প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমত কোনো বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে— যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয় সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধীতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ-কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থীও এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশকিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

দ্বিতীয় পুনর্মুদ্রণ ঃ ফেব্রুয়ারি, 2013

ভারত সরকারের দূরশিক্ষা পর্ষদের বিধি অনুযায়ী এবং অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Council, Government of India.

পরিচিতি

বিষয় : গণিতবিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম : পর্যায় : EMT 09 : 1 & 2

পর্যায়

1	**রচনা**	**সম্পাদনা**
একক 1-10	অধ্যাপক অমিতাভ চক্রবর্তী	ড. রণজিৎ ধর

পর্যায়

2	**রচনা**	**সম্পাদনা**
একক 11-18	ড. শর্বাণী চক্রবর্তী	ড. রণজিৎ ধর

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EMT – 09

বৈশ্লেষণিক গতিবিদ্যা

পর্যায়

1

কণা গতিবিদ্যা

পর্যায়
2
দৃঢ়গতিবিদ্যা

একক 1 ❑ সৃতিবিদ্যা ও গতিবিদ্যা (Kinematics and Kinetics)

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা

1নং এবং 2নং দুটি এককে আমার বস্তুর ভর (mass) এবং তার গতিসংক্রান্ত জ্যামিতিক আলোচনা করব। পরে বস্তুর সরণ (displacement), দ্রুতি (Speed) বেগ (Velocity) ত্বরণ (acceleration), আপেক্ষিক বেগ (relative velocity), গড় বেগ (average velocity) ইত্যাদি নিয়ে আলোচনা করব এবং এই সব ক্ষেত্রে ভেক্টরের প্রয়োগ দেখান হয়েছে।

1.2 উদ্দেশ্য

প্রথম এবং দ্বিতীয় এককদ্বয় পাঠ করলে আপনি গতিবিদ্যায় সরলরেখায় বস্তুর গতিপথে তার সরণ, বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় করতে পারবেন এবং ভেক্টরের সাহায্যে তাদের ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

1.3 সৃতি বিদ্যা (Kinematics)

গতিবিজ্ঞান বলবিদ্যার একটি শাখা বিশেষ, আমরা জানি যে বিশ্বব্রহ্মাণ্ড গতিশীল ; সূর্য, গ্রহ, পৃথিবী হতে আরম্ভ করে অতিক্ষুদ্র অণু, পরমাণু (ইলেকট্রন ইত্যাদি) সকলেই স্ব স্ব গতিতে আবর্তন করে।

আমরা এই পাঠক্রমে কেবলমাত্র কণার গতিসংক্রান্ত নিয়মাবলী এবং ঐ বিষয়ে যে সকল সমস্যা উদ্ভূত হতে পারে তা নিয়ে আলোচনা করব।

কণাকে অতিক্ষুদ্র বস্তু হিসাবে আমরা চিহ্নিত করব ; এর কোন মাত্রা নেই কিন্তু ভর (m) আছে। বস্তুর ভরের কোনও স্বাধীন সংজ্ঞা নেই ; কেবলমাত্র দুটি বস্তুর ভরের তুলনা করা যেতে পারে।

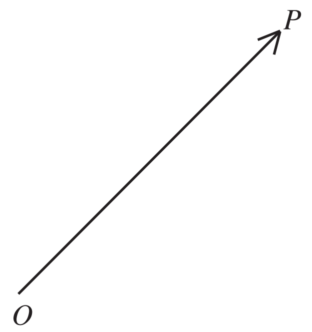
প্রথমে আমরা গতিসংক্রান্ত কেবলমাত্র জ্যামিতিক আলোচনা করব ; একে সৃতি বিদ্যা (Kinematics) বলা হয়। পরে আমরা বিভিন্ন বলের প্রভাবে কণায় গতি নিয়ে আলোচনা করব ; তাকে গতিবিদ্যা (Kinetics) বলা হয়।

1.4 দ্রুতি এবং বেগ

কোনও লোক যদি একঘণ্টায় 2 কিলোমিটার অতিক্রম করে, আমরা বলব যে লোকটির দ্রুতি (Speed) ঘণ্টায় 2 কিলোমিটার, লোকটি কোনদিকে গিয়েছিল আমরা চিন্তা করব না কিন্তু যদি আমরা জানি লোকটি উত্তরদিকে একঘণ্টায় দুই কিলোমিটার অতিক্রম করেছিল আমরা বলব যে তার বেগ (Velocity) উত্তরদিকে ঘণ্টায় দুই কিলোমিটার।

স্কেলার এবং ভেক্টর ঃ যে সকল রাশির শুধু পরিমাণ (magnitude) থাকে তাকে স্কেলার রাশি (Scalar) বলা হয় ; অন্যদিকে যে সকল রাশির পরিমাণ এবং নির্দিষ্ট দিশা (direction) উভয়ই আছে তাদেরকে ভেক্টর রাশি (vector) বলা হয়।

● উপরের দৃষ্টান্ত দ্বারা দেখা যাচ্ছে যে দ্রুতি একটি স্কেলার রাশি কিন্তু বেগ একটি ভেক্টর রাশি। বস্তুতঃ বলবিদ্যায় ভেক্টরের ব্যবহারের গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা আছে। আমাদের প্রয়োজনানুসারে আমরা এই পাঠক্রমে ভেক্টর বীজগণিত এবং ভেক্টর কলনের সংক্ষিপ্ত আলোচনা করব। ভেক্টর সম্বন্ধে বিস্তৃত আলোচনার জন্য অন্য পুস্তকাদি পাঠককে পড়তে হবে।



চিত্রে OP সরলরেখার দ্বারা ভেক্টরকে চিহ্নিত করা যায়। OP খণ্ডিত সরলরেখা একটি ভেক্টর। ধরা যাক

$\vec{a}$; এর মান OP রেখাংশের দৈর্ঘ্যের মান এবং দিশা O বিন্দু থেকে P বিন্দুর দিকে হবে। আমরা এইরূপে লিখি $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$।

সাধারণতঃ স্কেলার হতে প্রভেদ বোঝাতে ভেক্টরের ওপর তীর চিহ্ন দেওয়া হয়। $\vec{a}$ ভেক্টরের মান OP-এর দৈর্ঘ্যের সমান এবং $\overrightarrow{OP}$ অথবা $\vec{a}$ ভেক্টরের মানকে $|\overrightarrow{OP}| = |\vec{a}|$ রূপে চিহ্নিত করা হয়। যদি m একটি স্কেলার সংখ্যা হয় তা হলে $m\vec{a}$ একটি ভেক্টর হবে ; $m\vec{a}$ ভেক্টর $\vec{a}$ কে m (স্কেলার) দ্বারা গুণ করা হয় এবং লব্ধ গুণফল $m\vec{a}$ এবং $\vec{a}$ ভেক্টরদ্বয়ের দিশা অভিন্ন থাকবে এবং $m\vec{a}$ ভেক্টরের মান $m|\vec{a}|$ হবে। এখন $m = \dfrac{1}{|\vec{a}|}$ হলে দেখা যাবে যে $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ একটি ভেক্টর যার মান এক একক এবং দিশা $\vec{a}$-র সঙ্গে অভিন্ন। $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুইটি ভেক্টরের মান এবং দিশা অভিন্ন হলে আমরা লিখি $\vec{a} = \vec{b}$; $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দ্বারা চিহ্নিত খণ্ডিত সরলরেখাদ্বয় হয় সমান্তরাল হবে নতুবা একই সরলরেখাতে থাকবে।

$\vec{a}$ ভেক্টরটির মান $\vec{a}$ ভেক্টরের সমান কিন্তু তাদের দিশা সম্পূর্ণ বিপরীতমুখী হবে। যেমন $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ হলে $\overrightarrow{PO} = -\vec{a}$ হবে।

ভেক্টরসমূহের যোগফল ঃ

$\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি ভেক্টরের যোগফল $\vec{a} + \vec{b}$ রূপে চিহ্নিত হয়ে থাকে ; $\vec{a} - \vec{b}$ দ্বারা $\vec{a}$ এবং $-\vec{b}$-এর যোগফল বুঝায়।

লক্ষ্য কর যে, $m\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = m\vec{a} + m\vec{b}$

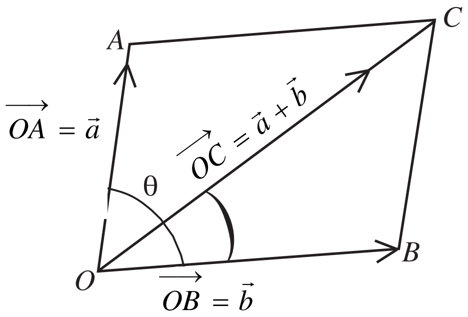
$m\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = m\vec{a} - m\vec{b}$ (এখানে m একটি স্কেলার সংখ্যা)

$\vec{a} - \vec{a} = O$ হবে এবং 0-কে শূন্য ভেক্টর বলা হয়,

লক্ষ্য কর যে, $\vec{a} + O = O + \vec{a} = \vec{a}$ হবে।

দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিতে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর যোগফল $\vec{a} + \vec{b}$-এর নির্ণয়।

$\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর যদি $OACB$ সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহুদ্বয় $\overrightarrow{OA}\left(\vec{a}\right)$ এবং $\overrightarrow{OB}\left(\vec{b}\right)$ রূপে প্রদর্শিত হয় তা তাদের যোগফল $\vec{a} + \vec{b}$ সামান্তরিকটির কর্ণ $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা চিহ্নিত করা যায়।



সামান্তরিকের ধর্ম অনুযায়ী OA এবং বিপরীত বাহু BC-এর মান সমান এবং তাদের দিশাও অভিন্ন ;

এজন্য $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$

অতএব, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

অর্থাৎ $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$ .... (i)

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যেতে পারে যে— $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ .... (ii)

(i)-কে ভেক্টরদ্বয়ে যোগফলের বিনিময় নিয়ম এবং (ii)-কে তিনটি ভেক্টরের যোগফলের সংযোগ নিয়ম বলা হয়।

উপরে আলোচিত সামান্তরিকটির বাহুদ্বয় OA এবং OB-এর মধ্যস্থ কোণ যদি θ হয় এবং কর্ণ OC এবং বাহু OB -এর মধ্যস্থ কোণ যদি $\propto$ হয় তা হলে দেখান যায় যে, $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$

এবং $\tan \alpha = \dfrac{a \sin \theta}{b + a \cos \theta}$

$\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর মান যথাক্রমে a এবং b অর্থাৎ $|\vec{a}| = a$ এবং $|\vec{b}| = b$;

সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী কোনও কণার O বিন্দুতে যদি দুটি বেগ $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা চিহ্নিত হয় তা হলে ঐ দুটি বেগের যোগফল $\overrightarrow{OC}$ হবে।

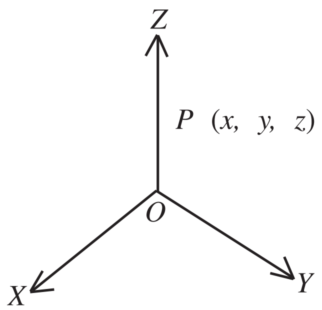
স্কেলার এবং ভেক্টর গুণ ঃ

$\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণ সাধারণতঃ $\vec{a} . \vec{b}$ রূপে চিহ্নিত হয় ; এটি একটি স্কেলার রাশি এবং তার মান $|a|\,|b| \cos \theta$ যদি ভেক্টরদ্বয় $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ মধ্যবর্তী কোণ θ হয়। অনেক সময় তাকে ভেক্টরদ্বয়ের ডট্ গুণফলও বলা হয়ে থাকে।

সহজেই দেখা যেতে পারে যে $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$; এবং $\vec{a}.\vec{b} = 0$ যখন $\theta = \frac{\pi}{2}$ অথবা $\frac{3\pi}{2}$ অর্থাৎ ভেক্টর দুটির দিশাদ্বয় সমকোণে অবস্থিত। $\vec{a} = \vec{b}$ হলে আমরা $\vec{a}.\vec{a}$-কে a^2 বলে চিহ্নিত করে থাকি। $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল $\vec{a} \times \vec{b}$ রূপে চিহ্নিত হয়ে থাকে ; এটি একটি ভেক্টর যার মান হবে $|a||b|\sin\theta$ (যখন $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর মধ্যবর্ত্তী কোণ θ হয়) এবং $\vec{a} \times \vec{b}$-এর দিশা হবে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ যে সমতলে অবস্থিত তার উপর লম্ব। ওই লম্বের দুটি দিশা আছে, কিন্তু $\vec{a}$ ভেক্টর হতে $\vec{b}$ ভেক্টরে যেতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতদিকে ঘুরলে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ অবস্থিত সমতলটির যে লম্ব বরাবর একটি ডানহাতি স্ক্রু-এর সরণ হয় তার দিশাই $\vec{a} \times \vec{b}$-এর দিশা হবে। সহজেই দেখা যাচ্ছে $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ অর্থাৎ $\vec{a} \times \vec{b}$ এবং $\vec{b} \times \vec{a}$-এর মান $|a||b|\sin\theta$ একই হলেও তাদের দিশা সম্পূর্ণ বিপরীতমুখী ; দেখা যাচ্ছে যে $\theta = 0$ অথবা π হলে $\sin\theta = 0$; $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ অর্থাৎ শূন্য ভেক্টর। এস্থলে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-র দিশা অভিন্ন বা বিপরীতমুখী হয়। তারা একই সরলরেখার খণ্ডাংশ অথবা সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের খণ্ডাংশ।

1.5 কার্তেজীয় স্থানাংক দ্বারা ভেক্টরের ব্যবহার

মনে করা যাক O মূলবিন্দুগামী তিনটি দক্ষিণহস্তীয় (ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে) পরস্পর লম্ব তিনটি যথাক্রমে ox, oy, oz দ্বারা সূচিত এবং উহারা যথাক্রমে x, y, z অক্ষরূপে চিহ্নিত হল।



সাধারণতঃ i, j, k যথাক্রমে ox, oy, oz-এর দিকে একক ভেক্টর বলা হয়। ঐ অক্ষগুলির সাপেক্ষে $P(x, y, z)$ একটি যে কোনো বিন্দু হলে সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরকে $ix + jy + kz$ রূপে প্রকাশ করা যেতে পারে। $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = ix + jy + kz$-কে P বিন্দুর অবস্থিতি ভেক্টর (Position Vector) বলা হয়।

পূর্বে আলোচিত ভেক্টরের ধর্ম অনুযায়ী,

যেহেতু, i, j, k পরস্পর সমকোণে অবস্থিত এবং তাদের পরিমাণ এক (unity), এজন্য $i.i = i^2 = 1$; $j.j = j^2 = 1$; $k.k = k^2 = 1$; $j.i = i.j = 0$, $j.k = kj = 0$ এবং $k.i = i.k = 0$;

$i \times j = -j \times i = k$; $j \times k = -k \times j = i$

এবং $k \times i = -i \times k = j$;

আবার $i \times j = j \times j = k \times k = 0$.

নির্দিষ্ট দিকে ভেক্টরের উপাংশ (Component) ঃ

ধরা যাক $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ একটি ভেক্টর ; কোনও নির্দিষ্ট দিকে যেমন $\overrightarrow{PQ}$ দিকে তার উপাংশ হবে $\vec{a}$ $\cos\theta$ যখন θ, $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{PQ}$-এর মধ্যবর্তী কোণ। যখন $\theta = \frac{\pi}{2}$ হয় অর্থাৎ $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{PQ}$ পরস্পর সমকোণে থাকে তা হলে ওই উপাংশ শূন্য ভেক্টর হবে।

1.6 ভেক্টর কলন

$\vec{A}$ কোনও ভেক্টর t-র উপর নির্ভরশীল হলে $\frac{d\vec{A}}{dt}$ (যদি তার অস্তিত্ব থাকে), $\vec{A}$ ভেক্টরের সময় সাপেক্ষে ; অবকল (vector derivative) সহগ।

$\vec{A} = ix + jy + kz$; (i, j, k যথাক্রমে x, y, z দিকে একক ভেক্টর) হলে—

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} \text{ হবে ;}$$

অনুরূপভাবে, $\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = i\frac{d^2x}{dt^2} + j\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{d^2z}{dt^2}$ ইত্যাদি।

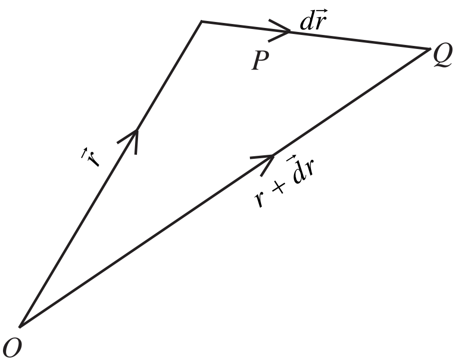
(যেখানে ধরা হলে i, j, k ভেক্টরদ্বয় t-এর উপর নির্ভরশীল নয়)।

ভেক্টর সমাকলন ঃ ধরা যাক $\vec{A}(u)$ এবং $\vec{B}(u)$ যারা উভয়ই u স্কেলারের উপর নির্ভরশীল, এবং $\frac{d\vec{A}}{du} = \vec{B}$, তখন $\vec{A} = \int \vec{B}(u)\,du$ রূপে প্রকাশ করা যায় ; অর্থাৎ $\vec{A}$, $\vec{B}$ ভেক্টরের u সাপেক্ষে সমাকল।

এখানে $\vec{B}(u) = iB_1(u) + jB_2(u) + kB_3(u)$ হলে $\vec{A}(u) = i\int B_1(u)du + j\int B_2(u)du + k\int B_3(u)du$ হবে।

1.7 সরণ, বেগ ও ত্বরণ (displacement, velocity, acceleration)

O-কে মূলবিন্দু ধরে কোনও গতিশীল কণা যদি P বিন্দু হতে Q বিন্দুতে ($\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = \vec{r} + d\vec{r}$) অতিক্ষুদ্র সময়ে যায়।



তা হলে $\overrightarrow{PQ} = d\vec{r}$-কে ঐ গতিশীল কণাটির সরণ বলা হয়ে থাকে।

ধরা যাক্ যে, Δt সময়ে কণাটি P বিন্দু হতে Q বিন্দুতে যায়।

এখন $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{(\vec{r} + \overrightarrow{\Delta r}) - \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$-কে কণাটির বেগ বলা হয়ে থাকে ; এটি সময় সাপেক্ষে কণাটির সরণের পরিবর্তনে হার।

সাধারণতঃ $\vec{V}$ বা $\vec{u}$ দ্বারা বেগ সূচিত হয়।

বেগ $\vec{V}$ এর সময় সাপেক্ষে পরিবর্তনের হার $\dfrac{d\vec{V}}{dt}$ ত্বরণ বলা হয়ে থাকে।

কার্তেজীয় স্থানাংকে, $\vec{r} = i \,.\, x(t) + j \,.\, y(t)$ ধরলে

বেগ $\vec{V} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ এবং ত্বরণ $\frac{d\vec{V}}{dt} = i\frac{d^2x}{dt^2} + j\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

কোনও নির্দিষ্ট সরলরেখায় ধরা যাক্ x অক্ষের দিকে গতিশীল একটি কণার বেগ $\vec{V}$ হলে, তার ত্বরণ $\frac{d\vec{V}}{dt}$।

অথবা, $\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = V\frac{dV}{dx}$ রূপে প্রকাশ করা যায়।

অধুনা প্রচলিত সি. জি. এস্ ($C.\ G.\ S$) পদ্ধতিতে সময়ের একক এক সেকেন্ড (second) এবং দৈর্ঘ্যের একক এক সেন্টিমিটার (cm) ; অনেক সময় আমরা এম. কে. এস্ ($M.K.S.$) পদ্ধতি ব্যবহার করে থাকি ; তখন সময়ের একক এক সেকেন্ড এবং দৈর্ঘ্যের একক এক মিটার (m) ধরা হয়।

কাজেই সি.জি.এস্ পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের বা সরণের একক 1 cm (এক সেন্টিমিটার)

বেগের একক 1 cm/sec

এবং ত্বরণের একক 1 cm/sec^2

আবার এম্. কে. এস্ পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের বা সরণের একক 1 m (এক মিটার) বেগের একক 1 m/sec. এবং ত্বরণের একক 1m/sec^2.

আপেক্ষিক বেগ (Relative Velocity) ঃ

ধরা যাক্ যে A বিন্দুর বেগ $\vec{V_A}$ এবং B বিন্দুর বেগ $\vec{V_B}$, তখন A বিন্দুর সাপেক্ষে B বিন্দুর আপেক্ষিক বেগ $\vec{V_{BA}}$ ভেক্টর রূপে সূচিত হয় এবং $\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{V_{BA}}$ অর্থাৎ $\vec{V_{BA}} = \vec{V_B} - \vec{V_A}$ হবে।

মন্দন (Retardation) ঃ

কোনও চলমান কণার ত্বরণের বিপরীতকে ঐ কণার মন্দন বলা হয়ে থাকে।

গড় দ্রুতি (Average Speed) ঃ

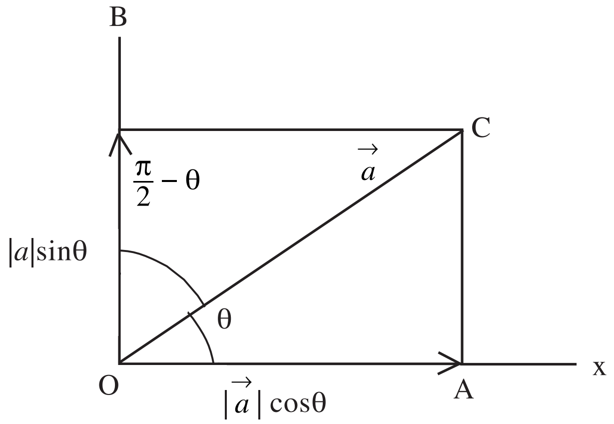
যদি কোনও কণা সমদ্রুতিতে a মিটার পথ t_1 সেকেন্ডে অতিক্রম করে এবং পরে সমদ্রুতিতে b মিটার পথ t_2 সেকেন্ড অতিক্রম করে তা হলে কণাটির গড় দ্রুতি হবে $\frac{a+b}{t_1+t_2}$ মিটার/সেকেন্ড।

গড় বেগ (Average Velocity) ঃ

যদি কোনও কণা t সেকেন্ড কোনও নির্দিষ্ট দিকে a মিটার পথ অক্রিম করে তা হলে ঐ দিকে কণাটির গড়বেগ হবে $\frac{a}{t}$ মিটার/সেকেন্ড।

1.8 উপাংশ এবং লব্ধি

পূর্বেই আমরা বলেছি যে, কোনও নির্দিষ্ট দিকে কোনও ভেক্টরের উপাংশ ঐ দিকেই একটি ভেক্টর যার মান ঐ ভেক্টরের মান এবং cos θ এক গুণফল, যেখানে θ ঐ ভেক্টরের দিশা এবং ঐ দিক্‌টির মধ্যবর্ত্তী কোণ।



এখন যদি কোনও ভেক্টর $\vec{a}$ এবং x অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ θ হয় তা হলে $\vec{a}$ এবং y অক্ষের মধ্যবর্ত্তী কোণ $\frac{\pi}{2}-\theta$; অতএব y অক্ষের দিকে $\vec{a}$ *vector*-এর উপাংশ হবে $\vec{a}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\vec{a}\sin\theta$.

সন্নিহিত চিত্রে $OA = |a| \cos 0$ $OB = |a| \sin \theta$ এবং কর্ণ $\overrightarrow{OC}=\vec{a}$ এবং $OC^2 = OA^2 + OB^2$।

সামান্তরিক সূত্র প্রয়োগ করে দেখান যেতে পারে যদি $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots\ldots \vec{a}_n$ ভেক্টরসমূহ এবং x অক্ষের মধ্যবর্ত্তী কোণসমূহ যদি যথাক্রমে $\theta_1, \theta_2 \ldots.. \theta_n$ হয় এবং তাদের লব্ধি $\vec{A}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots\ldots+\vec{a}_n=$ ভেক্টর এবং x অক্ষের মধ্যবর্ত্তী কোণ θ হয় তা হলে $\vec{A}\cos\theta=\vec{a}_1\cos\theta_1+\vec{a}_2\cos\theta_2+\ldots\ldots+\vec{a}_n\cos\theta_n$ হবে ;

অনুরূপভাবে $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots\ldots \vec{a}_n$ ভেক্টরসমূহ y অক্ষের মধ্যবর্ত্তী কোণসমূহ $\frac{\pi}{2} - \theta_1, \frac{\pi}{2} - \theta_2 \ldots\ldots \frac{\pi}{2} - \theta_n$ হবে এবং $\vec{A} \sin 0 = \vec{a}_1 \sin\theta_1 + \vec{a}_2 \sin\theta_2 + \ldots\ldots + \vec{a}_n \sin\theta_n$ হবে।

সহজেই দেখা যায় যে, লব্ধি, $\vec{A}$ ভেক্টরের মান $|A|$ হলে—

$$(a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos\theta_2 + \ldots + a_n \cos\theta_n)^2 + (a_1 \sin\theta_1 + a \sin\theta_2 + \ldots. + a_n \sin\theta_n)^2 = |A^2|$$

এবং যদি ঐ লব্ধি $\vec{A}$ এবং x অক্ষের মধ্যবর্ত্তী কোণ α হয় ;

তা হলে $\tan\alpha = \dfrac{a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2 + \ldots.. + a_n \sin\theta_n}{a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2 + \ldots.. + a_n \sin\theta_n}$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots\ldots \vec{a}_n$ গতি ভেক্টর অথবা ত্বরণ ভেক্টর হলে পূর্বোক্ত নিয়ম অনুযায়ী আমরা তাদের লব্ধির মান এবং দিশা নির্ণয় করতে পারি।

1.9 অনুশীলনী

উদাহরণ—1

সরলরেখায় গতিশীল কোনও কণার প্রারম্ভিক কণা u এবং সুষম ত্বরণ f হলে......

দেখাও যে, $V = u + ft$; .... (i)

$x = ut + \frac{1}{2} ft^2$ .... (ii)

এবং $V^2 = u^2 + 2fx$ .... (iii)

সমাধান ঃ

যদি কণাটির আদি সময় $t = 0$ হয় এবং ঐ সময়ে বেগ u ছিল এবং x পথ t সময়ে কণাটি অতিক্রম করে ; (আমরা ধরব প্রারম্ভিক সময় $x = 0$ ছিল)

এখানে বেগ $V = \dfrac{dx}{dt}$

এবং ত্বরণ $f = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dV}{dt}$ ধ্রুবক যেহেতু বলা হয়েছে যে কণাটি সুষম ত্বরণে চলেছে।

$$\frac{dV}{dt} = f$$

ঐ সমীকরণটি সমাকলন করে আমরা পাই $V = ft$ + ধ্রুবক রাশি

কিন্তু $t = 0$ ধরলে $V = u = f \times 0$ + ধ্রুবক রাশিটি

$\therefore$ ধ্রুবক রাশিটি u হবে।

$\therefore$ $V = u + ft$ প্রমাণিত হল

আবার $V = \dfrac{dx}{dt} = u + ft$ সমীকরণটি সমাকলন করে আমরা দেখি যে,

$x = ut + \frac{1}{2} ft^2$ + ধ্রুবক রাশি কিন্তু আদি সময়ে $t = 0$-তে কণাটির অবস্থান $x = 0$; অতএব ধ্রুবক রাশিটি শূন্য হবে অতএব $x = ut + \frac{1}{2} ft^2$

আমরা দেখেছি যে, $V = u + ft$ .... (i)

অতএব $V^2 = u^2 + 2ftu + f^2t^2$

$$= u^2 + 2f\left(ut + \frac{1}{2} ft^2\right) = u^2 + 2fx$$

যেহেতু (ii) অনুযায়ী $x = ut + \frac{1}{2} ft^2$ অন্যথায় পূর্বে উল্লিখিত নিয়মে—

$$\frac{dV}{dt} = V\frac{dV}{dx} = f \text{ (ধ্রুবক)}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}V^2\right) = f \text{ (ধ্রুবক)}$$

এজন্য x সাপেক্ষে উভয় পক্ষকে সমীকরণ করে আমরা পাই যে, $\frac{1}{2}V^2 = fx +$ ধ্রুবক রাশি।

কিন্তু পূর্বেই আমরা স্থির করেছি যে, $V = u$ (প্রারম্ভিক বেগ) যখন কণাটি অবস্থান $x = 0$ (শূন্য) ছিল ;

অতএব $\frac{1}{2}u^2 = f \times 0 +$ ধ্রুবক রাশি ;

অতএব $\frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}u^2 = fx$

অথবা, $V^2 = u^2 + 2fx$

উদাহরণ—2

$\vec{R}(t) = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t$ হলে (এখানে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ধ্রুবক ভেক্টর এবং ω একটি স্কেলার রাশি)

প্রমাণ করো যে, $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \omega^2\vec{R} = 0$

সমাধান ঃ $\vec{R}(t) = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t$ সমীকরণটি অবকলন করে আমরা পাই—

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -\omega\vec{A}\sin\omega t + \omega\vec{B}\cos\omega t$$

এবং $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -\omega^2\vec{A}\cos\omega t - \omega^2\vec{B}\sin\omega t$

অতএব $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -\omega^2\vec{R}$ অথবা $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \omega^2\vec{R} = 0$

উদাহরণ—3

সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রমের নিয়ম, $s = \frac{1}{2}Vt$ হলে (V = বেগ) দেখাও যে, কণাটি সুষম ত্বরণে চলে।

সমাধান ঃ এখানে দেওয়া আছে যে, $s = \frac{1}{2}Vt$

অতএব t সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই যে, $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{2}V + \dfrac{1}{2}\dfrac{dV}{dt}t$

কিন্তু $\dfrac{ds}{dt} = V$;

অতএব $V = \dfrac{1}{2}V + \dfrac{1}{2}\dfrac{dV}{dt}t$

অর্থাৎ $V = \dfrac{dV}{dt}t$

পুনরায় অবকলন (t সাপেক্ষে) করলে—

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d^2V}{dt^2}t + \frac{dV}{dt}$$

অতএব $\frac{d^2V}{dt^2} = 0$ অর্থাৎ ত্বরণ $\frac{dV}{dt}$ একটি ধ্রুবক।

উদাহরণ—4

সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার t সময়ে অবস্থান x হয় এবং $t = ax^2 + bx + c(a, b, c$ ধ্রুবক রাশি হলে)

দেখান যে কণাটির বেগ $\frac{1}{2ax+b}$ এবং কণাটির মন্দন (retardation) কণাটির বেগের তৃতীয় ঘাতের সমানুপাতিক।

সমাধান ঃ $t = ax^2 + bx + C$ সমীকরণকে x সাপেক্ষে অবকলন করলে পাই—

$$\frac{dt}{dx} = 2ax + b$$

অর্থাৎ $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{1}{2ax+b}$

এখন বেগ $V = \frac{1}{2ax+b}$ -কে x সাপেক্ষে অবকলন করলে—

$$\frac{dV}{dx} = \frac{-2a}{(2ax+b)^2}$$

অতএব ত্বরণ $= V\frac{dV}{dx} = -\frac{2a}{(2ax+b)^3} = -2aV^3$

অর্থাৎ কণাটির মন্দন $= 2aV^3 \propto V^3$

উদাহরণ—5

এক ব্যক্তি পদব্রজে a মিটার দূরত্ব ঘণ্টায় u মিটার দ্রুতিতে অতিক্রম করে এবং পরে ঘণ্টায় V মিটার দ্রুতিতে b মিটার অতিক্রম করে ; এই ভ্রমণে ঐ ব্যক্তিটির গড় দ্রুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ যদি ঐ ব্যক্তি t_1 সময়ে a মিটার ঘণ্টায় u মিটার দ্রুতিতে অতিক্রম করে, তা হলে $a = ut_1$;

আবার অনুরূপভাবে যদি সে t_2 সময়ে b মিটার দূরত্ব ঘণ্টায় V মিটার দ্রুতিতে অতিক্রম করে, তা হলে $b = Vt_2$

অতএব লোকটির গড় দ্রুতি $\dfrac{a+b}{t_1+t_2} = \dfrac{a+b}{\dfrac{a}{u}+\dfrac{b}{V}} = \dfrac{uV(a+b)}{aV+bu}$ মিটার প্রতিঘণ্টায়।

উদাহরণ—6

একটি কণার একসঙ্গো তিনটি বেগ u, V, w আছে তাদের এবং x অক্ষের সঙ্গো অন্তর্ভুক্ত কোণত্রয় যথাক্রমে α, β, γ.

ঐ বেগ তিনটির লব্ধির মান এবং দিশা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এই বেগ তিনটির x অক্ষের উপর উপাংশ সমূহের সমষ্টি $u \cos \alpha + V \cos \beta + w \cos \gamma$ এবং y অক্ষের উপর উপাংশের সমষ্টি—

$u \sin \alpha + V \sin \beta + w \sin \gamma$ হবে।

অতএব ঐ বেগ তিনটির লব্ধির মান হবে—

$(u \cos \alpha + V \cos \beta + w \cos \gamma)^2 + (u \sin \alpha + V \sin \beta + w \sin \gamma)^2$-এর বর্গমূলের সমান ;

এখন $(u \cos \alpha + V \cos \beta + w \cos \gamma)^2 + (u \sin \alpha + V \sin \beta + w \sin \gamma)^2$

$$= u^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + V^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + w^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)$$

$$+ 2uV(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) + 2wV(\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma)$$

$$+ 2wu(\cos\gamma \cos\alpha + \sin\gamma \sin\alpha)$$

$$= u^2 + V^2 + w^2 + 2uV \cos(\beta - \alpha) + 2Vw \cos(\gamma - \beta) + 2uw \cos(\alpha - \gamma) \ ;$$

আবার ঐ লব্ধিটি ঐ নির্দিষ্ট বেগটির সঙ্গো $\tan^{-1} \dfrac{u\sin\alpha + V\sin\beta + w\sin\gamma}{u\cos\alpha + V\cos\beta + w\cos\gamma}$ কোণ উৎপন্ন করবে।

উদাহরণ—7

f সুষম ত্বরণে সরলরেখায় চলমান একটি কণার কোনও প্রারম্ভিক বেগ u হলে দেখান যে p তম সেকেন্ডে কণাটি $u + \frac{1}{2} f(2p-1)$ পরিমাণ পথ অতিক্রম করবে।

সমাধান ঃ

ঐ চলমান কণাটি O মূলবিন্দু হতে (যেখানে তার গতিবেগ u) প্রারম্ভিক সময় $t = 0$ ধরলে কণাটি $t = p$ সেকেন্ডে মোট $up + \frac{1}{2}fp^2$ .... (i)

পথ অতিক্রম করবে এবং $t = p - 1$ সেকেন্ডে মোট $u(p-1) + \frac{1}{2}f\{(p-1)^2\}$ .... (ii)

পথ অতিক্রম করবে ; (i) হতে (ii) বিয়োগ করে আমরা দেখি যে p তম সেকেন্ড কণাটি $u + \frac{1}{2}f(2p-1)$ পথ অতিক্রম করবে।

উদাহরণ—8

ভেক্টর $\vec{A} = ix_1 + jy_1$ এবং $\vec{B} = ix_2 + jy_2$, দেখাও যে, $\vec{A}.\vec{B} = x_1x_2 + y_1y_2$ স্কেলার রাশি এবং $\vec{A} \times \vec{B} = k(x_1x_2 - y_2y_1)$ হবে।

(i, j, k প্রচলিত রীতি অনুযায়ী যথাক্রমে x, y, z অক্ষের দিশায় এক মান যুক্ত ভেক্টর) দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল অনুযায়ী $i.i = j.j = 1$ এবং $i.j = 0$.

