প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতকশ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোনো বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে— যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন; যখনই কোন শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হতে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

চতুর্থ পুনর্মুদ্রণ ঃ এপ্রিল, 2016

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী ও অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় : গণিতবিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম পর্যায়

E M T : 06 : 01 & 02

পর্যায় 1	**রচনা**	**সম্পাদনা**
একক 1	অধ্যাপক সুমন্ত কুমার গিরি	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্তী
একক 2	ঐ	ঐ
একক 3	ঐ	ঐ
একক 4	ঐ	ড. অস্থির দাশগুপ্ত
একক 5	ঐ	ঐ
পর্যায় 2		
একক 6	ড. কনক কান্তি দাশ	ড. রণজিৎ ধর
একক 7	ঐ	ঐ
একক 8	ঐ	ঐ
একক 9	ঐ	ঐ
একক 10	ড. মনোজিত গুপ্ত	ড. কনক কান্তি দাশ
একক 11	ঐ	ঐ
একক 12	ঐ	ঐ
একক 13	ঐ	ঐ
একক 14	ঐ	ঐ

প্রজ্ঞাপন

ড. অসিত বরণ আইচ

কার্যনির্বাহী নিবন্ধক

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

E M T – 06

বৈশ্লেষিক জ্যামিতি

(দ্বি ও ত্রি-মাত্রিক)

(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়

1

দ্বি-মাত্রিক জ্যামিতি

পর্যায়

2

ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতি

একক 1 ❑ স্থানাঙ্কের রূপান্তর ও ইন্‌ভেরিয়েন্ট (Invariant)

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা

দ্বিমাত্রিক সমতলে কোনও বিন্দুর স্থানাঙ্ক অথবা কোনও বক্ররেখার সমীকরণ সর্বদা মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে পরিচিত হয়। এই বিষয়ে আপনারা পূর্ব পরিচিত। যদি মূলবিন্দু অথবা অক্ষদ্বয় পরিবর্তিত হয় তাহলে বিন্দুর স্থানাঙ্ক অথবা বক্ররেখার সমীকরণ পরিবর্তিত হয়। যদি মূলবিন্দুকে কোনও বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে (অক্ষদ্বয়ের দিক পরিবর্তন না করে) অথবা মূলবিন্দুকে অপরিবর্তিত রেখে অক্ষদ্বয়কে যদি নির্দিষ্ট কোণে আবর্তিত করা হয় তাহলে যথাক্রমে বিন্দুর স্থানাঙ্ক অথবা বক্ররেখার সমীকরণের পরিবর্তন হয় অর্থাৎ স্থানাঙ্কের রূপান্তর হয়। জ্যামিতিতে এই রূপান্তর বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। আমরা এই এককে রূপান্তর বিষয়ে আলোচনা করব। আবার দেখা যায় স্থানাঙ্কের রূপান্তরের ফলে কিছু রাশি (জ্যামিতিক) অপরিবর্তিত থাকে।

এই এককটিতে (অন্যথা উল্লেখ না থাকলে) সর্বদা কার্তিয় আয়তাকার স্থানাঙ্ক ব্যবহৃত হবে।

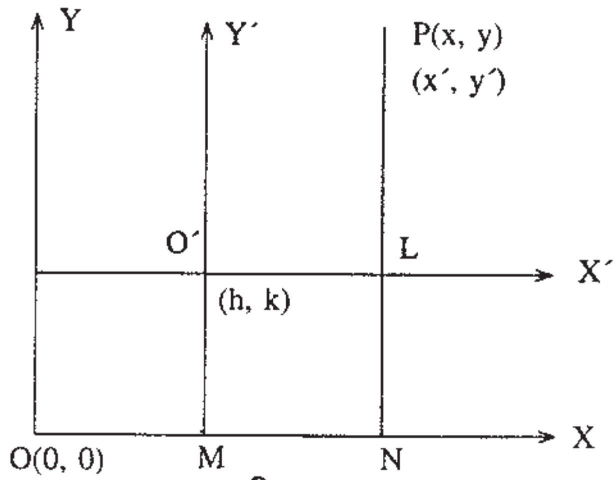
1.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনারা জানতে পারবেন

- চলনের ফলে স্থানাঙ্কের রূপান্তর এবং সমীকরণ
- ঘূর্ণনের ফলে স্থানাঙ্কের রূপান্তর এবং সমীকরণ
- (Invariant) ইন্‌ভেরিয়েন্টের সংজ্ঞা, ব্যাখ্যা এবং উদাহরণ।

1.3 চলন ও স্থানাঙ্কের রূপান্তর

সংজ্ঞা ঃ অক্ষদ্বয়ের দিক পরিবর্তন না করে মূলবিন্দুর স্থানান্তরকে চলন বলে।



চিত্র 1.1

মনে করুন, OX, OY অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং মূলবিন্দু O(0, 0)। এখন মনে করুন মূলবিন্দু O-কে O´-এ স্থানান্তরিত করা হল। O´ এর স্থানাঙ্ক (h, k) এবং OX´, OY´ নতুন অক্ষদ্বয় যথাক্রমে OX, OY-এর সঙ্গে সমান্তরাল। মনে করুন, OX´, OY´-এর সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x´, y´)

$\therefore \quad x = ON = OM + MN = h + O'L = h + x'$

$y = PN = NL + PL = O'M + PL = k + y'$

$\therefore \quad \boxed{x = x' + h, \qquad y = y' + k}$ ...... (1)

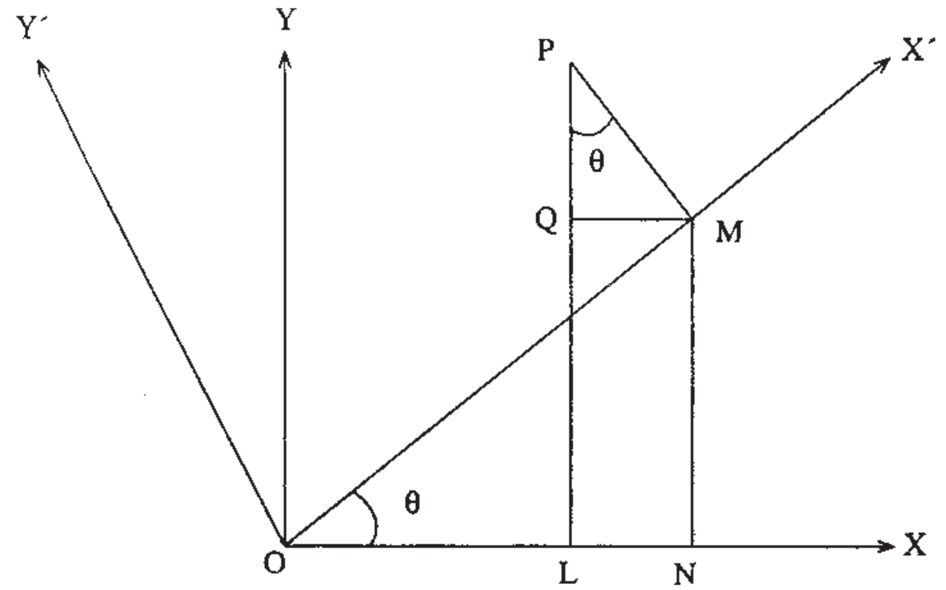
$\therefore \quad \boxed{x' = x - h \qquad y' = y - k}$ ...... (2)

$\therefore$ (1) অথবা (2)-কে বলা হয় চলনের ফলে স্থানাঙ্কের রূপান্তর। ম্যাট্রিক্স (Matrix) দ্বারা ওপরের (1) নং সূত্রটি নিম্নলিখিত উপায়ে প্রকাশ করা যায় $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$

অতএব $f(x, y) = 0$ সমীকরণটি নতুন অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে $f(x' + h, y' + k) = 0$-তে রূপান্তরিত হয়।

1.4 ঘূর্ণন ও স্থানাঙ্কের রূপান্তর

সংজ্ঞা ঃ মূলবিন্দুকে অপরিবর্তিত রেখে অক্ষদ্বয়কে কোনও নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণে আবর্তিত করলে তাকে ঘূর্ণন বলে।



চিত্র 1.2

মনে করুন OX, OY অক্ষদ্বয়কে θ কোণে আবর্তিত করা হল। (ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখী)। OX', OY´ নতুন অক্ষদ্বয়। মনে করুন P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং (x', y') যথাক্রমে OX, OY এবং OX´, OY´-এর সাপেক্ষে। PL এবং PM যথাক্রমে OX এবং OX´-এর ওপর লম্ব টানা হল। আবার MN এবং MQ যথাক্রমে OX এবং PL -র ওপর লম্ব।

$\therefore \quad OL = x,\ PM = y,\ OM = x',\ PM = y'$

$\therefore \quad x = OL = ON - LN = ON - QM = x' \cos\theta - y' \sin\theta$

যেহেতু $\angle QPM = 90^\circ - \angle QMP = \angle QMO = \theta$

$\therefore \quad y = PL = PQ + QL = PQ + MN$

$= x' \sin\theta + y' \cos\theta$

$\therefore$ নির্ণেয় আবর্তন সূত্র

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

নিম্নলিখিত ছকে ওপরের সূত্রটি প্রকাশ করা যায়।

	x'	y'
x	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
y	$\sin\theta$	$\cos\theta$

এই সূত্রটি ম্যাট্রিক্স দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

যদি $T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ হয় তা হলে

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ এবং $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

যেখানে $T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

1.5 একত্রে চলন এবং ঘূর্ণন

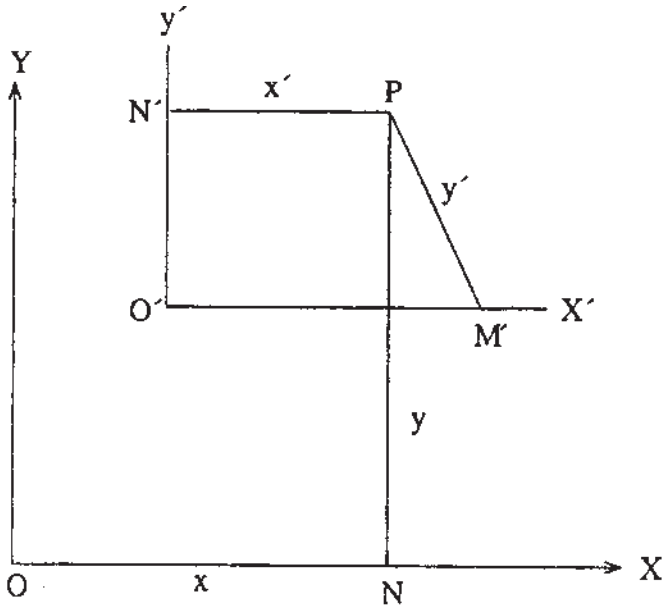
মনে করুন OX, OY অক্ষদ্বয় এবং O মূলবিন্দু। মূলবিন্দুটি O থেকে $O'(h, k)$-তে স্থানান্তরিত করা হল। $O'X'$ এবং $O'Y'$ নতুন অক্ষদ্বয়। যে কোনও বিন্দু $P(x,y)$-এর স্থানাঙ্ক হবে $(x + h, y + k)$, এখন নতুন অক্ষদ্বয়কে θ কোণে আবর্তিত করা হল।

$\therefore$ P-এর স্থানাঙ্ক হবে $(x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$

$\therefore$ P হবে $(h + x\cos\theta - y\sin\theta, k + x\sin\theta + y\cos\theta)$

1.5.1 নতুন অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ দেওয়া থাকলে স্থানাঙ্কের রূপান্তর

মনে করুন OX, OY অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং ঐ একই বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x',y'), OX', OY' অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে। নতুন অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $ax + by + c = 0$ এবং $bx - ay + d = 0$ (OX, OY-এর সাপেক্ষে)



চিত্র 1.3

P থেকে PN´ (লম্বদূরত্ব)

$$= x' = \pm \frac{bx - ay + d}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

অনুরূপভাবে $PM' = y' = \pm \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + y^2}}$

1.6 দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ থেকে একঘাত পদটির অপসারণ

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ....(1)

মনে করুন মূলবিন্দুটি (α, β)-তে স্থানান্তরিত করা হয়েছে।

$\therefore \quad x = x' + \alpha, \qquad y = y' + \beta$

(1) থেকে $a(x' + \alpha)^2 + 2h(x' + \alpha)(y' + \beta) + b(y' + \beta)^2 + 2g(x' + \alpha) + 2f(y' + \beta) + c = 0$

বা, $ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2(a\alpha + h\beta + g)x' + 2(h\alpha + b\beta + f)y' + a\alpha^2 + 2h\alpha\beta$

$+ b\beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c = 0$ ... (2)

যেহেতু একঘাত পদটি অপসারিত হবে

$$a\alpha + h\beta + g = 0$$

$$h\alpha + b\beta + f = 0$$

ব্রজগুণন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{\alpha}{hf - bg} = \frac{\beta}{gh - af} = \frac{1}{ab - h^2}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{hf - bg}{ab - h^2} \qquad \beta = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

$$(ab - h^2 \neq 0)$$

(2) থেকে $ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 = -(a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c)$ এটি একঘাত যুক্ত সমীকরণ।

1.7 দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ থেকে xy বিশিষ্ট পদের অপসারণ

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ .... (1)

মনে করুন 'θ' কোণে অক্ষদ্বয় আবর্তিত করা হয়েছে।

$$\therefore \quad x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

(1) নং সমীকরণে x, y এর মান বসিয়ে

$$a(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + 2h(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) +$$

$$b(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + 2g(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + 2f(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + c = 0$$

বা, $x'^2(a\cos^2\theta + h\sin 2\theta + b\sin^2\theta) + x'y'[2h\cos 2\theta - (a - b)\sin 2\theta]$

$+ y'^2(a\sin^2\theta - h\sin 2\theta + b\cos^2\theta) + 2x'(g\cos\theta + f\sin\theta)$

$+ 2y'(f\cos\theta - g\sin\theta) + c = 0$ .. (2)

যেহেতু (2) থেকে $x'y'$ পদটি অপসারিত হবে অতএব $x'y'$ এর সহগ শূন্য হবে।

$$2h\cos 2\theta - (a - b)\sin 2\theta = 0$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2h}{a - b}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2h}{a - b}$$

যদি অক্ষদ্বয়কে $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2h}{a-b}$ এই কোণে আবর্তিত করা যায় তাহলে দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণটি

$$a'x'^2 + b'y'^2 + 2g'x' + 2f'y' + c = 0$$ এই আকারে রূপান্তরিত হবে।

1.8 লম্ব রূপান্তরে অপরিবর্তন (Invariants)

সংজ্ঞা ঃ যে সমস্ত সমীকরণ লম্ব রূপান্তরে অপরিবর্তিত থাকে তাদের লম্ব রূপান্তরে অপরিবর্তন সমীকরণ বলে।

উদাহরণ ঃ (i) দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব মনে করুন A এবং B দুটি বিন্দু যাদের পুরনো প্রণালীতে স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)। মনে করুন নতুন প্রণালীতে স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1', y_1') এবং (x_2', y_2')

$\therefore$ লম্ব রূপান্তরের সূত্র অনুযায়ী

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + \alpha,\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + \beta$$

$\therefore$ বিন্দু দুটির মধ্যে দূরত্ব d হলে

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

আবার রূপান্তর স্থানাঙ্ক অনুযায়ী

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \left[x_2'\cos\theta - y_2'\sin\theta + \alpha - x_1'\cos\theta + y_1'\sin\theta - \alpha\right]^2$$

$$+ \left[x_2'\sin\theta + y_2'\cos\theta + \beta - x_1'\sin\theta - y_1'\cos\theta - \beta\right]^2$$

$$= \left[(x_2' - x_1')\cos\theta - (y_2' - y_1')\sin\theta\right]^2 + \left[(x_2' - x_1')\sin\theta + (y_2' - y_1')\cos\theta\right]^2$$

$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(x_2' - x_1')^2 + (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(y_2' - y_1')^2$$

$$= (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2$$

$\therefore$ অতএব দূরত্বটি অপরিবর্তনীয়।

(ii) $ax^2 + 2hxy + by^2$ সমীকরণে x^2, xy এবং y^2-এর সহগ চলনে অপরিবর্তনীয় (Invariats) মনে করুন (x', y') রূপান্তর স্থানাঙ্ক যখন মূলবিন্দু (α, β)-তে স্থানান্তরিত হয়েছে।

$$x = x' + \alpha,\ y = y' + \beta$$

$$\therefore \quad ax^2 + 2hxy + by^2$$

$$= a(x' + \alpha)^2 + 2h(x' + \alpha)(y' + \beta) + b(y' + \beta)^2$$

$$= ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2(a\alpha + h\beta)x' + 2(h\alpha + b\beta)y' + a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2$$

$$= a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2 + g'x' + f'y' + c'$$

$$\therefore \quad a' = a \qquad h' = h \qquad b' = b$$

1.9 লম্ব রূপান্তরে মূলবিন্দু স্থানান্তরিত না করে $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ রাশিকে $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2 + 2g'x' + 2f'y' + c'$ রাশিতে রূপান্তরিত করলে

(i) $a' + b' = a + b$ (ii) $a'b' - h'^2 = ab - h^2$

(iii) $g'^2 + f'^2 = g^2 + f^2$ (iv) $b'c' + c'a' + a'b' - f'^2 - g'^2 - h'^2 = bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2$

লম্ব রূপান্তরের সূত্র অনুযায়ী

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \qquad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \;....\; (1)$$

ওপরের সূত্র দ্বারা (1) থেকে পাওয়া যায়

$$a(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + 2h(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + b(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + 2g(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + 2f(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + c$$

$$= x'^2(a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta) + y'^2(a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta)$$

$$+2x'y'\left\{\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)h - (a-b)\sin\theta\cos\theta\right\} + 2x'(g\cos\theta + f\sin\theta)$$

$$+ 2y'(f\cos\theta - g\sin\theta) + c$$

$$= \quad a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2 + 2g'x' + 2f'y' + c$$

$$\therefore \quad a' = a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta$$

$$h' = h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (a-b)\sin\theta\cos\theta$$

$$b' = a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta$$

$$g' = g\cos\theta + f\sin\theta \qquad f' = f\cos\theta - g\sin\theta$$

$$c' = c$$

$$\therefore \quad \boxed{a' + b' = a + b} \quad (\because \; \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$2a' = a(1 + \cos 2\theta) + 2h\sin 2\theta + b(1 - \cos 2\theta)$$

$$= (a+b) + (a-b)\cos 2\theta + 2h\sin 2\theta$$

$$2b' = (a+b) - \{(a-b)\cos 2\theta + 2h\sin 2\theta\}$$

$4a'b' = (a+b)^2 - \{(a-b)\cos 2\theta + 2h \sin 2\theta\}^2$

$4h'^2 = \{2h\cos 2\theta - (a-b)\sin 2\theta\}^2$

$$\therefore 4(a'b' - h'^2) = (a+b)^2 - \{4h^2 + (a-b)^2\}$$
$$= (a+b)^2 - (a-b)^2 - 4h^2$$
$$= 4(ab - h^2)$$

$\therefore \boxed{a'b' - h'^2 = ab - h^2}$

$$f'^2 + g'^2 = (g\cos\theta + f\sin\theta)^2 + f(\cos\theta - g\sin\theta)^2$$
$$= g^2 + f^2 \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$\therefore \boxed{f'^2 + g'^2 = g^2 + f^2}$

আবার, $b'c' + c'a' + a'b' - f'^2 - g'^2 - h'^2$

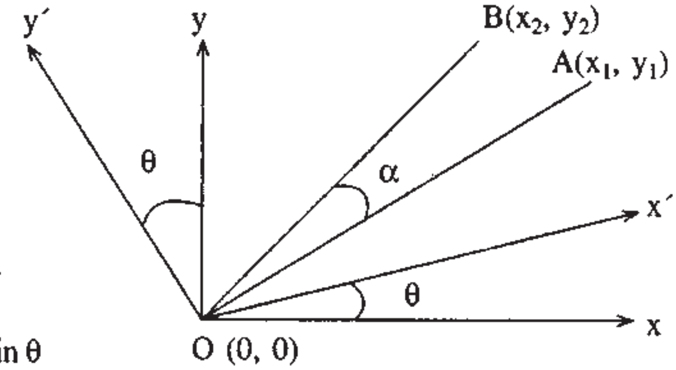
$$= c'(b' + a') + (a'b' - h'^2) - (f'^2 + g'^2)$$
$$= c(a+b) + (ab - h^2) - (f^2 + g^2)$$
$$= bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2$$

1.10 স্থানাঙ্কের রূপান্তরের ফলে দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ অপরিবর্তিত থাকে

OA এবং OB সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ α হলে

$$\tan\alpha = \frac{\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1}}{1 + \frac{y_2}{x_2}\cdot\frac{y_1}{x_1}}$$

$$= \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1x_2 + y_1y_2}$$



চিত্র 1.4

এখন স্থানাঙ্ক পরিবর্তন সূত্র থেকে

$$x_1 = x_1' \cos\theta - y_1' \sin\theta$$
$$y_1 = x_1' \sin\theta + y_1' \cos\theta$$
$$x_2 = x_2' \cos\theta - y_2' \sin\theta$$
$$y_2 = x_2' \sin\theta + y_2' \cos\theta$$

যেখানে (x_1, y_1), (x_2, y_2) হচ্ছে আদি বা পুরনো স্থানাঙ্ক এবং (x_1', y_1'), (x_2', y_2') পরিবর্তিত স্থানাঙ্ক।

$$\therefore \tan\alpha = \frac{(x_1'\cos\theta - y_1'\sin\theta)(x_2'\sin\theta + y_2'\cos\theta) - (x_1'\sin\theta + y_1'\cos\theta)(x_2'\cos\theta - y_2'\sin\theta)}{(x_1'\cos\theta - y_1'\sin\theta)(x_2'\cos\theta - y_2'\sin\theta) + (x_1'\sin\theta + y_1'\cos\theta)\times(x_2'\sin\theta + y_2'\cos\theta)}$$

$$= \frac{x_1'y_2' - x_2'y_1'}{x_1'x_2' + y_1'y_2'}$$

$\therefore$ স্থানাঙ্কের রূপান্তরের ফলে দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের কোনও পরিবর্তন হয় না।

1.11 স্থানাঙ্কের রূপান্তরের ফলে সমীকরণের ঘাত অপরিবর্তিত থাকে

$$ax^2 + 2hxy + by^2 \;......\; (1)$$

স্থানাঙ্ক পরিবর্তন সূত্র থেকে

$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$, $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ যেখানে (x, y) আদি স্থানাঙ্ক এবং (x', y') পরিবর্তিত স্থানাঙ্ক

$\therefore$ (1) থেকে $ax^2 + 2hxy + by^2 = a(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + 2h(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + b(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2$

$= (a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta)x'^2 + 2[(b-a)\cos\theta\sin\theta + h(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]x'y' + (a\sin^2\theta - 2h\cos\theta\sin\theta + b\cos^2\theta)y'^2$

$= a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$

যেখানে $a' = a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta$

$h' = (b-a)\cos\theta\sin\theta + h(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$b' = a\sin^2\theta - 2h\cos\theta\sin\theta + b\cos^2\theta$

$\therefore$ এর থেকে প্রমাণ করা যায় যে, স্থানাঙ্কের রূপান্তরের ফলে সমীকরণের ঘাত অপরিবর্তিত থাকে।

1.12 মূলবিন্দুকেন্দ্রিক অক্ষদ্বয়ের ঘূর্ণনে $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ রাশির সাপেক্ষে $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ অপরিবর্তনীয়

স্থানাঙ্কের পরিবর্তন সূত্র থেকে আপনারা জানেন যে $x^2 + y^2$ তথা $x^2 + y^2 + 1$ একটি অপরিবর্তনীয় রাশি। সুতরাং λ-র যে কোনো মানের জন্য

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c - \lambda(x^2 + y^2 + 1)$$

রাশিটি $S = a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2 + 2g'x' + 2f'y' + c' - \lambda(x'^2 + y'^2 + 1)$ রাশিতে পরিণত হবে।

$\therefore$ λ–এর যে সব মানেতে S দুটি একঘাত বিশিষ্ট রাশিতে পরিণত হবে, λ-এর সেই সব মানের জন্য S'-ও দুটি একঘাত বিশিষ্ট রাশিতে পরিণত হবে।

$\therefore$ S কে দুটি একঘাত উৎপাদকে পরিণত করার শর্ত হল

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g \\ h & b-\lambda & f \\ g & f & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ (একক -2 তে এটি বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে)

অথবা $\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2)\lambda + abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

or, $\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2)\lambda + \Delta = 0$ ..... (1)

যেখানে $\lambda = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

অনুরূপভাবে S' এর দুটি একঘাত উৎপাদকে পরিণত করার শর্ত হল

$$\lambda^3 - (a' + b' + c')\lambda^2 + (b'c' + c'a' + a'b' - f'^2 - g'^2 - h'^2)\lambda + \Delta' = 0$$

যেখানে $\Delta' = a'b'c' + 2f'g'h' - a'f'^2 - b'g'^2 - c'h^2$ ..... (2)

শর্তানুসারে (1) ও (2) সমীকরণ দুটি সমার্থক হবে।

$\therefore$ সহগগুলি সমানুপাতিক হবে।

$$a + b + c = a' + b' + c'$$

$$bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2 = b'c' + c'a' + a'b' - f^2 - g^2 - h^2$$

এবং $\Delta = \Delta'$

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$ অপরিবর্তনীয়।

বিকল্প প্রমাণ ঃ

অনুচ্ছেদ 1.9 থেকে আপনারা জানেন যে স্থানাঙ্কের পরিবর্তনের ফলে $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ রাশিকে $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2 + 2g'x + 2f'y + c'$ রাশিতে রূপান্তরিত করলে (i) $a' + b' = a + b$ (ii) $a'b' - h'^2 = ab - h^2$ (iii) $g'^2 + f'^2 = g^2 + f^2$ (iv) $b'c' + c'a' + a'b' - f'^2 - g'^2 - h'^2 = bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2$

এখানে $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$= c(ab - h^2) - af^2 - bg^2 + 2fgh$$

যেহেতু $a'b' - h' = ab - h^2$ এবং $c = c'$ (আগেই প্রমাণিত)

অতএব প্রমাণ করতে হবে $2fgh - af^2 - bg^2$ একটি অপরিবর্তনীয় রাশি, অর্থাৎ প্রমাণ করতে হবে

$$2f'g'h' - a'f'^2 - b'g'^2 = 2fgh - af^2 - bg^2$$

অনুচ্ছেদ 1.9 থেকে আমরা পেয়েছি $a' = a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta$

$$h' = h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (a - b)\sin\theta\cos\theta$$

$$b' = a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta$$

$$g' = g\cos\theta + f\sin\theta \quad f' = f\cos\theta - g\sin\theta$$

$$c = c'$$

$$\therefore \quad a' = \frac{1}{2}\left[(a+b) - (a-b)\cos 2\theta + 2h\sin 2\theta\right]$$

$$b' = \frac{1}{2}\left[(a+b) - (a-b)\cos 2\theta - 2h\sin 2\theta\right]$$

$$h' = \frac{1}{2}\left[2h\cos 2\theta - (a-b)\sin 2\theta\right]$$

$$g' = g\cos\theta + f\sin\theta$$

$$f' = -g\sin\theta + f\cos\theta$$

$$2f'g' = 2fg\cos 2\theta - (g^2 - f^2)\sin 2\theta$$

$$g'^2 = \frac{1}{2}\left[(g^2 + f^2) + (g^2 - f^2)\cos 2\theta + 2fg\sin 2\theta\right]$$

$$f'^2 = \frac{1}{2}\left[(g^2 + f^2) - (g^2 - f^2)\cos 2\theta - 2fg\sin 2\theta\right]$$

$$4\left(2f'g'h' - a'f'^2 - b'g'^2\right)$$

$$= 2.\ 2f'g'.\ 2h' - 2a'.\ 2f'^2 - 2b'.\ 2g'^2$$

$$= 2\left[2fg\cos 2\theta - \left(g^2 - f^2\right)\sin 2\theta\right]\left[2h\cos 2\theta - (a-b)\sin 2\theta\right]$$
$$-\left[(a+b) + (a-b)\cos 2\theta + 2h\sin 2\theta\right]\left[\left(g^2+f^2\right) - \left(g^2-f^2\right)\cos 2\theta - 2fg\sin 2\theta\right]$$
$$-\left[(a+b) - (a-b)\cos 2\theta - 2h\sin 2\theta\right]\left[\left(g^2+f^2\right) + \left(g^2-f^2\right)\cos 2\theta + 2fg\sin 2\theta\right]$$
$$= 8\ fgh\cos^2 2\theta - 2\left[2fg(a-b) + h\left(g^2-f^2\right)\right]\sin 2\theta\cos 2\theta$$
$$+2(a-b)\left(g^2-f^2\right)\sin^2 2\theta - (a+b)\left(g^2+f^2\right)$$
$$+\ 2\left[(a-b)\cos 2\theta + 2h\sin 2\theta\right]\left[\left(g^2-f^2\right)\cos 2\theta + 2fg\sin 2\theta\right]$$
$$= 8fgh\ \cos^2 2\ \theta - 2\left[2fg(a-b) + h\left(g^2-f^2\right)\right]\sin 2\theta\cos 2\theta$$
$$+\ 2(a-b)\ (g^2 - f^2)\ \sin^2 2\theta - 2(a+b)\ (g^2+f^2)$$
$$+2(a-b)\left(g^2-f^2\right)\cos^2 2\theta + 2\left[2fg(a-b) + h\left(g^2-f^2\right)\right]\sin 2\theta\cos 2\theta + 8fgh\sin^2 2\theta$$
$$= 8fgh + 2(a-b)\ (g^2-f^2) - 2\ (a+b)\ (g^2+f^2)$$
$$= 8fgh - 4af^2 - 4bg^2$$
$$\therefore\ \ 2\,f'g'h' - a'f'^2 - b'g'^2 = 2fgh - af^2 - bg^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$ অপরিবর্তনীয়।

1.13 উদাহরণ, অনুশীলনী, সংকেত

উদাহরণ ঃ

1. যদি মূল বিন্দুটিকে (a, b) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হয়, তাহলে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখার সমীকরণটি কত হবে।

সমাধান ঃ রূপান্তর সূত্র দ্বারা $x = x' + a,\ y = y' + b$

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ থেকে,

$$\frac{x'+a}{a} + \frac{y'+b}{b} = 1$$

বা, $\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 0$ এটিই নির্ণেয় রূপান্তর সমীকরণ।

2. অক্ষদ্বয়কে 45° কোণে আবর্তিত করলে $x^2 - y^2 = 2a^2$ সমীকরণের রূপান্তর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ সূত্র অনুযায়ী $x = x' \cos 45° - y' \sin 45° = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$,

$$y = x' \sin 45° + y' \cos 45° = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণে x এবং y এর মান বসিয়ে

$$\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2a^2$$

বা, $(x' - y')^2 - (x' + y')^2 = 4a^2$

বা, $x'y' + a^2 = 0$ এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

3. মূলবিন্দুকে কোনও বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে $3x^2 + 8xy + 3y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$ সমীকরণ থেকে একঘাত বিশিষ্ট পদ অপসারিত হবে।

সমাধান ঃ মনে করুন মূল বিন্দুটিকে (α, β) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হল।

$$x = x' + \alpha, \qquad y = y' + \beta$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণে x এবং y-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$3(x' + \alpha)^2 + 3(y' + \beta)^2 + 8(x' + \alpha)(y' + \beta) - 2(x' + \alpha) + 2(y' + \beta) + 2 = 0$$

বা, $3x'^2 + 6x'\alpha + 3\alpha^2 + 3y'^2 + 6y'\beta + 3\beta^2 + 8x'y' + 8x'\beta + 8y'\alpha + 8\alpha\beta - 2x' - 2\alpha + 2y' + 2\beta + 2 = 0$

বা, $3x'^2 + 8x'y' + 3y'^2 + x'(6\alpha + 8\beta - 2) + y'(8\alpha + 6\beta + 2) + 3\alpha^2 + 8\alpha\beta + 3\beta^2 - 2\alpha + 2\beta + 2 = 0$

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে $6\alpha + 8\beta - 2 = 0$ ..... (1)

$8\alpha + 6\beta + 2 = 0$ ..... (2)

(1) নং ও (2) নং সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যায়

$\alpha = -1, \beta = 1$

$\therefore$ মূলবিন্দুটিকে $(-1, 1)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করতে হবে।

4. অক্ষদ্বয়কে কত ডিগ্রি কোণে আবর্তিত করলে $7x^2 + 4xy + 3y^2 = 0$ সমীকরণের xy পদটি লুপ্ত হবে।

সমাধান ঃ মনে করুন অক্ষ দুটিকে θ কোণে আবর্তিত করা হল

$\therefore \quad x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$

$\quad y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ থেকে,

$$7(x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 + 4(x' \cos\theta - y' \sin\theta)(x' \sin\theta + y' \cos\theta)$$
$$+ 3(x' \sin\theta + y' \cos\theta)^2 = 0$$

বা, $x'^2 (7\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 3\sin^2\theta) + y'^2 (7\sin^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta$
$+ 3\cos^2\theta) + x'y'(-14\sin\theta\cos\theta - 4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta + 6\sin\theta\cos\theta) = 0$

বা., $x'^2 (7\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 3\sin^2\theta) + y'^2 (7\sin^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta$
$+ 3\cos^2\theta) - 4x'y'(\sin 2\theta - \cos 2\theta) = 0$

$x'y'$ পদটি থাকবে না

$\therefore \quad -4(\sin 2\theta - \cos 2\theta) = 0$

বা, $\sin 2\theta = \cos 2\theta$

বা, $\tan 2\theta = 1 = \tan 45°$

$2\theta = 45°$

$\therefore \quad \theta = \frac{45°}{2} = 22\frac{1}{2}°$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ $= 22\frac{1}{2}°$

5. যদি $x^2 + y^2 - 2x + 14y + 20 = 0$ সমীকরণটি রূপান্তরিত হয়ে $x'^2 + y'^2 - 30 = 0$ সমীকরণে পরিণত হলে রূপান্তরটি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন নির্ণেয় রূপান্তর $= (\alpha, \beta)$

$\therefore x = x' + \alpha, \ y = y' + \beta$

$x^2 + y^2 - 2x + 14y + 20 = 0$ ..... (1)

(1) থেকে $(x' + \alpha)^2 + (y' + \beta)^2 - 2(x' + \alpha) + 14(y' + \beta) + 20 = 0$

বা, $x'^2 + y'^2 + x'(2\alpha - 2) + y'(2\beta + 14) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 14\beta + 20 = 0$ .... (2)

যেহেতু রূপান্তর সমীকরণটিতে x', y' পদ অনুপস্থিত

$\therefore \quad 2\alpha - 2 = 0 \qquad 2\beta + 14 = 0$

$\therefore \quad \alpha = 1, \qquad \beta = -7$

(2) নং সমীকরণে α ও β-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$x'^2 + y'^2 - 30 = 0$

6. কত ডিগ্রি কোণে অক্ষদ্বয়কে আবর্তিত করলে $17x^2 + 18xy - 7y^2 = 1$ সমীকরণটি $Ax^2 + By^2 = 1$ আকারে পরিণত হবে $(A > 0)$ A এবং B এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান :

আপনারা জানেন $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকরণে xy পদটি অপসারিত করতে হলে যদি অক্ষদ্বয়কে θ কোণে আবর্তিত করা যায় তাহলে θ এর মান হয়

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$$

এখানে $h = 9$ $a = 17$ $b = -7$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{18}{17+7} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4}$$

অপরিবর্তন (Invariant) দ্বারা আমরা পাই

$$A + B = 17 - 7 = 10$$

এবং $AB = 17(-7) - (9)^2 = -200$

এখন $(A - B)^2 = (A + B)^2 - 4AB = 900$

$\therefore$ $A - B = \pm 30$

$\therefore$ $A = 20$ $B = -10$ $(A > 0)$

$\therefore$ রূপান্তর সমীকরণটি হয় $\boxed{20x^2 - 10y^2 = 1}$

7. অক্ষদ্বয়কে $30°$ কোণে আবর্তিত করলে $4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$ সমীকরণটি কি আকার ধারণ করবে?

সমাধান :

মনে করুন অক্ষদ্বয়কে $30°$ কোণে আবর্তিত করা হল।

$$\therefore \quad x = x'\cos 30° - y'\sin 30° = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x' - y'\right)$$

$$y = x'\sin 30° + y'\cos 30° = \frac{1}{2}\left(x' + \sqrt{3}y'\right)$$

প্রদত্ত সমীকরণ থেকে x এবং y এর মান বসিয়ে,

$$4.\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}x' - y'\right)^2 + 2\sqrt{3}.\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}x' - y'\right)\left(x' + \sqrt{3}y'\right) + \frac{2}{4}\left(x' + \sqrt{3}y'\right)^2 = 1$$

বা, $3x'^2 + y'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{3}x'^2 - \sqrt{3}y'^2 + 2x'y'\right) +$

$$\frac{1}{2}\left(x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2\right) = 1$$

বা, $\left(3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)x'^2 + \left(-2\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}\right)x'y' + \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)y'^2 = 1$

বা, $\boxed{5x'^2 + y'^2 = 1}$

8. $2x + 3y + 1 = 1$ এবং $3x - 2y + 2 = 0$ পরস্পর লম্ব সরলরেখা দুটিকে অক্ষদ্বয় রূপে নিলে $(2x + 3y + 1)(3x - 2y + 2) = 13$ এই বক্ররেখার রূপান্তরিত সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

মনে করুন (x', y') কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক নতুন অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে এবং (x, y) ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক পুরনো অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে।

$x' = p(x, y)$ থেকে নতুন y অক্ষ $3x - 2y + 2 = 0$ এর ওপর লম্ব দূরত্ব

$$x' = \frac{3x - 2y + 2}{\sqrt{13}} \qquad \therefore \sqrt{13}x' = 3x - 2y + 2$$

অনুরূপভাবে $y' = \dfrac{2x + 3y + 1}{\sqrt{13}} \qquad \therefore \sqrt{13}y' = 2x + 3y + 1$

প্রদত্ত সমীকরণটি থেকে নির্ণেয় রূপান্তর সমীকরণ হল

$$\boxed{x'y' = 1}$$

1.14 সারাংশ

এই এককে আপনারা পেলেন

(i) চলনের রূপান্তর $x = x' + h, y = y' + k$

(ii) ঘূর্ণনের রূপান্তর $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

(iii) একত্রে চলন ও ঘূর্ণনের রূপান্তর $(h + x\cos\theta - y\sin\theta, k + x\sin\theta + y\cos\theta)$

(iv) $ax + by + c = 0$ এবং $bx - ay + d = 0$ কে অক্ষ ধরে স্থানাঙ্কের রূপান্তর সমীকরণ।

(v) স্থানাঙ্কের রূপান্তরের ফলে

(a) দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে।

(b) দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ অপরিবর্তিত থাকে।

(c) কোন সমীকরণের ঘাত অপরিবর্তিত থাকে।

(d) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ রাশির সাপেক্ষে

$$a + b,\ ab - h^2 \text{ এবং } \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \text{ অপরিবর্তিত থাকে।}$$

(vi) ঘূর্ণনের ফলে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে।

1.15 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. অক্ষদ্বয়ের দিক্ পরিবর্তন না করে মূলবিন্দুটিকে (2, –3) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হল। যদি কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 1) হয় পুরনো অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে তাহলে নতুন অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

নতুন অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–4, 8) হলে পুরনো অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

2. অক্ষদ্বয়কে 30° কোণে আবর্তিত করা হলে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যার পুরনো স্থানাঙ্ক (2,4)

3. (2, 3) বিন্দু দিয়ে সমান্তরাল অক্ষে $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 18x - 22y + 50 = 0$ সমীকরণটির রূপান্তর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

4. অক্ষদ্বয়কে $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণে আবর্তিত করলে $11x^2 + 16xy - y^2 = 0$ সমীকরণটি কি আকার ধারণ করবে তা নির্ণয় করুন।

5. মূলবিন্দুটিকে (1, 2) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে এবং অক্ষদ্বয়কে 45° কোণে আবর্তিত করলে $x^2 - 2xy - 3y^2 + 2x + 14y - 16 = 0$ সমীকরণটি কি আকার ধারণ করবে তা নির্ণয় করুন।

6. অক্ষদ্বয়কে কত ডিগ্রী কোণে আবর্তিত করলে $\ell x - my + n = 0$ সমীকরণটি $ay' + b = 0$ আকারে রূপান্তরিত হবে।

7. $4x + 3y + 1 = 0$ এবং $3x - 4y + 2 = 0$ পরস্পর লম্ব সরলরেখা দুটিকে অক্ষদ্বয় রূপে নিলে $2x^2 - xy + y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$ বক্র তলের রূপান্তরিত সমীকরণ নির্ণয় করুন।

8. অক্ষদ্বয়কে কোনো কোণে আবর্তিত করলে $ax + by$ রূপান্তরিত হয়ে $a'x' + b'y'$ এই আকারে পরিণত হলে প্রমাণ করুন $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$

9. যদি অক্ষ আবর্তনের দ্বারা $ax^2 + 2hxy + by^2$ সমীকরণটি রূপান্তরিত হয়ে $a'x^2 + 2h'x'y' + by'^2$ আকার ধারণ করলে প্রমাণ করুন $a + b = a' + b'$ এবং $ab - h^2 = a'b' - h'^2$

10. প্রমাণ করুন যদি মূলবিন্দুটিকে (0, 1) বিন্দুতে স্থানান্তরিত এবং অক্ষদ্বয়কে 45° কোণে আবর্তিত করলে $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x - 10y - 7 = 0$ সমীকরণটি নতুন অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে $\frac{x''^2}{3} + \frac{y''^2}{2} = 1$ আকার ধারণ করবে।

11. মূলবিন্দু স্থির রেখে অক্ষদ্বয়কে $\theta = \cos^{-1}\frac{3}{5}$ কোণ পরিমাণ ঘূর্ণন হলে, (i) $36x^2 - 24xy + 29y^2 = 180$ সমীকরণটির পরিবর্তিত রূপ নির্ণয় করুন। (ii) কোন সমীকরণ পরিবর্তিত হয়ে $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ রূপ ধারণ করবে?

12. দেখান যে অক্ষদ্বয়ের যে পরিবর্তনে $\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q}$ রাশি $ax^2 + 2hxy + by^2$ রাশিতে রূপান্তরিত হয়, তাতে $\frac{X^2}{p-\lambda} + \frac{Y^2}{q-\lambda}$ রাশি রূপান্তরিত হবে $\frac{ax^2 + 2hxy + by^2 - \lambda(ab - h^2)(x^2 + y^2)}{1 - (a+b)\lambda + (ab - h^2)\lambda^2}$ রাশিতে।

13. প্রমাণ করুন যে ঘূর্ণনের ফলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে।

1.16 উত্তরমালা

1. **সংকেত ঃ**

$x = x' + \alpha$ $\qquad$ $y = y' + \beta$

$\alpha = 2, \beta = -3$ $\qquad$ $x = 3, \quad y = 1$

$x' = 1 \quad y' = 4$

$x = -2, y = 5$

2. **সমাধান ঃ**

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$ $\qquad$ $y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$

$\therefore \quad 2 = x' \cos 30^\circ - y' \sin 30^\circ$ $\qquad$ $4 = \frac{1}{2}\left(x' + \sqrt{3}y'\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x' - y'\right)$

$\therefore \quad \sqrt{3}x' - y' = 4 \ \ldots\ldots (1)$

$x' + \sqrt{3}y' = 8 \ \ldots\ldots (2)$

উত্তর ঃ $x' = \sqrt{3} + 2,$ $\qquad$ $y' = 2\sqrt{3} - 1$

3. **সমাধান ঃ**

$x = x' + 2$ $\qquad$ $y = y' + 3$

x এবং y এর মান প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে

$3(x' + 2)^2 + 2(x' + 2)(y' + 3) + 3(y' + 3)^2 - 18(x' + 2) - 22(y' + 3) + 50 = 0$

বা, $3(x'^2 + 4x' + 4) + 2(x'y' + 2y' + 3x' + 6) + 3(y'^2 + 6y' + 9) - 18x' - 36 - 22y' - 66 + 50 = 0$

বা, $3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 = 1$

এটিই নির্ণেয় রূপান্তর সমীকরণ।

4. **সংকেত ঃ**

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $\tan\theta = \frac{1}{2}$

$$\sin^2\theta = \frac{5}{4} \qquad\qquad \cos\theta\,\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}} \qquad\qquad y = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}$$

উত্তর ঃ $3x'^2 - y'^2 = 0$

5. **সমাধান ঃ** $x = x' + 1, \qquad y = y' + 2$

প্রদত্ত সমীকরণটিতে x এবং y এর মান বসিয়ে

$(x' + 1)^2 - 2(x' + 1)(y' + 2) - 3(y' + 2)^2 + 2(x' + 1) + 14(y' + 2) - 16 = 0$

বা, $x'^2 + 2x' + 1 - 2x'y' - 4x' - 2y' - 4 - 3y'^2 - 12y' - 12 + 2x' + 2 + 14y' + 28 - 16 = 0$

বা, $x'^2 - 2x'y' - 3y'^2 - 1 = 0$ ...... (1)

আবার $x' = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ = \dfrac{x'' - y''}{\sqrt{2}}$

$$y' = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}}$$

(1) থেকে, $\left(\dfrac{x'' - y''}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2.\left(\dfrac{x'' + y''}{\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{x'' - y''}{\sqrt{2}}\right) - 3\left(\dfrac{x'' + y''}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = 0$

বা, $x''^2 - 2x''y'' + y''^2 - 2x''^2 + 2y''^2 - 3x''^2 - 6x''y'' - 3y''^2 - 2 = 0$

বা, $2x''^2 + 4x''y'' + 1 = 0$

6. **সমাধান ঃ**

মনে করুন অক্ষদ্বয়কে ‘θ’ কোণে আবর্তিত করলে প্রদত্ত সমীকরণটি $ay' + b = 0$ আকারে রূপান্তরিত হবে

$\therefore$ $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \quad y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$

$\ell x - my + n = 0$

বা, $\ell(x' \cos\theta - y' \sin\theta) - m(x' \sin\theta + y' \cos\theta) + n = 0$

বা, $x'(\ell\cos\theta - m\sin\theta) - y'(\ell\sin\theta + m\cos\theta) + n = 0$

প্রশ্নানুসারে, $\ell\cos\theta - m\sin\theta = 0$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\ell}{m}}$$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{\ell}{m}$ এটিই নির্ণেয় কোণ।

7. সংকেত ঃ উদাহরণ 8 নং-এর সাহায্যে সমাধান করুন।

8. সমাধান ঃ

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \qquad y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$

$ax + by = a(x' \cos\theta - y' \sin\theta) + b(x' \sin\theta + y' \cos\theta)$

$= x'(a \cos\theta + b \sin\theta) + y'(b \cos\theta - a \sin\theta)$

$= a'x' + b'y'$ (প্রশ্নানুসারে)

$\therefore \quad a' = a\cos\theta + b\sin\theta \qquad b' = b\cos\theta - a\sin\theta$

$a'^2 + b'^2 = a^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - 2ab\cos\theta \sin\theta + a^2\sin^2\theta$

$= \cos^2\theta(a^2 + b^2) + \sin^2\theta(a^2 + b^2)$

$= (a^2 + b^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= a^2 + b^2 \qquad [\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$

$\therefore \boxed{a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2}$

9. সমাধান ঃ

$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \qquad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

$ax^2 + 2hxy + by^2$ তে x এবং y এর মান বসিয়ে

$ax'^2\cos^2\theta - 2ax'y'\cos\theta\sin\theta + ay'^2\sin^2\theta + 2hx'^2\sin\theta\cos\theta + 2hx'y'\cos^2\theta - 2hx'y'\sin^2\theta - 2hy'^2\sin\theta\cos\theta + bx'^2\sin^2\theta + 2bx'y'\sin\theta\cos\theta + by'^2\cos^2\theta$

$= x'^2(a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta) + 2x'y'(-a\sin\theta\cos\theta + h\cos^2\theta - h\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta) + y'^2(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta)$

$= a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$ (প্রশ্নানুসারে)

$\therefore a' = a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta$

$b' = a\sin^2\theta + b\cos^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta$

$h' = h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - a\sin\theta\cos\theta + b\sin\theta\cos\theta$

$\therefore a' + b' = a(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= a + b \qquad \therefore \boxed{a + b = a' + b'}$

আবার $\quad 2a' = a(1 + \cos 2\theta) + 2h\sin 2\theta + b(1 - \cos 2\theta)$

$2b' = (a + b) - \{2h\sin 2\theta + (a - b)\cos 2\theta\}$

$\therefore \quad 4a'b' = (a + b)^2 - \{2h\sin 2\theta + (a - b)\cos 2\theta\}^2$

$4h'^2 = \{2h\cos 2\theta - (a - b)\sin 2\theta\}^2$

$\therefore \quad 4(a'b' - h'^2) = (a + b)^2 - \{4h^2 + (a - b)^2\}$

$= 4(ab - h^2)$

$\therefore \quad \boxed{a'b' - h'^2 = ab - h^2}$

10. সংকেত ঃ

$x = x', \qquad y = y' + 1$

আবার, $x'' = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y'' = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}}$

11. **সমাধান ঃ**

$\theta = \cos^{-1}\frac{3}{5}$ $\quad\therefore\quad \cos\theta = \frac{3}{5}$ এবং $\sin\theta = \frac{4}{5}$

স্থানাঙ্ক পরিবর্তন সূত্র থেকে, $x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$ এবং $y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$

(i) প্রদত্ত সমীকরণ থেকে

$$36\left(\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right)^2 - 24\left(\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right)\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + 29\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right)^2 = 180$$

অথবা, $36\,(3x' - 4y')^2 - 24(3x' - 4y')\,(4x' + 3y') + 29\,(4x' + 3y')^2 = 180 \times 25$

অথবা, $500x'^2 + 1125y'^2 = 180 \times 25$

বা, $20x'^2 + 45y'^2 = 180$

বা, $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$

এটি নির্ণেয় সমীকরণ।

(ii) যেহেতু এখানে পরিবর্তিত সমীকরণটি দেওয়া আছে এবং আমাদের পরিবর্তিত স্থানাঙ্ক (x', y')

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটিতে ড্যাস্ যোগ করে লেখা হল

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

$\therefore$ নির্ণেয় আদি সমীকরণটি হবে

$$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\right)^2 + \frac{1}{9}\left(-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)^2 = 1$$

উভয় পক্ষকে 36×25 দ্বারা গুণ করে পাওয়া যায়

$9(3x + 4y)^2 + 4(-4x + 3y)^2 = 36 \times 25$

বা, $9(9x^2 + 24xy + 16y^2) + 4(16x^2 - 24xy + 9y^2) = 36 \times 25$

বা, $145x^2 + 120xy + 180y^2 = 36 \times 25$

বা, $29x^2 + 24xy + 36y^2 = 180$

12. **সমাধান ঃ**

যেহেতু একটি সুষম দ্বিঘাত রাশি একটি সুষম দ্বিঘাত রাশিতে পরিণত হয়েছে সুতরাং স্থানাঙ্কের পরিবর্তনটি হল মূলবিন্দু কেন্দ্রিক ঘূর্ণন, সুতরাং অপরিবর্তনীয় সূত্র থেকে

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = a + b$ এবং $\frac{1}{pq} = ab - h^2$

আবার আলোচ্য স্থানাঙ্ক পরিবর্তনে $x^2 + y^2$ একটি অপরিবর্তনীয় রাশি অর্থাৎ $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{X^2}{p-\lambda}+\frac{Y^2}{q-\lambda}=\frac{qX^2+pY^2-\lambda\left(X^2+Y^2\right)}{pq-\lambda(p+q)+\lambda^2}$$

$$=\frac{\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}-\frac{\lambda}{pq}\left(X^2+Y^2\right)}{1-\lambda\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\lambda^2.\frac{1}{pq}}$$

$$=\frac{ax^2+2hxy+by^2-\lambda\left(ab-h^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{1-\lambda(a+b)+\left(ab-h^2\right)\lambda^2}$$ (প্রমাণিত)

13. **সমাধান ঃ**

একটি ত্রিভুজের তিনটি বিন্দু যথাক্রমে $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$

$\therefore$ ABC-এর ক্ষেত্রফল $\Delta = \frac{1}{2}\left\{x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right\}$

ঘূর্ণন প্রয়োগ করার ফলে A, B, C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে

$A'\left(x_1', y_1'\right), B'\left(x_2', y_2'\right), C'\left(x_3', y_3'\right)$ হলে ত্রিভুজ $\Delta A'B'C'$-এর

ক্ষেত্রফল $\Delta' = \frac{1}{2}\left\{x_1'\left(y_2'-y_3'\right)+x_2'\left(y_3'-y_1'\right)+x_3'\left(y_1'-y_2'\right)\right\}$

এখন $$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1'\cos\theta-y_1'\sin\theta & x_1'\sin\theta+y_1'\cos\theta & 1 \\ x_2'\cos\theta-y_2'\sin\theta & x_2'\sin\theta+y_2'\cos\theta & 1 \\ x_3'\cos\theta-y_3'\sin\theta & x_3'\sin\theta+y_3'\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \because & x_i = x_i'\cos\theta-y_i'\sin\theta \\ & y_i = x_i'\sin\theta+y_i'\cos\theta \\ i=1,2,3 & \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}\cdot\left[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\right]$$

$= \Delta'$

$\therefore$ ঘূর্ণনের ফলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে।

একক 2 ❑ যুগ্ম সরলরেখা

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

আপনারা জানেন যে একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ সরলরেখা বোঝায়। এবার আমরা দ্বিঘাত সমীকরণের কথা বিবেচনা করব। দ্বিঘাত সমীকরণ সরলরেখা বোঝায় কিনা তা এখানে আলোচিত হবে। এক জোড়া সরলরেখার বা যুগ্ম সরলরেখার সমীকরণ দ্বিঘাত হয় তা আমরা এখানে দেখব। কিন্তু দ্বিঘাত সমীকরণ কি সর্বদা সরলরেখা হবে কিনা আলোচনা করা যেতে পারে। যুগ্ম সরলরেখার বিবিধ জ্যামিতিক ধর্মাবলীর আলোচনা খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

2.2 উদ্দেশ্য

এই এককে আপনারা জানতে পারবেন

- যুগ্ম সরলরেখার সমীকরণ
- যুগ্ম সরলরেখার লম্ব ও সমান্তরাল হবার শর্ত।
- মুলবিন্দুগামী যুগ্ম সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ।
- দ্বিঘাত সমীকরণের যুগ্ম সরলরেখা হবার শর্ত।
- বক্ররেখা ও যুগ্ম সরলরেখার ছেদ বিন্দুগামী যুগ্ম সরলরেখার সমীকরণ।

2.3 যুগ্ম সরলরেখার সমীকরণ

দুটি সরলরেখার সমীকরণ

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ...... (1) এবং

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ...... (2)

আবার (1) ও (2) থেকে গুণ করে পাই

$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ ...... (3)

এক্ষণে (1) নং সমীকরণে যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে। অতএব (1) নং সরলরেখার সমস্ত বিন্দু (3) নং 'এ' অবস্থান করে। অনুরূপ ভাবে (2) নং সরলরেখার ওপর সমস্ত বিন্দু (3) নং-এ অবস্থান করে।

$\therefore$ (3) নং সমীকরণ উভয় সরলরেখা সূচিত করে।

আবার (3) নং সমীকরণকে বিস্তৃত করে আমরা x ও y এর ঘাতে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ পাই। অতএব (3) নং সমীকরণ একটি যুগ্ম সরলরেখা নির্দেশ করে এবং সরলরেখাগুলি যথাক্রমে

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

2.4 সুষম দ্বিঘাত সমীকরণ সর্বদা মূলবিন্দুগামী যুগ্ম সরলরেখা

একটি দ্বিঘাত সুষম সমীকরণ সর্বদা মূলবিন্দুগামী একটি যুগ্ম সরলরেখা নির্দেশ করে।

একটি দ্বিঘাত সুষম সমীকরণ বিবেচনা করুন।

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \text{ .... } (1)$$

এক্ষণে $ax^2 + 2hxy + by^2 = b\left(y^2 + \frac{2h}{b}xy + \frac{a}{b}x^2\right)$

$$= b(y - m_1x)(y - m_2x)$$

$$= b\{y^2 - (m_1 + m_2)xy + m_1m_2x^2\}$$

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \qquad m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

দ্বিঘাত সুষম সমীকরণ দুটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ নির্দেশ করে।

সরলরেখা দুটি বাস্তব অথবা কাল্পনিক হবে যখন m_1 এবং m_2 এর মান বাস্তব অথবা কাল্পনিক হবে।

যদি $m_1 = m_2$ হয় তাহলে সরলরেখা দুটি

(1) থেকে পাই, $by^2 + 2hxy + ax^2 = 0$

$$y = \frac{-2hx \pm \sqrt{4h^2x^2 - 4bax^2}}{2b}$$

$$= \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - ab}}{b}x$$

অতএব সরলরেখা দুটি বাস্তব হবে যদি $h^2 - ab \geq 0$ এবং কাল্পনিক হবে যদি $h^2 - ab < 0$

2.5 মূলবিন্দুগামী যুগ্ম সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ নির্ণয়

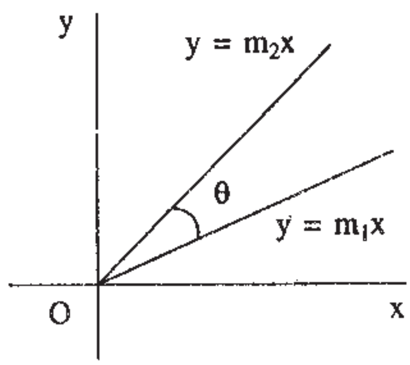
মনে করুন $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকরণটি, $y = m_1x$ এবং $y = m_2x$ দুটি সরলরেখা চিহ্নত করে।

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$$

$$m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

যদি ওই দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ θ হয়, তাহলে

$$\tan\theta = \frac{m_1 \sim m_2}{1 + m_1m_2} = \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}}{1 + m_1m_2}$$



চিত্র 2.1

$$= \frac{\sqrt{\left(-\frac{2h}{b}\right)^2 - 4\frac{a}{b}}}{1+\frac{a}{b}} = \frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

অনুসিদ্ধান্ত

2.5.1

(1) যদি সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণ 90° অর্থাৎ $\theta = 90°$ হলে $\boxed{a+b=0}$ এবং

2.5.2

(2) $\theta = 0°$ হলে $\boxed{h^2 = ab}$ অর্থাৎ $h^2 - ab = 0$ রেখা দুটির সমান্তরাল হবার শর্ত। কিন্তু যেহেতু রেখা দুটি পরস্পর ছেদী (মূলবিন্দুগামী) অতএব এক্ষেত্রে রেখা দুটি অভিন্ন বা সমাপতিত হবে।

2.6 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ

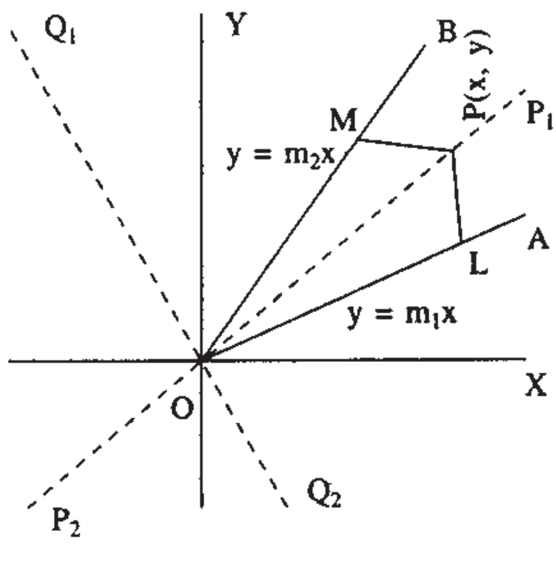
মনে করুন $y = m_1x$, $y = m_2x$ সরলরেখা দুটি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত।

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \qquad m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

প্রদত্ত সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ হবে সেই বিন্দুর সঞ্চারপথ যে বিন্দুটি সরলরেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী

$\therefore$ নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ

$$\frac{y - m_1x}{\sqrt{1+m_1^2}} = \pm\frac{y - m_2x}{\sqrt{1+m_2^2}}$$



চিত্র 2.2

উভয় পক্ষের বর্গ এবং বজ্রগুণ করে পাওয়া যায়

$$(y - m_1x)^2 (1 + m_2^2) = (y - m_2x)^2 (1 + m_1^2)$$

বা, $(y^2 - 2m_1xy + m_1^2x^2)(1 + m_2^2) = (y^2 - 2m_2xy + m_2^2x^2)(1 + m^2{}_1)$

বা, $x^2(m^2{}_1 - m^2{}_2) - y^2(m^2{}_1 - m^2{}_2) = 2xy(m_1 - m_2)(1 - m_1m_2)$

বা, $x^2 - y^2 = \dfrac{2xy(1 - m_1m_2)}{m_1 + m_2} (m_1 \neq m_2)$

$$= \frac{2xy\left(1 - \frac{a}{b}\right)}{-\frac{2h}{b}}$$

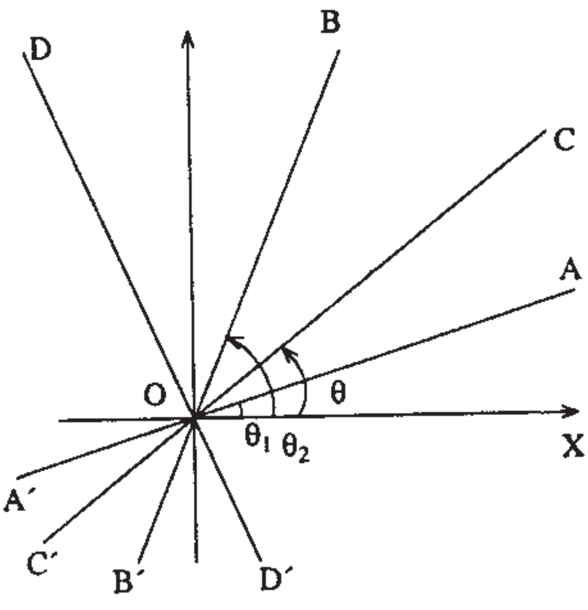
বা, $\dfrac{x^2 - y^2}{a - b} = \dfrac{xy}{h}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

মনে করুন $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকরণটি যথাক্রমে AOA' এবং BOB' দুটি সরলরেখা চিহ্নিত করে এবং সমীকরণ দুটি $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$$

$$m_1m_2 = \frac{a}{b}$$



চিত্র 2.3

ধরা যাক্ $\angle AOB$ কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক এবং বহিঃ সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে COC' এবং DOD'. মনে করুন $\angle XOA = \theta_1$, $\angle XOB = \theta_2$.

$$\therefore \quad \tan\theta_1 = m_1 \quad \tan\theta_2 = m_2$$

মনে করুন, COC′ অথবা DOD′, x অক্ষর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \quad \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \text{ অথবা } \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

এখন $\tan 2\theta = \tan(\theta_1 + \theta_2)$

$$\text{বা,} \quad \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

মনে করি P(x, y), COC′ অথবা DOD′ ওপর যে কোনো বিন্দু

$$\therefore \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

(1) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{2\frac{x}{y}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-2\frac{h}{b}}{1 - \frac{a}{b}}$$

$$\text{অথবা,} \quad \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{h}{a - b}$$

$$\text{অথবা,} \quad \boxed{\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}}$$

এটিই নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ।

2.7 দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যুগ্ম সরলরেখা হবার শর্ত

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ......(1)নং সমীকরণটি এক জোড়া সরলরেখা নির্দেশ করবে যদি এর বামপক্ষকে দুটি একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

(1) থেকে x এর ঘাতে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ আকারে সাজিয়ে পাওয়া যায়

$$ax^2 + 2(hy + g)x + (by^2 + 2fy + c) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{-(hy + g) \pm \sqrt{4(hy + g)^2 - 4a(by^2 + 2fy + c)}}{2a} \text{ (যদি } a \neq 0)$$

বা, $x = \dfrac{-(hy+g) \pm \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}}{a}$

এক্ষণে (1) নং এর বামপক্ষকে দুটি একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদকে পরিণত করা যাবে যদি

$(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)$

বা, $y^2(h^2-ab) + 2(gh-af)y + g^2 - ac$ পূর্ণবর্গ হবে।

এটি একটি y-এর ঘাতে দ্বিঘাত সমীকরণ এবং পূর্ণবর্গ হবে যদি নিরূপক শূন্য হয়।

বা, যদি $4(gh-af)^2 - 4(h^2-ab)(g^2-ac) = 0$

বা, $g^2h^2 - 2ghaf + a^2f^2 - g^2h^2 + ach^2 + abg^2 - a^2bc = 0$

বা, $a(abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2) = 0$

যেহেতু $a \neq 0$ নির্ণেয় শর্ত $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

বা, $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$

বিকল্প পদ্ধতি :

মনে করুন $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...... (1) সমীকরণটি এক জোড়া সরলরেখা চিহ্নিত করে এবং মনে করুন সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু (α, β)

এখন মূলবিন্দুটিকে (α, β)-তে স্থানান্তরিত করে (অক্ষদ্বয়ের দিক পরিবর্তন না করে) আমরা পাই $x = x' + \alpha$ $y = y' + \beta$ [প্রথম এককে এটি বিস্তারিতভাবে আলোচনা হয়েছে]

(1) থেকে

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2x'(a\alpha + b\beta + g) + 2y'(h\alpha + b\beta + f)$$
$$+ (a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c) = 0 \quad ...... (2)$$

এখানে (2) নং সমীকরণটি নতুন মূলবিন্দুগামী যুগ্ম সরলরেখা।

অতএব এটি একটি $x'y'$-এর ঘাতে দ্বিমাত্রিক সমসত্ত্ব সমীকরণ

$\therefore$ $a\alpha + h\beta + g = 0$ ...... (3)

$h\alpha + b\beta + f = 0$ ......(4)

$a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c = 0$ ...... (5)

(3) নং কে α দ্বারা এবং (4) নং কে β দ্বারা গুণ করে এবং যোগফল (5) নং থেকে বিয়োগ করে পাওয়া যায়

$$g\alpha + f\beta + c = 0 \quad \ldots\ldots (6)$$

(3), (4) এবং (6) থেকে α, β অপনয়ন করে পাওয়া যায় $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$

বা, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

2.7.1 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যুগ্ম সরলরেখার ছেদবিন্দু

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (3) নং এবং (4) নং থেকে বজ্রগুণন করে পাওয়া যায়

$$\frac{\alpha}{hf - bg} = \frac{\beta}{gh - af} = \frac{1}{ab - h^2}$$

$\therefore$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু $= \left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$

2.8 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যুগ্ম সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots (1)$

মনে করুন $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ সরলরেখা দুটি (1) নং সমীকরণ দ্বারা চিহ্নিত।

$\therefore \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = b(y - m_1x - c_1)(y - m_2x - c_2)$

$= b\{y^2 - (m_1 + m_2)xy + m_1m_2x^2 + x(c_1m_2 + c_2m_1) - y(c_1 + c_2) + c_1c_2\}$

উভয়পক্ষের তুলনা দ্বারা পাওয়া যায়

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \qquad m_1m_2 = \frac{a}{b} \qquad c_1m_2 + m_1c_2 = \frac{2g}{b}$$

$$c_1 + c_2 = -\frac{2f}{b} \qquad c_1c_2 = \frac{c}{b}$$

ধরা যাক সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \pm\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}}{1 + m_1m_2}$$

$$= \pm\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

(ধনাত্মক যখন θ সূক্ষ্মকোণ, ঋণাত্মক যখন θ স্থূলকোণ)

2.8.1 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যুগ্ম সরলরেখার পরস্পর লম্ব হবার শর্ত

অনুসিদ্ধান্ত (1) সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হবে যখন $m_1m_2 = -1$

বা, $a + b = 0$

বা, x^2 এর সহগ + y^2 এর সহগ = 0

2.8.2 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যুগ্ম সরলরেখার সমান্তরাল হবার শর্ত

(2) $h^2 - ab = 0$ হবে রেখা দুটির সমান্তরাল হবার শর্ত, রেখা দুটি পরস্পরচ্ছেদী ছিল বলে সমান্তরাল হবার শর্তই ছিল ওদের সমাপতিত হবার শর্ত। কিন্তু এক্ষেত্রে $h^2 - ab = 0$ হবে সমান্তরাল হবার শর্ত।

2.9 যুগ্ম সমান্তরাল সরলরেখা এবং মধ্যবর্তী দূরত্ব

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটির যুগ্ম সমান্তরাল সরলরেখা হবার শর্ত এবং মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় ঃ

মনে করুন $\ell x + my + n = 0$ এবং $\ell x + my + n' = 0$ সমান্তরাল সরলরেখা দুটি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ দ্বারা সূচিত হয়।

$$\therefore\ ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = (\ell x + my + n)(\ell x + my + n')$$

$$= \ell^2x^2 + 2\ell mxy + m^2y^2 + x(n + n')\ell + y(n + n')m + nn$$

$\therefore$ উভয়পক্ষের একই ঘাতের সহগ তুলনা করে পাওয়া যায়

$\ell^2 = a$ ... (i) $\quad \ell m = h$ ...(ii) $\quad m^2 = b$ ......(iii) $\quad \ell(n + n') = 2g$ ... (iv)

$m(n + n') = 2f$ ... (v) $\qquad nn' = c$ ......(vi)

(ii) থেকে $\ell^2m^2 = h^2$ $\qquad \therefore\ h^2 = ab$ [(i) ও (iii) থেকে]

$$\therefore\ h^2 = ab \qquad \frac{a}{h} = \frac{h}{b} \quad ......\ (vii)$$

আবার, $2bg = b\ell(n + n') = \ell m^2(n + n')$

$2hf = hm(n + n') = \ell m^2(n + n')$

$$\therefore\ 2bg = 2hf \quad \therefore\ bg = hf \quad \therefore\ \frac{h}{b} = \frac{g}{f} \quad ......\ (viii)$$

$\therefore$ (vii) এবং (viii) থেকে $\boxed{\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}}$

আবার $\ell x + my + n = 0$ এবং $\ell x + my + n' = 0$ সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব d হলে,

$$d = \left|\frac{n \sim n'}{\sqrt{\ell^2 + m^2}}\right| = \left|\frac{\sqrt{(n + n')^2 - 4nn'}}{\sqrt{\ell^2 + m^2}}\right| = \left|\frac{\sqrt{\frac{4g^2}{a} - 4c}}{\sqrt{a + b}}\right|$$

$$\therefore\ d = 2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a + b)}}$$

2.10 $\ell x + my + n = 0$ সরলরেখার এবং $ax^2+2hxy+by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বক্ররেখার ছেদবিন্দু দুটির সাথে মূলবিন্দুর সংযোজক যুগ্ম সরলরেখার মিলিত সমীকরণ।

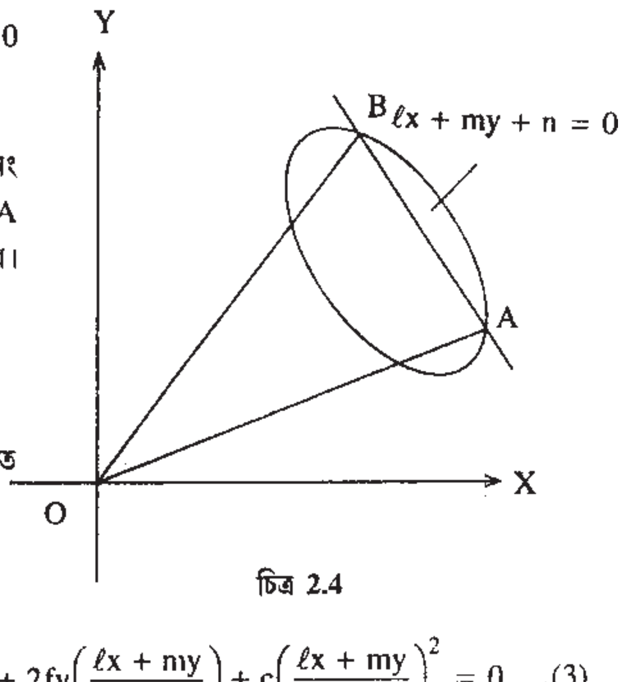
$\ell x + my + n = 0$ ...... (1)

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. (2)

মনে করুন (1) নং সরলরেখাটি (2) নং বক্ররেখাকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন OA এবং OB সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

(1) থেকে $\dfrac{\ell x + my}{-n} = 1$

$\therefore$ (2) নং সমীকরণকে (1) নং দ্বারা দ্বিঘাত সুষম সমীকরণে পরিণত করলে পাওয়া যায়



চিত্র 2.4

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx\left(\frac{\ell x + my}{-h}\right) + 2fy\left(\frac{\ell x + my}{-h}\right) + c\left(\frac{\ell x + my}{-h}\right)^2 = 0 \quad ...(3)$$

এখন (3) সমীকরণটি একটি সুষম দ্বিঘাত সমীকরণ সুতরাং এটি মূলবিন্দুগামী যুগ্ম সরলরেখা সূচিত করে। আবার যে (x, y) (1) ও (2)-কে সিদ্ধ করে তা অবশ্যই (3)-কে সিদ্ধ করে।

অতএব (3) হল নির্ণেয় যুগ্ম সরলরেখার সমীকরণ।

2.11 উদাহরণ

1. প্রমাণ করুন যে $5x^2 - 6xy + y^2 = 0$ সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা সূচিত করে। সরলরেখা দুটি নির্ণয় করুন এবং সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় করুন।

প্রদত্ত সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সুষম সমীকরণ

$\therefore$ এটি একটি মূলবিন্দুগামী যুগ্ম সরলরেখা

$$5x^2 - 6xy + y^2 = 0$$

বা, $5x^2 - 5xy - xy + y^2 = 0$

বা, $(y - x)(y - 5x) = 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি $y - x = 0$ এবং $y - 5x = 0$ দুটি সরলরেখা সূচিত করে।

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \ldots (1) \qquad 5x^2 - 5xy + y^2 = 0 \ldots\ldots (2)$$

(1) এবং (2) তুলনা হতে পাওয়া যায়

$$a = 5 \qquad h = -3 \qquad b = 1$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} = \frac{2\sqrt{9 - 5}}{5 + 1}$$

$$= \frac{2}{3} \quad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}\frac{2}{3}$$

2. যদি $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ এবং $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখা দুটি একে অপরের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক হয় তা হলে প্রমাণ করুন যে $pq + 1 = 0$

$$x^2 - 2pxy - y^2 = 0 \ldots\ldots (1) \qquad x^2 - 2qxy - y^2 = 0 \ldots\ldots (2)$$

প্রশ্নানুসারে (2) নং সমীকরণ (1) নং সমীকরণের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক

$\therefore$ (1) নং সমীকরণের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$$\frac{x^2 - y^2}{1 - (-1)} = \frac{xy}{-p}$$

বা, $px^2 - py^2 + 2xy = 0 \ldots\ldots (3)$

যেহেতু (2) এবং (3) অভিন্ন নয়

অতএব (2) এবং (3) তুলনা করে পাই

$$\frac{1}{p} = \frac{-2q}{2} = \frac{-1}{-p}$$

বা, $pq + 1 = 0$ (প্রমাণিত)

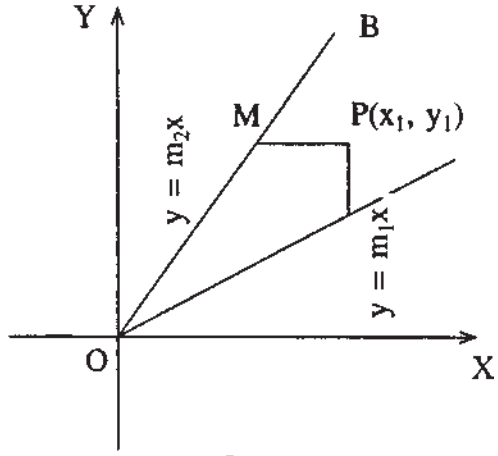
3. প্রমাণ করুন (x_1, y_1) বিন্দু থেকে, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ওপর লম্বদ্বয়ের গুণফল $\dfrac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \;\ldots\ldots\; (1)$$

ধরা যাক $y - m_1x = 0$ এবং $y - m_2x = 0$ সরলরেখা দুটি (1) নং দ্বারা সূচিত হয়।

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \qquad m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

ধরা যাক $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে, $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ওপর যথাক্রমে PL এবং PM লম্ব দূরত্ব।



চিত্র 2.5

$$\therefore \quad PL \times PM = \frac{(y_1 - m_1x_1) \times (y_1 - m_2x_1)}{\sqrt{1 + m_1^2}\,\sqrt{1 + m_2^2}}$$

$$= \frac{m_1m_2{x_1}^2 - (m_1 + m_2)x_1y_1 + {y_1}^2}{\sqrt{1 + {m_1}^2 + {m_2}^2 + {m_1}^2{m_2}^2}}$$

$$= \frac{m_1m_2{x_1}^2 - (m_1 + m_2)x_1y_1 + {y_1}^2}{\sqrt{1 + (m_1 + m_2)^2 - 2m_1m_2 + (m_1m_2)^2}}$$

$$= \frac{\frac{a}{b}{x_1}^2 - \left(-2\frac{h}{b}\right)x_1y_1 + {y_1}^2}{\sqrt{1 + \left(-2\frac{h}{b}\right)^2 - 2\frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}$$

$$= \frac{a{x_1}^2 + 2hx_1y_1 + b{y_1}^2}{\sqrt{b^2 + 4h^2 - 2ab + a^2}}$$

$$= \frac{a{x_1}^2 + 2hx_1y_1 + b{y_1}^2}{\sqrt{4h^2 + (a-b)^2}} \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

4. প্রমাণ করুন যে, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ এবং $\ell x + my = n$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\dfrac{n^2\sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2h\ell m + b\ell^2}$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\ell x + my = n \qquad \ldots\ldots (2)$$

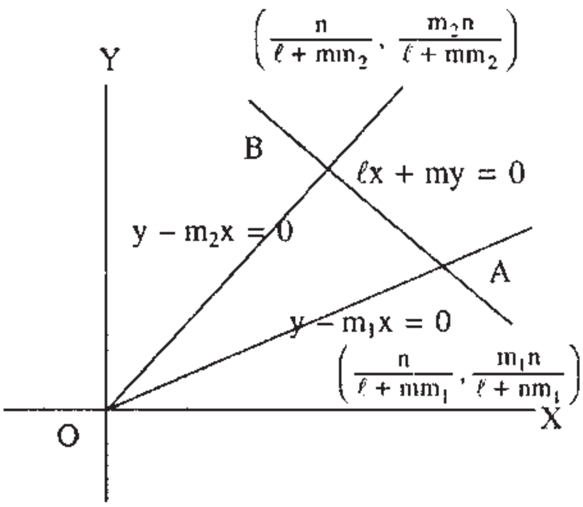
মনে করুন (1) নং সমীকরণ OA এবং OB দুটি সরলরেখা চিহ্নিত করে এবং যথাক্রমে $y - m_1x = 0$ এবং $y - m_2x = 0$

$$\therefore m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \qquad m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

$$\ell x + my = n \quad \ldots\ldots (2)$$

$$y - m_1x = 0 \quad \ldots\ldots(3)$$

$$y - m_2x = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$



চিত্র 2.6

(2) এবং (3) সমাধান করে পাওয়া যায়

$$x(\ell + mm_1) = n$$

$$x = \frac{n}{\ell + mn_1}$$

$$y = \frac{m_1n}{\ell + mm_1}$$

অনুরূপভাবে (2) এবং (4) সমাধান করে পাওয়া যায়

$$x = \frac{n}{\ell + mm_2} \quad y = \frac{m_2n}{\ell + mn_2}$$

$\therefore$ OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta OAB = \frac{1}{2}\,\frac{n^2(m_2 - m_1)}{(\ell + mm_1)(\ell + mm_2)} = \frac{n^2}{2}\,\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}}{\ell^2 + \ell m(m_1 + m_2) + n^2m_1m_2}$$

$$= \frac{\frac{n^2}{2}\sqrt{\frac{4h^2}{b^2} - 4\,\frac{a}{b}}}{\ell^2 + \ell m\left(-\frac{2h}{b}\right) + m^2\,\frac{a}{b}} = \frac{n^2\sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2h\ell m + b\ell^2}$$ বর্গ একক (প্রমাণিত)

5. প্রমাণ করুন $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ এবং $\ell x + my = 1$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ সমকোণী হবে যদি $(a + b)(a\ell^2 + 2h\ell m + bm^2) = 0$

মনে করুন $y - m_1x = 0$ এবং $y - m^2x = 0$ সরলরেখা দুটি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকরণ দ্বারা চিহ্নিত হয়।

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \qquad m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

$y - m_1x = 0$ ......(1) $y - m_2x = 0$ ...... (2) $\ell x + my = 1$ ...... (3)

(1) ও (2) লম্ব হবে যদি $m_1m_2 = -1$ বা, $m_1m_2 + 1 = 0$

(2) এবং (3) লম্ব হবে যদি $m_2\ell - m = 0$

(1) এবং (3) লম্ব হবে যদি $m_1\ell - m = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত $(1 + m_1m_2)(m_2\ell -$ $(m_1\ell - m) = 0$

বা, $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left\{\ell^2 m_1m_2 + m^2 - (m_1 + m_2)\ell\right\} = 0$

বা, $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left\{\ell^2 . \frac{a}{b} + m^2 - \left(-\frac{2h}{b}\right)\ell\right\} = 0$

বা, $(a + b)(a\ell^2 + 2h\ell m + bm^2) = 0$

6. যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ এর একটি সরলরেখা $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$ সমীকরণের একটি সরলরেখার ওপর লম্ব হয় তা হলে দেখান যে $(aa' - bb')^2 + 4(ah' + hb')(ha' + bh') = 0$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \text{ ...... (1)} \qquad a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0 \text{ ...... (2)}$$

মনে করুন (1) নং সমীকরণের $y = mx$ সরলরেখাটি (2) নং সমীকরণের একটি সরলরেখার ওপর লম্ব।

$\therefore$ (2) নং সমীকরণের সরলরেখাটি হবে $y = -\frac{1}{m}x$, $y = mx$ ... (1) নং-এ বসিয়ে এবং $y = -\frac{1}{mx}$ ... (2) নং এ বসিয়ে

$$bm^2 + 2hm + a = 0$$

$$a'm^2 - 2h'm + b' = 0$$

বজ্রগুণন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{m^2}{2(b'h + ah')} = \frac{m}{aa' - bb'} = \frac{1}{-2(bh' + a'h)}$$

$$\therefore \quad m^2 = -\frac{b'h + ah'}{bh' + a'h} \qquad m = -\frac{aa' - bb'}{2(bh' + a'h)}$$

$$\therefore \quad \frac{(aa' - bb')^2}{4(bh' + a'h)^2} = -\frac{b'h + ah'}{h'b + a'h}$$

বা, $(aa' - bb')^2 + 4(bh' + ah')(hb' + h'a) = 0$

7. যদি $kx^2 + 3xy - 5y^2 + 7x + 14y + 3 = 0$ সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা নির্দেশ করলে k-এর মান নির্ণয় করুন।

অথবা, k-এর কোন মানের জন্য $kx^2 + 3xy - 5y^2 + 7x + 14y + 3 = 0$ সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা নির্দেশ করে।

উত্তর ঃ $kx^2 + 3xy - 5y^2 + 7x + 14y + 3 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots (2)$

(1) এবং (2) তুলনা দ্বারা পাওয়া যায়,

$$a = k \qquad h = \frac{3}{2} \qquad b = -5 \qquad g = \frac{7}{2} \qquad f = 7 \qquad c = 3$$

এক্ষণে আমরা জানি যে, (2) নং সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা হবে যদি

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

বা, $k(-5).3 + 2 \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} - k \cdot 49 - (-5) \cdot \frac{49}{4} - 3 \cdot \frac{9}{4} = 0$

বা, $-60k + 294 - 196k + 245 - 27 = 0$

বা, $-256k = -512 \qquad \therefore \quad k = 2$

7a. প্রমাণ করুন যে $2x^2 + xy - 6y^2 - 6x + 23y - 20 = 0$ একটি যুগ্ম সরলরেখা। সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

$2x^2 + xy - 6y^2 - 6x + 23y - 20 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$

বা, $2x^2 + x(y - 6) - (6y^2 - 23y + 20) = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-(y-6) \pm \sqrt{y^2 - 12y + 36 - 4 \cdot 2 \cdot (-6y^2 + 23y + 20)}}{4}$$

বা, $4x + y - 6 = \pm\sqrt{49y^2 - 196y + 196} = \pm\sqrt{(7y-14)^2}$

বা, $4x + y - 6 = 7y - 14$ (ধনাত্মক্ চিহ্ন নিয়ে)

বা, $4x - 6y + 8 = 0$

বা, $2x - 3y + 4 = 0$ ...... (2)

বা, $4x + y - 6 = -7y + 14$ (ঋণাত্মক চিহ্ন নিয়ে)

বা, $4x + 8y - 20 = 0$

বা, $x + 2y - 5 = 0$ ...... (3)

(1) নং সমীকরণটি যথাক্রমে

$2x - 3y + 4 = 0$ ...... (2)

এবং $x + 2y - 5 = 0$ ...... (3) নির্দেশ করে।

(2) এবং (3) থেকে বজ্রগুণন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{x}{15-8} = \frac{y}{4+10} = \frac{1}{4+3} \qquad \therefore \quad x = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = \frac{14}{7} = 2$$

$\therefore$ নির্ণেয় ছেদ বিন্দু (1, 2)

মনে করুন m_1 = (2) নং সমীকরণের আনতি বা ঢাল $= \frac{2}{3}$

m_2 = (3) নং সমীকরণের আনতি বা ঢাল $= -\frac{1}{2}$

(2) এবং (3) নং সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$$\tan\theta = \frac{m_1 \sim m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\frac{7}{4}$$

8. প্রমাণ করুন $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y = 5$ সমীকরণটি দুটি সমান্তরাল সরলরেখা উৎপন্ন করে এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায়।

$$(x + 3y)^2 + 4(x + 3y) - 5 = 0$$

বা, $a^2 + 4a - 5 = 0$ ($a = x + 3y$ ধরে)

বা, $(a + 5)(a - 1) = 0$

বা, $(x + 3y + 5)(x + 3y - 1) = 0$ (a-এর মান বসিয়ে)

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি,

$$x + 3y + 5 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

এবং $y + 3y - 1 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$

দুটি সরলরেখা গঠন করে।

এক্ষণে $m_1 = -\frac{1}{3}$ এবং $m_2 = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ (1) এবং (2) সমান্তরাল সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= \frac{5}{\sqrt{1^2 + 3^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}\sqrt{10} \text{ একক}$$

9. যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি মূলবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী দুটি সরলরেখা চিহ্নিত করে তা হলে প্রমাণ করুন যে, $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$

সমাধান ঃ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots (1)$

ধরা যাক্ $\ell_1 x + m_1 y + n_1 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$

$$\ell_2 x + m_2 y + n_2 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

সরলরেখা দুটি (1) নং সমীকরণ দ্বারা চিহ্নিত হয়।

$$(\ell_1 x + m_1 y + n_1)(\ell_2 x + m_2 y + n_2) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

বা, $\ell_1\ell_2 x^2 + (\ell_1 m_2 + \ell_2 m_1)xy + m_1 m_2 y^2 + (\ell_1 n_2 + \ell_2 n_1)x + (m_1 n_2 + m_2 n_1)y$

$+ n_1 n_2 = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$

$\therefore$ $\ell_1\ell_2 = a \ldots$ (i) $\ell_1 m_2 + \ell_2 m_1 = 2h \ldots$ (ii) $m_1 m_2 = b \ldots$(iii) $\ell_1 n_2 + \ell_2 n_1 = 2g \ldots$(iv)

$m_1 n_2 + m_2 n_1 = 2f \ldots$ (v) $n_1 n_2 = c \ldots$ (vi)

যেহেতু সরলরেখা দুটি মূলবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী

$$\left|\frac{n_1}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2}}\right| = \left|\frac{n_2}{\sqrt{\ell_2^2 + m_2^2}}\right|$$

বা, $\dfrac{n_1^2}{\ell_1^2 + m_1^2} = \dfrac{n_2^2}{\ell_2^2 + m_2^2}$

বা, $n_1^2\, \ell_2^2 + m_2^2\, n_1^2 = \ell_1^2\, n_2^2 + m_1^2\, n_2^2$

বা, $m_1^2\, n_2^2 - m_2^2\, n_1^2 = n_1^2\, \ell_2^2 - \ell_1^2\, n_2^2$

বা, $(m_1n_2 + m_2n_1)(m_1n_2 - m_2n_1) = (n_1\ell_2 + \ell_1n_2)(n_1\ell_2 - \ell_1n_2)$

বা, $2f(m_1n_2 - m_2n_1) = 2g(n_1\ell_2 - n_2\ell_1)$ [(iv) এবং (v) হতে]

বা, $f^2\left[(m_1n_2 + m_2n_1)^2 - 4m_1m_2n_1n_2\right] = g^2\left[(n_1\ell_2 + n_2\ell_1)^2 - 4n_1n_2\ell_1\ell_2\right]$

বা, $f^2[4f^2 - 4bc] = g^2[4g^2 - 4ca]$

বা, $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$ (প্রমাণিত)

10. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি যদি দুটি ছেদক সরলরেখা চিহ্নিত করে তবে প্রমাণ করুন যে মূলবিন্দু থেকে তাদের ছেদবিন্দুর বর্গের দূরত্ব $\dfrac{c(a+b) - f^2 - g^2}{ab - h^2}$

সমাধান ঃ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ধরুন $\ell_1x + m_1y + n_1 = 0$ ...... (2) এবং

$\ell_2x + m_2y + n_2 = 0$ ...... (3)

দুটি সরলরেখা যারা পরস্পর ছেদ করে।

$\therefore$ $(\ell_1x + m_1y + n_1)(\ell_2x + m_2y + n_2) = ax^2 + 2hxy + by2 + 2gx + 2fy + c$

$\therefore$ $\ell_1\ell_2 = a$ ...... (i) $\ell_1m_2 + \ell_2m_1 = 2h$ ... ... (ii) $m_1m_2 = b$ ... (iii)

$\ell_1n_2 + \ell_2n_1 = 2g$ ...... (iv) $m_1n_2 + m_2n_1 = 2f$ ...... (v) $n_1n_2 = c$ ...(vi)

মনে করি (α, β) (2) নং এবং (3) নং সরলরেখার ছেদবিন্দু

$\therefore$ $\ell_1\alpha + m_1\beta + n_1 = 0$

$\ell_2\alpha + m_2\beta + n_2 = 0$

$$\therefore \quad \frac{\alpha}{m_1n_2 - m_2n_1} = \frac{\beta}{n_1\ell_2 - n_2\ell_1} = \frac{1}{\ell_1m_2 - \ell_2m_1}$$

$$\alpha = \frac{m_1n_2 - m_2n_1}{\ell_1m_2 - \ell_2m_1} \qquad \beta = \frac{n_1\ell_2 - n_2\ell_1}{\ell_1m_2 - \ell_2m_1}$$

$\therefore$ মূলবিন্দু থেকে ছেদবিন্দুর বর্গের দূরত্ব

$$= \alpha^2 + \beta^2 = \frac{(m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (\ell_2n_1 - \ell_1n_2)^2}{(\ell_1m_2 - \ell_2m_1)^2}$$

$$= \frac{(m_1n_2 + m_2n_1)^2 - 4m_1m_2n_1n_2 + (\ell_1n_2 + \ell_2n_1)^2 - 4\ell_1\ell_2n_1n_2}{(\ell_1m_2 + \ell_2m_1)^2 - 4\ell_1\ell_2m_1m_2}$$

$$= \frac{4f^2 - 4bc + 4g^2 - 4ac}{4h^2 - 4ab}$$

$$= \frac{f^2 - bc + g^2 - ac}{h^2 - ab} = \frac{c(a + b) - f^2 - g^2}{ab - h^2}$$

11. প্রমাণ করুন মূলবিন্দুগামী এবং $y = 3x + 2$ সরলরেখা ও $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 8y - 11 = 0$ কণিকের ছেদবিন্দু দুটি দ্বারা যুগ্ম সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$y = 3x + 2 \qquad \text{বা, } \frac{y - 3x}{2} = 1 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 8y - 11 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

(1) দ্বারা (2) নং সমীকরণকে x, y এর ঘাতে একটি দ্বিমাত্রিক সমসত্ত্ব সরলরেখা তৈরি করে পাওয়া যায়

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + (4x + 8y)\left(\frac{y - 3x}{2}\right) - 11\left(\frac{y - 3x}{2}\right)^2 = 0$$

বা, $-119x^2 + 17y^2 + 34xy = 0$

বা, $7x^2 - 2xy - y^2 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

(3)-এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\tan\theta = \frac{2\sqrt{1 + 7}}{7 - 1} = \frac{2\sqrt{8}}{6}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (প্রমাণিত)}$$

11. (a) প্রমাণ করুন যে, মূলবিন্দুগামী এবং $y = mx + c$ সরলরেখা এবং $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের ছেদবিন্দু দুটি দ্বারা যুগ্ম সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ সমকোণ হলে $c + 4am = 0$.

সমাধান ঃ

$$y = mx + c$$

বা, $\dfrac{y - mx}{c} = 1$ ...... (1) $\quad y^2 = 4ax$ ...... (2)

(1) দ্বারা অধিবৃত্তের সমীকরণকে x, y-এর ঘাতে একটি দ্বিমাত্রিক সমসত্ত্ব সমীকরণ গঠন করে পাওয়া যায়

$$y^2 = 4ax\left(\frac{y - mx}{c}\right)$$

বা, $4amx^2 - 4axy + cy^2 = 0$ ...... (3)

(3) নং সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণ সমকোণ হবে যদি x^2-এর সহগ + y^2-এর সহগ = 0

বা, $4am + c = 0$ (প্রমাণিত)

12. প্রমাণ করুন মূলবিন্দুগামী এবং $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = 0$, $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x = 0$ কণিক দ্বয়ের ছেদবিন্দু দুটি দ্বারা গঠিত যুগ্ম সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ সমকোণ হবে যদি $g'(a + b) = g(a' + b')$ হয়।

সমাধান ঃ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx = 0 \quad ...... (1)$$

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x = 0 \quad ...... (2)$$

$(1) \times g' - (2) \times g$ দ্বারা পাওয়া যায়

$$(ag' - a'g)x^2 + 2xy(hg' - h'g) + (g'b - gb')y^2 = 0 \quad ...... (3)$$

এটি x, y-এর ঘাতে দ্বিমাত্রিক সমসত্ত্ব সমীকরণ। অতএব মূলবিন্দুগামী একটি যুগ্ম সরলরেখা। যেহেতু (3) নং সমীকরণ (1) এবং (2) দ্বারা গঠিত $\therefore$ (1) ও (2) এর সাধারণ ছেদবিন্দু দিয়ে সিদ্ধ হবে।

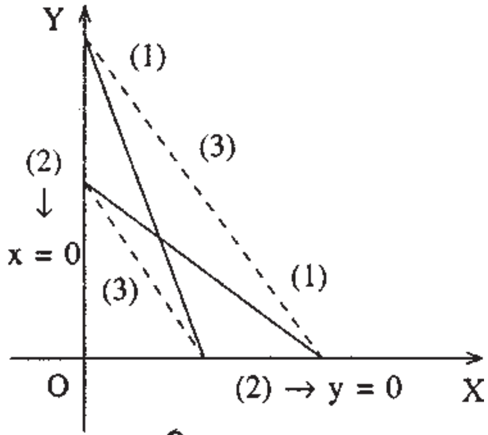
$\therefore$ (3) নং সমীকরণ মূলবিন্দুগামী এবং (1) ও (2)-এর ছেদবিন্দু দ্বারা যুগ্ম সরলরেখা।

(3) দ্বারা গঠিত সরলরেখা দুটি সমকোণে থাকবে যদি

$$(g'a - ga') + (g'b - gb') = 0$$

যদি $g'(a + b) = g(a' + b')$ (প্রমাণিত)

13. যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা হয় যা অক্ষদ্বয়কে চারটি বিন্দুতে ছেদ করে তা হলে প্রমাণ করুন যে ঐ চারটি বিন্দু দ্বারা তৃতীয় যুগ্ম সরলরেখার সমীকরণ হবে $ax^2 - 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + \frac{4fg}{c}xy = 0$.



চিত্র 2.7

সমাধান ঃ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

(1) এবং অক্ষদ্বারা চারটি ছেদবিন্দু দিয়ে তৃতীয় যুগ্ম সরলরেখার সমীকরণ $xy = 0$ …… (2)

ওপরের চারটি ছেদ বিন্দু দিয়ে যে কোনো কণিকের সমীকরণ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda xy = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

যেহেতু (1) নং সমীকরণ একটি যুগ্ম সরলরেখা

$$\therefore \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

(3) একটি যুগ্ম সরলরেখা হবে যদি

$$abc + 2fg\left(h + \frac{\lambda}{2}\right) - af^2 - bg^2 - c\left(h + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = 0$$

যদি $\left(abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2\right) + \lambda\left(fg - ch - c\frac{\lambda}{4}\right) = 0$

যদি $0 + fg - ch - \frac{c\lambda}{4} = 0 \qquad (\lambda \neq 0)$

যদি $f = \frac{4}{c}(fg - ch)$

নির্ণেয় তৃতীয় যুগ্ম সরলরেখার সমীকরণ হবে

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + \frac{4}{c}(fg - ch)xy = 0$$

বা, $ax^2 - 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + \frac{4fgxy}{c} = 0$

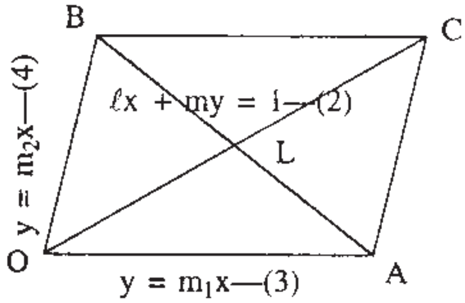
14. যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকরণটি একটি সামান্তরিকের দুটি বাহু এবং একটি কর্ণের সমীকরণ $\ell x + my = 1$ তা হলে প্রমাণ করুন যে সামান্তরিকটির অপর কর্ণের সমীকরণ হবে

$$y(b\ell - hm) = x(am - h\ell)$$

সমাধান ঃ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\ell x + my = 1 \quad \ldots\ldots \ (2)$$



চিত্র 2.8

মনে করুন OACB একটি সামান্তরিক যার দুটি বাহু (1) দ্বারা পাওয়া যায়।

মনে করুন $y = m_1x \ \ldots\ldots \ (3)$

$y = m_2x \ \ldots\ldots(4)$, OA এবং OB এর সমীকরণ।

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \qquad m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

$\ell x + my = 1$, হয় AB কর্ণের সমীকরণ।

AB এবং OC কর্ণদ্বয় L বিন্দুতে ছেদ করে

(2) এবং (3) হতে সমাধান করে পাওয়া যায়

$$x = \frac{1}{\ell + mm_1} \qquad y = \frac{m_1}{\ell + mm_1}.$$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1}{\ell + mm_1}, \frac{m_1}{\ell + mm_1}\right)$

অনুরূপভাবে B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1}{\ell + mm_2}, \frac{m_2}{\ell + mm_2}\right)$ ((2) এবং (4) মাধান করে)

$\therefore$ L বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{\frac{1}{\ell + mm_1} + \frac{1}{\ell + mm_2}}{2}, \frac{\frac{m_1}{\ell + mm_1} + \frac{m_2}{\ell + mm_2}}{2}\right)$

$\therefore$ আবার কর্ণের সমীকরণ

$$y - 0 = \frac{\frac{\frac{m_1}{\ell + mm_1} + \frac{m_2}{\ell + mm_2}}{2} - 0}{\frac{\frac{1}{\ell + mm_1} + \frac{1}{\ell + mm_2}}{2} - 0}(x - 0)$$

বা, $y\left(\frac{1}{\ell + mm_1} + \frac{1}{\ell + mm_2}\right) = \left(\frac{m_1}{\ell + mm_1} + \frac{m_2}{\ell + mm_2}\right)x$

বা, $y[2\ell + (m_1 + m_2)m] = [(m_1 + m_2)\ell + 2m(m_1m_2)]x$

বা, $y\left[2\ell - \frac{2h}{b}m\right] = \left[-\frac{2h}{b}\ell + 2m\frac{a}{b}\right]x$

বা, $y(b\ell - hm) = x(am - h\ell)$ (প্রমাণিত)

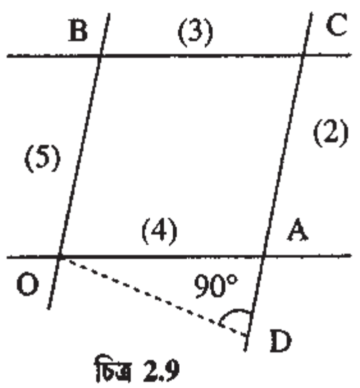
15. প্রমাণ করুন $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যুগ্ম সরলরেখা দ্বারা এবং মূল বিন্দুগামী ঐ সরলরেখা দুটির সঙ্গে দুটি সমান্তরাল সরলরেখাদ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{h^2 - ab}}$ বর্গএকক।

সমাধান ঃ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gy + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

ধরুন (1) নং সমীকরণ $\ell_1x + m_1y + n_1 = 0$ ...... (2) এবং

$\ell_2x + m_2y + n_2 = 0$ ...... (3) সরলরেখা দুটি চিহ্নিত করে এবং সরলরেখা দুটি যথাক্রমে CA এবং CB



চিত্র 2.9

$\therefore \quad (\ell_1x + m_1y + n_1)(\ell_2x + m_2y + n_2)$

$= ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$

$\ell_1\ell_2 = a \qquad \ell_1m_2 + \ell_2m_1 = 2h$

$m_1m_2 = b \qquad \ell_1n_2 + \ell_2n_1 = 2g$

$m_1n_2 + m_2n_1 = 2f \qquad n_1n_2 = c$

ধরুন OA এবং OB (3) এবং (2) এর সঙ্গে সমান্তরাল

যথাক্রমে $\ell_2x + m_2y = 0$ ...... (4)

$\ell_1x + m_1y = 0$ ...... (5)

(3) ও (5) থেকে পাওয়া যায়

$\ell_1x + m_1y + 0 = 0$

$\ell_2x + m_2y + m_2 = 0$

বজ্রগুণন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{x}{m_1n_2} = \frac{y}{-\ell_1n_2} = \frac{1}{\ell_1m_2 - \ell_2m_1}$$

$$\therefore \quad x = \frac{m_1n_2}{\ell_1m_2 - \ell_2m_1} \qquad y = -\frac{\ell_1n_2}{\ell_1m_2 - \ell_2m_1}$$

$\therefore$ B এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{m_1n_2}{\ell_1m_2 - \ell_2m_1}, \frac{-\ell_1n_2}{\ell_1m_2 - \ell_2m_1}\right)$

$$\therefore \quad OB = \sqrt{\frac{m_1^2\,n_2^2 + \ell_1^2\,n_2^2}{(\ell_1m_2 - \ell_2m_1)^2}} = \frac{n_2\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2}}{\sqrt{(\ell_1m_2 - \ell_2m_1)^2}}$$

মনে করি OD, CA এর ওপর লম্ব

$$\therefore \quad OD = \frac{\ell_1 \times 0 + m_1 \times 0 + n_1}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2}} = \frac{n_1}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2}}$$

$\therefore$ OACB সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$$= OB \times OD = \frac{n_2\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2}}{\sqrt{(\ell_1m_2 - \ell_2m_1)^2}} \times \frac{n_1}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2}}$$

$$= \frac{n_1n_2}{\sqrt{(\ell_1m_2 + \ell_2m_1)^2 - 4\ell_1\ell_2m_1m_2}}$$

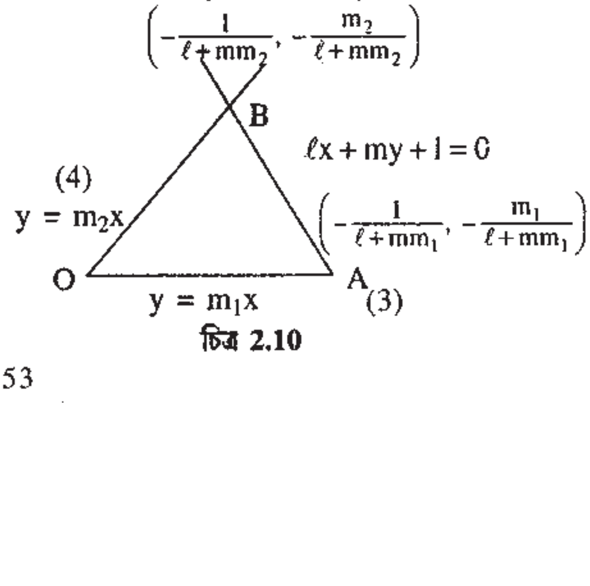
$$= \frac{c}{\sqrt{4h^2 - 4ab}} = \frac{c}{2\sqrt{h^2 - ab}}$$ বর্গ একক (প্রমাণিত)

16. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখা এবং $\ell x + my + 1 = 0$ সরলরেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হলে প্রমাণ করুন যে

$$h(\ell^2 - m^2) - (a - b)\ell m = 0.$$

সমাধান ঃ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$...... (1)

$\ell x + my + 1 = 0$ ...... (2)



চিত্র 2.10

ধরুন OA($y = m_1x$) এবং OB ($y = m_2x$) সরলরেখা দুটি (3) এবং (4) দ্বারা দেখানো হয়েছে।

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \quad m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

(2) এবং (3) থেকে $x = \frac{1}{\ell + mm_1}$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $y = -\frac{m_1}{\ell + mm_1}$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{1}{\ell + mm_1}, -\frac{m_1}{\ell + mm_1}\right)$

অনুরূপভাবে B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{1}{\ell + mm_2}, -\frac{m_2}{\ell + mm_2}\right)$

যদি OAB ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হয় তা হলে OA = OB

$$OA^2 = OB^2$$

$$\therefore \frac{1}{(\ell + mm_1)^2} - \frac{1}{(\ell + mm_2)^2} = \frac{m_2^2}{(\ell + mm_2)^2} - \frac{m_1^2}{(\ell + mm_1)^2}$$

বা, $(\ell + mm_2)^2 - (\ell + mm_1)^2 = m_2^2(\ell + mm_1)^2 - m_1^2(\ell + mm_2)^2$

বা, $(\ell + mm_2 + \ell + mm_1)(\cancel{\ell} + mm_2 - \cancel{\ell} - mm_1) = (\ell m_2 + mm_1m_2 + \ell m_1 + mm_1m_2)$

$$\times(\ell m_2 + \cancel{mm_1m_2} - \ell m_1 - \cancel{mm_1m_2})$$

বা, $[2\ell + m(m_1 + m_2)]m\cancel{[m_2 - m_1]} = [\ell(m_1 + m_2) + 2mm_1m_2].\ell\cancel{(m_2 - m_1)}$

$(m_2 - m_1 \neq 0)$

বা, $\left(2\ell - \frac{2h}{b}m\right).m = \left[\left(-\frac{2h}{b}\right)\ell + 2m\frac{a}{b}\right]\ell$

বা, $b\ell m - hm^2 = -h\ell^2 + a\ell m$

বা, $h(\ell^2 - m^2) - (a - b)\ell m = 0$

2.12 সারাংশ

এই এককে আপনারা পেলেন

(1) সুষম দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সর্বদা মূলবিন্দুগামী একজোড়া সরলরেখা সূচিত করে।

(2) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}$ এবং সরলরেখা দুটি (i) লম্ব হলে $a + b = 0$ হয়, (ii) সমাপতিত হলে $h^2 - ab = 0$

(3) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ $\frac{x^2 - y^2}{a-b} = \frac{xy}{h}$

(4) দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যুগ্ম সরলরেখা সূচিত করার শর্ত, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ অথবা $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0.$

(5) দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যদি দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখা নির্দেশ করে তাহলে ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$.

(6) দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যুগ্ম সরলরেখা হলে এবং মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}$ এবং (i) সরলখো দুটি লম্ব হলে $a + b = 0$ … (ii) সমান্তরাল হলে $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f} = 0$ (iii) সরলরেখা দুটি সমান্তরাল হলে ওদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a+b)}}$.

(7) $\ell x + my + n = 0$ সরলরেখা এবং $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বক্ররেখার ছেদবিন্দু দুটি ও মূলবিন্দু নিয়ে যুগ্ম সরলরেখা (যা একটি সুষম দ্বিঘাত সমীকরণ)

2.13 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখার একটি সরলরেখার আনতি অপরটির দ্বিগুণ হয় তা হলে প্রমাণ করুন যে $8b^2 = 9ab$.

2. প্রমাণ করুন $12x^2 - 7xy - 12y^2$ সমীকরণটি দুটি লম্ব সরলরেখা নির্দেশ করে। সরলরেখা দুটি নির্ণয় করুন।

3. যদি $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$ সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা নির্দেশ করলে মূলবিন্দু থেকে ঐ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করুন।

4. $2x^2 - 6xy + 3y^2 - 4y + 2x + 3 = 0$ সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা নির্দেশ করলে ঐ সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

5. (2, –3) বিন্দুগামী দুটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন $15x^2 + xy - 6y^2 + x + 7y - 2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের সঙ্গে সমান্তরাল।

6. প্রমাণ করুন $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখা দুটি দ্বারা এবং $px + qy + 1 = 0$ সরলরেখাটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ হবে যদি $(3a + b)(a + 3b) - 4h^2 = 0$ এবং $h(p^2 - q^2) - (a - b)pq = 0$.

7. যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ একটি যুগ্ম সরলরেখা হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে, সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় এবং x অক্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\sqrt{\frac{(a-b)^2+4h^2}{2h}}\,\frac{ca-g^2}{ab-h^2}$

8. যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা (যারা পরস্পর ছেদ করে) এবং $ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx - 2fy + c = 0$ সমীকরণ অপর একটি যুগ্ম সরলরেখা (যারা পরস্পর ছেদ করে) তাহলে প্রমাণ করুন যে তাদের দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $\frac{2c}{\sqrt{h^2-ab}}$.

9. দেখান যে, $y = mx + c$ এবং $(m^2 - 3)x^2 - 8mxy + (1 - 3m^2)y^2 = 0$ এই সরলরেখা তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

10. দেখান যে $y = x$ রেখার সঙ্গে α কোণে নত মূলবিন্দুগামী সরলরেখা দুটির মিলিত সমীকরণ হবে $x^2 - 2xy \sec 2\alpha + y^2 = 0$.

11. $3x^2 + 4xy - 4y^2 + 14x - 12y - 5 = 0$ যুগ্ম সরলরেখার সঙ্গে লম্ব (1, 2) বিন্দুগামী যুগ্ম সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

12. $3x^2 + 16xy - 12y^2 - 72x + 8y + 132 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং মূলবিন্দু দিয়ে যায় যে সরলরেখা তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

13. নিম্নলিখিত যুগ্ম সরলরেখাগুলির অন্তর্ভুক্ত কোণ সকল নির্ণয় করুন।

(i) $5x^2 + 26xy + 5y^2 + 7x + 11y + 2 = 0$

(ii) $\sqrt{3}x^2 - 4xy + \sqrt{3}y^2 + (\sqrt{3}-1)x + (\sqrt{3}-1)y - 1 = 0$

14. দেখান যে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখার দ্বারা $\ell x + my = 1$ রেখার ওপর ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য হবে $\frac{2\sqrt{\ell^2+m^2}\sqrt{h^2-ab}}{am^2-2h\ell m+b\ell^2}$.

15. দেখান যে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের সঙ্গে $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ সরলরেখার ছেদ বিন্দু দুটির সঙ্গে মূলবিন্দু সংযোগকারী সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হবে যদি $2p^2 + 2p(g \cos\alpha + f \sin\alpha) + c = 0$.

16. প্রমাণ করুন যে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখা দ্বারা এবং ঐ সরলরেখাদ্বয়ের সঙ্গে সমান্তরাল ও (p, q) বিন্দুগামী দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $\frac{ap^2 + 2hpq + bq^2}{2\sqrt{h^2 - ab}}$.

17. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখা এবং $\ell x + my = 1$ সরলরেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের লম্ববিন্দু (ortho centre) (x_1, y_1) হলে প্রমাণ করুন যে $\frac{x_1}{\ell} = \frac{y_1}{m} = \frac{a+b}{am^2 - 2hlm + b\ell}$.

