প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতকশ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোনো বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে— যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন; যখনই কোন শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হতে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

তৃতীয় পুনর্মুদ্রণ ঃ এপ্রিল, 2016

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী ও অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় : গণিতবিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম : পর্যায় : E M T : 05 : 01 & 02

পাঠক্রম : পর্যায় : E M T : 05 : 01

	রচনা	সম্পাদনা
একক 1	শ্রী আশিস বসু	ড. কনক কান্তি দাস
একক 2	—ঐ—	—ঐ—
একক 3	—ঐ—	—ঐ—
একক 4	ড. শ্রীপতিরঞ্জন চৌধুরী	—ঐ—
একক 5	—ঐ—	—ঐ—
একক 6	—ঐ—	—ঐ—
একক 7	—ঐ—	—ঐ—
একক 8	—ঐ—	—ঐ—

পাঠক্রম : পর্যায় : EMT 05 : 02

	রচনা	সম্পাদনা
একক 9	অধ্যাপক রবীন্দ্রনাথ সেন	ড. রণজিৎ ধর
একক 10	—ঐ—	—ঐ—
একক 11	—ঐ—	—ঐ—
একক 12	—ঐ—	—ঐ—
একক 13	—ঐ—	—ঐ—
একক 14	—ঐ—	—ঐ—

প্রজ্ঞাপন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

E M T – 05

রৈখিক বীজগণিত

(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়
1
রৈখিক বীজগণিত

পর্যায়
2
রৈখিক রূপান্তর

একক 1 □ ম্যাট্রিক্স বীজগণিতের পরিচিতি এবং সনাতন পদ্ধতিতে তার ধর্ম ও প্রয়োগ নির্ণয় (Introduction to matrix algebra and its properties and application from classical approach)

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা

যে কোনরুপ রৈখিক মডেলের (Model) বিশ্লেষণে ম্যাট্রিক্স পরিচিতি এবং প্রয়োগ বিষয়ে জ্ঞান অপরিহার্য শুধুমাত্র বিশুদ্ধ বিজ্ঞান—পদার্থবিদ্যা, রসায়ন, কারিগরি শাখা ব্যতিরেকে বাণিজ্য ও অর্থনীতির শাখায় ও বিভিন্ন বাস্তব সমস্যার রুপায়ন ও সমাধানে ম্যাট্রিক্সের প্রয়োগ বহুল কার্যকরী। এই এককে আমরা কেবলমাত্র ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা, প্রয়োগজনিত কার্যকারিতা সম্বন্ধে অবহিত হব।

1.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি অধ্যায়ন করলে আপনি জানতে পারবেন

- ম্যাট্রিক্স বীজগণিতের সংজ্ঞা জানতে পারবেন।

- বাস্তব সমস্যা থেকে ম্যাট্রিক্স রচনা করতে পারবেন।
- ম্যাট্রিক্স যোগবিয়োগ এবং প্রাথমিক গাণিতিক প্রক্রিয়া শিখবেন।
- ম্যাট্রিক্সের গুণনপ্রক্রিয়া সম্বন্ধে জানবেন।

1.3 বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্সের গঠন পরিচিতি

সংজ্ঞা ঃ যে কোন সংখ্যার (যা বাস্তব বা কাল্পনিক হতে পারে) সেট থেকে m সংখ্যক সারি (Row) ও n সংখ্যক স্তম্ভ (Column) যদি একত্রে বিন্যস্ত হয়ে একটি আয়তাকার বিন্যাস (Array) গঠন করে, তবে ঐ বিন্যাস একটি $m \times n$ ক্রমের (order) ম্যাট্রিক্স বলা হবে। ক্ষেত্র বিশেষ $m = n$ হলে তাহাকে $n \times n$ ক্রমের বর্গাকার ম্যাট্রিক্স বলা হয়। সেটের উপাদান সমূহকে ম্যাট্রিক্সের উপাদান বলা হবে। স্বাভাবিক ভাবে ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলি (elements) সংখ্যা (একটি ক্ষেত্রের উপাদান) হলেও বৃহত্তর ক্ষেত্রে অন্য কিছুও হতে পারে। প্রকৃতপক্ষে ম্যাট্রিক্সের প্রয়োগ অনেক ব্যাপক উদাহরণ স্বরূপ নিম্নোক্ত উদাহরণগুলি পর্যালোচনা করা হল।

উদাহরণ ঃ 1. $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$

এটি 3×2 ক্রমের একটি ম্যাট্রিক্স।

উদাহরণ ঃ 2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

হল একটি 3×5 ক্রমের স্বাভাবিক আয়তাকার ম্যাট্রিক্স।

উদাহরণ ঃ 3. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

এটি একটি 3×3 ক্রমের বর্গাকার ম্যাট্রিক্স

উদাহরণ ঃ 4. ধরা যাক তিনটি চলরাশির রৈখিক সমীকরণ

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$
$$x_1 - 2x_3 = 1$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

দেওয়া আছে ম্যাট্রিক্সরূপে প্রকাশ করলে এদের একত্রে সমীকরণে লেখা যাবে।

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 - 2x_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_{4\times1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

[উপরোক্ত প্রকাশে ম্যাট্রিক্স গুণনের নিয়ম প্রযোজ্য যা অনু 4 -এ প্রদত্ত হবে।]

এক্ষেত্রে $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে

সহগ ম্যাট্রিক্স (Coefficient matrix) এবং $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

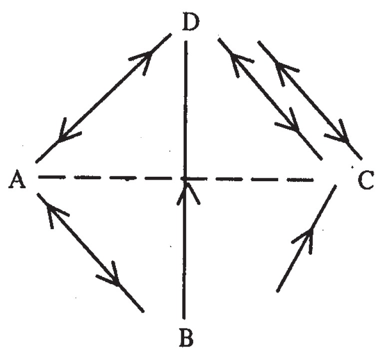
কে বর্ধিত (augmented) ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

বর্তমান আলোচনায় সাধারণভাবে ম্যাট্রিক্সের স্বাভাবিক সংজ্ঞা হিসাবে নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে ম্যাট্রিক্সটিকে লেখা হবে ঃ

1.3.1 $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

এটি $m \times n$ ক্রমের একটি সাধারণ ম্যাট্রিক্স।

উদা. 5. ফিজি দ্বীপপুঞ্জের চারিটি দ্বীপ *A, B, C, D* যে প্রকারে জলপথে পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত তা নীচের ছবিতে দেখানো হয়েছে।



চিত্রে (i) একটি তীরচিহ্ন একমুখী পথ

(ii) দুইটি তীরচিহ্ন উভয়মুখী পথ এবং

(iii) তীরচিহ্ন না থাকলে অবরুদ্ধ পথ বুঝায়!

প্রদত্ত পথনির্দেশের ছকটির ম্যাট্রিক্স রূপায়ন নিম্নরূপ হবে।

	A	**B**	**C**	**D**
A	0	1	0	1
B	1	0	1	0
C	0	0	0	2
D	1	1	2	0

সুতরাং এই পথনির্দেশ ছকটির ম্যাট্রিক্স আকারে লিখলে পাই ঃ

$$M = \left[m_{ij}\right]_{4\times4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

এর পাদাদনসমূহ (elements) পূর্ণসংখ্যা।

এটি একটি 4 × 4 ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স। এর নির্দিষ্ট i-তম সারি এবং j -তম স্তম্ভের ছেদে অবস্থিত m_{ij} উপাদান (i,j) স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট ধরা হয়। এই হিসাবে সমীকরণ 1 -এ বর্ণিত ম্যাট্রিক্স এর তুলনা করলে দেখা যায়

$m_{21} = 1, \quad m_{12} = 1 \ \ldots\ldots\ldots \ m_{13} = 0$

এবং $m_{41} = 1, \quad m_{42} = 1 \ \ldots\ldots\ldots$

$m_{44} = 0$ হবে

এই ম্যাট্রিক্সটির বিশেষত্বই এই যে এর সকল কর্ণউপাদান শূন্য : $m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{44} = 0.$

1.3.1 এ বর্ণিত সাধারণ ম্যাট্রিক্স A-র উপাদান সমূহ a_{ij} -এর ভিতর যদি শুধুমাত্র একটি বিশেষ নির্দিষ্ট i -এর (অথবা j) জন্য সমস্ত $j = 1, 2, \ldots, n$ (অথবা $i = 1, 2 \ldots m$) দ্বারা বর্ণিত উপাদানগুলির সমাহার একটি মাত্র সারির (অথবা স্তম্ভে) আকারে প্রকাশ করা হয় তবে তাকে সারি ম্যাট্রিক্স $(a_{ij}, a_{i2} \ldots a_{in})$ যে কোন j-র জন্য i-তম সারি

[অথবা স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স $\begin{pmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ যে কোন i-র জন্য j-তম স্তম্ভ] বলা হয়।

কোন বর্গম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের (diagonal) উপাদানগুলি ছাড়া যদি সমস্ত উপাদান শূন্য হয় তবে তাকে কর্ণম্যাট্রিক্স বলে। গাণিতিক রুপে (.) সংজ্ঞায় বর্ণিত ম্যাট্রিক্স যদি $a_{ij} \neq 0$ শুধু $i = j$ হলে হয় তবেই তাকে কর্ণম্যাট্রিক্স বলা হয়। উদাহরণ স্বরুপ $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ একটি 3×3 কর্ণম্যাট্রিক্স। এক্ষেত্রে a, b, c সব কটা উপাদান শুন্য নয়।

îßÀö n -ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্সের $[a_{ij}]_{n\times m}$ এর উপাদানগুলি যদি $i > j$ হলে $a_{ij} = 0$ এরুপ নিয়মে দ্বারা বর্ণিত হয় তবে তাকে ঊর্ধ্ব ত্রিভুজীয় (upper triangular) যদি $i < j$ হলে $a_{ij} = 0$ হবে এরুপ নিয়ম দ্বারা বর্ণিত হয় তবে তাকে নিম্ন ত্রিভুজীয় (lower triangular) বলা হবে। উদাহরণ স্বরুপ,

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ একটি ঊর্ধ্ব

এবং $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ একটি নিম্ন ত্রিভুজীয় ম্যাট্রিক্স।

একটি বর্গাকার কর্ণ ম্যাট্রিক্স -এর যদি অশুন্য উপাদানগুলি প্রত্যেকটি 1 হয় তবে তাকে একক ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এটি

একটি তৃতীয় ক্রমের একক-ম্যাট্রিক্স। একে 1_3 -এর সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

1.3.2 সাধারণভাবে ম্যাট্রিক্স চিহ্নিত করতে বড় হাতের রোমান অক্ষর (A, B, C, X, Y, Z প্রভৃতি) ব্যবহৃত হয় এবং উপাদানগুলিকে ছোট, হাতের অক্ষরে কিন্তু সূচক সহ (a_{ij}, b_{mn}) প্রকাশ করা হয়। সূচকগুলি সূচিত করে একটি উপাদান (a_{ij}) ওই ম্যাট্রিক্সের (A) i -তম সারি ও j -তম স্তম্ভের মিলনস্থলে অবস্থিত। অপর একটি প্রচলন সম্বন্ধে অবহিত থাকা এ প্রসঙ্গে প্রয়োজন। বেষ্টনীবদ্ধ উপাদান (a_{ij}) অনেকক্ষেত্রে পুরো ম্যাট্রিক্সকে বর্ণনার জন্যই ব্যবহার করা হয়।

সবশেষে, যে ম্যাট্রিক্সের সবকটি উপাদানই শূন্য তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স (null matrix) রুপে সূচিত করা হয়।

যেমন $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

অনুশীলনী 1.1 এতদূর আলোচনার ফলে বোঝা গেল যে, ম্যাট্রিক্স মূলতঃ বিভিন্ন তথ্য বা সংখ্যার একত্রিত সমাহার যা একটি আয়তাকার বিন্যাসের মাধ্যমে প্রকাশিত হয়।

এবার, কিছু উদাহরণ দেওয়া হচ্ছে

1. $A_{3\times3} = (i)_{3\times3}$-কে পূর্ণ ম্যাট্রিক্স রূপে প্রকাশ করুন।

উত্তর ঃ এক্ষেত্রে $A_{3\times3}$ একটি 3 সারি ও 3 স্তম্ভ বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স বুঝা যায়। এখানে i সংখ্যাটি একাধারে ম্যাট্রিক্সটির উপাদানের মান ও অবস্থান সূচিত করে। সেক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সটির প্রথম সারি (i=1) ও প্রথম স্তম্ভের (j = 1) মিলিত অবস্থানের উপাদানটি হবে 1. সেরুপেই, প্রথম সারি ও দ্বিতীয় স্তম্ভের মিলিত অবস্থানের উপাদানটি হবে 1. কিন্তু দ্বিতীয় সারি ও প্রথম স্তম্ভের মিলিত অবস্থানের উপাদানটি হবে 2. অর্থাৎ ম্যাট্রিক্সটির

পূর্ণরুপ হবে, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

অনুরুপে $A_{3\times3} = (j)$ হবে

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

এরপর এই নিয়মের প্রয়োগ করে দেখা যাক $A_{3\times4} = (i - j)$ কিরুপে লেখা যায়। এক্ষেত্রে যদি আমরা একেকটি উপাদনকে সারি এবং স্তম্ভের অবস্থান অনুসারে (i, j) -এরুপ সূচিত করি, তবে সহজেই লেখা যায় প্রথম সারি (i = 1) ও প্রথম স্তম্ভের (j = 1) মিলিত অবস্থানে 1 – 1 = 0 হবে এবং শেষ সারি (i=3) ও প্রথম স্তম্ভের (j = 1) মিলিত অবস্থানে 3 – 1 = 2 থাকবে। অর্থাৎ পূর্ণ ম্যাট্রিক্সটি হবে

$$A = \begin{pmatrix} \overset{0}{(1,1)} & \overset{-1}{(1,2)} & \overset{-2}{(1,3)} & \overset{-3}{(1,4)} \\ \overset{1}{(2,1)} & \overset{0}{(2,2)} & \overset{-1}{(2,3)} & \overset{-2}{(2,4)} \\ \overset{2}{(3,1)} & \overset{1}{(3,2)} & \overset{0}{(3,3)} & \overset{-1}{(3,4)} \end{pmatrix}$$

অনুশীলনী 1.2 পূর্ণাকার রুপে প্রকাশ করুন।

1. $A_{3\times4} = \left(\dfrac{i+j}{2}\right)$

2. $A_{2\times4} = ([i-j]\times 2)$ [উদাহরণ 1 দ্রষ্টব্য]

1.4 ম্যাট্রিক্সের যোগ প্রক্রিয়া ও স্কেলার গুণন

কোনো নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে (Field) বর্ণিত যাবতীয় সমক্রমের ম্যাট্রিক্স সমূহের সেট-এর উপর যোগ, বিয়োগ, গুণন প্রক্রিয়া একইসঙ্গে সংজ্ঞিত হতে পারে। বিভিন্নরূপে প্রায়োগিক সমস্যার ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সের বীজগাণিতিক পদ্ধতির ব্যবহার অপরিহার্য। এই অনুচ্ছেদে আমরা শর্তাধীন ম্যাট্রিক্সের যাবতীয় বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ার সংজ্ঞা এবং ধর্ম বিশ্লেষণ করব।

সংজ্ঞা 1.4.1 সমতা ঃ দুটি ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})$ এবং $B = (b_{ij})$ সমান বলা তখনই হয় যখন এদের প্রতিটি উপাদান অবস্থানগত ভাবে একে অপরের সমান। অর্থাৎ $a_{ij} = b_{ij}$ প্রতিটি i এবং প্রতিটি j -র জন্য সত্য। স্বভাবতই A এবং B-এর ক্রম একই হবে। অর্থাৎ $A = B \Rightarrow (a_{ij})_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n}, a_{ij} = b_{ij}$

সংজ্ঞা 1.4.2 স্কেলার গুণন ঃ একটি প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A ($m \times n$ ক্রমের) এবং একটি স্কেলার λ -এর গুণফলকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা সম্ভব ঃ

যদি $$A = (a_{ij})_{m\times n} \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{m_1} & \lambda a_{m_2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

যোগ ঃ ধরা যাক একই ক্ষেত্র (F)-এ দুটি সমক্রমের ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})$ এবং $B = (b_{ij})$ প্রদত্ত আছে। ম্যাট্রিক্স সেটে এদের যোগফল সংজ্ঞিত (defined) হয় এক নতুন ম্যাট্রিক্স $C = (c_{ij})$, $A + B$ এর সাহায্যে যার প্রতিটি উপাদান অবস্থানক্রমে A এবং B এর উপাদানের যোগফল। অর্থাৎ

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \begin{pmatrix} i = 1,2,\ldots\ldots,m \\ j = 1,2,\ldots\ldots,n \end{pmatrix}$$ । C এর ক্রম A বা B -এর ক্রমের সমান।

উদা 1.1ঃ $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

এক্ষেত্রে মনে রাখা দরকার A ও B যোগ করতে হলে একই ক্রমের হতে হবে।

ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের যোগ প্রক্রিয়ার বিনিময়যোগ্য ও সংযোজ্য নিয়ম (Commutative & Associative) :

ধরা যাক, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ এবং $B = (b_{ij})_{m\times n}$ দুটি সমক্রমের ম্যাট্রিক্স। তবে

$A + B = B + A$ হবে ;

কারণ $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij})$

$= (a_{ij} + b_{ij})$

$= (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij})$

$= B + A$

$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad A = (a_{ij})_{m\times n}$

কারণ $\quad A + (B + C) \qquad B = (b_{ij})_{m\times n}$

$= (a_{ij}) + [(b_{ij} + c_{ij})] \qquad C = (c_{ij})_{m\times n}$

$= (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})$

$= [(a_{ij} + b_{ij})] + (c_{ij})$

$= (A + B) + C$

ম্যাট্রিক্স বিয়োগ প্রক্রিয়াটি যোগ প্রক্রিয়া এবং স্কেলার গুণনের সাহায্যে নিম্নরূপে সংজ্ঞিত হতে পারে।

$$C = B - A = B + (-1)A$$

অর্থাৎ $(c_{ij}) = (b_{ij} - a_{ij})$

নিম্নলিখিত সূত্রগুলি ম্যাট্রিক্সের যোগ প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে অনায়াসে প্রকাশ করা যায় ঃ

1. $A + (-1)A = 0$
2. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
3. $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1\lambda_2)A$
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$

1.5 ম্যাট্রিক্সের গুণন প্রক্রিয়া

ম্যাট্রিক্স গুণন প্রক্রিয়া পূর্বে আলোচিত যোগ বা বিয়োগ প্রক্রিয়া থেকে পদ্ধতিগতভাবে সম্পূর্ণ ভিন্ন। স্বাভাবিক ধারণা হতে এরূপ মনে হয় যে A এবং B ম্যাট্রিক্স দুটির গুণফল ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলি যথাক্রমে A এবং B-এর উপাদান অবস্থানগত ভাবে গুণ করেই পাওয়া উচিত। কিন্তু সেরূপ সংজ্ঞার ম্যাট্রিক্সের প্রায়োগিক ক্ষেত্রে কোনো উপযোগিতা থাকে না। অধিকাংশ ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সের প্রয়োগ হয় রৈখিক সমীকরণ সারির সমাধান এবং সংশ্লিষ্ট বিষয়সমূহে। ধরা যাক্ n-সংখ্যক অজানা চলরাশি সম্বলিত m-সংখ্যক সারিবন্ধ রৈখিক সমীকরণ প্রদত্ত আছে ঃ

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{1n}x_n & = d_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{2n}x_n & = d_2 \\
- & & - & & - & & - & - \\
- & & - & & - & & - & - \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{mn}x_n & = d_m
\end{array}$$

বা, $$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1}a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

এখন যদি এই সমীকরণগুচ্ছের সহগগুলিকে একটি ম্যাট্রিক্স ($A = (a_{ij})$)-এর উপাদান হিসাবে ভাবা যায় এবং সঙ্গে সঙ্গে যদি n-সংখ্যক চলরাশি (x_i) ও m-সংখ্যক ধ্রুবককে (d_i) যথাক্রমে দুটি স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স X এবং D হিসাবে ভাবা যায় তবে উপরিউক্ত সমীকরণগুলিকে ম্যাট্রিক্স গুণনের প্রকাশে $AX = D$ এরূপ লেখা যায়। কারণ বীজগাণিতিকভাবে উভয়েই

1.5.1—$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = d_i$; $i = 1, 2, \ldots m$-এর জন্য, দ্বারা প্রকাশিত। সুতরাং সমীকরণ 1.5.1-একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স A-কে n-সারির স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স সহযোগে গুণের নিয়ম হিসাবে বিবেচিত হতে পারে। ক্ষেত্র F-এ বর্ণিত দুটি ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})_{m \times r}$ এবং $B = (b_{ij})_{r \times n}$-এর গুণফলে যে নতুন ম্যাট্রিক্স $C = (c_{ij})_{m \times n}$ পাওয়া যায় তার উপাদানসমূহ $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$ সম্বন্ধ দ্বারা নির্দিষ্ট। এক্ষেত্রে লক্ষণীয় বিষয় হল A ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভসংখ্যা (r) সর্বদা B ম্যাট্রিক্সের সারিসংখ্যা (r)-র সমান হতে হবে। নতুবা এই গুণন প্রক্রিয়া সংজ্ঞায়িত নয়। ম্যাট্রিক্স গুণন প্রক্রিয়ার চিত্রিত রূপ নিচে দেওয়া হল ঃ

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ij} \quad \cdots \quad a_{ir}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots\cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & \boxed{b_{2j}} & \cdots & b_{2n} \\ b_{i1} & \cdots & \boxed{b_{ij}} & \cdots & b_{in} \\ b_{r1} & \cdots & \boxed{b_{rj}} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots\cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots\cdots & C_{2n} \\ \vdots & & \boxed{C_{ij}} & \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots\cdots & C_{mn} \end{bmatrix}$$

1.5.2 অর্থাৎ, $C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{ir}b_{rj}$

উপরিউক্ত গুণন প্রক্রিয়ার সংজ্ঞার প্রয়োগে কয়েকটি উদাহরণ আলোচিত হল ঃ

উদা. 1.2. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = [3 \ \ 4 \ \ 1 \ \ 5]$

হলে দেখাও যে, $AB \neq BA$

এক্ষেত্রে,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times 1} [3\ 4\ 1\ 5]_{1\times 4}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$ সমীকরণ 1.3.2 অনুযায়ী।

কিন্তু

$$BA = [3\ \ 4\ \ 15] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [3 + 8 + 0 + 5] = [16]$$

কারণ A একটি 4×1 ক্রমের এবং B একটি 1×4 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হওয়ার দরুন AB গুণনে 4×4 ক্রমের ম্যাট্রিক্স পাওয়া গেলেও BA গুণনে 1×1 ক্রমের একটি উপাদান সম্বলিত ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়।

উদা. 1.3. ম্যাট্রিক্স গুণন প্রক্রিয়ার বিশেষত্ব হল $AB = 0$ হলেও A অথবা B শূন্য নাও হতে পারে।

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 \ \ + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 1(-1) \\ 1(-1) + (-1)(-1) & 1\cdot(-1) + (-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

উদা. 1.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

এবং $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে দেখা যায়

$AB = AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ কিন্তু $B \neq C$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1(-1) + (-1) \cdot 0 & 1(-1) + (-1)0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $AB = AC$ কিন্তু স্পষ্টতই $B \neq C$

1. যোগ-প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে গুণন প্রক্রিয়ার বণ্টন সূত্র (distributive law of multiplication over that of addition) :

$$A.(B + C) = \left[(a_{ij})_{m \times r}\right] \left[b_{ij} + c_{ij}\right]_{r \times n}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} a_{ik}\left(b_{kj} + C_{kj}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{r} a_{ik} C_{kj}$$

$$= AB + AC$$

2. গুণন প্রক্রিয়ায় সংযোগ ধর্ম (Associative property)

ধরা যাক্ $A = (a_{ij})_{m\times n}$

$B = (b_{ij})_{n\times \mathrm{p}}$ এবং $\mathrm{C} = (\mathrm{C}_{ij})_{\mathrm{p}\times \mathrm{q}}$ তিনটি ম্যাট্রিক্স প্রদত্ত আছে। এক্ষেত্রে $(AB)C = A(BC)$ হবে।

ধরে নেওয়া হল ঃ $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times \mathrm{p}}$ এবং $\mathrm{C} = (\mathrm{C}_{ij})_{\mathrm{p}\times \mathrm{q}}$ তিনটি ম্যাট্রিক্স দেওয়া আছে। এখন $AB = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ এবং সেক্ষেত্রে $(AB)\,C = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}b_{jk}\right)C_{ks}$ হবে। অপরপক্ষে $BC = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{ks}$ হলে $A(BC)$ স্বভাবতই $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}\left(b_{jk}c_{ks}\right)$ এরূপ হবে।

সহজেই দেখানো যায়

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}b_{jk}\right)C_{ks}$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left(a_{i1} + b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}\right)c_{ks}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{i1}(b_{1k}C_{ks}) + a_{i2}(b_{2k}c_{ks}) + \cdots + a_{in}(b_{nk}c_{ks})$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}\left(b_{jk}c_{ks}\right)$$

1.6 পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স ও সংশ্লিষ্ট আলোচনা

1. ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে স্তম্ভ এবং সারিগুলিকে পরস্পরের সঙ্গে অদলবদল করলে অর্থাৎ স্তম্ভগুলিকে সারি এবং সারিগুলিকে স্তম্ভ দিয়ে প্রতিস্থাপন করলে উৎপন্ন নতুন ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত (transpose) ম্যাট্রিক্স বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় 1.3.1-এর A ম্যাট্রিক্সটির পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স হবে—

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

সুতরাং একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স $n \times m$ ক্রমের হবে।

2. সাধারণভাবে একটি স্তম্ভ ম্যাট্রিক্সকে ভেক্টর বলে অভিহিত করা হয়। যথা—

$\bar{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির প্রতি সারির উপাদান একটি n-মাত্রিক তলে $\bar{r}$ ভেক্টরের উপাংশগুলি (Component) প্রকাশ করে। স্বভাবত এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স $r^T = [r_1\ r_2\ \ldots\ r_n]$ একটি সারি ভেক্টর হিসাবে বিবেচ্য হবে।

3. একটি বর্গম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে $A = A^T$ হলে তাকে প্রতিসম (Symmetric) ম্যাট্রিক্স বলা হয়। $A = -A^T$ হলে তাকে বিপ্রতিসম (skew-symmetric) ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

$$X = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \text{ এবং } Y = \begin{bmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix}$$

যথাক্রমে একটি প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স। স্বভাবত যে কোনো বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A একটি প্রতিসম ও বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফলরূপে নিম্নরূপে প্রকাশিত হয় ঃ

$$A = \left(\frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}\right)$$

প্রকৃতপক্ষে যে কোনো প্রতিসম ও অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রেই উপাদানগুলি যথাক্রমে (i) $a_{ij} = a_{ji}$ এবং (ii) $a_{ij} = -a_{ji}$ এরূপে সম্বন্ধিত হয়। সুতরাং যে কোনো A ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রেই $\frac{1}{2}(A + A^T)$ একটি প্রতিসম এবং $\frac{1}{2}(A - A^T)$ একটি অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে তা সহজেই অনুমেয়।

3. পরিবর্ত ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত সূত্রগুলি প্রযোজ্য ঃ

1. $(A^T)^T = A$ 2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ 3. $(AB)^T = B^T A^T$

প্রমাণ ঃ (1) সমীকরণ অনুসারে ঃ

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ হলে}$$

অনুরূপে একই পদ্ধতিতে এর পরিবর্তে ম্যাট্রিক্স হবে

$$(A^T)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

সংজ্ঞানুসারে, A এবং B ম্যাট্রিক্স যদি নিম্নরূপ হয় (3×3 ক্রমের) ঃ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

তবে, $$(A+B)^T = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & a_{31}+b_{31} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{32}+b_{32} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$$

1.7 প্রাথমিক সারি প্রক্রিয়া ও সারি সমতুল্যতা (Elementary row operation and row-equivalence)

যদি $A = (a_{ij})_{m\times n}$ একটি সাধারণ ম্যাট্রিক্স হয় তবে তার i-তম সারিকে A_i দ্বারা চিহ্নিত করলে

$Ai = (a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ir}\cdots a_{in})$-এরূপ হবে। এখন দুটি প্রধান সারিপ্রক্রিয়া নিম্নে প্রদত্ত হল ঃ

1. A ম্যাট্রিক্সের যে কোনো দুটি সারির (A_i এবং A_j) বিনিময় সাধন হতে পারে অর্থাৎ একটি সারির সমস্ত উপাদানসমূহ অপরটির অনুরূপ স্থানে প্রতিস্থাপন হতে পারে।

2. যে কোনো একটি সারি (A_i)-কে স্কেলার (λ) দিয়ে গুণ করে অপর কোনো সারি A_j-র সঙ্গে যোগ করে A_j-কে নতুন সারি দিয়ে প্রতিস্থাপন করা যেতে পারে।

উপরিউক্ত দুটি সারি প্রক্রিয়াই ম্যাট্রিক্স A-কে অপরিবর্তিত রাখে। যদি দুটি সমক্রমের ম্যাট্রিক্স এরূপ হয় যে কয়েকটি নির্দিষ্ট সারি প্রক্রিয়ার মাধ্যমে তাদের একটিকে অপরটিতে পরিবর্তন করা যায়, তবে তাদের সারি সমতুল্য বলা হবে। এই সারিসমতুল্যতার ধর্মটি একটি সমতুল্য সম্বন্ধ (equivalence relation) সূচিত করে।

(i) A হতে A লভ্য, কারণ প্রাথমিক সারি প্রক্রিয়ায় $\lambda = 1$ হলে A_i থেকে A_i প্রতিস্থাপন হতে পারে। অতএব প্রতিফলন ধর্ম (reflexive) বর্তমান।

(ii) যদি λ দিয়ে গুণ করে সারি প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে A থেকে B পাওয়া যায় তবে $\frac{1}{\lambda}$ দিয়ে গুণের মাধ্যমে অনুরূপ প্রক্রিয়ায় B থেকে A পাওয়া যাবে। অর্থাৎ A যদি B-এর সাথে সারি সমতুল্য হয়, তবে B-ও A-এর সাথে সারিসমতুল্য হবে। সুতরাং প্রতিসম ধর্ম (symmetric) প্রমাণিত।

(iii) যদি কোনো প্রাথমিক সারি প্রক্রিয়ায় (ধরা যাক λ_1 স্কেলার গুণনে) A থেকে B পাওয়া যায় এবং অপর কোনো প্রাথমিক সারিপ্রক্রিয়ায় (ধার যাক্ λ_2-স্কেলার গুণন) B থেকে C পাওয়া যায় তবে স্বভাবত ওই দুটি সম্মিলিত সারিপ্রক্রিয়ায় ($\lambda_1\lambda_2$ স্কেলার গুণনের মাধ্যমে) A থেকে সরাসরি C পাওয়া যাবে। সুতরাং সংক্রমী ধর্ম (transitive) প্রমাণিত।

1.8 ইশিলন (echelon), অবিশিষ্ট ও বিপরীত ম্যাট্রিক্স

1.8.1 ইশিলন ম্যাট্রিক্স ঃ

একটি ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})$-কে ইশিলন ম্যাট্রিক্স বলা হয় যদি নিম্নলিখিত শর্তগুলি সিদ্ধ হয় ঃ

(i) প্রথম সারি থেকে শেষ সারি পর্যন্ত ক্রমাগত নীচে নামলে সারির প্রথম অশূন্য উপাদানের আগে যে-কটি শূন্য উপাদান থাকে তাদের সংখ্যা ক্রমান্বয়ে বাড়তে থাকে।

(ii) অন্যভাবে বলা যায় যে i-তম সারিতে যদি প্রথম অশূন্য উপাদানের বামের k-টি শূন্য উপাদান থাকে তা হলে $(i + 1)$ তম সারিতে প্রথম অশূন্য উপাদানের বামে শূন্য উপাদানের সংখ্যা k এর চেয়ে বেশী হবে।

(iii) অঙ্কের ভাষায় বলা যায় যে, অশূন্য উপাদানসমূহ $a_{ij1}, a_{2j2}, \ldots, a_{rjr}$ যেখানে $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$, পাওয়া যাবে,

যাতে করে, $a_{ij} = 0$ যখন $i \leq r, j < j_1$ এবং

$a_{ij} = 0$ যখন, $i > r$.

সারির প্রথম অশূন্য উপাদান, যথাক্রমে

$a_{1j1}, a_{2j2}, \ldots, a_{rjr}$ কে

ইশিলন ম্যাট্রিক্সের গুরুত্বপূর্ণ উপাদান (distinguished elements) বলা হয়।

একটি ইশিলন ম্যাট্রিক্সকে **লঘুকৃত সারি** ইশিলন ম্যাট্রিক্স বলা হয় যদি গুরুত্বপূর্ণ উপাদানসমূহ নিম্নরূপ ঃ

(i) তারাই যথাক্রমে তাদের স্তম্ভের একমাত্র অশূন্য উপাদান

(ii) তারা প্রত্যেকেই 1 এর সমান।

উদাহরণ 5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) কোনো শূন্যযুক্ত সারির বাম থেকে প্রথম অশূন্য উপাদানের বামে অবস্থিত শূন্যসংখ্যার চেয়ে উক্ত সারির উপরিস্থ সারির বামদিক থেকে প্রথম অশূন্য উপাদানের বামে অবস্থিত শূন্যসংখ্যা সর্বদা কম হবেই।

উদাহরণ **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, সারণীধাপ আকৃতিবিশিষ্ট বা ইশিলন ম্যাট্রিক্স রূপে প্রকাশিত ঃ—

কিন্তু $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ অথবা, $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ তা নয়।

1.8.2 অবিশিষ্ট, বিশিষ্ট ও বিপরীত ম্যাট্রিক্স ঃ ম্যাট্রিক্স গুণন প্রক্রিয়ায় যদি দুটি বিশেষ বর্গম্যাট্রিক্স A এবং B গুণনপ্রক্রিয়ায় $AB = BA = I$—**এরূপ সম্বন্ধাধীন হয়, তবেই** AB-কে অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স (non singular) বলা হবে। এক্ষেত্রে প্রদত্ত A-কে B-এর সাপেক্ষে **বিপরীত ম্যাট্রিক** বলা হয়। সাধারণ B-কে A^{-1}-রূপে চিহ্নিত করা হয়।

যে কোনো বর্গম্যাট্রিক্সের (A) ক্ষেত্রে A^{-1}-এর অস্তিত্ব না থাকলে তাকেই বিশিষ্ট (Singular) ম্যাট্রিক্স বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ একটি প্রদত্ত অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সের বিপরীত নির্ণয় পদ্ধতি আলোচনা হল।

উদাহরণ **6.**

ধরা যাক, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ একটি

3-ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স। সেক্ষেত্রে

$$A_1 = [1\ 2\ 3]\ ;\ A_2[213)\ ;\ A_3 = [3\ 2\ 1]$$

এবং, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$-এর ক্ষেত্রে

$I_1 = [1\ 0\ 0]$; $I_2 = [0\ 1\ 0]$ এবং $I_3 = \{0\ 0\ 1]$ হবে।

সুতরাং সহজেই অনুমেয় যে

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= I_1 + 21_2 + 31_3 \\ A_2 &= 2I_2 + I_2 + 3I_3 \\ A_3 &= 3I_1 + 2I_2 + I_3 \end{aligned}\right\} \text{ হবে}$$

সমীকরণত্রয় সমাধান করলে পাওয়া যায় ঃ

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{-5}{12}A_1 + \frac{4}{12}A_2 + \frac{3}{12}A_3 \\ I_2 &= \frac{7}{12}A_1 - \frac{8}{12}A_2 + \frac{3}{12}A_3 \\ I_3 &= \frac{A_1}{12} \quad + \frac{4}{12}A_2 - \frac{3}{12}A_3 \end{aligned}\right\}$$

অর্থাৎ ম্যাট্রিক্স গুণনের প্রকাশে

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 7 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \text{ এরূপ হয়।}$$

সুতরাং নির্ণেয় বিপরীত

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 7 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

কারণ পূর্বোক্ত সমীকরণে A_1, A_2, A_3 এবং I_1, I_2, I_3-এর সম্পূর্ণরূপ নিম্নরূপ হয় ঃ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ A^{-1}, A-এর বিপরীতক্রমে প্রতিভাত।

1.9 সারাংশ

এই অধ্যায়ে মূলত ম্যাট্রিক্স বীজগণিতের নানান বিষয় প্রাথমিক ভাবে উপস্থাপিত হয়েছে। একটি ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা, বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্সের উদাহরণ তাদের যোগ বিয়োগ গুণ প্রক্রিয়া, স্কেলার গুণন ইত্যাদি আলোচিত হয়েছে। মূলতঃ বিষয়গুলি উপস্থাপিত হয়েছে পুরাতন বীজগণিতের চিন্তাভাবনার মাধ্যমে। রৈখিক বীজগণিতের মাধ্যমে ম্যাট্রিক্স বীজগণিতের বিশ্লেষণ অবশ্যই জরুরি। সেই কারণেই একক 6 থেকে এই বিষয়ে আরো বিস্তারিত আলোচনা।

1.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি (সংকেত বা উত্তর প্রশ্ন সম্বলিত)

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন ঃ

1.10.1 যদি $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ হলে দেখান যে

1. $AB = C,\ BC = A,\ CA = B$
2. $BA = -C,\ CB = -A,\ AC = -B$
3. $A^2 = B^2 = C^2 = 1$ হবে।

[**সমাধান সংকেত ঃ** 1.5-এ গুণন প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমস্যাগুলোর সমাধান করার চেষ্টা করুন।]

1.10.2 যদি $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ এবং $B = [2\ 4\ 9\ 6]$ হয় তবে দেখান যে AB একটি 3×4 ক্রমের ম্যাট্রিক্স যার দ্বিতীয় সারির প্রতিটি উপাদান শূন্য।

সমাধান সংকেত ঃ 1.5 অধ্যায় দেখুন।

1.10.3 দেখান যে, $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের সঙ্গে $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স গুণনে বিনিমিত ধর্ম অনুসরণ করে না।

কিন্তু $M_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ গুণনে বিনিমিত ধর্ম মেনে চলে।

সমাধান সংকেত ঃ প্রমাণ করুন $M_1M_2 \neq M_2M_1$

$$M_1M_3 = M_3M_1$$

গুণ প্রক্রিয়ার জন্য 1·5·2 দেখুন।

1.10.4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ করুন যে $A^2 - 4A - 51 = 0$

সমাধান সংকেত ঃ গুণের নিয়মে করুন।

1.10.5 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ হলে দেখান যে, $(A + B)^2 = A^2 + B^2$

সমাধান সংকেত ঃ $(A + B)^2 = (A + B) . (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$ এবার গুণের নিয়ম প্রয়োগ করুন।

1.10.6 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ -কে একটি প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করুন।

সমাধান সংকেত ঃ

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

$A + A^T$ প্রতিসম এবং

$A - A^T$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

1.10.7 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ করুন যে

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$(B + C)^T = B^T + C^T$

1.10.8 $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ এবং $B = [2 \ -1 \ 1]$ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে দেখান যে

(AB) গুণনের পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স যথাক্রমে B এবং A-এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্সের গুণনের সঙ্গে সমান। $[(AB)^T = B^T A^T]$

1.10.9 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ হলে তার বিপরীত (A^{-1}) নির্ণয় করুন।

1.10.10. ম্যাট্রিক্স গুণনের সাহায্যে দেখান যে,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & -1/3 \\ -1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সদ্বয় একে অপরের বিপরীত।

1.11 সহায়ক গ্রন্থমালা

1. A.C. Aitken, Determinants and Matrices ; Edinburgh : Oliver and Boyd, 1948.
2. W. L. Ferrar, Algebra Oxford University Press, 1941.
3. S. Perlis, Theory of Matrices. Reading, Mass : Addison-Wesley 1952
4. P. R. Halmoz, Finite-Dimensional. Vector Spaces. Van Nostrand
5. বীজগণিত, কৈলাসনাথ ভট্টাচার্য। পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ।

একক 2 ❒ নির্ণায়ক (Determinant)

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী এককে পাওয়া ম্যাট্রিক্সের ধারণা থেকে নিশ্চয় বোঝা যায় যে কোনো একটি ম্যাট্রিক্সের মান এককভাবে পাওয়া যায় না। নির্ণায়ক হল একটি ম্যাট্রিক্সের বা তার থেকে প্রাপ্য বর্গাকার আংশিক ম্যাট্রিক্স-এর সাংখ্যমান যে কিছু নির্দিষ্ট নিয়মে সংজ্ঞিত হয়। সাধারণভাবে আমরা জানি $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স থেকে $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ এরূপ একটি নির্ণায়ক সূচিত হলে তার মান $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ হয়। রৈখিক সমীকরণের সেট সমাধান থেকে শুরু করে ম্যাট্রিক্সের যাবতীয় প্রায়োগিক ক্ষেত্রেই এর নির্ণায়কের মান গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা গ্রহণ করে। নির্ণায়কের বিভিন্ন ধর্মাবলী এবং তার ব্যবহারিক প্রয়োগ সম্বন্ধেও আলোচনা করা হবে।

2.2 উদ্দেশ্য

- এই এককটি থেকে আপনি জানবেন ম্যাট্রিক্সের সঙ্গে তার নির্ণায়কের সম্পর্ক।
- এই এককটি পাঠ করলে আপনি নির্ণায়কের মান নির্ণয়, উপনির্ণায়কের সাহায্যে নির্ণায়কের বিস্তার প্রভৃতি সম্বন্ধে অবহিত হবেন।
- এই এককটি থেকে আপনি জানবেন কীরূপে একটি নির্ণায়কের বিপরীত নির্ণয় করা হয়। এরকম আরো কিছু ধর্ম ও প্রয়োগ বিষয়ে ধারণা করা যাবে।

2.3 নির্ণায়কের সংজ্ঞা ও ধর্মাবলী (definition of a determinant and its properties)

সংজ্ঞা ঃ কোন পরিসরে (F) বর্ণিত একটি n ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্সের [$A = (a_{ij})$] নির্ণায়ক । A । ঐ ম্যাট্রিক্সের উপাদান (a_{ij}) সম্বলিত একটি বহুপদী বর্গাকৃতি বিন্যাস যার একটি সুনির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে।

এটি ঐ ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেকটি উপাদানের অপেক্ষক রূপেও চিন্তা করা যায়।

অনু 1. নির্ণায়কের উৎপত্তি সম্বন্ধে সম্যক ধারণার জন্য সামান্য সংখ্যা-বিন্যাসের ধর্মাবলী আলোচনা প্রয়োজন। পূর্ণসংখ্যার সেট স্বাভাবিক ক্রমবিন্যাস অনুযায়ী ঃ 1, 2, 3, 4, 5, ..., n হবে। এখন যদি এই ক্রমের 2 এবং 4 সংখ্যাদুটি পরস্পর স্থান বিনিময় করে তবে বিন্যাসটি নিম্নরূপ হবে ঃ

$$1,\ 4,\ 3,\ 2,\ 5,\ ....,\ n.$$

পূর্ণসংখ্যার স্বাভাবিক **ক্রমবিন্যাসের** (natural order) যেকোনো পরিবর্তনকেই 'সংখ্যাবিন্যাস' বলা হয়। স্বাভাবিক ক্রম থেকে সংখ্যাদ্বয়ের স্থান বিনিময়ের সংখ্যা যদি জোড়সংখ্যক (even) হয় তবে তাকে **জোড়-বিন্যাস** (even permutation) নতুবা **বিজোড়-বিন্যাস** (odd permutation) বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ যথাক্রমে

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 \end{pmatrix} \text{ এবং } \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 1\ 4\ 3\ 2\ 5 \end{pmatrix}$$

বিন্যাসের উল্লেখ করা যেতে পারে।

এখন একটি n-ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্সের

$$(2.3.1)\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেকটি সারি থেকে একটি পদ নিই যেন দুটি পদ একই স্তম্ভে না থাকে। এদের গুণফল সাধারভাবে প্রকাশ করলে

(2.3.2) $a_{1i}a_{2j}a_{3k}\ \ldots\ a_{nr}$-এরূপ হবে। এক্ষেত্রে $(i,\ j,\ k,\ \ldots,\ r)$ ~ স্বাভাবিক পূর্ণসংখ্যার সেট $(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$-এর একটি ক্রমবিন্যাসরূপে চিহ্নিত হয়।

রাশি 2.3.2-এর মত গুণফলের সমাহার (Collection) সম্ভাব্য কতসংখ্যক হতে পারে দেখা যাক ঃ প্রথম i-সংখ্যাটিকে যে কোনো n সংখ্যার মধ্য থেকে n রকম উপায়ে নির্বাচন করা যায়। এরপর যে কোনো i নির্দিষ্ট মান গ্রহণ করলে j-কে পরবর্তী $(n - 1)$ সংখ্যার মধ্য থেকে $(n - 1)$ রকমভাবে নির্বাচন করা যায়। সুতরাং

সবমিলিয়ে $n(n-1)(n-2)$ .... $3.2.1 = n1$ সংখ্যক উপায়ে 2.3.2 গুণফলটি নির্বাচন করা যায়। মনে রাখতে হবে যে A একটি $n' \times n$ ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স হওয়ার দরুন এতে সবমিলিয়ে n^2 উপাদান বর্তমান।

উদাহরণস্বরূপ একটি 3×3 বর্গম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক $A\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ভাবা যাক্।

এর প্রতিটি সারি ও প্রতিটি স্তম্ভ থেকে একটি করে উপাদান (element) নিয়ে রাশি 2.3.2-এর মতো করে প্রকাশ করলে a_1j, a_2j, a_3k—এমন হবে। এখন দ্বিতীয় সূচক (i, j, k)-এর জায়গায় (1, 2, 3) বসালে কতরকম বিন্যাস পাওয়া সম্ভব। 1, 2, 3-কে স্বাভাবিক ক্রম মেনে বিজোড় বিন্যাস করলে $a_{11}\ \underbrace{a_{23}\ a_{32}}$, $\underbrace{a_{12}\ a_{21}}\ a_{33}$ এবং $\underbrace{a_{13}\ a_{22}\ a_{31}}$ —এই তিনটি প্রকাশ করে। অনুরূপে $\underbrace{a_{13}\ a_{21}\ a_{32}}$ এবং $\underbrace{a_{12}\ a_{23}\ a_{31}}$ জোড় বিন্যাসকে প্রকাশ করে। সবশেষে $a_{11}a_{22}a_{33}$ পদটি লেখা হয় যাতে কোনো বিন্যাসই পরিবর্তন করা হয় নি। এবার এই ছটি পদকে যদি পরস্পরের সঙ্গে যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায় (জোড় বিন্যাসের পদের আগে + চিহ্ন আর বিজোড় বিন্যাসের পদের আগে – চিহ্ন বসিয়ে) তবে সেটাই A নির্ণায়কের মান হবে। অর্থাৎ,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

সুতরাং একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})$-এর সাপেক্ষে নির্ণায়ক $|A|$। ওই ম্যাট্রিক্সটির n^2 সংখ্যক উপাদানের সমস্তরকম বিন্যাসপ্রাপ্ত সংখ্যার যোগফল হিসাবে প্রাপ্ত হবে ঃ

$|A| = \sum (\pm 1) a_{1i}\, a_{2j} \cdots a_{nr}$ -যেখানে $(i, j, \ldots.\ r)$ যদি $(1, 2, 3, \ldots\ n)$-এর জোড় বিন্যাস হয় তবে (+) চিহ্ন নয়তো (–) চিহ্ন হবে।

সুতরাং ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})$ যদিও একটি রচনা নির্দেশ করে, তার নির্ণায়ক $|A|$ এর সবসময় একটি সুনির্দিষ্ট মান অথবা উপাদান সমূহের একটি অপেক্ষক পাব। স্পষ্টতই দেখা যাচ্ছে, একটি নির্ণায়কের মান প্রত্যেকটি সারির বা স্তম্ভের বিভিন্ন উপাদানের উপর নির্ভর করে এবং সারি বা স্তম্ভের আপাত অবস্থানের উপরও নির্ভর করে। একথাও পরিষ্কার যে একটি নির্ণায়কের মান সারি বা স্তম্ভের সাপেক্ষে একই থাকে।

ধর্ম 1. যে কোনো ম্যাট্রিক্সের দুটি সারি বা স্তম্ভ পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়ক $A(|A|)$ -এর সাংখ্যমান একই থাকে, কেবল তার চিহ্ন পরিবর্তন হয় (ধনাত্মক থেকে ধনাত্মক অথবা বিপরীত)। উদাহরণস্বরূপ একটি সরলতম ম্যাট্রিক্স $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$-এর স্তম্ভদ্বয় স্থান পরিবর্তন করলে নূতন নির্ণায়ক $|A'| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = +2$ এবং সারিদ্বয় স্থান পরিবর্তন করলে $|A''| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +2$ হয়।

ধর্ম 2. সারি (বা স্তম্ভ) স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের মান চিহ্ন পরিবর্তনের দরুণ দেখা যায় যদি কোনো

নির্ণায়কের যে কোনো দুটি সারিতে (অথবা স্তম্ভে) অনুরূপ উপাদানসমূহ থাকে তবে তার মান শূন্য হবে। ধরা [illegible] $a_{ik} = a_{jk}$, সমস্ত k-মানের জন্য সত্য। অর্থাৎ i-তম সারির প্রতিটি উপাদান j-তম সারির প্রতিটি উপাদানের সাথে সমান।

অথবা $a_{ki} = a_{kj}$ অর্থাৎ i-তম স্তম্ভের প্রতিটি উপাদান j-তম স্তম্ভের প্রতিটি উপাদানের সাথে সমান। সুতরাং, উভয়ক্ষেত্রেই সারিদ্বয় বা স্তম্ভদ্বয় স্থান পরিবর্তন করলেও নির্ণায়কের মান একই থাকে। সুতরাং, $|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$ অর্থাৎ নির্ণায়কের সাংখ্যমান শূন্য হয়।

ধর্ম 3. কোনো নির্ণায়কের ($|A|$) একটি নির্দিষ্ট সারির (অথবা স্তম্ভের) প্রতিটি উপাদানকে একটি ধ্রুবসংখ্যা λ-দিয়ে গুণ করলে ওই নির্ণায়কের মান $\lambda|A|$ হয়। সুতরাং উক্ত নির্ণায়কের প্রতিটি উপাদানকে যদি λ দিয়ে গুণ করা যায়, তবে নতুন নির্ণায়কের মান $\lambda^n|A|$ হবে। (n-ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে)

ধর্ম 4. যে কোনো বর্গম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রেই (A) তার পরিবর্ত (transpose) ম্যাট্রিক্স (A') একই নির্ণায়ক দ্বারা নির্দেশিত হবে। অর্থাৎ $|A| = |A'|$-এর কারণ সহজেই অনুমেয় (সংজ্ঞা দ্রষ্টব্য)।

2.4 সহ নির্ণায়কের সাহায্যে প্রকাশ (Cofactor of A Determinant)

নির্ণায়কের ক্রমসংখ্যা খুব বড় হলে উপরিউক্ত নিয়মানুসারে এর সাংখ্যমান নির্ণয় যথেষ্ট শ্রমসাপেক্ষ। সেক্ষেত্রে সহনির্ণায়কের সাহায্যে প্রকাশ অবশ্যম্ভাবী।

সংজ্ঞা 2.1 ঃ কোনো বর্গম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})$-এর প্রতিটি উপাদান a_{ij} সাপেক্ষে সহনির্ণায়ক A_{ij} সংজ্ঞিত হয়। এই সহনির্ণায়কের মান $(|A_{ij}|)$ উপরিউক্ত উপাদানের (a_{ij}) ধারক সারি (i-তম)

এবং, ধারক স্তম্ভ (j-তম) ছাড়া বাদবাকি A-এর উপম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মানের $(-1)^{i+j}$ গুণিতক হবে। চিত্রানুসারে ঃ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & \boxed{a_{i1}} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \boxed{a_{11}} & \cdots & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & \boxed{a_{nj}} \\ \vdots & & & & & \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & \boxed{a_{in}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের চিহ্নিত a_{ij} উপাদানের সহনির্ণায়কটি

2.4.1 $\quad |A_{ij}| = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{1j-1} & \cdots & & a_{i-1,j-1} & a_{i+1,j-1} & \cdots & a_{nj-1} \\ a_{1j+1} & \cdots & & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{nj+1} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{i-1,n} & a_{i+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

i-সারিকে প্রথম সারিতে আনতে ও j স্তম্ভকে প্রথম স্তম্ভে আনতে যথাক্রমে [i ও j] চিহ্ন পরিবর্তনের দরকার। এইরূপে A নির্ণায়কের a_{ij} উপাদানের সহনির্ণায়ক সংজ্ঞিত হলে A-এর মান নিম্নোক্ত সমীকরণের দ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব ঃ

2.4.2 $\quad |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \sim$ সমস্ত i-এর জন্য।

উদাহরণস্বরূপ দেখা যাক্, একটি 3×3 ক্রমের নির্ণায়ককে 2.4.2 সমীকরণ অনুযায়ী কীভাবে সহনির্ণায়কের সাহায্যে প্রকাশ সম্ভব ঃ

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের ক্ষেত্রে

সংজ্ঞানুসারে A_{11} (a_{11} উপাদানের সহনির্ণায়ক)

$$= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

অনুরূপে $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$

এবং $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$ হয়।

স্বভাবতই সমীকরণ 2.4.2 অনুযায়ী

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

সুতরাং সহনির্ণায়কের সংজ্ঞানুসারে নির্ণায়কের নির্ণয়ের নিয়ম প্রতিষ্ঠিত হল। (2.3.1 দ্রষ্টব্য)

সহনির্ণায়কের দ্বারা কোনো নির্ণায়কের মান প্রকাশের নিয়ম থেকে নির্ণায়ক বীজগণিতের কিছু বৈশিষ্ট্য প্রতিভাত হয়। যথা ঃ

$$\begin{vmatrix} (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} + \lambda_3 c_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ (\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 b_{21} + \lambda_3 c_{21}) & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 b_{n1} + \lambda_3 c_{n1}) & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 b_{i1} + \lambda_3 c_{i1})\, A_{i1} \quad [2.3.2 \text{ দ্রষ্টব্য}]$$

$$= \lambda_1 \sum_i a_{i1} A_{i1} + \lambda_2 \sum b_{i1} A_{i1} + \lambda_3 \sum c_{i1} A_{i1}$$

$$= \lambda_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

এক্ষেত্রে একটি বিষয় অবশ্যই লক্ষণীয় যে দুটি নির্ণায়কের যোগফল তাদের দ্বারা নির্দিষ্ট ম্যাট্রিক্সের যোগফল ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের সাথে সমান হয় না।

$|A + B| \neq |A| + |B|$ প্রমাণযোগ্য।

পূর্বেই বলা হয়েছে কোনো নির্ণায়কের দুটি সারি (অথবা স্তম্ভ) অনুরূপ উপাদানসম্পন্ন হলে তার মান শূন্য হয়। এখন এই ধর্ম ব্যবহার করলে $\sum_j a_{kj} A_{ij} = \sum_j a_{ji} A_{jk} = 0 \; (i \neq k)$ হবে। কারণ এক্ষেত্রে k-সারির উপাদানের সাথে i-সারির সহনির্ণায়কের গুণ করা হয়েছে। আবার সমীকরণ 2.4.2 অনুযায়ী $|A| = \sum_j a_{ij} A_{ij}$ হয়।

সুতরাং 2.4.2.

$\sum a_{ij} A_{kj} = \sum a_{ji} A_{jk} = |A| \delta_{ki}$ হবে। δki-এর অর্থ হল $\delta ki = 0$ যখন $k \neq i$, $\delta ii = 1$

2.5 কোনো নির্ণায়কের বিপরীত নির্ণায়ক নিরূপণ

সংজ্ঞা ঃ $A = (a_{ij})$ ম্যাট্রিক্সের সাপেক্ষে তার **সংযোগী** ম্যাট্রিক্স (adjoint) নিম্নরূপে সংজ্ঞিত হয় ঃ

$$2.5.1 \quad adj\ A = \left(A_{ij}'\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

তবে সমীকরণ 2.4.2 অনুসারে

$$|A|\delta_{ki} = \sum a_{ij}A_{jk}{}^T = \sum A_{kj}{}^T a_{ji} \text{ হয়।}$$

সুতরাং ম্যাট্রিক্স গুণনের নিয়মানুসারে লেখা যায়

2.5.1 $(A)\ (adj\ A) = (adj\ A)A = |A|In$

এক্ষেত্রে $A = (a_{ij})$ ম্যাট্রিক্সের সংযোগী ম্যাট্রিক্স $(AdjA)$ A-র প্রতিটি উপাদান (a_{ij})-কে তার সহনির্ণায়ক (A_{ij}) দিয়ে প্রতিস্থাপন করে প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত (transpose) ম্যাট্রিক্স হিসাবে চিহ্নিত হয়।

সমীকরণ 2.5.1 থেকে দেখা যায়

$$A.\frac{adjA}{|A|} = I_n = \frac{adjA}{|A|} \cdot A$$

এর থেকে বর্গম্যাট্রিক্সের বিপরীতকরণের সংজ্ঞা অনুমেয় ঃ

A একটি বর্গম্যাট্রিক্সের জন্য, বিপরীত A

$$\text{বা,} \quad A^{-1} = \frac{\text{সংযোগী } A}{|A|} = \frac{adjA}{|A|}$$

এক্ষেত্রে অবশ্যই $|A| \neq 0$

স্পষ্টতঃ সহযোগী নির্ণায়কের জন্যই অনুরূপ সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে।

যেমন যদি $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ হয়

$$adj\ |A| = \text{সহযোগী}\ \ A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{বা,}\ \ |A|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{vmatrix}$$

স্পষ্টতঃ তৃতীয়ক্রমের নির্ণায়কের জন্য সহযোগী $|A| = |A|^2$, n-ক্রমের জন্য সহযোগী $|A| = |A|^{n-1}$

এবং $|A|\ |A|^{-1} = |A|^{-1}\ |A| = 1$, $\{|A|_n^{-1}\}^{-1} = |A|$

উদাহরণ 2.1 ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

হলে প্রমাণ করুন ঃ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

উত্তর ঃ প্রথমতঃ দেখা যায়,

$$|A| = 1.(-2-3) - 1.(-1+3) + 1(1+2) = -4$$

$$|B| = 1(1-6) - 2(2-9) + 3(4-3) = 12$$

এখন $A^{-1} = \dfrac{\text{সংযোগী}\ A}{|A|}$, সূত্রানুসারে

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{অনুরূপে,}\ \ B^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 7 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

সুতরাং, ম্যাট্রিক্সগুণন প্রক্রিয়ায়

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{-1}{48}\begin{pmatrix} 25-8+9 & -10-6 & -5-8+3 \\ -35+16+9 & 14-6 & 7+16+3 \\ -5-8-9 & 2+6 & 1-8-3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{48}\begin{pmatrix} 26 & -16 & -10 \\ -10 & 8 & 26 \\ -22 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

কিন্তু $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+2+3 & 2+1+2 & 3+3+1 \\ 1+4+9 & 2+2+6 & 3+6+3 \\ -1+2-3 & -2+1-2 & -3+3-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 14 & 10 & 12 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$ হওয়ায়

$$(AB)^{-1} = \frac{AB \text{ সংযোগী}}{|AB|} = \frac{1}{|AB|}\begin{pmatrix} 26 & -16 & -10 \\ -10 & 8 & 26 \\ -22 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

হবে এবং $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ প্রমাণিত।

2.6 বিবিধ বিশেষ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

সংজ্ঞা ঃ কোনো বিশেষ বর্গম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে (A) তার পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স A^T যদি এরূপ হয় যে ম্যাট্রিক্সগুণনের নিয়মে $AA^T = A^TA = 1$ হবে, তবে তাকে **লম্বগত** (orthogonal) ম্যাট্রিক্স বলে। স্বভাবত লম্বগত ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে $A^T = A^{-1}$ হয়। অর্থাৎ পরিবর্ত ম্যাট্রিক্সটি (A^T) তার (A) বিপরীত ম্যাট্রিক্স হিসাবে প্রতিষ্ঠিত হয়।

উদাহরণ 2.2 ঃ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

প্রতিসম এবং **বিপ্রতিসম** নির্ণায়ক (Symmetric & Skew Symmetric)।

সংজ্ঞা ঃ নির্ণায়কের উপাদানসমূহ যখন $A_{ij} = a_{ji}$ ধর্ম মেনে চলে তখন তাকে প্রতিসম এবং $a_{ij} = -a_{ji}$ ধর্ম অনুসরণ করে তখন তাকে বিপ্রতিসম নির্ণায়ক বলে।

সুতরাং যদি একটি নির্ণায়কের ক্ষেত্রে (i, j) স্থানাঙ্কদ্বয় বিশিষ্ট উপাদান ও (j, i) স্থানাঙ্কদ্বয় বিশিষ্ট উপাদানকে পরস্পরের অনুরূপ বলা হয় তবে

(i) প্রতিসম নির্ণায়কের ক্ষেত্রে অনুরূপ উপাদানগুলি পরস্পর সমান, এবং

(ii) বিপ্রতিসম নির্ণায়কের ক্ষেত্রে অনুরূপ উপাদানগুলি একে অপরের বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে এবং কর্ণের উপাদানগুলি সর্বদা শূন্য হবে।

উদাহরণ 2.3 ঃ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ একটি প্রতিসম

এবং $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ একটি বিপ্রতিসম নির্ণায়ক। একটু গভীরভাবে লক্ষ করলেই বোঝা যাবে যে বিজোড় ক্রমের বিপ্রতিসম নির্ণায়কের মান শূন্য হবে, এবং এটাও প্রমাণ করা যায় যে জোড় ক্রমের নির্ণায়কের মান একটি পূর্ণবর্গরাশি হবে।

2.7 সারাংশ

পূর্বতন এককে সাধারণ স্তরে ম্যাট্রিক্স সংক্রান্ত বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। এই এককে ম্যাট্রিক্স থেকে সংগৃহীত একটি বর্গাকার সৃজনকে গাণিতিক রূপে নিয়ে নির্ণায়ক হিসাবে চিহ্নিত করা হয়েছে, নির্ণায়কের একটি

নির্দিষ্ট মান আছে। এবং ওই মান নির্ণয়ের পদ্ধতিও আছে। এই মান নির্ণয়ের জন্য সহ উৎপাদকের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। এছাড়াও নির্ণায়কের ধর্ম বিষয়েও আলোচনা করা হয়েছে। বিপরীত নির্ণায়ক বলতে কী বুঝি এবং মূল নির্ণায়কের সঙ্গে বিপরীত নির্ণায়কের কি সম্পর্ক সেই বিষয়েও আলোচনা করা হয়েছে। ম্যাট্রিক্স থেকে অনুলিখিত বিভিন্ন প্রকার নির্ণায়কের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। এই কথা বলতেই হবে যে এই এককে মূলতঃ পুরাতন পদ্ধতিতে বিষয়টি আলোচিত হয়েছে, সাত নম্বর এককে রৈখিক বীজগণিতের ভিত্তিতে এই বিষয়ে আরো অনেক আলোচনা করা হয়েছে।

2.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

2.8.1 সহনির্ণায়কের সাহায্যে

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$ -র মান নির্ণয় করুন।

উত্তর ঃ ধরা যাক্ প্রথম সারির সাহায্যে মান নির্ণয় করা হবে।

সুতরাং,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(8-3) - 3(-3) + 2(-2) = 10$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = [-1(8-3) - 3(4+3) + 2(1+2)] = 20$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(0-3) - 1(4+3) + 2(1-0) = -2$$

$$A_{14} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -[-1(-2) - 1(1+2) + 3(1-0)] = -2$$

সুতরাং, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

$= 1.10 + 2.20 + 1(-2) + 3(-2)$

$= 42$

দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্নাবলি

2.8.1 $A^{-1} = \dfrac{adjA}{|A|}$ সূত্র প্রয়োগে

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন।

2.8.2 এমন একটি ম্যাট্রিক্স B নির্ণয় করুন যার বিপরীত ম্যাট্রিক্স B^{-1} প্রদত্ত হ'ল ঃ

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8.3 $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i \\ 4-6i & 2+3i \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে দেখান যে $AA^{-1} = A^{-1}A = 1.\left(i = \sqrt{-1}\right)$

2.8.4 দেখান যে, $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের ক্ষেত্রে $|A| = |A^T|$

2.8.5 সহনির্ণায়কের সাহায্যে মান নির্ণয়ের মাধ্যমে দেখান যে

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ এবং

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix}$

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন

2.8.6 দুটি নির্ণায়ক A এবং B-এর ক্ষেত্রে দেখান যে, $|A + B| = |A| + |B|$ সূত্রটি সত্য নয়।

2.8.7 সমীকরণ 2.4.2 গুণফল প্রকাশের মাধ্যমে $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -i & 3 \end{vmatrix}$ এবং $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কদুটির মান নির্ণয় করুন।

2.8.8 দেখান যে A ম্যাট্রিক্স এবং তার পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স A^T একই নির্ণায়ক দ্বারা নির্দিষ্ট। বা $|A| = |A^T|$

2.8.9 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটিকে প্রথম সারির সাহায্যে প্রকাশ করে মান নির্ণয় করুন।

2.8.10 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটিকে প্রথম স্তম্ভের সাহায্যে প্রকাশ করে মান নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

2.8.1 $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & -8 & 4 \end{vmatrix}$

2.8.2 $B = -\frac{1}{199}\begin{vmatrix} -58 & 51 & -9 \\ 13 & -8 & -22 \\ -1 & -30 & 17 \end{vmatrix}$

2.8.3 6 এবং −5

2.8.4 −36

2.8.5 −2

2.9 সহায়ক গ্রন্থ

1. Chakraborty & Ghosh : Advanced Higher Algebra U. N. Dhar & Sons Pvt. Ltd. 1995.
2. G. Hadley : Linear Algebra : Addison-wesley (1979)
3. S.K. Mapla-Higher Algebra (abstract and Linear) Ashoke Prakashan Kolkata1994.

একক 3 □ সাধারণ পদ্ধতিতে ত্রিচল বৈশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের সমাধান ; ক্র্যামারের পদ্ধতি (Solution of Linear equation of three variablels, cramer's rule)

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

যে কোনো রৈখিক সমস্যা সমাধানে একটি রৈখিক সহসমীকরণের সেট সমাধান প্রয়োজন হয়। কোনো কোনো ক্ষেত্রে এই সমীকরণের সেটে সহগগুলির আপেক্ষিক মান জটিল এবং বড় রাশি হতে পারে। সেক্ষেত্রে অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান অপেক্ষাকৃত কষ্টসাধ্য হয়। ক্র্যামারের নিয়মে যদি সমীকরণের সংখ্যা বাস্তবচলের সংখ্যার সমান হয় তবে নির্ণায়কের মান নির্ণয়ের সাহায্যে সরাসরি সমাধান করা সম্ভব। যদি চলের সংখ্যা সমীকরণ সংখ্যা থেকে বেশি হয়, তবে অসীম সংখ্যক সমাধান পাওয়া যায়। এক্ষেত্রে সমীকরণ সেটাকে অসঙ্গত বলা হয়। ম্যাট্রিক্সের গুণগত বিশ্লেষণের সাহায্যে এই অসঙ্গতিও নির্ণয় সম্ভব।

3.2 উদ্দেশ্য

- এককটি পাঠ করলে আপনি যে-কোনো রৈখিক সমীকরণ সেটকে ম্যাট্রিক্স সমীকরণের রূপে প্রকাশ করতে পারবেন।

- এই এককে আপনি শিখবেন কীরূপে প্রচলিত পদ্ধতি ব্যাতিরেকে ম্যাট্রিক্স বীজগণিতের সাহায্যে একটি সমীকরণ সেট সমাধান করা যায়।
- এককটিতে আপনি জানতে পারবেন কীরূপে তত্ত্বগতভাবে নির্ণয় করা যায় একটি সমীকরণ সেট সমাধান যোগ্য কিনা? অর্থাৎ তার সমাধান সম্ভব কি সম্ভব নয়।

3.3 ম্যাট্রিক্স গঠন এবং ক্র্যামারের নিয়ম

নির্দিষ্ট সংখ্যক বাস্তব চল সম্বলিত সমসংখ্যক রৈখিক সমীকরণের সমাধানযোগ্য সেট থাকলে তা সমাধানের জন্য বিভিন্নরূপ সাংখ্যিক (Numerical) পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। এদের ভিতর **ক্র্যামারের নিয়ম** অন্যতম।

ধরা যাক, n-সংখ্যক বাস্তবচল $\{x_i\ ;\ i = 1, 2, 3, \ldots n\}$ যুক্ত n-সংখ্যক সমীকরণের সেট নিম্নে প্রদত্ত হইল ঃ

$$3.3.1\text{—}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ - & - \\ - & - \\ - & - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

এখন এই সমীকরণ সমষ্টিকে (System of equations) নিম্নরূপে

$$AX = B \qquad - 3.3.2$$

ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করা সম্ভব। এক্ষেত্রে $A = (a_{ij})_{n\times n}$ বর্গ ম্যাট্রিক্সটি সমস্ত সহগ সম্বলিত উপাদানে তৈরি এবং $X = (x_1)$ সমস্ত চলগুলিকে দিয়ে গঠিত স্তম্ভম্যাট্রিক্স এবং B = (b) সমস্ত ধ্রুবকগুলি নিয়ে গঠিত অপর একটি স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স নির্দেশ করে।

অর্থাৎ

$$3.2.3\text{—}\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & & - & & - \\ - & - & & - & & - \\ - & - & & - & & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ - \\ - \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ - \\ - \\ - \\ b_n \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ $AX = b$

এবার যদি $A = (a_{ij})$ বওম্যাট্রিক্সটি অবিশিষ্ট (nonsingular) হয় অর্থাৎ $|A| \neq 0$ হয় তখন A^{-1} ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া সম্ভব। সেক্ষেত্রে 3.3.2 সমীকরণটিকে A^{-1}-এর সাহায্যে উভয়দিকে গুণ করলে নীচের ফল পাওয়া যায়

3.3.4— $A^{-1}\ Ax = 1x = x = A^{-1}b$

সমীকরণ 3.3.4-এর যদি A^{-1}-এর জায়গায় $\dfrac{(\text{সংযোগী } A)\ (\operatorname{adj} A)}{(\text{নির্ণায়ক } A)\ (|A|)}$ বসানো হয় তবে ম্যাট্রিক্সগুণনের নিয়মানুসারে বাস্তব চলগুলি উপাংশভিত্তিক নিম্নরূপে প্রকাশিত হবে।

3.3.5 $\quad x_i = \dfrac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j \ ; i = 1, 2, \cdots n$

এখন নির্ণায়ক $|A|$-কে স্তম্ভভিত্তিক শ্রেণীতে (i) প্রকাশ করলে

3.3.6 $\ |A| = \sum a_{ji} A_{ji}$ এমন হবে।

সমীকরণ 3.3.5 এবং 3.3.6 তুলনা করলে দেখা যায় A ম্যাট্রিক্সের i-তম স্তম্ভকে b স্তম্ভম্যাট্রিক্স দিয়ে প্রতিস্থাপন করলে যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়, সেই ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কটি সমীকরণ 3.3.5-এর মতো $\sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j$ হবে। সুতরাং $\{x_i\}$ চলরাশির মান নির্ণায়ক $|A|$-এর i-তম স্তম্ভকে b স্তম্ভম্যাট্রিক্স দিয়ে প্রতিস্থাপন করে পাওয়া নতুন নির্ণায়কের মানকে, $|A|$-এর মান দিয়ে ভাগ করে পাওয়া যায়।

যে কোনো রৈখিক সমীকরণের সেটে যদি পরস্পর নিরপেক্ষ সমীকরণের সংখ্যা বাস্তবচলের সংখ্যার সাথে সমান হয়, তবেই প্রত্যেক চলের সুনির্দিষ্ট মান সমাধানের সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব। যদি চলের সংখ্যা সমীকরণ সংখ্যার থেকে বেশি হয়, তবে সাধারণতঃ অসীমসংখ্যক সমাধান পাওয়া যায়। অথবা চলের সংখ্যা থেকে সমীকরণ সংখ্যা বেশি হলে দেখতে হবে নিরপেক্ষ (independent) সমীকরণ কোন্‌গুলি?

নির্দিষ্ট সংখ্যক বাস্তব চল সম্বলিত সম-সংখ্যক রৈখিক সমীকরণের সমাধানযোগ্য সেট থাকলে, তা সমাধানের জন্য নানারকম সাংখ্যিক (numerical) এবং বৈশ্লেষিক (analytical) পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। ক্র্যামারের নিয়ম এদের ভিতরে অন্যতম। ধরা যাক সমীকরণের সেটটি নিম্নরূপ ঃ

$$3.2.7 \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \\ - \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \\ - \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

সুতরাং A ম্যাট্রিক্সটি অবিশিষ্ট হলেই, (3.3.2) সমীকরণ সেটের জন্য একটি সুনির্দিষ্ট (unique) সমাধান $X = A^{-1}b$ সেট পাওয়া যাবে। এই সমাধানটি সুনির্দিষ্ট হওয়ার কারণ হলো A^{-1} ম্যাট্রিক্স একটি সুনির্দিষ্ট (unique) ম্যাট্রিক্স। সেকারণেই ক্র্যামারের নিয়ম কেবলমাত্র সেসব সমীকরণ সেটের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য, যেক্ষেত্রে A ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় সম্ভব।

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের নিয়মানুসারে

$$A^{-1} = \frac{\text{সংযোগী } A}{\text{নির্ণায়ক } A} = \frac{\mathrm{Adj}\, A}{|A|} \text{ হবে।}$$

এক্ষেত্রে সংযোগী A সংজ্ঞানুসারে

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

হবে সেক্ষেত্রে A_{ij}-গুলি প্রত্যেকটি A ম্যাট্রিক্স উপাদান a_{ij}-এর সহনির্ণায়ক রূপে নির্দিষ্ট।
যেমন ঃ—

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdots x_n = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{11} & b_{1n-1} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & b_{2n-1} & \cdots & b_2 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & b_{nn-1} & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

ক্র্যামারের নিয়মানুসারে সাধারণভাবে একগুচ্ছ সহসমীকরণের সেট সমাধান বিশেভভাবে উপযোগী। যদিও n-এর মান খুব বেশি হলে, সংশ্লিষ্ট নির্ণায়কগুলি নির্ণয় করা কষ্টসাধ্য হয়। সাংখ্যিক (Numerical) সমাধানের ক্ষেত্রে বীজগাণিতিক গাউসীয় অপসারণ পদ্ধতি তুলনামূলকভাবে বেশি কার্যকরী হতে পারে। কিন্তু তাত্ত্বিক ক্ষেত্রে ক্র্যামারের নিয়মের বিশিষ্টতা হল এটি সমাধানসূত্রকে সুনির্দিষ্টরূপে (unique) প্রকাশ করে ($X = A^{-1}b$)।

সংক্ষেপে বলতে হলে ক্র্যামারের সূত্র নিম্নরূপে প্রতিভাত হয় ঃ

ধরা যাক যে n-সংখ্যক অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট n-সংখ্যক রৈখিক সমীকরণ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ সমূহের সংশ্লিষ্ট সহগ ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})$-এর নির্ণায়ক অবিশিষ্ট। সেক্ষেত্রে এই সমীকরণসেটের সমাধান সেট নিম্নোক্ত আকারে প্রকাশিত হবে ঃ

$$\frac{x_1}{\sum_{i=1}^{n} A_{i1}b_i} = \frac{x_2}{\sum_{i=1}^{n} A_{i2}b_i} = \cdots = \frac{x_n}{\sum_{i=1}^{n} A_{in}b_i} = \frac{1}{|A|}$$

যেক্ষেত্রে A_{ij} হল $|A|$ সহগ ম্যাট্রিক্সের নির্ধারকে a_{ij} উপাদানের সহনির্ণায়ক।

উদাহরণ 3.1.

1. ক্র্যামারের সূত্রের সাহায্যে $4x + 3y - 2x = 5$; $x + y + z = 3$; $x + 2y = 3$ সমীকরণত্রয়ের সমাধান করুন।

এখানে সহগ নির্ণায়ক

$$= |A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-2) - 3(-1) + (-2)(+2 - 1) = -7 \neq 0$$

একটি অবিশিষ্ট নির্ণায়ক।

$$\text{সুতরাং } x = \frac{-1}{7} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

হবে, কারণ $|A|$-এর প্রথম স্তম্ভকে ধ্রুবক স্তম্ভম্যাট্রিক্স দিয়ে প্রতিস্থাপন করে উপরিউক্ত ম্যাট্রিক্সই পাওয়া যায়।

অতএব $x = \frac{-1}{7}$ [+ 2(3 − 6) + 1(9 − 10)]

$$= \frac{-1}{7}[-6-1] = +1$$

অনুরূপে $y = 1$ এবং $z = 1$ হবে।

উদাহরণ 3.2. ক্র্যামারের সূত্রের সাহায্যে

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + z &= -2 \\ x - 3y - z &= 0 \\ -3y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$ সমীকরণত্রয়ের সমাধান করুন।

প্রথমে সহগ নির্ণায়ককে নির্দিষ্ট রূপে নির্ণয় করতে হয়।

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-3\ -3) - 1(-3 + 3) = -6$$

সুতরাং এটা একটি অবিশিষ্ট নির্ণায়ক।

সূত্রানুসারে,

$$x = \frac{-1}{6}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-2(-3-3)}{-6} = -2$$

$$y = \frac{-1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1(0+0)+1(0+2)}{-6} = \frac{-1}{3}$$

$$z = \frac{-1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1(0+0)+1(6+0)}{-6} = -1$$ হবে।

অনুশীলনী 3.1. নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সগুলির নির্ণায়ক নির্ণয় করুন এবং t এর কোনো কোনো মানের জন্য নির্ণায়কগুলির মানশূন্য হবে তাও বার করুন

(i) $\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{pmatrix}$

অনুশীলনী 3.2. ধরা যাক্ A একটি $n \times n$ ম্যাট্রিক্স এবং t একটি বাস্তব সংখ্যা। দেখান যে নির্ণায়ক $(tI - A)$ n মাত্রার একটি বহুপদ এবং শীর্ষপদের সহগ হচ্ছে 1।

উত্তর ঃ 3.1 (i) $(t + 2)^2 \ (t - 4)$, $t = -2, 4$

(ii) $(t + 2)^2 \ (t - 4)$, $t = -2, 4$

3.4 ম্যাট্রিক্সের মাত্রা বা র‍্যাঙ্ক

কোনো পরিসরে একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সে যেকটি রৈখিকরূপে নিরপেক্ষ সারি থাকে তাকেই ওই ম্যাট্রিক্সের সারির‍্যাঙ্ক বলে। একইভাবে ম্যাট্রিক্সে যে কটি পরস্পর নিরপেক্ষ স্তম্ভ থাকে তাকে ওই ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভর‍্যাঙ্ক বলে প্রত্যেক ম্যাট্রিক্সের সারির‍্যাঙ্ক ও স্তম্ভর‍্যাঙ্ক সমান হয়। সেক্ষেত্রে প্রত্যেক অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সের $(|A| \neq 0)$ একটি স্বভাবী আকার (Canonical) থাকে। যথা ঃ $\begin{bmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix}$-এক্ষেত্রে I একটি $r \times r$ ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স। প্রত্যেক ম্যাট্রিক্সকে এরূপে প্রকাশ করা সম্ভব, এবং r-সংখ্যাটিকেই ওই ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ একটি $n \times n$ ক্রমের একক বর্গম্যাট্রিক্সের কথা ভাবা যায়। এটির র‍্যাঙ্ক বা মাত্রা n হবে কারণ এর প্রতিটি সারি বা স্তম্ভ একে অন্যের সাথে সম্পূর্ণরূপে নিরপেক্ষ।

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

যে কেউ কারোর উপর নির্ভরশীল নয়।

যথা ঃ $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সের (A) র‍্যাঙ্ক k হবে কেবলমাত্র যদি A-এর প্রতিটি $(k+1)$ অথবা ততোধিক মাত্রার (order) উপনির্ণায়কের মান শূন্য হয় এবং k-মাত্রার অন্ততঃপক্ষে একটি অশূন্য উপনির্ণায়ক থাকে। সাধারণতঃ এরূপেই একটি ছোট ক্রমের ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক নির্ধারণ সম্ভব অর্থাৎ A ম্যাট্রিক্সের ভিতর সর্বোচ্চ অশূন্য নির্ণায়কের ক্রম নির্ণয় করা। যথা,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক 2 হবে কারণ $|A| = 0$ হলেও উপনির্ধারক $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6$ অশূন্য।

3.5 সমাধান সঙ্গতি

এখন ক্র্যামারের সূত্রানুসারে সমাধানের ক্ষেত্রে র‍্যাঙ্কের ধারণা কীরূপে প্রযোজ্য দেখা যাক্। ধরা যাক্ n-সংখ্যক বাস্তবচল সম্বলিত m-সংখ্যক রৈখিক সমীকরণের সেট ঃ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

প্রদত্ত আছে। এক্ষেত্রে নিম্নরূপ ম্যাট্রিক্স গুণনে এর প্রকাশ সম্ভব ঃ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ $AX = b$

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \qquad X = (x_i)_{n\times 1} \qquad b = (b_i)_{m\times 1}$$

এখন আমরা আগের সংজ্ঞা অনুযায়ী $m \times (n+1)$-ক্রমের একটি নূতন ম্যাট্রিক্স A_b গঠন করি যা নিম্নরূপ

$$A_b = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

A_b-কে **বর্ধিত** (augmented) ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

ম্যাট্রিক্স A_b এবং A-এর যৌথ র‍্যাঙ্ক নির্ণয়ের সাহায্যে সমীকরণ 3.2.2 সমাধানের শর্তাবলী নির্ধারণ করা হয়। এখন যেহেতু A ম্যাট্রিক্সের সমস্তরকম নির্ধারক A_b ম্যাট্রিক্সে বর্তমান, সুতরাং A-এর র‍্যাঙ্ক/মাত্রা কখনোই A_b-এর র‍্যাঙ্ক অপেক্ষা বড় হতে পারে না। সুতরাং হয় (i) $r(A) < r(A_b)$ না হয় (ii) $r(A) = r(A_b)$ হবে।

একমাত্র $r(A) = r(A_b)$ হলেই, সমীকরণ 3.3.2 সেটের অন্ততঃপক্ষে একটি সমাধান থাকবেই। উদাহরণস্বরূপ নিম্নোক্ত সমীকরণের সেটের কথা ভাবা যাক ঃ

$$3x + 4y = 7$$

$$2.25x + 3y = 1$$

এক্ষেত্রে $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2.25 & 3 \end{bmatrix}$ এবং

$A_b = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2.25 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ উভয়ের র‍্যাঙ্ক সমান না হওয়ার দরুন ($r(A) = 1$ কিন্তু $r(A_b) = 2$) কোনো সমাধান নির্ণয় সম্ভব নয়। এরূপ সমীকরণের সেটগুলিকে সংগতিহীন বা অসঙ্গত (inconsistent) বলা হয়।

উদাহরণ 3.2. নিম্নলিখিত সমীকরণসেটের কী সমাধান বর্তমান?