অতএব $(ix_1 + jy_1).(ix_2 + jy_2) = i^2x_1x_2 + i.jx_1x_2 + j.i.y_1x_2 + j^2y_1y_2 = x_1x_2 + y_1y_2$;

আবার, $(ix_1 + jy_1) \times (ix_2 + jy_2)$

$$= i \times ix_1x_2 + i \times jx_1y_2 + j \times iy_1x_2 + j \times jy_1 \;;$$

দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণপ্রক্রিয়া অনুযায়ী $i \times j = k = -j \times i$ এবং $i \times i = j \times j = 0$

অতএব $(ix_1 + jy_1) \times (ix_2 + jy_2) = k(x_1y_2 - x_2y_1)$

1.10 সারাংশ

আমরা সুষম বেগে বা ত্বরণে একটি কণা নির্দিষ্ট সময়ে কতটা পথ অতিক্রম করে এবং তৎসংক্রান্ত সমস্যা নিয়ে আলোচনা করেছি। এটি ব্যতীত ভেক্টরের সাহায্যে দুই বা ততোধিক বেগ বা ত্বরণের লব্ধি নির্ণয় করে পরে কয়েকটি উদাহরণ দিয়ে ঐ সমস্যাগুলি নিয়ে বুঝিয়েছি।

1.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী (উত্তর সম্বলিত)

(1) যদি ভেক্টর $\vec{A} = ia_1 + ja_2 + ka_3$ এবং ভেক্টর $\vec{B} = ib_1 + jb_2 + kb_3$ হয়, তা হলে দেখান যে,

(i) $\vec{A}.\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

এবং (ii) $\vec{A} \times \vec{B} = i(a_2b_3 - a_3b_2) + j(a_3b_1 - a_1b_3) + k(a_1b_2 - a_2b_1)$ হবে।

(2) $\vec{R} = \vec{A}\cos pt + \vec{B}\sin pt$ হলে ($\vec{R}.\vec{A}.\vec{B}$ ভেক্টর এবং p একটির ধ্রুবক স্কেলার)

দেখান যে, $\vec{R} \times \dfrac{d\vec{R}}{dt} = p\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)$

(3) দেখান যে, কোনও গতিশীল কণার বেগ ঐ কণটির স্থির অবস্থা হতে দূরত্বের সমানুপাতিক হবে।

(4) কোনও একটি গতিশীল কণার বেগ V এবং নির্দিষ্ট বিন্দু হতে তার দূরত্ব x-এর সম্বন্ধ $V^2 = 6(x \sin x + \cos x)$ রূপে থাকলে ঐ কণাটির ত্বরণ নির্ণয় করুন। (উত্তর ঃ $3x \cos x$)

(5) যদি একটি কণা কোনও সরলরেখায় f সমত্বরণে চলে s দূরত্ব t সেকেন্ডে অতিক্রম করে এবং তারপরে s দূরত্ব t সেকেন্ডে অতিক্রম করে, তবে দেখান যে, $f = \dfrac{2\left(\frac{s'}{t'} - \frac{s}{t}\right)}{t + t'}$

(6) যদি সরলরেখায় গমনরত কণা t সময় চলার পরে কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু হতে তার দূরত্ব x হয় এবং $t = f.x$ হয় এবং তখন কণাটির বেগ u হলে, দেখান যে কণাটির মন্দন $u^3 \dfrac{d^2 f}{dx^2}$ হবে।

(7) একটি কণা কোনও সরলরেখায় সুষম ত্বরণে চললে যদি p-তম, q-তম এবং r-তম সেকেন্ডে যথাক্রমে a, b, c দূরত্ব অতিক্রম করে, তা হলে দেখান যে, $a(q - r) + b(r - p) + c(p - q) = 0$

(8) একটি কণা সুষম ত্বরণে কোনও সরলরেখায় চলে গতি শুরু হওয়ার একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেন্ডে যথাক্রমে 720 cm এবং 960 cm পথ অক্রিম করে ; 20 সেকেন্ডে কণাটি কত পথ অতিক্রম করবে নির্ণয় করুন।

(উঃ 13800 cm)

(9) সুষম ত্বরণে কোনও সরলরেখায় গমনরত একটি কণার t_1, t_2, t_3 সময়ে কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু হতে দূরত্ব যথাক্রমে x_1, x_2 এবং x_3 হলে দেখান যে, ঐ কণাটির ত্বরণ হবে—

$$2\left[\frac{(x_2 - x_3)t_1 + (x_3 - x_1)t_2 + (x_1 - x_2)t_3}{(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 - t_2)}\right]$$

(10) কোনও সরলরেখায় গমনরত একটি কণা যদি নির্দিষ্ট দূরত্বের প্রথমার্ধ f_1 সুষম ত্বরণে গমন করে এবং দ্বিতীয়ার্ধ f_2 সুষম ত্বরণে অতিক্রম করে, তা হলে দেখান যে যাত্রাশেষে কণাটির বেগ, সম্পূর্ণ দূরত্ব, $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ সুষমত্বরণে অতিক্রান্ত লব্ধবেগের সমান হবে।

(11) একটি ট্রামগাড়ি স্থির অবস্থা হতে f সুষম ত্বরণে সরলপথে চলতে শুরু করে এবং ট্রামগাড়ির পশ্চাতে d দূরত্বে অবস্থিত এক ব্যক্তি u সুষমবেগে ঐ গাড়ি ধরবার জন্য ছুটতে শুরু করে ; দেখান $u < \sqrt{2fd}$ হলে ঐ ব্যক্তি ঐ গাড়ি ধরতে পারবে না।

(12) সরলরেখায় গমনকারী একটি রেলগাড়ি পরপর দুটি স্টেশনে থামে। স্টেশন দুটির মধ্যে দূরত্ব x কিলোমিটার ; যদি রেলগাড়িটি প্রথমে f_1 সুষম ত্বরণে এবং পরে f_2 সুষম মন্দনে চলে মোট $2x$ মিনিটে স্টেশন দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব অতিক্রম করে, তা হলে দেখান যে, $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 2x$।

একক 2 ❑ বলাধীন গতিবিদ্যা

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

পূর্বে আলোচিত দুটি এককে (একক নং 1 এবং 2) আমরা সরলরেখায় গমনরত কোনো বস্তুর সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি নিয়ে আলোচনা করেছি। মূলতঃ জ্যামিতিক দৃষ্টিভঙ্গী নিয়ে আমরা ঐ সকল আলোচনা করেছি। এখন 3নং এককে গ্যালিলিও এবং নিউটন প্রবর্তিত ধারায় আমরা বহিঃস্থ বলপ্রয়োগে ঋজুরেখায় বস্তুর সরণ, বেগ এবং ত্বরণ ইত্যাদি নিয়ে আলোচনা করব। এই প্রসঙ্গে বলসমূহের ভৌতস্বতন্ত্রতা, কর্ম, ক্ষমতা, গতি ও স্থিতি শক্তিদ্বয়, এবং তাদের একক, মহাকর্ষবিধি, রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি, আবেগ ও ঘাতবল ইত্যাদি আলোচনা করে বলাধীন গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে তাদের প্রয়োগ দেখব।

2.2 উদ্দেশ্য

গতিবিজ্ঞানে এই একককটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ, নিউট্রনীয় সূত্র অবলম্বনে আমরা সরলরেখায় গতিশীল কোনও বস্তু যদি কোনও বলের অধীন থাকে, তা হলে অতিসহজেই বস্তুটির সরণ, বেগ, ত্বরণ এবং গতিশক্তি নির্ণয় করা যেতে পারে। বহিঃস্থ প্রযুক্ত বলটি যদি অত্যন্ত অল্প সময়ে ক্রিয়াশীল হয়, তা হলেও আমরা ঐ বলকে ঘাতবল (Impulsive force) ধরে আমরা বস্তুটির ভরবেগের পরিবর্তন নির্ণয় করতে পারি।

2.3 বলাধীন গতিবিদ্যা (Kinetics)

পূর্ব অধ্যায়ে বলনিরপেক্ষ গতিবিজ্ঞান অর্থাৎ সৃতিবিদ্যার কথা বলা হয়েছে। এই অধ্যায়ে আমরা বলাধীন বস্তুর গতির প্রকৃতি নিয়ে আলোচনা করব।

গতির নিয়মাবলী ঃ

আমরা এখানে গ্যালিলিও এবং নিউট্রন প্রবর্তিত গতির নিয়মাবলী আলোচনা করব ঃ

গতির প্রথম নিয়ম ঃ

কোনও বস্তু স্থির অবস্থায় থাকলে সেটি সেই অবস্থায়ই থাকবে, আবার সুষম ত্বরণে সরলরেখায় যদি বস্তুটি চলতে থাকে তবে ঐ সুষম ত্বরণেই ঐ বস্তুটি চলতে থাকবে, যতক্ষণ না কোনও বহিঃস্থ বল (Force) ঐ বস্তুটির স্থিরাবস্থার অথবা সুষম ত্বরণ অবস্থার পরিবর্তন ঘটায়।

এখানে বস্তুর স্থিরাবস্থা অথবা সুষমত্বরণে গতিশীল অবস্থাকে ঐ বস্তুর স্বাভাবিক অবস্থা বলা হয়ে থাকে। বস্তুর ঐ স্বাভাবিক অবস্থায় থাকার ধর্মকে আমরা বস্তুর জড়তা অথবা জাড্য বলে থাকি। এজন্য অনেক সময় গতির প্রথম নিয়মটিকে (মূলতঃ গ্যালিলিও প্রবর্তিত) আমরা জাড্যনিয়ম (Law of Inertia) বলে থাকি।

বল একটি অসংজ্ঞাত পদ, তা বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল হলে, বস্তুটির স্বাভাবিক অবস্থার (স্থিরাবস্থা অথবা সুষম ত্বরণে চলমান অবস্থা) পরিবর্তন ঘটায়।

ভর ও ভরবেগ ঃ

কোনও বস্তুর মধ্যে যত পরিমাণ জড় থাকে তাকে বস্তুটির ভর (mass) বলা হয়ে থাকে এবং বস্তুটির ভর এবং গতিবেগের গুণফলকে তার ভরবেগ (mV) বলা হয়। আমরা এই পাঠক্রমে ভরকে একটি স্কেলার রাশি ধরেছি, কিন্তু গতিবেগ একটি ভেক্টর ; অতএব ভরবেগ একটি ভেক্টর।

গতির দ্বিতীয় নিয়ম ঃ

কোনও বস্তুর ভরবেগের সময়সাপেক্ষে পরিবর্তনের হার ঐ বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বলের সমানুপাতিক এবং

যে দিশায় বল ক্রিয়া করে ঐ দিশাতেই ভরবেগের পরিবর্তন ঘটবে। বস্তুটির ভর m, বেগ $\vec{V}$ এবং ক্রিয়াশীল বল $\vec{P}$ ধরলে, গতির এই দ্বিতীয় নিয়মানুসারে $\vec{P} \alpha \frac{d}{dt}(m\vec{V})$ অর্থাৎ $\vec{P} = k\frac{d}{dt}(m\vec{V})$ হয়। (যেখানে k একটি ধ্রুবক রাশি) যদি বহিঃস্থবল $\vec{P} = 0$ হয় $\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = 0$ অর্থাৎ $m\vec{V}$ ধ্রুবক হবে ; একে (ক্রিয়াশীল বলের অবর্তমানে) কোনও বস্তুর ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি বলা হয়।

এখন আমরা যদি এমন একক ধরি যাতে $\left|\frac{d}{dt}(m\vec{V})\right|$ এর মান এক হলে $|\vec{P}|$-এর মানও এক হবে, তা হলে দেখা যায় যে $k = 1$ হবে,

এক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি যে, $\vec{P} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)$ যদি সময়সাপেক্ষে বস্তুটির ভর অপরিবর্তিত থাকে, তা হল $\vec{P} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{f}$ হবে (যেখানে $\vec{f}$ (ত্বরণ) $= \frac{d\vec{V}}{dt}$) ;

$\vec{P} = m\vec{f}$ কোনও বস্তুর গতির প্রচলিত সূত্র (ভর m অপরিবর্তনীয় স্বীকার করে)

গতির দ্বিতীয় নিমানুযায়ী একই দিশায় একই বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল দুটি বলের পরিমাণের তুলনা করা যায়। ধরা যাক যে দুটি বল P_1 এবং P_2 একই বস্তুর উপর একই দিশায় ক্রিয়াশীল হয় এবং P_1 বলটির জন্য বস্তুটির f_1 ত্বরণ সৃষ্টি হয় এবং P_2 বলটির জন্য বস্তুটির উপর f_2 ত্বরণ সৃষ্ট হয়, P_1 ও P_2 বল দুটির দিশা অভিন্ন বলে f_1 এবং f_2 ত্বরণ দুটির দিশাও অভিন্ন হবে।

জ্যামিতির সাহায্যে ত্বরণ f_1 এবং f_2 পরিমাপ করতে পারলে আমরা দেখতে পাই যে,

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{f_1}{f_2}$ হবে, এইরূপে P_1 এবং P_2 বল দুটির মানের তুলনা করা যেতে পারে।

গতির তৃতীয় নিয়ম ঃ

প্রত্যেকটি ক্রিয়ার সমপরিমাণ বিপরীতমুখী ক্রিয়া থাকবে। গতিসংক্রান্ত এই তৃতীয় নিয়মটি নিউটন উদ্ভাবন করেছিলেন।

উপরিউক্ত গতির প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় এই তিনটিকেই নিউটনের গতির নিয়ম বলে থাকি এবং ঐ নিয়মাবলী অনুযায়ী গতিবিজ্ঞানকে নিউটনীয় গতিবিদ্যা বলে থাকি।

2.4 বলসমূহের ভৌত স্বতন্ত্রতা (Physical independence of forces)

যদি দুইটি বা ততোধিক বল কোন বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তন ঘটায়, তা হলে যে কোনও একটি বলের

দ্বারা প্রভাবিত বস্তুটির ভরবেগে পরিবর্তনের উপর থাকবে না। অন্য বলগুলির কোনও প্রভাব থাকবে না। ঐ নীতিটিকে স্বতঃসিদ্ধ ধরে আমরা গতিবিদ্যার আলোচনায় অগ্রসর হব।

ঐ নীতিকেই গণিতে সাধারণতঃ উপরিপাত নীতি (Principle of Superposition) বলা হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ—বস্তু বলতে এই পাঠক্রমে একটি কণা বোঝাবে যার ভর আছে কিন্তু মাত্রা (dimension) নেই এবং চলমান বস্তুটিকে বিভিন্ন ভিন্ন বিন্দুতে চলমান বিন্দু রূপে চিন্তা করা যেতে পারে।

গতিশক্তি (Kinetic Energy)

$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}$ (কণার ভর) $\times$ (কণার গতিবেগ)^2 কে কণাটির গতিশক্তি বলা হয়ে থাকে।

কণাটি যদি কোনও নির্দিষ্ট দিকে ধরা যাক $0x$ সরলরেখার দিকে V এবং T উভয়ই x-অপেক্ষক (function) তা অবকলন প্রক্রিয়া দ্বারা আমরা দেখি $\frac{dT}{dx} = mV\frac{dV}{dx} = m \times f = m \times$ ত্বরণ কারণ আমার দেখেছি f (ত্বরণ) $= V\frac{dV}{dx}$ অতএব $\frac{dT}{dx} = mf = P(x$ দিকে বহিঃস্থ ক্রিয়াশীলবল)

কর্ম (Work) এবং ক্ষমতা (Power) ঃ

ধর $\vec{F}$ বলটি কোন্ বস্তুকে P হতে a বিন্দুতে নিয়ে যায়, P হতে Q বিন্দুতে নেবার জন্য $\vec{F}$ বলের দ্বারা যে কর্ম সিদ্ধ হয়, তাকে বলের কর্ম (*Work*) বলা হয় এবং তার মান $\vec{F}.\overrightarrow{PQ}$ ($\vec{F}$ বল এবং $\overrightarrow{PQ}$ সরণের স্কেলার গুণফল)।

কর্ম $\vec{F}.\overrightarrow{PQ}$ কে $\overrightarrow{PQ}$ দিকে $\vec{F}$-এর উপাংশ এবং $\overrightarrow{PQ}$ সরণের মানের গুণফল রূপে বিবেচনা করা যেতে পারে ; আবার কর্ম $\vec{F}.\overrightarrow{PQ} = |\vec{F}||\overrightarrow{PQ}| \cos\theta$ যেখানে [$\vec{F}$ এবং $\overrightarrow{PQ}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ] সময় সাপেক্ষে কর্মের পরিবর্তনের হারকে ক্ষমতা (*Power*) বলা হয়ে থাকে ; যদি কর্ম $\vec{F}.\,\overrightarrow{dr}$ হয় তা হলে ক্ষমতা $\vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$ ($d\vec{r}$ সরণ হলে, $\frac{d\vec{r}}{du} =$ বেগ)।

গতিশক্তি $T = \frac{1}{2}mV^2$ ধরে

আমরা দেখতে পাই যে, কর্ম $\vec{F}\,d\,\vec{r} = m\frac{d\vec{V}}{dt}.d\vec{r}$ (যেহেতু $\vec{F} = m$ ত্বরণ)

অতএব কর্ম $= m\frac{d\vec{V}}{dt}.\frac{dr}{dt}.dt = m\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V}\,dt$ অর্থাৎ কর্ম $\vec{F}d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = dT\vec{F}$ বলাধীন কোনও

বল A বিন্দু হতে B বিন্দু যেতে যে কর্ম করে তা ভেক্টর সমাকলের দ্বারা লেখা যায় $\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = (T)_A^B = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2$ অর্থাৎ A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে $\vec{F}$ বল m কণার ওপর যে কর্ম করে তা বলের পথ সমাকলের মানের সমান এবং A বিন্দু হতে B বিন্দু পর্যন্ত কণাটির গতিশক্তির বৃদ্ধির সমান। যদি এরূপ হয় $\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$ সমাকলটি কেবলমাত্র A বিন্দু হতে B বিন্দু পর্যন্ত বিশেষ কোনও পথের উপর নির্ভরশীল নয়, কেবলমাত্র প্রান্ত বিন্দু দুইটি A এবং B উপর নির্ভর করে তা হলে ঐ বলকে ($\vec{F}$-কে) সংরক্ষীবল (Conservative force) বলা হয়।

ক্ষমতা (Power)

সময় সাপেক্ষে কর্মের পরিবর্তনের হারকে ক্ষমতা বলা হয় ; অর্থাৎ $\vec{F}.d\vec{r}$; $\vec{F}$ বলের কার্য $\vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{V}$ হবে।

আমরা পূর্বে সংজ্ঞা অনুযায়ী $\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = m\frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V} = \vec{F}.\vec{V}$ অর্থাৎ সময়সাপেক্ষে গতিশক্তির পরিবর্তনের হারই ক্ষমতা।

স্থিতিশক্তি (Potential Energy)

সংরক্ষী বলসমূহের (Conservative forces) প্রভাবে কোনও বিন্দু ধরা যাক, A বিন্দু হতে কোনও নির্দিষ্ট বিন্দুতে কোনও কণাকে নিয়ে যেতে বলগুলির দ্বারা যে ক্রিয়া সাধিত হয় তাকে ঐ A বিন্দুতে ঐ বলক্ষেত্রের স্থিতিশক্তি বলা হয়। অনেক সময় ঐ স্থিরবিন্দুটি অসীম দূরত্বেও (infinite distance) থাকতে পারে।

যদি A বিন্দুতে কণাটির স্থিতিশক্তি V_{A} এবং গতিশক্তি $\frac{1}{2}mV_A^2$ হয় এবং B বিন্দুতে কণাটির স্থিতিশক্তি V_{B} এবং গতিশক্তি $\frac{1}{2}mV_B^2$ হয় (কণাটির ভর m, A এবং B বিন্দুতে কণাটির বেগ যথাক্রমে V_{A} এবং V_{B} ধরি)।

তা হলে সংরক্ষী বলাধীন কণাটির গতিপথে $\frac{1}{2}mV_A^2 + V_A = \frac{1}{2}mV_B^2 + V_B$ হবে, অর্থাৎ গতিশক্তি এবং স্থিতিশক্তির যোগফল কণাটির গতিপথে স্থির থাকবে।

এই নীতিটিকে শক্তির সংরক্ষণ নীতি (Principle of Conservation of Energy) বলা হয়ে থাকে।

মনে রাখতে হবে সংরক্ষী বলক্ষেত্রেই উপরিউক্ত সংরক্ষণ নীতি গ্রাহ্য হবে।

2.5 বল, কর্ম ও শক্তির একক

আমরা পূর্বেই বলেছি যে, সি. জি. এস. পদ্ধতিতে সরণের একক 1cm ভরের একক 1gm এবং সময়ের একক 1sec ধরে

বেগের একক 1 cm/sec এবং

তবেরণের একক 1 cm/sec^2

বল = ভর × ত্বরণ $(\vec{P} = m\vec{f})$ হতে

আমরা বলের একক 1 gm cm/sec^2 ধরি ;

বলবিদ্যায় বলের একক 1 gm cm/sec^2 কে আমরা 1 *dyne* অর্থাৎ এক ডাইন ধরে থাকি।

কর্ম, শক্তি ও ক্ষমতার সংজ্ঞা অনুযায়ী

আমরা কর্ম ও শক্তির একক 1 gm cm^2/sec^2

অথবা 1 *dyne* cm এবং

ক্ষমতার একক $1\,gm\,\frac{cm^2}{sec^3}$

অথবা $1\,dyne\,\frac{cm}{sec}$ ধরে থাকি। অনেক সময় সিজিএস্ পদ্ধতিতে কর্ম ও শক্তির একক 1 dyne cm কে 1 erg বলা হয় এবং ক্ষমতার একক 1 dyne cm/sec কে 1 erg/sec বলা হয়।

সিজিএস্ পদ্ধতিতে বলের একক ক্ষুদ্র হওয়ার জন্য আমরা অনেক সময় পূর্বে উল্লিখিত এম্ কে এস্ (*MKS*) পদ্ধতি অনুযায়ী একক ব্যবহার করে থাকি, এই পদ্ধতিতে সরণের (দৈর্ঘ্যের) একক 1 m (এক মিটার = 100 cm) সময়ের একক 1 sec (এক সেকেন্ড)।

ভরের একক 1 kg = 1000 gm

বলের এক নিউটন যেখানে এক নিউটন (Newton)

$$= \frac{1\,Kg.m}{(sec)^2} = \frac{1000\,gm \times 100\,cm}{(sec)^2} = \frac{10^5\,gm.cm.}{(sec)^2}$$

দেখা যাচ্ছে যে এক নিউটন = 10^5 ডাইন।

এম. কে. এস্ পদ্ধতিতে কর্ম বা শক্তির একক $\frac{1\,kgm^2}{(sec)^2} = 1\,Nm$

$= 10^5$ ডাইন × 10^2 সেমি = 10^7 আর্গ (erg)

কর্ম বা শক্তির ঐ একককে এক জুল (1 Joule) বলা হয়। আবার ক্ষমতার একক (এম্ কে এস্ পদ্ধতিতে) $\frac{1\,Joule}{Sec}$; ঐ এককে এক ওয়াট (1 watt) বলা হয়, স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির একক অভিন্ন ধরা হয়ে থাকে।

মহাকর্ষ ও মহাকর্ষীয় একক ঃ

মহাকর্ষহেতু ভূপৃষ্ঠে বা ভূপৃষ্ঠের নিকটবর্তী অঞ্চলে কোনও বস্তু ভূকেন্দ্রের দিকে যে বলের দ্বারা আকৃষ্ট হয়, সেই বলকে বস্তুটির ওজন (weight) বলা হয় ;

বস্তুটির ভর m হলে ঐ বল হবে mg ;

এখানে মহাকর্ষবল হেতু বস্তুটির ত্বরণ g ধরা হবে। বস্তুতর ভূপৃষ্ঠের বিভিন্ন অঞ্চলে কিংবা ভূপৃষ্ঠের অতিনিকট স্থানে g-এর মানের সামান্য পরিবর্তন হলেও আমরা g-কে ধ্রুবক ধরব ;

g-এর আসন্নমান g = 981 cm/sec^2 (সিজিএস্ পদ্ধতিতে এক গ্রাম ওজন = g) এম্ কে এস্ পদ্ধতিতে এক কিলোগ্রাম ওজন।

$$= (10^3 \text{ gm})\, g = 10^3 \times 9.81 \frac{\text{gmcm}}{(\text{sec})^2} = 9\cdot 81 \text{ নিউটন।}$$

কর্মের এবং শক্তির মহাকর্ষীয় একক কিলোগ্রাম ওজন মিটার (kg weight m) এবং ক্ষমতার মহাকর্ষীয় একক কিলোগ্রাম ওজন মিটার প্রতি সেকেন্ডে $\left(\frac{\text{kg weight}}{(\text{Sec})}\right)$; কাজের সুবিধার জন্য অনেকসময় অশ্বশক্তিকে (Horse Power, H.P.) কে ক্ষমতার একক রূপে ধরা হয় ; এম্ কে এস্ (পদ্ধতিতে) এক অশ্বশক্তির পরিমাণ $\left(\frac{75\,\text{kg weight m}}{(\text{Sec})}\right)$ এফ্ পি এস্ (F. P. S.) পদ্ধতি ;

এই পদ্ধতির প্রয়োগ আজকাল খুবই কম দেখা যায়, পূর্বে বিজ্ঞান ও কারিগরী বিদ্যায় এই পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্য, বল ইত্যাদির একক সূচিত হয়।

এই পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্য এবং সরণের একক এক ফুট (1 foot) ভরের একক এক পাউন্ড (Ib) সময়ের একক এক সেকেন্ড।

বলের একক এক পাউন্ডাল $\frac{1/\text{b. ft}}{(\text{sec})^2}$ এবং এক পাউন্ডের ওজন g পাউন্ডাল (g-এর মান 32 ft/sec)^2 ধরে এই অফ্ পি. এস. পদ্ধতিতে 1 $H.P.$ = 550ft weight/sec. এফ্পিএস্ পদ্ধতি হতে সিজিএস্ পদ্ধতিতে যেতে হলে, এক ফুট = 30.48 সেন্টিমিটার এবং এক পাউণ্ড = 453.6 গ্রাম।

ধরতে হবে ; অনুরূপভাবে সিজিএস্ পদ্ধতি হতে এফ্পিএস্ পদ্ধতিতে যাওয়া যেতে পারে।

মাত্রা অথবা ঘাত (Dimension) ঃ

বলবিদ্যা আমরা তিনটি মৌলিক রাশি, দৈর্ঘ্য, সময় ও ভরকে এবং সেন্টিমিটার, সেকেন্ড গ্রাম অথবা মিটার, সেকেন্ড, কিলোগ্রাম দ্বারা এবং বেগ, ত্বরণ, বল, শক্তি, কর্ম ইত্যাদিকে পরিমাপ করার একক নিয়ে আলোচনা করছে।

এখন দৈর্ঘ্যকে L মাত্রা সময়কে T মাত্রা এবং ভরকে M মাত্রা ধরে আমরা অন্য ভৌতিক রাশি যেমন বেগ, বল ইত্যাদির মাত্রা নির্ণয় করব। এখানে দৈর্ঘ্যের ভরের ইত্যাদির পরিমাপ নিয়ে আমরা চিন্তা করব না ; সাধারণতঃ আমরা এই মাত্রাগুলিকে আমরা $[L]$, $[T]$, $[M]$ রূপে চিহ্নিত করব। [সহজেই দেখা যেতে পারে যে দৈর্ঘ্যের মাত্রা $[L]$, ক্ষেত্রফলের মাত্রা $[L^2]$ এবং ঘনফলের মাত্রা $[L^3]$ হবে]

আমার দেখতে পাই যেহেতু সময় সাপেক্ষে নির্দ্দিষ্ট দিকে সরণের পরিবর্তন হারকে বেগ বলা হয়। এজন্য বেগের মাত্রা হবে $\left(\frac{L}{T}\right)$, অনুরূপভাবে ত্বরণের মাত্রা $\left(\frac{L}{T^2}\right)$ হবে।

এইরূপে ভরবেগের মাত্রা $\left(\frac{ML}{T}\right)$, বলের মাত্রা $\left(\frac{ML}{T^2}\right)$ কার্য বা শক্তির মাত্রা $\left(\frac{ML^2}{T^2}\right)$ এবং ক্ষমতার মাত্রা $\left(\frac{ML^2}{T^3}\right)$ হবে।

দুটি ভৌতিক রাশির মাত্রা অভিন্ন থাকলে তাদের যোগ বা বিয়োগ করা যায় ; যেমন 5 মিটার দৈর্ঘ্যের সঙ্গে 3 সেকেন্ড সময় যোগ করা যায় না, কিন্তু 5 মিটার দৈর্ঘ্যের সঙ্গে 3 মিটার দৈর্ঘ্য যোগ করে 8 মিটার দৈর্ঘ্য পাওয়া যায়।

কোনও ভৌতরাশি বিশিষ্ট কোনও সমীকরণের উভয়প্রান্তে একই মাত্রাযুক্ত রাশিমালা থাকবে ; যেমন $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

এখানে বামদিকে s-এর মাত্রা $[L]$ এবং দক্ষিণ পার্শ্বে ut এর মাত্রা $\left(\frac{L}{T}T\right) = [L]$ এবং $\frac{1}{2}ft^2$ মাত্রা $\left(\frac{L}{T^2}T^2\right) = [L]$

অতএব সমীকরণের প্রত্যেকটি পদের একই মাত্রা থাকবে ; এটিকে মাত্রার সমতার তত্ত্ব (Principle of Homogeneity of dimensions) বলা হয়।

2.6 রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি

নিউটনের গতীয় দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে কোনও কণার উপর বাহির হতে কোনও নির্দ্দিষ্ট দিকে কোনও বল প্রয়োগ না করলে ঐ কণার ভরবেগের ঐদিকে কোনও পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ ঐ দিকে কণাটির ভরবেগ অক্ষুণ্ণ থাকবে।

একে কণার রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি (Principle of conservation of linear momentum of a particle) বলা হয়ে থাকে।

2.7 মহাকর্ষ-বিধি

নিউটন প্রবর্তিত মহাকর্ষ বিধি অনুযায়ী বিশ্বের যে কোনও দুইটি কণা পরস্পরকে আকর্ষণ করে এবং ঐ আকর্ষণজনিত বল তাদের ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং তাদের দূরত্বের বর্গের ব্যস্ত সমানুপাতিক ; ঐ আকর্ষক বলটি কণা দুইটির সংযোগী রেখায় ক্রিয়াশীল থাকবে।

সংকেতে লেখা যায় যে, m_1 এবং m_2 কণা দুইটির ভর হলে এবং r তাদের মধ্যে দূরত্ব থাকলে ঐ আকর্ষক বলটির মান হবে $P = \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$ এবং ঐ বলটির (P) দিশা ঐ কণা দুইটির সংযোগরেখামুখী হবে ; G রাশিটিকে মহাকর্ষীয় অচর রাশি (Gravitational constant) বলা হয়ে থাকে।

সিজিএস এককে, $G = 6.670 \times 10^{-8}\ \text{cm}^3 g^{-1}\ (\text{sec})^{-2}$

এবং এস্ কে এস্ এককে $G = 6.670 \times 10^{-11} \text{m}^3 (\text{kg})^{-1} (\text{sec})^{-2}$

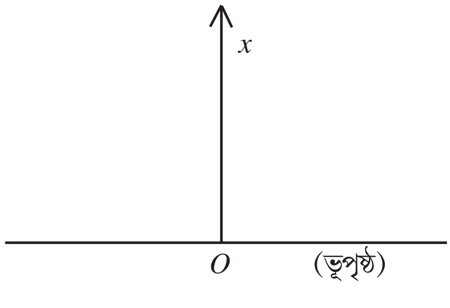
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ a এবং ভর M ধরলে, m ভর বিশিষ্ট কোনও কণা পৃথিবীর বাহিরে পৃথিবীর কেন্দ্র হতে r দূরত্বের থাকলে তাদের উপর ক্রিয়াশীল বল হবে

$\dfrac{GMm}{r^2}$ এবং ভূপৃষ্ঠের $r = a$ অবস্থানে ঐ বলের মান $\dfrac{GMm}{a^2}$; ভূপৃষ্ঠে কিংবা তার সন্নিকটে আমরা ঐ বলের মান mg ধরে থাকি অর্থাৎ g ত্বরণের মান $\dfrac{GM}{a^2}$ সমান ধরে নিই।

পূর্বেই বলেছি যে এই g ত্বরণের মান ধ্রুবক ধরা হয়ে থাকে। এবং তা ভূপৃষ্ঠ অভিমুখে তার দিশা নির্দিষ্ট হয়।

2.8 মাধ্যাকর্ষণ জনিত ত্বরণ (g) ভূ-পৃষ্ঠের নিকটে কণার গতি

ভূপৃষ্ঠের উপর একটি 'O' মূলবিন্দু থেকে উল্লম্ব উর্ধ্বাভিমুখে ox অক্ষ ধরলে কণাটির উপর মাধ্যাকর্ষণ জনিত mg বল ox-এর বিপরীতদিকে ক্রিয়াশীল হবে ; (এখানে m কণাটির মহাকর্ষ ভর এবং g মহাকর্ষজনিত ত্বরণ ; কণাটির মহাকর্ষ ভর এবং জাড্যভর আমরা অভিন্ন ধরব g ত্বরণকে আমরা ধ্রুবক ভেক্টর ধরব।)



যদি O বিন্দু হতে x দূরত্বের t সময় পরে কণাটির বেগ V হয়, তা হলে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে আমরা পাই $m\frac{dV}{dt} = mV\frac{dV}{dx} = -mg$

অথবা, $\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} = -g$ কিংবা $V\frac{dV}{dx} = -g$

t সময় সাপেক্ষে $\frac{dV}{dt} = -g$ সমীকরণটি সমাকল করলে আমরা পাই, $V = -gt + c$ যেখানে c একটি ধ্রুবক ; যদি আদিতে (t = 0) কণাটি u বেগে ঊর্ধ্বদিকে ছুঁড়ে দেওয়া হয়, তা হলে $c = u$ হবে।

$\therefore\ V = v - gt$ (i) অনুরূপভাবে

$V\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}V^2\right) = -g$ সমাকল করে আমরা পাই, $V^2 = u^2 - 2gx$; (ii)

(i) এবং (ii) হতে আমরা পাই যে, $t = \frac{u-V}{g}$ .... (iii)

$x = \frac{u^2 - V^2}{2g}$ (iv) এবং $x = ut - \frac{1}{2}gt^2$ (v)

(i) এবং (ii) সূত্র হতে আমরা দেখি যে কণাটির ঊর্ধ্ব দিশায় গমনকালে তার গতিবেগ হ্রাস পাবে এবং যখন ঐ বেগ $V = 0$ (শূন্য) হবে তখন

$t = \frac{u}{g} = T$ এবং $x = \frac{u^2}{2g} = H$ হবে ;

অর্থাৎ u বেগে ভূপৃষ্ঠ থেকে সোজা ঊর্ধ্বদিকে কোনও কণা ছুঁড়লে তা $H = \frac{u^2}{2g}$ দূরত্ব পর্যন্ত $\frac{u}{g}$ সময়ে যেতে পারবে ; পরে আবার মাধ্যাকর্ষণ হেতু তা আবার নীচের দিকে আদিবেগ শূন্য নিয়ে g ত্বরণে নীচের দিকে নামতে থাকবে এবং মূলবিন্দু O তে পৌঁছাতে যদি তার t সময় লাগে তা হলে $x = ut + \frac{1}{2}gt^2$ সমীকরণে (এখানে ত্বরণ g Ox-এর বিপরীতে) $u = 0$ এবং $x = \frac{u^2}{2g}$ ধরে আমরা দেখতে পাই যে, $\frac{u}{g} = T$ সময় পরে তা আবার মূলবিন্দুতে পৌছুবে। যখন মূলবিন্দু $O(x = 0)$ তা পৌঁছায় তখন তার গতিবেগ $v = 0 + gT = u$ হবে ; অর্থাৎ O বিন্দু কণাটির গতিপথের উচ্চতম বিন্দু যেতে যে সময় লাগবে, সেখান হতে O বিন্দু পর্যন্ত আবার পৌঁছোতে একই সময় $T = \frac{u}{g}$ লাগবে ;

$T = \dfrac{2u}{g}$ কে চলার মোট সময় বলা যায়। এখন O বিন্দু হতে x বিন্দুতে পৌঁছাতে কণাটি x পথ অতিক্রম করে এবং $x = ut - \frac{1}{2}gt^2$ অর্থাৎ $\frac{1}{2}gt^2 - ut + x = 0$ (u আদি ধরলে) হবে।

উপরের t সম্বলিত দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করলে আমরা $t = \dfrac{u \pm \sqrt{u^2 - 2gx}}{g}$ পাব ; $t_1 = \dfrac{u - \sqrt{u^2 - 2gx}}{g}$ এবং $t_2 = \dfrac{u + \sqrt{u^2 - 2gx}}{g}$, t এর এই দুইটি লব্ধমানের মধ্যে $t_2 > t_2$; দেখা যাবে যে, কণাটি উত্থানকালে t_1 সময় পরে ধরা যাক্ P বিন্দুতে $OP = x$ পথ অতিক্রম করলে তার বেগ হবে $\sqrt{u^2 - 2gx}$ ঊর্ধ্বদিকে এবং $\sqrt{u^2 - 2gx} < u$ এবং $\dfrac{u^2}{2g}$ উচ্চতম সীমায় তার মান শূন্য হবে পরে মাধ্যাকর্ষণ হেতু তা নীচের দিকে (O মূলবিন্দু দিকে) নামতে থাকবে এবং তার বেগের মান বাড়তে থাকবে এবং P বিন্দুতে ঐ বেগ হবে $\sqrt{u^2 - 2gx}$ নিম্নদিকে এবং O বিন্দুতে এসে ঐ বেগ হবে x (নিম্নদিশায়)।

আবার কণাটি ভূপৃষ্ঠ থেকে যাত্রা শুরু করে P বিন্দুতে পৌঁছে আবার P বিন্দুতে ফিরিতে $t_1 + t_2 = \dfrac{2u}{g}$ সময় লাগবে।

লক্ষ্য করুন যে, $P(Ox = x)$ বিন্দুতে কণাটির গতিশক্তি $\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(u^2 - 2gx)$; ভূপৃষ্ঠকে নির্দিষ্ট স্থান ধরলে P বিন্দুতে কণাটির স্থিতিশক্তি mgx কারণ mg বল কণাটিকে P বিন্দু হতে O বিন্দুতে আনতে mgx পরিমাণ কার্য (work) করে। অতএব এস্থলে, গতিশক্তি + স্থিতিশক্তি $= \frac{1}{2}m(u^2 - 2gx) + mgx = \frac{1}{2}mu^2$ (ধ্রুবক) (যেহেতু আদিবেগ u নির্দিষ্ট আছে)

ক্রিয়া বলক্ষেত্র (Field of force) ঃ

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী, কোনও কণার ভর m ত্বরণ $\vec{f}$ হলে এবং ক্রিয়াশীল বল $\vec{P}$ হলে $\vec{P} = m\vec{f}$ হবে, অর্থাৎ বলের এবং ত্বরণের দিশা অভিন্ন ধরলে বল = ভর × ত্বরণ হবে। এই ক্রিয়াবল P, সময় সরণ কিংবা বেগের উপর নির্ভরশীল হলে কণার গতি কীরূপ হবে তা নিয়ে আমরা এখন আলোচনা করব।

(i) ধরা যাক্ বল P কেবলমাত্র t সময়ের উপর নির্ভরশীল অর্থাৎ $P = P(t)$ তা হলে $P(t) = m\dfrac{dv}{dt}$ (ভর m ধ্রুবক ধরে) এখন উভয়পক্ষকে t সময় সাপেক্ষে সমাকলন করলে আমরা $mv - mu = \int_{t_0}^{t} P(t)dt$ যেখানে t_0 সময়ে $v = u$

আবার $v = \frac{dx}{dt}$ ধরে $m\frac{dx}{dt} = mu + \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt$ হতে পুনরায় সমাকলন করে আমরা সরণ x-কে t-এর অপেক্ষক রূপে পেতে পারে।

(ii) যদি P বলটি কেবলমাত্র সরণের উপর নির্ভরশীল হয়, তা হলে $P(x) = m\frac{dV}{dt} = mV\frac{dV}{dx}$ সমীকরণটি সমাধান করে আমরা পাই, $m\frac{V^2}{2} = \int P(x)dx + C$ অথবা $mV^2 = 2\int P(x)dx$ এখন $V = \frac{dx}{dt}$ ধরে আমরা পাই $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{2}{m}\int P(x)dx$

যদি জানা থাকে যে, $x = a$, বিন্দুতে $\frac{dx}{dt} = u$ (ধ্রুবক), তা হলে $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - u^2 = \frac{2}{m}\int_a^x P(x)\,dx$ হবে,

অতএব, $\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\left\{u^2 + \frac{2}{m}\int_a^x P(x)dx\right\}}$ হবে

কণাটি যদি x বৃদ্ধির দিকে গমন করে তা হলে ধনাত্মক চিহ্ন ধরে এবং কণাটি x হ্রাসের দিকে গমন করলে ঋণাত্মক চিহ্নটি ধরতে হবে।

অতএব $\int \frac{\pm dx}{\sqrt{\left\{u^2 + \frac{2}{m}\int_a^x P(x)dx\right\}}} = \int dt$

বামপক্ষকে সমাকলন করে এবং নির্দিষ্ট আদি সময় t_0-তে কণার অবস্থান x জানা থাকলে আমরা সরণকে সময়ের আপেক্ষক রূপে পেতে পারি।

(iii) যখন ক্রিয়াশীলবল P কেবলমাত্র বেগের উপর নির্ভরশীল হয়, তা হলে

আমরা দেখি যে, $m\frac{dV}{dt} = P(V) \to (A)$

অথবা $mV\frac{dV}{dx} = P(V) \to (B)$

(A) থেকে আমরা দেখি যে, $\int \frac{maV}{[P(V)]}\int dt$

এখন যদি দেওয়া থাকে যে, $t = t_0$ তে বেগ $V = u$

তা হলে $m\int_u^v \frac{dV}{P(V)} = (t - t_0)$ হবে ;

আবার (B) হতে আমরা দেখব যে, $m\int \frac{V\,dV}{P(V)}\int dx$

যদি $x = x_0$ অবস্থানে $V = u$ (ধ্রুবক) হয় তা হলে আমরা পাই যে, $m\int_u^v \frac{Vdu}{P(V)} = x - x_0$;

আমরা পরে নানাপ্রকার উদাহরণের সাহায্যে বিভিন্ন বলের অধীন কণার গতি নিয়ে আলোচনা করব।

আবেগ ও ঘাতবল (Impulse and Impulsive Force)

যদি m ভরবিশিষ্ট কোনও কণার উপর কোনও বল P অতি অল্পসময় ক্রিয়াশীল হয় তা হলে $m\frac{dV}{dt} = P$ সমীকরণটিকে সময়সাপেক্ষে তার অল্পসময় t হতে $t + dt$ পর্যন্ত সমাকল করে পাই

$$mV - mu = \int_t^{t+\delta t} P.\,dt$$

[সময় t-তে বেগ u এবং $t + \delta t$ সময়তে বেগ v ধরা হয়েছে)

আমরা P (ক্রিয়াশীল বল)কে অতি বৃহৎ এবং δt-কে অতিক্ষুদ্র সময় ধরে $\int_t^{t+\delta t} P.\,dt$-এর একটি সসীম মান পাইলে, এটিকে ঘাতবল (Impulsive force) বলা হয়ে থাকে ; $\int_t^{t+\delta t} P.\,dt$-কে t দ্বারা চিহ্নিত করলে $m(V - u) = 1$ হবে, অর্থাৎ অতি ক্ষুদ্র δt সময়ে কণার ভরবেগের পরিবর্তন ঘাতবলের সমান এবং একই দিকে হবে। ঐ অত্যল্প সময়ে কণার ভরবেগের পরিবর্তনকে বলে আবেগ (Impulse of the force) বলা হয়ে থাকে।

2.9 অনুশীলনী

উদাহরণ—1

যথাক্রমে t_1 এবং t_2 সেকেন্ড পরে ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত একটি কণার উচ্চতা h হলে দেখান যে কণাটির আদিবেগ $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)g$ এবং $h = \frac{1}{2}gt_1t_2$ হবে।

সমাধান ঃ

কণাটির আদিবেগ u ধরলে t সেকেন্ড পরে কণাটির উচ্চতা

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ হলে

অর্থাৎ $\frac{1}{2}gt^2 - ut + h = 0$

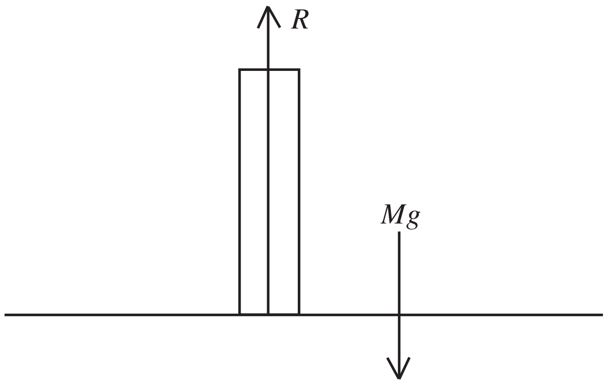
প্রশ্নানুসারে t_1 এবং t_2 দ্বারা উপরিউক্ত দ্বিঘাত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় ;

$\therefore\ t_1 + t_2 = \dfrac{2u}{g}$ এবং $t_1 t_2 = \dfrac{2h}{g}$;

সহজেই দেখা যায় যে, $u = \dfrac{1}{2} g(t_1 + t_2)$ এবং $h = \dfrac{1}{2} g t_1 t_2$

উদাহরণ—2

M ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি একটি লিফটের ভিতর দাঁড়িয়ে আছে। লিফ্‌টটির ত্বরণ f (ধ্রুবক) নিম্ন বা উর্দ্ধাভিমুখী হলে লিফ্‌টের পাটাতন উপরে ঐ ব্যক্তির চাপ নির্ণয় করুন।



সমাধান ঃ

যদি লোকটি পাটাতনের উপর R চাপ নীচের দিকে দেয়, তা হলে নিউটনের তৃতীয় গতীয় অনুসারে পাটাতনটিও ঐ লোকটির উপর R চাপ দিবে। এখন মাধ্যাকর্ষণ নিয়ম অনুযায়ী লোকটি ওজন Mg নিম্নাভিমুখী এবং সাম্যাবস্থায় অথবা লিফ্‌টটি সুষম গতিতে চলতে $(f = 0)$ হলে $R = Mg$ হবে।

কিন্তু লিফ্‌ট উর্দ্ধদিকে f ত্বরণে চললে, ব্যক্তিটিও ঐ ত্বরণ f পাবে

অতএব নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে

$Mf = R - Mg$ হবে অর্থাৎ $R = M(g + f)$ হবে।

লক্ষ্য করুন লোকটির আপাত ওজন $M(g + f)$ লোকটির প্রকৃত ওজনের বেশী হবে।

আবার অনুরূপভাবে আমরা সহজেই দেখতে পাই যে, লিফট যখন f ত্বরণে নীচের দিকে নামতে থাকে তখন

$Mf = Mg - R$ হলে

অর্থাৎ $R = M(g - f)$ হবে।

এখানে লোকটির আপাত ওজন $Mg - Mf$ তার প্রকৃত ওজন Mg হতে কম হবে।

যদি $f = g$ হয়, তখন $R = 0$ হয় এখানে পাটাতনের সঙ্গে লোকটির কোনও সম্পর্ক থাকে না।