18. প্রমাণ করুন যে $y^2 - 4y + 3 = 0$ এবং $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5x + 10y + 4 = 0$ দ্বারা সূচিত সরলরেখাগুলি একটি সামান্তরিক গঠন করে এবং বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

2.14 উত্তরমালা

1. **সমাধান ঃ**

যদি একটি সরলরেখার আনতি m হয় তা হলে অপরটির 2m

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে $m + 2m = 3m = -\frac{2h}{b}$ ...... (1)

এবং $m \times 2m = 2m^2 = \frac{a}{b}$ ...... (2)

(1) থেকে $m = -\frac{2h}{3b}$

(2) নং 'এ' m-এর মান বসিয়ে $2 \times \frac{4h^2}{9b^2} = \frac{a}{b}$.

$$\therefore \boxed{8h^2 = 9ab}$$

2. **সমাধান ঃ**

$12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$

বা, $12x^2 - 16xy + 9xy - 12y^2 = 0$

বা, $4x(3x - 4y) + 3y(3x - 4y) = 0$

বা, $(3x - 4y)(4x + 3y) = 0$

$\therefore$ সরলরেখা দুটি হয় $3x - 4y = 0$ ...... (1)

এবং $4x + 3y = 0$ ...... (2)

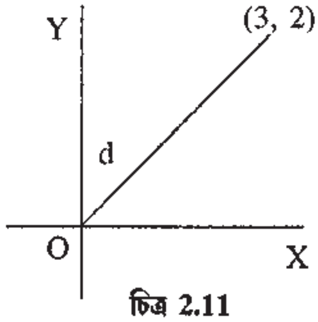
$$m_1 = \frac{3}{4} \quad m_2 = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \quad m_1 m_2 = -1$$

3. সমাধান ঃ

প্রদত্ত সমীকরণটিকে একটি x-এর ঘাতে দ্বিঘাত সমীকরণ আকারে সাজিয়ে

$2x^2 - x(5y + 2) + (3y^2 + 3y) = 0$



চিত্র 2.11

$$\therefore x = \frac{(5y+2) \pm \sqrt{(5y+2)^2 - 4 \times 2 \times (3y^2 + 3y)}}{2 \times 2}$$

বা, $4x - 5y - 2 = \pm\sqrt{y^2 - 4y + 4} = \pm(y - 2)$

$\therefore$ সরলরেখা দুটি হয় (i) $4x - 6y = 0$ (ii) $4x - 4y - 4 = 0$

(i) ও (ii)-কে সমাধান করে পাওয়া যায় $x = 3$, $y = 2$

$\therefore$ মূলবিন্দু থেকে নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13}$

4. সমাধান ঃ

$$2x^2 - \upsilon xy + 3y^2 - 4y + 2x + 3 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

(1) ও (2) থেকে তুলনা করে পাওয়া যায় $a = 2$, $h = -3$, $b = 3$.

$$\therefore \tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

$$= \frac{2\sqrt{9-6}}{2+3}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

5. সমাধান ঃ

$$15x^2 + xy - 6y^2 + x + 7y - 2 = 0$$

বা, $15x^2 + (1 + y)x - 6y^2 + 7y - 2 = 0$

$$\therefore x = \frac{-(1+y) \pm \sqrt{(1+y)^2 - 4 \times 15 \times (-6y^2 + 7y - 2)}}{2 \times 15}$$

বা, $x = \dfrac{-(1+y) \pm \sqrt{(19y-11)^2}}{30}$

বা, $x = \dfrac{3y-2}{5}$ এবং $x = \dfrac{-2y+1}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি $5x - 3y + 2 = 0$ ...... (1) এবং

$3x + 2y - 1 = 0$ ...... (2)

দুটি সরলরেখা চিহ্নিত করে।

আবার (1) নং সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হয়

$5x - 3y + k = 0$ এবং এটি $(2, -3)$ বিন্দুগামী

$\therefore k = -19$

$\therefore$ একটি নির্ণেয় সরলরেখা $5x - 3y - 19 = 0$

আবার (2) নং সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হয়

$3x + 2y + k_1 = 0$ এটি $(2, -3)$ বিন্দুগামী

$\therefore k_1 = 0$

নির্ণেয় সরলরেখাদ্বয় $5x - 3y - 19 = 0$

এবং $3x + 2y = 0$

6. সমাধান ঃ

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ...... (1) $px + qy + 1 = 0$ ...... (2)

ধরুন, $y = m_1x$ (OA) ...... (3) $y = m_2x$ (OB) ...... (4)

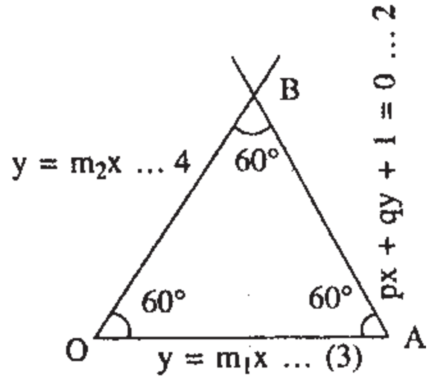
সরলরেখাদ্বয় (1) নং দ্বারা চিহ্নিত।

$\therefore m_1 + m_2 = -\dfrac{2h}{b}$ $m_1m_2 = \dfrac{a}{b}$

(2) এবং (3) হতে পাই $px + q(m_1x) = -1$

$x = -\dfrac{1}{p+qm_1}$ $y = -\dfrac{m_1}{p+qm_1}$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\dfrac{1}{p+qm_1}, -\dfrac{m_1}{p+qm_1}\right)$



চিত্র 2.12

অনুরূপভাবে B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{1}{p+qm_2}, -\frac{m_2}{p+qm_2}\right)$

এক্ষণে OAB ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ হবে যদি OA = OB এবং $\angle OAB = 60°$

$\therefore\ OA^2 = OB^2$

$$\frac{1}{(p+qm_1)^2}+\frac{m_1^2}{(p+qm_1)^2}=\frac{1}{(p+qm_2)^2}+\frac{m_2^2}{(p+qm_2)^2}$$

বা, $$\frac{1}{(p+qm_1)^2}-\frac{1}{(p+qm_2)^2}=\frac{m_2^2}{(p+qm_2)^2}-\frac{m_1^2}{(p+qm_1)^2}$$

বা, $(p+qm_2)^2-(p+qm_1)^2=m_2^2(p+qm_1)^2-m_1^2(p+qm_2)^2$

বা, $(p+qm_2+p+qm_1)(p+qm_2-p-qm_1)=(pm_2+qm_1m_2+pm_1+qm_1m_2)$
$(pm_2+qm_1m_2-pm_1-qm_1m_2)$

বা, $\{2p+q(m_1+m_2)\}q(m_2-m_1)=\{p(m_2+m_1)+2qm_1m_2\}p(m_2-m_1)$

বা, $\left\{2p-\frac{2h}{b}q\right\}q=\left\{p\left(-\frac{2h}{b}\right)+2q\frac{q}{b}\right\}p \qquad (m_1-m_2\neq 0)$

বা, $2pqb-2hq^2=-2hp^2+2pqa$

বা, $2h(p^2-q^2)-(a-b)pq=0 \quad \ldots\ldots \quad (I)$

যখন $\angle AOB = 60°$ তখন

$$\tan 60° = \frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

$\therefore\ \sqrt{3}(a+b)=2\sqrt{h^2-ab}$

বা, $3(a^2+2ab+b^2)=4(h^2-ab)$ (উভয়পক্ষের বর্গ করে)

বা, $3a^2+6ab+3b^2-4h^2+4ab=0$

বা, $\boxed{(3a+b)(a+3b)-4h^2=0} \quad \ldots\ldots\ (II)$

(I) ও (II) থেকে পাই (যদি OAB ত্রিভুজটি সমবাহু হয়)

$$\boxed{\begin{array}{l}(3a+b)(a+3b)-4h^2=0\\ h(p^2-q^2)-(a-b)pq=0\end{array}}$$

7. সমাধান ঃ

$$a^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

মনে করুন $\ell_1 x + m_1 y + n_1 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$ এবং

$$\ell_2 x + m_2 y + n_2 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

সরলরেখাদ্বয় (1) দ্বারা নির্দেশিত।

$\ell_1\ell_2 = a \ldots\ldots$ (i) $\quad \ell_1 m_2 + \ell_2 m_1 = 2h \quad \ldots\ldots$(ii) $m_1 m_2 = b \ldots\ldots$ (iii)

$\ell_1 n_2 + \ell_2 n_1 = 2g \ldots\ldots$ (iv) $m_1 n_2 + m_2 n_1 = 2f \quad \ldots\ldots$(v) $n_1 n_2 = c \ldots\ldots$(vi)

ধরুন (x_1, y_1), (2) এবং (3)-এর ছেদবিন্দু

$$\therefore \quad \ell_1 x_1 + m_1 y_1 + n_1 = 0$$

$$\ell_2 x_1 + m_2 y_1 + n_2 = 0$$

$$\frac{x_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1} = \frac{y_1}{n_1\ell_2 - n_2\ell_1} = \frac{1}{\ell_1 m_2 - \ell_2 m_1}$$

$$\therefore \quad y_1^2 = \frac{\left(n_1\ell_2 - n_2\ell_1\right)^2}{\left(\ell_1 m_2 - \ell_2 m_1\right)^2} = \frac{\left(n_1\ell_2 + n_2\ell_1\right)^2 - 4n_1 n_2 \ell_1 \ell_2}{\left(\ell_1 m_2 + \ell_2 m_1\right)^2 + 4\ell_1\ell_2 m_1 m_2}$$

$$= \frac{-4\left(ac - g^2\right)}{-4\left(ab - h^2\right)} = \frac{ac - g^2}{ab - h^2}$$

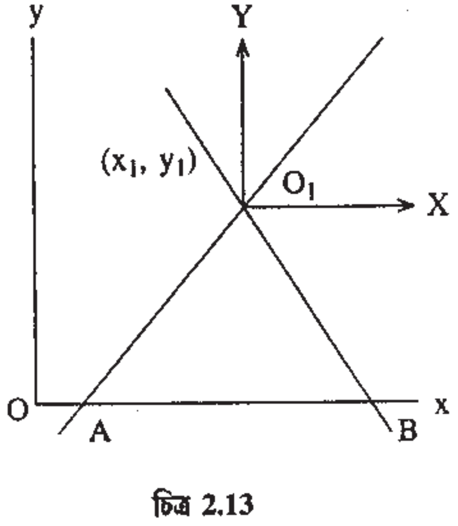
এখন মূলবিন্দুকে $O_1(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হল (অক্ষদ্বয়ের দিক পরিবর্তন না করে)

(1) থেকে

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

যেখানে $x = X + x_1$

$$y = Y + y_1$$



চিত্র 2.13

$\therefore$ (4) নং সমীকরণের কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ

$$\frac{X^2 - Y^2}{a-b} = \frac{XY}{h} - (5)$$

মনে করুন (5) নং সরলরেখাদ্বয় যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ox-কে ছেদ করে।

$\therefore$ দ্বিতীয় পদ্ধতিতে x অক্ষের সমীকরণ $Y = -y_1$

$\therefore$ (5) থেকে পাওয়া যায় $\dfrac{X^2 - y_1^2}{a-b} = \dfrac{X(-y_1)}{h}$

বা, $X^2 + \dfrac{a-b}{h} y_1 X - y_1^2 = 0 \quad \ldots\ldots (6)$

মনে করুন A এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(X_1, 0)(X_2, 0)$

মনে করুন X_1, X_2 (6) নং সমীকরণের বীজদ্বয়।

$$X_1 + X_2 = -\frac{a-b}{h} y_1,\ X_1X_2 = -y_1^2$$

$$\therefore\ AB^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$= \frac{(a-b)^2}{h^2} y_1^2 + 4y_1^2 = \frac{y_1^2}{h^2}\left[(a-b)^2 + 4h^2\right]$$

$$\therefore\ AB = \frac{y_1}{h}\left[(a-b)^2 + 4h^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} AB \times y_1$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{y_1}{h}\left[(a-b)^2 + 4h^2\right]^{\frac{1}{2}} \times y_1$$

$$= \frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}{2h} \times y_1^2$$

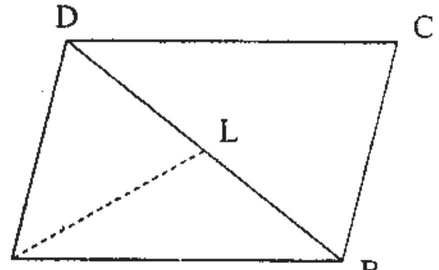
$$= \frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}{2h} \cdot \frac{ca - g^2}{ab - h^2} \quad \text{(প্রমাণিত)} \quad \left[\because\ y_1^2 = \frac{ca - g^2}{ab - h^2}\right]$$

8. **সমাধান ঃ**

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx - 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

মনে করুন AB এবং AD সরলরেখা দুটি (1) দ্বারা এবং BC এবং CD সরলরেখা দুটি (2) দ্বারা নির্দেশিত হয়েছে।



চিত্র 2.14

(1) থেকে (2) বিয়োগ করে পাওয়া যায়

$$4gx + 4fy = 0$$

বা, $gx + fy = 0$

বা, $y = -\frac{g}{f}x \quad \ldots\ldots (3)$

এটি BD সরলরেখার সমীকরণ।

ধরুন (x_1, y_1) বিন্দুটি (1) নং সমীকরণ দুটির ছেদবিন্দু

$\therefore \quad ax_1 + hy_1 + g = 0 \ldots\ldots (4)$

$hx_1 + by_1 + f = 0 \quad \ldots\ldots (5)$

$gx_1 + fy_1 + c = 0 \quad \ldots\ldots (6)$

ধরুন AL, BD-এর ওপর লম্ব।

$$\therefore \quad AL = \left|\frac{gx_1 + fy_1}{\sqrt{g^2+f^2}}\right| = \left|\frac{-c}{\sqrt{g^2+f^2}}\right| \quad \ldots\ldots (7) \quad [(6) \text{ থেকে}]$$

(1) এবং (3) থেকে y অপনয়ন করে পাওয়া যায়

$$ax^2 + 2hx\left(-\frac{g}{f}x\right) + b\frac{g^2}{f^2}x^2 + 2gx + 2f\left(-\frac{g}{f}x\right) + c = 0$$

বা, $(af^2 - 2hgf + bg^2)x^2 + cf^2 = 0$

বা, $c(ab - h^2)x^2 + cf^2 = 0 \quad \ldots (8) \ (c \neq 0)$

[যেহেতু (1) নং সমীকরণ একটি যুগ্ম সরলরেখা

$\therefore \ abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

$\therefore \ af^2 - 2fgh + bg^2 = abc - ch^2$

$= c(ab - h)^2]$

মনে করুন x_1 এবং x_2 (8) নং সমীকরণের বীজদ্বয়।

$$\therefore \quad x_1 + x_2 = 0 \quad \ldots\ldots \ (9)$$

$$x_1x_2 = \frac{f^2}{ab - h^2} \quad \ldots\ldots \ (10)$$

মনে করুন (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) যথাক্রমে B এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক।

$$\therefore \quad y_1 = -\frac{g}{f}x_1 \qquad y_2 = -\frac{g}{f}x_2$$

$$\therefore \quad y_1 + y_2 = -\frac{g}{f}(x_1 + x_2) = 0 \quad [(9) \text{ থেকে}]$$

$$y_1y_2 = \frac{g^2}{f^2}x_1x_2 = \frac{g^2}{f^2} \times \frac{f^2}{ab - h^2} = \frac{g^2}{ab - h^2} \quad [(10) \text{ থেকে}]$$

$$BD^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + (y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2$$

$$= 0 - 4 \cdot \frac{f^2}{ab - h^2} + 0 - 4 \cdot \frac{g^2}{ab - h^2}$$

$$\therefore \quad BD^2 = \frac{4(f^2 + g^2)}{h^2 - ab}$$

$$\therefore \quad BD = \frac{2\sqrt{g^2 + f^2}}{\sqrt{h^2 - ab}}$$

$\therefore$ ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$$= 2 \times \Delta\ ABD$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}\ BD\ .\ AL$$

$$= \frac{2\sqrt{g^2 + f^2}}{\sqrt{h^2 - ab}} \left| \frac{-c}{\sqrt{g^2 + f^2}} \right|$$

$$= \frac{2|-c|}{\sqrt{h^2 - ab}} = \frac{2c}{\sqrt{h^2 - ab}} \qquad \text{(প্রমাণিত)}$$

9. সংকেত ঃ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে দুটি সরলরেখা পাবেন।

$$\ell_1 : \left(m + \sqrt{3}\right)x - \left(1 - m\sqrt{3}\right)y = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\ell_2 : \left(m - \sqrt{3}\right)x - \left(1 + m\sqrt{3}\right)y = 0 \quad \ldots\ldots(2)$$

$$\ell_3 : y = mx + c$$

এখন $\tan\theta_1 = \dfrac{\dfrac{m + \sqrt{3}}{1 - m\sqrt{3}} - m}{1 + \dfrac{m + \sqrt{3}}{1 - m\sqrt{3}}\,m} = \sqrt{3} \qquad \therefore \theta_1 = 60°$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করুন $\theta_2 = 60°$

$\therefore$ ত্রিভুজের তৃতীয় কোণটি হল $60°$

এবং ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ।

10. সমাধান ঃ

মনে করুন সরলরেখা দুটির সমীকরণ হল

$y - m_1x = 0 \quad \ldots\ldots$ (i) এবং $y - m_2x = 0 \quad \ldots\ldots$ (ii)

এখন (i) ও (ii), $y = x$ সরলরেখার সাথে যথাক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দিকে α কোণ সৃষ্টি করে।

$\therefore$ $y = x$ সরলরেখার উন্নতি কোণ $= 45°$ বা, $\dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore m_1 = \tan(45° + \alpha) = \frac{\tan 45° + \tan\alpha}{1 - \tan 45° \tan\alpha}$$

$$= \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = \frac{1 + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$= \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

অনুরূপভাবে $m_2 = \dfrac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$\therefore$ $(y - m_1x)(y - m_2x) = 0$ থেকে পাওয়া যায়

$y^2 - (m_1 + m_2)xy + m_1m_2x^2 = 0$

বা, $y^2 - \dfrac{2}{\cos 2\alpha}xy + \dfrac{1 - \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\cdot x^2 = 0$

বা, $\boxed{x^2 - 2xy \sec 2\alpha + y^2 = 0}$ (প্রমাণিত)

এটি সরলরেখা দুটির মিলিত সমীকরণ।

11. **সমাধান ঃ**

প্রদত্ত যুগ্ম সরলরেখার সমান্তরাল মূলবিন্দুগামী যুগ্ম সরলরেখার মিলিত সমীকরণ হল

$$3x^2 + 4xy - 4y^2 = 0 \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

মনে করুন $3x^2 + 4xy - 4y^2 = -4(y - m_1x)(y - m_2x)$

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = 1, \qquad m_1m_2 = -\frac{3}{4}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখা দুটি $y - m_1x = 0$ এবং $y - m_2x = 0$ সরলরেখা দুটির সঙ্গে লম্ব।

যেহেতু সরলরেখা দুটি (1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় অতএব সমীকরণ হবে

$$(x - 1) + m_1(y - 2) = 0 \text{ এবং } (x - 1) + m_2(y - 2) = 0$$

$\therefore$ সরলরেখা দুটির মিলিত সমীকরণ হবে

$$\{(x - 1) + m_1(y - 2)\}\{(x - 1) + m_2(y - 2)\} = 0$$

অথবা, $(x - 1)^2 + (m_1 + m_2)(x - 1)(y - 2) + m_1m_2(y - 2)^2 = 0$

অথবা, $4(x - 1)^2 + 4(x - 1)(y - 2) - 3(y - 2)^2 = 0$

অথবা, $4x^2 + 4xy - 3y^2 - 16x + 8y = 0$

এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

12. **সংকেত ঃ**

ছেদবিন্দু নির্ণয় করুন

$$\left(\text{সূত্র} \quad \frac{hf - bg}{ab - h^2}, \ \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$$

এখন $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$

সূত্রটি প্রয়োগ করুন

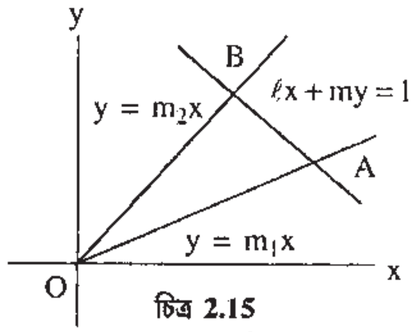
উত্তর ঃ $3x - 4y = 0$

13. **সংকেত ঃ**

সূত্র $\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$

উত্তর ঃ (i) $\tan^{-1}\dfrac{12}{5}$ (ii) $30°$

14. সংকেত ঃ



চিত্র 2.15

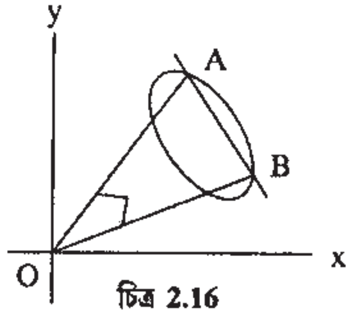
$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$m_1m_2 = \frac{a}{b} \quad \ldots\ \ldots (2)$$

A এবং B-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

এবার AB দূরত্ব নির্ণয় করুন এবং (1) এবং (2) ব্যবহার করুন। (উদাহরণ 8নং তুলনীয়)

15. সমাধান ঃ



চিত্র 2.16

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$$

বা, $$\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{p} = 1 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots(2)$$

(2) নং সমীকরণকে (1) নং এর সাহায্যে একটি সুষম দ্বিঘাত সমীকরণ তৈরি করে পাওয়া যায়,

$$x^2 + y^2 + 2(gx + fy)\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{p}\right) + c\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{p}\right)^2 = 0$$

বা, $x^2(p^2 + c\cos^2\alpha + 2pg\cos\alpha) + y^2(p^2 + c\sin^2\alpha + 2f\,p\sin\alpha) + 2xy(pg\sin\alpha +$
$pf\cos\alpha + c\sin\alpha\cos\alpha) = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

যেহেতু (3) নং সমীকরণটি একটি সুষম দ্বিঘাত সমীকরণ

$\therefore$ এটি মূলবিন্দুগামী যুগ্ম সরলরেখা।

অতএব সরলরেখা দুটি লম্ব হবে যদি

$$p^2 + c\cos^2\alpha + 2pg\cos\alpha + p^2 + c\sin^2\alpha + 2\,fp\sin\alpha = 0$$

অথবা, $\boxed{2p^2 + 2(pg\cos\alpha + fp\sin\alpha) + c = 0}$

এটাই নির্ণেয় শর্ত।

16. সমাধান ঃ

$$ax^2 + 2hxy + b^2 = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$

মনে করুন (1) নং সমীকরণ OA এবং OB সরলরেখা নির্দেশ করে এবং তাদের সমীকরণ যথাক্রমে

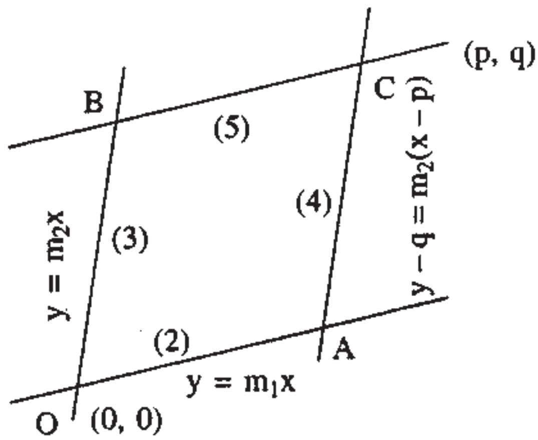
$$y = m_1x \quad \ldots\ldots(2) \qquad y = m_2x \quad \ldots\ldots(3)$$

$$\therefore \; m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \qquad m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

এখন CA এবং CB সরলরেখার সমীকরণ হবে যথাক্রমে

$$y - q = m_2(x - p) \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$y - q = m_1(x - p) \qquad \ldots\ldots(5)$$



চিত্র 2.17

[যেহেতু CA এবং CB, (p, q) বিন্দুগামী এবং (2) ও (3) এর সঙ্গে সমান্তরাল]

(2) এবং (4) থেকে $m_1x - q = m_2x - m_2p$

$$x = \frac{q - m_2p}{m_1 - m_2} \quad \text{এবং} \quad y = \frac{m_1(q - m_2p)}{m_1 - m_2}$$

(2) এবং (4) এর ছেদবিন্দু A-র স্থানাঙ্ক $\left[\dfrac{q - m_2p}{m_1 - m_2}, \dfrac{m_1(q - m_2p)}{m_1 - m_2}\right]$

অনুরূপভাবে (3) এবং (5) এর ছেদবিন্দু B-এর স্থানাঙ্ক $\left[\dfrac{q - m_1p}{m_2 - m_1}, \dfrac{m_2(q - m_1p)}{m_2 - m_1}\right]$

নির্ণেয় OACB সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$= 2 \times$ OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= 2 \times \frac{1}{2}\left[0 \cdot \left\{\frac{m_1(q - m_2p)}{m_1 - m_2} - \frac{m_2(q - m_1p)}{m_2 - m_1}\right\} + \right.$$

$$\left. \frac{q - m_2p}{m_1 - m_2}\left\{\frac{m_2(q - m_1p)}{m_2 - m_1} - 0\right\} + \frac{q - m_1p}{m_2 - m_1}\left\{0 - \frac{m_1(q - m_2p)}{m_1 - m_2}\right\}\right]$$

$$= \frac{(q - m_1p)(q - m_2p)(m_2 - m_1)}{(m_1 - m_2)(m_2 - m_1)}$$

$$= \frac{q^2 - (m_1 + m_2)pq + m_1m_2p^2}{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}} \qquad [\because\ m_2 - m_1 \neq 0]$$

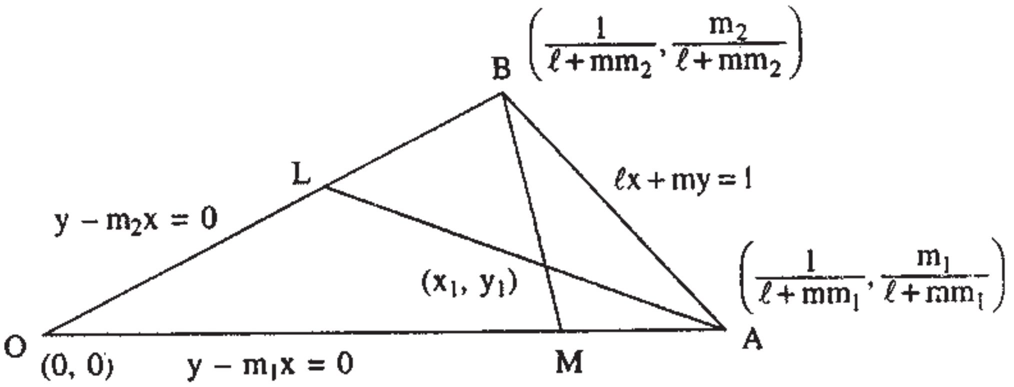
$$= \frac{q^2 + \frac{2h}{b}pq + \frac{a}{b}p^2}{\sqrt{\frac{4h^2}{b^2} - 4\frac{a}{b}}}$$

$$= \frac{ap^2 + 2hpq + bq^2}{2\sqrt{h^2 - ab}}$$

17. **সমাধান ঃ**

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad \ldots\ldots \text{(i)}$

$\ell x + my = 1 \quad \ldots\ldots(2)$



চিত্র 2.18

মনে করুন (1) যথাক্রমে OA এবং OB সরলরেখা সূচিত করে এবং সমীকরণ

$y - m_1x = 0 \quad \ldots\ldots (3) \qquad y - m_2x = 0 \quad \ldots\ldots(4)$

$\therefore\ m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \qquad m_1m_2 = \frac{a}{b}$

(2) এবং (3) সমাধান করে বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায়

$\left(\frac{1}{\ell + mm_1}, \frac{m_1}{\ell + mm_1}\right)$ এবং (2) এবং (4) সমাধান করে B বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় $\left(\frac{1}{\ell\ mm_2}, \frac{m_2}{\ell + mm_2}\right)$.

মনে করুন AL, OB-র ওপর লম্ব এবং BM, OA-র ওপর লম্ব।

$\therefore$ AL এবং BM, লম্ববিন্দু (Ortho centre) (x_1, y_1) দিয়ে যাবে।

$\therefore$ AL-এর সমীকরণ হবে $y - \frac{m_1}{\ell + mm_1} = -\frac{1}{m_2}\left(x - \frac{1}{\ell + mm_1}\right)$

উভয়পক্ষকে $(\ell + mm_1)m_2$ দ্বারা গুণ করে

$$(\ell + mm_1)m_2 . y - m_1m_2 = -x(\ell + mm_1) + 1$$

অথবা, $(\ell + mm_1)x + (\ell + mm_1)m_2y - (m_1m_2 + 1) = 0$ ......(5)

অনুরূপভাবে BM-এর সমীকরণ পাওয়া যাবে

$$(\ell + mm_2)x + (\ell + mm_1)m_1 . y - (m_1m_2 + 1) = 0 \quad ......(6)$$

যেহেতু (5) এবং (6) লম্ব বিন্দু (x_1, y_1) গামী

$$\therefore \quad (\ell + mm_1)x_1 + (\ell + mm_1)m_2y_1 - (m_1m_2 + 1) = 0 \quad ......(7)$$

$$(\ell + mm_2)x_1 + (\ell + mm_2)m_1y_1 - (m_1m_2 + 1) = 0......(8)$$

$\therefore$ বজ্রগুণন করে

$$\frac{x_1}{-(\ell + mm_1)m_2 + (\ell + mm_1)m_1} = \frac{y_1}{-(\ell + mm_2) + (\ell + mm_1)}$$

$$= \frac{(m_1m_2 + 1)}{(\ell + mm_1)(\ell + mm_2)(m_1 - m_2)}$$

অথবা,

$$\frac{x_1}{\ell(m_1 - m_2)} = \frac{y_1}{m(m_1 - m_2)} = \frac{m_1m_2 + 1}{\left[\ell^2 + \ell m(m_1 + m_2) + m_1m_2m^2(m_1 - m_2)\right]}$$

বা, $\frac{x_1}{\ell} = \frac{y_1}{m} = \frac{m_1m_2 + 1}{\ell^2 + \ell m(m_1 + m_2) + m_1m_2m^2}$ $\quad [\because \quad (m_1 - m_2 \neq 0]$

বা, $\frac{x_1}{\ell} = \frac{y_1}{m} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\ell^2 + \ell m\left(-\frac{2h}{b}\right) + \frac{a}{b} m^2}$

বা, $\frac{x_1}{\ell} = \frac{y_1}{m} = \frac{a + b}{b\ell^2 - 2h\ell m + am^2}$

18. **সংকেত ঃ**

$y^2 - 4y + 3 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$

$x^2 + 4xy + 4y^2 + 5x + 10y + 4 = 0 \quad \ldots\ldots(2)$

(1) এবং (2)-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাওয়া যাবে

$y = 3 \quad \ldots\ldots(3) \qquad y = 1 \ldots\ldots(4)$

$x + 2y + 1 = 0 \quad \ldots\ldots(5) \qquad x + 2y + 4 = 0 \quad \ldots\ldots (6)$

এখন এক জোড়া করে সরলরেখা নিয়ে সমাধান করুন তাহলে সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দুগুলি পাওয়া যাবে।

উত্তর ঃ A(– 7, 3) B(– 10, 3) C(– 6, 1) D(–3, 1)

$\therefore\ AB = CD = 3, \quad AB = BC = 2\sqrt{3}$

কর্ণদ্বয় AC এবং BD$\left(-\frac{13}{2}, 2\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

একক 3 ❑ সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ, শ্রেণী বিভাজন

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

আগের এককে আলোচনা করা হয়েছে একটি দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক শূন্য হলে সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা নির্দেশ করে। কিন্তু নিরূপকটি শূন্য না হলে সমীকরণটি কী নির্দেশ করে সেটাই আমরা এখানে দেখব। উচ্চমাধ্যমিক স্তরে আপনারা কনিক সম্বন্ধে আলোচনা পেয়েছেন। আপনারা দেখেছেন কার্তিয় স্থানাঙ্ক সাপেক্ষে,

(1) অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ অথবা $x^2 = 4ay$ যখন স্থানাঙ্ক অক্ষ অধিবৃত্তের অক্ষ এবং মূল বিন্দু অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু

(2) উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ যেখানে কেন্দ্র (0, 0), পরাক্ষের দৈর্ঘ্য 2a, উপাক্ষের দৈর্ঘ্য 2b

(3) পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ যার কেন্দ্র (0, 0), তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য 2a, অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 2b

সমীকরণগুলি প্রতিটিই দ্বিঘাত। কিন্তু যে কোনও দ্বিঘাত সমীকরণ কীভাবে কনিক নির্দেশ করে তা আমরা এখানে দেখব। একটি দ্বিঘাত সমীকরণ কোন শর্তে কী রূপ কনিক হবে, সেটাই কনিকের শ্রেণী বিভাজন। কনিকটি কখন অধিবৃত্ত বা উপবৃত্ত বা পরাবৃত্ত হবে সেটাই মূল আলোচনার বিষয়বস্তু। আবার কনিকের কেন্দ্র নিয়ে এখানে আলোচনা করা হবে। একটি কনিকের কেন্দ্র নাও থাকতে পারে, আবার কনিকের কেন্দ্র মূল বিন্দু হলে কনিকের সমীকরণ কীরূপ হবে তাও আমরা দেখব।

3.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করে আপনারা জানতে পারবেন

- $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক

$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 \neq 0$ হলে সমীকরণটি একটি কণিক। এবং

$D = ab - h^2$ হলে যখন (i) $\Delta \neq 0$, $D = 0$। কনিকটি একটি অধিবৃত্ত। (ii) $\Delta \neq 0$ $D > 0$, উপবৃত্ত (iii) $\Delta \neq 0$ $D < 0$ পরাবৃত্ত।

- কনিকের কেন্দ্র মূল বিন্দু হলে কণিকের আকার।
- কনিকের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়।
- দ্বিঘাত সমীকরণ থেকে কনিকের আদর্শাকারে বা প্রচলিত পরিবর্তিত সমীকরণ।

3.3 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণটি সর্বদা একটি কণিক

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

(1) নং সমীকরণটি একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ, এবং এটি সর্বদা একটি কনিক।

এখন অক্ষদ্বয়কে 'θ' কোণে আবর্তিত করলে

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \qquad y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণ থেকে x এবং y-এর মান বসিয়ে

$$a(x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 + 2h(x' \cos\theta - y' \sin\theta)(x' \sin\theta + y' \cos\theta)$$

$$+ b(x' \sin\theta + y' \cos\theta)^2 + 2g(x' \cos\theta - y' \sin\theta) + 2f(x' \sin\theta + y' \cos\theta) + c = 0$$

বা, $x'^2(a \cos^2\theta + h \sin 2\theta + b \sin^2\theta) + x'y'\{2h \cos 2\theta - (a - b)\sin 2\theta\}$

$$+ y'^2(a \sin^2\theta - h \sin 2\theta + b \cos^2\theta) + 2x'(g \cos\theta + f \sin\theta)$$

$$+ 2y'(f \cos\theta - g \sin\theta) + c = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

এখানে 'θ'-কে এমনভাবে নেওয়া হল যার জন্য $x'y'$-এর সহগ শূন্য হবে।

$$2h \cos 2\theta - (a - b) \sin 2\theta = 0$$

$$\text{বা,} \quad \tan 2\theta = \frac{2h}{a - b} \qquad \ldots\ldots (3)$$

∴ a, b, h-এর মান যাই হোক না কেন (3) থেকে θ-এর যে মান পাওয়া যাবে তা (2)-নং-এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$a'x'^2 + b'y'^2 + 2g'x' + 2f'y' + c = 0 \qquad \ldots\ldots(4)$$

Case—I

মনে করুন $a' \neq 0, \quad b' \neq 0$

$$\therefore \quad (4) \text{ থেকে } a'\left(x' + \frac{g'}{a'}\right)^2 + b'\left(y' + \frac{f'}{b'}\right)^2 = \frac{g'^2}{a'^2} + \frac{f'^2}{b'^2} - c' = k \text{ (ধরুন)} \ \ldots\ldots(4)$$

∴ অক্ষ দুটির দিক্ পরিবর্তন না করে মূলবিন্দুটিকে $\left(-\frac{g'}{a'}, -\frac{f'}{b'}\right)$-তে স্থানান্তরিত করলে ওপরের সমীকরণ হয়

$$a'x^2 + b'y^2 = k \qquad \ldots\ldots (5)$$

যেখানে (x, y) নতুন স্থানাঙ্ক

(a) যদি $k = 0$ তা হলে (5) নং সমীকরণ একটি হবে যুগ্ম সরলরেখা, যারা বাস্তব যখন a' এবং b' বিপরীত a', b' সমচিহ্ন যুক্ত হলে সমীকরণটি যুগ্ম কাল্পনিক সরলরেখা বিন্দু উপবৃত্ত যেহেতু সমীকরণটি (0, 0) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

(b) যদি $k \neq 0$, (5) থেকে $\dfrac{x^2}{\frac{k}{a'}} + \dfrac{y^2}{\frac{k}{b'}} = 1.$

(i) যদি $\frac{k}{a'}$, $\frac{k}{b'}$ উভয়েই ধনাত্মক হয় তাহলে (5) একটি উপবৃত্ত হবে। এটাই Canonical আকৃতি। আবার যদি $a' = b'$ তাহলে (5) একটি বৃত্ত হবে।

(ii) যদি $\frac{k}{a'}$ এবং $\frac{k}{b'}$ এর মধ্যে যে কোনও একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয় তাহলে (5) একটি পরাবৃত্ত হবে এটাই (Canonical form) আদর্শ আকার, যদি $a' + b' = 0$ তাহলে (5) একটি সমপরাবৃত্ত হবে। যদি $\frac{k}{a'}$ এবং $\frac{k}{b'}$ উভয়েই ঋণাত্মক হয় এবং k ধনাত্মক হয় তাহলে (5) একটি কাল্পনিক বৃত্ত হবে যেহেতু x এবং y এর এমন কোনও বাস্তব মান নেই যা সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

Case—II

মনে করুন a' এবং b'-এর মধ্যে যে কোনও একটি শূন্য (ধরা গেল $a' = 0$)

$\therefore$ (4) থেকে $b'\left(y' + \frac{f'}{b'}\right)^2 = -2g'x' + \frac{f'^2 - b'c'}{b'}$ ...... (6)

(a) যদি $g' = 0$, তাহলে (6) একটি যুগ্ম সমান্তরাল সরলরেখা হবে যদি $f'^2 - b'c'$ ধনাত্মক হয় ($f'^2 - b'c' > 0$) যদি $g' = 0$ এবং $f'^2 - b'c'$ ঋণাত্মক হয় ($f'^2 - b'c' < 0$) তাহলে (6) তাহলে (6) কোন জ্যামিতিক সঞ্চার পথ নির্দেশ করে না।

(b) যদি $g' = 0$ তা হলে (6) থেকে,

$$\left(y' + \frac{f'}{b'}\right)^2 = -\frac{2g'}{b'}\left(x' - \frac{f'^2 - b'c'}{2b'g'}\right)$$

মূলবিন্দুটিকে $\left(\frac{f'^2 - b'c'}{2b'g'}, -\frac{f'}{b'}\right)$-তে স্থানান্তরিত করে (অক্ষদ্বয়ের দিক পরিবর্তন না করে) পাওয়া যায় $Y^2 = -\frac{2g'}{b'}X$ (যেখানে X, Y নতুন স্থানাঙ্ক)

এটি একটি অধিবৃত্ত যার অক্ষ X-অক্ষ এবং এটির অক্ষ x-অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে যদি $a' \neq 0$ এবং $b' = 0$ তাহলে এটি একটি অধিবৃত্ত যার অক্ষ y-অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল।

$\therefore$ একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ সর্বদা একটি কনিক নির্দেশ করে।

3.4 কনিকের প্রকৃতি

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad ...... (1)$$

(1) নং সমীকরণ x, y-এর ঘাতে একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ, এবং এটি সর্বদা একটি কনিক নির্দেশ করে।

মনে করুন $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$D = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2$$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণটি নির্দেশ করে

(a) (i) একটি যুগ্ম সরলরেখা যদি $\Delta = 0$

(ii) একটি যুগ্ম সরলরেখা (পরস্পর ছেদী) যদি $\Delta = 0$ এবং $D \neq 0$

(iii) একটি সমান্তরাল যুগ্ম সরলরেখা (অথবা সমাপতিত যুগ্ম সরলরেখা) যদি $\Delta = 0$, এবং $D = 0$

(b) একটি বৃত্ত যদি $a = b$ এবং $h = 0$

(c) একটি অধিবৃত্ত যদি $\Delta \neq 0$ এবং $D = 0$

(d) একটি উপবৃত্ত যদি $\Delta \neq 0$ এবং $D > 0$

(উপবৃত্তটি বাস্তব যখন $\Delta < 0$ এবং কাল্পনিক যখন $\Delta > 0$)

মনে করুন (1) নং সমীকরণের স্পর্শপ্রবণ রেখার যুক্ত সমীকরণ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + (c + \lambda) = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

যেখানে (λ = ধ্রুবক) এবং λ এমন ভাবে নেওয়া হয়েছে যার জন্য (2) একটি যুগ্ম সরলরেখা।

$$\therefore \quad ab(c + \lambda) + 2fgh - af^2 - bg^2 - (c + \lambda)h^2 = 0$$

$$\left(\lambda = -\frac{\Delta}{D}\right)$$

(2) নং সমীকরণে λ-এর মান বসিয়ে স্পর্শপ্রবণ রেখা পাওয়া যায়। আবার মূলবিন্দুগামী এবং স্পর্শপ্রবণ রেখার সঙ্গে সমান্তরাল যুগ্ম সরলরেখার সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

$\therefore$ এই সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখা দুটি

(i) বাস্তব যখন $h^2 > ab$

(ii) একই যখন $h^2 = ab$

(iii) কাল্পনিক যখন $h^2 < ab$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণটি (i) পরাবৃত্ত যখন $h^2 > ab$ বা, $D < 0$

(ii) উপবৃত্ত যখন $h^2 < ab$ বা, $D > 0$

(iii) অধিবৃত্ত যখন $h^2 = ab$ বা, $D = 0$

$\therefore$ একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ নির্দেশ করে

(a) (i) একটি যুগ্ম সরলরেখা যদি $\Delta = 0$

(ii) একটি যুগ্ম সরলরেখা (যারা পরস্পর ছেদ করেছে)

যদি $\Delta = 0$ এবং $D \neq 0$

(iii) একটি যুগ্ম সরলরেখা (সমান্তরাল অথবা সদৃশ)

যদি $\Delta = 0$ এবং $D = 0$

(b) একটি বৃত্ত যদি $a = b$ এবং $h = 0$

(c) একটি অধিবৃত্ত যদি $\Delta \neq 0$ এবং $D = 0$

(d) একটি উপবৃত্ত যদি $\Delta \neq 0$ এবং $D > 0$

(উপবৃত্তটি বাস্তব যখন $\Delta < 0$ এবং কাল্পনিক যখন $\Delta > 0$)

(e) (i) একটি পরাবৃত্ত যদি $\Delta \neq 0$ এবং $D < 0$

(ii) একটি সমপরাবৃত্ত যদি $\Delta \neq 0$, $D < 0$ এবং $a + b = 0$

ওপরের নিয়মগুলি মনে রাখবার সুবিধার জন্য নিম্নলিখিত ছক দ্বারা প্রস্তুত করা হল ঃ

D	Δ	আদর্শ আকার	প্রকৃতি
$D > 0$	$\Delta < 0$	$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$	উপবৃত্ত
$D > 0$	$\Delta > 0$	$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = -1$	কাল্পনিক উপবৃত্ত
$D < 0$	$\Delta < 0$	$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = -1$	পরাবৃত্ত
$D < 0$	$\Delta > 0$	$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$	..বৃত্ত
$D = 0$	$\Delta \neq 0$	$y^2 = 4\alpha x$ বা, $x^2 = 4\beta y$	অধিবৃত্ত
$D > 0$	$\Delta = 0$	$Ax^2 + By^2 = 0$	কাল্পনিক যুগ্ম সরলরেখা
$D \neq 0$	$\Delta = 0$	$y^2 - k^2x^2 = 0$	যুগ্ম সরলরেখা (পরস্পর ছেদী)
$D = 0$	$\Delta = 0$	$y^2 = m^2 (\neq 0)$ বা, $x^2 = n^2 (\neq 0)$	সমান্তরাল যুগ্ম সরলরেখা
$D = 0$	$\Delta = 0$	$y^2 = 0$ বা, $x^2 = 0$	সদৃশ যুগ্ম সরলরেখা

3.5 কনিক যার কেন্দ্র মূলবিন্দু

যদি কোন কনিকের জ্যা কোনও নির্দিষ্ট বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তা হলে কনিকটিকে কেন্দ্রীয় কনিক (central conic) এবং ওই নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে কনিকের কেন্দ্র বলা হয়।

মনে করুন $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1) একটি কনিকের সমীকরণ এবং কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত। অতএব সংজ্ঞা অনুযায়ী মূলবিন্দুগামী সকল জ্যা মূলবিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

মনে করুন AOB প্রদত্ত কনিকের একটি জ্যা। যদি A এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) হয় তা হলে B-এর স্থানাঙ্ক $(-x_1, -y_1)$

যেহেতু $A(x_1, y_1)$ এবং $B(-x_1, -y_1)$ কনিকটির ওপর অবস্থিত।

$$\therefore \quad ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 - 2gx_1 - 2fy_1 + c = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

(3) – (2) থেকে পাওয়া যায়

$$4gx_1 + 4fy_1 = 0$$

যা g এবং f-এর সব মানের জন্য সম্ভব।

$$\therefore \quad g = 0 \text{ এবং } f = 0$$

(1) নং সমীকরণে g এবং f-এর মান বসিয়ে আমরা পাই

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

(4) নং সমীকরণটি একটি কনিকের সমীকরণ যার মূলবিন্দু কেন্দ্রতে অবস্থিত।

3.6 কনিকের কেন্দ্র নির্ণয়

মনে করুন একটি কেন্দ্রীয় কনিকের (Central Conic) সমীকরণ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

এবং (α, β) ঐ কনিকটির কেন্দ্র।

$\therefore$ মূলবিন্দুটিকে (α, β)-তে স্থানান্তরিত করে (অক্ষদ্বয়ের দিক পরিবর্তন না করে) আমরা পাই

$$x = x' + \alpha, \qquad y = y' + \beta$$

$\therefore$ (1) থেকে x, y-এর মান বসিয়ে

$$a(x' + \alpha)^2 + 2h(x' + \alpha)(y' + \beta) + b(y' + \beta)^2 + 2g(x' + \alpha) + 2f(y' + \beta) + c = 0$$

বা, $ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2x'(a\alpha + h\beta + g) + 2y'(h\alpha + b\beta + f)$

$$+ (a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c) = 0$$

যেহেতু মূলবিন্দু (α, β)

$\therefore$ x' এবং y' এর সহগ শূন্য হবে,

$$\therefore \quad a\alpha + h\beta + g = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$h\alpha + b\beta + f = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

(2) এবং (3) থেকে বজ্রগুণন দ্বারা

$$\frac{\alpha}{hf - bg} = \frac{\beta}{gh - af} = \frac{1}{ab - h^2}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{hf - bg}{ab - h^2} \qquad \beta = \frac{gh - af}{ab - h^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত : (1) যদি কনিকটির সমীকরণ $F(x, y) = 0$ রূপে প্রকাশ করা যায় তাহলে $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, এবং $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ দ্বারা কনিকটির কেন্দ্র নির্ণয় করা যাবে।

(2) যদি $ab - h^2 = 0$ হয় এবং $hf - bg \neq 0$, $gh - af \neq 0$ তাহলে কনিকটির কেন্দ্র হবে '∞' তে (অসীম, Infinity)। কনিকটির কোনও কেন্দ্র না থাকলে এটি একটি অধিবৃত্ত। যদি $ab - h^2 \neq 0$ তাহলে কনিকটির কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত এবং এটি একটি উপবৃত্ত অথবা পরাবৃত্ত।

3.7 কেন্দ্রীয় কনিকের প্রচলিত আকারে লঘুকরণ (Reduction to Standard form for Central Conic)

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

মনে করুন $ab - h^2 \neq 0$ এবং কনিকটির কেন্দ্র (α, β) মূলবিন্দুটিকে (α, β)-তে স্থানান্তরিত করে

$$x = x' + \alpha, \qquad y = y' + \beta$$

(1) থেকে $ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2x'(a\alpha + h\beta + g) + 2y'(h\alpha + b\beta + f) + (a\alpha^2 + 2h\alpha\beta - b\beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c) = 0$ .... (2)

যেহেতু কনিকটির কেন্দ্র মূলবিন্দু

$$\therefore \quad a\alpha + h\beta + g = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

$$h\alpha + b\beta + f = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

(3) এবং (4) সমাধান করে

$$\alpha = \frac{hf - bg}{ab - h^2} \qquad \beta = \frac{gh - af}{ab - h^2} \quad \ldots \; (5)$$

মনে করুন $d = a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c$

$$= a\alpha^2 + h\alpha\beta + h\alpha\beta + b\beta^2 + g\alpha + g\alpha + f\beta + f\beta + c$$

$$= \alpha(a\alpha + h\beta + g) + \beta(h\alpha + b\beta + f) + g\alpha + f\beta + c$$

$$= \alpha \times 0 + \beta \times 0 + g \cdot \frac{hf - bg}{ab - h^2} + f.\frac{gh - af}{ab - h^2} + c$$

$$= \frac{abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2}{ab - h^2}$$

$$= \frac{\Delta}{D}$$

$\therefore$ যেহেতু কেন্দ্রটি মূলবিন্দু (1) নং সমীকরণ থেকে

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + d = 0 \quad \ldots\ldots \; (6)$$

যেখানে $d = \frac{\Delta}{D}$ $\quad \ldots\ldots \quad (7)$

এক্ষণে নতুন অক্ষদ্বয়কে আবর্তিত করে (মূলবিন্দুর সাপেক্ষে) (যেখানে $x'y'$-এর সহগ শূন্য হবে) তা হলে (6) থেকে

$$a'X^2 + b'Y^2 + d = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

যেখানে $a + b = a + b$ ...... (9)

$ab - h^2 = a'b'$ ...... (10)

(ইন্‌ভেরিয়েন্টের উপপাদ্য অনুসারে)

(9) এবং (10) সমাধান করে a' এবং b' এর মান পাওয়া যাবে।

$\therefore$ (8) নং সমীকরণ নির্ণেয় কনিকটির প্রচলিত অথবা আদর্শ আকার।

3.8 কনিকটি অধিবৃত্ত হলে প্রচলিত আকারে লঘুকরণ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots\ldots \; (1)$$

মনে করুন $ab = h^2$

কণিকটি অকেন্দ্রীয় হবে যদি $ab - h^2 = 0$

(1) থেকে, $(\alpha x + \beta y)^2 + 2gx + 2fy + c = 0 (a = \alpha^2, b = \beta^2, h = \alpha\beta)$

বা, $(\alpha x + \beta y)^2 + 2(\alpha x + \beta y)\lambda + \lambda^2 = 2(\alpha x + \beta y)\lambda + \lambda^2 - (2gx + 2fy + c)$

বা, $(\alpha x + \beta y + \lambda)^2 = 2x(\alpha\lambda - g) + 2y(\beta\lambda - f) + 2\lambda^2 - c \quad ......(2)$

এক্ষণে λ-কে এমনভাবে নিতে হবে যার জন্য

$\alpha x + \beta y + \lambda = 0$ এবং $2x(\alpha\lambda - g) + 2y(\beta\lambda - f) + 2\lambda^2 - c = 0$

সরলরেখা দুটি সমকোণে অবস্থিত হয়।

$$\therefore \quad \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(-\frac{\alpha\lambda - g}{\beta\lambda - f}\right) = -1 \qquad [m_1m_2 = -1]$$

বা, $\alpha(\alpha\lambda - g) + \beta(\beta\lambda - f) = 0$

বা, $(\alpha^2 + \beta^2)\lambda = \alpha g + \beta f$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{\alpha g + \beta f}{\alpha^2 + \beta^2}$$

এখন, ওই দুটি লম্ব সরলরেখা অক্ষ হিসাবে ধরা হল এবং ঐ অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে (X, Y), $P(x, y)$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক।

$\therefore$ $X = P(x, y)$ হতে $2x(\alpha\lambda - g) + 2y(\beta\lambda - f) + 2\lambda^2 - c = 0$ সরলরেখার ওপর লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{2x(\alpha\lambda - g) + 2y(\beta\lambda - f) + 2\lambda^2 - c}{2\sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2}}$$

অনুরূপভাবে $Y = P(x, y)$ থেকে $\alpha x + \beta y + \lambda = 0$ সরলরেখার ওপর লম্ব-দূরত্ব

$$= \frac{\alpha x + \beta y + \lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$\therefore$ (2) থেকে $\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\dfrac{(\alpha x + \beta y + \lambda)^2}{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)}$

$$= 2\sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2}\ \frac{2x(\alpha\lambda - g) + 2y(\beta\lambda - f) + 2\lambda^2 - c}{2\sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2}}$$

বা, $(\alpha^2 + \beta^2)Y^2 = 2\sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2}X$

বা, $Y^2 = \dfrac{2\sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2}}{\alpha^2 + \beta^2}X$

এটি অধিবৃত্তের প্রচলিত আকার।

অধিবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ $\alpha x + \beta y + \lambda = 0$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2\sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\lambda\beta - f)^2}}{\alpha^2 + \beta^2}$

$$= \frac{2(\alpha f - \beta g)}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \left(\because \lambda = \frac{\alpha g + \beta f}{\alpha^2 + \beta^2}\right)$$

3.9 পরস্পরচ্ছেদী দুটি কনিক

কনিকের সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$-এর মধ্যে a, b, c, h, f, g ছটি ধ্রুবক আছে। একটি ধ্রুবক দ্বারা ভাগ করলে পাঁচটিতে পরিণত হয় এবং এগুলি স্বতন্ত্র যদি কোনও কনিকের ওপর পাঁচটি বিন্দু দেওয়া থাকে তা হলে পাঁচটি ধ্রুবক নির্ণয় করা যাবে।

যদি তিনটি বিন্দু সমরেখীয় হয় তা হলে কনিকটি পাঁচটি বিন্দু দিয়ে গেলে একটি যুগ্ম সরলরেখা। যদি চারটি বিন্দু সমরেখীয় হয় তা হলে অসংখ্য কনিক পাওয়া যাবে।

3.10 দুটি বাস্তব কনিক সাধারণত চারটি বিন্দুতে ছেদ করে

মনে করুন কনিকগুলির সমীকরণ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots (1)$$

এবং $a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \dots (2)$

এই দুটি সমীকরণ থেকে x অপনয়ন করলে আমরা একটি y-এর ঘাতে চতুর্ঘাত সমীকরণ পাই। এটি থেকে y-এর চারটি মান পাওয়া যায় এবং সেই মানগুলি হতে x-এর চারটি মান পাওয়া যায়। অতএব সাধারণত দুটি কনিক চারটি বিন্দুতে ছেদ করে।

3.11 যে কনিক দুটি কনিকের সাধারণ বিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয়

মনে করুন $S_1 = 0$ এবং $S_2 = 0$ দুটি কনিকের সমীকরণ। যে কনিক, ওই দুটি কনিকের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ হবে $S_1 + \lambda S_2 = 0$, এটিও একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

অতএব এটি একটি কনিক যা $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ কনিক দুটির সাধারণ বিন্দু দিয়ে যায় এবং λ একটি ধ্রুবক।

যদি $S_1 = 0$ একটি কনিক হয়, এবং $u = 0$, $v = 0$ দুটি সরলরেখা হয় তা হলে $S + \lambda uv = 0$ একটি কনিকের সমীকরণ যা চারটি বিন্দু দিয়ে যায় (যা $S = 0$, $u = 0$, $v = 0$ গুলির ছেদবিন্দু)

3.12 উদাহরণ

উদাহরণ ঃ

1. যে কনিক $x^2 + y^2 - 2xy - x - y - 1 = 0$ সমীকরণদ্বারা নির্দেশিত তার প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

$$x^2 + y^2 - 2xy - x - y - 1 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0 \ldots\ldots (2)$$

(1) ও (2) তুলনা করে পাওয়া যায়

$$a = 1, \quad b = 1, \quad h = -1, \quad g = -\frac{1}{2}, \quad f = -\frac{1}{2}, \quad c = -1$$

$$\therefore \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

$$= 1 \times 1 \times (-1) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(-1) - 1\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)(-1)^2$$

$$= -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = -1 \neq 0$$

$$ab - h^2 = 1 \times 1 - (-1)^2 = 0$$

$\therefore$ সমীকরণটি একটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 1\left(-1 - \frac{1}{4}\right) + 1\left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{5}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{4} = -1 \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$\therefore$ (প্রদত্ত ছক থেকে) $\Delta \neq 0$, $D = 0$

$\therefore$ সমীকরণটি একটি অধিবৃত্ত।

2. $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y + 9 = 0$ সমীকরণদ্বারা নির্দেশিত কনিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad ...... (1)$

$4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y + 9 = 0 \quad ...... (2)$

(1) ও (2) হতে তুলনা করে

$a = 4, \quad h = -2, \quad b = 1, \quad g = -6, \quad f = 3, \quad c = 9$

$\therefore \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 4 \times 1 \times 9 + 2 \times 3 \times (-6) \times (-2) - 4 \times (3)^2 - 1 \times (-6)^2 - 9(-2)^2$

$= 36 + 72 - 36 - 36 - 36 = 0$

$ab - h^2 = 4 - 4 = 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি যুগ্ম সমান্তরাল সরলরেখা।

3. a এবং f-এর কোন মানের জন্য $ax^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2fy - 15 = 0$ সমীকরণটি কেন্দ্রবিহীন কনিক নির্দেশ করবে।

আমরা জানি যে একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

একটি কেন্দ্রবিহীন কনিক নির্দেশ করবে যখন $ab - h^2 = 0$

$hf - bg \neq 0$ এবং $gh - af \neq 0$

$\therefore \quad ab - h^2 = a \times 25 - (-10)^2 = 0$

$\therefore \quad 25a = 100$

বা, $a = 4$

আবার, $hf - bg \neq 0$

বা, $hf \neq bg$

বা, $f \neq \dfrac{bg}{h}$

বা, $f \neq \dfrac{25(-7)}{-10}$

বা, $f \neq \dfrac{35}{2}$

4. $7x^2 - 2xy + 7y^2 + 22x - 10y + 7 = 0$, কনিকটির কেন্দ্র নির্ণয় করুন।

মনে করুন $F(x, y) = 7x^2 - 2xy + 7y^2 + 22x - 10y + 7 = 0$

$\therefore \quad \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ দ্বারা $14x - 2y + 22 = 0$

বা, $7x - y + 11 = 0$

এবং $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ দ্বারা $- 2x + 14y - 10 = 0$

বা, $x - 7y + 5 = 0$

$\therefore \quad 7x - y + 11 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$

$x - 7y + 5 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$

(1) ও (2) সমাধান করে, $x = -\dfrac{3}{2}, \quad y = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় কেন্দ্র $= \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

5. $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 16x + 16y - 8 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শাকারে পরিবর্তিত করুন এবং কনিকটির প্রকৃতি নির্দেশ করুন।

এখানে, $a = 7, \quad h = -1, \ b = 7, g = -8, f = 8, c = -8$

$\therefore \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 7 \times 7 \times (-8) + 2 \times 8 \times (-8) \times (-1) - 7 \times (8)^2 - 7(-8)^2 + 8(-1)^2$

$= -392 + 128 + 8 = -256 \neq 0$

$ab - h^2 = 7 \times 7 - (-1)^2 = 48 > 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত

মনে করুন

$\therefore \ x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \qquad y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ থেকে,

$7(x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 - 2(x' \cos\theta - y' \sin\theta)(x' \sin\theta + y' \cos\theta) + 7(x' \sin\theta$ $y' \cos\theta)^2 - 16(x' \cos\theta - y' \sin\theta) + 16(x' \sin\theta + y' \cos\theta) - 8 = 0$

বা, $x'^2(7 - \sin 2\theta) + x'y'(-2\cos 2\theta) + y'^2(7 + \sin 2\theta) + x'(-16\cos\theta + 16\sin\theta)$ $y'(16\sin\theta + 16\cos\theta) - 8 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$

এমন ভাবে 'θ' কে পছন্দ করতে হবে যাতে $x'y'$-এর সহগ শূন্য হয়।

$\therefore \quad -2\cos 2\theta = 0$

বা, $2\theta = 90^\circ \quad \therefore \; \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ (1) থেকে 'θ'-এর মান বসিয়ে

$$x'^2(7 - 1) + y'^2(7 + 1) + y'\left(\frac{16}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{2}}\right) - 8 = 0$$

বা, $6x'^2 + 8y'^2 + 16\sqrt{2}y' - 8 = 0$

বা, $6x'^2 + \left(2\sqrt{2}y' + 4\right)^2 = 24$

বা, $\frac{x'^2}{4} + \frac{\left(y' + \sqrt{2}\right)^2}{3} = 1$

মূল বিন্দুটিকে $(0, \sqrt{2})$-তে স্থানান্তরিত করে

$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{3} = 1$, (নতুন অক্ষদ্বয় X, Y)

এটিই নির্ণেয় আদর্শাকার সমীকরণ।

6. প্রমাণ করুন $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$ সমীকরণটি একটি পরাবৃত্ত এবং এটিকে আদর্শাকারে পরিবর্তিত করুন।

এখানে $a = 1, h = -3, b = 1, g = -2, f = -2, c = 12$

$\therefore \; abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 1 \times 1 \times 12 + 2 \times (-2) \times (-2) \times (-3) - 1 \times 4 - 1 \times 4 - 12 \times 9$

$= 12 - 24 - 4 - 4 - 108$

$= -128 \neq 0$

$ab - h^2 = 1 \times 1 - 9 = -8 < 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি পরাবৃত্ত

এখন অক্ষদ্বয়কে 'θ' কোণে আবর্তিত করে (একই মূলবিন্দু) আমরা পাই

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$ এবং

$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ থেকে

$(x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 - 6(x' \cos\theta - y' \sin\theta)(x' \sin\theta + y' \cos\theta)$

$+ (x' \sin\theta + y' \cos\theta)^2 - 4(x' \cos\theta - y' \sin\theta) - 4(x' \sin\theta + y' \cos\theta) + 12 = 0$

বা, $x'^2(1 - 3\sin 2\theta) - 6x'y' \cos 2\theta + y'^2(1 + 3\sin 2\theta) - 4x'(\cos\theta - \sin\theta) + 4y'$

$(\sin\theta - \cos\theta) + 12 = 0$ ...... (1)

যেহেতু $x'y'$-এর সহগ শূন্য $\therefore \cos 2\theta = 0$

বা, $\theta = \frac{\pi}{4}$

(1) নং সমীকরণে 'θ' এর মান বসিয়ে

$$x'^2(1 - 3) + y'^2(1 + 3) - 4\sqrt{2}x' + 12 = 0$$

বা, $-\left(x'^2 + 2\sqrt{2}x'\right) + 2y'^2 = -6$

বা, $\left(x' + \sqrt{2}\right)^2 - 2y'^2 = 8$

বা, $\frac{\left(x'^2 + \sqrt{2}\right)^2}{8} - \frac{y'^2}{4} = 1$

মূলবিন্দুটিকে $\left(-\sqrt{2},\ 0\right)$-তে স্থানান্তরিত করে

$\frac{X^2}{8} - \frac{Y^2}{4} = 1$ [নতুন অক্ষদ্বয় X, Y]

এটিই নির্ণেয় আদর্শাকার সমীকরণ।

7. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 5x - 10y + 1 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শাকারে পরিবর্তিত করুন এবং কনিকটির প্রকৃতি নির্দেশ করুন।

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 5x - 10y + 1 = 0 \quad \ldots\ldots \ (1)$$

(1) নং সমীকরণটিকে $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ -এর সাথে তুলনা করে পাওয়া যায়

$$a = 16,\ h = 12,\ b = 9,\ g = -\frac{5}{2},\ f = -5,\ c = 1$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 12 & -\frac{5}{2} \\ 12 & 9 & -5 \\ -\frac{5}{2} & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 16(9 - 25) - 12\left(12 - \frac{25}{2}\right) - \frac{5}{2}\left(-60 + \frac{45}{2}\right)$$

$$= -\frac{625}{4} \neq 0$$

$\therefore$ (1) একটি কনিক নির্দেশ করে।

$D = ab - h^2 = 16.9 - (12)^2 = 0$

$\therefore$ কনিকটি একটি অধিবৃত্ত।

(1) থেকে $(4x + 3y)^2 = 5x + 10y - 1$

বা, $(4x + 3y + \lambda)^2 = 5x + 10y - 1 + 8\lambda x + 6\lambda y + \lambda^2$

$$= (8\lambda + 5)x + (6\lambda + 10)y + \lambda^2 - 1 \quad \ldots\ldots (2)$$

এখন λ এমনভাবে নেওয়া হল যাতে

$4x + 3y + \lambda = 0$ এবং $(8\lambda + 5)x + (6\lambda + 10)y + \lambda^2 - 1 = 0$ সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হয়।

$$\therefore \quad -\frac{4}{3} x - \frac{8\lambda + 5}{6\lambda + 10} = -1 \qquad [m_1 m_2 = -1]$$

বা, $4(8\lambda + 5) + 3(6\lambda + 10) = 0$

বা, $50\lambda = -50$

$\therefore$ $\lambda = -1$

$\therefore$ (2) থেকে α-এর মান বসিয়ে

$(4x + 3y - 1)^2 = -3x + 4y$

বা, $(4x + 3y - 1)^2 = -(3x - 4y) \quad \ldots\ldots (3)$

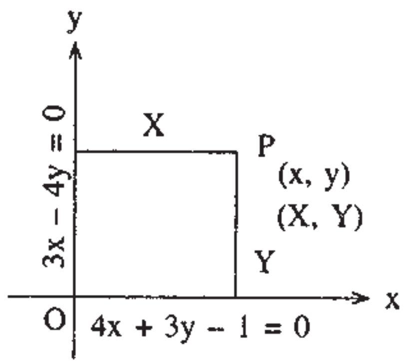
এখন X এবং Y অক্ষ, যথাক্রমে $4x + 3y - 1 = 0$ এবং $3x - 4y = 0$ সরলরেখা বরাবর নেওয়া হল।

মনে করুন (1)-তে (x, y) এবং (X, Y) একই বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে পুরনো এবং নতুন অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে।

$\therefore$ $X = (x, y)$ থেকে $3x - 4y = 0$ সরলরেখার ওপর লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{3x - 4y}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{3x - 4y}{5}$$

$\therefore$ $3x - 4y = 5X \quad \ldots\ldots (4)$



চিত্র 3.1

$Y = (x, y)$ থেকে $4x + 3y - 1 = 0$ সরলরেখার ওপর লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{4x+3y-1}{\sqrt{16+9}} = \frac{4x+3y-1}{5}$$

$\therefore \quad 4x + 3y - 1 = 5Y \quad ......(5)$

$\therefore$ (4) এবং (5) দ্বারা (3) থেকে আমরা পাই

$25Y^2 = -5X$

$\therefore \quad Y^2 = -\frac{1}{5}X$

এটিই নির্ণেয় আদর্শাকার সমীকরণ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ এখানে নাভিলম্ব $= 4a = \frac{1}{5}$

$\therefore \quad a = \frac{1}{20}$

নাভির স্থানাঙ্ক পাওয়া যাবে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি থেকে

$X = -a, \qquad Y = 0$

বা, $\frac{3x-4y}{5} = -\frac{1}{20} \qquad 4x + 3y - 1 = 0$

বা, $12x - 16y = -1, \qquad 4x + 3y - 1 = 0$

সমাধান করে, $x = \frac{13}{100}$

$y = \frac{4}{25}$

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $\left(\frac{13}{100}, \frac{4}{25}\right)$

নিয়ামকের সমীকরণ $X = a$

বা, $\frac{3x-4y}{5} = \frac{1}{20}$

বা, $12x - 16y - 1 = 0$

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যাবে $X = 0, Y = 0$ থেকে

$3x - 4y = 0$ এবং $4x + 3y - 1 = 0$

বা, $x = \frac{4}{25}$, $y = \frac{3}{25}$

8. $20x^2 + 15xy + 9x + 3y + 1 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শাকারে পরিবর্তিত করে দেখান যে এটি একটি যুগ্ম সরলরেখা (যারা পরস্পর ছেদ করেছে) এবং সরলরেখা দুটি মূলবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

$$20x^2 + 15xy + 9x + 3y + 1 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

(1)-এর সঙ্গে $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর তুলনা করে,

$$a = 20, \quad h = \frac{15}{2}, \quad b = 0, \quad g = \frac{9}{2}, \quad f = \frac{3}{2}, \quad c = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & \frac{15}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{15}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = 20\left(0 - \frac{9}{4}\right) + \frac{15}{2}\left(\frac{27}{4} - \frac{15}{2}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{45}{4} - 0\right)$$

$$= -\frac{180}{4} - \frac{45}{8} + \frac{405}{8}$$

$$= \frac{-360 - 45 + 405}{8}$$

$$= 0$$

$\therefore$ (1) একটি যুগ্ম সরলরেখা।

$$D = ab - h^2 = 20 \times 0 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 = -\frac{225}{4} \neq 0$$

$\therefore$ সরলরেখা দুটি পরস্পর ছেদ করেছে।

মনে করুন (α, β) ওদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক।

$\therefore$ $20\alpha + \frac{15}{2}\beta + \frac{9}{2} = 0 \; (a\alpha + h\beta + g = 0)$

বা, $40\alpha + 15\beta + 9 = 0$

এবং $\frac{15}{2}\alpha + 0.\beta + \frac{3}{2} = 0 \quad (h\alpha + b\beta + f = 0)$

বা, $\alpha = -\frac{1}{5}$ এবং $\beta = -\frac{1}{15}$

$\therefore$ (1) দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখা দুটির ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{15}\right)$

এখন মূলবিন্দুটিকে $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{15}\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হল (অক্ষদ্বয়ের দিক পরিবর্তন না করে) মনে করুন (x, y) এবং (x_1, y_1) একই বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে প্রথম এবং দ্বিতীয় অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে।

$$\therefore \quad x = x_1 - \frac{1}{5}, \qquad y = y_1 - \frac{1}{15}$$

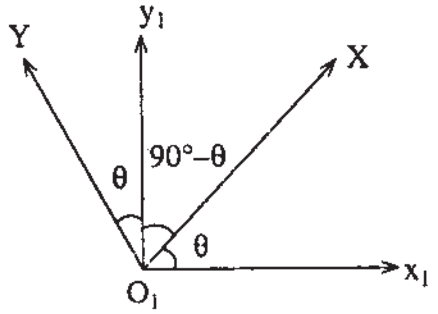
$\therefore$ (1) থেকে $20\left(x_1 - \frac{1}{5}\right)^2 + 15\left(x_1 - \frac{1}{5}\right)\left(y_1 - \frac{1}{15}\right) + 9\left(x_1 - \frac{1}{5}\right) + 3\left(y_1 - \frac{1}{15}\right) + 1 = 0$

বা, $20x_1^2 + 15x_1y_1 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$

এখন নতুন মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অক্ষদ্বয়কে 'θ' কোণে আবর্তিত করা হল (যেখানে 'θ' একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ)। মনে করুন (x, y) এবং (X, Y) যথাক্রমে দ্বিতীয় এবং তৃতীয় অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে একই বিন্দুর স্থানাঙ্ক।

$$\therefore \quad x_1 = X\cos\theta - Y\sin\theta$$

$$y_1 = X\sin\theta + Y\cos\theta$$



চিত্র 3.2

$\therefore$ (2) থেকে $4(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + 3(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) = 0$

বা, $(4\cos^2\theta + 3\sin\theta\cos\theta)X^2 + XY(-8\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta - 3\sin^2\theta) + (4\sin^2\theta - 3\sin\theta\cos\theta)Y^2 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

এখন 'θ'-কে এমনভাবে নেওয়া হল যাতে XY-এর সহগ শূন্য হয়।

$$\therefore \quad 3\cos^2\theta - 3\sin^2\theta - 8\sin\theta\cos\theta = 0$$

বা, $3 - 3\tan^2\theta - 8\tan\theta = 0$

বা, $3\tan^2\theta + 8\tan\theta - 3 = 0$

বা, $3\tan^2\theta + 9\tan\theta - \tan\theta - 3 = 0$

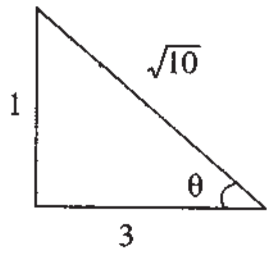
বা, $3\tan\theta(\tan\theta + 3) - 1(\tan\theta + 3) = 0$

বা, $(\tan\theta + 3)(3\tan\theta - 1) = 0$

(i) $\tan\theta = -3$ (এটি গ্রহণযোগ্য নহে)

$\therefore \quad \tan\theta \neq -3$

(ii) $\tan\theta = \frac{1}{3}$



চিত্র 3.3

$\therefore \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore \quad X^2$-এর সহগ $= 4\cos^2\theta + 3\sin\theta\cos\theta = 4 \cdot \frac{9}{10} + 3\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}$

$= \frac{45}{10}$

Y^2-এর সহগ $= 4\sin^2\theta - 3\sin\theta\cos\theta = 4 \cdot \frac{1}{10} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{5}{10}$

$\therefore$ (3) হতে $\frac{45X^2}{10} - \frac{5Y^2}{10} = 0$

বা, $9X^2 - Y^2 = 0 \quad \ldots\ldots (4)$

এটিই নির্ণেয় আদর্শাকার সমীকরণ।

আবার সরলরেখা দুটির সমীকরণ হবে

$3X + Y = 0 \quad \ldots\ldots (5)$ এবং $3X - Y = 0 \ldots\ldots (6)$

এখানে $X = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta$

$$= \left(x + \frac{1}{5}\right)\frac{3}{\sqrt{10}} + \left(y + \frac{1}{15}\right)\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$Y = y_1\cos\theta - x_1\sin\theta$

$$= \left(y + \frac{1}{15}\right)\frac{3}{\sqrt{10}} - \left(x + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\therefore$ (5) থেকে, $\left(x + \frac{1}{5}\right)\frac{9}{\sqrt{10}} + \left(y + \frac{1}{15}\right)\frac{3}{\sqrt{10}} + \left(y + \frac{1}{15}\right)\frac{3}{\sqrt{10}} - \left(x + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{\sqrt{10}} = 0$

বা, $8x + 6y + \frac{10}{5} = 0$

বা, $4x + 3y + 1 = 0$ ...... (I)

$\therefore$ মূলবিন্দু থেকে (I)-এর দূরত্ব

$$= \left|\frac{0 + 0 + 1}{\sqrt{16 + 9}}\right| = \frac{1}{5} \quad \text{...... (7)}$$

(6) থেকে $\left(3x + \frac{1}{5}\right)\frac{9}{\sqrt{10}} + \left(y + \frac{1}{15}\right)\frac{3}{\sqrt{10}} - \left(y + \frac{1}{15}\right)\frac{3}{\sqrt{10}} + \left(x + \frac{1}{5}\right)\frac{3}{\sqrt{10}} = 0$

বা, $x + \frac{1}{5} = 0$ ......(II)

$\therefore$ মূলবিন্দু থেকে (II)-এর দূরত্ব

$$\left|\frac{0 + \frac{1}{5}}{\sqrt{1^2 + 0^2}}\right| = \frac{1}{5} \quad \text{...... (8)}$$

$\therefore$ (7) এবং (8) থেকে দেখা যায় যে, (I) দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখা দুটি মূলবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

9. যে কনিকটি, $x - 3y - 4 = 0$ এবং $x + y = 0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $x^2 - 3xy + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$, $3x^2 + 7xy - 3y^2 - 14x - 2y + 23 = 0$ কনিক দুটির ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

$x - 3y - 4 = 0$ ...... (1) এবং $x + y = 0$ ...... (2)

(1) এবং (2) থেকে সমাধান করে ছেদ বিন্দু (1, –1)। যে কনিকটি প্রদত্ত কণিক দুটির ছেদ বিন্দুগামী তার সমীকরণ হবে

$x^2 - 3xy + y^2 - 6x - 4y + 5 + \lambda(3x^2 + 7xy - 3y^2 - 14x - 2y + 23) = 0$ ...... (3)

যেহেতু (3) নং কনিকটি (1, –1) দিয়ে যায়

$\therefore\ 1 + 3 + 1 - 6 + 4 + 5 + \lambda(3 - 7 - 3 - 14 + 2 + 23) = 0$

বা, $8 + 4\lambda = 0 \qquad \therefore\ \lambda = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় কনিকটির সমীকরণ

$\therefore\ x^2 - 3xy + y^2 - 6x - 4y + 5 - 2(3x^2 + 7xy - 3y^2 - 14x - 2y + 23) = 0$

বা, $-5x^2 - 17xy + 7y^2 + 22x - 41 = 0$

বা, $5x^2 + 17xy - 7y^2 - 22x + 41 = 0$

3.13 সারাংশ

এই এককে আপনারা পেলেন

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad ...... (1)$$

(1) নং সমীকরণটি x, y-এর ঘাতে একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ এবং সর্বদা একটি কনিক নির্দেশ করে।

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \qquad D = ab - h^2$$

যদি $\Delta = 0$, তাহলে (1) একটি যুগ্ম সরলরেখা সূচিত করে।

যদি $\Delta \neq 0$ তাহলে (1) একটি কনিক নির্দেশ করে।

(a) যদি $\Delta = 0$ এবং $D \neq 0$ হয় তাহলে (1) একটি পরস্পর ছেদী যুগ্ম সরলরেখা।

(b) যদি $\Delta = 0$ এবং $D = 0$ হয় তাহলে (1) একটি সমান্তরাল অথবা সমাপতিত যুগ্ম সরলরেখা।

(c) যদি $\Delta \neq 0$ এবং $D > 0$ হয় তাহলে (1) একটি উপবৃত্ত।

(d) যদি $\Delta \neq 0$ এবং $D = 0$ হয় তাহলে (1) একটি অধিবৃত্ত।

(e) যদি $\Delta \neq 0$ এবং $D < 0$ হয় তাহলে (1) একটি পরাবৃত্ত।

(f) যদি (1) নং কনিকের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত হয় তবে তার সমীকরণ হবে $ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0$.

(g) (1) নং কনিকের কেন্দ্র (α, β) হলে $\alpha = \dfrac{hf - bg}{ab - h^2}$, $\beta = \dfrac{gh - af}{ab - h^2}$

(i) যদি $ab - h^2 = 0$, $hf - bg \neq 0$, $gh - af \neq 0$ তাহলে কনিকের কেন্দ্র হবে '∞' তে [Infinity]

(ii) যদি $ab - h^2 \neq 0$ তাহলে কনিকটির কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত এবং এটি একটি উপবৃত্ত বা পরাবৃত্ত।

(iii) কনিকটির কেন্দ্র না থাকলে এটি একটি অধিবৃত্ত।

3.14 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলিকে আদর্শাকারে (Canonical form) পরিবর্তিত করুন এবং কনিকগুলির প্রকৃতি নির্দেশ করুন।

(i) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16x + 20 = 0$

(ii) $x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0$

(iii) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$

(iv) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x + y - 15 = 0$

2. $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + a = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শাকারে পরিবর্তিত করুন এবং a এর বিভিন্ন মানের জন্য কনিকটির আকৃতি নির্ণয় করুন।

3. $(c^2 + d^2)(x^2 + y^2) = (cx + dy + 2f)^2$ সমীকরণটিকে আদর্শাকারে পরিবর্তিত করুন। কনিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন এবং দেখান যে কনিকটির নাভিলম্ব $\dfrac{4f}{\sqrt{c^2 + d^2}}$.

4. b এবং g-এর মান কত হলে $4x^2 + 8xy + by^2 + 2gx + 4y + 1 = 0$ সমীকরণটি একটি কেন্দ্র বিহীন সমীকরণ নির্দেশ করবে।

5. প্রমাণ করুন $3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10x - 13y + 8 = 0$ কনিকটি একটি পরাবৃত্ত।

6. প্রমাণ করুন $3x^2 - 5xy + 6y^2 + 11x - 17y + 13 = 0$ কনিকটি একটি উপবৃত্ত।

7. প্রমাণ করুন $x^2 - 4xy + 4y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$ কনিকটি একটি অধিবৃত্ত।

8. $4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 26y + 9 = 0$ কনিকটির প্রকৃতি আলোচনা করুন।

9. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 9x - 3y + 5 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শাকারে পরিবর্তিত করুন এবং কনিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

10. কনিকটির সমীকরণ এবং প্রকৃতি নির্ণয় করুন যা (0, 2) বিন্দুগামী, x অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র (– 1, – 1)

11. প্রমাণ করুন $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by - ab)^2$ সমীকরণটি একটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে যার নাভিলম্ব $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

12. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলিকে আদর্শ আকারে পরিবর্তিত করুন এবং কনিকগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

(i) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$

(ii) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 126x + 82y - 59 = 0$

(iii) $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$

13. প্রমাণ করুন $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ সমীকরণটি একটি পরাবৃত্ত যার কেন্দ্র (–2, 2).

14. একটি বৃত্ত যদি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটিকে $(at_i^2, 2at_i)$ (i = 1, 2, 3, 4) চারটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে প্রমাণ করুন $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$

15. যে কনিকটি (1, 1) বিন্দুগামী এবং $x^2 + 2xy + 5y^2 - 7x - 8y + 6 = 0$, এই কনিকের সঙ্গে $2x - y - 5 = 0$, $3x + y - 11 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

3.15 উত্তরমালা

1. **সমাধান ঃ**

(i) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16x + 20 = 0$ …… (1)

(i) নং সমীকরণটিকে $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$-এর সঙ্গে তুলনা করে পাওয়া যায়

$a = 3,\quad h = 1,\quad b = 3,\quad g = -8,\quad f = 0,\quad c = 20$

$$\therefore\quad \Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 20 \end{vmatrix} = 3(60 - 0) - 1(20 + 0) - 8(0 + 24)$$

$= 180 - 20 - 192 = -32 \neq 0$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণটি একটি কনিক নির্দেশ করে।

$$D = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2 = 9 - 1 = 8 > 0$$

$\therefore$ কনিকটি একটি উপবৃত্ত।

মূলবিন্দুটিকে (α, β)-তে স্থানান্তরিত করে (অক্ষদ্বয়ের দিক পরিবর্তন না করে) আমরা পাই

$$x = x' - \alpha,\ y = y' + \beta$$

$\therefore$ (1) থেকে x, y-এর মান বসিয়ে

$$3(x' + \alpha)^2 + 2(x' + \alpha)(y' + \beta) + 3(y' + \beta)^2 - 16(x' + \alpha) + 20 = 0$$

বা, $3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 + 2x'(3\alpha + \beta - 8) + 2y'(\alpha + 3\beta)$

$$+ 3\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2 - 16\alpha + 20 = 0$$

যেহেতু মূলবিন্দুটি কেন্দ্রতে অবস্থিত

$\therefore$ x' এবং y'-এর সহগ শূন্য হবে

$\therefore$ $3\alpha + \beta - 8 = 0$ এবং $\alpha + 3\beta = 0$

$\therefore$ সমাধান করে $\alpha = 3 \quad \beta = -1$

$\therefore$ কনিকটির কেন্দ্র $(3, -1)$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণটি পরিবর্তিত হয় $3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 - 4 = 0$ .... (2)

এখন $x'y'$-কে অপসারিত করতে অক্ষদ্বয়কে 'θ' কোণে আবর্তিত করা হল

$$x' = X\cos\theta - Y\sin\theta, \qquad y' = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

$\therefore$ (2) থেকে

$$3(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + 2(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta)$$
$$+ 3(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 = 4$$

বা, $X^2(3 + \sin 2\theta) + 2XY\cos 2\theta + Y^2(3 - \sin 2\theta) = 4$ ..... (3)

$\therefore$ যেহেতু XY এর সহগ শূন্য হবে

$\therefore \cos 2\theta = 0 \qquad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ (3) থেকে $X^2(3 + 1) + Y^2(3 - 1) = 4$

বা, $\boxed{\frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{2} = 1}$ নির্ণেয় আদর্শাকার সমীকরণ।

(ii) $x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0$ .... (1)

এখানে $a = 1, h = -\frac{5}{2}, b = 1, g = 4, f = -10, c = 15$

$\therefore\ \Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 1.1.15 + 2.(-10).4.\left(-\frac{5}{2}\right) - 1.(-10)^2 - 1.(4)^2 - 15\left(-\frac{5}{2}\right)^2$

$= 15 + 200 - 100 - 16 - \frac{375}{4}$

$= \frac{400 - 4 - 375}{4} \quad = \frac{21}{4} \neq 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি কনিক

$D = ab - h^2 = 1 - \frac{25}{4} = -\frac{21}{4} < 0$

$\therefore$ কনিকটি একটি পরাবৃত্ত।

মনে করুন পরাবৃত্তটির কেন্দ্র (α, β)

মূলবিন্দুটিকে (α, β)-তে নিয়ে গেলে $x = x' + \alpha$

এবং $y = y' + \beta$ [যেখানে (x', y') নতুন স্থানাঙ্ক]

$\therefore$ (1) থেকে $x'^2 + 2x'\alpha + \alpha^2 - 5x'y' - 5\alpha y' - 5\beta x' - 5\alpha\beta + y'^2 + 2y'\beta + \beta^2 + 8x' + 8\alpha - 20y' - 20\beta + 15 = 0$

বা, $x'^2 - 5x'y' + y'^2 + x'(2\alpha - 5\beta + 8) + y'(-5\alpha + 2\beta - 20) + \alpha^2 - 5\alpha\beta + \beta^2 + 8\alpha - 20\beta + 15 = 0$

$\therefore$ মুল বিন্দুটি কেন্দ্রতে অবস্থিত। $\therefore$ x' এবং y' এর সহগ শূন্য হবে

$\therefore\quad 2\alpha - 5\beta + 8 = 0$ এবং

$-5\alpha + 2\beta - 20 = 0$

$\therefore\quad \alpha = -4, \qquad y = 0$

$\therefore$ পরাবৃত্তটির কেন্দ্র $(-4, 0)$

$\therefore$ (1) থেকে $x'^2 - 5x'y' + y'^2 - 1 = 0$ .... (2)

এক্ষণে অক্ষদ্বয়কে 'θ' কোণে আবর্তিত করে

$x' = X\cos\theta - Y\sin\theta \qquad y' = X\sin\theta + Y\cos\theta$

$\therefore$ (2) নং সমীকরণটি পরিবর্তিত হয়

$(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 - 5(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta)$

$+ (X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 - 1 = 0$

বা, $X^2\left(1-\frac{5}{2}\sin 2\theta\right) + XY(-5\cos 2\theta) + Y^2\left(1+\frac{5}{2}\sin 2\theta\right) = 1$

যেহেতু XY-এর সহগ শূন্য হবে।

$\therefore \cos 2\theta = 0 \qquad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি রূপান্তরিত হয়

$X^2\left(1-\frac{5}{2}\right) + Y^2\left(1+\frac{5}{2}\right) = 1$

বা, $7Y^2 - 3X^2 = 2$

এটিই নির্ণেয় আর্দশাকারে পরিবর্তিত সমীকরণ।

(iii) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ .... (1)

$a = 6, \; b = -6, \; h = -\frac{5}{2}, \; g = 7, \; f = \frac{5}{2} \; c = 4$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

$= 6.(-6).4 + 2.\frac{5}{2}.7\left(-\frac{5}{2}\right) - 6.\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-6).(7)^2 - 4\left(-\frac{5}{2}\right)^2$

$= -144 - \frac{175}{2} - \frac{25}{2} + 294 - 25 = \frac{-588 + 588}{2}$

$= 0$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা।

$D = ab - h^2 = -36 - \frac{25}{4} = -\frac{169}{4} \neq 0$

$\therefore$ যুগ্ম সরলরেখাটি পরস্পরছেদী।

$\therefore$ সরলরেখা দুটির ছেদ বিন্দু (α, β) হলে

$$12\alpha - 5\beta + 14 = 0 \text{ এবং } -5\alpha - 12\beta + 5 = 0$$

সমাধান করে $\alpha = -\frac{11}{13}$ $\quad\quad\quad \beta = \frac{10}{13}$.

$\therefore$ মূলবিন্দুটিকে $\left(-\frac{11}{13}, \frac{10}{13}\right)$ -তে স্থানান্তরিত করে প্রদত্ত সমীকরণটি

$6x'^2 - 5x'y' - 6y'^2 = 0$ ... (2) আকারে পরিবর্তিত হয়।

এখন অক্ষদুটিকে 'θ' কোণে আবর্তিত করে (একই মূলবিন্দু) পাওয়া যায় $x' = X\cos\theta - Y\sin\theta$, $Y' = X\sin\theta + Y\cos\theta$ যেখানে (X, Y) নতুন স্থানাঙ্ক।

$\therefore$ (2) থেকে পাওয়া যায়

$$6(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 - 5(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) - 6(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 = 0$$

বা, $\left(6\cos 2\theta - \frac{5}{2}\sin 2\theta\right)X^2 - (5\cos 2\theta + 12\sin 2\theta)XY - \left(6\cos 2\theta - \frac{5}{2}\sin 2\theta\right)Y^2 = 0$

$\therefore$ XY পদটিকে লুপ্ত করলে

$$5\cos 2\theta + 12\sin 2\theta = 0$$

বা, $\frac{\sin 2\theta}{-5} = \frac{\cos 2\theta}{12} = \frac{1}{13}$

$\therefore$ $\sin 2\theta = -\frac{5}{13}$ $\quad\quad \cos 2\theta = \frac{12}{13}$

$\therefore$ $\sin 2\theta$ এবং $\cos 2\theta$-এর মান বসিয়ে

$$X^2 - Y^2 = 0$$

বা, $(X + Y)(X - Y) = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখা দুটি (i) $X + Y = 0$ এবং (ii) $X - Y = 0$

(iv) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x + y - 15 = 0$ ... (1)

এখন $a = 1, h = 2, b = 4, g = 2, f = \frac{1}{2}, c = -15$

$\therefore \Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$= 1.2.(-15) + 2.\frac{1}{2}.2.2 - 1.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4(2)^2 - (-15)2^2$$

$$= -30 + 4 - \frac{1}{4} - 16 + 60$$

$$= \frac{71}{4} \neq 0$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি কনিক

$D = ab - h^2 = 1.4 - 2^2 = 4 - 4 = 0$

$\therefore$ কনিকটি এক টি অধিবৃত্ত।

(1) থেকে $(x + 2y)^2 = 4x - y + 15$

বা, $(x + 2y + \lambda)^2 = -4x - y + 2\lambda\,(x + 2y) + \lambda^2 + 15$

$$= x(2\lambda - 4) + (4\lambda - 1)\,y + \lambda^2 + 15 \ldots (2)$$

এখন λ-কে এমনভাবে নেওয়া হল যাতে

$x + 2y + \lambda = 0$ এবং $x(2\lambda - 4) + (4\lambda - 1)y + \lambda^2 + 15 = 0$

সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হয়।

$\therefore \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2\lambda - 4}{4\lambda - 1}\right) = -1$

বা, $2\lambda - 4 = -8\lambda + 2$

বা, $10\,\lambda = 6 \qquad \therefore \lambda = \frac{3}{5}$

(2) থেকে λ এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\left(x + 2y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{5}\left(-2x + y + \frac{384}{35}\right)$$

বা, $$\left(\frac{x + 2y + \frac{3}{5}}{\sqrt{1 + 4}}\right)^2 = -\frac{7}{\sqrt{5}}\left(\frac{2x - y - \frac{384}{5}}{\sqrt{1 + 4}}\right) \quad .....(3)$$

মনে করুন $Y = \dfrac{x + 2y + \frac{3}{5}}{\sqrt{5}}$

$$X = \frac{2x - y - \frac{384}{5}}{\sqrt{5}}$$

∴ (3) নং সমীকরণে X এবং Y এর মান বসিয়ে

$$Y^2 = \frac{-7}{5\sqrt{5}}$$

∴ এটি নির্ণেয় প্রচলিত পরিবর্তিত আকার।

2. **সমাধান ঃ**

$4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + a = 0$ ... (1)

(1) নং সমীকরণটিকে $a_1x^2 + 2hxy + b_1y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে

$a_1 = 4, h = 2, b_1 = 1, g = -2, f = -1, c = a$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & a \end{vmatrix} = 4(a-1) + 2(2-2a) - 2(-2+2)$$

$= 0$

∴ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি যুগ্ম সরলরেখা।

আবার $a_1b_1 - h^2 = 4.1 - 2^2 = 0$

∴ যুগ্ম সরলরেখাটি দুটি সমান্তরাল অথবা একই (coincident) সরলরেখা নির্দেশ করে।

∴ (1) থেকে $(2x + y)^2 - 2(2x + y) + a = 0$

বা, $(2x + y - 1)^2 = 1 - a$ .... (2)

এখন $2x + y - 1 = 0$ সরলরেখা বরাবর X অক্ষ এবং $2x + y - 1 = 0$ সরলরেখার ওপর লম্ব সরলরেখা Y-অক্ষ নেওয়া হল।

মনে করুন (x, y) এবং (X, Y) একই বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2) তে যথাক্রমে পুরানো এবং নতুন অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে।

∴ Y = (x, y) থেকে $2x + y - 1 = 0$ সরলরেখার ওপর লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{2x + y - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \quad = \frac{2x + y - 1}{\sqrt{5}}$$

$\therefore 2x + y - 1 = \sqrt{5}Y$ ..... (3)

$\therefore$ (3) দ্বারা (2) থেকে $5Y^2 = 1 - a$ বা, $Y^2 = \frac{1-a}{5}$ ....(4)

এটি নির্ণেয় আদর্শাকার পরিবর্তিত সমীকরণ

(i) যখন $a < 1$ বা, $1 - a > 0$

$\therefore$ এখানে (4) একটি যুগ্ম সমান্তরাল সরলরেখা নির্দেশ করে।

(ii) যখন $a = 1$ বা, $1 - a = 0$

$\therefore$ এখানে (4) একটি যুগ্ম সমাপতিত সরলরেখা নির্দেশ করে।

(iii) যখন $a > 1$ বা, $1 - a < 0$

এখানে (4) একটি কাল্পনিক যুগ্ম সরলরেখা নির্দেশ করে।

3. **সমাধান ঃ**

$(c^2 + d^2)(x^2 + y^2) = (cx + dy + 2f)^2$ .... (1)

বা, $\left[(c^2 + d^2) - c^2\right]x^2 + (c^2 + d^2 - d^2)y^2 - 2cd\,xy = 4(cfx + dfy + f^2)$

বা, $d^2x^2 + c^2y^2 - 2cd\,xy = 4f(cx + dy + f)$

বা, $(dx - cy + \lambda)^2 = (4cf + 2d\lambda)x + (4fd - 2c\lambda)y + 4f^2 + \lambda^2$ .... (2)

এখন λ-কে এমন ভাবে নেওয়া হল যাতে $dx - cy + \lambda = 0$ এবং $(4cf + 2d\lambda)x + (4fd - 2c\lambda)y + 4f^2 + \lambda^2 = 0$ সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হয়।

$\therefore d(4cf + 2d\lambda) - c(4fd - 2c\lambda) = 0$

বা, $(2c^2 + 2d^2)\lambda = 0$

$\therefore \lambda = 0$ ($\because 2c^2 + 2d^2 \neq 0$)

$\therefore$ (2) থেকে λ-এর মান বসিয়ে

$(dx - cy)^2 = 4f(cx + dy + f)$ .... (3)

এখন $dx - cy = 0$ এবং $cx + dy + f = 0$ সরলরেখা দুটি বরাবর যথাক্রমে X এবং Y অক্ষ নেওয়া হল। মনে করুন (x, y) এবং (X, Y) একই বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে পুরানো এবং নতুন অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে।

$\therefore X = (x, y)$ থেকে $cx + dy + f = 0$ সরলরেখার ওপর লম্ব-দূরত্ব

$$= \frac{cx + dy + f}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

$\therefore\ cx + dy + f = \sqrt{c^2 + d^2}\ X \ldots (4)$

$Y = (x, y)$ থেকে $dx - cy = 0$ সরলরেখার ওপর লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{dx - cy}{\sqrt{c^2 + d^2}}\ \therefore\ dx - cy = \sqrt{c^2 + d^2}\ Y \ldots. (5)$$

$\therefore$ (4) এবং (5) দ্বারা (3) থেকে পাওয়া যায়

$$(c^2 + d^2)Y^2 = 4f\ \sqrt{c^2 + d^2}\ X$$

$$\therefore\quad Y^2 = \frac{4f}{\sqrt{c^2 + d^2}}\ X$$

এটি নির্ণেয় আদর্শাকার পরিবর্তিত সমীকরণ

$$\therefore\ Y^2 = \frac{4f}{\sqrt{c^2 + d^2}}\ X$$

এটি একটি অধিবৃত্তের প্রচলিত সমীকরণ যার নাভিলম্ব $\dfrac{4f}{\sqrt{c^2 + d^2}}$

4. **সমাধান :**

আপনারা জানেন যে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ একটি কেন্দ্রবিহীন সমীকরণ নির্দেশ করবে যখন $ab - h^2 = 0$ এবং $hf - bg \neq 0$, $gh - af \neq 0$

$$4x^2 + 8xy + by^2 + 2gx + 4y + 1 = 0$$

এখানে $ab - h^2 = 4.b - 4^2 = 0$

এবং $hf - bg = 4.2 - b.g \neq 0$

$gh - af = g.4 - 4.2 \neq 0$

$\therefore\quad b = 4,\ g \neq 2$

5. সংকেত ঃ

$\Delta = \frac{33}{4} > 0,$ $D = -25 < 0$

$\therefore$ কনিকটি একটি পরাবৃত্ত।

6. **সংকেত ঃ**

অনুশীলনী 5-এর মতো। Δ এবং D নির্ণয় করুন। প্রদত্ত ছক থেকে প্রমাণ করুন কনিকটি একটি উপবৃত্ত।

7. সংকেত ঃ

$a = 1 \quad h = -2 \quad b = 4 \quad g = -6 \quad f = -3 \quad c = -39$

$\Delta \neq 0 \quad D = 0$

$\therefore$ কনিকটি একটি অধিবৃত্ত।

8. সমাধান ঃ

এখানে $a = 4 \quad h = -2 \quad b = 1 \quad g = 1 \quad f = -13 \quad c = 9$

$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 4.1.9 + 2(-13).1.(-2) - 4.(-13)^2 - 1.(1)^2 - 9.(-2)^2$

$= -625 \neq 0$

$D = ab - h^2 = 4 - 4 = 0$

$\therefore$ কনিকটি একটি অধিবৃত্ত।

প্রদত্ত সমীকরণটি থেকে

$(2x - y)^2 + 2x - 26y + 9 = 0$

বা $(2x - y + \lambda) = -2x + 26y - 9 + \lambda^2 + 4\lambda x - 2\lambda y$

$= 2(2\lambda - 1)x + 2(13 - \lambda)y + \lambda^2 - 9 \;....\; (1)$

যেখানে λ একটি ধ্রুবক।

এখন λ-কে এমনভাবে নেওয়া হল যে

$2x - y + \lambda = 0$ এবং $2(2\lambda - 1)x + 2(13 - \lambda)y + \lambda^2 - 9 = 0$ সরলরেখা দুটি লম্বভাবে অবস্থিত হয়।

$$\therefore \quad 2.\left\{\frac{-(2\lambda-1)}{13-\lambda}\right\}=-1 \qquad [m_1m_2=-1]$$

বা, $\lambda = 3$

$\therefore$ (1) থেকে α-এর মান বসিয়ে

$(2x - y + 3)^2 = 10x + 20y = 10(x + 2y)$

বা, $\dfrac{2x-y+3}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{10(x+2y)}{\sqrt{5}\sqrt{1^2+2^2}}$

$\therefore$ $x + 2y = 0$ এবং $2x - y + 3 = 0$ দুটি লম্ব সরলরেখাকে

অক্ষদ্বয় ধরে, $X = \dfrac{x+2y}{\sqrt{5}}$ $\qquad Y = \dfrac{2x-y+3}{\sqrt{5}}$

প্রদত্ত সমীকরণটি রূপান্তরিত হয় $Y^2 = \dfrac{10}{\sqrt{5}}X$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি অধিবৃত্ত যার অক্ষ $2x - y + 3 = 0$ শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x + 2y = 0$, এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{5}$

9. **সমাধান ঃ**

এখানে $a = 5 \quad h = -1 \quad b = 5 \quad g = -\frac{9}{2} \quad f = -\frac{3}{2} \quad c = 5$

$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 5.5.5 + 2\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)(-1) - 5\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{9}{2}\right)^2 - 5.(-1)^2$

$= \dfrac{480-504}{4} = -6 \neq 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি কনিক।

$D = ab - h^2 = 25 - 1 = 24 > 0$

$\therefore$ কনিকটি একটি উপবৃত্ত।

মনে করুন, $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 9x - 3y + 5$

$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ দ্বারা পাওয়া যায় $10x - 2y - 9 = 0$ ... (1)

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ থেকে পাওয়া যায় $-2x + 10y - 3 = 0$ .... (2)

(1) এবং (2) সমাধান করে, $x = 1, y = \frac{1}{2}$

$\therefore$ উপবৃত্তটির কেন্দ্র $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

$$d = \frac{\Delta}{D} = \frac{-6}{24} = -\frac{1}{4}$$

যার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে সেই পরিবর্তিত সমীকরণ

$$5x'^2 - 2x'y' + 5y'^2 - \frac{1}{4} = 0 \text{ .... (3)}$$

আবার অক্ষদ্বয়ের আবর্তন দ্বারা (3) নং সমীকরণটি রূপান্তরিত হয়

$$a'x'^2 + b'y'^2 - \frac{1}{4} = 0$$

ইনভেরিয়েন্টের (Invariant) উপপাদ্য দ্বারা

$a' + b' = a + b = 5 + 5 = 10$

এবং $\quad a'b' = ab - h^2 = 25 - 1 = 24$

$(a' - b')^2 = (a' + b')^2 - 4a'b' = 100 - 96 = 4$

$\therefore \quad a' - b' = \pm 2$

$\therefore \quad a' + b' = 10$ এবং $a' - b' = \pm 2$

সমাধান করে $a' = 4$ অথবা 6, $b' = 6$ অথবা 4

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি রূপান্তরিত হয় (X, Y নতুন অক্ষ)

$$4X^2 + 6Y^2 - \frac{1}{4} = 0$$

নতুবা $6X^2 + 4Y^2 - \frac{1}{4} = 0$

10. **সমাধান ঃ**

মনে করুন কনিকটির সমীকরণ

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ .... (1)

$\therefore$ যেহেতু কনিকটি মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে যায়,

$\therefore c = 0$

(x_1, y_1) বিন্দুতে কনিকটির স্পর্শকের সমীকরণ হয়

$axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

$\therefore$ (0, 0)-তে কনিকটির স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$gx + fy + c = 0$

বা, $gx + fy = 0$ ($\because c = 0$) ..... (2)

যেহেতু (2), x অক্ষের সঙ্গে অভিন্ন নয় অর্থাৎ $y = 0$

তাহলে $g = 0$

$\therefore$ (1) থেকে $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy = 0$ ... (3)

কেন্দ্র অবস্থিত $ax + hy = 0$ এবং $hx + by + f = 0$ এর ওপর

$\therefore$ এরা (–1, –1) দ্বারা সিদ্ধ হবে।

$\therefore \quad a + h = 0$ ..... (4)

$h + b - f = 0$ ... (5)

আবার (0, 2) বিন্দু কনিকটির ওপর অবস্থিত।

$\therefore \quad 4b + 4f = 0$

বা, $\quad b = -f$ .... (6)

$\therefore$ (4) এবং (5) থেকে (6) দ্বারা

$h = 2f$ এবং $a = -h = -2f$

$\therefore$ (3) নং সমীকরণে a, h এবং b এর মান বসিয়ে

$$-2fx^2 + 4fxy - fy^2 + 2fy = 0$$

বা, $2x^2 - 4xy + y^2 - 2y = 0$ এটিই নির্ণেয় কনিকের সমীকরণ।

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$D = ab - h^2 = 2.1 - 4 = -2 < 0$

$\therefore$ কনিকটি একটি পরাবৃত্ত।

11. **সংকেত ঃ** অনুশীলনী 3-নং এর অনুরূপ হবে।

12. **সংকেত ঃ** অনুশীলনী 1-নং এর অনুরূপ হবে।

13. **সমাধান ঃ**

$x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ ... (1)

(1)-কে $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে

$$a = 1,\ h = -\frac{3}{2},\ b = 1,\ g = 5,\ f = -5,\ c = 21$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 21 \end{vmatrix} = 1(21 - 25) + \frac{3}{2}\left(-\frac{63}{2} + 25\right) + 5\left(\frac{15}{2} - 5\right)$$

$$= -4 - \frac{39}{4} + \frac{25}{2} = -\frac{5}{4} \neq 0$$

$$D = ab - h^2 = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4} < 0$$

$\therefore$ (1) একটি কনিক এবং কনিকটি পরাবৃত্ত।

(α, β) যদি পরাবৃত্তটির কেন্দ্র হয় তা হলে $\alpha = \dfrac{hf - bg}{ab - h^2}$

এবং $\beta = \dfrac{gh - af}{ab - h^2}$ $\quad \therefore \alpha = \dfrac{-\frac{3}{2} \times (-5) - 1 \times 5}{-\frac{5}{4}} = -2$

$$\beta = \frac{gh - af}{ab - h^2} = \frac{5 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 \times (-5)}{-\frac{5}{4}} = 2$$

$\therefore$ নির্ণেয় কেন্দ্র = $(-2, 2)$

14. **সমাধান ঃ**

ধরুন বৃত্তটির সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ .... (1)

যদি এটি অধিবৃত্তটিকে $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে

$a^2t^4 + 4a^2t^2 + 2gat^2 + 4aft + c = 0$

বা, $a^2t^4 + 2at^2(2a + g) + 4aft + c = 0$

এটি একটি t-এর ঘাতে চর্তুঘাত সমীকরণ যার চারটি বীজ t_1, t_2, t_3, t_4

যেহেতু t^3 এর সহগ শূন্য।

$\therefore t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$

15. **সমাধান ঃ**

নির্ণেয় কনিকটির সমীকরণ হবে

$x^2 + 2xy + 5y^2 - 7x - 8y + 6 + \lambda(2x - y - 5)(3x + y - 11) = 0$ .... (1)

যেহেতু এটি (1, 1) বিন্দুগামী

$\therefore -1 + \lambda(-4)(-7) = 0$ $\qquad \therefore \lambda = \frac{1}{28}$

$\therefore$ নির্ণেয় কনিকটির সমীকরণটি হবে

$$x^2 + 2xy + 5y^2 - 7x - 8y + 6 + \frac{1}{28}(2x - y - 5)(3x + y - 11) = 0$$

বা, $34x^2 + 55xy + 139y^2 - 233x - 218y + 223 = 0$

একক 4 ❑ স্পর্শক, অভিলম্ব, ব্যাস

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

আপনারা উচ্চমাধ্যমিক স্তরে স্পর্শক এবং অভিলম্ব বিষয়ে পরিচিত হয়েছেন। তৃতীয় এককে আপনারা দেখেছেন যে একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ সর্বদা কনিক অথবা যুগ্ম সরলরেখা নির্দেশ করে। এখানে আমরা কনিকের স্পর্শক, অভিলম্ব এবং ব্যাস নিয়ে বিশদভাবে আলোচনা করব। জ্যামিতিক আলোচনায় এই স্পর্শক, অভিলম্ব, ব্যাস ইত্যাদির গুরুত্ব অপরিসীম। কোনও বহিঃস্থ বিন্দু থেকে কটি স্পর্শক বা অভিলম্ব টানা সম্ভব সে প্রশ্ন উঠতে পারে। আবার ব্যাস, অনুবন্ধী ব্যাস, স্পর্শক, অভিলম্ব ইত্যাদির সাধারণ জ্যামিতিক ধর্ম সম্বন্ধে কী বলা যায় তাও পর্যালোচনা করা যেতে পারে। আবার কনিকের দুটি লম্ব স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চার পথই বা কী নির্দেশ করবে তা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

4.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করে আপনারা জানতে পারবেন

- স্পর্শক ও অভিলম্বের সংজ্ঞা।
- বৃত্ত, অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত, পরাবৃত্তের স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ।
- একটি সরলরেখা কী শর্তে কনিকের স্পর্শক এবং অভিলম্ব হবে।
- যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ।
- স্পর্শ বিন্দুগ জ্যা-এর সমীকরণ।
- কনিকের বহিঃস্থ বিন্দু থেকে কনিকের ওপর কতগুলি স্পর্শক এবং অভিলম্ব অঙ্কন করা যাবে।
- উপ-স্পর্শক এবং উপ-অভিলম্বের সংজ্ঞা।
- ব্যাস এবং অনুবন্ধী ব্যাস কাকে বলে।
- ব্যাস এবং অনুবন্ধী ব্যাস সম্বন্ধীয় বিবিধ ধর্ম।

4.3 স্পর্শকের সংজ্ঞা

আমরা জানি একটি সরলরেখা একটি কনিকের দুটি বিন্দুতে ছেদ করতে পারে। সরলরেখাটির অবস্থান যদি ক্রমে ক্রমে এমনভাবে পরিবর্তন করা যায় যে কনিকের ওপর অবস্থানরত ছেদবিন্দু দুটি ক্রমশ পরস্পরের নিকটবর্তী হতে থাকে এবং অবশেষে মিলে যায় তবে ঐ শেষ অবস্থায় সরলরেখাটিকে কনিকের একটি স্পর্শক বলা হয়। মনে করুন একটি প্রদত্ত কনিকের ওপর P একটি বিন্দু। যদি আর একটি বিন্দু Q কনিকের ওপর

থেকে ক্রমশ P এর দিকে অগ্রসর হতে থাকে তাহলে PQ সরলরেখার শেষ অবস্থাকে P বিন্দুতে কনিকের স্পর্শক বলা হয়।

4.4 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ কনিকের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (1) হল প্রদত্ত কনিক এবং $P(x_1, y_1)$ কনিকের ওপর একটি বিন্দু। P বিন্দুতে কনিকের ওপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

মনে করুন $Q\ (x_2, y_2)$ কনিকের ওপর আর একটি বিন্দু।

$\therefore$ PQ সরলরেখার সমীকরণ হল $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = r$ .... (2)

যেহেতু P এবং Q উভয়েই কনিকের ওপর অবস্থিত।

$$\therefore \quad ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \ .... (3)$$

$$ax_2^2 + 2hx_2y_2 + by_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0 \ ... (4)$$

$\therefore$ (4) থেকে (3) বিয়োগ করে পাওয়া যায়

$$a\left(x_2^2 - x_1^2\right) + 2h\left(x_2y_2 - x_1y_1\right) + b\left(y_2^2 - y_1^2\right) + 2g\left(x_2 - x_1\right) + 2f\left(y_2 - y_1\right) = 0 \ldots (5)$$

আবার $2(x_2y_2 - x_1y_1) = (x_2 + x_1)\ (y_2 - y_1) + (y_2 + y_1)\ (x_2 - x_1)$

$\therefore$ (5) থেকে পাওয়া যাবে

$$a(x_2 + x_1)\ (x_2 - x_1) + h\{(x_2 + x_1)\ (y_2 - y_1) + (y_2 + y_1)\ (x_2 - x_1)\} +$$

$$b(y_2 + y_1)\ (y_2 - y_1) + 2g(x_2 - x_1) + 2f(y_2 - y_1) = 0 \ ... (6)$$

$\therefore$ (2) ও (6) থেকে পাওয়া যায়

$$a(x_2 + x_1)\ (x - x_1) + h\{(x_2 + x_1)\ (y - y_1) + (y_2 + y_1)\ (x - x_1)\} +$$

$$b(y_2 + y_1)\ (y - y_1) + 2g(x - x_1) + 2f(y - y_1) = 0 \ ..... (7)$$

এখন $Q \to P$ হলে শেষ অবস্থায় $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$

$\therefore$ (7) থেকে x_2 এবং y_2 এর মান বসিয়ে এবং 2 দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$ax_1\ (x - x_1) + h\{x_1\ (y - y_1) + y_1\ (x - x_1)\} + by_1\ (y - y_1) + g(x - x_1) + f(y - y_1) = 0$$

অথবা, $axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + gx + fy$

$$= ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + gx_1 + fy_1$$

উভয় পক্ষে $gx_1 + fy_1 + c$ যোগ করে এবং $ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ ব্যবহার করে পাই

$$axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

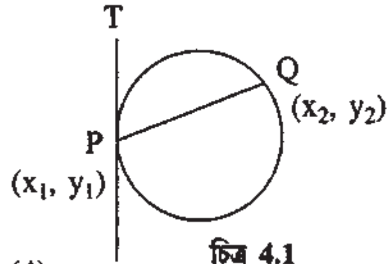
$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ

$$\boxed{axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0}$$

4.5 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

মনে করুন $P(x_1\ y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ প্রদত্ত বৃত্তের ওপর যে কোনও দুটি বিন্দু।

$$\therefore x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ldots (1)$$



চিত্র 4.1

যেহেতু P ও Q বৃত্তের ওপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \ldots (2)$$

$$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0 \ldots (3)$$

PQ সরলরেখার সমীকরণ $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ldots. (4)$

(3) থেকে (2) বিয়োগ করে পাওয়া যায়

$$(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) + 2g(x_2 - x_1) + 2f(y_2 - y_1) = 0$$

বা, $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2g) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1 + 2f) = 0$

$$\therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}$$

$\therefore$ (4) থেকে $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ এর মান বসিয়ে, PQ-এর সমীকরণ হবে

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}(x - x_1)$$

$\therefore$ PQ জ্যা-এর সমীকরণ হবে

$$(y - y_1)(y_1 + y_2 + 2f) + (x - x_1)(x_1 + x_2 + 2g) = 0 \ldots. (5)$$

যেহেতু Q, P এর দিকে অগ্রসর হয় এবং P-এর ওপর সমাপতিত হয় অতএব (5)-এ $(x_2 = x_1)$ $(y_2 = y_1)$ বসিয়ে P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$(y - y_1)(2y_1 + 2f) + (x - x_1)(2x_1 + 2g) = 0$$