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 0.5x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 0.75x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

এক্ষেত্রে $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ 1 & 0.75 & 1 \end{bmatrix}$; $A_b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0.5 & -1 & 4 \\ 1 & 0.75 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$|A| = 3(0.5 + 0.75) - 1(2 - 0.75) + 1(-2 - 0.5)$$
$$= 0$$

স্পষ্টত, $r(A) = 2$ এবং $r(A_b) = 3$ সমীকরণসমূহ অসঙ্গত সুতরাং এক্ষেত্রে কোনো সমাধান নির্ণয় সম্ভব নয়।

3.6 সারাংশ

এই এককে মূলত পুরাতন বীজগণিতের বিশ্লেষণের সাহায্যে রৈখিক সহসমীকরণ সমূহ সমাধানের পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে। দুটি বিশেষ পদ্ধতি উপস্থাপন করা হয়েছে। নির্ণায়কের সাহায্যে নির্ণেয় ক্র্যামারের পদ্ধতি, অপরটি ম্যাট্রিক্স প্রণালীতে নির্ণেয় ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি। উভয় পদ্ধতিতে সমাধান করতে হলে সমীকরণ সমূহ সমাধান যোগ্য কিনা পরীক্ষা করা দরকার, এর জন্য ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক বা মাত্রা বিষয়ে সাধারণ জ্ঞান থাকা আবশ্যক, এই কারণেই ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক বিষয়ে সাধারণ ধারণা দেওয়া হয়েছে। এই বিষয়ে বিশদ আলোচনার মধ্যে না গিয়ে উদাহরণ-এর সাহায্যে বিষয়টি বোঝানো হয়েছে।

উপরোক্ত বিষয়সমূহ একক 5.8-রৈখিক বীজগণিতের আধারে সুবিস্তিত আলোচনা করা হয়েছে। গতানুগতিক পদ্ধতি জানা থাকলে পরবর্তী কালে 5.8 এ উপস্থাপিত বিষয়টি বুঝতে আরো সুবিধা হবে।

3.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি ও সংকেত বা উত্তর (দীর্ঘ উত্তর ভিত্তিক)

নিম্নলিখিত সমীকরণসেটগুলি ক্র্যামারের নিয়মানুসারে করুন।

1. $3x + 2y - 6z = 0$
   $x - y + z = 4$
   $y + z = 3$
2. $x - 3y + z = -2$
   $x - 3y - z = 0$
   $-3y + z = 0$
3. $x + y + z = 4$
   $x - y - z = 2$
   $x - 2y = 0$

4. $3x + 2y + 4z = 7$
$2x + y + z = 4$
$x + 3y + 5z = 2$

5. $x + 2y + 4z + 4t = 8$
$2x + y + 4z + t = 3$
$3x + 2y + z + 5t = 10$
$2x - 3y + 5z + 1t = 3$

অনুশীলনী (সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক)

6. $x - 2y = 4$ এবং $2x + y = 3$ সমীকরণদ্বয় ক্র্যামারের নিয়মানুসারে প্রাপ্ত সমাধান সাধারণ অপনয়ন পদ্ধতিতেও নির্ণেয় কী? উঃ— হ্যাঁ

ক্র্যামারের নিয়মে $3x + 4y = 7$ এবং $2x - 5y = 2$ সমীকরণযুগলের সমাধান নির্ণয় করুন।

উঃ $x = \frac{43}{23}$; $y = \frac{8}{23}$

7. দেখান যে $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

সমীকরণত্রয় সঙ্গাত হলে $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ হবে।

8. নিম্নলিখিত সমীকরণ সেট দুটি সঙ্গাত কিনা বলুন ঃ

(a) $4x + 6y - 17 = 0$
$x - 2y + 8 = 0$
$6x + 2y - 1 = 0$

উঃ— হ্যাঁ

$x = -1$; $y = \frac{7}{2}$

(b) $8x + 10y - 9 = 0$
$22x - 8y - 7 = 0$
$2x + 4y - 3 = 0$

উঃ— না

9. নিম্নলিখিত সমীকরণত্রয় সঙ্গাত হলে k-র মান নির্ণয় করুন :

$4x - 3y + 3 = 0$
$2kx - 3y + 1 = 0$
$10x - 3y - 3 = 0$

10. সমাধান করো :

$2x + 5y + 3z = 9$

$3x + y + 2z = 3$
$x + 2y - z = 6$

11. নীচের সমীকরণগুলির মধ্যে কোণগুলির শূন্য নয় এমন সমাধান আছে তা ইঙ্গিত করুন ঃ

(i) $8x + 9y + 10z = 0$
$x - y + z = 0$
$x + \sqrt{2}y + z = 0$

(ii) $x + y + z = 0$
$x + y + 3z = 0$
$x + y + 2z = 0$
$x - y - z = 0$

(iii) $6x + \sqrt{5}y - \sqrt{2}z + w = 0$
$x - \sqrt{3}y + \sqrt{6}z = 0$
$x + y - 7z - w = 0$

[উঃ (i) না (ii) হ্যাঁ (iii) না]

3.8 উত্তরমালা

1. $$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4(-6-2)+3(2-6)}{3(-1-1)+1(-6-2)} = \frac{22}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3(4-3)+1(-18)}{-14} = \frac{15}{14}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3(-3-4)+1(-6)}{-14} = \frac{27}{14}$$

2. $x = -2$; $y = \frac{1}{3}$; $z = -1$

3. $x = 3$; $y = \frac{3}{2}$; $z = -\frac{1}{2}$

4. $x = \frac{9}{4}$; $y = -\frac{9}{8}$; $z = \frac{5}{8}$

5. $x = \frac{1}{4}$; $y = -\frac{1}{8}$; $z = \frac{1}{8}$; $t = \frac{15}{8}$.

10. $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$

3.9 সহায়ক গ্রন্থ

1. A.G. AITKEN Determinants and Matrices. Edinburgh : Oliver and Boyd, 1948.
2. G. BIRKHOFF and S. MACLANE. A survey of Modern Algebra. New York : Macmillan, 1941.
3. F.B. Hilderbrand, Methods of Applied Mathematics New York : Prentice Hall 1952.
4. S. PERLIS, Theory of Matrices, Reading Mass : Addisson-Wesley, 1952.
5. MERLE C. POTTER and J. GOLDBERG. Prentice Hall of India. 1991. Mathematical Methods.

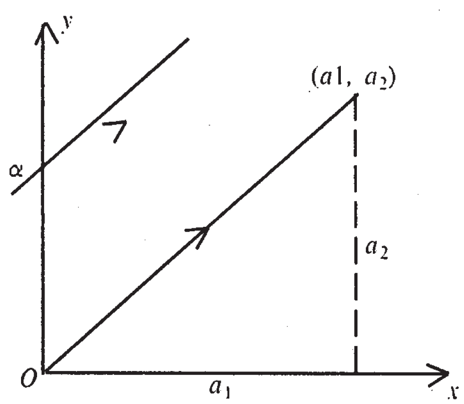
একক 4 □ ভেক্টর দেশ বা রৈখিক দেশ (Vector space or Linear space)

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

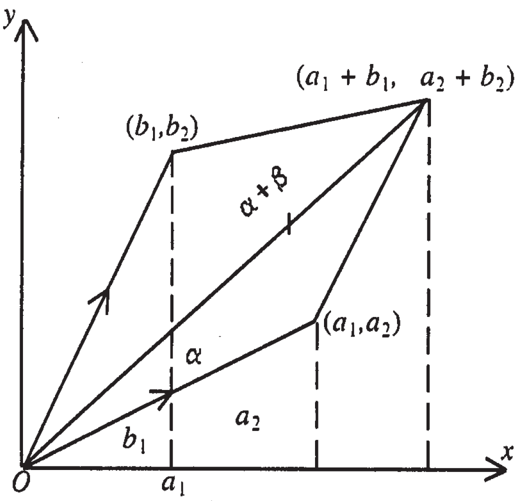
আপনারা গ্রুপ (Group), রিং (Ring), ফিল্ড (field) ইত্যাদি বীজগাণিতিক কাঠামো (Algebrie Structure) সম্বন্ধে পরিচিত হয়েছেন এবং এই বিষয়ক বিভিন্ন ধর্মাবলী সম্বন্ধেও অবগত আছেন। বর্তমান এককে আমরা অপর একটি বীজগাণিতিক কাঠামো যা ভেক্টরদেশ বা রৈখিক দেশ এই নামে পরিচিত তার ধারণায় উপস্থিত হচ্ছি। এই এককটি অনুধাবনের জন্য ক্ষেত্রের (field) সংজ্ঞা এবং ক্ষেত্র-সংক্রান্ত জ্ঞান অবশ্যই প্রয়োজন।

ভেক্টর দেশ মূলত একটি বীজগাণিতিক সাধারণীকরণ (Algebric genralization)। এই সাধারণীকরণটি হয়েছে ভেক্টরের বীজগাণিতিক সংজ্ঞা, দুটি ভেক্টরের মধ্যে যোগের ধর্মাবলী এবং একটি বাস্তব সংখ্যা দ্বারা একটি ভেক্টরের গুণনের ধর্মাবলীর পরিপ্রেক্ষিতে। যে রাশিকে সম্যক উপলব্ধি করতে হলে তার মান এবং দিক দুটোই নির্দিষ্ট ভাবে জানতে হবে, অর্থাৎ মান ও দিক্ যুক্ত রাশিকে আমরা ভেক্টর বলে



চিত্র (1/4)

জানি। এখন দ্বিমাত্রিক তলে, স্থানাঙ্ক জ্যামিতির পরিপ্রেক্ষিতে, যেকোন একটি ভেক্টর α-কে তার মান ও দিক অনুসারে মুলবিন্দু O থেকে (চিত্র দেখুন) উপস্থাপন করা যায় যে ক্ষেত্রে ভেক্টরটির অন্তিমবিন্দুর দুটি স্থানাঙ্ক (a_1, a_2) পাচ্ছি $(a_1, a_2 \in R$, R হচ্ছে বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্র)। অর্থাৎ ভেক্টরটি এক ও অনন্য উপায়ে (uniquely) $\alpha = (a_1, a_2)$ আকারে প্রকাশিত হচ্ছে। বীজগাণিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে দুটি ক্রমানুসারিক বাস্তব সংখ্যা সেট (an ordered pair) দ্বিমাত্রিক তলে কেবলমাত্র একটি ভেকটরকেই সূচিত করে। ক্রম (order) পরিবর্তনের সাথে সাথে আমরা অপর একটি ভেক্টর $\beta = (a_2, a_1)$ পাচ্ছি। অনুরূপে ত্রিমাত্রিক দেশে $\gamma(a_1, a_2, a_3)$ $a_i \in R(i = 1, 2, 3)$ একটি ভেক্টর অবশ্যই বীজগণিত দৃষ্টিকোণ থেকে।



চিত্র (2/4)

একটি বিষয় আপনারা লক্ষ করুন। ভেক্টরের এই বীজগাণিতিক সংজ্ঞায় কিন্তু প্রথাগত মান ও দিক সমন্বিত ভেক্টরের ধারনার সঙ্গে সরাসরি এক হচ্ছে না।

দ্বিমাত্রিক তলে $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2)$ দুটি ভেক্টরের যোগফল $\alpha + \beta$ জ্যামিতি সহযোগে প্রকাশ করে। সেটি হবে $\alpha + \beta = (a_1+b_1, a_2+b_2)$ (চিত্র 2/4)

বীজগণিত ও জ্যামিতির মেলবন্ধনে ভেক্টরদেশের ধারণার জন্ম নেয়।

অনুরূপে ত্রিমাত্রিক দেশে

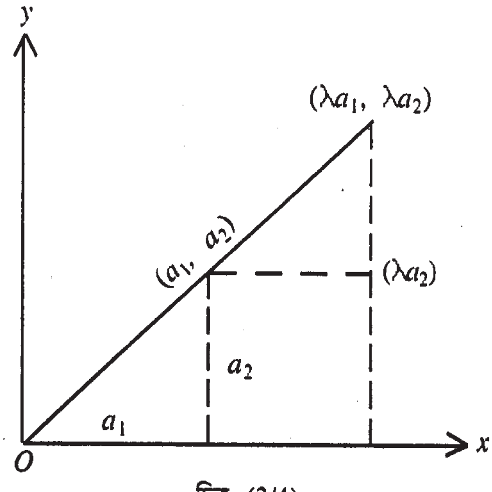
$$\alpha + \beta = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)$$
$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

দ্বিমাত্রিক তলে একটি বাস্তব সংখ্যা γ দ্বারা একটি ভেক্টর $\alpha = (a_1, a_2)$-র গুণন

$$\lambda\alpha = \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2) \text{ (চিত্র 3/4)}$$

অনুরূপে ত্রিমাত্রিক দেশে

$$\lambda\alpha = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, a_3)$$



চিত্র (3/4)

দ্বিমাত্রিক তলে বা ত্রিমাত্রিক দেশের ভেক্টরগুলি দ্বারা গঠিত সেটটি V হলে, উপরে সংজ্ঞানুসারে, ভেকটর যোগফল এবং বাস্তবসংখ্যা দ্বারা একটি ভেক্টরের গুণন নিম্নলিখিত ধর্মগুলি মেনে চলে ঃ

I $\langle V,+\rangle$ একটি বিনিময়যোগ্য গ্রুপ (Commutative group), অর্থাৎ

(i) $\underline{\alpha} + \underline{\beta} \in V, \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in V$

(ii) $(\underline{\alpha} + \underline{\beta}) + \underline{\gamma} = \underline{\alpha} + (\underline{\beta} + \underline{\gamma}), \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma} \in V$

(iii) (θ = শূন্য ভেক্টরের ক্ষেত্রে $\alpha + \theta = \alpha, \forall \alpha \in V$)

[$\theta = (0, 0)$ দ্বিমাত্রিকতলে, $\theta = (0, 0, 0)$ ত্রিমাত্রিক দেশে]

(iv) $\underline{\alpha} \in V$ হলে $(-1)\underline{\alpha} \equiv -\underline{\alpha} \in V$ এবং $\underline{\alpha} + (-\underline{\alpha}) = \theta, \forall \alpha \in V$

(v) $\underline{\alpha} + \underline{\beta} = \underline{\beta} + \underline{\alpha}, \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in V$

II বাস্তব সংখ্যা দ্বারা একটি ভেক্টরের গুণন এই প্রক্রিয়া দ্বারা V আবদ্ধ, অর্থাৎ

$\lambda \underline{\alpha} \in V, \forall \underline{\alpha} \in V$ এবং $\forall \lambda \in R$

III. উপরন্তু

(i) $\lambda(\mu\alpha) = \mu(\lambda\alpha) = (\lambda\mu)\alpha, \forall \underline{\alpha} \in V$ এবং $\forall \lambda, \mu \in R$

(ii) $\lambda(\underline{\alpha} + \underline{\beta}) = \lambda\underline{\alpha} + \lambda\underline{\beta}, \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in V$ এবং $\forall \lambda \in R$

(iii) $(\lambda + \mu)\underline{\alpha} = \lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\alpha}, \forall \underline{\alpha} \in V$ এবং $\forall \lambda, \mu \in R$

(iv) $1\alpha = \alpha, \forall \alpha \in V$, 1 হচ্ছে R ক্ষেত্রের গুণসাপেক্ষে এককপদ।

সাধারণীকরণ, I, II, III এ বর্ণিত ধর্মাবলীর পরিপ্রেক্ষিতে আমরা ভেক্টরদেশের সংজ্ঞায় প্রবেশ করব। তখন V হবে যে-কোন একটি অশূন্য সেট যার পদগুলি, হতে পারে বিভিন্ন ক্রমিক n-গোষ্ঠী (n-tuple) (দ্বিমাত্রিক তলে একটি ভেক্টর হচ্ছে ক্রমিক 2-গোষ্ঠী, ত্রিমাত্রিক দেশে একটি ভেক্টর হচ্ছে ক্রমিক 3-গোষ্ঠী, হতে পারে বিভিন্ন $n \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স, হতে পারে n-ঘাত বিশিষ্ট বিভিন্ন বহুপদ রাশিমালা। উপরন্তু, R ক্ষেত্রের পরিবর্তে সাধারণভাবে যে-কোন ক্ষেত্র F নেওয়া হবে, যার পদগুলিকে আমরা স্কেলার বলব। তারপর V সেটে যেকোন দুটি পদের মধ্যে **"যোগপ্রক্রিয়া"** এবং **"একটি স্কেলার দ্বারা V-র একটি পদের গুণন প্রক্রিয়া"** সংজ্ঞাত হবে। এবার যদি দেখা যায় উক্ত সংজ্ঞাদ্বয়ের সাপেক্ষে I, II, III এ বর্ণিত ধর্মগুলি সিদ্ধ হচ্ছে তাহলেই V-কে বলা হবে F-র উপর গঠিত একটি ভেক্টর দেশ এবং তখন V-র পদগুলিকে ভেক্টর এই নামে অভিহিত করা হবে। লক্ষনীয় 2 বা 3 মাত্রার ভেক্টরদেশের ছবি আঁকা যায়। কিন্তু -n মাত্রিক ভেকটরদেশ কেবলমাত্র বীজগণিতের সাহায্যে বর্ণনা করা যায়। এখানেই বিমূর্ত ধারণা প্রবর্তন করার সার্থকতা।

4.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠে আপনি

- ভেকটর দেশের সংজ্ঞা নির্দেশ করতে পারবেন। বিভিন্ন উদাহরণ-মাধ্যমে বিভিন্ন ভেক্টর দেশের ধারণা করতে পারবেন।

- ভেক্টর দেশের বিভিন্ন ধর্মাবলী আলোচনা করতে পারবেন।
- ভেক্টর উপদেশ কাকে বলে তা নির্দেশ করতে পারবেন।
- ভেক্টর উপদেশ সংক্রান্ত বিভিন্ন উপপাদ্য দ্বারা আপনার ধারণাকে সমৃদ্ধ করতে পারবেন।
- ভেক্টর দেশের একটি উপসেটের রৈখিক সমবায় কী এবং কীভাবে তা ভেক্টর উপদেশ গঠন করে তা বুঝিয়ে দিতে পারবেন।

4.3 ভেক্টর দেশের সংজ্ঞা এবং ভেক্টর দেশের বিভিন্ন উদাহরণ

সংজ্ঞা 4.3.1 ঃ ভেকস্তটর দেশ $V(F)$

V একটি অশূন্যসেট এবং F একটি ক্ষেত্র (field)। V-এর পদগুলি α, β, γ,........দ্বারা এবং F-র পদগুলি λ, μ, γ.......দ্বারা চিহ্নিত। V-র যেকোন দুটি পদের মধ্যে একটি যোগপ্রক্রিয়া $\oplus$ এবং V-র যেকোন একটি পদকে F-র যেকোন একটি পদ দ্বারা (অর্থাৎ স্কেলার দ্বারা) গুণন প্রক্রিয়া $\odot$ সংজ্ঞাত আছে। এমন V সেটটি F-র উপর গঠিত একটি ভেক্টর দেশরূপে সংজ্ঞাত হবে যদি প্রক্রিয়া দুটির সাপেক্ষে নিম্নলিখিত শর্তগুলি সিদ্ধ হয় ঃ

I. যোগ প্রক্রিয়া $\oplus$ সাপেক্ষে V একটি বিনিময়যোগ্য (Commutative) গ্রুপ, অর্থাৎ

(i) $\underline{\alpha} \oplus \underline{\beta} \in V, \forall \underline{\alpha}\, \underline{\beta} \in V$

[$\oplus$ সাপেক্ষে V আবদ্ধ (closed)]

(ii) $(\underline{\alpha} \oplus \underline{\beta}) \oplus \underline{\gamma} = \underline{\alpha} \oplus (\underline{\beta} + \underline{\gamma}), \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in V$

[$\oplus$ সাপেক্ষে সংযোগ সূত্র সিদ্ধ]

(iii) V-তে $\oplus$ সাপেক্ষে শূন্য পদের অস্তিত্ব স্বীকৃত, অর্থাৎ V-তে অবস্থিত θ এমন একটি পদ যে

$\underline{\alpha} \oplus \underline{\theta} = \alpha,\ \forall \underline{\alpha}, \underline{\theta} \in V$

(iv) $\oplus$ সাপেক্ষে V-তে অবস্থিত যেকোন পদের বিপরীত পদের অস্তিত্ব স্বীকৃত, অর্থাৎ V-র যেকোন α-এর ক্ষেত্রে অবশ্যই অপর একটি $-\underline{\alpha} \in V$ থাকবে যার ফলে

$\underline{\alpha} \oplus (-\underline{\alpha}) = \underline{\theta}$

(v) $\underline{\alpha} \oplus \underline{\beta} = \underline{\beta} \oplus \underline{\alpha},\ \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in V$

[$\oplus$ প্রক্রিয়া বিনিময়সূত্রের অনুগামী]

II. স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়া সাপেক্ষে V সেটটি আবদ্ধ (Closed), অর্থাৎ

$\lambda \odot \underline{\alpha} \in V,\ \forall\, \underline{\alpha} \in V$ এবং $\forall\, \lambda \in F$

III. উপরন্তু

(i) $\lambda \odot (\mu \odot \underline{\alpha}) = \mu \odot (\lambda \odot \underline{\alpha}) = (\lambda \odot \mu) \odot \underline{\alpha},\ \forall \alpha \in V$ এবং $\forall \lambda,\ \mu \in F$

(ii) $\lambda \odot (\underline{\alpha} \oplus \underline{\beta}) = (\lambda \odot \underline{\alpha}) \oplus (\lambda \odot \underline{\beta}),\ \forall \alpha, \beta \in V$ এবং $\forall \lambda \in F$

(iii) $(\lambda + \mu) \odot \underline{\alpha} = (\lambda \odot \underline{\alpha}) \oplus (\mu . \underline{\alpha}),\ \forall \underline{\alpha} \in V$ এবং $\forall \lambda,\ \mu \in F$

(iv) F-র এককপদ (multiplicative identity) 1-এর ক্ষেত্রে $1.\underline{\alpha} = \underline{\alpha},\ \forall \underline{\alpha} \in V$

এই ভেক্টর দেশটি চিহ্নিত হবে $V(F)$ আকারে এবং এই V-র প্রতিটি পদকে বলা হবে ভেক্টর।

মন্তব্য ঃ (1) ভেক্টর দেশটিকে $\langle V, F, \oplus, \odot, +, . \rangle$ এই আকারেও চিহ্নিত করা হয়, শেষের প্রক্রিয়া দুটি F-এ সংজ্ঞাত যোগ ও গুণ প্রক্রিয়াদ্বয়।

আমাদের লেখার সুবিধার্থে আমরা $\oplus$ এবং $\odot$ এই প্রক্রিয়াদুটিকেও + এবং $\odot$ দ্বারা চিহ্নিত করতে পারি। F এ $\lambda\mu$-কে $\lambda\mu$ দ্বারা চিহ্নিত করব। এই পুস্তকে $\lambda \odot \underline{\alpha}$-কে আমাদের লেখার সুবিধার্থে $\lambda \underline{\alpha}$ লিখব।

(2) পরিপূর্ণ বীজগাণিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে আমরা কীভাবে ব্যাপক অর্থে ভেক্টরের ধারণায় এসেছি তা আশা করি উপরের আলোচনায় (4.1 এবং 4.3) পরিষ্কার হয়েছে। একটি অশূন্য সেট V, F-র উপর ভেক্টরদেশ হলে V-র পদগুলিই ভেক্টর। কারণ, প্রথাগত ভেক্টর যেসকল ধর্ম মেনে চলে ভেক্টরদেশের পদগুলিও তা মেনে চলে। ভেক্টরদেশের + এবং—এই প্রক্রিয়াদুটি সংজ্ঞাত হচ্ছে স্বাধীনভাবে, অর্থাৎ (4.1)-এ ক্রমিক 2-গোষ্ঠী (orderedpair) বা ক্রমিক 3-গোষ্ঠী (triplet) ক্ষেত্রে (দ্বিমাত্রিক তলে বা ত্রিমাত্রিক দেশে) এদের মধ্যে যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন যে প্রকারে সংজ্ঞাত হয়েছে সে নিয়ম আমরা নাও মানতে পারি। যেমন

$$\underline{\alpha} = (a_1, a_2, a_3) \quad \underline{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$$

ক্ষেত্রে $\underline{\alpha} + \underline{\beta} = (a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ a_3 b_3)$ এরূপেও সংজ্ঞাত হতে পারে। কিন্তু, যেভাবেই বা যেপ্রকারেই যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন সংজ্ঞাত হোক না কেন এই দুটি প্রক্রিয়া অবশ্যই 4.3 ভেক্টরদেশ সংজ্ঞায় বর্ণিত I, II, III শর্তগুলি মেনে চলবে, তাহলেই ভেক্টর দেশ গঠন হবে এবং তখনই V-র পদগুলি ভেক্টর।

(3) $F = R$ (বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্র) হলে ভেক্টর দেশকে $V(R)$ দ্বারা উল্লেখ করা হবে। $F = C$ (জটিল রাশির ক্ষেত্র) হলে ভেক্টর দেশটি $V(C)$ দ্বারা উল্লেখিত হবে।

উদাহরণ 4.1 বাস্তব ভেক্টর দেশ R(R)

বাস্তব সংখ্যার সেট R অবশ্যই R-র উপর একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে, এখানে যোগপ্রক্রিয়া এবং স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয় প্রথাগত নিয়ম অনুযায়ী [অর্থাৎ R ক্ষেত্রের যোগ ও গুণ যে প্রকারে সংজ্ঞাত সেই প্রকারেই সংজ্ঞাত]।

প্রমাণ ঃ

I. (i) $\underline{\alpha}+\underline{\beta}\in R,\ \forall\underline{\alpha},\ \underline{\beta}\in R$ [$\because$ দুটি বাস্তব সংখ্যার যোগ বাস্তব]

(ii) $(\underline{\alpha}+\underline{\beta})+\underline{\gamma}=\underline{\alpha}+(\underline{\beta}+\underline{\gamma}),\ \forall\underline{\alpha},\ \underline{\beta},\ \underline{\gamma}\in R$ [$\because$ $\underline{\alpha},\underline{\beta},\underline{\gamma}$ বাস্তব]

(iii) $0+\underline{\alpha}=\underline{\alpha},\ \forall\underline{\alpha}\in R$

(iv) $\underline{\alpha}+(-\underline{\alpha})=0,\ \forall\underline{\alpha}\in R$

(v) $\underline{\alpha}+\underline{\beta}=\underline{\beta}+\underline{\alpha},\ \forall\underline{\alpha},\ \underline{\beta}\in R$

অতএব $(R,+)$ একটি বিনিময়-যোগ্য গ্রুপ

II. $\lambda\underline{\alpha}\in R,\ \forall\lambda,\ \underline{\alpha}\in R$ [$\lambda-\underline{\alpha}$-কে সুবিধার্থে $\lambda\underline{\alpha}$ লেখা হয়েছে]

অতএব R স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবদ্ধ

III. উপরন্তু

(i) $\lambda(\mu\underline{\alpha})=\mu(\lambda\underline{\alpha})=(\lambda\mu)\underline{\alpha},\ \forall\underline{\alpha}\in R,\ \lambda,\ \mu\in R$

(ii) $\lambda(\underline{\alpha}+\underline{\beta})=\lambda\underline{\alpha}+\lambda\underline{\beta},\ \forall\underline{\alpha},\ \underline{\beta},\ \lambda\in R$

(iii) $(\lambda+\mu)\underline{\alpha}=\lambda\underline{\alpha}+\mu\underline{\alpha},\ \forall\underline{\alpha},\ \lambda,\ \mu\in R$

(iv) $1\underline{\alpha}=\underline{\alpha}$, 1 হচ্ছে R ক্ষেত্রের গুণ সাপেক্ষে একক পদ,

অতএব I, II, III-এ দেখা গেল ভেক্টর দেশের সকল শর্তগুলি সিদ্ধ হচ্ছে। তার ফলে R অবশ্যই R-র উপর ভেক্টর দেশ।

মন্তব্য 4.1 ঃ অনুরূপে দেখানো যাবে বাস্তব সংখ্যার সেট R অবশ্যই মূলদ সংখ্যার সেট Q-র উপর একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে। যোগপ্রক্রিয়া ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়া প্রথাগত।

উদাহরণ 4-2 ঃ বাস্তব ভেক্টরদেশ $R^n(R)$ $R^n=\{(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n).a_i\in R\}$

অর্থাৎ R^n হচ্ছে সকল ক্রমিক বাস্তব n-গোষ্ঠী (all ordered real n-tuples)। এই R^n বাস্তবক্ষেত্র R-র উপর একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে নিম্নলিখিত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয়ের সাপেক্ষে ঃ

যোগ প্রক্রিয়া ঃ $\underline{\alpha}=(a_1,a_2,\ldots a_n),\ a_i\in R$

$\underline{\beta}=(b_1,b_2,\ldots b_n),\ a_i\in R$

$\underline{\alpha}+\underline{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$

স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়া ঃ $\lambda\underline{\alpha}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n),\ \lambda\in R$

[প্রক্রিয়া দুটি 4.1 এ বর্ণিত প্রক্রিয়া দ্বয়ের সাধারণীকরণ বাস্তব n-গোষ্ঠীকে আমরা স্তম্ভ-আকারে

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)'$$ লিখতে পারি

প্রমাণ ঃ

I. সংজ্ঞানুসারে

(i) R^n যোগপ্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবদ্ধ (closed), কারণ $a_i + b_i \in R, i = 1, 2, \ldots n.$

(ii) বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে $a_i + b_i = b_i + a_i$ সত্য হওয়ায় $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ অর্থাৎ '+' প্রক্রিয়া বিনিময় সূত্রের অনুগামী।

(iii) বাস্তব সংখ্যাগুলি যোগের সংযোগসূত্র মেনে চলে এবং তার ফলে

$(\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma, \forall \alpha, \beta, \gamma \in R^n$

(iv) $\underline{\theta} = (0, 0, \ldots, 0) \in R^n$ এবং $\alpha + \theta = \alpha, \forall \alpha \in R^n$

(v) $\underline{\alpha} = (a_1, a_2, \ldots a_n) \in R^n$ হওয়ায় $-\underline{\alpha} = (-a_1, -a_2, -a_n) \in R^n$ এবং $\underline{\alpha} + (-\underline{\alpha}) = \theta$, অর্থাৎ R^n-র প্রতিটি পদের '+' সাপেক্ষে বিপরীত পদ আছে। অতএব $(R^n, +)$ একটি বিনিময়যোগ্য গ্রুপ।

II. সংজ্ঞানুসারে $\lambda \underline{\alpha} \in R^n$ অর্থাৎ R^n স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবদ্ধ।

III. উপরন্তু (i)
$$\begin{aligned} \lambda(\mu \underline{\alpha}) &= \lambda(\mu a_1, \mu a_2, \ldots \mu a_n) \\ &= (\lambda(\mu a_1). \lambda(\mu a_2), \ldots \lambda(\mu a_n)) \\ &= (\mu(\lambda a_1), \mu(\lambda a_2), \ldots \mu(\lambda a_n)) \quad [\because \lambda, \mu, a_i \in R] \\ &= \mu(\lambda \underline{\alpha}) \end{aligned}$$

অনুরূপে $\lambda(\mu \underline{\alpha}) = (\lambda\mu)\underline{\alpha}$

(ii)
$$\begin{aligned} \lambda(\underline{\alpha} + \underline{\beta}) &= \lambda(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \\ &= (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda a_2 + \lambda b_2, \ldots, \lambda a_n + \lambda b_n) \quad [\because \lambda, a_1, b_1 \in R] \\ &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots \lambda a_n) + (\lambda b_1, \lambda b_2, \ldots, \lambda b_n) \\ &= \lambda \underline{\alpha} + \lambda \underline{\beta} \end{aligned}$$

(iii) $(\lambda + \mu)\underline{\alpha} = ((\lambda + \mu)a_1, (\lambda + \mu)a_2, \dots (\lambda + \mu)a_n)$

$$= (\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2, \dots \lambda a_n + \mu a_n)$$

$$= \lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\alpha}$$

(iv) R-র গুণসাপেক্ষে এককপদটি 1 এবং $1\underline{\alpha} = \underline{\alpha}, \forall \underline{\alpha} \in R$

অতএব I, II, III-এ ভেক্টরদেশের সংজ্ঞায় সকল শর্তগুলি R^n-এর পদগুলি যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয় সাপেক্ষে মেনে চলছে এবং তারফলে বলা যায় $R^n(R)$ একটি ভেক্টর দেশ। এই ভেক্টরদেশটি আমরা অনেক সময় R^n এই প্রকারে উল্লেখ করব। R^n-কে n-মাত্রিক বাস্তব দেশ বা n-মাত্রিক ইউক্লিডিয়ান দেশ বলে। $\underline{\alpha} = (a_1, \dots, a_n) | ai \in R$ হচ্ছে n-মাত্রিক দেশের একটি ভেক্টর। R^3 এবং R^2 হচ্ছে যথাক্রমে ত্রিমাত্রিক ও দ্বিমাত্রিক বাস্তব ভেক্টর দেশ।

উদাহরণ 4.3 ঃ বাস্তব $C(R)$ ভেক্টর দেশ।

C হচ্ছে সকল জটিল রাশির সেট অর্থাৎ $C = \{a + ib / a, b \in R \;\; i = \sqrt{-1}\}$ এই C সেটটি R ক্ষেত্রের উপর একটি ভেক্টরদেশ গঠন করে নিম্নলিখিত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়া দ্বয়ের সাপেক্ষে ঃ

যোগপ্রক্রিয়া ঃ $\underline{\alpha} = (a + ib) \equiv (a, b)$ $\underline{\beta} = (c + id) \equiv (c, d)$ $\underline{\alpha} + \underline{\beta} = (a + c, b + d)$

স্কেলার দ্বারা গুণন ঃ $\lambda\underline{\alpha} = \lambda(a + ib) = (\lambda a + i\lambda b) \equiv (\lambda a, \lambda b)$

প্রমাণ ঃ উদাহরণ 4.2-র অনুরূপ।

উদাহরণ 4.4 $C^n(C)$ ভেক্টর দেশ

$C^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in C$ (জটিলরাশির সেট)$\}$

যোগপ্রক্রিয়া ঃ $\underline{\alpha} = (a_1, a_2, \dots a_n)$ $\underline{\beta} = (b_1, b_2, \dots b_n)$

$$\underline{\alpha} + \underline{\beta} = (a_1 + b_1, \dots a_n + b_n)$$

স্কেলার দ্বারা গুণন ঃ $\lambda\underline{\alpha} = (\underline{\lambda}\, a_1, \dots, \lambda a_n), \lambda \in C$

প্রমাণ ঃ উদা. 4.2-র অনুরূপ।

উদাহরণ 4.5. $F^n(F)$ ভেক্টর দেশ

F = যে-কোনো একটি ক্ষেত্র এবং F^n = ক্রমিক n-গোষ্ঠী যার পদগুলি F হতে সংগৃহীত। F^n সেট F-র উপর একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে প্রথাগত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে। প্রমাণ ঃ

উদাঃ 4.2-র অনুরূপ

উদাহরণ 4.6 ঃ বাস্তব $P_n(R)$ ভেক্টর দেশ

P_n = বাস্তব সহগ বিশিষ্ট সকল বহু পদরাশিমালা (Polynomials), যাদের ঘাত $\leq n$, দ্বারা গঠিত সেট

$$= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r,\ a_i \in R,\ r \leq n\}$$

শূন্য বহুপদ রাশিমালায় (যা কোন ঘাতবিশিষ্ট নয়) উক্ত P_n সেটের অন্তর্গত। এই P_n সেটটি বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্র R-র উপর একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে প্রথাগত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণনের সাপেক্ষে। [n-একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, r ও তাই]

যোগ প্রক্রিয়া ঃ

$$(a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r) + (b_0 + b_1x + \ldots + b_rx^r + \ldots + b_mx^m)$$

$$= (a_0 - b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_r + b_r)x^r + b_{r,\,1}x^{r+1} + \ldots + b_mx^m,\ (m > r)$$

স্কেলার দ্বারা গুণন ঃ

$$\lambda(a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r) = (\lambda a_0 + \lambda a_1x + \ldots + \lambda a_rx^r)$$

প্রমাণ ঃ 1. সহগগুলি বাস্তব হওয়ায় সংজ্ঞানুসারে

(i) P_n যোগপ্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবদ্ধ

(ii) $f_r + f_m = f_m + f_r\ ;\ r, m \leq n$

[f_r হচ্ছে r ঘাত বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা]

(iii) $f_\alpha + (f_\beta + f_\gamma) = (f_a + f_\beta) + f_\gamma, \alpha, \beta, \gamma \leq n$

(iv) শূন্য বহুপদ রাশিমালাটি O দ্বারা চিহ্নিত হলে

$O + f_r = f_r,\ r \leq n$ [O যোগ প্রক্রিয়ায় একক পদ]

(v) $f_r \in P_n \Rightarrow -f_r \in P_n$

যেখানে $-f_r$ এর সহগগুলি যথাক্রমে $-a_0, -a_1, \ldots, -a_r$ এবং $f_r + (-f_r) = 0$ অর্থাৎ f_r-র বিপরীত বহুপদ রাশিমালার অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে।

অতবে যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে P_n একটি বিনিময়যোগ্য গ্রুপ।
উপরন্তু

II. $\lambda f_r \in P_n, \forall f_r \in P_n, r \leq n$ এবং $\forall \lambda \in R$

III. (i) $\lambda(\mu f_r) = \mu(\lambda f_n) = (\lambda\mu) f_r, \lambda, \mu \in R$ এবং $f_r \in P_n, r \leq n$

(ii) $\lambda(f_r + f_m) = \lambda f_r + \lambda f_m, r, m \leq n, \lambda \in R$

(iii) $(\lambda + \mu) f_1 = \lambda f_r + \mu f_r, r \leq n, f_r \in P_n, \lambda, \mu \in R$

(iv) $1 f_r = f_r$ [1 হচ্ছে R-র গুণ প্রক্রিয়াতে একক পদ]

অতএব ভেক্টরদেশের সংজ্ঞানুসারে $P_n(R)$ একটি ভেক্টর দেশ।

উদাহরণ 4.7. বাস্তব ভেক্টর দেশ $M_{m\times n}$ (R)

$M_{m\times n}$ = সকল বাস্তব $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সের সেট

$$= \left\{ \left(a_{ij}\right)_{m\times n}, a_{ij} \in R \right\}$$

ম্যাট্রিক্স-যোগ এবং যে কোন ম্যাট্রিক্সকে বাস্তব সংখ্যা দ্বারা গুণনের সাপেক্ষে $M_{m\times n}$ সেটটি R ক্ষেত্রের উপর একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে।

প্রমাণ ঃ যদি $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$ এবং $C = (c_{ij})_{m\times n}$ হয়, তবে

1. ম্যাট্রিক্স যোগের সংজ্ঞানুসারে

(i) $A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}$

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$, কারণ

বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে $\left(a_{ij} + b_{ij}\right) + c_{ij} = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij})$

এক্ষেত্রে $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}, C = (c_{ij})_{m\times n}$

(iii) $M_{m\times n}$ সেটে $O_{m\times n}$ শূন্য ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে

$A + O_{m\times n} = A, \forall A \in M_{m\times n}$

(iv) $(a_{ij})_{m\times n} + (-a_{ij})_{m\times n} = O_{m\times n}$ হওয়ার বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব স্বীকৃত।

(v) $A + B = B + A$, কারণ $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ অতএব $\langle M_{m\times n}, + \rangle$ একটি বিনিময়যোগ্য গ্রুপ।

II. $\lambda A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{m\times n} \in M_{m\times n}$

উপরন্তু,

III. (i) $\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A$, $\forall\lambda, \mu\in R$ এবং $\forall A\in M_{m\times n}$

(ii) $\lambda(A+B)=\lambda(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\left(\lambda\left(a_{ij}+b_{ij}\right)\right)_{m\times n}$

$$=\left(\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}\right)=\left(\lambda a_{ij}\right)_{m\times n}+\left(\lambda b_{ij}\right)_{m\times n}$$

$= \lambda.A + \lambda B$, $\forall A, B\in M_{m\times n}$ এবং $\forall\lambda\in R$

(iii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\forall A\in M_{m\times n}$ এবং $\forall\lambda, \mu\in R$

(iv) $1.A = A$

অতএব $M_{m\times n}$ (R) একটি ভেক্‌টর দেশ।

মন্তব্য 4.2 ঃ $m = n$ হলে আমরা $M_{m\times n}$ (R) বা $M_{m\times n}(R)$ ভেক্‌টর দেশ পাব।

উদাহরণ 4.8 ঃ বাস্তব অপেক্ষক-ভেক্‌টরদেশ $V(R)$

R ক্ষেত্র উপর সংজ্ঞাত বাস্তবমান সম্পাদনকারী সকল অপেক্ষকগুলি দ্বারা গঠিত সেটটি V হলে এবং যোগ এবং স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়া দুটি যথাক্রমে

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall f, g\in V$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ \forall\lambda\in R,\ \forall f\in V$$

হলে V অবশ্যই R-র উপর একটি ভেক্‌টর দেশ।

প্রমাণ ঃ উক্ত প্রক্রিয়া দুটির সাপেক্ষে ভেক্‌টর দেশের সংজ্ঞাত বর্ণিত সকল শর্তগুলি সিদ্ধ হচ্ছে। এক্ষেত্রে শূন্য ধ্রুবক অপেক্ষকটি শূন্য ভেক্‌টর এবং $-f$ হচ্ছে f-র বিপরীত অপেক্ষক (যোগ সাপেক্ষে)।

উদাহরণ 4.9 ঃ $R^{2++} = \{(a_1, a_2)| a_1 > 0, a_2 > 0 ; a_1, a_2 \in R\}$

সেটটি প্রথাগত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয়ের [উদাহরণ 4.2-র অনুরূপ] সাপেক্ষে ভেক্‌টর দেশ গঠনে অসমর্থ। কারণ,

$$\lambda(a_1, a_2)=(\lambda a_1, \lambda a_2)\notin R^{2++}$$

যখন $\lambda\in R$ এবং $\lambda<0$ হবে, অর্থাৎ স্কেলার দ্বারা গুণনের সাপেক্ষে সেটটি আবদ্ধ নয়।

মন্তব্য 4.3 ঃ এই উদাহরণটির সাহায্যে বলা যায় xy-তলে প্রথমপাদে অবস্থিত বিন্দুগুলির সেট $\{(x, y)|, x, y > 0\}$ প্রথাগত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণনের সাপেক্ষে ভেক্‌টর দেশ গঠনে অসমর্থ।

উদাহরণ 4.10 ঃ $S=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{matrix}x^2+y^2=a^2\\ x,y,z\in R\end{matrix}\right\}$

প্রথাগত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়া সাপেক্ষে R-র উপর ভেক্টরদেশ গঠনে অসমর্থ। কারণ, এখানে যোগ সাপেক্ষে শূন্যভেক্টর পদটির অস্তিত্ব নেই।

মন্তব্য ঃ ত্রিমাত্রিকগ দেশে $x^2 + y^2 = a^2$ হচ্ছে একটি বেলনাকার বক্রতল (cylinder)। এই বক্রতলে অবস্থিত বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত সেটটি প্রথাগত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণনের সাপেক্ষে ভেক্টর দেশ নয়।

4.4 ভেক্টরদেশের ধর্মাবলী

4.1

$V(F)$ ভেক্টরদেশের শূন্য ভেক্টরটি $\underline{\theta}$ হলে নিম্নলিখিত ধর্মগুলি সিদ্ধ হবে ঃ

(i) $\lambda\underline{\theta} = \underline{\theta}, \forall \lambda \in F$

(ii) $0\underline{\alpha} = \underline{\theta}, \forall \underline{\alpha} \in V, F$-এ সংজ্ঞাত যোগসাপেক্ষে শূন্যপদটি 0

(iii) $\lambda(-\underline{\alpha}) = (-\lambda)\underline{\alpha} = -(\lambda\underline{\alpha}), \forall \underline{\alpha} \in V$ এবং $\forall\lambda \in F$

(iv) $\lambda\underline{\alpha} = \underline{\theta}$ হলে, $\lambda = 0$ অথবা, $\underline{\alpha} = \underline{\theta}$

প্রমাণ ঃ (i) $\forall\lambda \in F$ এবং $\forall \underline{\alpha} \in V$-র ক্ষেত্রে

$$\lambda\underline{\alpha} = \lambda(\underline{\alpha} - \underline{\theta}) \quad [\because \theta \text{ হচ্ছে শূন্য ভেক্টর }]$$

$$= \lambda\underline{\alpha} + \lambda\underline{\theta} \quad [\text{ ভেক্টরদেশের সংজ্ঞার প্রযুক্ত শর্তানুসারে}]$$

অতএব দেখা যাচ্ছে $\lambda\underline{\theta}$ ভেক্টরটির শূন্য ভেক্টর,

অর্থাৎ $\lambda\underline{\theta} = \underline{\theta}$

(ii) $0 + 0 = 0$ [$\because$ 0 হচ্ছে F-র শূন্যপদ]

$$\Rightarrow \quad (0+0)\underline{\alpha} = 0\underline{\alpha}, \; \forall \underline{\alpha} \in V$$

$$\Rightarrow \quad 0\underline{\alpha} + 0\underline{\alpha} = 0\underline{\alpha} \quad [\text{ভেক্টরদেশে সংজ্ঞায় প্রযুক্ত শর্তানুসারে}]$$

$$\Rightarrow \quad (0\underline{\alpha} + 0\underline{\alpha}) + (-0\underline{\dot{\alpha}}) = 0\underline{\alpha} + (-0\underline{\alpha}) \quad [-(0\underline{\alpha}) \text{ হচ্ছে } \mathbf{0}\,\underline{\alpha}\text{-র বিপরীতপদ}]$$

$$\Rightarrow \quad 0\underline{\alpha} + (0\underline{\alpha} + (-(0\underline{\alpha})) = \underline{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad 0\underline{\alpha} + \underline{\theta} = \underline{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad 0\underline{\alpha} = \underline{\theta}$$

(iii) $\theta \quad = \lambda\theta,\ \lambda \in F$ [ধর্ম (i) অনুসারে]

$= \lambda(\underline{\alpha} + (-\underline{\alpha})),\ \underline{\alpha} \in V,\ -\underline{\alpha}$ হচ্ছে $\underline{\alpha}$-র বিপরীত ভেক্টর,

$= \lambda\underline{\alpha} + \lambda(-\underline{\alpha})$

অতএব প্রমাণিত হল $\lambda(-\underline{\alpha})$ ভেক্টরটি $\lambda\underline{\alpha}$-র বিপরীত ভেক্টর, অর্থাৎ

$= \lambda\underline{\alpha} + \lambda(-\underline{\alpha})$

পুনরায় $\underline{\theta} = 0\underline{\alpha}$ [ধর্ম (ii) অনুসারে]

$= [\lambda + (-\lambda)]\underline{\alpha},\ \lambda \in F$

$= \lambda\underline{\alpha} + (-\lambda)\underline{\alpha}$

হওয়ায় $(-\lambda)\underline{\alpha} = -(\lambda\underline{\alpha})$

সুতারং আমরা পেলাম

$$\lambda(-\underline{\alpha}) = (-\lambda)\underline{\alpha} = -(\lambda\underline{\alpha})$$

(iv) ধরা যাক্ $\lambda(\neq 0) \in F$ এবং $\underline{\alpha} \in V$ এখন $\lambda\underline{\alpha} = \theta$ হলে আমরা পাই

$\lambda^{-1}(\lambda\underline{\alpha}) = \lambda^{-1}\underline{\theta}$ [λ^{-1} হচ্ছে F-এ সংজ্ঞাত গুণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে λ-র বিপরীত পদ]

বা, $(\lambda^{-1}\lambda)\underline{\alpha} = \underline{\theta}$

বা, $1\underline{\alpha} = \underline{\theta}$ [F-র এককপদটি 1, অর্থাৎ 1 হলে F-র প্রযুক্ত গুণ সাপেক্ষে অভেদ পদ]

বা, $\underline{\alpha} = \underline{\theta}$

আবার ধর্ম (ii) অনুসারে $0\underline{\alpha} = \underline{\theta}$

অতএব দেখা গেল $\lambda\underline{\alpha} = \underline{\theta}$ হলে হয় $\lambda = 0$ নতুবা $\alpha = \theta$.

4.5 ভেক্টর উপদেশ (Vector Subspace), তৎসংক্রান্ত উপপাদ্য এবং উদাহরণ ঃ

$V(F)$ একটি ভেক্টর দেশ। V-এর একটি অশূন্য উপসেট W, অর্থাৎ $W \subset V$ এবং $W \neq \phi$ এই W যদি $V(F)$-এ সংজ্ঞাত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয় সাপেক্ষে F-র উপর একটি ভেক্টর দেশ হয়, তবে আমরা আর একটি ভেক্টর দেশ পাব যাকে $V(F)$-র ভেক্টর উপদেশ বলা হবে।

সংজ্ঞা ঃ $V(F)$ ভেক্টর দেশের V-র অশূন্য উপসেট W ভেক্টর উপদেশরূপে সংজ্ঞাত হবে যদি $V(F)$-

এ বর্ণিত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয়ের সাপেক্ষে F-র উপর W উপসেটটিও একটি ভেক্টর দেশ গঠনে সমর্থ হয়।

উপপাদ্য 1 ঃ $V(F)$ একটি ভেক্টর দেশ। $W \subset V$ এবং $W \neq \phi$. W উপসেটটি $V(F)$-র ভেক্টর উপদেশ হবে তার প্রয়োজনীয় ও যথার্থ শর্তদুটি (Necessary & Sufficient Conditions) হবে।

(i) $\underline{\alpha} + \underline{\beta} \in W, \ \forall \underline{\alpha}, \ \underline{\beta} \in W$

(অর্থাৎ $V(F)$-এ বর্ণিত যোগপ্রক্রিয়া সাপেক্ষে W আবন্ধ)

(ii) $\lambda \underline{\alpha} \in W, \ \forall \underline{\alpha} \in W$ এবং $\forall \lambda \in F$

(অর্থাৎ $V(F)$ এ বর্ণিত স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়া দ্বারা W আবন্ধ)

প্রমাণ ঃ প্রয়োজনীয় শর্ত ঃ

ধরা যাক্ $W(F)$ হচ্ছে $V(F)$-র একটি ভেক্টর উপদেশ অতএব W, F-র উপর, একটি ভেক্টর দেশ, অবশ্যই $V(F)$-এ বর্ণিত যোগও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয়ের সাপেক্ষে। অতএব ভেক্টরদেশ গঠনের শর্তানুসারে

(i) $\underline{\alpha} + \underline{\beta} \in W, \forall \underline{\alpha}, \ \underline{\beta} \in W$

এবং (ii) $\lambda \underline{\alpha} \in W, \ \forall \underline{\alpha} \in W$ এবং $\forall \lambda \in F$

যথেষ্ট শর্ত ঃ ধরা যাক্ $W \subset V$ এবং $W \neq \phi$ উপরন্তু

(i) $\underline{\alpha} + \underline{\beta} \in W, \forall \underline{\alpha}, \ \underline{\beta} \in W$ এবং (ii) $\lambda \underline{\alpha} \in W, \forall \underline{\alpha} \in W, \forall \lambda \in F$ সিদ্ধ হচ্ছে। আমরা দেখাব যে W হচ্ছে $V(F)$-এর একটি উপভেক্টর দেশ, অর্থাৎ দেখাব $V(F)$-এ সংজ্ঞাত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয়ের সাপেক্ষে F-র উপর W একটি ভেক্টরদেশ।

F ক্ষেত্রে একক পদ (অর্থাৎ গুণ-সাপেক্ষে একক পদ) 1 হলে W-র যেকোনো পদ $\underline{\alpha}$-র ক্ষেত্রে শর্ত (ii) অনুসারে

$$(-1)\underline{\alpha} \in W \quad [\text{ কারণ } 1 \in F \Rightarrow (-1) \in F \ ]$$

কিন্তু, ভেক্টরদেশে ধর্ম (iii) (4.1 অনুসারে

$$(-1)\underline{\alpha} = -(1\underline{\alpha}) = -\underline{\alpha}$$

অতএব প্রমাণিত হলো $\underline{\alpha} \in W \Rightarrow -\underline{\alpha} \in W$ এখন প্রদত্ত শর্ত (i) অনুসারে

$$\underline{\alpha} + (-\underline{\alpha}) = \underline{\theta} \in W$$

অতএব দেখা গেল $V(F)$-র শূন্য ভেক্টরটি W উপসেটে আছে। এখন সহজেই বোঝা যাচ্ছে যে W উপসেটটি $V(F)$-এ বর্ণিত যোগপ্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য গ্রুপ। কারণ, উপরের আলোচনায় এটা দেখা গেল

যে যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে W সেটে শূন্য ভেক্টর এবং বিপরীত ভেক্টরের অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে ; আবার $W \subset V$ হওয়ায় যোগপ্রক্রিয়া সাপেক্ষে বিনিময়শর্ত (Commutativity) এবং সংযোগ শর্ত (associativity) সহজেই W সেটে প্রযুক্ত হচ্ছে।

পুনরায় $W \subset V$ হওয়ায় ভেক্টরদেশ গঠনের অন্যান্য শর্তগুলিও সিদ্ধ হচ্ছে, কারণ W-র পদগুলি যে V-র পদ এবং উভয়ক্ষেত্রে একই ফিল্ড F.

এবার আমরা বলতে পারি $W(F)$ একটি ভেক্টরদেশ এবং $V(F)$-র ভেক্টর উপদেশ।

উপপাদ্য 4.2 ঃ

$V(F)$ একটি ভেক্টর দেশ। $W \subset V$ এবং $W \neq \phi$. W উপসেটটি $V(F)$-র ভেক্টর উপদেশ হবে তার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত।

$\lambda \underline{\alpha} + \mu \underline{\beta} \in W, \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in W$ এবং $\forall \lambda, \mu \in F$

প্রমাণ ঃ প্রয়োজনীয় শর্ত ঃ

W উপসেটটি $V(F)$-র ভেক্টর উপদেশ হলে উপপাদ্য 4.1 অনুসারে

$$\underline{\alpha} + \underline{\beta} \in W, \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in W$$

এবং $\lambda \underline{\alpha} \in W, \forall \underline{\alpha} \in W$ এবং $\forall \lambda \in F$

এই দুটি শর্তকে একযোগে লেখা যায়

$$\lambda \underline{\alpha} + \mu \underline{\beta} \in W, \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in W \text{ এবং } \forall \lambda, \mu \in F$$

যথেষ্ট শর্ত ঃ

$$\lambda \underline{\alpha} + \mu \underline{\beta} \in W, \forall \underline{\alpha} \ \underline{\beta} \in W \text{ এবং } \forall \lambda, \mu \in F$$

হলে, $\lambda = 1, \mu = 1$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$\underline{\alpha} + \underline{\beta} \in W, \forall, \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in W$$

আবার $\mu = 0$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$\lambda \underline{\alpha} \in W, \forall \underline{\alpha} \in W \text{ এবং } \forall \lambda \in W$$

অতএব উপপাদ্য 4.1 অনুসারে, W অবশ্যই V-র ভেক্টর উপদেশ

উদাহরণ 4.11 ঃ

$V(F)$ একটি ভেক্টর দেশ। V সেটটি অবশ্যই তার, অর্থাৎ V-র, একটি উপসেট এবং তার ফলে বলা যায় $V(F)$ হচ্ছে $V(F)$-র একটি ভেক্টর উপদেশ।

আবার, $\{\underline{\theta}\} \subset V$, $\underline{\theta}$ হচ্ছে শূন্য ভেক্টর। এই $\{\underline{\theta}\}$ উপসেটটিও $V(F)$-র ভেক্টর উপদেশ কারণ $\underline{\theta} + \underline{\theta} = \underline{\theta}$ এবং $\lambda\underline{\theta} = \underline{\theta}$ এই ভেক্টর উপদেশটিকে শূন্য উপভেক্টর দেশ (zero or null sub space) বলে।

অতএব দেখা গেল $V(F)$-র কমপক্ষে দুটি ভেক্টর উপদেশ আছে। এই দুটিকে অপ্রকৃত উপভেক্টর দেশ (Improper Vector Subspace) বলে। $V(F)$-র অন্যান্য উপভেক্টর দেশগুলিকে প্রকৃত উপভেক্টর দেশ (Proper Sub-Space) বলে।

উদাহরণ 4.12 ঃ

$$W = \{(a_1, a_2, a_3) | a_2 a_3 = 0\} C R^3,$$

কিন্তু R^3-র উপভেক্টর দেশ নয়।

কারণ, $\underline{\alpha} = (a_1, a_2, a_3) \in W$ এবং $\underline{\beta} = (b_1, b_2, b_3) \in W$ হলে $a_2 a_3 = 0$ এবং $b_2 b_3 = 0$ এবং তার ফলে যে কোনো λ, $\mu \in R$ এর ক্ষেত্রে

$$\lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} = (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda a_2 + \lambda b_2, \lambda a_3 + \mu b_3)$$

যেখানে $(\lambda a_2 + \mu b_2)(\lambda a_3 + \mu b_3) = \lambda\mu(a_2 b_3 + b_2 a_2) \neq 0$ (সাধারণভাবে),

অর্থাৎ λ, $\mu \in R$, $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta} \in W \Rightarrow \lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} \in W$

উদাহরণ 4.13 ঃ

উদাহরণ 4.8-এ উল্লেখিত ভেক্টর দেশ $V(R)$-এর একটি উপসেট

$$W = \{f(x) | f(5) = 0\}$$

দেখান যাবে W হচ্ছে $V(R)$-র উপভেক্টর দেশ।

কারণ,

f, $g \in W$ এবং λ, $\mu \in W \Rightarrow \lambda f + \mu g \in W$

যেহেতু $(\lambda f + \mu g)(5) = \lambda f(5) + \mu g(5) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$

[f, $g \in W$ হওয়ায় $f(5) = g(5) = 0$]

উদাহরণ 4.14 ঃ $M_{n \times n}(R)$ ভেক্টর দেশের

S = {যে কোনো $n \times n$ ক্রমের কর্ণম্যাট্রিক্স} একটি উপসেট। দেখানো যাবে S হচ্ছে $M_{n \times n}(R)$-র ভেক্টর উপদেশ। কারণ,

A = কর্ণ $(a_1, \ldots, a_n) \in S$ এবং B = বর্ণ $(b_1, \ldots, b_n) \in S$ এবং λ, $\mu \in R$ হলে

$\lambda A + \mu B$ = কর্ণ $(\lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n) \in S$

4.6 ভেক্টর উপদেশ সংক্রান্ত আরও কয়েকটি উপপাদ্য

উপপাদ্য 4.3 ঃ $V(F)$ ভেক্টরদেশের W_1 এবং W_2 যে কোনো দুটি ভেক্টর উপদেশের ক্ষেত্রে $W_1 \cap W_2$ অবশ্যই $V(F)$-র অপর একটি ভেক্টর উপদেশ।

প্রমাণ ঃ $\underline{\alpha} \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \underline{\alpha} \in W_1$ এবং $\underline{\alpha} \in W_2$

$\underline{\beta} \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \underline{\beta} \in W_1$ এবং $\underline{\beta} \in W_2$

এবার যেকোনো $\lambda, \mu \in F$ হলে

$\lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} \in W_1$ [কারণ, W_1 একটি উপভেক্টরদেশ]

এবং $\lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} \in W_2$ [কারণ, W_2 একটি উপভেক্টরদেশ]

অতএব $\lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} \in W_1 \cap W_2$ সুতরাং দেখা গেল $\forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in W_1 \cap W_2$ এবং $\forall \lambda, \mu \in F$

$\Rightarrow \lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} \in W_1 \cap W_2$

অতএব $W_1 \cap W_2$ হচ্ছে $V(F)$-র একটি ভেক্টর উপদেশ।

মন্তব্য 4.4 ঃ (i) $W_1, W_2 \ldots\ldots W_n$ যদি $V(F)$-র সাধারণীকৃত ভেকটর উপদেশ হয়, তবে উপপাদ্য 3-র দ্বারা $W_1 \cap W_2 \cap \ldots\ldots \cap W_n$ অবশ্যই একটি ভেক্টর উপদেশ।

উপপাদ্য 4.4 ঃ $V(F)$ ভেক্টরদেশের W_1 এবং W_2 যেকোনো দুটি ভেক্টর উপদেশ ক্ষেত্রে $W_1 \cup W_2$ সাধারণভাবে $V(F)$-র ভেক্টর উপদেশ নয়।

প্রমাণ ঃ $\underline{\alpha} \in V$ এবং $\lambda \in F$ হলে, নির্দিষ্ট $\underline{\alpha}$ এবং যেকোনো λ-র ক্ষেত্রে $W_1 = \{\lambda\underline{\alpha}\}$ অবশ্যই $V(F)$-র একটি ভেক্টর উপদেশ, কারণ $\underline{\alpha}_1 = \lambda_1\underline{\alpha} \in W_1$, $\beta_1 = \lambda_2\underline{\alpha} \in W_1$

এবং $c, d \in F \Rightarrow c\underline{\alpha}_1 + d\underline{\beta}_1 = (c\lambda_1 + c\lambda_2)\underline{\alpha} \in W_1$

একই প্রকারে $W_2 = \{\mu\underline{\beta} | \underline{\beta} \in V$ এবং নির্দিষ্ট এবং $\forall \mu \in F\}$ অবশ্যই $V(F)$-র অপর একটি উপভেক্টর দেশ।

এবার দেখা যাক্ $W_1 \cup W_2$ সেটটি $V(F)$-র ভেক্টর উপদেশ হয় কিনা।

$\xi \in W_1$, $\eta \in W.$ হলে উভয়ে $W_1 \cup W_2$-র অন্তর্গত। এখন যেকোনো $t, s \in F$-র ক্ষেত্রে লক্ষ্য করা যাচ্ছে $t\underline{\xi} + s\underline{\eta} = t(\lambda\underline{\alpha}) + s(\lambda\underline{\beta})$

$$= (t\lambda)\underline{\alpha} + (s\mu)\underline{\beta}$$

যেহেতু $\xi \in W_1$ এবং $\eta \in W_2$

অর্থাৎ $t\underline{\xi} + s\underline{\eta} \notin W_1 \cup W_2$ অতএব দেখা গেল $W_1 \cup W_2$ সেটটি $V(F)$-র ভেক্টর উপদেশ নয়।

সুতরাং আমরা এই সিদ্ধান্তে আসছি যে W_1 ও W_2 ভেক্টর উপদেশ হলেও সাধারণভাবে $W_1 \cup W_2$ ভেক্টর উপদেশ নয়।

উপপাদ্য 4.5 ঃ

$V(F)$ ভেক্টর দেশের দুটি ভেক্টর উপদেশ W_1 ও W_2-র ক্ষেত্রে রৈখিক যোগ (Li*n*e*a*r Sum) $W_1 + W_2 = \left\{\underline{\alpha} + \underline{\beta} \middle| \underline{\alpha} \in W_1, \underline{\beta} \in W_2\right\}$ অবশ্যই $V(F)$-র ভেক্টর উপদেশ।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্ $\underline{u}, \underline{v} \in W_1 + W_2$ এবং $\lambda, \mu \in F$

তাহলে আমরা লিখতে পারি

$\underline{u} = \underline{\alpha}_1 + \beta_1$, $\underline{v} = \underline{\alpha}_2 + \underline{\beta}_2$, $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2 \in W_1$ এবং $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2 \in W_2$ তখন লক্ষ করুন

$$\begin{aligned} \lambda\underline{u} + \mu\underline{v} &= \lambda(\underline{\alpha}_1 + \underline{\beta}_1) + \mu(\underline{\alpha}_2 + \underline{\beta}_2) \\ &= (\lambda\underline{\alpha}_1 + \mu\underline{\alpha}_2) + (\lambda\underline{\beta}_1 + \mu\underline{\beta}_2) \\ &\in W_1 + W \end{aligned}$$

কারণ W_1 ভেক্টর উপদেশ হওয়ায় $\lambda\underline{\alpha}_1 + \mu\underline{\alpha}_2 \in W_1$ এবং W_2 ভেক্টর উপদেশ হওয়ায় $\lambda\underline{\beta}_1 + \mu\underline{\beta}_2 \in W_2$ অতএব প্রমাণিত হল $W_1 + W_2$ হচ্ছে $V(F)$-র উপভেক্টরদেশ।

4.7 রৈখিক সমবায়. ও তৎসংক্রান্ত উপপাদ্য

সংজ্ঞা 4.7.1 ঃ রৈখিক সমবায় (Linear Combination)

$V(F)$ একটি ভেক্টর দেশ এবং $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots. \underline{\alpha}_n \mid \underline{\alpha}_1 \in V\}$. F-এর যেকোন n-সংখ্যক স্কেলার c_i, $i = 1, 2, \ldots n$ এবং A সেটের ভেক্টরগুলি দ্বারা গঠিত

$$c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n$$

অতএব উপপাদ্য 4.2 অনুসারে $L(A)$ হচ্ছে $V(F)$-র ভেক্টর উপদেশ।

(b) মন্তব্য 4.7.1 অনুসারে $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n \in L(A)$, অর্থাৎ $A \subset L(A)$

W_1, $L(A)$ ব্যতীত, $V(F)$-র অপর যে কোন একটি উপভেক্টর দেশ যেখানে $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n$ উপস্থিত। আমরা যদি দেখতে পারি

$$L(A) \subset W_1,$$

তাহলেই উপপাদ্যটি প্রমাণিত হবে।

$L(A)$-র যে কোন একটি ভেক্টর β হলে আমরা লিখতে পারি

$$\underline{\beta} = c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n, \; c_i \in F$$

ধরা যাক্ W_1-এ $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n$ ছাড়া কমপক্ষে অপর একটি $V(F)$-র ভেক্টর $\underline{\alpha}$ আছে। এখন $\underline{\beta}$-কে নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যায়

$$\beta = c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n + 0\alpha$$

অতএব $\beta \in W_1$ সুতরাং দেখা গেল $L(A) \subset W_1$ এবং তারফলে আমরা উপপাদ্যে পৌঁছে গেলাম।

4.6. মন্তব্য ঃ এই উপপাদ্যের পরিপ্রেক্ষিতে $L(A)$-কে বলা হয় A দ্বারা ব্যাপ্ত (spanned or generated) ভেক্টর উপদেশ। A-কে বলা হয় $L(A)$-র জনক বা স্রষ্টা (generator)।

অনুশীলনী 4.7.

1. R^3 দেশে কোন উপসেটগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন?

   (a) {(1, 0, 0), (0.1.1), (0, 0, 1), (1, 2, 3)}

   (b) {(1, 1, 1), (2, 3, 4), (4, 9, 16)}

   (c) {(1, 2, 1), (−3, 8, 1), (3, −1, −1)}

উঃ। [(a) নির্ভরশীল (b) স্বাধীন (c) স্বাধীন।]

2. নির্ণয় করুন (4, 2, 1, 0) নিম্নলিখিত ভেক্টরসেটগুলির রৈখিক সমাবেশ কিনা এবং রৈখিক সমাবেশ হ'লে তা নির্ণয় করুন ঃ

   (a) {(1, 2, −1, 0), (1, 3, 1, 2), (6, 1, 0, 1)}

   (b) {(6, −1, 2, 1), (1, 7, −3, −2), (3, 1, 0, 0), (3, 3, −2, −1)}

উঃ। [(a) রৈখিক সমাবেশ নয় (b) (4, 2, 1, 0) = 2(b, −1, 2, 1) + (1, 7, −3, −2) − 3(3, 1, 0, 0) + 0(3, 3, −2, −1)]

4.8 সারাংশ

বর্তমান এককে প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্যের পরই 4.3-তে ভেক্টরদেশের সংজ্ঞা। একটি অশূন্য সেট V একটি ফিল্ড $\langle F, +, \cdot \rangle$-র উপর, যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয় $\oplus$ এবং $\odot$ সাপেক্ষে একটি ভেক্টর দেশ হবে তখনও যখন (I) $\langle V, \oplus \rangle$ একটি বিনিময়যোগ্য গ্রুপ, (II) $\lambda \odot \underline{\alpha} \in V$, $\forall \underline{\alpha} \in V$ এবং $\forall \lambda \in F$ এবং (III) $\lambda \odot (\mu \odot \underline{\alpha}) = \mu \odot (\lambda \odot \underline{\alpha}) = (\lambda \odot \mu) \odot \underline{\alpha}$, $\lambda \odot (\underline{\alpha} \oplus \underline{\beta}) = (\lambda \odot \underline{\alpha}) \oplus \lambda \odot \beta$; $(\lambda + \mu) \odot \underline{\alpha} = (\lambda \odot \underline{\alpha}) \oplus (\mu \odot \underline{\alpha})$; $1 \odot \underline{\alpha} = \underline{\alpha}$, $\forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in V$ ও $\lambda, \mu \in F$, 1 হচ্ছে F-র একক পদ। ভেক্টর দেশের ধারণাকে স্পষ্ট করার জন্য বেশ কিছু উদাহরণ দেওয়া হয়েছে (4.3)। (4.4)-এ আছে ভেক্টর দেশের ধর্মাবলী।

ভেক্টরদেশ $V(F)$-র কোন একটি উপসেট কখন ভেক্টর উপদেশ হবে তার সংজ্ঞা আছে (4.5)-এ। $W \subset V$ কখন একটি ভেক্টর উপদেশ হবে, তার প্রয়োজনীয় ও যথার্থ শর্ত $(\lambda \odot \underline{\alpha}) \oplus (\mu \odot \underline{\beta}) \in W$, $\lambda \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in W$ এবং $\forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in W$ এবং $\forall \lambda, \mu \in F$। লেখার সুবিধার্থে আমরা $\lambda \odot \underline{\alpha}$ কে $\lambda \underline{\alpha}$ আকারে এবং $\alpha \oplus \beta$-কে $\underline{\alpha} + \underline{\beta}$ আকারে লিখেছি, তারপরে ঐ শর্তটি $\lambda \underline{\alpha} + \mu \underline{\beta} \in W$ আকারে প্রকাশিত হচ্ছে। (4.5) এ পাবেন ভেক্টর উপদেশের কিছু উদাহরণ। (4.6)-এ আছে ভেক্টর উপদেশ সংক্রান্ত দুটি কটি উপপাদ্য। (4.7)-এ দেখবেন $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots \underline{\alpha}_n \mid \alpha_i \in V(F)\}$ এই সেটের রৈখিক সমবায় বা বিস্তৃতি দ্বারা গঠিত সেট $L(A)$ হচ্ছে $V(F)$-র একটি ভেক্টর উপদেশ।

4.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. (*a*) $R^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in R\}$ সেটটি প্রথাগত যোগ এবং স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয় সাপেক্ষে R-এর ভেক্টর দেশ গঠন করে—প্রমাণ করুন।

সংকেত ঃ উদাহরণ 4.2-র অনুরূপ।

(*b*) যেখান যে $R^+ = \{x, x > 0, x \in R\}$ সেটটি নিম্নে সংজ্ঞাত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয়ের সাপেক্ষে R-র উপর একটি ভেক্টরদেশ গঠন করে ঃ

যোগ প্রক্রিয়া ঃ $x + y = xy$, $\forall x, y \in R^+$

স্কেলার দ্বারা গুণন ঃ $\lambda x = x\lambda$, $\forall x \in R^+$, $\forall \lambda \in R$

সমাধান সংকেত ঃ

যোগ সাপেক্ষে অভেদ পদ (additive identity) এখানে $1 \in R^+$, কারণ $x + 1 = x_1 = x$. এবার $\langle R^+, + \rangle$ যে একটি বিনিময়যোগ্য গ্রুপ তা সহজেই প্রমাণ করা যাবে। উপরন্তু সংজ্ঞানুসারে $\lambda x = x^\lambda \in R^+$ এবং

(i) $\lambda(\mu x)=\lambda(x^{\mu})=\left(x^{\mu}\right)^{\lambda}=x^{\mu\lambda}=\left(x^{\lambda}\right)^{\mu}=\mu(\mu x)=(\mu\lambda)x$

(ii) $\lambda(x+y)=(x+y)^{\lambda}=(xy)^{\lambda}=x^{\lambda}y^{\lambda}=(\lambda x)(\lambda y)=\lambda x+\lambda y$

(iii) $(\lambda+\mu)x=x^{\lambda+\mu}=x^{\lambda}x^{\mu}=(\lambda x)(\mu x)=\lambda x+\mu x$

(iv) $1x+x^{1}=x$, 1 হচ্ছে R-এর গুণসাপেক্ষে একক পদ (multiplicative identity)।

(c) F একটি যেকোন ক্ষেত্র। দেখান যে F, F-উপর একটি ভেক্টর দেশ গঠনে সমর্থ। এখানে যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়া F-এ বর্ণিত প্রক্রিয়াদ্বয়।

সমাধান সংকেত ঃ উদাহরণ 4.1-র অনুরূপ।

(d) দেখান 3×3 কর্ণম্যাট্রিক্সের সেট $S=\left\{\left.\begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ x & y & 0\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}\right| x,y,z\in R\right\}$ একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে R-র উপর, এখানে যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদুটি যথাক্রমে ম্যাট্রিক্স-যোগ এবং স্কেলার দ্বারা ম্যাট্রিক্সের গুণ।

সমাধান সংকেত ঃ উদাহরণ 4.7 অনুসরণ করুন।

(e) দেখান যে [0, 1] পরিসরে সন্তত (Continuous) এবং বাস্তবমান উৎপাদনকারী (real valucd) সকল অপেক্ষকগুলি দ্বারা গঠিত সেট V নিম্নে বর্ণিত প্রক্রিয়াদ্বয় সাপেক্ষে R-র উপর একটি ভেক্টর দেশ।

যোগ ঃ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

স্কেলার দ্বারা গুণন ঃ $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$

সমাধান সংকেত ঃ উদাহরণ 4.8 দেখুন। দুটি সন্তত অপেক্ষকের যোগ অবশ্যই সন্তত।

(*f*) দেখান যে, [0, 1] পরিসরে বাস্তবমান উৎপাদনকারী এবং অবকলন যোগ্য (differentiable) সকল অপেক্ষকগলির সেট অবশ্যই R-র উপর একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে। যেগা বা স্কেলার গুণন প্রক্রিয়াদ্বয় প্রশ্ন (e)-র অনুরূপ।

(*g*)
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots a_{2n}x_n=0,\ (a_{ij}\in R)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots\ldots+a_{mn}x_n=0$$

একটি সমসত্ব রৈখিক সমীকরণতন্ত্র (System of linear homogeneous equations)। এদের বিভিন্ন সমাধানগুলি দ্বারা গঠিত সেট $S=\left\{(x_1,x_2,\ldots x_n)\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0,\ i=1,2,\ldots n\right.\right\}$ অবশ্যই R-র উপর একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে প্রথাগত যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয় সাপেক্ষে।

সমাধান ঃ উদাহরণ 4.2 দেখুন। সমাধানগুলির সেট $S \subset R^n$. (0, 0, ..., 0) অবশ্যই একটি সমাধান বা বীজ এবং এটাই θ (শূন্য ভেক্টর)। $(x_1, x_2, ..., x_n)$ বীজ হলে $(-x_1, -x_2, -x_n)$ অবশ্যই অপর একটি বীজ, অর্থাৎ বিপরীত বীজের অস্তিত্ব স্বীকৃত। ভেক্টর দেশ গঠনের বাকি শর্তগুলি সহজেই দেখানো যাবে।

(h) $a_0 \dfrac{d^5 y}{dx^5} + a_1 \dfrac{d^4 y}{dx^4} + \cdots + a_5 y = 0, a_i \in R$ একটি রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ (Linear differential equation) দেখান এদের সমাধানগুলি দ্বারা গঠিত সেটটি R-র উপর একটি ভেক্টর দেশ। যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রক্রিয়াদ্বয় প্রথাগত।

সমাধান সংকেত ঃ $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ দুটি সমাধানের ক্ষেত্রে $\underline{u} + \underline{v}$ এবং $\lambda\mu(\lambda \in R)$ অবশ্যই সমাধান কারণ সমীকরণটি রৈখিক। অতএব ভেক্টর দেশ গঠনে শর্তগুলি পূরণ হচ্ছে তা সহজেই দেখানো যাবে।

2. (*a*) দেখান $R^2 = \left\{(x, y) \middle| x, y \in R\right\}$ সেটটি যোগ ঃ $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$ এবং স্কেলার দ্বারা গুণন ঃ $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ এই প্রক্রিয়াদ্বয়ের সাপেক্ষে, R-র উপর, ভেক্টর দেশ গঠনে অসমর্থ।

সমাধান সংকেত ঃ যোগপ্রক্রিয়া সাপেক্ষে শূন্য ভেক্টর θ-র অস্তিত্ব নেই। কারণ,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1) \Rightarrow y_1 + y_2 = x_1, x_1 + x_2 = y_1$$
$$\Rightarrow y_2 = x_1 - y_1, x_2 = y_1 - x_1$$

(*b*) দেখান যে, বাস্তব বহুপদ রাশিমালাগুলি যাদের ঘাত (degree) $n \geq 1$ হয়, R ফিল্ডের উপর তারা ভেক্টর দেশ গঠনে অসমর্থ।

সমাধান সংকেত ঃ শূন্য বহুপদ রাশিমালা সেটে অন্তর্ভুক্ত না হওয়ায় যোগ সাপেক্ষে শূন্য ভেক্টরের অস্তিত্ব নেই। উদাহরণ 4.6 দেখুন।

(c) দেখান $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$ এই অরৈখিক (non-linear) অন্তরকল সমীকরণটির সমাধানগুলির দ্বারা গঠিত সেট ভেক্টরদেশ গঠনে অসমর্থ।

সমাধান সংকেত ঃ সমীকরণটি অরৈখিক হওয়ায় যেকোন দুটি সমাধান u ও v-এর যোগ $u + v$ কখনই সমাকরণটির বীজ হবে না। তার ফলে সমাধানের বীজগুলি দ্বারা গঠিত সেট যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবদ্ধ নয়।

(d) দেখান $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots m$ অসমসত্ব রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের বীজগুলি দ্বারা গঠিত সেটটিও ভেক্টর দেশ গঠনে অসমর্থ।

সমাধান সংকেত ঃ 4.2(c)-র অনুরূপ।

3.(*a*) প্রমাণ করুন যে R^3-র উপসেট-এ $w = \left\{ (x, y, z) \middle| \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \\ x, y, z \in R \end{array} \right\}$ একটি R^3 উপভেক্টর দেশ।

সমাধান সংকেত ঃ $\underline{\alpha} = (x_1, y_1, z_1) \in W$ এবং $\underline{\beta} = (x_2, y_2, z_2) \in W$

হলে $\begin{matrix} x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ 2x_1 + 3y_1 + 5z_1 = 0 \end{matrix}$ এবং $\left.\begin{matrix} x_2 + y_2 - z_2 = 0 \\ 2x_2 + 3y_2 + 5z_2 = 0 \end{matrix}\right\}$

এখন $\forall \lambda, \mu \in R \Rightarrow \lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} \in W$ কারণ

$$\lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$$

এবং $(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + \mu(x_2 + y_2 + z_2) = 0$

$2(\lambda x_1 + \mu x_2) + 3(\lambda y_1 + \mu y_2) + 5(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(2x_1 + 3y_1 + 5z_1) + \mu(2x_2 + 3y_2 + 5z_2) = 0$ [এরপর উপপাদ্য 4.2-এর মত]

(*b*) $M_{3\times3}(R)$ ভেক্টর দেশের (উদাহরণ 4.7) 3×3 ক্রমের অবশিষ্ট ম্যাট্রিক্সগুলি (*non*-si*n*gul*a*r m*a*trices) দ্বারা গঠিত সেট S সাধারণভাবে $M_{3\times3}$-র উপসেট নয়।

সমাধান ঃ $A = (a_{ij})_{3\times3}$ এবং $B = (b_{ij})_{3\times3}$ দুটি অবশিষ্ট ম্যাট্রিক্স। অতএব $|A| \neq 0$ এবং $|B| \neq 0$ এখন যে কোন $\lambda, \mu \in R$ হলে $\lambda A + \mu B = (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{3\times3}$ কিন্তু $|\lambda A + \mu B| \neq 0$ বলা যাবে না। অতএব

$$A, B \in S, \lambda, \mu \in R \Rightarrow \lambda A + \mu B \in S$$

তারফলে বলা যায় S উপভেক্টরদেশ নয়।

(c) "$M_{n\times n}(R)$ ভেক্টর দেশের $n \times n$ ক্রমের প্রতিসম ম্যাট্রিক্সগুলি দ্বারা গঠিত সেট S হবে $M_{n\times n}(R)$- -র ভেক্টর উপদেশ"—প্রমাণ করুন।

সমাধান ঃ $A = (a_{ij})_{n\times n} \in S$, $B = (b_{ij})_{n\times n} \in S$ তার ফলে $a_{ij} = a_{ji}$ এবং $b_{ij} = b_{ji}$ সকল i এবং j-র ক্ষেত্রে। এখন যেকোন $\lambda, \mu \in R$ হলে $\lambda A + \mu B = (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{3\times3}$ এবং $\lambda a_{ij} + \mu b_{ij} = +\lambda a_{ij} + \mu b_{ji}$, অর্থাৎ $\lambda A + \mu B \in S$ অতএব S সেটটি $M_{n\times n}(R)$-র ভেক্টর উপদেশ।

(d) R ফিল্ডের উপর সংজ্ঞাত বাস্তবমান উৎপাদনকারী অপেক্ষকগুলি দ্বারা গঠিত ভেক্টরদেশ $V(R)$ [উদাঃ 4.8] হলে, দেখান $W = \{f(x) \mid f(5) = 1 + f(3)\}$ সেটটি $V(R)$-র ভেক্টর উপদেশ নয়।

সমাধান সংকেত ঃ $f, g \in W \Rightarrow f(5) = 1 + f(3)$ এবং $g(5) = 1 + g(3)$ এখন যেকোন $\lambda, \mu \in R$ হলে

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(5) &= \lambda f(5) + \mu g(5) \\ &= \lambda([1 + f(3)] + \mu[1 + g(3)] \\ &= (\lambda + \mu) + (\lambda f + \mu g) \ldots (3) \\ &\neq 1 + (\lambda f + \mu g)(3), \text{ সাধারণভাবে।} \end{aligned}$$

অতএব W প্রদত্ত $V(R)$-র ভেক্টর উপদেশ নয়।

(e) $a_0 + a_1x + a_2x_2$, $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ জাতীয় বহুপদরাশিমালাগুলি $P_2(x)$-র উপভেক্টর দেশ—প্রমাণ করুন।

সমাধান সংকেত ঃ

উদা ঃ 4.6 দেখুন।

(*f*) $S_1 = \{(a, 0, 0) \mid a \in R\}$ এবং $S_2 = \{(0, b, 0) \mid b \in R\}$ হলে দেখান (i) $S_1 \cap S_2$ অবশ্যই R_3-র ভেকটর উপদেশ, কিন্তু (ii) $S_1 \cup S_2$ সেটটি R^3-র ভেক্টর উপদেশ নয়।

[উপপাদ্য 4.3 এবং 4.4 দেখুন]

4. $V(F)$ একটি ভেক্টর দেশ এবং $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma} \in V$ এখন $S = \{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}\}$ এবং

$T = \{\underline{\alpha} + \underline{\beta}, \underline{\beta} + \underline{\gamma}, \underline{\gamma} + \alpha\}$ হলে দেখান $L(S) = L(T)$

সমাধান সংকেত ঃ S-র যেকোন একটি পদ $c_1\underline{\alpha} + c_2\beta + c_3\gamma$ যদি T-এর $a(\underline{\alpha}+\underline{\beta})+b(\underline{\beta}+\underline{\gamma})+c(\underline{\gamma}+\underline{\alpha})$ হয়, তবে $a + c = c_1$, $b + a = c_2$, $c + b = c_3$

বা, $a+b+c = \frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3)$ অতএব $a = \frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3) - c_3 = \frac{1}{2}(c_1+c_2-c_3)$

$b = \frac{1}{2}(c_2+c_3-c_1)$, $c = \frac{1}{2}(c_1+c_3-c_2)$ সুতরাং দেখা যাচ্ছে

$$= a(\underline{\alpha}+\underline{\beta})+b(\underline{\beta}+\underline{\gamma})+c(\underline{\gamma}+\underline{\alpha})$$

$$c_1\underline{\alpha}+c_2\underline{\beta}+c_3\underline{\gamma} = \frac{1}{2}(c_1+c_2-c_3)(\underline{\alpha}+\underline{\beta})+\frac{1}{2}(c_2+c_3-c_1)(\underline{\beta}+\underline{\gamma})+\frac{1}{2}(c_1+c_3-c_2)(\underline{\gamma}+\underline{\alpha})$$

এবং তার ফলে বলা যায় $L(S) \subset L(T)$ ... (i)

আবার, $k_1(\underline{\alpha}+\underline{\beta})+k_2(\underline{\beta}+\underline{\gamma})+k_3(\underline{\gamma}+\underline{\alpha}) = (k_1+k_3)\underline{\alpha}+(k_1+k_2)\underline{\beta}+(k_2+k_3)\underline{\gamma}$

হওয়ায় $L(T) \subset L(S)$ .... (ii)

এখন (i) ও (ii) থেকে সহজেই বোঝা যাচ্ছে

$L(S) = L(T)$

5. $V(F)$ ভেক্টরদেশের নিম্নলিখিত ধর্ম দুটি প্রমাণ করুন ঃ

(i) $\lambda\underline{\alpha} = \mu\underline{\alpha} \Rightarrow \lambda = \mu$, যেখানে $\underline{\alpha} \in V$ এবং $\underline{\alpha} \neq \theta$

(ii) $\lambda\underline{\alpha} = \lambda\underline{\beta} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{\beta}$, যেখানে $\underline{\alpha} \neq 0 \in F$.