উদাহরণ—3

OX অক্ষের উপর গমনরত m ভরবিশিষ্ট একটি কণার ত্বরণ mn^2x মূলবিন্দুগামী যেখানে O মূলবিন্দু এবং মূলবিন্দু হতে কণাটি যদি t সময়ে x দূরত্বে থাকে (অর্থাৎ t সময়ে কণাটির অবস্থার x অক্ষের উপর P বিন্দুতে থাকলে $OP = x$) ; এখন কণাটির আদিবেগ u (বেগ a যখন $t = 0$) হলে দেখান যে,

$$x = a\cos nt + \frac{u}{n}\sin nt \text{ হবে।}$$

সমাধান ঃ

যদি আদি দশায় $(t = 0)$ কণাটির O বিন্দু হতে a দূরত্বে থাকে।

এখানে নিউটনের দ্বিতীয় গতীয় সূত্রানুসারে $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x$

অর্থাৎ $\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$

এই অবকলন সমীকরণ সমাধান করলে আমরা পাই $x = A \cos nt + B \sin nt$ (1)

(A এবং B দুইটি ধ্রুবক রাশি এবং আমাদের তা নির্ণয় করতে হবে।)

প্রশ্নে দেওয়া আছে যে, $t = 0$ হলে $x = a$ হবে, অতএব $a = A$ (2)

আবার (1) কে t (সময়) সাপেক্ষে অবকলন করে পাই $\frac{dx}{dt} = -nA \sin nt + nB \cos nt$

এখানে $t = 0$ ধরলে $\frac{dx}{dt} = u = nB$ হয়,

অতএব $x = a \cos nt + \frac{u}{n}\sin nt$ হবে

উদাহরণ—4

সরলরেখায় গতিশীল m ভরবিশিষ্ট একটি কণার উপর এই সরলরেখায় অবস্থিত বলকেন্দ্র O হতে x দূরত্বে $\frac{m\mu}{x}$ পরিমাণ আকর্ষক বলটি ক্রিয়াশীল ; যদি স্থিরাবস্থা $x = a$ দূরত্ব থেকে কণাটি O-এর দিকে m ঐ বলদ্বারা আকৃষ্ট হয়ে সরলরেখায় চলতে থাকে তা হলে কণাটিকে মূলবিন্দু O তে পৌঁছুতে $a\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}$ সময় লাগবে।

সমাধান ঃ

এখানে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে আমরা $\frac{md^2x}{at^2} = -m\mu/x$ পাব ; x দূরত্বের কণাটির বেগ V ধরলে $mV\frac{dV}{dx} = -m\mu/x$ পাবে। এখন উভয় পক্ষকে x সাপেক্ষে সমাকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{V^2}{2} = -\mu\log x + c \quad \text{(i)}$$

যেখানে C একটি ধ্রুবক রাশি ; কিন্তু আদি অবস্থায় $x = a$ স্থানে কণাটি স্থিরাবস্থায় ছিল অর্থাৎ $x = a$ অবস্থায় $v = 0$ ছিল।

$\therefore \quad x = a$ (i) বসিয়ে আমরা দেখি যে, $0 = -\mu \log a + c$ (ii)

অতএব (i) এবং (ii) হতে $V^2 = 2\mu\log\frac{a}{x}$

দুদিকে বর্গমূল করলে $V = \frac{dx}{at} = -\sqrt{2\mu}(\log a - \log x)^{\frac{1}{2}}$ (iii)

(বলটি আকর্ষক বলে V-কে ঋণাত্মক ধরে, t সময়ের বৃদ্ধির সঙ্গে x-এর মান হ্রাস পাচ্ছে) অতএব যদি T সময়ে ঐ কণাটি মূল বিন্দু $x = 0$ পৌঁছায় তা হলে (iii) কে সমাকলন করে আমরা পাই $\sqrt{2\mu}\int_{t=0}^{T} dt \int_{x=a}^{0} \frac{dx}{(\log a - \log x)^{\frac{1}{2}}}$ অতএব $\sqrt{2\mu}T = \int_{a}^{0} \frac{dx}{(\log a - \log x)^{\frac{1}{2}}}$ (iv)

এখন $\log a - \cos x$ পরিবর্তে z^2 উপস্থাপনা করে আমরা $\frac{x}{a} = e^{-z^2}$ এবং দুই দিকে অবকলের সাহায্যে $dx = -2aze^{-\frac{z^2}{2}}dz$ পাই ;

উপরন্তু $x = a$ হলে $z = 0$ এবং $x \to 0$ হলে $z \to \alpha$ হবে।

তা হলে $\int_a^0 \frac{dx}{(\log a - \log x)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^a \frac{-2aze^{-\frac{z^2}{2}}dz}{z} = -2a\int_0^a e^{-z^2}dz = -2a\sqrt{\frac{\pi}{2}} = -a\sqrt{\pi}$ হবে ;

অর্থাৎ (iv) হতে দেখা যায় যে, $T = a\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}$

উদাহরণ—5

পৃথিবীর আকর্ষণে ভূপৃষ্ঠ হতে h দূরত্ব থেকে ভূপৃষ্ঠে পতনে একটি কণার কত সময় লাগবে, তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

ধরা যাক্ পৃথিবীর ব্যাসার্ধ a ; পৃথিবীর কেন্দ্রমুখী আকর্ষক বল, m ভরবিশিষ্ট কণার উপর হবে $\dfrac{m\mu}{(x+a)^2}$ যখন কণাটি ভূপৃষ্ঠ হতে x দূরত্বে থাকে।

উপরিউক্ত আকর্ষণ নিয়মে ভূপৃষ্ঠের উপর বল হবে $\dfrac{m\mu}{a^2}$ (যেহেতু ভূপৃষ্ঠে $x = 0$). একে সাধারণত mg ধরা হয়ে থাকে। অতএব $\mu = ga^2$ এখানে নিউটনীয় গতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mV\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{-m\mu}{(x+a)^2}$

[$V = \dfrac{dx}{dt}$ বেগ] এখন $\mu = ga^2$ ধরলে আমরা পাই $V\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{-ga^2}{(x+a)^2}$

এই অন্তরকলন সমীকরণটি সমাধান করে আমরা পাই, $\dfrac{V^2}{2} = \dfrac{ga^2}{(x+a)}$ + একটি ধ্রুবক রাশি, যদি আমরা ধরে নিয়ে যে $x = h$ অর্থাৎ আদি অবস্থানে কণাটির বেগ $V = 0$ দিন, তা হলে দেখা যাবে যে ধ্রুবক রাশিটি $\dfrac{-ga^2}{h+a}$.

অতএব $V^2 = 2ga^2\left[\dfrac{1}{x+a} - \dfrac{1}{h+a}\right] = \dfrac{2ga^2(h-x)}{(h+a)(x+a)}$ এখন $V = \dfrac{dx}{dt}$ ধরি এবং উভয়পক্ষের বর্গমূল করে পাই, $\dfrac{dx}{dt} = -\sqrt{\dfrac{2g}{h+a}}.a\left(\dfrac{h-x}{x+a}\right)^{\frac{1}{2}}$ ..... (1)

[যেহেতু x-এর মান হ্রাস পেতে থাকলে t-এর মান বৃদ্ধি পায় এজন্য $\dfrac{dx}{dt}$ ঋণাত্মক রাশি]

এখন (1)-কে সমাকলন করে আমরা দেখব যে কণাটির ভূপৃষ্ঠ পতনের সময় T হলে

$$T = -\int_{x=h}^{0}\left(\frac{h+a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{x+a}{h-x}}\,dx \quad ;$$

এই সমাকলটি সমাধান করবার জন্য $(x + a) = (h + a)\cos^2\theta$ ধরলে $dx = -2(h + a)\sin\theta\cos\theta\, d\theta$ হবে ;

আবার, $x = h$ হলে $\theta = 0$ এবং $x = 0$ অবস্থায়

$\theta = \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{a}{h+a}}$ হয়, পুনশ্চ $\sqrt{\dfrac{x+a}{h-x}} = \cot\theta$

তা হলে আমরা পাব $T = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{h+a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^a 2(a+h)\cos^2\theta\, d\theta \left[\alpha = \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{a}{a+h}}\right]$

অতএব $T = \left(\dfrac{h+a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{(a+h)}{a}\displaystyle\int_0^a (1+\cos 2\theta)\, d\theta$

$$= \frac{(h+a)^{\frac{1}{2}}}{2g} \times \frac{(a+h)}{a}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)_0^{\alpha}$$

$$= \frac{(h+a)^{\frac{1}{2}}}{2g} \times \frac{(a+h)}{a}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)$$

$\alpha = \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{a}{a+h}} = \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{h}{a+h}}$ বসিয়ে

আমরা দেখি যে নির্ণেয় সময়

$$T = \sqrt{\frac{h+a}{2g}}\left[\frac{a+h}{a}\sin^{-1}\sqrt{\frac{h}{a+h}} + \sqrt{\frac{h}{a}}\right]$$

উদাহরণ—6

M ভর বিশিষ্ট একটি কামান হতে m ভরবিশিষ্ট একটি গোলা ছোড়া হলে E পরিমাণ গতিশক্তি উৎপন্ন হলে। দেখান যে, যেদিকে গোলাটি ছোড়া হলে তার বিপরীত দিকে $\sqrt{\dfrac{2ME}{M(M+m)}}$ বেগে কামানটি যাবে।

সমাধান ঃ

যদি গোলাটি V বেগে সম্মুখে যায় এবং কামানটি V বেগে পশ্চাতে যায়। তা হলে $MV = mv$ .... (i) হবে।

আবার দেওয়া আছে যে, এই গোলা ছুড়বার জন্য E পরিমাণ গতিশক্তি উৎপন্ন হয় ; E হবে গোলাটি এবং কামানটির গতিশক্তির যোগফল।

অতএব $E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2$ .... (ii)

কিন্তু (i) হতে আমরা পাই $V = \frac{MV}{m}$

এখন $V = \frac{MV}{m}$ (ii) তে রাখলে আমরা দেখি যে $E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\,\frac{M^2V^2}{m}$

অতএব $V^2 = \frac{2mE}{M(m+M)}$; এখন বর্গমূল নিয়ে $V = \sqrt{\frac{2mE}{M(m+M)}}$

উদাহরণ—7

m ভরবিশিষ্ট একটি গোলা v বেগ নিক্ষিপ্ত হয়ে M ভরবিশিষ্ট একটি তক্তার অভ্যন্তরে প্রবেশ করে তার মধ্যেই থাকে।

দেখান যে এজন্য মোট গতিশক্তির $\frac{M}{M+m}$ অংশ হ্রাস পায়।

সমাধান ঃ

গোলাটি প্রবেশ করলে যদি গোলাটির এবং তক্তাটির সাধারণ বেগ V হয় তা হলে রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণ বিধি অনুসারে $mV = (M + m)V$ হবে ;

অর্থাৎ $V = \frac{mV}{M+m}$ হয়।

এজন্য মোট গতিশক্তির হ্রাসের পরিমাণ দাঁড়ায় $\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}\,\frac{m^2V^2}{(M+m)}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{MmV^2}{(M+m)} = \frac{1}{2}mV^2\left(\frac{M}{M+m}\right)$$

$$= (\text{আদি গতিশক্তি}) \times \left(\frac{M}{M+m}\right)$$

2.10 সারাংশ

নিউটনের গতীয় সূত্র প্রয়োগ করে এবং সুবিধামত একক নিয়ে কোনও বস্তুর মাধ্যাকর্ষণজনিত ভূপৃষ্ঠে পতন এবং অন্যান্য প্রকার বলপ্রয়োগে ব স্তুর গতিসংক্রান্ত সমস্যার সমাধান অথবা বস্তুর ভরবেগ পরিবর্তন ইত্যাদি কীরূপ হবে তা নিয়ে অনুশীলনীর বিভিন্ন উদাহরণে দেখান হয়েছে।

এই এককটি পাঠ করলে গতিবিজ্ঞানের মূল সূত্র এবং তাদের সম্যক প্রয়োগ আপনাদের আয়ত্তে আসবে।

2.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী (উত্তর সম্বলিত)

1. একই সময়ে কোনো বিন্দু থেকে দুটি কণা উল্লম্বরেখায় প্রক্ষিপ্ত হলে, একটি ঊর্ধ্বমুখে এবং অপরটি নিম্নদিকে। ভূপৃষ্ঠে পড়তে প্রথম কণাটির t_1 সেকেন্ড এবং দ্বিতীয়টির t_2 সেকেন্ড সময় লাগে। প্রমাণ করুন যে ঐ কণা দুইটির যে কোনও একটিকে ঐ বিন্দু হতে স্থিরাবস্থা হতে ছেড়ে দিলে ভূপৃষ্ঠে পৌঁছাতে $\sqrt{t_1 t_2}$ সেকেন্ড সময় লাগবে।

2. একটি উল্লম্ব স্তম্ভের শীর্ষদেশ হতে পতনশীল একটি কণা যখন x মিটার নীচে নেমে আসে তখন ঐ স্তম্ভের শীর্ষদেশ হতে y মিটার নীচে অবস্থিত একটি বিন্দু থেকে অন্য একটি কণাকে ছেড়ে দেওয়া হল। যদি দুইটি কণাই স্থিরাবস্থা হতে পতিত হয় এবং সময়ে ভূপৃষ্ঠে পৌঁছায়, তা হলে দেখান যে, স্তম্ভটির উচ্চতা $\dfrac{(x+y)^2}{4x}$ মিটার।

3. ভূপৃষ্ঠ হতে $\sqrt{2gy}$ মিটার/সেকেন্ড আদিবেগ নিয়ে উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বদিকে গমনরত একটি রকেট সর্বাধিক উচ্চতায় উঠিবার পর ঐ রকেটটিতে বিস্ফোরণ ঘটিল। রকেটটির যাত্রাস্থল এবং ঐ স্থল হতে x মিটার দূরে ভূপৃষ্ঠে কোনও বিন্দুতে ঐ বিস্ফোরকের শব্দ আসিতে যে সময় লাগে তাদের অন্তর $\dfrac{1}{n}$ সেকেণ্ড হলে, দেখান যে শব্দের গতিবেগ প্রতি সেকেন্ডে $n\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)$ মিটার।

4. সুষম ত্বরণে (f মিটার/সেকেন্ডে^{2}) নিয়ে গতিশীল একটি লিফ্‌টে অবস্থিত এক ব্যক্তি লিফ্‌টের সাপেক্ষে মিটার/সেকেন্ড বেগে উর্ধ্বমুখে নিক্ষেপ করে আবার t সেকেন্ড পরে তা ধরে ফেলে। প্রমাণ করুন যে, $f+g=\dfrac{2v}{t}$

5. একটি বালক h গভীরতা বিশিষ্ট একটি শূন্য যার ভিতর একটি পাথরখণ্ড ফেলে দেয় এবং t সেকেন্ড পরে ঐ খাদের তলদেশ পাথরটির আঘাতের শব্দ শুনতে পায়। যদি যাদের গভীরতা h এর তুলনায় শব্দের গতিবেগ V খুব বড়ো হয় [যেজন্য $\left(\dfrac{h}{V}\right)^2$, উপেক্ষণীয় হয়] তা হলে প্রমাণ করুন যে $2h\left(1+\dfrac{gt}{v}\right)=gt^2$.

6. কোনও সরলরেখায় গমনরত একটি কণার ত্বরণ যদি ঐ সরলরেখার উপরে অবস্থিত কোনও নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে থাকে এবং কণাটির দূরত্ব ঐ স্থিরবিন্দু হতে x হলে এই ত্বরণের মান n^2x, এখন যদি কণাটি ঐ স্থির বিন্দু হতে ঐ সরলরেখায় অবস্থিত y দূরত্বে কোনও বিন্দু হতে v বেগে ঐ বিন্দুর দিকে ছোঁড়া হয় **তা হলে দেখান যে** $\dfrac{1}{n}\tan^2\dfrac{ny}{v}$ সময় পরে ঐ কণাটি স্থিরবিন্দুতে পৌঁছাবে।

7. সরলরেখায় গমনরত m ভরবিশিষ্ট একটি কণার উপর মূলবিন্দু থেকে x দূরত্বে mn^2x বিকর্ষক বল

ক্রিয়াশীল থাকলে আদি দশায় অর্থাৎ $t = 0$ সময়ে কণাটি মূলবিন্দু থেকে a দূরত্বে স্থিরাবস্থায় থাকলে t সময় পরে মূলবিন্দু হতে কণাটির দূরত্ব এবং গতিবেগ যথাক্রমে $a \cosh nt$ এবং $n\sqrt{x^2 - a^2}$ হইবে।

8. দেখান যে, ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত একটি বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে পৃথিবীর অভ্যন্তরে কোনও ঋজু মসৃণ সুড়ঙ্গ পথে একটি কণাকে ভূপৃষ্ঠে অন্য একটি বিন্দু পৌঁছাতে প্রায় পৌনে একঘণ্টা সময় লাগবে।

9. M ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু H ধ্রুবক হারে কর্মরত একটি ইঞ্জিন দ্বারা ক্রিয়াশীল হয়ে ধ্রুবক বাধা R সত্ত্বেও একটি সরলরেখায় চলছে।

দেখান যে ঐ বস্তুটির চরম দ্রুতির মান $\frac{H}{R}$ হবে এবং স্থিরাবস্থা হতে ঐ চরমদ্রুতির অধিক পৌঁছাতে $\frac{MH}{R^2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$ সময় লাগবে।

10. M ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু H ধ্রুবক হারে কর্মরত একটি ইঞ্জিন দ্বারা কোনও সরলরেখায় চলতে হতে থাকলে যখন তার বেগ V হয় তখন kV^2 পরিমাণ বাধা পায় (k ধ্রুবক) ; স্থিরাবস্থা হতে যাত্রা শুরু করলে দেখান যে যখন তা s পরিমাণ দূরত্ব যাবে,

$$\frac{3sk}{M} = -\log_e\left(1 - \frac{kV^3}{P}\right)$$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

11. ধ্রুবক হারে কর্মরত একটি ক্রিয়াশীল বল দ্বারা প্রভাবিত হয়ে কোনও একটি কণা আদিতে u বেগ নিয়ে একটি সরলরেখায় x দূরত্ব অতিক্রম করার পরে তার বেগ দাঁড়ায় V, প্রমাণ করুন যে ঐ দূরত্ব অতিক্রম করতে কণাটির $\frac{3(u+V)x}{2(u^2+V^2+uV)}$ সময় লাগবে।

12. একটি মসৃণ অতি ক্ষুদ্র কপিকল উপর একটি সুষম রজ্জু উভয়দিকে প্রলম্বিত আছে ; যখন কপিকলটির একদিকে রজ্জুটির দৈর্ঘ্য $a + b$ এবং অন্য দিকে রজ্জুটির দৈর্ঘ্য $a - b$ $(a > b)$ তখন হতে রজ্জুটির গতি শুরু হলে দেখান যে $2a$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঐ রজ্জুটি $\sqrt{\frac{a}{g}}\log\left\{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right\}$ সময় পরে ঐ কপিকল হতে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন হবে।

13. কোনও অন্তর্ঘাত বিস্ফোরণ হেতু $(m_1 + m_2)$ ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু m_1 এবং m_2 ভর বিশিষ্ট দুইটি বস্তুতে বিভক্ত হয়ে যায় এবং এজন্য E পরিমাণ গতীয় শক্তি উৎপন্ন হয়। প্রমাণ করুন যে বিস্ফোরণের পরে

যদি m_1 এবং m_2 ভরবিশিষ্ট বস্তু দুইটি একই সরলরেখায় চলতে থাকে তা হলে দেখান যে তাদের আপেক্ষিক বেগ $\sqrt{\dfrac{2E(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$ হবে।

14. E পরিমাণ গতীয় শক্তি উৎপাদনকারী একটি অন্তর্ঘাতী বিস্ফোরণ কোনও নির্দিষ্ট দিকে v বেগে চলমান M ভরবিশিষ্ট একটি গোলাকে এমন দুটি অংশে ভেঙ্গে ফেলে যেন ঐ দুইটি অংশের ভর $m_1 : m_2$ অনুপাতে থাকে। যদি অংশ দুইটি পূর্বে নির্দিষ্ট V বেগ দিশায়ই চলতে থাকে তবে প্রমাণ করুন ঐ অংশ দুইটির বেগ হবে $V+\sqrt{\dfrac{2m_1F}{m_1M}}$ এবং $V-\sqrt{\dfrac{2m_2F}{m_2M}}$.

15. একটি চলমান লিফ্‌টে স্প্রিং-তুলায় w_1 ওজনবিশিষ্ট একটি বস্তুর ওজন যদি w_2 দেখা যায়, তবে দেখান ওজন করার সময় লিফ্‌টের ত্বরণ হল $g(w_1 - w_2)/w_1$।

একক 3 ❑ সরল সমঞ্জস গতি (Simple Harmonic Motion)

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

এই 4নং এককে সরল সমঞ্জস গতির জন্য ব্যাখ্যা করে ঐরূপ গতির জন্য যে দোলন হয়, তার অবকল সমীকরণ ব্যবহার করা হয়েছে। এতদ্ব্যতীত দুটি দোলনের লব্ধি, প্রণোদিত দোলন এবং অবমন্দিত প্রণোদিত দোলনের আলোচিত হয়েছে ; এ প্রসঙ্গে অনুনাদের কথাও বলা হয়েছে।

3.2 উদ্দেশ্য

পদার্থ বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় যেমন শব্দবিজ্ঞান (Accoustics) তড়িৎ চুম্বক বিদ্যা (Electromagnetic theory) ইত্যাদিতে এবং গতিবিদ্যার বিভিন্ন শাখায় সরল সমঞ্জস দোলনের দূরত্ব অপরিসীম। এজন্য এই এককে বিভিন্ন প্রকারের দোলনের ধর্ম অবকল বিজ্ঞানের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

3.3 সরল সমঞ্জস গতির প্রকৃতি এবং ঐরূপ গতির দোলনের জন্য অবকল সমীকরণ (Differential equation) দোলনকাল (Periodic time), দোলনের বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক (frequency)

একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল বল যদি সর্বদা একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দুর অভিমুখে থাকে এবং ঐ বলের মান যদি ঐ কণাটি হতে স্থিরবিন্দুর দূরত্বের সমানুপাতিক হয় তা হলে কণাটির গতিকে সরল সমঞ্জস দোলনগতি বলা হয় এবং ঐ বলকে প্রত্যানয়ক বল বলা হয়।

ধরা যাক্ কণাটি x অক্ষের উপর চলমান এবং ঐ রেখায় উপর একটি স্থিরবিন্দু ; সরল সমঞ্জস গতিতে m ভরবিশিষ্ট কোনও চলমান কণা P $(OP = x)$ বিন্দুতে থাকলে ঐ কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল হবে mn^2x (n^2 ধ্রুবক রাশি) এবং ঐ বলটি PO অভিমুখে হবে।

এখন নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী আমরা পাই $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x$

অর্থাৎ $\dfrac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$; .... (1)

এটিই সরল সমঞ্জস দোলনগতি অবকল সমীকরণ (differential equation).

লক্ষ্য করুন যে ঐ সমীকরণটি রৈখিক (linear), সমঘাতীয় (homogeneous) এবং দ্বিতীয় ক্রমের (second order) হবে।

(i) নং সমীকরণটিতে $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ এর গুণাংক (coefficient) এবং x এর গুণাংক n^2 (ধ্রুবক) ধরা হয়েছে। এস্থলে অবকল সমীকরণ সমাধানের নিয়মানুযায়ী $x = e^{pt}$ ধরে আমরা দেখব $p^2 + n^2 = 0$

অর্থাৎ $P = \pm\ in.$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ এবং

আমরা পাইব $x = A\cos\ nt + B\sin\ nt$ (i)

(যেখানে A এবং B ধ্রুবকরাশিদ্বয়)

পুনরায় $A = a\ \cos\ \varepsilon$ এবং $B = a\ \sin\ \varepsilon$

ধরলে $a = \sqrt{A^2 + B^2}$ এবং $\varepsilon = \tan^{-1}\left(\dfrac{B}{A}\right)$

এবং $x = a\ \cos\ (nt + \varepsilon)$ .... (ii)

(i) এবং (ii) হতে সহজেই দেখা যাবে কোনও নির্দিষ্ট সময় হতে $\frac{2\pi}{n}$ সময়ে পরে x-এর মান অপরিবর্তিত থাকবে ; অর্থাৎ কণাটি সরলরেখাটির উপর যদি কখনও P বিন্দুতে থাকে তা হলে পুনরায় $\frac{2\pi}{n}$ সময় পরে আবার ঐ বিন্দুতে ফিরিয়া আসবে এবং যতক্ষণ ঐ প্রত্যানয়ক বল ঐ কণাটির উপর ক্রিয়াশীল থাকবে ততক্ষণ $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}\ldots\ldots$ ইত্যাদি সময় পরে তা একই অবস্থানে ফিরে আসবে। এখানে $\frac{2\pi}{n}$ কে ঐ দোলনের পর্যায় কাল বা দোলন কাল (Periodic time) বলা হয়ে থাকে। পর্যায়কালের ব্যস্ত সংখ্যা $\frac{n}{2\pi}$ কে দোলনটির বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক (Frequency) এবং n কে কম্পাঙ্ক বলা হয়।

সরণ $x = a \cos (nt + \varepsilon)$ হলে যেহেতু $-1 \leq \cos (nt + \varepsilon) \leq +1$

অতএব সরণ x সর্বদা $-a$ এবং $+a$-র মধ্যে থাকবে ; a কে ঐ সরল সমঞ্জস দোলনের বিস্তার (Amplitude) $(nt + \varepsilon)$ কে দশা কোণ (Phase angle) এবং ε কোণকে আদিদশা (intial phase epoch) বলা হয়ে থাকে।

সহজেই দেখা যায় যে, সরল সমঞ্জস গতির সরণ $x = a \cos (nt + \varepsilon)$ ধরলে

বেগ $\frac{dx}{dt} = -na\sin(nt+\varepsilon) = +na\cos\left(nt+\varepsilon+\frac{\pi}{2}\right)$

এবং ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2a\cos(nt+\varepsilon) = n^2a\cos(nt+\varepsilon+\pi)$ হবে।

উপরের আলোচনা হতে আমরা দেখি যে, কোনও সরল সমঞ্জস গতির প্রকৃতি সম্পূর্ণ জানতে হলে তার বিস্তার, দশা কোণ এবং আদি দশা এই তিনটি রাশিরই মান জানা প্রয়োজন।

লক্ষ্য করুন যে, সরল সমঞ্জস গতির দোলনের বেগের দশাকোণ গতির সরণের দশা কোণ অপেক্ষা $\frac{\pi}{2}$ বেশি এবং ত্বরণের দশা কোণ ঐ বেগ অপেক্ষা $\frac{\pi}{2}$ বেশি ; অর্থাৎ ত্বরণের দশা কোণ সরণের দশা কোণ অপেক্ষা π বেশি।

3.4 সরণ সমঞ্জস গতির ক্ষেত্রে শক্তির সংরক্ষণ

সরণ সমঞ্জস দোলনে কোনও চলমান কণার উপর প্রত্যানয়ক বল যে স্থির বিন্দু অভিমুখী তাকে O ধরে t সময়ে কণার অবস্থান x ধরলে আমরা দেখেছি যে,

$x = a\cos(nt+\varepsilon)$ হবে ; [a বিস্তার, $\frac{2\pi}{n}$ পর্যায়কাল এবং $nt + \varepsilon$ দশা কোণ এবং ক্রিয়াশীল প্রত্যানয়ক বল $-n^2x$]

অতএব t সময়ে কণাটির গতিশক্তি যখন তার অবস্থান স্থিরবিন্দু হতে x দূরত্বে থাকবে তখন $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2n^2 \sin^2(nt+\varepsilon)$ হবে কণাটির ভর m^2 আবার ঐ স্থির বিন্দুতে $(x = 0)$ তে কণার স্থিতিশক্তি শূন্য ধরলে কণাটি যখন O হতে x দূরত্বে যাবে তখন তার স্থিতিশক্তি প্রত্যানয়ক বল $-n^2x$ কণাটিকে x দূরত্ব অতিক্রম করে O বিন্দুতে নিয়ে যেতে যে কার্য করে তার সমান হবে।

$$\text{এই স্থিতিশক্তি} = -m\int_x^o n^2x\,dx = m\frac{n^2x^2}{2} = m\frac{n^2}{2}a^2 \cos^2(nt+\varepsilon)$$

এইরূপে দেখা যায় যে, এক্ষেত্রে গতিশক্তি + স্থিতিশক্তি

$$= \frac{1}{2}mn^2a^2\sin^2(nt+\varepsilon) + \frac{1}{2}mn^2a^2\cos^2(nt+\varepsilon)$$

$= \frac{1}{2}mn^2a^2$, যা একটি ধ্রুবক রাশি।

3.5 দুইটি সরল সমঞ্জস দোলনের লব্ধি

একটি কণার কোনও সরলরেখায় যদি দুইটি সরল সমঞ্জস দোলনে থাকে, তা হলে সরল সমঞ্জস দোলনের অবকল সমীকরণ রৈখিক বলে আমরা ঐ দুইটি দোলনের লব্ধি নির্ণয় করতে পারি।

দুটি দোলনের দোলনকাল একই হলে ধরা যাক উভয়েরই দোলনকাল $\frac{2\pi}{n}$ অর্থাৎ কম্পাঙ্ক n সমান ; ঐ দুইটি দোলনের x অক্ষের উপর সরণ x_1 এবং x_2 ধরলে $x_1 = a_1\cos(nt+\varepsilon_1)$

এবং $x_2 = a_2\cos(nt+\varepsilon_2)$ হবে। (a_1 এবং a_2 দুইটি দোলনের বিস্তার) এখন দোলন দুইটির লব্ধির x অক্ষের উপর সরণ হবে।

$x_1 + x_2 = a_1\cos(nt+\varepsilon_1) + a_2\cos(nt+\varepsilon_2)$

$= (a_1\cos\varepsilon_1 + a_2\cos\varepsilon_2)\cos nt$

$= (a_1\sin\varepsilon_1 + a_2\sin\varepsilon_2)\sin nt$

$= A\cos nt + B\sin nt$; .... (2)

এখানে $A = a_1\cos\varepsilon_1 + a_2\cos\varepsilon_2$ এবং $B = -(a_1\sin\varepsilon_1 + a_2\sin\varepsilon_2)$ ....(3)

আমরা লিখতে পারি $x_1 + x_2 = a\cos(nt+\varepsilon)$

যেখানে $A = n \cos \varepsilon$ $B = -a \sin \varepsilon$.............(4)

অর্থাৎ$a = \sqrt{a^2 \cos^2 \varepsilon + a^2 \sin^2 \varepsilon} = \sqrt{A^2 + B^2}$ এবং $\tan \varepsilon = -\dfrac{B}{A} = \dfrac{a_1 \sin \varepsilon_1 + a_2 \sin \varepsilon_2}{a_1 \cos \varepsilon_1 + a_2 \cos \varepsilon_2}$ ....(5)

লক্ষ্য করুন যে $a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$ হতে আমরা দেখতে পাই যে, সমান পর্যায়কাল বিশিষ্ট দুইটি সরল সমঞ্জস দোলনের পর্যায়কাল একই হবে এবং তাদের লব্ধির বিস্তার a এবং আদি দশা কোণ ε এর মান (5) এবং (6) দ্বারা পাওয়া যাবে।

যখন $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ তখন $A = (a_1 + a_2)\cos \varepsilon_1$ এবং $B = -(a_1 + a_2)\sin \varepsilon_1$ এবং লব্ধির বিস্তার $a_1 + a_2$ হবে যদি দোলনদ্বয়ের দিশা একই দিকে থাকে ; আবার যখন $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \pi$ তখন $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2}$

$= a_1 + a_2$ হবে

এখন $a_1 = a_2$ হলে বিস্তারে যখন শূন্য হবে।

দুইটি সরল সমঞ্জস দোলনের পর্যায়কাল বা বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক যদি প্রায় সমান হয় তখন দোলন দুইটিকে এইরূপে লেখা যায় ; $x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1)$ এবং $x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2)$

যেখানে $\omega_1 - \omega_2$ একটি ক্ষুদ্র রাশি ; একে w দ্বারা চিহ্নিত করা যাক।

অতএব $x_1 = a_1 \cos [(\omega_2 + w')t + \varepsilon_1] = a_1 \cos (\omega_2 t + \varepsilon_3)$ এবং $x_2 = a_2 \cos (\omega_2 t + \varepsilon_2)$

যেখানে $\varepsilon_3 = \omega' t + \varepsilon_1$

লক্ষ্য করুন যে এখানে ε_3 ধ্রুবক রাশি নয়।

এটি সময় t উপর নির্ভরশীল।

এস্থলে দুইটি দোলনের লব্ধি $x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega_2 t + \varepsilon_3) + a_2 \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2)$

$= a \cos (\omega_2 t + \varepsilon)$

এখানে $a \cos \varepsilon = a_1 \cos \varepsilon + a_2 \cos \varepsilon_2$

এবং $a \sin \varepsilon = a_1 \sin \varepsilon_3 + a_2 \sin \varepsilon_2$

অতএব $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)$

এবং $\tan \varepsilon = \dfrac{a_1 \sin \varepsilon_3 + a_2 \sin \varepsilon_2}{a_1 \cos \varepsilon_3 + a_2 \cos \varepsilon_2}$

এখন $\varepsilon_3 = \omega_2 t + \varepsilon_1$ বসালে আমরা পাই

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\omega' t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

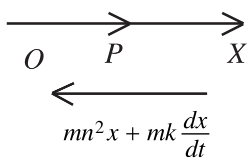
এবং $\tan\varepsilon = \dfrac{a_1 \sin(\omega' t + \varepsilon_1) + a_2 \sin\varepsilon_2}{a_1 \cos(\omega' t + \varepsilon_1) + a_2 \cos\varepsilon_2}$

আমরা দেখতে পাই যে, এক্ষেত্রেও সরল সমঞ্জস দোলন দুটির লব্ধি একটি সরল সমঞ্জস দোলন হতে সামান্য পৃথক, এই দোলনের বিস্তার ও আদি দশা কোণ অতি ধীরে সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়ে ; কিন্তু ঐ লব্ধির বিস্তার $a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\omega' t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2)]^{1/2}$

সকল সময়ই $a_1 - a_2$ এবং $a_1 + a_2$ মধ্যে থাকবে (যেহেতু $\cos(\omega' t + \varepsilon_1 - t_2)$ এর মান -1 এবং $+\ 1$ এর মধ্যে থাকে)।

3.6 অবমন্দিত সমঞ্জস দোলন (Damped harmonic oscillation)

আমরা পূর্বে সরল সমঞ্জস দোলন নিয়ে আলোচনা করছি সেখানে আমরা লক্ষ্য করেছি যে দোলনের বিস্তার সময়ের সঙ্গে অপরিবর্তিত থাকে এবং দোলনটি বরাবর চলতে থাকবে। কিন্তু বাস্তবক্ষেত্রে আমরা দেখতে পাই নানা সময়ের সঙ্গে সঙ্গে এই দোলন বাধা প্রাপ্ত যে এবং তার বিস্তার আস্তে আস্তে কমে আসে। কণাটির উপর কেন্দ্রাভিমুখী প্রত্যানয়ক বল ছাড়া যে বাধা আসে সেই বাধাকে আমরা বেগের সমানুপাতিক এবং কেন্দ্রাভিমুখী ধরব।



যদি O কেন্দ্রবিন্দু, ox অক্ষের উপর কণাটি চলমান এবং O থেকে x দূরত্বে P বিন্দুতে কোনও সময়ে কণাটির অবস্থান ধরলে নিউটনের দ্বিতীয় গতীর সূত্র অনুসারে কণাটির গতির অবকল সমীকরণ $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x - mk\dfrac{dx}{dt}$ কণাটির ভর m। mn^2x প্রত্যানয়ক বল।

$mk\frac{dx}{dt}$ বাধার জন্য বল এবং k একটি ধ্রুবক রাশি ধরা হয়েছে। দেখা যাচ্ছে যে ঐ সমীকরণটি ধ্রুবক গুণাংক বিশিষ্ট দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ।

প্রথম প্রচলিত নিয়ম অনুযায়ী আমরা $x = e^{pt}$ = সমীকরণে লাইনে পাই $\left(p^2 + kp + n^2\right)e^{pt} = 0$

কিন্তু $e^{pt} \neq 0$ অতএব $p^2 + kp + n^2 = 0$

এই দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করে আমরা P এর দুইটি মান পাই, এগুলি যথাক্রমে

$-\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - n^2}$ এবং $-\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - n^2}$

দেখা যাচ্ছে যে কণাটির সরণ x, $\frac{k^2}{4} - n^2$ এর মানের উপর নির্ভরশীল।

(i) যখন বাধা দুর্বল $\frac{k^2}{4} - n^2$ একটি ঋণাত্মক রাশি = $-\ \omega^2$ (ধরা যাক্ যেখানে ω বাস্তব) তখন $p = -\frac{k}{2} + i\omega$ এবং $p = -\frac{k}{2} - i\omega$

হবে এবং সরণ $x = ae^{-kt/2}\cos(\omega t + \alpha)$ (a এবং α ধ্রুবক) হবে। এক্ষেত্রে এই দোলনকে স্বল্প অবমন্দিত দোলন বলা হয়,

দেখা যাচ্ছে যে, এস্থলে এই অবমন্দিত দোলনের বিস্তার $ae^{\frac{-kt}{2}}$ যা সময়ের সঙ্গে হ্রাস পাচ্ছে এবং এই দোলনের পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}}}$ যাহা মন্দন হীন দোলনের পর্যায়কাল $(2\pi/n)$ অপেক্ষা বৃহত্তর, এজন্য বাধা দুর্বল হলে অবমন্দিত দোলনের কম্পাঙ্ক মন্দনহীন দোলনের কম্পাঙ্ক অপেক্ষা ক্ষুদ্রত্তর হবে।

এখন $n^2 = \frac{k^2}{4}$ হবে তখন পূর্বের দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় সমান $-\frac{k}{2}, \frac{-k}{2}$ হবে।

এস্থলে সরণ $x = (A + Bt)e^{\frac{-kt}{2}}$

অর্থাৎ কণাটির কোনও দোলন গতি থাকবে না এবং তার গতিবেগ $\frac{dx}{dt} = \frac{-k}{2}(A + Bt)e^{\frac{-kt}{2}} + Be^{\frac{-kt}{2}}$ হতে দেখা যাচ্ছে যে সময়ের সঙ্গে কণাটির গতিবেগ হ্রাস পাবে এবং $t \to \infty$ অর্থাৎ অন্তিম দশায় ($t \to \infty$) তার গতিবেগ $V \to 0$ অর্থাৎ শূন্য হবে।

(iii) যখন $\frac{k^2}{4} - n^2$ ধনাত্মকরাশি, অর্থাৎ বাধা প্রবল $(k^2 > 4n^2)$ তখন ধরা যাক $\frac{k^2}{4} - n^2 = \omega'^2$ (ω' বাস্তব রাশি) এবং কণাটির সরণ x হবে।

$$Ce^{-\left(\frac{k}{2}+\omega'\right)t} + De^{-\left(\frac{k}{2}-\omega'\right)t}$$

এবং কণাটির বেগ হবে

$$-\left(\frac{k}{2} + \omega'\right)Ce^{-\left(\frac{k}{2}+\omega\right)t}$$

$$-\left(\frac{k}{2} - \omega'\right)De^{-\left(\frac{k}{2}-\omega'\right)t}$$

এক্ষেত্রেও কণাটির কোনও দোলন থাকবে না এবং সময়ের সঙ্গে গতিবেগ হ্রাস পাবে এবং $t \to \alpha$ অর্থাৎ অন্তিম দশায় কণাটি গতিহীন হবে।

3.7 প্রণোদিত দোলন (Force Oscillation)

সরল রেখায় গমন কোনও কণায় সরল সমঞ্জস গতির জন্য প্রত্যানয়ক বল থাকে, তা ব্যতীত কণাটির উপর অন্য বলও ক্রিয়াশীল থাকতে পারে।

স্থিরবিন্দু হতে যখন কণাটির সরণ x তখন সরল সমঞ্জস গতির জন্য প্রত্যানয়ক বল $-mn^2x$ (m কণাটির ভর) ব্যতীত ধরা যাক্ অন্য বল X ঐ রেখায় কণাটির উপর ক্রিয়াশীল। তা হলে নিউটনের দ্বিতীয় গতির সূত্র অনুসারে কণাটির গতির সমীকরণ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x + X \quad ....(A)$$

আমরা দুই প্রকারের বহিঃস্থ বল X নিয়ে আলোচনা করব।

(i) যখন X ধ্রুবক (x কিংবা t উপর নির্ভরশীল নয়), তখন দ্বিতীয় ক্রমের অবকল সমীকরণ (A) সমাধান করে আমরা পাই

$$x = a\cos(nt + \varepsilon) + \frac{X}{mn^2}$$

অর্থাৎ $\left(x - \frac{X}{mn^2}\right) = a\cos(nt + \varepsilon)$

তাহলে ধ্রুবক বলটির দোলনটির কম্পাঙ্কের কিংবা বিস্তারের উপর কোনও প্রভাব নাই, কেবলমাত্র কণাটির অবস্থানের পরিবর্তন হয়ে থাকে।