বা, $x(x_1 + g) + y(y_1 + f) = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$

উভয় দিকে $gx_1 + fy_1 + c$ যোগ করে এবং (2) ব্যবহার করে নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ

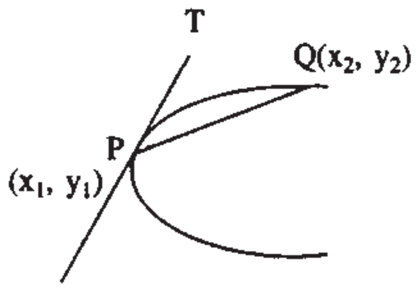
$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

4.6 $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

মনে করুন $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$

$y_2 = 4ax$ .... (1)

অধিবৃত্তের ওপর পরস্পর নিকট দুটি বিন্দু।



চিত্র 4.2

$\therefore$ PQ সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ .... (2)}$$

$\therefore$ P, Q অধিবৃত্তের ওপর অবস্থিত।

$\therefore$ $y_1^2 = 4ax_1$ এবং $y_2^2 = 4ax_2$

$\therefore$ $y_2^2 - y_1^2 = 4a(x_2 - x_1)$

বা, $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4a}{y_2 + y_1}$$

$\therefore$ (2) থেকে $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$y - y_1 = \frac{4a}{y_2 + y_1}(x - x_1)$$

$\therefore$ Q, P এর দিকে অগ্রসর হয় এবং সমাপতিত হয়

$\therefore$ $(x_1 = x_2)$ $(y_1 = y_2)$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y}(x - x_1)$$

বা, $yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$

বা, $yy_1 - 2ax = 4ax_1 - 2ax_1 \quad (\because y_1^2 = 4ax_1)$

বা, $\boxed{yy_1 = 2a(x + x_1)}$

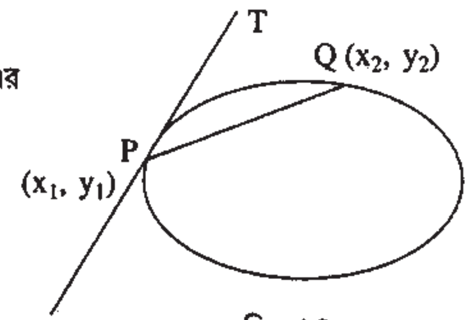
অনুসিদ্ধান্ত : (i) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $(at^2, 2at)$

বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\boxed{x - ty + at^2 = 0}$

(ii) শীর্ষ (0, 0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে $x = 0$ অর্থাৎ শীর্ষ বিন্দুতে স্পর্শকটি অক্ষের ওপর লম্ব হবে।

4.7 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad .... (1)$$



চিত্র 4.3

মনে করুন $P(x_1, y_1)$ এবং $Q\ (x_2, y_2)$ উপবৃত্ত (1)-এর ওপর পরস্পর কাছে দুটি বিন্দু।

$\therefore$ PQ সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad ..... (2)$$

যেহেতু P এবং Q উপবৃত্তের ওপর অবস্থিত

$$\therefore \frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} = 1 \quad .... (3) \qquad \frac{{x_2}^2}{a^2} + \frac{{y_2}^2}{b^2} = 1 \quad .... (4)$$

(4) – (3) থেকে $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{(x_2 + x_1)}{(y_2 + y_1)}$

$\therefore$ (2) থেকে, $y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}\right)(x - x_1)$

এখন স্পর্শকের সংজ্ঞা থেকে $(y_1 = y_2)\ (x_1 = x_2)$

$\therefore P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$y - y_1 = -\frac{2b^2x_1}{2a^2y_1}(x - x_1)$$

বা, $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} = 1$

$$\therefore \boxed{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (i) পরোক্ষ দৈর্ঘ্যের প্রান্ত বিন্দুতে (a, 0) (–a, 0) উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হবে যথাক্রমে $x = a$ এবং $x = -a$

(ii) $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হবে $\boxed{\dfrac{x \cos \theta}{a} + \dfrac{y \sin \theta}{b} = 1}$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ঃ

4.7 পরিচ্ছেদের অনুরূপভাবে অগ্রসর হয়ে $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে $\boxed{\dfrac{xx_1}{a^2} - \dfrac{yy_1}{b^2} = 1}$ আবার $(a \sec \phi, b \tan \phi)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\frac{x \sec \phi}{a} - \frac{y \tan \phi}{b} = 1$$

4.8 প্রদত্ত সরলরেখার বৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত

মনে করুন $y = mx + c$ ... (1) সরলরেখার $x^2 + y^2 = a^2$ ... (2) বৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত নির্ণয় করতে হবে।

(1) থেকে y-এর মান (2) তে বসালে, $x^2 + (mx + c)^2 - a^2 = 0$

বা, $(1 + m^2) x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$ ... (3)

এই দ্বিঘাত সমীকরণ থেকে (1) ও (2) এর ছেদ বিন্দু দুটির ভুজ পাওয়া যাবে।

(1) সরলরেখা (2) বৃত্তের স্পর্শক হলে ছেদবিন্দু দুটি বাস্তব এবং অভিন্ন অর্থাৎ এই সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হবে।

সুতরাং বীজদ্বয় সমান হবার শর্ত

$$4m^2c^2 = 4(1 + m^2)(c^2 - a^2)$$

অথবা, $m^2c^2 = c^2 - a^2 + m^2c^2 - a^2m^2$

অথবা, $c^2 = a^2 (1 + m^2)$

অর্থাৎ $\boxed{c = \pm a\sqrt{1 + m^2}}$

এটি $y = mx + c$ সরলরেখার $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত। অতএব m-এর মান যাই হোক না কেন $y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$ সরলরেখা $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক নির্দেশ করবে।

করণীর যে কোনও চিহ্নের জন্য এই সমীকরণটি স্পর্শক নির্দেশ করবে অতএব বলা যেতে পারে যে m-এর একটি মানের জন্য দুটি স্পর্শক পাওয়া যাবে অর্থাৎ প্রদত্ত একটি সরলরেখার সমান্তরাল করে একটি বৃত্তের দুটি স্পর্শক আঁকা যাবে।

এখন $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$

অথবা, $mx - y + a\sqrt{1+m^2} = 0$ ... (4)

সরলরেখা (1) (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হলে

$$xx_1 + yy_1 - a^2 = 0 \text{ ... (5)}$$

$\therefore$ (4) ও (5) একই সমীকরণ হবে

$$\therefore \frac{x_1}{m} = \frac{y_1}{-1} = \frac{-a^2}{a\sqrt{1+m^2}} = -\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}$$

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক হবে

$$x_1 = \frac{-am}{\sqrt{1+m^2}} \qquad y_1 = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}$$

বিকল্প পদ্ধতি : মনে করুন $y = mx + c$ ... (1) সরলরেখাটি

$x^2 + y^2 = a^2$ .... (2) বৃত্তকে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1 + yy_1 = a^2$ ... (3)

$\therefore$ (1) ও (3) উভয়েই (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক হওয়ায় অভিন্ন।

$$\therefore \frac{x_1}{m} = \frac{y_1}{-1} = -\frac{a^2}{c}$$

অর্থাৎ $x_1 = -\frac{a^2m}{c} \quad y_1 = \frac{a^2}{c}$ .... (4)

(x_1, y_1) বৃত্তের ওপর অবস্থিত বলে $x_1^2 + y_1^2 = a^2$

$\therefore \frac{a^4m^2}{c^2} + \frac{a^4}{c^2} = a^2$ অর্থাৎ $\boxed{c = \pm a\sqrt{1+m^2}}$

$\therefore$ $y = mx + c$ সরলরেখার $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$ এবং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{a^2}{c}\right)$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ "বৃত্তের কেন্দ্র থেকে স্পর্শকের দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান"

$y = mx + c$ সরলরেখার $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত হল

$$\frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = \pm a$$

বা, $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

বা, $\pm\frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = a$

আবার কেন্দ্র (0, 0) থেকে $y = mx + c$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $= \pm\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}$

$\therefore$ অতএব লম্ব-দূরত্ব = ব্যাসার্ধ = a

4.9 প্রদত্ত সরলরেখার অধিবৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত

$y = mx + c$ .... (1) $\qquad\qquad y^2 = 4ax$ .... (2)

(1) থেকে (2) -তে y-এর মান বসিয়ে

$$(mx + c)^2 = 4ax$$

অথবা $m^2x^2 + (2mc - 4a)\,x + c^2 = 0$ ... (3)

সমীকরণ (3)-এর বীজদ্বয় ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ।

$\therefore$ সরলরেখা (1) যদি অধিবৃত্ত (2) কে স্পর্শ করে তাহলে (3) এর বীজদ্বয় সমান হবে।

অর্থাৎ $(2mc - 4a)^2 = 4m^2c^2$

বা, $16a^2 - 16amc = 0$

বা, $\boxed{c = \frac{a}{m}}$ $\qquad (m \neq 0)$

$\therefore$ m-এর o ব্যতীত যে কোনও মানের জন্য $y = mx + \frac{a}{m}$ সরলরেখা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হবে।

$c = \frac{a}{m}$ বলে স্পর্শবিন্দুর ভুজ, $x_1 = \frac{2a - mc}{m^2} = \frac{a}{m^2}$

কোটি $y_1 = mx_1 + c = m. \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক হল $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

4.10 প্রদত্ত সরলরেখার উপবৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত

$$y = mx + c \text{ ... (1)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ .... (2)}$$

(1) ও (2) থেকে y অপনয়ন করে পাওয়া যায়

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$$

বা, $(a^2m^2 + b^2)\, x^2 + 2a^2mcx + a^2 (c^2 - b^2) = 0$ ..... (3)

$\therefore$ সরলরেখা (1) উপবৃত্তের (2)-এর স্পর্শক হবে যদি (3) সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হয় অর্থাৎ নিরূপক শূন্য হবে।

$\therefore \quad 4m^2c^2a^2 - 4(a^2m^2 + b^2)(a^2c^2 - a^2b^2) = 0$

বা, $a^2m^2c^2 - (a^2m^2c^2 - a^2m^2b^2 + b^2c^2 - b^4) = 0$

বা, $c^2 = a^2m^2 + b^2$

$\therefore \quad c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$\therefore$ $y = mx + c$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করবার শর্ত হবে $c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$

সুতরাং m-এর যে কোনও সসীম মানের জন্য $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ সরলরেখা উপবৃত্তের স্পর্শক হবে।

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $\left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$

প্রদত্ত সরলরেখার পরাবৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত :

(4.10) পরিচ্ছেদের অনুরূপ সরলরেখা $y = mx + c$ .... (1)

পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (2) এর স্পর্শক হবার শর্ত হবে

$$c = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

4.11 অধিবৃত্তের দুটি পরস্পর লম্ব স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চার পথ

কোন বিন্দু থেকে একটি অধিবৃত্তের ওপর দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যাবে এবং ঐ স্পর্শক দুটি যদি পরস্পর লম্ব হয় তাহলে তাদের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ অধিবৃত্তের নিয়ামক।

আপনারা জানেন $y = m\alpha + \frac{a}{m}$ সরলরেখাটি সর্বদা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে। এটি যদি (α, β) বিন্দুগামী হয় তাহলে $\beta = m\alpha + \frac{a}{m}$

বা, $m^2\alpha - m\beta + a = 0$

এটি একটি m-এর ঘাতে দ্বিঘাত সমীকরণ, যার দুটি বীজ আছে। মনে করুন বীজদুটি m_1 এবং m_2 সুতরাং (α, β) বিন্দু থেকে অধিবৃত্তের ওপর দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যাবে।

স্পর্শক দুটির সমীকরণ হবে

$$y = m_1x + \frac{a}{m_1} \quad \text{এবং} \quad y = m_2x + \frac{a}{m_2}$$

যেখানে, $m_1m_2 = \frac{a}{\alpha}$

যদি স্পর্শক দুটি পরস্পর লম্ব হয় তাহলে $m_1m_2 = -1$

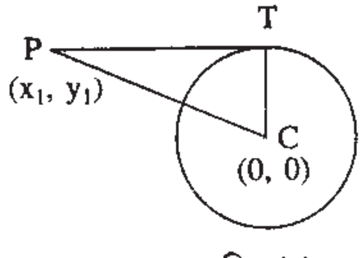
অর্থাৎ $\frac{a}{\alpha} = -1$ বা, $a + \alpha = 0$

$\therefore$ (α, β) বিন্দুর সঞ্চারপথ $\boxed{x + a = 0}$ যা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নিয়ামক।

4.12 বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

মনে করুন $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে C কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক T বিন্দুতে বৃত্তটিকে স্পর্শ করেছে।

মনে করুন বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$



চিত্র 4.4

কেন্দ্র C এর স্থানাঙ্ক (0, 0)

CTP সমকোণী ত্রিভুজ থেকে $PT^2 = CP^2 - CT^2$

$$CT^2 = a^2 \qquad CP^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$\therefore \quad PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - a^2}$$

যদি বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ হয়

তাহলে C-এর স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$, ব্যাসার্ধ $CT = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$\therefore \quad PT^2 = (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$

$\therefore \quad PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

4.13 যুগ্ম স্পর্শক

বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে অঙ্কিত যুগ্মস্পর্শকের সমীকরণ ঃ—

(x_1, y_1) বিন্দু থেকে অঙ্কিত সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হলে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত এবং $\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = r$ সরলরেখার ছেদবিন্দুদ্বয় মিশে যাবে।

$\therefore \; x = x_1 + \ell r \qquad y = y_1 + mr$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের সমীকরণে x, y এর মান বসিয়ে

$(x_1 + \ell r)^2 + (y_1 + mr)^2 = a^2$

বা, $\quad r^2 + 2r(\ell x_1 + my_1) + x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 0 \;\; .... (1)$

যদি (x_1, y_1) বিন্দু থেকে সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হয় তাহলে (1) দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় সমান হবে।

অর্থাৎ $(\ell x_1 + my_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 - a^2 \;\; ..... (2)$

$\therefore \quad \frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m}$ সরলরেখা ও (2) থেকে ℓ, m অপনয়ন করে পাওয়া যায়

$[x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1)]^2 = \left(x_1^2 + y_1^2 - a^2\right)[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]$

অর্থাৎ, $\left(xx_1 + yy_1 - a^2\right)^2 = \left(x^2 + y^2 - a^2\right)\left(x_1^2 + y_1^2 - a^2\right)$

এটিই (x_1, y_1) বিন্দু থেকে অঙ্কিত যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ।

অনুরূপভাবে (x_1, y_1) বিন্দু থেকে যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করা যাবে যখন বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$\therefore$ এই ক্ষেত্রে যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$\boxed{SS_1 = T^2}$ যেখানে $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$

$S_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \qquad T = xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$

বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দু থেকে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের যুগ্মস্পর্শকের সমীকরণ ঃ

$y^2 = 4ax \;\; ...... (1) \qquad \frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = r$ (মনে করুন) ...... (2)

$\ell^2 + m^2 = 1$

$\therefore$ (2) থেকে $x = x_1 + \ell r \qquad y = y_1 + mr$

(1) থেকে x, y এর মান বসিয়ে

$$(y_1 + mr)^2 = 4a(x_1 + \ell r)$$

বা, $\quad m^2r^2 - 2r(2a\ell - my_1) + y_1^2 - 4ax_1 = 0$ ..... (3)

যদি সরলরেখা (2) স্পর্শক হয় তাহলে দ্বিঘাত সমীকরণ (3)-এর বীজদ্বয় সমান হবে।

সুতরাং $(2a\ell - my_1)^2 = m^2\left(y_1^2 - 4ax_1\right)$ .... (4)

বা, $\quad a\ell^2 - \ell my_1 + m^2x_1 = 0$

$\therefore$ (2) এবং (4) থেকে ℓ, m অপনয়ন করে পাওয়া যায়

$$a(x - x_1)^2 - (x - x_1)(y - y_1)y_1 + (y - y_1)^2 x_1 = 0$$

বা, $\quad \left(y^2 - 4ax\right)\left(y_1^2 - 4ax_1\right) = \left\{yy_1 - 2a\left(x + x_1\right)\right\}^2$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দু থেকে নির্ণেয় যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ

$\boxed{SS_1 = T^2}$ $\qquad S = y^2 - 4ax$

$S_1 = y_1^2 - 4ax_1$

$T = yy_1 - 2a(x + x_1)$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

পরিচ্ছেদের অনুরূপ ভাবে প্রমাণ করা যায় (x_1, y_1) বিন্দু থেকে

(i) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের এবং (ii) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের যুগ্মস্পর্শকের সমীকরণের সমীকরণ

$\boxed{SS_1 = T^2}$

যেখানে (i) $S = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$, $S_1 = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} - 1$

এবং $\quad T = \dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} - 1$

(ii) $S = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1$

$S_1 = \dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2} - 1$

$T = \dfrac{xx_1}{a^2} - \dfrac{yy_1}{b^2} - 1$

কোনও বিন্দু থেকে একটি সকেন্দ্র কনিকের ওপর দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যাবে এবং স্পর্শক দুটি পরস্পর লম্ব হলে তাদের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

$y = mx + \sqrt{\frac{m^2}{a} + \frac{1}{b}}$ সরলরেখাটি সর্বদা $ax^2 + by^2 = 1$ সকেন্দ্র কণিকটিকে স্পর্শ করে।

যদি ঐ সরলরেখা (α, β) বিন্দুগামী হয় তাহলে

$$\beta = m\alpha + \sqrt{\frac{m^2}{a} + \frac{1}{b}}$$

বা, $$m^2\left(\frac{1}{a} - \alpha^2\right) + 2m\alpha\beta + \left(\frac{1}{b} - \beta^2\right) = 0$$

এটি একটি m এর ঘাতে দ্বিঘাত সমীকরণ। মনে করুন এর বীজদ্বয় m_1 এবং m_2। অতএব (α, β) বিন্দু থেকে সকেন্দ্র কনিকের ওপর দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যাবে।

ঐ স্পর্শক দুটির সমীকরণ হবে

$$y = m_1x + \sqrt{\frac{m_1^2}{a} + \frac{1}{b}} \quad \text{এবং} \quad y = m_2x + \sqrt{\frac{m_2^2}{a} + \frac{1}{b}}$$

যেখানে $m_1m_2 = \dfrac{\frac{1}{b} - \beta^2}{\frac{1}{a} - \alpha^2}$

যদি ঐ স্পর্শক দুটি পরস্পর লম্ব হয় তাহলে $m_1m_2 = -1$

$$\therefore \quad \frac{1}{b} - \beta^2 = -\left(\frac{1}{a} - \alpha^2\right)$$

বা, $$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$\therefore$ (α, β) বিন্দুর সঞ্চারপথ $\boxed{x^2 + y^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

যা একটি বৃত্ত। এটিকে সকেন্দ্র কনিকের নিয়ামক বৃত্ত বলে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের নিয়ামক বৃত্ত

$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ এবং $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের নিয়ামক বৃত্ত

$x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

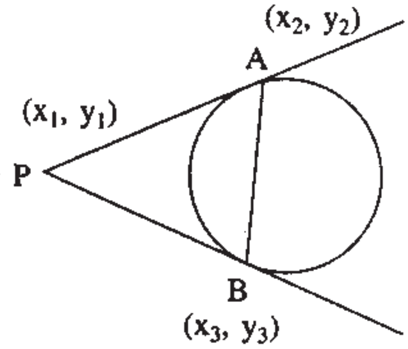
4.14 স্পর্শ বিন্দুগ জ্যা-এর সমীকরণ

সংজ্ঞা ঃ কনিকের বহিঃস্থ কোনও বিন্দু থেকে যে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায় তাদের স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে কনিকের স্পর্শ বিন্দুগ জ্যা-এর সমীকরণ বলে।

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শবিন্দুগ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে করুন $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = a^2$ ... (1) বৃত্তে দুটি স্পর্শক টানা হয়েছে এবং $A(x_2, y_2)$ ও $B(x_3, y_3)$ বিন্দু দুটি যথাক্রমে ঐ স্পর্শক দুটির স্পর্শ বিন্দু।

$\therefore$ AB সরলরেখা স্পর্শ বিন্দুগ জ্যা। সুতরাং PA এবং PB স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হবে যথাক্রমে $xx_2 + yy_2 = a^2$ এবং $xx_3 + yy_3 = a^2$



চিত্র 4.5

যেহেতু এগুলি $P(x_1y_1)$ বিন্দুগামী

$\therefore x_1x_2 + y_1y_2 = a^2$ .... (2) এবং $x_1x_3 + y_1y_3 = a^2$ .... (3)

এখন (2) এবং (3) থেকে দেখা যায় যে (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3), $xx_1 + yy_1 = a^2$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, যা একটি সরলরেখা।

সুতরাং $\boxed{xx_1 + yy_1 = a^2}$ সরলরেখাই (x_1, y_1) বিন্দুর স্পর্শ বিন্দুগ জ্যা।

আগের অনুচ্ছেদ অনুসরণ করে পাওয়া যায়

(i) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুর স্পর্শ বিন্দুগ জ্যা-এর সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুর স্পর্শ বিন্দুগ জ্যা-এর সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

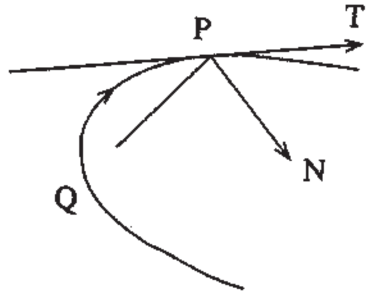
(iii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুর স্পর্শ বিন্দুগ জ্যা-এর সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

4.15 অভিলম্বের সংজ্ঞা

সংজ্ঞা ঃ যে সরলরেখা স্পর্শ বিন্দুগামী হয়ে স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের ওপর লম্ব হয় তাকে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখার অভিলম্ব বলে।

P স্পর্শবিন্দুতে $\overrightarrow{PT}$ স্পর্শকের ওপর লম্বভাবে অবস্থিত $\overrightarrow{PN}$ সরলরেখাকে P বিন্দুতে বক্ররেখার অভিলম্ব বলে।

$\overrightarrow{PN}$ অভিলম্ব সাপেক্ষে P বিন্দুতে অভিলম্বটির পাদ বিন্দু বলা হয়।



চিত্র 4.6

4.16 (x_1,y_1) বিন্দুতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়

অনুচ্ছেদ 4.5 তে আপনারা দেখেছেন যে

(x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হল

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

স্পর্শকের নতি (Slope) $= -\dfrac{x_1 + g}{y_1 + f}$

$\therefore$ অভিলম্বের আনতি হবে $= \dfrac{y_1 + f}{x_1 + g}$ $(\because m_1m_2 = -1)$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}(x - x_1)}$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় ঃ

(x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$[অনুচ্ছেদ 4.6]

$\therefore$ স্পর্শকের নতি $= \dfrac{2a}{y_1}$

$\therefore$ অভিলম্বের নতি $= -\dfrac{y_1}{2a}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $\boxed{y - y_1 = -\dfrac{y_1}{2a}(x - x_1)}$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (1) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে

$$y - 2at = -t\,(x - at^2)$$

বা, $\boxed{tx + y = 2at + at^3}$

2. (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের নতি যদি m হয়,

বা, যদি $m = -\dfrac{y_1}{2a}$ হয় তাহলে অভিলম্বের সমীকরণ নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যাবে।

$$y + 2am = m(x - am^2) \qquad \left(\text{যেহেতু } x_1 = \frac{y_1^2}{4a} = \frac{4a^2m^2}{4a} = am^2\right)$$

বা, $\boxed{y = mx - 2am - am^3}$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ ঃ

আপনারা 4. অনুচ্ছেদে দেখেছেন যে (x_1, y_1) বিন্দুতে $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হল

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

স্পর্শকের নতি $= -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_1}{y_1}$

$\therefore$ অভিলম্বের নতি $= \dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{y_1}{x_1}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$y - y_1 = \frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$$

বা, $$\frac{x - x_1}{\dfrac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\dfrac{y_1}{b^2}}$$

বা, $$\boxed{\frac{a^2}{x_1}.x - \frac{b^2}{y_1}.y = a^2 - b^2}$$

অনুসিদ্ধান্ত :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে

$$\boxed{\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2}$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের অনুরূপভাবে অগ্রসর হয়ে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ প্রমাণ করা যাবে $\frac{a^2}{x_1}x + \frac{b^2}{y_1}y = a^2 + b^2$

আবার $(a \sec \phi, b \tan \phi)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে $\frac{ax}{\sec\phi} + \frac{by}{\tan\phi} = a^2 + b^2$

4.17 প্রদত্ত বিন্দু থেকে কনিকের ওপর অভিলম্ব

(a) অধিবৃত্ত : আমরা দেখব যে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে একটি অধিবৃত্তের ওপর মোট তিনটি অভিলম্ব গঠন করা যায় এবং এই তিনটি অভিলম্বের পাদ বিন্দু তিনটির কোটির (অধিবৃত্তের অক্ষ থেকে লম্ব দূরত্ব) যোগফল শূন্য হয়।

মনে করুন অধিবৃত্তটি হল $y^2 = 4ax$ ... (1) এবং প্রদত্ত বিন্দুটি (x_1, y_1)। এখন $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অধিবৃত্তের সমীকরণ হল

$$y + tx = 2at + at^3 \quad .... (2)$$

এটি যদি (x_1, y_1) দিয়ে যায় তবে

$$y_1 + tx_1 = 2at + at^3$$

বা, $at^3 + (2a - x_1)t - y_1 = 0$ .... (3)

এটি একটি t-এর ঘাতে ত্রিঘাত সমীকরণ।

∴ সুতরাং t-এর তিনটি বীজ আছে।

মনে করুন বীজ তিনটি হল t_1, t_2, t_3

তাহলে (x_1, y_1) বিন্দুগামী সম্ভবপর তিনটি অভিলম্বের পাদবিন্দুগুলি হল $(at_i^2, 2at_i)$ $(i = 1, 2, 3)$

∴ এদের কোটি তিনটির যোগফল $= 2a(t_1 + t_2 + t_3)$ কিন্তু সমীকরণ (3) থেকে দেখা যায় যে

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

∴ কোটি তিনটির যোগফল = 0

(b) **উপবৃত্ত ঃ** আমরা দেখব যে একটি প্রদত্ত বিন্দু থেকে একটি উপবৃত্তের ওপর মোট চারটি অভিলম্ব গঠন করা যায় এবং এই অভিলম্ব চারটির পাদবিন্দুগুলির উৎকেন্দ্রিক কোণের সমষ্টি π-র বিযুগ্ম গুণিতক।

মনে করুন উপবৃত্তের সমীকরণ হল

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots\ldots(1)$$

এবং (x_1, y_1) প্রদত্ত বিন্দু।

এখন $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হল,

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \qquad \ldots\ldots (2)$$

এখন $\tan\frac{\theta}{2} = t$ ধরলে পাই

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ এবং } \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$\therefore$ (2) থেকে $\cos\theta$ এবং $\sin\theta$-এর মান বসিয়ে পাই

$$ax\frac{1+t^2}{1-t^2} - by\frac{1+t^2}{2t} = a^2 - b^2$$

বা, $2ax(t + t^3) - by(1 - t^4) = 2(a^2 - b^2)(t - t^3) = 0$

যেহেতু এটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী

$\therefore$ $2ax_1(t + t^3) - by_1(1 - t^4) - 2(a^2 - b^2)(t - t^3) = 0$

বা, $by_1t^4 + 2(ax_1 + a^2 - b^2)t^3 + 2(ax_1 - a^2 + b^2)t_1 - by_1 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

এটি t-এর ঘাতে একটি চতুর্ঘাত সমীকরণ। সুতরাং t-এর চারটি বীজ আছে। অতএব (x_1, y_1) বিন্দু থেকে উপবৃত্তের ওপর মোট চারটি অভিলম্ব গঠন করা যায়।

মনে করুন t_1, t_2, t_3, t_4 হল t-এর চারটি বীজ এবং $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ হল তদনুসঙ্গী বিন্দুগুলির উৎকেন্দ্রিক কোণ (অর্থাৎ θ-র চারটি মান)

$\therefore$ সমীকরণ (3) থেকে $S_1 = \Sigma t_1$ $\qquad S_2 = \Sigma t_1t_2$

$S_3 = \Sigma t_1t_2t_3$ এবং $S_4 = t_1t_2t_3t_4$ দ্বারা সূচিত করে পাওয়া যায়।

$$S_2 = \sum t_1t_2 = \sum\tan\frac{\alpha_1}{2}\tan\frac{\alpha_2}{2} = 0$$

$$S_4 = t_1t_2t_3t_4 = \tan\frac{\alpha_1}{2}\tan\frac{\alpha_2}{2}\tan\frac{\alpha_3}{2}\tan\frac{\alpha_4}{2} = -1$$

এখন $\tan\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_3}{2}+\frac{\alpha_4}{2}\right) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2 + S_4}$

কিন্তু $1 - S_2 + S_4 = 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (2n+1)\pi}$$

অতএব একটি প্রদত্ত বিন্দু থেকে একটি উপবৃত্তের ওপর মোট চারটি অভিলম্ব অঙ্কন করা যায় এবং অভিলম্ব চারটির পাদবিন্দুগুলির উৎকেন্দ্রিক কোণের সমষ্টি π-এর বিযুগ্ম গুণিতক।

(c) পরাবৃত্ত ঃ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে একটি পরাবৃত্তের ওপর মোট চারটি অভিলম্ব অঙ্কন করা যায়।

মনে করুন পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ...... (1)

এবং (x_1, y_1) যে কোনও একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

$\therefore$ $(a \sec\theta, b\tan\theta)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে $\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2$ ...(2)

$\tan\frac{\theta}{2} = t$ ধরে পাওয়া যায়

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \frac{1+t^2}{1-t^2} \qquad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

$\therefore$ $\left(a\frac{1+t^2}{1-t^2}, b\frac{2t}{1-t^2}\right)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হল

$$ax\frac{1-t^2}{1+t^2} + by\frac{1-t^2}{2t} = a^2 + b^2$$

বা, $2a(t - t^3)x + b(1 - t^4)y = (a^2 + b^2)(t + t^3)$

কিন্তু এটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী

$$\therefore \quad 2a(t - t^3)x_1 + b(1 - t^4)y_1 - (a^2 + b^2)(t + t^3) = 0$$

বা, $by_1t^4 + 2(ax_1 + a^2 + b^2)t^3 - 2(ax_1 - a^2 - b^2)t - by_1 = 0$

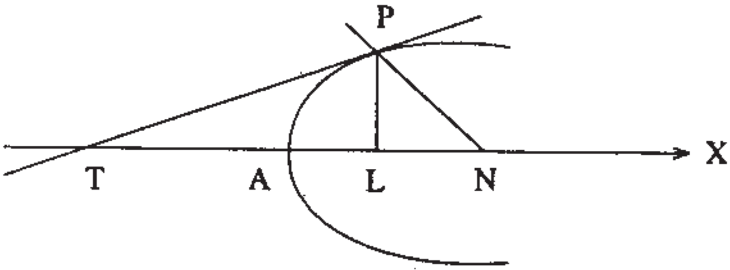
এটি t-এর ঘাতে একটি চতুর্ঘাত সমীকরণ। সুতরাং t-এর চারটি বীজ আছে।

অতএব (x_1, y_1) থেকে চারটি অভিলম্ব টানা সম্ভব।

কনিকের স্পর্শক ও অভিলম্ব সংক্রান্ত বিবিধ ধর্ম ঃ

4.18 উপস্পর্শক ও উপঅভিলম্ব

সংজ্ঞা ঃ যদি একটি কনিকের যে কোনও এক P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও অভিলম্ব কনিকের অক্ষটিকে যথাক্রমে T ও N বিন্দুতে ছেদ করে এবং P থেকে অক্ষটির ওপর PL লম্ব হয় তা হলে TL-কে উপস্পর্শক ও NL-কে উপঅভিলম্ব বলে।

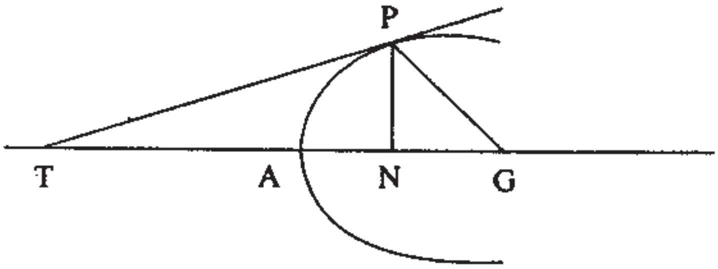


চিত্র 4.7

4.18.1 অধিবৃত্তের উপস্পর্শক সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

অধিবৃত্তের যে কোনও বিন্দুর উপস্পর্শক শীর্ষ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয় এবং অধিবৃত্তের যে কোনও বিন্দুর উপ-অভিলম্ব ধ্রুবক ও নাভিলম্বের অর্ধেক

প্রমাণ ঃ



চিত্র 4.8

মনে করুন P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$

$\therefore$ P বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হল, $y + tx = 2at + at^3$

এটি অক্ষকে ছেদ করে অর্থাৎ, $y = 0$

$\therefore$ G-এর স্থানাঙ্ক $(2a + at^2, 0)$

$\therefore$ উপ-অভিলম্ব $= NG = AG - AN = 2a + at^2 - at^2$

$= 2a =$ ধ্রুবক

আবার $P(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শক হবে $ty = x + at^2$

এটি অক্ষকে ছেদ করে

$\therefore\ y = 0 \qquad \therefore\ x = -at^2$

$\therefore\ AT = AN = at^2$

$\therefore$ উপ-অভিলম্ব = ধ্রুবক = $2a$ = নাভিলম্বের অর্ধেক এবং উপ-স্পর্শক শীর্ষবিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

4.19 মধ্যবিন্দু সাপেক্ষে জ্যা

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1)-এর সাপেক্ষে জ্যা-এর সমীকরণ ঃ

মনে করুন (x_1, y_1) বিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots\ldots (1)$$

$\therefore\ x = x_1 + r\cos\theta \qquad y = y_1 + r\sin\theta$

$\therefore\ x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে x, y-এর মান বসিয়ে

$$r^2 + 2r(x_1\cos\theta + y_1\sin\theta) + x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

যেহেতু (1) হল কনিকটির একটি জ্যা রেখা, সুতরাং এটি কনিকটিকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে। সুতর (2) r-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার বীজ r_1, r_2.

(x_1, y_1) জ্যা-এর মধ্যবিন্দু হবে যদি $r_1 + r_2 = 0$

$\therefore\ x_1\cos\theta + y_1\sin\theta = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

(1) এবং (3) থেকে θ অপনয়ন করে পাওয়া যায়

$$x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0$$

বা, $\boxed{xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2}$

এটি সংকেত চিহ্নে $T = S_1$

যেখানে $T = xx_1 + yy_1 - a^2, \quad S_1 = x_1^2 + y_1^2 - a^2$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যদি বৃত্তটির

সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ হয় তাহলে মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) সাপেক্ষে জ্যা-এর সমীকরণ $T = S_1$ যেখানে $T = xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$

$$S_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়

(i) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু হলে জ্যা রেখাটির সমীকরণ হবে

$$\boxed{yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1}$$

সংকেত চিহ্নে $T = S_1$ যেখানে $T = yy_1 - 2a(x + x_1)$

এবং $S_1 = y_1^2 - 4ax_1$

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু হলে জ্যা রেখাটির সমীকরণ হবে

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}$$

সংকেত চিহ্নে $T = S_1$

যেখানে $T = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1$, $\quad S_1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$

(iii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) একটি জ্যা-এর মধ্য বিন্দু হলে জ্যা রেখাটির সমীকরণ হবে

সংকেত চিহ্নে $T = S_1$ $\qquad T = \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1$

$$S_1 = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

4.20 ব্যাসের সংজ্ঞা

সংজ্ঞা ঃ একটি কনিকের একটি সমান্তরাল জ্যা সমষ্টির মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথকে কনিকটির একটি ব্যাস বলা হয়। এটি সর্বদাই একটি সরলরেখা হয়ে থাকে।

অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা সমষ্টির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা এবং অধিবৃত্তের অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল।

মনে করুন অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$

মনে করুন অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা সমষ্টি $y = mx + c$ সরলরেখার সঙ্গে সমান্তরাল।

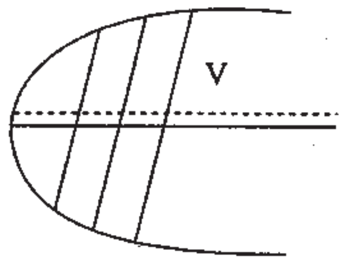
মনে করুন $V(x_1, y_1)$ যে কোনও একটি জ্যা-এর মধ্য বিন্দু।

$\therefore$ জ্যাটির সমীকরণ হল $yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$

যেহেতু এটি $y = mx + c$ সরলরেখার সঙ্গে সমান্তরাল।

$$\therefore \quad m = \frac{2a}{y_1}$$

বা, $$y_1 = \frac{2a}{m}$$



চিত্র 4.9

$\therefore$ $V(x_1, y_1)$-এর সঞ্চারপথ $y = \dfrac{2a}{m}$

যা একটি সরলরেখা এবং $y = 0$, অধিবৃত্তের অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল।

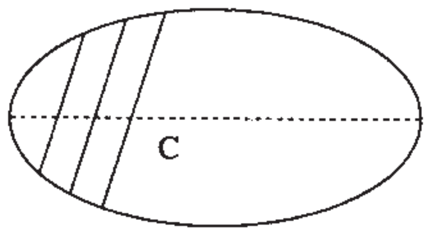
এই সঞ্চারপথকে অধিবৃত্তের ব্যাস বলে। (সমান্তরাল জ্যা-গুলির সাপেক্ষে)

4.20.1 উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা সমষ্টির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী সরলরেখা ঃ

মনে করুন উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ এবং জ্যা সমষ্টি $y = mx + c$ সরলরেখার সঙ্গে সমান্তরাল।

মনে করুন (x_1, y_1) ঐ জ্যা-গুলির একটির মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ ঐ জ্যা-টির সমীকরণ $\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2}$



চিত্র 4.10

যেহেতু এটি $y = mx + c$-এর সঙ্গে সমান্তরাল

$$\therefore \quad m = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$$

বা, $$y_1 = -\frac{b^2}{a^2 m}x_1$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-এর সঞ্চারপথ হল $y = -\dfrac{b^2}{a^2 m}x$

যা উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা। ঐ সরলরেখাটিকে সমান্তরাল জ্যা-গুলির সাপেক্ষে উপবৃত্তের ব্যাস বলে।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে পরাবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা সমষ্টির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ পরাবৃত্তের কেন্দ্রগামী সরলরেখা এবং এটিকে সমান্তরাল জ্যা সমষ্টির সাপেক্ষে পরাবৃত্তের ব্যাস বলে।

4.21 অনুবন্ধী ব্যাসের সংজ্ঞা

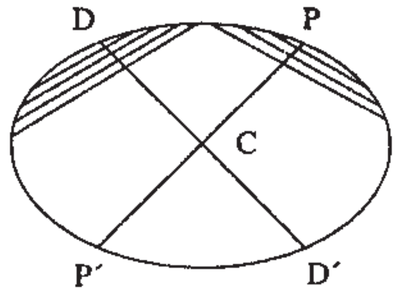
সংজ্ঞা ঃ একটি কনিকে দুটি ব্যাস যদি একে অপরের সমান্তরাল জ্যা সমূহের দ্বিখণ্ডক হয় তবে ব্যাস দুটিকে (পরস্পরের) অনুবন্ধী ব্যাস বলে।

মনে করুন $y = mx$ এবং $y = m'x$ সরলরেখা দুটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের সাপেক্ষে অনুবন্ধী ব্যাস।

$\therefore$ যে ব্যাস $y = mx$ এর সমান্তরাল জ্যা সমষ্টিকে দ্বিখণ্ডিত করে তার সমীকরণ $y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$

যদি এটি $y = m'x$ তাহলে $m' = -\frac{b^2}{a^2 m}$

সুতরাং $\boxed{mm' = -\frac{b^2}{a^2}}$



চিত্র 4.11

অতএব, $y = mx$ এবং $y = m'x$ সরলরেখা দুটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের একজোড়া অনুবন্ধী ব্যাস হবে যদি $\boxed{mm' = -\frac{b^2}{a^2}}$

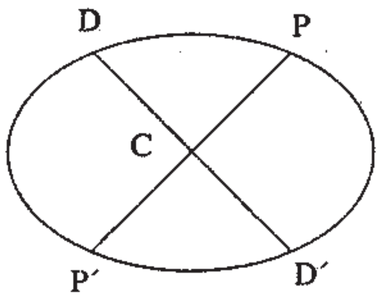
অনুরূপভাবে $y = mx$ এবং $y = m'x$ সরলরেখা দুটি $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের একজোড়া অনুবন্ধী ব্যাস হবে যদি $mm' = \frac{b^2}{a^2}$

4.21.1 উপবৃত্তের অনুবন্ধী ব্যাসের ধর্ম

একটি উপবৃত্তের দুটি অর্ধ অনুবন্ধী ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের উৎকেন্দ্রিক কোণদ্বয়ের বিয়োগফল সর্বদা $\frac{\pi}{2}$ এর অযুগ্ম গুণিতক অথবা যদি একটি উপবৃত্তের দুটি অর্ধ অনুবন্ধী ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের উৎকেন্দ্রিক কোণ θ ও ϕ হয় তবে $|\theta - \phi| = (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

প্রমাণ ঃ মনে করুন CP এবং CD দুটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের দুটি অর্ধ অনুবন্ধী ব্যাস, P এবং D ব্যাস দুটির প্রান্ত বিন্দু এবং C উপবৃত্তের কেন্দ্র।

মনে করুন P এবং D বিন্দু দুটির উৎকেন্দ্রিক কোণ যথাক্রমে θ এবং ϕ সুতরাং P এবং D এর স্থানাঙ্ক হবে $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ এবং $(a\cos\phi, b\sin\phi)$



চিত্র 4.12

$\therefore$ CP-এর নতি $= \dfrac{b\sin\theta}{a\cos\theta} = \dfrac{b}{a}\tan\theta$

CD-এর নতি $= \dfrac{b\sin\phi}{a\cos\phi} = \dfrac{b}{a}\tan\phi$

যেহেতু CP এবং CD অর্ধঅনুবন্ধী ব্যাস

$$\therefore \quad \frac{b}{a}\tan\theta \cdot \frac{b}{a}\tan\phi = -\frac{b^2}{a^2} \quad \left(\therefore \quad mm' = -\frac{b^2}{a^2}\right)$$

বা, $\tan\theta\tan\phi = -1$

বা, $\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi = 0$

বা, $\cos(\theta \sim \phi) = 0$

বা, $\theta \sim \phi = \dfrac{\pi}{2}$

এবং $(\theta \sim \phi)$ হবে $\dfrac{\pi}{2}$-এর অযুগ্ম গুণিতক $\left[\theta \sim \phi = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ P-এর স্থানাঙ্ক $(a\cos\theta, b\sin\theta)$

$\therefore$ D-এর স্থানাঙ্ক হবে $\{a\cos(90^\circ + \theta), b\sin(90^\circ + \theta)$

$= (-a\sin\theta, b\cos\theta)$

সুতরাং P′-এর স্থানাঙ্ক $\{a\cos(\theta + 180^\circ), \ b\sin(\theta + 180^\circ)$

$= (-a\cos\theta, -b\sin\theta)$

D′ হবে $\{a\cos(\theta + 270^\circ), \ b\sin(\theta + 270^\circ)$

$= (a\sin\theta, -b\cos\theta)$

অতএব উপবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) হলে

(i) $\dfrac{x_1x_2}{a^2} + \dfrac{y_1y_2}{b^2} = 0$

(ii) $x_1y_2 - x_2y_1 = \pm ab$

(b) একটি উপবৃত্তের দুটি অর্ধ অনুবন্ধী ব্যাসের দৈর্ঘ্যের বর্গের যোগফল ধ্রুবক।

মনে করুন $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের CP এবং CD দুটি অর্ধঅনুবন্ধী ব্যাস।

$\therefore$ P যদি $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ হয় তাহলে D হবে $(-a \sin \theta, b \cos \theta)$

$\therefore$ $CP^2 + CD^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta$

$= a^2 + b^2 =$ ধ্রুবক।

$\therefore$ $\boxed{CP^2 + CD^2 = \text{ধ্রুবক}}$

(c) একটি উপবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুগুলিতে স্পর্শক গুলি একটি সামান্তরিক গঠন করে যার ক্ষেত্রফল ধ্রুবক।

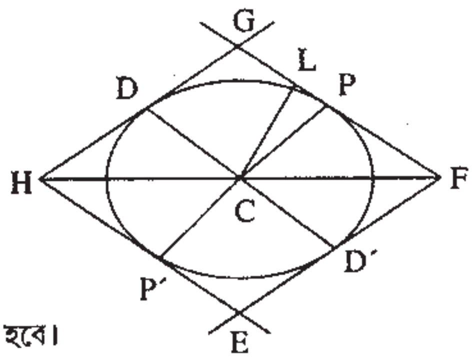
মনে করুন PCP′ এবং DCD′, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এই উপবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী ব্যাস।

P বিন্দুটি $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ হলে P′ হবে $(-a \cos \theta, -b \sin \theta)$

$\therefore$ ঐ দুটি বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \quad \ldots\ldots (1)$$

এবং $$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = -1 \quad \ldots\ldots (2)$$



চিত্র 4.13

অতএব (1) এবং (2) সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে D এবং D′ বিন্দুতে স্পর্শক দুটি সমান্তরাল হবে।

$\therefore$ P, D, P′ এবং D′ বিন্দুতে স্পর্শকগুলি সামান্তরিক গঠন করে।

মনে করুন C বিন্দু থেকে P বিন্দুতে স্পর্শকের ওপর CL লম্ব টানা হল।

$$\therefore \quad CL = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{ab}{CD}$$

যেহেতু D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-a \sin \theta, b \cos \theta)$

$\therefore$ EFGH সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ সামান্তরিক CPGD

$= 4 \times CD \times CL = 4ab$

$=$ ধ্রুবক।

4.21.2 পরাবৃত্তের অনুবন্ধী ব্যাসের ধর্ম ঃ

(a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী ব্যাসের একটি পরাবৃত্তকে P, P′ এবং অপরটি অনুবন্ধী পরাবৃত্তকে D, D′ বিন্দুতে ছেদ করলে, $CP^2 - CD^2 = a^2 - b^2$

মনে করুন $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের ওপর $P(a \sec\theta, b\tan\theta)$ যার কেন্দ্র C(0, 0)

∴ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $(a\tan\theta, b\sec\theta)$

∴ $CP^2 = a^2\sec^2\theta + b^2\tan^2\theta$

∴ $CD^2 = a^2\tan^2\theta + b^2\sec^2\theta$

$$\therefore \quad CP^2 - CD^2 = a^2(\sec^2\theta - \tan^2\theta) - b^2(\sec^2\theta - \tan^2\theta)$$
$$= a^2 - b^2$$

(b) একটি পরাবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী ব্যাসের প্রান্তবিন্দুগুলিতে স্পর্শকগুলি একটি সামান্তরিক গঠন করে যার ক্ষেত্রফল ধ্রুবক।

মনে করুন $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের PCP′ এবং DCD′ দুটি অনুবন্ধী ব্যাস। যদি $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$ হয় তাহলে P′ হবে $(-a\sec\theta, -b\tan\theta)$

ঐ দুটি বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1 \quad \ldots\ldots (1) \quad \text{এবং} \quad \frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = -1 \quad \ldots\ldots(2)$$

∴ (1) এবং (2) সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে D এবং D′ বিন্দুতে স্পর্শকগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

(d) কোনও উপবৃত্তের নাভিদ্বয় S এবং S′, CP এবং CD দুটি অর্ধঅনুবন্ধী ব্যাস হলে $PS.PS' = CD^2$ P-এর স্থানাঙ্ক যদি $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ হয় তাহলে D এর স্থানাঙ্ক হবে $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ যেহেতু S এবং S′ নাভি

∴ S হবে (ae, 0) এবং S′(– ae, 0)

$$PS = \sqrt{(a\cos\theta - ae)^2 + b^2\sin^2\theta} = a - ae\cos\theta$$

$$PS' = \sqrt{(a\cos\theta + ae)^2 + b^2\sin^2\theta} = a + ae\cos\theta$$

$\boxed{\text{যেহেতু } b^2 = a^2(1 - e^2)}$

$$\therefore \quad PS \,.\, PS' = a^2 - a^2e^2\cos^2\theta = a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta$$
$$= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta = CD^2$$

$$\therefore \boxed{PS \,.\, PS' = CD^2}$$

4.21.3 উপবৃত্তের সম-অনুবন্ধী ব্যাস

একটি উপবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী ব্যাস দৈর্ঘ্যে সমান হলে, ঐ ব্যাস দুটিকে উপবৃত্তের সম-অনুবন্ধী ব্যাস বলে। সুতরাং দুটি সম-অনুবন্ধী ব্যাসের দুটি প্রান্তবিন্দু $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ এবং $D(-a \sin \theta, b \cos \theta)$ হয় তবে $CP = CD$ অর্থাৎ $CP^2 = CD^2$

$$\therefore \quad a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta$$

বা, $(a^2 - b^2)cso^2 \theta = (a^2 - b^2)\sin^2 \theta$

বা, $\tan^2 \theta = 1$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4} \qquad \text{বা,} \quad \frac{3\pi}{4}$$

$\therefore$ যুগ্ম সম-অনুবন্ধী ব্যাসের সমীকরণ $y = \pm \frac{b}{a} x$ থেকে বোঝা যায় যে সম-অনুবন্ধী ব্যাস দুটি x-অক্ষের সাথে সমান কোণে নত কিন্তু চিহ্নে বিপরীত।

সুতরাং P এবং D-এর উৎকেন্দ্রিক কোণ যথাক্রমে $\frac{\pi}{4}$ এবং $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. অতএব P এবং D এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ এবং $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ এবং সম অনুবন্ধী ব্যাসের দৈর্ঘ্য হবে

$$2\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}} = \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$$

$\therefore$ P, D, P′ এবং D′ বিন্দুতে স্পর্শকগুলি একটি সামান্তরিক গঠন করে।

যদি কেন্দ্র C থেকে P বিন্দুতে স্পর্শকের ওপর P লম্ব দূরত্ব হয় তাহলে

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} \sec^2 \theta + \frac{1}{b^2} \tan^2 \theta}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \tan^2 \theta + b^2 \sec^2 \theta}}$$

$= \frac{ab}{CD}$ যেহেতু D হয় $(a \tan \theta, b \sec \theta)$

$\therefore$ নির্ণেয় সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= 4\ CD\ .\ p = 4ab =$ ধ্রুবক।

(c) কোনো পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় S এবং S′, CP এবং CD অর্ধঅনুবন্ধী ব্যাস যুগ্ম হলে, $PS\ .\ PS' = CD^2$ যেখানে C পরাবৃত্তের কেন্দ্র।

মনে করুন $P(a \sec \theta, b \tan \theta)$ পরাবৃত্তের ওপর একটি বিন্দু এবং কেন্দ্র $C(0, 0)$

$\therefore$ D হবে $(a \tan\theta, b \sec\theta)$

S এবং S′ যথাক্রমে $(ae, 0)(-ae, 0)$

$$\therefore\ PS = \sqrt{(a\sec\theta - ae)^2 + b^2\tan^2\theta}$$

$$= ae\sec\theta - a$$

এবং $$PS' = \sqrt{(a\sec\theta + ae)^2 + b^2\tan^2\theta}$$

$$= ae\sec\theta + a \quad \text{যেহেতু } b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

অতএব $$PS\,.\,PS' = a^2e^2\sec^2\theta - a^2$$

$$= (a^2 + b^2)\sec^2\theta - a^2$$

$$= a^2\tan^2\theta + b^2\sec^2\theta$$

$$= CD^2$$

4.22 উদাহরণ, অনুশীলনী, সংকেত

উদাহরণ :

1. এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার কেন্দ্র $(-3, 4)$ এবং যা $3x + 8y = 6$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে।

কেন্দ্র থেকে $3x + 8y = 6$ সরলরেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ হবে, কারণ প্রদত্ত সরলরেখাটি নির্ণেয় বৃত্তের স্পর্শক।

$$\therefore\ \text{এই দৈর্ঘ্য} = \frac{-3.3 + 8.4 - 6}{\sqrt{3^2 + 8^2}} = \frac{17}{\sqrt{73}} = \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ।}$$

নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $(-3, 4)$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ হল

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{17}{\sqrt{73}}\right)^2$$

অর্থাৎ $\boxed{73x^2 + 73y^2 + 438x - 584y + 1536 = 0}$

2. একটি বৃত্ত $(1, 5)$ বিন্দুগামী এবং $2x - 3y = 5$ সরলরেখাকে $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

$\therefore$ মনে করুন, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যেহেতু বৃত্তটি $(1, 5)$ বিন্দুগামী।

অতএব $1^2 + 5^2 + 2g \,.\, 1 + 2f.\, 5 + c = 0$

বা, $2g + 10f + 26 + c = 0 \quad \ldots\ldots (1)$

আবার $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$x.1 + y.(-1) + g(x + 1) + f(y - 1) + c = 0$$

$$[\because \quad xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0]$$

বা, $(g + 1)x + (f - 1)y + (g - f + c) = 0$

এটি $2x - 3y - 5 = 0$ সরলরেখাটির সঙ্গে অভিন্ন।

$$\therefore \quad \frac{g+1}{2} = \frac{f-1}{3} = \frac{g-f+c}{-5}$$

সুতরাং, $3g + 2f + 1 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$

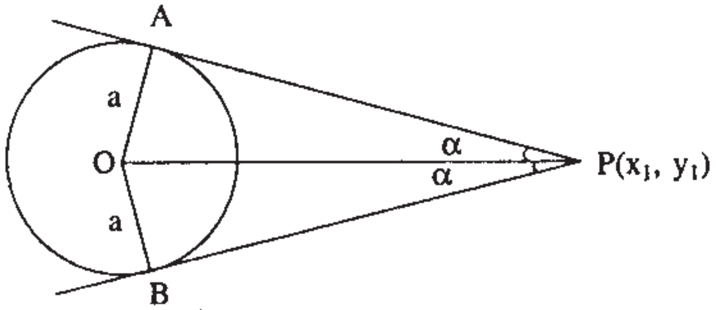
$7g - 2f + 2c + 5 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

(1), (2) এবং (3) থেকে সমাধান করে পাওয়া যায়

$$g = 1, \;\; f = -2, \;\; c = -8$$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ হল $\boxed{x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0}$

3. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শকের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।



চিত্র 4.14

মনে করুন $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু $P(x_1, y_1)$ থেকে PA এবং PB স্পর্শক টানা হয়েছে যাদের মধ্যবর্তী কোণ 2α।

$$\therefore \quad \angle APO = \angle BPO = \alpha$$

$$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{a}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$\therefore \quad \alpha = \sin^{-1} \dfrac{a}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

$$\boxed{2\alpha = 2\sin^{-1} \dfrac{a}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}}$$

4. $y^2 = 12x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক x-অক্ষের সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন।

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

যে সরলরেখা x-অক্ষের সঙ্গে 60° কোণে নত তার সমীকরণ

$y = \sqrt{3}x + c \quad$ (c = একটি ধ্রুবক)

এটি $y^2 = 12x = 4.3x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হলে

$c = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \qquad \left(c = \dfrac{a}{m}\right)$

সুতরাং নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হল $y = \sqrt{3}(x+1)$

5. $x \cos\theta + y \sin\theta = p$ সরলরেখাটি যে শর্তে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হবে তা নির্ণয় করুন।

সরলরেখা ও অধিবৃত্তের সমীকরণ দুটি সমাধান করলে যদি দুটি ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক একই হয় তাহলে সরলরেখাটি অধিবৃত্তের স্পর্শক হবে।

প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ থেকে $x = -y\tan\theta + p\sec\theta$

$\therefore$ এটি $y^2 = 4ax$ সমীকরণে বসিয়ে পাই

$y^2 = 4a(-y\tan\theta + p\sec\theta)$

অর্থাৎ $y^2 + 4ay\tan\theta - 4ap\sec\theta = 0$ এই সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হলে সরলরেখাটি অধিবৃত্তের স্পর্শক হবে অর্থাৎ নির্ণেয় শর্ত হল

$\therefore \quad 16a^2\tan^2\theta + 16ap\sec\theta = 0$

বা, $\boxed{a\tan^2\theta + p\sec\theta = 0}$

6. প্রমাণ করুন যে অধিবৃত্তের স্পর্শকের ওপর নাভি থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ হবে অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক।

মনে করুন অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ ......(1) $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হল

$y \cdot 2at = 2a(x + at^2)$

$x - ty + at^2 = 0 \quad \ldots\ldots \; (2)$

এর সঙ্গে লম্ব নাভি (a, 0) বিন্দুগামী সরলরেখাটি হল

$$t(x - a) + y = 0$$

বা, $tx + y - at = 0$

বা, $t^2x + yt - at^2 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

$\therefore$ (2) ও (3) থেকে পাওয়া যায় $(1 + t^2)x = 0$

বা, $x = 0$

এটি নির্ণেয় সঞ্চারপথ এবং এটি হল শীর্ষ বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক।

7. দেখান যে, $\ell x + my + n = 0$ সরলরেখার $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত হল $a^2\ell^2 + b^2m^2 = n^2$

উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

$\therefore \quad \ell x + my + n = 0 \qquad \ldots\ldots(2)$

বা, $y = -\frac{\ell x + n}{m}$

(1) থেকে y-এর মান বসিয়ে

$$\frac{\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{\ell x + n}{m}\right)^2}{b^2} = 1$$

বা, $b^2m^2x^2 + a^2(\ell x + n)^2 = a^2b^2m^2$

বা, $\left(b^2m^2 + a^2\ell^2\right)x^2 + 2\ell na^2x + n^2a^2 - a^2b^2m^2 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

এখন সরলরেখা (1) উপবৃত্ত (2)-এর স্পর্শক হবে (3) সমীকরণের যদি বীজ দুটি সমান হয়

অর্থাৎ যদি $4\ell^2n^2a^4 - 4(b^2m^2 + a^2\ell^2)(a^2n^2 - a^2b^2m^2) = 0$

বা, $m^2a^2b^2\left(n^2 - b^2m^2 - a^2\ell^2\right) = 0$

বা, $n^2 - \left(a^2\ell^2 + b^2m^2\right) = 0$

$\therefore \quad \boxed{n^2 = a^2\ell^2 + b^2m^2}$

8. দেখান যে উপবৃত্তের স্পর্শকের ওপর একটি নাভি থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ হবে উপবৃত্তটির সহায়ক বৃত্ত।

মনে করুন উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ...... (1)

এটির একটি নাভি $(-ae, 0)=\left(-\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$

$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1 \quad ......\ (2)$$

এখন $(-ae, 0)$ বিন্দুগামী এবং (2)এর সঙ্গে লম্ব সরলরেখার সমীকরণ হল

$$(x+ae)\frac{\sin\theta}{b}-\frac{y\cos\theta}{a}=0$$

বা, $ax\sin\theta-by\cos\theta=-a^2e\sin\theta$ ...... (3)

(2) থেকে $bx\cos\theta+ay\sin\theta=ab$ ...... (4)

(3) এবং (4) থেকে বর্গ এবং যোগ করে পাওয়া যায়

$$(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)(x^2+y^2)=a^2b^2+a^4e^2\sin^2\theta$$

$$=a^2(b^2+a^2e^2\sin^2\theta)$$

$$=a^2[b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta]$$

$$=a^2[b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta]$$

$$\therefore \boxed{x^2+y^2=a^2}$$

এটি নির্ণেয় সঞ্চার পথ এবং এটি উপবৃত্তটির সহায়ক বৃত্ত।

9. (2, 7) বিন্দু থেকে $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{7}=1$ পরাবৃত্তের যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন। স্পর্শক দুটির মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ কত?

আপনারা জানেন যে (x_1, y_1) বিন্দু থেকে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ $SS_1=T^2$

$$\therefore \quad \left(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{7}-1\right)\left(\frac{4}{4}-\frac{49}{7}-1\right)=\left(\frac{2x}{4}-\frac{7y}{7}-1\right)^2$$

বা, $\dfrac{-7(7x^2-4y^2-28)}{28} = \left(\dfrac{x}{2}-y-1\right)^2$

বা, $(x-2y-2)^2 + 7x^2 - 4y^2 - 28 = 0$

বা, $8x^2 - 4xy - 4(x-2y) - 24 = 0$

বা, $\boxed{2x^2 - xy - x + 2y - 6 = 0}$

স্পর্শক দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}}$$

10. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ এবং $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শকগুলির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পরাবৃত্ত দুটির সমীকরণ হল

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\ldots\ldots\; (1) \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \;\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

মনে করুন $y = mx + c$ পরাবৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শক।

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে পরাবৃত্ত (1)-এর স্পর্শকের সমীকরণ হল

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$y = mx + c \quad \ldots\ldots (4)$$

এখন (3) এবং (4) অভিন্ন হবে যদি

$$\frac{\frac{x_1}{a}}{am} = \frac{\frac{y_1}{b}}{b} = \frac{-1}{c}$$

বা, $\dfrac{\frac{x_1^2}{a^2}}{a^2m^2} = \dfrac{\frac{y_1^2}{b^2}}{b^2} = \dfrac{1}{c^2}$

বা, $a^2m^2 - b^2 = c^2 \quad \ldots\ldots (5)$

আবার (x_1, y_1) বিন্দুতে (2)-এর স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} - 1 = 0$$

এটি (4)-এর সঙ্গে অভিন্ন হবে যদি

$$\frac{\frac{y_1}{a}}{a} = \frac{\frac{x_1}{b}}{bm} = \frac{1}{c}$$

বা, $$\frac{\frac{y_1^2}{a^2}}{a^2} = \frac{\frac{x_1^2}{b^2}}{b^2m^2} = \frac{1}{c^2}$$

বা, $a^2 - b^2m^2 = c^2 \quad \ldots\ldots (6)$

(5) ও (6) থেকে পাওয়া যায়

$$a^2m^2 - b^2 = a^2 - b^2m^2$$

বা, $(a^2 + b^2)m^2 = a^2 + b^2$

বা, $m^2 = 1 \qquad \therefore \quad m = \pm 1$

$\therefore c^2 = a^2 - b^2$

বা, $c = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$

$\therefore$ মোট চারটি স্পর্শক আছে। এবং এগুলির সমীকরণ হল

$y = x \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ এবং $y = -x \pm \sqrt{a^2 - b^2}$

11. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ $\left(at_1^2, 2at_1\right)$ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব অধিবৃত্তের $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ করুন $t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $\left(at_1^2, 2at_1\right)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y + t_1x = 2at_1 + at_1^3 \quad \ldots\ldots (1)$$

যেহেতু অভিলম্বটি $\left(at_2^2, 2at_2\right)$ বিন্দুগামী

$\therefore \quad 2at_2 + at_1t_2^2 = 2at_1 + at_1^3$

বা, $at_1(t_1^2 - t_2^2) + 2a(t_1 - t_2) = 0$

বা, $(t_1 - t_2)[(t_1 + t_2)t_1 + 2] = 0$

$\because \quad t_1 - t_2 \neq 0$

$\therefore \quad t_1^2 + t_1t_2 + 2 = 0$

বা, $\boxed{t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}}$

12. একটি উপবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব উপাক্ষ অক্ষের প্রান্তবিন্দুগামী হলে প্রমাণ করুন $e^4 + e^2 - 1 = 0.$ (e = উৎকেন্দ্রতা)

মনে করুন উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ...... (1)

নাভিলম্বের একটি প্রান্তবিন্দু $\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$

$\therefore$ $\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$ বিন্দুতে উপবৃত্ত (1)-এর অভিলম্বের সমীকরণ

$$\frac{x - ae}{\frac{ae}{a^2}} = \frac{y - \frac{b}{a}}{\frac{\frac{b^2}{a}}{b^2}}$$

বা, $$\frac{x - ae}{\frac{e}{a}} = \frac{y - \frac{b^2}{a}}{\frac{1}{a}} \quad \text{...... (2)}$$

যেহেতু এটি $(0, -b)$ বিন্দুগামী

$$\therefore \quad \frac{-ae}{\frac{e}{a}} = \frac{-b - \frac{b^2}{a}}{\frac{1}{a}}$$

বা, $a^2 = ab + b^2$

বা, $a^2 - b^2 = ab$

বা, $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{b}{a}$

বা, $e^2 = \sqrt{1 - e^2}$

বা, $e^4 = 1 - e^2$

বা, $\boxed{e^4 + e^2 - 1 = 0}$

13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের অভিলম্বের ওপর কেন্দ্র থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

মনে করুন পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (1)

পরাবৃত্ত (1)-এর $(a \sec \theta, b \tan \theta)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$ax \cos \theta + by \cot \theta = a^2 + b^2 \quad \text{......} \ (2)$$

যে সরলরেখা (2)-এর ওপর লম্ব

$$b \cot \theta \, . \, x - a \cos \theta y + k = 0$$

এটি কেন্দ্র (0, 0) গামী $\therefore \quad k = 0$

বা, $b \cot \theta \, . \, x - a \cos \theta \, . \, y = 0$

বা, $\sin \theta = \frac{bx}{ay}$

$\therefore \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^2y^2}}$ এবং $\cot \theta = \frac{\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2}}{bx}$

$\therefore$ (2) থেকে $\cos \theta$ এবং $\cot \theta$-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2}\left(\frac{ax}{ay} + \frac{by}{bx}\right) = a^2 + b^2$$

বা, $\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)} = \left(a^2 + b^2\right)xy$

উভয়পক্ষের বর্গ করে পাওয়া যায়,

$$\boxed{(a^2y^2 - b^2x^2)(x^2 + y^2) = (a^2 + b^2)^2 x^2y^2}$$

এটি নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

14. কী শর্তে $(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)$ বিন্দুগুলিতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের অভিলম্বগুলি সমবিন্দুগামী হবে।

মনে করুন অভিলম্ব তিনটি (α, β) বিন্দুতে মিলিত হয়। (x_1, y_1) বিন্দুতে উপবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ

$$\frac{a^2}{x_1}x-\frac{b^2}{y_1}y=a^2-b^2$$

যেহেতু এটি (α, β) বিন্দুগামী

$$\therefore \quad \frac{a^2}{x_1}\alpha-\frac{b^2}{y_1}\beta=a^2-b^2$$

বা, $a^2y_1\alpha-b^2x_1\beta=(a^2-b^2)x_1y_1 \quad \ldots\ldots (1)$

অনুরূপভাবে $(x_2, y_2)(x_3, y_3)$ বিন্দুগুলির জন্য

$$a^2y_2\alpha-b^2x_2\beta=(a^2-b^2)x_2y_2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$a^2y_3\alpha-b^2x_3\beta=(a^2-b^2)x_3y_3 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

(1), (2), (3) থেকে α, β অপনয়ন করে পাওয়া যায়

$$\begin{vmatrix} a^2y_1 & -b^2x_1 & (a^2-b^2)x_1y_1 \\ a^2y_2 & -b^2x_2 & (a^2-b^2)x_2y_2 \\ a^2y_3 & -b^2x_3 & (a^2-b^2)x_3y_3 \end{vmatrix}=0$$

বা, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 \end{vmatrix}=0$ এটি নির্ণেয় শর্ত।

15. $3x^2+4y^2=12$ উপবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে যা প্রথম পাদে অবস্থিত সেই অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

$$\therefore \quad a^2=4 \qquad b^2=3$$

$$e^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \qquad \therefore \quad e=\frac{1}{2}$$

প্রথম পাদে নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(ae, \frac{b^2}{a}\right)$

$$= \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

$\therefore$ $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ বিন্দুতে প্রদত্ত উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$3.x.1 + 4.y.\frac{3}{2} = 12$$

বা, $x + 2y = 4 \quad \ldots\ldots \quad (1)$

$\left(1, \frac{3}{2}\right)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীরণ

$$y - \frac{3}{2} = m(x - 1) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

(2) সরলরেখা যদি (1)-এর সঙ্গে লম্ব হয় তাহলে

$$m\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \qquad \therefore \quad m = 2$$

নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ

$$y - \frac{3}{2} = 2(x - 1)$$

বা, $\boxed{4x - 2y = 1}$

16. $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তের জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় করুন, যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।
যে জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার সমীকরণ

$$x \,.\, (-2) + y \,.\, 3 = (-2)^2 + (3)^2 \qquad [T = S_1]$$

বা, $-2x + 3y = 13$

বা, $\boxed{2x - 3y + 13 = 0}$

17. $2x^2 + 3y^2 = 24$ উপবৃত্তের অর্ধঅনুবন্ধী ব্যাসদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করুন যেখানে ব্যাসদ্বয় পরস্পর $\tan^{-1} 7$ কোণে নত।

প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ হল $2x^2 + 3y^2 = 24$

বা, $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad \ldots\ldots (1)$

মনে করুন $y = m_1x_1$ এবং $y = m_2x$ প্রদত্ত উপবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী ব্যাস।

$$\therefore \quad m_1m_2 = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\therefore \quad \text{প্রশ্নানুযায়ী} \quad \tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \tan^{-1} 7$$

বা, $\quad m_1 - m_2 = 7(1 + m_1m_2)$

বা, $\quad m_1 - m_2 = 7\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3} \qquad \ldots\ldots (3)$

(2) এবং (3) সমাধান করে পাওয়া যায় $m_1 = \frac{1}{3}$ অথবা 2 এবং $m_2 = -2$ অথবা $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুবন্ধী ব্যাসদ্বয় হল

$$y = 2x, \ \ y = -\frac{1}{3}x \ \ \text{এবং} \ \ y = -2x, \ \ y = \frac{1}{3}x$$

18. যদি $2x^2 + 3y^2 = 24$ উপবৃত্তের অনুবন্ধী ব্যাসদ্বয়ের দুই প্রান্ত P এবং D হয়, তাহলে P এবং D বিন্দুতে স্পর্শক দুটির ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ $2x^2 + 3y^2 = 24$

বা, $\quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1 \qquad \ldots\ldots (1)$

যদি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(2\sqrt{3}\ \cos\theta,\ 2\sqrt{2}\sin\theta\right)$ হয় তাহলে D-এর স্থানাঙ্ক হবে $\left(-2\sqrt{3}\sin\theta,\ 2\sqrt{2}\cos\theta\right)$ যেহেতু P এবং D উপবৃত্তের (1)-এর অনুবন্ধী ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।

$\therefore$ P এবং D বিন্দুতে (1) উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{x\cos\theta}{2\sqrt{3}} + \frac{y\sin\theta}{2\sqrt{2}} = 1 \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

এবং $\quad \frac{x\sin\theta}{-2\sqrt{3}} + \frac{y\cos\theta}{2\sqrt{2}} = 1 \qquad \ldots\ldots \quad (3)$

(2) এবং (3) থেকে বর্গ এবং যোগ করে পাই

$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ যা একটি উপবৃত্ত।

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথ হবে, $\boxed{\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1}$

19. $16x^2 - 9y^2 = 144$ পরাবৃত্তের $x = 2y$ ব্যাসের অনুবন্ধী ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

প্রদত্ত পরাবৃত্ত সমীকরণকে প্রচলিত আকারে প্রকাশ করলে পাওয়া যায় $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

মনে করি $y = mx$ নির্ণয় ব্যাস।

$\therefore$ এটি $x = 2y$-এর অনুবন্ধী।

বা, $y = \frac{1}{2}x$

$\therefore \quad m \cdot \frac{1}{2} = \frac{16}{9} \qquad \left(mm' = \frac{b^2}{a^2}\right)$

$\therefore \quad m = \frac{32}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুবন্ধী ব্যাস হবে

$$\boxed{32x = 9y}$$

20. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের কেন্দ্র C, CP ও CQ ঐ পরাবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী অর্ধব্যাস। P বিন্দুতে অভিলম্ব CQ রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করলে দেখান যে P বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থানে R বিন্দুর সঞ্চারপথ হবে $(x^2 + y^2)^2(a^2y^2 - b^2x^2) = (a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2)$.

প্রদত্ত পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$

মনে করুন $P = (a \sec\theta, b \tan\theta)$

$\therefore$ P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\frac{x \sec\theta}{a} - \frac{y \tan\theta}{b} = 1$$

বা, $bx \sec\theta - ay \tan\theta = ab$

$\therefore$ P বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে

$$a(x - a \sec\theta)\tan\theta + b(y - b\tan\theta)\sec\theta = 0$$

বা, $ax \tan\theta + by \sec\theta = (a^2 + b^2)\sec\theta\tan\theta \quad \ldots \quad (2)$

আবার CQ সরলরেখার সমীকরণ হল (P বিন্দুতে স্পর্শকের সঙ্গে সমান্তরাল)

$$bx \sec\theta - ay \tan\theta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

(2) এবং (3) থেকে 'θ' অপনয়ন করে পাওয়া যাবে

$$\frac{\sec\theta}{ay} = \frac{\tan\theta}{bx} = \frac{1}{\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

∴ (3) এবং (4) থেকে পাই

$$\frac{ab\left(x^2 + y^2\right)}{\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2}} = \left(a^2 + b^2\right)\frac{abxy}{a^2y^2 - b^2x^2}$$

অথবা, $\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2} = \left(a^2 + b^2\right)xy$

অথবা, $\boxed{\left(x^2 + y^2\right)^2\left(a^2y^2 - b^2x^2\right) = \left(a^2 + b^2\right)^2 x^2y^2}$

4.23 সারাংশ

এই এককে আপনারা পেলেন

1. (x_1, y_1) বিন্দুতে (i) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ কনিকের স্পর্শকের সমীকরণ হয় $axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

(ii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হয় $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$.

(iii) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হয় $yy_1 = 2a(x + x_1)$ এবং $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হয় $x - ty + at^2 = 0$.

(iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1$ উপবৃত্তের এবং $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হয়

যথাক্রমে $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ এবং $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

আবার $(a \cos\theta, b \sin\theta)$ বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হয় $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ এবং $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের $(a \sec\phi, b \tan\phi)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হয় $\frac{x}{a}\sec\phi - \frac{y}{b}\tan\phi = 1$.

2. $y = mx + c$ সরলরেখা

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হবে যদি $c = \pm a\sqrt{1 + m^2}$ হয়

(ii) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হবে যদি $c = \frac{a}{m}$ হয়

(iii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হবে যদি $c = \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ হয়

(iv) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হবে যদি $c = \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ হয়

3. বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দু থেকে

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য হবে $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - a^2}$

(ii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য হবে

$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$.

4. বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দু থেকে

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ হয়

$(xx_1 + yy_1 - a^2)^2 = (x^2 + y^2 - a^2)(x_1^2 + y_1^2 - a^2)$

অথবা, $SS_1 = T^2$ যেখানে $S = x^2 + y^2 - a^2$, $S_1 = x_1^2 + y_1^2 - a^2$

$T = xx_1 + yy_1 - a^2$

(ii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ হয়

$SS_1 = T^2$, $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$, $S_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

$T = xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$

(iii) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ $SS_1 = T^2$ যেখানে $S = y^2 - 4ax$, $S_1 = y_1^2 - 4ax_1$, $T = yy_1 - 2a(x + x_1)$

(iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ $SS_1 = T^2$

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,\quad S_1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1,\ T = \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1$$

(v) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ হয় $SS_1 = T^2$ যেখানে

$$S = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad S_1 = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1, \; T = \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1$$

5. (x_1, y_1) বিন্দু থেকে (i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে (ii) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তে (iii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তে (iv) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তে

অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শ জ্যার সমীকরণ (i) $xx_1 + yy_1 = a^2$ (ii) $yy_1 = 2a(x + x_1)$

(iii) $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ (iv) $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

6. (x_1, y_1) বিন্দুতে (i) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হয় $y - y_1 = \frac{y_1 + f}{x + g}(x - x_1)$ (ii) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হয় $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$

(iii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের এবং $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হয় যথাক্রমে $\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}}$ এবং $\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = -\frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}}$.

আবার, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের এবং $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের $(a \cos\theta, b \sin\theta)$ এবং $(a \sec\phi, b \tan\phi)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হয় যথাক্রমে $\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$ এবং $\frac{ax}{\sec\phi} + \frac{by}{\tan\phi} = a^2 + b^2$.

7. m-এর সকল বাস্তব মানের জন্য $y = mx - 2am - am^3$ সরলরেখা সর্বদা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব, এবং পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(am^2, -2am)$

8. (i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) তার সমীকরণ $T = S_1$ যেখানে $T = xx_1 + yy_1 - a^2$, $S_1 = x_1^2 + y_1^2 - a^2$ অথবা $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$.

(ii) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) তার সমীকরণ $yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$.

(iii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের যে জ্যা-এর মধ্য বিন্দু (x_1, y_1) তার সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$$

(iv) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) তার সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}$$

9. (i) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $y = mx + c$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যা সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ অর্থাৎ ব্যাসের সমীকরণ $y = \frac{2a}{m}$.

(ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $y = mx + c$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যা সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ অর্থাৎ ব্যাসের সমীকরণ $y = -\frac{b^2}{a^2m}x$.

(iii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের $y = mx + c$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যা সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ অর্থাৎ ব্যাসের সমীকরণ $y = \frac{b^2}{a^2m}x$.

10. (i) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তে $y = mx$ এবং $y = m'x$ $(m, m' \neq 0)$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর অনুবন্ধী ব্যাস হলে $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$.

(ii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তে $y = mx$ এবং $y = m'x$ $(m, m' \neq 0)$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর অনুবন্ধী ব্যাস হলে $mm' = \frac{b^2}{a^2}$.

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের দুটি অর্ধ অনুবন্ধী ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের উৎকেন্দ্রিক কোণ θ ও ϕ হয় তবে $|\theta-\phi|=(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

4.24 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (2, 1) এবং বৃত্তটি $4x + 3y - 36 = 0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

2. (4, –2) বিন্দুগামী এবং $3x + 4y - 36 = 0$ সরলরেখাকে (4, 6) বিন্দুতে স্পর্শ করে এই রূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের যে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সঙ্গে 60° কোণে নত তাদের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

4. (– 2, 3) বিন্দু থেকে $y^2 = 8x$ অধিবৃত্তের ওপর যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং যুগ্ম স্পর্শকের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

5. প্রমাণ করুন যে $\ell x + my + n = 0$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2\ell^2 - b^2m^2 = n^2$ এবং ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{a^2\ell}{n}, \frac{b^2m}{n}\right)$.

6. দেখান যে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের যে সকল জ্যা শীর্ষে সমকোণ উৎপন্ন করে তাদের প্রান্ত বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ হল $x + 4a = 0$

7. প্রমাণ করুন যে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের ওপর কেন্দ্র থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.

8. দেখান যে, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের θ ও '$\frac{\pi}{2} + \theta$' বিন্দুতে স্পর্শক দুটির ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ $\frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ বক্ররেখার ওপর অবস্থিত।

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপপৃত্তের দুটি বিন্দুতে স্পর্শক দুটির ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sec^2\alpha$। প্রমাণ করুন যেখানে বিন্দু দুটির উৎকেন্দ্রিক কোণগুলির অন্তর 2α।

10. $x^2 + y^2 = 4ax$ বৃত্তের এবং $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের সাধারণ স্পর্শকের সমীক নির্ণয় করুন।

11. প্রমাণ করুন যে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সরলরেখাটির $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত হল $p = \pm\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}$.

12. $y^2 = 12x$ এবং $x^2 = 108y$ অধিবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

13. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $\left(\frac{a}{p^2}, 2ap\right)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

14. $y^2 = 5x$ অধিবৃত্তের একটি অভিলম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

15. প্রমাণ করুন $\ell x + my + n = 0$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের অভিলম্ব হবার শর্ত $\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{n^2}$.

16. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের ওপর P এবং Q দুটি বিন্দু যথাক্রমে $(at_1^2, 2at_1)(at_2^2, 2at_2)$. ঐ বিন্দু (P এবং Q) দুটিতে অভিলম্ব দুটি অধিবৃত্ততে ছেদ করে।

প্রমাণ করুন $t_1t_2 = 2$

17. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্ত দুটিতে অভিলম্ব দুটি অধিবৃত্তটিকে আবার ϕ এবং ϕ' বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করুন $\phi\phi' = 12$.

18. $xy = c^2$ পরাবৃত্তের $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$ বিন্দুতে অভিলম্ব আবার পরাবৃত্তটিকে $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করুন $t_1^3t_2 + 1 = 0$.

19. যদি কোনও উপবৃত্তের P বিন্দুতে অভিলম্ব, পরাক্ষ এবং উপাক্ষ, অক্ষকে যথাক্রমে G এবং g বিন্দুতে ছেদ করে তা হলে প্রমাণ করুন $PG \cdot Pg = SP \cdot S'P$, S এবং S′ উপবৃত্তের নাভিদ্বয়।

20. $xy = c^2$ সমপরাবৃত্তের QR একটি জ্যা, যা Q বিন্দুতে অভিলম্ব। প্রমাণ করুন $3CQ^2 + CR^2 = QR^2$.

21. যদি P এবং Q বিন্দু $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু হয় তবে দেখান যে P এবং Q বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$.

22. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের P ও Q দুটি পরস্পর লম্ব ব্যাসের দুই প্রান্ত হয় এবং C উপবৃত্তটির কেন্দ্র তাহলে প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{CP^2} + \frac{1}{CQ^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

23. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী অর্ধব্যাসকে ব্যাস নিয়ে যদি বৃত্ত অঙ্কন করা যায় তবে দেখান যে বৃত্ত দুটির দ্বিতীয় ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ হল $2(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.

24. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের কেন্দ্র C, CP ও CQ পরাবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী অর্ধব্যাস। P বিন্দুতে অভিলম্ব CQ সরলরেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করলে দেখান যে P বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থানে R বিন্দুর সঞ্চারপথ হবে $(x^2 + y^2)^2(a^2y^2 - b^2x^2) = (a^2 + b^2)x^2y^2$.

25. যদি P এবং Q বিন্দু $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের দুটি অনুবন্ধী ব্যাসের দুটি প্রান্ত হয় তাহলে দেখান যে PQ সরলরেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হবে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ এবং PQ সরলরেখা এই সঞ্চারপথকে স্পর্শ করে।

4.25 উত্তরমালা

1. **সংকেত ঃ** উদাহরণ (1)-এর অনুরূপ

   উত্তর ঃ $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

2. **সংকেত ঃ** উদাহরণ (2)-এর অনুরূপ

   উত্তর ঃ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

3. **সমাধান ঃ**

সরলরেখাটির নতি = $\tan 60° = \sqrt{3}$

যে সরলরেখা x অক্ষের সাথে 60° কোণে নত তার সমীকরণ হবে

$$y = \sqrt{3}x + c \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণে y-এর মান বসিয়ে পাই

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\sqrt{3}x + c\right)^2}{b^2} = 1$$

বা, $b^2x^2 + 3a^2x^2 + 2\sqrt{3}a^2cx + c^2a^2 = a^2b^2$

বা, $x^2(b^2 + 3a^2) + 2\sqrt{3}a^2cx + c^2a^2 - a^2b^2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$\therefore$ এখন সরলরেখা (1) প্রদত্ত উপবৃত্তের স্পর্শক হবে যদি সমীকরণ (2)-এর বীজদ্বয় সমান হয়।

অর্থাৎ, যদি $4.3.c^2a^4 - 4(3a^2 + b^2)(c^2 - b^2)a^2 = 0$

বা, $-b^2c^2 + b^2(3a^2 + b^2) = 0$

বা, $c^2 = 3a^2 + b^2$

$\therefore \quad c = \pm\sqrt{3a^2 + b^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকগুলির সমীকরণ

$$\boxed{y = \sqrt{3x} \pm \sqrt{3a^2 + b^2}.}$$

4. **সমাধান ঃ**

আমরা জানি যে (x_1, y_1) বিন্দু থেকে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ $SS_1 = T^2$

বা, $(y^2 - 4ax)(y_1^2 - 4ax_1) = [yy_1 - 2a(x + x_1)]^2$

বা, $(y^2 - 8x)(9 + 16) = [3y - 4(x - 2)]^2$

বা, $25(y^2 - 8x) = [(4x - 3y) + 8]^2$

বা, $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 16(4x - 3y) + 64 - 25y^2 + 220x = 0$

বা, $16x^2 - 24xy - 16y^2 + 264x - 48y + 64 = 0$

বা, $\boxed{2x^2 - 3xy - 2y^2 + 33x - 6y + 8 = 0}$

স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{2 - 2} = \alpha$$

$$\therefore \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

5. **সংকেত ঃ** উদাহরণ (7)-এর অনুরূপ

6. **সমাধান ঃ**

অধিবৃত্তের সমীকরণ হল $y^2 = 4ax$ ...... (1)

$P(at_1^2, 2at_1)$ এবং $Q(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হল যথাক্রমে

$x - yt_1 + at_1^2 = 0$ ...... (2)

$x - yt_2 + at_2^2 = 0$ ...... (3)

অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু $O(0, 0)$

$\therefore$ $m_1 =$ OP সরলরেখার নতি $= \dfrac{2at_1}{at_1^2} = \dfrac{2}{t_1}$

$m_2 =$ OQ সরলরেখার নতি $= \dfrac{2}{t_2}$

যেহেতু $m_1 m_2 = -1$ বা, $\dfrac{2}{t_1}\dfrac{2}{t_2} = -1$

$\therefore$ $4 + t_1 t_2 = 0$

$\therefore$ (2) ও (3)-এর ছেদবিন্দুর জন্য

$y(t_1 - t_2) = a(t_1^2 - t_2^2)$

বা, $y = a(t_1 + t_2)$

বা, $x = a(t_1 + t_2) - at_1^2 = at_1t_2 = -4a$

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথ হল $\boxed{x + 4a = 0}$

7. সমাধান ঃ

মনে করুন $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ...... (1) উপবৃত্তের ওপর P (a cos θ, b sin θ) যে কোনও বিন্দু।

∴ P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \text{ .... (2)}$$

(2)-এর সঙ্গে লম্ব সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{x}{b}\sin\theta - \frac{y}{a}\cos\theta + c = 0 \text{ ..... (3)}$$

যেহেতু (3) (0,0) বিন্দুগামী ∴ c = 0

$$\therefore \frac{x}{b}\sin\theta - \frac{y}{a}\cos\theta = 0 \text{.... (4)}$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\frac{y}{a}} = \frac{\cos\theta}{\frac{x}{b}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}} \text{ ..... (5)}$$

∴ (2) এবং (5) থেকে θ অপনয়ন করে পাওয়া যায়

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}} = 1$$

বা, $(x^2 + y^2)^2 = (a^2x^2 + b^2y^2)$

8. সমাধান ঃ θ বিন্দু অর্থাৎ (a sec θ, b tan θ) বিন্দুতে স্পর্শক হল

$$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1 \text{ .... (1)}$$

'$\frac{\pi}{2} + \theta$' বিন্দু = (–a cosec θ, – b cot θ) বিন্দুতে স্পর্শক হল

$$-\frac{x\,\text{cosec}\,\theta}{a} + \frac{y\cot\theta}{b} = 1 \text{ ..... (2)}$$

∴ (1) ও (2) থেকে $\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\sin\theta = \cos\theta$ .... (3)

$$-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\cos\theta=\sin\theta \quad .... (4)$$

$\therefore$ (3) ও (4) থেকে পাই $\frac{y}{b}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$ .... (5)

এবং $\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}$ .... (6)

$$\therefore \quad \cos\theta-\sin\theta=\frac{a}{x} \quad .... (7)$$

(v) থেকে পাই $\cos\theta+\sin\theta=\frac{ay}{bx}$ .... (8)

$\therefore$ (7) ও (8) থেকে $\cos\theta=\frac{a(y+b)}{2bx}$

$$\sin\theta=\frac{a(y-b)}{2bx}$$

$$\therefore \quad \cos^2\theta+\sin^2\theta=\frac{a^2(y+b)^2}{4b^2x^2}+\frac{a^2(y-b)^2}{4b^2x^2}=1$$

বা, $a^2(y2+b^2)=2b^2x^2$

বা, $\boxed{\frac{2x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$

9. **সমাধান ঃ**

মনে করুন বিন্দু দুটির উৎকেন্দ্রিক কোণ ϕ এবং ϕ'। দেওয়া আছে $\phi\sim\phi'=2\alpha$

মনে করুন ঐ দুটি বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... (1) উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad ... (2)$$

ϕ এবং ϕ বিন্দু দিয়ে উপবৃত্ত (1) এর জ্যা-এর সমীকরণ হবে

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\phi+\phi'}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\phi+\phi'}{2}=\cos\frac{\phi-\phi'}{2}$$

$\therefore \frac{x}{a}\cos\frac{\phi+\phi'}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\phi+\phi'}{2} = \cos\alpha$ ..... (3)

প্রশ্নানুসারে (2) এবং (3) অভিন্ন।

$$\therefore \frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{1}{a}\cos\frac{\phi+\phi'}{2}} = \frac{\frac{y_1}{b^2}}{\frac{1}{b}\sin\frac{\phi+\phi'}{2}} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

বা, $x_1 = \frac{a\cos\frac{\phi+\phi'}{2}}{\cos\alpha}, \quad y_1 = \frac{b\sin\frac{\phi+\phi'}{2}}{\cos\alpha}$

$$\therefore \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

$\therefore$ (x_1, y_1) এর সঞ্চারপথ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sec^2\alpha$

10. **সমাধান ঃ**

মনে করুন $y = mx + c$ সাধারণ স্পর্শক।

যেহেতু এটি অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে

$\therefore c = \frac{a}{m}$ .... (1)

আবার এটি বৃত্তকে স্পর্শ করে অতএব কেন্দ্র (2a, 0) থেকে দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\therefore \frac{2am + c}{\sqrt{1+m^2}} = 2a$$

বা, $\left(2am + \frac{a}{m}\right)^2 = 4a^2(1+m^2)$

বা, $4a^2m^2 + \frac{a^2}{m^2} + 4a^2 = 4a^2 + 4a^2m^2$

বা, $\frac{a^2}{m^2} = 0 \qquad \therefore \frac{1}{m} = 0 \; (a \neq 0)$

$\therefore$ সুতরাং সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$x = \frac{y}{m} - \frac{c}{m} = 0$$

11. **সংকেত ঃ**

উদাহরণ 7-এর অনুরূপ।

12. **সমাধান ঃ**

m-এর মান শূন্য ব্যতীত যাই হোক না কেন, $y = mx + \frac{8}{m}$ সরলরেখাটি $y^2 = 32x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। যদি এই সরলরেখা $x^2 = 108y$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হয় তাহলে

$$x^2 = 108\left(mx + \frac{8}{m}\right) \text{ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হবে।}$$

অর্থাৎ $mx^2 - 108m^2x - 864 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হবে।

$\therefore \quad (108m^2)^2 = -4m \times 864$

বা, $\quad m^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0$

বা, $\quad \left(m + \frac{2}{3}\right)\left(m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{4}{9}\right) = 0$

$\therefore \quad m = -\frac{2}{3}$ অপর পক্ষে $m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{4}{9} = 0$

থেকে m এর কোনও বাস্তব মান পাওয়া যাবে না।

সুতরাং প্রদত্ত অধিবৃত্তের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{-\frac{2}{3}}}$$

অথবা, $\quad 2x + 3y + 36 = 0$

13. **সমাধান ঃ**

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $(x - x_1)y + 2a(y - y_1) = 0$

এস্থলে $\quad x_1 = \frac{a}{p^2}, \quad y_1 = 2ap$

$\therefore \quad y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $\left(\frac{a}{p^2}, 2ap\right)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$\left(x - \frac{a}{p^2}\right) + 2a(y - 2ap) = 0$$

অথবা, $\quad px - \frac{a}{p} + y - 2ap = 0$

অথবা, $\quad \boxed{px + y = 2ap + \frac{a}{p}}$

14. সমাধান ঃ

আপনারা জানেন, $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $(am^2, -2am)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে $y = mx - 2am - am^3$ এস্থলে $m = \tan\theta = \tan 45^\circ = 1$.

আবার অধিবৃত্ত থেকে $4a = 5$ $\quad a = \frac{5}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ

$$y = x - \frac{5}{2} - \frac{5}{4}$$

অথবা, $\boxed{y = x - \frac{15}{4}}$

অভিলম্বের পাদবিন্দু $(am^2, -2am) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$

15. সমাধান ঃ

$(a\sec\phi, b\tan\phi)$ বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হল

$ax\cos\phi + by\cot\phi = a^2 + b^2$ .... (1)

আবার প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $\ell x + my = -n$ .... (2)

যেহেতু (1) এবং (2) অভিন্ন

$$\therefore \quad \frac{a\cos\phi}{\ell} = \frac{b\cot\phi}{m} = -\frac{\left(a^2 + b^2\right)}{n}$$

$$\cos\phi = -\frac{\ell}{a}\,\frac{a^2 + b^2}{n} \text{ এবং } \cot\phi = -\frac{m}{b}\,\frac{a^2 + b^2}{n}$$

$$\sec\phi = -\frac{a}{\ell}\,\frac{n}{a^2 + b^2} \text{ এবং } \tan\phi = -\frac{b}{m}\,\frac{a^2 + b}{n}$$

$$\sec^2\phi - \tan^2\phi = \frac{n^2}{\left(a^2 + b^2\right)^2}\left[\frac{n^2}{\ell^2} - \frac{b^2}{m^2}\right]$$

বা, $1 = \frac{x^2}{\left(a^2 + b^2\right)}\left[\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{b^2}{m^2}\right]$

বা, $\boxed{\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{\left(a^2 + b^2\right)^2}{n^2}}$

16. সমাধান ঃ

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $P(at_1^2, 2at_1)$ এবং $Q(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুতে অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ যথাক্রমে

$$y + t_1x = 2at_1 + at_1^3$$

এবং $\quad y = t_2x = 2at_2 + at_2^3$

এই সমীকরণ দুটি সমাধান করে ওদের ছেদ বিন্দু পাওয়া যায়

$$\left[\left\{2a + a\left(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2\right)\right\}at_1t_2\left(t_1 + t_2\right)\right]$$

যেহেতু অভিলম্বগুলি অধিবৃত্ততে ছেদ করে

সুতরাং, $\quad a^2t_1^2t_2^2\left(t_1 + t_2\right)^2 = 4a\left\{2a + a\left(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2\right)\right\}$

বা, $\quad t_1^2t_2^2\left(t_1 + t_2\right)^2 = 8 + 4\left\{\left(t_1 + t_2\right)^2 - t_1t_2\right\}$

বা, $\quad \left(t_1^2\ t_2^2 - 4\right)\left(t_1 + t_2\right)^2 + 4\left(t_1t_2 - 2\right) = 0$

বা, $\quad \left(t_1t_2 - 2\right)\left[\left(t_1 + t_2\right)^2\left(t_1t_2 + 2\right) + 4\right] = 0$

$\therefore \quad t_1t_2 = 2$

17. সমাধান ঃ

অধিবৃত্তের সমীকরণ হল $y^2 = 4ax$ .... (1)

নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (a, 2a) (a, –2a)

$\therefore$ (a, 2a) এবং (a, – 2a) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$x + y = 3a \text{ .... (2)}$$

$$x - y = 2a \text{ ..... (3)}$$

(1) এবং (2) সমাধান করে অধিবৃত্ত এবং অভিলম্বের ছেদবিন্দু পাওয়া যায় Q (9a, 6a), (1) এবং (3) সমাধান দ্বারা অপর ছেদ বিন্দু Q′(9a, – 6a) হল।

$$\therefore \quad QQ' = \sqrt{(9a - 9a)^2 + (6a + 6a)^2} = 12a$$

18. সমাধান ঃ

$\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$ বিন্দুতে $xy = c^2$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হল

$\frac{1}{2}\left(x\frac{c}{t_1} + yct_1\right) = c^2$ যার নতি $\left(-\frac{1}{t_1^2}\right)$

$\therefore \quad \left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে

$$y - \frac{c}{t_1} = t_1^2(x - ct_1)$$

যেহেতু এটি $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$ বিন্দুগামী

$$\therefore \frac{c}{t_2} - \frac{c}{t_1} = t_1^2(ct_2 - ct_1)$$

অথবা, $\frac{c(t_1 - t_2)}{t_1 t_2} = t_1^2\, c\, (t_2 - t_1)$

বা, $t_1^2 + \frac{1}{t_1 t_2} = 0 \qquad (\because t_1 \neq t_2)$

$$\therefore \boxed{t_1^3 t_2 + 1 = 0}$$

19. সমাধান ঃ

মনে করুন P বিন্দুটি হল $(a \cos\phi, b \sin\phi)$

$\therefore P(a \cos\phi, b \sin\phi)$ বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হবে

$$a\, x \sec\phi - b\, y \operatorname{cosec}\phi = a^2 - b^2$$

এটি উপাক্ষ অক্ষকে ছেদ করে অর্থাৎ $y = 0$

$\therefore$ G হবে $\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\cos\phi, 0\right)$

এবং পরাক্ষ অক্ষকে ছেদ করে অর্থাৎ $x = 0$

$\therefore$ g হবে $\left(0, \frac{b^2 - a^2}{b}\sin\phi\right)$

$$\therefore \quad PG^2 . Pg^2 = \left(\frac{b^4}{a^2}\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi\right)\left(a^2\cos^2\phi + \frac{a^4}{b^2}\sin^2\phi\right)$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\left(b^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi\right)\frac{a^2}{b^2}\left(b^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi\right)$$

$$= \left(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi\right)^2$$

$\therefore \quad PG.\ Pg = a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi$

$= a^2(1 - \cos^2 \phi) + a^2(1 - e^2) \cos^2\phi \quad [\because b^2 = a^2(1 - e^2)]$

$= a^2(1 - e^2 \cos^2\phi)$

$= a(1 - e \cos \phi).\ a(1 + e \cos \phi)$

$\therefore \quad \boxed{PG.\ Pg = SP.\ S'P}$

20. **সমাধান ঃ**

$xy = c^2$ ... (1)

$\phi\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$ty - c = t^3x - ct^4$ .... (2)

মনে করুন (2), (1)-কে R $\left(ct', \frac{c}{t'}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore \quad t.\frac{c}{t'} - c = t^3.ct' - ct^4$

বা, $\left(\frac{t}{t'} - 1\right) = t^3.t'\left(1 - \frac{t}{t'}\right)$

বা, $\left(1 - \frac{t}{t'}\right)\left(t^3t' + 1\right) = 0$

$\therefore \quad t_3t' + 1 = 0 \qquad \left[\begin{array}{l}\because t \neq t' \\ \quad \frac{t}{t'} \neq 1\end{array}\right]$

বা, $t' = -\frac{1}{t^3}$ .... (3)

$\therefore \quad QR^2 = (ct - ct')^2 + \left(\frac{c}{t} - \frac{c}{t'}\right)^2$

$= c^2\left(t + \frac{1}{t^3}\right)^2 + c^2\left(\frac{1}{t} + t^3\right)^2$ ((3) থেকে)

$= c^2\left[t^2 + \frac{1}{t^6} + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^2} + t^6 + 2t^2\right]$

$= c^2\left[t^6 + \frac{1}{t^6} + 3t^2 + \frac{3}{t^2}\right]$ .... (4)

$$\therefore \quad 3CQ^2 + CR^2 = 3\left(c^2t^2 + \frac{c^2}{t^2}\right) + \left(c^2t'^2 + \frac{c^2}{t'^2}\right)$$

$$= c^2\left[3t^2 + \frac{3}{t^2} + t^6 + \frac{1}{t^6}\right] \quad \text{((3) থেকে)} \; .... (5)$$

$\therefore$ (4) এবং (5) থেকে পাওয়া যাবে

$$3CQ^2 + CR^2 = QR^2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

21. **সমাধান ঃ**

প্রদত্ত উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (1)

মনে করুন P বিন্দুর উৎকেন্দ্রিক কোণ θ সুতরাং ϕ এর উৎকেন্দ্রিক কোণ হবে $\frac{\pi}{2} + \theta$

$\therefore$ P এবং Q এর স্থানাঙ্ক হবে $[a \cos \theta, b \sin \theta]$ এবং $[-a \sin \theta, b \cos \theta]$

$\therefore$ (1) উপবৃত্তের P এবং Q বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\frac{x.\, a\cos\theta}{a^2} + \frac{y.\, b\sin\theta}{b^2} = 1$$

বা, $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ .... (2)

এবং $\frac{-x\sin\theta}{a} + \frac{y}{b}\cos\theta = 1$ .... (3)

মনে করুন (2) এবং (3)-এর ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)

$\therefore$ $\frac{x_1}{a}\cos\theta + \frac{y_1}{b}\sin\theta = 1$ .... (4)

এবং $-\frac{x_1\sin\theta}{a} + \frac{y_1}{b}\cos\theta = 1$ .... (5)

(4) এবং (5) এর বর্গ এবং যোগ করে পাই

$$\frac{x_1^2}{a^2}\cos^2\theta + \frac{2x_1y_1\sin\theta\cos\theta}{ab} + \frac{y_1^2\sin^2\theta}{b^2} + \frac{x_1^2\sin^2\theta}{a^2} - \frac{2x_1y_1\sin\theta\cos\theta}{ab} + \frac{y_1^2}{b^2}\cos^2\theta = 1 + 1$$

বা, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চার পথ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2}$

22. সমাধান ঃ

প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (1)

মনে করুন P বিন্দুর স্থানাঙ্ক ($a \cos\theta, b \sin\theta$)

CP সরলরেখার সমীকরণ হবে

$xb \sin\theta - ya \cos\theta = 0$ .... (2)

CQ সরলরেখার সমীকরণ হবে

$xa \cos\theta + yb \sin\theta = 0$ .... (3)

$\therefore$ (1) এবং (3) থেকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2 a^2 \cos^2\theta}{b^4 \sin^2\theta} = 1$

অথবা $x^2\left(a^4 \cos^2\theta + b^4 \sin^2\theta\right) = a^2 b^4 \sin^2\theta$

$$\therefore\ x^2 = \frac{a^2 b^4 \sin^2\theta}{a^4 \cos^2\theta + b^4 \sin^2\theta}$$

অনুরূপভাবে $y^2 = \frac{a^4 b^2 \cos^2\theta}{a^4 \cos^2\theta + b^4 \sin^2\theta}$

$$\therefore\ CQ^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2 b^2\left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right)}{a^4 \cos^2\theta + b^4 \sin^2\theta}$$

$$\therefore\ \frac{1}{CP^2} + \frac{1}{CQ^2} = \frac{1}{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} + \frac{a^4 \cos^2\theta + b^4 \sin^2\theta}{a^2 b^2\left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right)}$$

$$= \frac{a^2 b^2 + a^4 \cos^2\theta + b^4 \sin^2\theta}{a^2 b^2\left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right)} = \frac{a^2 b^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + a^4 \cos^2\theta + b^4 \sin^2\theta}{a^2 b^2\left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right)}$$

$$= \frac{\left(a^2 + b^2\right)\left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right)}{a^2 b^2\left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right)} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

$\boxed{\frac{1}{CP^2} + \frac{1}{CQ^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ প্রমাণিত

23. সমাধান ঃ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ..... (1)$$

মনে করুন CP এবং CQ দুটি অনুবন্ধী ব্যাস।

P এর উৎকেন্দ্রিক কোণ θ হলে Q এর $\frac{\pi}{2} + \theta$

$\therefore$ P এবং Q এর স্থানাঙ্ক হবে $(a \cos \theta, b \sin \theta)$

এবং $(-a \sin \theta, b \cos \theta)$

$\therefore$ CP এবং CQ কে ব্যাস নিয়ে বৃত্তের সমীকরণ

$(x - 0)(x - a \cos \theta) + (y - 0)(y - b \sin \theta) = 0$

বা, $x^2 + y^2 = ax \cos \theta + by \sin \theta \ .... (2)$

এবং $(x - 0)(x + a \sin \theta) + (y - 0)(y - b \cos \theta) = 0$

বা, $x^2 + y^2 = - ax \sin \theta + by \cos \theta \ .... (3)$

মনে করুন (2) এবং (3) R (x_1, y_1) বিন্দুতে ছেদ করে

$\therefore \quad x_1^2 + y_1^2 = ax_1 \cos\theta + by_1 \sin\theta \ .... (4)$

$x_1^2 + y_1^2 = -ax_1 \sin\theta + by_1 \cos\theta \ ..... (5)$

$\therefore$ (4) এবং (5) -কে বর্গ করে এবং যোগ করে

$$2\left(x_1^2 + y_1^2\right)^2 = a^2x_1^2 + b^2y_1^2$$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুর সঞ্চারপথ হল

$$2(x^2 + y^2) = a^2x^2 + b^2y^2$$

24. সমাধান ঃ

প্রদত্ত পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .... (1)$

মনে করুন $P = (a \sec \theta, b \tan \theta)$

$\therefore$ P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\frac{x}{a} \sec \theta - \frac{y}{b} \tan \theta = 1$$

বা, $bx \sec \theta - ay \tan \theta = ab$

$\therefore$ P বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে

$a(x - a \sec \theta) \tan \theta + b(y - b \tan \theta) \sec \theta = 0$

বা, $ax \tan \theta + by \sec \theta = (a^2 + b^2) \sec \theta \tan \theta \ .... (2)$

আবার CQ সরলরেখার সমীকরণ হবে

$bx \sec \theta - ay \tan \theta = 0$ (যেহেতু P বিন্দুতে স্পর্শকের সমান্তরাল)

$\therefore \quad bx \sec \theta - ay \tan \theta = 0 \ ... (3)$

(2) এবং (3) থেকে θ অপনয়ন করে নির্ণেয় ছেদ বিন্দু R-এর সঞ্চারপথ পাওয়া যাবে।

$\therefore$ (3) থেকে পাওয়া যায় $\frac{\sec\theta}{ay} = \frac{\tan\theta}{bx} = \frac{1}{\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2}}$

(2) ও (3) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{ab\left(x^2 + y^2\right)}{\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2}} = \left(a^2 + b^2\right)\frac{abxy}{a^2y^2 - b^2x^2}$$

অথবা, $\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{a^2y^2 - b^2x^2} = \left(a^2 + b^2\right)xy$

অথবা, $\boxed{(x^2 + y^2)^2\,(a^2y^2 - b^2x^2) = (a^2 + b^2)^2\,x^2y^2}$

25. **সমাধান ঃ**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\ldots.\;(1)$$

মনে করুন $P = (a\cos\theta,\, b\sin\theta)$

$Q = (-a\sin\theta,\, b\cos\theta)$

মনে করুন $R(x_1, y_1)$, PQ রেখার মধ্যবিন্দু।

$$\therefore\quad x_1 = \frac{a(\cos\theta - \sin\theta)}{2},\quad y_1 = \frac{b(\cos\theta + \sin\theta)}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{2x_1}{a} = \cos\theta - \sin\theta,\quad \frac{2y_1}{b} = \cos\theta + \sin\theta$$

$$\therefore\ \frac{4x_1^2}{a^2} + \frac{4y_1^2}{b^2} = \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta$$

$$= 2$$

$$\therefore\quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

নির্ণেয় সঞ্চারপথ হল $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}}$ ..... (2)

আবার PQ সরলরেখার সমীকরণ হবে

$$\frac{x - a\cos\theta}{a(\cos\theta + \sin\theta)} = \frac{y - b\sin\theta}{b(\sin\theta - \cos\theta)}$$

বা, $\left(\frac{x}{a} - \cos\theta\right)(\sin\theta - \cos\theta) = \left(\frac{y}{b} - \sin\theta\right)(\sin\theta + \cos\theta)$

বা, $\frac{x}{a}(\sin\theta - \cos\theta) + \frac{y}{b}(\cos\theta + \sin\theta) = 1$

এটি উপবৃত্ত (2)-এর R বিন্দুতে স্পর্শক।

একক 5 ❑ কনিকের মেরু সমীকরণ

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

এই এককে আপনারা আরেক প্রকার স্থানাঙ্ক পদ্ধতির সাথে পরিচিত হবেন। এই স্থানাঙ্ককে বলা হয় মেরু স্থানাঙ্ক বা পোলার স্থানাঙ্ক। এই স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে সমতলের ওপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ঐ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার সাপেক্ষে সমতলের ওপর অবস্থিত যে কোনও বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যাবে। এই নির্দিষ্ট বিন্দুকে মেরু বা পোল এবং মেরুগামী নির্দিষ্ট সরলরেখাকে মেরু অক্ষ বা প্রারম্ভিক রেখা বলে। এই স্থানাঙ্ক দিয়ে

সরলরেখা এবং বৃত্তের সমীকরণ নিয়ে আলোচনা করা হবে। আবার কনিকের মেরু সমীকরণই বা কী রূপ হবে সেটাই মূল আলোচনার বিষয়। কনিকের স্পর্শক, অভিলম্ব, জ্যা এবং অসীমপথের সমীকরণ নিয়েও বিবেচনা করা হবে। উচ্চতর গণিতে মেরু স্থানাঙ্কের ব্যাপক প্রয়োগ আছে।

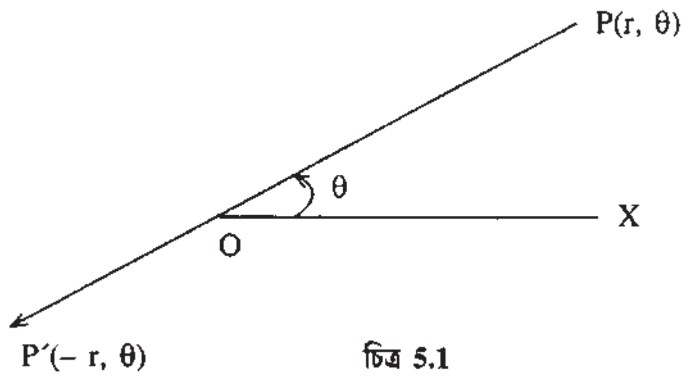
5.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করে আপনারা জানতে পারবেন

- মেরু স্থানাঙ্কের সংজ্ঞা এবং মেরু ও কার্তিয় স্থানাঙ্কের সম্পর্ক।
- মেরু স্থানাঙ্ক দিয়ে দুটি বিন্দুর দূরত্ব ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।
- সরলরেখা, বৃত্তের সমীকরণ।
- কনিকের মেরু সমীকরণ এবং প্রকৃতি।
- মেরু স্থানাঙ্ক দিয়ে কনিকের স্পর্শক, অভিলম্ব. জ্যা ও অসমীপথের সমীকরণ।

5.3 মেরু স্থানাঙ্কের সংজ্ঞা

সংজ্ঞা ঃ মেরু স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে সমতলের ওপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ঐ বিন্দুগামী একটি সরলরেখা সাপেক্ষে সমতলের ওপর যে কোনও বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা হয়। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে মেরু (Pole) এবং ঐ মেরুগামী সরলরেখাটিকে প্রারম্ভিক রেখা বা প্রাথমিক রেখা (Initial line) বলে।



চিত্র 5.1

মনে করুন O বিন্দু মেরু এবং $\overrightarrow{OX}$ প্রারম্ভিক রেখা। এখন সমতলের ওপর P যে কোনও একটি বিন্দু। $\overline{OP}$ যোগ করা হল। তাহলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে (r, θ) যেখানে $\overline{OP} = r$ এবং $\angle XOP = \theta$, এখানে r-কে দূরক (Radious vector) এবং θ-কে ভেক্টোরীয় কোণ বা নতি কোণ বলে।

ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের পদ্ধতিতে θ-এর পরিমাপ করতে হয় অর্থাৎ প্রারম্ভিক রেখা থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত অভিমুখে θ-র মান ধনাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার অভিমুখে মান ঋণাত্মক ধরা হয়। কোনও বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক প্রকাশ করবার সময় প্রথমে দূরক (r) এবং পরে নতি কোণ বা ভেক্টোরীয় কোণ (θ) একটি বন্ধনীর মধ্যে লিখতে হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (i) r ও θ-এর মান দেওয়া থাকলে সমতলের ওপর একটি এবং কেবলমাত্র একটি বিন্দু পাওয়া যাবে।

আবার সমতলের ওপর একটি বিন্দুর ক্ষেত্রে r-এর একটি নির্দিষ্ট মান থাকবে কিন্তু θ-এর অসংখ্য মান পাওয়া সম্ভব যেমন— $\theta, 2\pi + \theta, 4\pi + \theta$ ...... ইত্যাদি।

(ii) মেরু স্থানাঙ্ক (0, 0) ধরা হয়।

(iii) অনেক সময় r-এর ঋণাত্মক মান ধরে মেরু স্থানাঙ্কের সংজ্ঞা দেওয়া থাকে। এর জন্য কোনও নির্দিষ্ট অভিমুখিতায় r-এর মান ধনাত্মক ধরা হলে তার বিপরীত অভিমুখিতায় r-এর মান ঋণাত্মক নিতে হবে।

যেমন $OP = OP' = r$(P, O, P′ একই সরলরেখায় অবস্থিত) এবং $\angle XOP = \theta$ হলে P ও P′-এর মেরু স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r, θ) এবং $(-r, \theta)$। এখানে O থেকে P দিকের অভিমুখিতা ধনাত্মক ধরা হয়েছে। r-এর মান ঋণাত্মক ধরে মেরু স্থানাঙ্কের প্রয়োগ নেই।

(iv) r এবং θ-এর চিহ্ন ব্যাপারে নিয়মের কথা মনে রেখে সমতলের ওপর যে কোনও বিন্দুর স্থানাঙ্ক নিম্নলিখিত চার উপায়ে প্রকাশ করা যায়।

$$(r, \theta)(-r, \pi + \theta)\ \{r, -(2\pi - \theta)\}\{-r, -(\pi - \theta)\}$$