সমাধান সংকেত (4.4 দেখুন)।

4.10 সহায়ক গ্রন্থ

1. Kenneth Hoffman & Ray Kunze—Linear Algebra, Prentice Hall of India (New Delhi) 2nd.ed. 1978
2. B. C. Chatterjee — Linear Algebra, Das Gupta & Co. 1967, Calcutta.
3. N. C. Mazumdar — Elements of linear Algebra, Worldpress, Calcutta, 1997.
4. S. K. MAPA — Higher Algebra (abstract and linear), Ashoke Prakasan, Calcutta, fifth revised edition 1944.
5. Haedly — Linear Algebra Addison, — Wesely, 8th Printing (1979).

একক 5 □ ভিত্তি ও মাত্রা (Basis and Dimension)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী (4) এককে এটা প্রমাণিত হয়েছে যে $A = \left\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \alpha_n \middle| \underline{\alpha}_i \in V(F)\right\}$ হলে $L(A)$, $V(F)$ ভেক্টরদেশের, একটি ভেক্টর উপদেশ। A সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন (সংজ্ঞা পরবর্তী 5.3-তে দেওয়া হয়েছে) সেট বা A-র ভেক্টরগুলি রৈখিক স্বাধীন হলে এবং $V(F) = L(A)$ হলে A হবে $V(F)$ ভেক্টরদেশের একটি ভিত্তি। ভিত্তির ধারণা ভেক্টরদেশের আলোচনাকে কিভাবে সমৃদ্ধ করছে তা বিভিন্ন উপপাদ্যের মাধ্যমে আমরা বুঝতে পারব। একটি ভেক্টরদেশের একাধিক ভিত্তি থাকতে পারে, কিন্তু আশ্চর্যের ব্যাপার একটি নির্দিষ্ট ভেক্টরদেশের যেকোন দুটি ভিত্তির ভেক্টর-সংখ্যা নির্দিষ্ট। এই নির্দিষ্ট সংখ্যাটি হবে উক্ত ভেক্টরদেশের মাত্রা। আমাদের আলোচনা মূলতঃ সসীম মাত্রাযুক্ত ভেক্টর দেশগুলি নিয়ে।

5.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠে আপনি

- ভেক্টরদেশের যেকোন উপসেটের রৈখিকভাবে স্বাধীন বা নির্ভরশীল নির্দেশ করতে পারবেন।
- রৈখিকভাবে স্বাধীন বা রৈখিকভাবে নির্ভরশীল ভেক্টরসেট সংক্রান্ত বিভিন্ন উপপাদ্য ও উদাহরণের সঙ্গে পরিচিত হবেন।

- একটি ভেক্টরদেশের ভিত্তি কি এবং ভিত্তি ধারণাভেক্টরদেশের আলোচনাকে কিভাবে সমৃদ্ধ করছে তার বিস্তারিত ধারণা পাবেন।
- ভিত্তির বিস্তারিত আলোচনার পরই আপনি পরিচিত হবেন ভেক্টরদেশের মাত্রা কাকে বলে তার সম্বন্ধে এবং মাত্রা সংক্রান্ত কিছু সিদ্ধান্ত জানতে পারবেন কয়েকটি উপপাদ্যের মাধ্যমে।
- বিভিন্ন উদাহরণ সহযোগে সমস্ত বিষয়টিকে সহজবোধ্য করে নিতে পারবেন।
- পরিপূরক উপভেক্টর দেশের বিষয়ও জানতে পারবেন।

5.3 রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টর সেট, রৈখিকভাবে নির্ভরশীল ভেক্টর সেট, উদাহরণ এবং তৎসংক্রান্ত উপপাদ্য (Linearly independent set of vectors, linearly dependent set of vectors, examples and theorems)

সংজ্ঞা 5.1 : রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টর সেট

$V(F)$ ভেক্টরদেশের $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots \underline{\alpha}_n$ ভেক্টরগুলি দ্বারা গঠিত $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n\}$ এই সসীম সেটটিকে (finite set) রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট বলা হবে যখন

$$c_1\underline{\alpha}_1 + c_1\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\alpha_n = \theta, c_i \in F$$

সম্বন্ধটি কেবলমাত্র $c_1 = c_2 = \ldots = cn = 0$ এইরূপ মান দ্বারাই সিদ্ধ, θ হচ্ছে $V(F)$-র শূন্য ভেক্টর এবং O হচ্ছে F-র যোগ-সাপেক্ষে অভেদ পদ (additive identity)।

মন্তব্য ঃ এখানে A-র অন্তর্গত ভেকটরগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন (linear independen) তা বোঝা যাচ্ছে।

সংজ্ঞা 5.2 : রৈখিকভাবে নির্ভরশীল ভেকটর সেট

$V(F)$ ভেক্টরদেশের সসীম সংখ্যক ভেকটর $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots \underline{\alpha}_n$ দ্বারা গঠিত $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n\}$ সেটটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল সেট বলা হবে যখন

$$c_1\underline{\alpha}_1 + c_1\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\alpha_n = \underline{\theta}, c_i \in F$$

সম্বন্ধটি $(c_1, c_2, \ldots, cn) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ জাতীয় মান দ্বারা সিদ্ধ।

উদাহরণ 5.1.

R^3 ভেকটরদেশের $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ দ্বারা গঠিত সেট রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

সমাধান ঃ $c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 = \theta,\ c_i \in R$

$$\Rightarrow (c_1,\ 0,\ 0) + (0,\ c_2,\ 0) + (0,\ 0,\ c_3) = (0,\ 0,\ 0)$$

$$\Rightarrow (c_1,\ c_2,\ c_3) + (0,\ 0,\ 0) \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

অতএব $c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 = \theta$ সিদ্ধ কেবলমাত্র যখন $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ হয় অতএব $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট।

উদাহরণ 5.2 : R^3-ভেকটরদেশের $A = \{\underline{\alpha}_1 = (1,2,3), \underline{\alpha}_2 = (3,1,2), \underline{\alpha}_3 = (4,-3,-2)\}$ এই উপসেটটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল সেট কিনা বা পরীক্ষা করা যাক্।

সমাধান ঃ $c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + c_3\underline{\alpha}_3 = \underline{\theta}, c_i \in R$

$$\Rightarrow c_1(1, 2, 3) + c_2(3, 1, 2) + c_3(4, -3, 2) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 0$$

$$2c_1 + c_2 - 3c_3 = 0$$

$$3c_1 + 2c_2 - 2c_3 = 0$$

এই সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের (System of homogeneous equations) সমীকরণ সংখ্যা এবং অজ্ঞাতরাশির সংখ্যা পরস্পর সমান এবং সহগ-নির্ণায়ক

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

অতএব উপপাদ্য 3 অনুসারে (পরবর্তী একক 8 দেখুন)

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

অতএব $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ রৈখিক অনির্ভর সেট।

উদাহরণ 5.3 : R^3 হতে নেওয়া $A = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (2, 3, 0), (-1, -2, 0)\}$ সেটটি রৈখিক-নির্ভর সেট।

সমাধান ঃ $c_1(1, 1, 1) + c_2\ (1, 2, 0) + c_3\ (2, 3, 0) + c_4\ (-1, 2, 0) = (0, 0, 0)$....(i)

$$\Rightarrow c_1 + c_2 + 2c_3 - c_4 = 0$$

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 - 2c_4 = 0$$

$$c = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = 0 \text{ এবং } c_2 + 2c_3 - c_4 = 0$$

$$2c_2 + 3c_3 - 2c_4 = 0$$

দ্বিতীয় সমীকরণতন্ত্রটি রৈখিক সমঘাত সমীকরণতন্ত্র যেখানে সমীকরণ সংখ্যা দুই এবং অজ্ঞাত-রাশি-সংখ্যা

তিন। এরূপ ক্ষেত্রে উপপাদ্য 8.6 অনুঃ (1) অনুসারে অসংখ্য সমাধানের অস্তিত্ব স্বীকৃত হয়, অর্থাৎ $(c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0)$ জাতীয় অসংখ্য সমাধান আছে। লক্ষ করুন $c_1 = 0$, $c_3 = 0$, $c_2 = c_1 = 1$ একটি সমাধান। অতএব (i) নং সম্বন্ধটি সিদ্ধ হচ্ছে $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ জাতীয় মানে এবং সেইহেতু A সেটটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

উদাহরণ 5.4 : $V(R)$ ভেক্টরদেশের $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ তিনটি ভেক্টর যদি $\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন হয় তবে $\{\underline{\alpha}+\underline{\beta}, \underline{\beta}+\underline{\gamma}+\underline{\gamma}+\underline{\alpha}\}$ সেটটিও রৈখিকভাবে স্বাধীন।

সমাধান : $c_1(\underline{\alpha}+\underline{\beta})+c_2(\underline{\beta}+\underline{\gamma})+c_3(\underline{\gamma}+\underline{\alpha})=\underline{\theta}, c_i \in R$

$$\Rightarrow (c_1+c_3)\underline{\alpha}+(c_1+c_2)\underline{\beta}+(c_2+c_3)\underline{\gamma}=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow c_1 + c_3 = 0,\ c_1 + c_2 = 0,\ c_2 + c_3 = 0$$

[কারণ, $\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট]

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

[কারণ সমীকরণতন্ত্রটির সহগ নির্ণায়ক = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$]

উপপাদ্য 8.3 অনুসারে

অতএব $\{\underline{\alpha}+\underline{\beta}, \underline{\beta}+\underline{\gamma}+\underline{\gamma}+\underline{\alpha}\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন

[লক্ষ করুন $c_1 + c_3 = 0, c_1 + c_2 = 0, c_2 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 - c_2 = c_3 - c_1 = c_1 - c_2 = 0$

$\therefore c_1 = c_2 = c_3 = 0$]

উদাহরণ 5.5 : সন্ততভাবে অবকলনযোগ্য (Continuously differentiable) একটি চল x $(\in R)$ এর বিভিন্ন অপেক্ষকগুলি (উদাহরণস্বরূপ e^x) অবশ্যই R-র উপর একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে (যোগ ও স্কেলার দ্বারা গুণন প্রথাগত)। দেখান যে উক্ত ভেক্টরদেশের $\{ex, e^-x\}$ সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

সমাধান : $ce^x + de^{-x} = 0$ ("0" এখানে শূন্য অপেক্ষক)

$\Rightarrow ce^x - de^{-x} = 0$ (অবকলন দ্বারা)

এখন এ দুটি সমীকরণ থেকে যোগ দ্বারা $2ce^x = 0$ বা $c = 0$ [$\because e^x \neq 0$] এবং তার ফলে $d = 0$ অতএব সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

উদাহরণ 5.6 : $\{1, x, x^2, x^3\}$ হচ্ছে, $P_3(R)$-র একটি রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট। [উদাহরণ 4.6-এ $Pn(R)$ ভেক্টর দেশ দেখুন]।

সমাধান ঃ $c_0 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = 0,\ c_i \in R$

$$\Rightarrow\ c_0 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$\Rightarrow\ c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

অতএব সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

উপপাদ্য 5.1 : রৈখিকভাবে নির্ভরশীল ভেক্‌টর সেটের পরিসেট (superset) অবশ্যই রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্ $V(F)$ ভেক্‌টর দেশে $\underline{\alpha}_i \in V, i = 1,2,\ldots.n$ এবং $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ রৈখিক নির্ভরশীল সেট, অর্থাৎ

$$c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n = \theta, c_i \in F$$

সিদ্ধ যে, $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ জাতীয় সর্ব মানে। অতএব

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_n = 0\beta = \theta \text{ সিদ্ধ হচ্ছে।}$$

$(c_1, c_2, \ldots, c_n 0) \neq (0, 0, \ldots, 0, 0)$ সত্য হয়। β হচ্ছে V-র অপর যেকোন একটি ভেক্‌টর ($\beta \neq \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots n$) সুতরাং A-র বৃহত্তর সেট $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta\}$ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

উপপাদ্য 5.2 : ভেক্‌টরদেশের যেকোন রৈখিকভাবে স্বাধীন সেটের যেকোন অশূন্য উপসেট অবশ্যই রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

প্রমাণ ঃ $V(F)$ ভেক্‌টর দেশের $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, অশূন্য ভেক্‌টরগুলির দ্বারা গঠিত $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন এখন $B = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_m | 1 \leq m < n\}$ হচ্ছে A-র একটি উপসেট। আমরা প্রমাণ করব B সেটটিও রৈখিকভাবে স্বাধীন।

যদি সম্ভব হয় ধরা যাক্ B রৈখিকভাবে নির্ভরশীল। তাহলে $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_m\alpha_m = \theta$ সম্বন্ধটি সিদ্ধ হবে। $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ শর্তটিও সত্য

অতএব $c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_m\underline{\alpha}_m + 0\underline{\alpha}_{m+1} + \ldots + 0\underline{\alpha}_n = \theta$

সম্বন্ধটি সিদ্ধ হচ্ছে $(c_1, c_2, \ldots., c_m, 0, \ldots., 0) \neq (0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots 0)$ শর্তসাপেক্ষে। এর ফলে এটাই প্রতিপন্ন হচ্ছে A রৈখিকভাবে নির্ভরশীল যা অসম্ভব (প্রদত্ত শর্তানুসারে)। অতএব B রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হতে পারে না, অবশ্যই রৈখিক অনির্ভর।

উপপাদ্য 5.3 : ভেক্‌টরের যে কোন সেটে শূন্য ভেক্‌টর অন্তর্ভুক্ত হলে সেটটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হবে।

প্রমাণ ঃ $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2 \ldots.. \underline{\alpha}_n, \underline{\theta}\}$ সেটে শূন্য ভেক্‌টর $\underline{\theta}$-র উপস্থিতি এবং অপর ভেক্‌টরগুলি অশূন্য। এখন দেখা যাচ্ছে

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \ldots + 0\alpha_n + c\underline{\theta} = \underline{\theta}$$

যেখানে $c \neq 0$ এবং $(0, 0, \ldots., 0, C) \neq (0, 0, \ldots., 0)$

[$c\underline{\theta} = \underline{\theta}$ ধর্মাবলী 4.4-এর (i) অনুসারে]

অতএব A রৈখিকভাবে নির্ভরশীল সেট।

উপপাদ্য 5.4 ঃ একটি অশূন্য ভেকটর দ্বারা গঠিত সেট সর্বদা রৈখিকভাবে স্বাধীন।

প্রমাণ ঃ $V(F)$ ভেক্টরদেশের α যেকোন একটা অশূন্য ভেক্টর। আমরা প্রমাণ করব $A = \{\alpha | \alpha \neq \theta\}$ সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

ভেক্টরদেশের ধর্মাবলী 4.4 এর (iv) অনুসারে $c\underline{\alpha} = \theta \Rightarrow c = 0$ যখন $\alpha \neq \theta$। অতএব A রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট।

উপপাদ্য 5.5 ঃ $V(F)$ ভেক্টরদেশের $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n, c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n | c_i \in F\}$ উপসেটটি সর্বদা রৈখিকভাবে নির্ভরশীল সেট।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্

$$\underline{\beta} = c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n$$

অতএব $\quad 1\underline{\beta} - c_1\underline{\alpha}_1 - c_2\underline{\alpha}_2 - \ldots - c_n\underline{\alpha}_n = \underline{\theta} \quad \ldots.. \text{(i)}$

এখন $c_1, c_2, \ldots, c_n$ এর প্রতিটি মান শূন্য হলেও $\underline{\beta}$-র সহগ 1 হওয়ায় (i) নং সম্পর্কটি সিদ্ধ হচ্ছে। কেননা $1, -c_1, -c_2, \ldots, c_n$ এর সবাই একসঙ্গে শূন্য হচ্ছে না।

সুতরাং প্রদত্ত সেটটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল সেট।

উপপাদ্য 5.6 : $V(F)$ ভেক্টর দেশের $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n\}$ উপসেটটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল সেট হলে সেটটির কমপক্ষে একটি ভেক্টর অবশ্যই অবশিষ্ট ভেক্টরগুলির রৈখিক সমবায় (linear combination) হবে। এখানে $\underline{\alpha}_i \neq \theta, i = 1, 2, \ldots n$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2 \ldots, \underline{\alpha}_n\}$ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল অতএব $c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n = \theta$, $c_i \in F$ .... (i) সিদ্ধ হচ্ছে $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ এই শর্তসাপেক্ষে।

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ এর মধ্যে কমপক্ষে একটি অশূন্য হওয়ায়, আমরা সুবিধার্থে ধরি $c_1 \neq 0$। এখন (i) হতে পাই

$$c_1\underline{\alpha}_1 = -c_2\underline{\alpha}_2 - c_3\underline{\alpha}_3 - \ldots - c_n\underline{\alpha}_n$$

বা, $\quad (c_1^{-1})c_1\underline{\alpha}_1 = -(c_1^{-1}c_2)\underline{\alpha}_2 - (c_1^{-1}c_3)\underline{\alpha}_3 - \ldots - (c_1^{-1}c_n)\underline{\alpha}_n$

[c_1^{-1} হচ্ছে F ক্ষেত্রের c_1 পদের গুণন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে বিপরীত পদ]

বা, $\quad \underline{\alpha}_1 = -(c_1^{-1}c_2)\underline{\alpha}_2 - (c_1^{-1}c_3)\underline{\alpha}_3 - \ldots - (c_1^{-1}c_n)\underline{\alpha}_n$

$$= d_2\underline{\alpha}_2 + d_3\underline{\alpha}_3 + \ldots + d_n\underline{\alpha}_n \qquad d_i = c_1^{-1}c_i \in F$$

$$i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

অতএব প্রমাণিত হলো $\underline{\alpha}_1$ ভেকটরটি অপর ভেকটরগুলির রৈখিক সমবায়।

মন্তব্য 5.1 : $\underline{\alpha}_1$-র এই প্রকাশ এক ও অনন্য (unique)।

উপপাদ্য 5.7 : অপসারণ উপপাদ্য (Deletion theorem)

যদি $V(F)$ ভেক্টরদেশের $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n$ ভেক্টরগুলির দ্বারা গঠিত রৈখিকভাবে নির্ভরশীল সেট A এমন যে $V(F) = L(A)$ [অর্থাৎ $V(F)$, **A-র রৈখিক ব্যাপ্তি** (linear span) রূপে প্রকাশমান], তাহলে A-র একটি উপযুক্ত প্রকৃত উপসেট (Suitable proper subset) B পাওয়া যাবে যার রৈখিক ব্যাপ্তিরূপে **$V(F)$-র প্রকাশ সম্ভব** [A থেকে এক বা একাধিক ভেক্টর বাদ দিয়ে B সৃষ্টি হবে]।

প্রমাণ ঃ $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n | \alpha_i \in V(F)\}$ একটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল সেট এবং $V(F) = L(A)$। অতএব $V(F)$-র কোন ভেকটর $\underline{\beta}$-কে নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায় ঃ

$$\underline{\beta} = c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n, c_i \in F$$

[4.7-এ প্রথম সংজ্ঞাটি দেখুন]

প্রমাণ করতে হবে A-র উপযুক্ত এবং যথার্থ উপসেট দ্বারাও $V(R)$-র রৈখিক ব্যাপ্তি সম্ভব।

উপপাদ্য 5.6. অনুসারে A-র কমপক্ষে একটি ভেকটর অবশিষ্ট ভেকটরগুলির রৈখিক সমবায়। ধরা যাক্ ভেকটরটি $\underline{\alpha}_r$। অতএব আমরা লিখতে পারি

$$\underline{\alpha}_r = d_1\underline{\alpha}_1 + d_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + d_{r-1}\alpha_{r-1} + d_{r+1}\underline{\alpha}_{r+1} + \ldots + d_n\underline{\alpha}_n,\ d_i \in F$$

এবং তার ফলে

$$\underline{\beta} = c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_r(d_1\underline{\alpha}_1 + \ldots + d_{r-1}\underline{\alpha}_{r-1} + d_{r+1}\underline{\alpha}_{r+1} + \ldots d_n\underline{\alpha}_n) + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n$$

$$= (c_1 + c_r d_1)\underline{\alpha}_1 + \ldots + (c_{r-1}c_r d_{r-1})\underline{\alpha}_{r-1} + (c_{r+1}c_r d_{r+1})\underline{a}_{r+1} + \ldots + (c_n + c_r d_n)\underline{\alpha}_n$$

অতএব $\underline{\beta} \in L(B)$, যেখানে $B = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_{r-1}, \underline{\alpha}_{r+1}, \ldots \underline{\alpha}_n\}$

[লক্ষ করুন A থেকে বাদ গেছে এবং A-র উপসেট B]

যেহেতু $\underline{\beta}$ হচ্ছে $V(F)$-র যেকোন একটি ভেকটর, অতএব

$\underline{\beta} \in L(B) \Rightarrow V \subset L(B)$ বিপরীতক্রমে, $B \dot{\subset} A$

$\Rightarrow L(B) \subset L(A) = V(F)$ অতএব প্রমাণিত হলো

$V = L(A)$ হলে $V = L(B)$, যেখানে $B \subset A$

উপপাদ্য 5.8 : $V(F) = L(A)$ যেখানে $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots \underline{\alpha}_n, | \underline{\alpha}_i, \in V(F)\}$ একটি সসীম রৈখিকভাবে

নির্ভরশীল সেট এবং $A \neq \{\theta\}$ A হতে এমন একটি রৈখিকভাবে স্বাধীন উপসেট T গঠন করা যাবে যার রৈখিক ব্যাপ্তিরূপে ভেক্টরদেশ $V(F)$ প্রকাশিত হবে, অর্থাৎ $V(F) = L(T)$ হবে।

প্রমাণ ঃ $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n | \underline{\alpha}_i \in V(F)\}$ সসীম রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট এবং $V(F) = L(A)$। উপপাদ্য 5.7 অনুসারে A-র একটি ভেকটর বাদ দিয়ে এমন একটি উপযুক্ত এবং প্রকৃত উপসেট B গঠন করা যাবে যার ফলে $V(F) = L(B)$ হবে। B যদি রৈখিকভাবে স্বাধীন হয়, তবে সহজেই উপপাদ্যে পৌঁছে যাচ্ছি। ধরি B রৈখিকভাবে নির্ভরশীল। তাহলে একই উপপাদ্য অনুসারে $V(F) = L(\mathrm{C})$, $\mathrm{C} \subset B$। পুনরায় রৈখিকভাবে স্বাধীন হলে আমরা উপপাদ্যে উপনীত হব, নচেৎ C থেকে ভেক্টর অপনয়ন দ্বারা D পাওয়া যাবে এবং $V(F) = L(D)$ হবে। এই প্রকারে, A সসীম সেট হওয়ায়, সসীম সংখ্যক ভেক্টর অপনয়ন দ্বারা শেষ পর্যন্ত আমরা অবশ্যই A-র এমন একটি উপসেট পাব যাতে A-র কমপক্ষে একটি অশূন্য ভেক্টর থাকবে এবং ঐ উপসেটের রৈখিক ব্যাপ্তিরূপে $V(F)$ প্রকাশমান হবে, কারণ প্রদত্ত শর্তানুসারে $A \neq \{\theta\}$ আবার উপপাদ্য 5.4 অনুসারে যেকোন একটি অশূন্য ভেক্টর দ্বারা গঠিত সেট সর্বদা রৈখিকভাবে স্বাধীন। অতএব এটাই প্রতিপন্ন হলো যে অপনয়ন পদ্ধতি অনুসরণক্রমে আমরা A থেকে শেষ পর্যন্ত এমন একটি রৈখিকভাবে স্বাধীন উপসেট T পাব যার রৈখিক ব্যাপ্তি $V(F)$, অর্থাৎ $V(F) = L(T)$। সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

উপপাদ্য 5.9 : $V(F) = L(A)$ যেখানে $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n | \underline{\alpha}_i \in V(F)\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন। A-র কোন প্রকৃত উপসেট দ্বারা $V(F)$-র রৈখিক ব্যাপ্তি সম্ভব নয়।

প্রমাণ ঃ সম্ভব হলে, আমরা ধরি $B \subset A$.এবং $V(F) = L(B)$। যেহেতু B হচ্ছে A-র প্রকৃত উপসেট, অতএব কমপক্ষে A-B সেটে কমপক্ষে A-র একটি ভেক্টর আছে। ধরা যাক্ সেই ভেক্টরটি $\underline{\beta}$। এখন

$\underline{\beta} \in V(F)$ এবং $V(F) = L(B)$ হওয়ায়

$\underline{\beta}$ = B-র ভেক্টরগুলির রৈখিক সমবায়।

অতএব $B \cup \{\underline{\beta}\}$ এই সেটটি, উপপাদ্য 5.5 অনুসারে, অবশ্যই রৈখিকভাবে স্বাধীন। এবার $A \supset B \cup \{\beta\}$ হওয়ায় উপপাদ্য 1 অনুসারে, A সেটটিও রৈখিকভাবে স্বাধীন যা উপপাদ্যের শর্তসাপেক্ষে সম্পূর্ণ বিপরীত। অতএব সিদ্ধান্ত এই যে A-র কোন উপসেট দ্বারাই ($V(F)$-র রৈখিক ব্যাপ্তি সম্ভব হয়।

5.4 ভেক্টরদেশে ভিত্তির সংজ্ঞা ও কয়েকটি উদাহরণ (Definition of a basis of a vector space and some examples)

ভিত্তির সংজ্ঞা দেবার আগে নিম্নলিখিত উদাহরণ ও উপপাদ্যগুলি দেখুন।

উদাহরণ 5.7 : R^2-ভেক্টরদেশের দুটি ভেক্টর যদি রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট গঠন করে, তবে তার দ্বারা R^2-র রৈখিক ব্যাপ্তি অবশ্যই সম্ভব।

সমাধান ঃ প্রথমতঃ আমরা লক্ষ করছি $e_1 = (1, 0) \in R^2$, $e_2 = (0, 1) \in R^2$ এবং $\{e_1, e_2\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন। [উদাহরণ 5. দেখুন]। উপরন্তু R^2-র যেকোন ভেকটর $(a_1, a_2) = a_1e_1 + a_2e_2$ এবং তার ফলে $R^2 \subset L\ \{(e_1, e_2)\}$ ও বিপরীত ক্রম $L(\{e_1, e_2\}) \subset R^2$ সুতরাং $R^2 = L(\{e_1, e_2\})$।

এবার আমরা R^2-তে e_1 এবং e_2 ছাড়া যেকোন অশূন্য দুটি ভেক্টর $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ গ্রহণ করছি এবং ধরি $\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}\}$ রৈখিক অনির্ভর। যদি $\underline{\alpha} = (a_1.a_2)$ এবং $\underline{\beta} = (b_1.b_2)$ হয়, তবে

$$\lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} = \underline{\theta} \Rightarrow \lambda a_1 + \mu b_1 = 0 \text{ এবং } \lambda a_2 + \mu b_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{0}{a_1b_2 = a_2b_1}, \mu = \frac{0}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}\}$ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হওয়ায় অবশ্যই $\lambda = \mu = 0$। এটা সম্ভব হবে যদি $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ হয়, নতুবা λ, μ অসংজ্ঞাত হবে। অতএব কিভাবে λ ও β নির্বাচন করতে হবে তা বোঝা গেল।

পুনরায় $\underline{\alpha} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2$ এবং $\underline{\beta} = b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2$

$$\Rightarrow \underline{e}_1 = \frac{\underline{\alpha}b_2 - \underline{\beta}a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \underline{e}_2 = \frac{\underline{\beta}a_1 - \underline{\alpha}b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

অতএব R^2-র যেকোন ভেক্টর (x_1, x_2)-কে লেখা যায়।

$$(x_1, x_2) = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$$

$$= \frac{x_1(\underline{\alpha}b_2 - \underline{\beta}a_2)}{a_1b_2 - a_2b_1} + \frac{x_2(\underline{\beta}a_1 - \underline{\alpha}b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$= m\underline{\alpha} + n\underline{\beta}, m, n \in R$$

অতএব $R^2 \subset L(\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}\})$ এবং বিপরীতক্রমে $L(\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}\}) \subset R^2$ হওয়ায় প্রতিপন্ন হলো $R^2 = L(\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}\})$

উদাহরণ 5.8 : $R^3 = L(\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}) = L(\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}\})$

প্রদত্ত $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)$ এবং $\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}\}$, $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ ব্যতীত, যেকোন রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট।

সমাধান ঃ সংকেত উদাহরণ 5.7-র অনুরূপ চেষ্টা করুন।

উদাহরণ 5.8 এবং 5.7-র পরিপ্রেক্ষিতে সাধারণীকরণ (Generalization) ভিত্তিতে নীচের উপপাদ্যটি কেবলমাত্র বর্ণনা করা হলো।

উপপাদ্য 5.10. R^n-ভেক্টরদেশ-এ উক্তদেশের n-সংখ্যক ভেক্টরবিশিষ্ট যেকোন রৈখিকভাবে স্বাধীন সেটের রৈখিক ব্যাপ্তি।

উদাহরণ 5.9 : R^3 ভেক্টরদেশের যেকোন রৈখিকভাবে স্বাধীন সেটে তিনটি ভেক্টররের অধিক ভেক্টর নেই।

সমাধান ঃ উদাহরণ 5.1 অনুসারে R^3-র $A = \{\underline{e}_1 = (1, 0, 0), \underline{e}_2 = (0, 1, 0), \underline{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং উদাহরণ 5.8 অনুসারে $R^3 = L(\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\})$। ধরা যাক্ $\underline{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$, $\underline{\gamma} = (c_1, c_2, c_3)$, $\underline{\delta} = (d_1, d_2, d_3)$ হচ্ছে R^3-র যেকোন চারটি ভেকটর। এবার লক্ষ করুন।

$$\underline{\alpha} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + a_3\underline{e}_3, \qquad \underline{\beta} = b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2 + b_3\underline{e}_3$$

$$\underline{\gamma} = c_1\underline{e}_1 + c_2\underline{e}_2 + c_3\underline{e}_3, \qquad \underline{\delta} = d_1\underline{e}_1 + d_2\underline{e}_2 + d_3\underline{e}_3$$

$\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}, \underline{\delta}$-র মধ্যে যেকোন একটি $\underline{\theta}$ হলে $\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}, \underline{\delta}\}$ অবশ্যই রৈখিকভাবে নির্ভরশীল সেট (উপপাদ্য 5.3 অনুসারে)। অতএব ধরা যাক্ $\underline{\alpha} \neq \theta, \underline{\beta} \neq \theta, \underline{\gamma} \neq \theta, \underline{\delta} = \theta$। এখন

$$\lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} + \nu\underline{\gamma} + \omega\underline{\delta} = \theta, \lambda, \mu, \nu, \omega \in R$$

$$\Rightarrow \quad \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 + \omega d_1 = 0$$

$$\lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 + \omega d_2 = 0$$

$$\lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 + \omega d_3 = 0$$

এই সমীকরণ তন্ত্রে অজ্ঞাতরাশির সংখ্যা সমীকরণ সংখ্যার অধিক হওয়ায় $(\lambda, \mu, \gamma, \omega) \neq (0, 0, 0, 0)$ জাতীয় সমাধান সম্ভব হবে। (উপপাদ্যের 6.8 অনুঃ 1 দেখুন)। অতএব প্রমাণিত হলো $\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}, \underline{\delta}\}$ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল। উপরন্তু উপপাদ্য 5.1 অনুসারে $\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}, \underline{\delta}\}$-যেকোন বর্ধিত সেটও রৈখিকভাবে নির্ভরশীল। অতএব এটাই প্রমাণ হলো যে R^3-র তিনের অধিক ভেক্টর দ্বারা গঠিত সেট সর্বদা রৈখিকভাবে নির্ভরশীল সেট, অর্থাৎ এটাও বলা যায় R^3-র যেকোন রৈখিকভাবে স্বাধীন সেটে তিনটির অধিক ভেকটর থাকবে না।

উপপাদ্য 5.11 : R^n-ভেক্টর দেশে রৈখিকভাবে স্বাধীন সেটে n সংখ্যক ভেক্টররের অধিক ভেক্টর থাকবে না।

প্রমাণ ঃ প্রমাণ উদাহরণ 5.9-র অনুরূপ। এক্ষেত্রে $\underline{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, ..., 0)$, ..., $\underline{e}n = (0, 0, ..., 0, 1)$।

উপপাদ্য 5.10 এবং 5.11 থেকে জেনেছি R^n-র যেকোন n-সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টর দ্বারা R^n-এর রৈখিক ব্যাপ্তি সম্ভব এবং R^n-এ n-সংখ্যকের অধিক ভেক্টর কখন রৈখিকভাবে স্বাধীন হতে পারে না। উপরন্তু উপপাদ্য 5.9 অনুসারে কোন ভেক্টর দেশ $L(A)$ হলে, যেখানে A রৈখিকভাবে স্বাধীন, সেক্ষেত্রে

A-র কোন প্রকৃত উপসেট দ্বারা ভেক্টরদেশের রৈখিক ব্যাপ্তি সম্ভব নয়। এই সকল ধারণার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা একটি ভেক্টর দেশের একটি ভিত্তির সংজ্ঞায় যাচ্ছি। পরবর্তী উপপাদ্যে ভিত্তির অস্তিত্ব প্রমাণিত হবে।

সংজ্ঞা 5.3 : ভেক্টরদেশের ভিত্তি (A basis of a vector space)

$V(F)$ একটি ভেক্টর দেশ এবং উক্ত দেশের $A=\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n\}$ একটি উপসেট। A-কে $V(F)$-র ভিত্তি বলা হবে যদি নিম্নলিখিত শর্ত দুটি সিদ্ধ হয় ঃ

(i) A রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট

(ii) $V(F) = L(A)$

মন্তব্য ঃ (1) $V(F)$-র ভিত্তি সেট A সসীম (finite) বা অসীম (infinite) হতে পারে। A সসীম হলে $V(F)$-কে সসীম মাত্রাযুক্ত ভেক্টরদেশ (finite dimensional vector space) বলা হবে এবং A অসীম হলে $V(F)$-কে অসীম মাত্রাযুক্ত (infinite dimensional vector space) ভেক্টর দেশ বলা হবে।

বর্তমান এককে আলোচনার ধারা মূলত সসীম মাত্রা যুক্ত ভেক্টরদেশ নিয়ে।

(2) সংজ্ঞা 5.3-র ঠিক পূর্ববর্তী আলোচনা এবং ভিত্তির সংজ্ঞা এটাই প্রমাণিত করে যে R^n-ভেক্টরদেশের যেকোন n-সংখ্যক ভেক্টর যদি রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট গঠন করে তবে সেটটি অবশ্যই R^n-র একটি ভিত্তি।

(3) সংজ্ঞানুসারে ভেক্টরদেশের একাধিক ভিত্তি থাকতে পারে। আদর্শ ভিত্তি সহযোগে ভিত্তির কয়েকটি উদাহরণ ঃ

উদাহরণ 5.10 : R^n-ভেক্টরদেশের $A = \{e_1, e_2, \ldots, en\}$ যেখানে $e_1 = (11, 0, \ldots, 0)$ $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, en = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, সেটটি অবশ্যই R^n-র একটি ভিত্তি এবং এটি R^n-র আদর্শ ভিত্তি।

সমাধান ঃ সংজ্ঞা 5.3-র মন্তব্য (2) দেখুন।

উদাহরণ 5.11 : $P_n((R)$-ভেক্টরদেশের $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ হচ্ছে আদর্শ ভিত্তি।

সমাধান ঃ উদাহরণ 5.6-এ আমরা লক্ষ করেছি $P_3(R)$-র উপসেট $A = \{1, x, x^2, x^3\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন। উপরন্তু $P_3(R)$-র যেকোন পদ, সহজেই বোঝা যাচ্ছে, উক্ত উপসেটের রৈখিক সমবায়। তার ফলে $P_3(R) \subset L(A)$ এবং বিপরীতক্রমে $L(A) \subset P_3(R)$। অতএব ভিত্তির সংজ্ঞানুসারে A হচ্ছে $P_3(R)$-র একটি ভিত্তি। একই প্রকারে প্রতিপন্ন হবে $S = \{1, x, x^2, \ldots, xn\}$ হচ্ছে $P_n(R)$ একটি ভিত্তি এবং এটি $P_n(R)$-র আদর্শ ভিত্তি।

উদাহরণ 5.12 : $M_{2\times2}(R)$ ভেকটরদেশের একটি ভিত্তি

$$S = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

সমাধান ঃ

(i) $$c_1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$। অতএব S রৈখিকভাবে স্বাধীন। উপরন্তু

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c, d \in R$

সুতরাং $M_{2\times2} \subset L(S)$ এবং বিপরীতক্রমে $L(S) \subset M_{2\times2}$। অতএব $M_{2\times2} = L(S)$। তারফলে S, $M_{2\times2}(R)$-র একটি ভিত্তি। **S হচ্ছে $M_{2\times2}(R)$-র আদর্শ ভিত্তি।**

উদাহরণ 5.13 : $A = \{\underline{\alpha}_1 = (1, k, 1), \underline{\alpha}_2 = (2, 0, 2), \underline{\alpha}_3 = (2, k, 1)\}, k \in R$ এবং $\neq 0$। সেটটি R^3-র একটি ভিত্তি।

সমাধান ঃ (i) $c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + c_3\underline{\alpha}_3 = \underline{\theta} c_1, c_2, c_3 \in R$

$\Rightarrow c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0$

$\Rightarrow (c_1 + c_3) = 0$

$c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$

এবং সমীকরণতন্ত্রের সহগ নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

অতএব $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ [উদাহরণ 5.2 দেখুন]

অর্থাৎ A সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

(ii) যেকোন $\underline{\alpha} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ এবং ধরা যাক্

$\underline{\alpha} = a_1\underline{\alpha}_1 + a_2\underline{\alpha}_2 + a_3\underline{\alpha}_3$। α_1, α_2, α_3 এর মান ওপরে প্রদত্ত। তার ফলে

$a_1 + 2a_2 + 2a_3 = x_1$, $k(a_1, + a_3) = x_2$, $a_1 + 2a_2 + a_3 = x_3$ সমীকরণতন্ত্রটি উৎপন্ন হচ্ছে।

এই সমীকরণতন্ত্রের সহগনির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ k & 0 & k \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2k \neq 0 [\because k \neq 0]$ অতএব ক্রেমারের সুত্রানুসারে [8.7 তৃতীয়·পদ্ধতি দেখুন] প্রদত্ত x_1, x_2, x_3 ক্ষেত্রে a_1, a_2, a_3 এর এক ও অনন্য মান (unique value) পাওয়া যাবে। কাজেই যেকোন $\underline{\alpha} \in R^3 \Rightarrow \alpha\ a_1\underline{\alpha}_1 + a_2\underline{\alpha}_2 + a_3\underline{\alpha}_3$ এবং তার ফলে $R^3 \subset L(A)$।

বিপরীতক্রমে $a_1\underline{\alpha}_1 + a_2\underline{\alpha}_2 + a_3\underline{\alpha}_3 = (a_1 + 2a_2 + 3a_3, a_1k + a_3k, a_1 + 2a_2 - a_3) \in R^3$

$\Rightarrow L(A) \subset R^3$। অতএব $R^3 = L(A)$।

অতএব (i) এবং (ii) অনুসারে A হচ্ছে R^3-র একটি ভিত্তি।

[(i) এর অংশটি দেখানোর পর সংজ্ঞা 5.3-র মন্তব্য (2) অনুসারে বলা যায় R^3-র যেকোন তিনটি ভেকটরের রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট অবশ্যই একটি ভিত্তি। অথবা উপপাদ্য 5.18 দেখুন।]

উদাহরণ 5.14 : $S = \{(x, y), x, y \in R$ এবং $x - y = 0\}$

$= \{(x, x), x \in R\}$

সেটটি R^2-র উপভেকটর দেশ $\{\because (a, a)$ এবং $(b, b) \in S \Rightarrow \lambda(a, a) + \mu(b, b) = (\lambda a + \mu b, \lambda a, \mu b) \in S\}$। এই ভেক্টর উপদেশ অবশ্যই একটি ভেকটরদেশ। এই ভেকটর দেশের একটি ভিত্তি নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ S-র যেকোন একটি ভেকটর $\underline{\alpha} = (x, x) = x\ (1, 1), (1, 1) \in S$। এখন লক্ষ করা যাচ্ছে (i) $\{(1, 1) \neq 0\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং (ii) $s = L\{(1, 1)\}$। অতএব $\{(1, 1)\}$ হচ্ছে নির্ণেয় একটি ভিত্তি।

অনুশীলনী 5.4

1\. নির্ণয় করুন নিম্নলিখিত ভেকটরগোষ্ঠী R^3 দেশে একটি ভিত্তি গঠন করে কিনা ঃ

(*a*) (1, 1, 1) ও (1, – 1, 5)

(*b*) (1, 1, 1), (1, 2, 3) এবং (2, –1, 1)

(*c*) (1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4) এবং (2, 1, –2)

উত্তর। [(*a*) না (*b*) হ্যাঁ (*c*) না]

5.5 ভিত্তির অস্তিত্ব এবং ভিত্তি-সংক্রান্ত কয়েকটি উপপাদ্য (Existance of basic and related theorem)

উপপাদ্য 5.12 : $V(F)$ ভেক্‌টরদেশ তার কোন সসীম উপসেট S-র রৈখিক ব্যাপ্তিরূপে প্রকাশমান হলে ভেক্‌টর দেশটির অবশ্যই একটি ভিত্তি থাকবে।

প্রমাণ ঃ $V(F) = L(S)$, S হচ্ছে V-র একটি সসীম উপসেট।

যদি S রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট হয়, তাহলে, ভিত্তির সংজ্ঞানুসারে, S-ই হচ্ছে $V(F)$-র একটি ভিত্তি এবং তার ফলে উপপাদ্যের সত্যতায় উপনীত হচ্ছি। সুতরাং ধরা হল S সেটটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

যদি $V(F) = \{\underline{\theta}\}$ হয়, তাহলে $\{\underline{\theta}\}$ সেটটিকে $V(F)$-এর ভিত্তি হিসাবে ধরা হবে।

ধরা যাক্ $V(F) \neq \{\theta\}$ এবং $V(F) = L(S)$, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n | n$ সসীম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা$\}$। এক্ষেত্রে উপপাদ্য 5.8 অনুসারে S-র কিছু পদ (কমপক্ষে একটি) অপনয়ন দ্বারা আমরা একটি রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট T পাব যার রৈখিক ব্যাপ্তি $V(F)$ প্রকাশিত হবে, অর্থাৎ $V(F) = L(T)$ হবে। অতএব T হচ্ছে $V(F)$-র একটি ভিত্তি ; অর্থাৎ $V(F)$-র ভিত্তির অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে।

মন্তব্য 5.2 : সসীম মাত্রাযুক্ত ভেকটরদেশের ভিত্তির অস্তিত্ব স্বীকৃত হলেও একটি ভেকটরদেশের একাধিক

ভিত্তি থাকতে পারে। উদাহরণ 5.10 এবং 5.13 আমরা দেখেছি $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ এবং $\{\underline{\alpha}_1 = (1, k, 1), \alpha_2 = (2, 0, 2), \alpha_3 = (2, k, 1)\}$ উভয়েই R^3-ভেকটরদেশের ভিত্তি। উপপাদ্য 5.18 দেখুন।

উপপাদ্য 5.13 : $V(F)$-ভেকটরদেশের একটি ভিত্তি $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n\}$ হলে V-র যেকোন ভেকটরকে A-র রৈখিক সমবায় রূপে এক ও অনন্য উপায়ে প্রকাশ করা যাবে।

প্রমাণ ঃ $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n\}$ $V(F)$-র একটি ভিত্তি হওয়ায় A রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট এবং $V(F) = L(A)$। $V(F) = L(A)$ হওয়ায় V-র যেকোন ভেকটরকে, ধরা যায় $\underline{\beta}$-কে, A-র রৈখিক সমবায় রূপে করা যাবে। অতএব আমরা লিখতে পারি

$$\underline{\beta} = c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n,\ c_i \in F(i = 1, 2, \ldots, n)$$

$\underline{\beta}$-র এই প্রকাশটি এক ও অনন্য ; এটাই আমাদের দেখাতে হবে। যদি সম্ভব হয়, ধরা যাক্ $\underline{\beta}$-কে নিম্নলিখিত আকারেও প্রকাশ করা যাচ্ছে।

$$\underline{\beta} = d_1\underline{\alpha}_1 - d_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + d_n\underline{\alpha}_n,\ d_i \in F(i = 1, 2, \ldots, n)$$

অতএব

$$(c_1 - d_1)\underline{\alpha}_1 + (c_2 - d_2)\underline{\alpha}_2 + \ldots + (c_n - d_n)\underline{\alpha}_n = \theta$$

যেহেতু $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন অতএব

$$c_1 - d_1 = 0,\ c_2 - d_2 = 0,\ \ldots\ldots\ c_n - d_n = 0$$

বা, $c_1 = d_1,\ c_2 = d_2,\ \ldots\ldots\ c_n = d_n$

তার ফলে এটাই প্রতিপন্ন হলে A-র ভেকটরগুলির সাপেক্ষে $\underline{\beta} = c_1\underline{\alpha}_1 + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n$ এই প্রকাশটি এক ও অনন্য।

উপপাদ্য 5.14 : সসীম মাত্রাযুক্ত ভেকটরদেশ $V(F)$-র যেকোন ভিত্তির বর্ধিত সেট কখনও ভিত্তি হতে পারে না।

প্রমাণ ঃ $V(F) = L(A)$ এবং $A = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n | \alpha_i \in v, n =$ সসীম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা$\}$ একটি রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট। অতএব A হচ্ছে $V(F)$-র একটি ভিত্তি। ধরা যাক্

$$B = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n, \underline{\beta} | \underline{\beta} \in V\}$$

হচ্ছে A-র একটি বর্ধিত সেট। $\underline{\beta} \in V(F) = L(A)$ হওয়ায়

$$\beta = c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_n\underline{\alpha}_n,\ c_i \in F(i = 1, 2, \ldots, n)\text{।}$$

অতএব, $B = \left\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n, \underline{\beta}\right\}$ উপপাদ্য 5.5 অনুসারে, সেটটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল। তার ফলে B কখনই $V(F)$-র ভিত্তি হতে পারে না।

উপপাদ্য 5.15 : সসীম মাত্রাযুক্ত ভেকটরদেশ $V(F)$-র যেকোন দুটি ভিত্তির ভেকটর সংখ্যা পরস্পর সমান।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্ $V(F)$-র একটি ভিত্তি $A = \left\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n\right\}$। অতএব A সেটটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল এবং $V(F) = L(A)$। তখন উপপাদ্য 5.9 এবং উপপাদ্য 5.14 দ্বারা বলা যায় A-র কোন প্রকৃত উপসেট বা A-র কোন বর্ধিত সেট কখনই $V(F)$-র ভিত্তি হতে পারে না। অর্থাৎ উক্ত ভিত্তি A-র ক্ষেত্রে n নির্দিষ্ট।

এবার ধরা যাক্ $T = \left\{\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n\right\}$ হচ্ছে $V(F)$-র অপর একটি ভিত্তি যার ভেকটর সংখ্যা m। আমরা দেখাব $m = n$।

যদি সম্ভব হয়, ধরা যাক্ $m > n$। যেহেতু $V(F) = L(A)$ এবং A-র ভেকটর সংখ্যা n, অতএব উদাহরণ 5.9 (বা উপপাদ্য 5.11-র অনুরূপ প্রমাণ করা যেতে পারে যে $V(F)$-র বা $L(A)$-র যেকোন $(n + 1)$ সংখ্যক বা তার অধিক সংখ্যক ভেকটর অবশ্যই রৈখিকভাবে নির্ভরশীল। অতএব $V(F) = L(A)$-র $T = \left\{\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_m m > n\right\}$ উপসেটটি অবশ্যই রৈখিকভাবে নির্ভরশীল এবং তার ফলে T কখনই $V(F)$-র ভিত্তি হতে পারে না। অতএব সিদ্ধান্ত এই যে $m > n$ হতে পারে না, অর্থাৎ $m \ngtr n$।

পুনরায় যদি সম্ভব হয় ধরা যাক্ $m < n$। এক্ষেত্রে $V(F) = L(T)$ এবং T-র একটি বর্ধিত সেট A যা কখনই ভিত্তি হতে পারে না (উপপাদ্য 5.14 অনুসারে)। কিন্তু, আমরা ধরেছি A একটি ভিত্তি। অতএব $m \nless n$

এখন $m \ngtr n$ এবং $m \nless n \Rightarrow m = n$। অতএব প্রতিপন্ন হলো সসীম মাত্রাযুক্ত ভেকটরদেশের যেকোন দুটি ভিত্তির ভেকটর সংখ্যা একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা।

5.6 মাত্রার সংজ্ঞা এবং তৎসংক্রান্ত উপপাদ্য ও উদাহরণ (Dimension and related theorems & examples)

উপপাদ্য 5.12 এবং উপপাদ্য 5.13-র পরিপ্রেক্ষিতে একটি ভেকটরদেশের মাত্রা সংজ্ঞাত হল।

সংজ্ঞা 5.4 : ভেকটরদেশের মাত্রা (dimension or rank)

সসীম মাত্রা যুক্ত একটি ভেকটরদেশের অবশ্যই একটি ভিত্তি আছে এবং উক্ত ভেকটরদেশের যেকোনও ভিত্তির ভেকটর সংখ্যা সসীম এবং নির্দিষ্ট। এই নির্দিষ্ট ধনাত্মকপূর্ণ সংখ্যাটি উক্ত সসীম মাত্রাযুক্ত ভেকটরদেশের মাত্রা (dimension) বা (rank) এই নামে সংজ্ঞাত।

মন্তব্য 5.3 : (i) $V(F) = \{\underline{\theta}\}$ ভেকটরদেশের ভিত্তি $\{\underline{\theta}\}$ এবং মাত্রা 0 (zero) ধরা হয়।

(ii) $V(F)$-র মাত্রা মাত্রা (V) দ্বারা চিহ্নিত হয়।

উপপাদ্য 5.16 : প্রতিস্থাপন উপপাদ্য (Replacement theorem)

সসীম মাত্রা যুক্ত ভেকটরদেশ $V(F)$-এর দুটি ভিত্তি যথাক্রমে $S=\{\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2,\ldots,\underline{\alpha}_n\}$ এবং $T=\{\underline{\beta}_1,\underline{\beta}_2,\ldots,\underline{\beta}_n\}$। যদি $\underline{\beta}_1=\sum_{i=1}^{n}c_i\underline{\alpha}_i, c_i\in F$ (i = 1, 2, ..., n) এবং $c_k\neq 0$ হয় ($1\leq k\leq n$), তবে S হতে α_k কে β_1 দ্বারা প্রতিস্থাপন করা যাবে এবং নব-গঠিত $S'=\{\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2,\ldots\underline{\alpha}_{k-1},\underline{\beta},\underline{\alpha}_{k+1},\ldots\underline{\alpha}_n\}$ হবে $V(F)$-র অপর একটি ভিত্তি।

প্রমাণ ঃ S সেটটি, $V(F)$-র ভিত্তি হওয়ায়, অবশ্যই রৈখিকভাবে স্বাধীন। অতএব

$d_1\underline{\alpha}_1+d_2\underline{\alpha}_2+\ldots+d_n\underline{\alpha}_n=\underline{\theta}, d_i\in F,$ (i = 1, 2, ..., n)

$\Rightarrow d_1 = d_2 = \ldots\ dn = 0$

পুনরায় $\underline{\beta}_1=c_1\underline{\alpha}_1+c_2\underline{\alpha}_2+\ldots+c_k\underline{\alpha}_k+\ldots+c_n\underline{\alpha}_n$ এবং $c_k\neq 0$ হওয়ায়

$$c_k\underline{\alpha}_k=\underline{\beta}_1-c_1\underline{\alpha}_1-c_2\underline{\alpha}_2\ldots-c_{k-1}\underline{\alpha}_{k-1}-c_{k+1}\underline{\alpha}_{k+1}-\ldots c_n\underline{\alpha}_n$$

বা, $\underline{\alpha}_k=(c_k)^{-1}\underline{\beta}_1-(c_k)^{-1}c_1\underline{\alpha}_i-(c_k)^{-1}c_2\underline{\alpha}_2-\ldots-(c_k)^{-1}c_{k-1}\underline{\alpha}_{k-1}-(c_k)^{-1}c_{k-1}\underline{\alpha}_{k+1}$

$$-\ldots-(c_k)^{-1}c_n\underline{\alpha}_n \quad \ldots\ldots(i)$$

[$c_k\in F$ এবং $ck\neq 0$ সুতরাং F-এ $(c_k)^{-1}$ এর অস্তিত্ব স্বীকৃত এবং $(c_k)^{-1}c_k=1$ (F-র একক পদ)]। এখন আমরা প্রমাণ করব

$S'=\{\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2,\ldots,\underline{\alpha}_{k-1},\underline{\beta}_1,\underline{\alpha}_{k+1},\ldots\underline{\alpha}_n\}$ সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

$$\Rightarrow \lambda_1\underline{\alpha}_1+\lambda_2\underline{\alpha}_2+\ldots+\lambda_{k-1}\underline{\alpha}_{k-1}+\mu\underline{\beta}_1+\lambda_{k+1}\underline{\alpha}_{k+1}+\lambda_n\underline{\alpha}_n=\theta,\lambda,\mu\in F$$

(i = 1, 2, ..., $k-1$, $k+1$, 1, ... n)

$$\Rightarrow \lambda_1\underline{\alpha}_1+\lambda_2\underline{\alpha}_2+\ldots+\lambda_{k-1}\underline{\alpha}_{k-1}+\mu(c_1\underline{\alpha}_1+c_2\underline{\alpha}_2+\ldots+c_k\underline{\alpha}_k+\ldots+c_n\underline{\alpha}_n)$$

$$+\lambda_{k+1}\underline{\alpha}_{k+1}+\ldots+\lambda_n\underline{\alpha}_n=\underline{\theta}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1+\mu c_1)\alpha_1+(\lambda_2+\mu c_2)\alpha_2+\ldots+(\lambda_{k+1}+\mu c_{k-1})\underline{\alpha}_{k-1}+\mu c_k\underline{\alpha}_k+(\lambda_{k+1}+\mu c_{k+1})$$

$$\underline{\alpha}_{k+1}+\ldots+(\lambda_n+\mu c_n)\underline{\alpha}_n=\underline{\theta}$$

$$\Rightarrow \lambda_1+\mu c_1=0,\lambda_2+\mu c_2=0,\ldots,\lambda_{k-1}+\mu c_{k-1}=0,\mu c_k=0\,\lambda_{k+1}+\mu c_{k+1}=0,\ldots,$$

$$\lambda_n+\mu c_n=0$$

[$\because$ $\{\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2,\ldots\underline{\alpha}_n\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন]

μ যদি শূন্য না হয় তাহলে পাই,

$$\mu = -\frac{\lambda_1}{c_1} = -\frac{\lambda_2}{c_2} = \ldots - \frac{\lambda_n}{c_n}$$

তাহলে λ_i-রা একে অপরের গুণিতক। যেটা সম্ভব নয়. অতএব $\mu = 0$.

$\Rightarrow \mu = 0$ $[\because c_k \neq 0]$ এবং তার ফল $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda k_{-1} = \lambda k_{+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ অতএব প্রমাণিত হল S' রৈখিক অনির্ভর। এবার আমরা দেখাব $V(F) = L(S')$। $V(F) = L(S)$ হওয়ায় $V(F)$-র যে কোনও ভেকটর $\underline{\gamma}$-কে লেখা যায়

$\underline{\gamma} = m_1\underline{\alpha}_1 + m_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + m_k\underline{\alpha}_k + \ldots + m_n\underline{\alpha}_n,\ m_i \in F$

(i) হতে $\underline{\alpha}_k$-র ব্যাপ্তি বসিয়ে দেখা যাচ্ছে

$$\underline{\gamma} = m_1\underline{\alpha}_1 + m_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + m_{k-1}\underline{\alpha}_{k-1} mk\Big[(c_k)^{-1}\underline{\beta}_1 - (c_k)^{-1}c_1\underline{\alpha}_1 - (c_k)^{-1}c_2\underline{\alpha}_2 - \ldots - (c_k)^{-1}c_{k-1}$$

$$\underline{\alpha}_{k-1} - (c_k)^{-1}c_{k+1}\underline{\alpha}_{k+1} - \ldots - (c_k)^{-1}c_n\underline{\alpha}_n\Big] + m_{k+1}\underline{\alpha}_{k+1} + \ldots + m_n\underline{\alpha}_n$$

$=$ $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2 \ldots, \underline{\alpha}_{k-1}, \underline{\beta}_1, \underline{\alpha}_{k+1}, \ldots \underline{\alpha}_n$ ভেকটরের রৈখিক সমবায়।

অতএব $V(F) \subset L(S')$ এবং বিপরীত ক্রমে $L(S') \subset V(F)$। অর্থাৎ $V(F) = L(S')$, যেখানে S' রৈখিকভাবে স্বাধীন। সুতরাং প্রতিপন্ন হলো S' হচ্ছে $V(F)$-র একটি ভিত্তি।

উপপাদ্য 5.17 : সম্প্রসারণ উপপাদ্য (entension theorem)

সসীম-মাত্রাযুক্ত ভেকটরদেশ $V(F)$-র মাত্রা n এবং $T = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_m | m < n, \underline{\alpha}_i \in V\}$ উপসেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন হলে T কে বর্ধিত সম্প্রসারিত করে $V(F)$-র একটি ভিত্তি গঠন করা যাবে।

প্রমাণ ঃ $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_m / m < n, \underline{\alpha}_i \in V\}(i = 1, 2 \ldots, m)$

ধরা যাক্ $V(F)$-র একটি ভিত্তি

$S = \{\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_m, \ldots \underline{\beta}_n\}$

অতএব আমরা লিখতে পারি

$\underline{\alpha}_1 = c_1\underline{\beta}_1 + \ldots + c_m\underline{\beta}_m + \ldots, c_n\underline{\beta}_n, c_i \in F(i = 1, 2, \ldots, n)$

এবং c_1, c_2, ... cn-র মধ্যে কমপক্ষে একটি অশূন্য। আমাদের বোঝা ও লেখার সুবিধার জন্য ধরি $c1 \neq 0$। তাহলে প্রতিস্থাপন উপপাদ্য 5.16 অনুসারে $\underline{\beta}_1$-কে $\underline{\alpha}_1$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করা যাবে এবং S-র পরিবর্তে

$$S' = \{\underline{\alpha}_1, \underline{\beta}_2, \underline{\beta}_3, \ldots, \underline{\beta}_n\}$$

সেটটি হবে $V(F)$-র অপর একটি ভিত্তি। একই পদ্ধতি অনুসরণ ক্রমে একে একে $\underline{\alpha}_2, \ldots \underline{\alpha}_m$ কে S' সেটে প্রতিস্থাপন করা যাবে এবং সেই সঙ্গে S' র $\underline{\beta}_2, \underline{\beta}_3, \ldots\ldots, \underline{\beta}_n$ থেকে $(m-1)$ সংখ্যক ভেকটর অপসারিত হবে। তার ফলে এমন একটি সেট T' পাব যা হবে T-র সম্প্রসারিত সেট এবং $V(F)$-র একটি ভিত্তি সেট। অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

উপপাদ্য 5.18 : সসীম মাত্রা যুক্ত ভেকটর দেশ $V(F)$-র মাত্রা n হলে, V-র যেকোনও n-সংখ্যক ভেকটরের উপসেট S হবে $V(F)$-র একটি ভিত্তি তার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত (Necessary and sufficient condition) হচ্ছে S-কে রৈখিকভাবে স্বাধীন হতে হবে।

প্রমাণ ঃ $S = \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_n | \underline{\alpha}_i \in V\}$ একটি রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট। যদি S, $V(F)$-র ভিত্তি না হয়, তবে S কে সম্প্রসারিত করে (উপপাদ্য 5.17 অনুসারে) S' পাব যা হবে $V(F)$-র একটি ভিত্তি। সেক্ষেত্রে S'-র পদসংখ্যা হচ্ছে n-র অধিক। কিন্তু, $V(F)$-র মাত্রা n হওয়ায় $V(F)$-র কোন ভিত্তিতে n-র অধিক ভেকটর থাকতে পারে না। অতএব S অবশ্যই $V(F)$-র ভিত্তি।

বিপরীতক্রমে, $V(F)$-র যেকোন ভিত্তি n সংখ্যক ভেকটরের রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট, কারণ $V(F)$-র মাত্রা n।

মন্তব্য 5.4 : R^3-র যেকোন তিনটি ভেকটরের রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট অবশ্যই R^3-র একটি ভিত্তি, কারণ R^3-র মাত্রা 3। R^3-র মাত্রা 3 কারণ R^3-র যেকোনও ভিত্তিতে কেবল তিনটি ভেকটর আছে (উদাহরণ 5.10 এবং 5.13 দেখুন।

উদাহরণ 5.15 : রৈখিক অনির্ভর সেট $\{\underline{\alpha}_1 = (1,1,1), \underline{\alpha}_2 = (3,0,2)\}$-কে সম্প্রসারিত করে R^3-র একটি ভিত্তি নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ R^3-র আদর্শ ভিত্তি $S = \{\underline{e}_1 = (1,0,0), \underline{e}_2 = (0,1,0), \underline{e}_3 = (0,0,1)\}$ (উদাহরণ 5.10।) এবার প্রতিস্থাপন উপপাদ্য 5.6-এর সাহায্যে আদর্শভিত্তির যেকোন দুটিকে $\underline{\alpha}_1$ ও $\underline{\alpha}_2$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করলেই আমরা নির্ণেয় ভিত্তিটি পাব।

লক্ষ করুন $\underline{\alpha}_1 = (1,1,1) = 1\underline{e}_1 + 1\underline{e}_2 + 1\underline{e}_3$

এবং $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3$-র প্রত্যেকের সহগ অশূন্য। অতএব এদের যেকোনও একটিকে $\underline{\alpha}_1$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করা যাবে। আমরা S-র $\underline{e}_1$-কে $\underline{\alpha}_1$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে নতুন ভিত্তি পাচ্ছি $S^1 = \{\underline{\alpha}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ এবং অবশ্যই $R^3 = L(S')$। এবার ধরা যাক্

$$\underline{\alpha}_2 = c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{e}_2 + c_3\underline{e}_3$$

বা, $(3, 0, 2) = c_1(1, 1, 1) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1)$

বা, $c_1 = 3,\ c_1 + c_2 = 0,\ c_1 + c_3 = 2$

বা, $c_1 = 3,\ c_2 = -3,\ c_3 = 1$

এখন $c_2 \neq 0$ হওয়ায় S' হতে $\underline{e}_2$ কে $\underline{\alpha}_2$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করা যাবে। অতএব নির্ণেয় ভিত্তি

$S'' = \{\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (3, 0, 2), \alpha_3 = (0, 0, 1)\}$

উদাহরণ 5.16 : $S = \{1, (x - 2), (x - 2)^2\}$ সেটটি কি রৈখিকভাবে স্বাধীন যদি রৈখিকভাবে স্বাধীন হয়, তবে S-কে সম্প্রসারিত করে $P_3(R)$-র একটি ভিত্তি নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : $c_1 1 + c_2(x - 2) + c_3 (x - 2)^2 = 0 \ c_i \in R$

$\Rightarrow c_1 - 2c_2 + 4c_3 + (c_2 - 4c_3) x + c_3x^2 = 0$

$\Rightarrow c_1 - 2c_2 + 4c_3 = 0, c_2 - 4c_3 = 0, c_3 = 0$

$\Rightarrow c_1 + c_2 = c_3 = 0$

অতএব S রৈখিকভাবে স্বাধীন। $P_3(R)$-র আদর্শ ভিত্তি $T = \{1, x, x^2, x^3\}$ (উদাহরণ 5.11 দেখুন) এবং

$$(x - 2) = (-2) 1 + 1x + 0x^2 + 0x^3$$

হওয়ায় T থেকে x-কে $(x - 2)$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করা যাবে, কারণ উপরে লেখা রৈখিক সমবায়ে x-র সহগ $1 \neq 0$ (উপপাদ্য 5.16) দেখুন)। অতএব

$$T' = \{1, (x - 2), x^2, x^3\}$$

হচ্ছে $P_3(R)$-র অপর একটি ভিত্তি। পুনরায় ধরি

$$(x - 2)^2 = d_1 1 + d_2(x - 2) + d_3x^2 - d_4x^3$$

অতএব $d_1 - 2d_2 = 4, d_2 = -4, d_3 = 1, d_4 = 0$

বা, $d_1 = -4, d_2 = -4, d_3 = 1, d_4 = 0$

$d_3 \neq 0$ হওয়ায় প্রতিস্থাপন উপপাদ্য দ্বারা নির্ণেয় ভিত্তি

$$T'' = \{1,. (x - 2), (x - 2)^2, x^3\}$$

উদাহরণ 5.17 : $V = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0, x, y, z \in R\}$ সেটটি R^3-র উপসেট। দেখান যে V হচ্ছে R^3-র ভেকটর উপদেশ এবং ভেকটর উপদেশের একটি ভিত্তি ও মাত্রা নির্ণয় করুন।

সমাধান : $V = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0, x, y, z \in R\}$

এখন $= (a, b, c)$ এবং $\beta = (l, m, n) \in V \Rightarrow$

$$a + b + c = 0 \text{ এবং } 1 + m + n = 0$$

যেকোন $\lambda, \mu \in R$-র ক্ষেত্রে

$\lambda\alpha + \mu\beta = (\lambda a + \mu l, \lambda b + \mu m, \lambda c + \mu n) \in R^3$

এবং $(\lambda a + \mu l) + (\lambda b + \mu m) + (\lambda c + \mu n) = \lambda (a + b + c) + \mu (1 + m + n) = 0$

অর্থাৎ $\forall \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in R^3$ এবং $\forall \lambda, \mu \in R$ হলে $\lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} \in R^3$ হচ্ছে।

অতএব, উপপাদ্য 4.2 অনুসারে, V অবশ্যই R^3-র ভেকটর উপদেশ।

এবার লক্ষ করুন V-র যেকোন ভেকটরের ক্ষেত্রে

$$\underline{\alpha} = (x, y, z | x + y + z = 0)$$

$$= (x, y, -x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1), x, y \in R$$

অর্থাৎ $\underline{\alpha}$ হচ্ছে (1, 0, –1) এবং (0, 1, –1) ভেকটরদ্বয়ের রৈখিক সমবায়, এই ভেকটর দুটি অবশ্যই V-র দুটি পদ। বিপরীতক্রমে এই ভেকটর দুটির রৈখিক সমবায় অবশ্যই V-র একটি পদ। অতএব $V = L(A)$, যেখানে $A = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$। এখন দেখুন

$$c_1 \; (1, 0, -1) + c_2 \; (0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow c_1 = 0, \; c_2 = 0, \; -c_1 - c_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

অর্থাৎ A রৈখিকভাবে স্বাধীন। অতএব A হচ্ছে V-র একটি ভিত্তি। এই ভিত্তিতে ভেকটর সংখ্যা দুই হওয়ায়, V-র মাত্রা = 2।

উদাহরণ 5.18 : $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} \middle| x, y, z, \in R \right\}$

সেটটি $M_{2\times2}(R)$-র একটি ভেকটর উপদেশ—প্রমাণ করুন। এই ভেকটর উপদেশটির একটি ভিত্তি ও মাত্রা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} \in W_1, B = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in W_1$

$$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in R$$

এখন $\forall \lambda, \mu \in R$ হলে দেখা যাচ্ছে

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda a \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu\alpha & -\mu\alpha \\ \mu\beta & \mu\gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu\alpha & -(\lambda a + \mu\alpha) \\ \lambda b + \mu\beta & \lambda c + \lambda\gamma \end{pmatrix} \in W_1$$

অতএব W_1 হচ্ছে $M_{2\times2}(R)$-র একটি ভেকটর উপদেশ। W_1-র যেকোন ভেকটর = $\begin{pmatrix} u & -u \\ v & \omega \end{pmatrix}$, $u, v,$ $w \in R$.

$$= u \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

অর্থাৎ $W_1 = L\{S\}, S = \left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

এবং S-র প্রতিটি ভেকটর $\in W_1$। আবার লক্ষ করুন

$$\lambda\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda & -\lambda\\\mu & \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0$$

অর্থাৎ S রৈখিকভাবে স্বাধীন। অতএব S হচ্ছে W_1-র একটি ভিত্তি এবং W_1-র মাত্রা $= 3$।

উপপাদ্য 5.19 :

(a) সসীম মাত্রা যুক্ত ভেকটরদেশে $V(F)$-র একটি ভেকটর উপদেশ $U(F)$ হলে মাত্রা $(U) \leq$ মাত্রা (V)। কেবল মাত্র $U = V$ হলে মাত্রা (U) = মাত্রা (V)

(b) সসীম-মাত্রা যুক্ত ভেকটরদেশ $V(F)$-র দুটি উপভেকটরদেশ $U_1(F)$ এবং $U_2(F)$ হলে মাত্রা $(U_1 + U_2)$ = মাত্রা (U_1) + মাত্রা (U_2)-মাত্রা $(U_1 \cap U_2)$ (a) -র প্রমাণ ঃ ধরা যাক্ $V(F)$-এর মাত্রা (একটি সসীম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)। V-র যেকোন ভেকটর উপদেশ W। অতএব $W \subseteq V$। ধরা যাক্ মাত্রা (w) $= m$ এবং W-র একটি ভিত্তি $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots . \underline{\alpha}_m\}$। এই সেটটি অবশ্যই রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং প্রতিটি পদ অবশ্যই V-র অন্তর্গত। ধরা যাক্ $m > n$। তাহলে V-তে n-র অধিক সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেকটর আছে, যা কখনই সম্ভব নয়,. কারণ V-র মাত্রা n। অতএব সিদ্ধান্ত এই যে $m \leq n$ বা মাত্রা $(U) \leq$ মাত্রা (V)। $U = V$ হলে উভয়ের মাত্রা একই হবে। $m < n$ হলে $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots . \underline{\alpha}_m\}$ -কে সম্প্রসারিত করে. V-র একটি ভিত্তি পাওয়া যাবে, সেক্ষেত্রে অবশ্যই U হচ্ছে V-র প্রকৃত উপসেট।

(b)-র প্রমাণ ঃ $V(F)$ সসীম-মাত্রা যুক্ত হওয়ায় U_1, U_2, $U_1 + U_2$ এবং $U_1 \cap U_2$ সসীম-মাত্রা যুক্ত।

$U_1 \cap U_2 \subseteq U_1, U_2 \Rightarrow$ মাত্রা $(U_1 \cap U_2) \leq$ {মাত্রা (U_1), মাত্রা (U_2)}।

ধরা যাক্ মাত্রা $(U_1 \cap U_2)$ = মাত্রা U_1।

এক্ষেত্রে $U_1 \cap U_2 = U_1$। তার ফলে $U_1 \subset U_2$ এবং $U_1 + U_2 = U_2$

অতএব এই বিশেষ ক্ষেত্রে মাত্রা (U_1) + মাত্রা (U_2) — মাত্রা $(U_1 \cap U_2)$

= মাত্রা (U_1) + মাত্রা (U_2) — মাত্রা (U_1)

= মাত্রা (U_2) = মাত্রা $(U_1 + U_2)$।

অনুরূপে মাত্রা $(U_1 \cap U_2)$ = মাত্রা U_2 হলেও উপপাদ্যটি সিদ্ধ হবে।

এবার ধরা যাক মাত্রা $(U_1 \cap U_2) \neq$ {মাত্রা (U_1), মাত্রা (U_2)} এবং মাত্রা $(U_1 \cap U_2) = r$, মাত্রা $(U_1) = r. + s$, মাত্রা $(U_2) = r + t$ (যেহেতু $U_1 \cap U_2 \subset \{U_1, U_2\}$)

অতএব আমাদের দেখতে হবে

$$\text{মাত্রা } (U_1 + U_2) = \text{মাত্রা } (U_1) + \text{মাত্রা } (U_2) - \text{মাত্রা } (U_1 \cap U_2)$$
$$= r + s + r + t - r = r + s + t$$

যদি $U_1 \cap U_2$ ভেকটর উপদেশের একটি ভিত্তি $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_r\}$ হয়, তবে একে বর্ধিত করে $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_r, \underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_s\}$ সেটটি U_1-র ভিত্তিরূপে পাওয়া যাবে। অনুরূপে $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_r, \underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2, \ldots, \underline{\gamma}_t\}$ কে U_2-র একটি ভিত্তি রূপে পাওয়া যাবে। এবার যদি প্রমাণ করা যায়

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t\}$$

হচ্ছে $U_1 + U_2$-র একটি ভিত্তি, তাহলেই প্রমাণিত হবে

$$\text{মাত্রা } (U_1 + U_2) = r + s + t$$

এবার লক্ষ করুন

$(U_1 + U_2)$-র যেকোন একটি পদ

$= U_1$-র একটি পদ $+ U_2$-র একটি পদ

$$= (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_r\alpha_r + d_1\beta_1 + \ldots + d_s\beta_s)$$
$$+ (c'_1\alpha_1 + c'_2\alpha_2 + c'_r\alpha_r + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_t\gamma_t)$$
$$= (c_1 + c'_1)\alpha_1 + \ldots + (c_r + c'_r)\alpha_r + d_1\beta_1 + \ldots + d_s\beta_s + \lambda_1\gamma_1 + \ldots + \lambda_t\gamma_t$$

$= r + s + t$-র রৈখিক সমবায়। ..... (i)

এবং $m_1\underline{\alpha}_1 + \ldots + m_r\underline{\alpha}_r + n_1\underline{\beta}_1 + \ldots + n_s\underline{\beta}_s + k_1\underline{\gamma}_1 + \ldots + k_r\underline{\gamma}_t = \theta$ ...... (ii)

$(m_i,\ n_i,\ k_i \in F)$

$$\Rightarrow \quad m_1\underline{\alpha}_1 + \ldots + m_r\underline{\alpha}_r + n_1\underline{\beta}_1 + \ldots + n_s\underline{\beta}_s = -\left(k_1\underline{\gamma}_1 + \ldots + k_t\underline{\gamma}_t\right)$$
$$= 0\underline{\alpha}_1 + \ldots + 0\underline{\alpha}_r - \left(k_1\underline{\gamma}_1 + \ldots + k_t\underline{\gamma}_t\right)$$

$\Rightarrow$ U_1-র একটি পদ $= U_2$-র একটি পদ

$$\Rightarrow \quad -\left(k_1\underline{\gamma}_1 + \ldots + k_t\underline{\gamma}_t\right) \in U_1 \cap U_2$$

$$\Rightarrow \quad -\left(k_1\underline{\gamma}_1 + \ldots + k_t\underline{\gamma}_t\right) = p_1\underline{\alpha}_1 + p_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + p_r\underline{\alpha}_r$$

[$\because$ $\{\underline{\alpha}_1, \ldots \underline{\alpha}_r\}$ হচ্ছে $U_1 \cap U_2$-র ভিত্তি]

$$\Rightarrow \quad p_1\underline{\alpha}_1 + \ldots + p_r\underline{\alpha}_r + k_1\underline{\gamma}_1 + \ldots + k_t\underline{\gamma}_t = \theta$$

$\Rightarrow$ $p_1 = \ldots = p_r = k_1 = \ldots = k_t = 0$ [$\because$ $\{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_2, \underline{\gamma}_1, \ldots, \underline{\gamma}_t\}$ হচ্ছে U_2-র একটি ভিত্তি]

$\Rightarrow \quad m_1\underline{\alpha}_1+\ldots+m_r\underline{\alpha}_r+n_1\underline{\beta}_1+\ldots+n_s\underline{\beta}_s=\theta \quad$ [(ii) হতে]

$\Rightarrow \quad m_1=\ldots=m_r=n_1=\ldots=n_s=0$ [$\because$ $\{\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2,\ldots,\underline{\alpha}_r,\underline{\beta}_1,\ldots,\underline{\beta}_s\}$ হচ্ছে U_1-র একটি ভিত্তি]

$\Rightarrow$ (ii) সিদ্ধ কেবলমাত্র সহগগুলির শূন্য মানে

$\Rightarrow$ S-সেসটি রৈখিকভাবে স্বাধীন। .... (iii)

অতএব (i) এবং (iii) থেকে S হচ্ছে $U_1 + U_2$-র একটি ভিত্তি। অর্থাৎ উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

উদাহরণ 5.19 : $S_1 = L\ \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ এবং $S_2 = L\ \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ দুটি R^3-র উপভেকটর দেশ। উপপাদ্য 5.19(b)-র সত্যতা যাচাই করুন।

সমাধান ঃ $S_1 \cap S_2 = L\{(0, 1, 0)\}$

S_1+S_2-র যেকোন একটি ভেকটর $= \left(\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,1,0)+\delta(0,0,1)\right)$

$$= \alpha(1,0,0)+(\beta+\gamma)(0,1,0)+\delta(0,0,1)$$

অতএব $S_1 + S_2 = L\ \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

এখন দেখুন মাত্রা $(S_1 + S_2) = 3$, মাত্রা $(S_1) = 2$

মাত্রা $(S_2) = 2$, মাত্রা $(S_1 \cap S_2) = 1$,

অর্থাৎ মাত্রা $(S_1 + S_2)$ = মাত্রা (S_1) + মাত্রা (S_2) − মাত্রা $(S_1 \cap S_2)$।