(ii) যখন বহিঃস্থ বল F_0 cos pt (যেখানে F_0 ধ্রুবক) মূল দোলনের উপর ক্রিয়াশীল হয় ; m ভর বিশিষ্ট কণাটির মূল দোলনের পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{n}$ ধরে নিউটনের দ্বিতীয় গতীয় সূত্র হতে পাই কণাটির গতীয় সমীকরণ হবে।

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x + F_0 \cos pt \ (A)$$

অর্থাৎ $\frac{d^2x}{dt^2 +}n^2x = \frac{F_0 \cos pt}{m}$

(এস্থলে আমি দশা হতে t সময় পরে মূলবিন্দু O হতে কণাটির সরণ x ধরা হয়েছে)

অবকল সমীকরণ সমাধান সূত্র অনুযায়ী ঐ সমীকরণ (A) হতে আমরা পাই

$$x = a\cos(nt + \varepsilon) + \frac{F_0 \cos pt}{m(D^2 + n^2)}\left[D \equiv \frac{d}{dt}\right]$$

এখন $p \neq n, x = a\cos(nt + \varepsilon) + \frac{F_0 \cos pt}{m(n^2 - p^2)}$ হইবে অর্থাৎ এই কণাটির দুইটি দোলন থাকবে, প্রথমটির পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{n}$ থেকে মুক্ত দোলন বলা যেতে পারে এবং F_0 cos Pt বল প্রয়োগের জন্য। কণাটির জন্য একটি দোলন যার পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{n}$ থাকবে ; এই দোলনটিকে প্রণোদিত দোলন বলা হয়ে থাকে।

যখন $P = n$ হবে অর্থাৎ প্রণোদিত বলের পর্যায়কাল মূল দোলনের পর্যায়কালের সমান হয়। তখন (A) সমীকরণটি সমান হবে $x = a\cos\ (nt + \varepsilon) + \frac{F_0 t \sin pt}{2nm}$ এক্ষেত্রে দেখা যায় যে F_0 cos Pt $(P = n)$ ক্রিয়াশীল বলের জন্য যে প্রণোদিত দোলন হয় তার বিস্তার $\frac{F_0 t}{2nm}$ হবে ; এই বিস্তার সময়ের সঙ্গে সঙ্গে বৃদ্ধি পায় এবং t অতিবৃহৎ হলে প্রণোদিত দোলনের বিস্তারও অতিবৃহৎ হবে। লক্ষ্য করতে হবে মুক্ত দোলনের এবং প্রণোদিত দোলনের পর্যায়কাল অথবা কম্পাঙ্ক একই বলে $t \to \infty$, দোলনের বিস্তার ও অসীমের দিকে যাবে ; এটিকে অনুনাদ (Resonance) বলা হয়ে থাকে। সাধারণত আমরা চেষ্টা করি যাতে মুক্ত দোলন এবং প্রণোদিত দোলনের পর্যায়কাল বা কম্পাঙ্ক পৃথক হয় যাতে অনুনাদ না ঘটে। এজন্য কোনও সেতুর উপর পদাতিক সৈন্যদলকে কুচকাওয়াজ করে যেতে নিষেধ করা হয় কারণ যদি সেতুটির প্রকৃত কম্পন এবং ঐ সৈন্যদলের কুচকাওয়াজ জনিত কম্পন সমান হয়। তা হলে অনুনাদের সৃষ্টি হয়ে সেতুটি ভাঙ্গিয়া পড়িবার সম্ভাবনা থাকে।

3.8 অবমন্দিত প্রণোদিত দোলন (Damped Forced Oscillation)

যদি x অক্ষের উপর m ভর বিশিষ্ট চলমান কণাটির উপর স্থিরবিন্দু O এর দিকে mn^2x বল ব্যতীত ঐ দিকে mkv বাধা এবং অন্য একটি বল F cos Pt বল ক্রিয়াশীল তা হলে কণাটির গতিপথের সমীকরণ (নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী) হবে $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x - mk\dfrac{dx}{dt} + F\cos pt$ .... (B)

এস্থলে k এবং F কে ধ্রুবক ধরা হয়েছে ; কণাটির গতির পথে $mk\dfrac{dx}{dt}$ পরিমাণ বাধা এবং কণাটির উপর F cos Pt দ্বারা P কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট F cos Pt দোলন প্রণোদিত হয়েছে। এখন এই (B) সমীকরণটিকে $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k\dfrac{dx}{dt} + n^2x = \dfrac{F}{m}\cos pt$ রূপে লেখা যায়

ঐ রৈখিক অবকল সমীকরণটি সমাধান করে আমরা পাই $x = Ae^{s_1t} + Be^{-s_2t} + \dfrac{F\cos pt}{m\left(D^2 + kD + n^2\right)}$

(A এবং B ধ্রুবক) $\left(D \equiv \dfrac{d}{dt}\right)$ s_1 এবং s_2 যেখানে $s^2 + ks + n^2 = 0$ দ্বিঘাত বীজগণিতীয় সমীকরণটির বীজদ্বয়।

আবার $\dfrac{F\cos pt}{m(D^2 + kD + n^2)} = \dfrac{F}{m}\dfrac{(D^2 - kD + n^2)\cos pt}{(D^2 + n^2)^2 - k^2D^2}$

এখন আমরা জানি যে D^2 এর পরিবর্তে $-P^2$ বসাতে হবে এবং D cos Pt = $-$ P sin Pt ধরতে হবে এজন্য $\dfrac{F\cos pt}{m\left(D^2 + kD + n^2\right)} = \dfrac{F}{m}\dfrac{\left(D^2 - kD + n^2\right)\cos pt}{\left(D^2 + n^2\right)^2 - k^2D^2}$

$= \dfrac{F}{m}\dfrac{(n^2 - p^2)\cos pt + kp\sin pt}{(n^2 - p^2)^2 + k^2p^2}$ হবে।

অতএব $x = Ae^{s_1t} + Be^{s_2t} + \dfrac{F}{m}\dfrac{\left(n^2 - p^2\right)\cos pt + kp\sin pt}{\left(n^2 - p^2\right)^2 + k^2p^2}$

সহজেই দেখা যায় যে, $S_1, S_2 = \left(-\dfrac{k}{2} \pm \sqrt{\dfrac{k^2}{4} - n^2}\right)$

যদি অবমন্দন মূল দোলনের কম্পাঙ্ক অপেক্ষা এরূপ কম হয় যাতে $\frac{k^2}{4} < n^2$ হয়। তখন $\frac{k^2}{4} - n^2$ ঋণাত্মক হবে এবং $S_1,\ S_2$

$= -\frac{k}{2} \pm i\sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}}$ হবে এবং তখন সরণ

$$x = A'e^{\frac{-kt}{2}} \cos\sqrt{n^2 \frac{-k^2}{4}}\ t + B'e^{\frac{-kt}{2}} \sin\sqrt{n^2 \frac{-k^2}{4} t}$$

$$+\frac{F}{m}\frac{(n^2 - p^2)\cos pt + kp\sin pt}{(n^2 - p^2)^2 + k^2p^2} \qquad (A',\ B' \text{ ধ্রুবক রাশিদ্বয়})$$

উপরের x এর লব্ধ মান হতে আমরা দেখতে পাই যে এক্ষেত্রে কণাটির দোলন দুইটি দোলনের লব্ধি, প্রথমটি অবমন্দন হেতু কণাটির মূল দোলন পরিবর্তিত হয়ে যে দোলনে পর্যবসিত হয় তার বিস্তার $e^{\frac{-kt}{2}}$ র উপর নির্ভরশীল এবং কম্পাঙ্ক $\sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}}$; এবং দ্বিতীয়টি P কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট প্রণোদিত দোলন ; সময়ের সঙ্গে সঙ্গে $e^{\frac{-kt}{2}}$ হ্রাস পায় এবং নিয়ত দশায় $(t \to \infty)$ মূল দোলনটি বিস্তার শূন্য হয় ; তখন শুধু প্রণোদিত দোলন থাকে ; এবং তার কম্পাংক অপরিবর্তিত থাকে।

আবার যদি প্রণোদিত দোলনের এবং মূল দোলনের কম্পাংক কমান হয় তা হলে প্রণোদিত দোলনের মান হবে $(n = P$ ধরি)

$\frac{F}{m}\frac{\sin pt}{kp}$; এখন বাধা যদি খুব সামান্য হয়, অর্থাৎ k অতি ক্ষুদ্র হয় তা হলে প্রণোদিত দোলনের মান B অতি বৃহৎ হবে এবং ঐ দোলন অনুনাদে পর্যবসিত হবে।

যদি বাধা $k\frac{dx}{dt}$ মূল দোলন অপেক্ষা অতিবৃহৎ হয় তখন $k^2 > 4n^2$ হবে এবং মূল দোলনের সরণ

$$x = e^{\frac{-kt}{2}}\left[Ce^{\sqrt{\frac{k^2}{4} - n^2 t}} + De^{-\sqrt{\frac{k^2}{4} - n^2 t}}\right]$$

(C এবং D ধ্রুবক রাশিদ্বয়) হবে এস্থলে নিয়ত দশায় $(t \to \infty)$ $x \to O$ হবে এবং কেবলমাত্র প্রণোদিত দোলনের কম্পাঙ্কের সমান কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট দোলন বর্তমান থাকবে।

3.9 স্থিতিস্থাপক রজ্জু (Elastic string)

আমরা দৈনন্দিন অভিজ্ঞতায় দেখতে পাই যে কোন ও বস্তুর উপর কোনও বহিস্থ বল প্রয়োগ করলে বস্তুটি দৃঢ় (rigid) না হলে তার আকৃতির ও আয়তনের পরিবর্তন ঘটে। যখন প্রতিমিত (balanced) বল প্রয়োগ করলে বস্তুটির আকৃতি ও আয়তন পরিবর্তিত হয় এবং ঐ বলটি সরিয়ে নিলে তা পূর্বের আকার ও আয়তন সম্পূর্ণ ফিরে পায় তা হলে ঐ বস্তুটিকে সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক (Perfectly elastic) বস্তু বলা হয়। আমরা এই পাঠক্রমে সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বা সংক্ষেপে শুধু স্থিতিস্থাপক রজ্জু নিয়ে আলোচনা করব।

সরলরেখায় অবস্থিত কোনও স্থিতিস্থাপক রজ্জুকে যদি তার দৈর্ঘ্য বরাবর কোনও টান দেওয়া হয় তা হলে ঐ টানের দিকে তার দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায় এবং রজ্জুটির একক দৈর্ঘ্যের মানের বৃদ্ধি ঐ টানের সমানুপাতিক হয়।

ধরা যাক্ O স্থিরবিন্দু এবং l দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি স্থিতিস্থাপক রজ্জুর দুইটি প্রান্ত O এবং A যদি T টানের জন্য রজ্জুটির দৈর্ঘ্য AB পরিমাণ বৃদ্ধি পায় অর্থাৎ রজ্জুটি প্রান্তবিন্দু দুইটি O এবং B হয়। তা হলে $T = \lambda \frac{AB}{OA} = \frac{\lambda AB}{l}$ হবে ; এখানে λ একটি ধ্রুবক ; AB কে Δl ধরেল $T = \frac{\lambda(\Delta l)}{l}$

মনে রাখিতে হবে যে এখানে টান T অতিবৃহৎ পরিমাণে থাকবে না। অনেকসময় λ র পরিবর্তে আমরা E লিখে থাকি ; λ অথবা E কে ইয়ঙ্ স্থিতিস্থাপক গুণাংক (young's modulus) বলা হয়ে থাকে।

যেহেতু $\frac{\Delta l}{l}$ এর ঘাত বা মাত্রা (dimension) শূন্য, অতএব λ-র ঘাত T-র সমান হবে।

$T = \lambda \frac{\lambda(\Delta l)}{l}$ নিয়মটি হুকের নিয়ম (Hooke's Law) বলে পরিচিত।

সর্পিল স্প্রিং ঃ টানের দ্বারা স্প্রিং-এর ক্ষেত্রে তার দৈর্ঘ্য বরাবর তা প্রলম্বিত বা সংকুচিত যা হউক বা কেন। স্প্রিং-এর প্রতি একক দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি বা হ্রাসের পরিমাণ ঐ টানের সমানুপাতিক হবে।

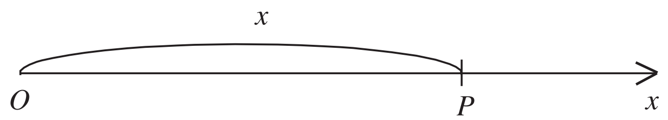
স্থিতিস্থাপক রজ্জুক বেলা যদি তার প্রকৃত দৈর্ঘ্য l (কোনও টান ব্যতীত) হয় তা হলে কেবল মাত্র টানের জন্য তার দৈর্ঘ্য বাড়বে এবং ঐ রজ্জুটির দৈর্ঘ্য l হলে আমরা ধরব যে তার উপর কোনও টান নাই। কিন্তু স্প্রিং এর বেলায় যদি তার প্রকৃত দৈর্ঘ্য হতে তার দৈর্ঘ্য হ্রাস পায় তখনও তার উপর টান ক্রিয়াশীল থাকবে।

3.10 অনুশীলনী

উদাহরণ—1

যদি কোনও একটি সরল সমঞ্জস গতিতে একটি কণা চলে এবং ঐ সমঞ্জস গতি বিস্তার a এবং দোলনকাল T হয়ে থাকে তা হলে দেখাতে হবে যে মূলবিন্দু হতে x দূরত্বে পৌঁছাতে কণাটির $\frac{T}{2\pi}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ পরিমাণ সময় লাগবে এবং ঐ অবস্থানে কণাটির বেগ হবে $\frac{2\pi}{T}\sqrt{a^2 - x^2}$

সমাধান



এস্থলে এই সমঞ্জল গতিতে কণাটির বৃত্তীয় কম্পাঙ্ক হবে $\frac{2\pi}{T} = n$ (ধরা যাক্)

$x = a \cos(nt + \varepsilon)$;

এখন অবকলন করে আমরা পাই $\frac{dx}{dt} = -na\sin(nt + \varepsilon)$ হবে

$$\frac{dx}{dt}(OM) = +n\sqrt{a^2 - n^2} = +\frac{2\pi}{t}\sqrt{a^2 - n^2}$$

যেহেতু O বিন্দু হতে সময় (t) বৃদ্ধির সঙ্গো সঙ্গো x বৃদ্ধি পাই আবার $x = 0$ হতে x বিন্দুতে পৌঁছাতে যদি t সময় লাগে।

তা হলে $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - n^2}} = \frac{+2\pi}{T}\int_0^t dt$

অর্থাৎ $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{+2\pi}{T}t$

অতএব নির্ণয় সময় $t = \frac{T}{2\pi}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

উদাহরণ—2

স্বাভাবিক অবস্থায় l দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি স্থিতিস্থাপক রজ্জু একটি প্রান্ত একটি মসৃণ টেবিলের উপর একটি স্থির বিন্দু রয়েছে এবং অন্য প্রান্তটিও টেবিলের উপর m ভরবিশিষ্ট একটি কণার সঙ্গো বাঁধা আছে। কণাটিকে

যতক্ষণ পর্যন্ত রজ্জুটির দৈর্ঘ্য b/a পরিমাণ বৃদ্ধি না পায় ততক্ষণ টানা হল এবং ঐ অবস্থায় রজ্জুটি উপর টান ছেড়ে দেওয়া হল ; রজ্জুটি স্থিতিস্থাপক গুণাংক λ ধরলে কণাটির দোলনের পর্যায় কাল হবে।

$$2\left(\pi + \frac{2l}{b}\right)\sqrt{\frac{lm}{\lambda}}$$

সমাধান টেবিলের উপর স্থিরবিন্দু O কে মূল বিন্দু এবং রজ্জু বরাবর x অক্ষ ধরা যাক্ ;

চিত্রে $OA = l$ এবং t সময়ে কণাটির অবস্থান ধরলে কণাটির গতির সমীকরণ হবে

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda}{l}(x-l) \quad (x > l)$$

এই অবকল সমীকরণটি সমাধান করে আমরা পাব

$$x - l = A\cos\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}t + B\sin\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}t (x \geq l)$$

(এ স্থলে A এবং B ধ্রুবক দুইটিকে শর্তানুযায়ী নির্ণয় করতে হবে।)

দেওয়া আছে যে আদি দশায় অর্থাৎ $t = 0$ সময়ে $x = l + b$ ছিল ; $t = 0$ বসালে $A = b$ হবে আবার $t = 0$ সময়ে, বেগ

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}A\sin\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + \sqrt{\frac{\lambda}{ml}}B\cos\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}\,t$$

$= 0$ হবে।

অতএব $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = B = 0$ হবে।

তা হলে $x \geq l$ হলে

$$x = l + \cos\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}\,t$$

অতএব $x = 1$ স্বাভাবিক দৈর্ঘ্যে ফিরে আসলে $\cos\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}t = 0$ অর্থাৎ $\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}t = \frac{\pi}{2}$ হবে ;

দেখা যাচ্ছে যে কণাটি বর্ধিত দৈর্ঘ্য $(l + b)$ হতে স্বাভাবিক দৈর্ঘ্যে l পৌঁছাতে $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$ সময় নেবে ; এবং তখন তার বেগ হবে।

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}\ b \sin\frac{\pi}{2}$$

$= -b\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}$ এবং দেখা যাচ্ছে ঐ বেগ স্থিরবিন্দু O গামী এবং ধ্রুবক ; অতএব $x = b$ থেকে $x = 0$ স্থিরবিন্দুতে যেতে সময় $\frac{l}{b}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$ লাগবে।

O বিন্দু পৌঁছায় কণাটি ঐ ধ্রুবক বেগ $b\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}$ নিয়ে ox এর বিপরীত মুখে যতখন না পর্যন্ত রজ্জুটি দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি না পায় চলবে এবং $x = -l$ পৌঁছাতে তার সময় আরও $\frac{l}{b}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$ সময় লাগবে। কণাটি যখন $x = -l$ বিন্দু অতিক্রম করবে তখন তার উপর টান পড়বে $\frac{\lambda}{l}(x+l)$ এবং $x < -l$; অতএব এই টান মূলবিন্দু O গামী হবে। অতএব কণাটির গতির সমীকরণ হলে $m\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{-\lambda}{l}(x'-l)$

এখানে $x' = -x,\ t' = t - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}} - \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$

অর্থাৎ $x = -l\ (x' = l)$ অবস্থায় $t' = 0$ ধরা হয়েছে।

এখন $x' - l = A'\cos\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}\ t' + B'\sin\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}\ t'$ হবে।

যখন $x' - 1 = 0$ অর্থাৎ $x = -1$ তখন $t' = 0$ ধরা হয়েছে অতএব $A' = 0$ হবে।

আবার $\frac{dx'}{dt'} = B'\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}\ t' = +b\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}$ যখন $t' = 0$ (যেহেতু $\frac{dx^1}{dt^1} = -\frac{dx}{dt}$)

অতএব $B' = +b$ হবে।

এবং $x' - l = b\sin\sqrt{\dfrac{\lambda}{ml}}\,t'$ হবে।

যখন $x' = l + b$ তখন $\sin\sqrt{\dfrac{\lambda}{ml}}\,t' = 1$ এবং

$\sqrt{\dfrac{\lambda}{ml}}\,t' = \dfrac{\pi}{2}$ অতএব $t' = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{ml}{\lambda}} = t - \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{ml}{\lambda}} - \dfrac{2l}{b}\sqrt{\dfrac{ml}{\lambda}}$

অর্থাৎ $t = \pi\sqrt{\dfrac{ml}{\lambda}} + \dfrac{2l}{b}\sqrt{\dfrac{ml}{\lambda}}$

অতএব কণাটিকে $x = l + b$ অবস্থান হতে $x = -l - b$ অবস্থানে পৌঁছাতে $T = \pi\sqrt{\dfrac{ml}{\lambda}} + \dfrac{2l}{b}\sqrt{\dfrac{ml}{\lambda}}$ সময় লাগবে এইরূপে দেখান যায় যে কণাটিকে পুনরায় $x = l + b$ পৌঁছাতে আরও T সময় লাগবে।

অতএব কণাটির পর্যায়কাল হলে $2T = \left(\pi + \dfrac{2l}{b}\right)\sqrt{\dfrac{ml}{\lambda}}$

উদাহরণ—3

একটি লঘু স্থিতিস্থাপক রজ্জুর এক প্রান্তে M এবং M' ভর বিশিষ্ট দুইটি কণা ঝোলান আছে এবং অন্য প্রান্তটি উর্ধ্বে একটি পেরেকের উপর বাঁধা আছে। এবং এই অবস্থায় কণাটি দুইটি সুস্থিতিতে আছে, এখন M' ভর বিশিষ্ট কণাটি রজ্জু হতে বিচ্যুত হলে। যদি কণাটির স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য a হয় এবং কেবলমাত্র M কণাটি রজ্জুটির নীচে বাঁধা থাকলে রজ্জুটির দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি b হয় ও কেবলমাত্র M' কণাটি নীচে বাঁধা থাকলে রজ্জুটির বৃদ্ধি C হয় তা হলে M' কণাটি ছেড়ে দেওয়ায় t সময় পরে উর্ধ্বে অবস্থিত পেরেক হতে M কণাটি $a + b + c\,\cos\sqrt{\dfrac{g}{b}}\,t$ দূরত্বের নীচে থাকবে।

সমাধান ঃ O বিন্দুকে পেরেকটির অবস্থান নির্দিষ্ট করলে এবং সোজা নীচের দিকে রজ্জু বরাবর x অক্ষ ধরলে, নিউটনের গতীয় সূত্র অনুযায়ী M কণাটির অবস্থান $P(OP = x)$ থাকলে, $M\dfrac{d^2x}{dt^2} = Mg - T$

M কণার উপর T হচ্ছে রজ্জুটির টান এবং $T = \dfrac{\lambda(x-a)}{a}$

শর্তানুযায়ী যখন $x = a + b$, তখন M কণাটি সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব $O = Mg - \dfrac{\lambda b}{a}$

অনুরূপভাবে $O = M'g - \dfrac{\lambda c}{a}$

অতএব $O = (M + M')\, g - \frac{\lambda}{a}\,(b + c)$

সহজেই দেখা যাচ্ছে যখন M এবং M' দুইটি কণাটি রজ্জুর নিম্নপ্রান্তে থেকে সাম্যাবস্থায় ছিল তখন কণাটির দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি $b + c$ এবং পেরেক হতে কণাটি $a + b + c$ নিম্নে আছে। ঐ অবস্থায় M' রজ্জু হতে বিচ্যুত হলে M কণার সমীকরণ

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - \frac{\lambda(x-a)}{a}$$

কিন্তু $Mg = \frac{\lambda b}{a}$ ধরলে সমীকরণটি দাঁড়ায় $M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - \frac{Mg}{b}(x-a)$

$$= -\frac{Mg}{b}(x-a-b)$$

অর্থাৎ $\frac{d^2(x-a-b)}{dt^2} = -\frac{g}{b}(x-a-b)$

ঐ সমীকরণটি সমাধান করে আমরা পাই $x - a - b = A\cos\sqrt{\frac{g}{b}}\,t + \beta\sin\sqrt{\frac{g}{b}}\,t$

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী যখন $x = a + b + c$

তখন M' কণাটি রজ্জুটি বিচ্যুত হয়েছে এবং তখন রজ্জুটি এবং M কণাটি সাম্যাবস্থায় ছিল। ঐ সময়কে আদি সময় $t = 0$ ধরলে তখন $x = a + b + c$ এবং $\frac{dx}{dt} = 0$

$t = 0$ ধরলে দেখা যাবে $A = C$

আবার $\frac{dx}{dt} = -A\sqrt{\frac{g}{b}}\sin\sqrt{\frac{g}{b}}t + B\sqrt{\frac{g}{b}}\cos\sqrt{\frac{g}{b}}t$

কিন্তু $t = 0$ তে $\frac{dx}{dt} = 0$ হলে $B = 0$

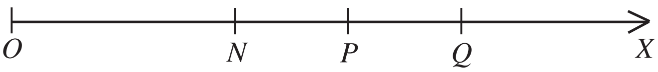
অতএব পরিশেষে আমরা পাই $x = a + b + c\cos\sqrt{\frac{g}{b}}t$

উদাহরণ—4

কোনও সরলরেখায় সঞ্চারমান m ভর বিশিষ্ট একটি কণা তার উভয়পার্শ্বে ঐ সরলরেখায় অবস্থিত দুইটি বলকেন্দ্র দ্বারা আকৃষ্ট এবং বলকেন্দ্র দুইটি হতে কণাটির উপর আরোপিত বল দুইটির পরিমাণ যথাক্রমে

$m\lambda \times$ একটি বলকেন্দ্র হতে কণাটির দূরত্ব এবং $m\mu \times$ অন্য বলকেন্দ্র হতে কণাটি দূরত্ব ; কণাটি সাম্যাবস্থায় কিঞ্চিৎ পরিবর্তন হলে প্রমাণ করুণ যে কণাটি $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda+\mu}}$ পর্যায়কাল বিশিষ্ট সমঞ্জস গতিতে চলবে।

সমাধান ঃ



মনে করা যাক্ যে O' এবং O বলকেন্দ্র দুইটি কণাটি P বিন্দুতে Ox সরলরেখায় উপর অবস্থিত এবং Ox রেখার দিশা $\overrightarrow{OO'}$ এর দিকে রয়েছে।

ধরা যাক যে আদি সময়ে ($t = 0$) N বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় থাকে এবং $ON = d$ এবং $NO' = d_2$ তা হলে $\lambda d_1 = \mu d_2$ হবে। পরে সাম্যাবস্থায় হতে বিচ্যুত হয়ে যখন কণাটি P বিন্দুতে আসে তখন কণাটির গতীয় সমীকরণ হবে।

($NP = x$ ধরে)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m(-\lambda OP + \mu O'P)$$

কিন্তু $OP = ON + NP = d_1 + x$

এবং $O'P = O'N - NP = d_2 - x$

অতএব $\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda(d_1 + x) + \mu(d_2 - x) = (\lambda + \mu)x$

যেহেতু $\lambda d_1 = \mu d_2$;

উপরের অবকল সমীকরণ হতে আমরা এই সিদ্ধান্তে পৌঁছাই যে কণাটি Ox অক্ষের উপর $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda+\mu}}$ পর্যায়কাল বিশিষ্ট সমঞ্জস গতিতে চলবে।

উদাহরণ—5

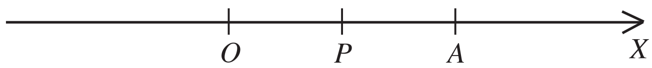
m ভর বিশিষ্ট একটি কণা কোনও একটি সরলরেখার উপর O (মূলবিন্দু) এব দিকে $m\mu \times$ (O বিন্দু

হতে দূরত্ব) বল দ্বারা আকৃষ্ট হয়ে ঐ সরলরেখার উপর চলছে যখন কণাটির বেগ v তখন কণাটি তার গতিপথে mkv^2 পরিমাণ বাধা পায়।

যদি কণাটি স্থিতিবস্থায় O হতে a দূরত্বের ঐ সরলরেখায় উপর যাত্রা শুরু করে এবং পুনরায় O বিন্দু হতে b দূরত্বে পৌঁছায় স্থিতাবস্থায় আসে তা হলে দেখান যে

$$(1+2ak)e^{-2ak} = (1-2bk)e^{2bk}$$

সমাধান ঃ



O মূলবিন্দু নিয়ে Ox সরলরেখা টেনে নিয়ে আমরা ধরি যে কণাটি Ox রেখায় উপর চলছে ; A বিন্দু রেখাটির উপর অবস্থিত এবং $OA = a'$; যখন কণাটি P বিন্দুতে থাকে $(OP = x)$ মনে করা যাক্ যে তার বেগ $\overrightarrow{Ox}$ অভিমুখে v এখন কণাটির গতির সমীকরণ হলে

$$mv\frac{dv}{dx} = -m\mu x + mkv^2$$

অতএব $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}V^2\right) = -\mu x + kV^2$

অর্থাৎ $\dfrac{d}{dx}V^2 - 2kV^2 = -2\mu x$

উপরের অবকল সমীকরণটি সমাধান করে আমরা পাই $V^2e^{-2kx} = -2\mu\left(\dfrac{-xe^{-2kx}}{2k} - \dfrac{e^{-2kx}}{4k^2}\right) + C$

যেখানে C একটি ধ্রুবক রাশি।

কিন্তু দেওয়া আছে যে $V = 0$ যখন $x = a$, ঐ শর্তানুসারে আমরা পাই

$$V^2e^{-2kx} = \frac{\mu}{2k^2}\left[(1+2kx)e^{-2kx} - (1+2ka)e^{-2ka}\right]$$

লক্ষ্য করুন যে $x = a$ তে স্থিরবস্থায় থাকে যখন কণাটি O বিন্দু $(x = 0)$ তে পৌঁছায় তখন তার গতিবেগ শূন্য হয় না। অতএব কণাটি Ox-এর বিপরীত দিকে চলতে থাকবে এবং প্রদত্ত শর্তানুসারে $x = b$ অবস্থানে কণাটি স্থিরাবস্থায় আসবে।

অতএব $(1+2ka)e^{2kb} = (1+2ka)e^{-2ka}$ হইবে।

3.11 সারাংশ

আমরা অবকল সমীকরণের সাহায্যে দোলন সংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করছি এবং স্থিতিস্থাপক রজ্জু এবং স্প্রিং এর জন্য যে দোলন হয় তাও ব্যাখ্যা করছে।

(4.10) অনুশীলনীর উদাহরণগুলি পর্যালোচনা করলে সহজেই সরল সমঞ্জস দোলনের প্রকৃতি পাঠক বুঝতে পারবে।

3.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. কোনও সরলরেখায় সরল সুসমঞ্জস গতিতে চলমান একটি কণিকার বেগ কেন্দ্রবিন্দু হতে x_1 এবং x_2 দূরত্বে যথাক্রমে V_1 এবং V_2 দেখাও সমঞ্জস গতির দোলনের পর্যায়কাল $2\pi\sqrt{\dfrac{x_1^2 - x_1^2}{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}}$ হবে।

2. একটি কণা কোনও সরলরেখার উপরে সরলসমঞ্জস গতিতে চলছে, ঐ সরলরেখার উপর কোনও P বিন্দুতে কণাটির গতিবেগ v ধরলে যদি কণাটির পুনরায় P বিন্দুতে ফিরে আসতে t সময় লাগে দেখান যে $t = \dfrac{T}{2\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{vT}{2\pi x}\right)$;

(এখানে মূল বলকেন্দ্র হতে P বিন্দুর দূরত্ব x এবং দোলনের পর্যায়কাল T ধরা হয়েছে)

3. m ভর বিশিষ্ট একটি কণা একটি সরলরেখার (OPC) উপর চলছে ; কণাটির P বিন্দুতে অবস্থানের সময় তবে C বিন্দুর দিকে $m\mu\overrightarrow{PC}$ বল দ্বারা আকৃষ্ট থাকে আবার C বিন্দুটি $\overrightarrow{OC}$ দিকে f সমত্বরণে চলছে। ধরা যাক যে আদি দশায় C বিন্দুটি মূলবিন্দু O তে থাকে এবং P বিন্দুটি O বিন্দু হতে d দূরত্বে v বেগে চলতে থাকে তা হলে দেখান যে t সময় পরে O বিন্দু হতে P বিন্দুর দূরত্ব হবে

$$\left(\frac{f}{\mu} + d\right)\cos\sqrt{\mu}t + \frac{v}{\sqrt{\mu}}\sin\sqrt{\mu}t - \frac{f}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{2}ft^2$$

4. একটি স্থিতিস্থাপক রজ্জুর এক প্রান্তে একটি ভারী বস্তু রয়েছে এবং অন্য প্রান্তটি উল্লম্ব দিকে a বিস্তার এবং $\dfrac{2\pi}{n}$ পর্যায়কাল বিশিষ্ট সরল সমঞ্জস দোলনে চলছে ; দেখান যে ঐ দোলনে রজ্জুটি শিথিল না হওয়ায় শর্ত হবে $x^2 < \dfrac{g}{4\pi^2 a}$;

5. একটি হাল্কা স্থিতিস্থাপক রজ্জু একটি মসৃণ টেবিলের উপর একটি কিনারায় লম্বালম্বি রয়েছে ঐ রজ্জুটির এক প্রান্তে টেবিলের উপর m ভর বিশিষ্ট একটি কণা আছে এবং অন্য প্রান্তে m ভর বিশিষ্ট একটি কণা টেবিলের কিনারে পতনোন্মুখ হয়ে রয়েছে।

যদি রজ্জুটির স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য l এবং তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক h হয় এবং t সময় পরে দুটি কণাই টেবিল হতে পড়ে যায় তখন

$$2l + \frac{mgl}{\lambda}\sin^2\sqrt{\frac{\lambda}{2ml}}.t = \frac{1}{2}gt^2$$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

6. m_1 এবং m_2 ভর বিশিষ্ট দুইটি কণা একটি স্প্রিং এর দুটি পার্শ্বে রয়েছে। m_1 কণাটি স্থিরাবস্থায় থাকলে m_2 কণাটির প্রতি সেকেন্ডে n সংখ্যক সম্পূর্ণ দোলন হয় আবার m_2 কণাটি স্থির থাকলে m_1 কণাটির প্রতি সেকেন্ডে $n\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ সংখ্যক দোলন হয়।

দেখান যে কণা দুইটি উভয়ই মুক্ত থাকলে তারা প্রতি সেকেন্ডে $n\sqrt{\frac{m_1 + n_2}{m_1}}$ দোলন সম্পন্ন করবে।

এস্থলে সর্বক্ষেত্রেই স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য বরাবর দোলন ক্রিয়া চলবে ধরা হয়েছে।

7. প্রমাণ করুন যে কোনও একটি কণার অবমন্দিত সমঞ্জস দোলন হলে যে দোলনগুলি সম্পন্ন হয় তাদের বিস্তারের পরিমাণ সমূহ একটি গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকবে।

8. স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য a বিশিষ্ট একটি লঘু স্থিতিস্থাপক রজ্জুর সর্বনিম্ন বিন্দুতে কণা ঝোলান হয়েছে এবং রজ্জুটি উল্লম্ব দিকে রয়েছে। আদি সময় $t = 0$ তে কণাটি সাম্যাবস্থায় থাকলে, তখন রজ্জুটির সর্বনিম্ন বিন্দু (যেখানে বস্তুটি ঝোলান রয়েছে) চলিতে শুরু করে এবং ঐ বিন্দুর নীচের দিকে সরণ $a \sin Pt$ (a ধ্রুবক) ধরা গেল, যদি T_1 এবং T_2 কণাটির মুক্ত এবং প্রণোদিত দোলনের পর্যায়কাল হয় দেখান যে প্রণোদিত দোলনের জন্য কণাটির উল্লম্বেদিকে সরণ হবে।

$$\frac{T_2^2}{T_2^2 - T_1^2}(a \sin pt)$$

9. একটি নির্দিষ্ট উচ্চতা h থেকে দুটি কণাকে এক সেকেন্ড অন্তর ছেড়ে দেওয়া হল, দেখান যে ভূপাতিত হওয়ার পূর্বে t সময়ে কণাদ্বয়ের দূরত্ব $\frac{2t-1}{2}g$

10. একটি ট্রামগাড়ি স্থির অবস্থায় থেকে সুষম ত্বরণ f-এর সরলরেখায় চলা শুরু করল। একই সময়ে, ট্রামটিকে ধরার জন্য d দূরত্ব থেকে এক ব্যক্তি সুষম বেগ V তে ট্রামের পেছনে ছোটা শুরু করল। দেখান যে ব্যক্তিটি গাড়িটিকে ধরতে পারবে যদি $V^2 \geq 2fd$.

একক 4 ❑ সমতলীয় গতি (Motion in a plane)

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

পূর্বে আলোচিত 4টি এককে আমরা বস্তুর কেবলমাত্র সরলরেখায় গতির কথা বলেছি ; এই 5নং এককে আমরা সমতলে কণিকার গতিপথ বিচার করব ; এজন্য আমরা ঐ সমতলে কার্তেজীয় ও মেরু নির্দ্দেশতন্ত্রের সাহায্যে কণাটির বেগ ও ত্বরণ বার করে বিভিন্ন ক্ষেত্রে কণাটির গতি এবং তৎসংক্রান্ত সমস্যার সমাধান করব।

4.2 উদ্দেশ্য

গতিবিদ্যার সমতলে সঞ্চারমান কোনও কণিকার গতিপথ এবং বিভিন্ন সময়ে কণিকাটির বেগ ও ত্বরণ কিরূপ হবে তার জানা বিশেষ প্রয়োজনীয়। এখানে আমরা প্রাসের গতিপথ নির্ণয় করছি ; পরের দুইটি এককে আমরা সূর্য্যের চারদিকে গ্রহের গতিপথ নির্ণয়ের জন্য সমতলে মেরু স্থানাংককে কণার ত্বরণ নিয়ে বিশদ আলোচনা করব।

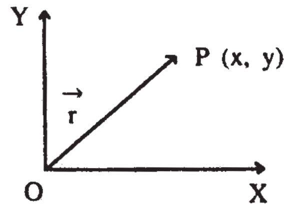
4.3 সমতলীয় গতি

পূর্ববর্তী অধ্যায় সমূহে আমরা কণার কোনও নির্দিষ্ট সরলরেখায় কেবলমাত্র ঋজুরেখ গতি এবং ঐ প্রকার গতি সম্পর্কিত সমস্যাগুলি নিয়ে আলোচনা করছি। এখন আমরা কণার সমতলীয় গতি নিয়ে আলোচনা করব। যদি বিভিন্ন বল প্রক্রিয়ায় হেতু কণাটি কোনও নির্দিষ্ট সঞ্চারমান থাকে, তখন কণাটির ঐ গতিকে সমতলীয় গতি বলা হয়ে থাকে। দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিতে সমতলে আমরা সাধারণতঃ কার্টেজীয় (Cartesian) এবং মেরু (Polar) নির্দেশতন্ত্রের (Coordinate system) সাহায্য নিই।

আমরা ঐ নির্দেশতন্ত্রসমূহে কোনও কণার বেগ এবং ত্বরণের উপাংশ (Components) নির্ধারণ করে নিউটনের গতিসূত্র অনুযায়ী কণাটির গতির সমীকরণ নিয়ে আলোচনা করব।

কার্তেজীয় নির্দেশতন্ত্র ঃ

কার্তেজীয় নির্দেশতন্ত্রনুযায়ী কোনও সমতলে O-কে মূলবিন্দু ধরে O বিন্দুগামী OX, OY দুইটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত দুইটি সরলরেখা টানা হলে ; OX-কে X অক্ষরেখা এবং OY-কে Y অক্ষরেখা বলা হয়।



সঞ্চারমান কণাটি t সময়ে যদি $P(x, y)$ বিন্দুতে অবস্থান করে, তা হলে $\overrightarrow{OP}$ ধরলে $\vec{r}$ ধরলে OX $\vec{r}$-এর উপাংশ হবে যথাক্রমে x এবং y।

i এবং j-কে ox এবং oy দিশায় একক ভেক্টর ধরলে আমরা লিখতে পারি $\vec{r} = (ix + jy)$ যদি সময়ের সঙ্গে সঙ্গে ox এবং oy অক্ষদুটির অবস্থান বা দিশায় কোনও পরিবর্তন না হয়, তা হলে $P(x, y)$ কণাটি বেগ $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = i\dfrac{dx}{dt} + j\dfrac{dy}{dt}$ এবং ত্বরণ $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = i\dfrac{d^2x}{dt^2} + j\dfrac{d^2y}{dt^2}$ হবে।

অতএব, ox অক্ষের দিকে কণাটির বেগ এবং ত্বরণের উপাংশদ্বয় যথাক্রমে $\dfrac{dx}{dt}$ এবং $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ হবে।

এবং oy অক্ষের দিকে কণাটির বেগ এবং ত্বরণের উপাংশদ্বয় যথাক্রমে $\dfrac{dy}{dt}$ এবং $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ হবে।

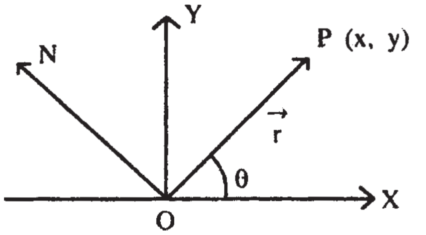
যদি m ভরবিশিষ্ট কণাটির উপর ox এবং oy দিকে F_x এবং F_y বলদ্বয় ক্রিয়াশীল হয়। তা হলে ভৌত স্বতন্ত্রতা নিয়মানুসারে নিউটনের গতীয় সূত্রানুসারে আমরা পাই—

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = F_x,$$

এবং $$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = F_y,$$

এখন কণাটির ভর m ভর যদি সময় নিরপেক্ষ হয়, অর্থাৎ $\frac{dm}{dt} = 0$ হয়, তা হলে কণাটির গতীয় সমীকরণদ্বয় হবে—$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$ এবং $m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y$

মেরু নির্দেশতন্ত্র ঃ



O-কে মূলবিন্দু এবং O বিন্দুগামী সমকোণে অবস্থিত ox এবং oy-কে x এবং y অক্ষ ধরলে, $P(x, y)$-কে t সময়ে কণাটির অবস্থান হলে OP-কে r অক্ষ, ox-কে আদিদশা এবং $\angle XOP$-কে θ ধরে P বিন্দুটির মেরুস্থানাংকদ্বয় হবে r এবং θ।

$\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরকে $\vec{r}$ ধরে এবং $\overrightarrow{OP}$ অভিমুখে একক ভেক্টরকে $\vec{R}$ ধরলে, দেখা যাবে যে

$\vec{r} = |\vec{r}|\vec{R}$; আবার $\overrightarrow{OP}$ সঙ্গে বামাবর্তে (anticlockwise) সমকোণে অবস্থিত O বিন্দুগামী রেখা $\overrightarrow{ON}$ এর দিকে একক ভেক্টর $\vec{N}$ ধরা যাক্ তা হলে $\vec{R} = i\cos\theta + j\sin\theta$ এবং $\vec{N} = -i\sin\theta + j\cos\theta$

[লক্ষ্য করুন $\overrightarrow{OP}$ এবং x অক্ষের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ এবং $\overrightarrow{OP}$ এবং y অক্ষের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\frac{\pi}{2} - \theta$; আবার $\vec{N}$ ভেক্টর এবং x অক্ষের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\frac{\pi}{2} + \theta$ এবং $\vec{N}$ ভেক্টর এবং y অক্ষের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ]

লক্ষ্য করুন যে $\frac{d\vec{R}}{d\theta} = -i\sin\theta + j\cos\theta = \vec{N}$

এবং $\frac{d\vec{N}}{d\theta} = -i\cos\theta - j\sin\theta = -\vec{R}$;

অতএব, t সময়ে কণাটির বেগ—

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dy}(r\vec{R}) \quad [\,|\vec{r}|\text{ এর পরিবর্তে } r \text{ ধরা হয়েছে}]$$

$$= \frac{dr}{dy}\vec{R} + r\frac{d\vec{R}}{dt}\frac{dr}{dt}\vec{R} + r\frac{d\vec{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

অর্থাৎ, $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{R} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{N}$

অর্থাৎ, $\overrightarrow{OP}$ অভিমুখে বেগের উপাংশ $\frac{dr}{dt}$, এটিকে বেগের অরীয় (Radial) উপাংশ বলা হয়, আবার $\overrightarrow{ON}$ অভিমুখে বেগের উপাংশ $r\frac{d\theta}{dt}$ এবং এটিকে বেগের অনুপ্রস্থ (transverse) বা (crossradial) উপাংশ হয়ে থাকে।

আবার t সময়ে কণাটির ত্বরণ $\vec{a}$ ।

$$= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\vec{R} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{N}\right]$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{R} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{R}}{dt} + \left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{N} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{N}}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{R} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{N} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{N}}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

এখন, $\frac{dR}{d\theta} = \vec{N}$ এবং $\frac{d\vec{N}}{d\theta} = -\vec{R}$ বসালে—

$$a^2 = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{R} + \left(\frac{2dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\right)\vec{N}$$

অর্থাৎ কণাটির ত্বরণের অরীয় (Radial) উপাংশ

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

এবং অনুপ্রস্থ (Transverse or cross radial) উপাংশ

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) \text{ হবে।}$$

কণাটি অরীয় পথে সরলরেখা চললে, এবং কণাটির অবস্থান (r, θ) ধরলে θ অপরিবর্তিত থাকবে, $\frac{d\theta}{dt} = 0$ হলে এবং কণাটির বেগ $\frac{dr}{dt}$ এবং ত্বরণ $\frac{d^2r}{dr^2}$ উভয়ই অরীয় দিকে হবে ; এস্থলে অনুপ্রস্থ দিকে কণাটির বেগ বা ত্বরণ থাকবে না, এস্থলে কণাটির অরীয় দিকে ঋজু রেখ গতি ধরা যেতে পারে।

আবার যদি কণাটি সকল সময়ে এরূপভাবে চলে যে r ধ্রুবক থাকবে অর্থাৎ কণাটি একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধির উপর চলে, যে বৃত্তটির কেন্দ্র O, তখন বেগের অরীয় দিকে উপাংশ থাকবে না, কিন্তু অনুপ্রস্থ দিশায় বেগের উপাংশ হবে $r\theta$; যদি $r = a$ ধ্রুবক হয় অর্থাৎ কণাটি যে বৃত্তের উপর চলে ঐ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ a হয় তা হলে কণাটির বেগ হবে কেবলমাত্র অনুপ্রস্থদিশায় এবং তার মান θ হবে।

$\theta = \frac{d\theta}{dt}$-কে কণাটির **কৌণিক বেগ** বলা হয়ে থাকে।

$r = a$ ধ্রুবক ধরলে, কণাটির ত্বরণের অরীয় উপাংশ $-a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ এবং অনুপ্রস্থদিকে উপাংশ $a\frac{d^2\theta}{dt^2}$ হবে।

যদি কণাটি ঐ বৃত্তের পরিধির উপর সুষম গতিতে চলে, তখন কৌণিক বেগ $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ ধ্রুবক হবে কণাটির অনুপ্রস্থ দিশায় বেগ হবে $a\omega$ (ধ্রুবক) এবং ত্বরণের অনুপ্রস্থ দিকে কোনও উপাংশ থাকবে না, কিন্তু অরীয় দিকে ত্বরণ হবে $-a\omega^2$, এ স্থলে যদি কণাটির বেগ $a\omega$-কে v ধরি তাহলে অরীয় দিকে ত্বরণ হবে $-\frac{v^2}{a}$; দেখা যাচ্ছে যে ঐ ত্বরণ হবে কেন্দ্রাভিমুখী।

মেরু নির্দেশতন্ত্রে আমরা অন্য প্রণালীতেও বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় করতে পারি।

স্থানাংক জ্যামিতি অনুযায়ী আমরা $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$.