5.4 কার্তিয় এবং মেরু স্থানাঙ্কের পারস্পরিক সম্পর্ক

মনে করুন XOX′ এবং YOY′ কার্তিয় অক্ষদ্বয় পরস্পর O মূলবিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন কার্তিয় মূলবিন্দু O কে মেরু এবং কার্তিয় ধনাত্মক X-অক্ষ $\overrightarrow{OX}$-কে মেরু পদ্ধতিতে প্রারম্ভিক রেখা ধরুন। তাহলে সমতলের ওপর কোনও বিন্দু P-এর কার্তিয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং মেরু স্থানাঙ্ক (r, θ)

PM, OX-এর ওপর লম্ব টানা হল।

$\therefore$ $OM = x$ $\quad PM = y$

$OP = r$ $\quad \angle MOP = \theta$

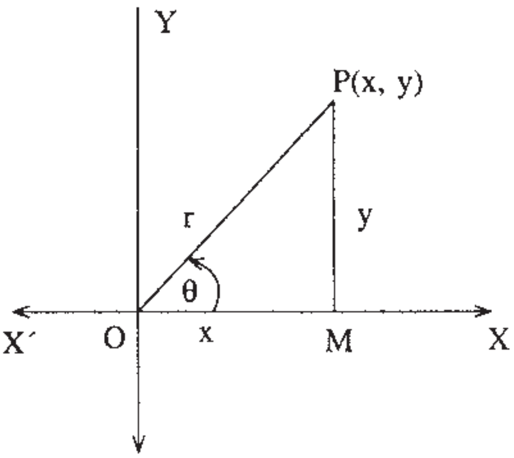
$\therefore$ MOP সমকোণী ত্রিভুজ থেকে,

$\frac{OM}{OP} = \cos\theta$ এবং $\frac{PM}{OP} = \sin\theta$

$\therefore$ $x = r\cos\theta$ ...... (1) এবং

$y = r\sin\theta$ ...... (2)

$\therefore$ কোন বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকলে (1) ও (2)-এর সাহায্যে তার কার্তিয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যাবে।



চিত্র 5.2

আবার OPM সমকোণী ত্রিভুজ থেকে, $OP^2 = OM^2 + PM^2$

$\therefore$ $r^2 = x^2 + y^2$ $\quad\therefore$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ...... (3)

এবং $\frac{PM}{OM} = \tan\theta \; \therefore \; \tan\theta = \frac{y}{x}$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad \ldots\ldots (4)$$

$\therefore$ কোনও বিন্দুর কার্তিয় স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকলে (3) ও (4)-এর সাহায্যে তার মেরুস্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যাবে।

5.5 মেরু স্থানাঙ্কে দুটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়

মনে করুন O মেরু এবং প্রারম্ভিক রেখা $\overrightarrow{OX}$ সাপেক্ষে P ও Q বিন্দু দুটির মেরু স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1) এবং (r_2, θ_2)

$\therefore \overline{OP} = r_1 \quad \overline{OQ} = r_2$

$\angle XOP = \theta_1 \quad \angle XOQ = \theta_2$

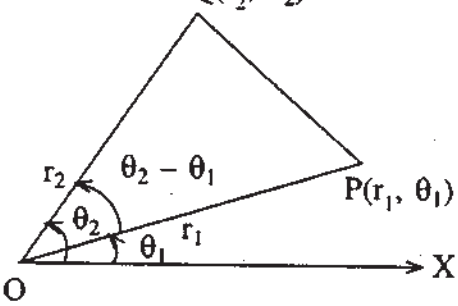
$\therefore \angle POQ = \theta_2 - \theta_1$

$\therefore$ POQ ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায়

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\overline{OP}.\overline{OQ} \cos POQ$$

$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

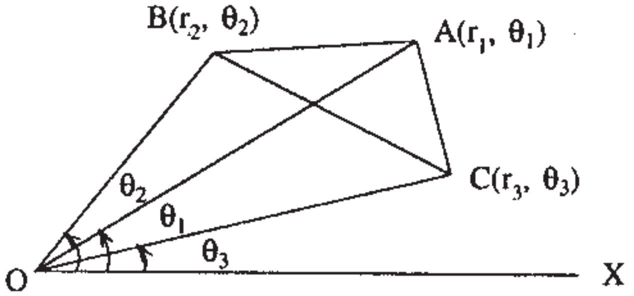
$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



চিত্র 5.3

5.6 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

মনে করুন ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু A, B, C-এর মেরু স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(r_1, \theta_1)(r_2, \theta_2)$ এবং (r_3, θ_3) যেখানে O মেরু, প্রারম্ভিক রেখা $\overline{OX}$।



চিত্র 5.4

$$\therefore \quad \Delta ABC = \Delta AOB + \Delta AOC - \Delta BOC \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

এখন $\Delta\ AOB = \frac{1}{2}OA\ OB\ \sin\angle BOA = \frac{1}{2}r_1r_2\ \sin(\theta_2 - \theta_1)$

$$\Delta\ AOB = \frac{1}{2}OA\ OC\ \sin\angle AOC = \frac{1}{2}r_1r_3\sin(\theta_1 - \theta_3)$$

$$\Delta\ BOC = \frac{1}{2}OB\ OC\ \sin\angle BOC = \frac{1}{2}r_2r_3\ \sin(\theta_2 - \theta_3)$$

$$= -\frac{1}{2}r_2r_3\ \sin(\theta_3 - \theta_2)$$

$\therefore$ নির্ণেয় ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (1) থেকে

$$\Delta\ ABC = \frac{1}{2}\left[r_2r_1\sin\left(\theta_2 - \theta_1\right) + r_1r_3\sin\left(\theta_1 - \theta_3\right) + r_3r_2\sin\left(\theta_3 - \theta_2\right)\right]$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ যদি A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখীয় হয় তাহলে

$$r_1r_2\ \sin(\theta_1 - \theta_2) + r_2r_3\ \sin(\theta_2 - \theta_3) + r_3r_1\ \sin(\theta_3 - \theta_1) = 0$$

5.7 সরলরেখার মেরু সমীকরণ

মনে করুন ON = p যা মেরু O থেকে সরলরেখাটির ওপর r লম্ব এবং N বিন্দুর নতিকোণ α, প্রারম্ভিক রেখা OX-এর সাপেক্ষে।

$\therefore$ N বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক (p, α)

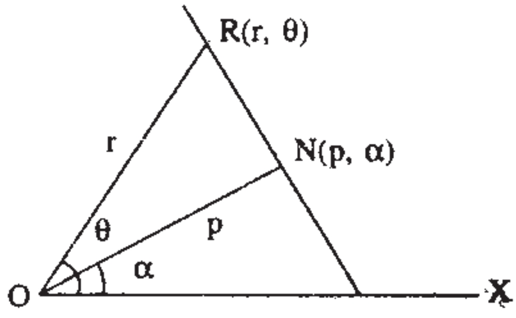
মনে করুন সরলরেখাটির ওপর $R(r, \theta)$ যে কোনও একটি বিন্দু।

$\therefore\ \angle XOR = \theta \quad \angle NOR = \theta - \alpha$

$\therefore\ \frac{ON}{OR} = \cos NOR \quad \therefore \frac{p}{r} = \cos(\theta - \alpha)$

নির্ণেয় সরলরেখাটির মেরু সমীকরণ,

$$\boxed{r\cos(\theta - \alpha) = P}$$



চিত্র 5.5

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

(i) আপনারা জানেন কার্তিয় স্থানাঙ্কে লম্ব আকারে সরলরেখার সমীকরণ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

$\therefore\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\boxed{r\cos(\theta - \alpha) = p}$$

(ii) যদি $\alpha = 0$ হয়, তাহলে সরলরেখার সমীকরণটি হয় $p = r\cos\theta$ এবং এটি মেরু অক্ষের ওপর লম্ব হয়।

আবার $\alpha = 90°$ হলে, $p = r \sin\theta$ এবং এটি তখন মেরু অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল হয়।

যদি $p = 0$ তাহলে সরলরেখাটি মেরু দিয়ে যায় এবং $\theta - \alpha = 90°$ হলে, সরলরেখাটির সমীকরণ হয় $\theta =$ ধ্রুবক।

(iii) মেরু স্থানাঙ্কে দুটি সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হবে, $r\cos(\theta - \alpha) = p$ এবং $r\cos(\theta - \alpha) = p$ আবার দুটি লম্ব সরলরেখার সমীকরণ হবে

$r\cos(\theta - \alpha) = p$ এবং $r\cos(\theta - \alpha') = p'$ যেখানে $\alpha' - \alpha = 90°$

(iv) $r\cos(\theta - \alpha) = p$

বা, $\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = \frac{p}{r}$

বা, $\frac{1}{r} = \frac{\cos\alpha}{p}\cos\theta + \frac{\sin\alpha}{p}\sin\theta$

$\therefore$ আর একটি আকারে সরলরেখার মেরু সমীকরণ হবে,

$$\boxed{\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta}$$

যেখানে A এবং B ধ্রুবক।

5.8 বৃত্তের মেরু সমীকরণ

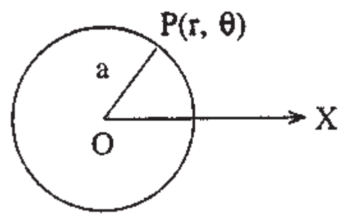
যে বৃত্তের কেন্দ্র মেরুতে অবস্থিত এবং ব্যাসার্ধ 'a' সেই বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে করুন $P(r, \theta)$ বৃত্তের ওপর যে কোনও একটি বিন্দু।

$\therefore$ $OP = a$

বা, $r = a$ $(\because OP = r)$

$\therefore$ এটি বৃত্তটির নির্ণেয় মেরু সমীকরণ।



চিত্র 5.6

যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 'a' মেরু পরিধির ওপর অবস্থিত এবং প্রারম্ভিক রেখা ব্যাস বরাবর হলে, তার সমীকরণ নির্ণয় ঃ

এখানে মেরু 'O' পরিধির ওপর এবং প্রান্তিক রেখা $\overrightarrow{OX}$ ব্যাস $\overrightarrow{OA}$ বরাবর অবস্থিত।

মনে করুন $P(r, \theta)$ বৃত্তের ওপর যে কোন একটি বিন্দু।

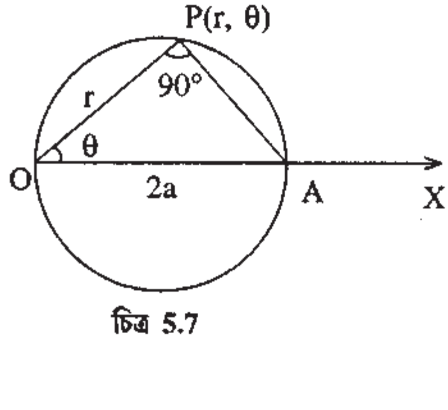
$\therefore$ OPA ত্রিভুজ থেকে

$OP = r,\ OA = 2a\ \ \angle OPA = 90°\ \ \angle AOP = \theta$

$\therefore$ $\cos\theta = \frac{OP}{OA} = \frac{r}{2a}$

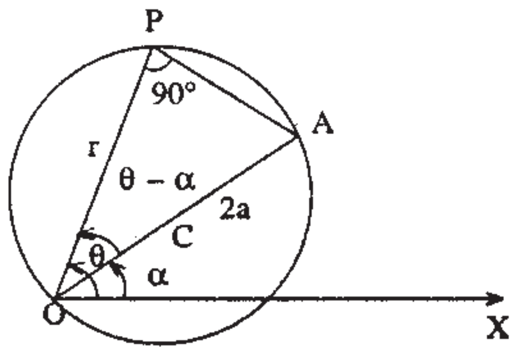
$\therefore$ $\boxed{r = 2a\cos\theta}$

এটি প্রদত্ত বৃত্তটির নির্ণেয় মেরু সমীকরণ।



চিত্র 5.7

যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 'a' এবং মেরু পরিধির ওপর অবস্থিত, ব্যাস (মেরু দিয়ে) প্রারম্ভিক রেখার সঙ্গে 'α' কোণে নত সেই বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় ঃ—



চিত্র 5.8

এখানে মেরু 'O' পরিধির ওপর এবং ব্যাস OA, প্রারম্ভিক রেখা $\overrightarrow{OX}$-এর সহিত 'α' কোণে নত।

মনে করুন $P(r, \theta)$ বৃত্তের ওপর যে কোনও একটি বিন্দু। $\therefore$ OAP ত্রিভুজ থেকে,

$OA = 2a, \qquad OP = r$

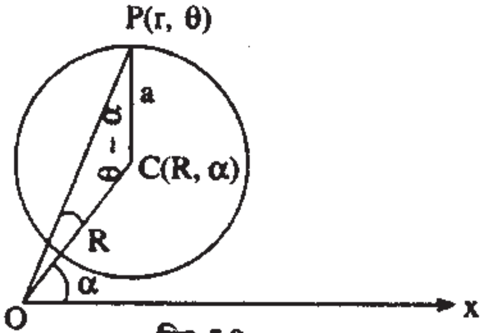
$\angle OPA = 90°, \quad \therefore \quad \angle AOP = \theta - \alpha$

$\therefore \quad \cos(\theta - \alpha) = \dfrac{OP}{OA} = \dfrac{r}{2a}$

$\boxed{r = 2a\cos(\theta - \alpha)}$

এটি প্রদত্ত বৃত্তের মেরু সমীকরণ।

যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ a এবং কেন্দ্র (R, α) তার সমীকরণ নির্ণয় ঃ—



চিত্র 5.9

মনে করুন বৃত্তটির কেন্দ্র $C(R, \alpha)$ এবং $P(r, \theta)$ এবং $P(r, \theta)$ যে কোনও একটি বিন্দু

$\therefore$ OCP ত্রিভুজ থেকে,

$OC = R, OP = r \quad CP = a$

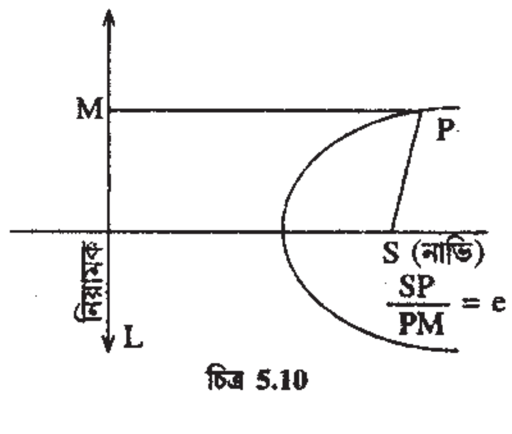
$\angle COP = \theta - \alpha$

$\therefore \quad a^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হয় $\boxed{r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha) + R^2 - a^2 = 0}$

5.9 কনিকের সংজ্ঞা

মনে করুন কোনও সমতলে S একটি প্রদত্ত বিন্দু ও L একটি প্রদত্ত সরলরেখা। এখন ঐ সমতলে একটি বিন্দু এরূপ গতিশীল থাকে যে, তার সকল অবস্থানে S বিন্দু ও L সরলরেখা থেকে তার দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সবসময় ধ্রুবক, তাহলে গতিশীল বিন্দুর সঞ্চার-পথকে কনিক বলে।



চিত্র 5.10

প্রদত্ত বিন্দু S-কে নাভি, প্রদত্ত সরলরেখা L-কে নিয়ামক এবং দূরত্বদ্বয়ের নির্দিষ্ট অনুপাতকে কনিকের

উৎকেন্দ্রতা বলা হয়। উৎকেন্দ্রতা সাধারণত e দ্বারা প্রকাশ করা হয়। e-এর মান সর্বদা ধনাত্মক কারণ এটি দুটি দূরত্বের অনুপাতকে প্রকাশ করে।

যদি $e = 1$ কনিকটি অধিবৃত্ত

$e < 1$ কনিকটি উপবৃত্ত

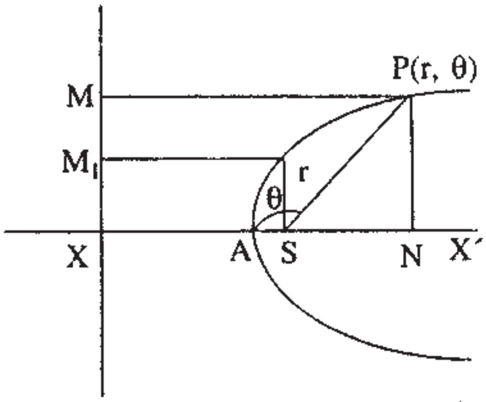
$e > 1$ কনিকটি পরাবৃত্ত

5.10 কনিকের মেরু সমীকরণ (নাভি মেরুতে অবস্থিত)

মনে করুন কনিকটির নাভি S, নিয়ামক XM_1M, e উৎকেন্দ্রতা। মনে করুন মেরু S এবং SX মেরু অক্ষ বা প্রারম্ভিক রেখা এবং কনিকটির ওপর $P(r, \theta)$ যে কোনও বিন্দু।

$\therefore \quad SP = r \qquad \angle XSP = \theta$

অক্ষের ওপর PN লম্ব টানা হল এবং SL অর্ধ-নাভিলম্ব।



চিত্র 5.11

$\therefore \quad SL = eLM_1$

$\therefore \quad SL = e.SX = \ell$ (ধরুন)... (1)

P থেকে নিয়ামকের ওপর PM লম্ব টানা হল।

$\therefore \quad r = SP = e.PM = e.NX = e(SX + SN)$

$= e.SX + e.SN = \ell + er\cos\angle PSN$, (1) থেকে

$= \ell + er\cos(\pi - \theta) = \ell - er\cos\theta$

$\ell = r + er\cos\theta = r(1 + e\cos\theta)$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta}$$

এটি নির্ণেয় কনিকের মেরু সমীকরণ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (i) যদি SX′ কে প্রারম্ভিক রেখা হিসাবে ধরা গেলে $\angle PSN = \theta$ হয় এবং কনিকের মেরু সমীকরণটি হবে $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$.

(ii) যদি কনিকটির অক্ষ প্রারম্ভিক রেখার সঙ্গে α কোণে নত থাকে এবং $P(r, \theta)$ কনিকের ওপর যে কোনও বিন্দু হলে $\angle XSP = \theta - \alpha$

$\therefore \quad \angle PSN = 180^\circ - (\theta - \alpha) = 180^\circ - \theta + \alpha$

$\therefore$ কনিকের সমীকরণ হবে $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos(\theta - \alpha)$

যদি প্রারম্ভিক রেখা SX′ হয় তাহলে কনিকের সমীকরণ হবে

$$\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos(\theta - \alpha)$$

(iii) কনিকটি অধিবৃত্ত হলে e = 1

∴ এই ক্ষেত্রে অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে,

$$\frac{\ell}{r} = 1 + \cos\theta$$

$$\therefore \quad r = \frac{\ell}{1+\cos\theta} = \frac{\ell}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

বা, $\boxed{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\ell}{2}}}$

আবার, যদি প্রারম্ভিক রেখা SX´, তাহলে অধিবৃত্তটির সমীকরণ হবে

$$\frac{\ell}{r} = 1 - \cos\theta$$

$$\therefore \quad r = \frac{\ell}{1-\cos\theta} = \frac{\ell}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

বা, $\boxed{\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\ell}{2}}}$

(iv) **নিয়ামকের সমীকরণ ঃ**

মনে করুন $Q(r, \theta)$ নিয়ামক A, B এর ওপর যে কোনও বিন্দু।

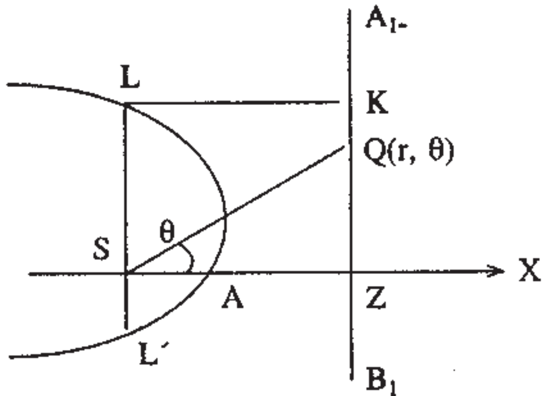
∴ QSZ ত্রিভুজ থেকে

$QS = r \quad \angle QSZ = \theta$

∴ $SZ = r\cos\theta$

বা, $LK = r\cos\theta$

$$\therefore \quad \frac{\ell}{e} = r\cos\theta$$



চিত্র 5.12

∴ $\boxed{\frac{\ell}{r} = e\cos\theta}$ নির্ণেয় নিয়ামকের সমীকরণ।

5.11 কনিকের জ্যা-এর সমীকরণ

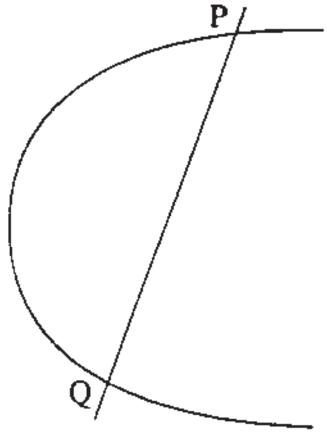
মনে করুন কনিকটির সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ ...... (1)

মনে করুন কনিকের ওপর P এবং Q দুটি বিন্দু যাদের দূরক যথাক্রমে r_1 এবং r_2 এবং ওদের নতিকোণ যথাক্রমে $\alpha - \beta$ এবং $\alpha + \beta$.

মনে করুন PQ সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta \text{ ...... (2)}$$

এখন $P(r_1, \alpha - \beta)$ বিন্দুটি (1) নং কনিক ও (2) নং সরলরেখার সাধারণ বিন্দু।



চিত্র 5.13

$$\therefore \quad \frac{\ell}{r_1} = 1 + e\cos(\alpha - \beta)$$

আবার $\frac{\ell}{r_1} = A\cos(\alpha - \beta) + \beta\sin(\alpha - \beta)$

$$\therefore \quad A\cos(\alpha - \beta) + B\sin(\alpha - \beta) = 1 + e\cos(\alpha - \beta)$$

বা, $(A - e)\cos(\alpha - \beta) + B\sin(\alpha - \beta) - 1 = 0$ ...... (3)

অনুরূপভাবে $Q(r_2, \alpha + \beta)$ বিন্দুর জন্য পাওয়া যায়

$$(A - e)\cos(\alpha + \beta) + B\sin(\alpha + \beta) - 1 = 0 \quad \text{... ... (4)}$$

∴ এখন (3) এবং (4) থেকে বজ্রগুণন করে পাওয়া যায়

$$\frac{A - e}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \frac{B}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}$$

বা, $\frac{A - e}{2\cos\alpha\sin\beta} = \frac{B}{2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{1}{2\sin\beta\cos\beta}$

$$\therefore \quad A - e = \cos\alpha\sec\beta$$

$$\therefore \quad A = e + \cos\alpha\sec\beta$$

$$B = \sin\alpha\sec\beta$$

$\therefore$ (2) থেকে, নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = (e + \cos\alpha \sec\beta)\cos\theta + \sin\alpha \sec\beta \sin\theta$$

$$\boxed{\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \sec\beta\cos(\theta - \alpha)}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

(i) কনিকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ হলে জ্যা-এর সমীকরণ হত

$$\boxed{\frac{\ell}{r} = \sec\beta\cos(\theta - \alpha) - e\cos\theta}$$

(ii) দুটি বিন্দু যাদের নতি কোণ যথাক্রমে α এবং β হলে তাদের যোগ করে জ্যা-এর সমীকরণ হবে

$$\boxed{\frac{\ell}{r} = \sec\frac{\beta - \alpha}{2}\cos\left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \ell\cos\theta}$$

(iii) যদি কনিকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos(\theta - v)$ হয় তাহলে যাদের নতি কোণ যথাক্রমে $\alpha - \beta$, এবং $\alpha + \beta$ এরূপ দুটি বিন্দু যোগ করে জ্যা-এর সমীকরণ হবে

$$\boxed{\frac{\ell}{r} = e\cos(\theta - v) + \sec\beta\cos(\theta - \alpha)}$$

5.12 কনিকের স্পর্শকের সমীকরণ

আমরা জানি যে, $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিকের দুটি বিন্দু যাদের নতি কোণ যথাক্রমে $\alpha - \beta$ এবং $\alpha + \beta$ যোগ করে যে জ্যা পাওয়া যায় সেই জ্যা-এর সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \sec\beta\cos(\theta - \alpha) \quad \ldots\ldots (1)$$

এখন একটি বিন্দুতে যার নতি কোণ α, প্রদত্ত কনিকের স্পর্শকের সমীকরণ বার করতে হলে ওপরের জ্যা এর সমীকরণে $\beta = 0$ বসাতে হবে।

$\therefore$ যে বিন্দুর নতি কোণ α, সেই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\boxed{\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

(i) কনিকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ হলে α বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\boxed{\frac{\ell}{r} = \cos(\theta - \alpha) - e\cos\theta}$$

(ii) কনিকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos(\theta - \nu)$ হলে α বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\boxed{\frac{\ell}{r} = e\cos(\theta - \nu) + \cos(\theta - \alpha)}$$

5.13 কনিকের অভিলম্বের সমীকরণ

মনে করুন কনিকটির সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \ldots \quad (1)$

আবার যে বিন্দুর নতি কোণ α, সেই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)$

এখন ঐ সরলরেখার ওপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ হবে

$$\frac{k}{r} = e\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\frac{k}{r} = -e\sin\theta - \sin(\theta - \alpha) \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

এখন k-কে এমনভাবে নেওয়া হল যাতে ওপরের লম্বটি অভিলম্ব হয় অর্থাৎ এটি $\left(\frac{\ell}{1 + e\cos\alpha}, \alpha\right)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং এটাই ছেদ বিন্দু।

$\therefore$ (2) থেকে মান বসিয়ে

$$k \cdot \frac{1 + e\cos\alpha}{\ell} = -e\sin\alpha$$

$$\therefore k = -\frac{\ell e\sin\alpha}{1 + e\cos\alpha}$$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ হবে

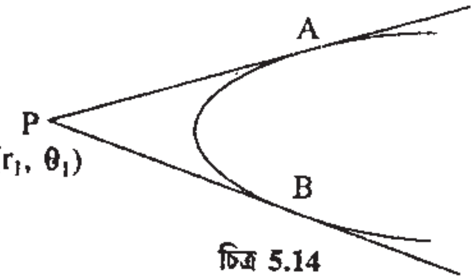
$$\boxed{\frac{\ell e\sin\alpha}{1 + e\cos\alpha} \cdot \frac{1}{r} = e\sin\theta + \sin(\theta - \alpha)}$$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি কনিকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ হয় তাহলে α বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে

$$\boxed{\frac{\ell e\sin\alpha}{1 - e\cos\alpha} \cdot \frac{1}{r} = e\sin\theta - \sin(\theta - \alpha)}$$

5.14 কনিকের স্পর্শ বিন্দুগ জ্যা-এর (Chord of contact of tangents) সমীকরণ নির্ণয়

মনে করুন কনিকটির সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos\theta$ ...... (1) এখন বহিস্থঃ কোনও বিন্দু $P(r_1, \theta_1)$ থেকে কনিকের ওপর দুটি স্পর্শক টানা হল। মনে করুন কনিক এবং স্পর্শক দুটির ছেদ বিন্দু A এবং B এর নতি কোণ যথাক্রমে $\alpha - \beta$ এবং $\alpha + \beta$.



চিত্র 5.14

$\therefore$ AB কনিকের স্পর্শ বিন্দুগ জ্যা।

এখন জ্যা-এর সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \sec\beta\cos(\theta - \alpha) \text{......} (2)$$

আবার যে বিন্দু দুটির নতি কোণ $\alpha - \beta$ এবং $\alpha + \beta$ সেই বিন্দু দুটিতে স্পর্শকের সমীকরণ যথাক্রমে

$$\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha + \beta)$$

এবং $$\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha - \beta)$$

কিন্তু ঐ স্পর্শক দুটি (r_1, θ_1) বিন্দুগামী

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad \frac{\ell}{r_1} &= e\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \alpha + \beta) \\ \text{এবং} \quad \frac{\ell}{r_1} &= e\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \alpha - \beta) \end{aligned}\right] \text{......} (3)$$

$\therefore$ (3) থেকে $\cos(\theta_1 - \alpha + \beta) = \cos(\theta_1 - \alpha - \beta)$

$\therefore$ $\theta_1 - \alpha + \beta = 2n\pi \pm \theta_1 - \alpha - \beta$

যেহেতু ওপরের চিহ্নটি β-এর একটি নির্দিষ্ট মান দেয় অতএব নীচের চিহ্ন নিয়ে

$$\theta_1 - \alpha + \beta = 2n\pi - \theta_1 + \alpha + \beta$$

বা, $\alpha = \theta_1 - n\pi$

$\therefore$ (3) থেকে $\frac{\ell}{r_1} = e\cos\theta_1 + \cos(n\pi - \beta)$

$$= e\cos\theta_1 + (-1)^n\cos\beta$$

$$\therefore \quad \frac{\ell}{r_1} - e\cos\theta_1 = (-1)^n\cos\beta$$

$\therefore$ (2) থেকে নির্ণেয় কনিকের স্পর্শ বিন্দুগ জ্যা-এর সমীকরণ

$$\left(\frac{\ell}{r} - e\cos\theta\right)\left(\frac{\ell}{r_1} - e\cos\theta_1\right) = (-1)^n \cos(\theta - \theta_1 + n\pi)\cos(\theta - \theta_1)$$

বা, $$\boxed{\left(\frac{\ell}{r} - e\cos\theta\right)\left(\frac{\ell}{r_1} - e\cos\theta_1\right) = \cos(\theta - \theta_1)}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ কনিকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ হলে (r_1, θ_1) বিন্দু থেকে কনিকের স্পর্শগ জ্যা-এর সমীকরণ হবে $\boxed{\left(\frac{\ell}{r} + e\cos\theta\right)\left(\frac{\ell}{r_1} + e\cos\theta_1\right) = \cos(\theta - \theta_1)}$

5.15 কনিকের অসীম পথের (Asymptotes) সমীকরণ

মনে করুন কনিকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ যে বিন্দুর নতি কোণ α, সেই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)$ ...... (1)

এখন স্পর্শকটি একটি অসীম পথ হবে যদি ছেদ বিন্দুটি অসীম (Infinity) হয়।

$\therefore \quad r \to \infty, \quad$ যখন $\theta \to \infty$

$\therefore \quad 0 = 1 + e\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{e}$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$

(1) থেকে $\sin\alpha$, $\cos\alpha$-এর মান বসিয়ে নির্ণেয় অসীম পথের সমীকরণ হবে

$$\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos\theta\left(-\frac{1}{e}\right) + \sin\theta\left\{\pm\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}\right\}$$

$$= \left(e - \frac{1}{e}\right)\cos\theta \pm \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}\sin\theta$$

বা, $$\left[\frac{\ell}{r} - \left(e - \frac{1}{e}\right)\cos\theta\right]^2 = \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)\sin^2\theta$$

বা, $$\left[\frac{e\ell}{r} + \left(1 - e^2\right)\cos\theta\right]^2 = \left(e^2 - 1\right)\sin^2\theta$$

5.16 উদাহরণ

1. যে বিন্দুর কার্তিয় স্থানাঙ্ক (0, 2) তার মেরু স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ নির্ণেয় মেরু স্থানাঙ্কটি (r, θ) হলে

$$r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{2}{0} = \infty = \tan 90^c$$

$$\therefore \quad \theta = 90^\circ$$

সুতরাং নির্ণেয় মেরু স্থানাঙ্ক $(2, 90^\circ)$

2. যে বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ তার কার্তিয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ বিন্দুটির কার্তিয় স্থানাঙ্ক (x, y) হলে

$$x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

সুতরাং বিন্দুটির নির্ণেয় কার্তিয় স্থানাঙ্ক হল $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

3. $x^2 - y^2 = 2ax$ সমীকরণটিকে কার্তিয় স্থানাঙ্ক থেকে মেরু স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট সমীকরণে পরিবর্তিত করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটিতে $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ বসালে

$$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2a \,.\, r\cos\theta$$

বা, $r\cos 2\theta = 2a\cos\theta$

$\therefore$ নির্ণেয় পরিবর্তিত সমীকরণ হল, $r\cos 2\theta = 2a\cos\theta$

4. $P(2, 60^\circ)$ এবং $Q(4, 30^\circ)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এস্থলে $r_1 = 2$, $\theta_1 = 60^\circ$, $r_2 = 4$, $\theta_2 = 30^\circ$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{2^2 + 4^2 - 2.2.4\cos(60^\circ - 30^\circ)}$$

$$= \sqrt{20 - 16\cos 30^\circ}$$

$$= \sqrt{20 - 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{20 - 8\sqrt{3}} \text{ একক}$$

5. কোনও ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি যথাক্রমে A(3, 30°) B(2, 60°) এবং C(4, 90°) হলে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\Delta\ ABC = \frac{1}{2}\left[3.2\sin(60^\circ - 30^\circ) + 2.4\sin(90^\circ - 60^\circ) + 4.3\sin(30^\circ - 90^\circ)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(6\sin 30^\circ + 8\sin 30^\circ - 12\sin 60^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}\left[6.\frac{1}{2} + 8.\frac{1}{2} - 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[7 - 6\sqrt{3}\right]$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left[7 - 6\sqrt{3}\right]$ বর্গএকক

6. $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ এবং $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

মনে করুন সরলরেখাটির মেরু সমীকরণ

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta \quad \ldots\ldots(1)$$

যেহেতু সরলরেখাটি $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ এবং $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুগামী

$$\therefore \quad \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2}B \quad \ldots\ldots\ (2)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B \quad \ldots\ldots\ (3)$$

(2) এবং (3) সমাধান করে $A = \frac{4\sqrt{3} - 3}{12}, \quad B = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{12}$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণে A এবং B-এর মান বসিয়ে

$$\frac{1}{r} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{12}\cos\theta + \frac{4 - 3\sqrt{3}}{12}\sin\theta$$

অথবা, $\frac{12}{r} = \left(4\sqrt{3} - 3\right)\cos\theta + \left(4 - 3\sqrt{3}\right)\sin\theta$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার মেরুসমীকরণ

$$\boxed{\frac{12}{r} = \left(4\sqrt{3} - 3\right)\cos\theta + \left(4 - 3\sqrt{3}\right)\sin\theta}$$

7. $r = 3\sin\theta + 4\cos\theta$ বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$r = 3\sin\theta + 4\cos\theta$$

মনে করুন $4 = a\cos\alpha$, $3 = a\sin\alpha$ $\therefore$ $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\therefore$ $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$r = a\cos(\theta - \alpha)$

$= 5\cos\left(\theta - \tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় কেন্দ্র $\left(\frac{5}{2}, \tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$

8. বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (a, α) এবং (b, β) হলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন AB ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় A এবং B-এর স্থানাঙ্ক (a, α) এবং (b, β)

মনে করুন $P(r, \theta)$ বৃত্তের ওপর যে কোনও বিন্দু

$\therefore$ OAP ত্রিভুজে

$OA = a$ $OP = r$ $\angle AOP = \theta - \alpha$

$\therefore$ $AP^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha)$...... (1)

OBP ত্রিভুজে,

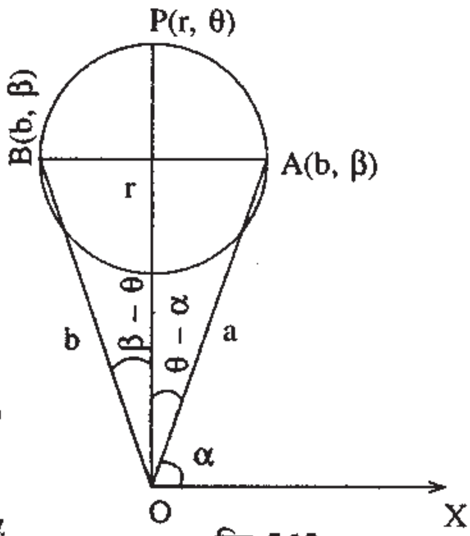
$OB = b$ $OP = r$ $\angle BOP = \beta - \theta$

$\therefore$ $BP^2 = r^2 + b^2 - 2br\cos(\beta - \theta)$

$\therefore$ $BP^2 = r^2 + b^2 - 2br\cos(\theta - \beta)$...... (2)

আবার OAB ত্রিভুজে

$OA = a'$ $OB = b$ $\angle AOB = \beta - \alpha$



চিত্র 5.15

$\therefore \quad AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta - \alpha) \quad \ldots\ldots(3)$

এখন $\angle APB = 90^\circ$

$\therefore \quad AP^2 + BP^2 = AB^2$

বা, $\quad r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha) + r^2 + b^2 - 2rb\cos(\theta - \beta)$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta - \alpha)$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ

$$\boxed{2r^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha) - 2rb\cos(\theta - \beta) + 2ab\cos(\beta - \alpha) = 0}$$

9. $\frac{15}{r} = 3 - 4\cos\theta$ কনিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

প্রদত্ত সমীকরণটিকে লেখা যায়

$\frac{5}{r} = 1 - \frac{4}{3}\cos\theta \quad \ldots\ldots \quad (1)$

এখন (1) নং সমীকরণটিকে $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে $e = \frac{4}{3} > 1$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

10. $\frac{14}{r} = 3 - 8\cos\theta$ কনিকে যে বিন্দুগুলিতে দূরক 2, সেই বিন্দুগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$\therefore$ প্রদত্ত কনিকের সমীকরণে দূরকের মান বসিয়ে

$\frac{14}{2} = 3 - 8\cos\theta$

বা, $\quad 8\cos\theta = -4 \qquad$ বা, $\quad \cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$ অথবা, $-\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলি $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ এবং $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$

11. $\frac{\ell}{r} = 1 - \cos\theta$ কনিকের ওপর 'r'-এর লঘিষ্ঠ মানের জন্য বিন্দুটি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

প্রদত্ত সমীকরণ থেকে, $r = \frac{\ell}{1-\cos\theta}$

এখন r লঘিষ্ঠ হবে যখন $1 - \cos\theta$ গরিষ্ঠ হবে।

আবার $1 - \cos\theta$ গরিষ্ঠ হলে, $\cos\theta = -1$

বা, $\theta = \pi$

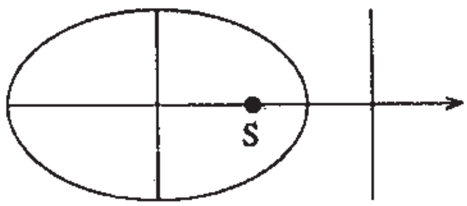
$\therefore \quad r = \frac{\ell}{1-(-1)} = \frac{\ell}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $\left(\frac{\ell}{2}, \ \pi\right)$

12. যদি মেরু দক্ষিণ-পক্ষীয় নাভিতে অবস্থিত হয় এবং ধনাত্মক মেরু অক্ষ ধনাত্মক x-অক্ষ বরাবর হয় তাহলে $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ উপবৃত্তের মেরু সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1 \quad \therefore \quad a^2 = 36, \quad b^2 = 20$

$\therefore$ **অর্ধনাভিলম্ব** $\ell = \frac{b^2}{a} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$



চিত্র 5.16

উৎকেন্দ্রতা e হলে, $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\therefore \quad 20 = 36(1 - e^2)$

বা, $e^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

$\therefore \quad e = \frac{2}{3}$

$\therefore$ উপবৃত্তটির নির্ণেয় মেরু সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$

বা, $\frac{\frac{10}{3}}{r} = 1 + \frac{2}{3}\cos\theta$

বা, $\boxed{\frac{10}{r} = 3 + 2\cos\theta}$

13. দেখান যে $\frac{1}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta$ সরলরেখাটি $r = 2a\cos\theta$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2B^2 + 2Aa = 1$.

সমাধান ঃ প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ থেকে

$$\frac{1}{r} = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\theta - \alpha)$$

যেখানে $\tan\alpha = \frac{B}{A}$

বা, $r\cos(\theta - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \ldots \quad (1)$

$r = 2a\cos\theta$ বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ a.

এখন (1) সরলরেখাটি $r = 2a\cos\theta$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $(a, 0)$ বিন্দু থেকে সরলরেখার ওপর দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধ 'a'-এর সাথে সমান হয়।

$\therefore \quad a\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = a$

বা, $\frac{A.a}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = a$

বা, $(Aa - 1)^2 = a^2(A^2 + B^2)$

বা, $\boxed{a^2B^2 + 2Aa = 1}$ (প্রমাণিত)

14. প্রমাণ করুন অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $r = a\sec\frac{\alpha}{2}\sec\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)$ এই আকারে প্রকাশ করা যায় যেখানে নাভিলম্ব 4a.

সমাধান ঃ

অধিবৃত্তের মেরু সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 + \cos\theta$

বা, $\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta \quad (\because \quad 2\ell = 4a) \quad \ldots\ldots (1)$

$\therefore$ (1)-এর স্পর্শকের মেরু সমীকরণ যার নতিকোণ α.

$$\frac{2a}{r} = \cos\theta + \cos(\theta - \alpha)$$

বা, $$\frac{2a}{r} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)$$

বা, $$\frac{a}{r} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\therefore \boxed{r = a\sec\frac{\alpha}{2}\sec\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

15. কী শর্তে $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ সরলরেখাটি $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিককে স্পর্শ করবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

কনিকের সমীকরণ $\frac{1}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \dots\dots (1)$

কনিকের স্পর্শকের সমীকরণ ($\theta = \alpha$-তে)

$$\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)$$

বা, $$\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$$

$$= (e + \cos\alpha)\cos\theta + \sin\alpha \,.\, \sin\theta \quad \dots\dots (2)$$

এখন যদি $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta \quad \dots\dots (3)$

প্রদত্ত কনিকের স্পর্শক হয় ($\theta = \alpha$-তে) তাহলে (2) এবং (3) অভিন্ন হবে।

$$\therefore \quad \frac{A}{\frac{e + \cos\alpha}{\ell}} = \frac{B}{\frac{\sin\alpha}{\ell}} = 1$$

বা, $A\ell = e + \cos\alpha$ এবং $B\ell = \sin\alpha$

বা, $A\ell - e = \cos\alpha$ এবং $B\ell = \sin\alpha$

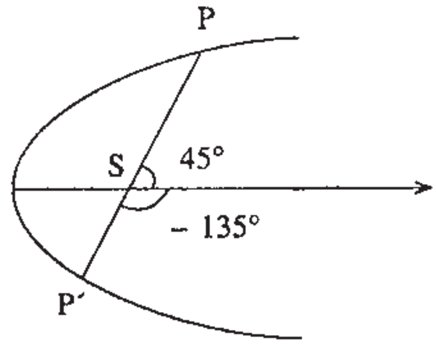
$$\therefore \quad (A\ell - e)^2 + (B\ell)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত $\boxed{\left(A\ell - e^2\right) + B^2\ell^2 = 1}$

16. একটি কনিকের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য হল 6 এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$। প্রধান অক্ষের সঙ্গে 45° কোণে নত নাভিগামী জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

মনে করুন কনিকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ এবং PSP′ নাভিগামী জ্যা, একটি মেরু অক্ষের (প্রধান অক্ষ) সঙ্গে 45° কোণে নত।



চিত্র 5.17

$$\ell = 3 \text{ এবং } e = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ P-এর স্থানাঙ্ক (SP, 45°)

$$\therefore \quad \frac{3}{SP} = 1 - \frac{1}{2}\cos 45° = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad SP = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$$

আবার P′-এর স্থানাঙ্ক (SP′, – 135°)

$$\therefore \quad \frac{3}{SP'} = 1 - \frac{1}{2}\cos(-135°) = 1 - \frac{1}{2}\cos 135°$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$SP' = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$$

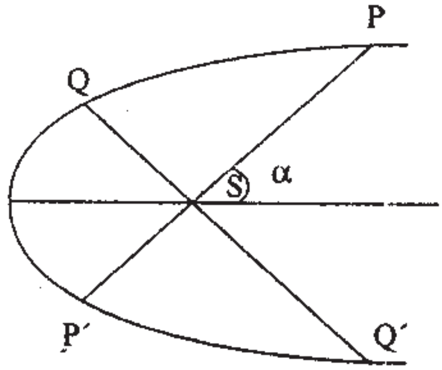
$\therefore$ নির্ণেয় নাভিগামী জ্যা-এর দৈর্ঘ্য

$$= PSP' = PS + SP' = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} + \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$$

$$= 6\sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{7} = \frac{48}{7} \text{ একক।}$$

17. যদি PSP′ ও QSQ′ একটি কনিকের পরস্পর লম্ব দুটি নাভিগামী জ্যা হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$$\frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'} = \text{একটি ধ্রুবক।}$$



চিত্র 5.18

সমাধান ঃ

মনে করুন কনিকটির সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta \ldots\ldots \quad (1)$$

মনে করুন PSP′ এবং QSQ′ পরস্পর লম্ব দুটি নাভিগামী জ্যা।

এখন যদি P-এর নতি কোণ α হয়, তাহলে Q, P′, Q′-এর নতি কোণ যথাক্রমে $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\pi + \alpha$ এবং $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ হবে।

(1) থেকে $r = \dfrac{\ell}{1 - e\cos\theta}$

$$\therefore \quad SP = \frac{1}{1 - e\cos\alpha} \qquad SP' = \frac{\ell}{1 - e\cos(\pi + \alpha)} = \frac{\ell}{1 + e\cos\alpha}$$

$$SQ = \frac{\ell}{1 - e\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\ell}{1 + e\sin\alpha}$$

$$SQ' = \frac{\ell}{1 - e\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\ell}{1 - e\sin\alpha}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{SP} = \frac{1 - e\cos\alpha}{\ell} \quad \frac{1}{SP'} = \frac{1 + e\cos\alpha}{\ell}$$

$$\frac{1}{SQ} = \frac{1 + e\sin\alpha}{\ell} \quad \frac{1}{SQ'} = \frac{1 - e\sin\alpha}{\ell}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'} = \frac{1 - e^2\cos^2\alpha}{\ell^2} + \frac{1 - e^2\sin^2\alpha}{\ell^2}$$

$$= \frac{2 - e^2}{\ell^2} = \text{ধ্রুবক (প্রমাণিত)}$$

18. যদি $r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$ উপবৃত্তের r_1 এবং r_2 পরস্পর লম্ব দূরক (Radious Vectors) হয় তাহলে প্রমাণ করুন $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ $\qquad [b^2 = a^2(1 - e^2)]$

সমাধান ঃ

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1 - e^2 \cos^2 \theta}{b^2} \quad \therefore \quad \frac{1}{r_1^2} = \frac{1 - e^2 \cos^2 \theta}{b^2}$$

এবং $$\frac{1}{r_2^2} = \frac{1 - e^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{b^2} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \theta}{b^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1 - e^2 \cos^2 \theta + 1 - e^2 \sin^2 \theta}{b^2}$$

$$= \frac{2 - e^2}{b^2} = \frac{1 + 1 - e^2}{b^2}$$

$$= \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$ (প্রমাণিত)

19. $\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos \theta$ কনিকের যে স্পর্শক, $\theta = \alpha$-তে স্পর্শকের সাথে সমান্তরাল, তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

প্রদত্ত কনিকের $\theta = \alpha$-তে স্পর্শকের সমীকরণ হল

$$\frac{\ell}{r} = e \cos \theta + \cos(\theta - \alpha) \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

মনে করুন নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\frac{\ell}{r} = e \cos \theta + \cos(\theta - \beta) \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

যেহেতু (2), (1)-এর সাথে সমান্তরাল

$\therefore$ $r \cos \theta$ এবং $r \sin \theta$-র সহগগুলি সমানুপাতিক হবে।

$$\therefore \quad \frac{e + \cos\beta}{e + \cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = k \quad \text{(মনে করুন)}$$

$\therefore \quad e + \cos \beta = k(e + \cos \alpha)$

বা, $\cos \beta = k(e + \cos \alpha) - e \qquad \ldots\ldots \quad (3)$

$\sin \beta = k \sin \alpha \qquad \ldots\ldots \quad (4)$

$\therefore$ (3) এবং (4) থেকে বর্গ এবং যোগ করে পাওয়া যায়

$$k^2\sin^2 \alpha + k^2(e + \cos \alpha)^2 + e^2 - 2ke(e + \cos \alpha) = 1$$

বা, $k^2(1 + e^2 + 2e \cos \alpha) - 2ke(e + \cos \alpha) + e^2 - 1 = 0$

বা, $(k - 1)[k(1 + e^2 + 2e \cos \alpha) - (e^2 - 1)] = 0$

হয় $k = 1$ নতুবা $k = \dfrac{e^2 - 1}{1 + e^2 + 2e\cos\alpha} \qquad \ldots\ldots \quad (5)$

$\therefore$ (2) থেকে $\dfrac{\ell}{r} = e \cos \theta + \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta$

$= e \cos \theta + \cos \theta[k(e + \cos \alpha) - e] + \sin \theta k \sin \alpha$ [(3) এবং (4) দ্বারা]

$= k[e \cos \theta + \cos(\theta - \alpha)]$

$$= \frac{e^2 - 1}{1 + e^2 + 2e\cos\alpha} \, [e \cos \theta + \cos(\theta - \alpha)]$$

বা, $\ell\left(e^2 + 2e\cos\alpha + 1\right) = r\left(e^2 - 1\right)\left[\cos(\theta - \alpha) + e\cos\theta\right]$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ

20. মেরুগামী কোনও বৃত্ত যদি $\dfrac{\ell}{r} = 1 + e \cos \theta$ কনিককে চারটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং বিন্দুগুলির দূরক r_1, r_2, r_3, r_4 হলে প্রমাণ করুন $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} + \dfrac{1}{r_4} = \dfrac{2}{\ell}$.

মেরুগামী বৃত্তের সমীকরণ হবে

$r = 2d \cos(\theta - \alpha) \quad \ldots (1)$ যেখানে d = বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\therefore$ (1) থেকে আমরা পাব $r - 2d\cos\theta\cos\alpha = 2d\sin\theta\sin\alpha$ উভয়পক্ষের বর্গ করে পাওয়া যায়

$$r^2 + 4d^2\cos^2\alpha\cos^2\theta - 4rd\cos\theta\cos\alpha = 4d^2\sin^2\theta\sin^2\alpha$$
$$= 4d^2\sin^2\alpha(1-\cos^2\theta)$$

বা, $r^2 + \cos^2\theta(4d^2\cos^2\alpha + 4d^2\sin^2\alpha) - 4rd\cos\alpha\cos\theta - 4d^2\sin\alpha = 0$

বা, $r^2 + 4d^2\cos^2\theta - 4rd\cos\theta\cos\alpha - 4d^2\sin^2\alpha = 0$ ...... (2)

আবার কনিকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ থেকে পাওয়া যায় $\cos\theta = \left(\frac{\ell}{r} - 1\right)\cdot\frac{1}{e}$

$\therefore$ (2)-তে $\cos\theta$-এর মান বসিয়ে

$$r^2 + 4d^2\left(\frac{\ell}{r} - 1\right)^2\frac{1}{\ell^2} - 4rd\cos\alpha\left(\frac{\ell}{r} - 1\right)\cdot\frac{1}{e} - 4d^2\sin^2\alpha = 0$$

বা, $e^2r^4 + (\ell - r)^2 4d^2 - 4r^2 de\cos\alpha(\ell - r) -$ [illegible] $\sin^2\alpha r^2e^2 = 0$

বা, $e^2r^4 + 4de\cos\alpha r^3 + r^2(4d^2 - 4de\ell\cos\alpha - 4d^2e^2\sin^2\alpha)$
$$- 8d^2\ell r + 4d^2\ell^2 = 0 \;\ldots\; (3)$$

যেহেতু r_1, r_2, r_3, r_4 সমীকরণ (3)-এর বীজ

$\therefore$ $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_2r_3r_4 + r_1r_3r_4 = \frac{8d^2\ell}{e^2}$ ...... (4)

এবং $r_1r_2r_3r_4 = \frac{4d^2\ell^2}{e^2}$ ...... (5)

(4) কে (5) দিয়ে ভাগ করে,

$$\boxed{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{\ell}}$$

21. প্রমাণ করুন $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ কনিকের পরস্পর লম্ব দুটি স্পর্শকের ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ $r^2(1-e^2) - 2\ell er\cos\theta - 2\ell^2 = 0$ অথবা, $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ কনিকের সহায়ক বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান :

মনে করুন $\frac{\ell}{r} = \cos(\theta - \alpha) - e\cos\theta$ ...... (1)

এবং $\frac{\ell}{r} = \cos(\theta - \beta) - e\cos\theta$ ...... (2)

প্রদত্ত কনিক $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$-এর দুটি স্পর্শক।

$\therefore$ (1) এবং (2) পরস্পর লম্ব, সুতরাং (1) এবং (2)-তে $r\cos\theta$-এর সহগ (1) এবং (2)-তে $r\sin\theta$-এর সহগের সাথে সমান কিন্তু চিহ্নে বিপরীত হবে।

$\therefore \quad (\cos\alpha - e)(\cos\beta - e) = -\sin\alpha\sin\beta$

বা, $\cos(\alpha - \beta) + e^2 - e(\cos\alpha + \cos\beta) = 0$

বা, $e^2 - 2e\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

$\therefore$ (1) এবং (2) থেকে, আমরা পাই

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$$

$\therefore \quad \theta - \alpha = \pm\,\theta - \beta$

$\therefore \quad \theta = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (\because \ \alpha \neq \beta) \qquad \ldots\ldots \quad (4)$

$\therefore$ (1) এবং (2)-এর ছেদ বিন্দুর নতি কোণ $\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\therefore$ (1) থেকে $\frac{\ell}{r} + e\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\therefore$ (3) থেকে $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$-এর মান বসিয়ে

$$e^2 - 2e\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\frac{\ell}{r} + e\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{r} + e\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

বা, $\quad - 2e\cos\theta\left(\frac{\ell}{r} + e\cos\theta\right) + 2\left(\frac{\ell}{r} + e\cos\theta\right)^2 - 1 = 0$

বা, $r^2e^2 - 2re\cos\theta(\ell + re\cos\theta) + 2(\ell + re\cos\theta)^2 - r^2 = 0$

বা, $r^2(1 - e^2) - 2\ell er\cos\theta - 2\ell^2 = 0$ (প্রমাণিত)

$\therefore$ নির্ণেয় সহায়ক বৃত্তের সমীকরণ হবে

$$\boxed{r^2(e^2 - 1) + 2\ell er\cos\theta + 2\ell^2 = 0}$$

5.17 সারাংশ

এই একক থেকে আপনারা পেলেন

(i) যে বিন্দুর কার্তিয় স্থানাঙ্ক (x, y) তার মেরু স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ এবং $r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

(ii) $P(r_1, \theta_1)$ এবং $Q(r_2, \theta_2)$ বিন্দু দুটির মধ্যে দূরত্ব

$$PQ = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

(iii) $A(r_1, \theta_1)$ $B(r_2, \theta_2)$, $C(r_3, \theta_3)$ শীর্ষ বিশিষ্ট ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}[r_1r_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + r_2r_3\sin(\theta_2 - \theta_3) + r_3r_1\sin(\theta_3 - \theta_1)]$$

(iv) যে বৃত্তের কেন্দ্র মেরুতে এবং ব্যাসার্ধ 'a' তার সমীকরণ $r = a$

(v) যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ a, মেরু পরিধির ওপর, প্রারম্ভিক রেখা ব্যাস বরাবর তার সমীকরণ $r = 2a\cos\theta$

(vi) যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ a, মেরু পরিধির ওপর ব্যাস (মেরু দিয়ে) প্রারম্ভিক রেখার সাথে α কোণে নত তার সমীকরণ $r = 2a\cos(\theta - \alpha)$

(vii) বৃত্তের কেন্দ্র (R, α), ব্যাসার্ধ a হলে বৃত্তের সমীকরণ হবে

$$r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha) + R^2 - a^2 = 0$$

(viii) কনিকের মেরু সমীকরণ (নাভি মেরুতে অবস্থিত)

$\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ [ℓ = অর্ধ নাভিলম্ব, r = দূরক, e = উৎকেন্দ্রতা, θ = নতিকোণ]

(i) কনিকটি একটি অধিবৃত্ত (e = 1)

(ii) কনিকটি একটি উপবৃত্ত (e < 1)

(iii) কনিকটি একটি পরাবৃত্ত (e > 1)

(ix) $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিকের নিয়ামকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = e\cos\theta$

(x) কনিকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ হলে এবং $P(r_1, \alpha - \beta)$, $Q(r_2, \alpha + \beta)$ কনিকের ওপর দুটি বিন্দু হলে PQ জ্যা-এর সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \sec\beta\cos(\theta - \alpha)$

(xi) $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিকের ওপর অবস্থিত যে বিন্দুর নতি কোণ α সেই বিন্দুতে স্পর্শকের মীকরণ $\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)$

(xii) অভিলম্বের সমীকরণ

$$\frac{\ell e\sin\alpha}{1 + e\cos\alpha}\cdot\frac{1}{r} = e\sin\theta + \sin(\theta - \alpha)$$

(xiv) $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিকের (r_1, θ_1) বিন্দুতে স্পর্শবিন্দুগ জ্যা-এর সমীকরণ

$$\left(\frac{\ell}{r} - e\cos\theta\right)\left(\frac{\ell}{r_1} - e\cos\theta_1\right) = \cos(\theta - \theta_1)$$

(xv) $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিকের অসীম পথের সমীকরণ

$$\left[\frac{e\ell}{r} + \left(1 - e^2\right)\cos\theta\right]^2 = \left(e^2 - 1\right)\sin^2\theta$$

5.18 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির কার্তিয় স্থানাঙ্ক, মেরু স্থানাঙ্কে পরিবর্তিত করুন।

(i) $(-1, -1)$ (ii) $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ (iii) $(3, 4)$ (iv) $(0, 7)$

2. নিম্নলিখিত মেরু স্থানাঙ্কগুলিকে কার্তিয় স্থানাঙ্কে পরিবর্তিত করুন।

(i) $\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$ (ii) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ (iii) $(3, 30^\circ)$ (iv) $(5, \pi)$

3. (i) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2$ সমীকরণটিকে কার্তিয় স্থানাঙ্ক থেকে মেরু স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট সমীকরণে পরিণত করুন।

(ii) $r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$ সমীকরণটিকে কার্তিয় স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট সমীকরণে পরিবর্তিত করুন।

(iii) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ সমীকরণকে মেরুগত স্থানাঙ্কে পরিবর্তিত করুন।

4. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করুন।

(i) $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ এবং $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ (ii) $(1, 30^\circ)$ এবং $(3, 90^\circ)$ (iii) $(2, 40^\circ)$ এবং $(4, 100^\circ)$

5. যে বৃত্ত মেরু এবং $(d, 0)\left(2d, \frac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। বৃত্তের ব্যাসার্ধটি নির্ণয় করুন।

6. কোনও ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $(3\ \ 30^\circ)$, $(2, 90^\circ)(1, 150^\circ)$ হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

7. $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ এবং $(2, \pi)$ বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখার মেরু সমীকরণ নির্ণয় করুন।

8. দেখান যে, $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ বৃত্তটি কেন্দ্র $\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \tan^{-1}\frac{b}{a}\right\}$

9. নিম্নলিখিত কনিকগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

(i) $\frac{12}{r} = 4 - \sqrt{2}\cos\theta$ (ii) $\frac{3}{r} = 2 + 4\cos\theta$

(iii) $\frac{1}{r} = 2 - 2\cos\theta$ (iv) $\frac{17}{r} = \sqrt{5} - 2\cos\theta$

10. $\frac{15}{r} = 1 - 4\cos\theta$ কনিকের যে বিন্দুগুলিতে দূরক 5 সেই বিন্দুগুলি নির্ণয় করুন।

11. $r = \frac{5}{3 - 4\cos\theta}$ কনিকের প্রকৃতি এবং নাভিলম্ব নির্ণয় করুন।

12. কী শর্তে $\frac{\ell}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ সরলরেখাটি $r = 2a\cos(\theta - \alpha)$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে, নির্ণয় করুন।

13. $\frac{12}{r} = 2\ - \cos\theta$ কনিকের নিয়ামকগুলির মেরু সমীকরণ নির্ণয় করুন।

14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের মেরু সমীকরণ নির্ণয় করুন যদি মেরু কেন্দ্রতে অবস্থিত এবং মেরু অক্ষ ধনাত্মক x-অক্ষ বরাবর।

15. যদি $r \cos(\theta - \alpha) = p$ সরলরেখাটি $\frac{\ell}{r} = 1 + \cos\theta$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে তাহলে প্রমাণ করুন $p = \frac{\ell}{2}\sec\alpha$

16. দেখান যে, $r \cos(\theta - \alpha) = p$ সরলরেখাটি $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিককে স্পর্শ করবে যদি $(\ell\cos\alpha - ep)^2 + \ell^2\sin^2\alpha = p^2$.

17. যদি PSP′ কোনো কনিকের নাভিগামী জ্যা হয় তাহলে দেখান যে $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{\ell}$.

অথবা দেখান যে কোন কনিকের অর্ধনাভিলম্ব কনিকের নাভিগামী জ্যা-এর দুটি অংশের হরাত্মক মধ্যক (Harmonic Mean)।

18. প্রমাণ করুন কোনও কনিকের পরস্পর লম্ব দুটি নাভিগামী জ্যা-এর অনোন্যকের (Reciprocal) যোগফল ধ্রুবক অথবা যদি কোনও কনিকের PSP′ এবং QSQ′ পরস্পর লম্ব দুটি নাভিগামী জ্যা হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে, $\frac{1}{PSP'} + \frac{1}{QSQ'} =$ ধ্রুবক।

19. $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ কনিকের নাভিগামী জ্যা প্রারম্ভিক রেখার (Initial line) সাথে α কোণে নত থাকলে, ঐ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

20. কোনও কনিকের উৎকেন্দ্রতা e, অর্ধনাভিলম্ব ℓ, PQ জ্যা, নাভিতে সমকোণ হলে প্রমাণ করুন

$$\left(\frac{1}{SP} - \frac{1}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{1}{SQ} - \frac{1}{\ell}\right)^2 = \frac{e^2}{\ell^2}.$$

21. যদি PSQ এবং PS′R কোনো উপবৃত্তের নাভি S এবং S′ গামী জ্যা হয় তাহলে প্রমাণ করুন

$$\frac{SP}{SQ} + \frac{S'P}{S'R} = \frac{4a}{\ell} - 2$$

(ℓ = অর্ধনাভিলম্ব, $2a$ = উপবৃত্তের পরাক্ষ অক্ষ)

মনে করুন PSQ এমন নাভিগামী জ্যা যাতে P এবং Q-এর নতিকোণ যথাক্রমে α এবং $(\pi + \alpha)$

22. $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিকের α এবং β-তে স্পর্শক দুটির ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

23. প্রমাণ করুন $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিকের নিয়ামক বৃত্তের সমীকরণ হবে,

$$r^2(e^2 - 1) - 2\ell\ er\cos\theta + 2\ell^2 = 0$$

অথবা, প্রমাণ করুন $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিকের পরস্পর লম্ব দুটি স্পর্শকের ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ $r^2(e^2 - 1) - 2\ell\ er\cos\theta + 2\ell^2 = 0$.

24. $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিকের নাভিলম্ব PSP′-এর প্রান্তবিন্দু $\left(\ell, \frac{\pi}{2}\right)$-তে অভিলম্ব টানা হল যেখানে S মেরু। প্রমাণ করুন নাভি S থেকে অপর বিন্দুর (যেখানে অভিলম্ব কনিকটিকে ছেদ করেছে) দূরত্ব হবে $\frac{\ell\left(1+3e^2+e^4\right)}{1+e^2-e^4}$.

25. $\frac{\ell_1}{r} = 1 - e_1\cos\theta$ এবং $\frac{\ell_2}{r} = 1 - e_2\cos(\theta - \alpha)$ কনিক দুটি যদি পরস্পরকে স্পর্শ করে তাহলে প্রমাণ করুন $\ell_1^2\left(1 - e_2^2\right) + \ell_2^2\left(1 - e_1^2\right) = 2\ell_1\ell_2\left(1 - \ell_1\ell_2\cos\alpha\right)$.

26. যদি $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ কনিকের PSQ নাভিগামি জ্যা অক্ষের সঙ্গে α কোণে নত থাকে তাহলে প্রমাণ করুন যে P এবং Q বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\tan^{-1}\frac{2e\sin\alpha}{1-e^2}$.

27. $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ কনিকের P এবং Q বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় T বিন্দুতে ছেদ করে তা হলে প্রমাণ করুন TP এবং TQ, নাভিতে সমান কোণ উৎপন্ন করে।

28. প্রমাণ করুন $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ কনিকের স্পর্শকের ওপর নাভি থেকে লম্বপাদ বিন্দুর সঞ্চারপথ $r^2(1 - e^2) - 2\ell er\cos\theta - \ell^2 = 0$.

29. প্রমাণ করুন $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ পরাবৃত্তের অসীমপথের মেরু সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = \frac{-\sqrt{e^2-1}}{e}\left[\sqrt{e^2-1}\cos\theta \pm \sin\theta\right]$$

30. $r(3 - 5\cos\theta) = 16$ পরাবৃত্তের অসীমপথের মেরু সমীকরণগুলি নির্ণয় করুন।

31. যদি $r\cos(\theta - \alpha) = p_i\ \ (i = 1, 2, 3)$ সরলরেখা তিনটি সমবিন্দুগামী হয় তবে দেখান যে

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & p_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & p_2 \\ \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0$$

5.19 উত্তরমালা

1. **সমাধান ঃ** (i) $x = -1, y = -1 \quad \therefore \; r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$

$$\theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মেরু স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

সংকেত ঃ (ii), (iii) এবং (iv), অনুশীলনী (i)-এর মতো

সূত্র ঃ $r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

উত্তর ঃ (ii) $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ (iii) $\left(5, \tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$ (iv) $\left(7, \frac{\pi}{2}\right)$

2. **সংকেত ঃ** $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

উত্তর ঃ (i) $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$ (ii) $(0,1)$ (iii) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (iv) $(-5, 0)$

3. **সমাধান ঃ** (i) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2$

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$ বসিয়ে

$$\left(r^2\right)^2 = a^2 \,.\, r^2\cos^2\theta$$

$\therefore$ $\boxed{r^2 = a^2\cos^2\theta}$ নির্ণেয় মেরু সমীকরণ।

(ii) **সমাধান ঃ** $r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\theta.$

বর্গ করে পাই

$$r = a\cos^2\frac{1}{2}\theta$$

$$= \frac{a}{2}(1 + \cos\theta)$$

$$\therefore \; r^2 = \frac{a}{2}(r + r\cos\theta)$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right)$$

অথবা, $2\left(x^2 + y^2\right) - ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$

বর্গ করে পাই

$$4(x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) + a^2x^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

অথবা $\boxed{4\left(x^2 + y^2\right)^2 - 4ax\left(x^2 + y^2\right) - a^2y^2 = 0}$

(iii) **সংকেত :** $r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

$$r^4 = a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

উত্তর : $\boxed{r^2 = a^2\cos 2\theta}$

4. **সমাধান :** (i) $r_1 = 2, \ \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad r_2 = 3, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

$$= \sqrt{4 + 9 - 2.2.3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{13 - 12\cos\frac{2\pi}{6}}$$

$= \sqrt{13 - 12 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{7}$ একক

(i) এবং (iii), অনুশীলনী (i)-এর মতো

সূত্র : $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

উত্তর : (ii) $\sqrt{7}$ একক (iii) $2\sqrt{3}$ একক

5. **সমাধান :** মনে করুন বৃত্তের সমীকরণ $r = A\cos\theta + B\sin\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত থেকে $d = A \qquad 2d = \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \quad B = \sqrt{3}d$$

$\therefore$ বৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ

$$r = d\cos\theta + \sqrt{3}d\sin\theta$$

$$= 2d\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$

$$= 2d\cos(\theta - 60^\circ)$$

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= d$

6. **সমাধান ঃ** ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}[2.1.\sin(150^\circ - 90^\circ) + 1.3.\sin(30^\circ - 90^\circ) + 3.2.\sin(90^\circ - 30^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}[2\sin 60^\circ - 3\sin 60^\circ + 6\sin 60^\circ]$$

$$= \frac{1}{2}\times 5\sin 60^\circ \quad \boxed{= \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ বর্গ একক}}$$

7. **সংকেত ঃ সরলরেখার ওপরে যে কোনও বিন্দু (r, θ) ধরুন। এখন $(r, \theta)\left(1, \frac{\pi}{2}\right)(2, \pi)$ বিন্দু তিনটি** একই সরলরেখায় অবস্থিত বলে, বিন্দু তিনটিদ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে। এটি নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ হবে।

উত্তর ঃ $\boxed{2 = r(2\sin\theta - \cos\theta)}$

8. **সংকেত ঃ** উদাহরণ 7-এর মতো।

9. (i) $\frac{12}{r} = 4 - \sqrt{2}\cos\theta$

বা, $\frac{3}{r} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\theta$

$\therefore$ $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাওয়া যায় $e = \frac{\sqrt{2}}{4} < 1$

$\therefore$ কনিকটি একটি উপবৃত্ত।

সংকেত : (ii), (iii), (iv)

(ii) $\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos \theta$ সমীকরণের সাথে তুলনা করুন।

(iii) এবং (iv), $\frac{\ell}{r} = 1 - e \cos \theta$-এর সাথে তুলনা করুন।

উত্তর : (ii) পরাবৃত্ত (iii) অধিবৃত্ত (iv) উপবৃত্ত।

10. **সমাধান :**

$r = 5 \qquad \therefore \quad \frac{15}{5} = 1 - 4 \cos \theta$

বা, $-4 \cos \theta = 2$

বা, $\cos \theta = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \theta = \frac{2\pi}{3}, \ -\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুদ্বয় $\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$ এবং $\left(5, -\frac{2\pi}{3}\right)$

11. সমাধান :

$$r = \frac{5}{3 - 4\cos\theta}$$

বা, $\frac{5}{r} = 3 - 4\cos\theta$

বা, $\frac{\frac{5}{3}}{r} = 1 - \frac{4}{3}\cos\theta$

$\therefore \quad \frac{\ell}{r} = 1 - e \cos \theta$-এর সাথে তুলনা করে

$\ell = \frac{5}{3} \qquad e = \frac{4}{3} > 1$

$\therefore$ কনিকটি পরাবৃত্ত এবং নাভিলম্ব $= 2\ell = \frac{10}{3}$

12. **সমাধান :**

প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ

$r = 2a\cos(\theta - \alpha)$

বা, $r^2 = 2a\cos\alpha \,.\, r\cos\theta + 2a\sin\alpha \,.\, r\sin\theta$

$r\cos\theta = x$ এবং $r\sin\theta = y$ বসিয়ে এবং $r^2 = x^2 + y^2$

আমরা পাই $x^2 + y^2 = 2a\cos\alpha \,.\, x + 2a\sin\alpha \,.\, y$

বা, $x^2 + y^2 - 2a\cos\alpha \,.\, x - 2a\sin\alpha \,.\, y = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$

আবার সরলরেখার সমীকরণ থেকে

$$\ell = A\, r\cos\theta + B\, r\sin\theta$$

বা, $Ax + By - \ell = 0 \quad \ldots\ldots \quad (i)$

এখন $\frac{\ell}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ সরলরেখাটি (1) বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি (1) বৃত্তের কেন্দ্র $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ থেকে $Ax + By - \ell = 0$ সরলরেখার ওপর লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধ a-এর সাথে সমান হয়।

অর্থাৎ, যদি $\left|\dfrac{A.\,a\cos\alpha + B.\,a\sin\alpha - \ell}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = a$

অর্থাৎ, যদি $\boxed{(Aa\cos\alpha + Ba\sin\alpha - \ell)^2 = a^2(A^2 + B^2)}$ নির্ণেয় শর্ত।

13. **সমাধান :**

$\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ কনিকের নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হল,

$$r = -\frac{\ell}{e}\sec\theta \text{ এবং } r = \frac{\ell}{e} \times \frac{1+e^2}{1-e^2}\sec\theta$$

এখন $\ell = 6,\ e = \frac{1}{2}$

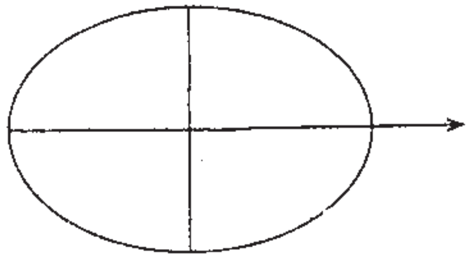
$$\therefore \quad \frac{\ell}{e} = 12 \text{ এবং } \frac{\ell}{e} \cdot \frac{1+e^2}{1-e^2} = 12 \times \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 20$$

$\therefore$ নির্ণেয় নিয়ামকদুটির সমীকরণ $r = -12\sec\theta$ এবং $r = 20\sec\theta$

14. **সমাধান ঃ**

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

প্রদত্ত উপবৃত্তের কার্তিয় সমীকরণে বসিয়ে



চিত্র 5.19

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$$

বা, $$r^2\left[\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{1-\cos^2\theta}{b^2}\right] = 1$$

বা, $$r^2\left[\frac{\cos^2\theta\left(1-e^2\right)}{b^2} + \frac{1-\cos^2\theta}{b^2}\right] = 1 \quad \left[\because a^2 = \frac{b^2}{1-e^2}\right]$$

বা, $$r^2\left[\frac{1-e^2\cos^2\theta}{b^2}\right] = 1$$

বা, $r^2 = \dfrac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta}$ নির্ণেয় সমীকরণ

15. **সমাধান ঃ**

$$\frac{\ell}{r} = 1 + \cos\theta \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$r\cos(\theta - \alpha) = p$$

সুতরাং $\dfrac{p}{r} = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha \qquad \ldots\ldots \quad (2)$

মনে করুন (2), $(\theta = \theta_1)$ বিন্দুতে (1)-এর স্পর্শক হয়

$\therefore$ $(\theta = \theta_1)$ বিন্দুতে (1) এর স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$\frac{\ell}{r} = \cos\theta + \cos(\theta - \theta_1)$$

বা, $\dfrac{\ell}{r} = (1 + \cos\theta_1)\cos\theta + (\sin\theta_1)\sin\theta \qquad \ldots\ldots \quad (3)$

$\therefore$ (2) এবং (3) অভিন্ন যেহেতু উভয়েই একই বিন্দুতে (1)-এর স্পর্শক।

$$\therefore \quad \frac{p}{\ell} = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\theta_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta_1}$$

বা, $1 + \cos\theta_1 = \frac{\ell}{p}\cos\alpha$ এবং $\sin\theta_1 = \frac{\ell}{p}\sin\alpha$ ...... (5)

বা, $\cos\theta_1 = \frac{\ell}{p}\cos\alpha - 1$ ...... (4)

$\therefore$ (4) এবং (5) থেকে বর্গ করে এবং যোগ করে পাওয়া যায়

$$\frac{\ell^2}{p^2}\cos^2\alpha - \frac{2\ell}{p}\cos\alpha + 1 + \frac{\ell^2}{p^2}\sin^2\alpha = 1$$

বা, $\frac{2\ell}{p}\cos\alpha = \frac{\ell^2}{p^2}$

বা, $\cos\alpha = \frac{\ell}{2p}$

$\therefore$ $\boxed{p = \frac{\ell}{2}\sec\alpha}$ (প্রমাণিত)

16. **সমাধান ঃ**

মনে করুন, $r\cos(\theta - \alpha) = p$

বা, $\frac{p}{r} = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$ ...... (1) সরলরেখাটি কনিকটিকে β বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$\therefore$ β বিন্দুতে প্রদত্ত কনিকের স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \beta)$$

$\therefore$ $\frac{\ell}{r} = \cos\theta(e + \cos\beta) + \sin\theta\sin\beta$ ...... (2)

যেহেতু (1) এবং (2) অভিন্ন

$$\therefore \quad \frac{p}{\ell} = \frac{\cos\alpha}{e+\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$\therefore \quad \sin\beta = \dfrac{\ell \sin\alpha}{p}$ এবং $\cos\beta = \dfrac{\ell\cos\alpha}{p} - e$

এখন $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত $\left(\dfrac{\ell\sin\alpha}{p}\right)^2 + \left(\dfrac{\ell\cos\alpha}{p} - e\right)^2 = 1$

বা, $\boxed{(\ell\cos\alpha - ep)^2 + \ell^2\sin^2\alpha = p^2}$

17. **সমাধান :**

মনে করুন কনিকটির সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta \quad \ldots\ldots (1)$$

মনে করুন PSP′ কনিকটির যে কোন একটি নাভিগামী জ্যা।

মনে করুন P বিন্দুর নতি কোণ α'

$\therefore$ P′-এর নতি কোণ হবে $(\pi + \alpha)$

যেহেতু P এবং P′(1)-এর ওপর অবস্থিত

$$\therefore \quad \frac{\ell}{SP} = 1 - e\cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

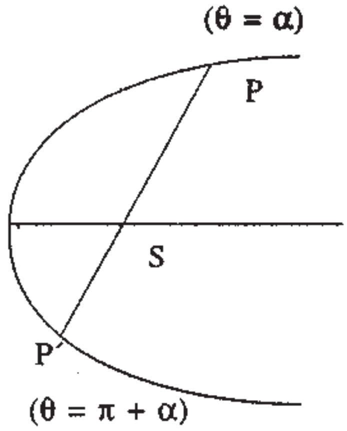
এবং $\dfrac{\ell}{SP'} = 1 - e\cos(\pi + \alpha)$

$$= 1 + e\cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

(2) + (3) থেকে

$$\ell\left(\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'}\right) = 2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{\ell}$$



চিত্র 5.20

$\therefore$ কনিকের নাভিগামী জ্যা-এর দুটি অংশের অনোন্যকের যোগফল ধ্রুবক।

[আবার a, b, c যদি হরাত্মক্ প্রগতিতে (Harmonic Progression বা H.P.) থাকে তবে b-কে a এবং c-এর হরাত্মক মধ্যক (H.M.) বলে।

অর্থাৎ, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ হরাত্মক প্রগতিতে থাকবে (H.P)

$$\therefore \quad \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$$

$\therefore$ এখানে অর্ধ নাভিলম্ব l, নাভিগামী জ্যা PSP′-এর দুটি অংশ SP এবং SP′-এর হরাত্মকমধ্যক (H.M.)

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{\ell}$ **এই সম্বন্ধকে অনেক সময় এই বলে প্রকাশ করা যায় যে নাভিগামী** জ্যা-এর দুটি অংশের বীজগাণিতিক দৈর্ঘ্যের সমঞ্জস গড় হল অর্ধ নাভিলম্ব।

18. **সংকেত ঃ** উদাহরণ 17-এর মতো।

SP এবং SP′ নির্ণয় করুন।

PSP′ = SP + SP′

SQ এবং SQ′ নির্ণয় করুন।

QSQ′ = SQ + SQ′

এখন $\frac{1}{PSP'} + \frac{1}{QSQ'}$ নির্ণয় করুন।

19. **সমাধান ঃ**

মনে করুন প্রদত্ত কনিকটির PSP′ নাভিগামী জ্যা প্রারম্ভিক রেখার সাথে α কোণে নত।

$\therefore$ **P-এর নতি কোণ α হলে P′-এর নতি কোণ হবে $180° + \alpha$**

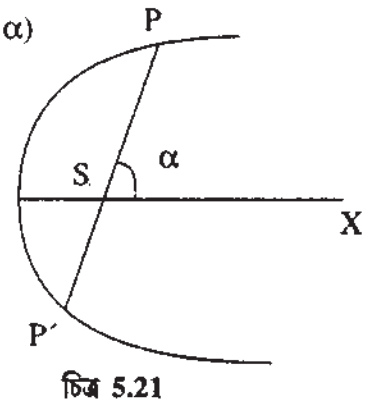
$$\therefore \quad \frac{\ell}{SP} = 1 - e\cos\alpha \text{ এবং } \frac{\ell}{SP'} = 1 - e\cos(180° + \alpha)$$

$$= 1 + e\cos\alpha$$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা-এর দৈর্ঘ্য = SP + SP′

$$= \frac{\ell}{1 - e\cos\alpha} + \frac{\ell}{1 + e\cos\alpha}$$

$$= \frac{2\ell}{1 - e^2\cos^2\alpha}$$



চিত্র 5.21

20. **সমাধান :**

মনে করুন কনিকের সমীকরণ $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$

যার মেরু, নাভি S,

মনে করুন P-এর (S ভেক্টরীয় কোণ বা নতি কোণ α_1)

$\therefore$ Q-এর নতি কোণ হবে, $-(90° - \alpha)$

$$\therefore \quad \frac{\ell}{SP} = 1 - e\cos\alpha$$

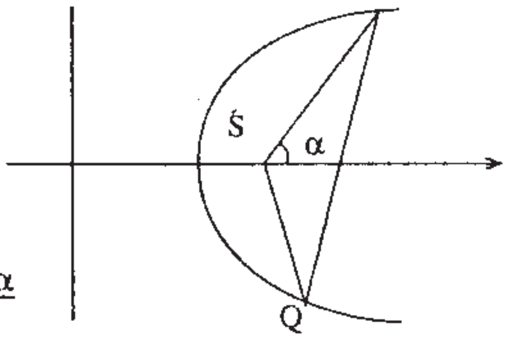
$$\therefore \quad \frac{\ell}{SQ} = 1 - e\cos\{-(90° - \alpha)\}$$

$$= 1 - e\sin\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{1}{SP} = \frac{1}{\ell} - \frac{e\cos\alpha}{\ell} \text{ এবং } \frac{1}{SQ} = \frac{1}{\ell} - \frac{e\sin\alpha}{\ell}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{SP} - \frac{1}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{1}{SQ} - \frac{1}{\ell}\right)^2$$

$$= \frac{e^2\cos^2\alpha}{\ell^2} + \frac{e^2\sin^2\alpha}{\ell^2} = \frac{e^2}{\ell^2} \text{ (প্রমাণিত)}$$



চিত্র 5.22

20. **সমাধান :**

$$\frac{\ell}{SP} = 1 + e\cos\alpha \quad \frac{\ell}{SQ} = 1 + e\cos(\pi + \alpha)$$

$$= 1 - e\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{2}{\ell}$$

বা, $1 + \frac{SP}{SQ} = \frac{2SP}{\ell}$

বা, $\frac{SP}{SQ} = \frac{2}{\ell}SP - 1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$

আবার PSR´ একটি নাভিগামী জ্যা।

$$\therefore \quad \frac{1}{S'P} + \frac{1}{S'R} = \frac{2}{\ell}$$

বা, $\frac{SP}{SQ} = \frac{2}{\ell}SP - 1 \quad \ldots\ldots \quad (2)$

(1) + (2) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{SP}{SQ} + \frac{S'P}{S'R} = \frac{2}{\ell}(SP + S'P) - 2$$

$$= \frac{4a}{\ell} - 2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

22. **সমাধান :**

α এবং β-তে স্পর্শকের সমীকরণ যথাক্রমে

$$\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

এবং $$\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \beta) \ldots\ldots (2)$$

(1) থেকে (2) বিয়োগ করে পাওয়া যায়

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$$

$$\therefore \quad \theta - \alpha = \pm(\theta - \beta)$$

কিন্তু ধনাত্মক রাশি গ্রহণযোগ্য নয় কারণ এ ক্ষেত্রে $\alpha = \beta$ হবে

$$\therefore \quad \theta - \alpha = -(\theta - \beta)$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

(1) থেকে θ-এর মান বসিয়ে

$$\frac{\ell}{r} = e\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\left[\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right]$$

বা, $$\frac{\ell}{r} = e\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$\therefore$ **যদি (r_1, θ_1) স্পর্শক দুটির ছেদ বিন্দু হয় তাহলে**

$$\theta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ এবং } \frac{\ell}{r_1} = \cos\frac{\beta-\alpha}{2} + e\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

23. **সমাধান :**

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

(1) কনিকের $(\theta = \alpha)$ তে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

বা, $\frac{\ell}{r} = (e + \cos\alpha)\cos\theta + (\sin\alpha)\sin\theta$

বা, $(e + \cos\alpha)x + \sin\alpha \cdot y - \ell = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2')$

(উভয় পক্ষকে r দিয়ে গুণ করে এবং $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ বসিয়ে)

$$[m_1 \text{ আনতি (slope)} = -\frac{e + \cos\alpha}{\sin\alpha}]$$

আবার $(\theta = \beta)$ তে (1) কনিকের স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = e\cos\beta + \cos(\theta - \beta) \quad \ldots \quad (3)$$

বা, $\frac{\ell}{r} = (e + \cos\beta)\cos\theta + (\sin\beta)\sin\theta$

বা, $(e + \cos\beta)x + (\sin\beta)y - l = 0 \quad \ldots \quad (3')$

$$m_2 = (3')\text{-এর আনতি (Slope)} = -\frac{e + \cos\beta}{\sin\beta}$$

মনে করুন (2) এবং (3) এর ছেদ বিন্দু (r_1, θ_1)

$$\therefore \quad \frac{\ell}{r_1} = e\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \alpha) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\frac{\ell}{r_1} = e\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \beta) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$\therefore$ (4)—(5) থেকে পাওয়া যায়

$$\cos(\theta_1 - \alpha) - \cos(\theta_1 - \beta) = 0$$

বা, $2\sin\left(\theta_1 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = 0$

$$\therefore \quad \sin\left(\theta_1 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \quad \left[\because \alpha \neq \beta, \because \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \neq 0\right]$$

সুতরাং $\theta_1 - \frac{\alpha + \beta}{2} = n\pi \quad \ldots\ldots (6)$ (যেখানে n একটি যে কোন রাশি)

আবার (2) এবং (3) সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হবে যদি (2´) এবং (3´) পরস্পর লম্ব হয়।

$\because \quad m_1 m_2 = -1$

বা, $\quad -\dfrac{e+\cos\alpha}{\sin\alpha} \times \left(-\dfrac{e+\cos\beta}{\sin\beta}\right) = -1$

বা, $\quad e^2 + e(\cos\alpha + \cos\beta) + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0$

বা, $\quad e^2 + e\,.\,2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} + \cos(\alpha-\beta) = 0$

বা, $\quad e^2 + 2e\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots (7)$

আবার (6) থেকে $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \cos(\theta_1 - n\pi)$

বা, $\quad \cos(n\pi - \theta_1) = (-1)^n \cos\theta_1 \quad \ldots\ldots \quad (8)$

$\therefore \quad \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right) = \cos(\theta_1 - n\pi - \beta)$

$= \cos\{n\pi - (\theta_1 - \beta)\}$

$= (-1)^n \cos(\theta_1 - \beta) \quad \ldots\ldots \quad (9)$

$\therefore$ (7) থেকে (8) এবং (9) ব্যবহার করে

$$e^2 + 2e(-1)^n \cos\theta_1 (-1)^n \cos(\theta_1 - \beta) + 2(-1)^{2n}\cos^2(\theta_1 - \beta) - 1 = 0$$

বা, $e^2 + 2e(-1)^n \cos\theta_1 (-1)^n\left[\dfrac{\ell}{r_1} - e\cos\theta_1\right] + 2(-1)^{2n}\left[\dfrac{\ell}{r_1} - e\cos\theta_1\right]^2 - 1 = 0$

বা, $\quad r_1^2 e^2 + 2e\cos[e r_1^2 \cos\theta_1] + 2[\ell^2 - 2\ell e\cos\theta_1 r_1 + e^2\cos^2\theta_1\, r_1^2] - r_1^2 = 0$

বা, $\quad r_1^2 e^2 + 2e\ell\cos\theta_1 r_1 - 2e^2 r_1^2\cos^2\theta_1 + 2\ell^2 - 4\ell e\cos\theta_1 r_1 + 2e^2\cos^2\theta_1 r_1^2 - r_1^2 = 0$

বা, $\quad r_1^2(e^2 - 1) + 2\ell^2 - 2\ell e r_1 \cos\theta_1 = 0$

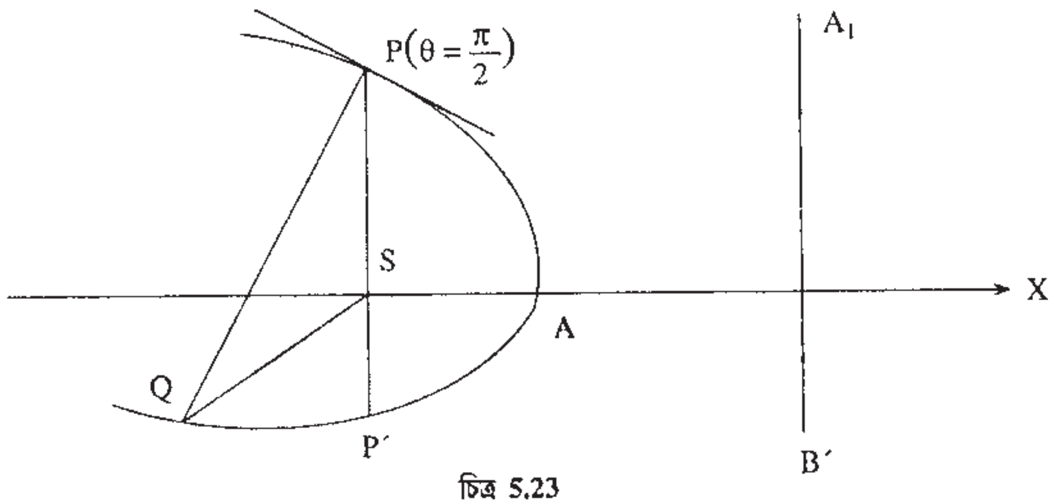
$\therefore \quad (r_1, \theta_1)$ এর সঞ্চার পথ

$r^2(e^2 - 1) + 2\ell^2 - 2\ell\, er\cos\theta = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় নিয়ামক বৃত্তের সমীকরণ

$r^2(e^2 - 1) - 2\ell\, er\cos\theta + 2\ell^2 = 0$

24. **সমাধান :**



চিত্র 5.23

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \ldots\ldots \ (1)$$

$P\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$\frac{e\sin\frac{\pi}{2}}{1 + e\cos\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\ell}{r} = e\sin\theta + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

বা, $\frac{e\ell}{r} = e\sin\theta - \cos\theta$

বা, $\frac{e\ell}{r} + \cos\theta = e\sin\theta$

বা, $\left(\frac{e\ell}{r} + \cos\theta\right)^2 = e^2\sin^2\theta = e^2(1 - \cos^2\theta) \quad \ldots\ldots \ (2)$

(1) এবং (2) থেকে 'θ' অপনয়ন করে

$$\left(\frac{e\ell}{r} + \frac{\ell - r}{er}\right)^2 = e^2\left[1 - \left(\frac{\ell - r}{er}\right)^2\right] \quad [(1) \text{ থেকে}]$$

বা, $\left(e^2\ell + \ell - r\right)^2 = e^2\left[e^2r^2 - \left(\ell^2 - 2\ell r + r^2\right)\right]$

বা, $e^4\ell^2 + \ell^2 + r^2 + 2e^2\ell^2 - 2\ell r - 2\ell r.e^2 = e^4r^2 - \ell^2e^2 + 2\ell re^2 - e^2r^2$

বা, $\left(1 - e^4 + e^2\right)r^2 - 2r\ell\left(1 + e^2 + \ell^2\right) + \ell^2\left(1 + 3e^2 + e^4\right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$

$$\therefore \quad SP.SQ = \frac{\ell^2\left(1 + 3e^2 + e^4\right)}{1 - e^4 + e^2}$$

বা, $\ell.SQ = \dfrac{\ell^2\left(1 + 3e^2 + e^4\right)}{1 - e^4 + e^2} \qquad (\because \quad SP = \ell)$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $SQ = \dfrac{\ell\left(1 + 3e^2 + e^4\right)}{1 - e^4 + e^2}$

25. **সমাধান ঃ**

$$\frac{\ell_1}{r} = 1 - e_1 \cos\theta \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{\ell_2}{r} = 1 - e_2 \cos(\theta - \alpha) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

মনে করুন (1) এবং (2) $(\theta = \theta_1)$ বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ (1) এবং (2)-এর $(\theta = \theta_1)$-তে স্পর্শকের সমীকরণ যথাক্রমে

$$\frac{\ell_1}{r} = -e_1 \cos\theta + \cos(\theta - \theta_1)$$

বা, $\dfrac{\ell_1}{r} = (\cos\theta_1 - e_1)\cos\theta + (\sin\theta_1)\sin\theta \quad \ldots\ldots \quad (3)$

$$\frac{\ell_2}{r} = -e_2\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta - \theta_1)$$

$$= (\cos\theta_1 - e_2\cos\alpha)\cos\theta + (\sin\theta_1 - e_2\sin\alpha)\sin\theta \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$\therefore$ (3) এবং (4) অভিন্ন [যেহেতু (3) এবং (4), (1) এবং (2)-এর $(\theta = \theta_1)$ বিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক]

$$\therefore \quad \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\cos\theta_1 - e_1}{\cos\theta_1 - e_2\cos\alpha} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_1 - e_2\sin\alpha}$$

$$\therefore \quad \ell_1\cos\theta_1 - \ell_1e_2\cos\alpha = \ell_2\cos\theta_1 - e_1\ell_2 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\ell_1\sin\theta_1 - \ell_1e_2\sin\alpha = \ell_2\sin\theta_1$$

বা, $\left(\ell_1 - \ell_2\right)\sin\theta_1 = \ell_1e_2\sin\alpha \quad \ldots\ldots \quad (6)$

Q বিন্দুতে $(\theta = \pi + \alpha)$ (1)-এর স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = -e\cos\theta + \cos(\theta - \pi - \alpha)$$

বা, $$\frac{\ell}{r} = -e\cos\theta + \cos[\pi - (\theta - \alpha)]$$

বা, $$\frac{\ell}{r} = -e\cos\theta - \cos(\theta - \alpha)$$

বা, $$-\ell = (e + \cos\alpha)(r\cos\theta) + \sin\alpha(r\sin\theta)$$

বা, $$(e + \cos\alpha)x + \sin\alpha \,.\, y + \ell = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$m_2 = 3\text{-এর আনতি (slope)} = -\frac{e + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

এখন যদি (2) এবং (3) স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ_1 হয় তাহলে

$$\tan\theta_1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{\frac{e - \cos\alpha}{\sin\alpha} \,.\, 1 + \frac{e + \cos\alpha}{\sin\alpha}}{1 - \frac{e - \cos\alpha}{\sin\alpha} \,.\, \frac{e + \cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$= \frac{2e}{\sin\alpha} \times \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha - \left(e^2 - \cos^2\alpha\right)}$$

$$= \frac{2e\sin\alpha}{1 - e^2}$$

$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{2e\sin\alpha}{1 - e^2}$ **(প্রমাণিত)**

(5) থেকে $\left(\ell_1 - \ell_2\right)\cos\theta_1 = \ell_1 e_2 \cos\alpha - \ell_2 e_1 \quad \ldots\ldots \quad (7)$

(6) থেকে $(\ell_1 - \ell_2)\sin\theta_1 = \ell_1 e_2 \sin\alpha \quad \ldots\ldots \quad (8)$

$\therefore$ (7) এবং (8) থেকে বর্গ করে এবং যোগ করে

$$\left(\ell_1 - \ell_2\right)^2 = \ell_1^2 e_2^2 - 2\ell_1\ell_2 e_1 e_2 \cos\alpha + \ell_2^2 e_1^2$$

বা, $$\ell_1^2 - 2\ell_1\ell_2 + \ell_2^2 - \ell_1^2 e_2^2 - \ell_2^2 e_1^2 = -2\ell_1\ell_2 e_1 e_2 \cos\alpha$$

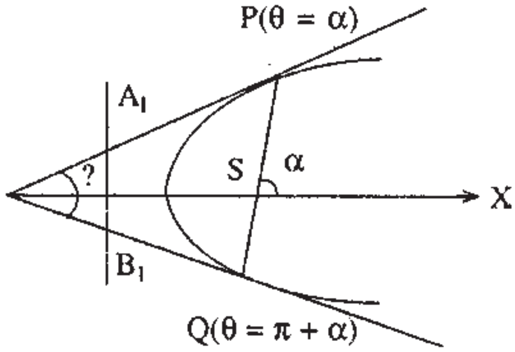
বা, $$\boxed{\ell_1^2\left(1 - e_2^2\right) + \ell_2^2\left(1 - e_1^2\right) = 2\ell_1\ell_2\left(1 - e_1 e_2 \cos\alpha\right)}$$

26. **সংকেত ঃ**

$$\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta \;......(1)$$

মনে করুন PSQ নাভিগামী জ্যা $\overrightarrow{SX}$-এর সঙ্গে α কোণে নত।

$\therefore$ P এবং Q-এর নতি কোণ যথাক্রমে α এবং $\pi + \alpha$.



চিত্র 5.24

P বিন্দুতে (1)-এর স্পর্শকের সমীকরণ $(\theta = \alpha)$

$$\frac{\ell}{r} = -e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)$$

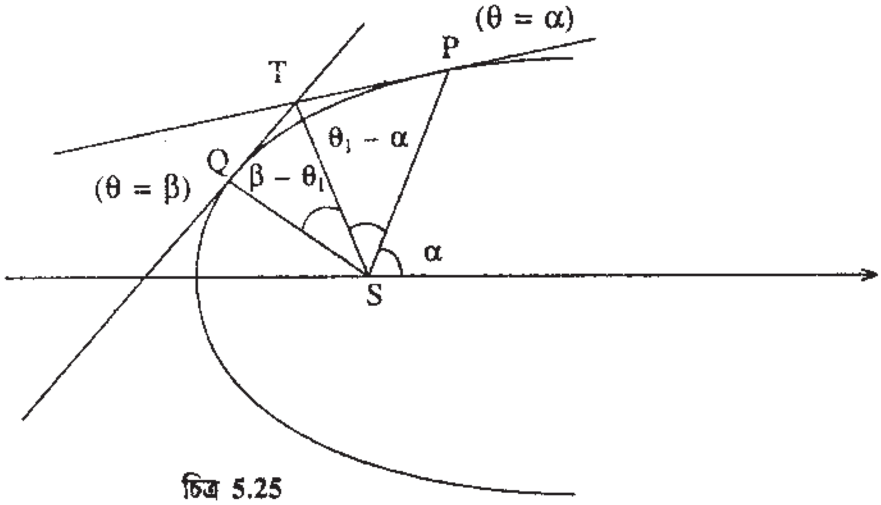
বা, $\frac{\ell}{r} = (\cos\alpha - e)\cos\theta + (\sin\alpha)\sin\theta$

$\therefore \quad (\cos\alpha - e)x + (\sin\alpha)y - \ell = 0 \quad ...... \quad (2)$

m_1 = (2)-এর আনতি (Slope) $= \frac{e - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

27. **সমাধান ঃ**

$$\frac{\ell}{r} = 1 - \cos\theta \quad ...... \quad (1)$$



চিত্র 5.25

$\therefore$ (1)-এর $P(\theta = \alpha)$ এবং $Q\ (\theta = \beta)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = -e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

এবং $$\frac{\ell}{r} = -e\cos\theta + \cos(\theta - \beta) \ldots\ldots \quad (3)$$

যেহেতু (2) এবং (3) $T(r_1, \theta_1)$-তে ছেদ করে

$$\therefore \quad \frac{\ell}{r_1} = -e\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \alpha) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

এবং $$\frac{\ell}{r_1} = -e\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \beta) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$\therefore$ (4)—(5) থেকে $\cos(\theta_1 - \alpha) = \cos(\theta_1 - \beta)$

বা, $\cos(\theta_1 - \alpha) - \cos(\theta_1 - \beta) = 0$

বা, $2\sin\dfrac{2\theta_1 - \alpha - \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2} = 0 \quad \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2} = 0$

$$\therefore \quad \sin\frac{2\theta_1 - \alpha - \beta}{2} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \because \ \alpha \neq \beta \\ \because \ \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2} \neq 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{2\theta_1 - \alpha - \beta}{2} = 0$$

বা, $2\theta_1 - \alpha - \beta = 0$

$\therefore \quad \theta_1 - \alpha = \beta - \theta_1$

$\therefore \quad \angle PST = \angle QST$

28. $\dfrac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ কনিকের স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = \cos(\theta - \alpha) - e\cos\theta \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$\therefore$ (1)-এর সঙ্গে লম্ব সরলরেখার সমীকরণ হবে

$$\frac{A}{r} = -\sin\alpha\cos\theta + (\cos\alpha - e)\sin\theta$$

বা, $A = -\sin\alpha(r\cos\theta) + (\cos\alpha - e)(r\sin\theta) \quad \ldots\ldots \quad (2)$

আবার (2) নাভিগামী হলে $r = 0 \quad \therefore \quad A = 0$

$\therefore$ (2) থেকে পাওয়া যায় $(\cos\alpha - e)\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$

বা, $e\sin\theta = \sin(\theta - \alpha) \quad \ldots\ldots \quad (4)$

(1) থেকে $\dfrac{\ell}{r} + e\cos\theta = \cos(\theta - \alpha) \quad \ldots\ldots \ (5)$

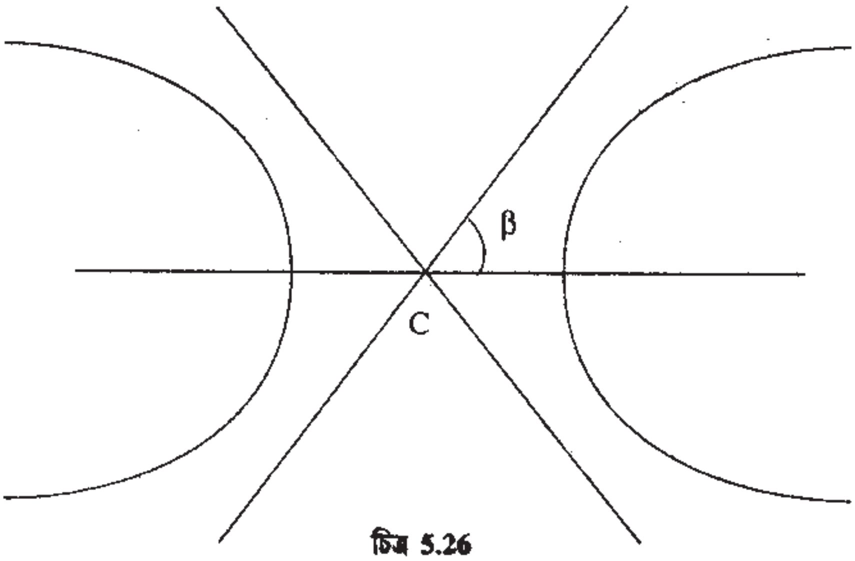
$\therefore$ (4) এবং (5) কে বর্গ এবং যোগ করে

$$\left(\frac{\ell}{r} + e\cos\theta\right)^2 + (e\sin\theta)^2 = 1$$

বা, $$\frac{\ell^2}{r^2} + 2\frac{\ell}{r}e\cos\theta + e^2 - 1 = 0$$

বা, $$\boxed{r^2\left(1 - e^2\right) - 2\ell er\cos\theta - \ell^2 = 0}$$

29. $\frac{\ell}{r} = 1 - e\cos\theta$ কনিকের কেন্দ্রের মেরু স্থানাঙ্ক $\left(\frac{\ell e}{e^2 - 1}, \pi\right)$



চিত্র 5.26

(r_1, θ_1) বিন্দুগামী এবং মেরু অক্ষের সঙ্গে β কোণে নত সরলরেখার সমীকরণ

$$r\sin(\beta - \theta) = r_1\sin(\beta - \theta_1)$$

যেহেতু পরাবৃত্তের অসীমপথগুলি কেন্দ্র $C\left(\frac{\ell e}{e^2 - 1}, \pi\right)$ গামী এবং মেরু অক্ষের সঙ্গে β কোণে নত (যেখানে $\cos\beta = \pm\frac{1}{e}$)

অতএব সমীকরণ

$$r\sin(\beta - \theta) = \frac{\ell e}{e^2 - 1}\sin(\beta - \pi) = -\frac{\ell e}{e^2 - 1}\sin\beta$$

বা, $$r\sin\beta\cos\theta - r\cos\beta\sin\theta = -\frac{\ell e}{e^2 - 1}\sin\beta$$

বা, $$r\sqrt{1 - \cos^2\beta}\cos\theta - r\cos\beta\sin\theta = -\frac{\ell e}{e^2 - 1}\sqrt{1 - \cos^2\beta}$$

বা, $$r\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}\cos\theta \pm r\cdot\frac{1}{e}\sin\theta = -\frac{\ell e}{e^2 - 1}\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} \qquad \left[\because\ \cos\beta = \pm\frac{1}{e}\right]$$

বা, $$r\sqrt{e^2 - 1}\cos\theta \pm r\sin\theta = -\frac{\ell e}{e^2 - 1}\sqrt{e^2 - 1} = -\frac{\ell e}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় অসমীপথের সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = -\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\left[\sqrt{e^2-1}\cos\theta \pm \sin\theta\right]$$

30. সংকেত ঃ

$$r(3 - 5\cos\theta) = 16$$

বা, $\frac{16}{r} = 3 - 5\cos\theta$

বা, $\frac{\frac{16}{3}}{r} = 1 - \frac{5}{3}\cos\theta$

$\therefore$ $\ell = \frac{16}{3}$, $e = \frac{5}{3}$

সূত্র ঃ $\frac{\ell}{r} = -\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\left[\sqrt{e^2-1}\cos\theta \pm \sin\theta\right]$

উত্তর ঃ (i) $r(3\sin\theta - 4\cos\theta) = 20$

(ii) $r(3\sin\theta + 4\cos\theta) + 20 = 0$

31. সমাধান ঃ

মনে করুন, প্রদত্ত সরলরেখা তিনটি (r', θ') বিন্দুগামী

$\therefore$ $r'\cos(\theta' - \alpha_i) = p_i$ $(i = 1, 2, 3)$

বা, $\cos(\theta' - \alpha_i) - \frac{p_i}{r'} = 0$

$\therefore$ $\cos\theta'\cos\alpha_1 + \sin\theta'\sin\alpha_1 - \frac{p_1}{r'} = 0$ ...... (1)

$\cos\theta'\cos\alpha_2 + \sin\theta'\sin\alpha_2 - \frac{p_2}{r'} = 0$ ...... (2)

$\cos\theta'\cos\alpha_3 + \sin\theta'\sin\alpha_3 - \frac{p_3}{r'} = 0$ ...... (3)

$\therefore$ (1), (2) ও (3) থেকে θ' ও r' অপনয়ন করে পাই

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & p_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & p_2 \\ \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0$$

একক 6 ❑ ত্রিমাত্রিক অক্ষ এবং স্থানাঙ্ক দিগ্‌নির্দেশক কোসাইন ও অনুপাত, অক্ষতন্ত্রের পরিবর্তন

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

আমরা যে জগতের সঙ্গে সর্বক্ষণ কার্যকারণে পরিচিত। তা হ'ল ত্রিমাত্রিক দেশ। অর্থাৎ আমরা যে সব ঘন বস্তুর সংস্পর্শে আসি, তা মূলত তিনটি মাত্রার মাধ্যমে পরিমাপ যোগ্য। অর্থাৎ তার মাপটা তিনটি পরস্পর সনির্ভরশীল মাত্রার সঙ্গে যুক্ত। যেমন আয়তঘনাকার বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা আছে। বেলনাকারের বস্তুর, রেডিয়াস ভেক্টর বা অর দিকবর্তী কোন বা ভেক্টোরিয়াস কোন এবং উচ্চতা আছে, গোলকাকৃতি ঘনবস্তুর পরিমাপের জন্য

প্রয়োজন। অর বা রেডিয়াস ভেক্টর, দিকবর্তী কোন এবং উন্নতি বা অবনতি কোণ (Altitude)। এই সব ত্রিমাত্রিক বস্তুর পরিমাপ এবং অবস্থান সম্যক উপলব্ধির জন্য ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতির উপস্থাপনা দরকার।

6.2 উদ্দেশ্য

আলোচ্য অধ্যায়ে ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্কের সঙ্গে সম্যক পরিচিতি ঘটানোটাই উদ্দেশ্য। আপনারা এই পত্রের ব্লক-I অংশে দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি বিষয়ে ধারণা করতে পেরেছেন। বাস্তব পরিস্থিতির কথা বিচার করলে দ্বিমাত্রিক দেশে কোন ঘনবস্তুর পরিমাপ সম্ভব নয়, তাই ত্রিমাত্রিক দেশের পরিকাঠামো ভিত্তিক ধারণা থাকা আবশ্যক। এই উদ্দেশ্য সাধনের জন্য এই অধ্যায়ে ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতির পরিকাঠামো বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

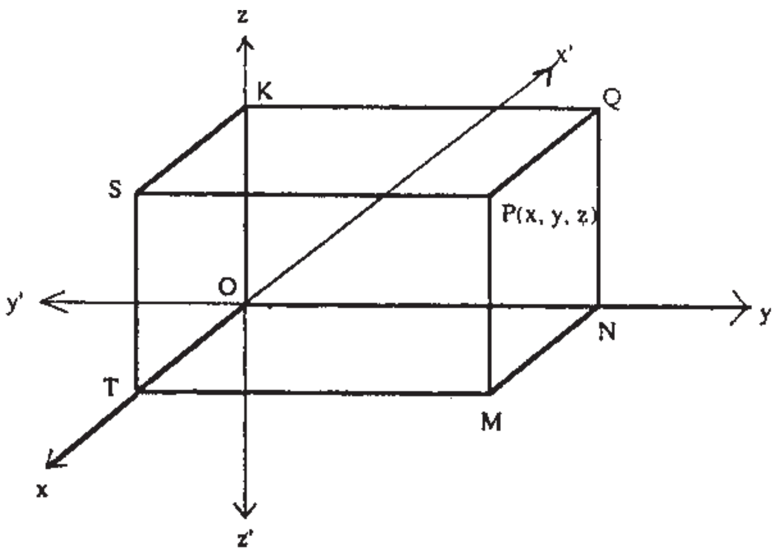
6.3 বিষয় পরিচিতি

উপরের অনুচ্ছেদেই বলা হয়েছে এই অধ্যায়ের উদ্দেশ্য হ'ল ত্রিমাত্রিক পরিকাঠামোতে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক, গোলীয় স্থানাঙ্ক এবং বেলনাকার স্থানাঙ্ক এর সঙ্গে শিক্ষার্থীর পরিচয় ঘটানো। ত্রিমাত্রিক দেশে অবশ্যই তিনটি পরস্পর অনির্ভর স্থানাঙ্ক অক্ষ থাকবে এবং সেই হিসাবে কোনবিন্দুর অবস্থান সংজ্ঞায়িত করা হবে। এর থেকে দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব এবং এই দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের দিক এর গাণিতিক প্রকাশ উল্লেখ করা হবে। বিভিন্ন অক্ষ সমূহের ধারক তলে কোন বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ এবং রেখার অভিক্ষেপ সংক্রান্ত গাণিতিক সূত্র নির্ণয় করা হবে। দুটি রেখার মধ্যেকার কোণের পরিমাপ বা, অক্ষতন্ত্রের রূপান্তর বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

6.4 ত্রিমাত্রিক দেশে কর্তেসীয় স্থানাঙ্ক, গোলীয় স্থানাঙ্ক, বেলনাকার স্থানাঙ্ক

আমরা প্রথমে ত্রিমাত্রিক দেশে লম্ব কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Rectangular Cartesian coordinates) সম্পর্কে আলোচনা করব। আমরা জানি যে ত্রিমাত্রিক দেশে একটি বিন্দুতে পরস্পর লম্ব তিনটি সরলরেখা অংকন করা যায়। ধরা যাক o বিন্দুতে $x'ox$, $y'oy$ এবং $z'oz$ এরূপ তিনটি পরস্পর লম্বরেখা। এস্থলে ox', oy', oz' যথাক্রমে পরস্পর লম্বরেখা তিনটির ধনাত্মক দিক্ ox', oy', oz' এবং ঋণাত্মক দিক্ নির্দেশ করছে।

উক্তদেশে P যে কোন একটি বিন্দু। এখন P বিন্দুগামী তিনটি সমতল অঙ্কন করা হল যারা যথাক্রমে yz, zx ও xy সমতলের সমান্তরাল (yz তল oy ও oz এর মধ্যগামী সমতল)। এরূপ অঙ্কিত সমতল তিনটি $x'ox$, $y'oy$ ও $z'oz$-কে যথাক্রমে T, N ও K বিন্দুতে ছেদ করে। $OT = x$, $ON = y$, $OK = z$ হলে (x, y, z) এই ক্রমিক সংখ্যা (ordered numbers) তিনটি তাদের মান ও যথাযথ চিহ্নদ্বারা ox, oy, oz-এর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান সম্পূর্ণভাবে নির্দেশ করছে। (x, y, z)-কে P বিন্দুর লম্ব কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলে।



চিত্র : 6.1

চিত্রে P বিন্দুগামী yz-তলের সমান্তরাল তলটি xy-তলকে TM রেখা বরাবর ছেদ করেছে এবং $PM \perp TM$ হওয়ায় আমরা লক্ষ্য করেছি O বিন্দু থেকে Ox বরাবর OT পরিমাণ, প্রান্তবিন্দু T থেকে Oy-এর দিক্‌ বরাবর $TM (= ON)$ পরিমাণ এবং সবশেষে M বিন্দু হতে Oz-এর দিক্‌ বরাবর $MP (= OK)$ পরিমাণ পথ অতিক্রম করে P বিন্দুর অবস্থান পাওয়া যাচ্ছে।

অতএব উল্টোভাবে বলা যায় (x, y, z) এরূপ তিনটি ক্রমিক সংখ্যা প্রদত্ত থাকলে আমরা ত্রিমাত্রিক দেশে একটি বিন্দুর অবস্থান পাব।

চিত্রে $x'ox$, $y'oy$, $z'oz$ অক্ষ ত্রয় সাপেক্ষে P-এর স্থানাঙ্ক নির্দিষ্ট হওয়ায় অক্ষ তিনটিকে একত্রে স্থানাঙ্ক নির্দেশক অক্ষ বা অক্ষতন্ত্র (axes of reference) বলে। $x'ox$, $y'oy$, $z'oz$-কে যথাক্রমে x অক্ষ, y-অক্ষ ও z-অক্ষ বলে। O-কে মূলবিন্দু বলা হয়। xy-তল, yz-তল ও zx-তলকে অক্ষতল বলে। x, y, z যথাক্রমে x স্থানাঙ্ক, y স্থানাঙ্ক ও z-স্থানাঙ্ক। চিত্রে $\overrightarrow{ox}$, $\overrightarrow{oy}$, $\overrightarrow{oz}$ ধনাত্মক দিক নির্দেশ করে এবং $\overrightarrow{ox'}$, $\overrightarrow{oy'}$, $\overrightarrow{oz'}$ ঋণাত্মক দিক্‌ নির্দেশ করে।

বেলনাকার স্থানাঙ্ক (Cylindrical coordinates)

উপরের চিত্রে Ox, Oy, Oz অক্ষতন্ত্রের সাপেক্ষে P বিন্দুর লম্ব কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y, z)। এখানে $MP \perp$ xy তল। $MT \perp x$ অক্ষ, অতএব $OT = x$, $TM = y$, $MP = z$

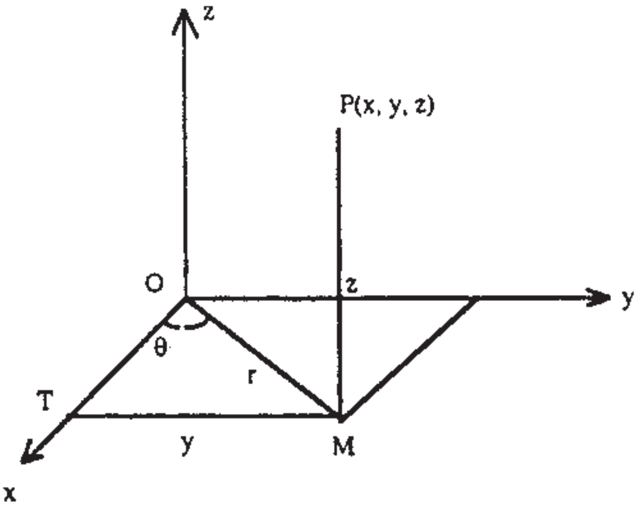
এখন ধরা যাক, $OM = r$ এবং $\angle Mox = \theta$

$\therefore$ আমরা পাই—

$x = r\cos\theta \qquad\qquad r^2 = x^2 + y^2$

$y = r \sin\theta$

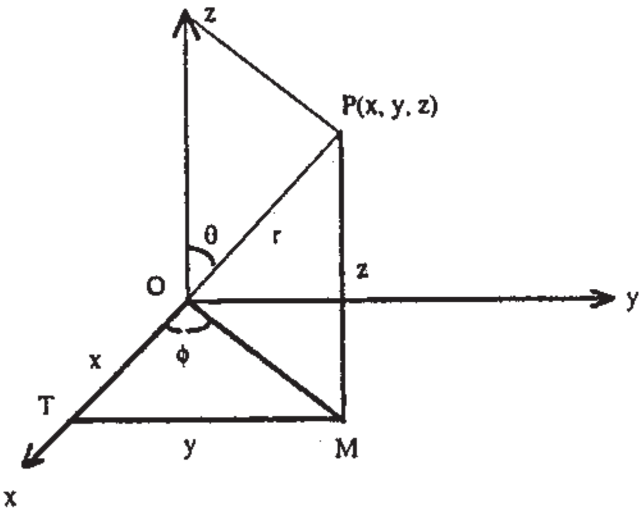
$\therefore \quad \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ এবং $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$



চিত্র : 6.2

উপরের সম্বন্ধ এবং চিত্র থেকে বলা যাবে (x, y, z)-এর যেকোন মানের জন্য (r, θ, z) পাওয়া যাবে এবং এর বিপরীত ক্রমও সত্য। এই (r, θ, z)-কে P বিন্দুর বেলনাকার স্থানাঙ্ক বলে। এখানে $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta < 2\pi$ এবং $-\infty < z < \infty$

গোলীয় স্থানাঙ্ক (Spherical coordinates)



চিত্র : 6.3

চিত্রে Ox, Oy, Oz অক্ষতন্ত্রের সাপেক্ষে (x, y, z) সংখ্যাগুলি P বিন্দুর লম্বকার্তেসীয় স্থানাঙ্ক। অতএব $PM \perp xy$ তল এবং $MT \perp x$ অক্ষ হলে আমরা পাই,—

$OT = .., TM = y, MP = z$

এখন ধরি, $OP = r$

$$\angle ZOP = \theta$$

$$\angle MOX = \phi$$

$\therefore$ আমরা পাই—

$$x = OM \cos\phi = OP \sin\theta \cos\phi = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = OM \sin\phi = OP \sin\theta \sin\phi = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = OP \cos\theta = r\cos\theta$$

সুতরাং $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

অতএব (x, y, z) এর গোলীয় স্থানাঙ্ক (r, θ, ϕ) হবে।

এখানে $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le \pi$ এবং $0 \le \phi < 2\pi$

6.5 দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব, দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভাজন

দুটি বিন্দু P ও Q-এর স্থানাঙ্ক ধরা যাক্ (x_1, y_1, z_1) এবং (x_2, y_2, z_2) নেওয়া হল, P, Q দিয়ে অক্ষতলগুলির সাথে সমান্তরাল করে তলগুলি নিম্নের চিত্রের ন্যায় অঙ্কন করা হল।এটি একটি ঘন আয়তফলক (rectangular parallelopiped) গঠন করে।

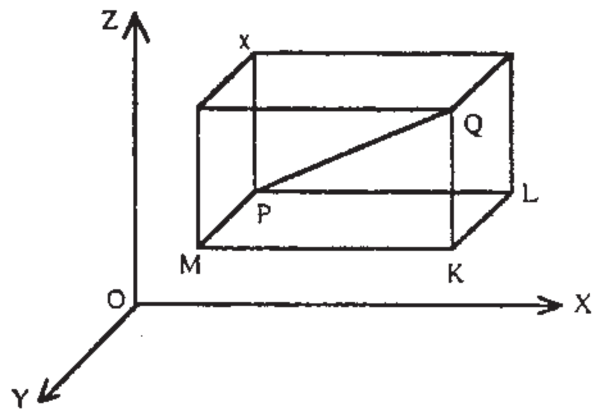
চিত্র থেকে পাই—

$$PQ^2 = PL^2 + QL^2 = PL^2 + LK^2 + KQ^2$$

এখন স্পষ্টতঃই $PL = x_2 - x_1$, $LK = y_2 - y_1$ এবং $KQ = z_2 - z_1$

$\therefore \quad PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

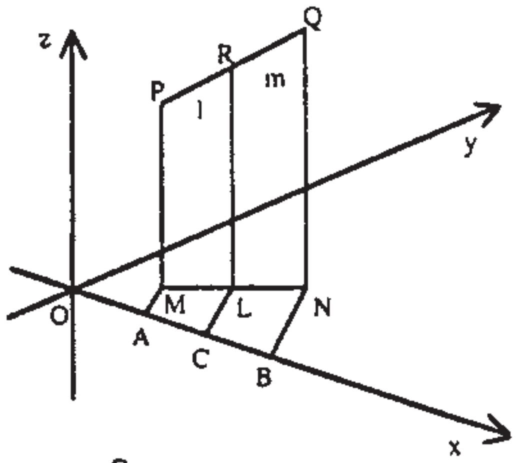
সুতরাং $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



চিত্র ঃ 6.4

এখন দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভাজনকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের পদ্ধতি নিম্নে দেওয়া হল ঃ

ধরা যাক্ $R(x, y, z)$ বিন্দুটি PQ রেখাংশকে $l : m$ অনুপাতে অন্তর্বিখণ্ডিত করেছে এবং P ও Q এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2). এখন xy তলের উপর চিত্রের ন্যায় PM, QN এবং RL লম্ব আঁকা হল। এবার MA, NB ও LC লম্ব OX এর উপর অঙ্কন করা হল।



চিত্র ঃ 6.5

এক্ষণে, $AC = x - x_1$

$CB = x_2 - x$

তাহলে, $\frac{AC}{BC}=\frac{ML}{LN}=\frac{PR}{RQ}=\frac{l}{m}$

সুতরাং $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{l}{m} \Rightarrow x=\frac{lx_2+mx_1}{l+m}$

একইভাবে পাব, $y=\frac{ly_2+my_1}{l+m}$ এবং $z=\frac{lz_2+mz_1}{l+m}$

$\therefore$ R এর স্থানাঙ্ক হল : $\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m}, \frac{ly_2+my_1}{l+m}, \frac{lz_2+mz_1}{l+m}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত 1 : PQ-কে R বিন্দুটি যদি $l:m$ অনুপাতে বহির্বিখণ্ডিত করে তাহলে R এর স্থানাঙ্ক হবে :

$$\left(\frac{lx_2-mx_1}{l-m}, \frac{ly_2-my_1}{l-m}, \frac{lz_2-mz_1}{l-m}\right)$$

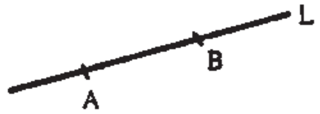
অনুসিদ্ধান্ত 2 : PQ-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

6.6 দিগযুক্ত রেখাংশ, লম্ব অভিক্ষেপ, দিগ্‌নির্দেশক কোসাইন ও দিগ্‌নির্দেশক অনুপাত এবং তাদের মধ্যে সম্পর্ক

দিগযুক্ত রেখাংশ (Directed segment) :

ত্রিমাত্রিক দেশে L একটি সরলরেখা। A ও B, L-এর উপর দুটি বিন্দু। এখন AB রেখাংশের উপর A থেকে



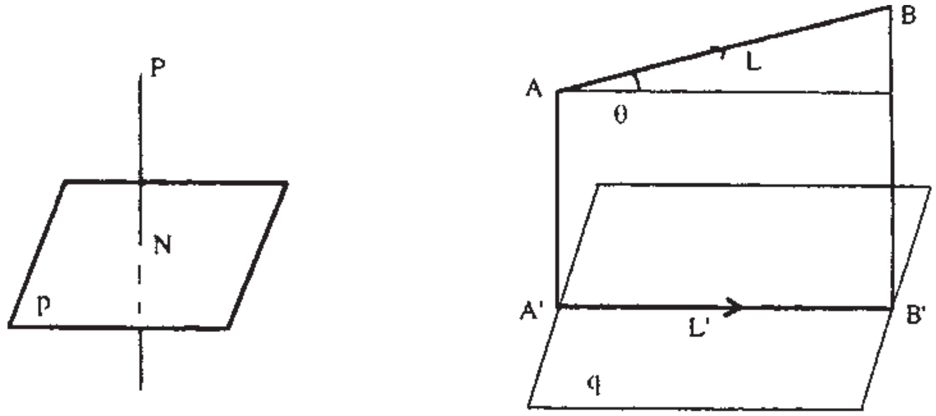
চিত্র : 6.6

B অথবা B থেকে A বরাবর দুটি দিক আরোপ করা যেতে পারে। প্রথম ক্ষেত্রে দিক্‌যুক্ত রেখাংশকে $\vec{AB}$ দ্বারা, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $\vec{BA}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে।

লম্ব অভিক্ষেপ (Projection)

ত্রিমাত্রিক দেশে P একটি বিন্দু এবং p একটি সমতল (P সমতলে নেই)। P বিন্দু থেকে p তলের উপর PN লম্ব টানা হল। এই N বিন্দুটিকে বলা হবে P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ (p সমতলের উপর)।

ত্রিমাত্রিক দেশে L একটি সরলরেখা। L সরলরেখার প্রতিটি বিন্দুর q সমতলের উপর লম্ব অভিক্ষেপের যে সঞ্চারপথ, তাই হল q এর উপর L এর লম্ব অভিক্ষেপ।



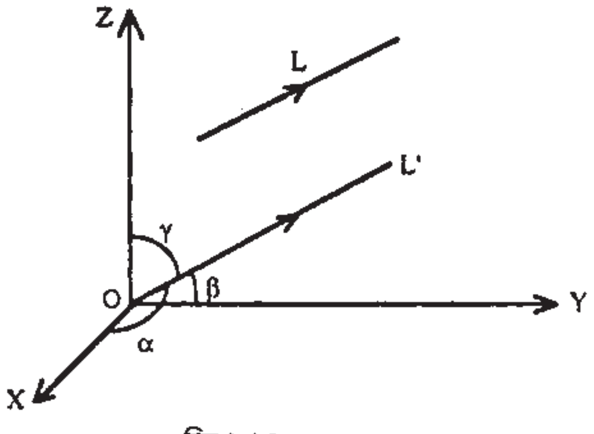
চিত্র : 6.7

L এর লম্ব অভিক্ষেপ এখানে L'.