5.7 পরিপূরক ভেকটর উপদেশ ও তৎসংক্রান্ত উপপাদ্য (Complement of a sub-space and related theorem)

সংজ্ঞা 5.5 : পরিপূরক ভেকটর উপদেশ

$V(F)$ ভেকটরদেশের U_1 এবং U_2 ভেকটর উপদেশ দুটি একটি অপরটির পরিপূরক রূপে সংজ্ঞাত হবে যদি

(i) $U_1 \cap U_2 = \{\underline{\theta}\}$ এবং (ii) $U_1 + U_2 = V$ হয়।

উপপাদ্য 5.20 : পরিপূরকের অস্তিত্ব সংক্রান্ত

সসীম-মাত্রা যুক্ত $V(F)$ ভেকটরদেশের U_1 একটি ভেকটর উপদেশ হলে $V(F)$-র সাপেক্ষে U_1-র অবশ্যই একটি পরিপূরক ভেকটর উপদেশ U_2 থাকবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্ $A=\{\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2,\ldots,\underline{\alpha}_m\}$ হচ্ছে U_1-র একটি ভিত্তি। অতএব A রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং $U_1 = L(A)$। উপরন্তু U_1-র মাত্রা m।

যদি V-র মাত্রা m হয়, তাহলে $V = U_1 = L(A)$ এবং সেক্ষেত্রে $U_2 = \{\underline{\theta}\}$ যার মাত্রা শূন্য।

যদি V-র মাত্রা n এবং $n > m$ হয়। তাহলে A-কে সম্প্রসারিত করে এমন একটি রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট B পাওয়া যাবে যা হবে V-র ভিত্তি। ধরা যাক $B = \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m, \underline{\beta}_1, \ldots, \underline{\beta}_r | m + r = n\}$।

এবার $\{\underline{\beta}_1, \ldots, \underline{\beta}_r\}$ এই রৈখিকভাবে স্বাধীন সেটটিকে ভিত্তি করে যে উপভেকটরদেশ U_2 গড়ে উঠবে তা অবশ্যই V-র উপভেকটরদেশ এবং এই U_2 হচ্ছে U_1-র পরিপূরক, কারণ (i) $U_1 + U_2 = V$ (ii) $U_1 \cap U_2 = \{\underline{\theta}\}$

মন্তব্য 5.5 : U_1-র পরিপূরক কখনই এক এবং অনন্য (unique) নয়, কারণ A-কে বিভিন্ন প্রকারে সম্প্রসারিত করে B পাওয়া যাবে।

উপপাদ্য 5.21 : সসীম-মাত্রা যুক্ত $V(F)$ ভেকটরদেশের U_1 এবং U_2 দুটি পরিপূরক ভেকটর উপদেশ এবং একটি করে ভিত্তি যথাক্রমে

$A = \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m\}$ এবং $B = \{\underline{\beta}_1, \ldots, \underline{\beta}_r\}$

হলে $V(F)$-র একটি ভিত্তি হবে

$$C = \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_m, \underline{\beta}_1, \ldots, \underline{\beta}_r\}$$

প্রমাণ ঃ শর্তানুসারে $U_1 + U_2 = V$ এবং $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$। এবার লক্ষ করুন $L(C) = V$। উপরন্তু রৈখিকভাবে স্বাধীন, কারণ, $c_1\underline{\alpha}_1 + \ldots + c_m\underline{\alpha}_m + a_1\underline{\beta}_1 + \ldots + a_r\underline{\beta}_r = \theta$

$\Rightarrow \quad c_1\underline{\alpha}_1 + \ldots + c_m\underline{\alpha}_m = -(a_1\underline{\beta}_1 + \ldots + a_r\underline{\beta}_r)$

$\Rightarrow$ U_1-র একটি পদ $=$ U_2-র একটি পদ $= \theta$

$\Rightarrow \quad c_1\alpha_1 + \ldots + c_m\alpha_m = \theta = a_1\beta_1 + \ldots + a_r\beta_r$

$\Rightarrow \quad c_1 = \ldots = C_m = 0 = a_1 = \ldots = a_r$

অতএব C হচ্ছে V-র একটি ভিত্তি।

5.8 সারাংশ

এই এককে প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্যের পর (5.3) তে পাবেন রৈখিকভাবে স্বাধীন ও রৈখিক নির্ভরশীল ভেকটরসেটের সংজ্ঞা এবং তৎসংক্রান্ত বিভিন্ন উপপাদ্য। $A = \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_n\}$ ভেকটর সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন কেবলমাত্র তখনই যখন $c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n = \theta \Rightarrow c_1 = \ldots = c_n = 0$ (c_i গুলি স্কেলার), নচেৎ $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ জাতীয়মানে $c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n = \theta$ সিদ্ধ হলে A রৈখিকভাবে নির্ভরশীল। বিভিন্ন উদাহরণ সহযোগে উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করা হয়েছে। (5.4)-এ পাবেন ভেকটরদেশের ভিত্তির সংজ্ঞা ও বিভিন্ন উদাহরণ। $A = \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_n\}$ সেটটি $V(F)$ ভেকটরদেশের ভিত্তি হবে যখন (i) $A \subset V$ (ii) A রৈখিকভাবে

নির্ভরশীল এবং (iii) $V = L(A)$। (5.5)-এ ভিত্তির অস্তিত্ব ও ভিত্তি সংক্রান্ত উপপাদ্য দ্বারা এ ধারণায় পৌঁছাবেন যে একটি ভেকটরদেশের একাধিক ভিত্তি থাকতে পারে, কিন্তু একটি ভেকটরদেশের যেকোন দুটি ভিত্তির ভেকটর সংখ্যা নির্দিষ্ট। এরপর ভিত্তির এই নির্দিষ্ট ভেকটর সংখ্যাকে ভিত্তি করে একটি ভেকটরদেশের মাত্রার সংজ্ঞা, তৎসংক্রান্ত উপপাদ্য ও বিভিন্ন উদাহরণ পাবেন (5.6)-এ। (5.7)-এ পাবেন ভেকটরদেশ $V(F)$-র দুটি ভেকটর উপদেশ U_1 ও U_2-কে কখন পরিপূরক বলা হবে। U_1 ও U_2 পরিপূরক যখন $U_1 + U_2 = V$ এবং $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$। পরিপূরকের অস্তিত্বও পরীক্ষা করা হয়েছে উপপাদ্যের মাধ্যমে। বিভিন্ন উদাহরণ ও প্রশ্নাবলি দ্বারা বিষয়বস্তুর ধারণাকে সমৃদ্ধ করা হয়েছে।

5.9 প্রশ্নাবলি

1. (a) (i) $V(F)$ ভেকটরদেশে $\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন উপসেট হলে দেখান যে $\{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+\underline{\gamma}, \underline{\beta}+\underline{\gamma}, \underline{\gamma}\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন।

(ii) $V(F)$-এর $\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন হলে $\{\underline{\alpha}+c\underline{\beta}, \underline{\beta}+c\underline{\gamma}, \underline{\gamma}+c\underline{\alpha}\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন কিনা পরীক্ষা করুন।

সমাধান সংকেত : (i) উদাহরণ 5.4 দেখুন

$$c_1(\underline{\alpha}+\underline{\beta}+\underline{\gamma}) + c_2(\underline{\beta}+\underline{\gamma}) + c_3\underline{\gamma} = \theta, c_i \in F$$

$\Rightarrow \quad c_1\underline{\alpha} + (c_1+c_2)\underline{\beta} + (c_1+c_2+c_3)\underline{\gamma} = \theta$

$\Rightarrow \quad c_1 = 0,\ c_1 + c_2 = 0,\ c_1 + c_2 + c_3 = 0$ [$\because$ $\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন]

$\Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$

অতএব $\{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+\underline{\gamma}, \underline{\beta}+\underline{\gamma}, \underline{\gamma}\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন।

(ii) $c_1(\underline{\alpha}+c\underline{\beta}) + c_2(\underline{\beta}+c\underline{\gamma}) + c_3(\underline{\gamma}+c\underline{\alpha}) = \theta$

$\Rightarrow \quad c_1 + cc_3 = 0,\ cc_1 + c_2 = 0,\ cc_2 + c_3 = 0$

এই সমীকরণতন্ত্রের সহগনির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ c & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 1 + c^3$

অতএব $c = -1$ হলে সহগ-নির্ণায়ক $= 0$ এবং তার ফলে সমীকরণতন্ত্রটির $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ জাতীয় সমাধান থাকবে। সুতরাং $c = -1$ ক্ষেত্রে $\{\underline{\alpha}+c\underline{\beta}, \underline{\beta}+c\underline{\gamma}, \underline{\gamma}+c\underline{\alpha}\}$ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল। কিন্তু, $c \neq 1$ হলে সহগ নির্ণায়ক $\neq 0$ এবং তার ফলে $c_1 = 0 = c_2 = c_3$। অতএব এই ক্ষেত্রে সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

(b) দেখান যে R^4 ভেকটরদেশের $\{\underline{\alpha}_1 = (2, 6, -1, 8),\ \underline{\alpha}_2 = (0, 10, 4, 3),\ \underline{\alpha}_3 = (0, 0, -1, 4),\ \underline{\alpha}_4 = (0, 0, 0, 8)\}$ উপসেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

সমাধান : $c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + c_3\underline{\alpha}_3 + c_4\underline{\alpha}_4 = \theta\ c_i \in R$

$\Rightarrow\ 2c_1 = 0,\ 6c1 + 10c_2 = 0,\ -c_1 + 4c_2 - c_3 = 0,$

$8c_1 + 3c_2 \ \ +4c_3 + 8c_4 = 0$

এই সমীকরণতন্ত্রে সহগ-নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$

অতএব উক্ত সমীকরণতন্ত্রের $c_1 = 0 = c_2 = c_3 = c_4$ জাতীয় সমাধান ছাড়া আর কোনও সমাধান নেই। সুতরাং প্রদত্ত সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

(c) R^3 ভেকটরদেশের $A = \{\underline{\alpha}_1 = (x, y, y),\ \underline{\alpha}_2 = (y, x, y),\ \underline{\alpha}_3 = (y, y, x)\}$ উপসেটটি x এবং y-র কিরূপ মানে, রৈখিকভাবে নির্ভরশীল তা নির্ণয় করুন।

সমাধান সংকেত : $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \theta,\ c_i \in R$

$\Rightarrow\ c_1x + c_2y + c_3y = 0,\ c_1y + c_2x + c_3y = 0,\ c_1y + c_2y + c_3x = 0$

এই সমীকরণতন্ত্রের সহগ নির্ণায়ক $\Delta = \begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$

$= (x - y)^2\ (x + 2y)$

অতএব $x = y$ অথবা $x = -2y$ জাতীয় মানে A রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

$x \neq y$ এবং $x \neq -2y$ জাতীয় মানে A রৈখিকভাবে স্বাধীন।

(d) দেখান যে $P_2(R)$ ভেকটরদেশে $\{1 - x^2, 2 + x, 5 + 2x - x^2\}$ উপসেটটি রৈখিকভাবে নির্ভলশীল।

সমাধান সংকেত : $c_1(1 - x^2) + c_2\ (2 + x) + c_3\ (5 + 2x - x^2) = 0$

$\Rightarrow\ c_1 + 2c_2 + 5c_3 = 0,\ c_2 + 2c_3 = 0,\ c_1 + c_3 = 0$

সহগ নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

অতএব $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ জাতীয় সমাধান স্বীকৃত হওয়ায় প্রদত্ত সেটটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

5.2 (a) দেখান যে $L(\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}\}) = L(\{\underline{\alpha}, \underline{\alpha} + \underline{\beta}, \underline{\alpha} + \underline{\beta} + \underline{\gamma}\})$

(b) $S = \{x^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ হলে দেখান যে $P_n(R) = L(S)$

(c) দেখান যে $P_3(R) = L(\{1,\ x - 1,\ x^2 - 1,\ x^3 - 1\})$

সমাধান সংকেত : (a) $c_1\underline{\alpha}+c_2(\underline{\alpha}+\underline{\beta})+c_3(\underline{\alpha}+\underline{\beta}+\underline{\gamma})$

$$= (c_1+c_2+c_3)\underline{\alpha}+(c_2+c_3)\underline{\beta}+c_3\underline{\gamma}$$

$$= d_1\underline{\alpha}+d_2\underline{\beta}+d_3\underline{\gamma}$$

$$L(\{\underline{\alpha},\underline{\alpha}+\underline{\beta},\underline{\alpha}+\underline{\beta}+\underline{\gamma}\})\subset L(\{\underline{\alpha},\underline{\beta},\underline{\gamma}\})$$

বিপরীতক্রমে $L(\{\underline{\alpha},\underline{\beta},\underline{\gamma}\})\subset L(\{\underline{\alpha},\underline{\alpha}+\underline{\beta},\underline{\alpha}+\underline{\beta}+\underline{\gamma}\})$

অতএব $L(\{\underline{\alpha},\underline{\beta},\underline{\gamma}\})= L(\{\underline{\alpha},\underline{\alpha}+\underline{\beta},\underline{\alpha}+\underline{\beta}+\underline{\gamma}\})$

(b) এবং (c) সমাধানে (a)-র অনুরূপ পদ্ধতি অনুসরণ করুন।

5. 3(a) R^2-র উপসেট A = _(3, 0), (1, 1), (0, 1), (8, 5) রৈখিকভাবে স্বাধীন। A-র এমন একটি উপসেট বের করুন যা হবে R^2-র ভিত্তি সেট।

সমাধান সংকেত : R^2-র মাত্রা 2। অতএব R^2-র যেকোন ভিত্তিতে কেবলমাত্র 2টি রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেকটর থাকবে। [সংজ্ঞা 5.3-র মন্তব্য (2) অথবা উপপাদ্য 5.18 দেখুন]

A সেট থেকে $4c_2$ = 6টি উপসেট পাওয়া যাবে যাদের প্রতিক্ষেত্রে দুটি ভেকটর থাকবে। যে উপসেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন হবে সেটাই হবে ভিত্তি। লক্ষ করুন {(1, 1), (0, 1)} উপসেটটির ক্ষেত্রে c_1 (1, 1) + c_2 (0, 1) = $\theta \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$। অতএব এটি একটি R^2-র ভিত্তি। A-তে আরও ভিত্তি আছে কিনা দেখে নিন।

(b) দেখান যে $\{\underline{\alpha}_1=(3,0,2),\underline{\alpha}_2=(1,1,1),\underline{\alpha}_3=(2,5,1)\}$ হচ্ছে R^3-র একটি ভিত্তি।

সমাধান সংকেত : R^3-র মাত্রা 3। অতএব প্রদত্ত সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন হলেই এটি একটি ভিত্তি হবে।

$$c_1\underline{\alpha}_1+c_2\underline{\alpha}_2-c_3\underline{\alpha}_3=\underline{\theta}$$

$$\Rightarrow\ 3c_1 + c_2 + 2c_3 = 0,\ c_2 + 5c_3 = 0,\ 2c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

এই সমীকরণতন্ত্রের সহগ নির্ণায়ক = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

অতএব $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ একমাত্র সমাধান। যার ফলে প্রমাণিত হচ্ছে প্রদত্ত সেটটি R^3-র একটি ভিত্তি।

[উদাহরণ 5.13 লক্ষ করুন]

(c) R^3-র $\underline{\alpha}_1$ = (2, 3, 1), $\underline{\alpha}_2$ = (1, 0, 5) ভেকটর দুটি রৈখিকভাবে স্বাধীন সেট গঠন করে। অপর একটি ভেকটর $\underline{\alpha}_3$ বার করুন যাতে $\{\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2,\underline{\alpha}_3\}$ সেটটি R^3-র একটি ভিত্তি হয়।

নির্দেশ : উদাহরণ 5.15 অনুসরণ করুন।

(d) দেখান $S = \{ \underline{\alpha}_1 = (1, 0, 1, 1), \ \underline{\alpha}_2 = (-1, -1, 0, 0), \ \underline{\alpha}_3 = (0, 1, 1, 0)\}$ সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন। S-কে সম্প্রসারিত করে R^4-র একটি ভিত্তি বের করুন।

নির্দেশ : প্রথমে দেখান সেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন তারপর 5.15 অনুসরণ করুন। R^4-র আদর্শ ভিত্তি $= \left\{\underline{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \underline{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \underline{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \underline{e}_4 = (0, 0, 0, 1)\right\}$।

(e) দেখান $S = \left\{x_1, x_2, x_3 \,|\, x_1 + 2x_2 = x_3, 2x_1 + 3x_3 = x_2\right\}$ হচ্ছে R^3-র ভেকটর উপদেশ এই ভেকটর উপদেশ একটি ভিত্তি ও মাত্রা নির্ণয় করুন।

নির্দেশ : উদাহরণ 5.17 অনুসরণ করে দেখান S হচ্ছে R^3-র ভেকটর উপদেশ। S-র যেকোন ভেকটর

$$= (a_1, \ a_2, \ a_3)$$

$$= (-a_3, \ a_3, \ a_3) = a_3 \ (-1, \ 1, \ 1)$$

[কারণ $a_1 + 2a_2 - a_3 = 0, \ 2a_1 + 3a_3 = a_2$]

অতএব একটি ভিত্তি $\{(-1, \ 1, \ 1)\}$ এবং মাত্রা।

(f) দেখান $S = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \middle| \begin{matrix} 4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$ হচ্ছে R^4-র ভেকটর উপদেশ। এর একটি ভিত্তি ও মাত্রা বের করুন।

[**উত্তর** : $\{(0, \ -1, \ 1, \ 0), \ (1, \ -1, \ 0, \ 3)\}$ একটি ভিত্তি মাত্রা = 2]

(g) দেখান $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ হচ্ছে $M_{2\times2}$ (R)-র একটি ভিত্তি।

সমাধান : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ধরা হলো।

এখন $c_1A + c_2B + c_3C + c_4D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, অর্থাৎ $\{A, B, C, D\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন। .... (i)

উপরন্তু, S-র রৈখিক সমবায় $\in M_{2\times2}(R) \Rightarrow L(S) \subset M_{2\times2}(R)$ এবং বিপরীতক্রমে $M_{2\times2}(R)$-র যেকোন ভেকটর $= \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$= \lambda A + \mu B + \gamma C + \delta D$ লিখে আমরা পাই

$\delta = w, \ \gamma = z - w, \ \mu = y - z, \ \lambda = x - y$ অর্থাৎ

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in L(S) \Rightarrow M_{2\times2} \ (R) \subset L(S)$$

অতএব $M_{2\times 2} = L(S)$ ..... (ii)

সুতরাং (i) এবং (ii) হতে প্রমাণিত হলো S হচ্ছে $M_{2\times 2}(R)$-র একটি ভিত্তি।

(h) $S = 2\times 2$ বাস্তব প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের সেট। দেখান S হচ্ছে $M_{2\times 2}(R)$-র ভেকটর উপদেশ। এই ভেকটর উপদেশ একটি ভিত্তি ও মাত্রা নির্ণয় করুন।

সংকেত : $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ভিত্তি $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

মাত্রা = 3।

(i) $S = 2\times 2$ বাস্তব কর্ণ ম্যাট্রিক্সের সেট। দেখান S হচ্ছে $M_{2\times 2}(R)$-এর ভেকটর উপদেশ। এই ভেকটর উপদেশের একটি ভিত্তি ও মাত্রা বের করুন।

$\left[\text{উত্তর ঃ} \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, 2\right]$

5.10 সহায়ক গ্রন্থ

1. G. Hadley — Linear Algebra, Addision — Wesley, 8yh Printing (1979)
2. Neal H. Mecoy — Introduction to Modern Algebra, Boston : Allyn and Bacon, Inc. 1964 (8th Printing)
3. শ্রীপতিরঞ্জন চৌধুরী — রৈখিক বীজগণিত, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ, ১৯৯৩।

একক 6 ☐ প্রাথমিক অপারেশনত্রয় বা প্রক্রিয়াত্রয় এবং ম্যাট্রিক্স (Three elementary operations and Matrix)

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী দুটি এককের মধ্য দিয়ে আমরা ভেক্টরদেশ, ভেক্টর উপদেশ, ভেক্টরদেশের মাত্রা ইত্যাদি বিষয়ে আলোচনা করেছি। এই আলোচনাগুলির প্রয়োগ ঘটবে ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক নির্ণয়ে (একক 7) এবং রৈখিক সমীকরণতন্ত্রর সমাধান নির্ণয়ে (একক 8)। কিন্তু, তার আগে আমাদের পরিচিত হতে হবে তিনপ্রকার প্রাথমিক সারি অপারেশন (বা স্তম্ভ অপারেশন) বিষয়ে যা যেকোন ম্যাট্রিক্সের সারির (বা স্তম্ভের) সংশ্লিষ্ট।

তিনপ্রকার সারি (বা স্তম্ভ) অপারেশনগুলির কমপক্ষে একটি প্রক্রিয়া এক বা একাধিকবার প্রয়োগে ম্যাট্রিক্সের আকৃতি এক বিশেষ আকার ধারণ করে যার সাহায্যে ম্যাট্রিক্সের মর্যাদা বা র‍্যাঙ্ক নির্ণয় অতি সহজ হয়ে যায়। সেই কারণে এই অপারেশন-সংক্রান্ত বিভিন্ন দিকের আলোচনায় আমরা অগ্রসর হচ্ছি। বিপরীত ম্যাট্রিক্সের নির্ণয়ের এক সহজ পদ্ধতিও আমরা এখানে পাব।

6.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠে আপনি

- প্রাথমিক সারি (বা স্তম্ভ) অপারেশন কাকে বলে জানতে পারবেন।

- সারি (বা স্তম্ভ) সমতুল্য ম্যাট্রিক্স, সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স, ম্যাট্রিক্সের স্বভাবী আকৃতি কি তার সম্বন্ধে উদাহরণ সহযোগে স্পষ্ট ধারণা করতে পারবেন।
- প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সের ধারণা এবং তৎসংক্রান্ত বিভিন্ন উপপাদ্যের মধ্য দিয়ে দেখবেন কিভাবে একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স কতকগুলি প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সের গুণফলে প্রকাশ পাচ্ছে।
- অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের একটি বিকল্প পদ্ধতি পাবেন।

6.3 প্রাথমিক সারি (বা স্তম্ভ) অপারেশত্রয় (Three elementary row or column operations)

$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij}\in R$ ম্যাট্রিক্সের m-সংখ্যক সারি এবং n-সংখ্যক স্তম্ভ। প্রাথমিক সারি (বা স্তম্ভ) অপারেশন m -সংখ্যক সারি (n-সংখ্যক স্তম্ভের) মধ্যে সীমাবদ্ধ। আলোচনার সুবিধার্থে আমরা ধরেছি $a_{ij}\in R$ সাধারণভাবে $a^{ij}\in F$ (একটি যেকোন ক্ষেত্র)।

প্রাথমিক সারি (বা স্তম্ভ) অপারেশন তিন প্রকার।

সংজ্ঞা 6.1 (i) **প্রথম সারি (বা স্তম্ভ) অপারেশন ঃ** একটি ম্যাট্রিক্সের যেকোন দুটি সারি (বা স্তম্ভের) মধ্যে পরস্পর স্থান বিনিময় অপারেশন (interchange operation)। i-তম ও j-তম সারি দুটির (বা স্তম্ভ দুটির) মধ্যে পরস্পর স্থান-বিনিময় অপারেশনটি R_{ij} (বা C_{ij}) দ্বারা চিহ্নিত হবে।

(ii) **দ্বিতীয় সারি (বা স্তম্ভ) অপারেশন ঃ** একটি ম্যাট্রিক্সের যেকোনও সারির (বা স্তম্ভের) পদগুলিকে অশূন্য স্কেলার $\lambda(\neq 0)$ দ্বারা গুণন প্রক্রিয়া। i-তম সারিকে (বা i-th স্তম্ভকে) λ দ্বারা গুণন বোঝাতে ΛR_i (বা λC_i) চিহ্নটি ব্যবহৃত হবে। এখানে $\lambda\in R$।

(iii) **তৃতীয় সারি (বা স্তম্ভ) অপারেশন ঃ** একটি ম্যাট্রিক্সের i তম সারির (বা স্তম্ভের) পদগুলির সঙ্গে j তম সারির (বা স্তম্ভের) $(j \neq i)$ অনুরুপ পদগুলিকে অশূন্য স্কেলার $\lambda(\neq 0)$ দ্বারা গুণ করে যোগ করা এবং i-তম সারিকে (বা i-তম স্তম্ভকে) নতুন i-তম সারিতে (বা স্তম্ভে) পরিণত করা। এই অপারেশনটি সারিক্ষেত্রে $R_i + \lambda R_j$ এবং স্তম্ভক্ষেত্রে $C_i + \lambda C_j$ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে।

কেবলমাত্র সারির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য এই অপারেশন তিনটিকে **প্রাথমিক সারি অপারেশন** (Elementary row operations) এবং কেবলমাত্র স্তম্ভের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য এই তিনটি অপারেশনকে **প্রাথমিক স্তম্ভ অপারেশন** (Elementary column operations) বলা হবে। সারি-অপারেশন তিনটি যথাক্রমে R_{ij}, λR_i, $R_i + \lambda R_j$ এবং স্তম্ভ-অপারেশন তিনটি যথাক্রমে C_{ij}, λC_i, $C_{ij} + \lambda C_i$।

6.4 সারি সমতুল্য ম্যাট্রিক্স (Row equivalent Matrix), স্তম্ভ-সমতুল্য ম্যাট্রিক্স (Column equivalent Matrix) এবং সমতুল্য ম্যাট্রিক্স (Equivalent matrix),

উপরে বর্ণিত প্রাথমিক সারি-অপারেশন তিনটির কমপক্ষে একটি অপারেশন এক বা একাধিকবার প্রয়োগে $A = (a_{ij})_{m\times n}$,ম্যাট্রিক্সের একটা বূপান্তর ঘটবে। ধরা যাক বূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি B। এটি সহজেই অনুমেয় যে

প্রতিটি সারি অপারেশনের বিপরীত অপারেশন অবশ্যই প্রাথমিক সারি অপারেশন। উদাহরণস্বরূপ R_{ij}-এর বিপরীত অপারেশন R_{ij}। অতএব রূপান্তরিত B-র উপর আনুসাঙ্গিক বিপরীত প্রাথমিক সারি-অপারেশনগুলি প্রয়োগে B পুনরায় A-তে পরিণত হবে। এই কারণে **B-কে বলা হয় A-র সারি-সমতুল্য বা বিপরীতক্রমে** A **ম্যাট্রিক্সটি B-র সারি সমতুল্য**। B ম্যাট্রিক্স A-র সারি-সমতুল্য বোঝাতে A-B চিহ্নটি ব্যবহৃত হবে।

অনুরূপে A-র উপর C_{ij}, λC_i, $C_i + \lambda C_j$ অপারেশন তিনটির কমপক্ষে একটি এক বা একাধিকবার প্রয়োগে A ম্যাট্রিক্স B-তে রূপান্তরতি হলে B-কে বলা হবে A-র স্তম্ভ সমতুল্য।

যখন A-র উপর উভয়জাতীয় প্রাথমিক অপারেশন প্রয়োগে B উৎপন্ন হবে তখন B-কে বলা হবে A-র সমতুল্য-ম্যাট্রিক্স।

উদাহরণ 6.1 ঃ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের উপর যথাক্রমে R_{23}, $2R_2$ এবং $R_2 - 4R_1$ সারি-অপারেশন প্রয়োগে সারি-সমতুল্য ম্যাট্রিক্স B গঠন করুন। পুনরায় বিপরীতক্রমে দেখান B-র উপর আনুসাঙ্গিক বিপরীত সারি অপারেশন $R_2 + 4R_1$, $\frac{1}{2}R_2, R_{32}$ যথাক্রমে প্রয়োগে A পাওয়া যাচ্ছে।

সমাধান ঃ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -16 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = B$

আবার $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -16 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{32}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

উদাহরণ 6.2 ঃ $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ কে প্রাথমিক সারি অপারেশন এবং প্রাথমিক স্তম্ভ অপারেশন দ্বারা $B = \begin{pmatrix} I_{2\times2} & O_{2\times3} \\ O_{1\times2} & O_{1\times3} \end{pmatrix}$

ম্যাট্রিক্সে পরিণত করা যাবে, যেখানে $I_{2\times2}$ হচ্ছে 2x2 -ক্রমবিশিষ্ট একসম-ম্যাট্রিক্স (Identity or Unit matrix) এবং $O_{2\times3}$, $O_{1\times2}$, $O_{1\times3}$ হচ্ছে যথাক্রমে 2x3, 1x2, 1x3 ক্রমবিশিষ্ট শূন্য ম্যাট্রিক্স (Null Matrix)। এখানে $I_{2\times2}$, $O_{2\times3}$, $O_{1\times2}$, $O_{1\times3}$ প্রত্যেকে B-র **উপ-ম্যাট্রিক্স** (Sub-matrix)।

সমাধান ঃ

$$A=\begin{pmatrix}0&3&1&2&4\\1&2&0&5&3\\2&4&0&10&6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-2R_2}\begin{pmatrix}0&3&1&2&4\\1&2&0&5&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_{12}}\begin{pmatrix}1&2&0&5&3\\0&3&1&2&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2}\begin{pmatrix}1&2&0&5&3\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{C_4-5C_1\\C_5-3C_1}]{C_2-2C_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{C_4-\frac{2}{3}C_2\\C_5-\frac{4}{3}C_2}]{C_3-\frac{1}{3}C_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}I_{2\times2}&O_{2\times3}\\\hline O_{1\times2}&O_{1\times2}\end{array}\right)=B$$

মন্তব্য 6.1 ঃ (i) A-র সমতুল্য B-র এই বিশেষ স্বভাবী (Canonical) আকৃতিকে A-র স্বভাবী (Normal form) বা প্রমাণ আকৃতি বা (Standard form) বলা হয়। এই উদাহরণ দ্বারা এটাই দেখানো হলো যে যেকোন ম্যাট্রিক্সের উপর প্রয়োজনীয় সারি ও স্তম্ভ অপারেশন দ্বারা ম্যাট্রিক্সটিকে তার স্বভাবী আকৃতিতে পরিণত করা যায়। স্বভাবী আকৃতি গঠনে সাধারণভাবে উভয় প্রকার প্রাথমিক অপারেশনের প্রয়োজন হয়। (সংজ্ঞা 6.2 দেখুন)

(ii) **অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে কেবলমাত্র প্রাথমিক সারি অপারেশন দ্বারা স্বভাবীআকৃতিতে রূপান্তরিত করা যাবে।** পরবর্তী উদাহরণটি দেখুন।

উদাহরণ 6.3 ঃ দেখান $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&4&1\\1&4&3\end{pmatrix}$ এই অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সটিকে কেবলমাত্র প্রাথমিক সারি অপারেশন দ্বারা স্বভাবীআকৃতিতে পরিণত করা যাবে।

সমাধান ঃ $|A|=\begin{vmatrix}1&2&2\\1&4&1\\1&4&3\end{vmatrix}=4\neq0$ অতএব A অবিশিষ্ট।

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&4&1\\1&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&-1\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-2R_2]{R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2+\frac{1}{2}R_3]{R_1-3R_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = B$$ B হচ্ছে A-এর স্বভাবী আকৃতি

6.5 সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স এবং ম্যাট্রিক্সের স্বভাবীআকৃতি (Row equavalent Echelon Matrix and normal matrix)

সংজ্ঞা 6.2 ঃ সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স (row-equivalent echelon matrix)

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ একটি $m\times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স। তিনটি প্রাথমিক সারি-অপারেশনের কমপক্ষে একটি অপারেশন এক বা একাধিকবার প্রয়োগে A ম্যাট্রিক্সটিকে এক বিশেষ আকৃতিবিশিষ্ট সারি-সমতুল্য ম্যাট্রিক্সে পরিণত করা যাবে যাকে বলা হবে A-র সারি সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স। এই বিশেষ রূপটির ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যগুলি থাকবেঃ

(i) প্রথম r-সংখ্যক সারি $(0 \le r \le m)$ অশূন্য সারি এবং বাকি $(m - r)$ সংখ্যক সারি শূন্য সারি।

[R_{ij} অপারেশন দ্বারা এটি সম্ভব হবে]

(ii) প্রতিটি অশূন্য সারির প্রথম অশূন্যপদটি অবশ্যই 1 হবে।

[λR_i অপারেশন প্রয়োগ করতে হবে]

(iii) যেকোন অশূন্য সারির প্রথম অশূন্যপদ 1 যে স্তম্ভে আছে সেই স্তম্ভে অপর পদগুলি শূন্যমান বিশিষ্ট হবে। [$R_i + \lambda R_j$ অপারেশন প্রযোজ্য]

(iv) প্রথম r-সংখ্যক অশূন্য সারির মধ্যে যেকোন অশূন্য সারির পদ 1 যে স্তম্ভে থাকবে ঠিক পরবর্তী অশূন্যসারির অশূন্য পদ 1 সেই স্তম্ভে থাকবে না, পরবর্তী কোনও একটি স্তম্ভে থাকবে এবং আগের সকল স্তম্ভে উক্ত পরবর্তী সারির পদগুলি শূন্যমান যুক্ত হবে। [অর্থাৎ 1ম অশূন্য সারির প্রথম অশূন্য পদ 1 যদি C_3-তে থাকে তবে 2য় অশূন্য সারির অশূন্য পদ 1 থাকবে C_3-র পরবর্তী যেকোন স্তম্ভে, ধরা যাক C_5-এ থাকবে, এবং 2য় অশূন্য সারির C_1, C_2, C_3, C_4-র পদগুলি সব শূন্যমান হবে]

[R_{ij} অপারেশন কার্যকরী হবে]

উদাহরণ 6.4 ঃ সারি-সমতুল্য ইশিলন-ম্যাট্রিক্স বোঝাতে একটি উদাহরণ উল্লেখ করা হলো ঃ

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & a_{14} & 0 & a_{16} & 0 & a_{18}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{26} & 0 & a_{28}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{38}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

উদাহরণ 6.5 ঃ $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে সারি সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সে পরিণত করুন।

সমাধান ঃ $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 10 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 10 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \xrightarrow{R_2\times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

B হচ্ছে A-র সারি সমতুল্য ইশিলন আকৃতি।

সংজ্ঞা 6.3 ঃ ম্যাটিক্সের স্বভাবীআকৃতি (Normal or Canonical form)

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ ম্যাট্রিক্সকে প্রয়োজনীয় প্রাথমিক সারি ও স্তম্ভ অপারেশন দ্বারা

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

আকারে পরিণত করা যায়, যেখানে $I_{r\times r}$ হচ্ছে একসম (identity) উপম্যাট্রিক্স এবং $O_{r\times(n-r)}$ জাতীয় ম্যাট্রিক্স তিনটি হচ্ছে শূন্যসম (Null) উপ-ম্যাট্রিক্সমত্রয়। এই বিশেষ আকৃতিকে A-র স্বভাবীআকার বলে।

মন্তব্য 6.2 ঃ (1) যে কোন ম্যাট্রিক্সকে প্রাথমিক সারি অপারেশন দ্বারা সারি-সমতুল্য ইশিলন আকৃতিতে নিয়ে গিয়ে তারপর প্রাথমিক স্তম্ভ অপারেশন প্রয়োগ করলে স্বভাবীআকৃতি পাওয়া যাবে।

(2) অবশিষ্ট ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে শুধুমাত্র সারি-অপারেশনেই স্বভাবী আকৃতি পাওয়া যাবে (উদা 6.3 দেখুন)।

উদাহরণ 6.6 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -10 & 16 & 0 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে প্রথমে সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সে পরিণত করুন, তারপর A-র স্বভাবীআকৃতি বের করুন।

সমাধান ঃ $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -10 & 16 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -10 & 16 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-5R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{25}{2} & \frac{39}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{25}{2} & \frac{39}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{pmatrix}1 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{12} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{25}{2} & \frac{39}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\times\left(-\frac{2}{25}\right)}\begin{pmatrix}1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{39}{25} & \frac{1}{25}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-\frac{5}{2}R_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{39}{25} & \frac{1}{25}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

B হচ্ছে A-র সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স।

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{39}{25} & \frac{1}{25}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_4-\frac{2}{5}C_1]{C_3-\frac{2}{5}C_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{39}{25} & \frac{1}{25}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_4-\frac{1}{25}C_2]{C_3+\frac{39}{25}C_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=C$$

C হচ্ছে A-র স্বভাবীআকৃতি

অনুশীলনী 6.5

(1) নিম্নের ম্যাট্রিক্স Aকে ইশিলন আকারে রূপান্তরিত করুন।

(a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 3 & 6 & 1 & -2 & 5\\ 4 & 8 & 2 & -6 & 1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 3\\ 0 & 12 & -6 & 3\\ 2 & -6 & 3 & 3\\ 4 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$

উত্তর। (a) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -7 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 28 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 3\\ 0 & -12 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$

6.6 প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সসমূহ, তাদের বিশেষত্ব এবং সংশ্লিষ্ট উপপাদ্যসমূহ (Elementary matrices, their characteristics and related theorems)

সংজ্ঞা 6.3 ঃ প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স

$I_{n\times n}$ = কর্ণ (1, 1, ...1) একটি $n\times n$ ক্রমের একসম ম্যাট্রিক্স (identity matrix)। এই ম্যাট্রিক্সের উপর যেকোন একটি প্রাথমিক সারি অপারেশন প্রযুক্ত হলে যে ম্যাট্রিক্সটি উৎপন্ন হবে তা প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স রূপে সংজ্ঞাত।

কেবলমাত্র তিনপ্রকার প্রাথমিক সারি অপারেশন থাকায় আমরা তিনপ্রকার প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স পাব।

(a) $I_{n\times n}$ -র উপর R_{ij} প্রাথমিক অপারেশন প্রয়োগে যে প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স উৎপন্ন হবে তা E_{ij} দ্বারা চিহ্নিত।

(b) $I_{n\times n}$ -র উপর $\lambda R_j(\lambda \neq 0)$ প্রাথমিক সারি অপারেশন প্রয়োগে উৎপন্ন প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সটি $E_i(\lambda)$ দ্বারা চিহ্নিত।

(c) $I_{n\times n}$ -র উপর $R_i + \lambda Rj(\lambda \neq 0)$ অপারেশন প্রয়োগে উৎপন্ন প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সটি $E_{ij}(\lambda)$ দ্বারা চিহ্নিত।

উদাহরণস্বরূপ $I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ এই 3x3 ক্রমের একসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, E_{13}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

লক্ষ করুন $I_{3\times 3} \xrightarrow{R_{12}} E_{12}$, এবার যদি আমরা $I_{3\times 3}$-র উপর C_{12} প্রয়োগ করি তাহলেও E_{12} উৎপন্ন হচ্ছে। অনুরূপে $I_{3\times 3} \to E_3\ (\lambda)$ হচ্ছে λR_3 বা λC_3 দ্বারা, $I_{3\times 3} \to E_{31}\ (\lambda)$ হচ্ছে $R_3 + \lambda R_1$ বা $C_1 + \lambda C_3$ দ্বারা।

অতএব সাধারণভাবে $I_{n\times n}$-র ক্ষেত্রে আমাদের সিদ্ধান্ত এই যে $I_{n\times n}$ থেকে প্রাথমিক সারি-অপারেশন দ্বারা তিনপ্রকার প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সগুলি $I_{n\times n}$-র উপর উপযুক্ত প্রাথমিক স্তম্ভ-অপারেশন দ্বারাও উৎপন্ন হতে পারে।

প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সের বিশেষত্ব ঃ দুটি উপপাদ্য

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = B$$

এবার দেখুন

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = B$$

অতএব দেখা গেল A-কে বাম-দিক হতে E_{12} ম্যাট্রিক্স দ্বারা গুণ করলে বা A-র উপর R_{12} প্রাথমিক সারি-অপারেশন প্রয়োগে একই ম্যাট্রিক্স B উৎপন্ন হচ্ছে। সাধারণভাবে $E_{ij}A = B$ এবং $A \xrightarrow{R_{ij}} B$। অনুরূপে দেখা যাবে

$$E_i(\lambda)A = B \text{ এবং } A \xrightarrow{\lambda R_i} B$$

$$\text{এবং } E_{ij}(\lambda)A = B \text{ এবং } A \xrightarrow{R_i + \lambda R_j} B$$

আবার A-র উপর C_{ij}, λC_i + λC_j প্রাথমিক স্তম্ভ অপারেশন প্রয়োগে উৎপন্ন ম্যাট্রিক্সগুলি যথাক্রমে AE_{ij}, $AE_{ji}(\lambda)$, $A(E_{ji}(\lambda))$। **অতএব নিম্নলিখিত উপপাদ্যদুটির সত্যতা প্রমাণিত হচ্ছে ঃ**

উপপাদ্য 6.1 ঃ $A = (a_{ij})_{m\times n}$ একটি $m \times n$ ক্রম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স হলে

(i) $A \xrightarrow{R_{ij}} B = E_{ij}A$ যেখানে E_{ij} হচ্ছে $I_{m\times m}$-এ R_{ij} প্রয়োগে উৎপন্ন প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স।

(ii) $A \xrightarrow{\lambda R_i} B = E_i(\lambda)A$, যেখানে $E_i(\lambda)$ হচ্ছে $I_{m\times m}$-এ λR_i প্রয়োগে উৎপন্ন প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স।

(iii) $A \xrightarrow{R_i + \lambda R_j} B = E_{ij}(\lambda)A$, যেখানে $E_{ij}(\lambda)$ হচ্ছে $I_{m\times m}$-এ $R_i + \lambda R_j$ প্রয়োগে উৎপন্ন প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স।

উপপাদ্য 6.2 ঃ $A = (a_{ij})$ একটি $m \times n$ ক্রমবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স হলে

(i) $A \xrightarrow{C_{ij}} B = AE_{ij}$ যেখানে E_{ij} হচ্ছে $I_{n\times n}$-এ C_{ij} প্রয়োগে উৎপন্ন প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স।

(ii) $A \xrightarrow{\lambda C_i} B = AE_i(\lambda)$, যেখানে $E_i(\lambda)$ হচ্ছে $I_{n\times n}$-এ λC_i প্রয়োগে উৎপন্ন প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স।

(iii) $A \xrightarrow{C_j + \lambda C_i} B = AE_{ij}(\lambda)$, যেখানে $E_{ij}(\lambda)$ হচ্ছে $I_{n\times n}$-এ $C_j + \lambda C_i$ প্রয়োগে উৎপন্ন প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স।

উপপাদ্য 6.3 ঃ যেকোনও প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব স্বীকৃত হবে এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্সটিও একই প্রকারের প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স হবে।

প্রমাণ ঃ একসম ম্যাট্রিক্স $I_{n\times n}$ থেকে তিনপ্রকার প্রাথমিক সারি-অপারেশন দ্বারা তিন প্রকার প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স E_{ij}, $E_i(\lambda)$, $E_{ij}(\lambda)$ উৎপন্ন হয়। এদের মধ্য হতে E_{ij}-কে নেওয়া হলো।

ধরা যাক্ $A = (a_{ij})_{n\times p}$ একটি $n\times p$ ক্রমবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স। অতএব $E_{ij}A = R_{ij}(A)$

অতএব, $E_{ij}A = R_{ij}(A)$ [উপপাদ্য 6.1(i) অনুসারে]

বা, $E_{ij}(E_{ij}A) = R_{ij}(R_{ij}(A)) = A$

বা, $(E_{ij}\ E_{ij})A = A$

বা, $E_{ij}E_{ij} = I_{n\times n}$ .... (i)

বা, $(E_{ij})^1 = E_{ij}$

অনুরূপে দেখানো যাবে।

$$\{E_1(\lambda)\}^{-1} = E_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

এবং $\{E_{ij}(\lambda)\}^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

মন্তব্য 6.3 ঃ (i) হতে $\left|E_{ij}\ E_{ij}\right| = 1$

$$\Rightarrow \left|E_{ij}\right|^2 = 1 \Rightarrow \left|E_{ij}\right| \neq 0$$

অতএব E_{ij} অবশিষ্ট (non-singular) ম্যাট্রিক্স। অনুরূপে $E_i(\lambda)$ $E_{ij}(\lambda)$ অবশিষ্ট।

উপপাদ্য 6.4 ঃ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ম্যাট্রিক্সটি অবিশিষ্ট হবে তার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত (Necessary and sufficient condition) হলো A-কে সসীম সংখ্যক ম্যাট্রিক্সের গুণফলরূপে প্রকাশ করা যাবে।

প্রমাণ ঃ প্রয়োজনীয় শর্ত

ধরা যাক্ A অবিশিষ্ট। অতএব $|A| \neq 0$। এখন A-র উপর প্রয়োজনীয় সসীম সংখ্যক প্রাথমিক সারি অপারেশন প্রয়োগ করে সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সে পরিণত করলে, শেষে কোনও শূন্য-সারি থাকবে না (কারণ তাহলে সংশ্লিষ্ট $|A|$ শূন্য মান হবে) এবং তার ফলে A পরিণত হবে কর্ণ (1, 1, ..., 1) ম্যাট্রিক্সে (যা হচ্ছে A-এর স্বভাবী আকৃতি [সংজ্ঞা 6.3 মন্তব্য 6.2 (2) এবং উদাহরণ 6.3 দেখুন।]

এখন, উপপাদ্য 6.1 অনুসারে, যে সকল প্রাথমিক অপারেশন দ্বারা $A \rightarrow I_{n\times n}$ হচ্ছে সেগুলির আনুসাঙ্গিক প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সগুলি E_1, E_2, ..., Em হলে আমরা লিখতে পারি

$$I_{n\times n} = E_1E_2 \ldots EmA \text{।}$$

(ধরা হয়েছে m-সংখ্যক প্রাথমিক অপারেশন প্রয়োগ হয়েছে)

অতএব $A = (E_m)^{-1} \ldots (E_1)^{-1}I_{n\times n}$

$= (E_m)^{-1} \ldots (E_1)^{-1}$

এখন যেহেতু যেকোন প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সও একই প্রকার প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স (উপপাদ্য 6.3), অতএব প্রমাণিত হলো A কতকগুলি প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সের গুণফল।

যথেষ্ট শর্ত ঃ

[illegible] $A = E_1E_2 \ldots Em$

অতএব $|A| = |E_1 E_2 \ldots E_m|$

$$= |E_1||E_2| \ldots |E_m|$$

$\neq 0$ [উপপাদ্য 6.3 মন্তব্য 6.3(i) দেখুন]।

প্রমাণিত হলো A অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স।

উপপাদ্য 6.5 ঃ A একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স। অপর একটি $m \times n$ ক্রমবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স A-র সমতুল্য হবে তার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত $B = PAQ$, যেখানে P ও Q যথাক্রমে $m \times m$ এবং $n \times n$ ক্রমবিশিষ্ট অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স।

প্রমাণ ঃ প্রয়োজনীয় শর্ত ঃ

ধরা যাক B ম্যাট্রিক্সটি A-এর সমতুল্য। অর্থাৎ প্রয়োজনীয় প্রাথমিক সারি ও প্রাথমিক স্তম্ভ অপারেশন A-র উপর প্রয়োগ করে B উৎপন্ন হচ্ছে। আমরা জানি (উপপাদ্য (i), 6.2 অনুসারে) যে কোনও সারি-অপারেশন (স্তম্ভ অপারেশন) A-র প্রযুক্ত হওয়া মানে A-কে বাম-দিক (ডান-দিক) থেকে প্রযুক্ত সারি-অপারেশনের (স্তম্ভ অপারেশনের) আনুসাঙ্গিক প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স দ্বারা গুণ। অতএব আমরা কতকগুলি প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স।

$E_1 \ldots E_r, \ldots, E_1' \ldots E_s'$ পাব যার ফলে

$$B = E_1 \ldots E_r A E_1' \ldots E_s'$$

বা, $B = P\ A\ Q$

যেখানে $P = E_1 \ldots Er$ এবং $Q = E_1' \ldots E_s'$

উপপাদ্য 6.4 অনুসারে P এবং Q উভয়ে অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স। অতএব উপপাদ্যের শর্তটি যে প্রয়োজনীয় শর্ত তা প্রমাণিত হলো।

যথেষ্ট শর্ত ঃ $B = P\ A\ Q$, $|P| \neq 0, |Q| \neq 0$

হলে অবশ্যই $P = E_1E_2 \ldots Er$, $Q = E_1'E_2' \ldots E_s'$ আকারে লেখা যাবে (উপপাদ্য 6.4 অনুসারে) তার ফলে $B = E_1E_2 \ldots Er\ AE_1'E_2' \ldots E_s'$। অতএব A থেকে B উৎপন্ন হচ্ছে A-কে বাম ও ডান দিক থেকে প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সের গুণ দ্বারা। অতএব কতকগুলি প্রাথমিক সারি ও স্তম্ভ অপারেশন প্রয়োগে A থেকে B উৎপন্ন হবে। অতএব সমতুল্যতার সংজ্ঞানুসারে (6.4) B হচ্ছে A-র সমতুল্য।

উদাহরণ 6.7 ঃ দেখান $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স। A-কে কয়েকটি প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সের গুণফলরূপে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

অতএব A অবশিষ্ট।

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 - 3C_1]{C_2 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3\times 3}$$

উপরে প্রযুক্ত প্রাথমিক সারি ও স্তম্ভ অপারেশনগুলির আনুসাঙ্গিক প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সগুলি যথাক্রমে $E_{31}(-1)$, $E_3(-1)$, E_{23}, $E_{32}(-2)$ এবং $E_{12}(-3)$, $E_{13}(-3)$

অতএব $I_{3\times 3} = E_{32}(-2)\ E_{23}E_3\ (-1)E_{31}(-1)AE_{12}(-3)E_{13}(-3)$

বা, $A = (E_{31}(-1))^{-1}((E_3(-1))^{-1}(E_{23})^{-1}(E_{32}(-2))^{-1}(E_{13}(-3))^{-1}(E_{12}(-3))^{-1}$

$= E_{31}(1)E_3(1)E_{23}E_{32}(2)E_{13}(3)E_{12}(3)$

A-র এই প্রকাশকে আমরা এবার পরীক্ষা করব যা যাচাই করব ঃ

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_{31}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ E_{23}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{32}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ E_{13}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_{12}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

এখন দেখুন

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

অনুশীলনী 6.6.

1\. দেখান $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স।

A-কে কতকগুলি প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সের গুণফলরূপে প্রকাশ করুন।

উত্তর। A-এর নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -1$, অতএব A অবিশিষ্ট।

$$A = IE_{23}\left(\frac{6}{5}\right) E_{13}\left(\frac{27}{5}\right) E_3\left(-\frac{71}{5}\right) E_{32}(6)\ E_{12}\left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$E_1(-1)E_{31}(-4)\ \ E_{21}(-2).$$

6.7 অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের বিকল্প এক পদ্ধতি (Alternative method for finding the inverse of a non-singular matrix)

একটি $n \times n$ ক্রমবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স A যার $|A| \neq 0$। A-র উপর প্রয়োজনীয় প্রাথমিক সারি অপারেশন প্রয়োগে $I_{n \times n}$ উৎপন্ন হবে (সংজ্ঞা 6.3 মন্তব্য (2) এবং উদাহরণ 6.3 দেখুন)। প্রয়োজনীয় প্রাথমিক সারি অপারেশনগুলির সাপেক্ষে আমরা $I_{n \times n}$ হতে কতকগুলি প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স যথা E_1, E_2, ..., E_n পাওয়া যাবে এবং উপপাদ্য 6.1 অনুসারে দেখা যায়

$$I_{n \times n} = E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1 \ A \ \ldots\ldots\ (i)$$

এখন উভয় দিকে A^{-1} দ্বারা (ডানদিক হতে) গুণ করে পাওয়া যাচ্ছে

$$A^{-1} = E_m E_{m-1} \ldots\ldots E_2 E_1 (AA^{-1})$$

$$= E_m E_{m-1} \ldots\ldots E_2 E_1 \ I_{n \times n} \ \ldots\ldots\ (ii)$$

অতএব (i) এবং (ii) থেকে বোঝা যাচ্ছে E_1, E_2, ..., E_m প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স দ্বারা A-কে বাম দিক

থেকে গুণ করে $I_{n\times n}$ উৎপন্ন হচ্ছে এবং E_1, E_2, ..., E_m দ্বারা $I_{n\times n}$-কে বাম দিক থেকে গুণ করে A^{-1} উৎপন্ন হচ্ছে। আবার এটাও আমরা জানি যে এক-একটি প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স এক-একটি সারি-অপারেশনের অনুসঙ্গী। ধরা যাক্ E_1, E_2, ..., E_m প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সগুলি যথাক্রমে $I_{n\times n}$-র উপর R_1, R_2, ..., R_m প্রাথমিক সারি অপারেশন দ্বারা উৎপন্ন। অতএব পর্যায়ক্রমে A-র উপর R_1, R_2, ..., R_m প্রয়োগে A থেকে $I_{n\times n}$ এবং $I_{n\times n}$-র উপর পর্যায়ক্রমে R_1, R_2, ..., R_m প্রয়োগে A^{-1} উৎপন্ন হবে। সুতরাং $n \times 2n$ ক্রমবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স $(A \mid I_{n\times n})$, অর্থাৎ,

$$\left(A\middle|I_{n\times n}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

ম্যাট্রিক্সের উপর উক্ত প্রাথমিক সারি-অপারেশনগুলি পর্যায়ক্রমে প্রয়োগে উৎপন্ন হবে $(I_{n\times n}|A^{-1})$ ম্যাট্রিক্স।

উদাহরণ 6.8 ঃ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে A^{-1} নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $$\left(A\middle|I_{3\times 3}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_2]{R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \times \frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \equiv \left(I_{3\times 3}\middle|A^{-1}\right)$$

অতএব, $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

সত্যতা যাচাই ঃ $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

অনুরূপে $A^{-1}A = I_{3\times3}$

অনুশীলনী 6.7

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির A^{-1} নির্ণয় করুন।

উত্তর। $\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix} \right]$.

6.8 সারাংশ

এই এককের মূল বক্তব্য তিনটি প্রাথমিক সারি-অপারেশন ও তিনটি প্রাথমিক স্তম্ভ-অপারেশন। এই অপারেশনগুলি যেকোন ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যেতে পারে। সারি-অপারেশন তিনটি যথাক্রমে R_{ij}, λR_i এবং $R_i + \lambda R_j$ এবং স্তম্ভ-অপারেশন তিনটি যথাক্রমে C_{ij}, λC_i, $C_i + \lambda C_j$। কেবলমাত্র সারি-অপারেশন দ্বারা ম্যাট্রিক্স $A \to B$ হলে B-কে A-র **সারি সমতুল্য** বলে। অনুরূপে **স্তম্ভ-সমতুল্য** ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়। উভয় অপারেশন প্রয়োগে A-র সমতুল্য ম্যাট্রিক্স উৎপন্ন হয়। এসব বিষয়ে বিস্তারিত আলোচনা (উদাহরণ সহযোগে) পাবেন 6.3 এবং 6.4-এ। তারপর 6.5-এ পাবেন সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স ও ম্যাট্রিক্সের স্বভাবী আকৃতি। সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স গঠনে অভ্যস্ত হলে সহজেই ম্যাট্রিক্সের মাত্রা (Rank) নির্ণয় করা যাবে, ম্যাট্রিক্স-র‍্যাঙ্ক পরবর্তী এককের বিষয়বস্তু। 6.6-এ পাবেন $I_{n\times n}$-এর উপর প্রাথমিক সারি (বা স্তম্ভ) অপারেশন প্রয়োগে উৎপন্ন প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স সমূহ। প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সের বিশেষত্ব এবং অবশিষ্ট ম্যাট্রিক্সের বিশেষত কয়েকটি উপপাদ্যের মাধ্যমে আলোচিত হয়েছে 6.6-এ। 6.7-এ পাবেন অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স গঠনে এক সহজতর পদ্ধতি। বেশ কিছু উদাহরণ দ্বারা ধারণাকে স্পষ্টতর করা হয়েছে।

6.9 প্রশ্নাবলী

1. নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সগুলি সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সে পরিণত করুন এবং পরে ম্যাট্রিক্সটির স্বভাবী আকৃতি প্রতিরূপ নির্ণয় করুন ঃ

$$(a)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\ (b)\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 1 & 6\\ 5 & -1 & 10 & 34\end{pmatrix}\ (c)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\ (d)\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

সমাধান-নির্দেশ ঃ উদাহরণ 6.6 অনুসরণ করুন

2. নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সগুলি দেখান অবিশিষ্ট। প্রতিটি ম্যাট্রিক্সকে কতকগুলি প্রাথমিক ম্যাট্রিক্সের গুণফলরূপে প্রকাশ করুন এবং সত্যতা যাচাই করুন। উপরন্তু 6.7-এ বর্ণিত পদ্ধতি অনুসরণক্রমে প্রতিটি ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন এবং সত্যতা যাচাই করুন ঃ

$$(a)\begin{pmatrix}-1 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\ (b)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ (c)\begin{pmatrix}6 & 7 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 8 & 1\\ 0 & 0 & 12 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\ (d)\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 10 & 01 & 12\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

সমাধান-নির্দেশ ঃ উদাহরণ 6.7 এবং উদাহরণ 6.8 অনুসরণ করুন।

6.10 সহায়ক গ্রন্থ

1. Daneiel T. Finkbeiner II — Introduction to Matrices and linear transformations (Indian Edition by D. B. Taraporevala Sons & Co., Bombay, 2nd printing 1970)
2. S. Lipschutz — Linear Algebra (Schaum's outline series), Asian student ed, 1981
3. B. C. Chatterjee — Linear Algerbra, Das Gupta & Co. Calcutta, 1967

একক 7 □ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক বা মাত্রা (মর্যাদা) (Rank of a matrix)

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in R$$

একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স। লক্ষ করুন এই ম্যাট্রিক্সের m-সংখ্যক সারি ও n-সংখ্যক স্তম্ভ থেকে সম-সংখ্যক সারি ও স্তম্ভ নির্বাচন করে (সারি বা স্তম্ভসংখ্যা $\leq$ সর্বনিম্ন (m, n)) একাধিক বর্গ-ম্যাট্রিক্স গঠন করা যেতে পারে। এই সকল বর্গ-ম্যাট্রিক্সগুলির সংশ্লিষ্ট নির্ণায়কগুলিকে A-র বিভিন্ন ক্রমের **মাইনর** বলা হয়। A-র মাইনরগুলির মান শূন্য বা অশূন্য হতে পারে। সর্বোচ্চ ক্রম-বিশিষ্ট অশূন্য মাইনরের পরিপ্রেক্ষিতে ম্যাট্রিক্সের **নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক বা নির্ণায়ক-মাত্রা সংজ্ঞাত হবে।**

আবার লক্ষ করুন A-র যেকোনও সারি, যথা i-তম সারি $(a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in})$ অবশ্যই একটি ক্রমিক n-গোষ্ঠী (ordered n-tuple) এবং যেকোন স্তম্ভ, যথা j-তম স্তম্ভ $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ অবশ্যই একটি ক্রমিক m-গোষ্ঠী

(ordered m-tuple)। অতএব এক-একটি সারি (বা স্তম্ভ) হচ্ছে R^n ভেকটরদেশের (বা R^n ভেকটর দেশের) সারি ভেকটরগুলি $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_m$ দ্বারা এবং স্তম্ভ-ভেকটরগুলি $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n$ দ্বারা চিহ্নিত করা হলে, তাদের রৈখিক বিস্তৃতি (Linear spanned) দুটি যথাক্রমে $L\ \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_m\}$ এবং $L\ \{\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n\}$ অবশ্যই দুটি ভেকটরদেশ গঠন করবে। এই ভেকটরদেশ দুটির মাত্রাই (dimension) হবে যথাক্রমে a-র সারি-র‍্যাঙ্ক (বা সারি-মাত্রা) ও স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক (বা স্তম্ভ-মাত্রা)।

ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক, সারি র‍্যাঙ্ক ও স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক পরস্পর সমান এটি প্রমাণিত হবে। তখন এদের সাধারণ মানটিকে (Common Value) আমরা **ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক বা মাত্রা** বলব। ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক বের করার সহজতর পদ্ধতি পেতে কিছু উপপাদ্যের আলোচনার মধ্য দিয়ে আমাদের যেতে হবে।

7.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠে আপনি

- ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক, সারি-র‍্যাঙ্ক ও স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক এই তিনপ্রকার র‍্যাঙ্কের সাথে পরিচিত হবেন।
- যেকোন ম্যাট্রিক্সের তার তিনপ্রকার র‍্যাঙ্কের প্রতিক্ষেত্রে যে একই সংখ্যা (ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা) পাওয়া যাবে তা বিভিন্ন উপপাদ্যের মাধ্যমে জানতে পারবেন।
- এই তিনপ্রকার র‍্যাঙ্কের সাধারণ মানের (Common Value) ভিত্তিতে ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্কের সংজ্ঞা পাবেন।
- ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক নির্ণয়ের সহজতম পদ্ধতিটি আয়ত্ত করতে পারবেন।

7.3 ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক, সারি-র‍্যাঙ্ক ও স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক (Determinant-rank, row-rank and column-rank)

সংজ্ঞা 7.1 : ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক

$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij} \in R$ একটি $m \times n$ ক্রম-বিশিষ্ট বাস্তব অশূন্য সম-ম্যাট্রিক্স। A-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক k (একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা) বলতে বোঝায় A-র $k \times k$ ক্রমের সকল মাইনরগুলির মধ্যে কমপক্ষে একটি অশূন্য মান বিশিষ্ট এবং $k \times k$ ক্রমের অধিক ক্রমযুক্ত সকল মাইনরগুলি শূন্য মানবিশিষ্ট। শূন্য সমম্যাট্রিক্সের (null matrix) র‍্যাঙ্ক ধরা হবে শূন্য।

মন্তব্য : (1) সংজ্ঞানুসারে A-র সকল $(k+1)\times(k+1)$, $(k+2)\times(k+2)$, ... ক্রমের মাইনরগুলি সব শূন্য মানবিশিষ্ট।

(2) র‍্যাঙ্ক k হওয়ায় $k \times k$ ক্রমের নিম্নক্রমের মাইনরগুলি বিবেচ্য নয়।

উদাহরণ 7.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক নির্ণয় করতে হয়।

সমাধান ঃ ম্যাট্রিক্সের 3×4 ক্রমের। A-র সর্বোচ্চ 3×3 ক্রমের মাইনর চারটি (কারণ, সারি-সংখ্যা 3 হওয়ায় $3_{c_3} = 1$ প্রকারে 3টি সারি নির্বাচন এবং স্তম্ভ-সংখ্যা 4 হওয়ায় $4_{c_3} = 4$ প্রকারে 3টি স্তম্ভ নির্বাচন করা যাবে। তারফলে 4টি 3×3 ক্রমের মাইনর পাওয়া যাবে) কিন্তু প্রতিটি 3×3 ক্রমের মাইনর শূন্য মান যুক্ত, কারণ এই মাইনরগুলির প্রতিক্ষেত্রে 3-য় সারি থেকে 2 উৎপাদকটি বের করে নিলে 1ম ও 3য় সারি অভিন্ন (identical) হয়ে যাচ্ছে। অতএব A-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক 3 হতে পারে না।

A-র 2×2 ক্রমের মাইনরগুলির সংখ্যা $3_{c_3} \times 4_{c_3} = 18$টি। এখন একটি 2×2 ক্রমের মাইনর $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ হওয়ায় এবং অন্যান্য 2×2 ক্রমের মাইনরগুলি শূন্য বা অশূন্য যাই হোক না কেন, সংজ্ঞানুসারে A-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক $= 2$.

মন্তব্য 7.1 : এই পদ্ধতি উচ্চ-ক্রমের ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে খুবই শ্রমসাধ্য কাজ। নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক নির্ণয়ের সহজতর পদ্ধতি আমরা পরে পাব।

সংজ্ঞা 7.2 : ম্যাট্রিক্সের সারি-দেশ (row-space) এবং ম্যাট্রিক্সের সারি-র‍্যাঙ্ক (row-rank) বা সারি-মাত্রা

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in R$$

ম্যাট্রিক্সের এক-একটি সারি R^n ভেক্টরদেশের এক-একটি ভেকটর (কারণ $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{in}$) একটি ক্রমিক n-গোষ্ঠী (ordered n-tuple)। সারি ভেক্টরগুলিকে যথাক্রমে $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_m$ দ্বারা সূচিত করা হলো। তাহলে এদের রৈখিক সমবায় দ্বারা একটি ভেক্টরদেশটি $L\ \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_m\}$ গঠিত হবে যা হবে R^n-র উপভেক্টরদেশ (উপপাদ্য 4.6) দেখুন। **এই উপভেক্টরদেশটি A-র সারি-দেশ নামে সংজ্ঞাত এবং $R(A)$ দ্বারা চিহ্নিত।** অতএব $R(A) = L\ \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_m\}$।

A-র সারিদেশের মাত্রাই A-র সারি-র‍্যাঙ্ক বা সারি-মাত্রা নামে সংজ্ঞাত। অর্থাৎ, $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_n$ এই m সংখ্যক সারি-ভেক্টরগুলির মধ্যে সর্বাধিক যতগুলি সারি-ভেক্টর রৈখিকভাবে স্বাধীন হবে সে সংখ্যাটি হবে A-র সারিদেশের র‍্যাঙ্ক।

মন্তব্য 7.1 : $R(A)$-র মাত্রা $\leq m$, বা A-র সারির‍্যাঙ্ক $\leq m$

উদাহরণ 7.2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 12 & 16 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের সারিদেশের একটি ভিত্তি ও সারি-র‍্যাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ A-র সারি ভেক্টরগুলি যথাক্রমে

$$\underline{\alpha}_1 = (1, 3, 4), \quad \underline{\alpha}_2 = (2, 3, 4), \quad \underline{\alpha}_3 = (4, 12, 16),$$

$$\lambda_1\underline{\alpha}_1 + \lambda_2\underline{\alpha}_2 + \lambda_3\underline{\alpha}_3 = \underline{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$$

$$3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 12\lambda_3 = 0$$

$$4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 16\lambda_3 = 0$$

এই রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সহগ নির্ণায়ক

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 12 \\ 4 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

অতএব $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ অর্থাৎ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ একসঙ্গে সবাই শূন্য হতে পারে না। জাতীয় সমাধান আছে (পরবর্তী এককে উপপাদ্য 8.4 দেখুন)। অতএব $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3\}$ সেটটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

এবার যেকোন দুটি সারি-ভেকটর নিয়ে দেখা যাক। $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2\}$ সেটটি থেকে

$$\lambda\underline{\alpha}_1 + \mu\underline{\alpha}_2 = \lambda(1, 3, 4) + \mu(2, 3, 4) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda + 2\mu &= 0 \\ 3\lambda + 3\mu &= 0 \\ 4\lambda + 4\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = 0 = \mu$$

অতএব $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2\}$ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল এবং তার ফলে বলা যায় A-র সারি র‍্যাঙ্ক = 2 এবং সারি দেশের একটি ভিত্তি $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2\}$

সংজ্ঞা 7.3 : ম্যাটিক্সের স্তম্ভ-দেশ (Column-space) এবং ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভ-মাত্রা (Column-rank) বা স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক।

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in R$$

ম্যাট্রিক্সের এক-একটি স্তম্ভ, যথা $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ বা, $(a_{11},\ a_{21},\ \ldots,\ a_{m1})'$,

R^m ভেকটর দেশের এক-একটি ভেকটর। ধরা যাক্ এই স্তম্ভ ভেকটরগুলি $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n$ দ্বারা সূচিত করা হলো। তাহলে এদের রৈখিক সমবায় দ্বারা একটি ভেকটরদেশ $\mathrm{L}\ \{\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n\}$ তৈরি হবে যা অবশ্যই R^m-ভেকটরদেশের উপদেশ। এই ভেকটর উপদেশটির A-র স্তম্ভ দেশ নামে সংজ্ঞাত এবং $C(A)$ দ্বারা চিহ্নিত।

অতএব $C(A) = \mathrm{L}\ \{\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n\}$

A-র স্তম্ভ দেশের মাত্রাই A-র স্তম্ভ র‍্যাঙ্ক বা স্তম্ভ-মাত্রা নামে সংজ্ঞাত। অর্থাৎ $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n$ এই n-সংখ্যক স্তম্ভ-ভেকটরগুলির মধ্যে সর্বাধিক যে সংখ্যক স্তম্ভ-ভেকটর রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হবে সে সংখ্যাটি হবে A-র স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক।

মন্তব্য 7.1 : (i) $C(A)$-র মাত্রা, বা A-র স্তম্ভ মাত্রা $\leq m$

(ii) সংজ্ঞানুসারে A'-র সারি দেশ $=$ A-র স্তম্ভ-দেশ এবং বিপরীতক্রমে A'-র স্তম্ভ দেশ $=$ A-র সারি দেশ।

উদাহরণ 7.3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ $\underline{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv (1, 5, 0)'$, $\underline{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv (3, 3, 1)'$

$$\underline{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv (0,\ 2,\ 3)'$$

এখন $\lambda_1 \underline{\beta}_1 + \lambda_2 \underline{\beta}_2 + \lambda_3 \underline{\beta}_3 = \theta \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \lambda_1 + 3\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0$$

$$5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

$$0\lambda_1 + \lambda_3 + 3\lambda_3 = 0$$

এই রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সহগ-নির্ণায়ক = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$

অতএব একমাত্র সমাধান $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ অর্থাৎ $\{\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \underline{\beta}_3\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন অতএব A-র স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক = 3

7.4 ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক, সারি-র‍্যাঙ্ক ও স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক সংক্রান্ত বিভিন্ন উপপাদ্য ও উদাহরণ

উপপাদ্য 7.1 : A একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স। A-র সারি সমতুল্য (বা স্তম্ভ সমতুল্য) ম্যাট্রিক্স B হলে, A-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক ও B-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক পরস্পর সমান।

প্রমাণ ঃ প্রাথমিক সারি-অপারেশন তিনটি যথাক্রমে R_{ij}, λR_i, $R_i, + \lambda R_j$ এবং প্রাথমিক স্তম্ভ-অপারেশন তিনটি যথাক্রমে C_{ij}, λC_i, $C_i + \lambda C_j$।

আমরা ধরি কেবলমাত্র প্রাথমিক সারি অপারেশন প্রয়োগে A রূপান্তরিত হচ্ছে B ম্যাট্রিক্সে (অর্থাৎ B হচ্ছে A-র সারি-সমতুল্য)। আমরা প্রমাণ করব A-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক ও B-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক পরস্পর সমান।

A-র উপর R_{ij} প্রয়োগে i-তম ও j-তম সারিদ্বয় পরস্পরের মধ্যে স্থান বিনিময় হয়। তারফলে R_{ij} প্রয়োগে A থেকে উৎপন্ন ম্যাট্রিক্স B এবং A এই দুটি ম্যাট্রিক্সের অনুরূপ মাইনরগুলির মান আনুপাতিক ভাবে অপরিবর্তিত থাকবে, কেবলমাত্র চিহ্নের পরিবর্তন ঘটতে পারে, তাও চিহ্নের পরিবর্তন সেসকল মাইনরগুলির ক্ষেত্রে যেখানে উক্ত সারিদ্বয় স্থান-বিনিময় হয়েছে (কারণ, আমরা জানি সারি-বিনিময়ে নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে, কেবলমাত্র চিহ্নে পরিবর্তন ঘটে)।

এবার ধরা যাক A-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক k অতএব A-র $k \times k$ ক্রমের কমপক্ষে একটি মাইনর অশূন্য এবং $k \times k$ ক্রমের অধিক ক্রমবিশিষ্ট সকল মাইনর শূন্যমানযুক্ত। উপরের আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে Rij প্রয়োগে A থেকে উৎপন্ন B-র ক্ষেত্রেও কমপক্ষে একটি $k \times k$ ক্রমের মাইনর অশূন্য এবং অধিক ক্রমবিশিষ্ট সব মাইনর শূন্য মানযুক্ত। অতএব প্রমাণিত হলো A-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক = B-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক।

A-র উপর প্রাথমিক সারি অপারেশন λR_i ($\lambda \neq 0$) প্রয়োগে অশূন্য মাইনরগুলি অশূন্যই থাকবে, কেবলমাত্র যে অশূন্য মাইনরগুলিতে i-তম সারি নির্বাচিত সেক্ষেত্রে মাইনরগুলির মান λ-র গুণিতক হবে। অতএব A-র উপর λR_i প্রয়োগে উৎপন্ন B-র সারি-র‍্যাঙ্ক ও A-র সারি-র‍্যাঙ্ক পরস্পর সমান।

A-র উপর তৃতীয় প্রাথমিক সারি-অপারেশন $R_i + \lambda R_j$ প্রয়োগে উৎপন্ন ম্যাট্রিক্স B-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক ও A-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক পরস্পর সমান, কারণ উক্ত সারি-অপারেশন প্রয়োগে কোনও নির্ণায়কের মান পরিবর্তিত হয় না তার হলে A ও B-র অনুরূপ অশূন্য মানযুক্ত মাইনরগুলি অশূন্যই থাকবে।

অতএব প্রমাণিত হল A ও B পরস্পর সারি-সমতুল্য হলে উভয়ের নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক একই সংখ্যা।

অনুরূপে প্রমাণ করা যাবে A ও B পরস্পর স্তম্ভ-সমতুল্য হলে উভয়ের নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক একই সংখ্যা।

উপপাদ্য 7.2 : B ম্যাট্রিক্সটি A-র সারি-সমতুল্য ইলিশন ম্যাট্রিক্স হলে B-র অশূন্য সারি-সংখ্যাই উভয়ের নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক A একটি $m \times n$ ক্রমবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স। A-র উপর তিনটি প্রাথমিক সারি-অপারেশনের কমপক্ষে একটি অপারেশন এক বা একাধিকবার প্রয়োগে A-র সারি সমতুল্য ইলিশন ম্যাট্রিক্স B উৎপন্ন হচ্ছে। **উপপাদ্য 7.1** অনুসারে A ও B এই উভয় ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক পরস্পর সমান।

B-র আকৃতি অনুসারে (6.5 দেখুন) ধরা যাক B-র প্রথম অশূন্য সারি-সংখ্যা k ($k \leq m, n$)। আমরা প্রমাণ করব B-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক k, তাহলেই প্রমাণিত হবে A-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক $=$ B-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক $= k$।

B-র আকৃতি অনুসারে k সংখ্যক প্রথম অশূন্য সারির প্রতিটি সারির ক্ষেত্রে প্রথম অশূন্য পদটি 1 এবং এই একক পদগুলি যথাক্রমে C_i, C_j, ... C_t স্তম্ভে (মোট k-সংখ্যক স্তম্ভ) থাকে, তাহলে অবশ্যই $C_i < C_j < .... < C_t$ এবং এই স্তম্ভগুলির অপর পদগুলি শূন্যমান যুক্ত। তারফলে আমরা $k \times k$ ক্রমের এমন একটি মাইনর পাচ্ছি যার আকৃতি।

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

যার প্রথম স্তম্ভটি B-র C_i থেকে, দ্বিতীয় স্তম্ভটি B-র C_j থেকে, ... এবং সারিগুলি প্রথম k-সংখ্যক অশূন্যসারি থেকে নির্বাচিত। এই মাইনরটির মান 1. উপরন্তু k-র অধিক ক্রম বিশিষ্ট B-র সকল মাইনরগুলি অবশ্যই শূন্য মানযুক্ত, কারণ B-র প্রথম k সংখ্যক অশূন্য সারির পর সকল সারিগুলি শূন্য সারি।

অতএব দেখা গেল B-র $k \times k$ ক্রমবিশিষ্ট একটি মাইনর অশূন্য এবং এই ক্রমের অধিক ক্রমবিশিষ্ট সকল মাইনর শূন্য মানযুক্ত। অতএব B-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক $= k$ এবং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

মন্তব্য 7.1 : নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক বের করার একটি কার্যকরী পদ্ধতি

উপপাদ্য 7.2 অনুসারে একটি ম্যাট্রিক্স A থেকে তার সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স B গঠন করলে B-র অশূন্য সারিসংখ্যাই বলে দেবে A-র বা B-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্কের মান।

সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স আকৃতিতে পরিণত না করে কেবলমাত্র প্রাথমিক সারি অপারেশন দ্বারাও প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটির আকৃতির পরিবর্তন ঘটিয়ে মাইনরগুলির মান সহজেই বার করা যায়, কিন্তু এক্ষেত্রে পরীক্ষা করে দেখতে হবে কোনও সর্বোচ্চ ক্রমের কমপক্ষে একটি মাইনর অশূন্য। পরবর্তী উদাহরণটি দেখুন।

উদাহরণ 7.4 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & -10 & 16 & -5 \end{pmatrix}$

ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : $A \xrightarrow{R_{13}} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 16 & -5 \\ 5 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-5R_1} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 16 & -5 \\ 0 & 50 & -78 & 22 \\ 0 & 25 & -39 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 16 & -5 \\ 0 & 50 & -78 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

B হচ্ছে A-র সারি-সমতুল্য এবং B-র একটি মাইনর $\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 50 \end{vmatrix} = 50 \neq 0$ এবং 3×3 ক্রমের সকল মাইনর শূন্য মানযুক্ত। অতএব Bএর নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক = 2 এবং তার ফলে উপপাদ্য 7.1 অনুসারে A এর নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক = 2।

A-কে যদি সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সে নিয়ে যেতে হয় তবে আমাদের আরও কয়েকটি প্রাথমিক সারি অপারেশন করতে হবে। দেখুন

$$\xrightarrow{B\frac{1}{50}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 16 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{78}{50} & \frac{22}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1+10R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{78}{50} & \frac{22}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C হচ্ছে A-র সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স এবং C-র অশূন্য সারি-সংখ্যা = 2. অতএব উপপাদ্য 7.2 অনুসারে C-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক = 2 = A-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক।

উপপাদ্য 7.3 : যেকোন প্রাথমিক সারি-অপারেশন প্রয়োগে একটি ম্যাট্রিক্সের সারি-র‍্যাঙ্ক অপরিবর্তিত থাকে। (অর্থাৎ B ম্যাট্রিক্স A-র সারি-সমতুল্য হলে উভয়ের সারি-র‍্যাঙ্ক পরস্পর সমান)।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $a_{ij} \in R$ এই ম্যাট্রিক্সটির সারি-ভেকটরগুলি যথাক্রমে $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_m$ অতএব A-র সারিদেশ (row-space) $R(A) = L\ \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_m\}$ আমরা প্রমাণ করব A-র উপর যেকোনও প্রাথমিকসারি-অপারেশন প্রয়োগে A-র সারিদেশ $R(A)$-র মাত্রা বা A-র সারি র‍্যাঙ্ক অপরিবর্তিত থাকে।

(a) ধরা যাক A-র উপর প্রথম প্রাথমিক সারি অপারেশন R_{ij} প্রয়োগে A পরিবর্তিত হচ্ছে A' ম্যাট্রিক্সে। তাহলে

$$R(A') = L\ \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_j, \underline{\alpha}_i, \ldots, \underline{\alpha}_m\}$$

অর্থাৎ $R(A')$-র যেকোন ভেকটর $\underline{\alpha}$-কে নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায় ঃ

$$\underline{\alpha} = c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_j\underline{\alpha}_j + \ldots + c_i\underline{\alpha}_i + \ldots + c_m\underline{\alpha}_m [c_i \in R]$$

$$= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_i\alpha_i + \ldots + c_j\alpha_j + \ldots + c_m\alpha_m$$

[$\because$ ভেকটরদেশে ভেকটর যোগ বিনিময়যোগ্য নিয়মানুসারী]

অতএব $\underline{\alpha} \in R(A)$ এবং $\underline{\alpha}$ ভেকটরটি $R(A')$-র যেকোনও ভেকটর হওয়ায়

$$R(A') \subset R(A)$$

বিপরীতক্রমে সহজেই দেখানো যাবে $R(A) \subset R(A')$ অতএব $R(A) = R(A')$, বা মাত্রা $(R(A))$ = মাত্রা $(R(A'))$,

বা, A-র সারি-র‍্যাঙ্ক = A'-র সারি র‍্যাঙ্ক।

(b) ধরা যাক A-র উপর দ্বিতীয় প্রাথমিক সারি অপারেশন λR_i ($\lambda \in R$ এবং $\lambda \neq 0$) প্রয়োগে A পরিণত হচ্ছে A'-এ। অতএব

$$R(A') = L\ \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \lambda\underline{\alpha}_i, \ldots, \underline{\alpha}_m\}$$

উপরন্তু আমরা জানি

$$R(A') = L\ \{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_i, \ldots, \underline{\alpha}_m\}$$

এখন লক্ষ করুন, $C_i \in R$ (বাস্তব সংখ্যার ফিল্ড) ক্ষেত্রে $c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_i(\lambda\underline{\alpha}_i) + \ldots + c_m\underline{\alpha}_m$

$$\Leftrightarrow c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + c_i'\underline{\alpha}_i + \ldots + c_m\underline{\alpha}_m\ (c_i' = \lambda c_i \in R)$$

অতএব $R(A') = R(A)$, মাত্রা $(R(A'))$ = মাত্রা $(R(A))$

বা, A'-র সারি-র‍্যাঙ্কি = A-র সারি-র‍্যাঙ্ক।

(c) ধরা যাক A-র উপর তৃতীয় প্রাথমিক সারি-অপারেশন $R_i + \lambda R_j$ প্রয়োগে A' উৎপন্ন হচ্ছে। তাহলে

$R(A') = A'$-র সারিদেশ

$$= L\ \{\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_i + \lambda\underline{\alpha}_j, \ldots, \underline{\alpha}_j, \ldots, \underline{\alpha}_m\}$$

($\lambda \in R$)

এবং

$$c_1\underline{\alpha}_1 + \ldots + c_i(\underline{\alpha}_i + \lambda\underline{\alpha}_i) + \ldots + c_i\underline{\alpha}_j + \ldots + c_m\underline{\alpha}_m$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1\underline{\alpha}_1+\ldots+c_i\underline{\alpha}_i+\ldots+\left(c_i\lambda+c_j\right)\underline{\alpha}_j+\ldots+c_m\underline{\alpha}_m$$

অতএব $R(A') = R(A)$

বা, মাত্রা $(R(A'))$ = মাত্রা $(R(A))$

বা, A'-র সারি-র‍্যাঙ্ক = A-র সারি-র‍্যাঙ্ক

(a), (b), (c) আলোচনা অনুসারে এটাই প্রতিপন্ন হলো যে, যে কোনও প্রাথমিক সারি অপারেশন প্রয়োগে ম্যাট্রিক্সের সারি-র‍্যাঙ্কের কোনও পরিবর্তন ঘটে না।

উপপাদ্য 7.4 : A ম্যাট্রিক্সের সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সটি B হলে, B-র অশূন্য সারি-সংখ্যাই হবে A-র সারি-র‍্যাঙ্ক।

প্রমাণ ঃ সাধারণভাবে $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij} \in R$ (বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্র)। উপপাদ্যটির প্রমাণের ধারা অনুসরণের সুবিধার্থে আমরা ধরি $m = 5$, $n = 8$ অর্থাৎ $A = (a_{ij})_{5\times 8}$. A-র সারি সমতুল্য ইলিশন ম্যাট্রিক্স B-র আকৃতিতে ধরা যাক 3টি অশূন্য সারি আছে এবং অশূন্য সারির প্রথম অশূন্য একক পদগুলি যথাক্রমে c_3, c_4 ও c_7 স্তম্ভে আছে। তার ফলে B-র আকৃতি নিম্নরূপ ঃ

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} & 0 & a_{15} & a_{16} & 0 & a_{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{25} & a_{26} & 0 & a_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B-র প্রথম অশূন্য সারি-ভেক্টরগুলি যথাক্রমে $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3$। দেখা যাক এরা রৈখিকভাবে স্বাধীন কিনা।

$$c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2 + c_3\underline{\alpha}_3 = \underline{\theta},\ c_i \in R$$

$$\Rightarrow \quad c_1(0,\ 1,\ a_{13},\ 0,\ a_{15},\ a_{16},\ 0,\ a_{18}) + c_2(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ a_{25},\ a_{26},\ 0,\ a_{28}) + c_3\ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ a_{38})$$

$$= (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

অতএব $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন। B-র বাকি সারি ভেকটরগুলির প্রতিটি শূন্য ভেক্টর হওয়ার প্রথম তিনটির অধিক সারি-ভেক্টরের সেট রৈখিকভাবে নির্ভরশীল (উপপাদ্য 5.3 দেখুন)। অতএব B-র সারি দেশ $R(B)$-র একটি ভিত্তি $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3\}$ । ভিত্তি সেটে 3টি ভেক্টর থাকায় মাত্রা $(R(B)) = 3$ আমরা জানি B ম্যাট্রিক্সটি A-র সারি সমতুল্য। অতএব উপপাদ্য 7.3 অনুসারে মাত্রা $(R(A))$ = মাত্রা $(R(B)) = 3$, অর্থাৎ A-র সারি-র‍্যাঙ্ক = 3 যা B-র অশূন্য সারি-সংখ্যা।

উদাহরণ 7.5 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির সারি-র‍্যাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ

$$\xrightarrow{A^{R_{12}}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-3R_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & -5 & -8\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+5R_2]{R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2-2R_3]{R_1+R_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=B$$

B হচ্ছে A-র সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স (এখানে স্বভাবী আকৃতি)। B-র অশূন্য সারি সংখ্যা = 3 অতএব উপপাদ্য 7.4 অনুসারে A-র সারি র‍্যাঙ্ক = 3।

উপপাদ্য 7.5

যেকোনও ম্যাট্রিক্স A-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক ও সারি র‍্যাঙ্ক পরস্পর সমান।

অথবা

A-র সারি র‍্যাঙ্ক = A-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক।

প্রমাণ ঃ A-র সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সটি ধরা যাক্ B এবং ধরা যাক B-তে প্রথম অশূন্য সারি-সংখ্যা $= k$. অতএব উপপাদ্য 7.4 অনুসারে A-র সারি-র‍্যাঙ্ক $= k$ আবার উপপাদ্য 7.2 অনুসারে A-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক $= k$ সুতরাং আমাদের সিদ্ধান্ত

A-র সারি-র‍্যাঙ্ক = A-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক।

উপপাদ্য 7.6 : একটি ম্যাট্রিক্স A-র সারি-র‍্যাঙ্ক = A-র স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক।

অথবা

মাত্রা $(R(A))$ = মাত্রা $(C(A))$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক A-র সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সটি হচ্ছে B এবং ধরা হলো B-র প্রথম অশূন্য সারি-সংখ্যা $= k$ অতএব উপপাদ্য 7.4 অনুসারে

k = A-র সারি-র‍্যাঙ্ক

= মাত্রা $(R(A))$

= A-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক (উপপাদ্য 7.5 অনুসারে)

= A'-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক

(কারণ, A-র পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স (transpose matrix) A'-র মাইনরগুলি মূল ম্যাট্রিক্স A-র অনুরূপ মাইনরগুলি সমমান যুক্ত)

= মাত্রা $(R(A'))$ [উপপাদ্য 7.5 অনুসারে]

= মাত্রা $(C)A))$

[কারণ, A'-র সারি-দেশ = A-র স্তম্ভ-দেশ]

= A-র স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক।

মন্তব্য 7.2 : উপপাদ্য 7.5 এবং উপপাদ্য 7.6 থেকে প্রমাণিত হলো

A-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক = A-র সারি-র‍্যাঙ্ক

= A-র স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক।

7.5 ম্যাট্রিক্সের মর্যাদা বা র‍্যাঙ্কের সংজ্ঞা এবং উদাহরণ (Definition of Rank of a Martix and Examples)

সংজ্ঞা 7.4 : ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক

যেকোনও ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক, সারি-র‍্যাঙ্ক ও স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক এই তিন প্রকার র‍্যাঙ্কের একটাই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হওয়ায় উক্ত সংখ্যাটিকে ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক বলা হয়।

উদাহরণ 7.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ম্যাট্রিক্সটির সারি-র‍্যাঙ্ক ও স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক নির্ণয় করুন। পরীক্ষা করুন নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক = সারি-র‍্যাঙ্ক = স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক।

সমাধান ঃ

$$\xrightarrow{A^{R_{24}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{k_4\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-R_4 \\ R_3-R_4}]{R_1+R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

এখানে B হচ্ছে A-র সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স এবং এখানে B-র অশূন্য সারি-সংখ্যা = 4 অতএব উপপাদ্য 7.4 অনুসারে A-র সারি র‍্যাঙ্ক = 4

যেহেতু A'-র সারিদেশ = A-র স্তম্ভ দেশ, অতএব A-র স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক = A'-র সারি র‍্যাঙ্ক। এখন

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - R_1]{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

এখনে B হচ্ছে A'-র সারি-সমতুল্য ইশিলন আকৃতি এবং B-তে আছে 4টি অশূন্য সারি। অতএব উপপাদ্য 7.4 অনুসারে

A'-র সারি-র‍্যাঙ্ক $= 4$

বা, A-র স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক $= 4$

আবার লক্ষ করুন

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

অর্থাৎ A-র একমাত্র 4×4 ক্রমের মাইনর অশূন্য হওয়ায় A-র নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক $= 4$

অতএব দেখা গেল,

A-র নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক $=$ A-র সারি-র‍্যাঙ্ক

$=$ A-র স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক

$= 4$

অর্থাৎ A-র র‍্যাঙ্ক $= 4$

7.6 একটি বিশেষ উপপাদ্য

A ও B এমন দুটি ম্যাট্রিক্স যে AB সংজ্ঞাত হচ্ছে। তাহলে, র‍্যাঙ্ক $(AB) \leq$ ক্ষুদ্রতম (র‍্যাঙ্ক (A), র‍্যাঙ্ক (B))

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্ $A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$B = (b_{ij})_{n\times p} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

অতএব AB সংজ্ঞাত এবং

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kp} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix}_{m\times p}$$

এখন যদি আমরা B-র সারি ভেকটরগুলি যথাক্রমে $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n$ দ্বারা চিহ্নিত করি, তাহলে AB-র প্রথম সারি ভেকটরটি হচ্ছে

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1},\ \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2},\ \cdots,\ \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp}\right)$$

$= a_{11}\ (b_{11},\ b_{12},\ \ldots,\ b_{1p}) + a_{12}\ (b_{21},\ b_{22},\ \ldots,\ b_{2p}) + \ldots + a_{1n}\ (b_{n1},\ bn_2,\ \ldots,\ b_{np})$

$= a_{11}\underline{\beta}_1 + a_{12}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{1n}\underline{\beta}_n$

অনুরূপে AB-র পরবর্তী সারি-ভেকটরগুলি যথাক্রমে

$a_{21}\underline{\beta}_1 + a_{22}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{2n}\underline{\beta}_n,$

$a_{31}\underline{\beta}_1 + a_{32}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{3n}\underline{\beta}_n,$

....

