$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$ এবং $x_i = g' \ X_i (i = 1, 2, 3)$

(ii) প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক পদের সঙ্গে 4 যোগ করলে B-এর সমস্যাটি হয়—

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + Y_3,$

যেখানে $6Y_1 + 2Y_2 + 7Y_3 \leq 1$

$Y_1 + 9Y_2 + 3Y_3 \leq 1$

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$ এবং $y_i = l' \ Y_i (i = 1, 2, 3)$

(iii) **B-র সমস্যা**

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2,$

যেখানে $2Y_1 + 4Y_2 \leq 1$

$6Y_1 + Y_2 \leq 1$

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$ এবং $y_i = l' \ Y_i (i = 1, 2)$

B-র সমস্যা

অবম $\frac{1}{g'} = X_1 + X_2$

যেখানে $2X_1 + 6X_2 \geq 1$

$4X_1 + X_2 \geq 1$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$ এবং $x_i = g' \ X_i (i = 1, 2)$

2. (a) $A\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$; $B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$; $\vartheta = \frac{1}{3}$

(b) A বিশুদ্ধ কৌশল A_3; $B\left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$; $\vartheta = -1$

(c) $A\left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right)$; $B\left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right)$; $\vartheta = -\frac{1}{13}$

(d) $A\left(\frac{3}{8}, \frac{13}{24}, \frac{1}{12}\right)$; $B\left(\frac{7}{24}, \frac{5}{9}, \frac{1}{72}\right)$; $\vartheta = -\frac{67}{24}$

সহায়ক গ্রন্থাবলি

1. I. G. Chakravorty and P R. Ghosh.
   — Linear programming and game theory [Moulik Library]
2. Linear Programming (Methods and Applications)
   — Saul I. Gass [McGraw Hill Kogakusha, Ltd.J
3. Linear Programming.
   — G. Hadley /A ddison-Wesley Publishing Company]
4. Operations Research
   — Kauri Swamp, PK. Gupta, Man Mohan [Sultan Chand and Sons]
5. Linear Programming and Theory of Games. —P M. Karak.
   [ABS Publishing House]