L যদি q এর সাথে θ কোণে নত থাকে, তাহলে $L' = L \cos \theta$

দিক্‌নির্দেশক কোসাইন (Direction cosine)

ত্রিমাত্রিক দেশে Ox, Oy, Oz লম্ব কার্তেসীয় অক্ষতন্ত্র। উক্ত দেশে L একটি দিক্‌যুক্ত সরলরেখা। চিত্রে L-এর দিক্ নির্দেশিত আছে। এক্ষণে মূলবিন্দুগামী L-এর সমান্তরাল ও সমদিক্‌যুক্ত সরলরেখাটি $\overline{OL'}$ হবে। $\overline{OL}$ রেখাটি x, y ও z অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে α, β, γ কোণে নত হলে L রেখাটিও অক্ষের সঙ্গে একই কোণে নত থাকবে। α, β, γ-এই তিনটি কোণকে দিগনির্দেশক কোণ বলে। এখন $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$-এই তিনটি সংখ্যাকে বলা হবে L সরলরেখার কিংবা $\overline{OL'}$ সরলরেখার দিক্ নির্দেশক কোসাইন। সাধারণত : $l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta$, $n = \cos \gamma$ লেখা হয়।



চিত্র : 6.8

এখন L' এর স্থানাঙ্ক (x, y, z) ধরা হল।

স্পষ্টতঃই $OL' \cos\alpha = x \Rightarrow OL'.l = x$

$$OL' \cos\beta = y \Rightarrow OL'.m = y$$

$$OL' \cos\gamma = z \Rightarrow OL'.n = z$$

সুতরাং $l = \dfrac{x}{OL'}, m = \dfrac{y}{OL'}, n = \dfrac{z}{OL'}$

বা, $l^2 + m^2 + n^2 = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{OL'^2} = \dfrac{OL'^2}{OL'^2} = 1$

$\therefore \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$

অনুসিদ্ধান্ত : x, y, z অক্ষত্রয়ের দিক্ নির্দেশক কোসাইন যথাক্রমে $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ এবং $(0, 0, 1)$

দিক্নির্দেশক অনুপাত (Direction ratios) হল যেকোন সংখ্যাদ্বয় a, b, c দ্বারা যথাক্রমে দিক্‌নির্দেশক কোসাইন l, m, n এর সাথে সমানুপাতী। তাহলে l, m, n কোন রেখাংশের দিক্ নির্দেশক কোসাইন্ হলে a, b, c হবে উক্ত রেখাংশের দিক্নির্দেশক অনুপাত।

$$\therefore \quad \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \pm\frac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

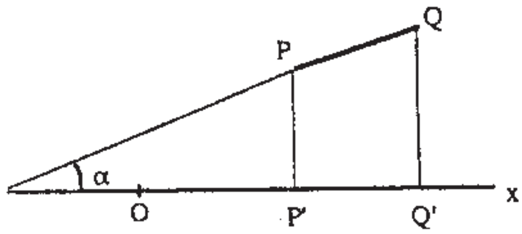
$$\therefore \quad l = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, m = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

এবং $n = \pm\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

'+' বা '−' চিহ্নের যেকোন একটি চিহ্ন বরাবর ব্যবহার করতে হবে।

6.7 দুটি বিন্দুর সংযোগরেখার দিগনির্দেশক কোসাইন

ধরা যাক্ P ও Q বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2) এবং PQ রেখার দিগনির্দেশক কোণ হল α, β, γ ও দিগনির্দেশক কোসাইন হল l, m, n. P' ও Q' বিন্দু হল X-অক্ষের উপর P ও Q বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ। এখন O মূলবিন্দু হলে



চিত্র : 6.9

$OP' = x_1, OQ' = x_2$.

$\therefore \quad P'Q' = OQ' - OP' = x_2 - x_1$.

আবার $P'Q' = X$-অক্ষের উপর PQ রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ $= PQ\cos\alpha = PQ.l$.

$\therefore \quad PQ.l = x_2 - x_1$

বা, $\quad l = \dfrac{x_2 - x_1}{PQ}$

একইভাবে, Y-অক্ষ ও Z-অক্ষের উপর লম্ব অভিক্ষেপ নিয়ে দেখানো যায়,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{PQ} \quad \therefore \quad n = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

সুতরাং PQ রেখার দিগ্‌নির্দেশক অনুপাত হল $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ ও দিগ্‌নির্দেশক কোসাইন হল,

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

6.8 দুটি বিন্দুর সংযোগকারী রেখাংশের অন্য একটি সরলরেখার উপর লম্ব অভিক্ষেপ

ধরা যাক্ P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2) এবং L সরলরেখার দিগ্‌নির্দেশক কোসাইন হল l, m, n. আমরা জানি,

$P_1Q_1 = X$-অক্ষের উপর PQ রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ $= x_2 - x_1$,

$P_2Q_2 = Y$-অক্ষের উপর PQ রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ $= y_2 - y_1$,

এবং $\quad P_3Q_3 = Z$-অক্ষের উপর PQ রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ $= z_2 - z_1$.

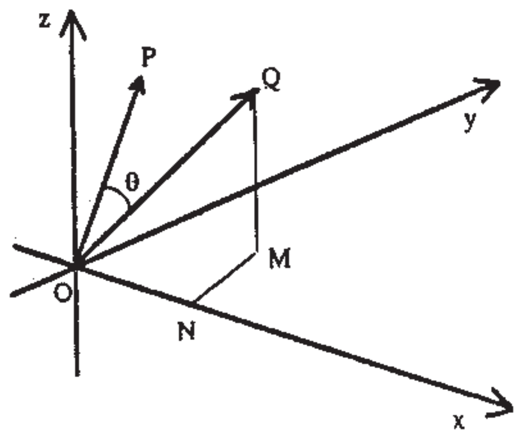
এখন, PQ রেখাংশের L-রেখার উপর লম্ব অভিক্ষেপ

$=$ L-রেখার উপর P_1Q_1-এর লম্ব অভিক্ষেপ + L-রেখার উপর P_2Q_2-এর লম্ব অভিক্ষেপ + L-রেখার উপর P_3Q_3-এর লম্ব অভিক্ষেপ।

$= \quad (x_2 - x_1)l + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)n$

6.9 দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখার অন্তর্গত কোণ

এস্থলে ধরা যাক্ মূলবিন্দু 'O' গামী দুটি সরলরেখা $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OQ}$ আছে। যারা দুটি সরলরেখার সাথে যথাক্রমে সমান্তরাল ও তাদের যথাক্রমে দিগ্‌নির্দেশক কোসাইন (l_1, m_1, n_1) এবং (l_2, m_2, n_2). এখন $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OQ}$ এর মধ্যবর্তী কোন θ-ই হবে উক্ত সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ।



চিত্র ঃ 6.10

ধরা যাক্ P ও Q-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2), xy তলের উপর QM লম্ব আঁকা হল এবং MN হল OX এর উপর লম্ব।

$$\therefore \quad ON = x_2 = OQ.l_2$$

$$NM = y_2 = OQ.m_2$$

$$MQ = z_2 = OQ.n_2$$

$\overline{OQ}$-এর $\overline{OP}$-এর উপর লম্ব অভিক্ষেপ হল ON, NM এবং MQ-এর OP-এর উপর লম্ব অভিক্ষেপ-ত্রয়ের যোগফল।

$$\therefore \quad OQ\cos\theta = x_2 l_1 + y_2 m_1 + z_2 n_1$$

$$= (OQ.l_2)l_1 + (OQ.m_2).m_1 + (OQ.n_2)n_1$$

$$\therefore \quad \cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

সুতরাং $\theta = \cos^{-1}(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

1. সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

এবং, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে $l_1 = l_2$; $m_1 = m_2$; $n_1 = n_2$

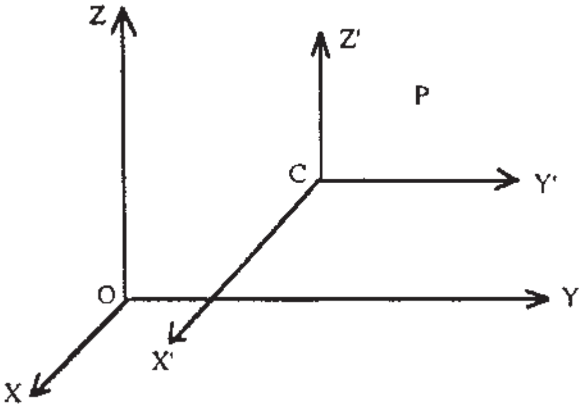
2. দুইটি সরলরেখার দিকনির্দেশক অনুপাত যথাক্রমে (a_1, b_1, c_1) এবং (a_2, b_2, c_2) হলে,

   (i) সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$ হয় এবং

   (ii) সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হয়।

6.10 অক্ষতন্ত্রের পরিবর্তন (সরণ, ঘূর্ণন এবং সরণ ঘূর্ণন)

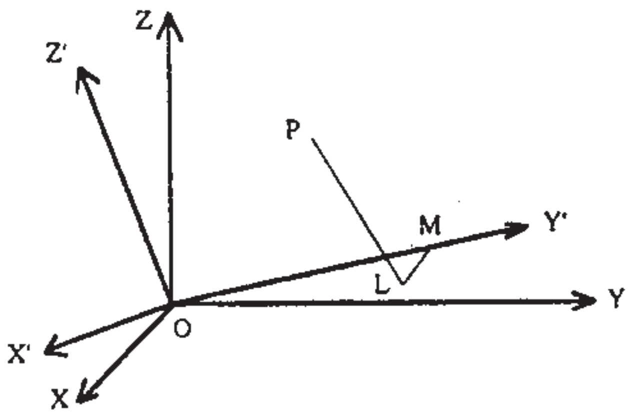
অক্ষত্রয় পূর্বের অক্ষত্রয়ের সাথে সমান্তরাল থেকে যদি মূলবিন্দু 'O' (যার স্থানাঙ্ক $(0, 0, 0)$) স্থানান্তরিত বা মূলবিন্দুর সরণ যদি C-তে হয় তাহলে তাকে অক্ষদ্বয় সমান্তরাল রেখে মূলবিন্দুর সরণ বা শুধু সরণ বলা হয়।



চিত্র ঃ 6.11

$OXYZ$ অক্ষতন্ত্রে যদি C এর স্থানাঙ্ক (f, g, h) হয় তাহলে নতুন অক্ষতন্ত্রের নাম আমরা দেব $CX'Y'Z'$ এবং সেক্ষেত্রে স্পষ্টতঃই (চিত্র দ্রষ্টব্য) ঃ $P \equiv (x, y, z)$ এর নূতন স্থানাঙ্ক হবে; $x' = x - f,\ y' = y - g,\ z' = z - h$

এবার ধরা যাক $OXYZ$ অক্ষতন্ত্র কে মূলবিন্দু 'O' স্থির রেখে একটি নির্দিষ্ট কোণে ঘোরানোর ফলে নূতন অক্ষতন্ত্র $OX'Y'Z'$ (চিত্র দ্রষ্টব্য) সৃষ্টি হল, ঘূর্ণনজাত এই নূতন অক্ষতন্ত্রকে ঘূর্ণনের ফলে সৃষ্ট অক্ষতন্ত্র বলা হবে।



চিত্র ঃ 6.12

নূতন অক্ষত্রয়ের (X', Y' ও Z') ধরা যাক্ যথাক্রমে দিক্‌নির্দেশকে কোসাইনের মান পুরনো অক্ষতন্ত্র সাপেক্ষে (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) এবং (l_3, m_3, n_3).

এখন ধরা যাক্ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং নুতন অক্ষতন্ত্র স্বাপেক্ষে (x', y', z'). তাহলে চিত্র থেকে $PL \perp X'OY'$ এবং $LM \perp oy'$ তাহলে $OM = y'$, $ML = x'$, $LP = z'$.

তখন OP-এর লম্ব অভিক্ষেপ (x অক্ষের উপর) হবে x এবং স্পষ্টঃতই

$$x = l_1x' + l_2y' + l_3z'$$

একইভাবে $$y = m_1x' + m_2y' + m_3z'$$

$$z = n_1x' + n_2y' + n_3z'$$

একইভাবে বলতে পারি,

$$x' = l_1x + m_1y + n_1z$$

$$y' = l_2x + m_2y + n_2z$$

$$z' = l_3x + m_3y + n_3z$$

এবার যদি সরণ ও ঘূর্ণন একই সাথে হয়, তাহলে তাকে সরণ ঘূর্ণন বলা হয়, সেক্ষেত্রে—

$$x = l_1x' + m_1y' + n_1z' + f$$

$$y = l_2x' + m^2y' + n_2z' + g$$

$$z = l_3x' + m_3y' + n_3z' + h$$

উপরের সূত্রটিকে ম্যাট্রিবত্র আকারে লিখলে, পাই $X = AX' + B$

যেখানে, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix}$

এবং $A = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ শুধুমাত্র সরণের জন্য $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ হবে এবং শুধুমাত্র ঘূর্ণনের জন্য $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ হবে।

6.11 অক্ষতন্ত্রের ঘূর্ণনের ফলে কতিপয় রাশিমালার অবিচল (Invariant) থাকার শর্ত

অক্ষতন্ত্রের ঘূর্ণনের ফলে যদি

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ অপেক্ষকটি $a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + 2f'y'z' + 2g'z'x' + 2h'x'y'$ অপেক্ষকে রূপান্তরিত হয়, তবে

(i) $a + b + c = a' + b' + c'$

(ii) $ab + bc + ca - f^2 - g^2 - h^2 = a'b' + b'c' + c'a' - f'^2 - g'^2 - h'^2$

(iii) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{vmatrix}$

প্রমাণ : (ox, oy, oz) এবং (ox', oy', oz') একই মূলবিন্দু বিশিষ্ট দুটি লম্ব কার্তেসীয় অক্ষতন্ত্র।

প্রথম ও দ্বিতীয় অক্ষতন্ত্রের সাপেক্ষে একটি বিন্দু P-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y, z) ও (x', y', z') হলে আমরা পাই,

$$x = l_1x' + l_2y' + l_3z'$$

$$y = m_1x' + m_2y' + m_3z'$$

$$z = n_1x' + n_2y' + n_3z'$$

(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) ও (l_3, m_3, n_3) যথাক্রমে ox', oy', oz'-এর দিক্‌নির্দেশক কোসাইন (ox, oy, oz)-এর সাপেক্ষে।

এখন লক্ষ্য করা যাচ্ছে

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= x'^2(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) + y'^2(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) \\ &\quad + z'^2(l_3^2 + m_3^2 + n_3^2) + 2y'z'(l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3) \\ &\quad + 2z'x'(l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1) + 2x'y'(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) \\ &= (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \end{aligned}$$

অর্থাৎ $x^2 + y^2 + z^2$ রূপান্তরিত হয় $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2$-এ অতএব প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$ অপেক্ষকটি রূপান্তরিত হবে,

$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + 2f'y'z' + 2g'z'x' + 2h'x'y' + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ অপেক্ষকে, λ একটি ধ্রুবক।

এখন λ-র যে সকল মানের জন্য প্রথম অপেক্ষকটি দুটি (x, y, z)-এর একঘাত সুষম উৎপাদকে বিশ্লেষিত হবে λ-র সে সকল মানের জন্য দ্বিতীয় অপেক্ষকটি ও দুটি (x', y', z') এর একঘাত সুষম উৎপাদকে বিশ্লেষিত হবে,

কারণ উল্লেখিত অক্ষতন্ত্রের পরিবর্তনে অপেক্ষকের ঘাতের পরিবর্তন হয় না, অর্থাৎ দুটি একঘাত উৎপাদক দুটি একঘাত উৎপাদকে রূপান্তরিত হয়।

এক্ষণে আমরা বীজগণিত থেকে জানি, যে প্রথম অপেক্ষকটি দুটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষিত হলে, আমরা পাই—

$$\begin{vmatrix} a+\lambda & h & g \\ h & b+\lambda & f \\ g & f & c+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

বা, $$\lambda^3 + \lambda^2(a+b+c) + \lambda(ab+bc+ca-f^2-g^2-h^2) + \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

অনুরূপে দ্বিতীয় অপেক্ষকটি দুটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষিত হলে আমরা পাই,

$$\begin{vmatrix} a'+\lambda & h' & g' \\ h' & b'+\lambda & f' \\ g' & f' & c'+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

বা, $$\lambda^3 + \lambda^2(a'+b'+c') + \lambda(a'b'+b'c'+c'a'-f'^2-g'^2-h'^2) + \begin{vmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{vmatrix} = 0$$

এখন λ-এর উভয় সমীকরণই একই মান দেবে। অতএব

$$\frac{1}{1} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{ab+bc+ca-f^2-g^2-h^2}{a'b'+b'c'+c'a'-f'^2-g'^2-h'^2}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{vmatrix}}$$

অর্থাৎ $a+b+c = a'+b'+c'$

$$ab+bc+ca-f^2-g^2-h^2 = a'b'+b'c'+c'a'-f'^2-g'^2-h'^2$$

এবং, $$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{vmatrix}$$

টীকা ঃ λ-র সমীকরণটি যেহেতু একটি ত্রিঘাত সমীকরণ, অতএব λ-র বীজগুলির মধ্যে কমপক্ষে একটির বাস্তব মান (real valued) আছে। অতএব উপরে উল্লেখিত দুটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ অবশ্যই সম্ভব হবে।

6.12. উদাহরণমালা

1. (i) $(-2, 5, 6)$ ও $(2, 0, 5)$ বিন্দু দুটির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করুন।

(ii) দেখান যে $(3, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$ বিন্দু দুটি $(1, 3, 4)$ থেকে সমদূরবর্তী।

সমাধান ঃ ধরা যাক্ $P \equiv (2, 0, 5)$ এবং $Q \equiv (-2, 5, 6)$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(2-(-2))^2 + (0-5)^2 + (5-6)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{42} \text{ একক (উত্তর)}$$

(ii) ধরা যাক্ $A = (3, 2, 2)$, $B = (2, 1, 2)$ এবং $P = (1, 3, 4)$

$$\therefore \quad AP = \sqrt{(3-1)^2 + (2-3)^2 + (2-4)^2} = 3$$

$$BP = \sqrt{(2-1)^2 + (1-3)^2 + (2-4)^2} = 3$$

সুতরাং $AP = BP$ (প্রমাণিত)।

2. একটি সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A-এর স্থানাঙ্কতলে ত্রয়ের উপর লম্ব অভিক্ষেপ A_1, A_2, A_3 হলে প্রমাণ করুন $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ এবার কোন ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয় $A \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $B \equiv (x_2, y_2, z_2)$ এবং $C \equiv (x_3, y_3, z_3)$ হলে দেখান যে তার ক্ষেত্রফল Δ হলে

$$\Delta^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

সমাধান ঃ ক্ষেত্রফল 'A' কে ধরে থাকা তলের উপর লম্বের দিক্‌নির্দেশক কোসাইন ধরা যাক্ $\cos\alpha; \cos\beta, \cos\gamma$.

সুতরাং yz তলে 'A'-র লম্ব অভিক্ষেপ $A\cos\alpha$ বা, $A_1 = A\cos\alpha$ অনুরূপভাবে $A_2 = A\cos\beta$ এবং $A_3 = A\cos\gamma$.

সুতরাং $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = A^2.1 = A^2$ (প্রমাণিত)।

এক্ষণে ধরা যাক্ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ-র স্থানাঙ্কতলের উপর লম্ব অভিক্ষেপত্রয় হল $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, এখন শীর্ষ বিন্দু A, B, C এর yz তলে লম্ব অভিক্ষেপ হবে (o, y_1, z_1), (o, y_2, z_2), (o, y_3, z_3)

তাহলে, $\Delta_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$

একইভাবে $\Delta_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$ এবং $\Delta_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

আগের সমস্যা থেকে বলতে পারি, $\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \text{ (প্রমাণিত)।}$$

3. প্রমাণ করুন যে ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয় $(2, 3, 1)$, $(-2, 2, 0)$ এবং $(0, 1, -1)$, সেটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এর অন্য কোণগুলিও বের করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক্ $A \equiv (2, 3, 1)$, $B \equiv (-2, 2, 0)$, $C \equiv (0, 1, -1)$ তাহলে, BA, BC, CA-এর দিক্ নির্দেশক কোসাইন হবে যথাক্রমে,

$$\left(\frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right); \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{2}{\sqrt{12}}\right)$$

$\therefore$ BA ও BC বাহুর অন্তর্গত কোণ $= \cos^{-1}\left(\dfrac{8-1-1}{\sqrt{18}\sqrt{6}}\right) = \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

BC এবং CA বাহুর অন্তর্গত কোণ

$$\cos^{-1}\left(\frac{4-2-2}{\sqrt{6}\sqrt{12}}\right) = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

CA এবং BA বাহুর অন্তর্গত কোণ

$$\cos^{-1}\left(\frac{8+2+2}{\sqrt{18}\sqrt{12}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

সুতরাং ত্রিভুজটি সমকোণী এবং এর অন্যদুটি কোণের মান হল

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ এবং } \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \qquad \text{(Answer)}$$

4. $P(2, 4, -2)$ ও $Q(3, 6, 2)$ বিন্দু দুইটির সংযোগরেখার দিগনির্দেশক কোসাইন নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ PQ রেখার দিগনির্দেশক অনুপাত হল

$3-2, 6-4, 2+2$ বা, $1, 2, 4$

আবার $PQ = \sqrt{(3-2)^2 + (6-4)^2 + (2+2)^2}$

$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}$

$= \sqrt{21}$

$\therefore$ PQ রেখার দিগনির্দেশক কোসাইন হল

$$\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

5. $P(1, 4, -1)$ ও $Q(3, 6, 2)$ বিন্দু দুটির সংযোগকারী রেখাংশের $R(2, 4, 2)$ ও $S(3, 2, 5)$ বিন্দু দুটির সংযোগরেখার উপর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করুন।

সমাধান : RS রেখার দিগ নির্দেশক অনুপাত হল

$3-2, 2-4, 5-2$ বা, $1, -2, 3$

$\therefore$ RS রেখার দিগনির্দেশক কোসাইন হল

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}, \frac{-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}, \frac{3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}$$

বা, $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

সুতরাং, $\overline{PQ}$ রেখাংশের RS রেখার উপর লম্ব অভিক্ষেপ $= (3-1).\frac{1}{\sqrt{14}} + (6-4).\frac{-2}{\sqrt{14}} + (2+1)\frac{3}{\sqrt{14}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{4}{\sqrt{14}} + \frac{9}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{14}}$$

6. দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করুন যেখানে সরলরেখা দুইটির দিগনির্দেশক কোসাইনগুলি $3lm - 4ln + mn = 0$ এবং $l + 2m + 3n = 0$ দ্বারা সম্পর্কযুক্ত।

সমাধান : $l + 2m + 3n = 0$

বা, $n = -\left(\frac{l+2m}{3}\right)$

n-এর মান $3lm - 4ln + mn = 0$-এ বসিয়ে পাই,

$$3lm + 4l\left(\frac{l+2m}{3}\right) - m\left(\frac{l+2m}{3}\right) = 0$$

বা, $4l^2 + 16lm - 2m^2 = 0$

বা, $2\left(\frac{l}{m}\right)^2 + 8\left(\frac{l}{m}\right) - 1 = 0$ ...... (1)

ধরি, l_1, m_1, n_1 ও l_2, m_2, n_2 হল সরলরেখা দুটির দিগনির্দেশক কোসাইন। তাহলে (1)-নং সমীকরণের বীজদ্বয় হবে $\frac{l_1}{m_1}$ ও $\frac{l_2}{m_2}$.

সুতরাং, $\frac{l_1}{m_1} \cdot \frac{l_2}{m_2} = -\frac{1}{2}$

বা, $\frac{l_2 l_2}{-1} = \frac{m_1 m_2}{2}$ ...... (2)

একইভাবে প্রদত্ত সম্পর্কদুটি হতে l-কে অপসারিত করে আমরা পাই,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2 = 0$$

এই সমীকরণের বীজদ্বয় হবে $\frac{m_1}{n_1}$ ও $\frac{m_2}{n_2}$.

$\therefore \quad \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = -2$

বা, $\frac{m_1 m_2}{2} = \frac{n_1 n_2}{-1}$ ...... (3)

(2) ও (3)-নংকে যুক্ত করে আমরা পাই $\frac{l_1 l_2}{-1} = \frac{m_1 m_2}{2} = \frac{n_1 n_2}{-1} = k$ (ধরি)।

এখন, এর $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = -k + 2k - k = 0$ সুতরাং, সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব।

7. মূলবিন্দু স্বাপেক্ষে অক্ষতন্ত্রের ঘূর্ণনের ফলে নূতন অক্ষতন্ত্রের দিক্‌নির্দেশক কোসাইনগুলি হল যথাক্রমে (পুরনো অক্ষতন্ত্র সাপেক্ষে)

$$\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad 0;$$

$$\frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sqrt{a^2+b^2}; \; a, b, c.$$

প্রমাণ করুন $ax + by + cz = 0$ অক্ষতন্ত্র পরিবর্তনের ফলে $z' = 0$ তে রূপান্তরিত হবে।

সমাধান ঃ ধরা যাক্ একটি বিন্দুর পুরনো এবং নতুন অক্ষতন্ত্র স্বাপেক্ষে যথাক্রমে স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং (x', y', z').

সুতরাং, $x = \frac{-b}{k} x' - \frac{ac}{k} y' + az'$,

$y = \frac{a}{k} x' - \frac{bc}{k} y' + bz'$,

$z = ky' + cz'$, এখানে $k = \sqrt{a^2 + b^2}$

সুতরাং $ax + by + cz = 0$ রূপান্তরিত হবে—

$$a\left(\frac{-b}{k} x' - \frac{ac}{k} y' + az'\right) + b\left(\frac{a}{k} x' - \frac{bc}{k} y' + bz'\right) + c(ky' + cz') = 0$$

বা, $\frac{x'}{k}(-ab+ab)+\frac{y'}{k}\{-a^2c-b^2c+c(a^2+b^2)\}+(a^2+b^2+c^2)z'=0$

বা, $(a^2+b^2+c^2)z'=0$

যেহেতু $a^2+b^2+c^2\neq 0$, সুতরাং $z'=0$

৪. একই মূলবিন্দু বিশিষ্ট দুটি লম্ব কার্তেসীয় অক্ষতন্ত্রের সাপেক্ষে একটি সমতলের সমীকরণ যথাক্রমে

$ax+by+cz+d=0$ ও $a'x'+b'y'+c'z'+d=0$.

প্রমাণ করুন : $a^2+b^2+c^2=a'^2+b'^2+c'^2$

সমাধান : ঘূর্ণনের তত্ত্ব থেকে জানি

$$x=l_1x'+l_2y'+l_3z'$$

$$y=m_1x'+m_2y'+m_3z'$$

$$z=n_1x'+n_2y'+n_3z'$$

(চিহ্নগুলো প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত)

$\therefore$ $ax+by+cz+d=0$ সমীকরণটি নিম্নলিখিত সমীকরণে রূপান্তরিত হয়।

$$a(l_1x'+l_2y'+l_3z')+b(m_1x'+m_2y'+m_3z')+c(n_1x'+n_2y'+n_3z')+d=0$$

বা, $(al_1+bm_1+cn_1)x'+(al_2+bm_2+cn_2)y'+(al_3+bm_3+cn_3)z'+d=0$

কিন্তু এই সমীকরণটি $a'x'+b'y'+c'z'+d=0$-এর সাথে অভিন্ন

সুতরাং আমরা পাই $a'=al_1+bm_1+cn_1$

$$b'=al_2+bm_2+cn_2$$

$$c'=al_3+bm_3+cn_3$$

$\therefore$ $(a')^2+(b')^2+(c')^2 = a^2(\Sigma l_1^2)+b^2(\Sigma m_1^2)+c^2(\Sigma n_1^2)+2ab(\Sigma l_1m_1)$

$+2bc(\Sigma m_1n_1)+2ca(\Sigma n_1l_1)$

$=a^2+b^2+c^2$ (প্রমাণিত)।

6.13 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) (2, – 3, 5) ও (7, 1, 3) বিন্দুগামী সরলরেখাকে xy তল কি অনুপাতে বিভক্ত করে বের করুন।

$\left[\text{উত্তরঃ } -\frac{5}{3}\right]$

(সংকেত ঃ ধরুন $l : m$ অনুপাতে বিভক্ত করে, এবার নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভাজনের সূত্র প্রযোজ্য)

(2) যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $A \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $B \equiv (x_2, y_2, z_2)$ ও $C \equiv (x_3, y_3, z_3)$ তার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

$$\left[\text{উত্তরঃ}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)\right]$$

(সংকেত ঃ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র এর মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে)

(3) যে সরলরেখা অক্ষতন্ত্রের সাথে সমান কোণে নত তার দিক্‌নির্দেশক অনুপাত বের করুন। এই সরল রেখার দিক্‌নির্দেশক কোসাইন কি কি হতে পারে? এরকম কটি সরলরেখার বাস্তব অস্তিত্ব আছে?

(সংকেতঃ এস্থলে $\alpha = \beta = \gamma$ বা, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$)

$$\left[\text{উত্তরঃ } (1, 1, 1); \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{Two}\right)\right]$$

(4) কোন সরলরেখার দিক্‌নির্দেশক কোণগুলি α, β, γ হলে

প্রমাণ করুন ঃ $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$

(সংকেতঃ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$)

(5) $P(3, 5, 2)$ ও $Q(2, -2, 4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখার দিগনির্দেশক কোসাইন নির্ণয় করুন।

উত্তর ঃ $\frac{-1}{\sqrt{54}}, \frac{-7}{\sqrt{54}}, \frac{2}{\sqrt{54}}$

(6) $P(2, 4, -7)$ ও $Q(5, 2, -4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগকারী রেখাংশের $R(4, -1, 2)$ ও $S(2, 0, 3)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখার উপর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করুন। উত্তর ঃ $\frac{7}{\sqrt{6}}$

(7) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির হল $(1, -7, 4)$, $(2, -3, 5)$ এবং $(2, -5, 3)$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। উত্তর ঃ $\sqrt{11}$ বর্গ একক

(8) দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করুন যেখানে সরলরেখা দুইটির দিগনির্দেশক কোসাইনগুলি $3l + m + 5n = 0$ এবং $6mn - 2nl + 5lm = 0$ সম্পর্কদ্বারা যুক্ত। উত্তর ঃ $\cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$

(9) দুইটি সরলরেখার দিগনির্দেশক কোসাইনগুলি $al + bm + cn = 0$ এবং $fmn + gnl + hlm = 0$ সম্পর্ক দ্বারা যুক্ত। সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হলে দেখান যে,

$$\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}=0.$$

(10) $A(2, 4, 6)$ ও $B(4, 0, 8)$ সংযোগ রেখার উপর $P(4, 3, 8)$ বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন। উত্তর : $(3, 2, 7)$

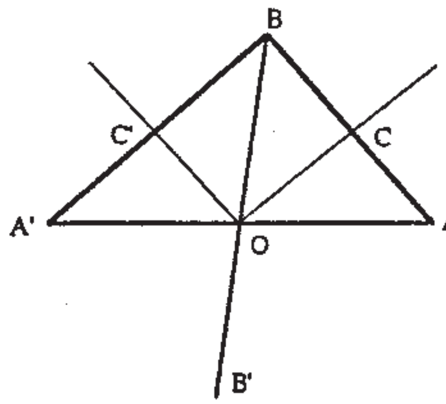
(11) প্রমাণ করুন একটি ঘনকের দুটি কোণের অন্তর্গত কোর্ণের পরিমাপ হল $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

(12) তিনটি পরস্পর লম্ব সরলরেখার দিগনির্দেশক কোসাইনগুলি যথাক্রমে (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) ও (l_3, m_3, n_3) হয়, তবে প্রমাণ করুন যে সরলরেখাটি ঐ তিনটি পরস্পর লম্ব সরলরেখার সাথে সমান কোণে নত থাকে, তার দিগনির্দেশক কোসাইনগুলি হবে $l_1 + l_2 + l_3, m_1 + m_2 + m_3, n_1 + n$-

(13) দুটি সরলরেখার অন্তর্গতি কোণ θ এবং সরলরেখা দুইটির দিগনির্দেশক কোসাইনগুলি (l_1, m_1, n_1) ও (l_2, m_2, n_2) হলে, ঐ সরলরেখা দুইটি অন্তর্গত কোণের একটি সমদ্বিখণ্ডকের দিগনির্দেশক কোসাইনগুলি হবে

$$\frac{l_1 + l_2}{2\cos\frac{\theta}{2}}, \frac{m_1 + m_2}{2\cos\frac{\theta}{2}}, \frac{n_1 + n_2}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

[সংকেত



সরলরেখা দুটি হল AOA' এবং BOB' ধরা হল O মূল বিন্দু, $OA = OA' = OB = 1$

OA, OB, OA'- এর দিগনির্দেশক কোসাইনগুলি হল (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) ও $(-l_1, -m^1, -n_1)$

$\therefore$ A, B ও A' বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে

(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) ও $(-l_1, -m_1, -n_1)$

OC ও OC' হল কোণ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়।

$\therefore$ C ও C' বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হবে

$$\left(\frac{l_1+l_2}{2},\ \frac{m_1+m_2}{2},\ \frac{n_1+n_2}{2}\right) \text{ ও } \left(\frac{l_2-l_1}{2},\ \frac{m_2-m_1}{2},\ \frac{m_2-n_1}{2}\right)$$

সুতরাং OC এবং OC' -এর দিগনির্দেশক অনুপাতগুলি হবে

$(l_1+l_2, m_1+m_2, n_1+n_2)$ ও $(l_1-l_2, m_1-m_2, n_1-n_2)$.

এখন $\angle AOB = \theta$, $\therefore$ $\angle AOC = \frac{\theta}{2}$

$\therefore$ $OC = OA \cos\frac{\theta}{2}$.

এবং $OC = \sqrt{\left(\frac{l_1+l_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)^2}$, $OA = 1$

$\therefore$ $\sqrt{\Sigma\left(\frac{l_1+l_2}{2}\right)^2} = \cos\frac{\theta}{2}$

বা, $\sqrt{\Sigma(l_1+l_2)^2)} = 2\cos\frac{\theta}{2}$

এখন, OC কোণ-সমদ্বিখন্ডকের দিগনির্দেশক কোসাইনগুলি হল

$$\frac{l_1+l_2}{\sqrt{\Sigma(l_1+l_2)^2}},\ \frac{m_1+m_2}{\sqrt{\Sigma(l_1+l_2)^2}},\ \frac{n_1+n_2}{\sqrt{\Sigma(l_1+l_2)^2}}$$

বা, $\frac{l_1+l_2}{2\cos\frac{\theta}{2}}, \frac{m_1+m_2}{2\cos\frac{\theta}{2}}, \frac{n_1+n_2}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

(14) যে সরলরেখাদ্বয়ের দিক্‌নির্দেশক অনুপাত যথাক্রমে $(5, -12, 13)$ ও $(-3, 4, 5)$ তাদের অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় করুন। $\left[\text{উত্তরঃ } \cos^{-1}\left(\frac{1}{65}\right)\right]$

(সংকেত : দিক্‌নির্দেশক কোসাইনগুলি বের করুন, এবার $\theta = \cos^{-1}(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)$ প্রযোজ্য)

(15) মূলবিন্দু $(1, 2, -1)$-এ সরণের ফলে এবং অক্ষতন্ত্রের কোনরূপ ঘূর্ণন হয়নি ধরে নিয়ে যে বিন্দুর পুরনো স্থানাঙ্ক $(2, -3, 1)$ তার নূতন স্থানাঙ্ক কত?

[উত্তর : $(1, -5, 2)$]

(সংকেত : $x' = x - f$

$y' = y - g$. সূত্রাবলী প্রযোজ্য)

$z' = z - h$

(16) অক্ষতন্ত্রের দিক পরিবর্তন না করে $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z = 2$ সমীকরণটি রূপান্তরিত করে কি হবে লিখুন, দেওয়া আছে মূলবিন্দু $(-1, 2, -3)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়েছে। [উত্তর ঃ $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 16$]

(সংকেত ঃ 6 নং অনুশীলনীর মত করে ভাবুন)

(17) মূলবিন্দুর কি পরিমান সরণের ফলে

$x^2 + y^2 - 4z^2 - 2x + 4y + 24z - 31 = 0$ সমীকরণটি

$x'^2 + y'^2 - 4z'^2 = 0$-তে রূপান্তরিত হবে।

(সংকেতঃ 6নং প্রশ্নের সংকেত ও এটি ব্যবহার করে যে সমীকরণ পাবেন তার সাথে পরিবর্তিত সমীকরণ তুলনা করুন)

[উত্তর ঃ মূলবিন্দু $(1, -2, 3)$-এ স্থানান্তরিত হয়েছে)

(18) প্রমাণ করুন যে লম্ব স্থানাঙ্কের রূপান্তরের ফলে (orthogonal transformation) নিচের রাশিমালাটি অবিচল থাকে।

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

যেখানে (x_i, y_i, z_i) ; $i = 1, 2, 3, 4$ হল চারটি একইতলে অবস্থিত নয় এমন বিন্দুর স্থানাঙ্ক।

(সংকেতঃ প্রমাণ করার চেষ্টা করুন $\frac{1}{6}\Delta$ হল ওই স্থানাঙ্ক দিয়ে গঠিত সমচতুস্তলকের ঘনফল)

(19) একটি সমতল দুই সেট অক্ষতন্ত্রের জন্য প্রত্যেক অক্ষে a, b, c এবং a', b', c' অংশ ছেদ করে। অক্ষতন্ত্রদ্বয়ের মূলবিন্দু একই থাকলে প্রমাণ করুন $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2}$

(সংকেতঃ সমতলের সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ আকারে লিখে ভাবুন)

6.14 সারাংশ

এই অধ্যায়ে মূলতঃ ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতির মূল পরিকাঠামোর গাণিতিক রূপ বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। ত্রিমাত্রিক অক্ষ-তন্ত্র, অক্ষতন্ত্রের ধারক তল। বিন্দুর অবস্থান, বিভিন্ন প্রকারের স্থানাঙ্ক বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। এর পর দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব, দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখার দৈর্ঘ্য, ঐ রেখাংশের উপর নির্দিষ্ট অনুপাতে

বিভাজন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা হয়েছে। দিকযুক্ত রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ এবং ওপর থেকে ঐ রেখাংশের দিক কোসাইনের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। এরপর অক্ষতন্ত্রের পরিবর্তন এবং এই পরিবর্তনের পরিপ্রেক্ষিতে দুটি বিন্দুর দূরত্বের মান অবিচল হবে তাকে বোঝানো হয়েছে।

6.15 সহায়ক পাঠ

(1) J. G. Chakravorty, P. R. Ghooh : Advanced analytical Geometry

(U.N. Dhur, Kolkata, 1995)

(2) শ্রীপতিরঞ্জন চৌধুরী ঃ ভেক্টর বীজগণিত ও ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

(পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ, 1980)

একক 7 ❑ সমতল ও চতুস্তলকের ঘনফল

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

ষষ্ঠ অধ্যায়ে ত্রিমাত্রিক দেশে অক্ষতন্ত্র, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। যে কোন ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক দেশের আধারের গাণিতিক বিচার বিশ্লেষণের প্রয়োজন আছে, ঘনবস্তু বিভিন্ন আকারের হতে পারে। কোন ঘনবস্তু সমতল দ্বারা বা বক্রতল দ্বারা সীমাবদ্ধ হতে পারে। দুটি সমতল আবার একটি সরলরেখাতে ছেদ করতে পারে। তাকে 'ধার' হিসাবে চিহ্নিত করতে পারি। এই কারণেই বিভিন্ন আকৃতির ঘনবস্তুর প্রারম্ভিক ধারণা পেতে হলে তলের সমীকরণ বা তার বিভিন্ন গাণিতিক ধর্ম জানা প্রয়োজন। এই কারণে এই অধ্যায়ে 'সমতল' বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

7.2 উদ্দেশ্য

উপরের অনুচ্ছেদে স্পষ্টতই বলা হয়েছে, যে এই অধ্যায়ে তলের সমীকরণ এবং তার বিভিন্ন ধর্মের গাণিতিক সূত্র নিয়ে আলোচনা করা হবে। তলের গাণিতিক সূত্র জানা হলে তলদ্বারা সীমাবদ্ধ বিভিন্ন ত্রিমাত্রিক বস্তুর বিষয়ে গাণিতিক বিচার বিশ্লেষণ করা যাবে। এমনকি একটি বক্রতল দ্বারা সীমাবদ্ধ বস্তুকে একটি সমতল কিভাবে ছেদ করে, ছেদ করার পর কিরকম বক্ররেখা পাওয়া যাবে তার ধারণা করা যায়। সেখানে আমরা ত্রিমাত্রিক দেশে কোন সামতলিক ক্ষেত্রের গাণিতিক তত্ত্ব নির্ধারণ করতে পারব।

7.3 বিষয় পরিচিতি

স্পষ্টতই বোঝা যাচ্ছে, এই অধ্যায়ে আমরা সমতলের বিভিন্ন প্রকারের সমীকরণ নির্ণয় করার প্রণালী নিয়ে আলোচনা করে, সমতলের উপরে যে লম্ব টানা যায় তার দিক কোসাইন এর উপর বিশেষভাবে জোর দেব। দ্বিতল কোণের পরিমাপ করার স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ভিত্তিক পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করা হবে। কোন সমতলের সাপেক্ষে একটি বিন্দুর অবস্থান বলতে কি বুঝি সেই বিষয়ে আলোচনা করা হবে। দুটি সমতল একটি সরলরেখায় ছেদ করে। সেই ছেদ বিন্দুগামী কোন সমতলের সমীকরণ নির্ধারণ করা হবে। প্রয়োগ হিসাবে একটি চতুস্তলকের আয়তন নির্ণয় করা হবে।

7.4 সমতলের সাধারণ ও বিশেষ সমীকরণ

7.4.1 তিনটি চলের একটি একঘাত সমীকরণ হল সমতলের সাধারণ সমীকরণ,

$$ax + by + cz + d = 0$$

ধরা যাক্ উপরিউক্ত সঞ্চারপথের উপর $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ যে কোন দুটি বিন্দু,

$\therefore \quad ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ এবং

$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$$

প্রথম সমীকরণকে $\frac{n}{m+n}$ এবং দ্বিতীয়টিকে $\frac{m}{m+n}$ দিয়ে গুণ করে দুটি সমীকরণ যোগ করে পাই—

$$a\frac{mx_2 + nx_1}{m+n} + b\frac{my_2 + ny_1}{m+n} + c\frac{mz_2 + nz_1}{m+n} + d = 0$$

এখান থেকে বলা যায় যে, P, Q বিন্দু দুটি সঞ্চারপথে থাকলে $\overline{PQ}$ রেখাংশটিও সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত হবে। কিন্তু এটিই ইউক্লিডের দেওয়া সমতলের সংজ্ঞা। সুতরাং $ax + by + cz + d = 0$ একটি সমতলের সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত সমূহ ঃ

(i) $\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ এবং

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

একই সমতলকে সূচিত করে যখন—

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \lambda (\neq 0 \text{ এবং বাস্তব})$$

(ii) (x_1, y_1, z_1) বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ নিম্নরূপ হবে,

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

(iii) স্থানাঙ্কতলত্রয়ের সাথে সমান্তরাল সমতলের সমীকরণ নিম্নরূপ হবে—

$x = a, y = b, z = c$ [a, b, c ধ্রুবকরাশি]

স্বভাবতঃই স্থানাঙ্কতলত্রয়ের সমীকরণ হবে—

$x = 0, y = 0$ এবং $z = 0$

(iv) $ax + by + cz + d = 0$-এর ক্ষেত্রে

$d = 0$ হলে সমতলটি মূলবিন্দু দিয়ে যাবে।

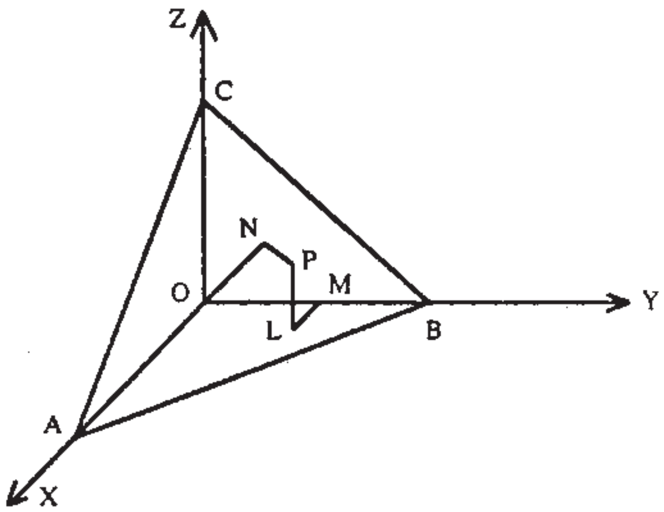
$a = 0$ হলে এটি x-অক্ষের সাথে সমান্তরাল হবে।

$a = b = 0$ হলে সমতলটি xy তলের সাথে সমান্তরাল হবে।

7.4.2. সমতলের বিশেষ সমীকরণ :

(i) লম্ব আকারে সমীকরণ (Normal form) :

মূলবিন্দু O থেকে ABC সমতলের উপর ON লম্ব এবং $P(x, y, z)$ এই সমতলস্থিত একটি বিন্দু। xy তলের উপর PL লম্ব অঙ্কন করা হল এবং OY এর উপর LM লম্ব। তাহলে $OM = y, ML = x, LP = z$. OM, ML ও LP-এর ON এর উপর লম্ব অভিক্ষেপের সমষ্টি হল OP এর ON এর উপর লম্ব অভিক্ষেপ।



চিত্র : 7.1

অর্থাৎ $xl + ym + zn = p$, যেখানে $p = \overline{ON}$ এবং (l, m, n) হল ON-এর দিকনির্দেশক কোসাইন।

$\therefore$ সমতলটির সমীকরণ হল $lx + my + nz = p$

ON লম্বটি যদি x, y ও z অক্ষের সাথে যথাক্রমে α, β, λ কোণে নত থাকে, তাহলে সমতলটির সমীকরণ হবে— $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \lambda = p$

অনুসিদ্ধান্ত :

(i) $ax + by + cz + d = 0$ সমতলের জন্য ON লম্বটির দৈর্ঘ্য হবে $\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

(ii) **ছেদিতাংশে আকার (Intercept form) :**

ধরা যাক্ সমতলটির সমীকরণ—

$Ax + By + Cz + D = 0$

ধরা যাক্, এটি স্থানাঙ্ক অক্ষের সাথে যথাক্রমে a, b, c পরিমাণ দৈর্ঘ্য ছেদ করে।

$\therefore$ $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ বিন্দুত্রয় সমীকরণটিকে সিদ্ধ করবে।

$\therefore$ $Aa + D = 0, Bb + D = 0$ এবং $Cc + D = 0$

$\therefore$ $A = -\dfrac{D}{a}, B = -\dfrac{D}{b}, C = -\dfrac{D}{c}$

এই মানগুলি প্রথম সমীকরণে বসিয়ে পাই—

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$$

এটিই প্রয়োজনীয় (সমতলটির) সমীকরণ।

(iii) **তিনটি বিন্দুদিয়ে যায় এরূপ সমতলের সমীকরণ :**

ধরা যাক্ সমতলের সমীকরণটি হল—

$ax + by + cz + d = 0$

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ এবং (x_3, y_3, z_3) হল তিনটি বিন্দু যা এই সমতলে অবস্থিত।

$ax + by + cz + d = 0$ ....(1)

আমরা পাই—

$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ .... (2)

$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$ .... (3)

$ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0$ .... (4)

এখন a, b, c, d সব একযোগে 0 নয়, সুতরাং (1), (2), (3) ও (4) থেকে a, b, c, d-কে অপনয়ন করে পাই

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

এটিই উক্ত সমতলটির সমীকরণ।

7.5 দুটি সমতলের মধ্যে অন্তর্গত কোণ ও বিশেষ-বিশেষ অবস্থান

ধরা যাক্ দুটি সমতলের সমীকরণ নিম্নরূপ :—

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

এবার মনে করা যাক যে এদের অন্তর্গত কোণের মান θ, তাহলে উক্ত তলদ্বয়ের উপর অঙ্কিত অভিলম্বদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ ও θ হবে।

তলদ্বয়ের অভিলম্বদ্বয়ের দিক্‌যুক্ত অনুপাতের মান যথাক্রমে (a_1, b_1, c_1) এবং (a_2, b_2, c_2).

$\therefore$ 'θ' এদের অন্তর্গত কোণ হলে, আমরা পাই—

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}.\sqrt{(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$$

অনুসিদ্ধান্ত : দুটি তল পরস্পর লম্ব হলে, $\theta = 90°$

(i) সেক্ষেত্রে নির্ণেয় শর্ত $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

(ii) সমতলদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে নির্ণেয় শর্ত হবে :—

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$\therefore$ দুটি সমান্তরাল সমতলের সমীকরণ হবে $ax + by + cz + d = 0$ এবং $ax + by + cz + k = 0$

টীকা : $\frac{a_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$ হলে সমতলদ্বয় অভিন্ন হবে।

7.6 সমতলের দুইদিক ও একটি সমতল থেকে একটি বিন্দুর দূরত্ব

7.6.1 $ax + by + cz + d = 0$ সমতলটি ত্রিমাত্রিক দেশকে দুটি অংশে বিভক্ত করে। সমতলের উপর সকল বিন্দুর জন্য শুধু সমীকরণটি সিদ্ধ হবে। $P(x_1, y_1, z_1)$ ও $Q(x_2, y_2, z_2)$ সমতলের উপর অবস্থিত নয় এমন দুটি বিন্দু।

বিন্দু দুটির সমতলের বিপরীত বা একই পাশে থাকবে যদি যথাক্রমে $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ এবং $ax_2 + by_2 + cz_2 + d$ বিপরীত বা সমচিহ্ন যুক্ত হয়।

ধরা যাক্ P ও Q সমতলের উভয়পাশে আছে। অতএব PQ সরলরেখাংশ সমতলকে অন্তঃস্থভাবে একটি বিন্দু (R)-এ ছেদ করবে। যেখানে $PR : RQ = \lambda : \mu$. $[\lambda > 0, \mu > 0]$

$\therefore$ 'R' বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda z_2 + \mu z_1}{\lambda + \mu}\right)$

এখন 'R' সমতল $ax + by + cz + d = 0$ এর উপর অবস্থিত।

$$\therefore \quad a\left(\frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda + \mu}\right) + b\left(\frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda + \mu}\right) + c\left(\frac{\lambda z_2 + \mu z_1}{\lambda + \mu}\right) + d = 0$$

বা, $\lambda(ax_2 + by_2 + cz_2 + d) = -\mu(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)$

বা, $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{ax_2 + by_2 + cz_2 + d}$

$\therefore \quad \frac{\lambda}{\mu} > 0,$

সুতরাং $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ এবং $ax_2 + by_2 + cz_2 + d$ অবশ্যই বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

এবার P ও Q যদি সমতলের একই পাশে অবস্থান করে তাহলে PQ বহিঃস্থভাবে সমতলকে R বিন্দুতে ছেদ করবে।

$PR : RQ = \lambda : \mu$ হলে এর

স্থানাঙ্ক ঃ $\left(\frac{\lambda x_2 - \mu x_1}{\lambda - \mu}, \frac{\lambda y_2 - \mu y_1}{\lambda - \mu}, \frac{\lambda z_2 - \mu z_1}{\lambda - \mu}\right)$

$\therefore$ আমরা পাব—

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{ax_2 + by_2 + cz_2 + d}$$

অর্থাৎ $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ এবং $ax_2 + by_2 + cz_2 + d$ অবশ্যই সমচিহ্নযুক্ত হবে।

7.6.2 একটি সমতল থেকে একটি বিন্দুর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় ঃ

আমরা $ax + by + cz + d = 0$ সমতল থেকে $P_1(x_1, y_1, z_1)$ বিন্দুর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করব।

ধরা যাক্, (x_1, y_1, z_1)-এ মূলবিন্দু স্থানান্তরিত করা হল।

$\therefore \quad X = x - y_1, \; Y = y - y_1, \; Z = z - z_1$

নূতন অক্ষতন্ত্রে সমতলের সমীকরণ হবে—

$$a(X + x_1) + b(Y + y_1) + c(Z + z_1) + d = 0 \quad \left[\because \begin{array}{l} x = X + x_1 \\ y = Y + y_1 \\ z = Z + z_1 \end{array}\right]$$

বা, $aX + bY + cZ + ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$

$\therefore$ মূলবিন্দু $P_1(x_1, y_1, z_1)$ থেকে সমতলটির লম্ব দূরত্ব (আগের 7.4 অধ্যায় থেকে) পাই—

দূরত্ব $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$

7.7 দুটি সমতলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক এবং বহিঃ সমদ্বিখণ্ডক তল

ধরা যাক এক্ষেত্রে সমতলদ্বয়ের সমীকরণ হল—

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ এবং } a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

যদি $P(x_1, y_1, z_1)$ বিন্দুটি, সমদ্বিখণ্ডক তলের উপর অবস্থান করে তাহলে 'P' থেকে প্রথম সমতলের দূরত্ব ও P থেকে দ্বিতীয় সমতলের দূরত্ব পরস্পর সমান হবে।

অর্থাৎ, $\dfrac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}} = \pm \dfrac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 + d_2}{\sqrt{(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$

$\therefore$ (x_1, y_1, z_1) এর সঞ্চার পথ হল : $\dfrac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}} = \pm \dfrac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$

এখন d_1 ও d_2 সমচিহ্ন যুক্ত হলে প্রথম সমতলটি যে দ্বিতলকোণ মূলবিন্দু $(0, 0, 0)$-কে ধারণ করে আছে তাকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে এবং দ্বিতীয় সমতলটি মূলবিন্দু ধারণ করে নেই এমন দ্বিতল কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

7.8 দুটি সমতলের ছেদ রেখাগামী যে কোন সমতলের সমীকরণ

ধরা যাক্ দুটি সমতল হল :—

$$U \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

এবং $\quad V \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

তাহলে $U + \lambda V = 0$ যেখানে, λ একটি ধনাত্মক ধ্রুবক রাশি, এমন একটি তলের সমীকরণ হবে যা $U = 0$ এবং $V = 0$-কে যে বিন্দুগুলি একযোগে সিদ্ধ করে তাদেরকেও সিদ্ধ করবে। সুতরাং $U + \lambda V = 0$ হলে দুটি সমতল $U = 0$ ও $V = 0$ এর ছেদরেখাগামী সমতল।

টীকা : $UV = 0$ সমীকরণটি কি নির্দেশ করবে?

স্বভাবতঃই এক্ষেত্রে $U = 0$ অথবা $V = 0$ এই দুটি একজোড়া তলকে (Pair of planes) একযোগে সূচিত করবে। উল্টোভাবে বলতে গেলে

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

একজোড়া সমতল হবে যদি একে দুটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষিত করা যায়, অর্থাৎ $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ হয়।

7.9 ত্রিমাত্রিক দেশে অবস্থিত একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

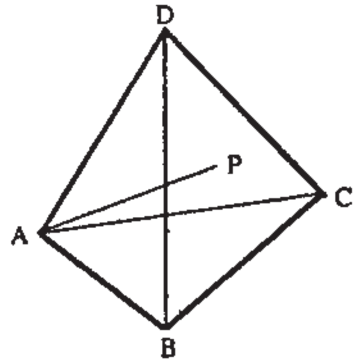
এই সমস্যাটি 6.10 উদাহরণমালার (2) নং উদাহরণে করা আছে।

7.10 চতুস্তলকের ঘনফল নির্ণয়

ধরা যাক্ $ABCD$ একটি চতুস্তলক যেখানে

$A \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $B \equiv (x_2, y_2, z_2)$,

$C \equiv (x_3, y_3, z_3)$ এবং $D \equiv (x_4, y_4, z_4)$



চিত্র : 7.2

এখন; B, C, D বিন্দু দিয়ে যাওয়া BCD সমতলের সমীকরণ হবে :—

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

বা, $$x \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \dots\dots \text{(i)}$$

এখন BCD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ হলে $ABCD$ চতুস্তলকের ঘনফল হবে $\frac{1}{3}P\Delta$, যেখানে P হল A বিন্দু থেকে BCD ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য।

ধরা যাক্ Δ-এর অক্ষতলত্রয়ের উপর লম্বঅভিক্ষেপ Δ_x, Δ_y ও Δ_z, তাহলে 7·9 থেকে জানি, —

$$\Delta^2 = \Delta^2{}_x + \Delta^2{}_y + \Delta^2{}_z.$$

এক্ষণে B, C, D এর $x = 0$ তলে লম্ব অভিক্ষেপ হবে

$(0, y_2, z_2)$, $(0, y_3, z_3)$ এবং $(0, y_4, z_4)$.

$$\therefore \quad \Delta_x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

একইভাবে $\Delta_y = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix}$ ...... (iii) এবং $\Delta_z = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$ ...... (iv)

$\therefore$ এ থেকে আমরা পাই— ((i), (ii), (iii) এবং (iv) থেকে)

$$P = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}}{2\sqrt{(\Delta^2{}_x + \Delta^2{}_y + \Delta^2{}_z)}}$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}}{2\Delta} \qquad [\because \ \Delta^2{}_x + \Delta^2{}_y + \Delta^2{}_z = \Delta^2]$$

$$\therefore \quad ABCD \text{ এর ঘনফল} = \frac{1}{3}P\Delta = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

7.11 উদাহরণমালা

(1) $x + 2y - 2z = 6$ সমতলটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে ছেদিতাংশ তৈরী করে তার দৈর্ঘ্যগুলি কি কি? সমতলটির উপর অভিলম্বের দিক্‌যুক্ত কোসাইনের মান কি কি এবং মূলবিন্দু থেকে সমতলটির লম্ব দূরত্ব কত?

সমাধান ঃ $x + 2y - 2z = 6$-কে ছেদিতাংশ আকারে লেখা হলে নিম্নরূপ হবে ঃ—

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} - \frac{z}{3} = 1$$

$\therefore$ অক্ষত্রয়ের উপর ছেদিতাংশের পরিমাণ $(6, 3, -3)$ এবার $x + 2y - 2z = 6$-কে অভিলম্ব আকারে লিখলে হয় এখানে $p = \sqrt{(1^2 + 2^2 + 2^2)} = 3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ ঃ $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 2$

$\therefore$ অভিলম্বের দিক্‌যুক্ত কোসাইনের মান হবে $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ এবং মূলবিন্দু থেকে সমতলটির উপর লম্ব দূরত্ব = 2 একক। (Answer)

(2) $(1, 1, 2)$ ও $(2, 4, 3)$ বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ কি হবে যদি উক্ত সমতল $x - 3y + 7z + 5 = 0$ সমতলের সাথে লম্ব ভাবে অবস্থান করে?

সমাধান ঃ $(1, 1, 2)$ বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ হবে ঃ

$$A(x-1) + B(y-1) + C(z-2) = 0 \quad \dots\dots (i)$$

$(2, 4, 3)$ বিন্দুকে এটি সিদ্ধ করলে পাই—

$$A + 3B + C = 0 \quad \dots\dots (ii)$$

(i) নং সমতল $x - 3y + 7z + 5 = 0$ এর সাথে লম্ব,

$\therefore$ আমরা পাই, $A - 3B + 7C = 0$ $\dots\dots$ (iii)

(i), (ii) ও (iii) থেকে A, B এবং C-কে অপনয়ন করে পাই,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

এটিই নির্ণেয় সমতলের সমীকরণ। (Answer).

(3) $2x - 2y - z - 3 = 0$ তলের সাথে সমান্তরাল ও এথেকে 7 একক দূরবর্তী সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক্ প্রশ্নে দেওয়া সমতলের সাথে সমান্তরাল সমতলের সমীকরণ হবে—

$$2x - 2y - z + k = 0$$

এই তল থেকে মূলবিন্দুর দূরত্ব $\frac{k}{\sqrt{(4+4+1)}}=\frac{k}{3}$

প্রশ্নে দেওয়া $2x-2y-z-3=0$ থেকে মূলবিন্দুর দূরত্ব $=\frac{-3}{\sqrt{(4+4+1)}}=\frac{-3}{3}$

এখন প্রশ্নানুসারে,

$$\pm\frac{3}{3}+\frac{k}{3}=7$$

$$\Rightarrow \quad \pm 1+\frac{k}{3}=7$$

$$\therefore \quad \frac{k}{3}=8 \qquad \text{অথবা,} \qquad \frac{k}{3}=6$$

$$\Rightarrow \quad k=24 \qquad \Rightarrow \quad k=18$$

$\therefore$ এক্ষেত্রে এরূপ দুটি সমতলের নির্ণেয় সমীকরণ হল

$2x-2y-z+24=0$ এবং $2x-2y-z+18=0$ (Answer)

(4) একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $x+y+z=6$ এবং $2x+3y+4z+5=0$ সমতল দুটির ছেদ রেখাগামী ও $x-2y+3z=6$ সমতলের উপর লম্ব।

সমাধান : $x+y+z=6$ এবং $2x+3y+4z+5=0$ সমতল দুইটির ছেদরেখাগামী কোনও সমতলের সমীকরণ হল $(x+y+z-6)+\lambda(2x+3y+4z+5)=0$ ...... (1)

বা, $(1+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+(1+4\lambda)z+(5\lambda-6)=0$

এই সমতলটি $x-2y+3z=6$ সমতলের উপর লম্ব হবে যদি $1(1+2\lambda)-2(1+3\lambda)+3(1+4\lambda)=0$

বা, $2+8\lambda=0$

বা, $\lambda=-\frac{1}{4}$

(1) নং সমীকরণে $\lambda=-\frac{1}{4}$ বসিয়ে পাই

$$(x+y+z-6)-\frac{1}{4}(2x+3y+4z+5)=0$$

বা, $2x+y-29=0$. এটিই নির্ণেয় সমতলের সমীকরণ। (Answer)

(5) $(2, 5, -8)$ বিন্দুগামী একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা দুইটি সমতল $2x-3y+4z+1=0$ এবং $4x+y-2z+6=0$-এর প্রতিটির উপর লম্ব।

সমাধান : $(2, 5, -8)$ বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ হবে :

$A(x-2)+B(y-5)+C(z+8)=0$ ......(1)

(1) নং সমতল যেহেতু $2x-3y+4z+1=0$ এবং $4x+y-2z+6=0$

সমতল দুটির উপর লম্ব, আমরা পাব—

$2A - 3B + 4C = 0$ ……… (2)

$4A + B - 2C = 0$ ……… (3)

(1), (2) ও (3) নং সমীকরণ হইতে A, B ও C-কে অপসারিত করে পাই,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z+8 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

বা, $2(x-2) + 20(y-5) + 14(z+8) = 0$

বা, $x + 10y + 7z + 4 = 0$

এটিই নির্ণেয় সমতলের সমীকরণ। (Answer)

(6) একটি পরিবর্তনশীল সমতল অক্ষত্রয়কে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। মূলবিন্দু থেকে ABC সমতলের দূরত্ব সর্বদা $3p$ হলে দেখান যে ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের সঞ্চার পথের সমীকরণ

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$$

সমাধান : ধরা যাক্, পরিবর্তনশীল সমতলটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$। এই সমতলটি অক্ষত্রয়কে $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ ও $C(0, 0, c)$—এই তিনটি বিন্দুতে ছেদ করে।

শর্তানুযায়ী মূল বিন্দু থেকে সমতলটির লম্ব দূরত্ব $3p$.

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = 3p$$

বা, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{9p^2}$ ……… (1)

ধরি, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র হল (α, β, γ), তাহলে

$$\alpha = \frac{a+0+0}{3} = \frac{a}{3}, \quad \beta = \frac{0+b+0}{3} = \frac{b}{3}$$

এবং $\gamma = \frac{0+0+c}{3} = \frac{c}{3}$.

বা, $a = 3\alpha, b = 3\beta, c = 3\gamma$.

a, b, c-এর মান (1) নং-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{9\alpha^2} + \frac{1}{9\beta^2} + \frac{1}{9\gamma^2} = \frac{1}{9p^2}$$

বা, $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{p^2}$

সুতরাং ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথের সমীকরণ হল

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{p^2}$$ (Proved)

(7) (1, 1, 1), (2, – 1, 1), (3, 1, 2)—এই তিন বিন্দুগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুণ।

সমাধান : (1, 1, 1) বিন্দুগামী সমতলটির সমীকরণ হবে

$$a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

(1) নং সমতলটি যেহেতু (2, – 1, 1) এবং (3, 1, 2) বিন্দুগামী, আমরা পাব

$$a(2-1)+b(-1-1)+c(1-1)=0$$

বা, $a-2b=0$ ……… (2)

এবং $a(3-1)+b(1-1)+c(2-1)=0$

বা, $2a+c=0$ ……… (3)

(1), (2) এবং (3) নং সমীকরণ হইতে a, b, c-কে অপসারিত করে পাই,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

বা, $2x+y-4z+1=0$

এটিই নির্ণেয় সমতলের সমীকরণ। (Answer)

(8) প্রমাণ করুন যে, $2x^2-6y^2-12z^2+18yz+2zx+xy=0$ একজোড়া সমতলের সমীকরণ। তাদের অন্তর্গত কোণ কত?

সমাধান : উপরিউক্ত দ্বিঘাত দ্বিতলবিশিষ্ট সমীকরণটিকে দুটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা গেলেই তারা একজোড়া সমতল সূচিত করবে।

$2x^2-6y^2-12z^2+18yz+2zx+xy=0$-কে x-এর সমীকরণ হিসাবে লিখলে দাঁড়ায়—

$$2x^2+x(2z+y)-6y^2-12z^2+18yz=0$$

$$\therefore \quad 4x=-(y+2z)\pm\sqrt{(4z^2+4yz+y^2+48y^2+96z^2-144yz)}$$

$$=-(y+2z)\pm(10z-7y)$$

অর্থাৎ, $4x=8z-8y$ এবং $4x=-12z+6y$

$\therefore$ একজোড়া সমতলের নির্ণেয় সমীকরণ হল—

$$x+2y-2z=0 \text{ এবং } 2x-3y+6z=0$$

এদের অন্তর্গত কোণের পরিমাপ θ হলে—

$$\cos\theta=\frac{2-6-12}{3.7}$$

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{16}{21}\right)$ (Answer).

(9) $OABC$ চতুস্তলকের ঘনফল নির্ণয় করুন। যেখানে 'O' হল মূলবিন্দু $(0, 0, 0)$, OA, OB, OC-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c এবং $\angle BOC, \angle COA$ এবং $\angle AOB$- এর মান যথাক্রমে λ, μ, γ.

সমাধান : ধরা যাক্ OA, OB, OC -এর দিক্‌যুক্ত কোসাইনের মান যথাক্রমে (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) এবং (l_3, m_3, n_3).

সুতরাং A, B, C- এর স্থানাঙ্ক হবে যথাক্রমে, (al_1, am_1, an_1), (bl_2, bm_2, bn_2), (cl_3, cm_3, cn_3).

$\therefore$ $OABC$ চতুস্তলকের ঘনফল হবে—

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ al_1 & am_1 & an_1 & 1 \\ bl_2 & bm_2 & bn_2 & 1 \\ cl_3 & cm_3 & cn_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{abc}{6}\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

এক্ষণে,

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma l_1^2 & \Sigma l_1 l_2 & \Sigma l_1 l_3 \\ \Sigma l_1 l_2 & \Sigma l_2^2 & \Sigma l_2 l_3 \\ \Sigma l_1 l_3 & \Sigma l_2 l_3 & \Sigma l_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\mu \\ \cos\gamma & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

[$\therefore$ $\Sigma l_1^2 = \Sigma l_2^2 = \Sigma l_3^2 = 1$ এবং,

$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = \cos\lambda$,

$l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = \cos\mu$,

$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = \cos\gamma$]

$\therefore$ চতুস্তলকের নির্ণেয় ঘনফল $= \frac{abc}{6}\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\mu \\ \cos\gamma & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}^{1/2}$ (Answer)

7.12 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

1. (x_1, y_1, z_1) বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ কি হবে যখন সেটি $ax + by + cz = 0$-এর সাথে সমান্তরাল।

(সংকেত : $ax + by + cz = 0$ এর সমান্তরাল তলের আকার $ax + by + cz + k = 0$ হবে)

[উত্তর : $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$]

2. $(2, 1, -1)$ বিন্দুগামী সমতল যা $x - y + z = 1$ এবং $3x + 4y - 2z = 0$ সমতলদ্বয়ের সাথে লম্ব তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। [উত্তর : $2x - 5y - 7z - 6 = 0$]

(সংকেত : দুটি তল লম্ব হবার শর্ত $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ প্রযোজ্য)

3. $(3, 1, 1)$ ও $(1, -2, 3)$ বিন্দুগামী ও অক্ষত্রয়ের সাথে সমান্তরাল তিনটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন। (সংকেত : x অক্ষের সাথে সমান্তরাল সমতল $By + Cz = 1$ আকারের হবে .... ইত্যাদি)

[উত্তর : $2y + 3z = 5$, $x + z = 4$, $3x - 2y = 7$]

4. দুটি সমান্তরাল সমতল $2x + 5y + 4z - 12 = 0$ এবং $2x + 5y + 4z + 6 = 0$ এর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করুন।

(সংকেত : (0, 0, 0) থেকে দুটি সমতলের দূরত্বের অন্তর নির্ণয় করুন) $\left[\text{উত্তর : } \frac{6}{\sqrt{5}} \text{ একক}\right]$

5. z-অক্ষের উপর অবস্থিত দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যারা $(1, -2, 0)$ এবং $3x - 2y + 6z - 9 = 0$ থেকে সমদূরবর্তী।

(সংকেত : z-অক্ষের উপর বিন্দু $(0, 0, c)$ ধরে বিভিন্ন দূরত্বের সূত্র প্রয়োগ করুন।)

$\left[\text{উত্তর : } (0, 0, -2) \text{ ও } \left(0, 0, \frac{-82}{13}\right)\right]$

6. $2x + y - 2z = 4$ এবং $2x - 3y + 6z + 2 = 0$ সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক সমতলের সমীকরণ কি হবে?

(সংকেত : সমদ্বিখণ্ডকতলের সূত্র দ্রষ্টব্য)

[উত্তর : $10x - y + 2z - 11 = 0$ এবং $4x + 8y - 16z - 17 = 0$]

7. $2x + y + 2z = 9$ এবং $4x - 5y - 4z = 1$ সমতলদ্বয়ের ছেদরেখার মধ্যদিয়ে যায় এমন সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন যখন উক্ত সমতল $(3, 2, -1)$ বিন্দুকে ধারণ করে।

(সংকেতঃ নির্ণেয় সমতল $(2x + y + 2z - 9) + \lambda(4x - 5y - 4z - 1) = 0$ আকারের হবে)

[উত্তর : $11x - 5y - z = 24$]

8. $A(2, 3, 0)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(5, 0, 0)$ ও $D(2, 0, 7)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট চতুস্তলকের ঘনফল কত?

(সংকেতঃ চতুস্তলকের ঘনফলের সূত্র প্রযোজ্য)   [উত্তর : $\frac{39}{6}$ ঘন একক]

9. $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{7} = 1$ সমতলটি স্থানাঙ্ক অক্ষতলের সাথে যে চতুস্তলকটি সৃষ্টি করে তার ঘনফল কত?

(সংকেত : এর শীর্ষবিন্দুগুলি হবে (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 6, 0), (0, 0, 7))

[উত্তর : 14 ঘন একক]

10. দেখান যে (0, – 1, 0), (2, 1, – 1), (1, 1, 1), (3, 3, 0)—এই চারটি বিন্দু একই সমতলে অবস্থিত। সমতলটির সমীকরণও নির্ণয় করুন।   [উত্তর : $4x - 3y + 2z - 3 = 0$]

11. একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা (3, 5, 1), (2, 3, 0) এবং (0, 6, 0) বিন্দুগামী।

[উত্তর : $3x + 2y - 7z - 12 = 0$]

12. একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা (3, 4, – 1) এবং (3, – 1, 5) বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।   [উত্তর : $10y - 12z + 9 = 0$]

13. (2, – 3, 1) বিন্দুগামী একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা (3, 4, – 1) ও (2, – 1, 5) বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখার উপর লম্ব।   [উত্তর : $x + 5y - 6z + 19 = 0$]

14. X-অক্ষের সমান্তরাল ও (2, 3, – 4) এবং (1, – 1, 3) বিন্দুগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[উত্তর : $7y + 4z - 5 = 0$]

15. একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $x + 2y - z + 1 = 0$ ও $3x - y - 4z + 3 = 0$ সমতল দুইটির ছেদরেখাগামী ও (1, 1, 1) বিন্দুগামী।   [উত্তর : $8x - 5y - 11z + 8 = 0$]

16. একটি সমতল $2x + y - z = 2$ এবং $x - y - z = 3$ সমতল দুইটির উপর লম্ব এবং (1, 0, – 2) বিন্দুটিকে ধারণ করে। সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।   [উত্তর : $2x - y + 3z + 4 = 0$]

17. (2, 2, 1) এবং (1, – 2, 3) বিন্দুদ্বয়গামী একটি সমতল $x + y + z = 4$ সমতলের উপর লম্ব, সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।   [উত্তর : $2x - y - z - 1 = 0$]

18. (4, 2, – 1) বিন্দুগামী ও $3x + 5y - 7z = 10$ সমতলের সমান্তরাল সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।   [উত্তর : $3x + 5y - 7z = 29$]

19. $x + 2y + 2z = 19$ এবং $4x - 3y + 12z + 3 = 0$ সমতল দুইটির অন্তর্গত সূক্ষকোণকে যে সমতল সমদ্বিখণ্ডিত করে তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।   [উত্তর : $25x + 17y + 62z = 238$]

20. (3, 2, – 2) বিন্দু হতে একটি সমতলের উপর লম্ব টানা হল। লম্বটির পাদদেশ (4, 1, 2) হইলে সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।   [উত্তর : $x - y + 4z + 8 = 0$]

21. একটি চলমান সমতল অক্ষত্রয়কে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। মূলবিন্দু থেকে ABC সমতলের উপর লম্ব দূরত্ব সর্বদা p হলে দেখান যে $OABC$ চতুস্তলকের ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{16}{p^2}$$

[সংকেত: $A \equiv (a, 0, 0)$, $B \equiv (0, b, 0)$ ও $C \equiv (0, 0, c)$ ধরে নিন এবার তলের সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ -কে লম্ব আকারে লিখে এভাবে ভাবুন ..... ।]

7.13 সারাংশ

এই অধ্যায়ে মূলতঃ ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামাতির সাহায্যে একটি সমতলের বীজগাণিত সমীকরণ নির্ণয় করা হয়েছে। বিভিন্ন দিক থেকে বিশেষ বিশেষ শর্ত সাপেক্ষে সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করে তাদের বিচার বিশ্লেষণ করা হয়েছে। এরপর দুটি সমতলের মধ্যে দ্বিতল কোণের পরিমাপ এবং কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করা হয়েছে। একটি সমতলের সাপেক্ষে একটি বিন্দুর অবস্থান বলতে কি বোঝায় তা আলোচিত হয়েছে। এই ধারণা থেকে একটি সমতল থেকে একটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করা হয়েছে। পরবর্তীতে একটি ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল এবং একটি চতুস্তলকের বা পিরামিডের আয়তন নির্ণয় এর সূত্র নির্ধারিত হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ এবং অনুশীলনীর মাধ্যমে বিষয়টিকে সহজবোধ্য এবং আয়ত্তাধীন করা হয়েছে। অনুশীলনীগুলো অবশ্যই সংকেত মত সমাধান করা প্রয়োজন।

7.14 সহায়ক গ্রন্থাবলী

(1) J. T. Bell : Co-ordinate Geometry of 3-dimension.

(Macmillan, New-Delhi, 1997)

(2) J. G. Chakravorty, P. R. Ghosh : Advanced analytical Geometry.

(U. N. Dhur, Kolkata, 1995)

(3) শ্রীপতিরঞ্জন চৌধুরী : ভেক্টর বীজগণিত ও ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ও জ্যামিতি।

(পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ, কলকাতা, 1980)

একক ৪ ❑ সরলরেখা

গঠন

৪.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে একটি এবং একাধিক সমতল এর বীজগাণিতিক সমীকরণ এবং তাদের বিভিন্ন অবস্থান সূচক ধর্ম আলোচিত হয়েছে। এও উল্লেখিত যে দুইটি সমতল একটি সরল রেখাতে ছেদ করে। তাহলে দুইটি সমতলকে যদি একই সঙ্গে চিন্তা করা হয় তবে তাদের মধ্যে যে সাধারণ অঞ্চল তা সরলরেখারই নামান্তর। আলোচ্য অধ্যায়ে তাই সরলরেখার বীজগাণিতিক সমীকরণ এবং ভিন্ন ভিন্ন ক্ষেত্রে ভিন্ন ভিন্ন সমীকরণ হতে পারে।

8.2 উদ্দেশ্য

জ্যামিতির ক্ষেত্রে সরলরেখার গুরুত্ব সমধিক। সরলরেখা শুধুমাত্র দিক নির্দেশ করে না। সেই সঙ্গে বক্ররেখা বা বক্রতলের কোনবিন্দুতে তার সম্পর্কে বা স্পর্শতলের সংজ্ঞা নিরূপণ করে। এছাড়াও গতিশীল বস্তুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ধারণে সরলরেখার প্রয়োজন অনস্বীকার্য। সুতরাং সরলরেখার সমীকরণ এবং এক ও

একাধিক সরলরেখার পরস্পর সম্পর্ক বিষয়ে ধারণা থাকলে পরবর্তী অধ্যায়ে শঙ্কু, বেলন বা কনিকয়ডের বিষয়ে বুঝতে সুবিধা হবে।

৪.3 বিষয় পরিচিতি

এই অধ্যায়ে সরলরেখার সমীকরণ ও সরলরেখার দিক নির্দেশক কোসাইন বিষয়ে প্রথমে ধারণা দেওয়া হয়েছে। পরবর্তীকালে সরলরেখার সমীকরণের বিভিন্ন প্রকারভেদ এবং তাদের উপযোগিতা বিষয়ে আলোচনা আছে। একটি সরলরেখা ও একটি তলের মধ্যে কতরকম সম্পর্ক হতে পারে তাও জ্ঞাতব্য। এরপর দুটি সরলরেখার পারস্পরিক সম্পর্ক বিষয়ে আলোচনা আছে। দুটি সরলরেখা পরস্পর ছেদী হতে পারে। তারা সমান্তরাল হতে পারে। এর দুটোর কোনটা নাও হতে পারে। সেক্ষেত্রে সরলরেখা দুটিকে নৈকতলীয় বলা হবে। ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে নৈকতলীয় সরলরেখার গুরুত্ব অপরিসীম, দুটি নৈকতলীয় সরলরেখার মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি বিশ্লেষণ আবশ্যক। ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয়ক সরলরেখার সমীকরণ বিষয়ে আলোচনা আছে।

৪.4 ত্রিমাত্রিক দেশে সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ, সরলরেখার দিক্‌নির্দেশক কোসাইন নির্ণয়

সাধারণতঃ সমান্তরাল নয় এমন দুটি সমতল একটি সরলরেখায় ছেদ করে। $ax + by + cz + d = 0$ এবং $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ যদি সমান্তরাল নয় এমন দুটি সমতল হয় তাহলে একযোগে তারা একটি সরলরেখাকে সূচিত করবে।

$ax + by + cz = 0$ এবং $a'x + b'y + c'z = 0$ একযোগে একটি সরলরেখা সূচিত করবে যা পূর্বোক্ত সরলরেখার সাথে সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু $(0, 0, 0)$ গামী হবে।

টীকা : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ সম্বন্ধটি সিদ্ধ না হলেই $ax + by + cz + d = 0$ এবং $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ সমান্তরাল হবে না।

এখন, ধরা যাক্ দুটি সমান্তরাল নয় সমতলের সমীকরণ নিম্নরূপ :

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

যে সরলরেখাটি উপরিউক্ত সমতলের ছেদিত সরলরেখা, ধরা যাক তার দিক্ নির্দেশক কোসাইন (l, m, n).

সরলরেখাটি উভয় সমতলের উপর অবস্থান করায় উভয় সমতলের উপর লম্বরেখাগুলি সরলরেখার সঙ্গে $90°$ কোণে নত। অতএব আমরা পাই (সমকোণের শর্তানুসারে):

$$a_1l + b_1m + c_1n = 0 \qquad \text{...........(i)}$$

$a_2 l + b_2 m + c_2 n = 0$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই—

$$\frac{l}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{m}{c_1a_2 - a_1c_2} = \frac{n}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

সুতরাং $b_1c_2 - b_2c_1 = t_1$

$c_1a_2 - a_1c_2 = t_2$ এবং

$a_1b_2 - a_2b_1 = t_3$ হলে (t_1, t_2, t_3) হল

সরলরেখার দিক্‌নির্দেশক অনুপাত। এখানে (t_1, t_2, t_3) সব একযোগে শূন্য নয়।

∴ সরলরেখার দিক্‌নির্দেশক কোসাইনের মান হল ঃ—

$$\left(\frac{t_1}{\sqrt{(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)}}, \frac{t_2}{\sqrt{(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)}}, \frac{t_3}{\sqrt{(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)}}\right)$$

৪.5 সরলরেখার প্রতিসম সমীকরণ, সাধারণ সমীকরণকে প্রতিসম সমীকরণে রূপান্তরকরণ

৪.5.1 ধরা যাক্ কোন সরলরেখার দিকনির্দেশক কোসাইনের মান (l, m, n) এবং সরলরেখাটি $Q(x', y', z')$ বিন্দুগামী।

ধরা যাক্ $P(x, y, z)$ ওই সরলরেখার উপরিস্থিত একটি বিন্দু যার $Q(x', y', z')$-এর থেকে দূরত্ব হল r.

∴ আমরা পাই,—

$x - x' = lr,\ y - y' = mr,\ z - z' = nr$

সুতরাং সমস্ত বিন্দু $P(x, y, z)$ এর জন্য

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n} = r$$

এটিই সরলরেখার প্রতিসম সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত সমূহ ঃ

(i) স্থিরবিন্দু (x', y', z') থেকে সরলরেখাস্থিত কোন বিন্দুর 'P' এর দূরত্ব r হলে, P-এর স্থানাঙ্ক হবে $P \equiv (x' + lr, y' + mr, z' + nr)$, যেখানে (l, m, n) হল সরলরেখাটির দিক্‌নির্দেশক কোসাইন।

(ii) যে সরলরেখা (x', y', z') বিন্দুগামী এবং যার দিক্‌নির্দেশক অনুপাত হল a, b, c, তার সমীকরণ নিম্নরূপ ঃ $\dfrac{x - x'}{a} = \dfrac{y - y'}{b} = \dfrac{z - z'}{c}$

এক্ষেত্রে কোন দূরত্ব 'r' পাওয়া যাবে না।

(iii) দুটি বিন্দু $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ গামী সরলরেখার সমীকরণ নিম্নরূপ ঃ

PQ-এর দিগ্‌নির্দেশক অনুপাত হল

$(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ এবং $(z_2 - z_1)$

সুতরাং অনুসিদ্ধান্ত (ii) থেকে পাই

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

8.5.2 সমান্তরাল নয় এরূপ দুটি সমতল $ax + by + cz + d = 0$ এবং $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ দেওয়া আছে। এদের ছেদ যে সরলরেখাটি তাকে প্রতিসম আকারে (Symmetrical form) লিখতে হবে।

8.4 অধ্যায় থেকে পাই যে এই সরলরেখাটির দিক্‌নির্দেশক অনুপাতের মান $(bc' - b'c)$, $(ca' - c'a)$ এবং $(ab' - a'b)$.

যে বিন্দুতে সরলরেখাটি xy তলকে ছেদ করে (xy তলকে ছেদ না করলে আমরা yz বা xz তল ধরতাম) সেটি বার করার জন্য $z = 0$ দুটি সমতলের সমীকরণে বসিয়ে পাই

$ax + by + d = 0$ এবং

$a'x + b'y + d' = 0$

এ থেকে পাই, $x = \dfrac{bd' - b'd}{ab' - a'b}$, $y = \dfrac{da' - d'a}{ab' - a'b}$

$\therefore$ সরলরেখাটির উপরিস্থিত একটি বিন্দু হল $\left(\dfrac{bd' - b'd}{ab' - a'b}, \dfrac{da' - d'a}{ab' - a'b}, 0\right)$

$\therefore$ আমাদের সরলরেখার নির্ণেয় প্রতিসম আকার হবে :

$$\frac{x - \dfrac{bd' - b'd}{ab' - a'b}}{bc' - b'c} = \frac{y - \dfrac{da' - d'a}{ab' - a'b}}{ca' - c'a} = \frac{z - 0}{ab' - a'b}$$

8.6 একটি সরলরেখার সঙ্গে একটি সমতলের সম্পর্ক আলোচনা

ধরা যাক্ একটি সরলরেখার সমীকরণ হল :—

$\dfrac{x - x'}{l} = \dfrac{y - y'}{m} = \dfrac{z - z'}{n}$ এবং একটি সমতলের সমীকরণ হল $ax + by + cz + d = 0$

সরলরেখার উপরিস্থিত কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $(x' + lr, y' + mr, z' + nr)$.

যদি বিন্দুটি সমতলটিতে থাকে, তাহলে :—

$a(x' + lr) + b(y' + mr) + c(z' + nr) + d = 0$

বা, $r = -\dfrac{ax' + by' + cz' + d}{al + bm + cn}$

8.6.1 (i) সরলরেখাটি সমতলটির সাথে সমান্তরাল হলে সমতলটির অভিলম্ব সরলরেখার উপরও অভিলম্ব (normal) হবে।

$\therefore$ সেক্ষেত্রে শর্তটি হবে ঃ $al + bm + cn = 0$

এছাড়াও, $ax' + by' + cz' + d \neq 0$ যেহেতু (x', y', z') সমতলে অবস্থিত নয়।

(ii) একইভাবে সরলরেখাটি সমতলটির উপর লম্ব হলে, $\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$ হবে

(iii) যদি সরলরেখাটি সম্পূর্ণভাবে সমতলে অবস্থিত হয়, তাহলে সরলরেখাটি সমতলটির সাথে সমান্তরাল হবে এবং উভয়ের একটি সাধারণ বিন্দু থাকবে।

অর্থাৎ $al + bm + cn = 0$ এবং $ax' + by' + cz' + d = 0$ একযোগে সিদ্ধ হবে।

8.6.2. একটি সরলরেখা দিয়ে যায় এমন সমতলের সমীকরণ ঃ

ধরা যাক্, সরলরেখাটির সমীকরণ হল

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

এখন নির্ণেয় সমতলটি (x_1, y_1, z_1) বিন্দুকে ধারণ করে, তাই সমতলটির সমীকরণ হবে

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

কিন্তু যেহেতু সরলরেখা ও সমতল এক্ষেত্রে সমান্তরাল তাই, $Al + Bm + Cn = 0$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে;

$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ সরলরেখাকে ধারণকারী সমতল সমূহের সমীকরণ হল ঃ—

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

যেখানে $Al + Bm + Cn = 0$; এবং A, B, C কে-শর্তাবলী থেকে নির্ণয় করতে হবে।

8.6.3 সরলরেখার সমীকরণে ধ্রুবকরাশি সমূহ ঃ

প্রতিসম আকারে একটি সরলরেখার সমীকরণ নিম্নরূপ ঃ

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n} \qquad \text{.........(i)}$$

এটি নিম্নলিখিত তিনটি সমীকরণের সাথে তুল্য;

$$m(x - x') = l(y - y')$$

$$n(y - y') = m(z - z')$$

$$l(z - z') = n(x - x')$$

এদের প্রত্যেক সমীকরণই স্থানাঙ্ক অক্ষের সাথে সমান্তরাল সমতল সূচিত করছে এবং সমীকরণগুলি একে অন্যের থেকে স্বাধীন নয়। যে কোন দুটি থেকে তৃতীয়টি এক্ষেত্রে নির্ণয় করা যায়।

$\therefore$ (i) নং সমীকরণকে যে কোন দুটি সমতলের সমীকরণ থেকে নির্ণয় করে ফেলা যাচ্ছে।

$\therefore$ প্রতিসম আকারে সরলরেখাটিকে আমরা প্রথম দুটি (এক্ষেত্রে) সমতলের সমীকরণের সাহায্যে লিখতে পারি, $x = \frac{l}{m}y + x' - \frac{l}{m}y'$ এবং $y = \frac{m}{n}z + y' - \frac{m}{n}z'$

এগুলি স্পষ্টতঃই $x = Ay + B$ এবং $y = Cz + D$ আকারের। এক্ষেত্রে A ও B হল যথাক্রমে সরলরেখাটির $Z = 0$ তলে লম্ব অভিক্ষেপের y-অক্ষ স্বাপেক্ষে নতি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে এটির ছেদিতাংশ।

একইভাবে C এবং D এরও ব্যাখ্যা দেওয়া যায়।

8.7 দুটি সরলরেখা সমতলীয় হবার শর্ত, একটি প্রদত্ত বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার দূরত্ব নির্ণয়

8.7.1 ধরা যাক্ দুটি সরলরেখার সমীকরণ নিম্নরূপ ঃ

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{.........(i)}$$

এবং, $$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \quad \text{.........(ii)}$$

আমরা জানি যে (i) ও (ii) পরস্পর ছেদী হলে তারা একতলীয় হবে।

(i) নং সরলরেখাকে ধারণকারী সমতলের সমীকরণ হবে

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad \text{.........(iii)}$$

যখন, $$Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0 \quad \text{.........(iv)}$$

এক্ষণে (iii) নং সমতল (ii) নং সরলরেখাকে ধারণ করলে (x_2, y_2, z_2) এতে অবস্থিত হবে, সেক্ষেত্রে ঃ—

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0 \quad \text{.........(v)}$$

যখন, $$Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0 \quad \text{.........(vi)}$$

A, B, C একযোগে সব শূন্য নয়, এই (iv), (v) ও (vi) থেকে $A, B,$ ও C-কে অপনয়ন করে পাই—

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{.........(1)}$$

(i) ও (ii) নং সরলরেখাকে একতলীয় হবার এটিই প্রয়োজনীয় শর্ত।

(iii), (iv) ও (vi) থেকে পুনরায় A, B ও C-কে অপনয়ন করে পাই —

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{.........(2)}$$

এটিই (i) ও (ii) নং সরলরেখা ধারণকারী সমতল। এখন আমরা প্রমাণ করব যে (1) নং সমীকরণ সিদ্ধ হলে (i) ও (ii) নং সরলরেখা একতলীয় হবে।

ধরি, নিম্নলিখিত সমতলটি দেওয়া আছে;

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (vii)$$

বা, $\quad (x-x_1)(m_1n_2-m_2n_1)+(y-y_1)(n_1l_2-n_2l_1)+(z-z_1)(l_1m_2-l_2m_1)=0$

এক্ষণে কোন সরলরেখার কোন তলে অবস্থিত হবার শর্ত থেকে পাই,

(x_1, y_1, z_1) সমতলে থাকবে এবং $l_1(m_1n_2-m_2n_1)+m_1(n_1l_2-n_2l_1)+n_1(l_1m_2-l_2m_1)=0$

$\therefore$ (i) নং সরলরেখা (vii) নং সমতলে থাকবে। একইভাবে (1)নং শর্তানুযায়ী একইভাবে (ii) নং সরলরেখাও (vii) নং সমতলে থাকবে।

$\therefore$ (i) ও (ii) নং সরলরেখা একতলীয় হবে।

$\therefore$ (1) নং শর্তটি দুটি সরলরেখা একতলীয় হবার জন্য যথেষ্টও বটে।

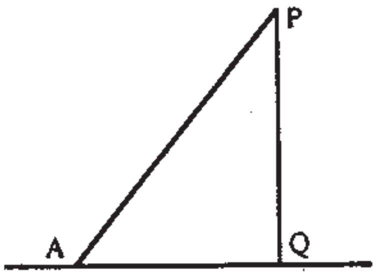
দুটি সরলরেখা যদি সমান্তরাল বা পরস্পরছেদী না হয়, তাহলে দেশে (Space)-এ এই সরলরেখাদ্বয়কে নৈকতলীয় রেখা বলা হয়।

8.7.2 ধরা যাক্, $P(x_1, y_1, z_1)$ একটি বিন্দু এবং AQ হল একটি সরলরেখা যার সমীকরণ হল—

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

PQ লম্ব আঁকা হল (সরলরেখা AQ এর উপর)।

ধরা যাক্ A হল (a, b, c) বিন্দুটি, আমরা জানি, $PQ^2 = AP^2 - AQ^2$



চিত্র : 8.1

এখন, $AP^2 = (x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2$ পুনরায়, AQ হল, সরলরেখার উপর AP দৈর্ঘ্যটির লম্ব অভিক্ষেপ $= (x_1-a)l+(y_1-b)m+(z_1-c)n$

(l, m, n) হল সরলরেখাটির দিক্‌নির্দেশক কোসাইন।

$$\therefore \quad PQ^2 = \{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2\} - [(x_1-a)l+(y_1-b)m+(z_1-c)n]^2$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-a & y_1-b \\ l & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1-b & z_1-c \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1-c & x_1-a \\ n & l \end{vmatrix}^2$$

এই 'PQ'-ই হল 'P' বিন্দু থেকে সরলরেখা $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ এর দূরত্ব (সর্বনিম্ন দূরত্ব বা লম্ব দূরত্ব)।

8.8 নৈকতলীয় সরলরেখা এবং শর্তাবলী, দুটি নৈকতলীয় সরলরেখার মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব, দুটি নৈকতলীয় সরলরেখার বিশেষ সমীকরণ

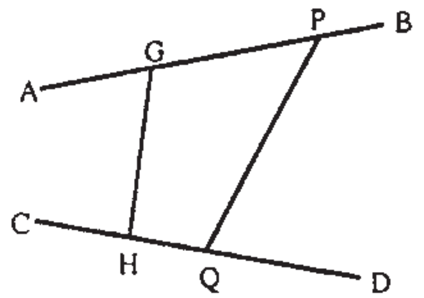
8.8.1 নৈকতলীয় সরলরেখা হল যারা পরস্পর সমান্তরাল বা পরস্পরছেদী নয়।

এখন আমরা দুটি নৈকতলীয় সরলরেখার মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করব।

ধরা যাক্ AB ও CD হল দুটি নৈকতলীয় (skew) সরলরেখা। যাদের সমীকরণ হল যথাক্রমে

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{.........(i)}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \quad \text{.........(ii)}$$



চিত্র : 8.2

ধরা যাক্ GH হল যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে AB ও CD এর উপর লম্ব। সুতরাং GH-ই হল AB ও CD-র মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব।

ধরা যাক্ GH এর সমীকরণ হল $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$

যেখানে (l, m, n) হল GH-এর দিক্‌নির্দেশক কোসাইন।

GH; AB ও CD দুটি সরলরেখার উপরেই লম্ব,

সুতরাং $ll_1+mm_1+nn_1=0$

এবং, $ll_2+mm_2+nn_2=0$

বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই—

$$\frac{l}{m_1n_2 - m_2n_1} = \frac{m}{n_1l_2 - n_2l_2} = \frac{n}{l_1m_2 - l_2m_1} = \frac{1}{\sqrt{\sum(m_1n_2 - m_2n_1)^2}} \quad \text{......... (iii)}$$

$[\because \; l^2 + m^2 + n^2 =$

ধরা যাক্ P ও Q হল যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) এবং (x_2, y_2, z_2) বিন্দুদ্বয়।

এখন PQ এর GH-এর উপর লম্ব অভিক্ষেপ GH-ই হবে।

সুতরাং সর্বনিম্ন দূরত্ব $GH = (x_2 - x_1)l + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)n$ যেখানে (l, m, n)-কে (iii) নং শর্ত থেকে পাওয়া যায়।

$\therefore$ সর্বনিম্ন দূরত্ব GH হবে—

$$GH = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\sum(m_1n_2 - m_2n_1)^2}$$

যে তল (i) নং সরলরেখা ও GH-কে ধারণ করে তার সমীকরণ হবে,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{......... (iv)}$$

একইভাবে (ii) নং সরলরেখা ও GH ধারণকারী সমতলের সমীকরণ হবে,

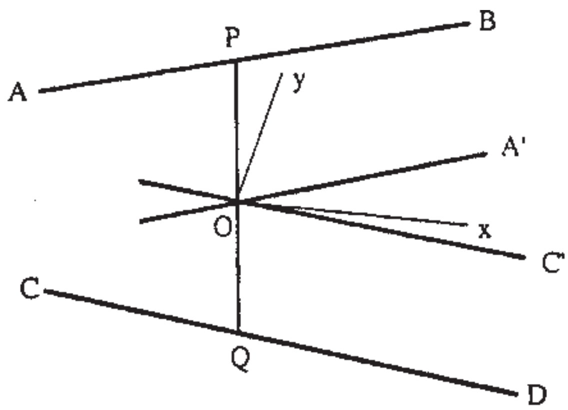
$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{......... (v)}$$

(iv) ও (v) একযোগে GH সরলরেখার সমীকরণ সূচিত করবে যেখানে (l, m, n)-কে (iii) নং শর্ত থেকে নির্ণয় করা হবে।

৪.৪.2 এক্ষণে দুটি নৈকতলীয় সরলরেখার বিশেষ সমীকরণ খুব সহজেই অক্ষতন্ত্রকে বিশেষভাবে নির্বাচন করে নির্ণয় করা যায়।

ধরা যাক্ AB ও CD হল দুটি নৈকতলীয় সরলরেখা এবং PQ (= $2C$) হল এদের মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব। PQ'-এর মধ্যবিন্দু 'O' দিয়ে যথাক্রমে AB ও CD এর সমান্তরাল সরলরেখা OA' ও OC' অঙ্কন করা হল।

এখন 'O'-কে মূলবিন্দু ধরা হল এবং যথাক্রমে $\angle A'OC'$ এর অন্তঃ ও বহিঃ সমদ্বিখণ্ডককে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ধরা হয় তাহলে OP-কে z-অক্ষ ধরা হল।



চিত্র : 8.3

এবার $\angle A'OC' = 2a$ হলে OA'-এর সমীকরণ হবে $y = x \tan a, z = 0$ এবং OC' এর সমীকরণ হবে

$$y = -x \tan a, z = 0$$

সুতরাং AB ও CD সরলরেখার সমীকরণ, যারা যথাক্রমে OA' এবং OC' এর সাথে সমান্তরাল হবে; হল :

(যথাক্রমে) $\quad y = mx, z = c$ এবং $y = -mx, z = -c$ যেখানে, $m = \tan a$

এরাই প্রয়োজনীয় নৈকতলীয় সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত : প্রতিসম আকারে দুটি নৈকতলীয় সরলরেখার সমীকরণ হল,

AB-র জন্য : $\dfrac{x}{\cos a} = \dfrac{y}{\sin a} = \dfrac{z-c}{0}$

এবং $\quad CD$-র জন্য : $\dfrac{x}{\cos a} = \dfrac{y}{-\sin a} = \dfrac{z+c}{0}$

8.9 উদাহরণমালা

(1) $\quad (-3, 8, 4)$ বিন্দুটির $6x - 3y - 2z + 1 = 0$ সমতল স্বাপেক্ষে প্রতিবিম্বের (image) স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান : ধরা যাক, A বিন্দু হল $(-3, 8, 4)$ এবং এর প্রতিবিম্ব A' তাহলে প্রশ্নে দেওয়া সমতলটি AA'-কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

$6x - 3y - 2z + 1 = 0$ সমতলে লম্ব ও 'A' বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হল :—

$$\frac{x+3}{6} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z-4}{-2}$$

ধরা যাক্ A' বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল $(-3 + 6r, 8 - 3r, 4 - 2r)$ যেখানে r একটি প্রাচল (Parameter).

তাহলে AA'-এর মধ্যবিন্দু B এর স্থানাঙ্ক হবে $\left(-3 + 3r,\ 8 - \dfrac{3}{2}r,\ 4 - r\right)$

এক্ষণে B বিন্দু $6x - 3y - 2z + 1 = 0$ সমতলে অবস্থিত,

$\therefore \quad 6(-3 + 3r) - 3\left(8 - \frac{3}{2}r\right) - 2(4 - r) + 1 = 0$

বা, $\quad \frac{49r}{2} = 49$

$\therefore \quad r = 2$

$\therefore \quad A'$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $(-3 + 6.2, 8 - 3.2, 4 - 2.2)$

অর্থাৎ A বিন্দুর প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক হল $(9, 2, 0)$ (Answer)

(2) প্রমাণ করুন যে $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ সরলরেখাটি এবং $4x - 3y + 1 = 0 = 5x - 3z + 2$ সরলরেখাটি একতলীয়। এবার সেই তলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রথম সরলরেখাস্থিত যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1 + 2r, 2 + 3r, 3 + 4r)$.