$a_{m1}\underline{\beta}_1 + a_{m2}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{mn}\underline{\beta}_n$

এই সারি-ভেকটরগুলি দ্বারা গঠিত হয় AB-র সারি দেশ বা $R(AB)$। ধরা যাক $\gamma \in R(AB)$। তাহলে γ কে AB-র সারি ভেকটরগুলির সাপেক্ষে রৈখিক-সমবায়রূপে প্রকাশ করা যাবে। অর্থাৎ আমরা লিখতে পারি

$$\underline{\gamma} = \lambda_1\left(a_{11}\underline{\beta}_1 + a_{12}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{1n}\underline{\beta}_n\right) + \lambda_2\left(a_{21}\underline{\beta}_1 + a_{22}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{2n}\underline{\beta}_n\right) + \ldots\ldots$$

$$+\lambda_m\left(a_{m1}\underline{\beta}_1 + a_{m2}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{mn}\underline{\beta}_n\right)$$

(λ_1, λ_2, ... λm হচ্ছে স্কেলার)

$$= (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_m a_{m1})\underline{\beta}_1 + (\lambda_1 a_{12} + \lambda_{2a} a_{22} + \ldots + \lambda_m a_{m2})\underline{\beta}_2 + \ldots$$

$$+(\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_m a_{mn})\underline{\beta}_n$$

= $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n$ ভেকটরগুলির রৈখিক সমবায়।

অতএব $\underline{\gamma} \in R(AB) \Rightarrow \underline{\gamma} \in R(B)$ (B-র সারি-দেশ)

বা, $R(AB)$ হচ্ছে $R(B)$-র ভেকটর উপদেশ

বা, AB-র সারি-র‍্যাঙ্ক $\leq$ B-র সারি-র‍্যাঙ্ক (উপপাদ্য 5.19 দেখুন)

বা, AB-র র‍্যাঙ্ক $\leq$ B-র র‍্যাঙ্ক। ...... (7.1)

(সংজ্ঞা 7.4 দেখুন)

পুনরায় AB সংজ্ঞাত হওয়ায় $BtAt$ গুণফলও সংজ্ঞাত, অতএব সিদ্ধান্ত (1) অনুসারে

$B'A'$-র র‍্যাঙ্ক $\leq$ A'-র র‍্যাঙ্ক

বা, $(AB)'$-র র‍্যাঙ্ক $\leq$ A'-র র‍্যাঙ্ক

বা, AB-র র‍্যাঙ্ক $\leq$ A-র র‍্যাঙ্ক

এখন (1) এবং (2) সিদ্ধান্ত অনুসারে .... (7.2)

র‍্যাঙ্ক (AB) $\leq$ ক্ষুদ্রতম (র‍্যাঙ্ক (A), র‍্যাঙ্ক (B))।

7.7 সারাংশ

এই এককের প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্যের পর 7.3-তে পাবেন একটি ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক, সারি-দেশ ও সারি-র‍্যাঙ্ক এবং স্তম্ভ-দেশ ও স্তম্ভ-র‍্যাঙ্কের সংজ্ঞা। উদাহরণ দ্বারা প্রতিক্ষেত্রে ধারণাকে স্পষ্ট করা হয়েছে। 7.4 এ পাবেন এই তিন প্রকার র‍্যাঙ্ক-সংক্রান্ত বিভিন্ন উপপাদ্য এবং শেষে দেখবেন নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক = সারি র‍্যাঙ্ক = স্তম-র‍্যাঙ্ক। তিন প্রকারের র‍্যাঙ্কের এই যে সাধারণমান যা একটি পূর্ণ ধনাত্মক সংখ্যা তাকেই আমরা ম্যাট্রিক্সের

র‍্যাঙ্ক বলি (7.5)। যেকোন ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক নির্ণয়ের সহজতম পদ্ধতিটিও আপনি সেই সঙ্গে আয়ত্ত করবেন। (7.6)-এ আছে একটি বিশেষ উপপাদ্য ঃ

র‍্যাঙ্ক $(AB) \leq$ ক্ষুদ্রতম (র‍্যাঙ্ক (A), র‍্যাঙ্ক (B), A ও B হচ্ছে দুটি ম্যাট্রিক্স। (7.8)-এ পাবেন অনুশীলন করার জন্য প্রশ্নাবলি।

7.8 প্রশ্নাবলী

(1) নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্স দুটির নির্ণায়ক মাত্রা নির্ণয় করুন ঃ

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[**নির্দেশ** ঃ উদাহরণ 7.1 দেখুন।] উত্তর ঃ (a) 3 (b) 3

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের সারি-ভেকটরগুলির মধ্যে সর্বাধিক কটি রৈখিকভাবে স্বাধীন তা নির্ণয় করুন এবং A-র সারি র‍্যাঙ্ক কত তা বলুন।

[**নির্দেশ** ঃ 5.3 এবং তৎসংলগ্ন উদাহরণ দেখুন।] উত্তর ঃ 2

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সটির সারিদেশের একটি ভিত্তি নির্ণয় করুন। A-র সারি মাত্রা কত বলুন।

[**নির্দেশ** ঃ সারি-ভেকটরগুলির মধ্যে রৈখিকভাবে স্বাধীন সারি ভেকটরগুলির সারিদেশের একটি ভিত্তি। উদাহরণ 7.2 দেখুন] উত্তর ঃ 4

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & -9 \\ 2 & 4 & 6 & 14 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে স্তম্ভদেশের একটি ভিত্তি নির্ণয় করুন এবং দেখান স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক = 2

[**নির্দেশ** ঃ উদাহরণ 7.3 দেখুন]

(5) নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সদুটির ক্ষেত্রে সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করে সারি-র‍্যাঙ্ক, স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক ও নির্ণায়ক-র‍্যাঙ্ক নির্ণয় করন এবং প্রতিক্ষেত্রেই দেখান র‍্যাঙ্ক তিনটি পরস্পর সমান ঃ

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 9 & 10 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

[**নির্দেশ** ঃ উদাহরণ 7.6 দেখুন] উত্তর ঃ (a) 3 (b) 4

7.9 সহায়ক গ্রন্থ

(1) G. Hadley — Linear ALgebra. (Addison – Wesley) 1979.

(2) Das and Basu — ALgebra, published by the authors. 1967

(3) M. R. Gupta and L. M. Chatterjee — Algebra, Part 1 (Abstract & Linear), Shreedhar Prakashani, Calcutta. 1984.

(4) S. K MAPA — HIgher Algebra (Abstract and linear), Asoke prakasan, Calcutta, fifth revised edition, 1994.

(5) শ্রপতিরঞ্জন চৌধুরী —— রৈখিক বীজগণিত, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ, 1963

একক 8 ❐ রৈখিক সমীকরণ তন্ত্রের সমাধানতত্ত্ব
(System of liner equations and its solution)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

পদার্থবিদ্যা, অর্থনীতি ইত্যাদি বিষয়ক এমন অনেক বাস্তব সমস্যা আছে যাদের গণিতিক রূপ (Mathematical formulation) উৎপন্ন হয় রৈখিক সমীকরণতন্ত্র (System of linear equations) যা একাধিক রৈখিক সমীকরণ (Linear equation) দ্বারা গঠিত। সুতরাং রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রের সমাধানতত্ত্বের মাধ্যমে বহু বাস্তব সমস্যার সমাধান সম্ভব। রৈখিক বীজগণিতের (Linear Algebra) মূল বিষয়ই হলো এই রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রের সমাধানতত্ত্বের আলোচনা।

ধরা যাক কোনও বাস্তব সমস্যার গাণিতিক রূপ দেওয়ার ফলে নিম্নলিখিত রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রটি উৎপন্ন হয়েছে?

$3x + 6y + z = 0$ (i)

$x + 2y - z = 0$ (ii)

লক্ষ করুন এখানে তিনটি অজ্ঞাতরাশি, x, y, z আছে এবং সমীকরণ সংখ্যা দুটি। এখন প্রথম প্রশ্ন এরূপ সমীকরণতন্ত্রের সমাধানের অস্তিত্ব আছে তো? থাকলে, সমাধান সংখ্যা কটি? সাধারণভাবে (i) এবং (ii) যোগ করে $4x + 8y = 0$, বা $x = -2y$। এখন (i) কিংবা (ii) থেকে $z = 0$। এতএব y-র বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য নির্ণেয় সমাধান $(-2\alpha, \alpha, 0)$, $\alpha \in R$ এতএব এক্ষেত্রে রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রটির অসংখ্য সমাধানের অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে। লক্ষ করুন এই সমীকরণ-তন্ত্রটি সমসত্ত্ব (homogeneous) বা সমঘাত। কিন্তু (i) ও (ii) -র ডানপক্ষ $\neq (0,0)$ হলে হয়ে যেত অসমঘাত।

আমরা চাই এমন কিছু তত্ত্ব যার সাহায্যে যেকোনও রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের (সমঘাত হ'ক বা না হক না কেন সমাধান-অস্তিত্বের পরীক্ষা, সমাধান-সংখ্যা এবং সমাধান নির্ণয়ের সহজতর পদ্ধতি প্রভৃতি বিষয়ে পরিষ্কার ধারণা গড়ে উঠবে। বর্তমান এককটি অনুসরণের মধ্য দিয়ে আপনারা এ ব্যাপারে সুস্পষ্ট চিত্র পাবেন। পূর্ববর্তী বিভিন্ন এককগুলিতে আলোচ্য তত্ত্বগুলির প্রয়োগ এখানে দেখতে পাবেন। নির্ণায়ক, ম্যাট্রিক্স, ভেক্টরদেশ ইত্যাদি বিষয়ে সম্যক ধারণা না থাকলে এই এককের বিভিন্ন উপপাদ্যগুলি অনুসরণ করা কঠিন হয়ে যাবে।

8.02 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠে আপনি

- রৈখিক সমীকরণ-তন্ত্রের সঙ্গে পরিচিত হবেন। কোন্‌টি সমঘাত বা কোন্‌টি সমঘাত নয়, এমন রৈখিক সমীকরণ-তন্ত্র এর সংজ্ঞা পাবেন।
- রৈখিক সমীকরণ-তন্ত্রের বিভিন্ন সংক্ষিপ্ত আকারগুলি জানতে পারবেন।
- রৈখিক সমীকরণ-তন্ত্রের সমঘাত ও অসমঘাত সমাধান নির্ণয়-পদ্ধতিগুলির সাথে পরিচিত হয়ে সহজেই যেকোন রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রের সমাধান করতে পারবেন।
- বিভিন্ন উপপাদ্যের মাধ্যমে রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রের সমঘাত ও অসমঘাত সমাধান সম্ভব কিনা তা সহজেই পরীক্ষা করতে পারবেন এবং সেইসঙ্গে সমাধান অস্তিত্ব স্বীকৃত হলে সমাধান সংখ্যা নির্ণয় করতে পারবেন।

8.3 রৈখিক সমীকরণ, রৈখিক সমীকরণতন্ত্র (Linear equation, system of linear equations)

সংজ্ঞা 8.1 : রৈখিক সমীকরণ

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ অজ্ঞাত-রাশি সাপেক্ষে

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,\ a_1,\ b \in R$

সমীকরণটিকে রৈখিক-সমীকরণ বলা হয়।

$b = 0$ হলে সমঘাত (homogeneous) সমীকরণ।

$b \neq 0$ হলে তাকে অসমঘাত (non-homogenens) সমীকরণ বলে।

সংজ্ঞা 8.2 : রৈখিক সমীকরণতন্ত্র

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ অজ্ঞাত-রাশি সাপেক্ষে

$a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = b_1$

$$a_1,\ b_1 \in R$$

$a_{21}\ x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$

এই সমীকরণসমূহকে রৈখিক সমীকরণতন্ত্র বলে। এখানে n-সংখ্যক অজ্ঞাত-রাশি সাপেক্ষে m-সংখ্যক রৈখিক সমীকরণ আছে। $m = n,\ m > n$ বা $m < n$ হতে পারে।

(1) –এ $(b_1,\ b_2, \ldots b_m) = (0,0,\ \ldots\ 0)$ হলে সমীকরণ-তন্ত্রটিকে সমঘাত রৈখিক-সমীকরণতন্ত্র বলে।

(2) –এ $(b_1, b_2, \ldots b_m) \neq (0,\ 0,\ \ldots\ 0)$ হলে সমীকরণ-তন্ত্রটিকে অসমঘাত রৈখিক-সমীকরণতন্ত্র বলে।

8.4 রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধান, সঙ্গত (Consistent) ও অসঙ্গত রৈখিক সমীকরণতন্ত্র

সংজ্ঞা 8.3 : রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধান

n-সংখ্যক অজ্ঞাত রাশি, $x_1, x_2, \ldots\ x_n$ সাপেক্ষে m-সংখ্যক রৈখিক সমীকরণ দ্বারা গঠিত রৈখিক সমীকরণ-তন্ত্রের (1) দেখুন)

$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n$

একটি সমাধানরূপে বিবেচ্য হবে যদি অজ্ঞাতরাশির এই মানগুলি দ্বারা রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রের প্রতিটি সমীকরণ সিদ্ধ হয়।

সংজ্ঞা 8.4 : সঙ্গত রৈখিক সমীকরণতন্ত্র

একটি রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রকে সঙ্গত বলা হবে যদি সমীকরণতন্ত্রটিতে কমপক্ষে একটি সমাধানের অস্তিত্ব স্বীকৃত হয়।

সংজ্ঞা 8.5 : অসঙ্গত রৈখিক সমীকরণতন্ত্র

একটি রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রের যদি কোনওরূপ সমাধানের অস্তিত্ব না থাকে তবে রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রটিকে অসঙ্গত (inconsistent) আখ্যা দেওয়া হয়।

8.5 রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সংক্ষিপ্ত আকার

(8.3)-তে (I) হচ্ছে একটি রৈখিক সমীকরণতন্ত্র। উক্ত রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রকে আমরা বিভিন্ন আকারে প্রকাশ করতে পারি।

(a) ম্যাট্রিক্স-আকার (Matrix form)

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ma} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$$

হলে (1)-রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রটাকে

$AX = B$ .... (II)

আকারে প্রকাশ করা যায়। A-কে বলা হয় রৈখিক সমীকরণতন্ত্র (I)-র সহগ-ম্যাট্রিক্স (অজ্ঞাত রাশিগুলির সংলগ্ন সহগ-গুলি দ্বারা A গঠিত)। এই সংক্ষিপ্ত আকারটি (I)-র ম্যাট্রিক্স-আকার।

$B = 0$ ($m \times 1$ ক্রমযুক্ত শূন্যসম ম্যাট্রিক্সটি O দ্বারা চিহ্নিত) হলে সমঘাত রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রের সংক্ষিপ্ত আকার।

$AX = 0$ .... (III)

মন্তব্য 8.1 :

$AX = 0$ রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রের $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ সর্বদাই একটি সমাধান। অতএব **(III)-সমীকরণতন্ত্রটি সর্বদা সঙ্গত** (Consistent) এবং $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ সমাধানটিকে নগণ্য সমাধান (trivial solution) বলে। (III)-নং সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটি সমাধানে x_1, ... x_n এর মান একসঙ্গে যদি শূন্য না হয় তখন সেই সমাধানকে অ-নগণ্য (non-trivial) সমাধান বলে।

(b) সহগ-ম্যাট্রিক্সের সারি-ভেক্টরগুলির সাপেক্ষে রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রের প্রকাশ

$AX = B$ (II দেখুন)

রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সহগ-ম্যাট্রিক্স A-র সারি-ভেক্টরগুলি যথাক্রমে $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ হলে অর্থাৎ

$$\alpha_1 = (a_{11}, \; a_{12}, \ldots a_{1n})$$
$$\alpha_2 = (a_{21}, \; a_{22}, \ldots a_{2n})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_m = (a_{m1}, \; a_{m2}, \ldots a_{mn})$$

হলে রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটাকে নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$\alpha_1 X = b_1, \; \alpha_2 X = b_2, \ldots, \; \alpha_m X = b_m \text{ (iv)}$$

(C) সহগ-ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভ-ভেক্টরগুলির সাপেক্ষে রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রে প্রকাশ

$$AX = B \text{ (II দেখুন)}$$

রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রের সহগ-ম্যাট্রিক্স A-র স্তম্ভ ভেক্টরিগুলি

যথাক্রমে $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots \underline{\beta}_n$ হলে, অর্থাৎ

$$\underline{\beta}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \underline{\beta}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots \underline{\beta}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

হলে রৈখিক-সমীকরণতন্ত্রটিকে

$$x_1\underline{\beta}_1 + x_2\underline{\beta}_2 + \ldots + x_n\underline{\beta}_n = B \quad \text{(v)}$$

আকারে প্রকাশ করা যায়।

মন্তব্য 8.2 : লক্ষ করুন v-র B হচ্ছে সহগ-ম্যাট্রিক্স A-র স্তম্ভ-ভেক্টরগুলির রৈখিক-সমবায় (linear combination)

8.6 সমতুল্য রৈখিক সমীকরণতন্ত্র (equivalent system of equations) এবং রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য তিনটি প্রাথমিক প্রক্রিয়া (There elementary operations applicable to a system of linear equations)

সংজ্ঞা 8.6 : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ অজ্ঞাতরাশির সাপেক্ষে $AX = B$ এবং $A'X = B'$ এই দুটি রৈখিক সমীকরণতন্ত্রকে সমতুল্য বলা হবে যদি উভয় ক্ষেত্রে সমাধানসমূহ সম্পূর্ণভাবে একই প্রকারের হয়।

উদাহরণ 8.1 : $\begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 = 7 \; and \; -2x_1 - x_2 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 = 3 \qquad x_1 + 2x_2 = 1 \end{pmatrix}$

এই সমীকরণতন্ত্রদুটি একই সমাধান $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ উৎপন্ন করছে। অতএব এরা সমতুল্য রৈখিক সমীকরণতন্ত্র।

রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য তিনটি প্রাথমিক প্রক্রিয়া ঃ

প্রথম প্রক্রিয়া ঃ $AX = B$ (I অথবা II দেখুন) রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে i -তম ও j- তম সমীকরণদ্বয়ের মধ্যে পরস্পর স্থান বিনিময়-করণ।

দ্বিতীয় প্রক্রিয়া ঃ $AX = B$ রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে i -তম সমীকরণকে $\lambda(\lambda \in R)$ দ্বারা গুণ করে i -তম সমীকরণ-স্থানে প্রতিস্থাপন করণ।

তৃতীয় প্রক্রিয়া ঃ $AX = B$ রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে j তম সমীকরণকে $\lambda(\neq 0, \in R)$ দ্বারা গুণ করে i -তম সমীকরণের সঙ্গে যোগ করে যে সমীকরণটি উৎপন্ন হবে i -তম সমীকরণের পরিবর্তে তার স্থানে প্রতিস্থাপন করণ।

এই তিনটি প্রাথমিক প্রক্রিয়ার বিশেষ বৈশিষ্ট্য এই যে এই প্রক্রিয়াগুলির মধ্যে কমপক্ষে একটি বা একাধিক প্রয়োগে যে নতুন রৈখিক সমীকরণতন্ত্র উৎপন্ন হবে তা হবে পূর্ব সমীকরণতন্ত্রের সমতুল্য, অর্থাৎ উভয় সমীকরণতন্ত্র একইপ্রকার সমাধান দেবে। পরবর্তী উপপাদ্যটি লক্ষ্য করুন। তাছাড়া আর একটি বৈশিষ্ট্য সমীকরণতন্ত্রের রৈখিকতা (linearity) এই প্রাথমিক প্রক্রিয়াগুলির প্রয়োগে বিঘ্ন হয় না।

উপপাদ্য 8.1 : একটি রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের উপর এক বা একাধিকবার **প্রথমিক প্রক্রিয়া তিনটির** একটি বা সবকটি প্রয়োগে উৎপন্ন রৈখিক সমীকরণতন্ত্র অবশ্যই প্রাথমিক সমীকরণতন্ত্রের সমতুল্য হবে।

প্রমাণ ঃ প্রথম দুটি প্রাথমিক প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে উপপাদ্যের সত্যতা সহজেই বোঝা যাচ্ছে। সুতরাং তৃতীয় প্রাথমিক প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রেই উপপাদ্যটির সত্যতা নির্ণয় করা যাক্।

একটি রৈখিক সমীকরণতন্ত্রকে

$\underline{\alpha}_1 X = b_1, \underline{\alpha}_2 X = b_2, \ldots \underline{\alpha}_m X = b_m \quad \ldots\ldots(i)$

এই আকারে প্রকাশ করা যায়, $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_m$ যথাক্রমে সহগ-ম্যাট্রিক্সের সারি ভেক্টরগুলি 8.5 [a] এর IV দেখুন)

ধরা যাক্ (i) -র দ্বিতীয় সমীকরণটিকে $\lambda \in R$ $(\lambda \neq 0)$ দ্বারা গুণ করে প্রথম সমীকরণের সঙ্গে যোগ করা হলো। উৎপন্ন সমীকরণটিকে প্রথম সমীকরণের পরিবর্তে এই স্থানে স্থাপন করলে সমকরণতন্ত্রটি হয়

$(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)\ X = b_1 + \lambda b_2,\ \alpha_2 X = b_2, \ldots \alpha_m X = b_m \ldots$ (ii)

আমরা দেখাবো (i) ও (ii) সমতুল্য, অর্থাৎ (i) এবং (ii) -র সমাধান সেট একই সমাধান-সেট।

ধরা যাক্ $X = T$ হচ্ছে (i)-র যেকোনও একটি সমাধান।

অতএব $\alpha_1 T = b_1,\ \alpha_2 T = b_2, \ldots,\ \alpha_m T = b_m$

এখন সহজেই দেখা যাচ্ছে

$(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)\ T = b_1 + \lambda b_2$

অতএব $X = T$ অবশ্যই (ii) -র সমাধান। $X = T$ সমাধানটি (i) -র যেকোনও একটি সমাধান। অতএব প্রমাণিত হচ্ছে (i) -এর সমাধান সেট অবশ্যই (ii) -র সমাধান-সেট। বিপরীতক্রমে দেখানো যাবে (ii) -র যেকোন সমাধান অবশ্যই (i) -র সমাধান। অতএব (i) ও (ii) সমতুল্য রৈখিক-সমীকরণতন্ত্র।

মন্তব্য 8.3 : রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে প্রাথমিক প্রক্রিয়াগুলির প্রয়োগে একটি **শূন্য সমীকরণ** (এমন একটি সমীকরণ যার সহগপদগুলি ও ধ্রুবকপদটি শূন্যমান বিশিষ্ট) উৎপন্ন হলে তা সমীকরণ-তন্ত্র থেকে বাদ দেওয়া হবে। কারণ, শূন্যসমীকরণটি বাদ দিলে সমীকরণতন্ত্রের সমতুল্যতা অব্যাহত থাকে।

8.7 রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধান নির্ণয়-পদ্ধতি

প্রথম পদ্ধতি ঃ ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি (সারি সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান নির্ণয়)

(8.3) -র (I) -এ প্রকাশিত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটির সংক্ষিপ্ত ম্যাট্রিক্স আকার

$$AX = B$$

(8.5) (a) -র II দেখুন)

এখন A ও B ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের স্তম্ভগুলি ক্রমান্বয়ে সাজিয়ে একটি $m \ x \ (n + 1)$ ক্রমবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স গঠন করা যাবে যাকে রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের বর্ষিত ম্যাট্রিক্স (Augmented matrix) বলা হয়। এই বর্ধিত ম্যাট্রিক্সটি (A/B) দ্বারা সূচিত করা হলো। এতএব।

$$(A \ / \ B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}$$

এবার লক্ষ করুন (A/B) -র উপর যেকোন প্রাথমিক সারি প্রক্রিয়া $AX = B$-র উপর 8.6-এ বর্ণিত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে প্রযোজ্য একটি প্রাথমিক প্রক্রিয়ায় রূপান্তরিত হচ্ছে।

(AB)-র উপর R_{ij} সারিপ্রক্রিয়া প্রয়োগে AX =-র i-তম সমীকরণদ্বয়ের স্থান বিনিময় হচ্ছে।

(AB)-র উপর λR_i সারিপ্রক্রিয়া দ্বারা $AX = B$-র i-তম সমীকরণকে λ দ্বারা গুণ বোঝাচ্ছে।

(AB)-র উপর $R_i + \lambda R_j$ সারিপ্রক্রিয়া প্রয়োগে $AX = B$-র i-তম সমীকরণটি

{(i-তম সমীকরণ) + λ(j -তম সমীকরণ)} দ্বারা প্রতিস্থাপিত হচ্ছে।

অতএব এটাই প্রতিপন্ন হচ্ছে যে (AB)-র উর প্রাথমিক-সারি প্রক্রিয়া প্রয়োগে যে সারিসমতুল্য ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া যাচ্ছে তার পরিপ্রেক্ষিতে নতুন রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটি হবে পূর্বেকার সমীকরণতন্ত্রের সমতুল্য (8.6 এবং সংজ্ঞা 8.6 দেখুন), অর্থাৎ উভয় সমীকরণতন্ত্র একই প্রকার সমাধান দেবে।

সুতরাং সমাধান নির্ণয়ে আমাদের সহজতর কার্যকরী পদ্ধতি এটাই হলো যে $AX = B$ সমীকরণতন্ত্রের সংলগ্ন বর্ধিত ম্যাট্রিক্স $(A\backslash B)$ কে প্রাথমিক সারি প্রক্রিয়া দ্বারা সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সে রূপান্তরিত করে সমতুল্য-রৈখিক সমীকরণতন্ত্র গঠন করা যাবে এবং তা থেকে সহজেই সমাধান নির্ণয় করা যাবে। পরবর্তী উদাহরণগুলো দেখুন।

মন্তব্য 8.4 : (1) আপনারা কখনই (AB)-র উপর প্রাথমিক স্তম্ভ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করবেন না, কারন তাহলে, উৎপন্ন সমীকরণতন্ত্রটি পূর্ব-সমীকরণতন্ত্রের সমতুল্য হবে না।

(2) (AB)-র সারি সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সের শূন্য সারিগুলির সাপেক্ষে যে শূন্য সমীকরণগুলি পাওয়া যাবে তা অবশ্যই সমতুল্য-সমীকরণতন্ত্র থেকে বাদ যাবে। কারণ তাতে সমীকরণতন্ত্রের সমতুল্যতা ব্যহত হবে না।

(3) **সমতুল্য রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে কোনরূপ অসঙ্গতি এলে বুঝতে হবে**

$AX = B$ অসঙ্গত। (উদাহরণ ঃ 8.7 দেখুন)

উদাহরণ 8.2 :

$4x_1 + 8x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 0$

$2x_1 + 8x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 0$

$x_1 - 10x_2 + 9x_3 - 8x_4 = 0$

রৈখিক-মীকরণতন্ত্রটির সমাধান নির্ণয় করা যাক্। এ ক্ষেত্রে লক্ষ করুন সমীকরণ সংখ্যা < অজ্ঞাতরাশি সংখ্যা।

সমাধান : এই সমীকরণতন্ত্রের বর্ধিত ম্যাট্রিক্স :

$$(AB) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -6 & 7 & : & 0 \\ 2 & 8 & -10 & 12 & : & 0 \\ 1 & -10 & 9 & -8 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_{13}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 9 & -8 & : & 0 \\ 2 & 8 & -10 & 12 & : & 0 \\ 4 & 8 & -6 & 7 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - 4R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 9 & : & 8 & 0 \\ 0 & 28 & -28 & : & 28 & 0 \\ 0 & 48 & -42 & : & 39 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_2 \times \frac{1}{28}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 9 & -8 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 48 & -42 & 39 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - 48R_2]{R_1 + 10R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 6 & : & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \times \frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 + R_3]{R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & : & 0 \end{pmatrix}$$

(সারি-সমতুল্য ইশিলন আকৃতি)

অতএব (i)-র সমতুল্য রৈখিক সমীকরণতন্ত্র

$$x_1 + \frac{1}{2}x_4 = 0, x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 0, x_3 - \frac{3}{2}x_4 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$x_4 = c \in \mathrm{R}$ ধরে সমাধান $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}c \\ \frac{3}{2}c \\ c \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c, \frac{3}{2}c, c\right)$

এবার লক্ষ করুন

(a) প্রদত্ত সমীকরণতন্ত্রটির অসংখ্য সমাধান আছে। c-র বিভিন্ন বাস্তব মানে বিভিন্ন সমাধান। প্রতিটি সমাধান R^4 ভেক্টরদেশের একটি ভেক্টর।

(b) যেকোন সমাধান

$$= \frac{1}{2}c(-1,1,3,2)'$$

$$= \lambda\underline{\alpha}, \lambda = \frac{1}{2}c, \underline{\alpha} = (-1,1,3,2)'$$

যে-কোনো দুটি সমাধানের রৈখিক সমবায়

$$c_1(\lambda_1\underline{\alpha}) + c_2(\lambda_2\underline{\alpha}) = (c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2)\underline{\alpha}, c_1, c_2 \in R$$

অবশ্যই একটি সমাধান। অতএব, উপপাদ্য 4.2 অনুসারে, সমাধানগুলি দ্বারা গঠিত R^4-র উপসেটটি R^4 -র একটি উপভেক্টরদেশ, এই উপভেক্টরদেশটি $L\ \{\alpha\}$ (α-র রৈখিত বিস্তৃতি (linear Span)। $\alpha \neq \theta$ (শূন্য ভেক্টর) হওয়ায় $\{\underline{\alpha}\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন-সেট। তারফলে বলা যায় সমাধানগুলি দ্বারা গঠিত R^4-র উপভেক্টরদেশ $L\{\underline{\alpha}\}$-র একটি ভিত্তি (basis) হচ্ছে $\{\underline{\alpha}\}$ এবং $L\ \{\underline{\alpha}\}$-র মাত্রা $= 1$

(c) এখানে বর্ধিত ম্যাট্রিক্সে $B =$ শূন্যসম স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স এবং $(A\backslash B)$-তে প্রাথমিক সারিপ্রক্রিয়া প্রয়োগে শূন্যসম স্তম্ভ-ম্যাট্রিক্সটি অবিকৃত থাকছে। তারফলে যেকোনো সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে আমরা $(A\backslash B)$-র পরিবর্তে কেবলমাত্র সহগ-ম্যাট্রিক্স A নিয়ে একই প্রকারে এগিয়ে যেতে পারি।

উদাহরণ 8.3 :

$$x_1 - 2x_2 = 0$$
$$-7x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 = 0$$

সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটির সমাধান নির্ণয় করা যাক্। লক্ষ করুন এখানে সমীকরণ সংখ্যা > অজ্ঞাত রাশি সংখ্যা।

সমাধান : সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের বর্ধিত ম্যাট্রিক্স $(A\backslash B)$-র পরিবর্তে সহগ-ম্যাট্রিক্স A নিয়েই অগ্রসর হওয়া যায় (উদাঃ 8.2 মন্তব্য (C) দেখুন)।

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 - R_1]{R_2 + 7R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \left(-\frac{1}{12}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 - 4R_2]{R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(সারি-সমতুল্য ইশিলন আকৃতি)

সমতুল্য সমীকরণতন্ত্র

$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ 0 = 0$

শূন্য সমীকরণটি পরিত্যাজ্য এবং সমাধান $(0, 0)^t$। অতএব এক্ষেত্রে কেবলমাত্র একটি সমাধান এবং তা $(0, 0)^t$। নগণ্য (trivial) সমাধান ব্যতীত গ্রহণযোগ্য (non-trivial) কোনও সমাধান নেই।

উদাহরণ 8.4 :

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$

$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0$

রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে সমীকরণ সংখ্যা = অজ্ঞাত রাশি-সংখ্যা সমাধান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : সহগ ম্যাট্রিক্স $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 - R_2 \\ R_3 - R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(সারি-সমতুল্য ইশিলন আকৃতি)

সমতুল্য-সমীকরণতন্ত্র

$x_1 - x_3 = 0, \ x_2 + 3x_3 = 0$

(শূন্য-সমীকরণ বর্জিত হয়েছে)

এখন $x_3 = c \in R$ ধরে নির্ণেয় সমাধান $= (c, -3c, c)^1 \in R^3$

এবার লক্ষ্য করুন

(a) সমাধান-সংখ্যা অসংখ্য

(b) যে-কোনো সমাধান $= c\alpha$, $\alpha = (1, -3, 1)'$ এবং যে-কোনো দুটি সমাধানের রৈখিক সমবায়

$\lambda(c_1\alpha) + \mu(c_2\alpha) = (\lambda c_1 + \mu c_2)\alpha$

অবশ্যই একটি সমাধান। অতএব সমাধানগুলি R^3-র একটি ভেক্টর উপদেশ গঠন করে। এই ভেক্টর উপদেশ $= L\{\underline{\alpha}\}$, $\underline{\alpha} = (1, -3, 1)'$ এবং $\underline{\alpha} = \theta$ হওয়ায় $\{\underline{\alpha}\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন। অতএব এই সমাধান দেশের একটি ভিত্তি $\{\underline{\alpha}\}$ এবং মাত্রা $= 1$

উদাহরণ 8.5 :

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$

$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8$

$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 11$

অসমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান : বর্ধিত ম্যাট্রিক্স $(AB) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 11 \end{array}\right)$

$$\begin{matrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 - R_2 \\ R_3 - R_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্স)

সমতুল্য-সমীকরণতন্ত্র (শূন্য-সমীকরণটি বাদে)

$x_1 - x_3 = -2$ বা, $x_1 = -2 + x_3$

$x_2 + 3x_3 = 5$ $x_2 = 5 - 3x_3$

$x_3 = c \in \mathrm{R}$ ধরে নির্ণেয় সমাধান $= (-2 + c, 5 - 3c, c)'$

$= (-2, 5, 0)' + c(1, -3, 1)'$

এবার লক্ষ্য করুণ

(a) সমাধান-সংখ্যা অসংখ্য, কারণ c যে কোন বাস্তব মান গ্রহণে সক্ষম। সাধারণ সমাধান = $(-2, 5, 0)' + c(1, -3, 1)'$

(b) $c = 0$ হলে বিশেষ সমাধান $(-2, 5, 0)^1$

(c) এই উদাহরণ 8.5-র সংশ্লিষ্ট সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটি হচ্ছে উদাহরণ 8.4 এবং উদাহরণ 8.4-র সাধারণ সমাধান (General Solution) $c(1, -3, 1)'$ অতএব দেখাযাচ্ছে ঃ

অসমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সাধারণ সমাধান

= প্রদত্ত অসমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের একটি বিশেষ সমাধান + সংশ্লিষ্ট সমঘাত সমীকরণতন্ত্রের সাধারণ সমাধান।

এই বিষয়টি যেকোনো অসমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। (উপপাদ্য) 8.7 দেখুন।

(d) **এখানে প্রদত্ত সমীকরণতন্ত্রের সমাধানগুলি R^3-র কোনও ভেক্টর উপদেশ গঠন করে না।**

উদাহরণ 8.6 :

$$2x_1 + 2x_2 = 5$$
$$3x_2 + 2x_3 = 7$$

রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন এবং দেখান সমাধানগুলি দ্বারা গঠিত সেটটি R^3-র ভেক্টর উপদেশ নয়।

সমাধান : বর্ধিত ম্যাট্রিক্স $(A \setminus B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & : & 5 \\ & & & : & \\ 0 & 3 & 2 & : & 7 \end{pmatrix}$

$$R_1 \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & : & \frac{5}{2} \\ & & & : & \\ 0 & 3 & 2 & : & 7 \end{pmatrix} R_2 \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} & & & : & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 0 & : & \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & : & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$R_1 - R_2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & : & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & : & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

(সারি-সমতুল্য ইশিলন আকৃতি)

সমতুল্য সমীকরণতন্ত্র

$$x_1 - \tfrac{2}{3}x_3 = \frac{1}{6}$$

$$x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 = \tfrac{7}{3}$$

বা, $x_1 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{6}, x_2 = -\tfrac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}$

[প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় থেকেই x_1 ও x_2 -র এরুপ মান পাওয়া যাচ্ছে। কিন্তু এখানে আমরা সাধারণ নিয়মটি অনুসরণ করেছি যাতে যেকোনও সমীকরণতন্ত্রের ক্ষেত্রে আমরা এগুতে পারি]

$x_1 = c \in R$ ধরে

সাধারণ সমাধান (General Solution) = $\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}c, \frac{7}{3}-\frac{2}{3}c, c\right)'$

$$= \left(\frac{1}{6}, \frac{7}{3}, 0\right)' + c\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)'$$

ধরা যাক এই সমাধানগুলি দ্বারা গঠিত সেট S

$$\underline{\alpha} = \left(\frac{1}{6}, \frac{7}{3}, 0\right)' + c_1\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)' \in S$$

$$\underline{\beta} = \left(\frac{1}{6}, \frac{7}{3}, 0\right)' + c_2\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)' \in S$$

$c_1, \ c_2 \in R$

হলে, $\underline{\alpha}$ ও $\underline{\beta}$ -র রৈখিক সমবায়

$$\begin{matrix}\lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} \\ (\lambda, \mu \in R)\end{matrix} = (\lambda+\mu)\begin{pmatrix}\frac{1}{6} \\ \frac{7}{3}\end{pmatrix} + (\lambda c_1 + \mu c_2)\begin{pmatrix}\tfrac{2}{3} \\ -\tfrac{2}{3} \\ 1\end{pmatrix}$$

$\notin S$, কারণ সাধারণভাবে $\lambda + \mu \neq 1$ অতএব উপপাদ্য 4.2 অনুসারে S সেটটি R^3 -র ভেক্টর উপদেশ নয়।

উদাহরণ 8.7 ঃ

$$2x_1 + x_2 = 6$$
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 8$$

এই রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটির বর্ধিত-ম্যাট্রিক্সটিকে সারি সমতুল্য ইশিলন আকারে পরিণত করে সমতুল্য সমীকরণতন্ত্রটি তৈরি করুন এবং দেখান সমীকরণতন্ত্রটি অসঙ্গত (inconsistent), অর্থাৎ সমাধান-অস্তিত্ব অসম্ভব।

সমাধান

$$(A \setminus B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & 6 \\ 1 & 0 & 1 & : & 1 \\ 1 & 1 & 1 & : & 8 \end{pmatrix}$$

$$R_{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 0 & : & 6 \\ 1 & 1 & -1 & : & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & : & 4 \\ 0 & 1 & -2 & : & 7 \end{pmatrix}$$

$$R_3 - R_2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & : & 4 \\ 0 & 0 & 0 & : & 3 \end{pmatrix} R_3 \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & : & 4 \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 - R_3 \\ R_2 - 4R_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 \end{pmatrix} \text{(সারি-সমতুল্য ইশিলন আকৃতি)}$$

সমতুল্য রৈখিক-সমীকরণতন্ত্র

$x_1 + x_3 = 0$

$x_2 - 2x_3 = 0$

$0 = 1$

তৃতীয় সমীকরণটি একটি অসম্ভব সমীকরণ। অত-এব সমীকরণতন্ত্রটি অসঙ্গত।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সহগ-ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স-এর সাহায্যে সমাধান নির্ণয়

$AX = B,\ A = (a_{ij})_{n\times n},\ B = (b_1,\ \ldots\ b_n)^t$

রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে (8:3-এ I এবং 8.5 এ 11 দেখুন)

সমীকরণ সংখ্যা = অজ্ঞাতরাশি সংখ্যা (অর্থাৎ $m = n$) এবং সহগ ম্যাট্রিক্স A একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স (অর্থাৎ $|A| \neq 0$) হলে A^{-1} -র অস্তিত্ব স্বীকৃত হবে। কেবলমাত্র এই বিশেষ ক্ষেত্রে আমরা লক্ষ করছি

$AX = B$

$\Rightarrow A^{-1}\ (AX) = A^{-1}B$

$\Rightarrow IX = A^{-1}B$ (1 হচ্ছে $n \times n$ একক ম্যাট্রিক্স)

$\Rightarrow X = A^{-1}B$

নীচের উদাহরণটি দেখুন।

উদাহরণ 8.8

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11$

$x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$3x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 21$

সমাধান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \text{ এবং } |A| = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

অতএব A^{-1} -র অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে এবং

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 11 & -5 & -6 \\ -27 & 13 & 15 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -27 & 2 \\ -5 & 13 & -1 \\ -6 & 15 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{অতএব } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 11 & -27 & 2 \\ -5 & 13 & -1 \\ -6 & 15 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

বা, $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

তৃতীয় পদ্ধতি ঃ ক্রেমারের পদ্ধতি (নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান নির্ণয়)

ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে n-সংখ্যক চলরাশি সম্বলিত n-সংখ্যক সমীকরণকে লেখা যায় এইভাবে।

$AX = B,\ A = (a_{ij})_{n\times n},\ X = (x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n)',\ B = (\underline{b}_1,\ \underline{b}_2\ \dots,\ \underline{b}_n)^t$

রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটির বিস্তৃতাকার

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n} = b_1 \quad (8)$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (8)$

....

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$

এখানে সমীকরণ-সংখ্যা = চল রাশি বা অজ্ঞাত রাশি সংখ্যা সংশ্লিষ্ট নির্ণায়ক $|A| = |a_{ij}|_{n\times n} \neq 0$ ধরাহলো। ধরা যাক্ A_{ij} হচ্ছে $|A|$-র a_{ij} পদের সহ-উৎপাদক (Cofactor)। এখন

$(8.1)\ \times A_{11} + (2)\times A_{21} + \ldots + (n)\times A_{n1} \Rightarrow$

$|A|x_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}$

বা, $$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ b_n & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\left[\ \text{কারণ}\quad \sum_{i=1}^{n} a_{is}A_{ir} = \begin{cases} 0, s \neq r \\ |A|, s = r \end{cases}\right]$$

অনুরূপে

$$x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \ldots . x_n = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}$$

লক্ষ করুন $|A| \neq 0$ হলে তবেই এ পদ্ধতি অনুসৃত হচ্ছে, নচেৎ এ পদ্ধতি প্রয়োগ করা যাবে না।

উদাহরণ 8.9 : 6 ক্রমারের পদ্ধতি অনুসরণ করে

$5x_1 + x_2 + 7x_3 = 12$

$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + x_2 - x_3 = -4$

সমীকরণ-তন্ত্রটির সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ সংশ্লিষ্ট সহগ নির্ণায়ক $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -40 \neq 0$

অতএব ক্রেমারের পদ্ধতিক্রমে

$$x_1 = \frac{1}{-40}\begin{vmatrix} 12 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, x_2 = \frac{1}{-40}\begin{vmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{-40}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 12 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 3$$

8.8 রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধান-অস্তিত্ব ও সমাধান-সংখ্যা সংক্রান্ত উপপাদ্যসমূহ

উপপাদ্য 8.2 (সমাধান অস্তিত্ব সংক্রান্ত) ঃ n-সংখ্যক অজ্ঞাতরাশি $x_1, x_2, \ldots, x_n$ সাপেক্ষ m সংখ্যক রৈখিক সমীকরণ দ্বারা গঠিত অসমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্র

$Ax = B$ (83 এর (1) দেখুন)

সঙ্গত (nocsistent) হবে তার প্রয়োজনীয় ও যথার্থ শর্ত

র‍্যাঙ্ক $((A\backslash B))$ = র‍্যাঙ্ক (A) (i)

প্রমাণ ঃ $Ax = B$ সমীকরণতন্ত্রে সহগম্যাট্রিক্স A-র স্তম্ভ ভেক্টরগুলি যথাক্রমে $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n$ হলে (8.5)

(c) অনুসারে সমীকরণতন্ত্রটির বিকল্প প্রকাশ ঃ

$x_1\underline{\beta}_1 + x_2\underline{\beta}_2 + \ldots + x_n\underline{\beta}_n = B$ (ii)

ধরা যাক (ii)-র সমাধান অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে, অর্থাৎ (ii) সঙ্গত। তাহলে $x_1, x_2, \ldots, x_n$ এই অজ্ঞাত রাশিগুলির এমন মান পাওয়া যাবে যার দ্বারা (ii) সিদ্ধ হবে। অতএব এক্ষেত্রে B স্তম্ভ-ভেক্টরটি $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2 \ldots, \underline{\beta}_n$ স্তম্ভ-ভেক্টরগুলির রৈখিক সমবায়। তারফলে বলা যায় $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2 \ldots, \underline{\beta}_n$ স্তম্ভ-ভেক্টরগুলি দ্বারা গঠিত ভেক্টরদেশ $L\{\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n\}$-এ বা A ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভ-দেশে (Column-Space-এ) B ভেক্টরটি অবস্থিত। অতএব $(A|B)$ ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভদেশের মাত্রা = A ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভদেশের মাত্রা, অর্থাৎ র‍্যাঙ্ক $((A|B))$ = র‍্যাঙ্ক (A) [কারণ, আমরা জানি যে কোনো ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে স্তম্ভদেশের মাত্রা = সারিদেশের মাত্রা = নির্ণায়ক র‍্যাঙ্ক = র‍্যাঙ্ক]।

বিপরীতক্রমে, র‍্যাঙ্ক $((A|B))$ = র‍্যাঙ্ক $(A) = r$ (একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা) হলে, A ম্যাট্রিক্সের সর্বাধিক r সংখ্যক স্তম্ভ-ভেক্টর রৈখিকভাবে স্বাধীন (linearly independent) এবং ওই। সংখ্যক স্তম্ভ-ভেক্টরই হবে (A|B)-র সর্বাধিক রৈখিকভাবে ভেক্টর, কারণ B ভেক্টরটি হচ্ছে A-র স্তম্ভ-ভেক্টরগুলির রৈখিক সমবায় ((ii) অনুসারে)। এখন লেখা বা ধারণা করার সুবিধার্থে আমরা ধরি $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots \underline{\beta}_r$ $(r \leq n)$ হচ্ছে। r-সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভ-ভেক্টর। তাহলে অবশ্যই

$B = c_1\underline{\beta}_1 + c_2\underline{\beta}_2 + \ldots + c_r\underline{\beta}_r,\ c_i \in R$ এবং $(c_1, c_2, \ldots c_r) \neq (0, 0, \ldots 0)$

[কারণ, অবশিষ্ট $\underline{\beta}_{r+i}, \ldots, \underline{\beta}_n$ ভেক্টরগুলি $\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_r$ -র সাপেক্ষে রৈখিক সমবায়]

$= c_1\underline{\beta}_1 + c_2\underline{\beta}_2 + \ldots + c_r\underline{\beta}_r + 0\underline{\beta}_{r+1} + \ldots + 0\underline{\beta}_n \quad \text{(iii)}]$

এবার (ii) এবং (iii) অনুসারে সহজেই বলা যায় $c_1, c_2, \ldots, c_r, 0, 0, \ldots, 0) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ হচ্ছে $AX = B$-র একটি সমাধান এবং তারফলে প্রতিপন্ন হচ্ছে $AX = B$ সঙ্গত।

মন্তব্য ঃ $AX = B$ -র ক্ষেত্রে $B = 0$ (শূন্য-সম স্তম্ভ-ম্যাট্রিক্স) হলে আমরা

$AX = 0$

সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটি পাচ্ছি এবং এক্ষত্রে অবশ্যাই র‍্যাঙ্ক $((A|0))$ = র‍্যাঙ্ক (A) অতএব $AX = 0$ সর্বদা সঙ্গাত ($x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$ সর্বদা এই সমীকরণতন্ত্রের একটি সমাধান)

উপপাদ্য 8.3 : (নগণ্য সমাধান সংক্রান্ত) ঃ

n সংখ্যক অজ্ঞাতরাশি $x_1, x_2, \ldots x_n$ সাপেক্ষে n-সংখ্যক রৈখিক সমীকরণদ্বারা গঠিত সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্র $AX = 0$ -র $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ হবে একমাত্র সমাধান যখন $|A| \neq 0$ বা যখন ম্যাট্রিক্স A-র র‍্যাঙ্ক বা মাত্রা n।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $|A| \neq 0$, এতএব A^{-1} -র অস্তিত্ব স্বীকৃত হচ্ছে এবং $AX = 0$ হতে আমরা পাই $A^{-}(AX) = A^{-1}0$ বা, $(A^{-1}A)\ X = 0$

বা, $X = 0$

অতএব $X = 0$

উপপাদ্য 8.4 : (নগণ্য ব্যতীত গ্রহণযোগ্য সমাধানের অস্তিত্ব সংক্রান্ত)

n সংখ্যক অজ্ঞাতরাশি $x_1, x_2, \ldots x_n$ সাপেক্ষে n-সংখ্যক সমীকরণদ্বারা গঠিত সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্র $AX = 0$-র $(x_1. x_2, \ldots x_n) \neq (0, 0, \ldots 0)$ জাতীয় সমাধান থাকবে তার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত র‍্যাঙ্ক $(A) < n$.

প্রমাণ ঃ প্রয়োজনীয় শর্ত ঃ ধরা যাক্ $Ax = 0$ সমীকরণতন্ত্রটির $(x_1, x_2, \ldots x_n) \neq (0, 0, \ldots 0)$ জাতীয় সমাধান আছে এবং $m_1, m_2, \ldots, m_n$ হচ্ছে এই জাতীয় একটি সমাধান।

অতএব

$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + \ldots + a_{1n}m_n = 0$

$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + \ldots a_{2n}m_n = 0 \quad \text{(ii)}$

....

$a_{n1}m_1 + a_{n2}m_2 + \ldots + a_{nn}m_n = 0$

এখন যেহেতু $(m_1, m_2, \ldots m_n) \neq (0, 0, \ldots 0)$, অতএব সুবিধার্থে আমরা ধরি $m_1 \neq 0$ এবার লক্ষ করুন

$$m_1|A| = m_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ m_1a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_na_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m_1a_{11} + m_2a_{12} + \ldots + m_na_{1n} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ m_1a_{21} + m_2a_{22} + \ldots + m_na_{2n} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \\ m_1a_{n1} + m_2a_{n2} + \ldots + m_na_{nn} & a_{2n} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$[C_1 + m_2C_2 + m_3C_3 + \ldots + m_nC_n$ প্রক্রিয়া দ্বারা]

$$= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{((i) অনুসারে)}$$

অতএব $|A| = 0$ অর্থাৎ র‍্যাঙ্ক $(A) < n$

m_1-র পরিবর্তে $m_1, m_2, \ldots m_n$ -র অপর কোনও সংখ্যা $\neq 0$ হলে উপপাদ্যের প্রমাণ একই প্রকারে হবে।

যথেষ্ট শর্ত ঃ

ধরা যাক র‍্যাঙ্ক $(A) = r\ (< n)$

অতএব $AX = 0$-র সহগম্যাট্রিক্স A-কে প্রাথমিক সারি প্রক্রিয়া দ্বারা নিম্নলিখিত আকারে সারি-সমতুল্য ইশিলন আকৃতিতেপরিণত করা যাবে ঃ

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 & b_{1r+1} \cdots b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 & b_{2r+1} \cdots b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & b_{rr+1} \cdots b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots\ldots 0 \end{pmatrix}$$

অতএব সমতুল্য রৈখিক সমীকরণমণ্ডলী ঃ

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -b_{1r+1}x_{1r+1} - \ldots - b_{1n}x_n \\ x_2 = -b_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - b_{2n}x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_r = -b_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - b_{rn}x_n \end{array}\right\} \ldots (iii)$$

যেখানে $x_{r+1},\ldots, x_n$ অজ্ঞাতরাশিগুলি R ফিল্ডের যেকোনো মান গ্রহণে সক্ষম। $b_{1r+1},\ldots, b_{rn}$ নির্দিষ্ট বাস্তবমান যুক্ত। অতএব $x_{r+1} = m_{r+1},\ldots, x_n = m_n$ ধরে $AX = 0$-র একটি সমাধান হচ্ছে

$(-b_{1r+1}\ m_{r+1}\ -\ldots-\ b_{1n}m_n,\ldots\ldots\ldots, -b_{rr+1}m_{r+1}\ -\ldots-b_{rn}m_n,\ m_{r+1},\ m_{r+2},\ \ldots m_n)$।

কেবলমাত্র $m_{r+1} = \ldots = m_n = 0$ ক্ষেত্রে $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ নগণ্য সমাধান থাকছে, নতুবা $AX = 0$ সমীকরণতন্ত্রের $(x_1, x_2,\ldots x_n) \neq (0, 0,\ldots 0)$ জাতীয় সমাধান থাকছে। অতএব শর্তটি যে যথেষ্ট তা প্রমাণিত হলো।

মন্তব্য 8.5 : এক্ষেত্রে সমাধান সংখ্যা অগুনিত।

উপপাদ্য 8.5 : (সমাধান-দেশ সংক্রান্ত)

n-সংখ্যক অজ্ঞাত রাশি $x_1, x_2,\ldots x_n$ সাপেক্ষে সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্র $AX = 0$-র সমাধানটি বা সমাধানগুলি সর্বদা R^n -ভেক্টরদেশের ভেক্টর উপদেশ। [এখন A-র সারিসংখ্যা বা $AX = 0$-র সমীকরণসংখ্যা $\leq n$]

প্রমাণ : ধরা যাক নগন্য সমাধান $x_1 = x_2 =\ldots= x_n = 0$ ছাড়া $AX = 0$-র অন্য কোনও সমাধান নেই। এক্ষেত্রে $\{\theta = (0,0,\ldots,0)^1\} \subset R^n$ এবং এটি R^n-র ভেক্টর উপদেশ যাকে শূন্য উপভেক্টর উপদেশ বলে (ভেক্টর উপদেশ হবার কারণ $\theta + \theta = \theta$ এবং $\lambda\theta = \theta$, উপপাদ্য 4.1 দেখুন বা উদাহণ 4.11 দেখুন)

যখন $AX = 0$-র নগণ্য সমাধান ছাড়াও গ্রহণযোগ্য সমাধান থাকবে ধরা যাক S হচ্ছে সমাধানগুলি দ্বারা গঠিত সেট। অবশ্যই $S \subset R^n$ এখন $x_1 \in s,\ x_2 \in s$ এবং $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ হলে

$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1(Ax_1) + \lambda_2\ (Ax_2) = 0\ [\ \because\ Ax_1 = Ax_2 = 0]$

অতএব প্রমাণিত হলো

$x_1,\ x_2\ \in S$ এবং $\lambda_1, \lambda_2\ \in R \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in s$

এবং তারফলে, উপপাদ্য 4.2 অনুসারে, S হচ্ছে R^n-র ভেক্টর উপদেশ

মন্তব্য 8.6 : $AX = 0$-র সমাধানগুলি দ্বারা গঠিত R^n-র উপভেক্টর দেশটি আমরা $X(A)$ দ্বারা চিহ্নিত করছি। $X(A)$ হচ্ছে সমাধান-দেশ (Solution Space)

উপপাদ্য 8.6 : n সংখ্যক অজ্ঞাতরাশি সাপেক্ষে সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্র $AX = 0$-র সহগম্যাট্রিক্স

A-র র‍্যাঙ্ক r তাহলে $AX = 0$-র সমাধানমণ্ডলী দ্বারা গঠিত সমাধানদেশ $X(A)$-র মাত্রা হবে $n - r$ (A-র পদগুলি R-ক্ষেত্র হতে সংগৃহীত) এবং $A = (a_{ij})\ m\times n$

প্রমাণ ঃ n-সংখ্যক অজ্ঞাতরাশি সাপেক্ষে $AX = 0$ রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সহগ ম্যাট্রিক্স A-র র‍্যাঙ্ক r হলে আমরা প্রমাণ করব সমাধানদেশ $X(A)$-র র‍্যাঙ্ক $n-r$

A ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভ-ম্যাট্রিক্সগুলি যথাক্রমে $\underline{\beta}_1,\ \underline{\beta}_2 \ldots \underline{\beta}_n$ হলে $AX = 0$ -র সংক্ষিপ্ত আকার

$x_1\underline{\beta}_1 + x_2\underline{\beta}_2 + \ldots + x_n\underline{\beta}_n = 0$ (শূন্যময় স্তম্ভ-ম্যাট্রিক্স) ... (i)

[(8.5) (c) দেখুন]

যেহেতু A-র র‍্যাঙ্ক r, অতএব A-এর স্তম্ভ-র‍্যাঙ্ক $= r$ এবং তার ফলে $\underline{\beta}_1,\ \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_n$ ভেক্টরগুলির মধ্যে r-সংখ্যক রৈখিক-অনির্ভর। মনে করা যাক্

$\{\underline{\beta}_1,\ \underline{\beta}_2, \ldots, \underline{\beta}_r\}$

রৈখিকভাবে স্বাধীন (প্রথম r-সংখ্যক ভেক্টরের পরিবর্তে যেকোন r-সংখ্যক ভেক্টর নিলে প্রমাণের ধারা একই থাকবে)। এখন অবশিষ্ট স্তম্ভ-ভেক্টরগুলি এই r-সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভ-ভেক্টরগুলির সাপেক্ষে রৈখিক সমবায়। সুতরাং আমরা লিখছি।

$$\underline{\beta}_{r+1} = a_{11}\underline{\beta}_1 + a_{12}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{1r}\underline{\beta}_r$$

$$\underline{\beta}_{r+2} = a_{21}\underline{\beta}_1 + a_{22}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{2r}\underline{\beta}_r$$

$$\underline{\beta}_n = a_{n-r1}\underline{\beta}_1 + a_{n-r2}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{n-rr}\underline{\beta}_r$$

$(a_{ij} \in R)$

বা $a_{11}\underline{\beta}_1 + a_{12}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{1r}\underline{\beta}_r + (-1)\underline{\beta}_{r+1} = 0$

$$a_{21}\underline{\beta}_1 + a_{22}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{2r}\underline{\beta}_r + (-1)\underline{\beta}_{r+2} = 0$$

....

$$a_{n-r1}\underline{\beta}_1 + a_{n-r2}\underline{\beta}_2 + \ldots + a_{n-rr}\underline{\beta}_r + (-1)\underline{\beta}_n = 0$$

এই সমীকরণতন্ত্রটিকে (1)-র সঙ্গে তুলনা করে বলা যায়

$X_1 = (a_{11},\ a_{12}, \ldots,\ a_{1r},\ -1,\ 0, \ldots, 0)^1.$

$X_2 = (a_{21},\ a_{22}, \ldots,\ a_{2r},\ 0,\ -1, \ldots, 0)^1$

....

$X_{n-r} = (a_{n-r1},\ a_{n-r2}, \ldots,\ a_{n-rr},\ 0,\ 0, \ldots, (-1))^1$

হচ্ছে $AX = 0$ -র $(n - r)$ সংখ্যক সমাধান। এই সমাধানগুলি একটি রৈখিকভআবে স্বাধীন সেট গঠন

করে, কারণ

$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_{n-r} X_{n-r} = 0$ (শূন্যভেক্টর)

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$

অতএব দেখা গেল সমাধান দেশ $X(A)$-র $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}\}$ এই উপসেটটি রৈখিকভাবে স্বাধীন। উপরন্তু $X(A)$-র যেকোনও সমাধান

$x_1 = k_1,\ x_2 = k_2, \ldots,\ x_n = k_n,$

অর্থাৎ $(k_1, k_2, \ldots k_n)'$ হচ্ছে $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ এর রৈখিক সমবায় (কারণ নীচে দেখানো হয়েছে)।

[$x_1 = k_1,\ x_2 = k_2, \ldots,\ x_n = k_n$ সমাধান হওয়ায় (i) থেকে

$k_1 \underline{\beta}_1 + k_2 \underline{\beta}_2 + \ldots + k_r \underline{\beta}_r + k_{r+1} \underline{\beta}_{r+1} + \ldots + k_n \underline{\beta}_n = 0$

বা $k_1 \underline{\beta}_1 + \ldots + k_r \underline{\beta}_r + k_{r+1}[a_{11} \underline{\beta}_1 + a_{12} \underline{\beta}_2 + \ldots + a_{1r} \underline{\beta}_r]$

$+ k_{r+2}\ [a_{21} \underline{\beta}_1 + a_{22} \underline{\beta}_2 + \ldots + a_{2r} \underline{\beta}_r]$

$+ \ldots + k_n [a_{n-r1} \underline{\beta}_1 + a_{n-r2} \underline{\beta}_2 + \ldots + a_{n-rr} \underline{\beta}_r] = 0$

বা, $(k_1 + a_{11} k_{r+1} + a_{21} k_{r+2} + \ldots + a_{n-r1} k_n) \underline{\beta}_1 + \ldots + \underline{\beta}_r$

$[k_r + a_{1r}\ k_{r-1} + a_{2r} k_{r-2} + \ldots + a_{n-rr} k_n] = 0$

এখন যেহেতু $\{\underline{\beta}_1, \ldots, \underline{\beta}_r\}$ রৈখিক অনির্ভর, অতএব

$k_1 = -a_{11} k_{r+1} - a_{21} k_{r+2} - \ldots - a_{n-r1},\ k_n$

....

$k_1 = -a_{1r} k_{r+1} - a_{2r} k_{r+2} - \ldots - a_{n-rr}\ k_n$

এবং তার ফলে

$(k_1,\ k_2, \ldots k_r,\ k_{r+1},\ k_n)'$

$= \quad - k_{r+1}\ (a_{11},\ a_{12}, \ldots,\ a_{1r},\ -1,\ 0, \ldots 0)'$

$\quad\quad - k_{r+2}\ (a_{21},\ a_{22}, \ldots,\ a_{2r},\ 0,\ -1, \ldots 0)'$

....