ধরলে t (সময়) সাপেক্ষে $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ উভয়দিকে অবকলন করে পাই—

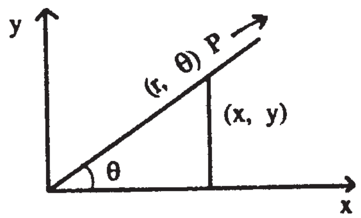
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \text{..............} \quad \text{(i)}$$

এবং $$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \text{..............} \quad \text{(ii)}$$

এখন অরীয় বেগ হবে $\frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta = \frac{dr}{dt}$;

আবার বেগের অনুপ্রস্থ উপাংশ হবে $-\frac{dx}{dt}\sin\theta + \frac{dy}{dt}\cos\theta = r\frac{d\theta}{dt}$;

অনুরূপভাবে (i) এবং (ii) দুইদিকে t সাপেক্ষে অবকলন করে পাই—



$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

এবং $$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + 2\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

এখন ত্বরণের অরীয় উপাংশ হবে—

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

এবং ত্বরণের অনুপ্রস্থ উপাংশ হবে—

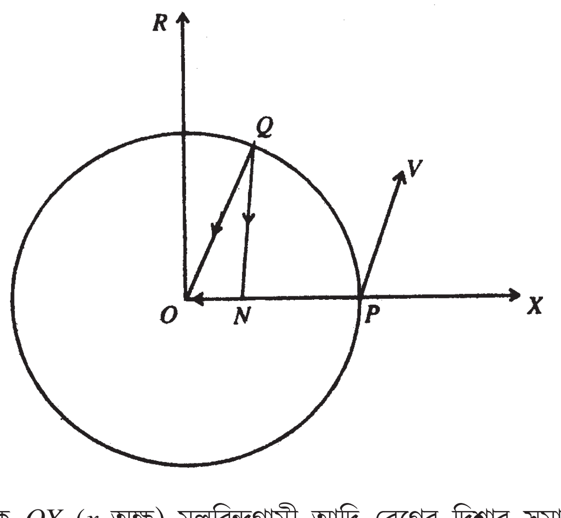
$$-\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

সমতলে কোনও নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে ত্বরণ যুক্ত কোনও কণার ঐ সমতলে গতি নির্ণয় ঃ

সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে কোনও কণার ত্বরণ যদি ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু হতে কণাটির দূরত্বের সঙ্গে সরলভেদে থাকে তা হলে ঐ কণাটির গতিপথ নির্ণয় করতে হবে।

নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে মূলবিন্দু O ধরে মনে করা যাক যে আদি দশায় কণাটি P বিন্দুতে ছিল এবং ঐ বিন্দু হতে V বেগে কণাটি—ছোঁড়া হল।



মনে করি যে $\overrightarrow{OP}$ দিকে OX (x অক্ষ) মূলবিন্দুগামী আদি বেগের দিশার সমান্তরাল রেখাকে y অক্ষ (OY) ধরা হল। ধরি t সময়ে কণাটি কেন্দ্রভিমুখী ত্বরণের জন্য Q বিন্দুতে থাকে এবং Q বিন্দুর স্থানাংক (x, y) যদি Q বিন্দুতে আদি বেগের $(\vec{v})$ দিশায় সমান্তরাল রেখা টানা হল যা x অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করে ; $Q(x, y)$ বিন্দু অতএব $ON = x$ এবং $NQ = y$ হবে।

t সময়ে Q বিন্দুর ত্বরণ $\mu\,\overrightarrow{QO}$ (μ ধ্রুবক) $= \mu\,\overrightarrow{QN} + \mu\,\overrightarrow{NO}$;

কণাটির গতীয় সমীকরণদ্বয় হবে—

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x \quad \text{..........} \quad \text{(i)} \quad (\mu \text{ ধনাত্মক রাশি})$$

এবং $$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu y \quad \text{.........} \quad \text{(ii)}$$

উপরের সমীকরণদ্বয় সমাধান করলে পাওয়া যাবে ঃ

$$x = A\cos\sqrt{\mu}t + B\sin\sqrt{\mu}t$$
$$y = C\cos\sqrt{\mu}t + D\sin\sqrt{\mu}t$$

আদি কণাটি আদি দশায় ($t = 0$) P বিন্দুতে থাকে। $OP = a$ ধ্রুবক এবং y অক্ষের দিকে বেগ $\frac{dy}{dt} = V$ ধরা হয়ে থাকে।

তা হলে এই শর্তগুলি প্রয়োগ করলে আমরা পাবো—

$A = a,\ B = 0,\ C = 0$ এবং $D = \frac{V}{\sqrt{\mu}}$ হবে।

অতএব $x = a\cos\sqrt{\mu}t$

এবং $y = \frac{V}{\sqrt{\mu}}\sin\sqrt{\mu}t$;

এখানে t অপনয়ন করে—

আমরা পাব $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{V^2}{\mu}} = 1$;

এটি একটি উপবৃত্তের সমীকরণ ; a এবং $\frac{V}{\sqrt{\mu}}$ উহার অনুবন্ধী ব্যাসার্ধদ্বয়।

4.4 মাধ্যাকর্ষণ প্রভাবিত প্রাসের (Projectile) বাধাশূন্য XOY সমতলে অবাধ গতি

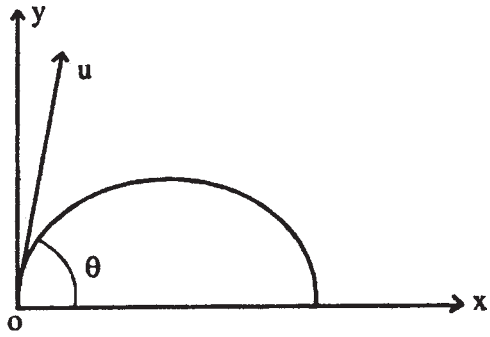
ধরা যাক্ যে ভূমির কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু হতে ভূমির সঙ্গে θ কোণে u বেগে m ভরবিশিষ্ট একটি প্রাস ছোঁড়া হল। এখানে মাধ্যাকর্ষণহেতু নিম্নপ্রাসটির উপর নিম্নভিমুখে mg বল ক্রিয়াশীল থাকবে এবং অন্যকোনও বলের প্রভাব প্রাসটির উপর থাকবে না।

যে বিন্দুতে প্রাসটিকে ছোঁড়া হলে ঐ বিন্দুটিকে মূলবিন্দু O এবং অনুভূমিক এবং ঊর্ধ্বদিকে যথাক্রমে x এবং y অক্ষদ্বয় ধরলে প্রাসটির গতীয় সমীকরণ হবে—

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \text{এবং}\quad & m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \end{aligned}\right] \quad \ldots\ldots\ (1)$$

যখন প্রাসটিকে ছোঁড়া হলে সেই আদি দশায় ($t = 0$) ধরা হলে দেখা যায় যে $t = 0$-তে $x = 0$, $y = 0$ (মূলবিন্দু) এবং $\frac{dx}{dt} = u\cos\theta$, $\frac{dy}{dt} = u\sin\theta$ হবে।

(u cos θ এবং u sin θ যথাক্রমে ax এবং oy দিশায় u বেগের উপাংশদ্বয়)



সমীকরণদ্বয় সমাকল করে আমরা পাব $\frac{dx}{dt}=$ ধ্রুবক রাশি এবং $\frac{dy}{dt}=-gt+$ ধ্রুবক কিন্তু আদিদশায় $t=0$-তে $\frac{dx}{dt}=u\cos\theta$, অতএব ঐ ধ্রুবক রাশিটি u cos θ হবে ;

এজন্য আমরা পাই, $\frac{dx}{dt}=u\cos\theta$ (ধ্রুবক) .... (2)

আবার $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}=u\sin\theta$, এজন্য t = 0 নিয়ে t = 0.

নিয়ে $\frac{dy}{dt}=-gt+u\sin\theta$ .... (3) পাবে।

এখন (2) এবং (3)-এর উভয় পার্শ্বে সমাকলন করলে আমরা পাব—

$$x = ut\cos\theta$$

$$y = ut\sin\theta-\frac{gt^2}{2} \quad .... (4)$$

যেহেতু t = 0-তে x = 0, y = 0 অতএব সমাকলনজনিত ধ্রুবক প্রতিক্ষেত্রেই শূন্য হবে।

(4)-এর সমীকরণদ্বয়ের মধ্যে t অপনয়ন করলে আমরা পাই—

$$y = x\tan\theta-\frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2}(\sec^2\theta) \quad ...... (5)$$

লক্ষ্যকরুন যে (5)-এ লব্ধ প্রাসটির গতিপথ একটি অধিবৃত্ত (parabola)

(5) সমীকরণটিকে $\left(x-\frac{u^2}{g}\sin\theta\cos\theta\right)^2=-\frac{2u^2}{g}\cos^2\theta\left(y-\frac{u^2}{2g}\sin^2\theta\right)$ রূপে প্রকাশ করা যায়।

এখন দ্বিমাত্রিক স্থানাংক জ্যামিতি অনুযায়ী আমরা দেখি যে পরাবৃত্ত (6)-এর শীর্ষবিন্দু $\left(\frac{u^2}{g}\sin\theta\cos\theta, \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta\right)$ ঐ পরাবৃত্তটির অক্ষটির সমীকরণ $x=\frac{u^2}{g}\sin\theta\cos\theta$ হলে এবং ঐ অক্ষটি নিম্নাভিমুখী হবে এবং পরাবৃত্তটির নাভিলম্ব $\frac{2u^2}{g}\cos^2\theta$ পরিমাণ হবে।

সহজেই দেখা যাবে যে ঐ পরাবৃত্তটির নাভিবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{u^2}{g}\sin\theta\cos\theta, -\frac{u^2}{g}\cos 2\theta\right)$ এবং নিয়ামক রেখাটির সমীকরণ হবে $y = \frac{u^2}{2g}$

প্রাসটির গতিবেগ t সময়ে V হলে—

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = u^2\cos^2\theta + (u\sin\theta - gt)^2$$

$$= u^2 - 2gt\ u\ \sin\ \theta + g^2t^2$$

$$= u^2 - 2gy \text{ হতে যেহেতু } y = ut\ \sin\ \theta - \frac{1}{2}gt^2 \ \ [(4) \text{ হতে}]।$$

আবার প্রাসটির গতির ঊর্ধ্বসীমা $\frac{dy}{dt} = 0$ এবং অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু অভিন্ন এবং তা $\frac{u^2}{2g}\sin^2\theta$ ঐ ঊর্ধ্বসীমায় পৌঁছাতে প্রাসটির $\frac{u\sin\theta}{g}$ সময় লাগবে। $y = 0$ বসলে (4) হতে দেখা যাবে যে $t = \frac{2u\sin\theta}{g}$ এবং $x = u\ \cos\ \theta\, t = \frac{u^2}{g}\sin 2\theta$;

অর্থাৎ $\frac{2u\sin\theta}{g}$ সময় পরে লক্ষ্য হতে যে ঊর্ধ্ব সীমাতে (ওঠার এবং সেখান হতে নামার সময় সমান $= \frac{u\sin\theta}{g}$) O বিন্দু হতে $\frac{u^2}{g}\sin 2\theta$ দূরত্বে পুনরায় ভূমিতে ফিরে আসবে।

$\frac{2u\sin\theta}{g}$-কে প্রাসটির গতির সম্পূর্ণ সময় (Total Time of flight) এবং $\frac{u^2}{g}\sin 2\theta$-কে প্রাসটির পাল্লা (Range) বলা হয়।

$\theta = \frac{\pi}{4}$ হলে $\sin 2\theta = 1$ এবং আমরা প্রাসটির চরম পাল্লা $\frac{u^2}{g}$ পাই এবং ঐ ক্ষেত্রে প্রাসটির গতিপথের সম্পূর্ণ সময় হবে $\frac{\sqrt{2}u}{g}$.

যে কোনও সময়ে প্রাসটির বেগ V ধরলে তা গতীয় শক্তি দাঁড়ায় $\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(u^2 - 2gy)$.

কিন্তু ভূতলে নির্দিষ্ট রেখা ধরলে ঐ সময় প্রাসটির স্থৈতিক শক্তি দাঁড়ায় $\frac{1}{2}mgy$; অতএব যে কোনও সময়ে প্রাসটির গতীয় শক্তি এবং স্থৈতিক শক্তির যোগফল $\frac{1}{2}m(u^2 - 2gy) + mgy = \frac{1}{2}mu^2$ (ধ্রুবক) যেহেতু আদিদশায় প্রাসটির ভূতলে ছিল এবং তার গতীয় শক্তি ছিল $\frac{1}{2}mu^2$।

এইরূপে আমরা দেখি যে এস্থলে অর্থাৎ প্রাসের গমন পথে শক্তির সংরক্ষণ নীতি অব্যাহত থাকবে।

4.5 অনুশীলনী

উদাহরণ—1

সমুদ্রে অবস্থিত একটি জাহাজ হতে ঐ জাহাজের অনুভূমিক b দূরত্বে এবং সমুদ্রপৃষ্ঠ হতে h উচ্চে অবস্থিত একটি দূর্গ অভিমুখে $\sqrt{2gu}$ আদি বেগে একটি কামান ছোঁড়া হলে। দেখাতে হবে $b \ngtr 2\sqrt{u(u-h)}$.

সমাধান ঃ

মনে করা যাক্ যে কামানটি জাহাজ হতে অনুভূমিক রেখার সঙেগ θ কোণে ছোঁড়া হয়েছিল। অতএব কামানটির আদিবেগের অনুভূমিক দিকে বেগের উপাংশ $\sqrt{2gu}\,\cos\theta$ এবং উর্ধ্বদিকে বেগের উপাংশ $\sqrt{2gu}\,\sin\theta$ হবে।

এখানে জাহাজের অবস্থানে মূল বিন্দু O ধরে এবং অনুভূমিক দিশায় ox (x অক্ষ) এবং উর্ধ্বদিকে oy ধরলে গোলাটির গতীয় সমীকরণ দাঁড়ায়—$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ এবং $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg$; (গোলাটির ভর m ধরা হয়েছে)

ঐ সমীকরণদ্বয়ে উভয় পার্শ্বে সমাকলন করে আমরা পাব $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{2gu}\cos\theta$; এবং $\dfrac{dy}{dt} = \sqrt{2gu}\,\sin\theta - gt$

আবার ঐ সমীকরণদ্বয়কে পুনরায় সমাকলন করে আমরা পাই—

$$x = \sqrt{2gu}\,t\cos\theta \quad \text{.........} \quad \text{(i)}$$

$$y = \sqrt{2gu}t\sin\theta - \frac{gt^2}{2} \quad \text{.......} \quad \text{(ii)}$$

যেহেতু আদিদশায় ($t = 0$) জাহাজটি মূলবিন্দু ($x = 0$, $y = 0$) ছিল এজন্য x এবং y রাশিমালা কোনও সমাকলনজনিত ধ্রুবক থাকবে না।

(i) এবং (ii) হতে t অপনয়ন করে আমরা পাব—

$$y = x\tan\theta - \frac{x^2}{4u}\sec^2\theta$$

যখন কামানটি ঐ গতিপথে দূর্গে পৌঁছাবে তখন $x = b$ এবং $y = h$ হবে।

অতএব ঐ অবস্থায়—

$$h = b\tan\theta - \frac{b^2}{4u}\;(1+\tan^2\theta) \text{ হবে।}$$

অর্থাৎ $\tan^2\theta - \dfrac{4u}{b}\tan\theta + \left(1+\dfrac{4uh}{b^2}\right) = 0$ হয়।

যেহেতু $\tan\theta$ বাস্তব রাশি এজন্য দ্বিঘাত সমীকরণের নিয়ম অনুযায়ী—

$$\left(\frac{4u}{b}\right)^2 \geq 4\left(1+\frac{4uh}{b^2}\right) \text{ হয়।}$$

ঐ অসমতা হতে আমরা পাব $b^2 \leq 4u(u - h)$

অতএব $r \leq 2\sqrt{u(u-h)}$ এবং

$b \not> 2\sqrt{u(u-h)}$ হবে।

উদাহরণ—2

কোনও বিন্দু O হতে $\sqrt{2gk}$ বেগে XOY উল্লম্বতলে কণাসমূহ নিক্ষেপ করা হলে। O বিন্দুকে মূলবিন্দু, O বিন্দুগামী অনুভূমিক রেখাকে OX অক্ষ এবং O বিন্দুগামী উল্লম্ব রেখাকে (উর্ধ্বদিকে) OY অক্ষ ধরলে দেখান যে ঐ কণাসমূহ XOX সমতলে মাধ্যাকর্ষণ প্রভাবে গমনকালে যে সকল অধিবৃত্তের উপর থাকবে তাদের শীর্ষবিন্দুগুলির সঞ্চার পথ একটি উপবৃত্ত এবং তার সমীকরণ $x^2 + 4y^2 = 4yk$ হবে।

সমাধান ঃ

আমাদের জানা আছে যে প্রতিটি কণিকাই একটি অধিবৃত্ত উপর আছে যার সমীকরণ $y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\sec^2\theta$ ($u = \sqrt{2gk}$ এবং আলোচ্য কণাটি অনুভূমিক রেখার সহিত θ কোণে ছোঁড়া হয়েছে)।

উপরের উল্লিখিত সমীকরণটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{u^2\sin 2\theta}{2g} \cdot \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}\right)$

ঐ শীর্ষ বিন্দুটির সঞ্চার পথ নির্ণয় করতে হলে $x = \frac{u^2\sin 2\theta}{2g}$ এবং $y = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

কিন্তু $u^2 = 2gk$ অতএব $x = k \sin 2\theta = 2k \sin\theta \cos\theta$

এবং $y = k \sin^2\theta$; এখন $\cos^2\theta = 1 - \frac{y}{K}$;

x এবং y-এর মধ্যে θ অপনয়ন করে আমরা পাই $\frac{x^2}{4K^2} = \frac{y}{K}\left(1 - \frac{y}{K}\right)$ অর্থাৎ $x^2 + 4y^2 = 4yK.$

উদাহরণ—3

OX এবং OY অক্ষের দিকে কোনও কণার বেগ যথাক্রমে $u + wy$ এবং $V + w'x$ হলে দেখান কণাটির গতিপথ একটি কণিক্ হবে। (u, V, w এবং w^1 ধ্রুবক ধরা হয়েছে)।

সমাধান ঃ

OX এবং OY দিকে কণাটির গতীয় সমীকরণদ্বয় হবে

$$\frac{dx}{dt} = u + wy \text{ এবং } \frac{dy}{dt} = V + w'x \; ;$$

অতএব $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{V + w'x}{u + wy}$;

এটি হতে আমরা পাই $(u + wy)\, dy = V + w'x)dx$ উভয় দিকে সমাকলন করলে পাওয়া যায় ঃ

$$uy + \frac{wy^2}{2} = Vx + \frac{w' x^2}{2} + \text{ ধ্রুবক রাশি };$$

এই কণাটির গতিপথ এবং একটি কণিকের সমীকরণ।

উদাহরণ—4

XOY সমতলে সঞ্চারমান একটি কণার উপর একক ভরের জন্য OX এবং OY অভিমুখে X এবং Y বলদ্বয় ক্রিয়া করছে ; (OX, OY পরস্পর লম্ব এবং X ও Y বলদ্বয় x এবং y-এর অপেক্ষক ধরা হয়েছে) দেখান যে কণাটির গতিপথের সমীকরণ হবে $\frac{d}{dx}\left[\left(Y - X\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 2X$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X \quad \text{.........} \quad \text{(i) এবং} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad \text{..........} \quad \text{(ii)}$$

এখন $Y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

অর্থাৎ $Y = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx} \times \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]$

কিন্তু $\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = 2.\frac{d^2x}{dt^2} = 2X$

অতএব $Y = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + X\frac{dy}{dx}$

অথবা $\left(Y - X\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ হবে।

উভয়দিকে x সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই—

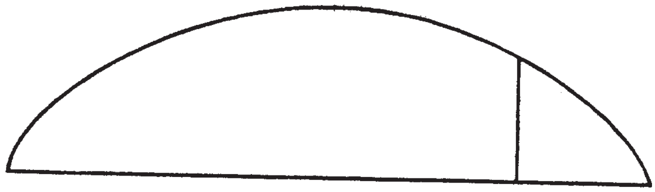
$$\frac{d}{dx}\left[\left(Y - X\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2X$$

উদাহরণ—5

একটি বৃত্তার্ধের উপর বাধাহীন চলমান কণার উপর ঐ বৃত্তার্ধ যে ব্যাস দ্বারা পরিবেষ্ঠিত ঐ ব্যাসের সমকোণে একটি বলের ক্রিয়াধীন রয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে ঐ বলটি কণাটির ব্যাস হতে লম্বদূরত্বের ত্রিঘাতের ব্যস্ত সমানুপাতিক হবে।

সমাধান ঃ

ধরা যাক্ যে কণাটি $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ বৃত্তার্ধের উপর চলছে এবং $y = 0$ (x অক্ষ) উপর ব্যাসটি রয়েছে।



যদি F বল কণাটির উপর ক্রিয়াশীল হয় তা হলে কণাটির গতীয় সমীকরণ হবে (কণাটি ভর এক ধরে)

$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ এবং $\frac{d^2x}{dt^2} = F$; সমাকলন করলে পাই $\frac{dx}{dt} = u$ (ধ্রুবক) ;

আবার, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ধরলে $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ হয়।

অতএব $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{ux}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;

পুনরায় x সাপেক্ষে $\frac{dy}{dt}$-কে অবকলন করে পাই, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = -u\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = \frac{a^2u}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$

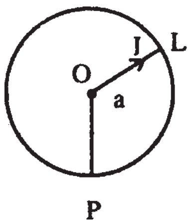
অতএব ক্রিয়াশীল বল $F = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{a^2u^2}{(a^2 - x^2)} = \frac{a^2u^2}{y^3}$$

উদাহরণ—6

সমতলে চলমান একটি কণার অক্ষের দিকে বেগের উপাংশ $\mu\theta$ এবং অনুপ্রস্থ দিশায় বেগের উপাংশ λr হলে কণাটির গতিপথ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এ স্থলে অক্ষের দিকে বেগ $= \mu\theta$ এবং অনুপ্রস্থ দিশায় বেগ $= \lambda r$;



অতএব $\frac{du}{dt} = \mu\theta$ এবং $r\frac{d\theta}{dt} = \lambda r$ .... (i)

(i) থেকে আমরা পাই যেহেতু $\frac{dr}{rd\theta} = \frac{dr}{dt}\Big/ r\frac{d\theta}{dt}$,

এজন্য $\frac{dr}{rd\theta} = \frac{\mu\theta}{\lambda r}$; অতএব $dr = \frac{\mu}{2\lambda}\theta^2$ সমাকল সমীকরণ সমাধান করে আমরা পাই $r = \frac{\mu}{\lambda}\theta^2$ + ধ্রুবক রাশি .... (ii)

(ii) হবে কণাটির গতিপথের সমীকরণ ;

উদাহরণ—7

v সমবেগে চলমান একটি সাইকেলের চাকার তারের উপরে কীট u সমবেগে চলতে ঐ কীটটির অরীয় এবং অনুপ্রস্থ দিশায় তার ত্বরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক যে বৃত্তাকার চাকাটির ব্যাস $2a$ এবং O কেন্দ্রবিন্দু।

চাকাটির যে কোনও প্রান্তবিন্দু P-এর অরীয় বেগ $\frac{da}{dt} = 0$ এবং অনুপ্রস্থ দিশায় বেগ $a\frac{d\theta}{dt} = v$ হবে ; অর্থাৎ $\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{a}$ (ধ্রুবক)। t সময়ে কীটটির অবস্থান I বিন্দু OL অক্ষের উপর থাকে এবং $OI = r$ হয়, তা হলে ঐ কীটটির অরীয় ত্বরণ হবে $\frac{d^2r}{dt} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ কিন্তু $\frac{dr}{dt} = u$ দেওয়া আছে এবং $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{a}$;

অতএব অরীয় ত্বরণ হবে $-r\frac{V^2}{a^2}$;

অনুপ্রস্থ দিশায় ত্বরণ হবে $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{V}{a}\right) = 2\frac{dr}{dt}\frac{V}{a} = \frac{2uV}{a}$

উদাহরণ—8

একটি কণা মূলবিন্দু O হতে আদিরেখায় দিশায় $\frac{f}{w}$ বেগে যাত্রা শুরু করে এবং মূলবিন্দুর সাপেক্ষে w কৌণিক বেগে এবং $-f$ (ঋণাত্মক) অরীয় ত্বরণে চলতে থাকে ; [w এবং f ধ্রুবক ধরা হয়েছে] প্রমাণ করুন যে, অরীয় ত্বরণ কখনই ধনাত্মক হবে না। এবং অন্তিমকালে অরীয় বেগ শূন্য হবে এবং $w^2r = f(1 - e^{-\theta})$ কণাটির গতিপথ হবে।

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (ধ্রুবক)

অতএব $\theta = \omega t$ (যেহেতু প্রারম্ভে $t = 0$, $\theta = 0$ ছিল)

এখন কণাটির অরীয় ত্বরণ $= \frac{d^2r}{dt^2} - \omega' r = -f$ (প্রশ্নে দেওয়া আছে) ; উপরের সরল দ্বিঘাত অবকল সমীকরণটিকে এইরূপে লেখা যায় ;

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2\left(r - \frac{f}{w^2}\right) = 0$$

অথবা, $$\frac{d^2}{dt^2}\left(r - \frac{f}{\omega^2}\right) = t\omega^2\left(r^{-f}\!\big/_{\omega^2}\right) ;$$

এই অন্তরকল সমীকরণটিকে সমাধান করে আমরা পাই $r - \frac{f}{\omega^2} = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ .... (i)

(যেখানে A এবং B দুইটি অক্ষে রাশি কিন্তু প্রারম্ভকালে ($t = 0$) $r = 0$ ছিল।

অতএব (i) সমতাতে $t = 0$, বসিয়ে $-\frac{f}{\omega^2} = A + B$ .... (ii) পাওয়া যায়।

পুনরায় (i) সমতাকে t সাপেক্ষে অবকলন করে পাব, $\frac{dr}{dt} = \omega A e^{\omega t} - \omega B e^{-\omega t}$

কিন্তু যখন $t = 0$, তখন ত্বরীয় বেগ $\frac{dr}{dt} = f/\omega$ ধরলে—

$$\frac{f}{w} = \omega(A - B) \ldots\ldots$$

অথবা, $A - B = \frac{f}{w^2}$ .... (iii) হবে।

এখন (ii) এবং (iii) সমীকরণদ্বয় সমাধান করে পাই, $A = 0$ এবং $B = -\frac{f}{\omega^2}$ .... (iv)

এখন (i) এবং (iv) হতে, আমরা দেখি যে,

$r = \frac{f}{\omega^2}(1 - e^{-\omega t})$; কিন্তু $\omega t = \theta$

$\therefore \ r = \frac{f}{\omega^2}(1 - e^{-\theta})$ হবে কণাটির গতিপথ।

পুনশ্চ $\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = -f$

$$\text{অতএব, } \frac{d^2r}{dt^2} = -f + \omega^2 r = -f + f(1 - e^{-\theta})$$

$$= -fe^{-\theta} \text{ যা সর্বদাই ঋণাত্মক।}$$

উদাহরণ—9

সমবেগে চলমান একটি কণার গতিপথ যদি সমতলে সুষমকোণী কুণ্ডলী $r = ae^{m\theta}$ হয়, তা হলে ঐ কণাটির অরীয় এবং অনুপ্রস্থ বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $r = ae^{m\theta}$ হতে আমরা t সাপেক্ষে অবকলন করে পাব $\frac{dr}{dt} = me^{m\theta}\frac{d\theta}{dt}$

বা, $\frac{dr}{dt} = mr\frac{d\theta}{dt}$ বা, $\frac{dr}{dt/m} = r\frac{d\theta}{dt}$

কিন্তু কণাটি গতিবেগ v হলে—

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{rd\theta}{dt}\right)^2$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(1 + \frac{1}{m^2}\right);$$

অর্থাৎ অরীয় বেগ $\frac{dr}{dt} = \frac{mV}{\sqrt{1+m^2}}$ এবং অনুপ্রস্থ বেগ $r\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{\sqrt{1+m^2}}$

আবার m এবং v অচর ধরলে,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 0 \text{ এবং } \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

অর্থাৎ $\quad \dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ হবে।

অতএব অরীয় ত্বরণ—

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0 - \frac{V^2}{r(1+m^2)} = -\frac{V^2}{r(1+m^2)}$$

এবং অনুপ্রস্থ ত্বরণ $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)$

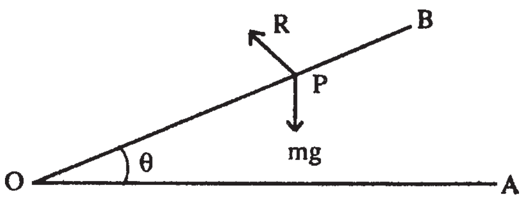
$$= 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt}\right)$$

$$= \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + 0 = \frac{mV^2}{r(1+m^2)} \text{ হবে।}$$

উদাহরণ—10

কোনও উল্লম্ব তলে একটি সরলাকৃতি সূক্ষ্ম মসৃণ টিউব তার একটি স্থির প্রান্তের সাপেক্ষে সমকৌণিক বেগে আবর্তিত হচ্ছে। যদি প্রারম্ভকালে টিউবটি অনুভূমিক অবস্থায় থাকে এবং টিউবটির অভ্যন্তরে একটি কণা ঐ টিউবের স্থিরপ্রান্ত হতে a পরিমাণ দূরত্বে থাকে V বেগে ঐ টিউবের মধ্যে চলতে থাকে তা হলে t সময় পরে কণাটির অবস্থান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ



ধরা যাক্ যে O বিন্দুটি টিউবটির স্থিরপ্রান্ত বিন্দু এবং OA একটি অনুভূমিক রেখা ; প্রারম্ভকালে টিউবটি OA বরাবর ছিল। t সময়ে টিউবটি OB বরাবর থাকে এবং $\angle AOB = \theta$; যদি টিউবটির সমকৌণিক বেগ ω হয় তা হলে $\theta = \omega t$ হবে। t সময়ে কণাটি টিউবের অভ্যন্তরে P বিন্দুতে থাকলে এবং কণাটির ভর m হলে ; মাধ্যাকর্ষণ হেতু কণাটির mg বল সোজা নীচের দিকে ক্রিয়াশীল হবে এবং টিউবের কণাটির উপর প্রতিক্রিয়া R ঐ টিউবের সমকোণে থাকবে।

প্রথম নিউটনের গতীয় সূত্র অনুসারে অরীয় ত্বরণ $\dfrac{d^2r}{dt} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$

ধরে আমরা পাই $m\left[\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)\right]^2 = -mg\sin\theta$

এবং অনুরূপভাবে অনুপ্রস্থ দিকে পাব $\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = R - mg\cos\theta$

কিন্তু কৌণিক বেগ $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (ধ্রুবক) এবং এজন্য $\theta = \omega t$ $(\theta = 0,\ t = 0)$

অতএব প্রথম গতীয় সমীকরণ হতে $\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = -g\sin\omega t$;

এই অবকল সমীকরণটি সমাধান করলে দেখা যায়—

$$r = A\cos h\,\omega t + B\sin h\,\omega t - \frac{g\sin\omega t}{D^2 - \omega^2}$$

$$r = A\cos h\,\omega t + B\sin h\,\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \quad \text{.......... (i)} \qquad [A \text{ এবং } B \text{ ধ্রুবক}]$$

পূর্বেই বলা হচ্ছে $t = 0$ সময়ে কণাটির O বিন্দু হতে দূরত্ব $r = a$ ছিল ;

অতএব $a = A$ .... (ii) হবে।

আবার (i)-কে t সাপেক্ষে অবকলন করে পাই— $\frac{dr}{dt} = \omega(B\cos h\ \omega t + A\sin h\,\omega t) + \frac{g}{2\omega}\cos\omega t$

কিন্তু প্রারম্ভকালে $(t = 0)\frac{dr}{dt} = V$ দেওয়া আছে ;

অতএব $V = \omega B + \frac{g}{2\omega}$ হবে। .... (iii), (ii) এবং (iii) সমাধান করে আমরা পাই—

A $= a$ এবং $B = \frac{V}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}$

অতএব (i) হতে আমরা দেখি যে,

$$r = a\cos h\ \omega t + \left(\frac{V}{w} - \frac{g}{2\omega^2}\right)\sin h\,\omega t + \frac{g\sin\omega t}{2\omega^2}$$

4.6 প্রশ্নমালা—1

1. একটি বোমা মাটিতে পড়ে বিস্ফোরণ হয় ; এবং বোমার টুকরাগুলি V সমবেগে চতুর্দিকে ছড়িয়ে পড়ে। ঐ টুকরোগুলি মাটিতে যে অঞ্চলে পড়ে তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। উত্তর ঃ $\frac{\pi V^4}{g^2}$

2. OX (x অক্ষ)-কে সমতলে অনুভূমিক রেখার দিকে এবং OY (অক্ষ)-কে উল্লম্ব ঊর্ধ্বদিকে ধরা হল। কোনো উল্লম্ব সমতলে OX-কে অনুভূমিক দিকে এবং OY-কে ঊর্ধ্ব দিকে ধরা হল। O মূলবিন্দু হতে একটি কণা u বেগে নিক্ষিপ্ত হলে ; দেখান যে যদি $u^2 \geq g(K + \sqrt{h^2 + K^2})$ হয় তা হলে ঐ কণাটি (h, K) বিন্দু দিয়ে যাবে।

3. দুইটি কণা O বিন্দু হতে u বেগে সমতলে অনুভূমিক রেখার সঙ্গে α এবং β কোণে এমনভাবে নিক্ষেপ করা হল যাতে কণা দুইটি উল্লম্ব সমতলে P বিন্দু দিয়ে যায়। দেখান যে $\frac{2u}{g}\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sec\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ সময়ের ব্যবধানে তারা P বিন্দুতে পৌঁছায়।

4. কোনও সমতলে একটি কণার গতিপথ একটি উপবৃত্ত এবং কণাটির ত্বরণ ঐ উপবৃত্তের পরাক্ষের দিকে হলে, কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বলটির ধর্ম নির্ণয় করুন। (বলটি ঐ অক্ষটি হইতে দূরত্বের ত্রিঘাতের সমানুপাতিক)

5. XOY সমতলে চলমান একটি কণার ত্বরণ x অক্ষের দিকে μy^{-3} হয় এবং (O, K) বিন্দু ox এবং oy অক্ষের দিকে যথাক্রমে U এবং V বেগে যাত্রা শুরু করে।

দেখান যে $\mu > V^2K^2$ না হলে কণাটি ox অক্ষ পর্যন্ত পৌঁছাবে না এবং ঐ ক্ষেত্রে মূলবিন্দু হতে UK^2। $\left(\sqrt{u} - VK\right)$ পরিমাণ দূরত্বের কণাটি ox অক্ষতে মিলিত হবে।

(U, V এবং K-কে ধনাত্মক রাশিত্রয় ধরা হচ্ছে)

6. দেখান যে সমতলে চলমান একটি কণার গতিপথ সমপরাবৃত্ত সম্ভবপর হয় যদি কণাটির উপর ক্রিয়াশীল। ঐ পরাবৃত্তের একটি স্পর্শপ্রবণ রেখায় সমান্তরাল হয় এবং অন্য স্পর্শপ্রবণ রেখার সঙ্গে কণাটির দূরত্বের তৃতীয় ঘাতের সমানুপাতিক হয়।

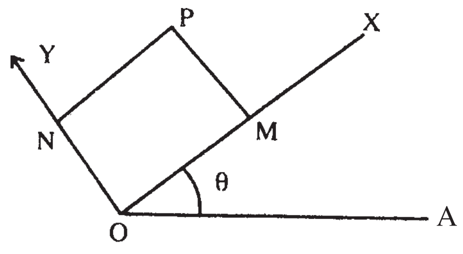
7. সমকৌণিক বেগ সমন্বিত একটি কণার গতিপথ $r = ae^{\theta}$ হলে দেখান যে কণাটির অরীয় ত্বরণের মান শূন্য হবে এবং তার অনুপ্রস্থ ত্বরণ ঐ কণাটির মূলবিন্দু হতে দূরত্বের সমানুপাতিক হবে।