যদি এটি দ্বিতীয় সরলরেখাস্থিত হয়, তাহলে পাই—

$4(1 + 2r) - 3(2 + 3r) + 1 = 0$ এবং $5(1 + 2r) - 3(3 + 4r) + 2 = 0$

দুটি সমীকরণ থেকেই $r = -1$ পাওয়া যাচ্ছে। এ থেকে প্রমাণিত হল প্রথম ও দ্বিতীয় সরলরেখা একই বিন্দুতে মিলিত হয়।

সুতরাং দুটি সরলরেখা এক্ষেত্রে একতলীয় হবে এবং দ্বিতীয় সরলরেখা ধারণকারী সমতলের সমীকরণ হবে

$4x - 3y + 1 + k(5x - 3z + 2) = 0$

যেখানে k ধ্রুবকটিকে নির্ণয় করতে হবে।

যেহেতু এই তলটি প্রথম সরলরেখাকেও ধারণ করে,

$\therefore \quad (1, 2, 3)$ বিন্দুটি এর উপরস্থিত হবে,

$\therefore \quad 4 - 6 + 1 + k(5 - 9 + 2) = 0 \Rightarrow k = \frac{-1}{2}$

সুতরাং সমতলটির সমীকরণ হল—

$4x - 3y + 1 - \frac{1}{2}(5x - 3z + 2) = 0$

অর্থাৎ $x - 2y + z = 0$ (Answer)

(3) $\frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \frac{x}{a\alpha} = \frac{y}{b\beta} = \frac{z}{c\gamma}$ এবং $\frac{x}{d} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ সরলরেখাগুলির একতলীয় হওয়ার শর্তটি নির্ণয় করুন।

সমাধান : যেহেতু তিনটি সরলরেখাই মূলবিন্দুগামী,

$\therefore \quad$ সমতলটির সমীকরণ হবে $Ax + By + Cz = 0$

সুতরাং $\quad A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$

$Aa\alpha + Bb\beta + Cc\gamma = 0$ এবং,

$$Al + Bm + Cn = 0$$

A, B, C-কে উপরিউক্ত তিনটি সমীকরণ থেকে অপনয়ন করে পাই—

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a\alpha & b\beta & c\gamma \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, $\dfrac{l}{\alpha}(b-c) + \dfrac{m}{\beta}(c-a) + \dfrac{n}{\gamma}(a-b) = 0$ (Answer)

(4) $x + y + z = 4 = 0 = 2x - y - z - 3$ এবং

$x - y + z - 3 = 0 = x + 4y - z + 1$ সরলরেখাদ্বয়কে ছেদকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যখন এটি $(1, 0, 1)$ বিন্দুগামী দেওয়া আছে।

সমাধান ঃ প্রথম সরলরেখা ধারণকারী সমতলের সমীকরণ হবে,—

$x + y + z - 4 + \lambda(2x - y - z - 3) = 0, \lambda =$ ধ্রুবক। এটি $(1, 0, 1)$ বিন্দুগামী হলে, $\lambda = -1$ পাই।

অর্থাৎ সমতলটির সমীকরণ হল $x - 2y - 2z + 1 = 0$

দ্বিতীয় সরলরেখাগামী সমতলের সমীকরণ ও একইভাবে পাই—

$(x - y + z - 3) + \mu(x + 4y - z + 1) = 0, \mu =$ ধ্রুবকরাশি। (Answer)

(5) $\dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y-8}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$ এবং $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+7}{-2} = \dfrac{z-6}{-4}$ সরলরেখা দুইটির মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করুন এবং সর্বনিম্ন দূরত্বের সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক, সর্বনিম্ন দূরত্বের সরলরেখাটির দিগনির্দেশক কোসাইনগুলি হল l, m, n. এই সরলরেখাটি যেহেতু প্রদত্ত দুইটি সরলরেখার উপর লম্ব, তাই আমরা পাই—

$$-3l + m - n = 0, \; 3l - 2m - 4n = 0$$

$$\therefore \quad \frac{l}{-6} = \frac{m}{-15} = \frac{m}{3}$$

বা, $$\frac{l}{-2} = \frac{m}{-5} = \frac{n}{1}$$

$$\therefore \quad l = \frac{-2}{\sqrt{30}}, m = \frac{-5}{\sqrt{30}}, n = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

সুতরাং সর্বনিম্ন দূরত্বটি হল—

$$(3+3)\frac{-2}{\sqrt{30}} + (8+7)\frac{-5}{\sqrt{30}} + (3-6)\frac{1}{\sqrt{30}} = \frac{-90}{\sqrt{30}} = 3\sqrt{30} \text{ একক।}$$

এবং সর্বনিম্ন দূরত্বের সরল রেখাটির সমীকরণ হল—

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-8 & z-3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x+3 & y+7 & z-6 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

বা, $4x - 5y - 17z + 79 = 0 = 22x - 5y + 19z - 83.$ (Answer)

(6) একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0$ সরলরেখাটিকে ধারণ করে এবং $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1, y = 0$ সরলরেখাটির সঙ্গে সমান্তরাল। ঐ সরলরেখা দুইটির মধ্যেকার সর্বনিম্ন দূরত্ব $2d$ হলে প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

সমাধান : প্রথম সরলরেখাটিকে ধারণ করে এরূপ সমতলের সমীকরণ হল—

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 + \lambda x = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

এই (1) নং সমতলটি $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1, y = 0$ অর্থাৎ $\frac{x}{a} = \frac{y}{0} = \frac{z + c}{c}$

সরলরেখাটির সঙ্গে সমান্তরালভাবে অবস্থিত।

সুতরাং, $a\lambda + 0.\frac{1}{b} + c.\frac{1}{c} = 0$

বা, $\lambda = -\frac{1}{a}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমতলটির সমীকরণ হল—

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + 1 = 0.$$

প্রদত্ত প্রথম এবং দ্বিতীয় সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণকে আমরা নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করতে পারি।

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{b} = \frac{z - c}{-c}$$

এবং $\frac{x}{a} = \frac{y}{0} = \frac{z + c}{c}$

ঐ সরলরেখা দুইটির মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব $2d$ হইলে আমরা পাব।

$$2d = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2c \\ a & 0 & c \\ 0 & b & -c \end{vmatrix} \div \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

এটি (1, 0, 1) বিন্দুগামী হলে পাই, $\mu = 1$

$\therefore$ সমতলটির সমীকরণ দাঁড়াল $2x + 3y - 2 = 0$

$\therefore$ প্রয়োজনীয় সরলরেখার সমীকরণ স্পষ্টতঃই : $x - 2y - 2z + 1 = 0 = 2x + 3y - 2$ (Proved)

(7) $x + y = 0 = z; x - y = z, x + y = 2a$ সরলরেখাদ্বয় এবং $x^2 = 2az, y = 0$ অধিবৃত্ত দ্বারা সৃষ্ট তলের (surface) সমীকরণ কি হবে?

সমাধান: প্রথম ও দ্বিতীয় সরলরেখাগামী সমতলের সমীকরণ যথাক্রমে হবে $x + y - \lambda_1 z = 0$ ...... (i)

এবং $(x - y - z) - \lambda_2(x + y - 2a) = 0$ ...... (ii)

λ_1, λ_2 হল স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক (arbitrary constants)

(i) ও (ii) যে রেখায় ছেদ করে তা $x^2 = 2az, y = 0$ অধিবৃত্তকেও ছেদ করবে।

$\therefore$ (i) ও (ii)-এ $y = 0$ বসিয়ে পাই—

$x - \lambda_1 z = 0$ এবং $x - z - \lambda_2(x - 2a) = 0$

এথেকে, $x = \dfrac{2a\lambda_1\lambda_2}{1 - \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2}$ এবং $z = \dfrac{2a\lambda_2}{1 - \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2}$

$x^2 = 2az$-এ এদুটি মান বসিয়ে পাই—

$$\lambda^2{}_1\lambda_2 = 1 - \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2$$

বা, $(\lambda_1 - 1)(\lambda_1\lambda_2 + 1) = 0$

$\therefore$ $\lambda_1\lambda_2 = -1$

λ_1, λ_2-কে (i) ও (ii) থেকে বসিয়ে আমরা পাই—

$$\frac{x + y}{z} \cdot \frac{x - y - z}{x + y - 2a} = -1$$

অর্থাৎ $x^2 - y^2 = 2az$-এটিই নির্ণেয় তলের (surface) সমীকরণ। (Answer)

8.10 সংকেতসহ প্রশ্নাবলী ও উত্তরমালা

(1) (2, − 3, 1) ও (3, − 4, − 5) বিন্দু সংযোজককারী সরলরেখা $3x + y + z = 8$ সমতলকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ সরলরেখার প্রতিসম আকার নির্ণয় করে ভাবুন ...] [Ans. (1, − 2, 7)]

(2) (− 1, 1, − 3) বিন্দুগামী যে সরলরেখা $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{-4}$ সরলরেখার সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ সরলরেখাদ্বয়ের লম্ব হবার শর্ত প্রযোজ্য] $\left[\text{Ans. } \dfrac{x+1}{48} = \dfrac{y-1}{44} = \dfrac{z+3}{9}\right]$

(3) $x + y + z = 4, x - 2y - z = 4$ সরলরেখা থেকে (4, 1, 1) বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করুন। এবার উক্ত লম্বের সমীকরণ নির্ণয় করে তার পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ প্রথম প্রশ্নে দেওয়া সরলরেখাকে প্রতিসম আকারে লিখুন। এবার দূরত্ব নির্ণয়ে শর্ত ও লম্ব হবার শর্ত প্রযোজ্য]

$$\left[\text{Ans. দূরত্ব} = \sqrt{\frac{27}{14}}\,\text{একক}, \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{16} = \frac{z-1}{11}\,\text{এবং}\, \left(\frac{55}{14}, -\frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right)\right]$$

(4) $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-3}{-1}$ এবং $\frac{x+3}{3} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-6}{-4}$ সরলরেখার মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করুন। এবার এই সর্বনিম্ন দূরত্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ P, Q দুটি বিন্দু সরলরেখার উপর নিয়ে তাদের প্রাচল ফর্মে (Parametric form)-এ লিখুন। $PQ \perp$ এবার প্রত্যেক সরলরেখার জন্য লম্ব হবার শর্ত প্রযোজ্য ......]

$$\left[\text{Ans. দূরত্ব} = 3\sqrt{30} \quad \frac{x-3}{6} = \frac{y-8}{15} = \frac{z-3}{-3}\right]$$

(5) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ এবং $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-8}{k} = \frac{z-11}{4}$ থেকে k-এ মান নিরূপণ করুন যাতে সরলরেখাদ্বয় পরস্পর ছেদ করে। ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ একটি ছেদবিন্দু আছে ধরে নিয়ে k-এর মান নিরূপণ করার চেষ্টা করুন]

[Ans. $k = 3$; (3, 5, 7)]

(6) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ এবং $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে সর্বনিম্নদূরত্ব নির্ণয় করুন। এছাড়াও সর্বনিম্নদূরত্ব রেখার সমীকরণ ও তারা কি কি বিন্দুতে সরলরেখাদ্বয়কে ছেদ করে তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ (4) নং অনুশীলনী দ্রষ্টব্য]

$$\left[\text{উত্তর : } 2\sqrt{29}\,\text{একক} \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{4};\ (3, 5, 7)\,\text{ও}\,(-1, -1, -1)\right]$$

(7) $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0$ সরলরেখা ধারণকারী সমতল $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1, y = 0$ সরলরেখার সাথে সমান্তরাল হলে, তার সমীকরণ হবে $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0$; দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী সর্বনিম্ন দূরত্ব $2d$ হলে প্রমাণ করুন $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$

[সংকেতঃ প্রথম সরলরেখা ধারণকারী সমতল $\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right) + \lambda x = 0$ আকারের হবে। (λ একটি parameter) এবার এটি দ্বিতীয় সরলরেখার সমান্তরাল হবে ......]

(8) প্রমাণ করুন যে $\frac{x-a+d}{a-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta}$ এবং $\frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$ একতলীয় এবং এরা $x + z - 2y = 0$ সমতলে অবস্থিত।

[সংকেতঃ দুটি সরলরেখা একতলীয় হবার শর্ত প্রযোজ্য]

(9) প্রমাণ করুন যে ঃ

$2x - 3y + 6z = 1$;

$3x + 6y - z = 2$ এবং

$x + y + z = 1$ সমতল তিনটি একটি বিন্দুতে ছেদ করে। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক কি?

[সংকেতঃ Cramer's rule এর সাহায্যে সমীকরণত্রয় সমাধান ......] [উত্তর : $(-1, 1, 1)$]

(10) প্রমাণ করুন যে, $2x - 5y + z = 1$, $x + y + 4z = 2$ এবং $x + 3y + 6z = 3$ সমতলত্রয় একটি ত্রিভুজাকার প্রিজ্ম গঠন করে।

[সংকেতঃ সমতলত্রয়ের কোন সাধারণ ছেদরেখা বা বিন্দু নেই ... ...]

8.11 সারাংশ

বিষয় পরিচিতিটা লক্ষ্য করুন। এই অধ্যায়ে কি কি আলোচনা করা হয়েছে, তার সূত্রটি ঐ অনুচ্ছেদে উল্লেখ করা হয়েছে। ঐ অনুচ্ছেদে যা উল্লেখিত, তার সংক্ষিপ্ত বিবরণ স্মরণ করা যাক্। এই অধ্যায়ে সরলরেখা বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। দুটি সমতল একটি সরলরেখায় ছেদ করে। দুটি সমতলের সমীকরণ একযোগে চিন্তা করলে একটি সরলরেখার সমীকরণ পাওয়া যাবে। তার থেকে একটি সরলরেখার প্রামাণ্য সমীকরণ নির্ধারণ করা যায়, যা ঐ সরলরেখার দিক নির্দেশ করে। এর পরে একটি সমতল ও একটি সরলরেখার মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক, যেমন একটি সরলরেখা একটি সমতলকে ছেদ করতে পারে, বা সমান্তরাল হতে পারে। তেমনি দুটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করতে পারে, বা সমান্তরাল হতে পারে, বা অসামতলিক হতে পারে। শেষ ক্ষেত্রে দুটি রেখাকে নৈকতলীয় রেখা বলা হয়। এই দুটি রেখার মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করার পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে। এই সর্বনিম্ন রেখার সাপেক্ষে দুটি নৈকতলীয় রেখার সমীকরণ নির্ণয় করা হয়েছে। এইসব বিষয় সম্যকভাবে বুঝবার জন্য কিছু উদাহরণ করে দেওয়া হয়েছে। ঐ রকম কিছু অঙ্ক অনুশীলনীতে দেওয়া আছে।

8.12 সহায়ক গ্রন্থসমূহ

(1) J. G. Chakravorty, P. R. Ghosh : Advanced analytical Geometry

(U. N. Dhur, Kolkata, 1995)

(2) J. T. Bell : Co-ordinate Geometry of 3-dimention.

(Macmillan, New Delhi, 1997)

একক 9 ❑ ঘূর্ণনজাত বক্রতল এবং কারিকারেখা দ্বারা উদ্ভূত বক্রতলের সঞ্চারপথ

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে সরলরেখা ও তল বিষয়ে আপনারা সম্যক অধ্যয়ন করেছেন। কিন্তু প্রকৃতির রাজ্যে সমতল বা সরলরেখা ছাড়াও ত্রিমাত্রিক আরো অনেক ঘনবস্তু পাওয়া যায়। এইসব ঘনবস্তুর জ্যামিতিক বৈশিষ্ট্য জানতে হলে, এইসব বস্তু কিভাবে সৃষ্টি হয়েছে তার গাণিতিক বিশ্লেষণ প্রয়োজন। কিছু ঘনবস্তু একটি সরলরেখার চলন, ঘূর্ণন বা পরিক্রমন এর ফলে সৃষ্টি হয়েছে ব্যাখ্যা দেওয়া যায়। চলমান সরলরেখাকে আমরা কারিকারেখা বলি। এটি যে বক্রতল সৃষ্টি করে তাকে কারিকা রেখা সৃষ্ট বক্রতল বলে। আলোচ্য অধ্যায়ে একটি সরলরেখা দ্বারা সঞ্চারিত বিভিন্ন তলসমূহের সমীকরণ নির্ণয় করা হয়েছে।

9.2 উদ্দেশ্য

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে সমতল ও সরলরেখা বিষয়ে জেনেছেন। কিন্তু সরলরেখা বা সমতলকে মূলতঃ একমাত্রিক বা দ্বিমাত্রিক দেশ হিসাবে চিন্তা করা যায়। আলোচ্য অধ্যায়ে একটি সরলরেখা দ্বারা সঞ্চালিত বিভিন্ন বক্রতলের যে সৃষ্টি হয় তার সমীকরণ সমূহের সঙ্গে পরিচিত করাটাই উদ্দেশ্য। এই সমীকরণ সমূহের সঙ্গে পরিচিত হলে পরবর্তী কালে যে সব বক্রতল বা ঘনবস্তুর বিষয়ে আলোচনা হবে তা বুঝতে সুবিধা হবে।

9.3 বিষয় পরিচিতি

এই অধ্যায়ে মূলতঃ একটি সরলরেখার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। প্রথমেই একটি সরলরেখার ঘূর্ণনের ফলে সৃষ্ট বক্রতলের সমীকরণ নির্ণয় করা হয়েছে। তবে আপনারা নিশ্চয়ই জানেন, চলন, ঘূর্ণন, যাইহোক না কেন সঞ্চার পথ সবসময়ই একটি বা একাধিক শর্ত মেনে চলে, এইসব শর্তসমূহ বীজগাণিতিক রূপে প্রকাশ করলে সরলরেখাটি সেই সমীকরণ সিদ্ধ করে তাই সঞ্চারপথের সমীকরণ পরবর্তী অনুচ্ছেদে কারিকা রেখা সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে। শর্তাধীনে কারিকা রেখার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করার পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে। এছাড়াও কারিকারেখা দ্বারা সৃষ্ট বক্রতলগুলি সমীকরণ সমূহের গাণিতিক বিশ্লেষণও করা হয়েছে।

9.4 শর্তাধীনে একটি রেখার ঘূর্ণনের ফলে উৎপন্ন বক্রতলের সমীকরণ

আমরা জানি যে শঙ্কু এবং চোঙকে একটি সরলরেখা দ্বারা উৎপন্ন করা যায়। শুধু শঙ্কু বা চোঙের ক্ষেত্রে বলে না, যে কোন তল (Surface) যা একটি বা একাধিক গতিশীল সরলরেখা দ্বারা সৃষ্ট হয়, তাকে সরলরেখাঙ্কিত তল (Ruled surface) বলা হয় এবং এই গতিশীল সরলরেখাকে কারিকারেখা (Generating lines or generators) বলা হয়।

যদি একটি তলের প্রত্যেক বিন্দুতে একটি সরলরেখা অঙ্কন করা যায় যেটি সম্পূর্ণরূপে ওই তলে অবস্থান করে, তাহলে তলটিকে সরলরেখাঙ্কিত এবং সরলরেখাগুলিকে কারিকারেখা বলা হয়।

একটি সরলরেখার প্রদত্ত কনিকয়েডের কারিকারেখা হবার বিবিধ শর্ত আছে। একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ নিম্নরূপ হবে : $F(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$

সাধারণতঃ $a \neq 0$ হলে দেখা যাচ্ছে সমীকরণটিতে কার্যকরী ধ্রুবকের সংখ্যা নয়টি : $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\ldots, \frac{d}{a}$ এগুলির বিভিন্ন মানের জন্য কনিকয়েডের বিভিন্ন রূপ প্রকাশ পেতে পারে।

নিচে কয়েকটি এরকম কনিকয়েডের রূপভেদ দেওয়া হল :

কেন্দ্রীয় কনিকয়েড

(i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ উপবৃত্তক (ellipsoid)

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ একপত্রি পরাবৃত্তক (hyperboloid of one sheet)

(iii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ দ্বিপত্রি পরাবৃত্তক (hyperboloid of two sheets)

(iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$ উপবৃত্তীয় অধিবৃত্তক (elliptic paraboloid)

(v) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$, পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তক (hyperbolic paraboloid)

9.4.1 বিন্দু বিশ্লেষণ নিম্নে প্রদত্ত হল ঃ

ধরা যাক একটি কনিকয়েডের সমীকরণ নিম্নরূপ ঃ

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \qquad \text{.........(i)}$$

এবং একটি সরলরেখা $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} = r$ (ধরা হল) ....(ii)

(ii) এর উপর কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল $(\alpha + lr, \beta + mr, \gamma + nr)$ যদি এটি (i)-এ অবস্থান করে, তাহলে

$$r^2(al^2 + bm^2 + cn^2) + 2r(a\alpha l + b\beta m + c\gamma n) + (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1) = 0 \qquad \text{.........(iii)}$$

এক্ষণে (ii) নং সরলরেখা কনিকয়েডটির একটি কারিকারেখা হলে, সরলরেখাটি সম্পূর্ণরূপে কনিকয়েডে অবস্থানরত হবে বা (iii) নং সমীকরণ সব 'r'-এর জন্য সিদ্ধ হবে।

অর্থাৎ (iii)-একটি অভেদ হবে, যারে শর্ত হল ঃ

$$al^2 + bm^2 + cn^2 = 0$$

$$a\alpha l + b\beta m + c\gamma n = 0$$

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 1$$

9.4.2 ধরা যাক একপত্রী পরাবৃত্তক $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ....(i)

দেওয়া আছে,

একে নিম্নলিখিত আকারে লেখা হল ঃ—

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

এবার ধরা যাক্ নিম্নলিখিত সমীকরণদ্বয় দ্বারা সরলরেখা সূচিত করা হল ঃ—

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right), \qquad \text{.........(ii)}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad (\lambda = \text{ধ্রুবক})$$

(ii)-থেকে λ অপনয়ন করে আমরা একপত্রী পরাবৃত্তক (i)-এর সমীকরণ পাই। এছাড়া ও (ii) সম্পূর্ণরূপে (i) নং তলে অবস্থিত। অর্থাৎ λ-এর বিভিন্ন মানের জন্য (ii) একপত্রী পরাবৃত্তকের কারিকারেখা হবে।

একইভাবে,

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

সরলরেখাও 'μ' এর বিভিন্ন মানের জন্য (i) এর কারিকারেখা হবে।

9.4.3 ধরা যাক পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তক $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ ....(i)

দেওয়া আছে।

একে $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z$ আকারে লেখা হল।

এক্ষণে $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda z, \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{2}{\lambda}$ .... (ii)

সরলরেখার সমীকরণটি বিবেচনা করা যেতে পারে। (λ = ধ্রুবকরাশি)

(ii) নং সমীকরণ থেকে λ অপনয়ন করে আমরা (i) নং পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তকের সমীকরণ পাই। সুতরাং (ii) নং আকারের সব সরলরেখাই (i) নং তলে আছে, অর্থাৎ (ii) নং সমীকরণ (i) নং-এর কারিকারেখা

একইভাবে প্রমাণ করা যায় যে

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2}{\mu}, \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\mu z$$

সমীকরণদ্বয়ও উক্ত পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তকের কারিকারেখা।

9.5 কারিকারেখার সংখ্যা এবং শর্তাধীনে কারিকারেখার সঞ্চার পথ এবং বিশ্লেষণ

9.4 এর আলোচনায় আমরা কতগুলি বিশেষ তলের জন্য কারিকারেখার সংখ্যা ও শর্তাধীনে তার সমীকরণ নির্ণয় করেছি। এখন আমরা কিছু বিশ্লেষণধর্মী আলোচনা করব।

9.5.1 যদি একটি সরলরেখা কোন কণিকয়েডে তিনটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে সরলরেখাটি সম্পূর্ণরূপে কনিকয়েডে অবস্থিত হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক,

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}=r$$ সরলরেখার তিনটি বিন্দু $f(x, y, z)=0$ কনিকয়েডকে সিদ্ধ করে।

অর্থাৎ, $f(a+lr, b+mr, c+nr)=0$ .... (i)

$f(x, y, z)$ একটি x, y, z-এর দ্বিঘাত রাশিমালা, ফলতঃ (i)- ও r-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ হবে।

ধরা যাক্ (i) কে

$Ar^2+Br+C=0$ হিসাবে লেখা হল।

এখন এটি r এর তিনটি বিভিন্ন মানের জন্য সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ $Ar^2+Br+C=0$ একটি অভেদ।

সুতরাং $A=B=C=0$

$\therefore$ সেক্ষেত্রে সমস্ত বিন্দুই (সরলরেখাস্থিত) কনিকয়েডে অবস্থিত হবে।

9.5.2 একপত্রী পরাবৃত্তকের কারিকারেখার ধর্মাবলী :

(1) একটি নির্দিষ্ট কারিকারেখা তন্ত্রের যে কোন দুটি কারিকারেখা কখনও পরস্পরচ্ছেদী হবে না।

প্রমাণ : ধরা যাক্ λ-এর দুটি বিভিন্ন মান λ_1 ও λ_2 -এর জন্য কারিকারেখার দুটি λ-তন্ত্রের সমীকরণ :

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda_1\left(1 - \frac{y}{b}\right), \qquad \text{......... (i)}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda_1}\left(1 + \frac{y}{b}\right); \qquad \text{......... (ii)}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda_2\left(1 - \frac{y}{b}\right), \qquad \text{......... (iii)}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda_2}\left(1 + \frac{y}{b}\right), \qquad \text{......... (iv)}$$

(i) থেকে (iii) বিয়োগ করে পাই—

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\left(1 - \frac{y}{b}\right) = 0$$

এখন $\lambda_1 \neq \lambda_2$, সুতরাং $y = b$.

(iv) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই—

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0 \Rightarrow y = -b$$

অর্থাৎ দুটি কারিকারেখা একই সাথে কখনই ছেদ করবে না।

টীকা : এ থেকে বলা যায় একপত্রী পরাবৃত্তক একটি নৈকতলীয় তল (Skew surface)

(2) দুটি বিভিন্ন কারিকারেখা তন্ত্রের যে কোন দুটি কারিকারেখা পরস্পরছেদী হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক্ নিম্নলিখিত দুটি λ-তন্ত্র ও μ-তন্ত্রের জন্য কারিকারেখার সমীকরণ আছে—

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right), \qquad \text{......... (i)}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right), \qquad \text{......... (ii)}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right), \qquad \text{......... (iii)}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{y}{b}\right), \qquad \text{......... (iv)}$$

(i), (ii) ও (iii)-কে সমাধান করে—

$$\lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \therefore \frac{y}{b} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} \qquad \text{......... (v)}$$

(i) ও (ii)-এ মান বসিয়ে পাই—

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu} \text{ এবং } \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{2}{\lambda + \mu}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a} = \frac{1 + \lambda\mu}{\lambda + \mu} \text{ এবং } \frac{z}{c} = \frac{1 - \lambda\mu}{\lambda + \mu} \qquad \text{......... (vi)}$$

(v) এবং (vi) থেকে পাওয়া x, y, z (iv) নং সমীকরণকেও সিদ্ধ করে। যা প্রমাণ করে যে দুটি কারিকারেখা $\left(a\,\frac{1 + \lambda\mu}{\lambda + \mu},\ b\,\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu},\ c\,\frac{1 + \lambda\mu}{\lambda + \mu}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

9.5.3 পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তকের কারিকারেখার ধর্মাবলী :

(1) একটি নির্দিষ্ট কারিকারেখা তন্ত্রের যে কোন দুটি কারিকারেখা কখনও পরস্পর ছেদী হবে না।

(2) দুটি বিভিন্ন কারিকারেখাতন্ত্রের যে কোন দুটি কারিকারেখা পরস্পরছেদী হবে।

দুটি ক্ষেত্রেই প্রমাণ একপত্রী পরাবৃত্তকের মতই হবে।

9.6 উদাহরণমালা

(1) প্রমাণ করুন যে $x - 1 = y - 2 = z + 1$ সরলরেখাটি সম্পূর্ণরূপে $z^2 - xy + 2x + y + 2z - 1 = 0$ তলে অবস্থান করবে।

সমাধান : সরলরেখাস্থিত যে কোন বিন্দু $(1 + r, 2 + r, - 1 + r)$ যখন তলের সমীকরণে বসানো হয়, আমরা পাই—

$$(- 1 + r)^2 - (1 + r)(2 + r) + 2(1 + r) + (2 + r) + 2(- 1 + r) - 1 = 0$$

কিন্তু যেকোন 'r' এর জন্যই এটি একটি অভেদ।

$\therefore$ সরলরেখাটি তলটিতে সম্পূর্ণরূপে অবস্থানরত আছে। (প্রমাণিত)

(2) $x^2 - y^2 = 2z$ পরাবৃত্তকের (hyperboloid) কারিকারেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যারা $(5, 3, 8)$ বিন্দুগামী।

সমাধান : λ ও μ তন্ত্রের জন্য দুসেট কারিকারেখার সমীকরণ নিম্নরূপ,

$$x + y = \frac{z}{\lambda},\ x - y = 2\lambda \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

এবং $$x + y = 2\mu,\ x - y = \frac{z}{\mu} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) নং সমীকরণে $(5, 3, 8)$ বিন্দুটির মান বসিয়ে $\lambda = 1$ পাই,

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রের λ-তন্ত্রের জন্য কারিকারেখার সমীকরণ হবে

$$x + y = z,\ x - y = 2$$

একইভাবে (2) নং সমীকরণে $(5, 3, 8)$ বসিয়ে $\mu = 4$ পাই,

$\therefore$ μ তন্ত্রের জন্য কারিকারেখার সমীকরণ হবে

$$x + y = 8,\ x - y = \frac{1}{4}z \quad \text{(উত্তর)}$$

(3) পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তক $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ এর পরস্পর লম্ব কারিকারেখার ছেদবিন্দুর সঞ্চার পথ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ এর কারিকারেখাগুলি নিম্নরূপ

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda z, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2}{\lambda} \qquad \ldots\ldots\ldots (i)$$

ও $\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2}{\mu}, \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\mu z$ .... (ii)

দুইরকম কারিকারেখার ছেদবিন্দু হবে—

$$x=a\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu},\ y=b\frac{\mu-\lambda}{\lambda\mu},\ z=\frac{2}{\lambda\mu} \quad \text{......... (iii)}$$

λ-তন্ত্রের কারিকারেখার দিক্‌নির্দেশক অনুপাত l_1, m_1, n_1 হলে,

$$\frac{l_1}{a}-\frac{m_1}{b}-n_1\lambda=0,\ \frac{l_1}{a}+\frac{m_1}{b}-n_1.0=0$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{\frac{\lambda}{b}}=\frac{m_1}{\frac{-\lambda}{a}}=\frac{n_1}{\frac{2}{ab}}, \text{ অর্থাৎ } \frac{l_1}{a\lambda}=\frac{m_1}{-b\lambda}=\frac{n_1}{2}$$

একইভাবে μ-তন্ত্রের জন্য দিক্‌নির্দেশক অনুপাত l_2, m_2, n_2 হলে

$$\frac{l_2}{a}-\frac{m_2}{b}-n_2.0=0,\ \frac{l_2}{a}+\frac{m_2}{b}-n_2\mu=0$$

$$\Rightarrow \frac{l_2}{\frac{\mu}{b}}=\frac{m_2}{\frac{\mu}{a}}=\frac{n_2}{\frac{2}{ab}}, \text{ অর্থাৎ } \frac{l_2}{a\mu}=\frac{m_2}{b\mu}=\frac{n_2}{2}$$

যেহেতু দুটি কারিকারেখা পরস্পর লম্ব—

$\therefore \quad l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ অর্থাৎ, $\ a^2\lambda\mu-b^2\lambda\mu+4=0$

(iii) থেকে λ, μ অপনয়ন করে পাই—

$$(a^2-b^2)\frac{2}{z}+4=0$$

বা, $\quad a^2-b^2+2z=0$

সুতরাং নির্ণেয় সঞ্চারপথ হল পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তক ও $a^2-b^2+2z=0$ সমতল যে বক্ররেখায় পরস্পরকে ছেদ করে। (উত্তর)

(4) একপত্রী পরাবৃত্তকের পরস্পর লম্ব কারিকারেখার ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

সমাধান : (θ, ϕ) গামী কারিকারেখাকে নিম্নলিখিত আকারে লেখা হলে : (spherical co-ordinate)-এ

$$x=a\cos\theta\sec\phi,\ y=b\sin\theta\sec\phi,\ z=c\tan\phi$$

এখন তারা পরস্পর লম্ব, অর্থাৎ $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

$\therefore \quad a\sin(\theta+\phi).a\sin(\theta-\phi)+b\cos(\theta+\phi).b\cos(\theta-\phi)-c^2=0$

$\Rightarrow \quad a^2(\sin^2\theta-\sin^2\phi)+b^2(\cos^2\theta-\sin^2\phi)-c^2=0$

$\Rightarrow \quad a^2(\cos^2\phi-\cos^2\theta)+b^2(\cos^2\phi-\sin^2\theta)-c^2=0$

$\Rightarrow \quad a^2\cos^2\phi-x^2\cos^2\phi+b^2\cos^2\phi-y^2\cos^2\phi-c^2=0$

$\Rightarrow \quad (x^2+y^2)\cos^2\phi=a^2\cos^2\phi+b^2\cos^2\phi-c^2$

$\therefore \quad x^2+y^2=a^2+b^2-c^2\sec^2\phi$

অর্থাৎ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2$

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথ হল পরাবৃত্তক ও দিক্‌নির্দেশক গোলকের (Director sphere) ছেদ রেখা।

(উত্তর)

(5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ পরাবৃত্তকের কারিকারেখাগুলি নির্ণয় করুন যারা মূল উপবৃত্তীয় ছেদিত অংশের (Principal elliptic section) একটি বিন্দুগামী হয়।

সমাধান ঃ Principal elliptic section-এর অপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ নেওয়া যেতে পারে। এই বিন্দুগামী একটি কারিকারেখা ধরা যাক্ নিম্নরূপ

$$\frac{x - a\cos\theta}{l} = \frac{y - b\sin\theta}{m} = \frac{z - 0}{n} = r \text{ (ধরি)} \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$\therefore$ (i)-এর উপর যে কোন বিন্দু হল $(lr + a\cos\theta, mr + b\sin\theta, nr)$.

এক্ষণে এই বিন্দুটি পরাবৃত্তকের উপরিস্থিত হয়।

$$\therefore \quad \frac{(lr + a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(mr + b\sin\theta)^2}{b^2} - \frac{n^2r^2}{c^2} = 1$$

বা, $$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2}\right)r^2 + 2\left(\frac{l\cos\theta}{a} + \frac{m\sin\theta}{b}\right)r = 0$$

এই সমীকরণ সমস্ত r-এর জন্য সত্য,

$$\therefore \quad \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

এবং $$\frac{l\cos\theta}{a} + \frac{m\sin\theta}{b} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

(ii) ও (iii) থেকে পাই—

$$\frac{l}{a\sin\theta} = \frac{m}{-b\cos\theta} = \frac{\sqrt{\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)}}{\sqrt{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}} = \sqrt{\frac{n^2}{c^2}} = \frac{n}{\pm c}$$

$\therefore$ $(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ গামী দুটি কারিকারেখা হল—

$$\frac{x - a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{-b\cos\theta} = \frac{z}{\pm c} \quad \text{(উত্তর)}$$

9.7 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) প্রমাণ করুন $x + 3y - \lambda = 0$, $\lambda x - 3\lambda y - z = 0$ সরলরেখা $x^2 - 9y^2 = z$ তলটির কারিকারেখা হবে। (λ = প্রাচল)

[সংকেতঃ λ অপনয়ন করে ভাবুন]

(2) পরাবৃত্তক $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 25$ এর $(3, 2, 0)$ বিন্দুগামী কারিকারেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
[সংকেতঃ পরাবৃত্তকের কারিকারেখা নির্ণয় পদ্ধতি দ্রষ্টব্য]

[Ans. $x + 6y - 3z = 15$, $3x - 2y + 9z = 5$; $3x - 2y - 9z = 5$, $x + 6y + 3z = 15$]

(3) $9x^2 - 25y^2 = 4z$ অধিবৃত্তকের $(1, 1, -4)$ বিন্দুগামী কারিকারেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
[সংকেতঃ অধিবৃত্তকের কারিকারেখা নির্ণয় পদ্ধতি দেখুন।]

[উত্তর : $6x - 10y - z = 0$, $3x + 5y = 8$; $3x - 5y + 2 = 0$, $3x + 5y + 2z = 0$]

(4) পরাবৃত্তক $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ এর একটি কারিকারেখা $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z - \frac{4}{3}}{10}$ হলে দেখান যে $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

[সংকেতঃ $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z - \frac{4}{3}}{10} = r$ ধরে ভাবুন]

(5) প্রমাণ করুন $x + 1 = 0 = z - 3$ এবং $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{3}$ সরলরেখাদ্বয় $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ পরাবৃত্তকের উপর সম্পূর্ণরূপে অবস্থিত হবে।

[সংকেতঃ দেখান যে সরলরেখাদ্বয় পরাবৃত্তকের কারিকারেখা]

(6) দেখান যে $3x - 5y = 2z$, $3x + 5y = 2$ সরলরেখাটি $9x^2 - 25y^2 = 4z$ অধিবৃত্তকের উপরে অবস্থিত। [সংকেতঃ অধিবৃত্তক ও তার কারিকারেখা দ্রষ্টব্য।]

(7) $xy = bz$ তলের কারিকারেখা একটি ধ্রুবক কোণ θ ধারণ করলে দেখান যে কারিকারেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু উক্ত তল এবং পরাবৃত্তক $x^2 + y^2 - z^2 \tan^2\theta + b^2 = 0$ এর ছেদরেখায় অবস্থিত হবে।

[সংকেতঃ $xy = bz$, $x^2 + y^2 - z^2\tan^2\theta + b^2 = 0$ -এর ছেদ বক্ররেখাটিতে কারিকারেখার ছেদবিন্দু বসিয়ে সিদ্ধ করে দেখানোর চেষ্টা করুন]

(8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ এর পরস্পর লম্ব কারিকারেখাগুলির ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

[উত্তর : $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2$ এবং প্রশ্নে দেওয়া পরাবৃত্তক]

[সংকেতঃ λ তন্ত্রের কারিকারেখার দিক্‌নির্দেশক কোসাইন l_1, m_1, n_1 হলে $\frac{l_1}{a} + \frac{\lambda m_1}{b} - \frac{n_1}{c} = 0$ এবং $\frac{l_1}{a} - \frac{m_1}{\lambda b} + \frac{n_1}{c} = 0$ ......]

(9) দেখান যে $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ পরাবৃত্তকের যে কারিকারেখাগুলি $z = 0$ তলকে ছেদ করে তারা পরস্পর লম্ব হবে।

[সংকেতঃ পরাবৃত্তক ও তার কারিকারেখা নির্ণয় এবং $z = 0$ তলে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y, 0)$ লক্ষণীয়]

(10) মূলবিন্দু থেকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$-এর কারিকারেখার উপর লম্বগুলি দেখান যে $\frac{a^2(b^2 + c^2)^2}{x^2} + \frac{b^2(c^2 + a^2)^2}{y^2} = \frac{c^2(a^2 - b^2)^2}{z^2}$ শঙ্কুটির উপরিস্থিত হবে।

[সংকেতঃ একপত্রী পরাবৃত্তকের কারিকারেখার সমীকরণ দ্রষ্টব্য, এছাড়া শঙ্কুর সমীকরণ ও অধ্যায় দ্রষ্টব্য]

9.8 সারাংশ

বিষয় পরিচিতি অনুচ্ছেদের দিকে লক্ষ্য করতে অনুরোধ করছি। এই অধ্যায়ে মূলতঃ সরলরেখা দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চার পথ বক্রতলের সমীকরণ নির্ণয় করার পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে। এছাড়াও কারিকারেখার সংজ্ঞা এবং তার দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ সমূহ নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে, কয়েকটি উদাহরণ দিয়ে এই বিষয়ে আরো পরিচিত করানো হয়েছে। কয়েকটি সংকেতসহ অনুশীলনী রাখা হয়েছে।

9.10 সহায়ক পাঠ

(1) J. G. Chakravorty & P. R. Ghosh : Advanced analytical Geometry

(U. N. Dhar & Sons, Kolkata, 1995)

একক 10 ❑ গোলক (The Sphere)

গঠন

10.0 প্রস্তাবনা, উদ্দেশ্য ও বিষয় পরিচিতি

পূর্বেকার অধ্যায়ে সঞ্চার পথের ধারণা পেয়েছেন, শর্তাধীন কোন বিন্দু বা সরলরেখার গতিপথকে সঞ্চারপথ বলা হয়। বিভিন্ন শর্তের জন্য বিভিন্ন রকম সঞ্চারপথ হয়। পরবর্তী অধ্যায়ে বিভিন্ন রকম সঞ্চারপথের জ্যামিতিক প্রতিচ্ছবি তুলে ধরা হয়েছে। আলোচ্য যে বিশেষ সঞ্চারপথের বিষয়ে আলোচিত তা একটি গোলক।

গোলককে একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ হিসাবে ভাবা যেতে পারে। যে বিন্দু একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সর্বদা সমান দূরে অবস্থিত; ত্রিমাত্রিক দেশে সেই বিন্দুর সঞ্চারপথ হবে একটি গোলক, গোলককে অন্যভাবে চিন্তা করা যেতে পারে। একটি বৃত্তকে তার একটি ব্যাসের চারপাশে ঘোরালে যে বক্রতল তৈরী হবে সেটি দ্বারা আবদ্ধ দেশকে গোলক বলা হয়। কিন্তু ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক দেশে গোলকের এইরূপ সংজ্ঞা ভিত্তিতে বিশ্লেষণ করা হয় না।

যাহোক, ত্রিমাত্রিক দেশে যে বক্রতলটি সর্বাধিক পরিচিত এবং গাণিতিক ও আকৃতিগতভাবে সুসমঞ্জস তা হ'ল গোলক, প্রকৃতিতে গোলকের ব্যবহার ব্যাপক, তাই এর গাণিতিক পরিচিতি ও বিশ্লেষণ পরবর্তীস্তরে গণিত পাঠক্রমের অনেক প্রয়োজনীয় তথ্য দেবে।

এই অধ্যায়ে মূলতঃ গোলকের সাধারণ সমীকরণ, প্রামান্য সমীকরণ এবং প্রাচল সমীকরণ নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। ব্যাস, সমতল একটি তলের সঙ্গে একটি গোলকের ছেদবক্ররেখা, বা বৃত্ত। এরপর দুটি গোলকের পারস্পরিক সম্পর্ক এবং তাদের মূল তল এবং সমাক্ষ গোলক তন্ত্র বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

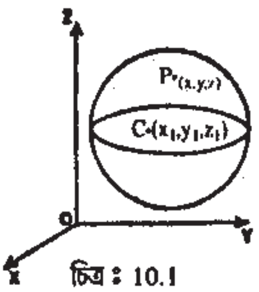
10.1 গোলক

একটি বিন্দু দেশে (space) এমনভাবে চলমান হয় যে, দেশের কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হতে তার দূরত্ব সতত সমান থাকে তবে ওই বিন্দুটির সঞ্চারপথ দ্বারা উদ্ভূত তলটিকে একটি গোলক বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বলা হয় গোলকটির কেন্দ্র (centre) এবং চলমান বিন্দুর দূরত্বকে বলা হয় গোলকটির ব্যাসার্ধ (radius)।

10.2 গোলকের সমীকরণ

মনে করি যেকোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু $C(a, b, c)$ হ'ল গোলকটির কেন্দ্র এবং তার ব্যাসার্ধ $= r$।

মনে করি $P(x, y, z)$ গোলকটির উপর যেকোন একটি বিন্দু।



চিত্র : 10.1

শর্তানুসারে $CP^2 = r^2$

$$\therefore \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

এই সমীকরণটিকে সহজেই এইভাবে লেখা যায়,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0,$$

যেখানে $u = -a,\ v = -b,\ w = -c,\ d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$

এখন গোলকটির কেন্দ্র যদি মূলবিন্দু (0, 0, 0) হয় এবং ব্যাসার্ধ $= r$, তবে তার সমীকরণ দাঁড়ায়

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

আমরা লক্ষ্য করি যে সমীকরণ (1) টি x, y ও z এর একটি দ্বিঘাত যাতে

(i) x^2, y^2, z^2 এর সহগ সমান

এবং (ii) yz, zx, xy এর সহগগুলি শূন্য।

বিপরীতক্রমে, আমরা যদি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নিই যার আকার

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

তবে সমীকরণ (2) টিকে নিম্নোক্ত আকারে প্রকাশ করা যায়

$$(x + u)^2 + (y + v)^2 + (z + w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 - d \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

এখন যদি $u^2 + v^2 + w^2 - d > 0$ হয়, তবে সমীকরণ (3)-কে (1)-এর সঙ্গে তুলনা করে আমরা বলতে পারি যে, (2) নং সমীকরণটি একটি গোলক সূচিত করে যার কেন্দ্র

$(-u, -v, -w)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$.

যদি $u^2 + v^2 + w^2 - d < 0$ হয়, তবে $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$ একটি কাল্পনিক রাশি। সুতরাং কোন বাস্তব বিন্দুই (3) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। (2) নং সমীকরণটি কোন সঞ্চারপথ সূচিত করে না। এটিকে কাল্পনিক গোলক (imaginary sphere) বলা হয়।

যদি $u^2 + v^2 + w^2 - d = 0$ হয়, তবে ব্যাসার্ধ $= 0$ এবং তখন (2) নং সমীকরণটি একটি বিন্দু-গোলক (Point-sphere) সূচিত করে। সুতরাং (2) নং সমীকরণটি একটি গোলকের সবচেয়ে সাধারণ সমীকরণ ধরা যেতে পারে।

(2) নং সমীকরণে চারটি ধ্রুবক u, v, w, d আছে। সুতরাং সমীকরণটি চারটি স্বাধীন শর্তকে সিদ্ধ করতে পারে। অর্থাৎ একটি গোলককে চারটি অসমতলীয় বিন্দুর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করানো যায়।

10.3 কোন বিন্দুর একটি গোলকের বাহিরে বা ভিতরে থাকার শর্ত

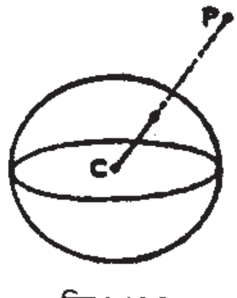
মনে করি একটি গোলকের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

সুতরাং তার কেন্দ্র C-এর স্থানাঙ্ক $(-u, -v, -w)$ এবং ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$.

মনে করি $P(x_1, y_1, z_1)$ দেশেতে যে কোন একটি বিন্দু।

তাহলে $CP^2 = (x_1 + u)^2 + (y_1 + v)^2 + (z_1 + w)^2$



চিত্র : 10.2

এখন $P(x_1, y_1, z_1)$ বিন্দুটি গোলকটির বাহিরে অবস্থিত হবে যদি $CP^2 > r^2$ হয়।

অর্থাৎ $(x_1 + u)^2 + (y_1 + v)^2 + (z_1 + w)^2 > u^2 + v^2 + w^2 - d$ হয়

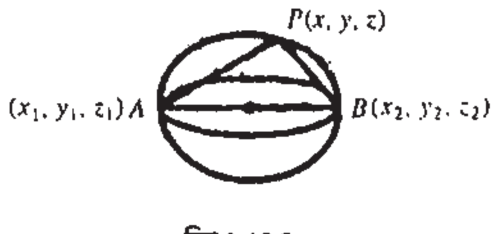
বা, $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d > 0$ হয়।

অনুরূপে $P(x_1, y_1, z_1)$ বিন্দুটি গোলকটির মধ্যে অবস্থান করবে যদি $CP^2 < r^2$ হয়,

অর্থাৎ $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d < 0.$

10.4 প্রদত্ত রেখাংশ যে গোলকের ব্যাস তার সমীকরণ

মনে করি AB একটি প্রদত্ত রেখাংশ, যেখানে A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2). আমাদের AB -ব্যাস বিশিষ্ট গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে। মনে করি $P(x, y, z)$ গোলকটির উপর একটি বিন্দু।



চিত্র : 10.3

এখন সমতল ABP গোলকটিকে একটি বৃত্তে ছেদ করে যার ব্যাস AB। সুতরাং P বিন্দুটি একটি অর্ধবৃত্তের উপর অবস্থিত। অর্থাৎ $\angle APB$ একটি সমকোণ সুতরাং AP ও BP সরলরেখা পরস্পর লম্ব। এখন AP সরলরেখার দিগানুপাতগুলি (direction-ratios) যথাক্রমে $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ এবং BP সরলরেখার দিগানুপাতগুলি (direction-ratios) যথাক্রমে $x - x_2$, $y - y_2$, $z - z_2$. যেহেতু AP ও BP সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

সুতরাং $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$ .... (1)

উপরোক্ত সমীকরণটি গোলকের যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ সমীকরণ (1) টি হচ্ছে নির্ণেয় গোলকটির সমীকরণ।

উদাহরণ 1. নিম্নলিখিত গোলকটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4x - 2y + 2z - 1 = 0.$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণকে 3 দ্বারা ভাগ করে পাই

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0.$$

এখানে $u = \frac{2}{3}, v = -\frac{1}{3}, w = \frac{1}{3}$ এবং $d = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = 1.$ (Answer)

উদাহরণ 2. (0, 0, 0), (0, 1, − 1), (− 1, 2, 0) এবং (1, 2, 3) বিন্দুগামী গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি গোলকটির সমীকরণ :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

যদি গোলকটি প্রদত্ত চারটি বিন্দুগামী হয়, তবে

$$d = 0, \quad \rightarrow (2)$$

$$1 + 1 + 2v - 2w + d = 0, \quad \rightarrow (3)$$

$$1 + 4 - 2u + 4v + d = 0, \quad \rightarrow (4)$$

$$1 + 4 + 9 + 2u + 4v + 6w + d = 0 \quad \rightarrow (5)$$

সমীকরণ (2), (3), (4), ও (5) হতে সমাধান করে পাই

$$u = -\frac{15}{14}, v = -\frac{25}{14}, w = -\frac{11}{14}, d = 0.$$

u, v, w ও d- এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$7(x^2 + y^2 + z^2) - 15x - 25y - 11z = 0.$ এটিই গোলকটির সমীকরণ। (Answer)

উদাহরণ 3. নিম্নলিখিত গোলকগুলির সাপেক্ষে (2, 3, 4) বিন্দুটি উহাদের বাহিরে বা ভিতরে অবস্থান করে তা নির্ণয় করুন।

(i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 25 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 2 = 0.$

সমাধান : (i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 25$ এই রাশিমালায় $x = 2, y = 3, z = 4$ বসিয়ে পাই,

$4 + 9 + 16 - 4 - 12 - 24 - 25 = -36 < 0$

$\therefore$ (2, 3, 4) বিন্দুটি (i) গোলকটির মধ্যে অবস্থিত।

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 2$ রাশিমালায় $x = 2, y = 3, z = 4$ বসিয়ে পাই

$4 + 9 + 16 - 8 + 18 - 8 - 2 = 47 - 18 = 29 > 0$

(2, 3, 4) বিন্দুটি (ii) গোলকটির বাহিরে অবস্থিত। (Answer)

উদাহরণ 4. দেখান যে, $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ এবং $x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 24y - 40z + 225 = 0$ গোলকদুইটি পরস্পরকে $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, 4\right)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সমাধান : গোলক দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .... (1)

এবং $x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 24y - 40z + 225 = 0.$ .... (2)

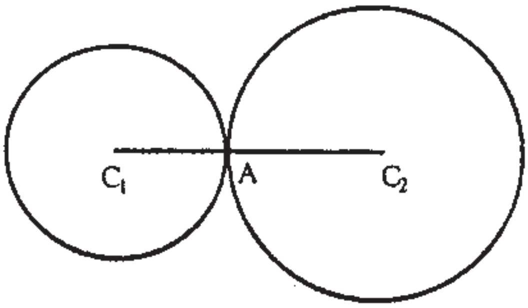
(1) গোলকটির কেন্দ্র $C_1(0, 0, 0)$ বিন্দুতে এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = 5.$

(2) গোলটির কেন্দ্র $C_2(9, 12, 20)$ বিন্দুতে এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2 - 225} = 20.$

এখন গোলক দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= C_1C_2 = \sqrt{(9 - 0)^2 + (12 - 0)^2 + (20 - 0)^2}$

$= \sqrt{625} = 25$



চিত্র : 10.4

এদের ব্যাসার্ধের যোগফল $= r_1 + r_2 = 5 + 20 + 25$

$\therefore$ গোলক দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করে।

মনে করি স্পর্শ বিন্দুটি A যার স্থানাঙ্ক (α, β, γ)

এখন A বিন্দুটি C_1C_2 রেখাংশকে 5 : 20 বা 1 : 4 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \quad \alpha = \frac{1.9 + 4.0}{1 + 4} = \frac{9}{5}, \ \beta = \frac{1.12 + 4.0}{1 + 4} = \frac{12}{5}$

এবং $\gamma = \frac{1.20 + 4.0}{1 + 4} = 4.$

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, 4\right).$ (Answer)

10.5 বৃত্তের সমীকরণ, উদাহরনমালা

যেহেতু একটি গোলক ও একটি সমতলের ছেদরেখা (যদি তারা ছেদ করে) হয় একটি বৃত্ত, গোলকটি ও সমতলের সমীকরণদ্বয় একত্রে নিলে তা একটি বৃত্তের সমীকরণ সূচিত করে।

মনে করি একটি গোলকের সমীকরণ হল

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \qquad \text{.........} (1)$$

এবং একটি সমতলের সমীকরণ হল

$$P \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0. \qquad \text{.........} (2)$$

তাহলে $S = 0, P = 0$ একত্রে একটি বৃত্তের সমীকরণ সূচিত করে।

আবার যে সমস্ত বিন্দুগুলি $S = 0, P = 0$ উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে তারা λ এর সমস্ত বাস্তবমানের জন্য $S + \lambda P = 0$ সমীকরণকেও সিদ্ধ করে অর্থাৎ $S = 0, P = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত সমস্ত বিন্দুই

$$S + \lambda P = 0 \qquad \text{.........} (3)$$

সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। এখন এই সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার x^2, y^2, z^2 এর সহগ একক এবং xy, yz, ও zx এই সমস্ত গুণফল বিশিষ্ট কোন পদ নাই। অর্থাৎ $S + \lambda P = 0$ সমীকরণটি $S = 0, P = 0$ বৃত্তগামী একটি গোলক সূচিত করে।

অনুরূপভাবে একটি বৃত্তকে এককেন্দ্রীয় নয় এইরূপ দুইটি গোলকের ছেদরেখা হিসাবেও ধরা যেতে পারে। সুতরাং দুইটি গোলকের সমীকরণ যথাক্রমে

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

এবং $$S' \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u'x + 2v'y + 2w'z + d' = 0$$

হয়, যেখানে গোলক দুটি পরস্পরকে একটি বৃত্তে ছেদ করে, তবে λ এর সকল বাস্তব মানের জন্য $S + \lambda S' = 0$ সমীকরণটি $S = 0, S' = 0$ এই বৃত্তগামী একটি গোলকের সমীকরণ নির্দেশ করে।

উদাহরণ 1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ 2x + 3y + 4z = 5$ **এই বৃত্তগামী এবং $(1, 2, 3)$ বিন্দুগামী গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।**

সমাধান : $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ 2x + 3y + 4z = 5$ এই বৃত্তগামী যেকোন গোলকের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + z^2 - 9 + \lambda(2x + 3y + 4z - 5) = 0 \qquad \text{.........} (1)$$

এখন যদি উপরোক্ত গোলকটি $(1, 2, 3)$ বিন্দুগামী হয় তবে $(1, 2, 3)$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ

$$1 + 4 + 9 - 9 + \lambda(2.1 + 3.2 + 4.3 - 5) = 0$$

বা, $5 + 15\lambda = 0,$ বা, $\lambda = -\frac{1}{3}$

$\lambda = -\frac{1}{3}$ (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$x^2 + y^2 + z^2 - 9 - \frac{1}{3}(2x + 3y + 4z - 5) = 0$$

বা, $3(x^2 + y^2 + z^2) - 2x - 3y - 4z - 22 = 0$ এটিই গোলকটির সমীকরণ। (Answer)

উদাহরণ 2. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 11 = 0$, $x + 2y + 2z = 15$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 11 = 0$ .... (1)

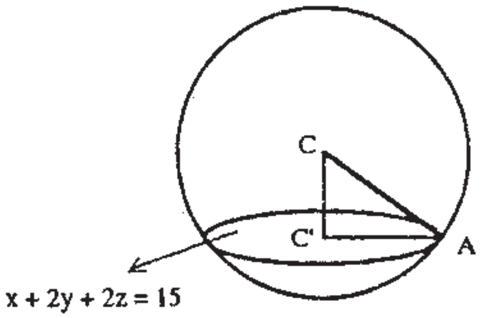
গোলকটির কেন্দ্র $C(0, 1, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= r = \sqrt{0 + 1 + 4 + 11} = 4$ একক।

[$\because$ $u = 0, v = -1, w = -2$ এবং $d = -11$]

গোলকের কেন্দ্র থেকে $x + 2y + 2z = 15$

সমতলের লম্ব দৈর্ঘ্য $= CC' = \left|\frac{0 + 2.1 + 2.2 - 15}{\sqrt{1 + 4 + 4}}\right| = 3$ একক।

$C'A = r = 4$ একক।



চিত্র ঃ 10.5

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= C'A = \sqrt{OA^2 - OO'^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$ একক।

CC' সরলরেখাটি $x + 2y + 2z = 15$ সমতলের উপর লম্ব এবং $C(0, 1, 2)$ বিন্দুগামী। সুতরাং CC' সরলরেখাটির সমীকরণ

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{2}$$

এই সরলরেখাটির উপর যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\lambda, 2\lambda + 1, 2\lambda + 2)$ আকারে প্রকাশ করা যায়। বিন্দুটি যদি আবার $x + 2y + 2z = 15$ সমতলটির উপর অবস্থিত হয় অর্থাৎ তা যদি বৃত্তটির কেন্দ্র C' হয় তবে

$$\lambda + 2(2\lambda + 1) + 2(2\lambda + 2) = 15$$

বা, $9\lambda = 9$ বা, $\lambda = 1$.

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(1, 3, 4)$. (Answer)

উদাহরণ 3. যে গোলকটির জন্য $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$, $2x + 3y + 4z = 8$ বৃত্তটি একটি গুরুবৃত্ত তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্তগামী যেকোন একটি গোলকের সমীকরণ হয়

$$x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 + \lambda(2x + 3y + 4z - 8) = 0$$

বা, $$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + (7 + 3\lambda)y + (-2 + 4\lambda)z + (2 - 8\lambda) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

বৃত্তটি, গোলকটির একটি গুরুবৃত্ত হবে যদি গোলকটির কেন্দ্র বৃত্তটির কেন্দ্রের সঙ্গে সমাপাতিত হয় অর্থাৎ গোলকটির কেন্দ্র $\{-\lambda, -\frac{1}{2}(7 + 3\lambda), (1 - 2\lambda)\}$ যদি $2x + 3y + 4z = 8$ সমতলের উপর অবস্থিত হয়।

সেক্ষেত্রে $$2(-\lambda) - \frac{3}{2}(7 + 3\lambda) + 4(1 - 2\lambda) = 8$$

বা, $$\lambda = -1$$

(1) নং সমীকরণে $\lambda = -1$ বসিয়ে পাই

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$ এটিই গোলকটির সমীকরণ। (Answer)

উদাহরণ 4. যে গোলকটি $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 0$ বৃত্তগামী এবং যা $x + 2y + 2z = 0$ সমতলটি দ্বারা একটি ও একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে ছেদিত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

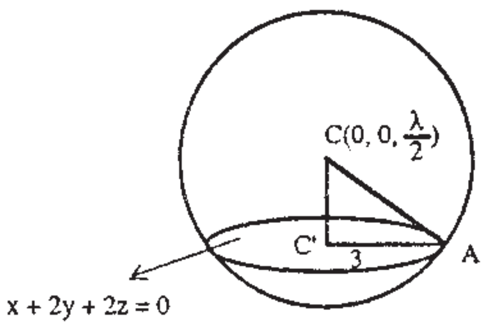
সমাধান ঃ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 0$ বৃত্তগামী যেকোন একটি গোলকের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 + \lambda z = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

গোলকটির ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (-4)} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 4}$ এবং কেন্দ্র $C\left(0, 0, -\frac{\lambda}{2}\right)$ বিন্দুতে।

$C\left(0, 0, -\frac{\lambda}{2}\right)$ বিন্দু থেকে $x + 2y + 2z = 0$ সমতলটির লম্ব দৈর্ঘ্য $CC' = \left|\frac{2\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{\sqrt{1+4+4}}\right| = \left|\frac{\lambda}{3}\right|$.

যেখানে C' বিন্দুটি, $x + 2y + 2z = 0$ সমতলটি (1) নং গোলককে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কেন্দ্র। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $C'A = 3$, আবার



চিত্র ঃ 10.6

$$CA = R = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 4}$$

এখন $C'A^2 = CA^2 - CC'^2$

$\therefore \quad 9 = \frac{\lambda^2}{4} + 4 - \frac{\lambda^2}{9}$

বা, $\quad \frac{5}{36}\lambda^2 = 5 \quad \therefore \ \lambda^2 = 36 \quad \therefore \ \lambda = \pm 6$

$\therefore$ নির্ণেয় গোলকের সমীকরণ $x^2 + y^2 + z^2 \pm 6z - 4 = 0$. (Answer)

উদাহরণ 5. যদি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ সমতলটি কার্তেসিও অক্ষত্রয়কে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ করুন।

সমাধান : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .... (1)

এই সমতলটি x-অক্ষ, y-অক্ষ ও z-অক্ষকে যথাক্রমে $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ ও $C(0, 0, c)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

আমরা এখন A, B, C ও মূলবিন্দু এই চারটি বিন্দুগামী গোলকের সমীকরণ নির্ণয় করব।

মূলবিন্দুগামী যেকোন গোলকের সমীকরণ হয় $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz = 0$ .... (2)

গোলকটি যদি $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ ও $C(0, 0, c)$ বিন্দুগামী হয় তবে $u = -\frac{a}{2}, v = -\frac{b}{2}$ এবং $w = -\frac{c}{2}$.

সুতরাং A, B, C ও মূলবিন্দুগামী গোলকটির সমীকরণ হয়

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(-\frac{a}{2}\right)x + 2\left(-\frac{b}{2}\right)y + 2\left(-\frac{c}{2}\right)z = 0$$

বা, $\quad x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$ .... (3)

এখন (1) সমতলটি ও (3) গোলকটির ছেদরেখাই A, B, C বিন্দুগামী বৃত্ত অর্থাৎ ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত। সুতরাং বৃত্তটির অভীষ্ট সমীকরণ হবে

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \text{......... (4)}$$

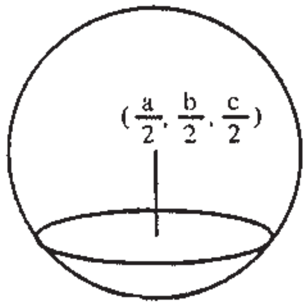
আবার বৃত্তটির কেন্দ্র হবে (3) নং গোলকটির কেন্দ্র $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ হতে (1) নং সমতলটির উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু।

এখন $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ বিন্দুগামী ও (1) নং সমতলটির উপর লম্ব এইরূপ সরলরেখাটির সমীকরণ হয়

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{\frac{1}{a}} = \frac{y - \frac{b}{2}}{\frac{1}{b}} = \frac{z - \frac{c}{2}}{\frac{1}{c}} = \lambda \text{ (ধরি)} \qquad \text{......... (5)}$$

এই সরলরেখার উপর অবস্থিত যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{a}{2}, \frac{\lambda}{b} + \frac{b}{2}, \frac{\lambda}{c} + \frac{c}{2}\right)$$



চিত্র ঃ 10.7

উপরোক্ত বিন্দুটি (1) নং সমতলটির উপর অবস্থিত হবে (অর্থাৎ (4) নং বৃত্তটির কেন্দ্র হবে) যদি তার স্থানাঙ্ক (1) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে। তখন আমরা পাই

$$\frac{1}{a}\left(\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{b}\left(\frac{\lambda}{b} + \frac{b}{2}\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{\lambda}{c} + \frac{c}{2}\right) = 1$$

বা, $\lambda\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = -\frac{1}{2}$

বা, $\lambda = -\frac{1}{2(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})}$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হবে

$$\left(-\frac{1}{2a(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})}+\frac{a}{2}, -\frac{1}{2b(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})}+\frac{b}{2}, -\frac{1}{2c(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})}+\frac{c}{2}\right)$$

বা, $\left(\frac{a(b^{-2} + c^{-2})}{2(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})}, \frac{b(c^{-2} + a^{-2})}{2(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})}, \frac{c(a^{-2} + b^{-2})}{2(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})}\right)$ (Answer)

উদাহরণ 6. প্রমাণ করুন যে,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0, \ 5y + 6z + 1 = 0;$$

এবং $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 5z - 6 = 0, \ x + 2y - 7z = 0$

বৃত্ত দুটি একই গোলকের উপর অবস্থিত এবং গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রথম বৃত্তগামী একটি গোলকের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 + \lambda(5y + 6z + 1) = 0$$

বা, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + (3 + 5\lambda)y + (4 + 6\lambda)z + (-5 + \lambda) = 0$ .... (1)

দ্বিতীয় বৃত্তগামী একটি গোলকের সমীকরণ

বা, $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 5z - 6 + \lambda'(x + 2y - 7z) = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 + (-3 + \lambda')x + (-4 + 2\lambda')y + (5 - 7\lambda')z - 6 = 0$ .... (2)

প্রদত্ত বৃত্তদ্বয় একই গোলকের উপর অবস্থিত হবে যদি λ ও λ' এর কোন দুইটি নির্দিষ্ট মানের জন্য (1), (2) নং একই গোলককে সূচিত করে। সেক্ষেত্রে আমরা পাই

$$-2 = -3 + \lambda' \qquad \text{......... (3)}$$

$$3 + 5 = -4 + 2N \qquad \text{......... (4)}$$

$$4 + 6\lambda = 5 - 7N \qquad \text{......... (5)}$$

এবং $\quad -5 + \lambda = -6 \qquad$ .... (6)

(3) নং থেকে পাই, $\lambda' = 1$ এবং (6) থেকে পাই $\lambda = -1$

λ এবং λ' এই মানগুলি (4) ও (5) নং সমীকরণদ্বয়কে সিদ্ধ করে। সুতরাং প্রদত্ত বৃত্তদ্বয় একই গোলকের উপর অবস্থিত। (Answer)

উদাহরণ 7. k- ধ্রুবক-ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলক সর্বদাই মূলবিন্দুগামী এবং এটি স্থানাঙ্ক অক্ষগুলিকে যথাক্রমে P, Q, R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন যে, PQR ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র $9(x^2 + y^2 + z^2) = 4k^2$ গোলকটির উপর অবস্থিত।

সমাধান ঃ ধরি, P, Q, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ও $(0, 0, c)$, তাহলে PQR ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ককে $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ দিয়ে প্রকাশ করলে আমরা পাই

$$\bar{x} = \frac{a}{3},\ \bar{y} = \frac{b}{3},\ \bar{z} = \frac{c}{3}$$

অর্থাৎ $9(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) = a^2 + b^2 + c^2 \qquad$ .... (1)

মনে করি P, Q, R ও মূলবিন্দু এই চারিটি বিন্দুগামী গোলকের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz = 0 \qquad \text{......... (2)}$$

যেহেতু $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ বিন্দুগুলি গোলকটির উপর অবস্থিত সুতরাং

$$a^2 + 2ua = 0 \quad \text{বা,} \quad a = -2u. \qquad \text{......... (3)}$$

$$b^2 + 2vb = 0 \quad \text{বা,} \quad b = -2v. \qquad \text{......... (4)}$$

$$c^2 + 2wc = 0 \quad \text{বা,} \quad c = -2w. \qquad \text{......... (5)}$$

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $u^2 + v^2 + w^2 = k^2$ $\qquad$ [$\because$ গোলকটির ব্যাসার্ধ $= k =$ ধ্রুবক]

বা, $\quad \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{c^2}{4} = k^2 \qquad$ [(3), (4) ও (5) দ্বারা]

বা, $\quad a^2 + b^2 + c^2 = 4k^2$

$a^2 + b^2 + c^2$- এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$9(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) = 4k^2$$

অর্থাৎ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ বিন্দুটি $9(x^2 + y^2 + z^2) = 4k^2$ গোলকটির উপর অবস্থিত। (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৪. r- ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি গোলক সর্বদাই মূলবিন্দুগামী এবং এটি স্থানাঙ্ক অক্ষগুলিকে যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন যে, মূলবিন্দু O থেকে অঙ্কিত ABC সমতলের উপর লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ $\quad (x^2 + y^2 + z^2)^2(x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}) = 4r^2$

সমাধান ঃ মনে করি r ব্যাসার্ধের এইরূপ একটি গোলকের জন্য O বিন্দু থেকে অঙ্কিত ABC সমতলের উপর লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β, γ). তাহলে ABC সমতলের অভিলম্বের দিগানুপাতগুলি যথাক্রমে $\alpha - 0, \beta - 0, \gamma - 0$ অর্থাৎ α, β, γ.

সুতরাং সমতলের সমীকরণ $\alpha(x - \alpha) + \beta(x - \beta) + \gamma(z - \gamma) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$

এই সমতলটি x-অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) নং সমীকরণে $y = 0, z = 0$ বসিয়ে পাই $x = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha}$

সুতরাং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha}, \ 0, \ 0\right)$ অনুরূপে B ও C বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\left(0, \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\beta}, 0\right)$ ও $\left(0, \ 0, \ \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\gamma}\right)$

মনে করি O, A, B, C এই চারটি বিন্দুগামী গোলকটির সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

যেহেতু গোলকটি $A\left(\dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha} \ \ 0, \ 0\right)$ বিন্দুগামী,

$$\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2}\right)^2 + 2u\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha}\right) = 0$$

বা, $\quad u = -\dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha}$

অনুরূপে, যেহেতু গোলকটির B ও C বিন্দুগামী,

$$v = -\frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{2\beta} \text{ এবং } w = -\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\gamma}$$

সুতরাং O, A, B, C এই চারটি বিন্দুগামী গোলকটির সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha}x - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\beta}y - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\gamma}z = 0$$

এই গোলকটির ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\gamma}\right)^2}$

$= $ ধ্রুবক $= r$

বা, $\quad \dfrac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}} = r.$

বা, $\quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 (\alpha^{-2} + \beta^{-2} + \gamma^{-2}) = 4r^2$

সুতরাং O বিন্দু থেকে অঙ্কিত ABC সমতলের উপর লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ $(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}) = 4r^2$. (প্রমাণিত)

10.6 সরলরেখা এবং গোলকের ছেদ

মনে করি একটি গোলক ও একটি সরলরেখার সমীকরণ যথাক্রমে

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \qquad \text{.........(1)}$$

এবং $$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \qquad \text{.........(2)}$$

সরলরেখাটিতে অবস্থিত যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $(lr + \alpha, mr + \beta, nr + \gamma)$.

বিন্দুটি আবার যদি গোলকটির উপর অবস্থিত হয় তবে,

$$(\alpha + lr)^2 + (\beta + mr)^2 + (\gamma + nr)^2 + 2u(\alpha + lr) + 2v(\beta + mr) + 2w(\gamma + nr) + d = 0$$

বা, $$r^2(l^2 + m^2 + n^2) + 2r\{l(u + \alpha) + m(v + \beta) + n(w + r)\}$$

$$+ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2u\alpha + 2v\beta + 2w\gamma + d) = 0 \qquad \text{.........(3)}$$

(3) নং সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ হওয়াতে তার দুইটি বীজ আছে।

যদি বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হয়, তবে (2) নং সরলরেখাটি (1) নং গোলকটিকে দুটি পৃথক বিন্দুতে ছেদ করে এবং তা গোলকটির একটি ছেদক হয়।

যদি বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান হয়, তবে সরলরেখাটি গোলকটির একটি বিন্দুতে মিলিত হয়। সেক্ষেত্রে সরলরেখাটি গোলকটিকে $(\alpha + lr, \beta + mr, \gamma + nr)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে অর্থাৎ সরলরেখাটি গোলকটির একটি স্পর্শক হয়।

যদি বীজদ্বয় জটিল হয় তবে সরলরেখাটি গোলকটিকে ছেদ করে না।

10.7 গোলকের স্পর্শতলের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ গোলকটির উপর অবস্থিত (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে স্পর্শতলের সমীকরণ নির্ণয় ঃ

(x_1, y_1, z_1) বিন্দুগামী যে সরলরেখাটির কোসাইন দিগাঙ্কগোষ্ঠী (direction cosines) l, m, n তার সমীকরণ হল

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = r \text{ (ধরি)} \qquad \text{.........(1)}$$

এই সরলরেখাটির উপর অবস্থিত যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(lr + x_1, mr + y_1, nr + z_1)$, যেখানে r হচ্ছে (x_1, y_1, z_1) বিন্দুটি হতে ঐ বিন্দুর দূরত্ব। এখন বিন্দুটি যদি

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \qquad \text{.........(2)}$$

গোলকটির উপর অবস্থিত হয় তবে আমরা পাই

$$(lr + x_1)^2 + (mr + y_1)^2 + (nr + z_1)^2 + 2u(lr + x_1) + 2v(mr + y_1) + 2w(nr + z_1) + d = 0.$$

বা, $$(l^2 + m^2 + n^2)r^2 + 2r\{l(x_1 + u) + m(y_1 + v) + n(z_1 + w)\}$$
$$+ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d = 0$$

বা, $$r^2 + 2r\{l(x_1 + u) + m(y_1 + v) + n(z_1 + w)\}$$
$$+ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

আবার যদি (x_1, y_1, z_1) বিন্দুটি গোলকটির উপর অবস্থিত হয়, তবে

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

হয় এবং (3) নং সমীকরণের পরিবর্তিত আকার হল

$$r^2 + 2r\{l(x_1 + u) + m(y_1 + v) + n(z_1 + w)\} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

সমীকরণ (5) এর বীজগুলি, (x_1, y_1, z_1) বিন্দুটি হতে (1) নং সরলরেখা ও (2) নং গোলকের ছেদবিন্দুগুলির দূরত্বসমূহ। সমীকরণটির একটি বীজ শূন্য (যেহেতু (x_1, y_1, z_1) বিন্দুটিই একটি ছেদবিন্দু)। এখন (1) নং সরলরেখাটি (3) নং গোলকটির একটি স্পর্শরেখা হবে যদি অন্য ছেদবিন্দুটিও (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে মিলিত হয় অর্থাৎ (5) নং সমীকরণের অপর বীজটিও শূন্য হয়। যার শর্ত হল

$$l(x_1 + u) + m(y_1 + v) + n(z_1 + w) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

সুতরাং (1) নং সরলরেখাটির কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী l, m, n যদি শর্ত (6)-কে সিদ্ধ করে তবে তা গোলকটির একটি স্পর্শরেখা হবে। এইরূপ সকল স্পর্শ রেখাগুলির সঞ্চারপথই (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে গোলকটির স্পর্শতল। সুতরাং (1) ও (6) নং সমীকরণ হতে l, m, n অপনয়ন করলে স্পর্শতলটির সমীকরণ পাওয়া যায়। অর্থাৎ গোলকটির (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে স্পর্শতলের সমীকরণ হবে

$$(x - x_1)(x_1 + u) + (y - y_1)(y_1 + v) + (z - z_1)(z_1 + w) = 0$$

বা, $$xx_1 + yy_1 + zz_1 + ux + vy + wz - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + ux_1 + vy_1 + wz_1) = 0$$

বা, $$xx_1 + yy_1 + zz_1 + ux + vy + wz + (ux_1 + vy_1 + wz_1 + d) = 0$$

[(4) নং সমীকরণের সাহায্যে]

বা, $$xx_1 + yy_1 + zz_1 + u(x + x_1) + v(y + y_1) + w(z + z_1) + d = 0.$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি গোলকটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ হয় তবে $\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n}$ সরলরেখাটি তার একটি স্পর্শরেখা হবে যদি $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ হয় এবং তখন (α, β, γ) বিন্দুতে স্পর্শতলের সমীকরণ হবে $x\alpha + y\beta + z\gamma = a^2$.

10.8 একটি সমতলের স্পর্শতল হবার শর্ত

আমরা এখন $lx + my + nz = p$ .... (1) সমতলটির

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \text{......... (2)}$$ গোলকটিকে

স্পর্শ করার শর্ত নির্ণয় করব।

যদি সমতলটি গোলকটিকে স্পর্শ করে, তাহলে গোলকটির কেন্দ্র হতে সমতলটির লম্বদৈর্ঘ্য গোলকটির ব্যাসার্ধের সমান হবে। এখন গোলকটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-u, -v, -w)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$ সুতরাং আবশ্যকীয় শর্ত হবে $\left|\dfrac{-lu - mv - nw - p}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}\right| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$

বা, $$(lu + mv + nw + p)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)(u^2 + v^2 + w^2 - d) \quad \text{......... (3)}$$

[উভয় পক্ষকে বর্গ করে ও পুনর্বিন্যাস করে]

অর্থাৎ $lx + my + nz = p$ সমতলটি যদি (2) গোলকটির স্পর্শতল হয় তবে (3) শর্তটি সিদ্ধ হয়।

আমরা এখন মনে করি যে, $lx + my + nz = p$ সমতলটি (3) নং শর্তটিকে সিদ্ধ করে।

তাহলে (3) হতে পাই

$$ul + vm + nz + p \neq 0 \quad \text{......... (4)}$$

আমরা এখন x, y, z ও t-এর নিম্নোক্ত সমীকরণগুলি বিবেচনা করি

$$\begin{aligned} ux + vy + wz + pt &= -d \\ x + 0.y + 0.z - lt &= -u \\ 0.x + y + 0.z - mt &= -v \\ 0.x + 0.y + z - nt &= -w \end{aligned} \quad \text{......... (5)}$$

চলগুলির সহগদ্বারা গঠিত নির্ণায়ক (Determinant) হয়,

$$\begin{vmatrix} u & v & w & p \\ 1 & 0 & 0 & -l \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & 1 & -n \end{vmatrix} = u \begin{vmatrix} 0 & 0 & -l \\ 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v & w & p \\ 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \end{vmatrix}$$

$$= -(ul + vm + wn + p) \neq 0$$ [(4) হতে]

সুতরাং (5) সমীকরণগুচ্ছের একটি অনান্য সমাধান (unique solution) আছে। এই সমাধানকে x_1, y_1, z_1, t_1-দ্বারা চিহ্নিত করে (5) থেকে আমরা পাই $ux_1 + vy_1 + wz_1 + d = -pt_1$

$$x_1 + u = lt_1,\ y_1 + v = mt_1,\ z_1 + w = nt_1$$

বা, $\quad \dfrac{x_1 + u}{l} = \dfrac{y_1 + v}{m} = \dfrac{z_1 + w}{n} = \dfrac{ux_1 + vy_1 + wz_1 + d}{-p}$

সুতরাং $x(x_1 + u) + y(y + v) + z(z_1 + w) + ux_1 + vy_1 + wz_1 + d = 0$

এবং $x + my + nz - p = 0$ এই সমীকরণদ্বয় অভিন্ন।

অর্থাৎ $lx + my + nz - p = 0$ সমতলটি গোলকটির একটি স্পর্শতল।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে, (3) শর্তটি, সমতলটি গোলককে স্পর্শ করার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত।

10.9 গোলকের বহিঃস্থ কোন বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত তার স্পর্শতলগুলির স্পর্শবিন্দুর সঞ্চারপথের বা মিলনতলের (Plane of contact) সমীকরণ

মনে করি, প্রদত্ত বহিঃস্থ বিন্দুটি (α, β, γ) এবং গোলকটির সমীকরণ ঃ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \qquad \text{.........} (1)$$

মনে করি (x_1, y_1, z_1) বিন্দুটি গোলকটির উপর অবস্থিত একটি বিন্দু যাতে এই বিন্দুতে গোলকের স্পর্শতলটি (α, β, γ) বিন্দুগামী। এখন (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে গোলকের স্পর্শতলের সমীকরণ

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + u(x + x_1) + v(y + y_1) + w(z + z_1) + d = 0$$

বা, $$x(x_1 + u) + y(y_1 + v) + z(z_1 + w) + ux_1 + uy_1 + wz_1 + d = 0 \qquad \text{.........} (2)$$

যেহেতু এই স্পর্শতলটি (α, β, γ) বিন্দুগামী, কাজেই (α, β, γ) (2) নং সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 + u(\alpha + x_1) + v(\beta + y_1) + w(\gamma + z_1) + d = 0 \qquad \text{.........} (3)$$

সুতরাং আমরা (3) থেকে বলতে পারি যে, (x_1, y_1, z_1) বিন্দুর সঞ্চারপথ হয়

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + u(x + \alpha) + u(\beta + y) + w(z + \gamma) + d = 0 \qquad \text{.........} (4)$$

এটিই হচ্ছে মিলনতলের (Plane of contact) সমীকরণ।

10.10 দুইটি গোলকের মূলতল (Radical plans)

যদি $A(\alpha, \beta, \gamma)$ বিন্দুগামী কোন ছেদক একটি প্রদত্ত গোলককে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে তবে আমরা এখন প্রমাণ করব যে, $AP.AQ$ ধ্রুবক।

প্রমাণ ঃ $A(\alpha, \beta, \gamma)$ বিন্দুগামী যে সরলরেখাটির দিগঙ্কগোষ্ঠী l, m, n তার সমীকরণ

$$\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n} \text{ (দিক্‌যুক্ত কোসাইন)} \qquad \text{.........} (1)$$

সরলরেখাটির উপর অবস্থিত যে বিন্দুটির A হতে দূরত্ব r তার স্থানাঙ্ক $(\alpha + lr, \beta + mr, \gamma + nr)$, বিন্দুটি যদি আবার $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \qquad \text{.........} (2)$

গোলকটির উপর অবস্থিত হয় তাহলে

$$(\alpha + lr)^2 + (\beta + mr)^2 + (\gamma + nr)^2 + 2u(\alpha + lr) + 2v(\beta + mr) + 2w(\gamma + nr) + d = 0$$

বা, $$r^2 + 2r\{l(\alpha + u) + m(\beta + v) + n(\gamma + w)\} + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2u\alpha + 2\beta v + 2w\gamma + d = 0 \quad \text{........ (3)}$$

(3) সমীকরণটির বীজদ্বয় যথাক্রমে A বিন্দু হতে P ও Q বিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ AP ও AQ.

$$\therefore \quad AP.AQ = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2u\alpha + 2v\beta + 2w\gamma + d = F(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{........ (4)}$$

যা l, m, n উপর নির্ভরশীল নয় অর্থাৎ $AP\ AQ$ এর মান A বিন্দুগামী যেকোন ছেদকের জন্য সমান। সুতরাং $AP.AQ =$ ধ্রুবক।

সংজ্ঞা : $AP.AQ$ এর পরিমাপকে গোলকটির সাপেক্ষে A বিন্দুটির বল (Power) বলা হয়।

আলোচনা : সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, $A(\alpha, \beta, \gamma)$ বিন্দুটির বল ধনাত্মক হবে যখন $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2u\alpha + 2v\beta + 2w\gamma + d > 0$ হয় অর্থাৎ A বিন্দুটি যখন গোলকটির বহিঃস্থ বিন্দু হয়। অনুরূপে এটির বল ঋণাত্মক হবে যখন A বিন্দুটি গোলকটির অন্তঃস্থ বিন্দু হয়। আবার যদি A বিন্দুটি গোলকটির বহিঃস্থ বিন্দু হয় এবং AP রেখা গোলকটিকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে তবে $AP^2 = F(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\therefore \quad AP = \sqrt{F(\alpha, \beta, \gamma)} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2u\alpha + 2v\beta + 2wv + d}$$

AP-কে বলা হয় গোলকটি হতে A বিন্দুর স্পর্শক দূরত্ব। আমরা দেখি যে, একটি গোলক হতে কোন বিন্দুর স্পর্শক দূরত্ব গোলকটির সাপেক্ষে ঐ বিন্দুটির বলের বর্গমূল।

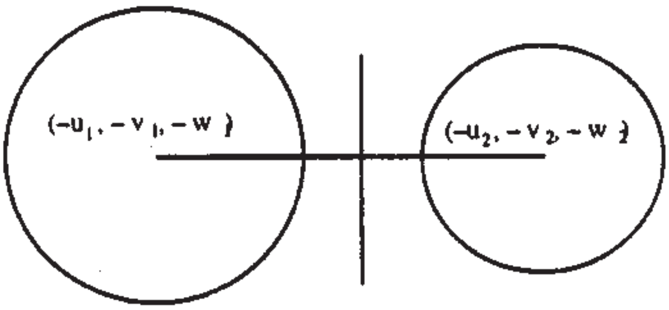
যদি $$S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0 \quad \text{........ (1)}$$

ও $$S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0 \quad \text{........ (2)}$$

দুইটি গোলকের সমীকরণ হয় তবে তাদের সাপেক্ষে যে বিন্দুগুলির বল সমান হয় তার সঞ্চারপথ হয়

$S_1 = S_2$.

বা, $$2(u_1 - u_2)x + 2(v_1 - v_2)y + 2(w_1 - wi_2)z + d_1 - d_2 = 0 \quad \text{........ (3)}$$



চিত্র : 10.8

গোলক দুটি সমকেন্দ্র হলে $u_1 = u_2, v_1 = v_2$ এবং $w_1 = w_2$ হয়। এক্ষেত্রে সমীকরণটি অর্থহীন হয়। মনে করি গোলক দুটি সমকেন্দ্র নয়। তাহলে (3) একটি একঘাত সমীকরণ হবে এবং সঞ্চারপথটি হবে একটি সমতল। এই সমতলটিকে (1) ও (2) গোলকদ্বয়ের মূলতল বলা হয়।

এখন মূলতলটির অভিলম্বের দিক্-অনুপাতগুলি (Direction-ratios) $u_1 - u_2, v_1 - v_2, w_1 - w_2$। আবার কেন্দ্র দুইটির অর্থাৎ $(-u_1, -v_1, -w_1)$ ও $(-u_2, -v_2, -w_2)$ সংযুক্ত সরলরেখার দিক অনুপাতগুলি $u_1 - u_2, v_1 - v_2, w_1 - w_2$. সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, দুটি গোলকের মূলতল তাদের কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখার সঙ্গে সমকোণে আছে। আবার দুটি গোলক পরস্পরকে যদি বহিঃস্থভাবে বা অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে তাদের সাধারণ স্পর্শতল হবে ঐ দুটি গোলকের মূলতল। দুটি পরস্পরছেদী গোলকের জন্য তাদের ছেদবৃত্ত মূলতলে অবস্থিত হবে।

মনে করি তিনটি গোলকের সমীকরণ যথাক্রমে $S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0$.

তাহলে প্রথম দুটি গোলকের মূলতলের সমীকরণ $S_1 = S_2$,

দ্বিতীয় ও তৃতীয় গোলকের মূলতলের সমীকরণ $S_2 = S_3$ এবং

তৃতীয় ও প্রথম গোলকের মূলতলের সমীকরণ $S_3 = S_1$

এখন যদি গোলক তিনটির কেন্দ্র সমরেখ না হয় তাহলে মূলতলগুলি সমান্তরাল নয় অর্থাৎ তারা পরস্পরকে ছেদ করে (যেহেতু দুটি গোলকের মূলতল তাদের কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখার সঙ্গে সমকোণে থাকে।)

স্পষ্টতই, এই তিনটি সমতল

$$S_1 = S_2 = S_3$$

সরলরেখাটিতে ছেদ করে।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, তিনটি গোলক যাদের কেন্দ্রগুলি সমরেখ নয় তাদের মধ্যে যেকোন দুটিকে পর্যায়ক্রমে নিলে যে মূলতলগুলি পাওয়া যায় তারা একটি সরলরেখার মধ্যে দিয়ে যায়। এই সরলরেখাটিকে গোলক তিনটির মূল-অক্ষ (Radical axis) বলা হয়। স্পষ্টতই মূলাক্ষের উপর অবস্থিত প্রত্যেকটি বিন্দু এমন যে, গোলক তিনটির সাপেক্ষে এটির বল সমান।

অনুরূপভাবে বলা যায় যে, চারটি গোলকের মধ্যে (যাদের যেকোন তিনটির কেন্দ্রগুলি সমরেখ নয়) যেকোন দুইটিকে পর্যায়ক্রমে নিলে যে মূলতলগুলি পাওয়া যায় তারা একটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে যায়। এই বিন্দুটিকে গোলক চারটির মূলকেন্দ্র (Radical centre) বলা হয়। স্পষ্টতই মূলকেন্দ্রটি $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

সমাধান করে পাওয়া যায়। স্পষ্টতই মূলকেন্দ্রটি এমন একটি বিন্দু যে গোলক চারটির সাপেক্ষে তার বল সমান।

10.11 সমাক্ষ গোলকতন্ত্র (A system of co-axial spheres)

দুইটি গোলকের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে x-অক্ষ এবং তাদের মূলতলকে $x = 0$ সমতল ধরলে ঐ গোলক দুটির সমীকরণগুলিকে

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda_1 x + d = 0$$

এবং $x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda_2 x + d = 0$

আকারে প্রকাশ করা যায়।

সুতরাং আমরা দেখি যে, $x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + d = 0$

সমীকরণটি যেখানে λ একটি প্রাচল (Parameter), একটি গোলকতন্ত্রকে প্রকাশ করে যাদের যেকোন দুইটির মূলতল একই। এই গোলকগুলিকে সমাক্ষ গোলকতন্ত্র (Co-oxial system of spheres) বলে। অর্থাৎ যদি একটি গোলকতন্ত্র এমন হয় যে, তাদের যেকোন দুইটির মূলতল একই হয় তবে উক্ত গোলকতন্ত্রকে একটি সমাক্ষ গোলকতন্ত্র বলা হয়। এই সমাক্ষ গোলকতন্ত্রের যে গোলকটির ব্যাসার্ধ শূন্য তার কেন্দ্রকে গোলকতন্ত্রটির সীমাস্থবিন্দু (limiting point) বলে।

আবার আমরা দেখি যে, যদি দুইটি গোলকের সমীকরণ

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1 x + 2v_1 y + 2w_1 z + d_1 = 0$$

এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2 x + 2v_2 y + 2w_2 z + d_2 = 0$ হয় তবে এই দুইটি গোলক থেকে উদ্ভূত সমাক্ষ গোলকতন্ত্রের সমীকরণ হয় $\lambda S_1 + \mu S_2 = 0$, যেখানে λ ও μ দুই-টি বাস্তব সংখ্যা এবং $\lambda + \mu \neq 0$. যেহেতু আমরা সহজেই দেখতে পারি যে, এই গোলকতন্ত্রের যে কোন দুইটি গোলকের মূলতল $S_1 - S_2 = 0$.

উদাহরণ 1. দেখান যে, $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ সমতলটি $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ গোলকটির একটি স্পর্শতল। স্পর্শ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক বের করুন।

সমাধান : প্রদত্ত গোলকটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ .... (1)

এটির কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং ব্যাসার্ধ = 7, কেন্দ্র থেকে $2x - 6y + 3z - 49 = 0$

সমতলটির লম্বদৈর্ঘ্য $= \left|\dfrac{2.0 - 6.0 + 3.0 - 49}{\sqrt{4 + 36 + 9}}\right| = 7$; গোলকটির ব্যাসার্ধ।

সুতরাং প্রদত্ত সমতলটি প্রদত্ত গোলকটিকে স্পর্শ করে। এখন যে সরলরেখাটি কেন্দ্রগামী এবং $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ সমতলটির লম্ব তার সমীকরণ

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{3}$$

সরলরেখাটির উপর যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2\lambda, -6\lambda, 3\lambda)$. $(2\lambda, -6\lambda, 3\lambda)$ বিন্দুটি নির্ণেয় স্পর্শ বিন্দু হবে যদি এটি $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ সমতলটির উপর অবস্থিত হয় অর্থাৎ যদি

$4\lambda + 36\lambda + 9\lambda = 49$ হয় বা $\lambda = 1$ হয়।

সুতরাং নির্ণেয় স্পর্শ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(2, -6, 3)$. (Answer)

উদাহরণ 2. যে গোলকটি $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ বিন্দুগামী এবং যা $2x + 2y - 2 = 15$ সমতলটিকে স্পর্শ করে তাদের সমীকরণ বের করুন।

সমাধান ঃ মনে করি নির্ণেয় গোলকটির সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2.y + 2wz + d = 0 \qquad \ldots (1)$$

যেহেতু গোলকটি (1, 0, 0), (0, 1, 0) ও (0, 0, 1) বিন্দুগামী,

$1 + 2u + d = 0,\ 1 + 2v + d = 0$ এবং $1 + 2w + d = 0$

সুতরাং $u = v = w = -\frac{1}{2}(1 + d)$ .... (2)

যেহেতু $2x + 2y - z = 15$ সমতলটি (1) গোলকটিকে স্পর্শ করে, সমতলটি থেকে কেন্দ্র $(-u, -v, -w)$ এর দূরত্ব গোলকটির ব্যাসার্ধের সমান অর্থাৎ $\left|\frac{-2u - 2v + w - 15}{\sqrt{4 + 4 + 1}}\right| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$

বা, $(2u + 2v - w + 15)^2 = 9(u^2 + v^2 + w^2 - d)$. .... (3)

(2) থেকে v, w ও d এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$(3u + 15)^2 = 9(3u^2 + 2u + 1)$$

বা, $2u^2 - 8u - 24 = 0$ বা, $u^2 - 4u - 12 = 0$

বা, $(u - 6)(u + 2) = 0$ বা, $u = 6, u = -2$

যখন $u = 6$ তখন $v = 6, w = 6, d = -13$ এবং গোলকটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + z^2 + 12x + 12y + 12z - 13 = 0$

যখন $u = -2$ তখন $v = -2, w = -2, d = 3$ এবং গোলকটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 3 = 0$ (Answer)

উদাহরণ 3. দেখান যে, $3x - 4y - 8 = 0, y - 3z + 2 = 0$ সরলরেখাটির মধ্যদিয়ে $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$ গোলকটিতে কেবলমাত্র একটি স্পর্শতল অঙ্কিত করা যেতে পারে।

সমাধান ঃ $3x - 4y - 8 = 0, y - 3z + 2 = 0$ সরলরেখাগামী যেকোন একটি সমতলের সমীকরণ

$$\lambda(3x - 4y - 8) + \mu(y - 3z + 2) = 0$$

বা, $3\lambda x + (\mu - 4\lambda)y - 3\mu z = 8\lambda - 2\mu$ .... (1)

যেখানে λ ও μ দুইটি পরিবর্তনশীল প্রচল এবং λ ও μ উভয়েই যুগপাৎ শূন্য নয়। (1) নং সমতলটি প্রদত্ত গোলকটিকে স্পর্শ করবে যদি

$$\{-3\lambda + 3(\mu - 4\lambda) - 3\mu + 8\lambda - 2\mu\}^2 = \{9\lambda^2 + (\mu - 4\lambda)^2 + 9\mu^2\} \times (1 + 9 + 1 - 8) \ldots\ldots\ldots (2)$$

হয়।

[যেহেতু $lx + my + nz = p$ সমতলটি $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ গোলকটি স্পর্শ করার শর্ত $(ul + vm + wn + p)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)(u^2 + v^2 + w^2 - d)$]

(2) থেকে পাই, $(1 - 7\lambda - 2\mu)^2 = 3(25\lambda^2 + 10\mu^2 - 8\lambda\mu)$

বা, $26\lambda^2 + 26\mu^2 - 52\lambda\mu = 0$

বা, $\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2 = 0$

বা, $\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right)^2 = 0$ বা, $\frac{\lambda}{\mu} = 1.$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত সরলরেখাগামী কেবলমাত্র একটি স্পর্শতল পাওয়া যায় এবং স্পর্শতলটির সমীকরণ $3x - 4y - 8 + (y - 3z + 2) = 0$

বা, $3x - 3y - 3z - 6 = 0$

বা, $x - y - z - 2 = 0$ (প্রমাণিত)

10.12 অনুশীলনী

(1) মূলবিন্দুগামী যে গোলক $x^2 + y^2 + z^2 = 56$ গোলককে $(2, -4, 6)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে, তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ নির্ণেয় গোলকটি $x^2 + y^2 + z^2 = 56$-কে অন্তঃস্থ ভাবে স্পর্শ করে।]

[Ans. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 0$]

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 25, x + 2y + 2z + 9 = 0$ বৃত্তটিকে একটি সমীকরণের আকারে প্রকাশ করুন।

[সংকেতঃ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ গোলকটির কেন্দ্র থেকে $x + 2y + 2z + 9 = 0$ সমতলের দূরত্ব নির্ণয় করুন এবার বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন ......] [Ans. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = 16$]

(3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 7 = 0$ গোলকটির একটি ব্যাসের একপ্রান্তের স্থানাঙ্ক $(-1, 2, 4)$ হলে, অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করুন। এবার ব্যাসের একপ্রান্ত থেকে কেন্দ্রের দূরত্ব = অপরপ্রান্ত থেকে কেন্দ্রের দূরত্ব] [Ans. $(3, -6, 2)$]

(4) নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$ গোলকটির বাহিরে না ভিতরে অবস্থিত তা নির্ণয় করুন।

(i) $(1, 2, 3)$, (ii) $(-2, 5, 7)$, (iii) $(1, 1, 1)$, (iv) $(0, 0, 0)$

[সংকেতঃ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে বিন্দুটির দূরত্ব ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সাথে তুলনীয়]

[উত্তর : (i) ভিতরে (ii) বাহিরে (iii) বাহিরে (iv) বাহিরে]

(5) $(-2, 3, -1)$, $(-2, 1, 1)$ এবং $(0, -1, 3)$ বিন্দুগামী বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[উত্তর : $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 35, y + z - 2 = 0$]

[সংকেতঃ উক্ত বিন্দুগামী গোলক ও সমতলের ছেদই বৃত্তটির সমীকরণ]

(6) (6, – 3, – 2) বিন্দুতে $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ গোলকের স্পর্শতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন। আরও দেখান যে $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ ওই একই গোলকের একটি স্পর্শতল হবে, স্পর্শবিন্দুটির স্থানাঙ্ক কি?

[সংকেতঃ তলের স্পর্শতল হবার শর্তাবলী প্রযোজ্য] [Ans. $6x - 3y - 2z = 49$ $(2, -6, 3)$]

(7) তিনটি স্থানাঙ্কতলকে স্পর্শকারী গোলকের সমীকরণ কি হবে?

[সংকেতঃ $x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2fy + 2hz + d = 0$

গোলক ধরে নিয়ে তার ব্যাসার্ধের সাথে স্পর্শকারী তলগুলির দূরত্ব সমান করে g, f, h, d নির্ণয় করুন।]

[উত্তর : $x^2 + y^2 + z^2 \pm 2ax \pm 2ay \pm 2az + 2a^2 = 0$, a একটি প্রাচল]

(8) $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$, $px + qy + rz + 0$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ যদি R হয় তবে দেখান যে

$$(R^2 + d)(p^2 + q^2 + r^2) = (qw - rv)^2 + (ru - pw)^2 + (pv - qu)^2$$

[সংকেতঃ (বৃত্তের ব্যাসার্ধ)^2 + (পাদলম্বের দৈর্ঘ্য)^2 = (গোলকের ব্যাসার্ধ)^2 দ্রষ্টব্য]

(9) প্রমাণ করুন যে গোলক $y = mx; z = c; y = -mx, z = -c$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে তার কেন্দ্র $mxy + cz(1 + m^2) = 0$ তলস্থিত হয়।

[সংকেতঃ গোলকের কেন্দ্রর (h, i, j) ধরে তা থেকে সরলরেখাগুলির দূরত্ব বিচার করুন।]

(10) যদি একটি সমতল একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (f, g, h) দিয়ে অতিক্রম করে এবং অক্ষগুলিকে যথাক্রমে P, Q, R বিন্দুগুলিতে ছেদ করে, তবে দেখান যে, মূলবিন্দু ও P, Q, R এই চারিটি বিন্দুগামী গোলকটির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ $\frac{f}{x} + \frac{g}{y} + \frac{h}{z} = 2$.

[সংকেতঃ গোলকটির কেন্দ্র (x', y', z') ধরে নিন। এবার সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করার চেষ্টা করুন। লক্ষণীয় যে P, Q, R-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$ ও $(0, 0, r)$ আকারের হবে, ...]

10.13 সারাংশ

উপোরক্ত বিষয়বস্তু অধ্যয়ন এবং অনুশীলনের পর অবশ্যই বুঝতে পারছেন গোলক পড়াটা কতটা জরুরী এবং অভিপ্রেত। এই অধ্যায়ে গোলকের সমীকরণ, ব্যাস, ব্যাসতল, বৃত্তের সমীকরণ ইত্যাদির বীজগাণিতিক সূত্র নির্ণয় করা হয়েছে। এরপর স্পর্শতল বিষয়ে ধারণা দেওয়া হয়েছে। পরিবেশেষে মূলতলের বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে এবং সমাক্ষ গোলকতন্ত্র বিষয়ে ধারণা দেওয়া হয়েছে। বিষয়টি সম্যক রপ্ত করবার জন্য কিছু অঙ্ক করে দেওয়া হয়েছে এবং অনুশীলনীতে কিছু অঙ্ক দেওয়া হয়েছে।

10.14 সহায়ক পাঠ

(1) J. G. Chakravorty & P. R. Ghosh : Advanced analytical Geometry.

(U. N. Dhar, Kolkata, 1995)

(2) ডঃ শ্রীপতিরঞ্জন চৌধুরী ঃ ভেক্টর বীজগণিত ও ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি,

(পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্যদ, 1980)

একক 11 ❑ শঙ্কু (The lone) এবং বেলন (The cylinder)

গঠন

11.0 প্রস্তাবনা, উদ্দেশ্য ও বিষয় পরিচিতি

পূর্বেকার অধ্যায়ে গোলকের বিষয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। মূলতঃ ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে বক্ররেখা এবং বক্রতলের সমীকরণ কিভাবে নিরূপিত হয় তা আশা করি বুঝতে পেরেছেন। এবার এই অধ্যায়ে আরো দুটি বিশেষ পরিচিত বক্রতলের বিষয়ে আলোচিত হবে। প্রথমটি শঙ্কু, অপরটি বেলন। এই দুটি বক্রতল মূলতঃ একটি সরলরেখা দ্বারা সঞ্চারিত বক্রতল, শঙ্কুর ক্ষেত্রে এই সরলরেখা সর্বদা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী, বেলনের ক্ষেত্রে এই সরলরেখা একটি প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল। শঙ্কু ও বেলন একটি মিশ্রতল, এটি একটি সমতল ও বক্রতলের সমষ্টি এবং এই দুটি ঘনবস্তুর সঙ্গে দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাধারণ বক্ররেখার সম্পর্ক অনেকটা নিবিড়। তাই এই দুটি ঘনবস্তু ও বক্রতল জানতে ও বুঝতে পারলে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির অনেক বিষয় রপ্ত করতে সুবিধা হবে।

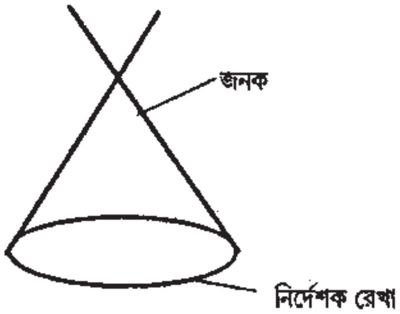
এই অধ্যায়ে এই দুটি বিষয়ের সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় করা ছাড়াও প্রামান্য সমীকরণ নির্ণয় করা হয়েছে। শঙ্কু বিভাগে কারিকারেখা বা জনকরেখার উপর বিশেষ গুরুত্ব আছে। লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু এবং পরিবর্তী শঙ্কুর সমীকরণ

নির্ধারণ করা হয়েছে। একটি শঙ্কুর পরস্পর তিনটি লম্ব কারিকারেখা বা জনকরেখা হবার শর্ত নির্ণয় করা হবে। এরপর বেলনের সমীকরণ ও লম্ব বেলনের সমীকরণ নির্ধারণ করা হয়েছে।

11.1 শঙ্কু

একটি সরলরেখা যদি এমনভাবে চলমান হয় যে, তা সর্বদা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুদিয়ে অতিক্রম করে এবং একটি প্রদত্ত বক্ররেখাকে সর্বদা ছেদ করে তবে ঐ সরলরেখা দ্বারা জাত তলকে একটি শঙ্কু বলা হয়।

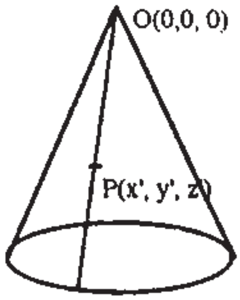
নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু বলা হয় এবং প্রদত্ত বক্ররেখাটিকে শঙ্কুটির নির্দেশক রেখা (guiding curve) বলা হয়। শঙ্কুর উপর অবস্থিত যেকোন সরলরেখাকে তার জনক (Generator) বলা হয়।



চিত্র : 11.1

11.2 মূলবিন্দুতে শীর্ষবিন্দু অবস্থিত এমন শঙ্কুর সমীকরণ

মনে করি একটি শঙ্কু যেটির শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে তার সমীকরণ $f(x, y, z) = 0$ .... (1)



চিত্র : 11.2

মনে করি $P(x', y', z')$ শঙ্কুটির উপর একটি বিন্দু। তাহলে $f(x', y', z') = 0$ .... (2)

এখন OP সরলরেখা শঙ্কুটির একটি জনক। এই জনকটির সমীকরণ $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$ ....(3)

সুতরাং OP সরলরেখার উপর যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (rx', ry', rz') যেহেতু OP সরলরেখাটি পুরোপরি শঙ্কুর উপর অবস্থিত, r-এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য (rx', ry', rz') বিন্দুটি শঙ্কুর উপর অবস্থিত হবে অর্থাৎ rএর সকল মানের জন্য $f(rx', ry', rz) = 0$ হবে। .... (4)

এটি সম্ভব হবে যদি $f(x, y, z)$ সমীকরণটি সমঘাত হয়। অর্থাৎ একটি শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু হলে তার সমীকরণ অবশ্যই সমঘাত হবে।

তাহলে আমরা দেখি, $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ সরলরেখাটি যদি $f(x, y, z) = 0$ শঙ্কুটির (যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু) একটি জনক হয় তবে $f(l, m, n) = 0$. বিপরীতক্রমে, মূলবিন্দুগামী কোন সরলরেখার দিগানুপাতগুলি (direction ratios) অর্থাৎ l, m, n যদি একটি সমঘাত সমীকরণ $f(x, y, z) = 0$ -কে সিদ্ধ করে অর্থাৎ যদি $f(l, m, n) = 0$ হয় তবে ঐ সরলরেখাটি $f(x, y, z) = 0$ শঙ্কুটির (যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু) একটি জনক হবে। উদাহরণস্বরূপ, যদি $2l^2 + 3m^2 - 5n^2 = 0$ হয় তবে $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ সরলরেখাটি $2x^2 + 3y^2 - 5z^2 = 0$ শঙ্কুটির একটি জনক হবে।

আমরা এখন দ্বিতীয় ডিগ্রী (second degree) দ্বিঘাত শঙ্কুর (বা কোয়াড্রিক শঙ্কু) সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় করব, যা স্থানাঙ্ক অক্ষগুলি দিয়ে অতিক্রান্ত হয়।

মনে করি, $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ .... (5)

সমীকরণটি শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত এমন একটি দ্বিতীয় ডিগ্রী শঙ্কুর সমীকরণ। শঙ্কুটি যদি অক্ষগুলি দিয়ে অতিক্রান্ত হয় তবে (5) সমীকরণটি অক্ষগুলির কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী দ্বারা সিদ্ধ হবে। x-অক্ষের কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী যথাক্রমে $1, 0, 0$ সুতরাং (5) নং সমীকরণে $x = 1, y = 0, z = 0$ বসিয়ে পাই $a = 0$. y-অক্ষের কোসাইন-দিগঙ্কগোষ্ঠী $0, 1, 0$ সুতরাং $b = 0$, অনুরূপে $c = 0$.

(5) নং সমীকরণে $a = b = c = 0$ বসিয়ে পাই $fyz + gzx + hxy = 0$

এটিই দ্বিতীয় ডিগ্রী শঙ্কুর সাধারণ সমীকরণ যা অক্ষগুলি দিয়ে অতিক্রান্ত হয়।

টিকা 1.: যদিও শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত এমন একটি কোয়াড্রিক শঙ্কুর সমীকরণ সর্বদা একটি দ্বিতীয় ডিগ্রীর সমঘাত সমীকরণ তবুও এটির বিপরীত সত্য নাও হতে পারে।

উদাহরণ স্বরূপ $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 0$ .... (6)

সমীকরণটি x, y, z এর একটি দ্বিতীয় ডিগ্রীর সমঘাত সমীকরণ। কিন্তু যেহেতু $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = (x + y + z)(x + y - z)$, (6) নং সমীকরণটি একটি রেখাযুগ্মকে সূচিত করে অর্থাৎ এটি একটি শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত এরূপ একটি কোয়াড্রিক শঙ্কু সূচিত করে না। তথাপি $\phi(x, y, z) = 0$ সমীকরণটি যদি x, y, z-এর একটি দ্বিতীয় ডিগ্রীর সমঘাত সমীকরণ হয় এবং $\phi(x, y, z) = 0$ একটি সঞ্চারপথ সূচিত করে যেখানে $\phi(x, y, z)$ একটি অলঘুকরণযোগ্য বহুপদরাশিমালা (irreducible polynomial) তাহলে $\phi(x, y, z) = 0$ একটি কোয়াড্রিক শঙ্কু। উদাহরণস্বরূপ ধরি $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ তাহলে $\phi(x, y, z) = 0$ একটি দ্বিতীয় ডিগ্রীর সমঘাত সমীকরণ এবং যেহেতু $(0, 0, 0)$ ও $(3, 4, 5)$ বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে $\phi(x, y, z) = 0$ একটি বিন্দু

সঞ্চারপথ নয়। তাছাড়া $x^2 + y^2 - z^2$ একটি অলঘুকরণযোগ্য বহুপদরাশিমালা যেহেতু $x^2 + y^2 - z^2$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না।

টিকা 2. ঃ শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত এমন একটি দ্বিতীয় ডিগ্রী শঙ্কুর সাধারণ সমীকরণ

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0,$$

যেখানে $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \neq 0$

উদাহরণ 1. একটি শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং এটির নির্দেশক রেখা (Guiding curve) $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + b = 0$, $lx + my + nz = p$ এই বৃত্তটি। শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি $\frac{x}{l'} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{n'}$ .... (1)

সরলরেখা শঙ্কুটির একটি জনক। জনকটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(l'r, m'r, n'r)$। জনকটি প্রদত্ত বৃত্তটিকে ছেদ করবে যদি বিন্দুটি আবার $x^2 + y^2 + z^2 + 2an + b = 0$, $lx + my + nz = p$ বৃত্তটির উপর অবস্থিত হয় অর্থাৎ যদি

$$l'^2r^2 + m'^2r^2 + n'^2r^2 + 2al'r + b = 0 \qquad \text{.........} (2)$$

এবং $ll'r + mm'r + nn'r = p$ .... (3)

হয়। (3) নং থেকে পাই, $r = \frac{p}{ll' + mm' + nn'}$ .... (4)

r-এর মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$(l'^2 + m'^2 + n'^2)\frac{p^2}{(ll' + mm' + nn')^2} + \frac{2al'p}{(ll' + mm' + nn')} + b = 0$$

বা, $p^2(l'^2 + m'^2 + n'^2) + 2apl'(ll' + mm' + nn') + b(ll' + mm' + nn')^2 = 0$ .... (5)

(5) নং সমীকরণটি l', m', n' এর একটি সমঘাত সমীকরণ যেখানে l', m', n' শঙ্কুটির একটি জনকের দিক্ অনুপাতগুলি, সুতরাং l', m', n'-কে যথাক্রমে x, y, z দ্বারা প্রতিস্থাপন করলে আমরা শঙ্কুটির সমীকরণ পাই। অর্থাৎ শঙ্কুটির সমীকরণ

$$p^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2apx(lx + my + nz) + b(lx + my + nz)^2 = 0 \qquad \text{(Answer)}$$

উদাহরণ 2. শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 2z$ এই বক্ররেখা দিয়ে অতিক্রান্ত এইরূপ শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ .... (1)

সরলরেখাটি শঙ্কুটির একটি জনক।

তাহলে (lr, mr, nr) বিন্দুটি সরলরেখাটির উপর অবস্থিত যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক। বিন্দুটি প্রদত্ত বক্ররেখার উপর অবস্থিত হবে যদি

$$\frac{l^2r^2}{a^2} + \frac{m^2r^2}{b^2} + \frac{n^2r^2}{c^2} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

এবং $$\frac{l^2r^2}{\alpha^2} + \frac{m^2r^2}{\beta^2} = 2nr \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

হয়। (2) থেকে পাই, $$r^2 = \frac{1}{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

এবং (3) থেকে পাই, $$r = \frac{2n}{\frac{l^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

(4) ও (5) থেকে r অপনয়ন করে পাই,

$$\frac{1}{\frac{l^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} = \frac{4n^2}{\left(\frac{l^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}\right)^2}$$

বা, $$4n^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right) = \left(\frac{l^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}\right)^2$$

শঙ্কুটির নির্ণেয় সমীকরণ

$$4z^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}\right)^2 \qquad \text{(Answer)}$$

উদাহরণ 3. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ সমতলটি স্থানাঙ্ক অক্ষগুলিকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন যে, মূলবিন্দু O দিয়ে অঙ্কিত যে সরলরেখাগুলি ABC বৃত্তকে ছেদ করে সেই সরলরেখাগুলি দ্বারা জাত শঙ্কুটি

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমতলটির সমীকরণ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

সমতলটি x-অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0, 0)$ [যেহেতু x-অক্ষের উপর অবস্থিত যেকোন বিন্দুর y ও z স্থানাঙ্ক শূন্য।] অনুরূপে B ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, b, 0)$ ও $(0, 0, c)$ এখন মূলবিন্দুগামী যে কোন গোলকের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

গোলকটি যদি A, B ও C বিন্দুগামী হয়। তবে

$$a^2 + 2ua = 0 \qquad \therefore \quad u = -\frac{a}{2}$$

$$b^2 + 2vb = 0 \qquad \therefore \quad v = -\frac{b}{2}$$

এবং $\quad c^2 + 2wc = 0 \qquad \therefore \quad w = -\frac{c}{2}$

সুতরাং A, B, C ও মূলবিন্দুগামী গোলকটির সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0 \qquad \text{......... (3)}$$

এখন যেহেতু ABC বৃত্তটি (1) নং সমতলটি এবং (3) নং গোলকটির ছেদরেখা, এটির সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \text{......... (4)}$$

স্পষ্টতই নির্ণেয় শঙ্কুটির শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে ও নির্দেশকরেখা (4) বৃত্তটি। মনে করি এটির একটি জনক

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \qquad \text{....... (5)}$$

(5) সরলরেখাটির উপর যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (lr, mr, nr) বিন্দুটি (4) নং বৃত্তটির উপর অবস্থিত হলে

$$l^2r^2 + m^2r^2 + n^2r^2 - alr - bmr - cnr = 0 \qquad \text{......... (6)}$$

ও $\quad \frac{lr}{a} + \frac{mr}{b} + \frac{nr}{c} = 1. \qquad \text{......... (7)}$

(6) ও (7) থেকে r-কে অপনয়ন করে পাই

$$\frac{al + bm + cn}{l^2 + m^2 + n^2} = \frac{1}{\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c}}$$

বা, $\quad (al + bm + cn)\left(\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c}\right) = l^2 + m^2 + n^2$

বা, $\quad lm\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + mn\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + nl\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) = 0 \qquad \text{......... (8)}$

যাহা l, m, n -এর সমঘাত সমীকরণ।

সুতরাং l, m, n এর পরিবর্তে যথাক্রমে x, y, z লিখলে আমরা শঙ্কুটির সমীকরণ পাই। $\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ

$$xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) = 0 \qquad \text{(Answer)}$$

11.3 কোন শঙ্কুর শীর্ষবিন্দুগামী একটি সমতল (যা একটি স্পর্শতল নয়) শঙ্কুটিকে যে দুটি সরলরেখায় ছেদ করে তাদের মধ্যস্থ কোণ

মনে করি, $F(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0 \qquad \text{......... (1)}$

একটি শঙ্কু এবং $ux + vy + wz = 0 \qquad \text{......... (2)}$

শঙ্কুর শীর্ষবিন্দুগামী (যা মূলবিন্দু) একটি সমতল যা একটি স্পর্শতল নয়।

(2) সমতলটি (1) শঙ্কুটিকে মূলবিন্দুগামী দুইটি সরলরেখায় ছেদ করে।

ধরি $\quad \dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$ .... (3)

এই দুটি সরলরেখার যেকোন একটি সমীকরণ।

যেহেতু (3) সরলরেখাটি (2) সমতলটির উপর অবস্থিত

$$ul + vm + wn = 0 \qquad \text{......... (4)}$$

আবার (3) সরলরেখাটি শঙ্কুটির উপর অবস্থিত অর্থাৎ এটি শঙ্কুটির একটি জনক। সুতরাং

$$F(l, m, n) \equiv al^2 + bm^2 + cn^2 + 2fmn + 2gnl + 2hln = 0 \qquad \text{......... (5)}$$

(4) ও (5) থেকে n-কে অপনয়ন করে পাই

$$al^2 + bm^2 + c\left(-\frac{ul + vm}{w}\right)^2 + \left(-\frac{ul + vm}{w}\right)(2fm + 2gl) + 2hlm = 0$$

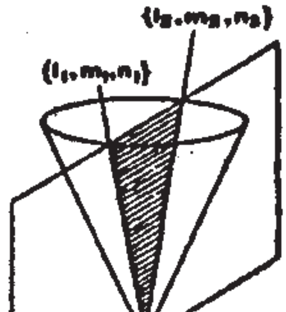
বা, $\quad l^2(aw^2 + cu^2 - 2gwu) + 2lm(cuv - gwu - fwu + hw^2) + m^2(bw^2 + cv^2 - 2fvw) = 0$

বা, $\quad \left(\dfrac{l}{m}\right)^2(cu^2 + aw^2 - 2gwu) + 2\dfrac{l}{m}(hw^2 + cuv - fwu - gvw) + (cv^2 + bw^2 - 2fvw) = 0$

.... (6)

এটি $\dfrac{l}{m}$ এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। যদি l_1, m_1, n_1 এবং l_2, m_2, n_2 সমতলটি ও শঙ্কুটির ছেদরেখাদ্বয়ের দিক্ অনুপাত (দিগানুপাত) হয়, তাহলে (6) সমীকরণটির বীজদ্বয় হবে $\dfrac{l_1}{m_1}$ ও $\dfrac{l_2}{m_2}$.