$\quad\quad - k_n\ (a_{n-r1},\ a_{n-r2}, \ldots,\ a_{n-rr},\ 0,\ 0, \ldots -1)'$

$= k_{r+1} \underline{X}_1 - k_{r+2} \underline{X}_2 - \ldots - k_n \underline{X}_{n-r}$]

অতএব $X(A)$-র একটি ভিত্তি

$\{\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_{n-r}\}$

এই সেটে $(n-r)$ সংখ্যক সমাধান-ভেক্টর থাকায় $X(A)$-র মাত্রা $(n - r)$ সুতরাং প্রমাণিত হলো A-র

মাত্রা + $X(A)$ -র মাত্রা = n (অজ্ঞাত রাশি সংখ্যা)

অনুসিদ্ধান্ত 8.1 : $AX = 0$ রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে অজ্ঞাতরাশি সংখ্যা n এবং সমীকরণসংখ্যা $< n$ হলে সমীকরণতন্ত্রটির সমাধান সংখ্যা হবে অসংখ্য।

প্রমাণ ঃ A-র মাত্রা r হলে, $r \leq m < n$ এবং

A-র মাত্রা $+X(A)$-র মাত্রা $= n$

$\Rightarrow X(A)$-র মাত্রা $= n - r > 0$

$\Rightarrow X(A)$-র এক বা একাধিক রৈখিকভাবে স্বাধীন সমাধান ভেক্টর আছে (একটি সমাধানের ক্ষেত্রে তা অবশ্যই গ্রহণযোগ্য সমাধান, নচেৎ রৈখিকভাবে স্বাধীন হবে না।

এখন $AX = 0$-র সাধারণ সমাধান (General Solution) হচ্ছে রৈখিকভাবে স্বাধীন সমাধান ভেক্টরটির বা একাধিক রৈখিকভাবে স্বাধীন সমাধান ভেক্টরগুলির রৈখিক সমবায়। রৈখিক-সমবায়ে বিভিন্ন স্কেলারের জন্য বিভিন্ন সমাধান থাকবে এবং তারফলে বলা যায় সমীকরণতন্ত্রটির অসংখ্য সমাধান থাকবে। সবকটি স্কেলারের মান শূন্য-মান হলে আমরা $AX = 0$-নগণ্য সমাধান $(0, 0,..., 0)'$ পাব। (উদাহরণ 8.2 দেখুন)

অনুসিদ্ধান্ত 8.2 : n সংখ্যক-অজ্ঞাতরাশি সাপেক্ষে $AX = 0$ রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে $m\ (> n)$ সংখ্যক সমীকরণ থাকলে (অর্থাৎ $A = (a_{ij})_{m \times n}$ -র $m > n$ হলে)

(i) এবং A-র মাত্রা n হলে সমাধান সংখ্যা কেবলমাত্র একটি এবং সমাধানটি নগন্য সমাধান $(0, 0,..., 0)^t$।

(ii) এবং A-র মাত্রা $< n$ হলে সমাধান সংখ্যা অসংখ্য।

প্রমাণ ঃ (i) $AX = 0$ রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে A-র মাত্রা n হলে এবং A-র সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সটি A' হলে, A'-র প্রথম n-সংখ্যক সারি অশূন্য এবং অবশিষ্ট $m-n$ সংখ্যক সারি শূন্য সারি। এখন সমতুল্য রৈখিক সমীকরণতন্ত্র $A'X = 0$ হতে $m-n$ সংখ্যক শূন্য সমীকরণ বাদ দিলে থাকে n-সংখ্যক সমীকরণ, n সংখ্যক অজ্ঞাতরাশি এবং $|A'| \neq \mathbf{0}$ ($\because$ মাত্রা (A) = মাত্রা $(A') = n$)। অতএব উপপাদ্য 8.3 অনুসারে

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ ছাড়া কোনও সমাধান নেই।

(ii) A-র র‍্যাঙ্ক $< n$ হলে $AX = 0$-র সমতুল্য সমীকরণতন্ত্রে সমীকরণ সংখ্যা $< n$ এবং তারফলে অনুসিদ্ধান্ত 1 (উপপাদ্য 8.6-র) অনুসারে সমাধান সংখ্যা অসংখ্য।

উপপাদ্য 8.7 ঃ অসমতাও রৈখিক সমীকরণতন্ত্র $AX = B$-র সংশ্লিষ্ট সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্র $AX = 0$, $AX = B$-র একটি বিশেষ সমাধান X_n-র সঙ্গে $AX = 0$-র একটি সমাধান যোগ করে $AX = B$-র একটি সমাধান নির্ণীত হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্ $AX = B$-র সমাধানগুলি দ্বারা গঠিত সেট $X(A|B)$ এবং $AX = 0$-র সমাধানগুলি দ্বারা গঠিত সেট $X(A)$। ধরা যাক্ X_0 হচ্ছে $AX = B$-র একটি বিশেষ সমাধান, অতএব

$AX_0 = B$

এখন যেকোনও $X_1 \in X(A)$-র ক্ষেত্রে

$A(X_0 + X_1) = AX_0 + AX_1 = B + 0 = B$

অতএব $X_0 + X_1 \in X(A|B)$

বিপরীতক্রমে ঃ যেকোনও $X_1^! \in X(A|B)$-র ক্ষেত্রে $AX'_1 = B$ এবং $A(X'_1 - X_0) = B - B = 0$ (X_0 হচ্ছে $AX = B$-র একটি বিশেষ সমাধান)।

অতএব $(X'_1 = X_0) \in X(A)$, অর্থাৎ

$X'_1 = X_0 + X(A)$-র একটি পদ।

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

মন্তব্য 8.7 : (1) $AX = B$ সঙ্গত হলে $AX = B$-র সমাধান সংখ্যা একটি বা অসংখ্য হবে যদি $AX = 0$-র সমাধান সংখ্যা একটি বা অসংখ্য হয়।

(2) $(AX = B)$-র সাধারণ সমাধান (General Solution)

$= (AX = B)$-র একটি বিশেষ সমাধান

$+ (AX = 0)$-র সাধারণ সমাধান।

8.9 অসমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধান-সংখ্যা সংক্রান্ত আলোচনা ঃ

ধরা হলো $AX = B$ সমীকরণতন্ত্রের মাত্রা (A) = মাত্রা $(A|B)$, নচেৎ সমীকরণতন্ত্রটি অসঙ্গত হবে (উপপাদ্য 8.2)

(a) $AX = B$-তে সমীকরণ সংখ্যা $= n$, অজ্ঞাতরাশি সংখ্যা $= n$ এবং মাত্রা $(A) = n$ (অর্থাৎ $|A| \neq 0$) হলে সমাধান সংখ্যা কেবলমাত্র একটি এবং তা হচ্ছে

$X = A^{-1}B$

(87-র দ্বিতীয় পদ্ধতি এবং উদাহরণ 8.8 দেখুন)

(b) $AX = B$-তে সমীকরণ সংখ্যা $= n$, অজ্ঞাতরাশি সংখ্যা $= n$ এবং মাত্রা $(A) < n$ এক্ষেত্রে $AX = 0$ সমীকরণতন্ত্রটির অসংখ্য সমাধান থাকবে (উপপাদ্য 8.4 দেখুন) এবং তারফলে উপপাদ্য 8.4 অনুসারে $AX = B$-র অসংখ্য সমাধান থাকবে।

(c) $AX = B$ সমীকরণতন্ত্রে অজ্ঞাতরাশি সংখ্যা $= n$, সমীকরণসংখ্যা $= m < n$ এক্ষেত্রে মাত্রা (A) = মাত্রা $(A|B) \leq m < n$

ধরা যাক মাত্রা (A) মাত্রা $(A|B) = r$ এখন উপপাদ্য 8.6 অনুসিদ্ধান্ত 8.1 অনুসারে $AX = 0$-র অসংখ্য সমাধান থাকবে। অতএব উপপাদ্য 8.7 অনুসারে $AX = B$-র অসংখ্য সমাধান থাকবে।

(d) $Ax = B$ রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে অজ্ঞাতরাশি সংখ্যা $= n$ এবং সমীকরণ সংখ্যা $= m > n$ এক্ষেত্রে মাত্রা (A) = মাত্রা $(A|B) = r \leq n$

$r = n$ হলে $AX = B$-র সমতুল্য সমীকরণতন্ত্র $A'X = B'$-এ n-সংখ্যক সমীকরণ থাকবে এবং তাদের সহগ নির্ণায়ক $|A'| \neq 0$ ($\because$ মাত্রা (A) = n হওয়ায় 8.9 (a) অনুসারে $A'X = B'$ -র একটিমাত্র সমাধান থাকবে। অতএব $AX = B$-র একটিমাত্র সমাধান থাকবে।

$r < n$ হলে $AX = B$-র সমতুল্য সমীকরণতন্ত্র $A'X = B'$-র সংশ্লিষ্ট সমঘাত সমীকরণতন্ত্র $A'X = 0$-র অসংখ্য সমাধান দেবে (উপপাদ্য 8.4 দেখুন)। অতএব $AX = 0$-র অসংখ্য সমাধান আছে এবং তারফলে উপপাদ্য 8.7 অনুসারে $AX = B$-র অসংখ্য সমাধান আছে।

উদাহরণ 8.10 : $3x_1 + x_2 + x_3 = 9$

$2x_1 + x_2 = 2$

$x_1 + x_2 - x_3 = 3$

রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটি সঙ্গত কিনা তা পরীক্ষা করুন।

সমাধান ঃ বর্ধিত ম্যাট্রিক্স $(A|B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \vdots & 9 \\ 2 & 1 & 0 & : & 2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$

$$\underset{R_3 - 3R_1}{\overset{R_{13}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 0 & : & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 9 \end{pmatrix} \overset{R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 2 & : & -4 \\ 0 & -2 & 4 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_2 x(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -2 & : & 4 \\ 0 & -2 & 4 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 - 2R_2}{\overset{R_1 - R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & -2 & : & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3 \times \frac{1}{8}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & -2 & : & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3 - 4R_3}{\overset{R_1 - R_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

(সারি-সমতুল্য ইশিলন আকৃতি)

সহজেই লক্ষ করা যাচ্ছে

র‍্যাঙ্ক $(A|B) = 3$, র‍্যাঙ্ক $(A) = 2$

অতএব র‍্যাঙ্ক $(A) \neq$ র‍্যাঙ্ক $(A|B)$ হওয়ায় সমীকরণতন্ত্রটি সঙ্গত নয়।

উদাহরণ 8.11 : দেখান যে

$x - 10y + 14z = 2$

$x - 9y + 15z = 5$

$x - 6y + 2z = 3$

সমীকরণতন্ত্রটি সঙ্গত। সমাধান নির্ণয় করুন এবং উপপাদ্য 8.7-র সত্যতা লক্ষ করুন।

সমাধান ঃ বর্ধিত ম্যাট্রিক্স $(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 14 & : & 2 \\ 1 & -9 & 15 & : & 5 \\ 1 & -6 & 2 & : & 3 \end{pmatrix}$

$$\underset{R_3 - R_1}{\overset{R_2 - R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 14 & : & 2 \\ 0 & 1 & 1 & : & 3 \\ 0 & 4 & -12 & : & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3 - 4R_2}{\overset{R_1 + 10R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 & : & 32 \\ 0 & 1 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & -16 & : & -11 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \times -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 & : & 32 \\ 0 & 1 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{11}{16} \end{pmatrix} \underset{R_2 - R_3}{\overset{R_1 - 24R_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{31}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{37}{16} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

অতএব র‍্যাঙ্ক $(A|B)$ = র‍্যাঙ্ক (A) এবং তার ফলে

সমীকরণতন্ত্রটি সঙ্গত। সমতুল্য সমীকরণতন্ত্রটি

$x = {}^{31}/_2,\ y = {}^{37}/_{16},\ z = {}^{11}/_{16}$

অতএব প্রদত্ত সমীকরণতন্ত্রটি কেবলমাত্র একটি সমাধান $({}^{31}/_2, {}^{37}/_{16}, {}^{11}/_{16})$ আছে। এবার লক্ষ করুন সংশ্লিষ্ট সমঘাত সমীকরণতন্ত্রের সমাধানটি $(0, 0, 0)^t$ (নগণ্য সমাধান)। অতএব প্রদত্ত সমীকরণতন্ত্রের সমাধান $= (0, 0, 0)^t + ({}^{31}/_2, {}^{37}/_{16}, {}^{11}/_{16})^t$

উপপাদ্য 8.7-র সত্যতা প্রতিপন্ন হলো।

উদাহরণ ঃ 8.12 :

$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$, $\lambda, \mu \in R$

$x_2 + 2x_3 = 1$

$x_1 + x_2 + (\lambda + 2)x_3 = \mu + 1$

সমীকরণতন্ত্রটি λ ও μ-র কিরূপ মানে সঙ্গত হবে, একটিমাত্র সমাধান বা অসংখ্য সমাধান থাকবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ বর্ধিত ম্যাট্রিক্স $(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & : & 4 \\ 0 & 1 & 2 & : & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+2 & : & \mu+1 \end{pmatrix}$

$$R_3 - R_1\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 & \vdots & \mu-3 \end{pmatrix} \underset{R_3 + R_2}{\overset{R_1 - 2R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \vdots & \mu-2 \end{pmatrix}$$

এখন দেখা যাচ্ছে

(i) $\lambda \neq 1$ হলে র‍্যাঙ্ক $(A|B)$ = র‍্যাঙ্ক $(A) = 3$ এবং তখন সমীকরণতন্ত্রটি সঙ্গত এবং কেবলমাত্র একটি সমাধান থাকছে। এক্ষেত্রে μ-র যেকোনো মান একই সিদ্ধান্ত।

(ii) $\lambda = 1$, $\mu = 2$ হলে র‍্যাঙ্ক $(A|B)$ = র‍্যাঙ্ক $(A) = 2$ এবং তারফলে সমীকরণতন্ত্রটি সঙ্গাত এবং অসংখ্য সমাধান থাকবে।

8.10 সারাংশ

এই এককের প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্যের পরই জানা যাবে একটি রৈখিক সমীকরণ ও একাধিক রৈখিক সমীকরণ দ্বারা গঠিক রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সংজ্ঞা। সমঘাত ও অসমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্র কাকে বলে তা জানা যাবে, সেই সঙ্গে কখন একটি রৈখিক সমীকরণতন্ত্রকে সঙ্গাত বা অসঙ্গাত বলা হয় তাও জানা যাবে (8.1 – 8.4)। সমাধান থাকলেই সমীকরণতন্ত্রটি সঙ্গাত, নচেৎ অসঙ্গাত।

85 এ পাবেন রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের বিভিন্ন সংক্ষিপ্ত আকার। এই আকারগুলি বিভিন্ন উপপাদ্যের সিদ্ধান্তে ও সমকরণতন্ত্রের সমাধান নির্ণয়ে কার্যকরী ভূমিকা নেবে। অসমঘাত রৈখিখ সমীকরণতন্ত্রের সংক্ষিপ্ত ম্যাট্রিক্স আকার $AX = B$. 86-এ আছে সমতুল্য রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে সংজ্ঞা। যে তিন প্রকার প্রক্রিয়ার মধ্য দিয়ে আমরা সমতুল্য রৈখিক সমীকরণতন্ত্রে পৌঁছোতে পারি তার আলোচনা এখানেই আছে। সমতুল্য-সমীকরণতন্ত্র মানেই এমন একটি সমীকরণতন্ত্র উৎপন্ন করা যার সমাধানগুলি প্রদত্ত সমীকরণতন্ত্রের সমাধানের অনুরূপ। এতে আমাদের লাভ সমাধান নির্ণয় অনেক সহজ হয়ে যাবে। এর পরেই 87 -এ পেয়ে যাবেন সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতিগুলি। যে পদ্ধতিটিকে আমরা বেশি গুরুত্ব দিচ্ছি তা হচ্ছে রৈখিক সমীকরণতন্ত্র $AX = B$-র বর্ধিত-ম্যাট্রিক্স $(A|B)$-কে সারি-সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সে রূপান্তর করে সমতুল্য সমীকরণতন্ত্র উৎপন্ন করা। সমতুল্য-সমীকরণতন্ত্রে কোনরূপ অসঙ্গাতি উৎপন্ন হলে বুঝতে হবে প্রদত্ত সমীকরণতন্ত্রটি অসঙ্গাত, নচেৎ সঙ্গাত এবং সমাধান সহজেই নির্ণয় করা যাবে। এখানেই পাবেন নানা উদাহরণ যাতে আপনি সহজেই সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি রপ্ত করে ফেলবেন। 88 ও 89 -এ পাবে বিভিন্ন উপপাদ্য যার দ্বারা রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধান অস্তিত্ব ও সমাধান সংখ্যা সংক্রান্ত ধারণা পরিপূর্ণ রূপ পাবে। 8.11 -এর প্রশ্নমালার সমাধানে আপনার কোন সমস্যাই হবে না।

8.11 প্রশ্নাবলি

1. বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সহায়তায় সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $x - y = 1$
$7x - 5y = 9$

[উঃ $x = 2,\ y = 1$]

(ii) $4x + 5y + 3z = 23$
$x + y + z = 6$
$3x - 3y + 8z = 21$

[উঃ $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$]

[নির্দেশ ঃ উদাহরণ 8/8 দেখুন]

2. ক্রেমারের পদ্ধতি অনুসরণক্রমে সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $2x + y + z = 3$
$x - y + z = 1$
$3x - 2y = 2$

[উঃ $x = 7/b,\ y = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{12}$]

(ii) $x + y + z = 1$
$ax + by + cz = k$
$a^2x + b^2y + c^2z = k$

[:উঃ $x = \frac{(b-k)(c-k)}{(a-b)(a-c)}, y = \frac{(c-k)(a-b)}{(b-c)(b-a)}, z = \frac{(a-k)(b-k)}{(c-a)(c-b)}$]

a, b, c সহগগুলির মধ্যে যেকোনও দুটি পরস্পর সমান নয়।

[নির্দেশ ঃ উদাহরণ 8.9 দেখুন]

3. নিম্নলিখিত সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সহগ ম্যাট্রিক্সটিকে সারি সমতুল্য ইশিলন ম্যাট্রিক্সে পরিণত করে সমতুল্য সমীকরণতন্ত্র কি হবে লিখুন এবং তারপর সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $3x + 2y + z = 0$
z
$x + 3y + 2z = 0$

[উঃ $x = \frac{1}{7}c, y = -\frac{5}{7}c, z = c$]

(ii) $3x + 5y + z = 0$
$3x + 2y + 5z = 0$
$x + y - z = 0$

[উঃ $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$]

(iii) $3x + 5y = 0,\ 4x + 3y = 0,\ x + y = 0$

[নির্দেশ ঃ উদাহরণ 8.3 এবং 4.8 দেখুন]

[উঃ $x = \frac{1}{7}c, y = -\frac{5}{7}c, y = c$]

4. $3x_1 + x_2 - 9x_4 = 10,\ 2x_1 + x_2 - 7x_4 = 7$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - 13x_4 = 15,\ x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 8$$

অসমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটি সঙ্গত কিনা পরীক্ষা করুন। সঙ্গত হলে সমাধান নির্ণয় করুন। সংশ্লিষ্ট সমঘাত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধানদেশের মাত্রা কত তা নির্ণয় করুন।

[উঃ সঙ্গত, $(3,1,4,0)' + \lambda(2,3,1,1)'$, 1 উদা 8.5, 8.2 দেখুন।

8.12 সহায়ক গ্রন্থ

(1) B.C Chatterjee - Linear Algebra, Dasgupta & Co, Calcutta, 1967

(2) Kolman Bernard — Introduction to Linear Algebra with applications, Collier Macmillan Publishers 1976

(3) Anton Howard - Elementary Linear Algebra, 2nd ed. John Wiley & sons., New York, 1973

(4) N.C. Mazumdar - Elements of Linear Algebra, World Press, Calcutta - 1997

(5) শ্রীপতি রঞ্জনচৌধুরী — রৈখিক বীজগণিত, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ, ১৯৯৩

পর্যায়

2

রৈখিক রূপান্তর

একক 9 ❒ অন্তরগুণফল দেশ (Inner Product Space)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

রৈখিক বীজগণিত উচ্চমাধ্যমিকের বীজগণিতের একটি উন্নত সংস্করণ নয়। এই রৈখিক বীজগণিতে আমরা জ্যামিতির অনেক ধারণা নিয়ে আসি। যেমন ভেক্টর, দেশ, দুই বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব ইত্যাদি এবং বীজগণিত ঐ ধারণাগুলোকে নানাভাবে বিস্তৃত করে। রৈখিক সমীকরণ সমূহের বা অসমীকরণ সমূহের সমাধান আছে কিনা বা থাকলে তা এক বা একাধিক হবে কিনা, এগুলি সবই রৈখিক বীজগণিতের আওতায় পড়ে। আর একটু বিমূর্তভাবে আমরা বলতে পারি যে একটা সমীকরণতন্ত্রকে আমরা রৈখিক বলতে পারি যদি সেটা যোজ্য (additive) ও অন্তর্সম (homogeneous) হয়। যে কোনও সমস্যার যদি গাণিতিক মডেল করা হয় তবে সেটা সবচেয়ে বোধগম্য হয়, যদি মডেলটি রৈখিক হয়। এই রৈখিক মডেলের সমাধান বা গুণাবলী নির্ণয়ে রৈখিক বীজগণিতের একটা বিশেষ ভূমিকা আছে।

এই এককে রৈখিক অন্তর গুণফল দেশ আলোচনা করা হবে। এখানে আমরা দ্বি-মাত্রিক বা

ত্রি-মাত্রিকদেশে ভেক্টরগুলির মধ্যে যে সম্বন্ধ থাকে সেগুলিকে বিস্তৃত করব n –মাত্রিক দেশে এবং রৈখিক অন্তরগুণ- ফল দেশের রূপ বর্ণনা করব। তার আগে আমরা পুনঃস্মরণের জন্য 'ভেক্টর দেশ' সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করব।

9.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি যেগুলি করতে পারবেন সেগুলি হল —

- অন্তর গুণফলদেশের ধর্মগুলির সঠিক প্রয়োগ করতে পারবেন
- কচি-শোয়ার্স (Cauchy-Schwartz) অসমীকরণের সাহায্যে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন
- গ্রাম-স্মিডট্ পদ্ধতি অবলম্বন করে প্রদত্ত সেট থেকে একটি একক লম্ব সেট গঠন করতে পারবেন।

9.3 ভেক্টর দেশ

সংজ্ঞা ঃ 9.3.1. K একটি প্রদত্ত ক্ষেত্র এবং V শূন্য নয় এমন একটি সেট। V এর ওপর যে কোন দুটি উপাদানের যোগফল ও স্কেলার দিয়ে গুণন সংজ্ঞাত অর্থাৎ $u, v \in V, k \in K \Rightarrow$ যোগফল $u+v \in V$ এবং গুণফল $ku \in V$ তখন V কে K ক্ষেত্রের ওপর সংজ্ঞাত ভেক্টর দেশ বলা হয় যদি নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধগুলি সিদ্ধ হয় : (V এর উপাদনগুলিকে ভেক্টর সমূহ্ বলা হয়)

(i) যে কোন ভেক্টরয়ের জন্য $u, v, w \in V$-এর জন্য $(u+v) + w = u+(v+w)$

(ii) এমন একটি ভেক্টর আছে যাকে '0' দিয়ে চিহ্নিত করা হয় এবং বলা হয় **শূন্য ভেক্টর** যাতে করে $u+o = u$, যে কোন ভেক্টর u এর জন্য।

(iii) যে কোন ভেক্টর $u \in V$ এর জন্য, V তে একটি ভেক্টর পাওয়া যাবে, যাকে '$-u$' হিসাবে চিহ্নিত করা হয় এবং যাতে করে V তে $u+(-u) = 0$

(iv) যে কোন দুটি ভেক্টর u,v এর জন্য $u + v = v+u$,

α) যে কোন স্কেলার $k \in K$ এর জন্য এবং যে কোন দুটি ভেক্টর u, v এর জন্য $k(u+v) = ku + kv$

β) যে কোন স্কেলারদ্বয় k_1, k_2 এবং $u \in V$ এর জন্য $(k_1+k_2)u = k_1u+k_2u$

γ) যে কোন স্কেলারদ্বয় $a, b \in K$ এবং ভেক্টর $u \in V$ এর জন্য $(ab)u = a(bu)$

δ) যে কোন একক স্কেলার $1 \in K$ এবং $u \in V$ এ জন্য

$1u = u$

মন্তব্য 9.3.1.1 স্বতঃসিদ্ধ (i)—(iv) সমূহ V এর **যোজ্য গঠন (additive structure)** ইঙ্গিত করে। ঐ স্বতঃসিদ্ধগুলির মধ্যে বিয়োগ প্রক্রিয়াটির কথা অন্তর্নিহিত আছে।

(2) স্বতঃসিদ্ধ সমূহ (α) —(δ) স্কেলার দিয়ে গুণন প্রক্রিয়ার কথা বলে।

(3) বলা হয় যে একটি ভেক্টর দেশ V উপাদানগুলির যোগপ্রক্রিয়া ও উপাদানগুলিকে স্কেলার দিয়ে গুণন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে আবদ্ধ।

মন্তব্য 9.3.2 ওপরের স্বতঃসিদ্ধসমূহ থেকে আমরা ভেক্টর দেশের নিম্নলিখিত ধর্মগুলির কথা বলতে পারি।

(i) যে কোন স্কেলার $k \in K$ এবং $O \in V$ এর জন্য $k.O = O$

(ii) $0 \in K$ এবং $u \in K$ এর জন্য $0u \doteq O$

(iii) যদি $k \in K$, এবং $u \in V$ এর জন্য $ku = 0 \Rightarrow$ হয় $k = O$ অথবা $u = O$

(iv) $k \in K$ এবং $u \in V$ এর জন্য $(-k)u = k(-u) = -ku$

উদাহরণ 9.3.1 প্রদত্ত R একটি বাস্তব ক্ষেত্র। R এর ক্রমিক n সংখ্যক পদের 'ভেক্টর যোগফল' ও 'স্কেলার দিয়ে গুণন' প্রক্রিয়া নিম্নরূপে সংজ্ঞাত হল

$(u_1, u_2, \ldots u_n) + (v_1, v_2, \ldots\ldots v_n)$

$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, u_n + v_n)$

এবং $(ku_1 \ldots ku_n) = k_1(u_1, u_2 \ldots u_n)$,

$k, u_i, v_i \in R, i = 1.2 \ldots n$

তখন ঐ ক্রমিত n সংখ্যক পদের সেট একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে। এরূপ ভেক্টর দেশকে R^n বলা হয়।

মন্তব্য 9.3.3 অনুরূপে জটিল ক্ষেত্রে C এর ক্রমিক n সংখ্যক পদের সেটে 'ভেক্টর যোগফল' ও 'স্কেলার দিয়ে গুণন' ওপরের মত সংজ্ঞাত হলে আমরা ভেক্টর দেশ C^n পাই।

উদাহরণ 9.3.2. K ক্ষেত্রের উপাদানসমূহ নিয়ে গঠিত $m \times n$ ম্যাট্রিক্স সেট V দেওয়া হল। যদি 'ভেক্টর যোগফল' বলতে ম্যাট্রিক্স যোগফল বোঝায় এবং 'স্কেলার দিয়ে গুণন' বলতে ম্যাট্রিক্সকে স্কেলার দিয়ে গুণন বোঝায় তাহলে V একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে।

সংজ্ঞা 9.3.2 **উপ ভেক্টর দেশ**

ধরা যাক K ক্ষেত্রের উপর সংজ্ঞাত ভেক্টরদেশ V এর W একটি উপসেট। W যদি V তে সংজ্ঞাত যোগ প্রক্রিয়া' ও 'স্কেলার দিয়ে গুণন প্রক্রিয়া'-র সাপেক্ষে একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে তাহলে W কে V এর একটি উপদেশ বলা হবে।

উদাহরণ 9.3.3. ধরা হল V ভেক্টর দেশটি R^3। W, V এর একটি উপসেট যার তৃতীয় উপাংশটি শূন্য। অর্থাৎ

$W = \{(a,b,o), a, b, \in R)$ তাহলে W, V এর একটি উপদেশ।

সংজ্ঞা 9.3.3. **রৈখিক সমবায়, ব্যাপ্তি সেট (Spanning Set) রৈখিক সমাবেশ**

K ক্ষেত্রের ওপর সংজ্ঞাত V একটি ভেক্টর দেশ। প্রদত্ত ভেক্টরসমূহ $v_1, v_2, \ldots v_m \in V$

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m$ এই ধরনের V এর ভেক্টরকে $v_1, v_2 \ldots v_m$ এর **রৈখিক সমাবেশ** বলা হয়, প্রদত্ত $a_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots m$।

ব্যাপ্তি সেট (Spanning Set)

প্রদত্ত D, V এর এমন একটি উপসেট, যেটা শূন্য সেট নয়। ধরা যাক M, V এর এমন একটি উপসেট যেটা D এর সসীম সংখ্যক ভেক্টরের রৈখিক সমাবেশ। তখন M কে D উপদেশ দ্বারা **ব্যাপ্ত** উপদেশ বলা হয়।

উদাহরণ 9.3.4. ধরা যাক $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, এবং $e_3 = (0, 0, 1)$। আমরা দেখাব e_1, e_2, ও e_3 ভেক্টর সমূহ R^3 দেশে ব্যাপ্ত।

R^3 দেশে যে কোন ভেক্টর (a, b, c) কে লেখা যায়, $(a, b, c) = a(1,0,0) + b(0,1,0)+c(0, 0,1)$.

অর্থাৎ (a, b, c), e_1, e_2 ও e_3 এর রৈখিক সমাবেশ।

উদাহরণ 9.3.5 ধরা যাক $v = (3, 9, -4, -2)$, $u_1 = (1, -2, 0, 3)$,

$u_2 = (2, 3, 0, -1)$ এবং $u_3 = (2, -1, 2, 1)$

নির্ণয় করতে হবে v, u_1, u_2 ও u_3 দ্বারা ব্যাপ্ত উপদেশে আছে কিনা।

ধরা যাক $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ যেখানে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ এবং সবই একসঙ্গে শূন্য হয় নয়।

$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \Rightarrow$

$3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$

$9 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$

$-4 = 2\alpha_3$

$-2 = 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$

অথবা : $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 7$

$-2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 11$

$3\alpha_1 - \alpha_2 = 0$

অতএব $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = -2$

সুতরাং v, u_1, u_2 ও u_3 দ্বারা ব্যাপ্ত উপদেশে আছে।

9.4 অন্তর গুণফল

আমাদের পরবর্তী আলোচনায় ভেক্টর দেশ যে ক্ষেত্রের উপর নির্দেশিত সেগুলি হয় বাস্তব না হয় জটিল ক্ষেত্র বলে ধরে নেওয়া হবে। ক্ষেত্র বাস্তব হলে ভেক্টর দেশটিকে বলা হয় বাস্তব ভেক্টর দেশ নাহলে ভেক্টর দেশটিকে জটিল ভেক্টর দেশ বলা হয়।

ধরা যাক ত্রিমাত্রিক বাস্তব দেশে $v = (x_1, x_2, x_3)$ এবং $w = (y_1, y_2, y_3)$ দুটি ভেক্টর। তাহলে v ও w এর dot গুণফল বা অন্তর গুণফল v.w এর মান হল $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

v এর দৈর্ঘ্য লাভ $\sqrt{v.v}$ অর্থাৎ $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ এবং v ও w এর অন্তর্গত কোণ-এর মান হল

$$\theta = \cos^{-1}\frac{v.w}{\sqrt{v.v}\sqrt{w.w}} = \frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$$

v.w -এর নিম্নলিখিত ধর্মগুলো আমরা সহজে লিপিবদ্ধ করতে পারি :

i) $v.v \geq 0$ এবং $v.v = 0$ যদি এবং একমাত্র যদি $v = 0$ হয়।

ii) $v.w = w.v$

iii) $u.(\alpha v + \beta w) = \alpha(u.v) + \beta(u.w)$

যেখানে u, v, w প্রদত্ত ভেক্টর দেশে আছে এবং α, β বাস্তব সংখ্যা। কিন্তু ক্ষেত্র যদি জটিল হয় তাহলে উক্ত সংজ্ঞায় কিছু অসঙ্গতি লক্ষ করা যায়। যদি $v = (1, i, 0)$ হয়, তাহলে $v.\ v = 0$ কিন্তু $v \neq 0$। কোনও কোনও ক্ষেত্রে v. v এর মান বাস্তব নাও হতে পারে। অথচ আমরা চাই $v \neq 0$ হলে $v.v > 0$ হোক এবং $\sqrt{v.v}$, v -ভেক্টরের দৈর্ঘ্যের মান হোক।

এই সমস্যাটা অতিক্রম করা যায় যদি v. w-র সংজ্ঞা নিম্নরূপ হয়

$$v.w = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3$$

কিন্তু এক্ষেত্রে $v.w = w.v$ নয়।

আমরা যদি $v.w = \overline{w.v}$ বলি, যেখানে '—' অনুবন্ধী জটিল ইঙ্গিত করে, তাহলে দেখা যায় কোনও সমস্যা থাকে না। পূর্ববর্তী আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে আমরা ভেক্টর দেশ V তে যে কোনও দুটি উপাদানের dot গুণফল বা অন্তরগুণফল বলতে এরূপ সংখ্যা বোঝাব যার ধর্মগুলি নিম্নরূপ ঃ

i) $v.w = \overline{v.w}$

ii) $v.\ v \geq 0$ এবং $v.v = 0$ যদি এবং একমাত্র যদি $v = 0$

iii) $(\alpha u + \beta v).\ w = \alpha\ (u.w) + \beta\ (v.w)$

iv) $u.\ (\alpha v + \beta w) = \overline{\alpha}\ (u.v) + \overline{\beta}(u.w)$

u.v.w জটিল ভেক্টর সমূহ এবং α, β জটিল সংখ্যাদ্বয়।

অনুশীলনী 9.4.1

i) (1, 2i, 3) এবং (1, -2i, 2i) এর অন্তরগুণফল নির্ণয় করুন।

ii) (3i, 2, 5i) এবং (1, –2i, 3) এর অন্তরগুণফল নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

9.4.1. (i) –3, –6i   9.4.1 (i) 22i

9.5 অন্তর গুণফল দেশ

আমরা যেন স্মরণে রাখি আমাদের আলোচনায় F ক্ষেত্র বলতে আমরা বাস্তব ক্ষেত্র R অথবা জটিল ক্ষেত্র C বোঝাব।

সংজ্ঞা 9.5.1 : F ক্ষেত্রে নির্দেশিত ভেক্টর দেশ V কে অন্তরগুণফল দেশ বলা হবে যদি V ভেক্টর দেশের যে কোনও দুটি উপাদান $u, v \in V$ এর জন্য F এর একটি উপাদান $(u, v) \in F$ পাওয়া যায় এবং (u, v) নিম্নলিখিত শর্তগুলি সিধ্দ করে ঃ

1) $(u, v) = \left(\overline{v, u}\right)$

2) $(u, u) \geq 0$ এবং $(u, u) = 0$ যদি এবং একমাত্র যদি $u = 0$

3) $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\ (u, w) + \beta\ (v, w)$;

যেখানে $u, v, w \in V$ এবং $\alpha, \beta \in F$

যে অপেক্ষক (1), (2) এবং (3) শর্তগুলিকে সিধ্দ করে তাকে অন্তরগুণফল দেশ বলে।

তাহলে (u, v) যদি শর্তসমূহ (1), (2) এবং (3) সিধ্দ করে আমরা (u. v)-কে u ও v এর অন্তরগুণফল বলব।

মন্তব্য 9.5.1

F যদি জটিল ক্ষেত্র হয় শর্ত (1) থেকে পাওয়া যায় $(u, u) = \left(\overline{u,\ u}\right)$ = বাস্তব এবং শর্ত (2) ও অর্থবহ্ হয়।

মন্তব্য 9.5.2

শর্তদ্বয় 2 ও 3 থেকে পাই যে

$$(u, \alpha v + \beta v) = \left(\overline{\alpha v + \beta v, u}\right) = \overline{\alpha(v, u) + \beta(w, u)}$$

$$= \bar{\alpha}\left(\overline{v, u}\right) + \bar{\beta}\left(\overline{w, u}\right) = \bar{\alpha}(u, v) + \bar{\beta}(u, w)$$

যদি F বাস্তব ক্ষেত্র হয়, তাহলে অন্তর গুণফল দেশকে বাস্তব অন্তর গুণফল দেশ বা ইউক্লিডীয় অন্তর গুণফল দেশ বলা হয়। যদি F জটিল ক্ষেত্র হয়, তাহলে অন্তর গুণফল দেশকে জটিল অন্তর গুণফল দেশ বা Unitary অন্তর গুণফল দেশ বলা হয়।

মন্তব্য 9.5.3

প্রদত্ত $x, y \in R^n$

অর্থাৎ $x = (x_1, x_2, \ldots. x_n)$ বা, x, n -তম পদ বিশিষ্ট। x_i কে x ভেক্টরের i তম উপাংশ বলা যেতে পারে।

অনুরূপে $y = (y_1, y_2 \ldots y_n) \in R^n$

যদি অন্তর গুণফল $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots. + x_ny_n$, হয় তাহলে ঐ অন্তর গুণফল দেশকে n মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ বা E^n বলা হয়।

উদা ঃ 9.5.1

যদি $u = (u_1, u_2, \ldots., u_n)$ যেখানে $u_i \in C, i = 1.2, \ldots, n$

u- কে বলা হয় C^n দেশে আছে।

$v = (v_1, v_2 \ldots. v_n), v_i \in C$ হলে

C^n দেশে অন্তর গুণফল (u, v) এইরূপ :

$$(u.v) = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \ldots. + u_n\overline{v_n}$$

উদা : 9.5.2

ধরা যাক R এর উপর নির্দেশিত V একটি m×n ম্যাট্রিক্সসমূহের ভেক্টর দেশ।

trA বা trace A বলতে A এর কর্ণসংলগ্ন পদসমূহের যোগফল বোঝায়।

যদি অন্তর গুণফল (A, B) = trB^TA হয়, তাহলে V একটি অন্তর গুণফলদেশ হয়।

ধরা যাক $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ & $B = ((b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ ।

*(11) এককে ম্যাট্রিক্সের গুণাবলীর বিশদ বর্ণনা দেওয়া আছে।

তাহলে B^TA এর কর্ণসংলগ্ন পদগুলির সমষ্টি হল

$$= \sum_{i=1}^{m} b_{1i}a_{1i} + \ldots\ldots + \sum_{i=1}^{m} b_{mi}a_{mi}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ji} = tr(B^TA)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ji}b_{ji} = tr(A^TB)$$

তাহলে (A, B) = (B.A)

$(A, A) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ji}^2 \geq 0$ যেহেতু a_{ij} বাস্তব সংখ্যা।

$$(A, A) = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i, a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

A, B ও C যদি প্রত্যেকেই $m \times n$ ম্যাট্রিক্স হয়,

তাহলে
$$\begin{aligned}(\alpha A + \beta B, C) &= tr(C^T\{\alpha A + \beta B\}), \alpha, \beta \in R \\ &= \alpha trC^TA + \beta trC^TB \\ &= \alpha(A, C) + \beta(B, C)\end{aligned}$$

অতএব (A, B) অন্তরগুণফলের সাপেক্ষে V একটি অন্তর গুণফল দেশ হয়।

সংজ্ঞা 9.5.2

যদি $v \in V$ (V একটি অন্তর গুণফল দেশ) v-এর দৈর্ঘ্য (অথবা v -এর নর্ম)-কে প্রকাশ করা হয় $||v||$ রূপে এবং এর মান হল

$$\|v\| = +\sqrt{(v, v)}$$

অনুশীলনী 9.5.7

দেখান যে বাস্তব ত্রিমাত্রিকদেশ একটি অন্তর গুণফল দেশ।

অনুশীলনী 9.5.8

i) (1, 2, 3) এই ভেক্টরের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

ii) (i, –2i, 4) এই ভেক্টরের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

9.5.8. (i) $\sqrt{14}$ (ii) $\sqrt{21}$

9.6 কচি শোয়ার্স (Cauchy-Schwartz) অসমীকরণ

উপপাদ্য 9.6.1

যদি u. v $\in$ V, যেখানে V একটি অন্তর গুণফল দেশ,

তাহলে $|(u.v)| \leq \|u\| \, \|v\|$

উপপাদ্যটি প্রমাণ করার আগে আমরা দুটি সহায়ক উপপাদ্য প্রমাণ করব।

সহায়ক উপপাদ্য 9.6.1

যদি u, v $\in$ V এবং $\alpha. \beta \in C$

তাহলে $(\alpha u+\beta v,\, \alpha u+\beta v)=\alpha\bar{\alpha}(u.u)+\alpha\bar{\beta}(u,v)+\bar{\alpha}\beta(v,u)+\beta\bar{\beta}(v,v)$

অন্তর গুণফল দেশের 3 নং ধর্ম থেকে আমরা পাই

$(\alpha u+\beta v.\, \alpha u+\beta v)=\alpha(u,\alpha u+\beta v)+\beta(v,\alpha u+\beta v)$

আবার, $(u,\alpha u+\beta v)=\bar{\alpha}(u,\, u)+\bar{\beta}(u,\, v)$

অনুরূপে, $(v,\alpha u+\beta v)=\bar{\alpha}(v,\, u)+\bar{\beta}(v,\, v)$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$

$\|\alpha u\|^2 = (\alpha u,\, \alpha u) = \alpha\bar{\alpha}(u.u) = |\alpha|^2 \|u\|^2$

সহায়ক উপপাদ্য 9.6.2 এবং a, b এবং c যদি বাস্তব সংখ্যা হয় যাতে করে $a > 0$ এবং $a\lambda^2 + 2b\lambda + c \geq 0$ তাহলে যে কোনও বাস্তব λ এর জন্য,

$$b^2 \leq ac$$

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = \frac{1}{a}(a\lambda + b)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)$$

যেহেতু রাশিটি ≥ 0, যে কোনও বাস্তব λ-র জন্য, অতএব $\lambda = -\frac{b}{a}$ এর জন্যও রাশিটি ≥ 0, অতএব $c - \frac{b^2}{a} \geq 0$ এবং $a > 0 \Rightarrow b^2 \leq ac$

এবার আমরা মূল উপপাদ্যটি প্রমাণ করব।

যদি $u = 0$ হয় তাহলে $(u. v) = 0$ এবং $\|u\|\|v\| = 0$

সুতরাং অসমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

ধরা যাক (u, v) বাস্তব এবং $u \neq 0$ ।

সহায়ক উপপাদ্য 9.4.1 অনুযায়ী যে কোনও বাস্তব λ এর জন্যই,

$$0 \leq (\lambda u + v, \lambda u + v) = \lambda^2(u, u) + 2(u, v)\lambda + (v, v)$$

তাহলে সহায়ক উপপাদ্য 9.4.1 অনুসারে $(u, v)^2 \leq (u, u)(v, v)$

অথবা, $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$

যদি (u, v) বাস্তব না হয়, তাহলে নিশ্চয়ই এর মান শূন্য হবে না।

এখন $\left(\frac{u}{(u, v)}, v\right) = \frac{(u, v)}{(u, v)} = 1$

অতএব $\left(\frac{u}{(u, v)}, v\right)$ বাস্তব।

পূর্বে প্রমাণিত কচি-শোয়ার্স অসমীকরণের সাহায্যে বলতে পারি,

$$1 = \left|\left(\frac{u}{(u, v)}, v\right)\right| \leq \left\|\frac{u}{(u, v)}\right\| \|v\|$$

যেহেতু $\left\| \dfrac{u}{|(u,v)|} \right\| = \dfrac{1}{|(u,v)|}\|u\|$

আমরা পাই $|(u,v)| \le \|u\|\,\|v\|$

উদাহরণ 9.6 যদি $u = (u_1, ..., u_n)$ এবং $v = (v_1, ..., v_n) \in E^n$, ।

(n মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ), তাহলে উপরিউক্ত অসমীকরণের সাহায্যে লিখতে পারি,

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n)^2 \le \left(u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + ... + u_n^{\,2}\right) \times \left(v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + ... + v_n^{\,2}\right)$$

অনুশীলনী 9.6.1 (i) অন্তর গুণফল ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে দেখান যে, (1, 2i, 3) এবং (i, 3i, 4) এই ভেক্টরদ্বয় কচি-শোয়ার্স অসমীকরণ সিদ্ধ করে।

(ii) **উদাহরণ 9.5** এ দেখান $(1u_1 1 + ...1u_n 1)^2 \le n(1u_1 1^2 + ...+1u_{n1}{}^2)$ ।

উত্তরমালা

9.6.1. (i) ধরা যাক u = (1, 2i, 3), v = (i, 3i, 4)

$(u, v) = 18 - i \qquad |(u,v)| = 5\sqrt{13}$

$\|u\| = \sqrt{14}, \qquad \|v\| = \sqrt{26}$

অতএব ইত্যাদি।

9.7 দুই ভেক্টরের দূরত্ব

ধরা যাক $u, v \in V$ (একটি অন্তর গুণফল দেশ)।

তাহলে u হতে v -এর দূরত্বকে d(u, v) চিহ্নিত করলে

d(u, v) এর মান হবে $\|u - v\|$

উপপাদ্য 9.7.1 উল্লিখিত দূরত্ব নিম্নলিখিত শর্ত সিদ্ধ করে

i) $d(u, v) > 0$ যখন $u - v \ne 0$

ii) $d(u, v) = d(v, u)$

iii) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ (ত্রিভুজ অসমীকরণ)।

প্রমাণ

(i) যেহেতু $\|u-v\|$ বাস্তব এবং $\|u-v\| > 0$ যখন $u-v \neq 0$, সুতরাং $d(u, v) > 0$, যখন $u-v \neq 0$

(ii) অন্তর গুণফলের ধর্ম থেকেই (ii) নং শর্ত প্রমাণ করা যায়।

(iii) $d^2(u,w) = \|u-w\|^2 = (u-w,\ u-w) = ([u-v]+[v-w],[u-v]+[v-w])$

$= ([u-v],\ [u-v]) + ([u-v],[v-w]) + ([v-w],[v-w]) + ([v-w],[u-v])$

$= \|u-v\|^2 + ([u-v],[v-w]) + \|v-w\|^2 + ([v-w],[u-v])$

কচি-শোয়ার্সের অসমীকরণের সাহায্যে

$|([u-v],[v-w])| \leq \|u-v\|\ \|v-w\|$

অতএব $\|u-w\|^2 \leq \|u-v\|^2 + 2\ \|u-v\|\|v-w\| + \|v-w\|^2$

$\leq (\|u-v\| + \|v-w\|)^2$

অতএব $\|u-w\| \leq \|u-v\| + \|v-w\|$ যেহেতু ডানপক্ষ ধনাত্মক।

মন্তব্য 9.7.1 আমরা যদি u, v ও $w \in R^2$ কে কোনও ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয়ের ভেক্টর স্থানাঙ্ক হিসাবে চিহ্নিত করি,

তাহলে (iii) নং অসমীকরণ থেকে পাই যে ত্রিভুজের যে কোনও বাহুর দৈর্ঘ্য অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফলের সমষ্টি থেকে কখনই বড় হবে না। এই জন্যই (iii) নং সূত্রকে ত্রিভুজ অসমীকরণ বলা হয়।

উদাহরণ 9.7.1 ঃ $a = (3,7,1)$, $b = (9,1,4)$ এবং $c = (3,0,2)$ হলে দেখান যে a, b, c ত্রিভুজ অসমীকরণ সিদ্ধ করে।

$a - b = (-6, 6, -3)$, $b - c = (6, 1, 2)$

$c - a = (0, -7, 1)$.

$$\|c-a\|^2 = (0,-7,1)\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = 50 \quad \|c-a\| = \sqrt{50}$$

$$\|a-b\|^2 = (-6,6,-3)\begin{pmatrix}-6\\6\\-3\end{pmatrix} = 81 \quad \|a-b\| = 9$$

$$\|b-c\|^2 = (6,1,2)\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix} = 41$$

$$\|b-c\| = \sqrt{41}$$

$$\therefore \|c-a\| \le \|a-b\| + \|b-c\| \text{ ।}$$

অনুশীলনী 9.7.1 (i) দেখান যে (1, 0, 0), (0, 1, 0) (0, 0, 1) এই ভেক্টরত্রয় ত্রিভুজ অসমীকরণ সিদ্ধ করে।

ii) দেখান যদি n মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশে 0 = (0,0 ....0), A = (5, 0 ...0), B = (0 ...4) তাহলে Δ OAB সমকোণী।

9.8 পরস্পর লম্ব ভেক্টর সমূহ

দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক দেশে আমরা জানি, যে কোনও দুটি ভেক্টর a, b-এর জন্য

$$a.b = |a|\,|b|\cos\theta$$

$|a|$, a ভেক্টর দৈর্ঘ্য বোঝায়, $|b|$ ও অনুরূপে অর্থে ব্যবহৃত। θ হচ্ছে a ও b এর অন্তর্গত কোণ। যদি

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ হয়, a.b = 0 অর্থাৎ a, b এর উপর লম্ব

$\theta \ge \dfrac{\pi}{2}$ হয়, a. b $\le$ 0 অর্থাৎ a, b এর সঙ্গে স্থূলকোণ করে

$\theta \le \dfrac{\pi}{2}$ হয়, a.b $\ge$ 0 অর্থাৎ a, b এর সঙ্গে সূক্ষ্মকোণ করে।

ওই ধারণাগুলোকে আমরা F ক্ষেত্রে নির্দেশিত V অন্তরগুণফলদেশে বিস্তৃত করতে পারি।

9.8.1. সংজ্ঞা : V একটি অন্তরগুণফল দেশ। V এর দুই উপাদান a ও b কে পরস্পর লম্ব বলা হয় যদি (a, b) = 0

যেহেতু $(\overline{b,a})=(a,b), a$ যদি b এর উপর লম্ব হয় তাহলে b ও a এর উপর লম্ব হবে।

যেহেতু $(0, a) = (0a, a) = 0(a.a) = 0, a \in V$।

অর্থাৎ $0 \in V$ যে কোনও $a \in V$ এর উপর লম্ব।

অন্যদিকে $u \in V$ যদি যে কোনও $v \in V$ এর উপর লম্ব হয়, তবে

$0 = (u, v) \Rightarrow u = 0$

উদা: 9.8.2

$a = (3, 2, 1)$ $b = (2, -5, 4)$ এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করতে হবে।

$(a, b) = 3\times2+2\times-5+1\times4 = 0.$

নির্ণেয় কোণ $\frac{\pi}{2}$

উদা: 9.8.3 নিম্নলিখিত ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করুন।

$a = (4, 7, 9, 1, 3) \quad b = (2, 1, 1, 6, 8)$

$(a, b) = 4\times2+7\times1+9\times1+1\times6+3\times8 = 54$

$$\|a\| = \sqrt{4^2+7^2+9^2+1^2+3^2} = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$$

$$\|b\| = \sqrt{4+1+1+36+64} = \sqrt{106}$$

$$\cos\theta = \frac{(a,b)}{\|a\|\,\|b\|} = \frac{54}{2\sqrt{39}\sqrt{106}} = \frac{27}{\sqrt{39}\sqrt{106}}$$

9.8.4 সংজ্ঞা : লম্বপূরক (Orthogonal Complement)

ধরা যাক W হল V-এর একটি উপসেট।

W এর লম্বপূরক সেট বলতে সেই সেটকে বোঝান হয়, যার প্রতিটি উপাদানই W- এর উপাদানের উপরই লম্ব। এই লম্বপূরক সেটকে $W^{\perp}$ হিসেবে চিহ্নিত করা হয়।

তাহলে $W^{\perp} = \{v \in V | (v, w) = 0, w \in W\}$.

আমরা দেখাব $W^{\perp}$, V -এর একটি উপদেশ।

ধরা যাক $u, v \in W^{\perp}$ তাহলে $(u.w) = 0, (v.w) = 0, w \in W$

অতএব $(\alpha u+\beta v, w) = 0, w \in W$ এবং α β স্কেলারদ্বয়।

অতএব $W^{\perp}$ হল V- এর উপদেশ।

উদা: 9.7.5 ধরা যাক W হচ্ছে R^3 তে Z অক্ষ।

$W = \{0,0,c), c \in R\}$

তাহলে $W^{\perp} = \{a,b,0), a, b \in R\}$

অর্থাৎ $W^{\perp}$ হল xy- তল

9.9 পরস্পর লম্ব সেট (Orthogonal Sets)

V, এই অন্তরগুণফলদেশে একটি ভেক্টর সেট $\{u_i\}$ -কে লম্ব সেট বলা হয়, যদি এই সেটের যে কোনও দুটি ভিন্ন উপাদান পরস্পর লম্ব হয়,

অর্থাৎ $(u_i, u_j) = 0, i \neq j$

যদি লম্ব সেট $\{u_i\}$ -এর প্রতিটি উপাদানের দৈর্ঘ্য এক হয়, তাহলে সেটটিকে একক লম্ব সেট (orthonormal set) বলা হয়,

অর্থাৎ $(u_i, u_j) = \begin{matrix} 0, & \text{যদি } i \neq j \\ 1 & \text{যদি } i = j \end{matrix}$

সহায়ক উপাপাদ্য 9.9.1 $\{u_i\}$ যদি একক লম্ব সেট হয়, তাহলে $\{u_i\}$ -এর ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন হবে। এবং যদি $w = \alpha_1 u_1 +....+ \alpha_n u_n$ হয়,

তাহলে $\alpha_1 = (w, u_1)$ যেখানে $i = 1, 2, ..., n.$

প্রমাণ : ধরা যাক $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... \alpha_n u_n = 0$

তাহলে, $0 = ([\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n], u)$

$= \alpha_1 (u_1,u_1)+\alpha_2(u_2,u_1)+....+\alpha_n(u_n, u_1)$

যেহেতু সেটটি একক লম্ব $(u_2,u_1) = ... = (u_n, u_1) = 0$

$(u_1, u_1) \neq 0$ বলে $\alpha_1 = 0.$ অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে

$\alpha_i = 0, i = 1, ..., n$ অর্থাৎ $u_1, u_2...., u_n$ পরস্পর রৈখিকভাবে স্বাধীন।

যদি $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_{n2} u_n$

$u_1, u_2...., u_n$ এর সঙ্গে w -এর অন্তরগুণফল নিয়ে প্রমাণ করা যায় যে,

$(w, u_1) = \alpha_1, (w, u_2) = \alpha_2 ...., (w, u_n) = \alpha_n$

সহায়ক উপাপাদ্য 9.9.2

E^n দেশে n টির বেশি পরস্পর লম্ব ভেক্টর থাকতে পারে না।

আমরা আগে দেখেছি লম্ব ভেক্টরগোষ্ঠী রৈখিকভাবে স্বাধীন।

প্রদত্ত, $u_1, u_2, ...u_n$. E^n দেশের পরস্পর লম্ব ভেক্টরসমূহ।

তাহলে E^n -র যে কোনও ভেক্টর x -কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় :

$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n ...$ (1)

$\lambda_1, \lambda_2 .... \lambda_n$ স্কেলারসমূহ।

ধরা যাক E^n -তে u_{n+1} আর একটি ভেক্টর আছে,

যেটি $u_1, u_2....u_2$-এর উপর লম্ব।

যেহেতু $(u_i, u_{n+1}) = 0 \quad i = 1, ... n$, (1) থেকে পাই,

$(x, u_{n+1}) = 0$ যে কোনও x এর জন্য।

অতএব $x = u_{n+1}$ হলে আমরা পাই $(u_{n+1}, u_{n+1}) = 0$

$\therefore u_{n+1} = 0$

সহায়ক উপপাদ্য 9.9.3 V অন্তর গুণফলদেশে যদি $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ একক লম্ব ভেক্টর সেট হয় এবং $w \in V$ তাহলে $u = w - (w, u_1) u_1 .... (w, u_1) u_1 - .... -(w.u_n) u_n$ ভেক্টরটি $u_1, u_2....u_n$ এর প্রতিটির উপর লম্ব।

প্রমাণ ঃ $(u, u_1) = (w, u_1) - (w, u_1)(u_1, u_2) - .... - (w, u_n)(u_n, u_1)$

যেহেতু $(u_1, u_1) = 1$ এবং $(u_1, u_j) = 0$ যেহেতু $j \neq 1$

$(u, u_1) = 0$, অনুরূপে $(u, u_j) = 0, j = 2, ... n$

উপরিউক্ত সহায়ক উপপাদ্যটি আমাদের পরের আলোচনায় ব্যবহৃত হবে।

9.10 গ্রাম-স্মিডট্ লম্ব সেট নির্ণয় পদ্ধতি

ধরা যাক n মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ E^n-এ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ একটি রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টর সেট। যেহেতু E^n-এ n এবং n-সংখ্যকই লম্ব ভেক্টর গঠন করা যায়, আমরা দেখাব কি করে $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ থেকে একটি একক লম্ব সেট গঠন করা যায়।

ধরা যাক, $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ তাহলে $\|e_1\| = 1$

সহায়ক উপপাদ্য 9.9.3 থেকে বলা যায় যে,

$w_2 = v_2 - (v_2, e_1)\, e_1$

e_1 -এর উপর লম্ব।

আমরা $e_2 = \dfrac{w_2}{\|w_2\|}$ নিলাম; তাহলে $\|e_2\| = 1$.

ঐ সহায়ক উপপাদ্য 9.9.3 -র সাহায্যে বলতে পারি,

$w_3 = v_3 - (v_3, e_1)\, e_1 - (v_3, e_2) e_2$

e_1 এবং e_2 উপর লম্ব।

যেহেতু $(e_1, e_2) = 0$, $(w_3, e_1) = 0$ এবং $(w_3, e_2) = 0$

পরবর্তী পর্যায়ে $e_3 = \dfrac{W_3}{\|W_3\|}$ লওয়া হল।

এই পদ্ধতি ক্রমাগত অবলম্বন করে একটি একক লম্ব বেসিস পাওয়া যাবে।

সাধারণভাবে $w_i = v_i - (v_i, e_1)e_1 - (v_i, e_2)e_2 .... - (v_i, e_{i-1})e_{i-1}$

এবং $e_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|}$

প্রথমে $w_1 = v_1$ নেওয়া হয়েছে।

উদা : 9.10.1 গ্রাম-স্মিডট্ পদ্ধতি অবলম্বন করে প্রদত্ত সেট থেকে একটি লম্ব সেট গঠন করুন; $v_1 = (2, 3, 0)$, $v_2 = (6, 1, 0)$ এবং $v_3 = (0, 3, 5)$

$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3 = 0$ থেকে পাওয়া যায়,

$2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0$

$3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$

$0.\lambda_1 + 0.\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$

তৃতীয় সমীকরণ থেকে পাই $\lambda = 0$

প্রথম দুই সমীকরণ, λ_3-র মান বসালে পাওয়া যায়,

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$

$\therefore v_1, v_2, v_3$ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন।

$$\|v_1\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

অতএব $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2,3,0)$

$$w_2 = v_2 - (v_2, e_1)\, e_1$$

$$= (6,1,0) - \frac{15}{13}(2,3,0)$$

$$= \frac{(48,-32.0)}{13} = \frac{1}{13}(48,-32,0)$$

$$\|w_2\| = \frac{\sqrt{(48)^2 + (32)^2}}{13} = \frac{16}{\sqrt{13}}$$

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(48,-32,0)\times\sqrt{13}}{16\times 13} = \frac{1}{16\sqrt{13}}(48,-32,0)$$

$$w_3 = v_3 - (v_3,e_1)e_1 - (v_3, e_2)e_2$$

$$= (0,3,5) - \frac{9}{13}(2,3,0) + \frac{3}{8\times 13}(48,-32,0)$$

$$= (0,0,5)$$

$$\therefore e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}(0,0,1)$$

অনুশীলনী 9.10.2. (1,2) এবং (2,1) এই ভেক্টরদ্বয় কি রৈখিকভাবে স্বাধীন?

অনুশীলনী 9.10.3 (1,2) এবং (2,1) থেকে দুটি পরস্পর লম্ব ভেক্টর নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

9.10.2. হ্যাঁ 9.10.3

9.10.3 $e_1 = \dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}}, \; e_2 = \dfrac{(2,-1)}{\sqrt{5}}$

9.11 সারাংশ

দ্বি-মাত্রিক বা ত্রি-মাত্রিক দেশে dot গুণফল থেকে শুরু করে কীভাবে যে কোনও ভেক্টর দেশে অন্তরগুণফলের কথা বলা যায় সেইটাই এই এককের মূল বক্তব্য। ভেক্টর দেশকে কখন অন্তর গুণফল দেশ বলা যায় সেটা ব্যাখ্যা করার পর অন্তর গুণফলের নানা ধর্ম এই এককে আলোচনা করা হয়েছে। একক লম্ব সেট, গ্রাম-স্মিডট্ একক লম্ব সেট নির্ণয় পদ্ধতি, ভেক্টরের দৈর্ঘ্য ইত্যাদিও আলোচিত হয়েছে।

9.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

9.12.1 অন্তর গুণফল একটি স্কেলার বা ভেক্টর?

9.12.2 V একটি অন্তর গুণফল দেশ, u.v. $\in$ V, (u, v) = 0 শূন্য হলে যে কোনও v $\in$ V এর জন্য u ভেক্টরটি কী হবে?

9.12.3 জটিল ক্ষেত্রে V একটি অন্তর গুণফলদেশ,

V দেশে $u = (1, 2i), v = (-2i, 2)$

দেখান যে $(u, v) = (\overline{v, u})$

9.12.4 $v = (3, 4) \in R^2$ হলে v এর নর্ম $\|v\|$ নির্ণয় করুন।

9.12.5 R^2 -তে প্রদত্ত $u = (x_1, x_2)$ $v = (y_1, y_2)$

যদি $(u, v) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ হয়

দেখান যে (u, v) R^2 -তে অন্তর গুণফল হয়।

[ইঙ্গিত : অন্তর গুণফলদেশের শর্তগুলি সিদ্ধ করে কিনা সেটা পরীক্ষা করতে হবে]

9.12.6 1 R^3 দেশে a = (4,0,2), b = (3,7,0) হলে (a, b) শোয়ার্স অসমীকরণ সিদ্ধ করে তা দেখান।

9.12.7 (i) R^3 দেশে

$a_1 = (1,2,0)$, $a_2 = (2, 0, 3))$ $a_3 = (3,4,0)$

এই তিনটি ভিত্তি ভেক্টর থেকে গ্রাম-স্মিডট্ পদ্ধতির সাহায্যে একটি লম্ব সেট গঠন করুন।

(i) গ্রাম-স্মিডথ্ পদ্ধতির সাহায্যে প্রদত্ত ভেক্টর সেট থেকে একটি একক-লম্ব সেট গঠন করুন।

$v_1 = (3,0,4)$ $v_2 = (-1,0,7)$ এবং $v_3 = (2,9,11)$

9.12.8 V অন্তর গুণফল দেশে যদি $\{u_1, u_2, ... u_n\}$ একটি একক লম্ব ভেক্টর সেট হয়, তাহলে দেখান

$\sum_{||=||}^{n} |(u_1, v)|^2 \leq \|v\|^2$, v হল V দেশের যে কোনও একটি উপাদান।

9.12.9 V অন্তর গুণফলদেশে সামন্তরিক সূত্রটি (parallelogram law) প্রমাণ কর।

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

9.12.10 C^3 দেশে $v_1 = (1, i, 0)$ এবং $v_2 = (2, 1, 1 + i)$ এই দুই ভিত্তি দ্বারা গঠিত অর্ন্তদেশ wর একটি একক লম্ব ভিত্তি গঠন করুন।

9.13 উত্তরমালা

9.13.1 স্কেলার 9.13.2 u = 0

9.13.7 (i) $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $e_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$. $e_3 = (0,0,1)$

(ii) $e_1 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$, $e_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{4}\right)$, $e_3 = (0,1,3)$

9.13.10 $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{114}}(5,5,8)$

9.14 তথ্যসূত্র

1) G. Hadley, Linear Algebra, Addison Wesley Publishing Company. INC (1977)

2) S. Lipschutz, Linear Algebra, Schaum's Outline Series, Mc-Graw Hill Book Company, 1968.

3) I. N. Herstein, Topics in Algebra, John Wiley & Sons, 1975.

4) P.C. Shields, Linear Algebra, Addison - Wesley, 1964।

একক 10 ❐ রৈখিক ম্যাপিং বা রৈখিক রূপান্তর (Linear Transformation / Mapping)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

একরূপ থেকে অন্যরূপ ধারণ করাকে রূপান্তর বলে। প্রকৃতিতে এটা হামেশাই ঘটে। কোনও বস্তুর আয়তন বৃদ্ধি বা সঙ্কোচনও রূপান্তর মাত্র। আমরা যদি একটু খুঁটিয়ে দেখি বস্তুটি যে সব কণা দিয়ে গঠিত তাদের প্রাথমিক স্তরের স্থানাঙ্ক ও পরিবর্তিত স্তরের স্থানাঙ্ক এক নয়। তাহলে প্রাথমিক স্তরে কণাটি যে অবস্থায় আছে তার সঙ্গে পরবর্তীস্তরের অবস্থানের একটা সম্পর্ক আছে। রূপ নির্ণয় করতে পারলে আমরা অনেক ঘটনার কারণ নির্ণয় করতে পারব। তার ফলে বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখা যেমন পদার্থবিদ্যা, রসায়নশাস্ত্র, ভূবিদ্যা, প্যাটার্ন নির্ণয় (Pattern recognition), অর্থনীতিতে গবেষণার কেন্দ্রবিন্দু হয়ে দাঁড়ায় এই সম্পর্ক নির্ণয় বা ম্যাপিং-এর রূপ নির্ণয়। আমরা আগেই বলেছি রৈখিক মডেল অনুধাবন করা সবচেয়ে সহজ। সেই একই কারণে রৈখিক ম্যাপিং-এর গুণাবলী সহজ, সুন্দর ও সুসংহত। এই রৈখিক ম্যাপিং নিয়ে আমরা এই এককে আলোচনা করব।

10.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি যেগুলি করতে পারবেন সেগুলি হল—

- রৈখিক রূপান্তরের সাহায্যে নানাবিধ গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন
- কোন ম্যাপিংটি রৈখিক এবং কোনটি রৈখিক নয় তার ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

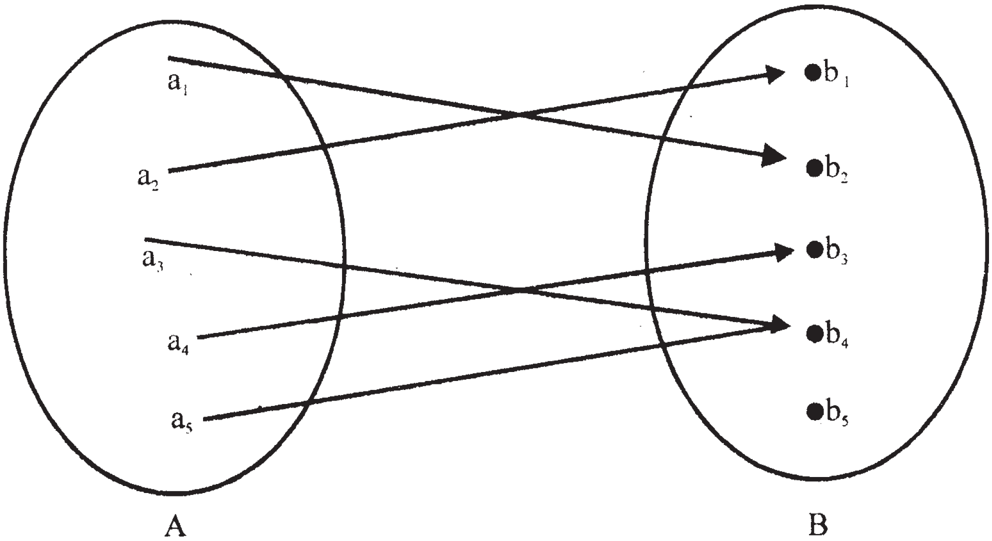
10.3 ম্যাপিং

ধর যাক A ও B যে কোনও দুটি সেট। এখন A -এর প্রতিটি উপাদান 'a' -এর সঙ্গে B -এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি উপাদান 'b' -এর সম্বন্ধ স্থাপন করা হলঙ্গ এই সম্বন্ধগোষ্ঠীকে 'f' বলে চিহ্নিত করা হল। 'f' -কে বলা হয় একটি অপেক্ষক বা ম্যাপিং যা A কে B -তে ম্যাপ করে। এই সত্যটাকে আমরা প্রকাশ করি ঃ

$f : A \to B$ । অথবা $A \xrightarrow{f} B$

a' এর অনুষঙ্গী B এর উপাদানকে আমরা f(a) বলে চিহ্নিত করি অথবা f(a) হচ্ছে f এর সাপেক্ষে 'a' এর প্রতিবিম্ব। তাহলে প্রতিটি ম্যাপিং $f : A \to B$ এর অনুষঙ্গী একটি সেট পাই $\{(a, f(a) / a \in A\}$ আমরা বলতে পারি $\{(a, f(a)) / a \in A\}$, $A \times B$ এই কার্টিজীয় সেটগুণফলের সাবসেট। যদি $f : A \to B$ হয় তাহলে $\{(a, f(a) / a \in A\}$ কে f -এর লেখচিত্র বলে। তাহলে দুটি ম্যাপিং $f : A \to B$ এবং $g : A \to B$ কে সমান বলা যায়, যদি যে কোনও 'a' এর জন্য $f(a) = g(a)$ হয়। তাইলে $f : A \to B$ এবং $g : A \to B$ এই ম্যাপিংদুটি সমান হবে যদি তাদের লেখচিত্রগুলি যথাক্রমে সমান হয়।

উদা : 10.3.1



ধরা যাক $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ এবং $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ এখানে $f(a_1) = b_2$ $f(a_2) = b_2$, $f(a_3) = b_4$, $f(a_4) = b_3$ $f(a_5) = b_4$

এক্ষেত্রে $\{f(a_1), f(a_2)\ f(a_3)\ f(a_4), f(a_5)\} = \{b_2\ b_1, b_4, b_3, b_4\} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}.\ \{b_1, b_2, b_4\}$

$\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ সেটটিকে f -এর প্রতিবিম্ব সেট বলে এবং একে f(A) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\therefore f(A) = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

সর্বদা $f(A) \subseteq B$

উদা 10.3.1. প্রদত্ত $f : R \to R$ এবং f যে কোনও বাস্তব সংখ্যা x কে আর একটি বাস্তব সংখ্যা x^3-এ ম্যাপ করে।

তাহলে $x \xrightarrow{f} x^3$ অর্থাৎ $f(x) = x^3$

যদি $x = 3$ হয়, $f(x) = f(3) = 27$

উদা 10.3.2 প্রদত্ত $f : R \to R$ এবং f যে কোনও বাস্তব সংখ্যা x কে আর একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা $|x|$ -এ ম্যাপ করে।

তাহলে $x \xrightarrow{f} |x|$ অর্থাৎ $f(x) = |x|$

যখন $x = -3$, $f(-3) = |-3| = 3$

সংজ্ঞা 10.3.1 একটি ম্যাপিং $f : A \to B$ এককৈক বা এককৈকীকরণ (injective) ম্যাপিং বলা হয় যদি A -এর পৃথক উপাদানদের প্রতিবিম্বরাও B এর পৃথক উপাদান।

অর্থাৎ $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

অথবা $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

সংজ্ঞা 10.3.2 : একটি ম্যাপিং $f : A \to B$ কে উপরি বা সমাপতিত (Surjective) ম্যাপিং বলা হয় যদি B -এর প্রতিটি উপাদান b -এর জন্য A তে অন্তত একটি উপাদান a পাওয়া যাবে যাতে করে 'a' এর ম্যাপ 'b' হবে।

সমাপতিত ম্যাপিং-এ $f(A) = B$

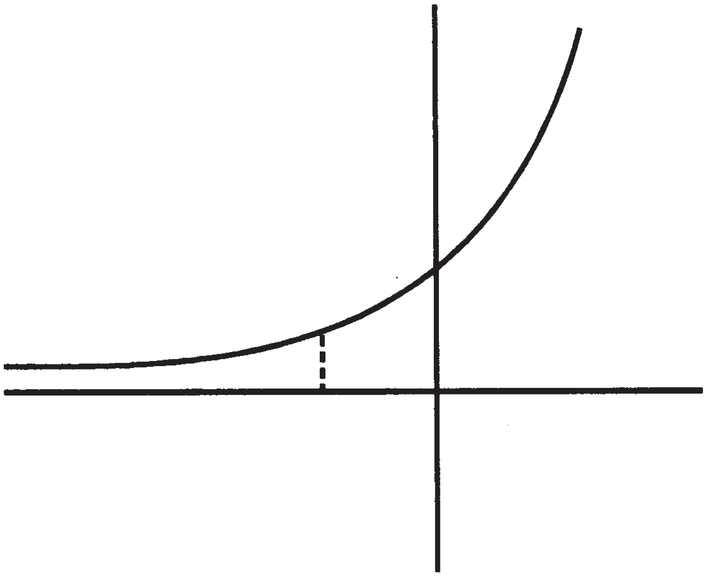
সংজ্ঞা 10.3.3 : যে ম্যাপিং একই সঙ্গে এককৈক ও সমাপতন তাকে এককৈক সমাপতিত (bijective) ম্যাপিং বলা হয়।

উদা 10.3.3 : ধরা যাক S -এর উপাদানগুলি হল x_1, x_2, এবং x_3।

$T : S \to S$ একটি ম্যাপিং এবং $Tx_1 = x_2$, $Tx_2 = x_3$ এবং $Tx_3 = x_1$

T একটি সমাপতিত ম্যাপিং এবং এক্ষেত্রে $f(S) = S$.

উদা 10.3.4 : প্রদত্ত $f : R \rightarrow R$ এবং $f(x) = 2^x$

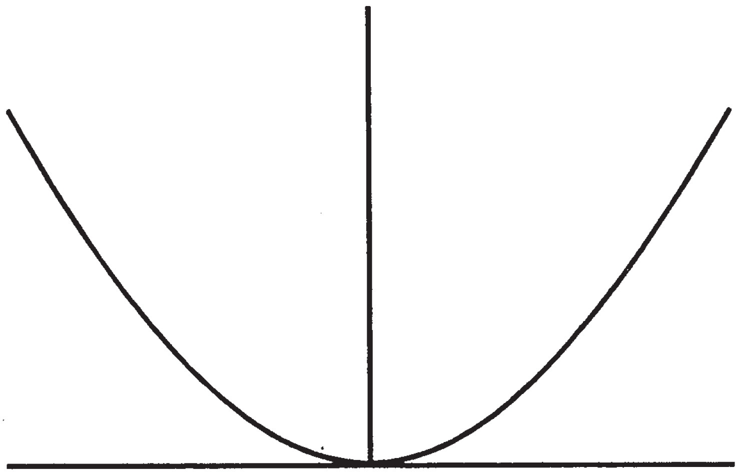


$f(x) = 2^x$

লেখচিত্রের সাহায্যে দেখা যায় যে অনুভূমিক রেখার যে কোনও বিন্দু লেখচিত্রের একটিমাত্র বিন্দুতেই চিত্রিত হয়। অর্থাৎ ম্যাপিং একৈক।

এক্ষেত্রে, $2^x = 2^y \Rightarrow \log 2^x = \log 2^y \Rightarrow x \log_e^2 = y \log_e^2 \Rightarrow x = y$

যেহেতু $\log_e^2 \neq 0$



$f(x) = x^2$

উদা 10.3.5

ধরা যাক $f : R \rightarrow R$ এবং $f(x) = x^2$

$x=3 \Rightarrow f(x)=9,\ x=-3 \Rightarrow f(x)=9$

অর্থাৎ f এককৈক নয়।

আবার $f(x)=-16 \Rightarrow x^2=-16$ অর্থাৎ x -এর কোনও বাস্তব মান নেই যার বর্গ $=-16$

$\therefore$ f একটি সমাপতিত ম্যাপিং নয়।

10.4 রৈখিক ম্যাপিং বা রৈখিক রূপান্তর

K ক্ষেত্রের উপর ধরা যাক V ও U দুটি ভেক্টরদেশ। $T: V\rightarrow U$ এই ম্যাপিংকে রৈখিক ম্যাপিং বা রৈখিক রূপান্তর বলা হয়, যদি নীচের শর্তদুটি সিদ্ধ হয় :

i) যে কোনও $u, v \in V$ এর জন্য $T(u+v)=Tu+Tv$

ii) যে কোনও $\lambda \in K$ এবং $u \in V$ এর জন্য $T(\lambda u)=\lambda T(u)$

পক্ষান্তরে অর্থাৎ $T: V \rightarrow V$ -কে রৈখিক বলা হবে যদি রূপান্তরটি ভেক্টরদেশের দুইটি মূল ধর্ম যেমন ভেক্টর যোগফল ও স্কেলারের গুণফলের সাপেক্ষে অপরিবর্তিত থাকে।

λ -এর মান শূন্য নিলে আমরা পাই $T(0)=0$ অর্থাৎ যে কোনও রৈখিক ম্যাপিং শূন্য ভেক্টরকে শূন্য ভেক্টরে স্থানান্তরিত করে।

তাহলে রৈখিক ম্যাপিং-এর শর্তদ্বয় (i) এবং (ii) প্রয়োগ করে আমরা পাই ঃ

$T(\alpha u+\beta v)=\alpha\, Tu+\beta\, Tv,$

$\alpha, \beta \in K,$ যে কোনও দুটি স্কেলার এবং $u, v \in V$ যে কোনও দুটি ভেক্টর।

উপরের সম্বন্ধকে আরও বিস্তৃত করে আমরা বলতে পারি যে কোনও স্কেলার $\alpha_i \in K$ এবং ভেক্টর $u_i \in V$ এর জন্য আমরা পাই

$T(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots..+\alpha_2 u_n)=\alpha_1 T(u_i)+\ldots.+\alpha_n T(u_n)$

উদাহরণ 10.4.1 : ধরা যাক $u=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, x_1, y_1 \in R$ অর্থাৎ $u \in R^2$

T রূপান্তরটি এইরূপ :

$Tu=\begin{pmatrix} a_1x_1+b_1y_1 \\ a_2x_1+b_2y_1 \end{pmatrix} a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$ অর্থাৎ বাস্তব স্কেলার।

তাহলে Tu ভেক্টরটিও $R \times R = R^2$ এর উপাদান।

ধরা যাক R^2 আর একটি উপাদান $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $x_2, y_2 \in R$

তাহলে $Tv = \begin{pmatrix} a_1x_2 + b_1y_2 \\ a_2x_2 + b_2y_2 \end{pmatrix}$

অর্থাৎ $Tu + Tv = \begin{pmatrix} a_1x_1 + b_1y_1 \\ a_2x_1 + b_2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1x_2 + b_1y_2 \\ a_2x_2 + b_2y_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_1(x_1 + x_2) + b_1(y_1 + y_2) \\ a_2(x_1 + x_2) + b_2(y_1 + y_2) \end{pmatrix} = T(u + v)$$

অনুরূপে দেখান যায় যে, $T(\lambda u) = \lambda Tu$, λ বাস্তব স্কেলার।

উদাহরণ 10.4.2 : ধরা যাক xy দেশে (x,y) বিন্দুটি চলনের সাহায্যে $(x+\alpha.\ y+\beta)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হল তাহলে রূপান্তর T কে ব্যক্ত করা যায় এইভাবে

$$Tu = \begin{pmatrix} x + \alpha \\ y + \beta \end{pmatrix} \in R^2$$

যেখানে $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

তাহলে $T(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$

সুতরাং T রৈখিক নয়।

উদাহরণ 10.4.3 : ধরা যাক $I : V \to V$ V-এর v উপাদানকে v তে রাখে। 'I' কে উপাদানস্থির রূপান্তর বলে। তাহলে $u, v \in V$-এর জন্য

$I(u+v) = u + v$

$I(\lambda u) = \lambda u$, λ স্কেলার

অর্থাৎ I একটি রৈখিক ম্যাপিং।

উদাহরণ 10.4.4 : ধরা যাক V, t চলের বহুপদীরাশিমালার ভেক্টরদেশ। V টি R ক্ষেত্রের উপর প্রযোজ্য।

তাহলে অন্তরকলন ম্যাপিং $D\left(=\frac{d}{dt}\right): V \to v$ অর্থাৎ D এক বহুপদী রাশিমালাকে আর একটি বহুপদী রাশিমালায় রূপান্তরিত করে।

যেমন $\frac{d}{dt}\left(3t^2+5t+4\right)=6t+5$

তখন u ও $v \in V$ এর জন্য $\frac{d}{dt}(u+v)=\frac{du}{dt}+\frac{dv}{dt}$

$\frac{d}{dt}(\lambda u)=\lambda\frac{du}{dt},\ \lambda \in R$

অর্থাৎ $D(u+v) = Du + Dv$

$D(\lambda u) = \lambda Du$

সুতরাং D রৈখিক রূপান্তর।

সংজ্ঞা 10.4.1 একটি রৈখিক ম্যাপিং $T : V \to U$ কে একৈক সংগঠন ম্যাপিং (isomorphism) বলা হয় যদি ম্যাপিংটি একৈক হয়। V ও U এই ভেক্টর দেশদ্বয়কে একৈকভাবে সমগঠিত বলা হয় যদি একটি একৈক সমগঠন ম্যাপিং পাওয়া যায় সেটা V কে U এর উপর চিত্রিত করে।

উদা 10.4.5 : ধরা যাক R ক্ষেত্রের উপর V একটি n মাত্রিক ভেক্টর দেশ। ধরা যাক $e_1,\ldots.e_n)$ হল V এর একক লম্ব ভিত্তি (orthonormal basis) প্রদত্ত $T_1v = [v]_i$, $[v]_i$ হল e_i এর সাপেক্ষে v এর উপাংশ।

$[v]_i=(v, e_i)$, (,) অন্তরগুণন ইঙ্গিত করে।

অনুরূপে $[w]_i = (w, e_i)$

যদি $(v, e_i) = (w, e_i)$ হয়

তাহলে $(v - w, e_i) = 0$ যে কোনো দুটি উপাদান v ও w এর জন্য। অতএব $(v - w, e_i) = 0 \Rightarrow v = w$।

অর্থাৎ $T_1v = T_1w \Rightarrow v = w$

অতএব T_i একৈক বা একৈক সমগঠন ম্যাপিং।

সংজ্ঞা 10.4.2 : রৈখিক ম্যাপিং-এর সার **(Kernel)** এবং **প্রতিবিম্ব** (image) ঃ

সংজ্ঞা 10.4.2 : ধরা যাক $T : V \to U$ একটি রৈখিক ম্যাপিং। T এর প্রতিবিম্ব হচ্ছে U তে প্রতিবিম্ব বিন্দু সমূহের সেট। T এর প্রতিবিম্বকে সংক্ষেপে বিম্ব T হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

বিম্ব $T = \{u \in U; T(v) = u$ যেখানে $v \in V\}$

T এর সার (Kernel) V-ভেক্টর দেশের সেইসব উপাদান v বোঝায় যেগুলি '0' $\in$ U -তে চিত্রিত হয়।

T এর সারকে সার T হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

সার $T = \{v \in V : T(v) = 0\}$

উপপাদ্য 10.4.1 : ধরা যাক $T : V \to U$ একটি রৈখিক ম্যাপিং।

তাহলে T এর প্রতিরিম্ব U এর একটি উপদেশ এবং T -এর সার V-র একটি উপদেশ।

ধরা যাক $Tv_1 = u_1, v_1 \in V, u_1 \in U$

$Tv_2 = u_2, \quad v_2 \in V, u_2 \in U$

যেহেতু T রৈখিক ম্যাপিং $T(v_1+v_2) = Tv_1+Tv_2 = u_1+u_2$

অর্থাৎ $u_1+u_2 \in U$

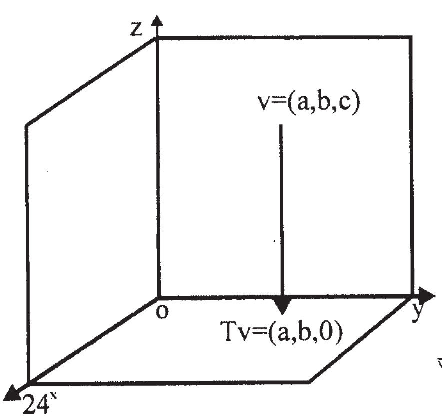
আবার $T(\lambda v_1) = \lambda Tv_1 = \lambda u_1 \in U$, λ একটি স্কেলার।

তাহলে বিম্ব T ভেক্টর যোগফল ও স্কেলার গুণফল-এর সাপেক্ষে আবদ্ধ। অর্থাৎ U -এর একটি উপদেশ।

আবার, ধরা যাক $Tv_1 = 0, v_1 \in V, 0 \in U$

$Tv_2 = 0, v_2 \in V, 0 \in U$

T রৈখিক বলে $T(v_1+v_2) = Tv_1+Tv_2 = 0, v_1+v_2 \in V, 0 \in U.$



$T(\lambda v_1) = \lambda Tv_1 = 0$, λ একটি স্কেলার।

তাহলে $v_1, v_2 \in$ সার $T \Rightarrow v_1+v_2 \in$ সার T

$v_1 \in$ সার $T \Rightarrow \lambda v_1 \in$ সার T

λ স্কেলার।

তাহলে সার T ভেক্টর যোগফল ও স্কেলার গুণফলের সাপেক্ষ আবদ্ধ। অর্থাৎ V -এর একটি উপদেশ।

উদাহরণ 10.4.6 : ধরা যাক $T : R^3 \rightarrow R^3$ এমন একটি রূপান্তর যা যে কোনও বিন্দুর xy তলে অভিক্ষেপ

অর্থাৎ $T(x,y,z) = (x,y,o)$

তাহলে বিম্ব $T = \{(a, b, 0), a, b \in R\}$

সার T হল z অক্ষ

সার $T = \{(0.0.c), c \in R)\}$

কেননা $T (0, 0, c)=(0, 0, 0)$, যে কোন $c \in R$ এর জন্য।

উপপাদ্য 10.4.2 : ভেক্টর দেশের মাত্রা যদি সসীম হয়, এবং $T : V \rightarrow U$

যদি রৈখিক ম্যাপিং হয়, তাহলে দেখান,

V এর মাত্রা (dimension) = সার T এর মাত্রা (dim) + বিম্ব T এর মাত্রা (dim)।

ধরা যাক $TV = U'$

এবং $W = \{u, u \in V \mid Tu = 0\}$

ধরা যাক সার T অর্থাৎ W -এর মাত্রা হল $r \leq n$

আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে বিম্ব T এর মাত্রা হল $= n - r$

W এর ভিত্তি ধরা যাক $(w_1, w_2....w_r)$

$v_1, v_2 ..... v_{n-r}$ এই স্বাধীন ভেক্টরগুলি যোগ করে আমরা V এর ভিত্তি পাই নিম্নরূপ $(w_1, ..., w_r, v_1, v_2..... v_{n-r})$

ধরা যাক $B = (Tv_1, Tv_2, ... Tv_{n-r})$

আমরা দেখাতে চাই যে B বিম্ব T-এর একটি ভিত্তি।

$u \in$ বিম্ব T হলে আমরা $v \in V$ পাব যাতে করে

$Tv = u$

যেহেতু $(w_1....w_r, v_1, v_2....v_{n-r})$, V এর উপাদানগুলিকে উৎপন্ন করে এবং যেহেতু $v \in V$

আমরা $\alpha_1, ... \alpha_r, \beta_1, ... \beta_{n-r}$ স্কেলারসমূহ পাব

যাতে করে $v = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ...+ \beta_{n-r} V_{n-r}$,

অতএব, $u = Tv = \alpha_1 Tw_1 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_1 Tw_r + \beta_1 Tv_1 + \beta_2 Tv_2$

$+\ldots + \beta_{n-r} Tv_{n-r} = \beta_1 Tv_1 + \ldots + \beta_{n-r} Tv_{n-r}$

লক্ষণীয় যে, $w_1, w_2, \ldots w_r \in W$ বলে

$Tw_1 = Tw_2 = \ldots = Tw_r = 0$

তাহলে $Tv_1, \ldots Tv_{n-r}$ বিম্ব T উৎপন্ন করে।

যদি $Tv_1, \ldots Tv_{n-r}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন হয় তাহলে বিম্ব T -এর ভিত্তি n–r হবে।

ধরা যাক $\beta_1 Tv_1 + \beta_2 Tv_2 + \ldots + \beta_{n-r} Tv_{n-r} = 0$

অর্থাৎ $T(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{n-r} v_{n-r}) = 0$

অর্থাৎ $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{n-r} v_{n-r}$, W তে

আছে এবং $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{n-r} v_{n-r}$

$w_1 \ldots w_r$ এর রৈখিক সমাবেশ হবে।

এটা সম্ভব নয় যেহেতু (w_1, v_1) V এর ভিত্তি গঠন করে এবং v_i $(i = 1,2,\ldots, n-r)$ সমূহ $w_i(i = 1,2, \ldots n-r)$ সমূহ থেকে স্বাধীন।

অতএব $Tv_1, Tv_2, \ldots Tv_{n-r}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং বিম্ব T-এর ভিত্তি গঠন করে।

সুতরাং বিম্ব T এর মাত্রা $= n - r$

অতএব V এর মাত্রা = সার T -র মাত্রা + বিম্ব T -এর মাত্রা।

মন্তব্য 10.4.1 উপরে আলোচিত 10.3.6 উদাহরণে সার T -এর মাত্রা = 1

বিম্ব T এর মাত্রা = 2

মন্তব্য 10.4.2 ধরা যাক $T : V \to U$ একটি রৈখিক ম্যাপিং।

T -এর **মাত্রা** (Rank) বলতে T এর প্রতিবিম্বের মাত্রা বোঝায় এবং T -এর শূন্যতা (Nullity) বলতে T এর সারের মাত্রা বোঝায়।

T এর **মাত্রা** = **প্রতিবিম্ব** T এর **মাত্রা**, T -এর **শূন্যতা** (nullity) = **সার** T -এর **মাত্রা**

মন্তব্য 10.4.3 উপপাদ্য 10.4.2 থেকে পাই

T-এর র‍্যাঙ্ক বা মাত্রা +T -এর শূন্যতা = V এর মাত্রা (dim)

উদাহরণ 10.4.7 : নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সের

(i) মাত্রা (rank) (ii) শূন্যতা (iii) সারের ভিত্তি নির্ণয় করুন ঃ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ধরা যাক স্তম্ভ চারটি (তৃতীয় স্তম্ভ ব্যতিরেকে) রৈখিকভাবে স্বাধীন নয়। তাহলে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \in R$ পাওয়া যাবে যাতে করে

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

অর্থাৎ
$$\begin{array}{lllll} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & +\alpha_3 & +\alpha_4 & = 0 \\ 2\alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & +2\alpha_4 & = 0 \\ -7\alpha_1 & & -2\alpha_3 & & = 0 \\ 3\alpha_1 & & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \end{array}$$

অতএব $\alpha_3 = -\frac{7}{2}\alpha_1.\ \alpha_2 + 3\alpha_1 - \frac{7}{2}\alpha_1 = 0$

অথবা, $\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1$

প্রথম সমীকরণ থেকে পাই $\alpha_4 = -2\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{7}{2}\alpha_1 = -5\ \alpha_1$

আবার দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে পাই $\alpha_4 = -\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3$

$= \left(-1 - \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right)\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 \rightarrow 2a$

তাহলে $= \frac{1}{2}\alpha_1 = \alpha_4 = -5\alpha_1$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

অতএব স্তম্ভভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

অতএব A এর মাত্রা (rank) = 4

ধরা যাক $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

তাহলে $Ax = 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 & -x_2 & +x_4 & +x_5 & = 0 \\ 2x_4 & +x_2 & +x_4 & +x_5 & = 0 \\ -7x_1 & & -2x_4 & & = 0 \\ 3x_1 & -x_2 & +x_4 & & = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x_4}{-2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_4}{7} = \frac{x_5}{-1}$$

সুতরাং সার $T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in R^5 \middle| \frac{x_1}{-2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4}{7} = \frac{x_5}{-7} \right\}$

অতএব সার T এর জ্যামিতিক রূপ হল,

মূলবিন্দু গামী R^5 -র একটি সরলরেখা যার কোসাইন দিগঙ্ক (–2, 1, 0, 7, -1) এর অনুপাতী।

সুতরাং সারের শূন্যতা = 5 ।

10.5 বিশিষ্ট ম্যাপিং (Singular mapping) এবং অবশিষ্ট ম্যাপিং (non-Singular mapping)

একটি রৈখিক ম্যাপিং $T : V \to U$ কে বিশিষ্ট বলা হয় যদি শূন্য নয় এমন ভেক্টরের T এর সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব শূন্য হয়, অর্থাৎ এমন ভেক্টর $v \in V, v \neq 0$ পাওয়া যায় যার জন্য $Tv = 0$, তাহলে $T : V \to U$ কে অবিশিষ্ট ম্যাপিং বলা হবে যাদি $0 \in V$ -এর প্রতিবিম্ব $0 \in U$ হয়। অর্থাৎ T যদি অবিশিষ্ট হয় তাহলে সার $T = \{0\}$

উদাহরণ 10.5.1 : ধরা যাক $T : R^2 \to R^2$ নিম্নরূপ ঃ

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ হলে}$$

$$Tx = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$Tx = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

অর্থাৎ $Tx = 0 \Leftrightarrow x = 0$

সুতরাং T অবিশিষ্ট

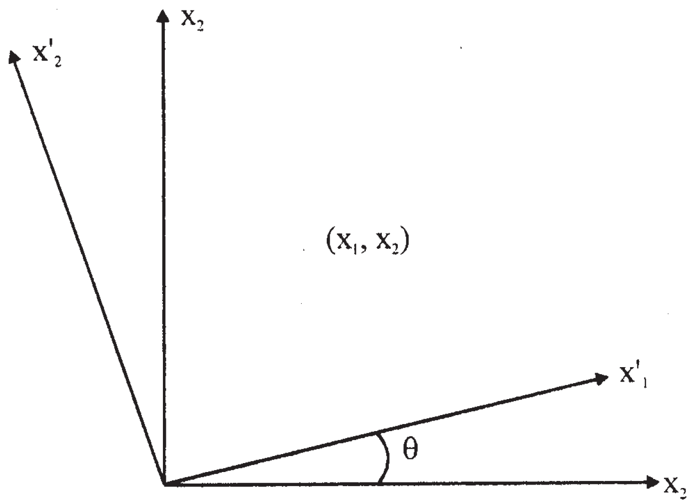
$T : R^2 \to R^2$ যদি এইরূপ হয়

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{13}} x_1 - \dfrac{2}{\sqrt{13}} x_2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{13}} x_1 + \dfrac{3}{\sqrt{13}} x_2 \end{cases}$$

অথবা $Tx = \begin{cases} x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{cases}$

যেখানে $\tan\theta = \dfrac{2}{3}$.