8. অনুভূমিক তলে একটি সরলমসৃণ টিউব তার একটি প্রান্তবিন্দু O-এর সাপেক্ষে ω সমকৌণিক বেগে আবর্তিত হচ্ছে। আদি দশায় একটি কণা O বিন্দু হতে a দূরত্বে V বেগে O বিন্দুর দিকে ছোঁড়া হল। $aw < V$ হলে দেখান যে ঐ কণাটি $\dfrac{1}{\omega}\tan h^{-1}\dfrac{a\omega}{V}$ সময় পরে O বিন্দুতে পৌঁছাবে।

ঘুরন্ত নির্দেশ সাপেক্ষে বেগ ও ত্বরণের উপাংশ ঃ

মনে করা যাক্ OX এবং OY সমকোণে অবস্থিত অক্ষদ্বয় তাদের ছেদবিন্দু O-কে কেন্দ্র করে XOY সমতলে ঘুরছে।

মনে করি, OA একটি অনড় সরলরেখা এবং t সময়ের OX অক্ষটি এবং OA রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ θ ; এই XOY সমতলে $P(x, y)$ বিন্দুতে t সময়ে একটি কণা আছে। P বিন্দু হতে OX-এর উপর PM লম্ব টানা হল এবং ঐ লম্বের পাদবিন্দুকে M ধরা হল। সহজেই দেখা যাচ্ছে যে OX, OY অক্ষদ্বয় সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাংকদ্বয় $x = OM$ এবং $y = PM$ আবার P বিন্দু হতে OY-এর উপরে PN লম্ব টানা হল এবং ঐ লম্বের পাদবিন্দু N ধরা হল। এখন $PN = MO = x$ হবে।



আমরা O-কে মূলবিন্দু এবং OA-কে আদিরেখা ধরে মেরুস্থানাংক প্রয়োগ করলে দেখতে পাই যে, M বিন্দুটির মেরুস্থানাংক (OM, θ) অর্থাৎ (x, θ) হবে, এবং N বিন্দুটির মেরুস্থানাংক $\left(ON, \theta + \frac{\pi}{2}\right)$ অর্থাৎ

$\left(v, \theta + \frac{\pi}{2}\right)$ হবে। অতএব পূর্বের আলোচনা অনুযায়ী, M বিন্দুটির বেগের OX উপাংশ $\frac{dx}{dt}$ এবং MP-এর দিকে $x\frac{d\theta}{dt}$; এবং M-এর বিন্দুটির ত্বরণের OX দিকে উপাংশ $\frac{d^2x}{dt^2} - x\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ এবং MP দিকে উপাংশ $\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(x^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ হবে।

আবার অনুরূপভাবে N বিন্দুটির বেগের ON দিকে উপাংশ $\frac{dy}{dt}$ এবং PN (বর্ধিত) দিকে উপাংশ $y\frac{d}{dt}(90°+\theta) = y\frac{d\theta}{dt}$ হবে।

আবার N বিন্দুটির ত্বরণের OY দিকে উপাংশ $\frac{d^2y}{dt^2} - y\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ এবং ঐ ত্বরণের PN দিকে উপাংশ $\frac{1}{y}\frac{d}{dt}\left(y^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ হবে। (লক্ষ্য করুন যে, $\overrightarrow{PN}$ এবং $\overrightarrow{OX}$ পরস্পর বিপরীতমুখী)

এখন যদি $P(x, y)$ বিন্দুটির OX, OY দিকে বেগের উপাংশদ্বয় যথাক্রমে u এবং v হয় তা হলে u = N বিন্দুটির OX দিকে বেগের উপাংশ + ঐ দিকে N বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর বেগ কিন্তু N বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর OX (দিকে বেগের উপাংশ = M বিন্দুর OX) অভিমুখে বেগ

অতএব $u = -y\frac{d\theta}{dt} + \frac{dx}{dt} = P$ বিন্দুটি OX দিকে বেগ

অনুরূপভাবে v = M বিন্দুটির OY দিকে বেগের উপাংশ + ঐ দিকে M বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর বেগ = M বিন্দুটির MP দিকে বেগ + ঐ OY দিকে N বিন্দুর বেগ $= x\frac{d\theta}{dt} + \frac{dv}{dt}$

আবার f_1 এবং f_2 যদি P বিন্দুটির OX এবং OY অভিমুখে ত্বরণের উপাংশদ্বয় তা হলে দেখান যেতে পারে

f_1 = N বিন্দুটির OX দিকে ত্বরণের উপাংশ + ঐ OX দিকে N বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর ত্বরণের উপাংশ।

$$= -\frac{1}{y}\frac{d}{dt}\left(y^2 - \frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{d^2x}{dt^2} - x\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \;;$$

পুনরায়, f_2 = M বিন্দুটির OX দিকে ত্বরণের উপাংশ $+t$ ঐ দিকে M বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর ত্বরণের উপাংশ $= \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(x^2\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{d^2y}{dt^2} - y\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

লক্ষ্য করুন যে, OX এবং OY অক্ষদ্বয় ধ্রুবক কৌণিক বেগ নিয়ে XOY সমতলে সঞ্চারমান, তা হলে $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ ধ্রুবক হবে।

তখন P বিন্দুটির OX বেগের OX, OY দিকে উপাংশদ্বয় হবে যথাক্রমে—

$$\frac{dx}{dt} - y\frac{d\theta}{dt} \text{ এবং } \frac{dy}{dt} + x\frac{d\theta}{dt}$$

আবার ঐ P বিন্দুটির ত্বরণের OX এবং OY দিকে উপাংশদ্বয় হবে যথাক্রমে

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x\omega^2 - 2\omega\frac{dy}{dt}$$

এবং $$\frac{d^2y}{dt^2} - y\omega^2 + 2\omega\frac{dx}{dt}$$

4.8 দুইটি কণার স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ (Collision of Elastic bodies)

আমাদের বাস্তব অভিজ্ঞতা হতে আমরা জানি যে একটি বল যদি আমরা উপর হতে নীচে সমতল মেঝের দিকে ফেলে দিই তা হলে বলটি মেঝের সংস্পর্শে আসে আবার উপরের দিকে যাবে।

দুইটি বস্তুর সংঘর্ষের পূর্বে এবং পরে তাদের বেগের যে পরিবর্তন হয় তার জন্য নিউটন নিম্নলিখিত গাণিতিক সূত্র প্রণয়ন করেছেন ঃ যদি দুইটি মসৃণ বস্তুর সংঘর্ষ এরূপ হয় যে তাদের বেগের দিশা এবং ঐ বস্তু দুটির সংঘর্ষের সাধারণ বিন্দুগামী রেখা এবং তাদের সাধারণ অভিলম্বের দিশা একই হয় তা হলে ঐ সংঘর্ষের অব্যবহিত পূর্বে ঐ দিশায় বস্তু দুইটির বেগের উপাংশদ্বয় u_1 ও u_2 এবং ঠিক পরে যথাক্রমে V_1, V_2 হলে...

$V_2 - V_1 = e(u_1 - u_2)$ .... (i) হবে

এখানে e স্থাপিতাংক এবং তা বস্তু দুইটির সংঘর্ষের পূর্বে এবং পরে বেগ u_1, u_2, v_1, v_2 কিংবা বস্তু দুইটির ভরের উপরও নির্ভর করবে না, e কেবলমাত্র বস্তু দুইটি যে পদার্থ নিয়ে গঠিত তার উপর নির্ভরশীল হবে।

সাধারণতঃ এই সূত্রটিকে এইরূপে বলা হয়, দুইটি সংঘর্ষবিন্দুগামী উভয়ের যে সাধারণ অভিলম্ব ঐ দিকে সংঘর্ষের পরে বস্তু দুইটির আপেক্ষিক বেগের উপাংশ সংঘর্ষের ঠিক আগে বস্তু দুইটির আপেক্ষিক বেগের উপাংশকে $-e$ কে গুণ করলে পাওয়া যাবে।

যদি বস্তু দুইটি একেবারেই স্থিতিস্থাপক না হয় তা হলে $e = 0$ হবে এবং বস্তু দুইটি এই সংঘর্ষের পরে একই বেগে একইদিকে চলতে থাকবে।

যদি বস্তু দুইটি সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক হয় তখন $e = 1$ হবে এবং সংঘর্ষের পূর্বে এবং পরে তাদের আপেক্ষিক বেগের পরিমাণ সমান কিন্তু বিপরীতমুখী হবে।

লক্ষ্য করুন যে দুইটি মসৃণ বস্তুর সংঘর্ষ হলে উহাদের স্পর্শবিন্দুগামী সাধারণ স্পর্শকের দিকে কোনও বল ক্রিয়া করবে না এবং ঐ দিকে বস্তু দুইটির বেগের উপাংশদ্বয়ের কোনও পরিবর্তন হবে না।

নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী দুইটি বস্তুর সংঘর্ষ হলে যে কোনও একটি অপরটির বলের আবেগদ্বয় পরপর সমান কিন্তু বিপরীতমুখী হবে এবং এজন্য তাদের স্পর্শবিন্দুগামী সাধারণ অভিলম্ব অভিমুখে তাদের ভরবেগের পরিবর্তন সমান কিন্তু বিপরীতমুখী থাকবে ; অর্থাৎ ঐ দিকে বস্তু দুইটির সংঘর্ষের পূর্বে ভরবেগের যোগফল সংঘর্ষের পরে তাদের ভরবেগের যোগফলের সমপরিমাণ হবে।

(ii) নং সমীকরণ অর্থাৎ সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক মসৃণ সমন গোলকের সংঘর্ষ ঘটলে সংঘর্ষের পরে যে কোনও একটির বেগ অপরটির সংঘর্ষের পূর্বের বেগের সমান হবে।

সংঘাতজনিত আবেগ (Impulse due to collision) ঃ

সংঘর্ষের ফলে দুইটি গোলকেরই ভরবেগের পরিবর্তন হবে ; m_2 ভরবিশিষ্ট গোলকটির উপর সংঘাতজনিত

আবেগ তার ভরবেগের পরিবর্তনের সমান হবে এবং আবেগ হবে ঃ

$$m_2(u_2 - v_2) = \frac{m_1 m_2 (1+e)(u_2 - u_1)}{m_1 + m_2}$$

তা m_1 ভরবিশিষ্ট গোলকটির উপর আবেগের সমপরিমাণ এবং বিপরীতমুখী হবে।

যেহেতু $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1V_1 + m_2V_2$ এবং $V_2 - V_1 = -e(u_1 - u_2)$.

সংঘর্ষজনিত গতীয় শক্তির ক্ষয় (Loss of kinetic energy due to collision) ঃ

আমরা পূর্বেই (i)নং সমীকরণে $V_2 - V_1 = -e(u_2 - u_1)$ পেয়েছে ;

এখন উভয়দিকে বর্গ নিয়ে এবং ঐ বর্গগুলিকে m_1m_2 দ্বারা গুণ করে আমরা পাব—

$m_1m_2\ (V_2 - V_1)^2 = e^2m_1m_2(u_2 - u_1)^2$ ..... (iii)

আবার (ii) নং সমীকরণটির $m_1V_1 + m_2V_2 = m_1u_1 + m_2u_2$ উভয় দিকে বর্গ নিলে আমরা পাব,

$(m_1V_1 + m_2V_2)^2 = (m_1u_1 + m_2u_2)^2$ .... (iv)

সহজেই দেখা যায় (iii) এবং (iv) সমীকরণদ্বয় উভয় পার্শ্বের যোগফল নিয়ে আমরা পাব,

$(m_1 + m_2)\ (m_1V_1 + m_2V_2^2) = (m_1 + m_2)\ (m_1u_1^2 + m_2u_2^2) - (1 - e^2)m_1m_2(u_1 - u_2)^2$

অতএব, $\frac{1}{2}\left(m_1V_1^2 + m_2V_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(m_1u_1^2 + m_2V_2^2\right) - \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(u_1 - u_2)^2$

কিন্তু সংঘর্ষের পূর্বে গোলকদুইটির গতীয় শক্তি $\frac{1}{2}(m_1u_1^2 + m_2u_2^2)$ এবং পরে গতীয় শক্তি $\frac{1}{2}\left(m_1V_1^2 + m_2V_2^2\right)$.

সহজেই দেখা যাচ্ছে যে এই সংঘর্ষের জন্য $\frac{m_1m_2(1-e^2)\times(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$ গতীয় শক্তি ক্ষয় পাবে।

($e < 1$ ধরা হয়ে থাকে, এজন্য সংঘর্ষের পূর্বে গতীয় শক্তি ঐ সংঘর্ষের পরে গতীয় শক্তি অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।)

যদি $e = 1$ সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপকতা ক্ষেত্রে গতীয় শক্তি কোনও হ্রাস ঘটবে না।

যদি গোলকদুইটির ভর সমান হয় তখন $m_1 = m_2$ ধরে আমরা দেখি যে, গতিশক্তির ক্ষয়

$\frac{1}{4}(1 - e^2)m_1(u_1 - u_2)$ হবে।

যদি u_1 অথবা $u_2 = 0$ হয়, অর্থাৎ যে কোনও একটি গোলক সংঘর্ষের পূর্বে স্থির থাকে, ধরা যাক্ $u_2 = 0$ তখন প্রথম গোলকটির গতিশক্তির হ্রাস হবে—

$\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(1 - e^2)u_1^2$; $m_1 = m_2$ হলে এই হ্রাসের পরিমাণ হবে $\frac{1}{2}m_1(1 - e^2)u_1^2$,

যা প্রথম গোলকটির গতিশক্তির $(1 - e^2)$ গুণ।

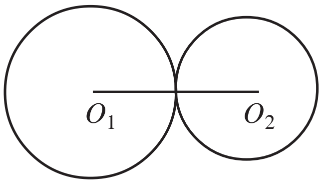
বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ যদি বস্তু দুইটির বেগের দিশা এবং ঐ বস্তু দুইটির স্পর্শবিন্দুগামী সাধারণ অভিলম্বের দিশা

পৃথক হয় তা হলে ঐ সাধারণ অভিলম্বের দিশায় সংঘর্ষের পরে বস্তু দুইটির আপেক্ষিক বেগের উপাংশ সংঘর্ষের পূর্বে ঐ দিশায় তাদের আপেক্ষিক বেগের উপাংশকে $-e$ দ্বারা গুণ করে পাওয়া যাবে এবং ঐ সাধারণ অভিলম্বের দিশায় তাদের ভরবেগের উপাংশদ্বয়ের যোগফল অপরিবর্তিত থাকবে।

বস্তু দুইটির ভর তাদের বেগ এবং সংঘর্ষজনিত স্থিতিস্থাপক গুণাংক জানা থাকলে, আমরা সংঘর্ষের পরে বস্তু দুইটির গতি নির্ণয় করতে পারব।

দুইটি মসৃণ গোলকের সরল সংঘর্ষ (Direct Collision of two elastic spheres) ঃ

আমার এখন m_1 এবং m_2 ভর বিশিষ্ট দুইটি মসৃণ গোলকের সংঘর্ষ নিয়ে আলোচনা করব।



ধরা যাক্ m_1 ভরবিশিষ্ট গোলকটির কেন্দ্র O_2 ; এবং প্রথম গোলকটির সংঘর্ষের পূর্বে বেগ u_1 এবং পরে বেগ v_2 হয় এবং অন্য গোলকটির সংঘর্ষের পূর্বে বেগ u_2 এবং পরে বেগ v_2 ; পুনশ্চ ধরি u_1, v_1 এবং u_2, v_2 বেগ সমূহের দিশা $\overrightarrow{O_1O_2}$ অভিমুখে হয়।

এখন তাদের স্থিতিস্থাপক গুণাংক e (ধ্রুবক) ধরলে $V_2 — V_1 = -e(u_2 - u_1)$ .... (i) হলে, আবার উভয় গোলকের ক্ষেত্রে সম্বিলিতভাবে ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$m_1V_1^2 + m_2V_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \quad .... \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) সমীকরণ দুইটি সমাধান করলে আমরা পাই,

$$v_1 = \frac{m_1u_1 + m_2u_2 - em_2(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}$$

এবং $$v_2 = \frac{m_1u_1 + m_2u_2 + em_1(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}$$

এরূপ দেখা যায় যে সংঘর্ষের পূর্বে গোলক দুইটির বেগ এবং ভর জানা থাকলে আমরা সংঘর্ষের পরে আমরা গোলক দুইটির বেগ জানিতে পারি।

যদি গোলক দুইটির ভর সমপরিমাণ অর্থাৎ $m_1 = m_2$ হয়, তা হলে,

$$v_1 = \frac{1}{2}(1-e)u_1 + \frac{1}{2}(1+e)u_2$$

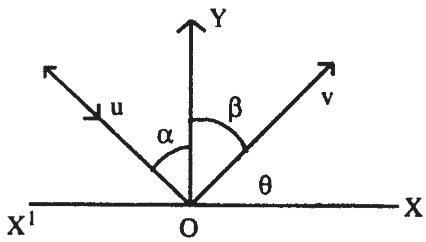
এবং $$v_2 = \frac{1}{2}(1+e)u_1 + \frac{1}{2}(l-e)u_2$$ হবে।

এখন যদি গোলক দুইটি সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক হয় তা হলে $e = 1$ হলে এবং দেখা যায় যে, $V_1 = u_2$ ও $V_2 = u_1$;

পুনরায় $e = 0$ হলে গতিশক্তির ক্ষয় হবে $\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(u_1 - u_2)^2$ এখন একটি গোলক সংঘর্ষের পূর্বে স্থির থাকলে (ধরা যাক্ $u_2 = 0$) এক্ষেত্রে গতিশক্তির ক্ষয়ের পরিমাণ হবে $\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}u_1^2$ ।

মসৃণ সমতলের সহিত মসৃণ গোলকের সংঘাত ঃ

ধরা যাক্ যে $X'OX$ একটি সমতল এবং OY, O বিন্দুতে ঐ সমতলের উপর লম্ব। এবং $X'OX$ সমতলটি স্থির অবস্থায় আছে। মনে করি যে m ভর বিশিষ্ট মসৃণ গোলকটি u বেগে OY লম্বের সঙ্গে α কোণে ঐ $X'OX$ সমতলটিকে আঘাত করে এবং এই সংঘাতের পরে ঐ গোলকটি ঐ লম্বের সঙ্গে β কোণে v বেগে চলে যায়।



অতএব নিউটনের তত্ত্ব অনুযায়ী (যেহেতু—সমতলটি স্থির অবস্থায় আছে) $v \cos\beta = eu \cos\alpha$ .... (i)

কিন্তু সমতলের $X'OX$ দিকে গোলকটির বেগের কোনও পরিবর্তন হবে না ;

এজন্য $V \sin \beta = u \sin \alpha$ .... (ii)

(i) এবং (ii)-এর উভয় দিকে বর্গ নিয়ে এবং পরে তাদের যোগফল হতে আমরা পাই,

$V^2 = V^2 \cos^2\beta + V^2 \sin^2\beta = u^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$ .... (iii)

পুনরায় আমরা দেখি যে, $\frac{V\cos\beta}{V\sin\beta} = \frac{eu\cos\alpha}{u\sin\alpha}$ .... (iv)

অর্থাৎ $\cot \beta = e \cot \alpha$

তা হলে আমরা দেখেছি যে সংঘাতের পূর্বে গোলকটির বেগ এবং সমতলও গোলকটির স্থিতিস্থাপক গুণাংক জানা থাকলে সংঘাতের পরেও গোলকটির বেগ পাওয়া যাবে।

এক্ষেত্রে সমতলের উপরে গোলকটির সংঘাতের আবেগ হবে ঐ লম্ব OY দিকে গোলকটির ভরবেগ পরিবর্তনের সমান এবং এর পরিমাণ হবে—

$$- mu \cos \alpha - (mV \cos \beta) = - mu \cos \alpha (1 + e)$$

গোলকটির সঙ্গে সমতলটির সংঘর্ষের জন্য গতিশক্তির দ্রাবের পরিমাণ হতে—

$$\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}m(u^2 \sin^2 \alpha + e^2u^2 \cos \alpha)$$

$$= \frac{1}{2}mu^2(1 - e^2)\cos^2 \alpha$$

যদি গোলকটি ঐ সমতলকে সোজাসুজি আঘাত করে তখন $\alpha = 0$ এবং (i) এবং (ii) হতে দেখা যাবে যে, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ এবং $V = eu$ হবে ;

অর্থাৎ eu বেগে গোলকটি সমতলটির সঙ্গে সমকোণে সংঘাতের পরে চলে যাবে।

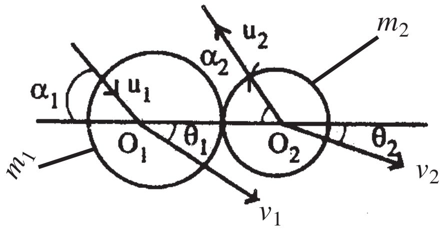
যখন $e = 1$ হবে অর্থাৎ গোলকটি সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক তখন $\beta = \alpha$ এবং $V = u$ হবে ; অর্থাৎ গোলকটি যে বেগ নিয়ে ঐ সমতলটিকে যে কোণে আঘাত করেছিল সংঘাতের পরেও ঐ বেগেই এবং সমতলটির সঙ্গে একই কোণে চলে যাবে।

এক্ষেত্রে গতীয় শক্তির কোনও ক্ষয় হবে না।

যখন $e = 0$ হয় তখন $V \cos \beta = 0$ এবং $V \sin \beta = u \sin \alpha$ থাকবে ; অর্থাৎ গোলকটির সমতলের লম্বের দিকে কোনও গতি থাকবে না।

দুইটি মসৃণ গোলকের তির্যকরূপে সংঘাত ঃ

মনে করি m_1 ভরবিশিষ্ট গোলকটির কেন্দ্র বিন্দু O_1 এবং m_2 ভরবিশিষ্ট গোলকটির কেন্দ্র বিন্দু O_2। ধরা যাক, প্রথম গোলকটির সংঘাতের পূর্বের u_1 বেগে $\overrightarrow{O_1O_2}$ (দুইটি গোলকের কেন্দ্রবিন্দুগামী রেখা) সরলরেখার সঙ্গে α_1 কোণে চলছিল এবং সংঘাতের পরে $\overrightarrow{O_1O_2}$ রেখার সঙ্গে θ_1 কোণে V_1 পরিমাণ বেগে চলতে থাকে।



আবার ধরা যাক্ যে, m_2 ভরবিশিষ্ট অন্য গোলকটি সংঘাতের পূর্বে u_2 বেগে $\overrightarrow{O_1O_2}$ α_2 রেখার দিকে কোণে চলছিল এবং সংঘাতের এর u_2 বেগ $\overrightarrow{O_1O_2}$ রেখার দিকে চলতে থাকে। যেহেতু বলদুইটি মসৃণ, এজন্য সাধারণ অভিলম্ব $\overrightarrow{O_1O_2}$-এর সমকোণে গোলক দুইটির বেগের কোনও পরিবর্তন হবে না।

অতএব $V_1 \sin \theta_1 = u_1 \sin \alpha_1$

এবং $V_2 \sin \theta_2 = u_2 \sin \alpha_2$ .... (i) হবে।

আবার নিউটনের তত্ত্বানুযায়ী $\overrightarrow{O_1O_2}$ দিকে উপাদেয় আপেক্ষিক বেগের উপাংশ হলে আমরা পাই,

$$V_1 \cos \theta_1 - V_2 \cos \theta_2 = -e(u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2) \quad \text{............ (ii)}$$

যেহেতু m_1 গোলকটির উপর m_2 গোলকের আঘাত এবং m_2 গোলকটির আঘাত এবং m_2 গোলকটির উপর m_1 গোলকের আঘাত একই পরিমাণে কিন্তু বিপরীতমুখে O_1O_2 সরলরেখায় আছে এজন্য বিপরীতমুখে O_1O_2 সরলরেখায় আছে এজন্য ঐ দিকে গোলক দুইটির সম্মিলিত ভরবেগের কোনও পরিবর্তন হবে না ;

এজন্য আমরা পাব—

$$m_1V_1 \cos \theta_1 + m_2V_2 \cos \theta_2 = m_1u_1 \cos \alpha_1 + m_2u_2 \cos \alpha_2 \quad \text{........ (iii)}$$

(ii) এবং (iii) সমীকরণ দুটি সমাধান করে আমরা পাই,

$$V_1 \cos\theta_1 = \frac{(m_1u_1 \cos\alpha_1 + m_2u_2 \cos\alpha_2) - em_2(u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)}{(m_1 + m_2)}$$

এবং $$V_2 \cos\theta_2 = \frac{(m_1u_1 \cos\alpha_1 + m_2u_2 \cos\alpha_2) - em_1(u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)}{(m_1 + m_2)}$$

সহজেই দেখা যায় যে,

উপরের দুইটি সমীকরণের উভয় পক্ষকে বর্গ নিয়ে এবং (i) সমীকরণ দুইটির উভয় পক্ষের বর্গ নিয়ে যথাক্রমে যোগ করলে V_1^2 এবং V_2^2 পাওয়া যাবে।

$$\tan\theta_1 = \frac{V_1 \sin\theta_1}{V_1 \cos\theta_1} = \frac{(m_1 + m_2)u_1 \sin\alpha_1}{(m_1u_1 \cos\alpha_1 + m_2u_2 \cos\alpha_2) - em_2(u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)}$$

এবং $$\tan\theta_2 = \frac{V_2 \sin\theta_2}{V_2 \cos\theta_2} = \frac{(m_1 + m_2)u_2 \sin\alpha_2}{(m_1u_1 \cos\alpha_1 + m_2u_2 \cos\alpha_2) + em_1(u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)}$$

এইরূপে সংঘাতের পূর্বে u_1, u_2, α_1, α_2, e জানা থাকলে সংঘাতের পরে V_1, V_2, θ_1, θ_2 পাওয়া যাবে।

দ্রষ্টব্য ঃ (i) যদি দ্বিতীয় গোলকটি সংঘর্ষের পূর্বে স্থিরাবস্থায় থাকে অর্থাৎ $u_2 = 0$ হয় তা হলে (i) হতে দেখা যাবে যে, $\sin\theta_2 = 0$ হবে অর্থাৎ $\theta_2 = 0$ হয় এবং ঐ দ্বিতীয় গোলকটি সংঘর্ষের পরে O_1O_2 সরলরেখার দিকে চলতে থাকবে।

(ii) যদি গোলক দুইটির ভর সমান ($m_1 = m_2$) হয় এবং $e = 1$ হয় তা হলে দেখা যাবে যে, $V_1 \cos\theta_1 = u_2 \cos\alpha_2$ এবং $V_2 \cos\theta_2 = u_1 \cos\alpha_1$ হবে।

অর্থাৎ সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সমপরিমাণ ভরবিশিষ্ট দুইটি মসৃণ গোলক সংঘাতের পরে যে কোনও একটির তাদের সাধারণ কেন্দ্র বিন্দুগামী সরলরেখার দিকে বেগের উপাংশ সংঘাতের পূর্বে অন্যটির ঐ দিকে বেগের উপাংশের সমান হবে।

গতীয় শক্তির হ্রাস ঃ

গতীয় শক্তির হ্রাস হবে $\left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2\right)$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(n_1^2 \cos^2\alpha_1 + u_1^2 \sin^2\alpha_1\right) + \frac{1}{2}m_2\left(u_2^2 \cos^2\alpha_2 + u_2^2 \sin^2\alpha_2\right)$$

$$-\frac{1}{2}m_1(V_1^2 \cos^2\theta_1 + V_1^2 \sin^2\theta_1) - \frac{1}{2}m_2(V_2^2 \cos^2\theta_2 + V_2^2 \sin^2\theta_2)$$

কিন্তু (i) প্রয়োগ করে $$= \frac{1}{2}(m_1u_1^2 \cos^2\alpha_1 + m_2u_2^2 \cos^2\alpha_2)$$

$$-\frac{1}{2}(m_1V_1^2 \cos^2\theta_1 + m_2V_2^2 \cos^2\theta_2) \quad .... \quad (v)$$

কিন্তু (iv) সমীকরণের উভয়পার্শ্বে বর্গ করে m_1 এবং m_2 দিয়ে গুণ করে যোগ করে সরল করে আমরা পাই, $m_1V_1^2\cos^2\theta_1 + m_1V_2^2\cos^2\theta_2$.

$$= (m_1u_1^2\cos^2\alpha_1 + m_2u_2^2\cos\alpha_2) - (1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u_1\cos\alpha_1 - u_2\cos\alpha_2)^2$$

অতএব গতীয় শক্তির হ্রাসের পরিমাণ হবে, $\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u_1\cos\alpha_1 - u_2\cos\alpha_2)^2$

লক্ষ্য করুন যে, $e = 1$ হলে সরল সংঘর্ষের ন্যায় এখানেও গতীয় শক্তির কোনও হ্রাস হবে না।

4.9 অনুশীলনী—2

উদাহরণ—1

h উচ্চতা হতে m ভরবিশিষ্ট একটি স্থিতিস্থাপক মসৃণ গোলক অনুভূমিক মসৃণ সমতলে পতিত হয়ে স্থিতাবস্থা হতে পুনরায় উর্ধ্বদিকে চলতে থাকে ;

স্থাপিতাংক e ধরলে গোলকটির গতীয় শক্তির হ্রাসের পরিমাণ হবে $mgh\ (1 - e^2)$.

সমাধান ঃ

যখন গোলকটি সমতলে পৌঁছায় তখন তার গতিবেগ V হলে $V^2 = 2gh$ হবে ; আবার ঐ গোলকের পুনরায় উত্থানকালে উচ্চতায় গতিবেগ u ধরলে নিউটনের নিয়ম অনুযায়ী $u = -eV$ হবে ; অতএব $u^2 = e^2V^2 = 2e^2gh$; তা হলে গোলকটির গতীয় শক্তির হ্রাসের পরিমাণ হবে

$$\frac{1}{2}m(V^2 - u^2) = mgh(1-e^2)$$

উদাহরণ—2

একটি মসৃণ গোলক স্থিরাবস্থায় আছে। ঐরূপ অন্য একটি মসৃণ গোলকের সঙ্গে তাহার সংঘর্ষ হয়। যদি সংঘর্ষের পূর্বে এবং পরে প্রথম গোলকটির গতিবেগ গোলক দুইটির কেন্দ্রগামী সরলরেখার সঙ্গে যথাক্রমে θ এবং ϕ কোণে থাকে এবং গোলক দুইটির স্থিতিস্থাপংক e হয় তা হলে দেখান যে, $\tan\phi = \frac{2\tan\theta}{1-e}$ হবে।

(গোলক দুটির প্রত্যেকটির ভর m ধরা হয়েছে)

সমাধান ঃ

ধরা যাক্ যে প্রথম গোলকটির যে সংঘর্ষের পূর্বে এবং পরে গতিবেগ যথাক্রমে V এবং V হয় এবং অন্য গোলকটির গতিবেগ শূন্য এবং U হয় তা হলে গোলক দুইটির কেন্দ্রগামী সরলরেখার সমকোণে v এবং V-এর উপাংশ সমান হবে। ধরা যাক্ যে v উভয়কেন্দ্রগামীরেখার সঙ্গে θ কোণে থাকবে।

তা হলে $V\sin\phi = V\sin\theta$ ..... (i) হলে। আবার যেহেতু অন্য গোলকটি সংঘর্ষের পূর্বে স্থিরাবস্থায় ছিল অতএব সংঘর্ষের পরে ঐ গোলকটির গতিবেগ U যদি উভয় কেন্দ্রগামী রেখার সঙ্গে ψ কোণে থাকে, তা হলে,

$U \sin \psi = 0$ .... (ii) হবে।

অতএব $\psi = 0$ অর্থাৎ U বেগের দিশা গোলক দুইটি কেন্দ্র সংযোজক রেখার দিশা অভিন্ন হবে। ঐ সংযোজক রেখার দিকে নিউটনের তত্ত্বানুযায়ী $V \cos \phi - U = - eV \cos \theta)$ .... (iii)

(e-কে গোলক দুইটির স্থাপিতাংক ধরা হয়েছে।)

আবার ঐ কেন্দ্র দুইটির সংযোজক রেখার দিকে রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে ; এজন্য

$m V \cos \phi + m U = m v \cos \theta$ .... (iv)

(iv) সমীকরণের দুইদিকে m অপনয়ন করে এবং পরে (iii) সমীকরণের সঙ্গে উভয় পার্শ্বে যোগ করে পাই

$$2V \cos \phi = (1 - e)V \cos \theta \text{ .... (v)}$$

এখন (i)-এর উভয় পার্শ্বকে (v)-এর উভয় পার্শ্বদ্বারা ভাগ করে আমরা পাই $\frac{\tan\phi}{2} = \frac{\tan\theta}{1-e}$ অর্থাৎ $\tan\phi = \frac{2\tan\theta}{1-e}$.

উদাহরণ—3

একটি কণা h উচ্চতায় স্থিরাবস্থা হতে ভূতলে পতিত হয়। এস্থলে স্থাপিতাংক e ধরলে দেখান যে কণাটি $\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)$ সময় পর্যন্ত বারংবার ভূতল দিয়ে প্রত্যাহত হবে এবং ঐ সময়ে মোট $h\frac{(1+e^2)}{1-e^2}$ পথ অতিক্রম করবে।

সমাধান ঃ

প্রথমে h উচ্চতায় হতে ভূতলে পড়তে কণাটির সময় লাগবে $\frac{u}{g}$ এবং তখন তার গতিবেগ $\sqrt{2hg} = u$ নিম্নাভিমুখী থাকে। পরে ভূমি স্পর্শ করবার প্রত্যাঘাতের জন্য তার গতিবেগ হবে $\dot{e}u$ (সোজা ঊর্ধ্বদিকে) এবং $\frac{(eu)}{g}$ সময়ে কণাটি $\frac{(eu)^2}{2g}$ উচ্চতা পর্যন্ত উঠতে পারে। পরে আবার দ্বিতীয়বার কণাটি ভূতল স্পর্শ করলে তার গতিবেগ e^2u (সোজা ঊর্ধ্বদিকে) হবে এবং দ্বিতীয়বার কণাটি $\frac{e^2u}{g}$ সময়ে $\frac{(e^2u)^2}{2g}$ উচ্চতা পর্যন্ত উঠবে।

অতএব কণাটি ভূতলে স্থিরাবস্থায় আসিতে মোট সময় লাগবে $\frac{u}{g} + \frac{2u}{g}(e + e^2 + e^3 \text{ ....})$

$$= \frac{u}{g}\left(1 + \frac{2e}{1-e}\right) = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1+e}{1-e}\right) \;; \quad \text{(মনে করতে হবে যে } u = \sqrt{2hg}\text{)}$$

আবার কণাটির মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব ঃ $= h + \frac{2u^2}{2g}(e^2 + e^4 + \text{.......})$

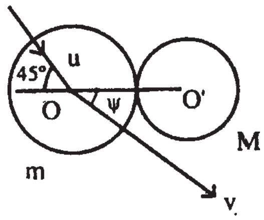
$$= h + 2h(e^2 + e^4 + \text{....}) = h\frac{(1+e^2)}{(1-e^2)}$$

উদাহরণ—4

স্থিরাবস্থায় থাকা M ভরবিশিষ্ট একটি মসৃণ গোলকের সঙ্গে m ভরবিশিষ্ট অন্য একটি মসৃণ গোলকের সংগাত হয়। সংঘাতের সময় m ভরবিশিষ্ট গোলকটির গতির দিশা এবং ঐ দুইটি গোলকের কেন্দ্র বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ 45° ধরা হয়েছে। স্থাপিতাংক $\frac{1}{2}$ থাকলে দেখান যে সংঘর্ষের পরে m গোলকটির দিশা $\tan^{-1}\left[\frac{3M}{M+4m}\right]$ কোণে ঘুরবে।

সমাধান ঃ

ধরা যাক যে m গোলকটি কেন্দ্র O এবং M গোলকটির কেন্দ্র O' ; সংঘর্ষের পূর্বে m গোলকটির গতিবেগ u ছিল এবং পরে তার গতিবেগ V OO' রেখার সঙ্গে ψ কোণে থাকে ;



M গোলকটির গতিবেগ সংঘর্ষের পূর্বে শূন্য ছিল এবং পরে তার গতিবেগ V_1 হয় ঐ বেগের দিশা OO' রেখার সহিত ϕ কোণে থাকে।

যেহেতু OO' রেখায় সমকোণে গোলক দুটির বেগের উপাংশের সংঘর্ষের পূর্বে এবং পরে কোনও পরিবর্তন নেই এজন্য $u \sin 45° = V \sin \psi$ (i) এবং $V_1 \sin \phi = 0$ অতএব $\phi = 0$ হবে।

এখন রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি প্রয়োগ করে আমরা পাব,

$mu \cos 45° = mV \cos \psi + MV$ .... (ii)

আবার নিউটনের ব্যবহারিক তত্ত্বপ্রয়োগ করে আমরা পাই, $V \cos \psi - V = -\frac{1}{2} u \cos 45°$ ...... (iii)

(ii) এবং (iii) হতে V অপনয়ন করে—

$\left(m - \frac{M}{2}\right) u \cos 45° = (m+M) V \cos \psi$ পাওয়া যায় .... (iv)।

(iii) এবং (iv) হতে আমরা পাব,

$$\tan \psi = \frac{2(M+m)}{2m-M}$$

এখন, সংঘর্ষের পূর্বে এবং পরে m গোলকটির গতিবেগের দিশা $\psi - 45°$ কোণে ঘুরবে।

কিন্তু $\psi - 45° = \tan^{-1} \frac{2(M+m)}{2m-M} - \tan^{-1}$।

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{2(M+m)}{2m-M}-1}{1+\frac{2(M+m)}{2m-M}} = \tan^{-1}\frac{3M}{M+4m}$$

4.10 সারাংশ

1নং অনুশীলনীতে (5-5) আমরা সমতলে গতিশীল কণিকার গতি সংক্রান্ত সমস্যা নিয়ে আলোচনা করছে এবং 2নং অনুশীলনীতে (5-9) দুটি কণার স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষহেতু যে সকল সমস্যা হয় সেগুলির সমাধান হয়। ঐ দুটি অনুশীলনী সম্যাকরূপে পাঠ করলে সমতলে কোনও কণিকার গতি এবং দুইটি কণিকার স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ইত্যাদি সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা হবে।

4.11 প্রশ্নমালা—2

1. চলমান একটি মসৃণ গোলকের সঙ্গে স্থিতাবস্থায় বর্তমান অন্য একটি সমভব বিশিষ্ট মসৃণ গোলকের সংঘর্ষ হয়।

দেখান যে স্থাপিতাংক ধরলে ঐ সংঘর্ষের পরে তাদের বেগ $1 - e : 1 + e$ অনুপাতে থাকবে।

2. চলমান একটি মসৃণ গোলকের সঙ্গে স্থিতাবস্থায় বর্তমান অন্য একটি মসৃণ গোলকের সংঘর্ষের পরে প্রথম গোলকটির গতিবেগ শূন্য হয়।

স্থাপিতাংক e ধরলে, (i) ঐ গোলকদুটির ভর কি অনুপাতে আছে নির্ণয় করুন ; এবং (ii) যদি এই সংঘর্ষের ফলেপ্রারম্ভিক গতিশক্তির অর্ধেক ক্ষয় হয়, তা হলে e-র পরিমাণ নির্ণয় করুন।

(উত্তর (i) $e : 1$ (ii) $\frac{1}{2}$)

3. চলমান m ভর বিশিষ্ট একটি মসৃণ গোলক A-এর সঙ্গে স্থিতাবস্থায় বর্তমান B মসৃণ গোলকের সঙ্গে সরলভাবে সংঘর্ষ হয়। এই সংঘর্ষের পরে আবার B গোলকের সঙ্গে স্থিতাবস্থায় বর্তমান অন্য একটি C মসৃণ গোলকের সরল সংঘর্ষ হয়. যদি সংঘর্ষের পরে C গোলকের গতিবেগ A গোলকের প্রারম্ভিক বেগের সমান হয়, B ও C-এর ভর যথাক্রমে m' এবং m'' হয় এবং তিনটি গোলকই সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক হয় তা হলে দেখান যে, $(m + m')(m' + m'') = 4mm'$.

4. e স্থাপিতাংক বিশিষ্ট A এবং B দুইটি মসৃণ গোলক a এবং b সমবেগে বিপরীতমুখে চলার কালে উভয়ের সরল সংঘর্ষ হয় ; দেখান যে ঐ সংঘর্ষের t সময় পরে গোলক দুইটির মধ্যবর্ত্তী দূরত্ব হবে $et(a + b)$.

5. যথাক্রমে $1, e, e^2, \ldots\ldots e^{u-1}$ ভর বিশিষ্ট n সংখ্যক সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক গোলক পরস্পর পৃথক হয়ে স্থিরাবস্থায় রয়েছে এবং তাদের কেন্দ্রসমূহ একই সরলরেখায় রয়েছে।

প্রথম গোলকটি u বেগে চলে স্থিরাবস্থায় বর্তমান দ্বিতীয় গোলকটিকে আঘাত করে এবং পরে দ্বিতীয় গোলকটির সঙ্গে তৃতীয় গোলকটির সংঘাত হয় এবং এইরূপে $(n - 1)$-তম গোলকটির সহিত n-তম গোলকটির সংঘাত হয়।

পরিশেষে দেখান যে, প্রথম $(n - 1)$ সংখ্যক গোলকসমূহের প্রত্যেকটিই $(1 - e)u$ বেগে চলবে এবং n-তম গোলকটি u বেগে চলবে।

প্রমাণ করুন যে, অবশেষ ঐ গোলকসমূহের গতিশক্তির পরিমাণ হবে $\frac{1}{2}(1-e+e^n)u^2$.