সুতরাং আমরা পাই $\dfrac{l_1 l_2}{m_1 m_2} = \dfrac{bw^2 + cv^2 - 2fvw}{cu^2 + aw^2 - 2gwu}$ .... (7)



চিত্র : 11.3

আবার (4) ও (5) থেকে m-কে অপনয়ন করে পাই

$$al^2 + b\left(-\frac{ul + wn}{v}\right)^2 + cu^2 + (2fn + 2hl)\left(-\frac{ul + wn}{v}\right) + 2gln = 0$$

বা, $\quad l^2(av^2 + bu^2 - 2huv) + 2ln(buw - fuv + gv^2 - hwv) + n^2(bw^2 + cv^2 - 2fwv) = 0$

বা, $\left(\frac{l}{n}\right)^2(av^2 + bu^2 - 2huv) + 2\frac{l}{n}(buw - fuv + gv^2 - hwv) + (bw^2 + cv^2 - 2fwv) = 0$

অর্থাৎ $\frac{l_1 l_2}{n_1 n_2} = \frac{bw^2 + cv^2 - 2fwv}{av^2 + bu^2 - 2huv}$ .... (8)

(7) ও (8) থেকে পাই,

$$\frac{l_1 l_2}{bw^2 + cv^2 - 2fwv} = \frac{m_1 m_2}{aw^2 + cu^2 - 2gwu} = \frac{n_1 n_2}{av^2 + bu^2 - 2huv} = k \text{ (ধরি)}$$

আবার (6) থেকে পাই,

$$\frac{l_1}{m_1} + \frac{l_2}{m_2} = -\frac{2(cuv + hw^2 - gwv - fwu)}{aw^2 + cu^2 - 2gwu}$$

অর্থাৎ $\frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{-2(cuv + hw^2 - gwv - fwu)} = k.$

এখন $(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 = (l_1 m_2 + l_2 m_1)^2 - 4 l_1 l_2 m_1 m_2$

$$= 4k^2(hw^2 + cuv - fwu - gvu)^2 - 4k^2(bw^2 + cv^2 - 2fwv) \times (cu^2 + aw^2 - 2gwu)$$

$$= 4k^2\{h^2w^4 - 2hw^3(fu + gv) + w^2(fu + gv)^2 + 2chuvw^2 - 2cuvw(fu + gv) + c^2u^2v^2\}$$

$$- 4k^2\{abw^4 - 2w^3(afv + bgu) + w^2(bcu^2 + cav^2) - 2cuvw(fu + gv) + c^2u^2v^2 + 4fguvw^2\}$$

$$= 4w^2k^2\{-(Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv)\}$$

$$= 4w^2k^2P^2,$$

যেখানে A, B, C, F, G, H যথাক্রমে

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কটির a, b, c, f, g, h এর সহ উৎপাদক।

অর্থাৎ $A = bc - f^2, B = ca - g^2, C = ab - h^2, F = gh - af,$

$G = hf - bg, H = fg - ch.$

এবং $P^2 = -(Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv)$

$$= \begin{vmatrix} a & h & g & h \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

$\therefore \quad l_1 m_2 - l_2 m_1 = \pm 2wkP.$

$$\therefore \quad \frac{l_1 l_2}{bw^2 + cv^2 - 2fvw} = \frac{m_1 m_2}{aw^2 + cu^2 - 2gwu} = \frac{l_1 m_2 - l_2 m_1}{\pm 2wP}$$

প্রতিসাম্যের জন্য উপরোক্ত প্রত্যেকটি রাশিমালা

$$\frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{\pm 2uP} = \frac{n_1 l_2 - n_2 l_1}{\pm 2vP}$$

এখন $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$

$$= k\{(bw^2 + cv^2 - 2fvw) + (aw^2 + cu^2 - 2gwu) + (av^2 + bu^2 - 2huv)\}$$

$$= k\{a(v^2 + w^2) + b(w^2 + u^2) + c(u^2 + v^2) - 2fvw - 2gwu - 2huv\}$$

$$= k\{(a + b + c)(u^2 + v^2 + w^2) - F(u, v, w)\}.$$

যদি সরলরেখাদুটির মধ্যস্থ কোণ θ হয়,

তাহলে $\tan\theta = \pm \dfrac{[\sum(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2]^{1/2}}{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}$

$$= \pm \frac{2P(u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}}{(a + b + c)(u^2 + v^2 + w^2) - F(u, v, w)} \quad \text{......... (10)}$$

সুতরাং (2) নং সমতলটি (1) নং শঙ্কুটিকে পরস্পর লম্ব জনকদ্বয়ে ছেদ করে যদি $(a + b + c)(u^2 + v^2 + w^2) - F(u, v, w) = 0$

আবার সমতলটি শঙ্কুটিকে দুটি সমাপতিত জনকে ছেদ করে অর্থাৎ সমতলটি শঙ্কুটির একটি স্পর্শতল হয় যদি $P^2 = 0$ হয় অর্থাৎ,

যদি $Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwn + 2Huv = 0$ হয়। .... (11)

11.4 শঙ্কুর জনকগুলি পরস্পরের লম্ব হওয়ার শর্ত

মনে করি $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ .... (1)

একটি শঙ্কুর সমীকরণ এবং $\dfrac{x}{\lambda} = \dfrac{y}{\mu} = \dfrac{z}{\upsilon}$ .... (2)

এটির যেকোন একটি জনক।

তাহলে মূলবিন্দুগামী যে সমতলটি (2) নং সরলরেখাটির লম্ব তার সমীকরণ

$$\lambda x + \mu y + \upsilon z = 0 \quad \text{......... (3)}$$

মনে করি এই সমতলটি শঙ্কুটিকে দুইটি জনকে ছেদ করে। যদি এই জনকদ্বয়ের দিগানুপাতগুলি l_1, m_1, n_1 ও l_2, m_2, n_2 হয় তাহলে

$$\frac{l_1 l_2}{b\upsilon^2 + c\mu^2 - 2f\mu\upsilon} = \frac{m_1 m_2}{a\upsilon^2 + c\lambda^2 - 2g\lambda\upsilon} = \frac{n_1 n_2}{a\mu^2 + b\lambda^2 - 2h\lambda\mu}$$

প্রত্যেকটি অনুপাতকে k দ্বারা সূচিত করে পাই,

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = k[(a + b)\upsilon^2 + (b + c)\lambda^2 + (c + a)\mu^2 - 2f\mu\upsilon - 2g\lambda\upsilon - 2h\lambda\mu]$$

কিন্তু $a\lambda^2 + b\mu^2 + c\upsilon^2 + 2f\mu\upsilon + 2g\lambda\upsilon + 2h\upsilon\lambda = 0$

[$\because$ λ, μ, υ হল শঙ্কুর একটি জনকের দিগানুপাত]

সুতরাং $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = k(a + b + c)(\lambda^2 + \mu^2 + \upsilon^2)$ .... (4)

জনক দুইটি যদি পরস্পরের লম্ব হয়, তাহলে $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

যেহেতু $\lambda^2 + \mu^2 + \upsilon^2 \neq 0$, (4) থেকে পাই $a + b + c = 0$ .... (5)

সুতরাং (1) শঙ্কুটির যদি তিনটি পরস্পর লম্ব জনক থাকে তাহলে $a + b + c = 0$.

আবার আমরা মনে করি যে (1) শঙ্কুটির জন্য (5) নং সম্বন্ধটি প্রযোজ্য। তাহলে আমরা (4) নং সমীকরণ থেকে বলতে পারি যে, শঙ্কুটির যেকোন জনক OA এর লম্ব সমতলটি শঙ্কুটিকে দুইটি পরস্পর লম্বজনক OB ও OC-কে ছেদ করে। সুতরাং OA, OB, OC এই জনক তিনটি পরস্পর লম্ব। সুতরাং $a + b + c = 0$ সম্বন্ধটি কোন শঙ্কুর তিনটি পরস্পর লম্ব জনক থাকার প্রয়োজনীয়ও যথেষ্ট শর্ত।

11.5 পরিবর্ত্তী শঙ্কু (Reciprocal cone)

একটি শঙ্কুর শীর্ষবিন্দুগামী যে সরলরেখাগুলি শঙ্কুর স্পর্শতলগুলির উপর লম্ব তাদের সঞ্চারপথই প্রদত্ত শঙ্কুটির পরিবর্ত্তী শঙ্কু।

মনে করি একটি শঙ্কুর সমীকরণ

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0 \qquad \text{......... (1)}$$

এবং তার স্পর্শতলের সমীকরণ $lx + my + nz = 0$ .... (2)

তাহলে আমরা পাই $Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Fmn + 2Gnl + 2Hlm = 0$ .... (3)

(2) নং স্পর্শতলের মূলবিন্দুগামী অভিলম্বের সমীকরণ

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \qquad \text{......... (4)}$$

(3) ও (4) নং সমীকরণ থেকে l, m, n অপনয়ন করে পাই

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0 \qquad \text{......... (5)}$$

এটি একটি শঙ্কুর সমীকরণ যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে।

(5) নং শঙ্কুটি হল (1) নং শঙ্কুর পরিবর্ত্তী শঙ্কু।

উদাহরণ 1. প্রমাণ করুন যে, $yz + zx + xy = 0$ শঙ্কুটিকে $ax + by + cz = 0$ সমতলটি পরস্পর লম্ব সরলরেখায় ছেদ করে যদি $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ হয়।

সমাধান ঃ শঙ্কুটির সমীকরণ $yz + zx + xy = 0$ .... (1)

এবং সমতলটির সমীকরণ $ax + by + cz = 0$ .... (2)

মনে করি শঙ্কুটি ও সমতলটি যে দুটি সরলরেখায় ছেদ করে তাদের যেকোন একটির সমীকরণ

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \qquad \text{......... (3)}$$

এখন (3) নং সরলরেখাটি শঙ্কুটির একটি জনক।

সুতরাং $mn + nl + lm = 0$ .... (4)

আবার সরলরেখাটি (2) নং সমতলটির উপর অবস্থিত।

সুতরাং $al + bm + cn = 0$ .... (5)

(5) থেকে পাই $n = -\frac{al + bm}{c}$

n-এর মান (4) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$lm + (l + m)\left(-\frac{al + bm}{c}\right) = 0$$

বা, $-al^2 + (c - a - b)lm - bm^2 = 0$

বা, $a\left(\frac{l}{m}\right)^2 + (a + b - c)\left(\frac{l}{m}\right) + b = 0$ .... (6)

এটি $\frac{l}{m}$ এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। যদি l_1, m_1, n_1 এবং l_2, m_2, n_2 ছেদ রেখাদ্বয়ের দিগানুপাত হয়, তাহলে সমীকরণ (6) এর বীজদ্বয় $\frac{l_1}{m_1}$ ও $\frac{l_2}{m_2}$ অর্থাৎ $\frac{l_1 l_2}{m_1 m_2} = \frac{b}{a}$

বা, $\frac{l_1 l_2}{\frac{1}{a}} = \frac{m_1 m_2}{\frac{1}{b}}$

অনুরূপে (4) ও (5) থেকে m অপনয়ন করে পাই

$$\frac{n_1 n_2}{\frac{1}{c}} = \frac{l_1 l_2}{\frac{1}{a}}$$

$\therefore \quad \frac{l_1 l_2}{\frac{1}{a}} = \frac{m_1 m_2}{\frac{1}{b}} = \frac{n_1 n_2}{\frac{1}{c}}$

(2) সমতলটি (1) শঙ্কুটিকে দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখায় ছেদ করে যদি $l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 = 0$ হয়। অর্থাৎ যদি $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ হয়। (প্রমাণিত)

উদাহরণ 2. $2x + y - z = 0$ সমতলটি $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$ শঙ্কুটিকে যে সরলরেখাদ্বয়ে ছেদ করে তাদের সমীকরণগুলি নির্ণয় করুন। তাদের মধ্যবর্তী কোণটিও বের করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সমতলটির সমীকরণ $2x + y - z = 0$ .... (1)

এবং শঙ্কুটির সমীকরণ $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0.$ .... (2)

মনে করি প্রদত্ত সমতলটি ও প্রদত্ত শঙ্কুটিকে যে দুটি সরলরেখায় ছেদ করে তাদের যেকোন একটির সমীকরণ $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}.$ .... (3)

তাহলে $2l + m - n = 0$ .... (4)

এবং $4l^2 - m^2 + 3n^2 = 0$ .... (5)

(4) ও (5) থেকে n অপনয়ন করে পাই, $4l^2 - m^2 + 3(2l + m)^2 = 0$

বা, $16l^2 + 12lm + 2m^2 = 0$ বা, $8l^2 + 6lm + m^2 = 0$

বা, $(4l + m)(2l + m) = 0$

হয়, $2l + m = 0$ অথবা $4l + m = 0$.

$2l + m = 0$ হলে (4) নং সমীকরণ থেকে পাই, $n = 0$

সুতরাং $\frac{l}{1} = \frac{m}{2} = \frac{n}{0}$

$\therefore$ নির্ণেয় একটি সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$

যখন $4l + m = 0$ তখন (4) থেকে পাই, $2l - 4l - n = 0$

বা, $2l + n = 0$

$\therefore$ $4l + m = 0$ ও $2l + n = 0$ সম্পর্ক দুটি থেকে লিখতে পারা যায় যে,

$$\frac{l}{-1} = \frac{m}{4} = \frac{n}{2}$$

সুতরাং অপর সরলরেখাটির সমীকরণ

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$$

$\therefore$ সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$$

এবং $\frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$

সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণ যদি θ হয়, তাহলে

$$\cos\theta = \frac{1 + 8 + 0}{\sqrt{5}\ \sqrt{21}} = \frac{9}{\sqrt{105}} \quad \therefore\ \theta = \cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{105}}$$ (Answer)

উদাহরণ 3. প্রমাণ করুন যে, $ax^2 + 6y^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ শঙ্কুটির তিনটি পরস্পর লম্ব স্পর্শতল থাকবে যদি

$$bc + ca + ab = f^2 + g^2 + h^2$$

সমাধান : $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ শঙ্কুটির তিনটি পরস্পর লম্ব স্পর্শতল থাকবে যদি এটির পরিবর্তী শঙ্কুটি

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0$ এর তিনটি পরস্পর লম্ব জনক থাকে। এটি সম্ভব হবে যদি $A + B + C = 0$ .... (1)

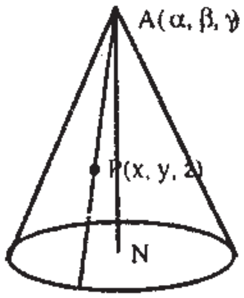
তখন $A = bc - f^2; B = ca - g^2, C = ab - h^2$.

(1) হতে পাই $ab + bc + ca - (f^2 + g^2 + h^2) = 0$.

বা, $ab + bc + ca = f^2 + g^2 + h^2$. (প্রমাণিত)

11.6 লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কু (Right circular cone)

যে চলমান সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (যাকে শীর্ষবিন্দু বলে) দিয়ে যায় এবং শীর্ষবিন্দুগামী একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সঙ্গে সর্বদা ধ্রুব কোণে নত হয় তা দ্বারা জাত (উদ্ভূত) তলকে একটি লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কু বলা হয়। ধ্রুব কোণটিকে বলা হয় শঙ্কুর অর্ধশীর্ষকোণ এবং নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে এটির অক্ষ বলা হয়।



চিত্র : 11.4

লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কুর সমীকরণ :

মনে করি শঙ্কুটির শীর্ষবিন্দু A এর স্থানাঙ্ক (α, β, γ) এবং এটির অক্ষ AN এর দিগানুপাত l, m, n. মনে করি $P(x, y, z)$ শঙ্কুর উপর অবস্থিত যেকোন একটি বিন্দু। তাহলে AP সরলরেখার দিগানুপাত $(x - \alpha), (y - \beta), (z - \gamma)$। যদি শঙ্কুটির অর্ধশীর্ষকোণ ϕ হয়, তাহলে ϕ হবে AP ও AN সরলরেখাদুটির মধ্যস্থকোণ। অর্থাৎ

$$\cos\phi = \frac{l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}}.$$

বা, $[l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)]^2 = (l^2 + m^2 + n^2).\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\}\cos^2\phi$ ... (1)

এখন শঙ্কুটির শীর্ষবিন্দু যদি মূলবিন্দু হয়, তাহলে $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ এবং শঙ্কুটির সমীকরণ হয়

$$(lx + my + nz)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2)\cos^2\phi \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

আবার শঙ্কুটির অক্ষ যদি z-অক্ষ হয়, তাহলে (2) সমীকরণে $l = 0, m = 0, n = 1$ বসিয়ে পাই,

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2\phi$$

বা, $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\phi$.

উদাহরণ 1. একটি লম্ব-বৃত্তীয় শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং এটির অক্ষ স্থানাঙ্ক অক্ষগুলির সঙ্গে সমান কোণে নত। শঙ্কুটি যদি আবার মূলবিন্দু 0 দিয়ে অঙ্কিত যে সরলরেখায় দিগানুপাত $1, -2, 2$ সেই সরলরেখাটি দিয়ে অতিক্রান্ত হয়, তবে এটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

মনে করি লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কুর অক্ষটি স্থানাঙ্ক অক্ষগুলির সহিত সমান কোণে নত। সুতরাং এটির দিগানুপাতগুলি 1, 1, 1 ধরা যেতে পারে। আবার যে সরলরেখাটির দিগানুপাত 1, – 2, 2 সেই সরলরেখাটি শঙ্কুটির একটি জনক। তাহলে যদি শঙ্কুটির অর্ধশীর্ষকোণ ϕ হয়, তবে,

$$\cos\phi = \frac{1.1 + 1.(-2) + 1.2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

$$\therefore \quad \phi = \cos^{-1}\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

মনে করি $P(x, y, z)$ শঙ্কুটির উপর অবস্থিত যেকোন একটি বিন্দু। তাহলে OP জনকটির দিগানুপাত $x - 0$, $y - 0$, $z - 0$ অর্থাৎ x, y, z. আবার যেহেতু OP জনক ও অক্ষের মধ্যস্থকোণ ϕ,

$$\therefore \quad \cos\phi = \frac{x.1 + y.1 + z.1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x + y + z}{\sqrt{3}.\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

বা, $\dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \dfrac{x + y + z}{\sqrt{3}.\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

বা, $x^2 + y^2 + z^2 = 9(x + y + z)^2$

বা, $8(x^2 + y^2 + z^2) + 18(xy + yz + zx) = 0$

বা, $4(x^2 + y^2 + z^2) + 9(xy + yz + zx) = 0.$ (Answer)

উদাহরণ 2. একটি লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুর অর্ধশীর্ষকোণ ϕ এবং এটি x-অক্ষ, y-অক্ষ ও $x = y = z$ সরলরেখা দিয়ে অতিক্রান্ত হয়। দেখান যে, $\sec^2\phi = 9 - 4\sqrt{3}$.

সমাধান ঃ ধরি লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুটির অক্ষের দিগানুপাতগুলি যথাক্রমে l, m, n। তাহলে এটির সমীকরণ হবে

$$(lx + my + nz)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2)\cos^2\phi \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

যেহেতু x-অক্ষ ও y-অক্ষ শঙ্কুটির উপর অবস্থিত, $(a, 0, 0)$ ও $(0, b, 0)$ বিন্দু দুইটি (1) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

অর্থাৎ $(la)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)a^2\cos^2\phi$

বা, $l^2 = (l^2 + m^2 + n^2)\cos^2\phi$ .... (2)

এবং $(mb)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)b^2\cos^2\phi$

বা, $m^2 = (l^2 + m^2 + n^2)\cos^2\phi$ .... (3)

(2) ও (3) থেকে পাই $l^2 = m^2 \;\therefore\; l = m$ .... (4)

আবার যেহেতু $x = y = z$ সরলরেখাটি শঙ্কুটির উপর অবস্থিত, $(\lambda, \lambda, \lambda)$ বিন্দুটি (1) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

অর্থাৎ $\lambda^2(l + m + n)^2 = 3\lambda^2(l^2 + m^2 + n^2)\cos^2\phi$

বা, $(2l + n)^2 = 3l^2$ [(2) ও (3) এর সাহায্যে]

$\therefore \quad 2l + n = \sqrt{3}l$ বা, $n = \left(\sqrt{3} - 2\right)l$

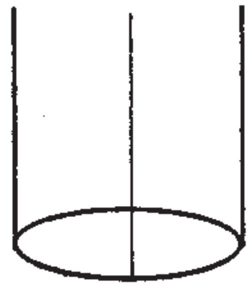
বা, $n^2 = \left(7 - 4\sqrt{3}\right)l^2$

n^2 এর মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$l^2 = [2l^2 + (7 - 4\sqrt{3})l^2]\cos^2\phi$$
$$= l^2(9 - 4\sqrt{3})\cos^2\phi$$
$$\therefore \sec^2\phi = 9 - 4\sqrt{3}.$$ (প্রমাণিত)

11.7 সংজ্ঞা ঃ বেলন (The cylinder)

একটি সরলরেখা যদি এমনভাবে চলমান হয় যে, তা সর্বদা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয় এবং এটি একটি প্রদত্ত বক্ররেখাকে (যা প্রদত্ত সরলরেখাটির সমান্তরাল নয়) ছেদ করে অথবা একটি তলকে স্পর্শ করে তাহলে ঐ সরলরেখা দ্বারা জাত (উদ্ভূত) তলকে একটি বেলন (cylinder) বলা হয়। প্রদত্ত রেখাটিকে ঐ বেলনটির নির্দেশক বক্ররেখা (gniding curve) বলা হয়। নির্দিষ্ট সরলরেখাটির সমান্তরাল যেকোন সরলরেখা যা নির্দেশক বক্ররেখাটিকে ছেদ করে বেলনটির একটি জনক।



চিত্র ঃ 11.5

কারিকারেখাগুলি (generating lines) বা জনকগুলি যদি নির্দিষ্ট সরলরেখাটি থেকে সর্বদা একটি ধ্রুবক দূরত্বে থাকে তাহলে উদ্ভূত তলটি একটি লম্ব বৃত্তীয় বেলন বলা হয়। নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে বেলনটির অক্ষ এবং ধ্রুবক দূরত্বটিকে তার ব্যাসার্ধ বলা হয়। আবার কারিকারেখাগুলি (যারা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল) যদি একটি প্রদত্ততলকে স্পর্শ করে তবে উদ্ভূত তলকে ঐ প্রদত্ততলের স্পর্শক বেলন বলা হয়।

11.8 বেলনের সমীকরণ

মনে করি বেলনটির নির্দেশক বক্ররেখার (guiding curve) সমীকরণ $f(x, y) = 0, z = 0$ .... (1)

এবং তার জনকগুলি $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ .... (2) সরলরেখার সমান্তরাল।

মনে করি (α, β, γ) বেলনের উপর অবস্থিত যেকোন একটি বিন্দু। তাহলে (α, β, γ) বিন্দুগামী জনকটির সমীকরণ $\dfrac{x-\alpha}{l} = \dfrac{y-\beta}{m} = \dfrac{z-\gamma}{n}$ .... (3)

জনকটির উপর যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha + lr, \beta + mr, \gamma + nr)$ বিন্দুটি যদি (1) বক্ররেখাটির উপর অবস্থিত হয় তাহলে

$$f(\alpha + l\gamma, \beta + m\gamma) = 0 \text{ এবং } \gamma + nr = 0.$$

উপরোক্ত সমীকরণদ্বয় থেকে r-কে অপনয়ন করে পাই $f\left(\alpha - \dfrac{l\gamma}{n}, y - \dfrac{m\gamma}{n}\right) = 0.$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে বেলনের উপর যে কোন বিন্দু $f\left(x - \dfrac{lz}{n}, y - \dfrac{mz}{n}\right) = 0$ .... (4)

সমীকরণকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ এটিই বেলনটির সমীকরণ।

এখন যদি জনকগুলি z-অক্ষের সমান্তরাল হয়, তাহলে $l = 0, m = 0, n = 1$ হয় এবং তখন বেলনটির সমীকরণ হয় $f(x, y) = 0$ .... (5)

[(4) নং সমীকরণ $l = 0, m = 0$ এবং $n = 1$ বসিয়ে পাই]

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে, $f(x, y) = 0$ আকারের প্রত্যেকটির সমীকরণ একটি বেলনকে সূচিত করে যা $f(x, y) = 0, z = 0$ বক্ররেখা দিয়ে অতিক্রম করে এবং যার জনকগুলি অক্ষের সমান্তরাল। অনুরূপে $\phi(y, z) = 0$ একটি বেলনকে সূচিত করে যা $\phi(y, z) = 0, x = 0$ বক্ররেখা দিয়ে অতিক্রম করে এবং যার জনকগুলি x-অক্ষের সমান্তরাল আবার $\psi(z, x) = 0$ একটি বেলন যার জনকগুলি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং বেলনটি $\psi(z, x) = 0, y = 0$ বক্ররেখা দিয়ে যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : **আমরা সহজেই বলতে পারি যে,** $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ **একটি বেলনের সমীকরণ যার জনকগুলি** z-**অক্ষের সমান্তরাল এবং যার নির্দেশক বক্ররেখা (guiding curve)** $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0, z = 0$ **এই বক্ররেখাটি বিশেষতঃ, যদি নির্দেশক বক্ররেখাটি** $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ **এই বৃত্তটি হয় তবে বেলনটির সমীকরণ হয়** $x^2 + y^2 = a^2$.

উদাহরণ 1. বেলনটির যে জনকগুলি $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3}$ **সরলরেখার সমান্তরাল এবং যা** $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ **উপবৃত্তটি দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।**

সমাধান : মনে করি (α, β, γ) বেলনটির উপর যেকোন একটি বিন্দু। তাহলে (α, β, γ) বিন্দুগামী জনকটির সমীকরণ হবে

$$\frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{-2} = \frac{z-\gamma}{3} \quad \text{......... (1)}$$

এই জনকটি $z = 0$ সমতলটির $\left(\alpha - \dfrac{\gamma}{3}, \beta + \dfrac{2\gamma}{3}, 0\right)$ বিন্দুতে মিলিত হয়। এখন জনকটি প্রদত্ত উপবৃত্তটিকে ছেদ করে, যদি $\left(\alpha - \dfrac{\gamma}{3}, \beta + \dfrac{2\gamma}{3}, 0\right)$ বিন্দুটি উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হয় অর্থাৎ যদি

$$\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right)^2 + 2\left(\beta + \frac{2\gamma}{3}\right)^2 = 0 \text{ হয়।} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

সুতরাং বেলনের উপর যেকোন বিন্দু (α, β, γ)

$$\left(\alpha - \frac{z}{3}\right)^2 + 2\left(y + \frac{2z}{3}\right)^2 = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

সমীকরণটি সিদ্ধ করে অর্থাৎ এটিই বেলনের সমীকরণ। সমীকরণটিকে সরল করে পাই

$$(3x - z)^2 + 2(3y + 2z)^2 = 9$$

বা, $9x^2 + 18y^2 + 9z^2 - 6zx + 24yz = 9$

বা, $3x^2 + 6y^2 + 3z^2 + 8yz - 2zx - 3 = 0$

এটিই নির্ণেয় সমীকরণ। (Answer)

উদাহরণ 2. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ গোলকটির স্পর্শক বেলনের সমীকরণ নির্ণয় করুন যেখানে বেলনটির জনকগুলি $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ সরলরেখাটির সমান্তরাল।

সমাধান ঃ (α, β, γ) বেলনটির উপর যেকোন বিন্দু, (α, β, γ) বিন্দুগামী জনকটির সমীকরণ

$$\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

জনকটির উপর যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha + \lambda l, \beta + \lambda m, \gamma + \lambda n)$। বিন্দুটি $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ...... (2) গোলকটির উপর অবস্থিত হবে যদি

$$(\alpha + \lambda l)^2 + (\beta + \lambda m)^2 + (\gamma + \lambda n)^2 = a^2$$

বা, $(l^2 + m^2 + n^2)\lambda^2 + 2(\alpha l + \beta m + \gamma n)\lambda + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2) = 0$ .... (3) হবে।

(1) নং সরলরেখাটি (2) নং গোলকটিকে স্পর্শকরে যদি তাদের ছেদবিন্দুদ্বয় সমাপতিত হয় অর্থাৎ যদি (3) সমীকরণটির দুইটি বীজ সমান হয়। সেক্ষেত্রে আমরা পাই

$$4(\alpha l + \beta m + \gamma n)^2 = 4(l^2 + m^2 + n^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2)$$

বা, $(\alpha l + \beta m + \gamma n)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2)$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, বেলনের উপর যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$(lm + my + nz)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

অর্থাৎ এটিই স্পর্শক বেলনটির সমীকরণ। (Answer)

উদাহরণ 3. যে বেলনটির কারিকারেখাগুলি z-অক্ষের সমান্তরাল এবং নির্দেশক বক্ররেখাটি (guiding curve) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + y + z = 4$ বক্ররেখাটি তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি (α, β, γ) বেলনটির উপর যেকোন একটি বিন্দু তাহলে (α, β, γ) বিন্দুগামী জনকটির সমীকরণ

$$\frac{x-\alpha}{0}=\frac{y-\beta}{0}=\frac{z-\gamma}{1} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

জনকটির উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, \beta, \gamma+r)$. বিন্দুটি প্রদত্ত বক্ররেখাটির উপর থাকলে

$$\alpha^2+\beta^2+(\gamma+r)^2=4 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

এবং $\alpha+\beta+\gamma+r=4$ .... (3) সিদ্ধ হয়।

(2) ও (3) থেকে r-কে অপনয়ন করে পাই

$$\alpha^2+\beta^2+(\gamma+4-\alpha-\beta-r)^2=4$$

বা, $\alpha^2+\beta^2+16+\alpha^2+\beta^2-8\alpha-8\beta=4$

বা, $2\alpha^2+2\beta^2-8\alpha-8\beta+12=0$

বা, $\alpha^2+\beta^2-4\alpha-4\beta+6=r$

বেলনটির উপর যে কোন বিন্দু

$x^2+y^2-4x-4y+6=0$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ এটিই বেলনটির সমীকরণ। (Answer)

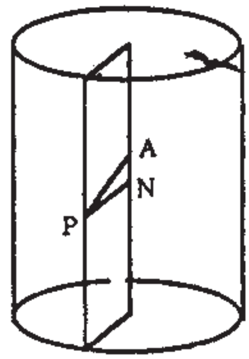
11.9 লম্ববৃত্তীয় বেলনের সমীকরণ

মনে করি লম্ববৃত্তীয় বেলনটির ব্যাসার্ধ r এবং অক্ষের সমীকরণ

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

সুতরাং (α, β, γ) অক্ষের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু।

মনে করি $P(x', y', z')$ বেলনটির উপর যেকোন একটি বিন্দু। (α, β, γ) বিন্দুটিকে যদি A দ্বারা সূচিত করি তাহলে $AP^2=(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-r)^2$



চিত্র ঃ 11.6

P বিন্দু থেকে লম্ব দূরত্বকে যদি PN দ্বারা সূচিত করি তাহলে আমরা লিখতে পারি $PN^2=r^2$

আবার AP রেখাংশের (1) সরলরেখাটির উপর লম্ব অভিক্ষেপ AN।

$$\therefore \quad AN^2 = \frac{\{l(x'-\alpha) + m(y'-\beta) + n(z'-n)\}^2}{l^2 + m^2 + n^2}$$

এখন $AN^2 + PN^2 = AP^2$

বা, $AP^2 - AN^2 = PN^2$

$$\therefore \quad (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + (z'-\gamma)^2 - \frac{\{l(x'-\alpha) + m(y'-\beta) + n(z'-\gamma)\}^2}{l^2 + m^2 + n^2} = r^2 \quad \ldots\ldots (2)$$

(x', y', z') বিন্দুটির সঞ্চারপথই হবে নির্ণেয় লম্ববৃত্তীয় বেলনের সমীকরণ, সুতরাং বেলনটির সমীকরণ

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \frac{\{l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)\}^2}{l^2 + m^2 + n^2} = r^2$$

বা, $$(l^2 + m^2 + n^2)\,[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] - \{l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)\}^2$$
$$- (l^2 + m^2 + n^2)r^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

অনুসিদ্ধান্ত : (3) নং সমীকরণে $l = 0, m = 0, n = 1$ এবং $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ বসিয়ে পাই

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 - r^2 = 0 \quad \text{বা,} \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

সুতরাং যে লম্ববৃত্তীয় বেলনের অক্ষটি x-অক্ষ এবং যার ব্যাসার্ধ r সেই বেলনের সমীকরণ $x^2 + y^2 = r^2$

উদাহরণ : যে লম্ববৃত্তীয় বেলনটি $(3, -1, 1)$ বিন্দুগামী এবং যার অক্ষ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{1}$ সরলরেখাটি তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি $P(x, y, z)$ লম্ববৃত্তীয় বেলনটির উপর যেকোন একটি বিন্দু। তাহলে P বিন্দু থেকে বেলনটির অক্ষের লম্ব দূরত্ব PN দ্বারা সূচিত করলে আমরা পাই

$$PN^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 - \frac{\{2(x-1) - (y+3) + (z-2)\}^2}{4 + 1 + 1}$$

বা, $$PN^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2n + 6y - 4z + 14 - \frac{1}{6}(2x - y + z - 7)^2$$
$$= \frac{1}{6}[6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 12x + 36y - 24z + 84$$
$$- (4x^2 + y^2 + z^2 + 49 - 4xy - 2yz + 4zx - 28x + 14y - 14z)]$$
$$= \frac{1}{6}[2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 2yz - 4zx + 16x + 22y - 10z + 35]$$

যদি বেলনটির ব্যাসার্ধ r হয় তাহলে $PN^2 = r^2$

অর্থাৎ $\frac{1}{6}(2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 2yz - 4zx + 16x + 22y - 10z + 35) = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

আবার $(3, -1, 1)$ বেলনটির উপর অবস্থিত একটি বিন্দু। সুতরাং (1) নং সমীকরণে $x = 3, y = -1, z = 1$ বসিয়ে পাই

$$\frac{1}{6}(18 + 5 + 5 - 12 - 2 - 12 + 48 - 22 - 10 + 35) = r^2$$

বা, $\frac{1}{6}(111 - 58) = r^2$, বা, $r^2 = \frac{53}{6}$

সমীকরণ (1)-এ $r^2 = \frac{53}{6}$ বসিয়ে পাই,

$$2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 2yz - 4zx + 16x + 22y - 10z + 35 = 53$$

বা, $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 2yz - 4zx + 16x + 22y - 10z - 18 = 0$

এটিই নির্ণেয় সমীকরণ। (Answer)

11.10 অনুশীলনী

(1) তিনটি ধনাত্মক অক্ষ ধারণকারী লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ শঙ্কুর অক্ষটি প্রত্যেক স্থানাঙ্ক অক্ষের সাথে পরস্পর সমান কোণে নত]

[উত্তর : $xy + yz + zx = 0$]

(2) যে শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু এবং ভূমি $x = a$, $y^2 + z^2 = b^2$ বৃত্ত তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। এবার দেখান যে, XOY সমতলের সাথে সমান্তরাল কোন তল শঙ্কুটিকে যেভাবে ছেদ করে তা পরাবৃত্তাকার।

[সংকেতঃ $y^2 + z^2 = b^2$-কে $x = a$ এর সাহায্যে সমসত্ত্ব (homogeneous) আকারে লিখুন ......]

[উত্তর : $a^2(y^2 + z^2) = b^2x^2$]

(3) (1, 2, 3) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট যে শঙ্কুর নির্ণায়ক বক্ররেখা (guiding curve) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x + y + z = 1$ বৃত্ত, তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ (1, 2, 3) বিন্দুগামী কারিকারেখা $\frac{x-1}{l} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{n}$ ধরে নিন। এটি $x + y + z = 1$-কে ছেদ করে ...] [Ans. $(y + z - 4x - 1)^2 + (2z + 2x - 3y - 2)^2 + (3x + 3y - 2z - 3)^2 = 9(x + y + z - 6)^2$]

(4) মূলবিন্দু শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট একটি শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করুন যেটি $lx + my + nz = p$ সমতল এবং $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ বক্রতলের (surface) ছেদরেখাগামী হবে।

[সংকেতঃ (2) নং সমস্যার মত করে ভাবুন] [Ans. $p^2(ax^2 + by^2 + cz^2) = (lx + my + nz)^2$]

(5) প্রমাণ করুন যে মূলবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত যে সরলরেখাগুলি (3, 0, 0), (0, 2, 0) ও (0, 0, 1) বিন্দুগামী বৃত্তকে ছেদ করে সেই সরলরেখাগুলি দ্বারা জাত শঙ্কুটি $13xy + 15yz + 20zx = 0$

[সংকেতঃ বৃত্তের সমীকরণটি নির্ণয় করে, কারিকারেখা সংক্রান্ত তথ্যাদি দ্রষ্টব্য।]

(6) $5yz - 8zx - 3xy = 0$ শঙ্কুটির তিনটি পরস্পর লম্ব কারিকারেখার (generators) একটির সমীকরণ $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ হলে অপর দুটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। $\left[\text{Ans. } \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \;\&\; \frac{x}{5} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{1}\right]$

[সংকেতঃ অন্য দুটি কারিকারেখা শঙ্কু ও তার শীর্ষ বিন্দুগামী সমতলের ছেদরেখা হবে ......]

(7) দেখান যে $ux + vy + wz = 0$ সমতলটি $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ শঙ্কুটিকে যে সরলরেখা দুইটিতে ছেদ করে তারা পরস্পরের লম্ব হবে যদি $(b + c)u^2 + (c + a)v^2 + (a + b)w^2 = 0$ হয় এবং সমান্তরাল হবে যদি $bcu^2 + cav^2 + abw^2 = 0$ হয়।

[সংকেতঃ সরলরেখাদ্বয়ের দিক্‌নির্দেশক কোসাইন নির্ণয় করে লম্ব হবার শর্ত প্রযোজ্য]

(8) $7x + 4y + z = 0$ সমতলটি $35x^2 - 8y^2 - 3z^2 = 0$ শঙ্কুটিকে যে দুটি সরলরেখায় ছেদ করে তাদের মধ্যের কোণ বের করুন।

[সংকেতঃ সমস্যা 7 দ্রষ্টব্য] [উত্তর : $90°$]

(9) একটি লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে, অক্ষটি y-অক্ষ এবং অর্ধশীর্ষ কোণ $60°$, শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। [Ans. $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$]

[সংকেতঃ শঙ্কুর ভূমি zx তলে আছে। দুটি কারিকারেখার মধ্যবর্তী কোণ $60°$]

(10) যে বেলনটির জনকগুলি (বা কারিকারেখা) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{7}{5}$ সরলরেখাটির সমান্তরাল এবং যা $z = 0$, $3x^2 + 7y^2 = 12$ কনিককে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ বেলন ও তার কারিকারেখা, সরলরেখার সমান্তরাল হবার ধর্ম দ্রষ্টব্য]

[উত্তর : $3(5x - 2z)^2 + 7(5y - 3z)^2 = 300$]

(11) যে বেলনের কারিকারেখা (generators) $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ এর সাথে সমান্তরাল এবং যার পরিচালনকারী (guiding) বক্ররেখা $x^2 + y^2 = 9$, $z = 1$ তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[উত্তর : $9x^2 + 9y^2 + 5z^2 + 6xz - 12yz - 6x + 12y - 10z - 76 = 0$]

[সংকেতঃ $\frac{x - x'}{-1} = \frac{y - y'}{2} = \frac{z - z'}{3}$ একটি সরলরেখা নিন যা $x^2 + y^2 = 9$, $z = 1$-কে ছেদ করে]

(12) দেখান যে লম্ববৃত্তাকার চোঙ (বেলন) যার অক্ষটি $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{-1} = \frac{z - 2}{1}$ এবং $(3, -1, 1)$ বিন্দুগামী তার সমীকরণ হবে $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 2yz - 4xz + 16x + 22y - 10z = 18$

[সংকেতঃ সমস্যা (11)-র মত করে ভাবুন]

11.11 সারাংশ

এই অধ্যায়ে শঙ্কু ও বেলনের সমীকরণ নির্ধারণ করা হয়েছে। শঙ্কুর সমীকরণের বিশ্লেষণ করা হয়েছে। একটি সরলরেখা ও একটি তলের সঙ্গে শঙ্কু ও বেলনের যথানুসারে সম্পর্ক নির্ধারণ করা হয়েছে, এই সম্পর্ক বিশ্লেষণ করা হয়েছে। শঙ্কুর ক্ষেত্রে কারিকারেখা বা জনকরেখা তিনটি লম্ব সরলরেখা হবার শর্তসমূহ নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। লম্ববৃত্তীয় শঙ্কু ও লম্ববৃত্তীয় বেলনের সমীকরণ নির্ণয় করা হয়েছে। বিষয়টি আরো রপ্ত করার জন্য বেশ কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হয়েছে। কয়েকটি অনুশীলনী দেওয়া হয়েছে।

11.12 সহায়ক পাঠ

(1) J. G. Chakravorty & P. R. Ghosh : Advanced analytical Geometry.

(U. N. Dhar & Sons, Kolkata, 1995)

(2) ডঃ শ্রীপতিরঞ্জন চৌধুরী : ভেক্টর বীজগণিত ও ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি,

(পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ)

(3) M. C. Chaki : Analytical Co-ordinate Geometry.

একক 12 ❑ দ্বিমাত্রিক তল (Quadric surface)

গঠন

12.0 প্রস্তাবনা, উদ্দেশ্য ও বিষয় পরিচিতি

পূর্বেকার অধ্যায় সমূহে মূলতঃ কিছু বিশেষ বিশেষ ঘনবস্তু বা বক্রতলের সমীকরণ নির্ধারণ করা হয়েছে। এইসব সমীকরণ বিচার বিশ্লেষণ করে তাদের বিভিন্ন ধর্মাবলী ও বৈশিষ্ট নিরুপণ করা গেছে। কিন্তু ঘনবস্তু শুধুমাত্র সরলরেখা বা বৃত্তদ্বারা সৃষ্ট নয়। আরো নানান প্রকারের হতে পারে। ত্রিচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ আরো যে যে বক্রতল সমূহ দেয় সেগুলো বিষয়ে পরিচিত হওয়া দরকার।

যে বক্রতলসমূহ এই অধ্যায়ে আলোচিত হবে তাহল বিভিন্ন প্রকারের উপবৃত্তক, অধিবৃত্তক ও পরাবৃত্তক। দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে পঠিত উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত ও পরাবৃত্তকে ত্রিমাত্রিক কাঠামোতে চিন্তা করলে এইসব দ্বিমাত্রিক তলসমূহ পাওয়া যাবে। এইসব বিষয় অধিগত হলে ত্রিমাত্রিকতলসমূহ সম্বন্ধে বিশেষ পারদর্শিতা অর্জন করা যাবে।

এই অধ্যায়ে উপবৃত্তক, অধিবৃত্তক ও পরাবৃত্তক প্রামান্য সমীকরণ নির্ণয় করা হয়েছে। এদের বিশেষ বিশেষ প্রতিরূপ বিষয়ে ধারণা দেওয়া হয়েছে।

12.1 দ্বিমাত্রিক তল

একটি চলমান বিন্দুর এক বা একাধিক কারেন্ট স্থানাঙ্ক যুক্ত (Current coordinates) যেকোন সমীকরণ একটি তল বা একটি তল তন্ত্রকে সূচিত করে যা ঐ চলমান বিন্দুটির সঞ্চারপথ।

আমরা জানি যে, x, y, z-এর 1ম ডিগ্রীর সাধারণ সমীকরণ একটি সমতলকে সূচিত করে। আবার, x, y, z-এর 2য় ডিগ্রীর সাধারণ সমীকরণ অর্থাৎ $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$

$$\ldots\ldots\ldots (1)$$

একটি তলকে সূচিত করে যাকে বলা হয় একটি কনিকয়েড্ (conicoid) বা দ্বিমাত্রিক তল (Quadric surface)। $a, b, c, f, g, h, u, v, w, d$ এই ধ্রুবকগুলির বিভিন্ন মানের জন্য (1) নং সমীকরণটি বিভিন্ন প্রকারের তল যথা শঙ্কু, বেলন, উপবৃত্তক, পরাবৃত্তক, অধিবৃত্তক, গোলক প্রভৃতি সূচিত করে। এদের মধ্যে গোলক, শঙ্কু, বেলন এই তলগুলি নিয়ে আমরা পূর্বেই আলোচনা করেছি। এখন আমরা অন্যান্য তলগুলি আলোচনা করব।

12.2 সকেন্দ্র কনিকয়েড্ (Central conicoid)

স্থানাঙ্ক অক্ষগুলির উপযুক্ত পরিবর্তন দ্বারা উপরোক্ত দ্বিতীয় ডিগ্রীর সাধারণ সমীকরণকে কিছু কিছু প্রমাণ আকারে (standard form) রূপান্তরিত করা যায়। এই প্রমাণ আকারগুলির মধ্যে নিম্নলিখিত আকারের সমীকরণগুলির যেকোন একটির সঞ্চারপথকেই একটি সকেন্দ্র কনিকয়েড্ বলে।

(i) উপবৃত্তক (Ellipsoid) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(ii) একপত্রী পরাবৃত্তক (Hyperboloid of one sheet) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(iii) দ্বিপত্রী পরাবৃত্তক (Hyperboloid of two sheets) :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$A(\alpha, \beta, \gamma)$ যদি এই তলগুলির যেকোন একটির উপর অবস্থিত একটি বিন্দু হয়, তাহলে $A'(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ বিন্দুটিও এটির উপর অবস্থিত হবে এবং মূলবিন্দু AA' জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। তলগুলির মূলবিন্দুগামী জ্যাগুলিকে মূলবিন্দু সমদ্বিখণ্ডিত করে। মূলবিন্দুটিই একমাত্র বিন্দু যার এই ধর্ম আছে। মূলবিন্দুটিকে এই তলগুলির কেন্দ্র বলা হয় এবং তলগুলিকে সকেন্দ্র কনিকয়েড্ বলা হয়।

আবার (α, β, γ) বিন্দুটি যদি এইরূপ একটি তলের সমীকরণকে সিদ্ধ করে তবে $(\alpha, \beta, -\gamma)$ বিন্দুটিও এটিকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ XOY সমতলটি $Z'OZ$ সরলরেখার (অর্থাৎ z-অক্ষের) সমান্তরাল সমস্ত জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। যেহেতু $Z'OZ$ সরলরেখাটি তলগুলির একটি ব্যাস এবং XOY সমতলটি $Z'OZ$ সরলরেখার

সমান্তরাল একটি জ্যাতন্ত্রকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, $Z'OZ$ সমতলটিকে একটি ব্যাসীয় তল (diametral plane) বলা হয়। অনুরূপে YOZ, ZOX ব্যাসীয় তলদ্বয় যথাক্রমে $X'OX$ ও $Y'OY$ সমান্তরাল সমস্ত জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। অর্থাৎ এই তিনটি ব্যাসীয়তল এইরূপ যে, এগুলির যেকোন একটি অপর দুইটির ছেদরেখার সমান্তরাল সমস্ত জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং এগুলি কে অনুবন্ধী ব্যাসীয়তল বলা হয়। আবার $X'OX$, $Y'OY$, $Z'OZ$ ব্যাসগুলি এইরূপ যে, এদের যেকোন দুইটির মধ্যদিয়ে অতিক্রান্ত সমতলটি অপরটির সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং এদের অনুবন্ধী ব্যাস বলা হয়। আবার যদি স্থানাঙ্ক অক্ষগুলি সমকোণী হয় তবে, YOZ, ZOX, XOY ব্যাসীয়তলগুলি যে জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাদের সঙ্গে সমকোণে থাকে। সেক্ষেত্রে ব্যাসীয়তলগুলিকে মুখ্যতল (Principal planes) বলা হয়। এই মুখ্যতলগুলির ছেদরেখাগুলিকে প্রধান অক্ষ বা মুখ্যঅক্ষ (Principal axes) বলা হয়।

12.3 উপবৃত্তক

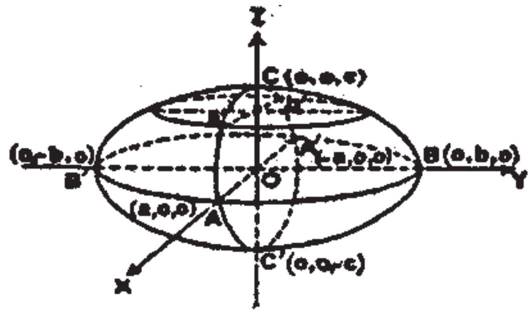
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(i) মূলবিন্দুগামী সমস্ত জ্যাই মূলবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

(ii) সমীকরণটিতে x, y, z এর কেবলমাত্র যুগ্মঘাত আছে। সুতরাং তলটি xy, yz ও zx স্থানাঙ্কতলগুলির সাপেক্ষে প্রতিসম (symmetrical)।

(iii) তলটি x-অক্ষকে $(-a, 0, 0)$ ও $(a, 0, 0)$ বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে (উপবৃত্তকের সমীকরণে $y = 0$, $z = 0$ বসিয়ে পাই)। অনুরূপে আমরা বলতে পারি যে, তলটি y-অক্ষকে $(-b, 0, 0)$ ও $(b, 0, 0)$ বিন্দু দুইটিতে এবং z-অক্ষকে $(-c, 0, 0)$ ও $(c, 0, 0)$ বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে। সুতরাং স্থানাঙ্ক অক্ষগুলির উপর তলটির রেখা-খণ্ডিতাংশগুলি যথাক্রমে $2a$, $2b$ ও $2c$। এই রেখা-খণ্ডিতাংশগুলিকে বলা হয় তলটির অক্ষগুলির দৈর্ঘ্য। যদি $a > b > c$ হয় তবে পরাক্ষের দৈর্ঘ্য (length of the major axis) হয় $2a$, মধ্যাক্ষের দৈর্ঘ্য (length of mean axis) হয় $2b$ এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য (length of the minor axis) হয় $2c$।

(iv) $z = k$ পরিবর্তনশীল সমতলটি তলটিকে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$, $z = k$ বক্ররেখাটিতে ছেদ করে। এটি একটি উপবৃত্ত। এই উপবৃত্তটি বাস্তব হয় যদি $1-\frac{k^2}{c^2}$ ধনাত্মক হয় অর্থাৎ $|k| < c$ $(-c < k < c)$ হয়। যখন $|k| > c$ হয় তখন উপবৃত্তটি কাল্পনিক হয়। অর্থাৎ আমরা বলতে পারি যে, তলটির কোন অংশই $z = -c$ এবং $z = c$ সমতল দুইটির বাইরে অবস্থান করবে না। আমরা এও বলতে পারি যে, (1) নং সমীকরণটি একটি তলকে সূচিত করে যাহা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$, $z = k$ উপবৃত্তটি দ্বারা উদ্ভূত হয় যেখানে উপবৃত্তটির কেন্দ্র $Z'OZ$ বরাবর চলমান হয় এবং $(0, 0, -c)$ ও $(0, 0, c)$ বিন্দুদুইটির মধ্যবর্তী প্রত্যেকটি বিন্দু দিয়া অতিক্রম করে। অনুরূপে আমরা বলতে পারি যে, তলটির কোন অংশ $x = \pm a$ এবং $y = \pm b$ সমতলগুলির বাহিরে অবস্থান করবে না। সুতরাং তলটি একটি বদ্ধতল যার আকার নীচের চিত্রে দেখানো হয়েছে।



চিত্র : 12.1

12.4 একপত্রী পরাবৃত্তক

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(i) যে জ্যাগুলি মূলবিন্দুগামী তারা সকলেই মূলবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় অর্থাৎ মূলবিন্দু তলটির কেন্দ্র।

(ii) তলটি xy, yz ও zx স্থানাঙ্কতলগুলির সাপেক্ষে প্রতিসম।

(iii) তলটি x-অক্ষতে $(-a, 0, 0)$ ও $(a, 0, 0)$ বিন্দু দুইটিতে মিলিত হয় এবং y-অক্ষতে $(0, -b, 0)$ ও $(0, b, 0)$ বিন্দু দুইটিতে মিলিত হয়। কিন্তু তলটি z-অক্ষতে কোন বাস্তব বিন্দুতে মিলিত হয় না।

(iv) $z = k$ পরিবর্তনশীল সমতলটি তলটিকে

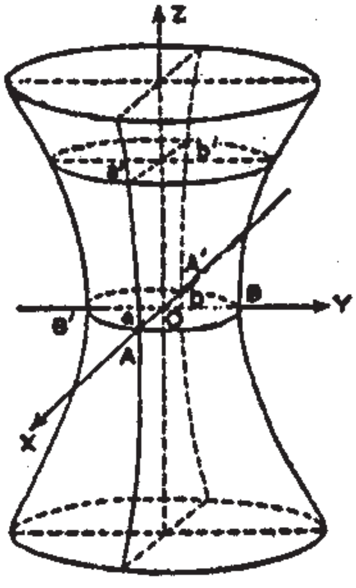
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2},\ z=k$$

উপবৃত্তে ছেদ করে। এই উপবৃত্তটি k-এর সকল মানের জন্য বাস্তব এবং $|k|$এর মান বাড়ার সঙ্গে আকারে বড় হয়। আমরা বলতে পারি যে তলটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2},\ z=k$ উপবৃত্তটি দ্বারা উদ্ভুত হয় যেখানে kএর মান $-\infty$ থেকে $+\infty$ পর্যন্ত পরিবর্তন হয়। আমরা আরও দেখি যে, $x = k$ এবং $y = k$ পরিবর্তনশীল সমতল দুইটির দ্বারা তলটির ছেদ যথাক্রমে

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2},\ z=k$$

এবং $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2},\ y=k$ পরিবর্তনশীল পরাবৃত্তদ্বয়।

তলটির আকার পাশের চিত্রে (চিত্র 12.2) দেখানো হয়েছে।



চিত্র : 12.2

12.5 দ্বিপত্রী পরাবৃত্তক

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(i) মূলবিন্দুটি তলটির কেন্দ্র এবং স্থানাঙ্কতলগুলির সাপেক্ষে তলটি প্রতিসম।

(ii) তলটি x-অক্ষকে $(a, 0, 0)$ ও $(-a, 0, 0)$ বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে। কিন্তু এটি y ও z অক্ষগুলিতে কাল্পনিক বিন্দুতে মিলিত হয় অর্থাৎ এটি y-অক্ষ ও z-অক্ষতে মিলিত হয় না।

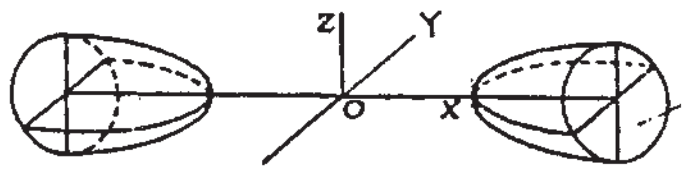
(iii) $x = k$ পরিবর্তনশীল সমতলটি তলটিকে $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}-1$, $x = k$ পরিবর্তনশীল উপবৃত্তটিতে ছেদ করে। এই উপবৃত্তটি বাস্তব হয় যখন $|k| > a$ (অর্থাৎ $k > a$ এবং $k < -a$) এবং $|k|$ এর মান বাড়ার সঙ্গে এটি আকারে বড় হতে থাকে। সুতরাং তলটির কোন অংশে $x = -a$ ও $x = a$ সমতলদুটির মধ্যে থাকে না।

আবার $y = k$ এবং $z = k$ পরিবর্তনশীল সমতল দুটি তলটিকে যথাক্রমে

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{b^2},\ y=k$$

এবং $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2},\ z=k$$

পরিবর্তনশীল পরাবৃত্ত দুইটিতে ছেদ করে। তলটির আকার নীচের চিত্রে দেখানো হয়েছে।



চিত্র : 12.3

12.6 সকেন্দ্র কনিকয়েডের সাধারণ সমীকরণ

উপবৃত্তক, একপত্রী পরাবৃত্তক বা দ্বিপত্রী পরাবৃত্তক এই তলগুলি সকেন্দ্র কনিকয়েড্ বা সকেন্দ্র দ্বিমাত্রিক তল নামে পরিচিত এবং এদের তিনটি মুখ্যতল, তিনটি প্রধান অক্ষ এবং একটি কেন্দ্র আছে। এই তলগুলির সমীকরণকে $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ আকারে প্রকাশ করা যায়। উপবৃত্তকের ক্ষেত্রে a, b, c-এর সকলেই ধনাত্মক। একপত্রী পরাবৃত্তকের ক্ষেত্রে এদের যেকোন দুইটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক এবং দ্বিপত্রী পরাবৃত্তকের ক্ষেত্রে যেকোন দুইটি ঋনাত্মক ও অপরটি ধনাত্মক। আমরা এখন $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ .... (1) আকারের দ্বিতীয় ডিগ্রীর সাধারণ সমীকরণটি নিই।

এই সমীকরণটিকে আমরা নিম্নোক্ত আকারে প্রকাশ করতে পারি

$$a\left(x+\frac{u}{a}\right)^2+b\left(y+\frac{v}{b}\right)^2+c\left(z+\frac{w}{c}\right)^2=\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}-d$$

এখন $x+\frac{u}{a}=X,\ y+\frac{u}{b}=Y,\ z+\frac{w}{c}=Z$ এবং $\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}-d=k$ বসিয়ে পাই,

$$\frac{a}{k}X^2+\frac{b}{k}Y^2+\frac{c}{k}Z^2=1 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

এটি একটি সকেন্দ্র কনিকয়েডকে সূচিত করে যার প্রধান অক্ষগুলি

$$Y=O=Z,\ Z=O=X,\ X=O=Y.$$

সুতরাং (1) নং সমীকরণটি একটি সকেন্দ্র কনিকয়েডকে সূচিত করে যার প্রধান অক্ষগুলি $y+\frac{v}{b}=0=z+\frac{w}{c},\ z+\frac{w}{c}=0=x+\frac{u}{a},\ x+\frac{u}{a}=0=y+\frac{v}{b}$,

এটির মুখ্যতলগুলি $x+\frac{u}{a}=0,\ y+\frac{v}{b}=0,\ z+\frac{w}{c}=0$ এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{u}{a},-\frac{v}{b},-\frac{w}{c}\right)$

উদাহরণ 1. দেখান যে, $x-1=0$ সমতলটি $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ উপবৃত্তকটিকে একটি উপবৃত্তে ছেদ করে। এই উপবৃত্তটির অক্ষার্ধগুলি এবং শীর্ষবিন্দুগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান : $z-1=0$ সমতলদ্বারা প্রদত্ত উপবৃত্তকের ছেদ

$$\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{12}=\frac{2}{4},\ z=1$$

বা, $$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1,\ z=1$$

বক্রতলটি। এটি একটি উপবৃত্ত যার অক্ষার্ধগুলি যথাক্রমে 6 ও 3 এখন $z=1$ সমতলে এই উপবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্কগুলি $(\pm 6, 0), (0, \pm 3)$ অর্থাৎ উপবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্কগুলি $(6, 0, 1), (-6, 0, 1), (0, 3, 1), (0, -3, 1)$. **(Answer)**

উদাহরণ 2. $2x^2+5y^2+3z^2-4x+20y-6z=5$ সমীকরণটি কি ধরনের কনিকয়েড্ তা নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণটি $2x^2+5y^2+3z^2-4x+20y-6z=5 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$

এই সমীকরণটিকে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায় $2(x-1)^2+5(y+2)^2+3(z-1)^2=30$

বা, $$\frac{(x-1)^2}{15}+\frac{(y+2)^2}{6}+\frac{(z-1)^2}{10}=1 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

এখন মূলবিন্দুটিকে $(1, -2, 1)$ বিন্দুটিকে পরিবর্তন করলে (2) সমীকরণটি

$$\frac{x^2}{(\sqrt{15})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{6})^2}+\frac{z^2}{(\sqrt{10})^2}=1$$

আকারে লেখা যায়। এটি একটি উপবৃত্তক যার কেন্দ্র নতুন মূলবিন্দুতে এবং যার অক্ষার্ধগুলি যথাক্রমে $\sqrt{15}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণটি একটি উপবৃত্তক সূচিত করে যার কেন্দ্র $(1, -2, 1)$ বিন্দুতে, প্রধান অক্ষগুলি স্থানাঙ্ক অক্ষগুলির সমান্তরাল এবং মুখ্যতলগুলি যথাক্রমে $x = 1$, $y = -2$ এবং $z = 1$ (Answer)

উদাহরণ 3. যে উপবৃত্তকটির কেন্দ্র $(-3, 2, -1)$ বিন্দুতে, প্রধান অক্ষগুলি স্থানাঙ্ক অক্ষগুলির সমান্তরাল ও অক্ষগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 3 তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $(-3, 2, -1)$ বিন্দুগামী সমকোণী স্থানাঙ্ক অক্ষগোষ্ঠীর সাপেক্ষে উপবৃত্তকটির সমীকরণ হয়

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$$

বা, $4x^2 + y^2 + \frac{4}{9}z^2 = 1$

এখন, $x = X - 3$, $y = Y + 2$, $z = Z - 1$,

যেখানে (x, y, z) হয় মূলস্থানাঙ্ক অক্ষগুলির সাপেক্ষে (X, Y, Z) বিন্দুর স্থানাঙ্ক।

অর্থাৎ $X = x + 3$, $Y = y - z$, $Z = z + 1$.

(1) নং সমীকরণে X, Y, Z -এর পরিবর্তে যথাক্রমে $x + 3$, $y - 2$, $z + 1$ বসিয়ে পাই,

$$4(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + \frac{4}{9}(x + 1)^2 = 1.$$

এটিই নির্ণেয় সমীকরণ। (Answer)

উদাহরণ 4. $\frac{x-6}{3} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-2}{4}$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ উপবৃত্তকটিকে ছেদ করে কিনা তা নির্ণয় করুন এবং যদি এটি ছেদ করে তাহলে ছেদ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সরলরেখাটির উপর অবস্থিত যেকোন বিন্দুর স্থানাঙ্ককে $(3\lambda + 6, -6\lambda - 2, 4\lambda + 2)$ আকারে প্রকাশ করা যেতে পারে, যেখানে λ হয় একটি প্রচল। এই বিন্দুটি উপবৃত্তকটির উপর অবস্থিত হয় যদি

$$\frac{(3\lambda + 6)^2}{81} + \frac{(-6\lambda - 2)^2}{36} + \frac{(4\lambda + 2)^2}{9} = 1 \text{ হয়।}$$

উপরোক্ত সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\lambda^2(36 + 324 + 576) + \lambda(144 + 216 + 576) + 144 + 36 + 144 - 324 = 0$$

বা, $936(\lambda^2 + \lambda) = 0$

বা, $\lambda(\lambda + 1) = 0 \quad \therefore \lambda = 0, \lambda = -1$

অর্থাৎ সরলরেখাটি উপবৃত্তকটিকে ছেদ করে।

যখন $\lambda = 0$ হয়, তখন $x = 6$, $y = -2$, $z = 2$

যখন $\lambda = 1$, হয়, তখন $x = 3$, $y = 4$, $z = -2$

$\therefore$ ছেদ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(6, -2, 2)$ ও $(3, 4, -2)$. (Answer)

উদাহরণ 5. দেখান যে, উপবৃত্তকের উপর কোন সরলরেখা পুরোপুরিভাবে অবস্থান করতে পারে না।

সমাধান ঃ মনে করি উপবৃত্তকটির সমীকরণ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

এবং যে কোন একটি সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

সরলরেখাটির উপর যেকোন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1+lr, y_1+mr, z_1+nr), যেখানে r যেকোন একটি প্রাচল।

সরলরেখাটি উপবৃত্তটির উপর পুরোপুরিভাবে অবস্থান করবে যদি r এর সকল মানের জন্য

$$\frac{(x_1+lr)^2}{a^2}+\frac{(y_1+mr)^2}{b^2}+\frac{(z_1+nr)^2}{c^2}=1 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

সিদ্ধ হয়।

(3) নং সম্পর্কটি r একটি অভেদ এবং এটি সিদ্ধ হবে যদি r^2, r ও ধ্রুবপদের সহগগুলি যদি শূন্য হয় অর্থাৎ

যদি $$b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2=0 \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$2(b^2c^2lx_1+c^2a^2my_1+a^2b^2nz_1)=0 \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

এবং $$b^2c^2x_1^2+c^2a^2y_1^2+a^2b^2z_1^2-a^2b^2c^2=0 \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

(4) থেকে পাই $l=0, m=0, n=0$

যা কখনই সম্ভব নয় (যেহেতু l, m, n সরলরেখাটির কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী) অর্থাৎ কোন সরলরেখাই উপবৃত্তকটির উপর পুরোপুরিভাবে অবস্থিত হতে পারে না। (প্রমাণিত)

আমরা এখন অন্যান্য প্রকারের দ্বিমাত্রিক তল যথা উপবৃত্তীয় অধিবৃত্তক এবং পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তক বিষয়ে আলোচনা করব।

12.7 উপবৃত্তীয় অধিবৃত্তক (The elliptic paraboloid)

(i) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

সমীকরণ দ্বারা সূচিত তলটিকে ধরা যাক। তলটিকে উপবৃত্তীয় অধিবৃত্তক বলে। (1) নং তলটি yz ও zx স্থানাঙ্ক তলদুইটির এবং z-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(ii) $z=k$ পরিবর্তনশীল সমতলদ্বারা তলটির ছেদ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2k}{c},\ z=k \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

পরিবর্তনশীল উপবৃত্ত। k ধনাত্মক হলে উপবৃত্তটি বাস্তব হয়। উপবৃত্তটির কেন্দ্র $(0, 0, k)$ বিন্দুটিতে এবং kএর মান বর্ধিত হওয়ার সাথে এটি আকারে বড় হয়। $k = 0$ হলে এটি একটি বিন্দু উপবৃত্ত হয়। আবার যদি $k < 0$ হয় তাহলে (2) বক্ররেখাটি একটি কাল্পনিক উপবৃত্তকে সূচিত করে। অর্থাৎ (1) নং তলটি সর্বদা $z = 0$ সমতলটির ধনাত্মক দিকে অবস্থিত। কাজেই আমরা বলতে পারি যে, (1) নং তলটি (2) উপবৃত্তটি দ্বারা উদ্ভূত যেখানে উপবৃত্তটির কেন্দ্র z-অক্ষ বরাবর চলমান হয় এবং মূলবিন্দু থেকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হয়।

(iii) $x = k$ পরিবর্তনশীল (1) তলটিকে $\frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c} - \frac{k^2}{a^2}, x = k$ .... (3)

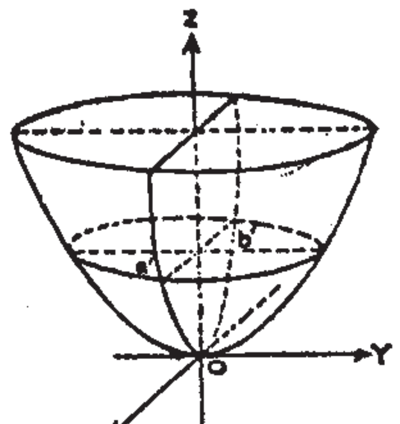
বা, $y^2 = \frac{2b^2}{c}\left(z - \frac{ck^2}{2a^2}\right), x = k$ বক্ররেখাটিতে ছেদ করে।

এটি একটি পরিবর্তনশীল অধিবৃত্ত যার নাভিলম্ব $\frac{2b^2}{c}$ অর্থাৎ একটি ধ্রুবক সুতরাং আমরা বলতে পারি যে, $x =$ 0 সমান্তরাল সমতলগুলি তলটিকে একই আকারের অধিবৃত্তে ছেদ করে। আবার (3) অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু \b\lx\((k, 0, $\frac{ck^2}{2a^2}$)। এই বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2} = \frac{2z}{c}, y = 0$ অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত। অধিবৃত্তটি আবার $y = 0$ সমতল দ্বারা (1) তলটির ছেদ। সুতরাং আমরা দেখি যে, (1) সমীকরণ দ্বারা সূচিত সমগ্র তলটি $y^2 = \frac{2b^2}{c}z, x = 0.$

অধিবৃত্তটিকে এটির সমতলের লম্ব বরাবর এবং সামনের ও পিছনের দিকে ঠেলিয়ে গঠন করা যায় যাতে অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুটি $x^2 = \frac{2a^2}{c}z, y = 0$ অধিবৃত্তের উপর গড়িয়ে যায়।

অনুরূপভাবে আমরা দেখাতে পারি যে, $y = 0$ সমতলটির সমান্তরাল সমতলগুলির দ্বারা (1) তলটির বিভিন্ন ছেদগুলি এক একটি অধিবৃত্ত যাদের $x^2 = \frac{2a^2}{c}z, y = 0$ অধিবৃত্তটিকে সামনের এবং পিছনের দিকে ঠেলিয়া গঠন করা যাতে শীর্ষবিন্দুটি $y^2 = \frac{2b^2}{c}z, x = 0$ অধিবৃত্তের উপর গড়িয়ে যায়।

এই সমস্ত বিষয় বিবেচনা করে আমরা নীচের চিত্রের সাহায্যে উপবৃত্তীয় অধিবৃত্তের গঠন দেখাতে পারি।



চিত্র : 12.4

12.8 পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তক (The hyperbolic paraboloid)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c} \qquad \text{......... (1)}$$

সমীকরণ দ্বারা সূচিত তলটিকে ধরা যাক্। তলটিকে পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তক বলে।

(i) $z = 0$ সমতলের সমান্তরাল একটি সমতল $z = k$ দ্বারা তলটির ছেদ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2k}{c},\ z = k \qquad \text{......... (2)}$$

বক্ররেখাটি এখন (2) সমীকরণ দ্বারা সূচিত বক্ররেখাগুলি একটি পরাবৃত্ততন্ত্র যাদের কেন্দ্রগুলি z-অক্ষের উপর অবস্থিত। আবার এগুলির স্পর্শ প্রবণ রেখাগুলি (asymptotes) $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0,\ z = 0$ .... (3)

সরলরেখাগুলির সমান্তরাল।

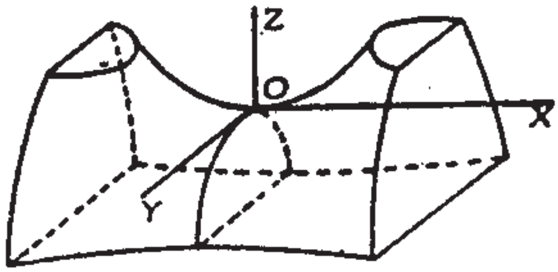
আবার, যদি k ধনাত্মক হয় তবে (2) পরাবৃত্তটির অনুপ্রস্থ অক্ষটি (transverse axis) x-অক্ষ এবং যদি k ঋণাত্মক হয় তবে অনুপ্রস্থ অক্ষটি y-অক্ষ।

(ii) উপবৃত্তীয় অধিবৃত্তকের মতো এক্ষেত্রের তলটি xz এবং yz স্থানাঙ্কতল দুইটির সাপেক্ষে প্রতিসম অর্থাৎ $x = 0, y = 0$ সমতল দুইটি তলটির মুখ্যতল।

(iii) $x = 0$ সমতলটির সমান্তরাল একটি সমতল দ্বারা তলটির ছেদ $-\frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c} - \frac{k^2}{a^2}, x = k$ বক্ররেখাটি। এটি একটি অধিবৃত্ত।

(iv) অনুরূপে $y = k$ সমতল দ্বারা তলটির ছেদ $\frac{x^2}{a^2} = \frac{2z}{c} + \frac{k^2}{b^2}, y = k$ অধিবৃত্তটি।

উপরোক্ত বিষয়ে বিবেচনা করে আমরা নীচের চিত্রের সাহায্যে পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তকের গঠন দেখাতে পারি।



চিত্র : 12.5

উদাহরণ 1. দেখান যে, $y + 3 = 0$ সমতলটি $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তটিকে একটি অধিবৃত্তে ছেদ করে। অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু ও অভিলম্ব বের করুন।

সমাধান : $y + 3 = 0$ সমতলটি দ্বারা প্রদত্ত অধিবৃত্তকটির ছেদ $\frac{x^2}{5} = 6z + \frac{9}{4}, y + 3 = 0$

বা, $x^2 = 30\left(z + \frac{9}{24}\right)$, $y + 3 = 0$ বক্ররেখাটি।

এটি একটি অধিবৃত্ত যার নাভিলম্ব 30. আবার $y + 3 = 0$ সমতলটিতে এই অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(0, -\frac{9}{24}\right)$। সুতরাং এই অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(0, -3, -\frac{3}{8}\right)$। (Answer)

উদাহরণ 2. $3x^2 - 2y^2 - 12x - 12y - 6z = 0$ কনিকয়েডটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণটি

$$3x^2 - 2y^2 - 12x - 12y - 6z = 0$$

বা, $3(x-2)^2 - 2(y+3)^2 = 6(z-1)$

বা, $$\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{3} = z - 1 \qquad \text{.........(1)}$$

মূলবিন্দুটিকে $(2, -3, 1)$ বিন্দুতে পরিবর্তন করলে (1) সমীকরণটির পরিবর্তিত আকার হয়

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{3} = Z$$

এটি একটি পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তককে সূচিত করে যার মুখ্যতলগুলি $x - 2 = 0$ এবং $y + 3 = 0$. (Answer)

উদাহরণ 3. $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-2}$ সরলরেখা ও $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$ পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তকটির ছেদ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সরলরেখাটির উপর অবস্থিত যেকোন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2\lambda - 2, 3\lambda, -2\lambda + 1)$.

বিন্দুটি $\frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{9} = z$ পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তকটির উপর অবস্থিত হবে যদি

$$\frac{(2\lambda - 2)^2}{4} - \frac{9\lambda^2}{9} - (-2\lambda + 1) = 0 \qquad \text{.........(1)}$$

হয়।

এখন $\frac{(2\lambda - 2)^2}{4} - \frac{9\lambda^2}{9} - (-2\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$

অর্থাৎ λ-এর যেকোন মানের জন্য (1) সিদ্ধ হয়। সুতরাং প্রদত্ত সরলরেখাটি প্রদত্ত পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তকের উপর পুরোপুরিভাবে অবস্থিত। (Answer)

12.9 অনুশীলনী

(1) $2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 4x + 20y - 6z = 5$-এই দ্বিমাত্রিক তলটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ সমীকরণটিকে x, y, z-এর আকারে homogeneous প্রকাশ করুন]

[উত্তর : উপবৃত্তক $\frac{X^2}{15} + \frac{Y^2}{6} + \frac{Z^2}{10} = 1$; $X = x - 1$, $Y = y + 2$, $Z = z - 1$]

(2) যে উপবৃত্তকের কেন্দ্র $P(-3, 2, -1)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং যার মূল অক্ষগুলি (Principal axes) স্থানাঙ্ক অক্ষের সমান্তরাল ও তাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 3 তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

$$\left[\text{উত্তর : } 4(x+3)^2 + (y-2)^2 + \frac{4}{9}(x+1)^2 = 1\right]$$

[সংকেতঃ $(-3, 2, -1)$-কে মূলবিন্দু ধরে উপবৃত্তকটি প্রথমে নির্ণয় করুন।]

(3) k-এর কোন সকল মানের জন্য $x + kz = 0$ সমতলটি $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ দ্বিপত্রী পরাবৃত্তকটি একটি পরাবৃত্তে ছেদ করে। [Ans. $|k| < 1$]

[সংকেতঃ সমীকরণ দুটি সমাধান করে x, y-এর যে সমীকরণটি পাওয়া যাবে সেটি পরাবৃত্ত হবে।]

(4) দেখান যে, $y + 3 = 0$ সমতলটি $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z$ পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তকটিকে একটি অধিবৃত্তে ছেদ করে। অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু ও নাভিলম্ব বের করুন।

[সংকেতঃ সমস্যা (3) এর মত করে ভাবুন] $\left[\text{উত্তর : } 8, \left(0, -3, \frac{-1}{9}\right)\right]$

(5) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-1}{1}$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ একপত্রী পরাবৃত্তকটিকে ছেদ করে কিনা তা নির্ণয় করুন এবং যদি এটি ছেদ করে তাহলে ছেদবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক বের করুন।

[সংকেতঃ সমীকরণ দুটি সমাধান করার চেষ্টা করুন।]

[উত্তর : ছেদ করে। (2, 3, 1) ও (4, 3, 2) বিন্দুদ্বয়ে]

(6) দেখান যে, $\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$ সরলরেখাটি $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 1$ কনিকয়েড্‌টিকে ছেদ করে।

[সংকেতঃ একই রকমভাবে দুটি সমীকরণের সমাধানযোগ্যতা বিচার করুন]

(7) k-এর যে সমস্ত মানের জন্য $x + kz = 1$ সমতলটি $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ দ্বিপত্রী পরাবৃত্তকটি একটি উপবৃত্তে ছেদ করে তা নির্ণয় করুন। [উত্তর : $1 < k < \sqrt{2}$]

[সংকেতঃ সমস্যা নং (3)]

(8) দেখান যে, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{-10}$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ একপত্রী পরাবৃত্তটির উপর পুরোপুরিভাবে অবস্থিত।

[সংকেতঃ সরলরেখাটিকে প্রাচল আকারে লিখে দুটি সমীকরণের সাহায্যে একটি অভেদ গঠনের চেষ্টা করুন।]

(9) দেখান যে একটি দ্বিপত্রী পরাবৃত্তকের উপর কোন সরলরেখা পুরোপুরিভাবে অবস্থান করতে পারে না।

[সংকেতঃ দেখান যে কোন সরলরেখার সমীকরণ ও এটির সমীকরণ সমাধানযোগ্য নয়।]

(10) দেখান যে $y = 2$ সমতলটি $\frac{x^2}{108} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{12} = 1$ উপবৃত্তকটিকে একটি উপবৃত্তে ছেদ করে। উপবৃত্তটির অর্ধাক্ষগুলির দৈর্ঘ্য ও শীর্ষবিন্দুগুলি নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ আগের সমস্যাগুলির সাহায্য নিন] [উত্তর ঃ 9, 3; (9, 2, 0), (– 9, 2, 0), (0, 2, 3), (0, 2, – 3)]

12.10 সারাংশ ও সহায়ক পাঠ

বিষয় পরিচিতি অংশটুকু লক্ষ্য করুন সারাংশ জানা যাবে।

(1) J. G. Chakravorty & P. R. Ghosh : Advanced analytical Geometry.

(U. N. Dhar, 1995)

একক 13 ❑ স্পর্শক, অভিলম্ব ও ব্যাস (Tangent, normal & diameter)

গঠন

13.0 প্রস্তাবনা, উদ্দেশ্য ও বিষয় পরিচিতি

গত কয়েকটি অধ্যায়ে ত্রিমাত্রিক দেশে বিভিন্ন আকারের ত্রিমাত্রিক বস্তুর বক্রতলের জ্যামিতিক ধর্ম এবং তাদের সমীকরণ বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। আমরা মূলতঃ দ্বিঘাত বিশিষ্ট সমীকরণসমূহকে সেই বক্রতল নির্দেশ করে অর্থাৎ দ্বিমাত্রিক বক্রতল সমূহের বিভিন্ন জ্যামিতিক ধর্ম বিষয়ে আলোচনা করেছি। এই অধ্যায়ে এই বস্তুসমূহের সঙ্গে একটি তল বা একটি রেখা কি সম্পর্ক হতে পারে তা নিয়ে আলোচনা করব। একটি তল একটি

বক্রতলকে একটি বক্ররেখা ছেদ করে আবার একটি রেখা একটি দ্বিমাত্রিক তলকে দুটো বিন্দুতে ছেদ করে। এই সরলরেখাটি তল দুটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করলে সেটিকে স্পর্শক বলা হবে। অনুরূপভাবে একটি তল একটি দ্বিমাত্রিক বক্রতলকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করতে পারে। সেক্ষেত্রে সমতলকে ঐ বক্রতলের স্পর্শতল বলা হবে। স্পর্শবিন্দুতে ঐ তলের উপর লম্বকে অভিলম্ব বলা হবে এবং সাধারণ জ্যা একটি বিশেষ নিয়ম মেনে নিলে তাকে ব্যাস বলা হবে।

স্পর্শক, অভিলম্ব, ব্যাস অত্যন্ত প্রয়োজনীয় ধারণা। এই সব বিষয়ে সম্যক উপলব্ধি থাকলে বক্রতলটির প্রকৃতি এবং গাণিতিক বিশ্লেষণ সহজ বোধ্য হয় এবং পরবর্তীকালে প্রয়োগমূলক সমস্যা সমাধানে সাহায্য করে।

এই অধ্যায়ে স্পর্শক অভিলম্বের সমীকরণ, স্পর্শতল, মিলনতল, মেরুতল, অভিলম্বের সংখ্যা এবং অভিলম্ব নিয়ন্ত্রক বিভিন্ন বক্রতলের সমীকরণ বিষয়ক আলোচনা করা হয়েছে। এছাড়াও উপবৃত্তকের জন্য এইসব রেখা এবং তলের বিশেষ কিছু ধর্ম আলাদাভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

13.1 একটি সকেন্দ্র কনিকয়েডের সঙ্গে একটি সরলরেখার ছেদ

মনে করি কনিকয়েডটির সমীকরণ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ .... (1)

এবং $A(\alpha, \beta, \gamma)$ বিন্দুগামী কনিকয়েডটির ছেদকের একটি সমীকরণ

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \qquad \text{.......} (2)$$

যেখানে l, m, n সরলরেখাটির কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী। মনে করি (2) সরলরেখাটি কনিকয়েডটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। আমাদের AP ও AQ-এর দৈর্ঘ্য বের করতে হবে।

এখন সরলরেখাটির উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha + lr, \beta + mr, \gamma + nr)$, যেখানে A বিন্দু থেকে বিন্দুটির দূরত্ব r। বিন্দুটি কনিকয়েডটির উপর অবস্থিত হবে যদি

$$a(\alpha + lr)^2 + b(\beta + mr)^2 + c(\gamma + nr)^2 = 1$$

বা, $$r^2(al^2 + bm^2 + cn^2) + 2r(a\alpha l + b\beta m + c\gamma n) + (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1) = 0 \qquad \text{........} (3)$$

এই সমীকরণটি থেকে r-এর দুইটি মান পাওয়া যায় যা AP ও AQ-এর পরিমাপ।

13.2 স্পর্শক এবং স্পর্শতল

যদি $A(\alpha, \beta, \gamma)$ বিন্দুটি কনিকয়েডের উপর অবস্থিত হয় তবে $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1 = 0$ হবে এবং (3) নং সমীকরণটি থেকে প্রাপ্ত r-এর একটি মান শূন্য হবে। আবার যদি $a\alpha l + b\beta m + c\gamma n = 0$ হয় তবে (3) সমীকরণটি থেকে প্রাপ্ত r-এর দুটি মানই শূন্য হবে অর্থাৎ P ও Q বিন্দু দুটি তলটির উপর (α, β, γ) বিন্দুতে সমাপতিত হবে

এবং APQ সরলরেখাটি A বিন্দুতে কনিকয়েডটির উপর স্পর্শক হবে। সুতরাং যদি $A(\alpha, \beta, \gamma)$ কনিকয়েডটির উপর একটি বিন্দু হয় তাহলে (2) সরলরেখাটি কনিকয়েডটির একটি স্পর্শক হওয়ার শর্ত হবে

$$a\alpha l + b\beta m + c\gamma n = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

যদি (2) ও (4) থেকে আমরা l, m, n-কে অপনয়ন করি তাহলে আমরা (α, β, γ) বিন্দুগামী সকল স্পর্শকগুলির সঞ্চারপথের সমীকরণ পাই। সমীকরণটি হয় $(x-\alpha)a\alpha + (y-\beta)b\beta + (z-\gamma)c\gamma = 0$

বা, $\quad a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$

বা, $\quad a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = 1.$

সুতরাং (α, β, γ) বিন্দুতে স্পর্শকগুলি $a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = 1$ সমতলটির উপর অবস্থিত। এটিই (α, β, γ) বিন্দুতে কনিকয়েডটির স্পর্শতল।

অনুসিদ্ধান্ত : 1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ উপবৃত্তকটির (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে স্পর্শতলের সমীকরণ হবে

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$$

অনুসিদ্ধান্ত : 2. একইভাবে অগ্রসর হয়ে আমরা $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ সরলরেখাটির একটি দ্বি-মাত্রিক তলের (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে স্পর্শক হওয়ার শর্ত এবং ঐ দ্বিমাত্রিক তলের (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে স্পর্শতলের সমীকরণ পেতে পারি। উদাহরণস্বরূপ, আমরা দেখাতে পারি যে, উপরোক্ত সরলরেখাটি $ax^2 + by^2 = 2cz$ পরাবৃত্তকটির (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে স্পর্শক হবে যদি $alx_1 + bmy_1 - cn = 0$ হয় এবং তলটির (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে স্পর্শতলের সমীকরণ $axx_1 + byy_1 = c(z + z_1)$.

দ্রষ্টব্য : কোন কনিকয়েডের (x_1, y_1, z_1) বিন্দুটিতে স্পর্শতলের সমীকরণ বের করতে গেলে কনিকয়েডের সমীকরণটিতে x^2 এর জায়গায় xx_1, y^2-এর জায়গায় yy_1, z^2-এর জায়গায় zz_1, $2xy$-এর স্থলে $(xy_1 + x_1y)$, $2yz$-এর জায়গায় $(yz_1 + zy_1)$, $2zx$-এর জায়গায় $(zx_1 + xz_1)$, $2x$-এর জায়গায় $x + x_1$, $2y$-এর জায়গায় $(y + y_1)$ এবং $2z$-এর স্থলে $(z + z_1)$ বসাতে হবে।

13.3 একটি সমতলের একটি সকেন্দ্র কনিকয়েডকে স্পর্শকরার শর্ত

মনে করি কনিকয়েডটির সমীকরণ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$

এবং সমতলটির সমীকরণ $lx + my + nz = p \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$

আমরা এখন সমতলটির কনিকয়েডটিকে স্পর্শ করার শর্ত বের করব।

মনে করি স্পর্শবিন্দুটি (α, β, γ)। এখন (α, β, γ) বিন্দুতে কনিকয়েডটির স্পর্শতলের সমীকরণ

$$a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

এখন (2) ও (3) সমীকরণ দুটি একই স্পর্শতলকে সূচিত করে। সুতরাং আমরা পাই

$$\frac{a\alpha}{l} = \frac{b\beta}{m} = \frac{c\gamma}{n} = \frac{1}{p}$$

$\therefore \quad \alpha = \frac{l}{ap}, \ \beta = \frac{m}{bp}, \ \gamma = \frac{n}{cp}.$

আবার (α, β, γ) বিন্দুটি (1) কনিকয়েডটির উপর অবস্থিত।

সুতরাং $a . \frac{l^2}{a^2p^2} + b . \frac{m^2}{b^2p^2} + c . \frac{n^2}{c^2p^2} = 1$

বা, $\quad \frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} = p^2$ এটিই সমতলটির কনিকয়েডকে স্পর্শ করার শর্ত।

অনুসিদ্ধান্ত : 1. (2) নং সমীকরণে $p = \pm\sqrt{\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}}$ বসিয়ে পাই

$lx + my + nz = \pm\sqrt{\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}}$। এটিই $lx + my + nz = 0$ সমতলটির সমান্তরাল স্পর্শতল দুইটির সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত : 2. $lx + my + nz = p$ সমতলটির $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ উপবৃত্তকটিকে স্পর্শ করার শর্ত হবে $a^2l^2 + m^2b^2 + c^2n^2 = 1$.

অনুসিদ্ধান্ত : 3. ঠিক একইভাবে অগ্রসর হয়ে একটি সমতলের কোন দ্বিমাত্রিকতলের (যা একটি সকেন্দ্র কনিকয়েড নয়) স্পর্শতল হওয়ার শর্ত পেতে পারি।

উদাহরণস্বরূপ আমরা এখন একটি সমতলের, একটি অধিবৃত্তককে স্পর্শ করার শর্ত বের করব।

মনে করি অধিবৃত্তকটির সমীকরণ $ax^2 + by^2 = 2z$ .... (1)

এবং সমতলটির সমীকরণ $lx + my + nz = p.$ .... (2)

ধরি সমতলটি অধিবৃত্তকটিকে (α, β, γ) বিন্দুতে স্পর্শ করে। তাহলে (α, β, γ) বিন্দুতে স্পর্শতলের সমীকরণ হয় $a\alpha x + b\beta y = z + \gamma$ .... (3)

(2) ও (3) সমীকরণ দুটিকে তুলনা করে পাই

$$\frac{a\alpha}{l} = \frac{b\beta}{m} = \frac{-1}{n} = \frac{\gamma}{p}$$

অর্থাৎ $\alpha = -\frac{l}{an}, \ \beta = -\frac{m}{bn}, \ \gamma = -\frac{p}{n}$

এখন (α, β, γ) বিন্দুটি অধিবৃত্তকটির উপর অবস্থিত।

সুতরাং $a . \frac{l^2}{a^2n^2} + b . \frac{m^2}{b^2n^2} = -2\frac{p}{n}$

বা, $\quad \frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + 2pn = 0$

এটিই নির্ণেয় স্পর্শ করার শর্ত।

13.4 বহিঃস্থ কোন একটি বিন্দু থেকে কোন কনিকয়েডে স্পর্শতলগুলির মিলন তল (Plane of contact)

একটি প্রদত্ত বিন্দুগামী কোন কনিকয়েডের স্পর্শতলগুলির স্পর্শবিন্দুগুলির সঞ্চারপথকে ওই কনিকয়েডটির স্পর্শতলগুলির মিলনতল (Plane of contact) বলে।

মনে করি প্রদত্ত বিন্দুটি (α, β, γ) এবং কনিকয়েডটির সমীকরণ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. মনে করি, (x', y', z') কনিকয়েডটির উপর এমন একটি বিন্দু যাতে এই বিন্দুতে কনিকয়েডটির স্পর্শতলটি (α, β, γ) বিন্দুগামী। এখন (x', y', z') বিন্দুতে কনিকয়েডের স্পর্শতলটি $axx' + byy' + czz' = 1$.

এই সমতলটি (α, β, γ) বিন্দুগামী, সুতরাং $a\alpha x' + b\beta y' + c\gamma z' = 1$

অর্থাৎ (x', y', z') বিন্দুটির সঞ্চারপথ $a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = 1$

এটিই (α, β, γ) বিন্দু থেকে $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ কনিকয়েডে স্পর্শতলগুলির মিলন তল।

13.5 একটি কনিকয়েডের সাপেক্ষে একটি বিন্দুর মেরুতল (Polar plane)

একটি প্রদত্ত বিন্দুগামী কোন কনিকয়েডের জ্যাগুলির প্রান্তবিন্দুদ্বয়েতে অঙ্কিত কনিকয়েডটির স্পর্শতলগুলির ছেদের সঞ্চারপথকে কনিকয়েডটির সাপেক্ষে বিন্দুটির মেরুতল বলে।

মনে করি কনিকয়েডটির সমীকরণ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ .... (1)

মনে করি (α, β, γ) বিন্দুগামী জ্যাটির প্রান্তবিন্দুদ্বয়েতে অঙ্কিত স্পর্শতলদুটির ছেদবিন্দু (x', y', z')। এখন (x', y', z') বিন্দু থেকে (1) কনিকয়েডে স্পর্শতলগুলির মিলনতল $axx' + byy' + czz' = 1$.

এই সমতলটি (α, β, γ) বিন্দুগামী।

সুতরাং $a\alpha x' + b\beta y' + c\gamma z' = 1$ অর্থাৎ বিন্দুটির সঞ্চারপথ $a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = 1$ .... (2)

এটিই কনিকয়েড্‌টির সাপেক্ষে (α, β, γ) বিন্দুটির মেরুতল। (α, β, γ) বিন্দুটিকে কনিকয়েডটির সাপেক্ষে সমতলটির মেরু (Pole) বলা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত : $ax^2 + by^2 = 2cz$ অধিবৃত্তকটির সাপেক্ষে (x', y', z') বিন্দুটির মেরুতল হয়

$$axx' + byy' = c(z + z')\text{।}$$

13.6 একটি কনিকয়েডের সাপেক্ষে একটি সমতলের মেরু

মনে করি, সমতলটির সমীকরণ $lx + my + nz = p$ .... (1)

এবং কনিকয়েডটির সমীকরণ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ .... (2)

মনে করি (α, β, γ) বিন্দুটি (2) কনিকয়েডটির সাপেক্ষে (1) সমতলটির মেরু। তাহলে কনিকয়েডটির সাপেক্ষে (α, β, γ) বিন্দুটির মেরুতল

$$a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

সমীকরণ (1) ও (3) তুলনা করে পাই $\frac{a\alpha}{l} = \frac{b\beta}{m} = \frac{c\gamma}{n} = \frac{1}{p}$

বা, $\alpha = \frac{l}{ap}, \beta = \frac{m}{bp}, \gamma = \frac{n}{cp}$ মেরুটি $\left(\frac{l}{ap}, \frac{m}{bp}, \frac{n}{cp}\right)$ বিন্দুতে অবস্থিত।

উদাহরণ 1. দেখান যে, $x - 2y - 2z = 18$ সমতলটি $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ উপবৃত্তকটিতে একটি স্পর্শতল এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক বের করুন।

সমাধান ঃ আমরা জানি যে, $lx + my + nz = p$ সমতলটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ উপবৃত্তকটিতে একটি স্পর্শতল হয় যদি $a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 = p^2$ হয়। এখানে $l = 1, m = -2, n = -2, p = 18, a^2 = 144, b^2 = 36, c^2 = 9$.

সুতরাং $a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 = 144 + 144 + 36 = 324$.

আবার, $p^2 = (18)^2 = 324$, অর্থাৎ এক্ষেত্রে $a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 = p^2$.

সুতরাং প্রদত্ত সমতলটি প্রদত্ত দ্বিমাত্রিক তলটিতে একটি স্পর্শতল।

মনে করি, স্পর্শবিন্দুটির স্থানাঙ্ক (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1) বিন্দুটিতে স্পর্শতলের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{144} + \frac{yy_1}{36} + \frac{zz_1}{9} = 1.$$

এই সমতলটি অবশ্যই প্রদত্ত সমতলটির সঙ্গে অভিন্ন। সুতরাং আমরা পাই,

$$\frac{\frac{x_1}{144}}{1} = \frac{\frac{y_1}{36}}{-2} = \frac{\frac{z_1}{9}}{-2} = \frac{1}{18}$$

বা, $x_1 = \frac{144}{18} = 8, y_1 = -4, z_1 = -1.$

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(8, -4, -1)$। (Answer)

উদাহরণ 2. $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ কনিকয়েডে $x + 9y - 3z = 0 = 3x - 3y + 6z - 5$ সরলরেখাগামী স্পর্শতলগুলির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত কনিকয়েডটির সমীকরণ $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$

বা, $\frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{5}y^2 + \frac{3}{5}z^2 = 1. \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$

$x + 9y - 3z = 0 = 3x - 3y + 6z - 5$ সরলরেখাগামী যেকোন সমতলের সমীকরণ

$$x + 9y - 3z + \lambda(3x - 3y + 6z - 5) = 0$$

বা, $(1 + 3\lambda)x + (9 - 3\lambda)y + (-3 + 6\lambda)z = 5\lambda \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$

যদি (1) সমতলটি (2) কনিকয়েডটির স্পর্শতল হয় তাহলে

$$\frac{(1+3\lambda)^2}{2/5} + \frac{(9-3\lambda)^2}{-6/5} + \frac{(-3+6\lambda)^2}{3/5} = (5\lambda)^2$$

বা, $$\frac{(1+3\lambda)^2}{2} + \frac{9(3-\lambda)^2}{-6} + \frac{9(2\lambda-1)^2}{3} = 5\lambda^2$$

বা, $1 + 9\lambda^2 + 6\lambda - 3(9 + \lambda^2 - 6\lambda) + 6(4\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 10\lambda^2$

বা, $20\lambda^2 - 20 = 0$ বা, $\lambda = \pm 1$

λ -এর এই মানগুলি (2) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$4x + 6y + 3z = 5$ এবং $-2x + 12y - 9z = -5$

অর্থাৎ $4x + 6y + 3z = 5$ এবং $2x - 12y + 9z = 5$.