এই বূপান্তরের একটি জ্যামিতিক ব্যাখ্যা আছে



মূল অক্ষদ্বয় $(x_1 x_2)$ কে যদি θ কোণে ঘূর্ণন করা যায় তাহলে যে বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1 x_2)$

তা $(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta, x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)$ তে রূপান্তরিত হয়।

$\theta = 0$ বসালে দেখা যায় যে মূলবিন্দু রূপান্তরের পরেও অপরিবর্তিত থাকে। অর্থাৎ T অবিশিষ্ট।

এখন রৈখিক ম্যাপিং $T : V \to U$ যদি একৈক হয়, তাহলে কেবলমাত্র $0 \in V$, $0 \in U$ তে চিত্রিত হয়। অর্থাৎ T অবিশিষ্ট। এর বিপরীত বচনও সত্য। যেমন ধরা যাক T অবিশিষ্ট এবং $Tv_1 = Tv_2$

$Tv_1 = Tv_2 \Rightarrow T(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0$, T রৈখিক ও অবিশিষ্ট বলে।

তাহলে $Tv_1 = Tv_2 \Rightarrow v_1 = v_2$

অর্থাৎ T একৈক। আমরা আগেই দেখেছি একৈক রৈখিক ম্যাপিংকে একৈক সমগঠন চিত্রণ বলে।

তাহলে আমরা নিম্নলিখিত উপপাদ্য পাই :

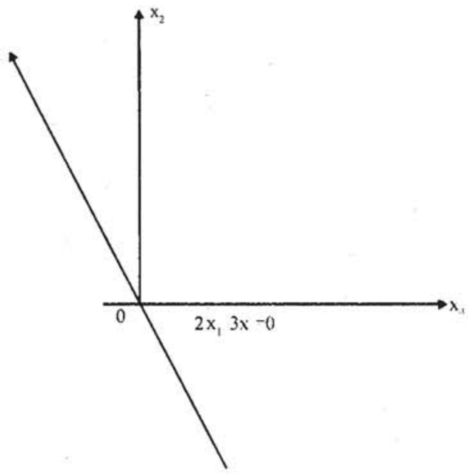
উপপাদ্য 10.5.1 একটি রৈখিক ম্যাপিং $T : V \to U$ একৈক সমগঠন চিত্রণ বলা হবে যদি এবং একমাত্র যদি T অবিশিষ্ট হয়।

উদাহরণ 10.5.2 ধরা যাক $T : R^2 \to R^3$ । নিম্নরূপ ঃ

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ হলে

$$Tx = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$$

$Tx = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_2$ অর্থাৎ x_2 এর যে কোন মানের জন্য x_1 এর একটি মান পাওয়া যাবে (x_1 = 0, x_2 = 0) এই সমাধান সেটের অঙ্গ।



সুতরাং $Tx = 0 \not\Rightarrow$ শুধু $x = 0$।

অর্থাৎ T একটি বিশিষ্ট ম্যাপিং।

মন্তব্য 10.5.1 জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে বলা যায় Tx = 0 একই সরলরেখা $2x_4+3x_2 = 0$ উপস্থাপনা করে।

মূলবিন্দুগামী এই সরলরেখার ওপর যে কোন বিন্দুই Tx = 0 এই সমীকরণদ্বয়ের সমাধান।

সুতরাং T একটি বিশিষ্ট ম্যাপিং।

10.6 রৈখিক ম্যাপিং ও রৈখিক সমীকরণগোষ্ঠী

ধরা যাক ক্ষেত্র R।

$x = (x_1, \ldots x_n)^T$, যেখানে $x_i, i = 1, \ldots n \in R$

x হচ্ছে $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ -এর ক্রমিত n গোষ্ঠী।

সুতরাং $x \in R^n$

ধরা যাক T একটি রৈখিক ম্যাপিং এবং $T : R^n \to R^n$

প্রদত্ত $Tx_1 = a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n$

$a_{i1}, a_{i2} \ldots a_{in} \in R$

ধরা যাক $b = (b_1,\ldots, b_n) \in R^n$

তাহলে Tx = b এর

প্রাগবিম্ব (pre-image) নির্ণয় করা, আর প্রদত্ত সমীকরণগোষ্ঠীকে সমাধান করা, এই দুই সমস্যা অভিন্ন

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

যদি $b_1 = b_2 \dots = b_n = 0$, তখন উক্ত সমীকরণগোষ্ঠীকে সমএকঘাত সমীকরণগোষ্ঠী বলা হয়।

এটা লক্ষণীয় যে সমএকঘাত সমীকরণগোষ্ঠী সমাধানসমূহ নির্ণয় আর T ম্যাপের সার নির্ণয় অভিন্ন সমস্যা।

উদাহরণ 10.6.1 $T : R^2 \to R^2, x \in R^2$ অর্থাৎ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$Tx = \begin{cases} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

T ম্যাপিং-এর সার নির্ণয় করতে হবে।

T -এর সার নির্ণয় করা মানে

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ এই সমীকরণদ্বয়কে

সমাধান করা

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ এই সমীকরণদ্বয়ের

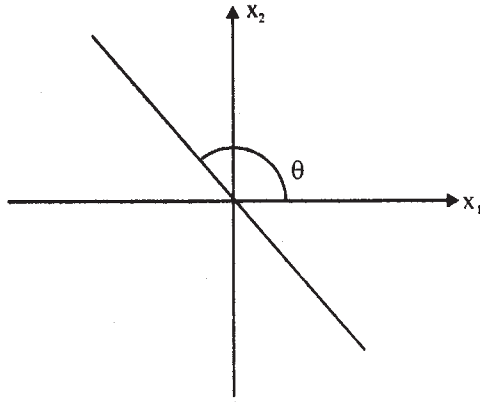
সমাধান হল $\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$

সার $T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

উদাহরণ 10.6.2 $T : R^2 \to R^2 , x \in R^2$ অর্থাৎ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$Tx = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

T ম্যাপিং এর সার নির্ণয় করুন।



$Tx = 0$ সমাধান করে পাই $x_1 = -\frac{1}{2}x_2$,

এটি মূলবিন্দু অনুগামী একটি সরলরেখা যার নতিমাত্রা $\tan\theta$, $\theta = -\tan^{-1}\frac{1}{2}$

সার $T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2 \middle| x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \right\}$

10.7 রৈখিক ম্যাপিং-এর উপর নানাবিধ প্রক্রিয়া

ধরা যাক K ক্ষেত্রের উপর V ও U দুটি ভেক্টর দেশ। F ও G দুটি রৈখিক ম্যাপিং এবং

$F : V \to U, G : V \to U$

আমরা F ও G এই দুই ম্যাপিং-র যোগফলকে F + G বলব।

F + G এমন একটি ম্যাপিং যেটা V এর উপাদান v কে $F(v) + G(v) \in U$ তে ম্যাপ করে এবং

$(F + G)(v) = F(v) + G(v), v \in V.$

যে কোনও স্কেলার k-এর জন্য, kF কে আমরা k ও F এর গুণফল বলব এবং $kF : V \to U$ এমন একটি ম্যাপিং যে

$(kF)(v) = kF(v), v \in V.$

আমরা দেখাব যে F ও G যদি রৈখিক ম্যাপিং হয়, তাহলে F + G ও kF ও রৈখিক ম্যাপিং।

যে কোনও ভেক্টরদ্বয়, $v_2 \in V$ এবং স্কেলারদ্বয় $k_1, k_2 \in K$ ব্যবহার করে আমরা পাই :

$$(F+G)(k_1v_1+k_2v_2) = F(k_1v_1+k_2v_2) + G(k_1v_1+k_2v_2)$$

$$= k_1F(v_1)+k_2F(v_2) + k_1G(v_1) + k_2G(v_2)$$

$$= k_1(F(v_1) + G(v_1)) + k_2(F(v_2) + G(v_2)$$

$$= k_1(F + G)v_1 + k_2(F + G)\, v_2$$

আবার $k \in F$ এর জন্য

$$(kF)(k_1v_1+k_2v_2) = kF(k_1v_1 + k_2v_2) = k(k_1F(v_1) + k_2F(v_2))$$

$$= kk_1F(v_1) + kk_2F(v_2)$$

$$= k_1(kF)(v_1) + k_2(kF)(v_2)$$

অতএব $F + G$ এবং kF রৈখিক ম্যাপিং।

উদাহরণ 10.7.1 ধরা যাক $T_1, T_2 : R^2 \to R^2$ এবং T_1, T_2 রৈখিক ম্যাপিং।

যদি $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ হয়

$$T_1x = \left.\begin{matrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{matrix}\right\}$$

$$T_2x = \left.\begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 \end{matrix}\right\}$$

তাহলে $(T_1 + T_2)\, x = T_1x + T_2x = \begin{matrix} (2x_1 + x_2) + (3x_1 + 2x_2) \\ (x_1 + 3x_2) + (4x_1 + 3x_2) \end{matrix}$

$$= \begin{matrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{matrix}$$

$$(kT_1)(x) = kT_1x = \begin{matrix} 2kx_1 + kx_2 \\ kx_1 + 3kx_2 \end{matrix}$$

উপপাদ্য 10.7.1

প্রদত্ত V ও U দুটি ভেক্টর দেশ যাদের ক্ষেত্র হল K। V কে U তে অন্তর্চিত্রিত এমন রৈখিক ম্যাপিং-এর দল, যাদের যোগফল প্রক্রিয়া ও স্কেলার গুণফল প্রক্রিয়া আগের বর্ণিত প্রক্রিয়ামাত্র, আমাদের আলোচ্য বিষয়। ঐ রৈখিক ম্যাপিং-র দল k ক্ষেত্রের উপর একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে।

প্রমাণ

ধরা যাক X-এর উপরে বর্ণিত রৈখিক ম্যাপিং-র একটি সেট নেওয়া হল।

(a) যে কোনও তিনটি রৈখিক ম্যাপিং $T_1, T_2, T_3 : V \to U$ এর জন্য আমরা লক্ষ করি যে

$((T_1 + T_2) + T_3)(v) = (T_1 + T_2)v + T_3v, x \in V$

$= T_1v + T_2v + T_3v = (T_1 + (T_2 + T_3))(v)$

অথবা $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$

(b) $0 \in X$ এই রৈখিক ম্যাপিং-এর জন্য

$(T_1 + 0)v = T_1v + 0.v = T_1v. \ v \in V$

অর্থাৎ $T_1 + 0 = T_1$

(c) $T \in K$ এর জন্য $-T = (-1)T \in K$

$T + (-T) = 0$

(d) $T_1, T_2 \in X$ এর জন্য

$(T_1 + T_2)v = T_1v + T_2v \quad v \in V$

$= T_2v + T_1v = (T_2 + T_1)v$

(e) $k \in K$ এবং $T_1, T_2 \in X$ এর জন্য

$k(T_1 + T_2)(v) = k(T_1v + T_2v)$

$= kT_1v + kT_2v$

অতএব $k(T_1 + T_2) = kT_1 + kT_2$

(f) যে কোনও দুটি স্কেলার $a, b \in K$ এবং যে কোনও ম্যাপিং $T \in X$

$(a + b)T(u) = aT(u) + bT(u)$

অর্থাৎ $(a + b)T = aT + bT$

(g) যে কোনও দুটি স্কেলার $a, b \in K$ এবং যে কোনও রৈখিক ম্যাপিং $T \in X$

$(ab)\, Tv = a(bTv)$

অর্থাৎ $(ab)\, T = a\,(bT)$

(h) একক স্কেলার $1 \in K$ এর জন্য এবং $T \in X$ এর জন্য

$1Tv = Tv, v \in V$

অর্থাৎ $1.T = T$

তাহলে দেখা যাচ্ছে X ভেক্টরদেশের স্বতঃসিদ্ধসমূহ্ সিদ্ধ করে। অতএব X একটি ভেক্টর দেশ। $V \to U$ ম্যাপ করে এমন রৈখিক ম্যাপিংসমূহের দেশকে সমগঠন (v, u) বলা হয়।

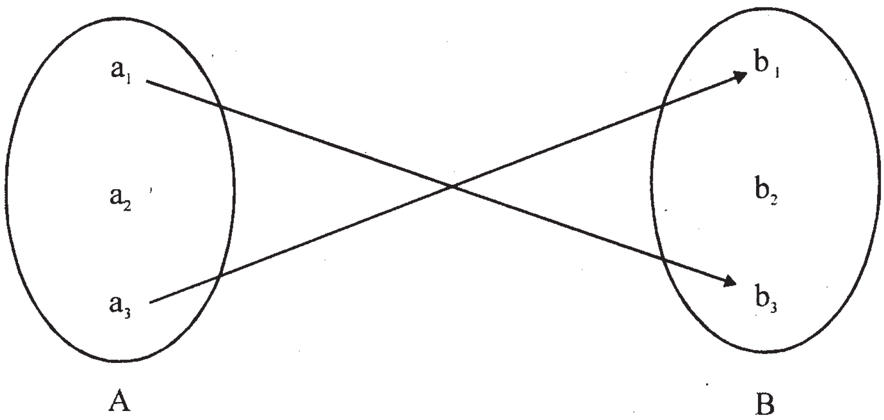
10.8 সারাংশ

এই এককে ম্যাপিং বিশেষ করে রৈখিক ম্যাপিং বলতে কী বোঝায় তা ব্যাখ্যা করা হয়েছে। রৈখিক ম্যাপিং-এর গুণাবলী আলোচিত হয়েছে। কখন ম্যাপিংকে একৈক, বা সমানপাতন বা একৈক সমাপতন বলা হয়, বিশিষ্ট বা অবিশিষ্ট ম্যাপিং বলতে কী বোঝায় তা আলোচনা করা হয়েছ। সর্বশেষে কখন রৈখিক ম্যাপিং সমুহ সমগঠন দেশ গঠন করে তা ব্যাখ্যা করা হয়েছে। আমরা পরের এককে আলোচনা করব কীভাবে রৈখিক ম্যাপিংকে ম্যাট্রিকরূপে প্রকাশ করা যায়।

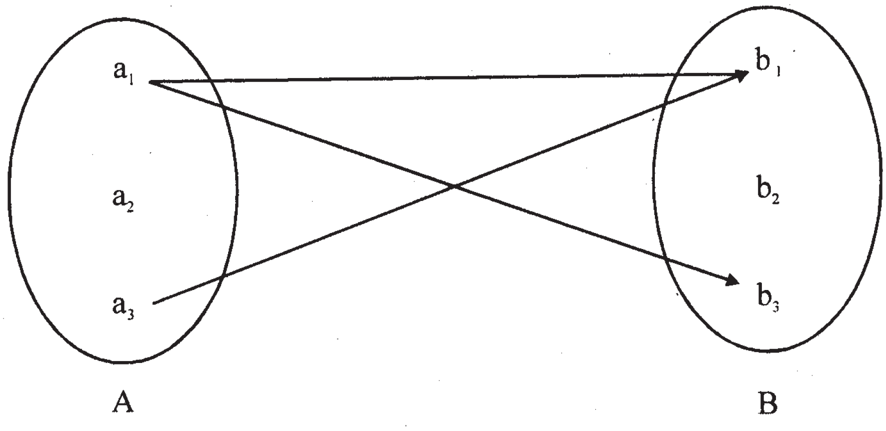
10.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

10.9.1 নিম্নলিখিত চিত্রগুলি $A = \{a_1, a_2, a_3\}$-র থেকে $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ তে ম্যাপিং হয় কি না বলুন :

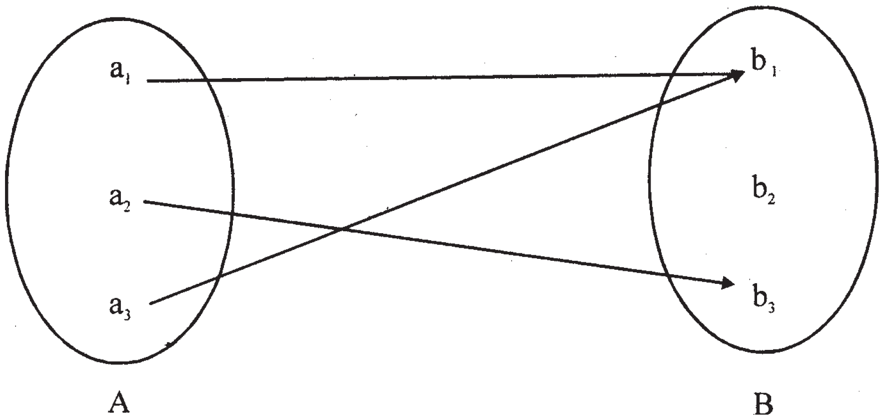
a)



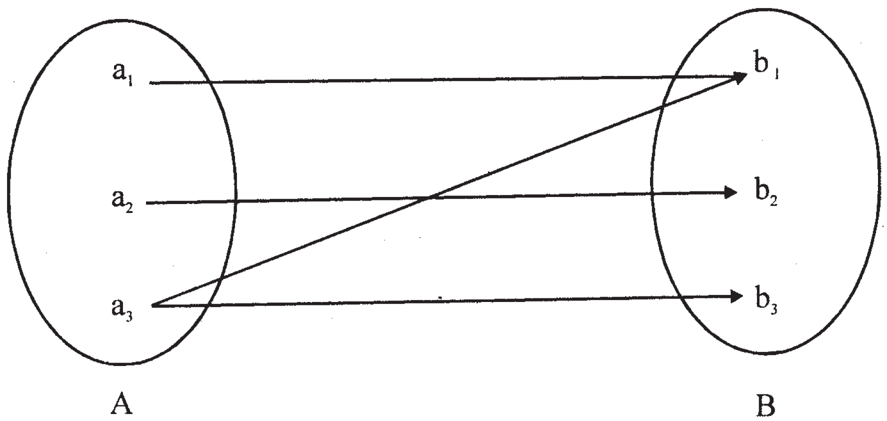
b)



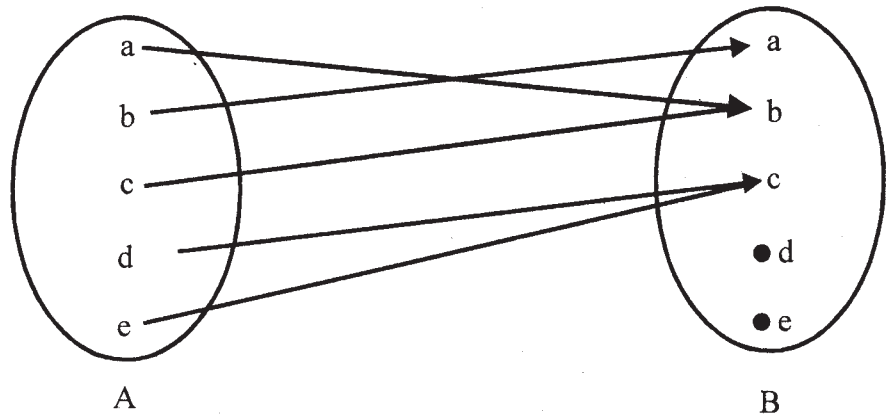
c)



d)



10.9.2. ধরা যাক $A = \{a, b, c, d, e\}$ এবং $f : A \to A$ এমন একটি ম্যাপিং যার চিত্র ডানদিকে দেওয়া হয়েছে। f এর i) প্রতিবিম্ব ও ii) লেখচিত্র নির্ণয় কর।



10.9.3. পরীক্ষা করুন নিম্নলিখিত ম্যাপিংগুলি রৈখিক কিনা ঃ

(a) $y = x + \frac{1}{x}$ (b) $y = \log x$

(c) $y = \sin x$ (d) $y = 3x_1 + 4x_2$ (e) $y = |x|$

10.9.4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ যেখানে $A : E^2 \to E^2$ উল্লিখিত ম্যাপিংটি রৈখিক কিনা দেখান।

ম্যাপিংটি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু সমূহকে [0,0], [1,0], [1,1], [0,1] কে কোথায় স্থানান্তরিত করে তা নির্ণয় করুন।

10.9.5. $f : R \to R$, । এই ম্যাপিংটি এইভাবে সংজ্ঞাত হয়;

$y = 2x + 1$ দেখান যে f-এককৈক ও সমাপতন ম্যাপিং।

f এর ব্যস্ত (inverse) ম্যাপিং আছে কিনা উল্লেখ করুন এবং ব্যস্ত ম্যাপিংটি নির্ণয় করুন।

10.9.6. E^2 দেশে নিম্নলিখিত ম্যাপিং-র জ্যামিতিক অর্থ নির্ণয় করুন;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

এই রূপান্তরের ক্রমিক পদ কত? রূপান্তরের প্রতিবিম্ব দেশের মাত্রা নির্ণয় করুন।

10.9.7. $f: R \to R$, প্রদত্ত রূপান্তরের ব্যস্ত রূপান্তর নির্ণয় করুন :

(a) $f(x) = 5x + 7$ (b) $f(x) = 8 - 2x$

10.9.8. কোন ম্যাপিংটি রৈখিক বা কোনটি রৈখিক নয় তা উল্লেখ করুন :

(a) $f: R^2 \to R^2$ $f(x, y) = x^2, y^2)$

(b) $f: R^3 \to R^3$ $f(x, y, z) = (2 + x, y + z)$

(c) $f: R \to R$ $f(x) = |x|$

(d) $f: R^2 \to R^3$ $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_2)$ ।

10.9.9. নিম্নলিখিত রৈখিক ম্যাপিংগুলির একটি ভিত্তি, এবং (i) প্রতিবিম্ব U ও (ii) সার W-এর মাত্রা নির্ণয় করুন।

a) $f: R^2 \to R^2$; $f(x, y) = (x + 2y, y)$

10.10 উত্তরমালা

10.10.1. (a) নয়, A -তে a_2 -র অনুরূপ উপাদান B-তে নেই

(b) হ্যাঁ

(c) হ্যাঁ

(d) নয়, A তে a_3 B এর b_1, b_2 তে প্রতিবিম্বত হচ্ছে।

10.10.2. f -এর প্রতিবিম্ব = {a, b, c}

f-এর লেখচিত্র {(a, b), (b, a), (c, b), (d, c), (e, c)}

10.10.3. (a) রৈখিক নয় (b) রৈখিক নয়

(c) রৈখিক নয় (d) রৈখিক (e) রৈখিক নয়

10.10.4. [0, 0] A [0, 0]. [1,0] A[3, 2]

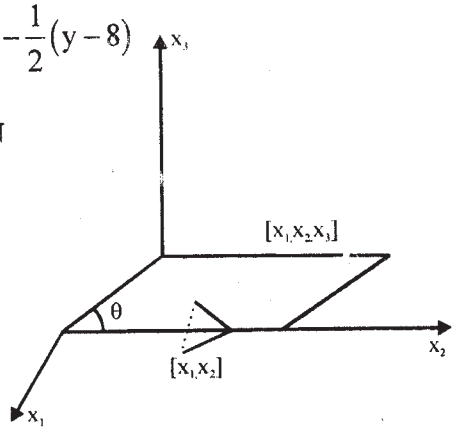
[1, 1] A [4, 7], [0, 1] A [1, 5]

10.10.5. $y = f(x) = 2x + 1$

10.10.6. রূপান্তরটি E^2 দেশের $[x_1, x_2]$ বিন্দুকে E^3 দেশের $[x_1, x_2, x_1]$ বিন্দুতে স্থাপিত করে। রূপান্তরটি x_1, x_2 তলকে x_2 অক্ষের চারিদিকে 45^0 ঘূর্ণন করায়।

ক্রমিক পদ = 2, মাত্রা –2

10.10.7. (a) $f^{-1}(y)=\frac{1}{5}(y-7)$ (b) $f^{-1}(y)=-\frac{1}{2}(y-8)$



10.10.8. a) রৈখিক নয় b) রৈখিক নয়

c) রৈখিক নয় d) রৈখিক

10.10.9. a) (1, 0), (0, 1), মাত্রা = 2, সার = {0}

b) [1, 0], [0, 1], মাত্রা = 2, সারের মাত্রা = 1

c) [1, 0], [0. 1], মাত্রা = 2, সারের মাত্রা = 1

10.11 তথ্যসূত্র

1) G. Hadley, Linear Algebra, Addison Wesley Publishing Company. INC (1977)

2) S. Lipschutz, Linear Algebra, Schaum's Outline Series, Mc-Graw Hill Book Company, 1968.

3) I. N. Herstein, Topics in Algebra, John Wiley & Sons, 1975.

4) P.C. Shields, Linear Algebra, Addison - Wesley, 1964।

একক 11 ❒ রৈখিক রূপান্তরের ম্যাট্রিক্সে প্রকাশ (Linear Transformation in the form of a Matrix)

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

একক 10-এ আমরা রৈখিক ম্যাপিং-এর প্রয়োজনীয়তা ও তার বিভিন্ন গুণাবলী করেছি। কিন্তু ব্যবহারিক ক্ষেত্রে ঐ ম্যাপিংকে কীভাবে প্রকাশ করা যায় তা জানা একান্ত দরকার। এই এককে আমরা রৈখিক ম্যাপিংকে কীভাবে ম্যাট্রিক্স হিসাবে প্রকাশ করা যায় তা আলোচনা করব। আনুষঙ্গিক অন্য আলোচনাও এখানে স্থান পাবে।

11.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি

- রৈখিক রূপান্তরের ম্যাট্রিক্সরূপে প্রকাশ করতে পারবেন
- যে কোন ভিত্তির সাপেক্ষে একটি রৈখিক রূপান্তরকে ম্যাট্রিক্স রূপে দেখাতে পারবেন।

11.3 রৈখিক ম্যাপিং-এর ম্যাট্রিক্সে প্রকাশ

V ভেক্টর দেশে K ক্ষেত্রের ওপর A একটি রৈখিক ম্যাপিং। $\{e_1, \ldots e_n\}$, V-এর একটি ভিত্তি।

এখন $Ae_1, Ae_2, \ldots. Ae_n$ এরাও V এর ভেক্টরসমূহ। সুতরাং এদের প্রত্যেককেই $e_1, e_2 \ldots. e_n$ এর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

ধরা যাক $Ae_1 = a_{11}e_1+a_{12}e_2+\ldots.+a_{1n}e_n$

$Ae_n=a_{n1}e_1+a_{n2}e_2+\ldots.+\ldots.+a_{nn}e_n$

সংজ্ঞা : 11.3.1 উপরে $\{e_{ii}\}$ ভেক্টরসমূহের সহগের দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত (transpose)-কে $\{e_i\}$ -এর সাপেক্ষে A-এর ম্যাট্রিক্সে প্রকাশ বলা হয় এবং এটিকে $[A]_e$ হিসেবে চিহ্নিত করা হয়।

উদা : 11.3.1 ধরা যাক R ক্ষেত্রের উপর V, অনধিক 3 এই ঘাতের বহুপদরাশির একটি ভেক্টর দেশ। বহুপদরাশির স্বাধীন চল হল t। $D : V \to V$ এমন একটি অন্তরকল রূপান্তর যে $D(p(t)) = \frac{d}{dt}(p(t))$

$(1, t, t^2, t^3)$ এই ভিত্তির সাপেক্ষে D এর ম্যাট্রিক্সীয় প্রকাশ আমরা নির্ণয় করতে চাই।

এটা লক্ষ করা যায় যে,

$D(1) = 0 = 0 + 0.t+.0t^2+0.t^3$

$D(t) = 1 = 1+0.t+0.t^2+0.t^3$

$D(t^2) = 2t = 0+2.t+0.t^2+0.t^3$

$D(t^3) = 3t^2 = 0+0.t+3.t^2+0.t^3$

তাহলে $[D] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

উদা 11.3.2. R^2 দেশে রৈখিক রূপান্তর A হল এইরূপ ঃ

$A(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$

ভিত্তিগুলি যথাক্রমে, $f_1 = (1, 1), f_2 = (-1, 0)$

$A(f_1) = A(1, 1) = (2, 3) = 3 (1, 1) + 1 (-1, 0)$

$= 3f_1 + f_2$

$A(f_2) = A (-1, 0) = (-4, -2) = -2(1, 1) +2 (-1, 0)$

$= 3f_1 + f_2$

$A(f_2) = A(-1, 0) = (-4, -2) = -2(1, 1) + 2(-1, 0)$

$= -2f_1 + 2f_2,$

তাহলে $[A]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

মন্তব্য 11.3.1 K ক্ষেত্রের উপর A একটি $n \times n$ ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে A-কে k^n -এর ওপর রৈখিক রূপান্তর হিসাবে দেখানো যায়, $A \to Av$ (v একটি স্তম্ভ ভেক্টর)।

উদা 11.3.3 ধরা যাক $A : R^2 \to R^2$, A একটি রৈখিক রূপান্তর এবং

নিম্নরূপ : $A(x, y) = (5x + y, x + 4y)$

ধরা যাক $v = (5, 7)$ এবং $f_1 = (1, 1), f_2 = (1, 0)$

$v = (5, 7) = 7(1, 1) + 2(-1, 0) = 7f_1 + 2f_2$

$A(v) = (32, 33) = 33(1, 1) + 1(-1, 0)$

$= 33f_1 + f_2$ ।

$\{f_1 f_2\}$ এই ভিত্তির সাপেক্ষে

$[V]_f = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, এবং $[Av]_f = \begin{pmatrix} 33 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[A]_f[V]_f = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 33 \end{pmatrix} = [A(v)]_f$$

লক্ষণীয় $A(f_1) = (5x\ 1 + 1, 1 + 4x\ 1) = (6.5)$

মন্তব্য 11.3.2 যে কোনো ভেক্টর v -এর উপর রূপান্তর A কে প্রয়োগ করাও বা v -এর উপর ‘A’ এর ম্যাট্রিক্সীয় প্রকাশের প্রয়োগও তাই।

আরো বিস্তৃতভাবে বলা যায় যে তিনটি মূল প্রক্রিয়া যথা

(1) যোগ (2) স্কেলার দ্বারা গুণন ও (3) সংযোজন, এদের সাপেক্ষে ‘A’ রূপান্তরের ওপর যে প্রভাব ফেলবে ‘A’ -এর ম্যাট্রিক্সীয় প্রকাশের উপর সেই একই প্রভাব পড়বে।

উপপাদ্য 11.3.1 : $\{e_1....e_n\}$ v-এর একটি ভিত্তি এবং A, v-এর উপর সংজ্ঞাত একটি রূপান্তর। তাহলে যে কোনো ভেক্টর $v \in V$ এর জন্য

$$[A]_e[V]_e = [A(V)]_e$$

ধরা যাক, $\{e_1, e_2...., e_n\}$, V এর একটি ভিত্তি এবং A, V দেশের এর উপর সংজ্ঞাত একটি রৈখিক রূপান্তর।

ধরা যাক, $i = 1\ 2\ ...., n$ এর জন্য

$$T(e_i) = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + ... + a_{in}e_n$$

তাহলে $[T]_e$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স।

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ধরা যাক $v = k_1e_1 + ... + k_ne_n$

তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$$[V]_e = [k_1....k_n]^T$$

যেহেতু A একটি রৈখিক রূপান্তর,

$$A(v) = A(k_1e_1 + ... + k_ne_n) = k_1Ae_1 + ... + k_nAe_n$$

$$= k_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1j}e_j\right) + ...+ k_n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}e_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} k_1a_{1j}e_i + ... + \sum_{j=1}^{n} k_na_{nj}e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} k_ia_{ij}e_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}k_1 + a_{2j}k_2 + ... + a_{nj}k_n\right) e_j$$

তাহলে $[A(V)]_e$ একটি স্তম্ভ ভেক্টর এবং এর j তম পদ হল, $a_{1j}\ k_1+....+a_{nj}k_a$

পক্ষান্তরে $[A]_e [V]_2$ -এর j তম পদ হল $[A]_e$ j-তম সারির সঙ্গে $[v]_2$ এর গুণফল ;

অর্থাৎ $a_{1j}k_1+a_{2j}k_2+....+a_{nj}k_n$

উপরের রাশিটি $[A(V)]_e$ এর j তম পদের সঙ্গে সমান।

অর্থাৎ $[A]_e[V]_e = [A(v)]_e$

পূর্ববর্তী এককে আমরা দেখেছি যে সমস্ত রৈখিক ম্যাপিং k ক্ষেত্রের উপর V ভেক্টর দেশকে V -তেই অন্তর্চিত্রিত করে, তারা একটি ভেক্টর দেশ গঠন করে। ওই ভেক্টর দেশকে সমগঠন (V, V) বলা হয়। আমরা সমগঠন (V, V) কে L (v) হিসাবে চিহ্নিত করব।

উপপাদ্য 11.3.2 : ধরা যাক K ক্ষেত্রের উপর V ভেক্টর দেশের $\{e_1, ..., e_n\}$ একটি ভিত্তি। £(V), K ক্ষেত্রের উপর n বর্গ ম্যাট্রিক্সের একটি সমগঠন। তাহলে $A|\rightarrow [A]_e$ এই রূপান্তরটি সমগঠন L(v) থেকে সমগঠন £(V) একটি ঐকৈক সমগঠন চিত্রণ। অর্থাৎ রূপান্তরিত ঐকৈক ও উপরিচিত্রণ এবং যে কোনো A, B $\in$ L(v) । এবং যে কোনো $k \in K$ এর জন্য

$$[A + B]_e = [A]_e + [B]_e, [kA]_e = k[A]_e$$

ধরা যাক $\{e_i\}$ ভিত্তির সাপেক্ষে A রূপান্তরের একাধিক প্রকাশ আছে।

অর্থাৎ $Av = a_{11}e_1+a_{12}e_2+....a_{1n}e_n$

এবং $Av = b_{11}e_1+b_{12}e_2+.....+b_{1n}e_n$

সুতরাং $(a_{11}-b_{11})e_1+....(a_{1n}-b_{1n})e_n = 0$

$\Box\Rightarrow a_{ii} = b_{ii}, i = 1, 2, ... n$ যেহেতু $\{e_i\}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন।

তাহলে Av কে e_1 -র রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করলে, e_i এর সহগ e_i -র সাপেক্ষে Av -এর একমাত্র উপাংশ। অতএব $L(v) \rightarrow £(v)$ ’ -রূপান্তরটি ঐকৈক।

রূপান্তরটি উপরিচিত্রণ যেহেতু প্রতিটি ম্যাট্রিক্স $M = (m_{ji}) \in £(v)$

রৈখিক রূপান্তর $F(e_1)$ এর প্রতিবিম্ব যেখানে

$$F(e_1) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}e_j,\ i = 1,2,....n,$$

(m_{ij}), M ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত (transpose) ।

এখন ধরা যাক, i = 1, 2, ..., n এর জন্য

$$A(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$$

এবং $B(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j$

ধরা যাক ম্যাট্রিক্স $\mathcal{A} = (a_{ij})$ এবং $\mathcal{B} = (b_{ij})$

তাহলে $[A]_e = \mathcal{A}^T$ এবং $[B]_e = \mathcal{B}^T$

আমরা পাই, i = 1, 2...., n এর জন্য

$$(A+B)(e_1) = A(e_i) + B(e_i) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) e_j$$

লক্ষণীয় $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ একটি ম্যাট্রিক্স এবং $\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_{ij}+b_{ij})$

তাহলে $[A + B]_2 = (\mathcal{A}+\mathcal{B})^T = \mathcal{A}^T + \mathcal{B}^T = [A]_e + [B]_e$

i = 1,2 ...., n এর জন্য আমরা পাই যে

$$(kA)(e_1) = kA(e_1) = k\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n} (ka_{ji}) e_1$$

তাহলে এখন $k\mathcal{A}$ হচ্ছে (ka_{ij}) ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং $[kA]_e = (k\mathcal{A})^T = k\mathcal{A}^T = k[A]_e$

উদাপাদ্য 11.3.3 : যে কোনও দুটি রূপান্তর $A, B \in L(V)$ -এর জন্য

$[AB]_e = [A]_e [B]_e$

ধরা যাক $A(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$ $B(e_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} e_k$

এখন (a_{ij}) ম্যাট্রিক্সকে $\mathcal{A}$ দ্বারা চিহ্নিত করি এবং (b_{jk}) ম্যাট্রিক্সকে $\mathcal{B}$ দ্বারা চিহ্নিত করি। তাহলে, $[A]_2 = \mathcal{A}^T$ $[B]_e = B^T$

$$BA(e_i) = B\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Be_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} e_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) e_k$$

যেহেতু $\mathcal{A} = (a_{ij})$ এবং $\mathcal{B} = (b_{jk})$

$$AB = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

আমরা লিখতে পারি, $BA(e_i) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) e_k$

$$\vdots$$

$$BA(e_n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_{jk}\right) e_k$$

সুতরাং $[BA]_e = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{j1} \ldots \sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_{ji} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jn} \ldots \sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_{jn} \end{pmatrix}$

$= (\mathcal{AB})^T = \mathcal{B}^T \mathcal{A}^T = [B]_e [A]_e$

অনুরূপে $[AB]_e = (\mathcal{BA})^T = \mathcal{A}^T B^T = [A]_e [B]_e$

উদা 11.3.4 : ধরা যাক R^3 দেশে রৈখিক রূপান্তর A এইরূপ :

$A(x, y, z) = (2y+z, x-4y, 3x)$

i) A কে ম্যাট্রিক্সরূপে প্রকাশ করুন ; প্রদত্ত ভিত্তি $f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (1, 0, 1), f_3 = (0, 1, 1)$

ii) দেখান যে $[A]_f [V]_f = [A(v)]_f$, $v \in R^3$ যে কোনও একটি ভেক্টর।

আমরা প্রথমে R^3 দেশে যে কোনও ভেক্টর (a, b, c) -কে f_1, f_2, f_3 এই ভিত্তির রৈখিক হিসাবে প্রকাশ করব।

ধরা যাক $(a, b, c) = x(1, 1, 1) + y(1, 0, 1) + z(0. 1, 1)$

$a = x + y$

$b = x + z$

$c = x + y + z$

অতএব, $z = c - a, y = c - b, x = a + b - c$

$(a, b, c) = (a + b - c)f_1 + (c - b) f_2 + (c - a) f_1$

যেহেতু $A (x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$

$A (f_1) = A (1, 1, 1) = (3, -3, 3) = -3f_1 + 6f_2 + 0f_3$

$A (f_2) = A (1, 0, 1), = (1, 1, 3) = -f_1 + 2f_2 + 2f_3$

$A (f_3) = A (0, 1, 1,) = 3, -4, 0) = -f_1 + 4f_2 - 3f_3$

$$\therefore [A]_f = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

ধরি $v = (a, b, c)$

$= (a + b + c) f_1 + (c - b) f_2 + (c - a) f_3$

তাহলে $A(v) = A (a, b, c) = (2b + c, a - 4b, 3a)$

$\therefore [A(v)_f = (-2a - 2b + c, 2a + 4b, 3a - 2b - c)$

সুতরাং $$[A]_f [V]_f = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b-c \\ c-b \\ c-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2a-2b+c \\ 2a+4b \\ 3a-2b-c \end{pmatrix}$$

$= [A(V)]_f$

উদা 11.3.5 : ধরা যাক $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ এবং R^2 দেশে T একটি রৈখিক রূপান্তর। T নিম্নরূপ ঃ $T(v) = Av$ (v একটি স্তম্ভ ভেক্টর)

নিম্নের প্রতিটি ভিত্তির জন্য T-এর ম্যাট্রিক্স প্রকাশ নির্ণয় করুন :

i) $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$

ii) $f_1 = (3, 1), f_2 = (2, 6)$

(i) $T(e_1)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=1e_1+2e_2$

$$T(e_2)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}=3e_1+4e_2$$

তাহলে $[T]_2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

মন্তব্য 11.3.3 : এটা লক্ষ করা যায় যে স্বাভাবিক ভিত্তি ব্যবহার করলে T_3 প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স A অভিন্ন। এই সত্য R^n দেশেও প্রমাণ করা যায়।

(ii) $(a, b) = x\,(3, 1) + y(2, 6)$

$3x + 2y = a$

$x + 6y = b$

$16y = 3b - a$

ie. $y=\frac{1}{16}(3b-a)$

$-8x = b - 3a, \quad x=\frac{1}{8}(3b-a)$

অতএব $(a, b)=\frac{1}{8}(3a-b)f_1+\frac{1}{16}(3b-a)f_2$

এক্ষেত্রে $T(f_1)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 10\end{pmatrix}=\frac{8}{8}f_1+\frac{24}{16}f_2$

$= f_1 + 15f_2$

$$T(f_2)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 28\end{pmatrix}=4f_1+4f_2$$

$$[T]_f=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 15 & 4\end{pmatrix}$$

11.4 ভিত্তির পরিবর্তন

আমরা জানি যে কোনও ভিত্তির সাপেক্ষে একটি রৈখিক রূপান্তরকে ম্যাট্রিক রূপে প্রকাশ করা যায়। আমাদের পরবর্তী পদক্ষেপে হবে, ভিত্তির পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে ম্যাট্রিক্স পরিবর্তন কীভাবে হয়। সেই প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যায় যদি আমরা একটি নূতন সংজ্ঞা ব্যবহার করি।

সংজ্ঞা : ধরা যাক $\{e_1.....e_n\}$, V-এর একটি ভিত্তি এবং $\{f_1, ... f_n\}$ আর একটি ভিত্তি।

ধরা যাক $f_1 = a_{11}e_1+a_{12}e_2+ .... + a_{in}e_n$

$$f_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + ...+ a_{2n}e_n$$

$$\vdots$$

$$f_n = a_{n1}e_1+a_{n2}e_2+....+a_{nn}e_n$$

e_i -দের সহগ দ্বারা ম্যাট্রিক্সের পরিবর্তন (transpose) -কে বলা হয় পূর্বতন ভিত্তি $\{e_i\}$ থেকে নতুন ভিত্তি $\{f_i\}$ তে পরিবর্তনকারী ম্যাট্রিক্স (transition matrix) অর্থাৎ

$$p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}.... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}.... & a_{n2} \\ a_{1n} & a_{2n}.... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

যেহেতু $\{f_i\}$, $i = 1, 2 .....,n$ ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন। P-এর n টি সারি পরস্পর রৈখিকভাবে স্বাধীন। অতএব $n \times n$ ম্যাট্রিক্স p -এর মাত্রা হল n। সুতরাং P-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব আছে।

উদাহরণ 11.4.1 : ধরা যাক R^2 দেশে দুটি ভিত্তি নিম্নরূপ :

$\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ এবং $\{f_1 = (1, 2), f_2 = (-1, 0)\}$

তাহলে $f_1 = (1, 2) = e_1 + 2e_2$

$f_2 = -(1, 0) + 0.(0, 1) = -e_1 + 0e_2$

আবার $e_1 = (1, 0) = -(-1, 0) + 0.(1, 2) = 0.\, f_1 - f_2$

$$e_2 = (0,1) = \frac{1}{2}(-1,0) + \frac{1}{2}(1,2) = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$$

তাহলে $\{e_1\}$ থেকে $\{f_1\}$ ভিত্তিতে পরিবর্তনকারী ম্যাট্রিক্স P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

আবার $\{f_i\}$ থেকে $\{e_i\}$ ভিত্তিতে পরিবর্তনকারী ম্যাট্রিক্স Q :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

উপপাদ্য 11.4.1 : ধরা যাক R^3 দেশে $\{e_i\}$ ভিত্তি থেকে $\{f_i\}$ ভিত্তির পরিবর্তনকারী ম্যাট্রিক্স হল P। দেখান যে কোনও ভেক্টর $v \in R^3$, $P[v]_f = [v]_c$

অর্থাৎ $[v]_f = P^{-1}[v]_e$

ধরা যাক $f_1 = a_{11}e_1 + ... + a_{13}e_3$

$f_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3$

$f_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3$

আরও ধরা যাক, $v = k_1f_1 + k_2f_2 + k_3f_3$

অতএব $v = k_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) + k_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) + k_3(a_{31}e_1 + a_{32} + e_2 + a_{33}e_3)$

$= k_1a_{11} + k_2a_{21} + k_3a_{31})e_1 + (k_1a_{12} + k_2a_{22} + k_3a_{32})e_2 + (k_1a_{13} + k_2a_{23} + k_3a_{33})e_3$

$$P[v]_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} k_i a_{il} \\ \sum_{i=i}^{3} k_i a_{i2} \\ \sum_{i=1}^{3} k_i a_{i3} \end{pmatrix} = [v]_e$$

উপপাদ্য 11.4.2 : R^3 দেশে $\{e_1\}$ ভিত্তিকে $\{f_i\}$ ভিত্তিতে পরিবর্তনকারী ম্যাট্রিক্স হল P। তাহলে R^3 - তে রৈখিক রূপান্তর A এর জন্য $[A]_f = P^{-1}[A]_eP$

ধরা যাক $f_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}e_j \quad i = 1, .2, 3$

তাহলে $P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

ধরা যাক $A(f_1)=k_{11}f_1+k_{12}f_2+k_{13}f_3$

$A(f_2)=k_{21}f_1+k_{22}f_2+k_{23}f_3$

$A(f_3)=k_{31}f_1+k_{32}f_2+k_{33}f_3$

$$[A]_f=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix}$$

আবার $A\ (f_1)=k_{11}(a_{11}e_1+a_{12}e_2+a_{13}e_3)+k_{12}(a_{21}e_1+a_{22}e_2+a_{23}e_3)+k_{13}(a_{31}e_1+a_{32}e_2+a_{33}e_3)$

$=(k_{11}a_{11}+k_{12}a_{21}+k_{13}1_{31})e_1+(k_{11}a_{12}+k_{12}a_{22}+k_{13}a_{22}+k_{13}a_{32})e_2+(k_{11}a_{13}+k_{12}a_{23}+k_{13}a_{33})e_3$

$$=\sum_{j=1}^{3}k_{1j}a_{j1}e_1+\sum_{j=1}^{3}k_{ij}a_{j2}e_2+\sum_{j=1}^{3}k_{1j}a_{j3}e_3$$

অনুরূপে, $A(f_2)=\sum_{j=1}^{3}k_{2j}a_{j1}e_1+\sum_{j=1}^{3}k_{2j}a_{j2}e_2+\sum_{j=1}^{3}k_{2j}a_{j3}e_3$

$$A(f_3)=\sum_{j-1}^{3}k_{3j}a_{j1}e_1+\sum_{j=1}^{3}k_{3j}a_{j2}e_2+\sum_{j=1}^{3}k_{3j}a_{j3}e_3$$

তাহলে আমরা পাই $[A(f)]_e=\begin{pmatrix} \sum\limits_{j}k_{1j}a_{j1} & \sum\limits_{j}k_{2j}a_{j1} & \sum\limits_{j}k_{3j}a_{j1} \\ \sum\limits_{J}k_{1j}a_{j2} & \sum\limits_{j}k_{2j}a_{j2} & \sum\limits_{j}k_{3j}a_{j2} \\ \sum\limits_{j}k_{1j}a_{j3} & \sum\limits_{j}k_{2j}a_{j=3} & \sum\limits_{j}k_{3j}a_{j3} \end{pmatrix}$

$=P[A]_f$

আমরা জানি $[A(f)]_e = [A]_f[f]_e$

অতএব $[A]_e[f]_e = P[A]_f$

আবার $[f]_f = P^{-1}[f]_e$

অতএব $[f]_e = P[f]_f = P.I. = P$

সুতরাং $[A]_e P = P[A]_f$

যেহেতু P অবশিষ্ট ম্যাট্রিক্স

$[A]_f = P^{-1}[A]_e P$

মন্তব্য 11.4.1 : উপপাদ্যটি একইভাবে যে কোনও সসীম মাত্রার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

উদাহরণ 11.4.2 : R^2 দেশে রৈখিক রূপান্তর A নিম্নরূপ

$A(x, y) = (4x + 2y, 2x - y)$

প্রদত্ত $\{e_1 = (1, 0). e_2 = (0, 1)\}$

এবং $\{f_1 = (1, 2), f_2 = (-1, 0)\}$

উপরের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

$A(1, 0) = (4, 2) = 4(1, 0) + 2(0, 1) = 4e_1 + 2e_2$

$A(0, 1) = (2, -1) = 2(1, 0) - 1(0, 1) = 2e_1 - e_2$

অতএব $[A]_e = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$f_1 = (1, 2) = 1.e_1 + 2.e_2$

$f_2 = (-1, 0) = 1.e_1 + 0.e_2$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$A(f_1) = (8, 0) = -0f_1 - 8f_2$

$A(f_2) = (-4, -2) = -1f_1 + 3f_2$

$$[A]_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$P^{-1} = [A]_e P$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$= [A]_f$

11.5 সাদৃশ্যতা

দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B কে সদৃশ বলা হয় যদি

i) A ও B বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় এবং তাদের মাত্রা সমান, n (ধরা যাক)

ii) একটি n মাত্রার বর্গ ও অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স P পাওয়া যায় এবং

iii) B কে প্রকাশ করা যায়;

$B = P^{-1} AP$ হিসাবে।

উপপাদ্য 11.5.1 :

দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B একই রৈখিক রূপান্তর T কে প্রকাশ করবে যদি A ও B পরস্পর সদৃশ হয়। আমরা লক্ষ করেছি একটি রৈখিক রূপান্তরের ম্যাট্রিক্সীয় প্রকাশ নির্ভর করে গৃহীত ভিত্তির উপর। আবার আগের উপাপাদ্য-তে দেখেছি যে $\{e_i\}$ এবং $\{f_i\}$ যদি একই ভেক্টর দেশ V তে দুটি পৃথক ভিত্তি হয় এবং P যদি transition ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$

অর্থাৎ $[T]_f$ এবং $[T]_e$ পরস্পর সদৃশ।

পক্ষান্তরে ধরা যাক A, $\{e_i\}$ ভিত্তির সাপেক্ষে রৈখিক রূপান্তর T-এর ম্যাট্রিক্সীয় প্রকাশ। B যদি T-এর অন্য কোন ম্যাট্রিক্সীয় প্রকাশ হয়, তাহলে তা নিশ্চয়ই প্রদত্ত দেশের অন্য কোনও ভিত্তি $\{f_i\}$-এর সাপেক্ষে হবে। এখন আমরা নিশ্চয়ই একটি পরিবর্তনকারী ম্যাট্রিক্স P পাব যাতে করে দেশের যে কোনও ভেক্টর v-এর

জন্য $[V]_e = P[V]_f$, P এখন একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স।

এখন $A = [T]_e$ এবং $B = [T]_f$

$[Tv]_e = [T]_e[v]_e = AP[v]_f$

আবার $[Tv]_e = P[Tv]_f = P[T]_f[v]_f = PB[v]_f$

অতএব $AP[v]_f = PB[v]_f$

অথবা AP = PB অর্থাৎ $B = P^{-1}AP$

উদাহরণ 11.5.1 R^2 দেশে রৈখিক রূপান্তর T নিম্নরূপ ঃ

$T = (x - y, 2x + y)$

ধরা যাক $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$

যদি $\{f_1 = (2, 1), f_2 = (1, 2)\}$ হয়

দেখান $[T]_e$ ও $[T]_f$ পরস্পর সদৃশ।

$T(e_1) = (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0,1) = e_1 + 2e_2$

$T(e_2) = (-1, 1) = -(1, 0) + 1(0, 1) = -e_1 + e_2$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$f_1 = (2, 1) = 2e_1 + e_2$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

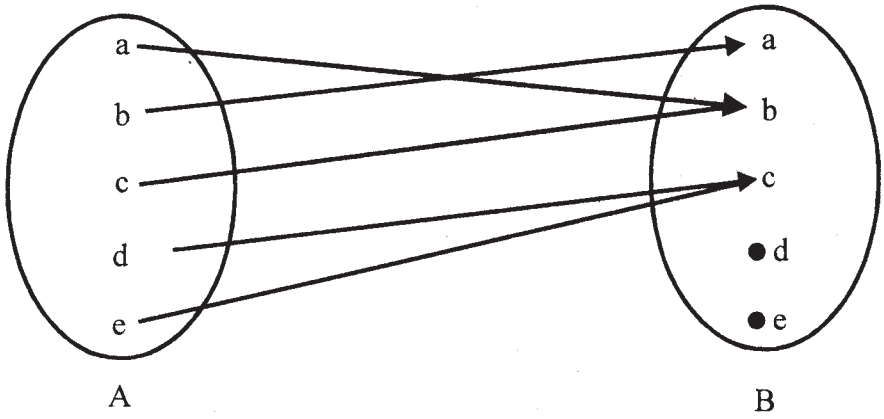
$f_2 = (1, 2) = e_1 + 2e_2$

$T(f)_1 = (1, 5) \qquad T(f_2) = (-1, 4)$

$$[T]_f = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}[T]_e P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

10.9.2. ধরা যাক $A = \{a, b, c, d, e\}$ এবং $f : A \rightarrow A$ এমন একটি ম্যাপিং যার চিত্র ডানদিকে দেওয়া হয়েছে। f এর i) প্রতিবিম্ব ও ii) লেখচিত্র নির্ণয় কর।



10.9.3. পরীক্ষা করুন নিম্নলিখিত ম্যাপিংগুলি রৈখিক কিনা ঃ

(a) $y = x + \frac{1}{x}$ (b) $y = \log x$

(c) $y = \sin x$ (d) $y = 3x_1 + 4x_2$ (e) $y = |x|$

10.9.4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ যেখানে $A : E^2 \rightarrow E^2$ উল্লিখিত ম্যাপিংটি রৈখিক কিনা দেখান।

ম্যাপিংটি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু সমূহকে [0,0], [1,0], [1,1], [0,1] কে কোথায় স্থানান্তরিত করে তা নির্ণয় করুন।

10.9.5. $f : R \rightarrow R$, । এই ম্যাপিংটি এইভাবে সংজ্ঞাত হয়;

$y = 2x + 1$ দেখান যে f-একৈক ও সমাপতন ম্যাপিং।

f এর ব্যস্ত (inverse) ম্যাপিং আছে কিনা উল্লেখ করুন এবং ব্যস্ত ম্যাপিংটি নির্ণয় করুন।

10.9.6. E^2 দেশে নিম্নলিখিত ম্যাপিং-র জ্যামিতিক অর্থ নির্ণয় করুন;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

এই রূপান্তরের ক্রমিক পদ কত? রূপান্তরের প্রতিবিম্ব দেশের মাত্রা নির্ণয় করুন।

b) $f_1 = (1, 2)$. $f_2 = (2, 5)$

$\{e_i\}$ থেকে $\{f_i\}$ তে যাবার পরিবর্তনকারী ম্যাট্রিক্স P নির্ণয় করুন।

$\{f_i\}$ থেকে $\{e_i\}$ তে যাবার পরিবর্তনকারী ম্যাট্রিক্স Q নির্ণয় করুন।

দেখান যে $Q = P^{-1}$

রৈখিক রূপান্তর $T = (x + y, x - y)$ হলে

দেখান $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$.

11.8 উত্তরমালা

11.8.1. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

11.8.2. (a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

11.8.3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11.8.4. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

11.8.5. (a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $Q = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

11.9 তথ্যসূত্র

1. G. Hadley, Linear Algebra – Addison Wesley Publishing Company. INC (1977)
2. S Lipschutz, Linear Algebra, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill Book Company, 1968.
3. I. N. Herstein. Topics in Algebra, John Wiley & Sons. 1975
4. S. K. Mapa – Higher Algebra, Asoke Prakasan, Calcutta.
5. P. C. Shields – Linear Algebra, Addison-Wesley, 1964.

একক 12 ❐ আইগেন ভেক্টর ও আইগেন মান (Eigen Vector)

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

এই এককে আমরা রৈখিক রূপান্তরের আইগেন মান ও আইগেন ভেক্টর সম্বন্ধে আলোচনা করব। অনেক পদার্থবিদ্যার সমস্যা ও গাণিতিক অর্থনীতির সমস্যার সমাধান নির্ভর করে ঐ সমস্যার সঙ্গে জড়িত রৈখিক রূপান্তরের আইগেন মানগুলি সম্পূর্ণ নির্ণয়ের ওপর। এছাড়াও প্রতিসম ম্যাট্রিক্সকে কর্ণম্যাট্রিক্সে রূপান্তরিত করাতে আইগেন মানের একটি বিশেষ ভূমিকা আছে।

12.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি

- ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান ও আইগেন ভেক্টর নির্ণয় করতে পারবেন।
- কেইলে-হ্যামিলটন উপপাদ্যের গাণিতিক প্রয়োগ করতে পারবেন।

12.3 আইগেন মান ও আইগেন ভেক্টর

K ক্ষেত্রের ওপর V ভেক্টর দেশে $T : B \rightarrow V$ একটি রৈখিক রূপান্তর।

K ক্ষেত্রের স্কেলার λ কে T এর একটি আইগেন মান বলা হয়, যদি আমরা V দেশের একটি ভেক্টর v, যেটা শূন্য নয় পাই, যাতে করে

$$T(v) = \lambda v \text{ হয়।}$$

উপরের সম্বন্ধটি সিদ্ধ করে এমন ভেক্টরকে বলা হয় T এর আইগেন ভেক্টর যখন আইগেন মান হয় λ। যেহেতু T একটি রৈখিক রূপান্তর

$$T(kv) = kT(v) = \lambda kv$$

তাহলে আইগেন মান λ হলে v যদি একটি আইগেন ভেক্টর হয়,

kv ও T এর একটি আইগেন ভেক্টর, যে কোনও স্কেলার k এর জন্য এটি প্রযোজ্য।

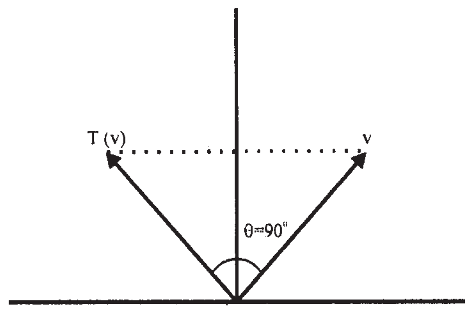
এই সমস্ত আইগেন ভেক্টরদের সেট, λ যদি অনুষঙ্গী আইগেন মান হয়, V এর একটি উপদেশ গঠন করে। উক্ত উপদেশকে বলা হয়, λ র অনুষঙ্গী আইগেন দেশ।

আইগেন মান ও আইগেন ভেক্টর যথাক্রমে বিশিষ্ট মান (Characteristic value) ও বিশিষ্ট ভেক্টর (Characteristic vector) বলা হয়।

উদাহরণ 12.3.1 : ধরা যাক $I : V \rightarrow V$ একটি উপাদানস্থির (Identity) ম্যাপিং। v একটি ভেক্টর দেশ।

এখন $Iv = v$. অতএব উপাদানস্থির ম্যাপিং এর আইগেন মান সবসময় এক এবং যে কোনও ভেক্টর $v \in V$ ম্যাপিংটির আইগেন ভেক্টর।

উদাহরণ 12.3.2 : ধরা যাক $T : R^2 \rightarrow R^2$ এমন একটি রৈখিক রূপান্তর যেটা কোনও ভেক্টর $v \in R^2$ কে 90^0 ঘূর্ণন করায়।



তাহলে T (v) টা কখনই v (শূন্যসম নয়) এর গুণিতক হতে পারে না।

অর্থাৎ T (v) এর কোনও আইগেন মান নেই, সুতরাং কোনও আইগেন ভেক্টরও নেই।

মন্তব্য 12.3.1 : A যদি একটি $n \times n$ বর্গম্যাট্রিক্স, K ক্ষেত্রের ওপর সংজ্ঞাত হয়, তাহলে A এর আইগেন মান বলতে আমরা K^n এর উপর সংজ্ঞাত একটি রৈখিক রূপান্তরের আইগেন মান বুঝব। অর্থাৎ $\lambda \in K$ ম্যাট্রিক্স A এর আইগেন মান হবে যদি শূন্যসম নয় এমন ভেক্টরের জন্য

$$Av = \lambda v, \quad v \in \underbrace{K \times K .....K}_{n} = K^n$$

ঐ ভেক্টর v কে λ র অনুষঙ্গী A এর আইগেন ভেক্টর বলা হয়।

উদাহরণ 12.3.3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ এই ম্যাট্রিক্সের আইগেন মানগুলি ও অনুসঙ্গী আইগেন ভেক্টরগুলি নির্ণয় করুন।

ধরা যাক $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ আইগেন মান λ এর অনুষঙ্গী ভেক্টর।

$$Av = \lambda v$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 + 3v_2 &= \lambda v_1 \\ 4v_1 + 5v_2 &= \lambda v_2 \end{aligned}\right\}$$

অথবা $$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)v_1 + 3v_2 &= 0 \\ 4v_1 + (5-\lambda)v_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \qquad (12.3.1)$$

উপরের সম একঘাত যুগ্ম সমীকরণের শূন্যসম নয় এমন সমাধানের জন্য সমীকরণদ্বয়ের অনুষঙ্গী সহগের দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক অবশ্যই শূন্য হবে। অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ $(1-\lambda)(5-\lambda) - 12 = 0$

অর্থাৎ $\lambda - 6\lambda - 7 = 0$

সুতরাং $\lambda = -1$ এবং $\lambda = 7$

(12.1.1) এ $\lambda = -1$ বসিয়ে পাই

$2v_1 = -3v_2$

তাহলে $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1$ এই আইগেন মানের অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর।

আবার (12.1.1) এ $\lambda = 7$ বসিয়ে পাই,

$-2v_1 + v_2 = 0$

তাহলে $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 7$ এই আইগেন মানের

অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর। লক্ষণীয় আইগেন ভেক্টরটি শূন্যসম নয়।

তাহলে $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ এর যে কোনও গুণিতক ভেক্টরই $\lambda = 7$ এই

আইগেন মানের অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর। অনুরূপে $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ এর কোনও গুণিতকই, $\lambda = -1$ এই আইগেন মানের অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর।

উপপাদ্য 12.3.1 : K ক্ষেত্রের উপর V একটি ভেক্টর দেশ। প্রদত্ত $T : V \rightarrow V$ একটি রৈখিক রূপান্তর। K ক্ষেত্রের উপাদান λ কে T এর আইগেন মান বলা হবে যদি এবং একমাত্র যদি $(\lambda I - T)$ রূপান্তরটি বিশিষ্ট হয়। λ এর অনুষঙ্গী আইগেন দেশ $(\lambda I - T)$ এই রূপান্তরের সার (kernel)।

ধরা যাক λ, T এই রূপান্তরের আইগেন মান ও v অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর।

অর্থাৎ $\lambda v = Tv$

বা $(\lambda I - T)\, v = 0$,

সুতরাং λ এর অনুষঙ্গী আইগেন দেশ $(\lambda I - T)$ এর সার।

পক্ষান্তরে, ধরা যাক v, $(\lambda I - T)$ এর সারের একটি উপাদান।

অর্থাৎ $(\lambda I - T)\, v = 0$

বা $Tv = \lambda v$

অতএব λ, T এর আইগেন মান ও v অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর।

উপপাদ্য : স্বতন্ত্র আইগেন মানের অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

উপপাদ্যটি আমরা গাণিতিক আরোহের সাহায্যে প্রমাণ করব।

প্রদত্ত $\lambda_1 \lambda_2 .... \lambda_n$ স্বতন্ত্র আইগেন মান। $v_1 .... v_n$ অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টরসমূহ।

যদি $n = 1$, v_1 রৈখিকভাবে স্বাধীন, যেহেতু $v_1 \neq 0$,

ধরা যাক, $n > 1$, এবং $v_1 .... v_{n-1}$ রৈখিক ভাবে স্বাধীন।

এবং $a_1 v_1 + ... a_n v_n = 0$ (12.3.2)

তাহলে $a_1 Tv_1 + ... + a_n Tv_n = 0$, (12.3.3)

যেহেতু $Tv_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, ..., n$

অর্থাৎ $\lambda_1 a_1 v_1 + ... + \lambda_n a_n v_n = 0$ (12.3.4)

(12.3.2) সমীকরণকে λ_n দ্বারা গুণ করে (12.3.4) থেকে বিয়োগ করে পাই

$(\lambda_1 - \lambda_n)\ a_1 v_1 + ... (\lambda_{n-1} - \lambda_n) a_{n-1} v_{n-1} = 0$ (12.3.5)

যেহেতু $v_1, ..., v_{n-1}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন।

$(\lambda_i - \lambda_n)\ a_i = 0$, $i = 1, 2 .... n - 1$।

যেহেতু $\lambda_i \lambda_n$ থেকে স্বতন্ত্র, $a_i = 0$, $i = 1, 2, ... n - 1$,

অতএব (12.3.2) থেকে পাই,

$a_n\ v_n = 0$,

যেহেতু, $v_n \neq 0$, $a_n = 0$

অতএব $v_1, v_2 .... v_n$ রৈখিকভাবে স্বাধীন।

12.4 কর্ণম্যাট্রিক্সে প্রকাশ ও আইগেন ভেক্টর সমূহ

উপপাদ্য 12.4.1 :

ধরা যাক n মাত্রিক ভেক্টর দেশ v কে v তে অন্তশ্চিত্রণ করে রূপান্তর T।

T কে কর্ণম্যাট্রিক্স B তে প্রকাশ করা যদি এবং একমাত্র যদি V এর একটি ভিত্তির উপাদান সমূহ

যথাক্রমে T এর আইগেন ভেক্টরসমূহই হয়। তখন B এর কর্ণের উপাদানগুলি যথাক্রমে T এর আইগেন ভেক্টরসমূহের অনুষঙ্গী আইগেন মানসমূহ।

ধরা যাক $(v_1, v_2, \dots v_n)$, V এর একটি ভিত্তি। v_i, $i = 1, 2 \dots n$ হল এক একটি স্তম্ভ ভেক্টর।

$v_1, v_2, \dots v_n$ যথাক্রমে T এর আইগেন ভেক্টরসমূহ।

তাহলে $T(v_1) = \lambda_1 v_1$

$T(v_2) = \lambda_2 v_n$

$\vdots$

$T(v_n) = \lambda_n v_n$

$$\text{সুতরাং } T(v_1, v_2, \dots v_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots 0 \\ 0 & 0 \dots \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \lambda_n \end{pmatrix} (v_1, v_2, \dots v_n).$$

যেহেতু V এর মাত্রা n এবং $v_1, v_2, \dots v_n$ পরস্পর রৈখিক ভাবে স্বাধীন $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$, V এর একটি ভিত্তি হবে।

উপপাদ্য 12.4.2 : n মাত্রার একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A আর একটি n মাত্রার কর্ণ ম্যাট্রিক্স B এর সঙ্গে সদৃশ হয় যদি এবং একমাত্র যদি A এর n টি আইগেন ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন হয়। তাছাড়া B এর কর্ণের উপাদানগুলি যথাক্রমে উক্ত আইগেন ভেক্টর সমূহের অনুষঙ্গী আইগেন মানসমূহ।

ধরা যাক A এর আইগেন ভেক্টরসমূহ হল $\{v_1 v_2, \dots v_n\}$ এবং ঐ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন।

আরও ধরা যাক $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ এর অনুষঙ্গী আইগেন মাসসমূহ হল $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$।

তাহলে $A v_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2, \dots n_1$.

$$\text{অর্থাৎ, } A(v_1, v_2, \dots v_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots\dots\dots\dots 0 \\ 0 & \lambda_2 \dots\dots\dots 0 \\ 0 & 0 \dots \lambda_{n-1} \; 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \quad \lambda_n \end{pmatrix} (v_1, v_2, \dots v_n)$$

যেহেতু $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ একটি $n \times n$ ম্যাট্রিক্স যার n টি স্তম্ভ পরস্পর রৈখিকভাবে স্বাধীন, সুতরাং $P = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ এই ম্যাট্রিক্সটি অবিশিষ্ট।

যদি $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ এই ম্যাট্রিক্সটিকে B বলে

চিহ্নিত করি তাহলে ওপরের সমীকরণ থেকে লিখতে পারি

$A = P^{-1} B \; P.$

যেহেতু P অবিশিষ্ট A ও B ম্যাট্রিক্সদ্বয় সদৃশ।

উদাহরণ 12.4.1 : ধরা যাক ম্যাট্রিক্স $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

অনুযায়ী A এর দুটি আইগেন ভেক্টর

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ এবং $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ধরা যাক $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ তাহলে $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$

অতএব $B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/4 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

12.5 বর্গম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য বহুপদ ; আইগেন মানের গুণাবলী

K ক্ষেত্রের ওপর A একটি বর্গম্যাট্রিক্স :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$t\,I_n - A$ ম্যাট্রিক্সটিকে বলা হয় A এর বৈশিষ্ট্য ম্যাট্রিক্স; I_n , $n \times n$ একক ম্যাট্রিক্স, t একটি চল।

$$tI_n - A = \begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & -a_{2n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & t-a_{nn} \end{pmatrix}$$

উক্ত ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক $\Delta_n(t) = \det(tI_n - A)$

$\Delta_n(t)$ হচ্ছে t এর একটি বহুপদ এবং একে বলা হয় বৈশিষ্ট্য বহুপদ।

$\Delta_n(t) = \det(tI_n - A) = 0$, এই সমীকরণকে বলা হয় A এর বৈশিষ্ট্য সমীকরণ।

যদি λ, A এর আইগেন মান হয় এবং x অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর

তাহলে $Ax = \lambda x \; (x \neq 0)$

অথবা $(\lambda I_n - A)\, x = 0$

উক্ত রৈখিক সমঘাত সমীকরণের সমাধান শূন্য না হওয়ার শর্ত হল,

$$\det(\lambda I_n - A) = 0 \tag{12.5.1}$$

বৈশিষ্ট্য বহুপদ $\det(\lambda I_n - A) = 0$ কে বিস্তৃত করলে আমরা পাই

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n b_n \tag{12.5.2}$$

$b_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

$b_{n-2} = a_{ij}$ পদগুলির দুটি করে নিয়ে সমস্ত গুণফলের যোগফল

$b_0 = \det(A)$

বীজগণিতের মূল উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা বলতে পারি, যেহেতু সমীকরণে (12.4.2) λ -র n তম ঘাত পর্যন্ত পদ আছে, সমীকরণটির n টি বীজ থাকবে। বীজগুলি বাস্তব কিম্বা জটিল হতে পারে। যেহেতু সমীকরণটির n র বেশি বীজ থাকতে পারে না, ম্যাট্রিক্স A র n র বেশি আইগেন মান থাকতে পারে না। বীজগুলি স্বতন্ত্র হতে পারে বা বহুবীজও থাকতে পারে। λ র মান যদি (12.4.2) সমীকরণের কোনও বীজের সঙ্গে সমান না হয়, তখন $Ax = \lambda x$ এই সমীকরণের একটাই সমাধান $x = 0$।

যদি $\det(\lambda I - A) = 0$ সমীকরণটির বীজগুলি যথাক্রমে

$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ হয়, তাহলে আমরা পাই,

$$b_{n-1} = \lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_n \tag{12.5.3}$$

$$b_{n-2} = \lambda_1\lambda_2 + ... + \lambda_1\lambda_n + \lambda_2\lambda_3 + ... + \lambda_2\lambda_n + ... + \lambda_{n-1}\lambda_n \tag{12.5.4}$$

....

$$b_n = \lambda_1\lambda_2 .... \lambda_4 \tag{12.5.5}$$

তাহলে det $(\lambda I - A) = 0$ এই সমীকরণকে সমাধান করলে আমরা বীজগুলির বিভিন্ন মান পেতে পারি, যদিও বাস্তবে নির্ণয় করা বেশ জটিল হয়।

উদাহরণ 12.5.1 :

প্রদত্ত $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

এর আইগেন মান নির্ণায়ক সম্পর্ক নির্ণয় করতে হবে।

$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}$, এটি λ র

একটি দ্বিঘাত বহুপদ। সুতরাং det $(\lambda I - A) = 0$, এই সমীকরণের দুটি বীজ λ_1, λ_2 (ধরা যাক)।

$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{12}$

$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{12} - a_{12}a_{21}$

$= \det(A)$

12.6 ম্যাট্রিক্সের বহুপদ ; কেইলে-হ্যামিলটন উপপাদ্য (Cayley-Hamilton Theorem)

K ক্ষেত্রের ওপর একটি বহুপদ $f(\lambda)$ নেওয়া হল;

$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$

A ম্যাট্রিক্সটি K ক্ষেত্রের ওপর সংজ্ঞাত ও একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স।

তাহলে $f(A) = a_nA^n + a_{b-1}A^{n-1} + ... + a_1A + a_0I$ কে

A ম্যাট্রিক্সের বহুপদ বলা হয়। লক্ষণীয় A বর্গম্যাট্রিক্স হওয়ায়

$A \times A = A^2, ... \underbrace{A \times A \times ......}_{i-\text{পর্যন্ত}} = A^i$ প্রত্যেকেই K ক্ষেত্রের ওপর সংজ্ঞাত। A কে বহুপদ

সমীকরণ $f(\lambda) = 0$ এর বীজ বলা হয় যদি $f(A) = 0$

ধরা যাক A একটি $n\times n$ বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $\Delta_n(\lambda)$, A এর বৈশিষ্ট্য বহুপদ।

অর্থাৎ $\Delta_n(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$$= \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_1\lambda + 1\alpha_0 \tag{12.6.1}$$

ধরা যাক $B(\lambda)$ হল $(\lambda I - A)$ এর এ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স। $B(\lambda)$ -র উপাদনগুলি $(\lambda I - A)$ এর সহ উৎপাদকসমূহ। তাহলে $B(\lambda)$ প্রতিটি উপাদানই λ র বহুপদ হবে এবং সংশ্লিষ্ট ঘাত কখনই $(n-1)$ এর চেয়ে বড় হবে না। তাহলে এ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্সের মূল বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী

$$(\lambda I - A)\, B(\lambda) = \det(\lambda I - A)\, I \tag{12.6.2}$$

আবার $B(\lambda) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + B_1\lambda + B_0$ (12.6.3)

B_i গুলি হচ্ছে K এর উপর $n\times n$ ম্যাট্রিক্স এবং λ এর ওপর নির্ভরশীল নয়।

অথবা $(\lambda I - A)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + B_1\lambda + B_0)$

$= (\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_1\lambda + \alpha_n)$

বন্ধনীমুক্ত করে যদি দুপক্ষে λ র সমান ঘাতের পদগুলি লিখি,

তাহলে পাই, $B_{n-1} = I$

$B_{n-2} - AB_{n-1} = \alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}I$

....

$B_0 - AB_1 = \alpha_1 I$

$-AB_0 = \alpha_0 I$

ওপরের ম্যাট্রিক্সগুলিকে যথাক্রমে $A^n.A^{n-1}$, ... A. I দ্বারা গুণ করে পাই

$A^n B_{n-1} = A^n$

$A^{n-1}B_{n-2} - A^n B_{n-1} = \alpha_{n-1}A^{n-1}$

$A^{n-2}B_{n-3} - A^{n-1}B_{n-2} = \alpha_{n-2}A^{n-2}$

....

$AB_0 - A^2B_1 = \alpha_1 A$

$-AB_0 = \alpha_0 1.$

উদাহরণ 12.6.1 ধরা যাক $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

এবং $f(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 7$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^2 - 6\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 24 & 37 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= 0$

তাহলে A, $f(A) = 0$ সমীকরণের একটি বীজ।

উপপাদ্য 12.6.1 : ধরা যাক K ক্ষেত্রের ওপর f ও g দুটি বহুপদ এবং K এর ওপর A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স।

তাহলে (a) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$

(b) $(fg)(A) = f(A)\,g(A)$

এবং k র যে কোনও স্কেলার k এর জন্য

(c) $(kf)\,(A) = k(f(A))$

আবার যেহেতু যে কোনও দুই বহুপদের জন্যে

$f(\lambda)\,g(\lambda) = g(\lambda)\,f(\lambda)$

$f(A)\,g(A) = g(A)\,f(A)$

ধরা যাক $f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots\ldots + \ldots. + a_n$

$g(\lambda) = b_n\lambda^m + b_{n-1}\lambda^{m-1} + \ldots. + b_0$

তাহলে $f(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots. + a_n$

$g(A) = b_mA^m + b_{n-1}A^{n-1} + \ldots. + b_0$

(a) ধরা যাক, $m \leq n$ এবং $b_i = 0, i > m$,

$(f+g)(A) = (a_n + b_n) A^n + ... + (a_1+b_1) A+(a_0+b_0)$

$= a_n A^n + b_n A^n + ... + a_1 A + b_1 A + a_0 + b_0$

$= (a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + ... + a_n)$

$+ (b_n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + ... + b_0$

$= f(A) + g(A).$

(b) সংজ্ঞা অনুযায়ী, $(fg)(\lambda) = f(\lambda)\, g(\lambda) = c_{n+m} \lambda^{n+m} + ... + c_1 \lambda + c_0$

যেখানে $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0$

অতএব $(fg)(A) = c_{n+m} A^{n+m} + ... + c_1 A + c_0$

এবং $f(A) g(A) = (a_n A^n + ... + a_0) \times (b_m A^m + ... b_0)$

$= a_n b_m A^{m+n} + ... + (a_0 b_k + ... + a_k b_0).\ A^k$

$+ .... + a_0 b_0$

$= c_{n+m} A^{m+n} + ... + c_k A^k + ... + c_n$

$= (fg)(A)$

(c) $(kf)(\lambda) = k a_n \lambda^n + ... + k a_n$

$(kf)(A) = k(a_n A^n + ... + a_0 I)$

$= kf(A)$

উপপাদ্য 12.6.2 : প্রতিটি বর্গ ম্যাট্রিক্সই তার অনুষঙ্গী বহুপদের একটি বীজ হবে।

অনুষঙ্গী বহুপদের মান শূন্য লইয়া,

$0 = A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I$

অথবা $\det(\lambda I - A) = \Delta_n(A) = 0.$

অর্থাৎ A তার বৈশিষ্ট্য অপেক্ষকের একটি বীজ হবে।

টীকা 12.6.1 : একটি ম্যাট্রিক্স A ও তার পরিবর্ত A^T এর বৈশিষ্ট্য বহুপদ একই।

$(\lambda I - A)^T = \lambda I^T - A^T = \lambda I - A^T$, যেহেতু একটি ম্যাট্রিক্স ও তার পরিবর্তের নির্ণায়ক একই, $\det(\lambda I - A) = \det((\lambda I - A)^T) = \det(\lambda I - A^T)$ অতএব A এবং A^T এর বৈশিষ্ট্য বহুপদ একই।

উদাহরণ 12.6.3 : দেখান যে ম্যাট্রিক্সে $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ তার বৈশিষ্ট্য বহুপদটি সিদ্ধ করে।

$$\Delta_2(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7.$$

অতএব $\Delta_2(A) = A^2 - 6A - 7I = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$-7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 24 & 37 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 24 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12.7 প্রতিসম ম্যাট্রিক্স ও তার আইগেন মান, আইগেন ভেক্টর

আমরা যদি ধরে নিই A ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলি সব বাস্তব মান গ্রহণ করে, তাহলেও A এর বৈশিষ্ট্য বহুপদ সমীকরণের বীজগুলি বাস্তব নাও হতে পারে। যেহেতু A এর মাত্রা n, বৈশিষ্ট্য বহুপদের ঘাত অবশ্যই n হবে এবং সুতরাং $n \times n$, A ম্যাট্রিক্সের n টি এবং কেবলমাত্র n টিই আইগেন মান থাকতে পারে। এই আইগেন মানগুলি বাস্তব বা জটিল হতে পারে।

উপপাদ্য 12.7.1 : A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে A এর আইগেন মানসমূহ বাস্তব হবে।

ধরা যাক A এর মাত্রা হল n। A এর একটি আইগেন মান λ এবং অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর হল x।

অতএব $Ax = \lambda x$ (12.7.1)

(12.7.1) এর এ্যাডজয়েন্ট নির্ণয় করে আমরা পাই,

$(AX)^* = (\lambda x)^*$

অথবা $x^* A^* = \lambda^* x^*$ (12.7.2)

* চিহ্ন এ্যাডজয়েন্ট ইঙ্গিত করে।

উভয়পক্ষকে x ভেক্টর দিয়ে ডানদিক থেকে গুণ করে আমরা পাই

$$x * A * x = \lambda * x * x \tag{12.7.3}$$

আবার (12.7.1) এর উভয়পক্ষকে বামদিক থেকে গুণ করে আমরা পাই $x^* Ax = \lambda x^* x$

(12.7.4)

(12.7.3) ও (12.7.4) থেকে পাই এবং A এর প্রতিসাম্যতা প্রয়োগ করে পাই

$$x * Ax = \lambda * x * x = \lambda x * x$$

অতএব $\lambda = \lambda *$ অর্থাৎ λ বাস্তব।

উপপাদ্য 12.7.2 : প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের স্বতন্ত্র আইগেন মানের অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টরসমূহ পরস্পর লম্ব।

ধরা যাক n মাত্রা বিশিষ্ট A ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম।

সুতরাং পূর্বের উপপাদ্য অনুযায়ী A এর আইগেন মানসমূহ সবই বাস্তব।

ধরা যাক λ_1 এবং λ_2 এই দুটি স্বতন্ত্র আইগেন মানের অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টরদ্বয় হল x_1 এবং x_2

অতএব, $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ (12.7.5)

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2 \tag{12.7.6}$$

স্তম্ভ ভেক্টর $x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}$

$x_1 *$ বলতে আমরা যে ভেক্টর বোঝাব তা নিম্নরূপ,

$$x_1 * = \left(\overline{X}_{11}, \ldots\ldots \overline{X}_{1n}\right)$$

(12.7.5) এর উভয়পক্ষকে $x_1 *$ দ্বারা প্রাগগুণন (pre-multiplication) করে এবং অনুরূপে (12.7.6) এর উভয়পক্ষকে $x_2 *$ দ্বারা প্রাকগুণন করে আমরা পাই

$$x_2 * Ax_1 = \overline{\lambda}_1 x_2 * x_1 \tag{12.7.7}$$

$$x_1 * Ax_2 = \overline{\lambda}_2 x_1 * x_2 \tag{12.7.8}$$

যেহেতু A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স,

$(x_2{*}Ax_1)^* = x_1{*}\,A(x_2{*})^* = x_1{*}\,Ax_2$

আবার A এর আইগেন মানগুলি সব বাস্তব।

অতএব, $x_1{*}\,Ax_2 = \lambda_1(x_2{*}\,x_1) = \lambda_1 x_1{*}\,x_2 = \lambda_2 x_1{*}\,x_2$

$(\lambda_1 - \lambda_2)\, x_1{*}\,x_2 = 0$

যেহেতু, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $x_1{*}\,x_2 = 0$ অর্থাৎ x_1, x_2 পরস্পর লম্ব।

মন্তব্য 12.7.1 : আমরা দেখেছি x যদি A ম্যাট্রিক্সের আইগেন ভেক্টর হয়, তাহলে kx, k যে কোনও বাস্তব স্কেলার, ও একটি আইগেন ভেক্টর। আবার x যদি আমরা $\|x\|$ এর বদলে নিই যেখানে $\|x\|$, x ভেক্টরের মান সূচিত করে, তাহলে $\frac{x}{\|x\|}$, x এর দিশায় একটি একক ভেক্টর।

যদি কোনও ম্যাট্রিক্সের প্রতিটি আইগেন ভেক্টরই একক ভেক্টর হয়, তখন আমরা বলি যে আইগেন ভেক্টরগুলিকে এককীকরণ (normalised) করা হয়েছে।

উদাহরণ : 12.7.1 নিম্নলিখিথ ম্যাট্রিক্স A এর আইগেন ও আইগেন ভেক্টর নির্ণয় করুন :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

A এর বৈশিষ্ট্য সমীকরণ হল

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2 = 0$

বা, $\lambda_1 = 0 \;\; \lambda_2 = 3$

y এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর নির্ণয়ের জন্য আমাদের $(A - \lambda I)\, x = 0$,

এই সমীকরণ যুগলকে সমাধান করতে হবে।

$\lambda_1 = 0$ বসিয়ে পাই $2x_1 + \sqrt{2x_2} = 0$

$\sqrt{2}x_1 + x_2 = 0$

অর্থাৎ, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2$.