একক 5 ❑ কেন্দ্রীয় বলাধীন গতিপথ (Motion under Central Force)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

প্রস্তাবনা ঃ যদি Q একটি কণাটির উপর যে বলক্রিয়াশীল হয় তা কোনও নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর দিকে থাকে তা হলে কণাটির গতিপথ কীরূপ হবে তাহা এই 6নং এককে আলোচিত হয়েছে। এতদ্ব্যতীত কণাটির গতিপথ সুস্থিতিতে থাকারও শর্ত দেখান হয়েছে।

5.2 উদ্দেশ্য

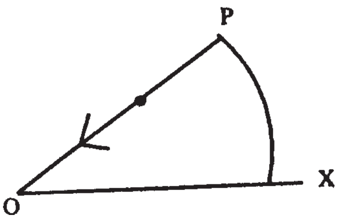
পরের এককে (7নং) আমরা সূর্যের চারিদিকে গ্রহের অবস্থান ইত্যাদি সমস্যায় কেন্দ্রীয় বলসংক্রান্ত আলোচনা ফলপ্রসূ হবে।

5.3 কেন্দ্রীয় বল

মনে করা যাক্ যে বলকেন্দ্র O হতে P বিন্দুতে অবস্থিত m ভর বিশিষ্ট একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}$, OP দিশায় রয়েছে, ঐ ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}$ যদি $\overrightarrow{OP}$ এর দিকে থাকে তা হলে ঐ বল F বিকর্ষক হবে কিন্তু যদি বল $\vec{F}$, $\overrightarrow{PO}$ ভেক্টরের দিকে থাকে তা হলে ঐ বল F, O বিন্দুর দিকে আকর্ষক বল হবে।

যদি $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ এবং ক্রিয়াশীল বলটি কেবলমাত্র r-এর উপর নির্ভরশীল হয়, তা হলে P বিন্দুর গতিপথকে **কেন্দ্রীয় গতিপথ** বলা হয়।

এখন আমরা প্রমাণ করব যে ঐরূপ কেন্দ্রীয় গতিপথ একটি সমতলে থাকবে।



যদি আমরা O কে মূলবিন্দু ধরে কার্তেজীয় স্থানাঙ্কে OX, OY, OZ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত তিনটি অক্ষ নিয়ে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক x, y, z ধরি, তা হলে নিউটনের গতীয় সূত্র অনুযায়ী m ভরবিশিষ্ট কণাটির গতীয় সমীকরণ হবে।

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mF(r)\frac{x}{r} \quad \ldots\ldots\text{ (i)}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mF(r)\frac{y}{r} \quad \ldots\ldots\text{ (ii)}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mF(r)\frac{z}{r} \quad \ldots\ldots\text{ (iii)}$$

($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ এবং বল F-কে আকর্ষক বলে ধরা হয়েছে।)

(iii) সমীকরণের উভয় পার্শ্বে y দ্বারা গুণ করে এবং (ii) সমীকরণের উভয় পার্শ্বে Z দ্বারা গুণ করে তাদের বিয়োগ করে আমরা পাই—

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = O \ ;$$

এবং তাকে t সাপেক্ষে সমাকলন করলে আমরা পাব—

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = \text{ধ্রুবকরাশি} = L \text{ (ধরাযাক্)}$$

অনুরূপভাবে (i) এবং (iii) সমীকরণদ্বয়ে একই প্রক্রিয়া প্রয়োগ দ্বারা আমরা পাব—

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = M \text{ (ধ্রুবকরাশি)}$$

এবং (i) এবং (ii) সমীকরণদ্বয় হতে পাব—

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt} = N \text{ (ধ্রুবকরাশি) ;}$$

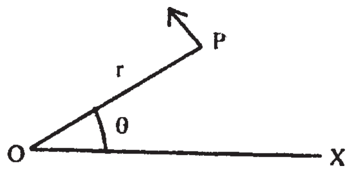
কিন্তু $x\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0$;

অর্থাৎ—$Lx + My + Nz = 0$, (L, M, N ধ্রুবক)

এটি একটি সমতলের সমীকরণ ;

অতএব চলমান $P(x, y, z)$ বিন্দুটি সর্বদা ঐ সমতলে থাকবে।

O-কে মূলবিন্দু এবং OX কে আদি রেখা ধরে চলমান বিন্দু P এর মেরুস্থানাঙ্ক (r, θ) হলে, P বিন্দুর অরীয় ত্বরণ $\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ এবং অনুপ্রস্থ দিশায় ত্বরণ $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ হয়।



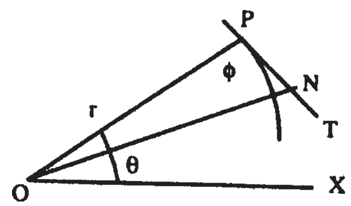
যদি P বিন্দুতে অবস্থিত কণাটির ভর m এবং তার উপর ক্রিয়াশীল বল F O কেন্দ্রাভিমুখী হয়, তা হলে কণাটির গতীয় সমীকরণদ্বয় হবে $m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -F$ এবং $\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = O$ হবে।

অতএব $r^2\frac{d\theta}{dt}$ একটি ধ্রুবক রাশি হবে ; এখন কণাটির অনুপ্রস্থ গতিবেগ $r\frac{d\theta}{dt}$ OP রেখার সঙ্গে সমকোণে রয়েছে, ঐ ধ্রুবক রাশি $r^2\frac{d\theta}{dt} = r\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)$ কে সাধারণতঃ h দ্বারা নির্দেশিত করা হয়। এস্থলে $mr^2\frac{d\theta}{dt}$ ধ্রুবক রাশিটিকে কণাটির কৌণিক ভরবেগ বলা হয়ে থাকে।

যেহেতু P বিন্দুতে অবস্থিত কণাটির OP রেখায় সমকোণে কোনও ক্রিয়াশীল বল নাই, এজন্য বলবিদ্যার নীতি অনুযায়ী কণাটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

সমতলে কোনও বক্ররেখার উপর P বিন্দুর মেরুস্থানাংককে (r, θ), $\{OP = r$ এবং $< POX = \theta]$ এবং P বিন্দুতে ঐ বক্ররেখার উপর স্পর্শক PT টানা হল এবং O মূলবিন্দু হতে PT স্পর্শকের উপর ON লম্ব টানা হল। অবকলন গণিতে $<OPN$ কে সাধারণত ϕ দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং প্রমাণ করা যায় যে $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$.



এখানে $ON = P$ (পদ) $= r\sin\phi$;

অতএব $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}\operatorname{cosec}^2\phi = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\cot^2\phi$

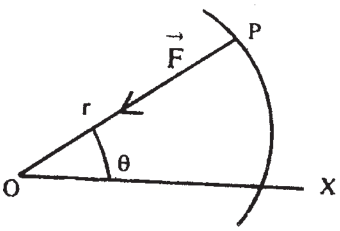
বা, $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$

কিন্তু $\frac{1}{r} = u$ ধরলে, $-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}$ অর্থাৎ অবশেষে $\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$:

এটি একটি গুরুত্বপূর্ণ সমতা এবং কেন্দ্রীয় বলাধীন কণিকার গতিপথ বিশ্লেষণ করতে আমরা প্রয়োজনমত তা প্রয়োগ করবে।

5.4 মেরুস্থানাংককে কেন্দ্রীয় বলাধীন কণিকার গতিপথের অবকলন সমীকরণ

O মূলবিন্দু এবং OX রেখাকে আদিরেখা ধরে OM ভর বিশিষ্ট কোনও কণিকা t সময়ে $P(r, \theta)$ বিন্দুতে অবস্থান করলে এবং কণাটির উপর কেবলমাত্র একটি ক্রিয়াশীল বল $\overrightarrow{mF}$, $\overrightarrow{PO}$-এর দিশায় থাকলে কণাটির গতীয় সমীকরণদ্বয় হবে—



$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -mF \quad \text{............} \quad \text{(i)}$$

এবং $\dfrac{m}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) = 0$ .... (ii)

দ্বিতীয় সমীকরণটি সমাধান করে আমরা পাই $r^2\dfrac{d\theta}{dt} = h$ (ধ্রুবক) .... (iii)

অতএব $\dfrac{d\theta}{dt} = h/r^2 = hu^2 (u = \dfrac{1}{r}$ ধরে)

সহজেই দেখা যায় যে $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dt}$

বা, $\dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -h\dfrac{du}{d\theta}$ .... (iv)

এখন $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dr}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(-h\dfrac{du}{d\theta}\right)$

$$= -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

(i) নং গতীয় সমীকরণ হতে দেখা যায় যে

$$F = -\frac{d^2r}{dt^2} + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

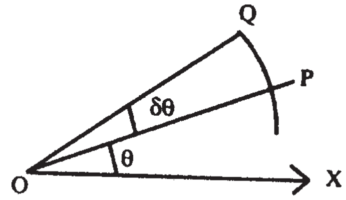
বা, $F = h^2u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + \dfrac{1}{u}h^2u^4$

বা, $F = h^2u^2\left(u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right)$

আমরা দেখতে পাই যে, কেন্দ্রীয় বল F জানা থাকলে ঐ বলাধীন কোনও একক ভর বিশিষ্ট কণিকার গতিসূত্রের অবকলন সমীকরণ হবে—

$$\frac{F}{h^2u^2} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$(h = \dfrac{1}{u^2}\dfrac{d\theta}{dt}$ ধ্রুবক রাশি).



যদি একটি কণা কোনও সময়ে একটি বক্ররেখার উপর $P(r, \theta)$ বিন্দুতে থাকে এবং Δt অল্পসময় পরে ঐ কণাটি ঐ বক্ররেকার উপর P বিন্দুর অতি নিকট $Q(r + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$ বিন্দুতে আসে, তা হলে Δt সময়ে ঐ কণাটি OP, OQ এবং PQ বক্ররেখায় চাপদ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্র রচনা করে।

অবকলন বিদ্যার প্রয়োগ করে আমরা দেখতে পারি যে ঐ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের আসন্নমান হবে $\frac{1}{2}r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta$.

P বিন্দুর O বিন্দু সাপেক্ষে Δt সময়ে ক্ষেত্রফল পরিবর্তনের হার হবে $\frac{1}{2}\frac{r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta}{\Delta t}$; $\Delta t \to O$, $\Delta\theta \to O$ হবে এবং $\lim\limits_{\Delta t\to O}\frac{1}{2}\frac{r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$ তাকে P বিন্দুর ক্ষেত্রীয় গতিবেগ (*Areal velocity*) বলা হয়ে থাকে।

আবার P বিন্দুতে কণাটির গতিবেগ V হলে।

$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ হয় ;

কিন্তু অবকলন বিদ্যানুযায়ী $p = r \sin\phi$ এবং

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$$

অতএব $v^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2(\cot^2\phi + 1)$

অর্থাৎ $v^2 = r^2\operatorname{cosec}^2\phi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{r^4}{p^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

অতএব $v^2p^2 = r^4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ বা, $vp = r^2\frac{d\theta}{dt}$

5.5 কেন্দ্রীয় বলাধীন কণার গতিপথে অভিদূরক বিন্দুর অবস্থান

কণাটির গতিপথে যে বিন্দুতে কণাটির বলকেন্দ্র (মূল বিন্দু ধরে) সাপেক্ষে কণাটির অর ঐ বিন্দুতে কণাটির গতিপথের অভিলম্ব হল θ ঐ বিন্দুকে অপদূরক বিন্দু (*apse*) বলা হয়ে থাকে ; অর্থাৎ $p = r$ হবে। আমরা পূর্বেই দেখেছি যে,

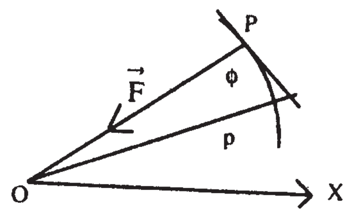
$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \;;$$

অতএব ঐ অপদূরক বিন্দুতে $\frac{du}{d\theta} = 0$ হবে অর্থাৎ u বা r (অর) এর চরম মান থাকবে।

অপদূরক বিন্দু এবং বলকেন্দ্র (মূলবিন্দু) সংযোজক রেখাকে অপদূরক রেখা বলা হয়ে থাকে।

5.6 কেন্দ্রীয় বলাধীন কণিকার গতিপথের পাদ (p) এবং অর (r) সম্বলিত অবকল সমীকরণ

পূর্বেই দেখান হয়েছে যে কোনও বক্ররেখার উপর $P(r, \theta)$ বিন্দুতে স্পর্শক টানা হলে এবং মূলবিন্দু O হতে ঐ স্পর্শকের উপর পাদ p লম্ব টানা হলে



$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$ .... (i) হবে ; ($u = \frac{1}{r}$ ধরা হয়েছে)

(i) সমতার উভয় দিকে r সাপেক্ষে অবকলন করে—

$$-\frac{2}{p^3}\frac{dp}{dr} = 2u\frac{du}{dr} + 2\frac{du}{d\theta}\frac{d}{dr}\frac{du}{d\theta}$$

অর্থাৎ $-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr} = u\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dr} + \frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dr}$

বা, $-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dr}\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$

$$= \frac{du}{dr}\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

$= -\frac{1}{r^2}\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$ হবে।

কিন্তু পূর্বেই আমরা দেখেছি যে, কেন্দ্রগ বল F হলে $F = h^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$;

অতএব এস্থলে $F = \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}$ হয়।

অরীয় এবং অনুপ্রস্থ দিশায় ত্বরণে কোনও কণার গতিপথ নির্ণয়

ধরা যাক্ কোনও কণার অরীয় ত্বরণ F এবং অনুপ্রস্থ ত্বরণ T, তাহলে

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = F$$

এবং $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = T$ হবে।

এখন $r^2\frac{d\theta}{dt} = h$ (h ধ্রুবক নয়)

এবং $u = \frac{1}{r}$ ধরলে, $hu^2 = \frac{d\theta}{dt}$

ও $T = u\dfrac{dh}{dt}$ .... (i) হবে

আবার $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$

অর্থাৎ $\dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{1}{u^2}\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{du}{d\theta} = -h\dfrac{du}{d\theta}$ হয়

এবং $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(-h\dfrac{du}{d\theta}\right) = -\dfrac{dh}{dt}\dfrac{du}{d\theta} - h\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)$

$$= -\frac{dh}{dt}\frac{du}{d\theta} - h\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt}$$

এখন (i) প্রয়োগ করলে $\dfrac{d^2r}{dt^2} = -\dfrac{T}{u}\dfrac{du}{d\theta} - h^2u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$ হবে।

তাহলে দেখা যাবে যে—

$$F = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{T}{u}\frac{du}{d\theta} - h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

অর্থাৎ, $F = -\dfrac{T}{u}\dfrac{du}{d\theta} - h^2u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3$ হয়

অতএব কণাটির গতিপথের সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-\left(\frac{T}{u}\frac{dr}{d\theta} + F\right)}{h^2u^2}$$; (মনে রাখতে হবে এস্থলে h ধ্রুবক নয়)

5.7 কেন্দ্রীয় বলাধীন কণার গতিপথের সুস্থিতি

যদি কণাটির গতিপথ একটি বৃত্ত এবং তার কেন্দ্রটি কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বলেরও কেন্দ্র হয়, তা হলে ঐ কেন্দ্রবিন্দুটি মূলবিন্দু O ধরলে কণাটির গতিপথের অবকল সমীকরণ হবে

$\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{F}{h^2u^2}$ (এস্থলে কণাটির ভর একক এবং ক্রিয়াশীল বল F ধরা হয়েছে)

যদি কেন্দ্রীয় বল $F = \mu u^n$ হয় (μ ধ্রুবক রাশি এবং u একটি সংখ্যা)

তা হলে ঐ গতিপথের অবকল সমীকরণ হবে

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} u^{n-2} \ ;$$

এখন যদি কণাটির গতিপথ বৃত্ত হয় এবং তার ব্যাস $2a$ হয় তাহলে $u = \frac{1}{a}$ হবে এবং এস্থলে $\frac{du}{d\theta} = 0$ হয়।

অতএব $u = \frac{1}{a} = \frac{\mu}{h^2} \frac{1}{a^{n-2}}$ এবং $h^2 = \mu a^{3-n}$ হবে।

এইরূপে কণাটির গতিপথের অবকল সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = a^{n-3}u^{n-2} \ \text{...........} \ \text{(i)}$$

যদি এই গতিপথের অতিসামান্য পরিবর্তন হয় যাতে $u = \frac{1}{a} + x$ (x-এর মান অতিক্ষুদ্র) এবং h অপরিবর্তিত থাকে তাহলে কণাটির গতিপথের (i) অবকল সমীকরণে $u = \frac{1}{a} + x$ বসিয়ে আমরা পাই

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \frac{1}{a} + x = a^{n-3}\left(\frac{1}{a} + x\right)^{n-2}$$

$$= \frac{a^{n-3}}{a^{n-2}}(1 + xa)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{a} \ [1 + (n - 2) \ xa + ...]$$

$= \frac{1}{a} + (n-2)x$ (যেহেতু x^2, x^2 অতিক্ষুদ্র, এজন্য তাদের ধর্তব্য নয়)

অতএব $\frac{d^2x}{d\theta^2} + (3-n)x = 0$ .... (ii)

যদি $3 - n > 0$ হয় অর্থাৎ $n < 3$ হয় তা হলে (ii) নং সমীকরণটি একটি সরল সমঞ্জস গতির সমীকরণ এবং তার সমাধান হবে

$x = A\cos\left(\sqrt{3-n}\ \theta + \alpha\right)$ [এস্থলে A এবং α ধ্রুবক রাশিদ্বয়]

সহজেই দেখা যাচ্ছে x সর্বদা সীমিত এবং $-A$ এবং $+A$ মধ্যে থাকবে, এজন্য আমরা বলব যে কণাটির বৃত্তকার গতিপথ সুস্থিতিতে আছে।

অপদূরকবিন্দুর ক্ষেত্রে $\frac{du}{d\theta} = O$ অর্থাৎ $\frac{dx}{d\theta} = O$;

অতএব $\sqrt{3-n}\,\theta + \alpha = n$ অখণ্ড সংখ্যা হয়।

এস্থলে কোনও অপদূরক বিন্দুতে $\frac{\pi}{\sqrt{3-n}}$ পরিমাণ θ কোণের পরিবর্তনের সঙ্গো সঙ্গো $\sqrt{3-n}\,\theta + \alpha = O$ হইবে। $\frac{\pi}{\sqrt{3-n}}$ কে অপদূরক কোণ বলা হয়ে থাকে।

কিন্তু $n > 3$ হলে (ii) নং সমীকরণে সমাধান হবে $x = Pe^{(\sqrt{n-3})\theta} + \theta e^{-(\sqrt{n-3})\theta}$ (P, Q ধ্রুবক রাশিদ্বয়)

এস্থলে সহজেই দেখা যায় যে θ কোণের বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে x বৃদ্ধি পায় এবং ঐ বৃদ্ধির কোনও নির্দিষ্ট সীমানা থাকিবে না।

আবার $n = 3$ হলে (ii) নং সমীকরণটির সমাধান হবে

$x = S\theta + R$ (S, R ধ্রুবক রাশিদ্বয়)

এস্থলে θ বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে x বৃদ্ধি পায় এবং x বৃদ্ধির কোনও নির্দিষ্ট সীমা থাকবে না। এজন্য আমরা বলতে পারি যে—

$n \geq 3$ হলে কণাটির বৃত্তাকার গতিপথ সুস্থিতিতে থাকবে না।

5.8 অনুশীলনী

উদাহরণ—1

দেখান যে যদি কেন্দ্রীয় বলের ক্রিয়ায় চলমান একটি কণা সমতলে $r = a\ (1+ \cos\theta)$ বক্ররেখাটি রচনা করে তা হলে বলটি হবে $\dfrac{K}{r^4}$ (K একটি ধ্রুবক)

সমাধান ঃ এস্থলে বক্ররেখাটির সমীকরণ

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1\times\cos\theta)} = \frac{1}{2a}\sec^2\frac{\theta}{2}$$

u কে θ সাপেক্ষে অবকলন করলে

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\sec^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}{2a} = u\tan\frac{\theta}{2}$$

পুনরায় $\dfrac{du}{d\theta}$ কে θ সাপেক্ষে অবকলন করলে

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{du}{d\theta}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{u}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}$$

$$= u\tan^2\frac{\theta}{2} + \frac{u}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}$$

অতএব $u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2} = u + u\tan^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{u}{2}\sec^2\dfrac{\theta}{2}$

$$= \frac{3u}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}$$

কিন্তু $u = \dfrac{1}{2a}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

অতএব $u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = 3au^2$;

এখন ক্রিয়াশীল বলটি $h^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$

$$= 3ah^2u^4 = \frac{3ah^2}{r^4} = \frac{K}{r^4} \quad (K = 3ah^2,\ h \text{ ধ্রুবক})$$

উদাহরণ—2

মূলবিন্দু O কে বলকেন্দ্র ধরে কেন্দ্রীয় বলাধীন একটি চলমান কণার মেরু স্থানাংকে সমীকরণ $r^n = a^n \cos^n \theta$ বক্ররেখা হলে ঐ বলটির প্রকৃতি এবং বলকেন্দ্র হতে r দূরত্বে তার গতিবেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ আমরা প্রথমে বক্ররেখাটির পাদ সমীকরণ নির্ণয় করে তার সাহায্যে প্রশ্নটির সমাধান করব।

$r^n = a^n \cos n\theta$ সমতার উভয় দিকে লগারিদম নিয়ে আমরা পাই—

$n \log r = n \log a + \log \cos n\theta$

এখন উভয় দিকে θ সাপেক্ষে অবকলন করলে

$\frac{u}{r}\frac{dr}{d\theta} = -n\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}$ হবে।

কিন্তু অবকলন বিদ্যা হতে আমরা জানি যে, $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \cot\phi$ [বক্ররেখার উপর কোনও বিন্দুর স্পর্শক এবং মূলবিন্দুগামী রেখার মধ্যবর্তী কোণ ϕ এবং $p = r\ \mathit{S}\text{in}\ \phi$]

$$\therefore \quad \cot\phi = -\tan n\theta = ox\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right) \text{ এবং এজন্য } \phi = \frac{\pi}{2} + n\theta$$

$$\therefore \quad p = r\sin\phi = r\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right) = r\cos n\theta$$

বা, $p = \frac{r^{n+1}}{a^n}$ অতএব $\frac{dp}{dr} = \frac{(n+1)r^n}{a^n}$

আমরা জানি যে কেন্দ্রীয় বল $= \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}$ (h ধ্রুবক)

$$= \frac{h^2a^{2n}(n+1)}{r^{2n+3}}$$

কণাটির গতিবেগ V ধরলে

$Vp = h; V = \frac{h}{p} = h\frac{a^n}{r^{n+1}}$

উদাহরণ—3

m ভর বিশিষ্ট চলমান একটি কণা বলকেন্দ্র হতে r দূরত্বে থাকলে ঐ কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বল $m\frac{\mu}{r^3}$ যদি বিকর্ষক হয় এবং আদি দশায় কণাটিকে বলকেন্দ্র হতে a দূরত্বে তার গতিপথের অপদূরক বিন্দু হতে V বেগে ছোঁড়া হলে কণাটির গতিপথ নির্ণয় করুন?

সমাধান ঃ ঐ কণাটির গতিপথের অবকল সমীকরণ

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{\mu u^3}{u^2h^2}=-\frac{\mu u}{h^2}$$

অথবা, $\frac{d^2u}{d\theta^2}=-\left(1+\frac{\mu}{h^2}\right)u$

এক্ষেত্রে $h = vp = Va$, যেহেতু অপদূরক বিন্দুতে $p = a$ এবং সেখানে $v = V$

অতএব $\frac{d^2u}{d\theta^2}=-\left(1+\frac{\mu}{V^2a^2}\right)u$

এবং ঐ সমীকরণটি আমরা পাই

$$u = A\cos K\theta + B\sin K\theta \qquad (A \text{ এবং } B \text{ ধ্রুবক})$$

$$1+\frac{\mu}{V^2a^2}=K^2$$

অপদূরক বিন্দুতে $\theta = O$ ধরলে, পাই

$r = p = a$ এবং $\frac{dr}{d\theta}=O$ যখন $\theta = O$

অতএব $u=\frac{1}{a}$ এবং $\frac{du}{d\theta}=O$ যখন $\theta = O,$

$u = A\cos K\theta + B\sin K\theta$ সমীকরণে ঐ শর্ত দুটি বসালে আমরা দেখি

$\frac{1}{a}=A$ এবং $\frac{du}{d\theta}=KB\cos K\theta$ যখন $\theta = O$

অতএব $A=\frac{1}{a}$ এবং $B = O$;

তা হতে $u=\frac{1}{a}\cos K\theta$ অর্থাৎ $r\cos K\theta = a$ হবে।

অতএব কণাটির গতিপথ হবে $r\cos K\theta = a$

উদাহরণ—4

যদি একটি চলমান কণার গতিপথ প্রায় বৃত্তাকার এবং ঐ গতিপথের পাদসমীকরণ $p^2\left(a^{m-2}-r^{m-2}\right)=b^m$ হয়, তাহলে দেখান যে অপদূরক কোণ প্রায় $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ হবে।

সমাধান ঃ এস্থলে কণাটির উপর ক্রিয়াশীল কেন্দ্রীয় বল = $\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}$;

কিন্তু কণাটির গতিপথের পাদ সমীকরণ $\frac{b^m}{p^2} = \left(a^{m-2} - r^{m-2}\right)$ কে উভয় পার্শ্বে r সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই

$$-\frac{2b^m}{p^3}\frac{dp}{dr} = -(m-2)\,r^{m-3};$$

অতএব কেন্দ্রীয় বল $\alpha\ r^{m-3} = u^{3-m}$;

এখন সহজেই বৃত্তাকার গতিপথের সুস্থিতি আলোচনা অবলম্বন করে আমরা অপদূরক কোণ

$\frac{\pi}{\sqrt{3-(3-m)}} = \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ পাব।

5.9 সারাংশ

আমরা এই 5নং এককের আলোচনা এবং অনুশীলনীতে কেন্দ্রীয় বলাধীন কণার গতিপথের অবকল এবং পাদ সমীকরণে সাহায্যে কয়েকটি কণিকার গতিসংক্রান্ত কয়েকটি সমস্যা সমাধান করেছি।

5.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. কেন্দ্রীয় বলাধীন একটি কণার কক্ষপথ মেরুস্থানাংকে $\frac{1}{r} = 1 + e\cos\theta$; ($e$ কণিকের উৎকেন্দ্রতা এবং l অর্ধনাভিলম্বের পরিমাণ)

   যদি বলকেন্দ্রটি নাভিবিন্দু হয় তাহলে দেখান যে ক্রিয়াশীল বল $\alpha\frac{1}{r^2}$

2. কেন্দ্রীয় বলাধীন একটি কণার গতিপথ সুষমকোণী সর্পিল $r = ac^{\theta\cot\alpha}$ হলে দেখান যে ক্রিয়াশীল বলটি $\alpha\frac{1}{r^3}$.

3. m ভরবিশিষ্ট একটি কণার উপর কেন্দ্র হতে R দূরত্বে কেন্দ্রীয় আকর্ষক বল $m\mu\left[3au^4 - 2\left(a^2 - b^2\right)u^5\right](a > b)$;

   যদি $(a + b)$ দূরত্বে অপদূরক বিন্দু হতে কণাটি $\frac{\sqrt{\mu}}{(a+b)}$ বেগে ছোঁড়া হয়ে থাকে, তা হলে প্রমাণ করুন যে, কণাটির গতিপথ $r = a + b\cos\theta$ হবে।

4. বলকেন্দ্র হতে R দূরত্বের একক ভরবিশিষ্ট একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল বল $\frac{\lambda}{r^3}$; প্রারম্ভে কণাটিকে মূলবিন্দু হতে c দূরত্বে, মূলবিন্দু এবং কণাটিকে আদি অবস্থানের সংযোজক রেখার সঙ্গে $\frac{\pi}{4}$ কোণে $\frac{\sqrt{\lambda}}{c}$ বেগে ছোঁড়া হলে, দেখান যে কণাটির গতিপথ $r = ce^{n}$ হবে।

5. একটি লঘু সূক্ষ্ম স্থিতিস্থাপক রজ্জুর একপ্রান্তে m ভরবিশিষ্ট একটি কণা বাঁধা রয়েছে এবং রজ্জুটির অন্যপ্রান্তটি স্থিরাবস্থায় আছে। রজ্জুটির স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য a এবং স্থিতিস্থাপক গুণাংক mng ; যদি কণাটিকে a দূরত্বে অবস্থিত অপদূরক বিন্দু হতে $\sqrt{2mgh}$ বেগে ছোঁড়া হয়, তা হলে দেখান যে $nr^2(r-a) - 2nha(r+a) = 0$ সমীকরণটিকে সমাধান করে অপর অপদূরক বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যাবে।

6. একটি কণার উপর প্রতি একক ভরের জন্য কেন্দ্র অভিমুখে $\left(\frac{\mu}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}\right)$ পরিমাণ বল ক্রিয়াশীল থাকলে দেখান যে অপদূরক কোণের পরিমাণ হবে $\pi + \left(1 + \frac{\lambda}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ যেখানে $h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ (ধ্রুবকরাশি)

7. প্রতি একক ভরের জন্য কেন্দ্র থেকে r-দূরত্বে একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল কেন্দ্রীয় আকর্ষক বল $\frac{\lambda}{r^3} + f$, হল যেখানে f ধ্রুবক, কণাটিকে যদি c দূরত্বে অবস্থিত অপদূরক থেকে $\frac{\sqrt{\lambda}}{c}$ বেগে নিক্ষেপ করা হয়, তবে দেখান যে t সময়ে কণাটির অবস্থিতি $r = c - \frac{1}{2} ft^2$

একক 6 ❑ বিপরীত বর্গ নিয়মাধীন গ্রহ সমূহের গতি

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

আমরা জানি যে, সূর্যকে কেন্দ্র করে পৃথিবী ও অন্য গ্রহসমূহে ঘরুছে এবং সূর্যের দিকে কোনও গ্রহের আকর্ষক বল ঐ গ্রহের সঙ্গে সূর্যের দূরত্বের ব্যস্তবর্গ সমানুপাতিক। আমরা এই এককে (6নং) ব্যস্তবর্গ নিয়মাধীন গ্রহসমূহের গতিপথ নিয়ে আলোচনা করব।

6.2 উদ্দেশ্য

আমরা এই একক আলোচনায় কেপলারের নিয়মাবলী উল্লেখ করে উপবৃত্তাকার পথে চলমান গ্রহের পর্যায় কাল নির্ণয় করার প্রণালী দেখাচ্ছে। উপরন্তু সৌরমণ্ডলে কোনও নভশ্চর কলন পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত কিংবা অধিবৃত্ত পথে চলবে তার শর্ত নিরূপণ করা হয়েছে।

6.3 বিপরীত বর্গ নিয়মাধীন গ্রহসমূহের গতি (Planetary motion under inverse square law)

মেরুস্থানাংক প্রয়োগ ঃ আমরা পূর্বে অধ্যায়ের (একক-6) বিভিন্ন প্রকার কেন্দ্রীয় বলাধীন কণিকার গতিপথ

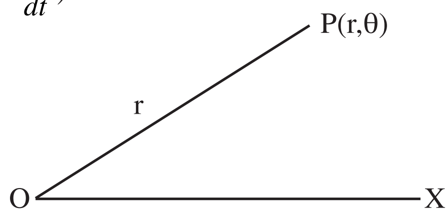
নির্ণয় করছি। এই অধ্যায়ে আমরা কেন্দ্রীয় বল ব্যস্তবর্গ হলে কণিকার গতি কিরূপ হবে তা বিশেষ করে আলোচনা করব।

মেরু স্থানাংকে চলমান কোনও কণিকার অবস্থিতি $p(r, \theta)$ হলে ব্যস্তবর্গ নিয়মে O মূলবিন্দুকে বলকেন্দ্র ধরলে P বিন্দুতে কণিকাটি O বিন্দু অভিমুখে $\dfrac{\mu}{OP^2} = \dfrac{\mu}{r^e}$ পরিমাণ বল দ্বারা আকৃষ্ট হবে ; (μ একটি ধনাত্মক ধ্রুবক রাশি) পূর্ব অধ্যায়ের আলোচনা অনুসরণ করলে $u = \dfrac{1}{r}$ ধরে কণাটির গতিপথ নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যাবে।

$$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\mu u^2}{h^2u^2} = \frac{\mu}{h^2} \quad \left(h = r^2\frac{d\theta}{at} \text{ অর্থাৎ } hu^2 = \frac{d\theta}{dt}\right)$$

ঐ অবকল সমীকরণটি সমাধান করে আমরা পাই

$$u = \frac{\mu}{h^2} + k\cos(\theta + \alpha) \quad (k \text{ এবং } \alpha \text{ ধ্রুবকরাশিদ্বয়})$$



অর্থাৎ $\dfrac{h^2\mu}{r} = 1 + \dfrac{kh^2}{\mu}\cos(\theta + \alpha)$ (i)

আমরা জানি যে, মেরুস্থানাংকে কোনও কণিকার নাভিবিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে, ঐ কণিকের সমীকরণ

$$\frac{1}{r} = 1 + e\cos\theta \quad .... \quad \text{(ii)}$$

এখন l কণিকাটির অভিলম্বের অর্ধেক এবং e তার উৎকেন্দ্রতা।

(i) এবং (ii) কে তুলনা করলে

$l = h^2\mu$ এবং $e = \dfrac{kh^2}{\mu}$ পাওয়া যায়।

অতএব সমতলে কেন্দ্রাভিমুখী ব্যস্তবর্গ নিয়মানুযায়ী কোনও বল সক্রিয় থাকলে, কোনও কণা ঐ বলের প্রভাবে একটি কণিক হবে।

6.4 পাদসমীকরণের সাহায্যে ব্যস্তবর্গ নিয়মে কণিকার গতিপথ নির্ণয়

আমরা দেখেছি যে ব্যস্তবর্গ নিয়মে কোনও কণার পাদস্থানাংক গতিপথ নিম্নের অবকল সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{r^2} \quad .... \quad \text{(iii)}$$

ঐ সমীকরণটিকে সমাধান করলে $\dfrac{h^2}{p^2} = \dfrac{2\mu}{r} + c$ (iv) (c ধ্রুবক) পাওয়া যায়।

কিন্তু কোনও উপবৃত্তের পাদাংক সমীকরণ $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$; (VA)

পরাবৃত্তের পাদাংক সমীকরণ $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} + 1 \quad (VB)$

এবং অধিবৃত্তের পাদাংসমীকরণ $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} \quad (VC)$

এ সকল ক্ষেত্রে কণিকাটির নাভিবিন্দুকে মূলবিন্দু ধরা হয়েছে এবং $2a$, $2b$ যথাক্রমে পরাক্ষ এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্যের মান।

আমরা পূর্বেই দেখেছি যে $h = Vp$ (V গতিবেগ) ; অতএব উপবৃত্তের ক্ষেত্রে $V^2 = \frac{2a}{r} - 1$ অর্থাৎ $V^2 > \frac{2a}{r}$

এবং পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে $V^2 = \frac{2a}{r} + 1$ অর্থাৎ $V^2 > \frac{2a}{r}$

অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে $v^2 = \frac{h^2}{p^2} = \frac{\mu}{r}(Vc)$ অর্থাৎ $p^2 = \frac{h^2}{2\mu} r$

উপবৃত্তের ক্ষেত্রে (iv) এবং (VA) তুলনা করলে আমরা দেখি $\frac{h^2}{b^2} = \frac{\mu}{a} = -\frac{c}{1}$

অর্থাৎ $h^2 = \frac{\mu b^2}{a} = \mu$ (অর্ধনাভিলম্ব) এবং $c = -\frac{\mu}{a}$

h^2 এবং c-এর লব্ধ মান (iv) নং সমীকরণে বসালে আমরা দেখি যে $v^2 = \frac{h^2}{p^2} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$

অনুরূপভাবে পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে এবং অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে যথাক্রমে আমরা পাব $V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$ এবং $V^2 = \frac{2\mu}{r}$

দেখা যাচ্ছে উপবৃত্তের ক্ষেত্রে $V^2 < \frac{2\mu}{r}$ এবং অধিবৃত্ত ও পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে $V^2 \geq \frac{2\mu}{r}$

6.5 পলায়নী বেগ (Escape velocity)

আমরা পূর্বেই দেখেছি যে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ a হলে এবং ভূকেন্দ্র অভিমুখে বল $\frac{\mu}{r^2}$

ক্রিয়াশীল হলে ভূ পৃষ্ঠে ঐ বলের পরিমাণ $\frac{\mu}{a^2} = g$ অর্থাৎ $\mu = a^2 g$ হতে।

$\mu = a^2 g$ বসে দেখতে পাই যে ভূপৃষ্ঠ হতে কোনও কণাকে $\sqrt{\frac{2\mu}{a}} = \sqrt{2ag}$ বেগে কিংবা তার অধিক বেগে শূন্যে ছড়িয়ে দিলে তা অধিবৃত্ত অথবা পরাবৃত্ত রচনা করবে অর্থাৎ তা পুনরায় ভূপৃষ্ঠে ফিরে আসবে না।

এই গতিবেগ $\sqrt{2ag}$ কে পলায়নী বেগ (escape velocity) বলা হয়ে থাকে।

6.6 উপবৃত্তীয় গতিপথের পর্যায়কাল

কোনও উপবৃত্তের পরাক্ষ এবং উপাক্ষের পরিমাণ $2a$ এবং $2b$ হলে, ঐ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল πab দাঁড়ায়।

আমরা পূর্বেই দেখেছি যে $\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$ কোনও কণার ক্ষেত্রীয় গতিবেগ (areal velocity) এবং উপবৃত্তাকার কমপক্ষের ক্ষেত্রে $h^2 = \frac{\mu b^2}{a}$

অতএব নির্ণেয় পর্যায়কাল $T = \frac{2\pi ab}{g} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2}$

6.7 গ্রহসমূহের গতি সংক্রান্ত কেপলারের নিয়মাবলী

দীর্ঘকাল যাবৎ গ্রহসমূহের গতিপথ পর্যবেক্ষণ করে কেপলার নিম্নলিখিত নিয়মাবলী প্রণয়ন করেছিলেন—

1. **প্রথম নিয়ম ঃ** প্রতিটি গ্রহ উপবৃত্তীয় কক্ষপথে সূর্যের চতুর্দিকে আবর্তন করে এবং ঐ উপবৃত্তের একটি নাভিবিন্দুতে সূর্যের অবস্থান।

2. **দ্বিতীয় নিয়ম ঃ** যে কোন গ্রহ এবং সূর্যের সংযোজক রেখা সমান সময়ে সমপরিমাণ ক্ষেত্র অতিক্রম করে।

3. **তৃতীয় নিয়ম ঃ** যে কোনও গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ উহার কক্ষপথের অর্ধ পরাক্ষের ঘন এর সমানুপাতে থাকবে।

পরবর্তীকালে নিউটন মহাকর্ষসূত্র অবলম্বনে কেপলারের নিয়মাবলীর যথার্থ্য প্রমাণ করেন।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ (i) সূর্যের ভরের তুলনায় প্রতিটি গ্রহের ভর অতিক্ষুদ্র, এজন্য সূর্যের অবস্থানকে বলকেন্দ্র ধরে প্রতিটি গ্রহ একটি কণিকা রূপে বিবেচিত হয়।

(ii) সূর্যের অবস্থান স্থির ধরে প্রতিটি গ্রহ সূর্যের চতুষ্পার্শে উপবৃত্তীয় কক্ষপথ রচনা করে এবং সূর্য ঐ উপবৃত্তের একটি নাভিবিন্দুতে থাকে। পরাক্ষের যে প্রান্ত বিন্দু ঐ নাভিবিন্দু হতে নিকটভর ঐ বিন্দুটিকে অনুসূর (perihelion) এবং ঐ পরাক্ষের অন্য প্রান্তবিন্দু যা নাভিবিন্দু থেকে দূরে রয়েছে ঐ বিন্দুটিকে অপসূর (Aphelion) বলা হয়ে থাকে।

6.8 অনুশীলনী

উদাহরণ—1

যখন কোনও গ্রহ অনুসূর বিন্দুতে থাকে তখন তার রৈখিক গতি বেগের মান বৃহত্তম এবং যখন গ্রহটি অপসূর বিন্দুতে থাকে তখন তার রৈখিক গতিবেগের মান ক্ষুদ্রতম হয়।

সমাধান—নাভিবিন্দুতে সূর্যের অবস্থান ধরে কোনও গ্রহের কক্ষপথ উপবৃত্তীয় এবং কেন্দ্রীয় বলাধীন গতির শর্তানুসারে $pV = h$ (ধ্রুবক) অর্থাৎ $V = \frac{h}{p}$ অর্থাৎ $V \alpha \frac{1}{p}$ হয়।

অতএব অনুসূর বিন্দুতে p ক্ষুদ্রতম এজন V বৃহত্তম এবং অপসূর বিন্দুতে p বৃহত্তম এজন্য ঐ অবস্থানে v ক্ষুদ্রতম হবে।

উদাহরণ—2

যদি কোনও গ্রহ সূর্য হতে সবচেয়ে দূরে থাকে তখন তার রৈখিক গতিবেগ V_1 হয় এবং যখন ঐ গ্রহটি সূর্য হতে সবচেয়ে নিকটে থাকে তখন তার রৈখিক গতিবেগ V_2 হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1+e}{1-e}$ হবে।

(e গ্রহটির উপবৃত্তীয় গতিপথের উৎকেন্দ্রতা) $\frac{V_1}{V_2}$

সমাধান—পূর্বের উদাহরণ (1 নং) অনুযায়ী $Vp = h$ ধরে অনুসূর বিন্দুতে $p = a\ (1 - e)$ এবং অপসূর বিন্দুতে $p = a\ (1 + e)$; অতএব $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)} = \frac{1+e}{1-e}$