এগুলিই স্পর্শতলগুলির নির্ণেয় সমীকরণ। (Answer)

উদাহরণ 3. (α, β, γ) বিন্দু দিয়ে $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ কনিকয়েডে স্পর্শতলগুলি অঙ্কন করা হল। প্রমাণ করুন যে, মূলবিন্দুগামী যে সরলরেখা সমূহ এই স্পর্শতলগুলির লম্ব তারা $(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}$ শঙ্কুটিকে উৎপন্ন করে।

সমাধান : (α, β, γ) বিন্দুগামী যেকোন সমতলের সমীকরণ $l(x - \alpha) + m(y - \beta) + n(z - \gamma) = 0$

বা, $lx + my + nz = l\alpha + m\beta + n\gamma$ .... (1)

সমতলটি $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ কনিকয়েডটিকে স্পর্শ করবে যদি

$\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} = (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2$ হয়। .... (2)

এখন মূলবিন্দুগামী যে সরলরেখাটি (1) সমতলটির লম্ব তার সমীকরণ

$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ .... (3)

(3) নং সরলরেখাটির (যা মূলবিন্দুগামী) দিগানুপাতগুলি অর্থাৎ l, m, n (2) সমঘাত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ (3) সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$ শঙ্কুটিকে উৎপন্ন করে। (প্রমাণিত)

13.7 একটি কনিকয়েডের অভিলম্ব সমীকরণ

একটি সকেন্দ্র কনিকয়েডের কোন বিন্দুতে এটির স্পর্শতলের লম্ব সরলরেখাটিকে তলটির ওই বিন্দুটিতে অভিলম্ব বলা হয়।

মনে করি সকেন্দ্র কনিকয়েডটির সমীকরণ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ .... (1)

(α, β, γ) বিন্দুতে তার স্পর্শতলের সমীকরণ $a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = 1$ .... (2)

যেহেতু অভিলম্বটি (2) স্পর্শতলটির লম্ব, এটির দিগানুপাতগুলি যথাক্রমে, $a\alpha, b\beta, c\gamma$. অর্থাৎ অভিলম্বটি (α, β, γ) বিন্দুগামী এবং এটির দিগানুপাতগুলি $a\alpha, b\beta, c\gamma$। সুতরাং অভিলম্বটির সমীকরণ

$$\frac{x-\alpha}{a\alpha} = \frac{y-\beta}{b\beta} = \frac{z-\gamma}{c\gamma}$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. : $ax^2 + by^2 = 2cz$ অধিবৃত্তকটির (α, β, γ) বিন্দুতে অভিলম্বটি

$$\frac{x-\alpha}{a\alpha} = \frac{y-\beta}{b\beta} = \frac{z-\gamma}{-c}$$ সরলরেখাটি।

অনুসিদ্ধান্ত 2. : মূলবিন্দু থেকে $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ কনিকয়েডটির (α, β, γ) বিন্দুতে স্পর্শতলের লম্বদৈর্ঘ্য যদি p হয় তবে

$$p = \frac{1}{\sqrt{(a\alpha)^2 + (b\beta)^2 + (c\gamma)^2}}$$

বা, $$\frac{1}{p^2} = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$$

বা, $$(a\alpha p)^2 + (b\beta p)^2 + (c\gamma p)^2 = 1$$

অর্থাৎ অভিলম্বটির কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী $a\alpha p, b\beta p, c\gamma p$ অভিলম্বের সমীকরণকে নিম্নোক্তভাবে লেখা যায় :

$$\frac{x-\alpha}{a\alpha p} = \frac{y-\beta}{b\beta p} = \frac{z-\gamma}{c\gamma p}$$

উদাহরণস্বরূপ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ উপবৃত্তকটির (α, β, γ) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$\frac{x-\alpha}{\frac{p\alpha}{a^2}} = \frac{y-\beta}{\frac{p\beta}{b^2}} = \frac{z-\gamma}{\frac{p\gamma}{c^2}}$$

13.8 কোন একটি বিন্দু থেকে অভিলম্বগুলির সংখ্যা নির্ণয়

মনে করি কনিকয়েড্টির সমীকরণ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ .... (1)

(α, β, γ) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $\frac{x-\alpha}{a\alpha} = \frac{y-\beta}{b\beta} = \frac{z-\gamma}{c\gamma}$

মনে করি অভিলম্বটি (f, g, h) বিন্দুগামী, তাহলে $\frac{f-\alpha}{a\alpha} = \frac{g-\beta}{b\beta} = \frac{h-\gamma}{c\gamma} = \lambda$ (ধরি)

সুতরাং $f = \alpha(1 + a\lambda), g = \beta(1 + b\lambda), h = \gamma(1 + c\lambda)$

বা, $$\alpha = \frac{f}{1 + a\gamma}, \beta = \frac{g}{1 + b\lambda}, \gamma = \frac{h}{1 + c\lambda}$$

যেহেতু (α, β, γ) বিন্দুটি কনিকয়েড্টির উপর অবস্থিত, আমরা পাই

$$\frac{af^2}{(1 + a\lambda)^2} + \frac{bg^2}{(1 + b\lambda)^2} + \frac{ch^2}{(1 + c\lambda)^2} = 1 \qquad \text{......... (2)}$$

এটি একটি λ-এর ষষ্ঠ ডিগ্রী সমীকরণ এবং λ-এর প্রত্যেকটি বাস্তব মানের জন্য এটি তলটির উপর এক একটি বিন্দুকে সূচিত করে, যাতে ঐ বিন্দুতে অভিলম্বটি (f, g, h) বিন্দু দিয়ে যায়। সুতরাং দেশের যেকোন বিন্দু দিয়ে একটি সকেন্দ্র কনিকয়েডে সাধারণতঃ ছয়টি অভিলম্ব অঙ্কন করা যেতে পারে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. ঃ একইভাবে অগ্রসর হয়ে আমরা দেখাতে পারি যে, একটি প্রদত্ত্ বিন্দু দিয়া একটি অধিবৃত্তকে পাঁচটি অভিলম্ব অঙ্কন করা যায়।

13.9 অভিলম্বগুলির পাদবিন্দুগুলি দিয়ে অতিক্রান্ত ত্রিঘাত বক্ররেখা

যদি কোন সমতল একটি বক্ররেখাকে তিনটি বিন্দুতে ছেদ করে তবে বক্ররেখাটিকে একটি ত্রিঘাত বক্ররেখা বলে।

মনে করি কনিকয়েডটির সমীকরণ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ .... (1)

যদি তার (α, β, γ) বিন্দুতে অভিলম্বটি (f, g, h) বিন্দু দিয়ে যায় তবে অভিলম্বগুলির পাদবিন্দুসমূহ $\dfrac{f-\alpha}{a\alpha} = \dfrac{g-\beta}{b\beta} = \dfrac{h-\gamma}{c\gamma}$ সম্বন্ধটি সিদ্ধ করে অর্থাৎ আমরা দেখি যে পাদবিন্দুগুলি নিম্নলিখিত তিনটি বেলনের উপর অবস্থিত $ax(g-y) = by(f-x)$, $ax(h-z) = cz(f-x)$, $by(h-z) = cz(g-y)$।

সুতরাং ছয়টি অভিলম্বের পাদবিন্দুগুলি উপরোক্ত তিনটি বেলনের সাধারণ বিন্দুগুলি অর্থাৎ এগুলি বেলনগুলির সাধারণ ছেদরেখার উপর অবস্থিত। এই ছেদরেখাটির প্রাচলিক সমীকরণ

$$x = \frac{f}{1+a\lambda},\ y = \frac{g}{1+b\lambda},\ z = \frac{h}{1+c\lambda} \qquad \text{......... (2)}$$

এই বক্ররেখাটি $ux + vy + wz + d = 0$ .... (3)

সমতলটিকে যে বিন্দুগুলিতে ছেদ করে সেই বিন্দুগুলির জন্য λ-এর মান পাওয়া যায়

$$\frac{uf}{1+a\lambda} + \frac{vg}{1+b\lambda} + \frac{wh}{1+c\lambda} + d = 0 \qquad \text{......... (4)}$$

সমীকরণ থেকে। (4) সমীকরণটি λ-এর একটি ত্রিঘাত সমীকরণ অর্থাৎ এটি থেকে λ-এর তিনটি মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ (4) বক্ররেখাটি (3) সমতলটিতে তিনটি বিন্দুতে মিলিত হয়। কাজেই আমরা বলতে পারি যে, কোন বিন্দু থেকে একটি কনিকয়েডের উপর অঙ্কিত অভিলম্বগুলির পাদবিন্দু সমূহ কনিকয়েডটির সঙ্গে একটি ত্রিঘাত বক্ররেখার ছেদবিন্দুগুলি।

অনুসিদ্ধান্ত i. ঃ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ উপবৃত্তকটির জন্য এই ত্রিঘাত বক্ররেখাটির প্রচলিত সমীকরণ

$$x = \frac{a^2 f}{a^2+\lambda},\ y = \frac{b^2 g}{b^2+\lambda},\ z = \frac{c^2 h}{c^2+\lambda}$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. ঃ একইভাবে দেখানো যেতে পারে যে কোন বিন্দু থেকে একটি অধিবৃত্ততে অঙ্কিত পাঁচটি অভিলম্বের পাদবিন্দুসমূহ একটি ত্রিঘাত বক্ররেখার উপর অবস্থিত।

13.10 অভিলম্বগুলি দিয়ে অতিক্রান্ত শঙ্কুর সমীকরণ

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \quad \text{......... (1)}$$

কনিকয়েডটির (α, β, γ) বিন্দুতে অভিলম্বটি যদি (f, g, h) বিন্দুগামী হয় এবং এটির দিগানুপাত সমূহ যদি l, m, n হয় তবে $l = a\alpha = \dfrac{af}{1 + a\lambda}, m = b\beta = \dfrac{bg}{1 + b\lambda}, m = c\gamma = \dfrac{ch}{1 + c\lambda}$

সুতরাং $1 + a\lambda = \dfrac{af}{l}, 1 + b\lambda = \dfrac{bg}{m}, 1 + c\lambda = \dfrac{ch}{n}$

এখন $(1 + a\lambda)(b - c) + (1 + b\lambda)(c - a) + (1 + c\lambda)(a - b)$

$= (b - c + c - a + a - b) + \lambda(ab - ca + bc - ab + ca - bc) = 0$

$$\therefore \quad \frac{af}{l}(b - c) + \frac{bg}{m}(c - a) + \frac{ch}{n}(a - b) = 0 \quad \text{......... (2)}$$

(2) সম্বন্ধ থেকে আমরা বলতে পারি যে,

$\dfrac{x - f}{l} = \dfrac{y - y}{m} = \dfrac{z - h}{n}$ অভিলম্বটি

$\dfrac{af(b - c)}{x - f} + \dfrac{bg(c - a)}{y - g} + \dfrac{ch(a - b)}{z - h} = 0$ শঙ্কুটির একটি জনক। অর্থাৎ কোন বিন্দু থেকে কনিকয়েডটির উপর যে ছয়টি অভিলম্ব অঙ্কন করা যায় তারা একটি দ্বিতীয় ডিগ্রী শঙ্কুর উপর অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত 1. : যদি সকেন্দ্র কনিকয়েডটি $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ উপবৃত্তকটি হয় তবে শঙ্কুটির সমীকরণ হবে

$$\frac{f(b^2 - c^2)}{x - f} + \frac{g(c^2 - a^2)}{y - g} + \frac{h(a^2 - c^2)}{z - h} = 0$$

উদাহরণ 1. দেখান যে, $(-6, 18, -10)$ এবং $(12, -18, 8)$ বিন্দু দুটোতে $\dfrac{x^2}{984} + \dfrac{y^2}{492} + \dfrac{z^2}{328} = 1$ **উপবৃত্তকটির অভিলম্বগুলি $x + y + z - 2 = 0$ সমতলটিতে অবস্থিত।**

সমাধান : উপবৃত্তটির সমীকরণ $\dfrac{x^2}{984} + \dfrac{y^2}{492} + \dfrac{z^2}{328}$ .... (1)

উপবৃত্তকটির $(-6, 18, -10)$ বিন্দুতে স্পর্শতলের সমীকরণ

$$\frac{x(-6)}{984} + \frac{y.18}{492} + \frac{z(-10)}{328} = 1$$

বা, $-6x + 36y - 30z = 984$

বা, $x - 6y + 5z = -164$ .... (2)

আবার এটির $(12, -18, 8)$ বিন্দুতে স্পর্শতলের সমীকরণ

$$\frac{x.12}{984} + \frac{y(-18)}{492} + \frac{z.8}{328} = 1$$

বা, $12x - 36y + 24z = 984$

বা, $x - 3y + 2z = 82$ .... (3)

সুতরাং $(-6, 18, -10)$ এবং $(12, -18, 8)$ বিন্দু দুটিতে উপবৃত্তকটির অভিলম্বগুলির সমীকরণ যথাক্রমে

$$\frac{x+6}{1} = \frac{y-18}{-6} = \frac{z+10}{5} \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

এবং $$\frac{x-12}{1} = \frac{y+18}{-3} = \frac{x-8}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

এখন $$\begin{vmatrix} 12-(-6) & -18-18 & 8-(-10) \\ 1 & -6 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -36 & 18 \\ 1 & -6 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

অর্থাৎ (4) ও (5) সরলরেখা দুটি সমতলীয় এবং এই দুইটি সরলরেখাগামী সমতলটির সমীকরণ

$$\begin{vmatrix} x+6 & y-18 & z+10 \\ 1 & -6 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$= 18(-12+15) + 36(2-5) + 18(-3+6) = 54 - 108 + 54 = 0$$

বা, $(x+6)(-12+15) - (y-18)(2-5) + (z+10)(-3+6) = 0$

বা, $3(x+6) + 3(y-18) + 3(z+10) = 0$

বা, $x + 6 + y - 18 + z + 10 = 0$ বা, $x + y + z - 2 = 0$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 2. যদি P, Q, R, P', Q', R' বিন্দুগুলি কোন একটি বিন্দু থেকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ উপবৃত্তকে অঙ্কিত অভিলম্ব ছয়টির পাদবিন্দুগুলির হয় এবং সমতলটির সমীকরণ $lx + my + nz = p$ হয় তাহলে দেখান যে, $P'Q'R'$ সমতলটির সমীকরণ

$$\frac{x}{a^2 l} + \frac{y}{b^2 m} + \frac{z}{c^2 n} + \frac{1}{p} = 0.$$

সমাধান : মনে করি প্রদত্ত বিন্দুটি (f, g, h) তাহলে (f, g, h) বিন্দু থেকে উপবৃত্তকটির উপর অঙ্কিত অভিলম্ব ছয়টির পাদবিন্দুগুলির যেকোন একটিকে (α, β, γ) দ্বারা সূচিত করলে আমরা লিখতে পারি যে,

$$\alpha = \frac{a^2 f}{a^2+\lambda}, \beta = \frac{b^2 g}{b^2+\lambda}, \gamma = \frac{c^2 h}{c^2+\lambda}.$$ যেখানে λ-এর ছয়টি মান

$$\frac{a^2 f^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2 g^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2 h^2}{(c^2+\lambda)^2} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়।

আবার PQR সমতলটির সমীকরণ $lx + my + nz - p = 0$ কাজেই উপরোক্ত ছয়টি পাদবিন্দুর মধ্যে তিনটি এই সমতলটির উপর অবস্থিত।

অর্থাৎ $$l.\frac{a^2 f}{a^2+\lambda} + m.\frac{b^2}{b^2} \ \overline{\lambda} + n.\frac{c^2 h}{c^2+\lambda} - p = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

সমীকরণ (2) থেকে λ-এর তিনটি মান পাওয়া যায়।

মনে করি $P'Q'R'$ সমতলটির সমীকরণ $l'x + m'y + n'z - p' = 0$

তাহলে এই সমতলটির উপর অপর তিনটি পাদবিন্দু অবস্থিত।

সুতরাং $l'\dfrac{a^2f}{a^2+\lambda} + m'\dfrac{b^2g}{b^2+\lambda} + n'\dfrac{c^2h}{c^2+\lambda} - p' = 0$ .... (3)

সমীকরণ (3) থেকে λ-এর অপর তিনটি মান পাওয়া যায়।

কাজেই $$\left(l.\frac{a^2f}{a^2+\lambda} + m.\frac{b^2g}{b^2+\lambda} + n.\frac{c^2h}{c^2+\lambda} - p\right)$$
$$\left(l'\frac{a^2f}{a^2+\lambda} + m'\frac{b^2g}{b^2+\lambda} + n'\frac{c^2h}{c^2+\lambda} - p'\right) = 0 \quad .... (4)$$

সমীকরণটি থেকে λ-এর যে ছয়টি মান পাওয়া যায় তা আবার (1) নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়। (1) ও (4) সমীকরণ তুলনা করে পাই

$$ll'\frac{a^4f^2}{(a^2+\lambda)^2} = k.\frac{a^2f^2}{(a^2+\lambda)^2}$$ যেখানে k একটি ধ্রুবক।

সুতরাং $l' = \dfrac{k}{a^2l}$, অনুরূপে $m' = \dfrac{k}{b^2m}, n = \dfrac{k}{c^2n}$

আবার $pp' = -k \quad \therefore \; p' = -\dfrac{k}{p}$

অর্থাৎ $P'Q'R'$ সমতলটির সমীকরণ $\dfrac{x}{a^2l} + \dfrac{y}{b^2m} + \dfrac{z}{c^2n} + \dfrac{1}{p} = 0.$ (প্রমাণিত

13.11 ব্যাস

একটি কনিকয়েডের প্রদত্ত কেন্দ্রযুক্ত ছেদ :

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \; (= r) \quad .... (1)$$

সরলরেখাটি (যেখানে l, m, n এটির কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ .... (2)

কনিকয়েডটিকে যে দুইটি বিন্দু P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে তাদের $A(\alpha, \beta, \gamma)$ বিন্দু থেকে দূরত্বগুলি

$$a(lr+\alpha)^2 + b(mr+\beta)^2 + c(nr+\gamma)^2 = 1$$

বা, $r^2(al^2 + bm^2 + cn^2) + 2r(a\alpha l + b\beta m + c\gamma n) + (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - 1) = 0$ .... (3)

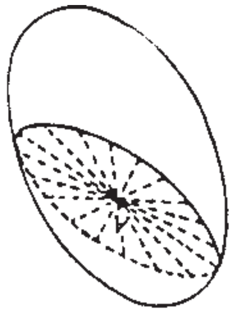
সমীকরণটির বীজদ্বয়।

A বিন্দুটি যদি PQ জ্যাটির মধ্য বিন্দু হয় তবে (3) সমীকরণটির বীজদ্বয় সমান মান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে এবং এটির শর্ত হবে $a\alpha l + b\beta m + c\gamma n = 0$ .... (4)

সুতরাং যে সকল জ্যা (α, β, γ) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তারা

$$a\alpha(x-\alpha) + b\beta(y-\beta) + c\gamma(z-\gamma) = 0 \quad .... (5)$$

সমতলটিতে অবস্থিত। এই সমতলটি (1) ও (4) থেকে l, m, n -কে অপনয়ন করে পাওয়া যায়।



চিত্র ঃ 13.1

(5) সমতলটি (2) তলটিকে একটি কনিকে ছেদ করে যার কেন্দ্র $(\alpha, \beta\ \gamma)$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $ax^2 + by^2 = 2cz$ অধিবৃত্তকটির যে সকল জ্যা (α, β, γ) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তাদের সঞ্চারপথ $a\alpha(x - \alpha) + b\beta(y - \beta) = c(z - \gamma)$ সমতলটি।

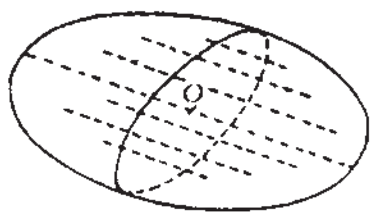
এই সমতলটি আবার অধিবৃত্তকটিকে একটি কনিকে ছেদ করে যার কেন্দ্র (α, β, γ)।

13.12 ব্যাসীয়তল

মনে করি কনিকয়েড্‌টির সমীকরণ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

কনিকয়েডটির যে কোন জ্যা যা কেন্দ্রটি দিয়ে অতিক্রম করে তাহাকে এটির ব্যাস বলে।

মনে করি $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ সরলরেখাটির $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ কনিকয়েডটির যে জ্যাতগুটি নির্দিষ্ট সরলরেখাটির সমান্তরাল তাদের একটি। এখন যদি (α, β, γ) বিন্দুটি জ্যাটির মধ্যবিন্দু হয় তাহলে $a\alpha l + b\beta m + c\gamma n = 0$



চিত্র ঃ 13.2

সুতরাং এইরূপ সকল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ $alx + bmy + cnz = 0$

সমতলটি এবং এটি কনিকয়েড্‌টির কেন্দ্রগামী। এই সমতলটিকে বলা হয় একটি ব্যাসীয়তল যেটি প্রদত্ত সরলরেখাটির বা ব্যাসটির অনুবন্ধী।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $ax^2 + by^2 = 2cz$ অধিবৃত্তকটির যে ব্যাসীয়তলটি l, m, n কোসাইন দিগাঙ্কগোষ্ঠী বিশিষ্ট সরলরেখাটির অনুবন্ধী তার সমীকরণ $alx + bmy - cn = 0$। এই সমতলটি z-অক্ষের সমান্তরাল।

13.13 উপবৃত্তকের অনুবন্ধী ব্যাস

যদি তিনটি ব্যাস এইরূপ হয় যে, তাদের যেকোন দুইটি দিয়ে অতিক্রান্ত সমতলটি তৃতীয়টির সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তবে ব্যাস তিনটিকে অনুবন্ধী ব্যাস বলা হয়।

মনে করি উপবৃত্তকটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .... (1)

O কেন্দ্রযুক্ত উপবৃত্তকটির যে ব্যাসীয়তলটি $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ ব্যাসটির অনুবন্ধী তার সমীকরণ

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = 0$$

যদি $P(x_1, y_1, z_1)$ উপবৃত্তকটির উপর একটি বিন্দু হয় তা হলে OP ব্যাসটির সমান্তরাল সরলরেখাগুলির ব্যাসীয় তল

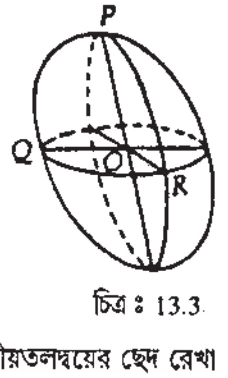
$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 0 \quad \text{......... (2)}$$

আবার $P(x_1, y_1, z_1)$ বিন্দুতে উপবৃত্তকটির স্পর্শতলের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$$

কাজেই আমরা বলতে পারি যে, একটি উপবৃত্তকের কোন ব্যাসের ব্যাসীয়তল ব্যাসটির প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শতলটির সমান্তরাল। আবার উপবৃত্তকটির উপর $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুটি যদি (2) ব্যাসীয়তলটির উপরিস্থিত হয় তবে $\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} + \frac{z_1z_2}{c^2} = 0$

অর্থাৎ, যদি Q বিন্দুটি OP ব্যাসের ব্যাসীয়তলের উপর অবস্থান করে তবে P বিন্দুটিও OQ ব্যাসের ব্যাসীয়তলের উপর অবস্থান করবে।



চিত্র ঃ 13.3

আবার যদি OP ও OQ এর ব্যাসীয়তলদ্বয়ের ছেদ রেখা OR হয় যেখানে R বিন্দুটি উপবৃত্তকটির উপর অবস্থিত তাহলে P ও Q বিন্দু দুইটি OR-এর ব্যাসীয়তলের উপর অবস্থিত। অর্থাৎ POQ সমতলটি OR-এর

ব্যাসীয়তল। কাজেই আমরা দেখি যে, QOR, ROP এবং POQ এই তিনটি সমতল যথাক্রমে OP, OQ এবং OR-এর ব্যাসীয়তল। অর্থাৎ তারা অনুবন্ধী ব্যাসীয়তল এবং OP, OQ, OR অনুবন্ধী ব্যাস। যদি কোন ব্যাসীয়তল এমন হয় যাতে তা যে জ্যা সমূহকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাদের লম্ব হয় তবে ব্যাসীয়তলটিকে মুখ্যতল বলা হয়। দুটি মুখ্যতলের ছেদরেখাকে বলা হয় প্রধান অক্ষ (বা, মুখ্য অক্ষ)। মনে করি $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ এবং $R(x_3, y_3, z_3)$ (1) উপবৃত্তকটির উপর তিনটি বিন্দু। তাহলে

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c_2} = 1$$

আবার P, Q, R বিন্দু তিনটি যদি একটি এইরূপ হয় যে, OP-এর ব্যাসীয়তল Q ও R বিন্দুগামী, OQ-এর ব্যাসীয়তল R ও P বিন্দুগামী এবং OR-এর ব্যাসীয়তল P ও Q বিন্দুগামী তাহলে

$$\frac{x_2x_3}{a^2} + \frac{y_2y_3}{b^2} + \frac{z_2z_3}{c^2} = 0$$

$$\frac{x_3x_1}{a^2} + \frac{y_3y_1}{b^2} + \frac{z_3z_1}{c^2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} + \frac{z_1z_2}{c^2} = 0$$

তাহলে (2) ও (3) থেকে আমরা বলতে পারি যে, $\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{b}, \frac{z_1}{c}\right)$, $\left(\frac{x_2}{a}, \frac{y_2}{b}, \frac{z_2}{c}\right)$, $\left(\frac{x_3}{a}, \frac{y_3}{b}, \frac{z_3}{c}\right)$ তিনটি পরস্পর লম্ব সরলরেখার কোসাইন দিগাঙ্কগোষ্ঠী, সুতরাং আমরা নিম্নলিখিত ছয়টি সম্বন্ধ পাই

$$x_1^2 + y_2^2 + x_3^2 = a^2$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = b^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2$$

$$y_1z_1 + y_2z_2 + y_3x_3 = 0$$

$$z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$$

আবার $\frac{x_1}{a} = \frac{y_2}{b} \cdot \frac{z_3}{c} - \frac{y_3}{b} \cdot \frac{z_2}{c} = \frac{y_2z_3 - y_3z_2}{bc}$

অনুরূপ $\frac{y_1}{b} = \frac{z_2x_3 - z_3x_2}{ca}$, $\frac{z_1}{c} = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{ab}$

$\frac{x_2}{a}, \frac{y_2}{b}, \frac{z_2}{c}$ এবং $\frac{x_3}{a}, \frac{y_3}{b}, \frac{z_3}{c}$ এই দুইটি কোসাইন দিগাঙ্কগোষ্ঠীর সেটকেও অনুরূপে প্রকাশ করা যায়।

এবং $\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & \frac{z_1}{c} \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & \frac{z_2}{c} \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & \frac{z_3}{c} \end{vmatrix} = 1$

বা, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z^3 \end{vmatrix} = abc$

উপরোক্ত ফল থেকে আমরা বলতে পারি যে, কোন তিনটি অনুবদ্ধী ব্যাসার্ধকে সমঅস্ত প্রান্ত ধরলে যে সামন্তরিক ষড়তলক উদ্ভূত হয় তার আয়তন ধ্রুবক।

আবার $OP^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, $OQ^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, $OR^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2$

সুতরাং $OP^2 + OQ^2 + OR^2 = a^2 + b^2 + c^2$ [(5) হতে)] অর্থাৎ অনুবদ্ধী ব্যাসার্ধগুলি্র বর্গের যোগফল হয় ধ্রুবক।

উদাহরণ 1. দেখান যে, একটি প্রদত্ত সরলরেখাগামী কোন সকেন্দ্র কনিকয়েডের ছেদগুলির কেন্দ্র একটি কনিকের উপর অবস্থিত।

সমাধান ঃ মনে করি কনিকয়েডটির সমীকরণ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ .... (1)

তাহলে কনিকয়েডটির যে ছেদটির কেন্দ্র (α, β, γ) তার সমীকরণ

$$a\alpha(x - \alpha) + b\beta(y - \beta) + c\gamma(z - \gamma) = 0 \qquad \text{......... (2)}$$

মনে করি (2) সমতলটি $\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n}$ প্রদত্ত সরলরেখাটি দিয়ে অতিক্রান্ত হয়।

তাহলে $a\alpha(x' - \alpha) + b\beta(y' - \beta) + c\gamma(z' - \gamma) = 0$ .... (3)

এবং $al\alpha + bm\beta + cn\gamma = 0$ .... (4)

সুতরাং (α, β, γ) কেন্দ্রটির (যা (3) ও (4) শর্ত দুইটি সিদ্ধ করে) সঞ্চারপথের সমীকরণ

$$a(x' - x)x + b(y' - y) + c(z' - z)z = 0$$

$$alx + bmy + cnz = 0$$

বা, $$ax^2 + by^2 + cz^2 - axx' - byy' - czz' = 0$$

$$alx + bmy + cnz = 0$$

এটি $ax^2 + by^2 + cz^2 - axx' - byy' - czz' = 0$ কনিকয়েডটির $alx + bmy + cnz = 0$ সমতলদ্বারা ছেদ অর্থাৎ এটি একটি কনিক। (প্রমাণিত)

উদাহরণ 2. $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ বিন্দুগুলি যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ উপবৃত্তকটির তিনটি অনুবন্ধী ব্যাসার্ধের প্রান্তত্রয় হয় তাহলে এই বিন্দুগুলি দিয়ে অতিক্রান্ত সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি PQR সমতলটির সমীকরণ $lx + my + nz = p$. .... (1)

যেহেতু সমতলটি $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ ও $R(x_3, y_3, z_3)$ বিন্দুগামী,

সুতরাং $lx_1 + my_1 + nz_1 = p$ .... (2)

$lx_2 + my_2 + nz_2 = p$ .... (3)

$lx_3 + my_3 + nz_3 = p$ .... (4)

(2), (3), (4)-কে যথাক্রমে x_1, x_2, x_3 দ্বারা গুণ করে এবং তাদের যোগ করে পাই

$$l(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + m(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + n(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) = p(x_1 + x_2 + x_3) \quad \ldots (5)$$

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ তিনটি অনুবন্ধী ব্যাসার্ধের প্রান্তত্রয় হওয়াতে $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$, $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$ এবং $x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 = 0$

সুতরাং (5) থেকে পাই $la^2 + p\Sigma x_1$ বা, $l = p\frac{\Sigma x_1}{a^2}$

অনুরূপে $m = p\frac{\Sigma y_1}{b^2}$, $n = p\frac{\Sigma z_1}{c^2}$.

l, m ও n-এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা পাই

$$\frac{x}{a^2}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{y}{b^2}(y_1 + y_2 + y_3) + \frac{z}{c^2}(z_1 + z_2 + z_3) = 1$$

এটিই PQR সমতলটির সমীকরণ। (Answer)

উদাহরণ 3. যদি OP, OQ, OR, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ উপবৃত্তকটির তিনটি অনুবন্ধী ব্যাসার্ধ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, PQR সমতল দ্বারা উপবৃত্তটির ছেদের কেন্দ্রটির সঞ্চারপথ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$.

সমাধান : PQR সমতলটির সমীকরণ

$$\frac{x}{a^2}\Sigma x_1 + \frac{y}{b^2}\Sigma y_1 + \frac{z}{c^2}\Sigma z_1 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

(উদাঃ 2 থেকে)

এখন PQR সমতল দ্বারা ছেদের কেন্দ্র যদি (α, β, γ) তাহলে সমতলটির সমীকরণ হয়

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) ও (2) সমীকরণ তুলনা করে পাই

$$\frac{\alpha}{\Sigma x_1}=\frac{\beta}{\Sigma y_1}=\frac{\gamma}{\Sigma z_1}=\frac{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}}{1}$$

সুতরাং $\frac{\alpha}{a} + \frac{\sum x_1}{a}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)$ .... (3)

অনুরূপে $\frac{\beta}{b} = \frac{\sum y_1}{b}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)$ .... (4)

এবং $\frac{\gamma}{c} = \frac{\sum z_1}{c}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)$ .... (5)

(3), (4), (5)-কে বর্গ করে এবং যোগ করে পাই

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = \left[\frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2 + y_3)^2}{b^2} + \frac{(z_1 + z_2 + z_3)^2}{c^2}\right]$$

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2 \quad .... (6)$$

এখন আমরা জানি যে,

$$\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} + \frac{z_1z_2}{c^2} = 0,\ \frac{x_2x_3}{a^2} + \frac{y_2y_3}{b^2} + \frac{z_2z_3}{c^2} = 0,$$

$\frac{x_3x_1}{a^2} + \frac{y_3y_1}{b^2} + \frac{z_3z_1}{c^2} = 0$ এবং $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$,

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2$$

সুতরাং (5) থেকে পাই

$$1 = 3\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)$$

বা, $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ (α, β, γ) কেন্দ্রটির সঞ্চারপথ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$. (প্রমাণিত)

13.14 অনুশীলনী

(1) $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$-এর একটি স্পর্শতল নির্ণয় করুন যা $x + 9y - 3z = 0 = 3x - 3y + 6z - 5$ সরলরেখাগামী হবে। [Ans. $4x + 6y + 3z = 5$ & $2x - 12y + 9z = 5$]

[সংকেতঃ তলটি $x + 9y - 3z + \lambda(3x - 6z - 5) = 0$ আকারের হবে]

(2) দেখান যে $8x - 6y - z = 5$ সমতলটি $3x^2 - 2y^2 = 6z$ অধিবৃত্তককে স্পর্শ করবে। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় করুন। [Ans. (8, 9, 5)]

[সংকেতঃ স্পর্শতল হবার শর্ত প্রযোজ্য]

(3) প্রমাণ করুন যে কনিকের তিনটি স্থানাঙ্কতলই স্পর্শতল তার আকার নিম্নরূপ হবে।

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2bcyz - 2cazx - 2abxy = 0$$

[সংকেতঃ যে কনিক তিনটি অক্ষকে ধারণ করে প্রশ্নোক্ত কনিকটি তার বিপরীত (reciprocal) হবে]

(4) যে বেলনের কারিকারেখা (generators) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ গোলককে স্পর্শ করে এবং $x + y - 2z = 8$ সমতলের উপর লম্ব তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। [Ans. $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 4yz + 4zx - 24 = 0$]

[সংকেতঃ প্রশ্নোক্ত গোলকের এনভেল্যাপিং বেলন হল নির্ণেয় বেলন]

(5) দেখান যে, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 50$ উপবৃত্তকটির $(6, 1, 2)$ ও $(6, -1, 2)$ বিন্দুতে অভিলম্বদ্বয় $x - z = 4$ সমতলের উপর অবস্থিত।

[সংকেতঃ অভিলম্বদ্বয় নির্ণয় করে তাকে প্রাচল আকারে প্রকাশ করুন।]

(6) $2x^2 + 3y^2 = 4z$ বক্রতলটির $(2, 2, 5)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[সংকেতঃ অভিলম্ব নির্ণয়ের সহজ পদ্ধতি দ্রষ্টব্য]

$$\left[\text{উত্তর : } \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{-1}\right]$$

(7) দেখান যে $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ কনিকয়েডের যে জ্যাগুলি (f, g, h) বিন্দুগামী তাদের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথের সমীকরণ $ax^2 + by^2 + cz^2 = afx + bgy + chz$.

[সংকেতঃ (f, g, h) বিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় করে ভাবুন]

(8) দেখান যে, $5x^2 - 6y^2 = 7z$ অধিবৃত্তকটির যে জ্যাটি $(2, 3, 4)$ বিন্দুগামী এবং $10x - 14y = 21$ ব্যাসীয় তল দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার সমীকরণ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$

[সংকেতঃ জ্যাটির মধ্যবিন্দু $10x - 14y = 21$ সমতলে অবস্থিত]

(9) দেখান যে, $x + 3y + 3$ এবং $2x - y = 1$ সমতল দুটি $2x^2 + 3y^2 = 4z$ অধিবৃত্তকটির অনুবন্ধী ব্যাসীয় তল। [সংকেতঃ অনুবন্ধী ব্যাসীয় তল সংক্রান্ত অধ্যায় দ্রষ্টব্য]

(10) যদি $lx + my + nz = p$ সমতলটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ উপবৃত্তকটির তিনটি অনুবন্ধী ব্যাসার্ধের প্রান্তবিন্দুগুলি দিয়ে অতিক্রান্ত হয়, তাহলে দেখান যে, $a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 = 3p^2$

[সংকেতঃ অনুবন্ধী ব্যাসার্ধের প্রান্তবিন্দুগুলি কনিকের উপরই অবস্থিত হবে]

13.15 সারাংশ ও সহায়ক পাঠ

এই অধ্যায়ের সারাংশ 13.0 অনুচ্ছেদে বিষয় পরিচিতি অংশে উল্লেখ আছে। শিক্ষার্থীদের ঐ অনুচ্ছেদটি আবার পড়বার জন্য অনুরোধ করছি। পরিশেষে উদাহরণ ও অনুশীলনীর অঙ্কগুলো করা আবশ্যক।

(1) J. T. Bell : Analytical Geometry of 3 dimension (Macmillan, India)

(2) J. G. Chakravorty & P. R. Ghosh : Advanced analytical Geometry.
(U. N. Dhar & Sons, Kolkata, 1995)

(3) A. V. Progorelov : Geometry : Mir Publisher.

একক 14 □ দ্বিঘাত সমীকরণ ঃ শ্রেণীবিভাজন (Classification of general equation of second degree)

গঠন

14.0 প্রস্তাবনা, উদ্দেশ্য ও বিষয় পরিচিতি

বিগত অধ্যায়গুলোতে ত্রিমাত্রিক দেশে স্থানাঙ্ক ভিত্তিক যে সব জ্যামিতিক বস্তু সমূহ পাই, তাদের বিষয়ে আলাদা আলাদা ভাবে বিস্তারিত আলোচনা হয়েছে। বেশ কিছু উদাহরণ এবং অনুশীলনীর মাধ্যমে তাদের বৈশিষ্টগুলোর প্রয়োগ দেখানো হয়েছে, লক্ষ্য করা গেছে, এরা প্রত্যেকেই দ্বিমাত্রিক বক্রতল এর অংশ বা এদের সমীকরণ হল ত্রিচল বিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং এই দ্বিঘাত সমীকরণটি বিস্তৃত বিশ্লেষণ করলে সামগ্রিকভাবে দ্বিমাত্রিক বক্রতলের সব গাণিতিক তাৎপর্য্য বোঝা যাবে।

এই অধ্যায়ে দ্বিঘাত সমীকরণ-এর বৈশিষ্ট আলোচনা করে তার জ্যামিতিক তাৎপর্য্য ব্যাখ্যা করা হয়েছে এবং পূর্ব অধ্যায় সমূহে আলোচিত সব কটি তলের জ্যামিতিক ধর্মসমূহ এই বীজগাণিতিক সমীকরণের আধারে বিশ্লেষণ করা হয়েছে। এটি সম্যকভাবে বুঝতে পারলে প্রকৃতপক্ষে দ্বিমাত্রিক বক্রতলের ধারণা পরিচ্ছন্ন হবে। পরবর্তীকালে ত্রিমাত্রিক জ্যামিতি বিষয়ক কোন সমস্যা সমাধান করতে এই সমীকরণের গুরুত্ব অপরিসীম।

আলোচ্য অধ্যায়ে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণকে প্রামান্য দ্বিঘাত সমীকরণে রূপায়নের বিভিন্ন পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে, প্রামান্য সমীকরণগুলি কনিকয়ড বা দ্বিমাত্রিক তলের প্রামান্য রূপ। কেন্দ্রভিত্তিক কনিকয়ড বা কেন্দ্রবিহীন কনিকয়ড বিষয়ে আলোচনা করা হবে। এর পর কনিকয়েডের তলচ্ছেদের ধারণা থেকে কনিকয়েডের শ্রেণীবিন্যাস করা হবে। বিভিন্ন পদ্ধতিতে সমীকরণগুলিকে প্রামাণ্য আকারে নিয়ে এসে তার ধর্মগুলো ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

14.1 দ্বিঘাত সমীকরণ দ্বারা সূচিত তল (Surfaces represented by second degree equations)

x, y, z-এর সবচেয়ে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণটি হচ্ছে

$$F(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \text{..... (1)}$$

$$= f(x, y, z) + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0,$$

যেখানে $f(x, y, z)$ হয় $F(x, y, z)$-এর সমঘাতী অংশ অর্থাৎ $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$.

এই সমীকরণটিতে দশটি ধ্রুবক আছে এবং যে কোন একটি দিয়ে ভাগ করলে সমীকরণটিতে নয়টি যদৃচ্ছ ধ্রুবক থাকে। কাজেই যদি এই ধ্রুবকগুলি যুক্ত নয়টি শর্ত দেওয়া থাকে তাহলে তলটির সমীকরণ পুরোপুরি ভাবে নির্ণয় করা যায়। উদাহরণ স্বরূপ, এইরূপ একটি তলকে এমন নয়টি বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত করানো যায় যাদের যে কোন চারটি সমতলীয় নয়, অথবা পরস্পরছেদী নয় এমন তিনটি সরলরেখা দিয়া অতিক্রান্ত করানো যায়।

এখন $\dfrac{x-\alpha}{l} = \dfrac{y-\beta}{m} = \dfrac{z-\gamma}{n} = 0$ .... (2)

সরলরেখাটির উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(lr + \alpha, mr + \beta, nr + \gamma)$. বিন্দুটি (1) তলটির উপর অবস্থিত হবে যদি $F(lr + \alpha, mr + \beta, nr + \gamma) = 0$ হয়

অর্থাৎ যদি $r^2 f(l, m, n) + r\left(l\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} + m\dfrac{\partial F}{\partial \beta} + n\dfrac{\partial F}{\partial \gamma}\right) + F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ .... (3)

হয়, যেখানে $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}F(\alpha, \beta, \gamma)$, $\dfrac{\partial F}{\partial \beta} = \dfrac{\partial}{\partial \beta}F(\alpha, \beta, \gamma)$

এবং $\dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{\partial F}{\partial r}F(\alpha, \beta, \gamma)$.

(3) নং সমীকরণটি r-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং এটির বীজদ্বয় (α, β, γ) বিন্দু থেকে (2) সরলরেখাটি ও (1) তলটির ছেদবিন্দুগুলির দূরত্ব। কাজেই কোন একটি প্রদত্ত সমতলের উপর অবস্থিত প্রত্যেকটি সরলরেখা (1)

তলটিকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। অর্থাৎ কোন সমতল দ্বারা তলটির ছেদ একটি কণিক এবং দ্বিঘাত সমীকরণ দ্বারা সূচিত তলগুলিকে কনিকয়েড্ বলা হয়।

যদি (3) নং সমীকরণটি বীজদ্বয় সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়, তবে সরলরেখা (2) দ্বারা উদ্ভূত (1) তলের জ্যাটির মধ্যবিন্দু হবে (α, β, γ), তখন

$$l\frac{\partial F}{\partial \alpha}+m\frac{\partial F}{\partial \beta}+n\frac{\partial F}{\partial \gamma}=0 \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

হবে। সুতরাং তলটির যে সমস্ত জ্যাগুলি (α, β, γ) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তারা

$$(x-\alpha)\frac{\partial F}{\partial \alpha}+(y-\beta)\frac{\partial F}{\partial \beta}+(z-\gamma)\frac{\partial F}{\partial \gamma}=0$$

সমতলটিতে অবস্থিত হবে। এই সমতলটির সমীকরণ (2) নং ও (4) নং সমীকরণদ্বয় থেকে l, m, n-কে অপনয়ন করে পাওয়া যায়।

এখন $\frac{\partial F}{\partial \alpha}=2a\alpha+2h\beta+2g\gamma+2u=2(a\alpha+h\beta+g\gamma+u)$। অনুরূপে $\frac{\partial F}{\partial \beta}$ ও $\frac{\partial F}{\partial \gamma}$ পাওয়া যায়।

অর্থাৎ (α, β, γ) কেন্দ্রযুক্ত এইরূপ একটি ছেদের সমীকরণ

$$\Sigma(x-\alpha)(a\alpha+h\beta+g\gamma+u)=0.$$

14.2. ব্যাসীয়তল (Diametral plane)

যদি (α, β, γ) বিন্দুটি $F(x, y, z)=0$ কনিকয়েডটির যে জ্যাগুলি $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ সরলরেখাটির সমান্তরাল তাদের যে কোন একটির মধ্যবিন্দু হয়, তবে $l\frac{\partial F}{\partial \alpha}+m\frac{\partial F}{\partial \beta}+n\frac{\partial F}{\partial \gamma}=0$ হয়।

সুতরাং (α, β, γ) বিন্দুটির সঞ্চারপথ

$$l\frac{\partial F}{\partial x}+m\frac{\partial F}{\partial y}+n\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

এটিই কনিকয়েডটির যে ব্যাসীয়তলটি l, m, n কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী বিশিষ্ট দিক্‌টির অনুবন্ধী তার সমীকরণ। অর্থাৎ সমীকরণটি

$$(al+hm+gn)x+(hl+bm+fn)y+(gl+fm+cn)z+(ul+vm+wn)=0$$

টিকা : উপরোক্ত সমীকরণ থেকে আমরা বলতে পারি যে যদি

$$al+hm+gn=hl+bm+fn=gl+fm+cn=0 \text{ হয়}$$

অর্থাৎ যদি $\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$ হয়

(যেহেতু l, m, n একত্রে শূন্য হতে পারে না), তবে ব্যাসীয়তলের কোন অস্তিত্ব থাকে না।

14.3 মুখ্যতল্ (Principal Plane) ও মুখ্যদিক (Principal direction)

যে ব্যাসীয় তলটি l, m, n দিগঙ্ককোসাইন গোষ্ঠী বিশিষ্ট দিক্‌টির অনুবন্ধী, সেই তলটি যদি যে সমস্ত জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাদের সঙ্গে লম্বভাবে থাকে তবে ব্যাসীয়তলটিকে একটি মুখ্যতল বলে এবং তখন l, m, n দিগঙ্ককোসাইন গোষ্ঠী বিশিষ্ট দিক্‌টিকে মুখ্যদিক্ বলা হয়।

এখন যে ব্যাসীয় তলটি $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ ... (1) সরলরেখাটির সমান্তরাল জ্যাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তার সমীকরণ $\quad l\frac{\partial F}{\partial x}+m\frac{\partial F}{\partial y}+n\frac{\partial F}{\partial z}=0$

বা, $\quad (al+hm+gn)x+(hl+bm+fn)y+(gl+fm+cn)z+lu+mv+nw=0 \qquad \ldots\ldots (2)$

এই সমতলটি (1) নং সরলরেখাটির সঙ্গে সমকোণে থাকে যদি

$$\frac{al+hm+gn}{l}=\frac{hl+bm+fn}{m}=\frac{gl+fm+cn}{n}=\lambda \text{ (ধরি) হয়।}$$

তাহ'লে আমরা পাই

$$(a-\lambda)l+hm+gn=0 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$hl+(b-\lambda)m+fn=0 \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$gl+fm+(c-\lambda)n=0 \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

এখন l, m, n-এর একত্রে শূন্য (0) ব্যতীত সমাধানের জন্য উপরোক্ত সমীকরণ সমূহ থেকে আমরা পাই

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g \\ h & b-\lambda & f \\ g & f & c-\lambda \end{vmatrix}=0$$

অর্থাৎ $\lambda^3-\lambda^2(a+b+c)+\lambda(bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2)-\Delta=0$,

যেখানে $\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

উপরোক্ত ত্রিঘাত সমীকরণটিকে নিম্নোক্ত আকারে লেখা যায়

$$\lambda^3-(a+b+c)\lambda^2+(A+B+C)\lambda-\Delta=0 \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

যেখানে A, B, C; Δ নির্ণায়কটিতে যথাক্রমে a, b, c-এর সহ উৎপাদক অর্থাৎ $A=bc-f^2$, $B=ca-g^2$, $C=ab-h^2$.

(6) নং সমীকরণটিকে নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণ বলা হয় এবং এটির প্রত্যেকটি বীজকে একটি বৈশিষ্ট্য বীজ বলা হয়। যেহেতু ত্রিঘাত সমীকরণের একটি বীজ সর্বদা বাস্তব, একটি কনিকয়েডের অন্তত একটি মুখ্যতল থাকে।

প্রত্যেকটি বৈশিষ্ট্য বীজের জন্য (3), (4) ও (5) নং সমীকরণের যে কোন দুইটি থেকে আমরা $l : m : n$-এর একটি সেট পেতে পারি।

আবার (3), (4) ও (5) নং সমীকরণের সাহায্যে (2) নং সমতলটির রূপান্তরিত আকার হয়

$$\lambda(lx + my + nz) + ul + vm + wn = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

এখন প্রত্যেকটি $l : m : n$ সেটের জন্য (7)নং সমীকরণ থেকে আমরা একটি মুখ্যতল পাই অর্থাৎ নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণ (6)-এর তিনটি বীজের প্রত্যেকটির জন্য একটি অর্থাৎ মোট তিনটি মুখ্যতল পাই। প্রত্যেকটি $l : m : n$ থেকে আমরা মুখ্যতলটির অনুসঙ্গী মুখ্যঅক্ষের দিগানুপাতগুলি পাই।

টীকা ঃ (i) বৈশিষ্ট্য বীজের শূন্য (0) মানের জন্য কোন মুখ্যতল থাকে না।

(ii) নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির প্রত্যেক বীজের জন্য, (3), (4) এবং (5) নং সমীকরণ তিনটির যে কোন দুইটি থেকে একই $l : m : n$ পাওয়া যায়।

(iii) আমরা দেখাতে পারি যে, যদি নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির বীজগুলি বাস্তব হয় তবে অনুসঙ্গী মুখ্যদিক্‌গুলি বাস্তব হয়।

14.4 মুখ্যদিক্ (Principal directions)

আমরা এখন দেখাব যে, নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ যদি λ হয় তাহলে $\lambda = f(l, m, n)$

যেখানে $f(x, y, z)$ হয় কনিকয়েড্‌টির দ্বিঘাত সমঘাতী অংশ এবং l, m, n যথাক্রমে মুখ্যদিক্‌টির কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী।

নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণের শূন্য (0) ব্যাতীত প্রত্যেকটি বীজের জন্য মুখ্য দিক্‌টির কোসাইন দিগঙ্ক গোষ্ঠী l, m, n-কে পাওয়া যায় নিম্নোক্ত সমীকরণগুলি থেকে

$$\frac{al + hm + gn}{l} = \frac{hl + bm + fn}{m} = \frac{gl + fm + cn}{n} = \lambda$$

অর্থাৎ $$\frac{\frac{\partial f}{\partial l}}{2l} = \frac{\frac{\partial f}{\partial m}}{2m} = \frac{\frac{\partial f}{\partial n}}{2n} = \lambda$$

যেখানে $f(l, m, n) = al^2 + bm^2 + cn^2 + 2fmn + 2gnl + 2hlm.$

সুতরাং $$\lambda = \frac{l\frac{\partial f}{\partial l} + m\frac{\partial f}{\partial m} + n\frac{\partial f}{\partial n}}{2(l^2 + m^2 + n^2)}$$

$= \frac{2f(l, m, n)}{2}$ (অয়লারের সূত্রের সাহায্যে)

$= f(l, m, n).$

14.5 মুখ্যদিকগুলির ধর্ম (Properties of principal directions)

(a) নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণের দুইটি পৃথক বীজের অনুসঙ্গী মুখ্যদিক্ দুইটি পরস্পরের সমকোণে থাকে।

প্রমাণ : মনে করি λ_1 ও λ_2 নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির দুইটি পৃথক বীজ এবং এদের অনুসঙ্গী মুখ্যদিক্ দুইটির কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী যথাক্রমে l_1, m_1, n_1 ও l_2, m_2, n_2. তাহ'লে

$$l_1 \frac{\partial f}{\partial l_2} + m_1 \frac{\partial f}{\partial m_2} + n_1 \frac{\partial f}{\partial n_2}$$

$$= l_1(al_2 + hm_2 + gn_2) + m_1(hl_2 + bm_2 + fn_2) + n_1(gl_2 + fm_2 + cn_2)$$

$$= al_2l_2 + bm_1m_2 + cn_1n_2 + h(l_1m_2 + l_2m_1) + g(l_1n_2 + l_2n_1) + f(m_1m_2 + m_2n_1)$$

$$= l_2 \frac{\partial f}{\partial l_1} + m_2 \frac{\partial f}{\partial m_1} + n_2 \frac{\partial f}{\partial n_1} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

কিন্তু $\frac{\partial f}{\partial l_1} = 2\lambda_1 l_2, \frac{\partial f}{\partial m_1} = 2\lambda_1 m_1, \frac{\partial f}{\partial n_1} = 2\lambda_1 n_1$

এবং $\frac{\partial f}{\partial l_2} = 2\lambda_2 l_2, \frac{\partial f}{\partial m_2} = 2\lambda_2 m_2, \frac{\partial f}{\partial n_2} = 2\lambda_2 n_2$

সুতরাং (1) হইতে পাই

$$2\lambda_2(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = 2\lambda_1(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)$$

বা, $2(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$

কিন্তু $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, সুতরাং $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ অর্থাৎ মুখ্য দিক্ দুইটি পরস্পরের লম্ব।

(b) নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণের বীজগুলি যদি পৃথক হয় তবে মুখ্যদিক্ তিনটি অনন্য হয় এবং তারা পরস্পরের লম্ব। ধর্ম (a)-এর জন্য ধর্ম (b)টি অবধারিত।

(c) যদি নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণের দুইটি বীজ সমান হয় তবে পরস্পর লম্ব মুখ্যদিক্ তিনটি অনন্য হয় না।

(d) যদি নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণের বীজগুলি সমান হয়, তবে যে কোনও দিক্ই মুখ্যদিক্ হয় এবং যে কোন তিনটি পরস্পর লম্ব সরলরেখাকেই একটি মুখ্য অক্ষের সেট হিসাবে নেওয়া যেতে পারে।

14.6 মুখ্য অক্ষগুলির সাপেক্ষে কোয়াড্রিকের বা কনিকয়েডের সমীকরণ (Quadrics or Conicoids referred principal axes)

আমরা এখন $F(x,y,z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ ... (1)

কোয়াড্রিকটির সমীকরণকে পরস্পর লম্ব মুখ্যদিক্ তিনটির সমান্তরাল স্থানাঙ্ক অক্ষগুলির সাপেক্ষে রূপান্তরিত করব। মনে করি নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণের বীজগুলি λ_1, λ_2 ও λ_3 এবং এদের অনুসঙ্গী মুখ্যদিক্ তিনটির কোসাইন্ দিগঙ্কগোষ্ঠী যথাক্রমে $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$। আমরা ধরি যে $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$-এর যে কোন দুইটি অথবা সব কয়টি মান সমান হতে পারে। মনে করি এই রূপান্তরের ফলে (x, y, z) বিন্দুটি (ξ, η, δ) বিন্দুতে রূপান্তরিত হ'ল। তাহ'লে আমরা পাই

$$x = l_1\xi + l_2\eta + l_3\delta,\ y = m_1\xi + m_2\eta + m_3\delta,$$

$$z = n_1\xi + n_2\eta + n_3\delta;$$

$$\xi = l_1x + m_1y + n_1z,\ \eta = l_2x + m_2y + n_2z,$$

$$\delta = l_3x + m_3y + n_3z$$

এবং কোয়াড্রিকের প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নোক্ত আকারে রূপান্তরিত হয়।

$$a(l_1\xi + l_2\eta + l_3\delta)^2 + b(m_1\xi + m_2\eta + m_3\delta)^2 + c(n_1\xi + n_2\eta + n_3\delta)^2$$
$$+ 2f(m_1\xi + m_2\eta + m_3\delta)(n_1\xi + n_2\eta + n_3\delta)$$
$$+ 2g(n_1\xi + n_2\eta + n_3\delta)(l_1\xi + l_2\eta + l_3\delta)$$
$$+ 2h(l_1\xi + l_2\eta + l_3\delta)(m_1\xi + m_2\eta + m_3\delta)$$
$$+ 2u(l_1\xi + l_2n + l_3\delta) + 2v(m_1\xi + m_2\eta + m_3\delta)$$
$$+ 2w(n_1\xi + n_2\eta + n_3\delta) + d = 0 \qquad \text{........ (2)}$$

(2) ......হতে ξ^2-এর সহগ $= al_1^2 + bm_1^2 + cn_1^2 + 2fm_1n_1 + 2gl_1n_1 + 2hl_1m_1$

$$= l_1(al_1 + hm_1 + gn_1) + m_1(hl_1 + bm_1 + fn_1) + n_1(gl_1 + fm_1 + cn_1)$$
$$= l_1(\lambda_1 l_1) + m_1(\lambda_1 m_1) + n_1(\lambda_1 n_1)$$
$$= \lambda_1(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)$$
$$= \lambda_1$$

[অনুচ্ছেদ 14.3-এর (3), (4) ও (5) থেকে]

অনুরূপে আমরা দেখাতে পারি যে রূপান্তরিত সমীকরণটির η^2 এবং δ^2-এর সহগ যথাক্রমে λ_2 ও λ_3।

এখন (2) সমীকরণে $2\xi\eta$-র সহগ

$$= al_1l_2 + bm_1m_2 + cn_1c_2 + \{f(m_1n_2 + m_2n_1) + g(l_1n_2 + l_2n_1) + h(l_1m_2 + l_2m_1)\}$$
$$= l_1(al_2 + hm_2 + gn_2) + m_1(hl_2 + bm_2 + fn_2) + n_1(gl_2 + fm_2 + cn_2)$$

$= l_1(\lambda_2 l_2) + m_1(\lambda_2 m_2) + n_1(\lambda_1 n_2)$

$= \lambda_2(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)$

$= 0$ [অনুচ্ছেদ 14.3-এর (3), (4) ও (5) থেকে]

অনুরূপে $2\eta\delta$ এবং $2\delta\zeta$ এর সহগ শূন্য হয়।

সুতরাং রূপান্তরিত সমীকরণ (2) এর আকার হয়

$x_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\delta^2 + 2(ul_1 + vm_1 + wn_1)\xi + 2(ul_2 + vm_2 + wn_2)\eta + 2(ul_3 + vm_3 + wn_3)\delta + d = 0$, কনিকয়েড্‌টির এই আকারকে ইহার মুখ্যআকার বলা হয়।

14.7 কনিকয়েড্ কেন্দ্র (Centre of a conicoid)

আমরা জানি যে যদি এইরূপ একটি S বিন্দু পাওয়া যায় যে P যখন কনিকয়েডের (কোয়াড্রিকের) যে কোন একটি বিন্দু হয় তখন SP সরলরেখার উপর অন্য একটি বিন্দু P' পাওয়া যায় যাতে $|SP'| = |SP|$ এবং P' বিন্দুটি কনিকয়েড্‌টির উপর অবস্থিত হয় তখন S বিন্দুটিকে কনিকয়েড্‌টির কেন্দ্র বলা হয়। একটি কনিকয়েডের কেন্দ্র থাকতে পারে বা নাও থাকতে পারে।

আমরা এখন দেখাব যে একটি কনিকয়েডের কেন্দ্র যদি মূলবিন্দু হয় তাহ'লে এটির সমীকরণে একঘাতী পদগুলির সহগ শূন্য (0) হয়।

মনে করি কনিকয়েড্‌টির সমীকরণ $F(x, y, z) = f(x, y, z) + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$,

যেখানে $f(x, y, z)$ হয় $F(x, y, z)$-এর সমঘাতী অংশ।

মনে করি (x', y', z') বিন্দুটি কনিকয়েড্‌টির উপর অবস্থিত।

তাহলে $f(x', y', z') + 2ux' + 2vy' + 2wz' + d = 0$ .... (1)

যেহেতু $(0, 0, 0)$ বিন্দুটি এটির কেন্দ্র, $(-x', -y', -z')$ বিন্দুটিও কনিকয়েড্‌টির উপর অবস্থিত হবে।

অর্থাৎ $f(-x', -y', -z') - 2ux' - 2vy' - 2wz' + d = 0$ .... (2)

কিন্তু $f(x, y, z)$ একটি দ্বিতীয় ডিগ্রীর সমঘাতী রাশিমালা।

সুতরাং $f(x', y', z') = f(-x', -y', -z')$

তখন (1) ও (2) থেকে পাই

$4ux' + 4vy' + 4wz' = 0$

বা, $2ux' + 2vy' + 2wz' = 0$ .... (3)

(3) সম্পর্কটি কনিকয়েড্‌টির উপর অবস্থিত সকল বিন্দুদ্বারা সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ $u = v = w = 0$.

14.8 কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় (Determination of the co-ordinates of the centre)

মনে করি (α, β, γ) বিন্দুটি $F(x, y, z) = f(x, y, z) + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ কনিকয়েড্‌টির কেন্দ্র।

এখন মূলবিন্দুটিকে (α, β, γ) বিন্দুটিতে স্থানান্তরিত করলে কনিকয়েড্‌টির যে রূপান্তরিত সমীকরণ পাওয়া যাবে তার x, y, z-এর সহগগুলি শূন্য (0) হবে। এখন স্থানাঙ্ক অক্ষগুলির দিক্‌গুলি অপরিবর্তিত রেখে মূলবিন্দুটিকে (α, β, γ) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে কনিকয়েড্‌টির রূপান্তরিত আকার হয়

$$F(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma) = 0$$

অর্থাৎ $(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy) + 2x(a\alpha + h\beta + g\gamma + u)$

$$+ 2y(h\alpha + b\beta + f\gamma + v) + 2z(g\alpha + f\beta + c\gamma + w) + F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

বা, $$f(x, y, z) + x\frac{\partial F}{\partial \alpha} + y\frac{\partial F}{\partial \beta} + z\frac{\partial F}{\partial \gamma} + F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

অর্থাৎ যদি (α, β, γ) বিন্দুটি কনিকয়েড্‌টির কেন্দ্র হয়

তাহলে $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0$

বা, $$\begin{aligned} a\alpha + h\beta + g\gamma &= -u \\ h\alpha + b\beta + f\gamma &= -v \\ g\alpha + f\beta + c\gamma &= -w \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

অর্থাৎ কেন্দ্রটির স্থানাঙ্ক (α, β, γ) হয় নিম্নোক্ত সমীকরণগুলির সমাধান

$$\begin{aligned} ax + hy + gz &= -u \\ hx + by + fz &= -v \\ gx + fy + cz &= -w \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

সুতরাং কেন্দ্রটি (2) দ্বারা নির্দেশিত সমতল তিনটির উপর অবস্থিত। এই সমতল তিনটিকে কেন্দ্রীয় তল (central planes) বলা হয়। কাজেই (α, β, γ) কেন্দ্রের সাপেক্ষে কনিকয়েড্‌টির সমীকরণ হয়

$$f(x, y, z) + d' = 0$$

যেখানে $d' = F(\alpha, \beta, \gamma)$

এখন $$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma) &= \alpha(a\alpha + h\beta + g\gamma + u) + \beta(h\alpha + b\beta + f\gamma + v) \\ &\quad + \gamma(g\alpha + f\beta + c\gamma + w) + u\alpha + v\beta + w\gamma + d \\ &= u\alpha + v\beta + w\gamma + d \quad [(1)\text{-এর দ্বারা}] \end{aligned}$$

সুতরাং কনিকয়েড্‌টির রূপান্তরিত সমীকরণ হয়

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + u\alpha + v\beta + w\gamma + d = 0$$

আবার যদি $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

নির্ণায়কে a, b, c, f, g, h-এর সহ উৎপাদকগুলি যথাক্রমে A, B, C, F, G, H হয়, তবে (2)-এর প্রথম সমীকরণটিকে A, দ্বিতীয়টিকে H এবং তৃতীয়টিকে G দিয়ে গুণ করে এবং তারপর সমীকরণগুলিকে যোগ করে পাই

$$\Delta x + (Au + Hv + Gw) = 0$$

অনুরূপে (2)-এর সমীকরণগুলিকে যথাক্রমে H, B, F দিয়ে গুণ করে ও যোগ করে পাই

$$\Delta y + (Hu + Bv + Fw) = 0$$

এবং (2)-এর সমীকরণগুলিকে যথাক্রমে G, F, C দিয়ে গুণ করে ও যোগ করে পাই

$$\Delta z + (Gu + Fv + Cw) = 0$$

অর্থাৎ কেন্দ্রের স্থানাঙ্কগুলি $x = -\frac{1}{\Delta}(Au + Hv + Gw)$,

$$y = -\frac{1}{\Delta}(Hu + Bv + Fw),$$

$$z = -\frac{1}{\Delta}(Gu + Fv + Cw),$$

যেখানে $A = bc - f^2, B = ca - g^2, C = ab - h^2, F = gh - af, G = hf - bg, H = fg - ch.$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ মনে করি $u\alpha + v\beta + w\gamma + d = d'$

অর্থাৎ $u\alpha + v\beta + w\gamma + d - d' = 0$

এই সম্পর্কটিকে (1) দ্বারা সূচিত সম্পর্কগুলির সঙ্গে যুক্ত করে এবং α, β, γ অপনয়ন করে আমরা পাই

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d-d' \end{vmatrix} = 0$$

বা, $$d' \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & u \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix} = S \text{ (ধরি)}$$

আমরা সহজেই দেখি যে,

$$S = -(Au + Hv + Gw)u - (Hu + Bv + Fw)v - (Gu + Fv + Cw)w + d\,\Delta.$$

$$\therefore \quad d' = \frac{S}{\Delta}$$

সুতরাং কনিকয়েড্‌টির রূপান্তরিত সমীকরণটি হয় $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + \frac{S}{\Delta} = 0$

যদি (2) দ্বারা সূচিত সমতল তিনটি একটি সরলরেখায় ছেদ করে তাহ'লে আমরা একটি বহুকেন্দ্রীয় রেখা (line of centres) পাই। যখন (2) দ্বারা সূচিত সমতল তিনটি সমাপতিত হয় তখন আমরা একটি বহুকেন্দ্রীয় তল (plane of centres) পাই। যদি (2) দ্বারা নির্দেশিত সমীকরণগুলির একটি অনন্য সমাধান পাওয়া যায় তখন কনিকয়েড়টিকে একটি সকেন্দ্র কনিকয়েড্ বলা হয়। এটির জন্য শর্ত হ'ল $\Delta \neq 0$, এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্কগুলি (3) থেকে পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. $3x^2 - y^2 - z^2 + 6yz - 6x + 6y - 2z - 2 = 0$ **কোয়াড্রিকটির মুখ্যদিক্‌গুলি এবং অনুসঙ্গী মুখ্যতলগুলি নির্ণয় করুন।**

এখানে $a = 3, b = -1, c = -1, h = 0, f = 3, g = 0, u = -3, v = 3, w = -1$

সুতরাং $A = bc - f^2 = 1 - 9 = -8,\ B = ca - g^2 = -3,\ C = ab - h^2 = -3$

এবং $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

$= abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 3 - 27 = -24$

সুতরাং নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির অর্থাৎ $\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (A + B + C)\lambda - \Delta = 0$ সমীকরণটির আকার হয় $\quad \lambda^3 - \lambda^2 - 14\lambda + 24 = 0$

বা, $\quad (\lambda + 4)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\therefore \quad \lambda = 2, 3, -4$

এখন নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ λ-এর জন্য অনুসঙ্গী মুখ্যদিক্‌টির কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী l, m, n নিম্নোক্ত সমীকরণগুলি সিদ্ধ করে

$(a - \lambda)l + hm + gn = 0 \qquad$ বা, $\quad (3 - \lambda) = 0,$

$hl + (b - \lambda)m + fn = 0 \qquad$ বা, $\quad (-1 - \lambda)m + 3n = 0$

$gl + fm + (c - \lambda)n = 0 \qquad$ বা, $\quad 3m + (-1 - \lambda)n = 0$

$\lambda = 2$-এর জন্য উপরোক্ত সমীকরণগুলি থেকে পাই

$l = 0,\ -3m + 3n = 0,\ 3m - 3n = 0.$

$\therefore \quad l : m : n = 0 : 1 : 1$

$\therefore \quad \lambda = 2$-এর অনুসঙ্গী মুখ্য দিক্‌টির দিগানুপাতগুলি 0, 1, 1 এবং মুখ্যতলটি

$$\lambda(lx + my + nz) + ul + vm + w = 0$$

বা, $2(0.x + y + z) - 3.0 + 3.1 - 1.1 = 0$

বা, $2(y + z) + z = 0$ বা, $y + z + 1 = 0$

$\lambda = 3$-এর জন্য আমরা পাই

$$-4m + 3n = 0,\ 3m - 4n = 0$$

$\therefore$ $m = 0,\ n = 0$

সুতরাং $\lambda = 3$-এর অনুসঙ্গী মুখ্যদিক্‌টির দিগানুপাতগুলি $0, 0, 1$ এবং মুখ্যতলটি

$$3(x + 0.y + 0.z) - 3.1 + 3.0 - 1.0 = 0$$

বা, $3x - 3 = 0$ বা, $x - 1 = 0$

এবং $\lambda = -4$-এর জন্য উপরোক্ত সমীকরণগুলি থেকে পাই

$$7l = 0,\ 3m + 3n = 0,\ 3m + 3n = 0,$$

অর্থাৎ $l = 0$, এবং $m = -n$.

অর্থাৎ $\lambda = -4$-এর অনুসঙ্গী মুখ্যদিক্‌টির দিগানুপাতগুলি $0, -1, 1$ এবং মুখ্যতলটি

$$-4(0.x - 1.y + 1.z) - 3.0 + 3(-1) + (-1).1 = 0$$

বা, $4y - 4z - 4 = 0$ বা, $y - z - 1 = 0$. (Answer)

উদাহরণ 2. $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 2x - 2y + 6z + 5 = 0$

কনিকয়েড্‌টির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন এবং মূলবিন্দুটি কেন্দ্রে স্থানান্তরিত করে কনিকয়েড্‌টির রূপান্তরিত সমীকরণটি বার করুন।

সমাধান : এখানে $a = 1, b = 3, c = 3, f = -1, g = 0, h = 0, u = -1, v = -1, w = 3, d = 5,$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 3 = 12 \neq 0$$

সুতরাং কনিকয়েড্‌টি একটি সকেন্দ্র কনিকয়েড্ অর্থাৎ এটির কেবলমাত্র একটি কেন্দ্র আছে। এটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক পাওয়া যায়

$$ax + hy + gz + u = 0,$$

$$hx + by + fz + v = 0,$$

$$gx + fy + cz + w = 0,$$

অর্থাৎ $x - 1 = 0,\ 3y - z - 1 = 0,\ -y + 3z + 3 = 0,$

সমীকরণ তিনটি সমাধান করে উপরোক্ত সমীকরণ তিনটি থেকে পাই $x = 1, y = 0, z = -1$

সুতরাং কেন্দ্রটির স্থানাঙ্ক $(1, 0, -1)$

এখন $d' = u\alpha + v\beta + w\gamma + d$

$= -1.1 + (-1).0 + 3(-1) + 5$

$= 1.$

সুতরাং কনিকয়েড্‌টির রূপান্তরিত সমীকরণ $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz + 1 = 0$ (Answer)

উদাহরণ 3. দেখান যে $26x^2 + 20y^2 + 10z^2 - 4yz - 16zx - 36xy + 52x - 36y - 16z + 25 = 0$ কোয়াড্রিকটির একটি বহুকেন্দ্রীয় রেখা আছে।

সমাধান ঃ কোয়াড্রিকটির কেন্দ্র নির্ণয় করবার সমীকরণগুলি যথাক্রমে

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ অর্থাৎ $26x - 18y - 8z + 26 = 0$ .... (1)

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ অর্থাৎ $-18x + 20y - 2z - 18 = 0$ .... (2)

$\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ অর্থাৎ $-8x - 2y + 10z - 8 = 0$ .... (3)

এখন (2) ও (3) নং সমীকরণ দুইটি যোগ করে এবং তারপর (-1) দিয়ে গুণ করলে (1)নং সমীকরণটি পাওয়া যায় অর্থাৎ উপরোক্ত সমীকরণত্রয়টি

$9x - 10y + z + 9 = 0$ [(2)-কে (-2) দ্বারা ভাগ করে]

এবং $4x + y - 5z + 4 = 0$ [(3)-কে (-2) দ্বারা ভাগ করে] সমীকরণ দুটির সমতুল্য।

যেহেতু উপরোক্ত সমীকরণ দুটি দ্বারা সূচিত সমতল দুটি সমান্তরাল নয় সেইজন্য তারা একটি সরলরেখায় ছেদ করে। সুতরাং প্রদত্ত কোয়াড্রিক্‌টির একটি বহুকেন্দ্রীয় রেখা আছে যা সমতল দুটির ছেদ রেখা। (প্রমাণিত)

উদাহরণ 4. দেখান যে $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2zx - 2xy - 3x + 3y - 3z + 5 = 0$ কোয়াড্রিকটির একটি বহুকেন্দ্রীয়তল আছে।

সমাধান ঃ এখানে কেন্দ্র নির্ণয় করবার সমীকরণগুলি যথাক্রমে

$2x + 2x - 2y - 3 = 0$

$2y - 2z - 2x + 3 = 0$

$2z - 2y + 2x - 3 = 0$

অর্থাৎ কেন্দ্রীয়তলগুলি অভিন্ন। সুতরাং কোয়াড্রিকটির একটি বহুকেন্দ্রীয়তল আছে যার সমীকরণ

$2x - 2y + 2z - 3 = 0$ (প্রমাণিত)

14.9 কনিকয়েডের শ্রেণীবিভাগ (মুখ্য আকার) [(Classification of conicoids (Principal form)]

মনে করি স্থানাঙ্ক অক্ষগুলি এইরূপে পরিবর্তন করা সম্ভব হয় যাতে দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণটির রূপান্তরের ফলে উদ্ভূত সমীকরণটিতে yz, zx, xy-এর সহগ শূন্য (0) হয়। তখন রূপান্তরিত সমীকরণটির আকারকে মুখ্য আকার বলা হয়।

মনে করি দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণটি

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Ux + 2Vy + 2Wz + D = 0 \qquad \text{.........(1)}$$

মুখ্য আকারটিতে পরিবর্তিত হয়।

তাহ'লে নিম্নলিখিত যে কোন একটি পরিস্থিতি সম্ভব :

(i) A, B, C-এর কেউই শূন্য (0) নয়।

এক্ষেত্রে সমীকরণ (1) টিকে $A\left(x + \frac{U}{A}\right)^2 + B\left(y + \frac{U}{B}\right)^2 + C\left(z + \frac{W}{C}\right)^2 = D^1$

আকারে লেখা যায়, যেখানে $D^1 = \frac{U^2}{A} + \frac{V^2}{B} + \frac{W^2}{C} - D.$

এখন মূলবিন্দুটিকে $\left(-\frac{u}{A}, \frac{-v}{B}, \frac{-w}{C}\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে সমীকরণটির আকার হয়

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D^1$$

এই সমীকরণটি একটি সকেন্দ্র কনিকয়েড্‌কে সূচিত করে যদি $D^1 \neq 0$. যদি A, B, C একই চিহ্নযুক্ত হয় তবে সমীকরণটি একটি উপবৃত্তককে সূচিত করে। উপবৃত্তকটি বাস্তব হবে যদি D^1 ও A-এর চিহ্ন একই হয় এবং কাল্পনিক হবে যদি D^1 ও A বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়।

যদি $A = B = C$ হয় তাহ'লে এটি একটি গোলককে সূচিত করে। A, B, C যে কোন দুটি একই চিহ্নযুক্ত (ধরি ধনাত্মক) হ'লে সমীকরণটি একটি একপত্রী পরাবৃত্তককে সূচিত করে, যদি $D^1 > 0$ হয় এবং দ্বিপত্রী পরাবৃত্তককে সূচিত করে যদি $D^1 < 0$ হয়।

যদি $D^1 = 0$ হয় তাহ'লে সমীকরণটি হয় একটি শঙ্কুকে (যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে) নয় তো একটি এক জোড়া সমতলকে সূচিত করে। অবশ্য এক্ষেত্রে A, B, C সকলেই একই চিহ্নযুক্ত নয়।

যদি A, B, C সকলেই একই চিহ্নযুক্ত হয় এবং $D^1 = 0$ তাহ'লে সমীকরণটি (0, 0, 0) বিন্দুটিকে সূচিত করে।

(ii) A, B, C যে কোন একটি শূন্য (0) হয়।

মনে করি $C = 0$ তাহলে সমীকরণ (1) টিকে

$A\left(x + \frac{U}{A}\right)^2 + B\left(y + \frac{V}{B}\right)^2 + 2Wz + D - \frac{U^2}{A} - \frac{V^2}{B} = 0$ আকারে লেখা যায়।

যদি $W \neq 0$ হয় তাহ'লে মূলবিন্দুটিকে $\left\{-\frac{U}{A}, -\frac{V}{B}, -\frac{1}{2W}\left(D - \frac{U^2}{A} - \frac{V^2}{B}\right)\right\}$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে সমীকরণটির রূপান্তরিত আকার হয়

$$Ax^2 + By^2 + 2Wz = 0$$

যদি $A \neq B$ হয় এবং A ও B একই চিহ্নযুক্ত হয় তাহ'লে এটি একটি উপবৃত্তীয় অধিবৃত্তককে সূচিত যদি $A \neq B$ এবং A ও B বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তাহ'লে এটি একটি পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তককে সূচিত করে।

আর $A = B$ হ'লে এটি একটি আবর্তন হাত অধিবৃত্তককে সূচিত করে। যদি $W = 0$ হয় তাহলে মূলবিন্দুটিকে $\left(\frac{-U}{A}, \frac{-V}{B}, 0\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে রূপান্তরিত সমীকরণটি হবে

$$Ax^2 + By^2 = D^1$$

যথা একটি বেলন অথবা একটি একজোড়া সমতলকে সূচিত করে।

(iii) A, B, C-এর যে কোন দুইটি শূণ্য (0) হয়।

মনে করি $B = C = 0$.

তাহ'লে সমীকরণ (1)-কে লেখা যায়

$$A\left(x + \frac{U}{A}\right)^2 + 2\sqrt{y} + 2Wz + D - \frac{U^2}{A} = 0 \;\ldots\ldots (2)$$ আকারে।

$2Vy + 2Wz + D\frac{-U^2}{A} = 0$ সমতলটিকে $y = 0$ সমতল ধরলে মূলবিন্দুটিকে $\left(\frac{-U}{A}, 0, 0\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে সমীকরণটির রূপান্তরিত আকার দাঁড়ায় $x^2 = 2ky$.

যদি V ও W শূণ্য (0) না হয় তাহ'লে সমীকরণটি অধিবৃত্তীয় বেলনকে সূচিত করে। আবার যদি $V = W = 0$ হয় তাহ'লে সমীকরণটির আকার হয় $x^2 = k$, যাহা একটি একজোড়া সমান্তরাল সমতলকে সূচিত করে। সমতল দুইটি বাস্তব হবে যদি $k > 0$ হয় এবং কাল্পনিক হবে যদি $k < 0$ হয়।

14.10 একটি কোয়াড্রিকের স্বভাবী আকার (Canonical form of the equation of a quadric)

কোয়াড্রিকের শ্রেণীবিভাগ করা হয় তাদের জ্ঞাত আকারের সমীকরণগুলি দ্বারা। এর জন্য একটি কোয়াড্রিকের সাধারণ আকারের সমীকরণকে এটির স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করা হয়, যেখানে xy, yz, zx-এর পদগুলি অনুপস্থিত থাকে এবং x, y, z-এর একঘাতী পদগুলি হয় সম্পূর্ণরূপে অনুপস্থিত থাকে অথবা সবচেয়ে কম সংখ্যায় থাকে।

একটি সমীকরণকে তার স্বভাবী আকারে পরিবর্তিত করার জন্য স্থানাঙ্ক অক্ষগুলিকে ঘূর্ণনের সাহায্যে তিনটি পরস্পর লম্ব মুখ্যদিক্‌গুলির সমান্তরাল দিক্‌গুলিতে পরিবর্তিত করা হয়। এই রূপান্তরের সাহায্যে yz, zx, xy যুক্ত

পদগুলিকে অপনয়ন করা যায়। তারপর মূলবিন্দুটিকে একটি উপযুক্ত বিন্দুতে স্থানান্তরের দ্বারা x, y, z-এর একঘাতী পদগুলিকে সম্পূর্ণভাবে অপনয়ন করা হয় অথবা সবচেয়ে কম সংখ্যায় নিয়ে যাওয়া হয়।

এই রূপান্তরগুলি দ্বারা সাধারণ সমীকরণটি স্বভাবী আকারে পরিবর্তিত হয়। অনেক সময় রূপান্তরের সাহায্যে ধ্রুবপদটিও অপসারিত করা হয়।

আমরা এখন নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির বীজের সংখ্যা অনুযায়ী কোয়াড্রিক্ তলগুলির স্বভাবী আকার প্রকাশ করব।

(a) তিনটি বীজ যারা কেউই শূন্য (0) নয় এবং একই চিহ্নযুক্ত $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = k$.

$k = 1$ হ'লে, উপবৃত্তক, $k = -1$ হ'লে কাল্পনিক উপবৃত্তক,

$k = 0$ হ'লে বিন্দু-উপবৃত্তক।

$\alpha = \beta = \gamma$ হ'লে গোলক।

(b) তিনটি বীজ যারা কেউই শূণ্য (0) নয় এবং সকলে একই চিহ্নযুক্ত নয় :

$\lambda x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 = 1$ একপত্রী পরাবৃত্তক ;

$\lambda x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 = 1$ দ্বিপত্রী পরাবৃত্তক;

$\lambda x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 = 0$, কোয়াড্রিক শঙ্কু।

(c) একটি বীজ শূণ্য (0) এবং অন্য দুইটি শূন্য (0) নয় :

$\lambda x^2 + \beta y^2 = 2rz$, উপবৃত্তীয় অধিবৃত্তক

$\lambda x^2 - \beta y^2 = 2rz$, পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তক, $(r \neq 0)$

$\lambda x^2 + \beta y^2 = 1$, উপবৃত্তীয় বেলন,

$\lambda x^2 - \beta y^2 = 1$, পরাবৃত্তীয় বেলন,

$\lambda x^2 - \beta y^2 = 0$, দুইটি পরস্পর ছেদীতল,

$\lambda x^2 + \beta y^2 = -1$ বা 0, কোন জ্যামিতিক সঞ্চারপথ নয়।

(d) কেবলমাত্র একটি বীজই শূণ্য নয় :

$x^2 = 2py, p \neq 0$, অধিবৃত্তীয় বেলন ;

$x^2 = \alpha^2, \alpha \neq 0$, একটি একজোড়া তল;

$x^2 = 0$, একটি একজোড়া সমাপতিত তল;

$x^2 + \alpha^2 = 0, \alpha \neq 0$, কোন জ্যামিতিক সঞ্চারপথ নয়।

14.11 স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করে কনিকয়েডের শ্রেণী বিভাজন (Classification of Conicoids by reduction to canonical form)

দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণটি

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

এই সমীকরণ দ্বারা সূচিত কনিকয়েড্‌টির নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটি

$$\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (A + B + C)\lambda - \Delta = 0,$$

যেখানে $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

এবং A, B, C হ'ল যথাক্রমে নির্ণায়ক Δ-টিতে a, b, c-এর সহ উৎপাদক সমূহ।

আমরা এখন কেন্দ্রের বিভিন্ন অবস্থা অনুযায়ী এই সাধারণ সমীকরণটিকে এটির স্বভাবী আকারে পরিবর্তিত করব।

ক্ষেত্র 1 : $\Delta \neq 0$

কেন্দ্রের স্থানাঙ্কগুলি সসীম ও অনন্য, এক্ষেত্রে কনিকয়েড্‌টির একটি অনন্য কেন্দ্র থাকে যা সসীম দূরত্বে অবস্থিত অর্থাৎ কনিকয়েডটি একটি সকেন্দ্র কনিকয়েড্। কেন্দ্রতে মূলবিন্দুটিকে স্থানান্তরিত করলে এটির রূপান্তরিত সমীকরণটি হয়

$$f(x, y, z) + \frac{S}{\Delta} = 0$$

এক্ষেত্রে নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির বীজ তিনটি অর্থাৎ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ কেউই শূণ্য (0) নয় এবং কনিকয়েড্‌টির তিনটি পৃথক মুখ্যতল থাকে। যদি তার কেন্দ্রটিকে মূলবিন্দু ও মুখ্যদিক্ তিনটিকে নতুন স্থানাঙ্ক অক্ষ ধরা হয় তাহ'লে সাধারণ সমীকরণটির পরিবর্তিত আকার হয়

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{S}{\Delta} = 0$$

যদি $S = 0$ হয় তবে তলটি একটি শঙ্কুকে বোঝায়। আর যদি $S \neq 0$ হয় তাহ'লে তলটি একটি উপবৃত্তক বা একটি গোলক বা একটি একপত্রী পরাবৃত্তক বা একটি দ্বিপত্রী পরাবৃত্তককে সূচিত করে।

ক্ষেত্র 2 : $\Delta = 0$

$Au + Hv + Gw \neq 0$, এক্ষেত্রে এটির কেন্দ্রটি অসীম দূরত্বে অবস্থিত এবং নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ ধরি λ_3, শূন্য (0 হয় [অনুচ্ছেদ 14.8-এর (3) থেকে এবং অনুচ্ছেদ 14.2-এর (6) থেকে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হই]

এক্ষেত্রে যে নতুন অক্ষতন্ত্রটি তিনটি পরস্পর লম্ব মুখ্যদিক্ ত্রয়ের সমান্তরাল তাহার সাপেক্ষে দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণটির পরিবর্তিত আকার হয়

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2x(ul_1 + vm_1 + wn_1) + 2y(ul_2 + vm_2 + wn_2) + 2z(ul_3 + vm_3 + wn_3) + d = 0$$

যেখানে l_i, m_i, n_i হয় x_i-এর অনুসঙ্গী, $i = 1, 2, 3.$

এক্ষেত্রে l_3, m_3, n_3-র মধ্যে সম্পর্কগুলি দাঁড়ায়

$gl_3 + fm_3 + cn_3 = 0$ [14.3 অনুচ্ছেদের (4) ও (5) থেকে]

ও $\quad hl_3 + bm_3 + fn_3 = 0.$

$$\therefore \quad \frac{l_3}{f^2 - bc} = \frac{m_3}{ch - fg} = \frac{n_3}{bg - hf}$$

বা, $$\frac{l_3}{A} = \frac{m_3}{H} = \frac{n_3}{G} = \frac{ul_3 + vm_3 + wn_3}{Au + Hv + Gw}$$

অর্থাৎ রূপান্তরিত সমীকরণটি এর সহগ শূন্য (0) হবে না। ($\because Au + Hv + Gw \neq 0$)

এখন $\quad ul_1 + vm_1 + wn_1 = p,$

$ul_2 + vm_2 + wn_2 = q,$

$ul_3 + vm_3 + wn_3 = r$ লিখলে রূপান্তরিত সমীকরণটি

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2px + 2qy + 2rz + d = 0$$

বা, $$\lambda_1\left(x + \frac{p}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y + \frac{q}{\lambda_2}\right)^2 + 2r\left\{z + \frac{1}{2r}\left(d - \frac{p^2}{\lambda_1} - \frac{q^2}{\lambda_2}\right)\right\} = 0$$

$\left\{\frac{-p}{\lambda_1}, -\frac{p}{\lambda_2} - \frac{1}{2r}\left(d - \frac{p^2}{\lambda_1} - \frac{q^2}{\lambda_2}\right)\right\}$ বিন্দুটিকে মূলবিন্দু ধরলে উপরোক্ত সমীকরণটি এটির স্বভাবী আকার অর্থাৎ $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2rz = 0, r \neq 0$ সমীকরণটিতে পরিবর্তিত হয়।

এই সমীকরণটি একটি উপবৃত্তীয় অধিবৃত্তককে সূচিত করে যদি λ_1 ও λ_2 একটি চিহ্নযুক্ত হয় অথবা একটি পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তককে সূচিত করে যদি λ_1 ও λ_2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়।

ক্ষেত্র 3 : $\Delta = 0$

$Au + Hv + Gw = 0, A \neq 0$

এক্ষেত্রে কেন্দ্রীয়তল তিনটি

$$ax + hy + gz + u = 0$$
$$hx + by + fz + v = 0$$
$$gx + fy + cz + w = 0$$

এই কেন্দ্রীয়তল তিনটি একটি সরলরেখায় ছেদ করে। অর্থাৎ কনিকয়েড্‌টির একটি বহুকেন্দ্রীয় রেখা থাকে এবং এটি সসীম দূরত্বে অবস্থিত হবে ($\because A \neq 0$)।

এক্ষেত্রে নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ শূন্য হবে এবং অন্য দুইটি বীজ শূণ্য (0) হবে না। ধরি $\lambda_3 = 0$। এখন (α, β, γ) বিন্দুটি যদি বহুকেন্দ্রীয় রেখার উপর একটি বিন্দু হয় তাহলে মূলবিন্দুটিকে (α, β, γ)-তে স্থানান্তরিত করলে এবং স্থানাঙ্ক অক্ষগুলিকে মুখ্যদিক্‌গুলির সমান্তরালভাবে নিলে কনিকয়েড্‌টির রূপান্তরিত সমীকরণ হয়

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + k = 0,$$

যেখানে $k = u\alpha + v\beta + w\gamma + d$

যদি $k = 0$ হয়, তাহলে সমীকরণটি একটি একজোড়া সমতলকে সূচিত করবে যখন λ_1 ও λ_2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় অথবা কোন জ্যামিতিক সঞ্চারপথ হবে না যখন λ_1 ও λ_2 একই চিহ্নযুক্ত হয়।

যদি $k \neq 0$ হয় তাহ'লে সমীকরণটি একটি উপবৃত্তীয় বেলনকে সূচিত করবে যখন λ_1 ও λ_2 একই চিহ্নযুক্ত এবং k তাদের বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়। অথবা একটি পরাবৃত্তীয় বেলনকে সূচিত করবে যখন λ_1 ও λ_2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

ক্ষেত্র 4 ঃ

$A = B = C = F = G = G = 0$ এবং $fu \neq gv$.

এক্ষেত্রে কেন্দ্রীয়তল তিনটিই সমান্তরাল। কারণ, $c = 0$ থেকে পাই

$\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$, $G = 0$ থেকে পাই $\frac{h}{b} = \frac{g}{f}$ এবং $A = 0$ থেকে পাই

$\frac{b}{f} = \frac{f}{c}$, অর্থাৎ $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$ এবং $\frac{h}{g} = \frac{b}{f} = \frac{f}{c}$

আবার যেহেতু $fu \neq gv$ অর্থাৎ $\frac{g}{f} \neq \frac{u}{v}$, প্রথম দুটি কেন্দ্রীয়তল অর্থাৎ $ax + hy + gz + u = 0$ ও $hx + by + fz + v = 0$ সমতল দুটি সমাপতিত নয়।

কাজেই কেন্দ্রীয়তলগুলি সমান্তরাল কিন্তু সমাপতিত নয়। সুতরাং বহুকেন্দ্রীয় রেখাটি অসীম দূরত্বে অবস্থিত।

এক্ষেত্রে নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির দুইটি বীজ শূণ্য (0) হবে। কারণ এক্ষেত্রে $\Delta = 0$ এবং $A + B + C = 0$। ধরি $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$। এখন ঘূর্ণন দ্বারা স্থানাঙ্ক অক্ষগুলিকে মুখ্যদিক্‌ তিনটি বরাবর পরিবর্তিত করলে, নতুন অক্ষত্রয়ের সাপেক্ষে কনিকয়েড্‌টির রূপান্তরিত সমীকরণ হবে

$$\lambda_1 x^2 + 2x(ul_1 + vm_1 + wn_1) + 2y(ul_2 + vm_2 + wn_2) + 2z(ul_3 + vm_3 + wn_3) + d = 0$$

যদি শূণ্য (0) বীজ দুটির অর্থাৎ λ_2 ও λ_3-এর অনুসঙ্গী কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী যথাক্রমে l_2, m_2, n_2 ও l_3, m_3, n_3 হয় তবে তারা $al + hm + gn = 0$ সিদ্ধ করে।

আমরা l_2, m_2, n_2, এমনভাবে পছন্দ করি যাতে $ul_2 + vm_2 + wn_2 = 0$ হয়।

তাহলে $ul_1 + vm_1 + wn_1 = p$ এবং $ul_3 + vm_3 + wn_3 = r$ ধরলে রূপান্তরিত সমীকরণটির আকার হবে

$$\lambda_1 x^2 + 2px + 2rz + d = 0$$

বা, $$\lambda_1\left(x + \frac{p}{\lambda_1}\right)^2 + 2r\left\{z + \frac{1}{2r}\left(d - \frac{p^2}{\lambda_1}\right)\right\} = 0$$

মূলবিন্দুটিকে $\left\{-\frac{p}{\lambda_1},\ 0,\ -\frac{1}{2r}\left(d - \frac{p^2}{\lambda_1}\right)\right\}$ বিন্দুটিতে স্থানান্তরিত করলে সমীকরণটির পরিবর্তিত আকার হয়

$$\lambda_1 x^2 + 2rz = 0$$

বা, $x^2 + \left(\frac{2r}{\lambda_1}\right)z = 0.$

এটিই কনিকয়েড্‌টির স্বভাবী আকার। সমীকরণটি একটি অধিবৃত্তীয় বেলন সূচিত করে।

ক্ষেত্র 5 :

$A = B = C = F = G = H = 0$ এবং $fu = gv = hw.$

এক্ষেত্রে কেন্দ্রীয়তলগুলি অভিন্ন এবং কনিকয়েড্‌টির একটি বহুকেন্দ্রীয় তল আছে। নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির দুইটি বীজ শূন্য (0) হবে। ধরি $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

মনে করি λ_1 বীজটির (যার মান শূণ্য নয়) অনুসঙ্গী কোসাইন দিগঙ্কগোষ্ঠী l_1, m_1, n_1, তাহলে

$$\frac{al_1 + hm_1 + gn_1}{l_1} = \frac{hl_1 + bm_1 + fn_1}{m_1} = \frac{gl_1 + fm_1 + cn_1}{n_1}$$

কিন্তু $f^2 - bc = g^2 - ca = h^2 - ab = 0.$

সুতরাং $al_1 + hm_1 + gn_1 = \sqrt{a}\left(\sqrt{a}l_1 + \sqrt{b}m_1 + \sqrt{c}n_1\right).$

অনুরূপে $hl_1 + bm_1 + fn_1 = \sqrt{b}\left(\sqrt{a}l_1 + \sqrt{b}m_1 + \sqrt{c}n_1\right)$

এবং $gl_1 + fm_1 + cn_1 = \sqrt{c}\left(\sqrt{a}l_1 + \sqrt{b}m_1 + \sqrt{c}n_1\right).$

$$\therefore \quad \frac{l_1}{\sqrt{a}} = \frac{m_1}{\sqrt{b}} = \frac{n_1}{\sqrt{c}}$$

আবার $fu = gv = hw.$

$$\therefore \quad \sqrt{bc}\,u = \sqrt{ca}\,v = \sqrt{ab}\,w$$

বা, $\frac{u}{\sqrt{a}} = \frac{v}{\sqrt{b}} = \frac{w}{\sqrt{c}}$ অর্থাৎ $\frac{u}{l_1} = \frac{v}{m_1} = \frac{w}{n_1}$

এখন যদি শূণ্য বীজ দুইটির অর্থাৎ λ_2 ও λ_3-র অনুসঙ্গী মুখ্যদিক্ দুইটি (l_2, m_2, n_2) ও (l_3, m_3, n_3) হয়,

তবে $$ul_2 + vm_2 + wn_2 = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$

এবং $ul_3 + vm_3 + wn_3 = l_1l_3 + m_1m_3 + n_1n_3 = 0$

কাজেই ঘূর্ণনের দ্বারা স্থানাঙ্ক অক্ষ তিনটিকে মুখ্য অক্ষগুলি বরাবর আনলে কনিকয়েড্‌টির রূপান্তরিত সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$\lambda_1x^2 + zx(ul_1 + vm_1 + wn_1) + d = 0$$

বা, $\lambda_1x^2 + zxp + d = 0$

বা, $\lambda_1\left(x + \frac{p}{\lambda_1}\right)^2 = d - \frac{p^2}{\lambda_1} = 0,$

যেখানে $p = ul_1 + vm_1 + wn_1.$

এখন মূলবিন্দুকে $\left(\frac{-p}{\lambda_1}, 0, 0\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে সমীকরণটির পরিবর্তিত আকার হয়

$$\lambda_1x^2 + k = 0, \text{ যেখানে } k = d - \frac{p^2}{\lambda_1}$$

এটিই নির্ণেয় স্বভাবী আকার, এখন λ_1 ও k বিপরীত চিহ্নযুক্ত হ'লে এটি একটি একজোড়া সমান্তরাল সমতল সূচিত করে এবং λ_1 ও k একই চিহ্নযুক্ত হ'লে এটি কোন জ্যামিতিক সঞ্চারপথই সূচিত করে না। আবার $k = 0$ হ'লে এটি একটি একজোড়া সমাপতিত সমতলকে বুঝায়।

আমরা এখন এই রূপান্তরগুলি সংক্ষেপে সারিনিবদ্ধ আকারে প্রকাশ করব।

কেন্দ্র	শর্ত	কোয়াড্রিকের প্রকার
একটি মাত্র কেন্দ্র সসীম দূরত্বে	$\Delta \neq 0$	উপবৃত্তক, শঙ্কু, পরাবৃত্তক
একটি মাত্র কেন্দ্র অসীম দূরত্বে	$\Delta = 0, Au + Hv + Gw \neq 0$	অধিবৃত্তক
বহুকেন্দ্রীয় রেখা সসীম দূরত্বে (কেন্দ্রীয় তলগুলি একটি সরলরেখায় ছেদ করে)	$\Delta = 0, Au + Hv + Gw = 0,$ $A \neq 0$	এক জোড়া অসমান্তরাল সমতল, উপবৃত্তীয় বা পরাবৃত্তীয় বেলন।
বহুকেন্দ্রীয় রেখা অসীম দূরত্বে (কেন্দ্রীয় তলগুলি সমান্তরাল)	$A = B = C = 0, F = G = H = 0,$ $fu \neq gu$	অধিবৃত্তীয় বেলন
বহুকেন্দ্রীয় তল (কেন্দ্রীয়তলগুলি সমাপতিত)	$A = B$	একজোড়া সমান্তরাল সমতল

14.12 পূর্ণবর্গ পদ্ধতিতে রূপান্তর (Reduction by the method of perfect square)

এখানে আমরা দুটি পৃথক ক্ষেত্র আলাদাভাবে পর্যালোচনা করব।

ক্ষেত্র 1. : $A = B = C = F = G = H = 0$ এবং $fu = gu = hw$। এক্ষেত্রে পূর্বের অনুচ্ছেদ অনুযায়ী

$$\frac{u}{\sqrt{a}} = \frac{v}{\sqrt{b}} = \frac{w}{\sqrt{c}} = k \text{ (ধরি)}$$

তাহলে দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণ $F(x, y, z) \equiv f(x, y, z) + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ টিকে লেখা যায় নিম্নলিখিত আকারে

$$\left(\sqrt{a}x + \sqrt{b}y + \sqrt{c}z\right)^2 + 2(ux + vy + wz) + d = 0$$

বা, $$\left(\sqrt{a}x + \sqrt{b}y + \sqrt{c}x\right)^2 + 2k\left(\sqrt{a}x + \sqrt{b}y + \sqrt{c}z\right) + d = 0$$

এটি দুটি সমান্তরাল সমতলকে সূচিত করে যাদের সমীকরণ $\left(\sqrt{a}x + \sqrt{b}y + \sqrt{c}z\right)$-এর দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করে পাওয়া যায়।

ক্ষেত্র 2 : $A = B = C = F = G = H = 0$ এবং $fu \neq gv$.

এক্ষেত্রে সাধারণ সমীকরণটিকে $\left(\sqrt{a}x + \sqrt{b}y + \sqrt{c}z + k\right)^2 = 2x\left(k\sqrt{a} - u\right) + 2y\left(k\sqrt{b} - v\right)$ $+ 2x\left(k\sqrt{c} - w\right) + k^2 - d$ আকারে প্রকাশ করা যেতে পারে [$\because f^2 = bc, g^2 = ac$ এবং $h^2 = ab$]

আমরা এখন k-কে এমনভাবে বাছাই করি যাতে

$$\sqrt{a}x + \sqrt{b}y + \sqrt{c}z + k = 0$$

$2x\left(k\sqrt{a}-u\right) + 2y\left(k\sqrt{b}-v\right) + 2z\left(k\sqrt{c}-w\right) + k^2 - d$ সমতল দুটি সমকোণে অবস্থান করে।

তাহ'লে $\sqrt{a}\left(k\sqrt{a} - u\right) + \sqrt{b}\left(k\sqrt{b} - v\right) + \sqrt{c}\left(k\sqrt{c} - w\right) = 0$

বা, $k(a + b + c) = u\sqrt{a} + v\sqrt{b} + w\sqrt{c}$

$$\therefore \quad k = \frac{u\sqrt{a} + v\sqrt{b} + w\sqrt{c}}{a + b + c}$$

k-এর এই মানের জন্য সাধারণ সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$\left(\frac{\sqrt{a}x+\sqrt{b}y+\sqrt{c}z+k}{\sqrt{a+b+c}}\right)^2 = \lambda\cdot\frac{2x\left(k\sqrt{a}-u\right)+2y\left(k\sqrt{b}-v\right)+2z\left(k\sqrt{c}-w\right)+k^2-d}{2\sqrt{\left(k\sqrt{a}-u\right)^2+\left(k\sqrt{b}-v\right)^2+\left(k\sqrt{c}-w\right)^2}}$$

আকারে। আবার একটি যোগ্য নতুন অক্ষতন্ত্র পছন্দের দ্বারা সমীকরণটিকে লিখতে পারি $X^2 = \lambda Y$ আকারে। এটি একটি অধিবৃত্তীয় বেলনকে সূচিত করে।

14.13 রূপান্তর পদ্ধতির সাধারণ ক্রম (General order of procedure of reduction)

দ্বিঘাত সমীকরণটির জন্য Δ নির্ণায়কটির মান নির্ণয় করুন এবং নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটি গঠন করুন।

(a) যদি নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটির বীজগুলি অর্থাৎ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ কোনটিই শূণ্য (0) না হয় (এক্ষেত্রে $\Delta \neq 0$), তাহ'লে $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0$ থেকে কনিকয়েড্‌টির কেন্দ্র (α, β, γ) নির্ণয় করুন। তারপর মূলবিন্দুটিকে কেন্দ্রে স্থানান্তরিত করে এবং অক্ষগুলিকে মুখ্য অক্ষগুলির সঙ্গে সমাপতিত করে রূপান্তরিত সমীকরণটি

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + (u\alpha + v\beta + w\gamma + d) = 0$$

আকারে প্রকাশ করুন। এক্ষেত্রে কনিকয়েড্‌টি হ'তে পারে (i) একটি উপবৃত্তক, (ii) একটি একপত্রী পরাবৃত্তক, (iii) একটি দ্বিপত্রী পরাবৃত্তক, অথবা (iv) একটি শঙ্কু।

(b) যদি কেবলমাত্র একটি বীজ λ_3 (ধরি) শূণ্য (0) হয়, (এক্ষেত্রে $\Delta = 0$), তাহ'লে $\lambda_3 = 0$ জন্য মুখ্যদিক্‌ (l_3, m_3, n_3)-কে বের করুন

$\frac{\partial f}{\partial l_3} = \frac{\partial f}{\partial m_3} = \frac{\partial f}{\partial n_3} = 0$ সমীকরণ তিনটির যে কোন দুটি সাহায্যে এবং তারপর $k = ul_3 + vm_3 + wn_3$ থেকে k-এর মান বার করুন। যদি $k \neq 0$ হয় তাহলে কনিকয়েড্‌টি স্বভাবী আকার হয়

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2kz = 0$$

যা একটি উপবৃত্তীয় অধিবৃত্তক বা একটি পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তক। যদি $k = 0$ হয় তাহ'লে এটির একটি বহুকেন্দ্রীয় রেখা থাকে যা

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ সমীকরণ তিনটির যে কোন দুইটি থেকে পাওয়া যায়। সরলরেখাটির উপর যে কোন বিন্দু (α, β, γ)-কে কেন্দ্র হিসাবে ধরুন এবং রূপান্তরিত সমীকরণটি হবে

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + (u\alpha + u\beta + w\gamma + d) = 0.$$

এটি একটি উপবৃত্তীয় বেলন অথবা একটি পরাবৃত্তীয় বেলন অথবা একটি একজোড়া অসমান্তরাল সমতল।

(c) যদি $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$-এর মধ্যে দুইটি শূণ্য (0) হয়, (এক্ষেত্রে $\Delta = 0$ ও $A + B + C = 0$) তাহ'লে দ্বিঘাত যুক্ত পদগুলি অর্থাৎ $f(x, y, z)$ একটি পূর্ণবর্গ গঠন করবে। এক্ষেত্রে সমীকরণটি হয় দুইটি সমান্তরাল সমতলরূপে নয়তো একটি অধিবৃত্তীয় বেলনরূপে প্রকাশ করা যায় (অনুচ্ছেদ 14.12-এর ক্ষেত্র 1. অথবা ক্ষেত্র 2. অনুযায়ী অগ্রসর হয়ে)।

উদাহরণ 1. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy - 2x + 4y - 2z - 5 = 0$ সমীকরণটি তার স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করুন।

সমাধান : এখানে $a = 1, b = 4, c = 1, f = -2, g = 1, h = -2, u = -1, v = 2, w = -1$ এবং $d = -5$

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$f^2 - bc = g^2 - ca = h^2 - ab = 0, gh - af = hf - bg = fg - ch = 0$$

অর্থাৎ $A = B = C = F = G = H = 0.$

আবার $uf = vg = wh = 2$। এখন নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটি

$$\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (A + B + C)\lambda - \Delta = 0$$

বা, $\lambda^3 - 6\lambda^2 = 0$ বা, $\lambda^2(\lambda - 6) = 0$

বা, $\lambda = 0, 0, 6.$ এটির দুইটি বীজ শূণ্য।

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণটির দ্বিঘাতযুক্ত পদগুলি একটি পূর্ণবর্গ গঠন করে। সমীকরণটিকে আমরা নিম্নোক্ত রূপে লিখতে পারি

$$(x - 2y + z)^2 - 2x + 4y - 2z - 5 = 0$$

বা, $$\left(\frac{x - 2y + z}{\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{2(x - 2y + z)}{6} - \frac{5}{6} = 0$$

$x - 2y + z = 0$ সমতলটিকে $X = 0$ সমতল হিসাবে ধরলে উপরোক্ত সমীকরণ থেকে পাই

$$X^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}X - \frac{5}{6} = 0$$

বা, $6X^2 - 2\sqrt{6}X - 5 = 0$

(সমীকরণটির বামপক্ষকে দুটি রৈখিক রাশিমালার গুণফল হিসাবে প্রকাশ করে আমরা দেখি যে প্রদত্ত সমীকরণটি দুটি সমান্তরাল সমতলকে সূচিত করে।)

উদাহরণ 2. $2x^2 + 3z^2 + 16x - 6z + 29 = 0$ সমীকরণটিকে এটির স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করুন এবং এটি কি প্রকারের কোয়াড্রিক্ সূচিত করে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $a = 2, b = 0, c = 3, h = 0, f = 0, g = 0, u = 8, v = 0, w = -3, d = 29.$

সুতরাং $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

এখানে নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটি $\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2)\lambda - \Delta = 0$

$[\because\ A = bc - f^2, B = ca - g^2, C = ab - h^2]$

বা, $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$

বা, $\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

বা, $\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

অর্থাৎ $\lambda = 2, 3, 0.$

মনে করি $\lambda = 0$-এর অনুসঙ্গী মুখ্যদিক্‌টির কোসাইন্ দিগঙ্কগোষ্ঠী l_3, m_3, n_3, তাহলে আমরা পাই

$2l_3 = 0$ $[al_3 + hm_3 + gn_3 = 0$ থেকে$]$

$3n_3 = 0$ $[gl_3 + fm_3 + cn_3 = 0$ থেকে$]$

$\therefore\quad l_3 = 0, n_3 = 0$

এখন যেহেতু $l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1$, সুতরাং $m_3^2 = 1$ বা, $m_3 = 1$ সুতরাং কোসাইন্ দিগঙ্কগোষ্ঠী হয় 0, 1, 0,

$\therefore\quad ul_3 + vm_3 + wn_3 = 8.0 + 0.1 - 3.0 = 0$

অর্থাৎ প্রদত্ত কোয়াড্রিকটির একটি বহুকেন্দ্রীয় রেখা আছে যার সমীকরণ $2x + 8 = 0,\ 3z - 3 = 0$

$[ax + hy + gz = -u$ এবং $gx + fy + cz = -w$ থেকে$]$

বা, $x + 4 = 0, z - 1 = 0$

মনে করি (α, β, γ) বিন্দুটি কোয়াড্রিক্‌টির একটি কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক। তাহ'লে $\alpha = -4, \gamma = 1$

$$\therefore\quad u\alpha + v\beta + w\gamma + d = 8(-4) + 0.\beta + (-3).1 + 29$$

$$= -32 - 3 + 29 = -6$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্বভাবী আকারটি হয়

$$2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$$

বা, $2x^2 + 3y^2 = 6$

বা, $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$

অর্থাৎ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি উপবৃত্তীয় বেলনকে সূচিত করে। (Answer)

উদাহরণ 3. $2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$

সমীকরণটিকে তার স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করুন এবং এটি কি প্রকারের কোয়াড্রিক্‌কে সূচিত করে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $a = 2, b = -7, c = 2, f = -5, g = -4, h = -5, u = 3, u = 6, w = -3,$ এবং $d = 5.$

$\therefore \quad \Delta = abc = 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 2.(-7).2 + 2.(-5)(-4)(-5) - 2.25 - (-7).16 - 2.25$

$= -28 - 200 - 50 + 112 - 50 = -216 \neq 0$

অর্থাৎ এটি একটি সকেন্দ্র কনিকয়েড্।

এক্ষেত্রে নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটি

$\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (A + B + C)\lambda - \Delta = 0$

বা, $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 90\lambda + 216 = 0$

বা, $(\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda + 12) = 0$

$\therefore$ $\lambda = 3, 6, -12,$ অর্থাৎ বীজ তিনটির কোনটিই শূণ্য নয়। কেন্দ্রটির স্থানাঙ্কগুলি

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$

সমীকরণগুলি থেকে পাওয়া যায় অর্থাৎ $2x - 5y - 4z + 3 = 0$

$-5x - 7y - 5z + 6 = 0$

$-4x - 5y + 2z - 3 = 0$

উপরোক্ত সমীকরণগুলি সমাধান করে পাই $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = \frac{4}{3}.$

$\therefore \quad \alpha = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{1}{3}, \gamma = \frac{4}{3}.$

এখন $d' = u\alpha + u\beta + w\gamma + d = 3\left(\frac{1}{3}\right) + 6\left(\frac{-1}{3}\right) - 3\left(\frac{4}{3}\right) + 5 = 0.$

$\therefore$ সমীকরণটির স্বভাবী আকার হয়

$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d' = 0$

বা, $3x^2 + 6y^2 - 12z^2 = 0$

বা, $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$ যা একটি শঙ্কুকে সূচিত করে। (Answer)

উদাহরণ 4. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx + x - 4y + z + 1 = 0$ সমীকরণটিকে তার স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করুন এবং দেখান যে এটি দ্বারা সূচিত কোয়াড্রিক্‌টি একটি অধিবৃত্তীয় বেলন।

সমাধান : এখানে $a = 1, b = 1, c = 1, h = -1, f = -1, g = 1, u = \frac{1}{2}, v = -2, w = \frac{1}{2}, d = 1.$

সুতরাং $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 1 + 2 - 1 - 1 - 1 = 0$

এখন $\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (A + B + C)\lambda - \Delta = 0$

বা, $\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$ সমীকরণটির বীজগুলি $3, 0, 0.$

আবার এখানে $uf = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}, vg = -2(1) = -2.$ অর্থাৎ $uf \neq vg.$ সুতরাং দ্বিঘাতযুক্ত পদগুলি একটি পূর্ণবর্গ গঠন করবে। প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নোক্ত আকারে লেখা যেতে পারে

$$(x - y + z)^2 + x - 4y + z + 1 = 0$$

বন্ধনীর মধ্যের রাশিমালাটির সঙ্গে একটি ধ্রুবক যোগ করে এবং তার জন্য ডানদিকে প্রয়োজনীয় পদগুলি যোগ করে পাই $(x - y + z + k)^2 = -x + 4y - z - 1 + k^2 + 2k(x - y + z)$ .... (1)

বা, $(x - y + z + k)^2 = (2k - 1)x + (4 - 2k)y + (2k - 1)z + k^2 - 1$

আমরা এখন k-কে এমনভাবে পছন্দ করি যাতে $x - y + z + k = 0$

এবং $(2k - 1)x + (4 - 2k)y + (2k - 1)z + k^2 - 1 = 0$ সমতল দুটি সমকোণে থাকে। তাহ'লে

$(2k - 1).1 + (4 - 2k)(-1) + (2k - 1).1 = 0$ হবে অর্থাৎ $k = 1.$

$k = 1$ -এর জন্য সমীকরণ (1)-এর আকার হয়

$$(x - y + z + 1)^2 = x + 2y + z$$

বা, $$\left(\frac{x - y + z + 1}{\sqrt{1 + 1 + 1}}\right)^2 . 3 = \frac{x + 2y + z}{\sqrt{1 + 4 + 1}}\sqrt{6}$$

এখন $Y = \frac{x - y + z + 1}{\sqrt{3}}$ এবং $X = \frac{x + 2y + z}{\sqrt{6}}$ লিখলে সমীকরণটির পরিবর্তিত আকার হয় $3Y^2 = \sqrt{6}\,X$ এটিই সমীকরণটির স্বভাবী আকার এবং এটি একটি অধিবৃত্তীয় বেলনকে সূচিত করে। (প্রমাণিত)

উদাহরণ 5. $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2yz - 2xy + 2x + 12y + 10z + 20 = 0$ সমীকরণটিকে এটির স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করুন এবং সমীকরণটি দ্বারা তলটি কি তা নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $a = 3, b = 5, c = 3, f = -1, g = 1, h = -1, u = 1, v = 6, w = 5, d = 20.$

এখন . $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$

অর্থাৎ এটি একটি সকেন্দ্র কোয়াড্রিক্। এটির কেন্দ্র (α, β, γ)-কে পাওয়া যায়

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \text{ অর্থাৎ } 3x - y + z + 1 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ অর্থাৎ } -x + 5y - z + 6 = 0,$$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ অর্থাৎ $x - y + 3z + 5 = 0$ সমীকরণ তিনটির সমাধান করে। সমীকরণগুলি সমাধান করে পাই

$$\alpha = -\frac{1}{6}, \beta = -\frac{5}{3}, \gamma = -\frac{13}{6}$$

আবার এক্ষেত্রে নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটি

$$\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (ab + bc + ca - f^2 - g^2 - h^2)\lambda - \Delta = 0$$

অর্থাৎ $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$

বা, $(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0$

$\therefore$ $\lambda = 2, 3, 6$ অর্থাৎ বীজগুলি কোনটিই শূণ্য (0) নয়। সুতরাং সমীকরণটির স্বভাবী আকার হবে

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d' = 0,$$

এখানে $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$ এবং $d' = u\alpha + v\beta + w\gamma + d$

$$= \frac{-1}{6} + 6\left(\frac{-5}{3}\right) + 5\left(\frac{-13}{6}\right) + 20$$

$$= -1$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটির স্বভাবী আকার $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 1 = 0$

এটি একটি উপবৃত্তককে সূচিত করে। (Answer)

উদাহরণ 6. $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2zx + 1 = 0$ সমীকরণটিকে স্বভাবী আকারে পরিবর্তিত করুন এবং দেখান যে সমীকরণটি কোন জ্যামিতিক সঞ্চারপথকে সূচিত করে না।

এখানে $a = 1, b = 3, c = 3, h = f = g = -1, u = v = w = 0, d = 1$

সুতরাং $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

আবার এখানে নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটি

$$\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (A + B + C)\lambda - \Delta = 0$$

বা, $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 12\lambda = 0$

বা, $\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$

$\therefore \quad \lambda = 3, 4, 0.$

মনে করি শূণ্য বীজটির অনুসঙ্গী মুখ্যদিক্‌টির কোসাইন্ দিগঙ্কগোষ্ঠী হয় l_3, m_3, n_3, এখন $u = v = w = 0$

$\therefore \quad k = ul_3 + vm_3 + wn_3 = 0.l_3 + 0.m_3 + 0.n_3 = 0.$

অর্থাৎ কোয়াড্রিক্‌টির একটি বহুকেন্দ্রীয় রেখা আছে যা

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ অর্থাৎ $x - y - z = 0,$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ অর্থাৎ $-x + 3y - z = 0,$

এবং $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ অর্থাৎ $x + y - 3z = 0$

সমীকরণ তিনটির যে কোন দুইটি দ্বারা সূচিত হয়। প্রথম দুইটি সমীকরণ দ্বারা সরলরেখাটিকে সূচিত করে আমরা সহজেই দেখি যে (2, 1, 1) বিন্দুটি একটি কেন্দ্র

[যেহেতু $x - y - z = 0, -x + 3y - z = 0$ সমীকরণ দুটি

$x - y - z + (-x + 3y - z) = 0,\ x - y - z = 0$

বা, $y - z = 0,\ x - y - z = 0$ সমীকরণ দুটির সমতুল্য]

$\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1$ ধরলে $d' = u\alpha + v\beta + w\gamma + d = 0.2 + 0.1 + 0.1 + 1 = 1$

সমীকরণটির স্বভাবী আকারটি হয় $3x^2 + 4y^2 + 1 = 0$

এটি কোন জ্যামিতিক সঞ্চারপথকে সূচিত করে না। (Answer)

14.14 অনুশীলনী (সংকেতসহ উত্তরমালা)

(1) নিম্নোক্ত কনিকয়েডটির মুখ্যদিক নির্ণয় করুন।

$8x^2 + 7y^2 + 3z^2 - 8yz + 4zx - 12xy + 2x - 8y + 1 = 0$

[সংকেতঃ এক্ষেত্রে মুখ্যতল নির্ণয় করার জন্য Δ-র মান নির্ণয় করুন, উদাহরণমালার 5 নম্বর অঙ্ক অনুযায়ী নিরূপক ত্রিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় করুন এবং তার থেকে মুখ্যদিকটির দিক্‌নির্দেশক কোসাইনগুলির মান নির্ণয় করুন]

$\left[\text{উত্তর : } \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right); \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right); \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right]$

(2) দেখান যে $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - 2x - 4y - 2z + 3 = 0$ কোয়াড্রিকটির একটিই কেন্দ্র আছে।

[সংকেতঃ উদাহরণের 3নং সমস্যাটি লক্ষ্য করুন। প্রদত্ত সমীকরণ থেকে $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ এই শর্তটি পালন স্বাপেক্ষে যে তিনটি সমীকরণ পাওয়া যায় সেগুলিকে সমাধান করলে একটিমাত্র বাস্তব সমাধান পাওয়া যাবে]

(3) $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 2x - 2y + 6z + 5 = 0$ কনিকয়েড্‌টির কেন্দ্রটি নির্ণয় করুন এবং কেন্দ্রটিকে মূলবিন্দু ধরে এর পরিবর্তিত সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[উত্তর: $(1, 0, -1)$; $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz + 1 = 0$]

[সংকেতঃ উদাহরণের 3নং সমস্যা অনুযায়ী এই সমস্যাটির সমাধান করুন]

(4) দেখান যে $2y^2 - 2yz + 2zx - 2xy - x - 2y + 3z - 2 = 0$ কনিকয়েড্‌টির একটি বহুকেন্দ্রীয় রেখা আছে।

[সংকেতঃ এক্ষেত্রে কেন্দ্র নির্ণায়ক সমীকরণ সমূহ (2নং সমস্যা দ্রষ্টব্য) পরস্পর নির্ভরশীল সমাধান দেয়, একক সমাধান দেয় না, সেক্ষেত্রে পরস্পর নির্ভরশীল অনেক কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক পাওয়া যাবে, সেই কেন্দ্রসমূহ একটি সরলরেখায় অবস্থিত]

(5) $3x^2 - y^2 - z^2 + 6yz - 6x + 6y - 2z + 8 = 0$ কোয়াড্রিক্‌টির মুখ্যতলগুলির সমীকরণ বার করুন।

[উত্তর: $y + z + 1 = 0$, $x = 1$, $y - z = 1$]

[সংকেতঃ নিরূপকের ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান থেকে λ-র মান নির্ণয় করুন। λ-এর বিভিন্ন মানের জন্য মুখ্য দিকের দিক্‌যুক্ত কোসাইনের মান পাব। সেখান থেকে মুখ্য তলের সমীকরণ নির্ণয় করুন]

(6) b ও v-এর কোন মানগুলির জন্য $2x^2 + by^2 - 3z^2 - 4xy - 2yz + 2zx + 2x - 2vy + 8z + 3 = 0$ কোয়াড্রিক্‌টির একটি বহুকেন্দ্রীয় রেখা থাকবে তা নির্ণয় করুন। [উত্তর: $b = 2$, $v = 1$]

[সংকেতঃ অনুশীলনী 4-এর মত করে ভাবুন]

(7) দেখান যে $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx + 2x - 2y + 2z + 1 = 0$ সমীকরণটি একটি একজোড়া সমাপতিত সমতলকে সূচিত করে।

[সংকেতঃ সমীকরণটি একঘাত বিশিষ্ট একটি সমীকরণের পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করুন]

(8) দেখান যে $5x^2 - y^2 + z^2 + 6zx + 4xy + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$ সমীকরণটি একটি শঙ্কুকে সূচিত করে।

[সংকেতঃ উদাহরণের 3-নং সমস্যা দ্রষ্টব্য]

(9) দেখান যে $x^2 - y^2 + 2yz - 2zx - x - y + z = 0$ সমীকরণটি একটি পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তককে সূচিত করে।

[সংকেতঃ এক্ষেত্রে দেখান যে $\Delta = 0$ এবং $Au + Hv + Gw \neq 0$]

(10) নিম্নোক্ত সমীকরণটিকে স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করুন এবং সমীকরণটি দ্বারা কি প্রকার কোয়াড্রিক সূচিত হয় তা নির্ণয় করুন।

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$$

[উত্তর: $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$, উপবৃত্তক]

[সংকেতঃ উদাহরণ 5 নং সমস্যার সাহায্য নিন]

14.15 সারাংশ

14.0 অনুচ্ছেদে বিষয় পরিচিতি অংশটি ভালভাবে আবার লক্ষ্য করুন। তাহলেই এই অধ্যায়ের সারাংশ বোঝা যাবে, উদাহরণমালা ও অনুশীলনীর অঙ্কগুলো করুন।

(1) J. G. Chakravorty & P. R. Ghosh : Advanced analytical Geometry.

(U. N. Dhar, Kolkata, 1995)

(3) A. Kurosh : Higher Algebra, (Mir., 1985)

পরিভাষা (বাংলা হতে ইংরাজী)

অক্ষ Axis

অক্ষতন্ত্রের পরিবর্তন Transformation of axes

অর্ধশিরঃ কোণ Semivertical angle

অধিবৃত্ত Parabola

অধিবৃত্তক Paraboloid

পরাবৃত্তীয় অধিবৃত্তক Hyperbolic paraboloid

সুষম অপেক্ষক Homogeneous function

অব্যয় Invariant

অভিলম্ব Normal

আদিবিন্দু Initial point

আবর্তিত বক্রতল Surface of revolution

উপবৃত্তক Ellipsoid

উপবৃত্তক (কেন্দ্রীয়) Central ellipsoid

উপবৃত্তক (আবর্তিত) Ellipsoid of revolution

উপাংশ Component

উল্লম্ব Vertical

কনিক Conic

কনিকয়েড Conicoid

কারিকারেখা/জনক Generator

গোলক Sphere

উপগোলক Spheroid

ঘনফল Volume

ঘনক Cube

ঘাত Degree

চতুস্তলক Tetrahedron

চোঙ/বেলন Cylinder

সরলবৃত্তীয় চোঙ Right circular cylinder

ছেদিতাংশ Intercept

দিকযুক্ত রেখাংশ Directed segment

দিক্‌নির্দেশক কোসাইন/কোসাইন দিগাঙ্কগোষ্ঠী Directed cosine

দিকনির্দেশক অনুপাত Directed ratio

দ্বিঘাত বক্রতল Quadric surface

দেশ Space

নিয়ামক রেখা Guiding curve

নিয়ামক গোলক Director sphere

নিরূপক Discriminant

নির্ণায়ক Determinant

নৈকতলীয় সরলরেখা Skew lines

প্রতিসম Symmetrical

প্রতিসাম্য Symmetry

পরাবৃত্ত Hyperbola

সমপরাবৃত্ত Rectangular hyperbola

পরাবৃত্তক Hyperboloid

একপত্রী পরাবৃত্তক Hyperboloid of one sheet

দ্বিপত্রী পরাবৃত্তক Hyperboloid of two sheets

বক্রতল Surface

বেলনকার Cylindrical

বৃত্ত Circle

রেখা Curve

লম্ব Perpendicular

লম্ব সমদ্বিখণ্ডক Perpendicular bisector

লম্ব অভিক্ষেপ Projection

শঙ্কু Cone

বিপরীত শঙ্কু Reciprocal cone

সরলবৃত্তীয় শঙ্কু Right circular cone

শাঙ্কব তল Conical surface

শীর্ষবিন্দু Vertex

সঞ্চারপথ Locus

সমরেখ Collinear

সমতলীয়/একতলীয় Coplanar

সমদ্বিখণ্ডক Bisector

সমতল Plane

সমাধান Solution

সমীকরণ Equation

সরলরেখাংকিত তল Ruled surface

সাধারণ সমীকরণ General equation

সিদ্ধ Satisfied

স্পর্শক Tangent

স্পর্শরেখা Tangent line

স্পর্শকতল Tangent plane

স্থানাঙ্ক Co-ordinate