আমরা আইগেন ভেক্টরের মান একক চাই। তাহলে $x_1^2 + x_2^2 = 1$,

অতএব, $\left(\frac{3}{2}\right)x_2^2 = 1$, ধনাত্মক বর্গমূল গ্রহণ করে পাই,

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

আবার $\lambda_2 = 3$ বসিয়ে পাই, $Ax = 3x$

অর্থাৎ $\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{2}\ x_2 = 0 \\ -\sqrt{2}\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}$

$$x_1 = \sqrt{2}\ x_2$$

এককীকরণের দ্বারা, অপর আইগেন ভেক্টর পাই,

$$u_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

উপপাদ্য 12.7.2 :

(ক) n মাত্রা বিশিষ্ট প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের আইগেন ভেক্টরসমূহ E^n, n - মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশের যে কোনও ভেক্টরকে প্রকাশ করতে পারে, অথবা E^n কে পরিমাপ করে (span)।

(খ) অন্তত একটি পরস্পর লম্ব একক ভেক্টরগোষ্ঠী পাওয়া যাবে E^n কে পরিমাপ (span) করা যায়।

(গ) যদি কোনও আইগেন মান λ_j, k বার পুনরাবৃত্ত হয়, তাহলে ম্যাট্রিক্সটির যে n সংখ্যক পরস্পর লম্ব একক ভেক্টরগোষ্ঠী আছে তাদের মধ্যে λ_j র অনুষঙ্গী k আইগেন ভেক্টর থাকবে।

(ঘ) যদি এক বা একাধিক আইগেন মান পুনরাবৃত্ত হয় k বার $k \le 2$, তাহলে A ম্যাট্রিক্সের অসংখ্য আইগেন ভেক্টরগোষ্ঠী (পরস্পর লম্ব ও একক মানের) যাদের যে কোনও আইগেন ভেক্টরগোষ্ঠী E^n-কে পরিমাপ করে।

(ক) A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। অতএব এর আইগেন মানসমূহ বাস্তব হবে।

আমনরা দুটি সম্ভাবনাই আলোচনা করব।

1) আইগেন মানগুলি স্বতন্ত্র হবে।

সেক্ষেত্রে উপপাদ্য অনুযায়ী n আইগেন ভেক্টর পাওয়া যাবে, যারা পরস্পর লম্ব এবং যাদের মান এক। আমরা যদি মনে করি λ_2 আইগেন মানের অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর দ্বয় পরস্পর লম্ব তাহলে এই ভেক্টরদ্বয় অপর (n –1) পরস্পর লম্ব ভেক্টরের ওপর লম্ব হবে। কিন্তু এটা সম্ভব হবে একটি, অপরটির গণিতক হয়।

2) ধরা যাক আইগেন মান λ_j, κ বার পুনরাবৃত্ত হয়।

($\kappa \geq 2$) আমরা দেখাতে চাই যে λ_1 এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টরসমূহের মধ্যে κ টি রৈখিকভাবে স্বাধীন। তার জন্য আমাদের দেখাতে হবে যে সার $(\lambda_j I - A)$ এর মাত্রা κ বা ততোধিক হবে।

আমরা জানি A এর আইগেন মান λ_j -র অনুষঙ্গী অন্তত একটা আইগেন ভেক্টর u_j আছে। তাহলে E^n দেশে u_j ছাড়া আমরা n – 1 ভেক্টরগোষ্ঠী $v_1 \ldots\ldots v_{n-1}$ পাব যাতে করে,

$u_1, v_1, \ldots\ldots v_{n-1}$, E^n দেশে একটি পরস্পর লম্ব এবং একক ভেক্টরগোষ্ঠী পাব যা E^n র ভিত্তি হবে।

আমরা Q ম্যাট্রিক্স গঠন করলাম ;

$$Q_1 = (u_j, v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots v_{n-1}) \tag{12.7.9}$$

তাহলে $AQ_1 = (Au_j, Av_1, Av_2, \ldots\ldots\ldots\ldots Av_{n-1})$

$= (\lambda_j u_j, Av_1, Av_2, \ldots\ldots Av_{n-1})$

তাহলে $$Q_1^T A Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_j u_j^T u_j & u_j^T A v_1 & u_j^T A v_2 & u_j^T A v_{n-1} \\ \lambda_j v_j^T u_j & v_j^T A v_1 & v_j^T A v_2 & v_j^T A v_{n-1} \\ \lambda_j v_{n-1}^T u_j & v_{n-1}^T A v_1 & v_{n-1}^T A v_2 & v_{n-1}^T A v_{n-1} \end{pmatrix} \tag{12.7.10}$$

যেহেতু $u_j, v_1, \ldots\ldots\ldots v_{n-1}$ পরস্পর লম্ব,

$v_i^T u_j = 0 \; (i = 1, 2, \ldots\ldots, n-1)$

এবং $u_j^T A v_i = v_j^T A u_j = \lambda_j v_i^T u_j = 0$

$(i = 1, 2 \ldots\ldots n-1)$.

অতএব যদি $v_j^T A v_k = g_{jk}, \; (j, k = 1, 2 \ldots\ldots n-1)$ হয়

এবং যদি $D = [g_{jk}]$ হয়। [ ] ম্যাট্রিক্স বোঝায়।

তাহলে $A_1 = Q_i^T A Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda j & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ (12.7.11)

লক্ষণীয় D, (n – 1) মাত্রার একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

এখন $Q_i^T Q_1 = \begin{pmatrix} u_j^T \\ v_1^T \\ \vdots \\ v_{n-1}^T \end{pmatrix} \left(u_j, v_1, \ldots. v_{n-1}\right)$ এখানে u_j, v_1, ...v_{n-1}, প্রত্যেকেই স্তম্ভ ভেক্টর।

$$= \begin{pmatrix} u_j{}^T u_j & u_j{}^T v_i \ldots\ldots & u_j{}^T v_{n-1} \\ v_i{}^T u_j & v_i{}^T v_i \ldots\ldots & v_1{}^T v_{n-1} \\ v_{n-1}{}^T u_j & v_{n-1}{}^T v_1 \ldots\ldots & v_{n-1}{}^T v_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 \ddots 00 \ldots. 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \ddots 1 \end{pmatrix} = T$$

অতএব, $Q_1^{-1} = Q_1^T$ অতএব $A_1 = Q_1^{-1} A Q_1$.

অতএব, A এবং A_1 -র আইগেন মানগুলি পরস্পর সমান।

আবার (12.7.11) থেকে পাই,

$$\det\left(\lambda I_n - A_1\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_j & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \lambda - g_{11} - g_{12} \ldots\ldots - g_{1n} & & \\ \mathbf{0} & \ddots & & \\ & - g_{n-1} - g_{n-2} & & \lambda = g_{nn} \end{pmatrix}$$

$= (\lambda - \lambda_j) \det \left| \lambda I_{n-1} - d \right|$ (12.7.12)

তাহলে λ_j যদি A র এমন একটি আইগেন মান হয় যেটা $k \geq 2$ বার পুনরাবৃত্ত হয় তাহলে এটা সত্য হতে হবে যে λ_j যদি A এর এমন একটি আইগেন মান হয় যেটা $k \geq 2$ বার পুনরাবৃত্ত হয়, তাহলে $(\lambda - \lambda_j)$

$\det(\lambda I_{n-1} - D)$ এর উৎপাদক হবে অর্থাৎ তখন $\det(D - \lambda_j I_{n-1}) = 0$

অতএব, $A_1 - \lambda_j I_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j I_{n-1} - D \end{bmatrix}$.

এর $(n-1)$ মাত্রার সমস্ত মাইনরগুলিই শূন্য হবে। অতএব $(A_1 - \lambda_j I)$ এর সারের মাত্রা ≥ 2 হবে। অতএব A এর একটি আইগেন ভেক্টর $\hat{u}_j$ পাওয়া যাবে যাতে করে যার অনুষঙ্গী আইগেন মান λ_j এবং যেটা u_j এর থেকে রৈখিকভাবে স্বাধীন অর্থাৎ যে u_j র ওপর লম্ব।

তাহলে যদি $k = 2$ হয় আমাদের প্রমাণ শেষ হল।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অবলম্বন করার জন্য, আমরা ধরে নিই যে $k \leq m$ হলে $(A - \lambda_j I)$ এর সারের মাত্রা অন্তত m হবেই। সুতরাং k যদি $(m+1)$ এর বড় হয়, $(n-m)$ ভেক্টর গোষ্ঠী $v_1, v_2, \ldots\, v_{n-m}$ পাওয়া যাবে যাতে করে $u_j, u_j^{(2)} \ldots\ldots\, u_j^{(m)}, v_1, v_2 \ldots\, v_{n-m}$, E^n দেশে একটি ভিত্তি হবে যাদের প্রতিটি সদস্য পরস্পর লম্ব একক ভেক্টর।

যদি $Q_{m+1} = (u_j, u_j^{(2)}, \ldots\, u_j^{(m)}, v_1, v_2, \ldots\, v_{n-m})$

তাহলে $AQ_{m+1} = (Au_j, Au_j^{(2)} \ldots Au_j^{(m)}, Av_1, Av_2, \ldots\, Av_{n-m})$

$= (\lambda_j u_j, \lambda_j u_j^{(2)} \ldots\, \lambda_j u_j^{(m)}, Av_1, Av_2, \ldots\, An_{n-m})$

এবং $Q^T_{m+1} A\, Q_{m+1} = \begin{pmatrix} \lambda_j u_j^T u_j, \lambda_j u_j^T u_j^{(2)} \ldots \lambda_j u_j^T u_j^{(m)}, u_j^T Av_1, \ldots u_j^T Av_{n-m} \\ \lambda u_j^{(2)T} u_j, \ldots \lambda_j u_j^{(2)T} u_j^{(m)}, u_j^{(2)T} Av_1, \ldots\ldots\ldots u_j^{(2)T} Av_{n-m} \\ \lambda_j v_{n-m}^T u_j, \lambda_j V_{n-m}^T u_j^{(2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_{n-m}^T Av_{n-m)} \end{pmatrix}$

কিন্তু, $v_i^T u_j = 0\ (i = 1, \ldots\, n-m)$

$\vdots$

$v_i^T u_j^{(m)} = 0, (i = 1, \ldots\ldots n-m)$

$$\left.\begin{aligned} u_j^T Av_i &= 0 \\ &\vdots \\ u_j^{(m-1)^T} Av_i &= 0 \end{aligned}\right\} (i = 1, 2 \ldots\ldots n-m)$$

সুতরাং যদি

$g_{ij} = v_i^T A v_1 (i, j = 1, 2 \dots n - m)$ এবং $D = (g_{ij})$ হয়,

তাহলে,
$$A_{m+1} = Q_{m+1}^T A Q_{m+1} = \begin{pmatrix} \lambda_j 0 \dots\dots\dots 0 & \\ \ddots & \\ & \ddots \\ & & \lambda_j \\ & & & D \end{pmatrix}$$

পূর্বের ন্যায় আমরা দেখাতে পারি $Q_{m+1}^T = Q_{m+1}^{-1}$

A_{m+1}, A এর সঙ্গে সদৃশ।

$\det (\lambda I_n - A_{m+1}) = (\lambda - \lambda_j)^m \det (-D + \lambda I_{n-m})$

তাহলে আইগেন মান λ_j যদি k বার পুনরাবৃত্ত হয়, $k \geq m + 1$,

$\det (\lambda I_{n-m} - D) = 0$

অতএব, $\left(\lambda_j I_n - A_{m+1}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j I_{n-m} - D \end{bmatrix}$

এই ম্যাট্রিক্সের মাইনরগুলি (মাত্রা n – m) সবই শূন্য হবে। অতএব $(\lambda_j I - A)$ এর সারের মাত্রা $\geq m + 1$। অতএব A এর আইগেন মান λ_j এর অনুষঙ্গী ভেক্টরগোষ্ঠী $u_j^{(2)} \dots u_j^{(m)}$ যারা পরস্পর রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং u_j এর ওপর লম্ব।

তাহলে আমরা দেখতে পাই যে কোনও আইগেন মান λ_j যদি k বার পুনরাবৃত্ত হয় তাহলে তার অনুষঙ্গী অন্তত k টি পরস্পর লম্ব একক ভেক্টর থাকবে। যেহেতু ম্যাট্রিক্সের n টি এবং কেবল n টিই আইগেন মান থাকে সুতরাং A এর (n–k) আইগেন ভেক্টর থাকবে যারা λ_j আইগেন মানের অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর থেকে স্বতন্ত্র। সুতরাং আমরা অন্তত (n – k) আইগেন ভেক্টর পাব যারা λ_j এর অনুষঙ্গী ভেক্টরের ওপর লম্ব। যেহেতু E^n এর মাত্রা হল n, E^n দেশে n টির বেশি পরস্পর লম্ব ভেক্টর থাকতে পারে না।

অতএব λ_j যদি k বার পুনরাবৃত্ত হয়, তাহলে তার অনুষঙ্গী k টি পরস্পর লম্ব আইগেন ভেক্টর পাব।

(খ) যদি এক বা একাধিক আইগেন মান k বার পুনরাবৃত্ত হয় ($k \geq 2$) তাহলে তার অনুষঙ্গী k আইগেন ভেক্টর পাব যারা পরস্পর রৈখিকভাবে স্বাধীন। এখন k টি রৈখিকভাবে স্বাধীন আইগেন ভেক্টর থেকে আমরা k টি পরস্পর লম্ব আইগেন ভেক্টর পাব অসংখ্য উপায়ে। অতএব E^n দেশে অসীম সংখ্যক সেট

পাব, যাদের প্রতি সদস্যই আবার n সংখ্যক পরস্পর লম্ব একক ভেক্টরের সেট।

উদাহরণ 12.7.2 : প্রদত্ত প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের তিনটি একক এবং পরস্পর লম্ব আইগেন ভেক্টর নির্ণয় করুন :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & 8 \end{pmatrix}$$

বৈশিষ্ট বহুপদ = det $(\lambda I - A)$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & -\sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & \lambda - 8 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 3)\ \{(\lambda - 4)\ (\lambda - 8) - 5\}$$

$$= (\lambda - 3)\ (\lambda^2 - 12\lambda + 27)$$

$$= (\lambda - 3)\ (\lambda^2 - 3\lambda - 9\lambda + 27)$$

$$= (\lambda - 3)^2\ (\lambda - 9)$$

আইগেনমান সমূহ হল

3, 3, 9

9 এর অনুষঙ্গী আমরা একটাই রৈখিখভাবে স্বাধীন আইগেন ভেক্টর পাব।

অর্থাৎ আইগেন ভেক্টর নির্ণয়ের সমীকরণ হল,

$$(9I - A)\ x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 9-3 & 0 & 0 \\ 0 & 9-4 & -\sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & 9-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$6x_1 = 0,\ 5x_2 - \sqrt{5}x_3 = 0,\ -\sqrt{5}x_2 + x_3 = 0$$

অতএব, $x_1 = 0,\qquad x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}x_3$

যদি $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ হয়, $\frac{6}{5}x_3^2 = 1$, ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে।

$x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, x_3 = \sqrt{\frac{5}{6}}$,

তাহলে $u_1 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}\right]$ হল আইগেন মান '9' এর অনুষঙ্গী একক আইগেন ভেক্টর।

যেহেতু আইগেন মান '3' পুনরাবৃত্ত হয়েছে, '3' এর অনুষঙ্গী দুটি পরস্পর লম্ব একক আইগেন ভেক্টর থাকবে। আসলে অসংখ্য পরস্পর লম্ব একক ভেক্টরগোষ্ঠী পাওয়া যাবে।

'3' এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর নির্ণায়ক সমীকরণ হল

$$(3I - A)\,x = 0, \tag{12.7.13}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

অথবা, $-x_2 - \sqrt{5}\ x_3 = 0, -\sqrt{5}x_2 - 5x_3 = 0$

অর্থাৎ $-x_2 - \sqrt{5}x_3, x_1$ যদৃচ্ছ।

যদি $x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1$ হয়, $\qquad x_1^2 + 6x_3^2 = 1$

$x_1 = 0$ নিয়ে, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (ধনাত্মক বর্গমূল)

$x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{\frac{5}{6}},\qquad x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, '3' এই আইগেন মানের

অনুষঙ্গী u_2 আইগেন ভেক্টর।

উক্ত আইগেন ভেক্টরের ওপর লম্ব আর একরটি আইগেন ভেক্টর u_2' নির্ণয়ের জন্য,

$$-\sqrt{\frac{5}{6}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3' = 0 \text{ অথবা } x_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}x_3'$$

যেহেতু (x_1', x_2', x_3') 12.7.13 সমীকরণ সমাধান করে,

$$-x_2' - \sqrt{5}x_3' = 0 \text{ অথবা } -x_2' = -\sqrt{5}x_3',$$

অতএব $\frac{1}{\sqrt{5}}x_3' = -\sqrt{5}x_3'$ অর্থাৎ $x_2' = 0,\ x_3' = 0$

যেহেতু $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1,\ x_1' = 1,\ x_2' = 0, x_3' = 0$

অথবা $u_2' = (1,0,0)$, '3' আইগেন মানের অনুষঙ্গী আর একটি আইগেন ভেক্টর।

যেহেতু, x_1 যদৃচ্ছ, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ নিলে প্রথম আইগেন ভেক্টর হয় $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{3}\right)$

এর ওপর লম্ব ভেক্টর u_2' আগের মত নির্ণয় করা যায়। আমরা আর একটি পরস্পর লম্ব আইগেন ভেক্টর সেট পেতে পারি।

এইভাবে অসংখ্য পরস্পর লম্ব আইগেন ভেক্টরত্রয় পাওয়া যায়।

12.8 সারাংশ

এই এককে আমরা রৈখিক রূপান্তরের আইগেন মান ও অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর বলতে কি বোঝায় তা ব্যাখ্যা করেছি। রৈখিক রূপান্তরকে কিভাবে তার আইগেন ভেক্টরের সাহায্যে একটি কর্নম্যাট্রিক্সে প্রকাশ করা যায় তা ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

বর্গ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে বৈশিষ্ট্য বহুপদ ও তার গুণাবলী বর্ণনা করা হয়েছে।

বিখ্যাত কেইল - হ্যামিলটন উপপাদ্য আলোচনা করা হয়েছে।

প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের আইগেন মানের বিভিন্ন গুণাবলী বর্ণনা করা হয়েছে এবং E^n দেশে n বর্গম্যাট্রিক্সের আইগেন ভেক্টরের সাহায্যে কিভাবে ভিত্তি গঠন করা যায় তা বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

12.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

12.9.1. $f(t) - 2t^2 - 5t + 6$ হলে নির্ণয় করুন

$f(A)$, $f(B)$,

যখন (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

12.9.2. প্রদত্ত $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ নির্ণয় করুন A^2, A^3

12.9.3. নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সগুলির প্রত্যেকটির আইগেন মান এবং রৈখিকভাবে স্বাধীন আইগেন ভেক্টর নির্ণয় করুন :

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$,

অবশিষ্ট ম্যাট্রিক্সদ্বয় P_1, P_2 নির্ণয় করুন যাতে

$P_1^{-1}\ A\ P_1$ এবং $P_2^{-1}\ AP_2$ কর্নম্যাট্রিক্স হয়।

12.10 উত্তরমালা

12.10.1 (a) $\begin{pmatrix} -26 & -3 \\ 5 & -27 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$,

12.10.2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12.10.3 (a) $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1,\ u_1 = (2, -1) \\ \lambda_2 = 4, u_2 = (1, \quad 1) \end{matrix}\right\}$

(b) $\lambda_1 = 5 + \sqrt{29},\ \ u_1 = \left(2 + \sqrt{29}, 5\right)$

$\lambda_1 = 5 - \sqrt{29},\ \ u_2 = \left(2 - \sqrt{29}, 5\right)$

$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{29} & 2-\sqrt{29} \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$

12.9 তথ্যসূত্র

1. G. Hadley, Linear Algebra – Addison Wesley Publishing Company. INC, (1977)

2. S Lipschutz, Linear Algebra, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill Book Company, 1968.

3. I. N. Herstens. Topics in Algebra, John Wiley & Series. 1975

4. S. K. Mapa – Higher Algebra, Asoke Prakasan, Kolkata

5. P. C. Shields – Linear Algebra, Addison-Wesley, 1964.

একক 13 ❐ দ্বিঘাত আকৃতি (Quadratic Form)

গঠন

13.1 প্রস্তাবনা

দশম থেকে দ্বাদশ একক পর্যন্ত রৈখিক ম্যাপিং-এর গুণাবলী, তার ম্যাট্রিক্সে প্রকাশ, তার আইগেন ভেক্টর, আইগেন মান ইত্যাদি আলোচনা করেছি।

এই এককে আমরা রৈখিক ম্যাপিং থেকে গঠিত দ্বিঘাত আকৃতি যেটা, একটি স্কেলার, সেই সম্বন্ধে আলোচনা করব।

এই দ্বিঘাত আকৃতির কতকগুলি সুন্দর গুণের জন্য, অনেক ব্যবহারিক প্রয়োগ আছে, যেমন কোনও অপেক্ষকের চরম বা অবম নির্ণয় কঠিন হলে তার আসন্ন দ্বিপদ আকৃতির চরম বা অবম নির্ণয় করা হয়। তাতে মানের খুব তফাত হয় না। দ্বিঘাত প্রোগ্রামিং সমস্যা যেখানে বিষয়াত্মক অপেক্ষক একটি দ্বিঘাত আকৃতি এবং শর্তাবলী সব রৈখিক অপেক্ষক বিশেষভাবে গুরুত্বপূর্ণ। বলবিদ্যায় অনেক সমস্যার সমাধান দ্বিঘাত প্রোগ্রামিং সমস্যা সমাধানের ওপর নির্ভর করে।

13.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি

- একটি দ্বি-ঘাত আকৃতির সংশ্লিষ্ট প্রতিসম ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে পারবেন।
- একটি ম্যাট্রিক্স-কে নির্দিষ্ট আকারে (ধনাত্মক, ঋণাত্মক) আকারে প্রকাশ করতে পারবেন।

13.3 উভয়-রৈখিক আকৃতি (Bilinear forms)

K ক্ষেত্রের ওপর V একটি সসীম মাত্রার ভেক্টর দেশ। V এর ওপর সংজ্ঞাত উভ-রৈখিক আকৃতি বলতে আমরা এমন একটি ম্যাপিং বোঝাই যাতে করে $f : V \times V \to K$ এবং নিম্নলিখিত সম্বন্ধগুলি সত্য হয় (a) $f(au_1 + bu_2, v) = af(u_1, v) + bf(u_2, v), a, b \in k$

b) $f(u, an_1+bv_2) = af(u, v_1) + bf(u, v_2), u_1, u_2, v_1, v_2 \in K$

এটা লক্ষণীয় যে f উভয় চলের সাপেক্ষেই রৈখিক। এইজন্য f কে উভ-রৈখিক বলা হয়।

উদাহরণ 13.3.1 : f R দেশে একটি ফুটকিজাত গুণফল (dot product) :

অর্থাৎ $f(u, v) = u.v = u_1v_1 + u_2 v_2 + \dots u_n v_n$

প্রদত্ত $u = (u_1, \dots u_n)^T, v = (v_1, v_2, \dots v_n)^T$

উদাহরণ 13.3.2 : ধরা যাক $A = (a_{ij})$ K ওপর একটি $n \times n$ ম্যাট্রিক্স।

A ম্যাট্রিক্স থেকে আমরা একটি উভ-রৈখিক আকৃতি গঠন করতে পারি।

প্রদত্ত $X = (x_1 = x_n)^T$ $Y = (y_1 \dots y_n)^T$

তাহলে $f(x, y) = x^TAY$ একটি উভ-রৈখিক আকৃতি।

$$f(x,y) = x^TAy = (x_1,\dots x_n)\begin{pmatrix} a_{11}\dots\dots\dots a_{in} \\ \vdots \\ a_{n1}\dots\dots\dots a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

13.4 উভ-রৈখিক আকৃতি ও ম্যাট্রিক্স

ধরা যাক v এর উপর f একটি উভ-রৈখিক আকৃতি। $\{e_1, ... e_n\}$, v-এর একটি ভিত্তি। ধরা যাক n, v $\in$ V

এবং $u = a_1e_1+..... + a_ne_n$, $v=b_1e_1+.... + b_ne_n$,

তাহলে $f(u, v) = f(a_1e_1+....+ a_ne_n, b_1e_1+b_2e_2...... +b_ne_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\, f(e_i, b_1 e_1 + ...+ b_n e_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i\, b_j\, f(e_i, e_j)$$

যদি $f(e_i, e_j) = a_{ij}$ হয় যেখানে ম্যাট্রিক্স A টি হল $A = (a_{ij})$,

$$f(u,v) = \sum_{i,j} a_i b_j f(e_i, e_j) = (a_1, ...a_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = [u]_e^T A[v]_i$$

$[u]_e$ {e} ভিত্তির সাপেক্ষে u $\in$ V এর স্তম্ভ ভেক্টর।

$f(e_i, e_j)$ কে $\{e_i\}$ ভিত্তির সাপেক্ষে f এর ম্যাট্রিক্সরূপ।

13.5 প্রতিসম উভ-রৈখিক আকৃতি, দ্বিঘাত আকৃতি

V এর ওপর f এই উভ-রৈখিক আকৃতিটিকে প্রতিসম বলা হয় যখন

$f(u, v) = f(v, u)$, যে কোনও u, v $\in$ V এর জন্য।

A যদি f এর ম্যাট্রিক্সরূপ হয়, তাহলে

$f(X, Y) = X^TAY = (X^TAY)^T = Y^TA^TX$,

যেহেতু X^TAY একটি স্কেলার।

তাহলে f যদি প্রতিসম হয়,

$Y^TA^TX = f(X, Y) = f(Y, X) = Y^TAX$

যেহেতু ওপরের সম্পর্কটি যে কোনও X, Y এর জন্য সত্য,

$$A = A^T$$

বিপরীতক্রমে A যদি প্রতিসম হয় তাহলে f ও প্রতিসম হবে।

উপপাদ্য 13.5.1 : ধরা যাক A একটি বাস্তব প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। তাহলে একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স P পাওয়া যাবে যাতে করে P^TAP একটি কর্নম্যাট্রিক্স হয়।

প্রমাণ : ধরা যাক f একটি R ক্ষেত্রের ওপর V ভেক্টরদেশে সংজ্ঞাত প্রতিসম উভ-রৈখিক আকৃতি। তাহলে V তে একটি ভিত্তি $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ পাওয়া যাবে যাতে করে f কে একটি কর্নম্যাট্রিক্সের সাহায্যে প্রকাশ করা যাবে অর্থাৎ $f(v_1, v_j) = 0, i \neq j$ যদি f = 0 হয় অথবা V এর মাত্রা 1 হয়, তাহলে উপপাদ্যটি সত্য হয়।

অতএব আমরা ধরলাম যে, $f \neq 0$ এবং V এর মাত্রা $\neq 1$

এখন $f(u + v, u + v) - f(u, u) - f(v, v)$

$= f(u, u) + f(u, v) + f(v, u) + f(v, v) - f(u, u) - f(v, v)$

$= f(u, v) + f(v, u)$ [যেহেতু, A প্রতিসম, f প্রতিসম, অতএব, $f(u. v) + f(v. u)$]

$= 2 f(u, v)$

$f(v, v) = 0$, যে কোনও $v \in V$ এর জন্য $\Rightarrow f(u + v, u + v) = 0, f(u, u) = 0, f(v, v) = 0$

$\Rightarrow f(u, v) = 0$ u, v এর সাথে সমান না হতেও পারে।

$\Rightarrow f = 0$

অতএব আমরা ধরতে পারি $v_1 \in V$ এমন একটি ভেক্টর যে $f(v_1, v_1) \neq 0$। ধরা যাক v_1 দ্বারা গঠিত U একটি উপদেশ এবং W এমন সব ভেক্টর $v \in V$ দ্বারা গঠিত সেট যে $f(v_1, v) = 0$

আমরা দেখাতে চাই যে $V = U \oplus W$, $\oplus$ সরল যোগফল (Direct sum) বোঝায়।

অর্থাৎ প্রতিটি ভেক্টর $v \in V$ এর জন্য $u \in U$ এবং $w \in W$ আছে যাতে $v = u + w$, এই একমাত্র উপায়ে প্রকাশ করা যায়।

(ক) আমরা দেখাব $U \cap W = \{0\}$, $u \in U$, ধরা যাক $u \in U \cap W$ যেহেতু, $u = kv_1$

$k \in R$ এবং যেহেতু $u \in W$, $0 = f(u, u) = f(kv_1, kv_1) = k^2 f(v_1, v_1)$

কিন্তু $f(v_1, v_1) \neq 0$ এবং সেইজন্য $u = kv_1 = 0$ অতএব $U \cap W = \{0\}$

(খ) আমরা দেখাব $V = U + W$, ধরা যাক $v \in V$

$$v - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1 = w \quad \text{(বললাম)}$$

তাহলে $$f(v_1, w) = f(v_1, v) - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} f(v_1, v_1) = 0$$

তাহলে, $w \in W$ (ক) এর সাহায্যে আমরা বলতে পারি,

v, U এর একটি উপাদান ও W এর একটি উপাদানের যোগফল।

তাহলে $V = U + W$

(ক) ও (খ) এর সাহায্যে বলতে পারি $V = U \oplus W$

যেহেতু U, v_1 দ্বারা গঠিত উপদেশ, U এর মাত্রা 1। অতএব W এর মাত্রা $n - 1$, যেহেতু V এর মাত্রা = U এর মাত্রা + W এর মাত্রা।

তাহলে গাণিতিক আরোহের সাহায্যে আমরা দেখতে পাই যে W তে এমন ভিত্তি আছে $\{v_2, \ldots. v_n\}$, যাতে $f(v_i, v_j) = 0, i \neq j, \ 2 \leq i, j \leq n.$

আমাদের সংজ্ঞা অনুসারে $f(v_1, v_j) = 0, j = 2, \ldots, n$ অতএব V এর ভিত্তি $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ -র একটি গুণ হল $f(v_i, v_j) = 0, i \neq j$ এর জন্য।

ë **Â13.5.1 :** প্রদত্ত $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

আমরা নিই $(A.I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

নিম্নলিখিত প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই

$R_1 \rightarrow R_2 + 3R_1$ and $R_3 \rightarrow R_3, - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_2 \to c_2 + 3c_1 \\ c_3 \to c_3 - 2c_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

তারপরে $R_3 \to R_2 + 2R_3$ করে

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \vdots & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} c_3 \to c_2 + 2c_3 \text{ করিয়া} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & \vdots & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

তাহলে A কে কর্নম্যাট্রিক্সে রূপান্তরিত করা হল।

ধরা যাক

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ তাহলে } P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

সংজ্ঞা 13.5.1

একটি ম্যাপিং $q : V \to R$ কে দ্বিঘাত আকৃতি বলা হয় যদি $q(v) = f(v, v)$, f, V তে একটি প্রতিসম উভ-রৈখিক আকৃতি।

q কে প্রতিসম উভ-রৈখিক f এর সংশ্লিষ্ট দ্বিঘাত আকৃতি বলা হয়।

এখন $q(u+v) = f(u+v, u+v) = f(u, u+v) + f(v, u+v)$

$= f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v)$

$= f(u,u) + 2f(u,v) + f(v,v)$ [f প্রতিসম বলে]

তাহলে $f(u,v) = \frac{1}{2}\{q(u+v) - q(u) - 1(v)\}$.

যদি f একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})$ দ্বারা প্রকাশিত হয়

তাহলে $q(X) = f(X, X) = X^T AX = (x_1 \ldots\ldots x_n)\begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{n1}\ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$= \sum_{v_{i_v}} a_{ij} x_1 x_j = a_{11}x_1^{\ 2} + a_{22}x_2^{\ 2} + \ldots + a_{nn}x_n^{\ 2}$$

$$+2\sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

A যদি কর্ণম্যাট্রিক্স হয় তাহলে,

$q(X) = X^T AX = a_{11}x_1^{\ 2} + \ldots + a_{nn}x_n^{\ 2}$

উদাহরণ 13.5.2 : $3x_1^{\ 2}+2x_1x_2-x_2^{\ 2}$ দ্বিঘাত আকৃতির সংশ্লিষ্ট প্রতিসম ম্যাট্রিক্স A নির্ণয় করুন।

ধরা যাক $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^{\ 2} + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^{\ 2} = 3x_1^{\ 2} + 2x_1x_2 - x_2^{\ 2}$$

অতএব $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

উদাহরণ 13.5.3 : $3x^2+4xy-y^2+8xz-6yz+z^2$ এই দ্বিঘাত আকৃতির সংশ্লিষ্ট প্রতিসম ম্যাট্রিক্স A নির্ণয় করুন।

ধরা যাক $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^{\,2}+a_{22}y^2+a_{33}3z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx$$

$a_{11} = 3,\ a_{22} = -1,\ a_{33} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{23} = -3,\ a_{13} = 4$

13.6 ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকার, ঋণাত্মক নির্দিষ্ট আকার, ধনাত্মক অর্ধ-নির্দিষ্ট আকার, ঋণাত্মক অর্ধ-নির্দিষ্ট আকার

ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকার : একটি $n\times n$ বাস্তব প্রতিসম ম্যাট্রিক্স A কে ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকার (positive-definite) বলা হয়, যদি যে কোনও n মাত্রিক স্তম্ভ ভেক্টর x এর জন্য (শূন্য নয় এমন), $x^TAx > 0$.

মন্তব্য 13.6.1 : যদি B একটি অবিশিষ্ট বাস্তব ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে

(i) B^TB প্রতিসম

এবং (ii) B^TB ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকার।

প্রমাণ : i) $(B^TB)^T = B^T(B^T)^T = B^TB$, অর্থাৎ B^TB প্রতিসম।

ii) n মাত্রিক স্তম্ভভেক্টর x এর জন্য $x^TB^TBx = (Bx)^T(Bx)$

অতএব $Bx \neq 0 \Rightarrow (Bx)^TBx > 0 \Rightarrow x^TB^TBx > 0$.

আবার B অবিশিষ্ট বলে, $x^TB^TBx = 0 \Rightarrow (Bx)^TBx = 0 \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow x = 0$

উদাহরণ 13.6.1 : দেখান $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ একটি ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকারের ম্যাট্রিক্স।

যদি $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$x^TAx = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$= 2x_1^{2}+x_1x_2+ x_1x_2+3x_2^2$

$= (x_1+x_2)^2 + x_1^2+2x_2^2 > 0.$

মন্তব্য 13.6.2 : A যদি একটি ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকার ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে A অবিশিষ্ট হবে।

আমরা জানি, A যদি অবিশিষ্ট হয়, তাহলে

$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ধরা যাক A অবিশিষ্ট নয়। তাহলে $Ax = 0$ এর একটি সমাধান থাকবে x। যেটি শূন্য নয়।

তাহলে $x^TAx = 0$ সত্য হবে x শূন্য না হলেও। কিন্তু যেহেতু A একটি ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকার ম্যাট্রিক্স x যদি শূন্য ভেক্টর না হয় তাহলে $x^1Ax > 0$.

অতএব $x^TAx = 0$ হবে, তখনই যখন $x \neq 0$.

মন্তব্য 13.6.3 : A যদি একটি ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকারের ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে A এর আইগেন মানসমূহ ধনাত্মক হবে।

ধরা যাক λ, A এর একটি আইগেন মান ও x, A-র অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর। তাহলে $x \neq 0$ এবং

$Ax = \lambda x$

তাহলে $x^TAx = \lambda x^Tx$

যেহেতু $x^TAx > 0$ এবং $x^Tx > 0, x \neq 0$ বলে

λ বাস্তব হবে এবং $\lambda \geq 0$.

আবার যেহেতু ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকারের ম্যাট্রিক্স A সর্বদাই অবিশিষ্ট হয়, অতএব $\lambda = 0$ শূন্য হলে, $x \neq 0$ হলেও, $Ax = 0$ হবে। সেক্ষেত্রে A একটি বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স হবে।

অতএব $\lambda > 0$ অর্থাৎ ধনাত্মক।

উদাহরণ 13.6.2 : দেখান যে $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ একটি ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকারের ম্যাট্রিক্স।

λ যদি উদ্দিষ্ট ম্যাট্রিক্সের একটি আইগেন মান হয়, তাহলে

λ, $\det(\lambda I - A) = 0$ এর বীজ হবে।

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

অথবা, $\lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$

অর্থাৎ $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$,

আইগেন মানদ্বয় ধনাত্মক। অতএব ম্যাট্রিক্সটি ধনাত্মক বিশিষ্ট আকার।

ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকার :

একটি $n \times n$ ম্যাট্রিক্স A কে ঋণাত্মক নির্দিষ্ট আকারের বলা হয়, যদি $-A$ একটি ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকারের ম্যাট্রিক্স হয়।

পক্ষান্তরে A একটি ঋণাত্মক নির্দিষ্ট আকারের ম্যাট্রিক্স

যদি $x^T Ax \leq 0$ যে কোনও শূন্য নয় এমন ভেক্টর x এর জন্য।

দেখান যে $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ একটি ঋণাত্মক নির্দিষ্ট আকারের ম্যাট্রিক্স।

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= -2x_1^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 3x_2^2 - 4x_3^2$$

$$= -[(x_1+x_3)^2 + (x_2+x_3)^3 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2]$$

ধনাত্মক অর্ধ-নির্দিষ্ট আকার :

একটি $n \times n$ ম্যাট্রিক্স A কে ধনাত্মক অর্থ-নির্দিষ্ট আকার বলা হয়,

যদি $x^T Ax \geq 0$ যে কোনও n মাত্রিক ভেক্টর x এর জন্য।

উদাহরণ 13.6.3 : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$x^T Ax = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$= 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 3x_3^2 = (2x_1 - x_2)^2 + 3x_3^2 \geq 0.$

অতএব, A একটি ধনাত্মক অর্ধ-নির্দিষ্ট আকারের ম্যাট্রিক্স।

অবার $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ এর আইগেন মানগুলি

$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ এই সমীকরণের বীজসমূহ।

উপরের সমীকরণ থেকে পাই,

$(4-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + 2\{-2(3-\lambda)\} = 0$

অথবা, $(3-\lambda)\{4-5\lambda+\lambda^2-4\} = 0$

অথবা, $\lambda(\lambda-5)(3-\lambda) = 0$

অথবা $\lambda = 0$ অথবা 3 অথবা 5

অর্থাৎ আইগেন মানগুলি ঋণাত্মক হয়।

ঋণাত্মক অর্থ-নির্দিষ্ট আকার :

একটি $n \times n$ ম্যাট্রিক্স A কে ঋণাত্মক অর্থ-নির্দিষ্ট আকারের বলা হয় যদি $x^TAx \leq 0$ হয়, যে, কোনও ভেক্টর x এর জন্য।

মন্তব্য 13.6.4 :

A যদি ধনাত্মক অর্থ-নির্দিষ্ট আকারের হয়।

তাহলে $-A$ ঋণাত্মক অর্ধ-নির্দিষ্ট আকারের হবে।

উদাহরণ 13.6.4 :

$A = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

ধরা যাক, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

তাহলে $x^T A x = (x_1, x_2)\begin{pmatrix}-8 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$.

$= -8x_1^2 + 8x_1x_2 - 2x_2^2$

$= -2(4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2)$

$= -2(2x_1 - x_2)^2 \leq 0$ যে কোনও x_1, x_2 এর জন্য। আবার $\begin{pmatrix}-8 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ এর আইগেন মানগুলি

$\begin{vmatrix}-8-\lambda & 4\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix} = 0$ এই সমীকরণের বীজসমূহ।

ঐ সমীকরণ থেকে পাই $(8 + \lambda)(2 + \lambda) - 16 = 0$

or, $16 + 10\lambda + \lambda^2 - 10 = 0$

or, $\lambda(\lambda + 10) = 0$

অর্থাৎ $\lambda = 0$ অথবা $\lambda = -10$.

সুতরাং প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি ঋণাত্মক অর্ধ-নির্দিষ্ট আকারের।

13.7 সারাংশ

এই এককে সসীম ভেক্টর দেখে উভ-রৈখিক আকৃতির সংজ্ঞা থেকে শুরু করে দ্বিঘাত আকৃতির রূপ বর্ণনা করা হয়েছে। দ্বিঘাত আকৃতির সংশ্লিষ্ট প্রতিসম ম্যাট্রিক্স সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকার, ঋণাত্মক নির্দিষ্ট আকার, ধনাত্মক অর্ধ-নির্দিষ্ট আকার, ঋণাত্ম অর্থ-নির্দিষ্ট আকারের ম্যাট্রিক্স আলোচনা করা হয়েছে।

13.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

প্রশ্নাবলী :

13.8.1. ধরা যাক $u = (x_1, x_2)$, এবং $v = (y_1, y_2)$

R^2 দেশে নিম্নলিখিত রাশিমালার মধ্যে কোনগুলি উভ-রৈখিক তা নির্ণয় করুন :

(a) $f(u, v) = 3x_1y_2 - 2x_2y_1$ (b) $f(u, v) = x_1 - y_2$

(c) $f(u, v) = x_1x_2 + y_1y_2$ (d) $(f(u, v) = -1$

13.8.2. নিম্নলিখিত দ্বিঘাত আকৃতির অনুষঙ্গী প্রতিসম ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন :

(a) $q(x, y) = 2x^2 - 8xy + y^2 - 16xz + 14yz + 5z^2$

(b) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz$ (c) $xy + yz + zx$

13.8.3. নিম্নলিখিত প্রতিটি ম্যাট্রিক্স A এর জন্য এমন একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স P নির্ণয় করুন যাতে করে P^TAP কর্ণ ম্যাট্রিক্স হয় :

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

13.9 উত্তরমালা

13.9.1. (a) হ্যাঁ। (b) না। (c) না। (d) হ্যাঁ।

13.9.2. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 \\ -4 & 1 & 7 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

13.9.3. (a) $P = \dfrac{1}{\sqrt{17}\left(\sqrt{17} - 2\right)} \begin{pmatrix} \sqrt{17} - 4 & 4 \\ 4 & -\left(\sqrt{17} - 1\right) \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $P = \frac{1}{\sqrt{300}}\begin{pmatrix} 5\sqrt{10} & 5 & -5 \\ -2\sqrt{10} & \sqrt{30} + 10\sqrt{30} & -10 \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{30}-5 & 2\sqrt{30}+5 \end{pmatrix}$

13.10 তথ্যসূত্র

1. G. Hadley, Linear Algebra – Addison Wesley Publishing Company. INC (1977)
2. S Lipschutz, Linear Algebra, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill Book Company, 1968.
3. H.G. Campbell – Linear Algebra with applications, Appleton Century – Crofts.
4. S. K. Mapa – Higher Algebra, Asoke Prakasan, Calcutta.
5. P. C. Shields – Linear Algebra, Addison-Wesley, 1964.

একক 14 ❑ জ্যামিতিক প্রয়োগ (Geometric Applications)

গঠন

14.1 প্রস্তাবনা

রৈখিক বীজগণিতের গণিতের বিভিন্ন শাখায় অনেক প্রয়োগ আছে। এই এককে জ্যামিতিতে রৈখিক বীজগণিতের প্রয়োগের বিষয় আলোচনা করব।

আমরা জানি যে দুই চলের যে কোনও দ্বিঘাত আকৃতি একটি কণিককে চিহ্নিত করে। রৈখিক বীজগণিতের সাহায্যে ঐ কণিকের বিশেষ আকৃতি নির্ণয় করা যায়। ত্রিমাত্রিক দেশেও অনুরূপ আকৃতি নির্ণয় করা যায়।

14.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি যেগুলি করতে পারবেন সেগুলি হল :

- জ্যামিতির বিভিন্ন ক্ষেত্রে রৈখিক বীজগণিতের প্রয়োগ করতে পারবেন।

14.3 স্বভাবী ম্যাট্রিক্স; স্বভাবী দ্বিঘাত আকৃতি

স্বভাবী ম্যাট্রিক্স : শূন্যম্যাট্রিক্স নয় এমন কোনও ম্যাট্রিক্সকে যখন প্রাথমিক প্রক্রিয়ার সাহায্যে নিম্নলিখিত যে কোনও একটি আকৃতিতে রূপান্তরিত করা যায়, যেমন

$$\left[\begin{array}{c:c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \text{ অথবা } \left[I_r \vdots 0\right] \text{ অথবা } \begin{bmatrix} I_r \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

অথবা I_r, ঐ রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের স্বভাবী (Canonical form) বলা হয়। I_r, r মাত্রাবিশিষ্ট একটি একসম ম্যাট্রিক্স।

মন্তব্য 14.3.1 : শূন্য ম্যাট্রিক্সের স্বভাবী আকার শূন্য ম্যাট্রিক্সই হয়।

উদাহরণ 14.3.1 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ এর স্বভাবী আকার নির্ণয় করুন।

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \overset{\sim}{-6R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \overset{\sim}{-2C_1+C_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\sim}{-\frac{1}{4}R_2^2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \overset{\sim}{C_2+C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$=1_3$

'$\sim$' সমতুল্যতা অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে।

স্বভাবী দ্বিঘাত আকৃতি :

কোনও দ্বিঘাত আকৃতির অনুষঙ্গী ম্যাট্রিক্সকে যদি স্বভাবী ম্যাট্রিক্সে রূপান্তরিত করা হয়, তাহলে ঐ স্বভাবী ম্যাট্রিক্সবিশিষ্ট দ্বিঘাত আকৃতিকে প্রদত্ত আকৃতির স্বভাবী দ্বিঘাত আকৃতি বলা হয়।

উদাহরণ 14.3.2 : প্রদত্ত দ্বিঘাত আকৃতির স্বভাবী আকৃতি নির্ণয় করতে হবে।

$x^2+6xy-7y^2$

অনুষঙ্গী ম্যাট্রিক্স $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \widetilde{-3R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \widetilde{C_2 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

প্রদত্ত দ্বিঘাত আকৃতির স্বভাবী আকৃতি হল,

$$(x'\, y') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'^2 - 16y'^2$$

মন্তব্য 14.3.2 : A ম্যাট্রিক্সকে স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করার জন্য যে প্রাথমিক প্রক্রিয়াসমূহ করা হয়েছে তারা যদি E ম্যাট্রিক্স দিয়ে প্রাক্ গুণন চিহ্নিত করে তাহলে $EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$ যেখানে

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \text{ অতএব } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \times -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 48 & -16 \end{pmatrix}.$$

14.4 লম্ব ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে স্বভাবী আকৃতি নির্ণয়

আমরা জানি যে ম্যাট্রিক্স P কে লম্ব ম্যাট্রিক্স বলা হয় যখন $P^TP = I_n$, P -এর মাত্রা n। A-এর মাত্রা যদি n হয়,

P^TAP এর সদৃশ।

যদি $x = Px$ হয়, তাহলে x^TAx, $x^T(P^TAP)x$ এর সদৃশ।

দ্বিঘাত আকৃতি x^TAx তে A কে প্রতিসম সবসময়ই ধরা যায়।

কারণ, x^TAx বাস্তব বলে,

$$x^TAx = \frac{1}{2}\left[x^TAx + \left(x^TAx\right)^T\right] = \frac{1}{2}\left[x^TAx + x^TA^Tx\right]$$

$$= \frac{1}{2}x^T\left(\frac{1}{2}\left[A + A^T\right]\right)x$$

প্রতিমস ম্যাট্রিক্স A কে কর্ণ ম্যাট্রিক্সে কিভাবে রূপান্তরিত করা যায় যাতে করে A ও কর্ণ ম্যাট্রিক্সটি পরস্পর সদৃশ হয়, তা 12.4 তে বিবৃত হয়েছে।

উদাহরণ 14.4.1 : $x^2+6xy-7y^2$ এই দ্বিঘাত আকৃতিকে লম্ব রূপান্তরের স্বভাবী আকৃতিতে রূপান্তরিত করতে হবে।

প্রদত্ত দ্বিঘাত আকৃতির অনুষঙ্গী ম্যাট্রিক্স A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

A এর আইগেন মান নির্ণয়কারী সমীকরণ হল,

অথবা $(\lambda - 1)(\lambda + 7) - 9 = 0$

$(\lambda + 8)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda = -8$ হলে আইগেন ভেক্টর u নির্ণয়কারী সমীকরণযুগল হল,

$u_1 + 3u_2 = -8u_1,$

$3u_1 - 7u_2 = -8u_2.$

অথবা, $u_2 = -3u_1.$

$\lambda = -8$ এর অনুষঙ্গী একক আইগেন ভেক্টর $= \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

যখন $\lambda = 2$ আইগেন ভেক্টর v নির্ণয়কারী সমীকরণদ্বয় হয়,

$u_1 + 3u_2 = 2u_1$

$3u_1 - 7u_2 = 2u_2$

অথবা, $u_1 = 3u_2.$

$\lambda = 2$ এর অনুষঙ্গী একক আইগেন ভেক্টর $= \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

অতএব, $P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$P^T P = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

অতএব, P একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স।

$$P^T AP = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & -24 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -80 \end{pmatrix}$$

অতএব যদি $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ হয়,

তাহলে $x^2 + 6xy - 7y^2$ রূপান্তরিত হয়

$$(x'\ y')\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$= 2x'^2 - 8y'^2$ এই আকৃতিতে।

মন্তব্য 14.4.1 : উক্ত দ্বিঘাত আকৃতিতে $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$

ধরা যাক $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$$

যদি $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ এবং $X = PX'$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ হয়

তাহলে $x^2 + 6xy - 7y^2 = 1$ রূপান্তরিত হয়,

$x'^2 - 16'^2 = 1$ এই সমীকরণে।

উপরের সমীকরণটি একটি পরাবৃত্ত চিহ্নিত করে। কিন্তু P একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স না হওয়ায় নতুন অক্ষদ্বয় পরস্পর লম্ব নয়।

যে কোনও দুই বিন্দুর দুরত্ব P এর সাপেক্ষে অবিচল থাকবে না।

14.5 দ্বিচল বা ত্রিচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের জ্যামিতিক রূপ নির্ণয়

ধরা যাক x ও y এই দুই চলের একটি দ্বিঘাত সমীকরণ আছে। আমাদের উদ্দেশ্য সমীকরণটি কী ধরনের কণিককে চিহ্নিত করে তা আমরা জানতে চাই। এই ব্যাপারে রৈখিক রূপান্তরের (ম্যাপিং) একটি ভূমিকা আছে। ওপরের আলোচনাটা এই রূপান্তর নির্ণয়ে বিশেষভাবে প্রয়োজনীয়।

উপপাদ্য 14.5.1 : E^n দেশে $[e] = \begin{Bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{Bmatrix}$ এবং $[f] = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$ যদি দুটি

পৃথক ভিত্তি হয় এবং যে কোনও বিন্দুর [e] -র সাপেক্ষে স্থানাঙ্কসমূহ যদি

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ হয় এবং [f] র সাপেক্ষে স্থানাঙ্কসমূহ যদি

$X' = \begin{pmatrix} x'_n \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ হয়, তাহলে X ও X' এর মধ্যে সম্পর্কটি রৈখিক রূপান্তরের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

আমরা দেখেছি পূর্বতন ভিত্তি $\{e_i\}$ থেকে নতুন ভিত্তি $\{f_i\}$ -র জন্য একটি পরিবর্তনশীল ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়, যাতে করে [f] = P[e]

বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর ξ হলে আমরা লিখতে পারি

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = X^T[e]$$

আবার $\xi = \sum_{i=1}^{n} x'_i \; f_i = X'^T[f]$.

সুতরাং $X^T[e] = X'^T P[e]$,

অতএব $X^T = X'^T P$

অথবা $X = P^T X'$

যেহেতু $\{f_i\}$ এবং $\{e_i\}$ উভয়েই রৈখিকভাবে স্বাধীন, P ম্যাট্রিক্সটি অবিশিষ্ট হবে।

সুতরাং $X' = [P^{-1}]^T X$

মন্তব্য 14.5.1 : $\{e_i\}$ যদি এককলম্ব ভেক্টরসমূহ হয় তাহলে $\{f_i\}$ ও

একক ভেক্টরসমূহ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি P^T একটি

লম্ব ম্যাট্রিক্স হয়।

ধরা যাক $P^T = [a_{ij}]$, $i = 1.....n$, $j = 1, ...n$.

এখন $f_1 = \{P^T[e]\}_i = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} e_{i\ell}$,

এখন $(f_i, f_j) = (a_{i1}e_1 + ...a_{in}e_n, a_{ji}e_1 + ... + a_{jn}e_n)$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{i\ell} a_{jm} (e_\ell, e_m)$$

যেহেতু $\{e_i\}$ পরস্পর একলম্ব ভেক্টরসমূহ, $(e_\ell, e_m) = 0$ যদি $\ell \neq m$

$= 1$ যদি $\ell = m$

সুতরাং $(f_i, f_j) = a_{i1}a_{ji} + ... + a_{in}a_{jn}$

$\{f_i\}$ যদি একলম্ব ভেক্টরসমূহ হয়, তাহলে $a_{i1}a_{ji} + ... + a_{in}a_{jn} = 0$ যদি $i \neq j$

$= 1$ যদি $i = j$

অর্থাৎ $PP^T = I_n$

অর্থাৎ P^T লম্ব ম্যাট্রিক্স হয়।

বিপরীত ক্রমে P^T যদি একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স হয়

তাহলে $\{f_i\}$ একলম্ব ভেক্টরসমূহ হবে।

$ax^2+2hxy+by^2 = R$ এই কণিকের রূপনির্ণয়ের বীজগাণিতিক পদ্ধতি :

a) ধরা যাক $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ তাহলে প্রদত্ত সমীকরণকে লেখা যায়

$$X^T = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} X = R$$

b) $\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ এই প্রতিসম ম্যাট্রিক্সকে A দিয়ে চিহ্নিত করা হল। A এর আইগেন মানদ্বয় নির্ণয় করতে হবে এবং ঐ আইগেন মানদ্বয়ের অনুষঙ্গী একক আইগেন ভেক্টরদ্বয় $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ এবং

$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ নির্ণয় করতে হবে।

c) $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ কে P দিয়ে চিহ্নিত করা হল।

P^TP একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স।

d) P^TAP একটি কর্নম্যাট্রিক্স (দ্রষ্টব্য 12.3)

e) P^TAP, A এর একটি স্বভাবী রূপ। সুতরাং, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ হয়, $X'(P^TAP)X^I = R$ প্রদত্ত কণিকের স্বভাবী আকার।

যেহেতু $X'(P^TAP)\,X'$ -এ কোনও $x'y'$ পদ থাকবে না, ঐ সমীকরণের মধ্যেও কোনও $x'y'$ পদ থাকবে না। সুতরাং আমরা সহজেই প্রদত্ত কণিকটির কি বিশেষ আকৃতি, যেমন সরলরেখাদ্বয় বা বৃত্ত বা অধিবৃত্ত বা উপবৃত্ত বা পরাবৃত্ত তা নির্ণয় করতে পারি।

উদাহরণ 14.5.1 : লম্ব ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে

$2x^2-4xy+5y^2 = 6$ কে স্বভাবী আকারে প্রকাশ করুন এবং কণিকটি কি প্রকারের তা নির্ণয় করুন।

ধরা যাক $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ এবং $2x^2-4xy+5y^2 = X^TAX$ ।

তাহলে $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

A এর আইগেন মানদ্বয় নির্ণয়কারী সমীকরণ হল :

$(2-\lambda)(5-\lambda)-4 = 0$

অথবা $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

অথবা $\lambda = 1, \lambda = 6$

$\lambda = 1$ হলে আইগেন ভেক্টর নির্ণয়কারী সমীকরণদ্বয় হল

$2u_1 - 2v_1 = u_1$

$-2u_1 - 5v_1 = v_1$

বা, $u_1 = 2v_1$

অতএব $\lambda = 1$ এর অনুষঙ্গী একক আইগেন ভেক্টর হল

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 6$ হলে আইগেন ভেক্টর নির্ণয়কারী সমীকরণদ্বয় হল,

$2u_2 - 2v_2 = 6u_2,$

$-2u_2+5v_2 = 6v_2,$

বা, $v_2 = -2u_2.$

অতএব $\lambda = 6$ এর অনুষঙ্গী একক আইগেন ভেক্টর হল

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

অতএব A কে কর্ণম্যাট্রিক্সে রূপান্তরিত করার জন্য

আমরা নিই $P = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, P প্রতিসম।

$$P^{T}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

অতএব একটি স্বভাবী কণিক হল :

$x'^2 + 6y'^2 = 6 = 0$ অর্থাৎ উপবৃত্ত।

উদাহরণ 14.5.2 : লম্ব ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে

$x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$

কে স্বভাবী আকারে প্রকাশ করুন এবং কণিকটি কি প্রকারের তা নির্ণয় করুন।

যদি $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ হয়, তাহলে প্রদত্ত সমীকরণটিকে প্রকাশ করা

যায় $X^{T}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}x = 1$ হিসাবে।

ধরা যাক $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

A এর আইগেন মান নির্ণয়কারী সমীকরণ হল :

$(\lambda - 1)(\lambda - 5) - 9 = 0$

অথবা, $\lambda^2 - 6\lambda - 4 = 0$

$\lambda_1 = \frac{6+\sqrt{52}}{2}$ বা $\lambda_1 = \frac{6-\sqrt{52}}{2}$

অর্থাৎ $\lambda_1 = 3+\sqrt{13}$ $\lambda_2 = 3-\sqrt{13}$

$\lambda_1 = 3+\sqrt{13}$ এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর নির্ণয়কারী সমীকরণদ্বয় হল,

$u_1 + 3v_1 = (3+\sqrt{13})u_1$

$3u_1 + 5v_1 = (3+\sqrt{13})v_1$

বা, $(2+\sqrt{13})\ u_1 = 3v_1$

বা, $u_1 = \frac{3}{2+\sqrt{13}} v_1$

$= \frac{3(\sqrt{13}-2)}{9} v_1$

$= \frac{(\sqrt{13}-2)}{3} v_1$

অতএব একক আইগেন ভেক্টর হল $= \frac{1}{(26-4\sqrt{13})^{1/2}} \times \begin{pmatrix} \sqrt{13}-2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3-\sqrt{13}$ এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর নির্ণয়কারী সমীকরণযুগল হল :

$u_2 + 3v_2 = (3-\sqrt{13})\ u_2$

$3u_2 + 5v_2 = (3-\sqrt{13})\ v_2$

অথবা $(2-\sqrt{13})\ u_2 = 3v_2$

$\lambda = 3-\sqrt{13}$ এর অনুষঙ্গী একটি একক আইগেন ভেক্টর হল

$$\frac{1}{\left(26-4\sqrt{13}\right)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix}3\\-\left(\sqrt{13}-2\right)\end{pmatrix}$$

অতএব লম্ব ম্যাট্রিক্স $P=\dfrac{1}{\left(26-4\sqrt{13}\right)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix}\sqrt{13}-2 & 3\\ 3 & -\left(\sqrt{13}-2\right)\end{pmatrix}$

$P^TP=I_2$

প্রদত্ত কণিকের একটি স্বভাবী কণিক হল

$$\frac{1}{\left(26-4\sqrt{13}\right)}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\sqrt{13}-2 & 3\\ 3 & -\left(\sqrt{13}-2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{13}-2 & 3\\ 3 & -\left(\sqrt{13}-2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{26-4\sqrt{13}}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\sqrt{13}-2+9 & 3\left(\sqrt{13}-2\right)+15\\ 3+3\left(2-\sqrt{13}\right) & 9-5\left(\sqrt{13}-2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{13}-2 & 3\\ 3 & 2-\sqrt{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{26-4\sqrt{13}}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}26+14\sqrt{13} & 0\\ 0 & 130-38\sqrt{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$=ax'^2-by'^2,\qquad a=\frac{26+14\sqrt{13}}{26-4\sqrt{13}}>0$$

$$=1\qquad b=\frac{130-38\sqrt{13}}{26-4\sqrt{13}}>0$$

অতএব স্বভাবী কণিকটি একটি পরাবৃত্ত।

14.6 লম্ব ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে দ্বিচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের স্বভাবী আকার নির্ণয়

ধরা যাক আমরা x ও y চলের নিম্নলিখিত দ্বিঘাত সমীকরণ নিয়ে আলোচনা করি :

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (14.6.1)$$

ধরা যাক $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ তাহলে (14.5.1) সমীকরণকে লেখা যায়,

$$X^T\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} X+(2g,2f)X+cI_1=0 \qquad (14.6.2)$$

$\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ কে A দ্বারা এবং (2g, 2f) কে b দ্বারা চিহ্নিত করা হল।

(14.6.2) কে লেখা হল,

$$X^TAX+bX+cI_1=0 \qquad (14.6.3)$$

যেহেতু A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স, এমন একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স P নির্ণয় করা যায় যাতে করে P^TAP = একটি কর্ন ম্যাট্রিক্স $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, যেখানে λ_1, λ_2 হল A এর আইগেন মানদ্বয়।

একটি লম্ব রূপান্তর P নেওয়া হল যাতে করে $X=PX'$, $X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

(14.6.3), x', y' চলে রূপ নেয়,

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2g_1x'+2f_1y'+c=0 \qquad (14.6.4)$$

$(2g_1,2f_1)=b\underline{P}$,

চারটি আলাদা ধরনের সম্ভাবনা আছে।

ক্ষেত্র ক) A এর ক্রমিক পদ (Rank) = 2

এক্ষেত্রে λ_1, λ_2 উভয়েই শূন্য নয়।

মূলবিন্দুকে $\left(-g_1/\lambda_1, -f_1/\lambda_1\right)$ তে সরানো হল। সমীকরণটি রূপ নেয়,

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+d=0 \qquad (14.6.5)$$

ক 1) d = 0, উপরের সমীকরণটি রেখাদ্বয় চিহ্নিত করে

যদি $\lambda_1\lambda_2<0$

একটি বিন্দু উপবৃত্ত যদি $\lambda_1\lambda_2>0$ এবং $\lambda_1\neq\lambda_2$

একটি বিন্দু বৃত্ত যদি $\lambda_1 = \lambda_2$,

ক 2) $d \neq 0$, উপরের সমীকরণটি

একটি উপবৃত্ত চিহ্নিত করে যদি $\lambda_1\lambda_2 > 0_1\ \lambda_1 d < 0$

একটি অবাস্তব কণিক চিহ্নিত করে যদি $\lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_1 d > 0$

একটি পরাবৃত্ত চিহ্নিত করে যদি $\lambda_1\lambda_2 < 0$ হয়।

খ) A এর ক্রমিক পদ K= 1

এইক্ষেত্রে λ_1, λ_2 র মধ্যে একটি শূন্য।

ধরা যাক, $\lambda_2 = 0$

$\left(-\frac{9_1}{\lambda_1}, 0\right)^2$ বিন্দুতে মূলবিন্দুকে সরালে সমীকরণ (14.6.4) রূপ নেয়,

$$\lambda_1 x'^2 + 2f_1 y' + d = 0 \tag{14.6.6}$$

খ) 1) $f_1 \neq 0$,

মূলবিন্দুকে $\left(0, -\frac{d}{2f_1}\right)$ তে সরালে (14.6.6) রূপ নেয়,

$\lambda_1 x'^2 + 2f_1 y' = 0.$

এটি একটি অধিবৃত্তকে চিহ্নিত করে।

খ) 2) $f_1 = 0$ সমীকরণকে উপস্থাপনা করে,

সমাপতিত রেখাদ্বয় যদি $d = 0$,

সমান্তরাল রেখাদ্বয় যদি $\lambda_1 d < 0$,

অবাস্তব রেখাদ্বয় যদি $\lambda_1\ d > 0$

উদাহরণ 14.6.1 : লম্ব ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে

$7x^2 - 2xy + 7y^2 + 6x + 6y - 1 = 0$ কে

একটি স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করুন ও কণিকের প্রকৃতি নির্ণয় করুন :

ধরি $X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $b = (6,6)$

সমীকরণটি রূপ নেয়,

$$X^T A X + b X = 1$$

A এর আইগেন মান নির্ণয়কারী সমীকরণ হল,

$$(\lambda - 7)^2 - 1 = 0$$

অথবা $\lambda^2 - 14\lambda + 48 = 0$

অতএব $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$.

$\lambda_1 = 8$ এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর নির্ণয়কারী সমীকরণদ্বয়,

$7u_1 - v_1 = 8u_1$

$-u_1 + 7v_1 = 8v_1$

অতএব $u_1 = -v_1$,

$\lambda_1 = 8$ এর অনুষঙ্গী একক আইগেন ভেক্টর হল, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর নির্ণয়কারী সমীকরণদ্বয় :

$7u_2 - v_2 = 6u_2$

$-u_2 + 7v_2 = 6v_2$

অতএব $u_2 = v_2$

$\lambda_2 = 6$ এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর হল $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ধরা যাক $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, অতএর $\underline{P}$ একটি

লম্ব ম্যাট্রিক্স। X থেকে X′ -এ রূপান্তর করা হল,

$$X = PX', \ X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

প্রদত্ত সমীকরণটি রূপান্তরিত হয়,

$$\frac{1}{2}X'^{T}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}X' + (6,6)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X' = 1$$

বা, $8x'^2 + 6y'^2 + 6\sqrt{2}y' = 1$

বা, $8x'^2 + 6\left(y'^2 + 2.\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{2}\right) = 4$

বা, $8x'^2 + 6\left(y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4$

$x'' = x'$ এবং $y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{2}}$ বসিয়ে

$8x''^2 + 6y''^2 = 4$

বা, $2x''^2 + \frac{3}{2}y''^2 = 1$

উপরের সমীকরণটি প্রদত্ত সমীকরণের একটি স্বভাবী আকার এবং এটি একটি উপবৃত্ত।

উদাহরণ 14.6.2 : $4x^2-4xy+y^2-12x+6y+9 = 0$

ধরা যাক $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \ b = (-12, 6)$

প্রদত্ত সমীকরণকে প্রকাশ করা যায়, $X^T AX + bX + 9 = 0$

A এর আইগেন মান নির্ণয়কারী সমীকরণ হল :

$(4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$

অথবা, $\lambda^2 - 5\lambda = 0$

সুতরাং, $\lambda = 0$ অথবা $\lambda = 5$.

$\lambda = 0$ এর অনুষঙ্গী সমীকরণযুগল হল,

$4u_1 - 2v_1 = 0$

$-2u_1 + v_1 = 0$

অতএব $v_1 = 2u_1$

$\lambda = 0$ এর অনুষঙ্গী একক আইগেন ভেক্টর হল $= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\lambda = 5$ এর অনুষঙ্গী সমীকরণযুগল হল,

$4u_2 - 2v_2 = 5u_2$

$-2u_2 + v_2 = 5v_2$

অতএব $u_2 = -2v_2$

$\lambda = 5$ এর অনুষঙ্গী একক আইগেন ভেক্টর হল $= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স P হল $= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}$

$$P^TAP = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}$$

ধরা যাক $X' = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} x = PX'$ বসিয়ে,

$$X' = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}X' + (-12, 6)PX' + 9 = 0$$

অথবা, $5y'^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}y' + 9 = 0$

অথবা, $5\left(y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9 = 9.$

অথবা, $\left(y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0$, একটি সমাপতিত রেখাদ্বয়।

14.7 লম্ব ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে ত্রিচল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের স্বভাবী আকার নির্ণয়

x, y ও z এর সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ হল :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \qquad (14.7.1)$$

ধরা যাক $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ $\tilde{b} = 2\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

তাহলে (14.7.1) কে লেখা যায়

$$X^T AX + b^T X + dI_1 = 0 \qquad (14.7.2)$$

যেহেতু A প্রতিসম, একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে যাতে করে

$P^T AP$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স হয়।

ধরা যাক $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, A এর আইগেন মানসমূহ।

অতএব $X = PX'$ এই লম্ব রূপান্তরের সাহায্যে (14.7.2) এর পরিবর্তিত আকার হয়,

$X'^T DX' + b^T PX' + dI_1 = 0$,

অথবা, $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2u_1 x' + 2v_1 y' + 2w_1 z' + d = 0 \qquad (14.7.3)$

সমীকরণটির সম্ভাব্য ধরনগুলি এইরূপ :

(ক) A এর ক্রমিক পদ = 3

এক্ষেত্রে $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ সবকটিই অশূন্য। মূলবিন্দুকে $\left(-u_1/\lambda_1, -v_1/\lambda_2, -w_1/\lambda_3\right)$ তে স্থানান্তরিত করা হল।

তখন (14.7.3) এর পরিবর্তিত রূপ হয় :

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + d_1 = 0 \tag{14.7.4}$$

সমীকরণটি একটি শঙ্কু হয় যখন $d_1 = 0$

আর একটি সকেন্দ্র দ্বিঘাত কণিক হয় যখন $d_1 \neq 0$

(খ) A এর ক্রমিক পদ = 2

এক্ষেত্রে $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ এর যে কোনও একটি শূন্য। ধরা যাক $\lambda_1 = 0$,

মূলবিন্দুকে $\left(-u_1/\lambda_1, -v_1/\lambda_1, 0\right)$– তে স্থানান্তরিত করা হল।

সুতরাং (14.7.3) এর পরিবর্তিত রূপ হয়,

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2w_1 z'' + d_1 = 0 \tag{14.7.5}$$

(খ) 1) $w_1 \neq 0$,

মূলবিন্দুকে $\left(0, 0 - d_1/(2w_1)\right)$ স্থানান্তরিত করা হলে

এর পরিবর্তিত রূপ হয়, $\lambda_1 x'''^2 + \lambda_2 y'''^2 + 2w_1 z''' = 0$. (14.7.6)

(14.7.6) একটি অধিবৃত্তকে সূচিত করে।

(খ 2) $w_1 = 0$, (14.7.5) সমতলযুগল (বাস্তব বা কল্পিত) সূচিত করে যদি $d_1 = 0$ হয়। আর $d_1 = 0$ যদি না হয়, তাহলে (14.7.5) পরাবৃত্তীয় বেলনকে চিহ্নিত করে।

(গ) A এর ক্রমিক পদ = 1.

এইক্ষেত্রে $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ এর যে কোনও দুটি শূন্য। ধরা যাক $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

মূলবিন্দুকে $\left(-{u_1}/{\lambda_1},0,0\right)$ তে স্থানান্তরিত করা হল, (14.7.3)-এর

আকৃতি এইরূপ হয় : $\lambda_1 x'''^2 + zv_1 y''' + 2w_1 z''' + 2w_1 z''' + d = 0$ (14.7.7)

(গ 1) v_1 এবং w_1 অন্তত একটি শূন্য নয়; ধরা যাক $v_1 \neq 0$. মূলবিন্দুকে $(0,-d_1(2v_1),0)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হল। (14.7.7) নতুন আকার হয়, $\lambda_1 x'''^2 + 2v_1 y''' + 2w_1 z''' = 0$ (14.7.8)

লম্ব রূপান্তরের P এর সাহায্যে

$$\text{যখন} \quad X = PX,\ p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{v_1}{r} & -\dfrac{w_1}{r} \\ 0 & \dfrac{w_1}{r} & \dfrac{v_1}{r} \end{pmatrix},\ r = \sqrt{v_1^2 + w_1^2}$$

(14.7.8) রূপান্তরিত হয়,

$\lambda_1 x^2 + 2ry^2 = 0$, যা একটি অধিবৃত্তীয় বেলন।

(গ 2) $v_1 = w_1 = 0$, তখন উপরের সমীকরণটি

সমাপতিত সমতলদ্বয় সূচিত করে যদি $d_1 = 0$

এবং সমান্তরাল সমতলদ্বয় সূচিত করে যদি $d_1 \neq 0$

উদাহরণ 14.7.1 : প্রদত্ত সমীকরণকে একটি স্বভাবী আকারে প্রকাশ করুন :

$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2zx = 1$

এবং দ্বিঘাত কণিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

ধরা যাক $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ এবং $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটিকে লেখা যায় নিম্নরূপ;

$$X^T AX = 1$$

A এর আইগেন মান নির্ণয়কারী সমীকরণ হল,

$$(\lambda-2)^2(\lambda-3)-(\lambda-3)=0$$

অতএব $\quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3.$

$\lambda_1 = 1$ এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর নির্ণয়কারী সমীকরণ তিনটি হল :

$$\begin{aligned}
&2u_1 + w_1 = u_1\\
&3v_1 = v_1\\
&u_1 + 2w_1 = w_1\\
&u_1 = w_1,\ v_1 = 0.
\end{aligned}$$

একক আইগেন ভেক্টর হল : $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর নির্ণয়কারী সমীকরণ তিনটি হল :

$$\begin{aligned}
&-u_2 + w_2 = 0\\
&u_2 - w_2 = 0
\end{aligned}$$

অর্থাৎ $\begin{cases} u_2 = w_2, \\ v_2 \qquad \text{যদৃচ্ছ} \end{cases}$

অতএব আমাদের এমন দুটি আইগেন ভেক্টর গ্রহণ করতে হবে যাতে ওপরের শর্তটি সিদ্ধ হয়, ভেক্টরদুটি পরস্পর লম্ব ও $\begin{pmatrix}u_1\\v_1\\w_1\end{pmatrix}$ এর ওপরেও লম্ব।

একক ভেক্টরদুটি এরূপ নেওয়া হল : $\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

লক্ষণীয় এই ভেক্টর দুটির মনোনয়ন কিন্তু একাধিক হতে পারে।

ধরা যাক, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

অতএব P একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স।

$X = PX'$ বসালে দ্বিঘাত আকৃতিতে এরূপ হয়,

$$x'^2 + 3y'^2 + 3z'^2$$

এবং দ্বিঘাত সমীকরণটি হয়,

$$x'^2 + 3y'^2 + 3z'^2 = 1,$$

একটি উপবৃত্ত সূচিত হয়।

উদাহরণ 14.7.2 : $2x^2 + 20y^2 + 18z^2 - 12yz + 12xy + 22x + 6y - 2z - 2 = 0$ সমীকরণটিকে একটি স্বভাবী আকারে পরিবর্তন করুন এবং এর দ্বারা কি ধরনের বক্রতল সূচিত হচ্ছে তা নির্ণয় করুন।

ধরা যাক $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{pmatrix}$, $b = (22, 6, -2)$

সমীকরণটিকে লেখা যায়,

$$X^T AX + bX = 2,$$

A এর আইগেন মান নির্ণয়কারী সমীকরণ তিনটি হল,

$\lambda^3 - 40\lambda^2 + 364\lambda = 0$

অর্থাৎ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 14, \lambda_3 = 26.$

$\lambda_1 = 0$ এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর $\begin{aligned} 2u_1 + 6v_1 &= 0 \\ 6u_1 + 20v_1 &= 6w_1 \\ -6v_1 + 18w_1 &= 0 \end{aligned}$

$\lambda_1 = 0$ এর অনুষঙ্গী একক আইগেন ভেক্টর হল $\frac{1}{\sqrt{91}}\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 14$ এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর হল :

$$2u_2 + 6v_2 = 14u_2$$
$$6u_2 + 20v_2 - 6w_2 = 14v_2$$
$$-6v_2 + 18w_2 = 14w_2$$

অর্থাৎ, $u_2 = \frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{3}w_2$

সংশ্লিষ্ট একক আইগেন ভেক্টর হল

$$\frac{1}{\sqrt{14u_2}}\begin{pmatrix} u_2 \\ 2u_2 \\ 3u_2 \end{pmatrix} \text{ অথবা } \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 26$ এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর হল :

$$2u_3 + 6v_3 = 26u_3$$

$$6u_3 + 20v_3 - 6w_3 = 26v_3$$

$$-6v_3 + 18w_3 = 26w_3.$$

অতএব $v_3 = 4u_3$, $w_3 = -3u_3$

অতএব, সংশ্লিষ্ট, একক আইগেন ভেক্টর হল : $\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

অর্থাৎ, $P = \begin{pmatrix} -9/\sqrt{91} & 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{26} \\ 3/\sqrt{91} & 2/\sqrt{14} & 4/\sqrt{26} \\ 1/\sqrt{91} & 3/\sqrt{14} & -3/\sqrt{26} \end{pmatrix}$, একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স,

$$X = PX', \ X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ নিলে,}$$

প্রদত্ত সমীকরণটির চেহারা হয়,

$$0.x'^2 + 14y'^2 + 26z'^2 - 2\sqrt{91}x' + 2\sqrt{14}y' + 2\sqrt{26}z' = 2,$$

$x'' = \sqrt{91}x' - 2,$ $\qquad y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{14}}, z'' = z' + \frac{1}{\sqrt{26}}$ বসিয়ে পাই,

$$14y''^2 + 26z''^2 - 2x'' = 4$$

অথবা $7y''^2 + 13z''^2 - x'' = 0 -$ এটি একটি উপবৃত্তীয় অধিবৃত্তক সূচিত করে।

14.8 সারাংশ

এই এককে রৈখিক বীজগণিতের জ্যামিতিক প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্সকে কি করে কর্নম্যাট্রিক্সে প্রকাশ করা যায় তা পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে। দ্বিঘাত সমীকরণের অপেক্ষককে রূপান্তরের সাহায্যে একটি স্বভাবী দ্বিঘাত আকৃতিতে পরিবর্তিত করা হয়েছে। সেইখান থেকে প্রদত্ত কণিক বা কোয়াড্রিকের প্রকৃতি নির্ণয় করা যায়।

14.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

14.9.1. লম্ব রূপান্তরের সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগোষ্ঠীকে অনুষঙ্গী স্বভাবী আকারে পরিণত করুন ও যথাক্রমে কণিকগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করুন :

(a) $2x^2 - 6xy + 10y^2 = 1$ $\qquad$ (b) $7x^2 + 6xy - y^2 = 1$

(c) $4x^2 - 4xy + 4y^2 + x + 2y + 1 = 0$ $\qquad$ (d) $7x^2 - 2xy + 7y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$

14.9.2. লম্ব রূপান্তরের সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগোষ্ঠীকে অনুষঙ্গী স্বভাবী আকারে পরিণত করুন ও যথাক্রমে কোয়াড্রিকগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করুন :

(a) $2xy + 2zx + 2yz = 1$ $\qquad$ (b) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1$

(c) $2x^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2zx = 9$ $\qquad$ (d) $xy = 4$

(e) $2x^2+5y^2+10z^2+4xy+12yz+6zx=1$

(f) $x^2-2y^2+2z^2+3zx-xy-2x+7y-5z-3=0$

14.10 উত্তরমালা

14.10.1. (a) $11x'^2+y'^2=1$, উপবৃত্ত। (b) $8y^2-2x^2=1$, পরাবৃত্ত।

(c) $x^2+\frac{1}{\sqrt{5}}y=0$, অধিবৃত্ত। (d) $4x^2+3y^2=0$, বিন্দু উপবৃত্ত।

14.10.2. (a) $x^2-y^2+z^2=1$, ঘূর্ণনজাত পরাবৃত্তক।

(b) $x^2+y^2+4z^2=1$, বৃত্তীয় উপবৃত্তক।

(c) $2x^2+2y^2+4z^2=4$, বৃত্তীয় উপবৃত্তক।

(d) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2=4$, পরাবৃত্ত।

(e) $x^2+y^2+5z^2=1$, উপবৃত্তক

(f) $5y^2-5z^2=24$, পরাবৃত্তক।

14.10 তথ্যসূত্র

1. G. Hadley, Linear Algebra – Addison Wesley Publishing Company. INC (1977)
2. S Lipschutz, Linear Algebra, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill Book Company, 1968.
3. H.G. Campbell, Linear Algebra with Applications, Appleton -Century- Crofts (1971)
4. S. K. Mapa – Higher Algebra, Asoke Prakasan, Kolkata.
5. P. C. Shields – Linear Algebra, Addison-Wesley, 1964.