উদাহরণ—3

কোনও গ্রহের বর্তমান কক্ষপথ বৃত্তাকার ধরে, সূর্যের ভর অকস্মাৎ ঐ ভরের $\frac{1}{n}$ তম হলে, গ্রহটির নতুন কক্ষপথ নির্ণয় করুন।

সমাধান—প্রথমে গ্রহটির ভর m এবং গতিবেগ V ধরলে তার উপর সূর্যের ক্রিয়াশীল বল হবে $\frac{GMm}{\pi^2}$ যেখানে সূর্যের ভর M এবং সূর্য্য হতে গ্রহটির দূরত্ব r : G মহাকর্ষীয় ধ্রুবক।

অতএব সূর্য কেন্দ্রে থেকে গ্রহটির বৃত্তীয় কক্ষপথের ব্যাসার্ধ a হলে $\frac{GMm}{a^2} = \frac{mV^2}{a}$ হবে।

$$\therefore \quad V = \sqrt{\frac{GM}{a}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}},\ \mu = GM$$

কিন্তু সূর্যের ভর $\frac{1}{n}$ তম অর্থাৎ $\frac{M}{n}$ হলে ঐ গ্রহটির উপর ক্রিয়াশীল বল হবে। $\frac{GMm}{nr^2} = \frac{\mu m}{nr^2}$ এখন গ্রহটির আদি দশায় $\sqrt{\frac{\mu}{a}}$ বেগ ধরলে সূর্যের ভর যখন $\frac{1}{n}$ তম হবে তখন গ্রহটির কক্ষপথ উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত কিংবা পরাবৃত্ত হবে যদি $\frac{\mu}{a} \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \frac{2\mu}{na}$ হয় ;

অর্থাৎ $n \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 2$ হলে ঐ কক্ষপথ উপবৃত্ত অধিবৃত্ত কিংবা পরাবৃত্ত হবে।

6.9 সারাংশ

এই একক (7 নং) পাঠ করলে সৌরমণ্ডলে নভশ্চরদিগের গতি প্রকৃতি এবং গ্রহসমূহের পর্যায়কাল সম্বন্ধে পাঠকের প্রয়োজনীয় জ্ঞান লাভ করবে।

6.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. পৃথিবীর সূর্য পরিক্রমার কক্ষপথ বৃত্তাকার ধরে দেখান যে পৃথিবীর গতিবেগ প্রায় দেড়গুণ পর্যন্ত বৃদ্ধি পেলে, সূর্যের নাভিবিন্দু অবস্থানে রেখে পৃথিবীর গতিপথ একটি অধিবৃত্ত হবে।

2. কোনও একটি গ্রহের কক্ষপথ বৃত্তাকার ধরিয়ে দেখান যে গ্রহটির গতিবেগ হঠাৎ শূন্য হলে দেখান যে গ্রহটির সূর্য পরিক্রমার পর্যায় কালের $\frac{\sqrt{2}}{8}$ গুণ সময়ে তা সূর্যে পতিত হবে।

3. দেখান যে, নাভিবিন্দুতে বলকেন্দ্র বিশিষ্ট উপবৃত্তাকার কক্ষপথে চলমান একটি গ্রহের গতিবেগ দুইটি উপাংশের লব্ধি রূপে বিচার করা যেতে পারে ; ঐ দুটি উপাংশের একটি $\frac{\mu}{h}$ (ধ্রুবক) পরিমাণ অনুপ্রস্থ দিশায় এবং অপর উপাংশটি $\frac{\mu e}{h}$ (ধ্রুবক) পরিমাণ পরাক্ষের লম্ব দিশায় হবে।

4. একটি কণার গতিপথ একটি উপবৃত্ত এবং কণাটি ঐ নাভিকেন্দ্রের দিকে $\frac{\mu}{r^2}$ পরিমাণ বল দ্বারা আকৃষ্ট হয়েছে ; r পরিমাণ দূরত্বের কণাটিকে V বেগে নিক্ষেপ করলে কণাটির পর্যায়কাল নিরূপণ করুন।

[উত্তর ঃ $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{2}{r}-\frac{V^2}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}}$]

(এখানে μ ধ্রুবক রাশি এবং r নাভিকেন্দ্র হতে কণাটির দূরত্ব সূচনা করছে)

5. একটি কৃত্রিম উপগ্রহ উপবৃত্তীয় কক্ষপথে পৃথিবীকে পরিক্রমা করে চলেছে। ভূকেন্দ্র থেকে উপগ্রহটির চরম ও অবম দূরত্ব যথাক্রমে $4a$ ও $2a$ যেখানে a হল পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। দেখান যে উপগ্রহটির পর্যায়কাল $2\pi\sqrt{27a/g}$

একক 7 ❑ উপদ্রুতি হেতু উপবৃত্ত পথের পরিবর্তন

গঠন

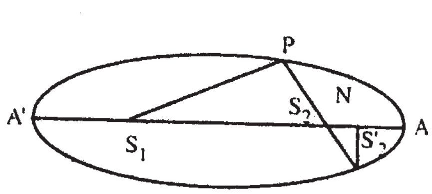
7.1 প্রস্তাবনা

কোনও গ্রহ সূর্যের চতুর্দিকে উপবৃত্তাকার পথে ভ্রমণকালে বিভিন্ন কারণে ঐ উপবৃত্ত পথের সামান্য পরিবর্তন হলে গ্রহটির উপর এবং তার উপর কিরূপ কি প্রভাব পড়বে এই এককে তা আলোচিত হবে।

7.2 উদ্দেশ্য

ব্যস্ত বর্গ বলপ্রভাবে কোন কণিকার কক্ষপথ উপবৃত্ত হলে বিভিন্ন কারণে যেমন ঐ গতিপথের স্পর্শক দিশায় কোনও ঘাতবল ক্রিয়া করলে অথবা অকস্মাৎ ঐ কণিকার উপর আকর্ষক বলের পরিমাণের তারতম্য ঘটলে ঐ উপবৃত্তীয় কক্ষপথের সামান্য পরিবর্তন ঘটবে এবং এজন্য উপবৃত্তটির পরাক্ষের রৈখিক মান এবং দিশা, উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা এবং কণিকাটির পর্যায় কাল পরিবর্তিত হবে।

7.3 উপবৃত্তটির উপর কোনও বিন্দুতে স্পর্শক দিশায় ঘাতবল ক্রিয়ার প্রভাব



ধরা যাক্ S_1 নাভিবিন্দুতে বলকেন্দ্রটি অবস্থিত রয়েছে এবং উপবৃত্তটির অন্য নাভিবিন্দু S_2 উপবৃত্তটির উপর P বিন্দুতে স্পর্শক দিশায় অকস্মাৎ কোনও ঘাতবল ক্রিয়া করতে আরম্ভ করল।

ধরি ঐ ঘাতবলের প্রভাবে P বিন্দুতে কণিকাটির গতিবেগের মান v হতে $v + \delta v$ হয়, কিন্তু তার গতিবেগের দিশায় পরিবর্তন হয় না।

মনে রাখতে হবে যে বলকেন্দ্র S আঘাতের পূর্বে এবং পরে একই অবস্থানে থাকবে ; ধরি উপবৃত্তের পরাক্ষের $(A'A)$ মান ঘাতবলের ক্রিয়ার পূর্বে $2a$ ছিল এবং পরে পরিবর্তিত হচ্ছে $2a'$ হয়। অতএব ঐ ঘাতবল প্রয়োগের পূর্বে $V^2 = \mu\left(\frac{2}{S_1P} - \frac{1}{a}\right)$ (i) এবং পরে

$(V + \delta V)^2 = \mu\left(\frac{2}{S_1P} - \frac{1}{a^1}\right)$ (ii) হয়। (μ অপরিবর্তিত ধরা হয়েছে।)

(ii) হতে (i) উভয় পার্শ্বে বিয়োগ করলে $2V\delta V = \mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right)$

(δV^2) এর মান অতিক্ষুদ্র বলে তাকে বর্জন করা হল)

অতএব $2V\delta v = \mu\left(\frac{a' - a}{a^2}\right) = \mu\frac{\delta a}{a^2}$ ($a' - a = \delta a$ ধরা হয়েছে)

$a - a - \delta a \simeq \frac{2va^2\delta V}{\mu}$ (iii) হবে।

অত এব পরাক্ষের রৈখিক মানের পরিবর্তন হবে $\frac{4va^2}{\mu}\delta V$

কণাটি পর্যায়কাল T হলে

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$ হবে।

উভয় দিকে লগারিদম নিয়ে সমাকল প্রক্রিয়া দ্বারা আমরা পাই

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{3}{2}\frac{\delta a}{a} \simeq \frac{3aV\delta V}{\mu}$$

পূর্বেই আমরা ধরেছি যে p বিন্দুতে কণিকার গতিবেগের দিশার কোনও পরিবর্তন হবে না এবং বলকেন্দ্র S_1 এর অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে ; ধরা যাক্ যে অপর নাভিকেন্দ্রটি S_2 হইতে S'_2 অবস্থানে চলে যায়, S'_2 হতে $A'S_1S_2\ A$ পূর্বের পরাক্ষের উপর S'_2N লম্ব টানা হলে।

এখন $S_2S_2' = S_2'P - S_2P = (S_2'P + S_1'P) - (S_2P + S_1P)$

$= 2a' - 2a = 2\delta a$

যদি ঘাতবল প্রয়োগের পূর্বে পরাক্ষের অবস্থান এবং ঐ বল প্রয়োগের পরে পরিবর্তন পরাক্ষের মধ্যবর্তী কোণ $\delta\psi$ হয় তাহলে $\delta\psi = < S_2S_1S_2'$ এবং $\delta\psi$ অতিক্ষুদ্র মানের হবে।

এখন $\delta\psi = \tan\ \delta\psi = \tan S_2 S_1 S_2' = \dfrac{S_2' N}{S_1 N}$

কিন্তু $S_2' N = S_2 S_2'\ \sin S_2' S_2 N = 2\delta a\ \sin S_2' S_2 N$ এবং $S_1 N \simeq S_1 S_2 = 2ae$

$\therefore\ \ \delta\psi \simeq -\dfrac{2\delta a \sin S_2' S_2 N}{2ae} = \dfrac{2aV}{e\mu}\,\delta V \sin S_2' S_2 N$ হবে।

আবার যেহেতু ঘাতবলের জন্য গতি বেগের দিশার কোনও পরিবর্তন নাই এ কারণে S_1 নাভিবিন্দু হতে P বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব P এর মান অপরিবর্তিত থাকবে ;

কিন্তু $pV = h$ (ধ্রুবক রাশি)

এজন্য $p\delta V = \delta h$

অর্থাৎ $\delta h = p\delta V = \dfrac{h}{V}\delta V$ ....(iv)

আবার $h^2 = \mu\,\ell = \mu a(1-e^2)$

(ℓ উপবৃত্তটির নাভিলম্বের অর্ধেক এবং e উৎকেন্দ্রতা)

অতএব অবকল প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে আমরা পাই $2h\delta h = \mu\delta a\left(1-e^2\right) - 2\mu ae\delta e$

বা, $2\mu ae\delta e = \mu\delta a\left(1-e^2\right) - 2h\delta h$

এখন (iv) প্রয়োগ করলে

$2\mu ae\delta e = \mu\left(1-e^2\right)\delta a - \dfrac{2h^2}{v}\delta v$ হবে।

এখন (iii) প্রয়োগ করলে

$$2\mu ae\delta e = 2\mu\frac{\left(1-e^2\right)a^2 V\delta V}{\mu} - 2\mu a\frac{\left(1-e^2\right)\delta V}{V}$$

অর্থাৎ $2\mu ae\delta e = 2a\left(aV^2-\mu\right)\left(1-e^2\right)\dfrac{\delta V}{V}$

বা, $\delta e = \dfrac{\left(aV^2-\mu\right)\left(1-e^2\right)}{\mu e}\,\dfrac{\delta V}{V}$ হয়।

এইরূপে উৎকেন্দ্রতার পরিবর্তনের মান পাওয়া যায়।

7.4 কণিকার উপর ব্যস্ত বর্গ বল

μ (কণিকার বলকেন্দ্র হইতে দূরত্ব)$^{-2}$ প্রভাবে উপবৃত্ত পথে μ র মান সামান্য পরিবর্তিত হলে μ হল উপবৃত্তের পরাক্ষের দৈর্ঘ্যের মান উৎকেন্দ্রতার মান ইত্যাদি কিরূপ পরিবর্তিত হবে তা আমরা অনুসন্ধান করব।

আমরা জানি কণিকা উপবৃত্তের একটি নাভিকেন্দ্র (যা বলকেন্দ্র) হতে π দূরত্বে থাকলে এবং তার গতিবেগ v হল

$V^2 = \mu\left(\dfrac{2}{r} = \dfrac{1}{a}\right)$ হয় [$2a$ পরাক্ষের দৈর্ঘ্যের মান]

এখন μ পরিবর্তিত হয়ে μ' হলে $v^2 = \mu'\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a'}\right)$ ($2a'$ নতুন উপবৃত্তীয় কক্ষপথের পরাক্ষের মান। v এর মান আমরা অপরিবর্তিত ধরব।

অতএব $\mu\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right) = \mu'\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a'}\right) = v^2$

অতএব $\dfrac{V^2}{\mu}-\dfrac{V^2}{\mu'} = \dfrac{1}{a'}-\dfrac{1}{a}$

অর্থাৎ $\dfrac{V^2(\mu'-\mu)}{\mu\mu'} = \dfrac{a-a'}{a'a}$

এখন $\mu' = \mu + \delta\mu$ এবং $a' = a + \delta a$ ধরে আমরা পাই $\dfrac{V^2\delta\mu}{\mu^2} \simeq -\dfrac{\delta a}{a^2}$

অতএব $\delta a = -\dfrac{a^2v^2\delta\mu}{\mu^2}$ হবে।

আমরা এটিও জানি

$h^2 = \mu a\ (1-e^2)$ এবং h = vp অপরিবর্তিত থাকবে (পূর্বের উদাহরণে এটির কারণ বিশ্লেষণ করা হয়েছে)

অতএব $\mu a(1-e^2) = h^2$ সমতাকে h ধ্রুবক ধরে, লগারিদম নিয়ে সমাকল ক্রিয়া প্রয়োগ করে পাব

$$\frac{\delta\mu}{\mu} + \frac{\delta a}{a} - \frac{2e\delta e}{1-e^2} = 0$$

অতএব $$\frac{2e\delta e}{1-e^2} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \frac{\delta a}{a} = \frac{\delta\mu}{\mu} - \frac{aV^2\delta\mu}{\mu^2}$$

বা, $$\frac{2e\delta e}{1-e^2} = \left(1 - \frac{v^2 a}{\mu}\right)\frac{\delta\mu}{\mu}$$

আবার যেহেতু পর্যাকাল $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$

অতএব $$\frac{\delta T}{T} = \frac{3}{2}\frac{\delta a}{a} - \frac{1}{2}\frac{\delta\mu}{\mu} - = \frac{1}{2}\frac{\delta\mu}{\mu}\left(1 + \frac{3aV^2}{\mu}\right)$$

পূর্বের উদাহরণের চিত্রের প্রক্রিয়ায় অনুরূপ বিশ্লেষণ করলে দেখা যাবে যে উপবৃত্তের পরাক্ষটির দিশার পূর্বের অবস্থান হতে $\frac{\delta a}{ae}\sin S_1 S_2 S_2'$ পরিমাণ বিচ্যুতি ঘটবে।

7.5 অনুশীলনী

উদাহরণ—1

$2a$ পরাক্ষ বিশিষ্ট উপবৃত্তীয় কক্ষপথে চলমান m ভর যুক্ত একটি কণা কোনও সময়ে বিস্ফোরণের জন্য m_1 এবং m_2 ভরবিশিষ্ট দুটি কণায় বিভক্ত হয়ে যায়। যদি ঐ বিস্ফোরণের জন্য E পরিমাণ শক্তি উৎপন্ন হয় এবং m_1 ভর বিশিষ্ট কণাটির গতিপথ একটি অধিবৃত্ত হয়। তা হলে দেখান যে m_2 কণাটির গতিপথে এমন একটি উপবৃত্ত হবে যার পরাক্ষের দৈর্ঘ্য হবে $\frac{2\mu m_2 a}{\mu m - 2aE}$

সমাধান ঃ কেন্দ্রীয় বল $\frac{\mu}{r^2}$ (r বলকেন্দ্র হতে দূরত্ব) ধরলে বিস্ফোরণের পূর্বে $v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ (m ভরযুক্ত কণাটির গতিবেগ V) এবং বিস্ফোরণের পরে m_1 ভরযুক্ত কণাটির গতিবেগ V_1 এবং m_2 ভর বিশিষ্ট কণাটির গতিবেগ V_2 ধরলে $V_1^2 = \frac{2\mu}{r}$ এবং $V_2^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a'}\right)$

(m_2 এর যুক্ত কণাটির গতিপথ $2a'$পরাক্ষ বিশিষ্ট উপবৃত্ত)

এখন প্রদত্ত শর্তানুসারে, $m_1 + m_2 = m$ এবং $\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}mv^2 + E$

অর্থাৎ $m_1\left(\frac{2\mu}{r}\right) + m_2\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a'}\right) = m\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) + 2E$ কিন্তু $m_1 = m - m_2$

অতএব $\frac{m_2\mu}{a'} = \frac{m\mu}{a} - 2E$ হবে।

এই হতে দেখা যায় যে, $2a' = \frac{2\mu m_2 a}{\mu m - 2aE}$

উদাহরণ—2

M ভর বিশিষ্ট একটি গ্রহ যার সূর্য পরিক্রমার পর্যায়কাল T সূর্য হতে সবচেয়ে বেশি দূরত্বের অবস্থানে যখন তার গতিবেগ V তখন ঠিক বিপরীত মুখে একই গতি বেগ যুক্ত এবং ঐ গ্রহটির কক্ষপথে চলমান m ভরযুক্ত একটি উল্কার সঙ্গে ঐ গ্রহের সংঘর্ষ হয়।

$\frac{m}{M}$ ক্ষুদ্র হলে দেখান যে, গ্রহটির উপবৃত্তীয় কক্ষপথের পরাক্ষ $\frac{4mvT}{\pi M}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ পরিমাণ হ্রাস পাবে (e উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা)

সমাধান ঃ গ্রহটি যখন সূর্য থেকে সবচেয়ে বেশি দূরত্বে থাকবে তখন তা পরাক্ষের প্রান্তবিন্দু $r = a(1+e)$ অবস্থানে থাকবে।

তখন $V^2 = \mu\left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)$

যদি সংঘর্ষের পরে গ্রহটির এবং ঐ উল্কার একই গতি বেগ V_1 হয় তাহলে $(M+m)V_1 = MV - mV$ হবে।

অতএব $V_1 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)V$

অর্থাৎ $\frac{V_1}{V} = \frac{\left(1 - \frac{m}{M}\right)}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)} = 1 - \frac{2m}{M}$ হয়।

($\frac{m}{M}$ অতিক্ষুদ্র বলে তার বর্গ, ঘন ইত্যাদি বর্জন হয়েছে)

দেখা যাচ্ছে যে, $\frac{V_1}{V} < 1$, অতএব গ্রহটি এবং ঐ উল্কার সম্মিলিত কক্ষপথও একটি উপবৃত্ত হবে ; ধরা যাক্ তার পরাক্ষ $2a'$ পরিমাণ দীর্ঘ।

অতএব $V_1^2 = \mu\left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a'}\right]$

অর্থাৎ $\left(1-\frac{2m}{M}\right)^2 V^2 = \mu\left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a'}\right]$

অতএব $\left(1-\frac{4m}{M}\right)\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)} \simeq \mu\left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right]$

পক্ষান্তর করে আমরা দেখি যে,

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a}\left[\frac{2}{1+e} - \left(1-\frac{4m}{M}\right)\left(\frac{1-e}{1+e}\right)\right] = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{4m}{M}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)\right]$$

অতএব $a' \simeq a\left[1 - \frac{4m}{M}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)\right]$

এবং $2a - 2a' = 2a \times \frac{4m}{M}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)$ .... (i)

কিন্তু $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$

অতএব $VT = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} \times \sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$

বা, $VT = 2\pi a\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ .... (ii)

(i) এবং (ii) হতে আমরা পাই

$$2a - 2a' = \frac{4m}{M}\frac{VT}{\pi}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

7.6 সারাংশ

সূর্যের চারিদিকে গ্রহের গতিপথ উপবৃত্তাকার ধরে পরে ভিন্ন ভিন্ন কারণে ঐ পথের সামান্য পরিবর্তন হলে উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা, পরাক্ষের দৈর্ঘ্য ইত্যাদির কিরূপ পরিবর্তন ঘটবে তা এই 8নং এককে আলোচনা করা হয়েছে।

7.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. পৃথিবীর সূর্যকে বেষ্টন করে উপবৃত্তীয় কক্ষপথের উপাক্ষের প্রান্ত বিন্দুতে আসলে, m ভর বিশিষ্ট একটি উল্কা সূর্যের মধ্যে পতিত হয়। এখন সূর্য্যের ভর M ধরলে দেখান যে পৃথিবীর উপবৃত্তীয় কক্ষপথের পরাক্ষ $2a\dfrac{m}{M}$ পরিমাণ হ্রাস পায়, পৃথিবীয় পর্যায়কাল একবৎসরের $\dfrac{2m}{M}$ ভাগ পরিমাণ হ্রাস পায় এবং পরাক্ষে $\dfrac{b}{ae}\dfrac{m}{M}$ পরিমাণ কোণে সরে যায়।

কক্ষপথ উপবৃত্তটির পরাক্ষের দৈর্ঘ্য, উপাক্ষের দৈর্ঘ্য এবং উৎকেন্দ্রতা যথাক্রমে $2a$, $2b$ এবং e ধরা হয়েছে)

2. একটি ধূমকেতুর কক্ষপথ সূর্যকে নাভিকেন্দ্র ধরে একটি অধিবৃত্ত ধরা হয়েছে। যখন ধূমকেতুটি ঐ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে আসে তখন তার গতিবেগ হঠাৎ $n : 1$ অনুপাতে পরিবর্তিত হয়। দেখান যে ঐ পরিবর্তনের পরে ধূমকেতুর কক্ষপথ হবে একটি উপবৃত্ত এবং ঐ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{1-2n^2+2n^4}$ এবং পরাক্ষের দৈর্ঘ্যের পরিমাণ $\dfrac{\ell}{1-n^2}$ হবে। (আদি দশায় ধূমকেতুটির গতিপথ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 2ℓ ধরা হয়েছে।)

একক 8 ❑ প্রতিরোধী পথে কণার গতি (Motion of a particle in a resisting medium)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী কয়েকটি অধ্যায়ে অধিকাংশ ক্ষেত্রে কণিকাসমূহের অবাধ গতি আলোচিত হয়েছে। কিন্তু এই এককে (9 নং) আমরা কণিকার অবাধ গতি নিয়ে আলোচনা করব।

8.2 উদ্দেশ্য

বিবিধ কারণে কোনও চলমান কণার গতিপথে বাধা প্রাপ্ত হতে পারে। যেমন কোনও কণা ঊর্ধ্বে নিক্ষেপ করলে বায়ু চলাচলের জন্য তার গতি বাধাপ্রাপ্ত হয়। আমরা পূর্ব আলোচনায় কণার গতি সাধারণতঃ বাধাশূন্য ধরেছি ; যেমন মাধ্যাকর্ষণ শক্তির প্রভাবে আমরা দেখছি যে, বাধাশূন্য প্রাসের গতিপথ অধিবৃত্তাকার হবে। এই অধ্যায়ে আমরা বাধার প্রভাবে কণার গতি কিরূপ ব্যাহত হয় তা নিয়ে আলোচনা করব। প্রায়শঃ কোনও কণিকা তার গতিপথে যে বাধার সম্মুখীন হয়, তা কণিকারটির গতিবেগ অপেক্ষক রূপে ধরা হয়ে থাকে।

8.3 উল্লম্ব রেখার কণিকার সবাধ গতি

উল্লম্বরেখায় সোজা নিম্নদিকে একটি কণিকা স্থিরাবস্থা হতে পতিত হয়েছে। যদি কণিকাটির উপর যে বাধা এর গতিপথে থাকে তা কণিকাটির বেগের সমানুপাতিক হয় তা হলে কণিকাটির গতি নির্ণয় করতে হবে।

যে বিন্দু হতে কণিকাটি পড়ে তাকে মূলবিন্দু O এবং OX অক্ষ মূলবিন্দু হতে উল্লম্বরেখায় সোজা নিম্নদিকে ধরা হল।

এখন কণিকাটি পতিত হবার সময়কে প্রারম্ভ সময় ($t = 0$) ধরলে, t সময় পরে যখন কণিকাটি x পরিমাণ পথ নীচের দিকে নামে তখন তার বেগ v এবং কণিকাটির ভর এক (one) ধরলে নিউটনের গতিসূত্র অনুসারে কণিকাটির গতিবেগের সমীকরণ $\frac{dV}{dt} = V\frac{dV}{dx} = g - k\ \ v$ (k ধ্রুবক) (i)

$\frac{dV}{dt} = 0$ তখন $V = \frac{g}{k}$ হবে।

V গতিবেগের এই মান $\frac{g}{k} = V$ কে প্রান্তিক বেগ বলা হয়ে থাকে।

$\frac{dV}{dt} = g - kv$ সমীকরণটি সমাধান করে আমরা পাব $\log(g - kV) = -kt + C$ (C ধ্রুবক)

আদি দশায় $t = 0$, $V = 0$ অতএব $C = \log$ g.

এবং $\log\frac{g - kV}{g} = -kt$

অর্থাৎ $V = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$

যখন $t \to \infty$ বা $V \to \frac{g}{k} = v$ (প্রান্তিক বেগ)

অতএব $V = V\left(1 - e^{-kt}\right) = \frac{dx}{dt}$ পুনরায় উভয়দিকে সমাকলন করে আমরা পাই

$x = Vt - \frac{V}{K}\left(1 - e^{-kt}\right)$ যেহেতু $x = 0$ যখন $t = 0$

আবার $V\frac{dV}{dx} = g - kv$, অবকল সমীকরণটি সমাধান করে আমরা পাই $\int\frac{VdV}{g - kv} = \int dx$

বা, $x = \frac{1}{k}\left[g - V\log\left(1 - \frac{kV}{g}\right)\right]$

যেহেতু যখন $x = 0$, $V = 0$ ধরা হয়েছে।

উল্লম্বরেখায় সোজা ঊর্ধ্বদিকে একটি কণা u রেখা ছোঁড়া হল ; যদি কণিকাটির গতিপথের বাধা তার বেগের বর্গের সমানুপাতিক হলে ঐ কণাটির গতি নির্ণয় করতে হবে।

মনে করা যাক্ কণাটির ভর m এবং কণাটির গতিপথে বাধার পরিমাণ mkv^2, V কণাটির বেগ V এবং $V = u$ যখন $t \neq O$ ধরা হয়েছে।

ধরা যাক্ কণাটি O মূলবিন্দু হতে ছোঁড়া হচ্ছে এবং সোজা উল্লম্ব উর্ধ্বদিকে ox অক্ষরেখা রয়েছে। তা হলে কণাটির গতির সমীকরণ,

$$m\frac{dV}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = -mg - mkV^2$$

এখন $\frac{dV}{dt} = -g - kV^2$

এস্থলে প্রান্তিক বেগ V হলে $V^2 = \frac{g}{k}$ হবে।

অতএব $\frac{dV}{dt} = -K\left(V^2 + V^2\right)$

উপরোক্ত অবকল সমীকরণটি সমাধান করলে পাওয়া যায় $\int\limits_{v=u}^{v} \frac{dv}{V^2 + V^2} = -k\int_{t=0}^{t} dt$

অতএব $\frac{1}{V}\left(\tan^{-1}\frac{V}{V} - \tan^{-1}\frac{u}{V}\right) = -kt$

অর্থাৎ $t = \frac{1}{KV}\left[\tan^{-1}\frac{u}{V} - \tan^{-1}\frac{V}{V}\right]$ ..... (i) হবে।

আবার, $V\frac{dV}{dx} = -k\left(V^2 + V^2\right)$ সমীকরণটি সমাধান করে পাওয়া যাবে

$$\int_{u=v}^{v} \frac{VdV}{V^2 + V^2} = -K\int_{x=0}^{x} dx = -kx$$

অর্থাৎ $\frac{1}{2}\log\frac{V^2 + V^2}{V^2 + u^2} = -kx$

অতএব $x = \frac{1}{2k}\log\frac{V^2 + u^2}{V^2 + V^2}$ ..... (ii)

(i) এবং (ii) হতে কণাটির v-বেগের সাপেক্ষে যথাক্রমে কণাটির অতিক্রান্ত সময় এবং মূলবিন্দু হতে দূরত্ব পাওয়া যাবে।

যখন কণাটি মূলবিন্দু হতে সর্বোচ্চ অবস্থানে পৌঁছাবে তখন তার গতিবেগ $V = 0$ হবে ;

কণাটির সর্বোচ্চ উচ্চতা হবে $H = \frac{1}{2k}\log\left(1 + \frac{u^2}{V^2}\right)$

সর্বোচ্চ উচ্চতা H পৌঁছে কণাটি মাধ্যাকর্ষণ প্রভাবে সোজা নীচের দিকে পড়তে থাকবে এবং তখনও বাধা kv^2 কণাটির উপর ক্রিয়াশীল থাকবে। ঊর্ধ্ব হতে কণাটি পড়ার সময়ে x হ্রাস পেতে থাকে এবং বেগ v বৃদ্ধি পেতে থাকবে, এজন্য কণাটির ত্বরণ $-V\frac{dV}{dx} = g - kV^2 = k\left(V^2 = v^2\right)$ হবে।

দুইদিকে সমাকলন করে আমরা পাই $-\int_0^v \frac{VdV}{V^2 - V^2} = K\int_H^0 dx$

[মূলবিন্দু 0 তে কণাটির গতিবেগ v ধরে]

অতএব $\frac{1}{2}\log\left(V^2 - V^2\right)_0^v = -kH$

অর্থাৎ, $\log\frac{V^2 - V^2}{V^2} = -2kH = -\log\left(1+\frac{u^2}{V^2}\right)$

বা, $\log\frac{V^2}{V^2 - V^2} = \log\left(1+\frac{u^2}{V^2}\right)$

অতএব $\frac{V^2}{V^2 - V^2} = 1+\frac{u^2}{V^2}$

বা, $V^4 = \left(V^2 - V^2\right)\left(V^2 + u^2\right)$

অতএব $u^2V^2 = V^2\left(V^2 + u^2\right)$

বা, $V = \frac{uV}{\sqrt{V^2 + u^2}}$ হবে।

8.4 প্রাসের সবাধ গতি (Motion of a projectile in a resisting medium)

আমরা পূর্বে মাধ্যাকর্ষণ প্রভাবে প্রাসের বাধাশূন্য গতি নিয়ে আলোচনা করেছি। এখন মাধ্যাকর্ষণ ব্যতীত যদি প্রাসের উপরে কোনও বাধা ক্রিয়াশীল হয় তা হলে তার গতি নির্ণয় করব। থরা যাক যে বাধা প্রাসের বেগের সমানুপাতিক, যেমন m ভর বিশিষ্ট কণার উপর বাধা $m\ k\ v\ (k > 0)$ এবং ঐ বাধা কণাটির গতিবেগের দিশায় আছে। ভূপৃষ্ঠে কোনও বিন্দু হতে কণাটিকে u বেগে ভূতলের সঙ্গে α কোণ করে নিক্ষেপ করা হলে। যে বিন্দু হতে নিক্ষেপ করা হলে তাকে মূলবিন্দু। মূলবিন্দুগামী অনুভূমিক রেখাকে x অক্ষ এবং মূলবিন্দুর উল্লম্ব উর্ধ্বদিশায় y অক্ষ ধরা হল। পরবর্তী আলোচনায় দেখান হবে যে, কণাটির গতিবেগের দিশা এবং তার গতিপথের স্পর্শকের দিশা অভিন্ন ; এজন্য কণাটির গতীয় সমীকরণ হবে

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk\frac{dx}{dt} \qquad \text{...... (i)}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - mk\frac{dy}{dt} \qquad \text{...... (ii)}$$

(i) নং সমীকরণটির উভয়পার্শ্ব t সাপেক্ষে সমাকলন করে পাই

$$\log\left(\frac{dx}{dt}\right) = -kt + \log(u\cos\alpha)$$

যেহেতু আদি দশায় $t = 0, \frac{dx}{dt} = u\cos\alpha$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{dx}{dt} = u\cos\alpha . e^{-kt} \qquad \text{...... (iii)}$$

পুনরায় সমাকলন করে এবং $t = 0$ হলে $x = 0$ ধরে পাই $x = \frac{u\cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$ ...... (iv)

অনুরূপভাবে (ii) নং সমীকরণকে t সাপেক্ষে সমাকলন করে পাই ($t = 0$ সময়ে $\frac{dy}{dt} = u\sin\alpha$ ধরে)

$$\frac{dy}{dt} = \left[\left(u\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}\right] \quad ...... \text{(v)}$$

পুনরায় (v) নং সমীকরণটি সমাকলন করে পাই $y = \frac{1}{k}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}$ ...... (iv)

(যখানে $t = 0$, $y = 0$ ধরা হয়েছে)

কিন্তু (iv) হতে আমরা দেখি যে,

$$e^{-kt} = 1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}$$

$$\text{অতএব} \quad t = -\frac{1}{k}\log\left(1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}\right)$$

t-এর ঐ লব্ধমান (vi) নং সমতায় লাইনে পাই

$$y = \frac{x}{u\cos\alpha}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{k}\right) + \frac{g}{k^2}\log\left(t - \frac{kx}{u\cos\alpha}\right)$$

প্রাসটি যখন ভূতল হতে সর্বোচ্চসীমায় পৌঁছাবে তখন $\frac{dy}{dt} = 0$ হবে এবং (v) হতে আমরা পাই

$$e^{-kt} = \frac{g}{ku\sin\alpha + g}$$

অর্থাৎ $t = \frac{1}{k}\log\left(1 + \frac{ku\sin\alpha}{g}\right)$ হবে এবং প্রাসটির ভুতল হতে সর্বোচ্চ সীমা H হলে (vi) হতে পাই

$$H = \frac{u\sin\alpha}{K} - \frac{g}{k^2}\log\left(1 + \frac{ku\sin\alpha}{g}\right)$$

8.5 সারাংশ

আমরা এই এককে সরলরেখায় মাধ্যাকর্ষণ হেতু কোনও কণিকার সবাধ পতন হলে এবং ঐ বাধা কণিকাটির বেগের সমানুপাতিক ধরে ঐ কণিকাটির বিভিন্ন সময়ে গতিবেগ ইত্যাদি নির্ণয় করা হয়েছে। আবার অন্য একটি ক্ষেত্রে সমতলে একটি প্রাসের সবাধ গতি কিরূপ হবে তা দেখান হয়েছে।

8.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

কোনও মসৃণ অনুভূমিক সমতলে একটি কণিকা V বেগে ছোঁড়া হলে ; যদি কণাটি গতিপথে প্রতি একক ভরের জন্য kx কণাটির তৎকালীন বেগ পরিমাণ বাধা পায়, তা হলে কণাটি ছোঁড়ার t সময় পরে তার বেগ হবে Ve^{-kt} এবং ঐ সময়ে কণাটি $\frac{V}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$ পরিমাণ দূরত্ব অতিক্রম করবে। (k একটি ধ্রুবক রাশি)

2. একটি কণিকা উল্লম্বদিশায় ঊর্ধ্বমুখে u বেগে ছুঁড়ে দেওয়া হল ; ধরা যাক্ কণাটি গতিপথে Kv^2 পরিমাণ বাধাপ্রাপ্ত হয় তা হলে দেখান যদি আদি অবস্থানে (যেখান হতে উহাকে ছোঁড়া হয়েছে) পৌঁছালে কণাটির বেগ V হয়, তাহলে $\frac{1}{V^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{k}{g}$ হবে।

(এখানে k একটি ধ্রুবক রাশি এবং v কণাটির গতিবেগ ধরা হয়েছে)

3. প্রতিরোধী মাধ্যমে একটি কণিকাকে অনুভূমিক রেখার সঙ্গে α কোণে u বেগে ছোঁড়া হল। মাধ্যমের প্রতিরোধের মান $k \times$ (গতিবেগ) হলে দেখান যে কণাটি $\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{2ku}{g}\sin\alpha\right)$ সময় পরে পুনরায় ঐ অনুভূমিক রেখার সঙ্গে α কোণ করবে। (k ধ্রুবক রাশি ধরা হয়েছে)

একক 9 ❑ সবাধ গতি (Constrained Motion)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

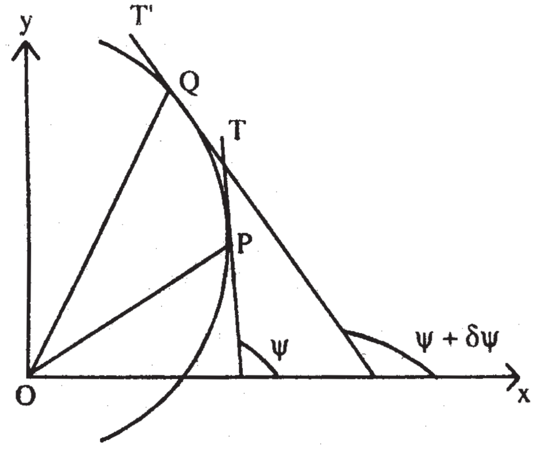
একটি কণা যখন কোনও বক্রের উপর চলতে থাকে, তখন ঐ কণাটি চলাকালীন কণাটির উপর ঐ বক্রের উপর প্রতিক্রিয়া (Reaction) থাকবে। আমরা এই 10নং এককে সমতল বক্রের উপর চলমান কণার গতি এবং কণাটির উপর ঐ বক্রের প্রতিক্রিয়া আলোচনা করব।

9.2 উদ্দেশ্য

সমতলে সরল দোলকের গতি নির্ণয় করতে এবং কোনও বক্রের উপর চলমান একটি কণিকার গতি ও ঐ বক্রের প্রতিক্রিয়া বিচার করবার জন্য সমতল বক্রের স্পর্শক এবং অভিলম্ব দিশায় কণিকার বেগ ও ত্বরণ নিয়ে আলোচনা করেছি। পদার্থ এবং কারিগরীবিদ্যায় আমরা সাধারণত কণিকার সবাধ গতি সংক্রান্ত সম্মুখীন হয়ে থাকি এবং এই এককে আমরা এতৎসংক্রান্ত আলোচনা করেছি।

9.3 বক্ররেখায় স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় বেগ ও ত্বরণ

কণিকার গতি আলোচনার পূর্বে সমতলে বক্ররেখায় চলমান কণার ঐ বক্ররেখায় স্পর্শক ও অভিলম্ব দিশায় বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় করব।



O কে মূলবিন্দু এবং OX OY (পরস্পর লম্ব) রেখাদ্বয়কে x এবং y অক্ষদ্বয় ধরা হল।

A, P, Q বক্ররেখার উপর তিনটি বিন্দু চলমান কণাটি Δt সময়ে P হতে Q বিন্দুতে যায় APQ বক্ররেখার উপর A কে স্থিরবিন্দু রাখিয়া চাপ $AP = s$ এবং চাপ $AQ = s + \delta s$ (P এবং Q বক্ররেখার উপর অতি নিকট দুটি বিন্দু) ধরা হল। $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = \vec{r} + \delta\vec{r}$ হলে আমরা জানি যে

$$\lim_{Q\to P} \frac{PQ \text{ জ্যা}}{PQ \text{ চাপ}} = 1 \text{ হয়।}$$

বক্ররেখার উপর P বিন্দুতে গতিবেগ V ধরলে $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt}$;

কিন্তু $Q \to P$ হলে PQ জ্যাটি P বিন্দুতে স্পর্শক হবে ; অর্থাৎ $\frac{d\vec{r}}{ds}$ স্পর্শেকের দিশায় হবে। এজন্য একটির P বিন্দুতে কণাটির গতিবেগ কেবলমাত্র স্পর্শক দিশায় হবে এবং তার মান $\frac{ds}{dt}$ দাঁড়ায়।

ত্বরণ

P বিন্দুতে কণাটির বেগ V, PT স্পর্শক দিশায় হবে এবং Q বিন্দুতে তার বেগ $V + \Delta V$, QT দিশায় ধরে।

P বিন্দুতে কণাটির PT স্পর্শক দিশায় ত্বরণ

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(V + \Delta V)\cos \Delta\psi - V}{\Delta t} \quad (cOS\ \delta\psi \ \simeq 1 \text{ ধরে})$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} - \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

আবার P বিন্দুতে কণাটির APQ বক্ররেখার অভিলম্ব দিশায় ত্বরণ $= \lim\limits_{\Delta t \to O} \dfrac{(v + \Delta v)\sin \Delta\psi}{dt}$

$$= \lim_{\Delta t \to O} V \frac{\Delta\psi}{\Delta t} \qquad \begin{bmatrix} \sin\Delta\psi \approx \Delta\psi \\ \Delta v \Delta\psi \text{ নগণ্য ধরে} \end{bmatrix}$$

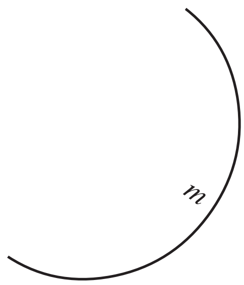
$$= V \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dt} = V^2 \frac{d\psi}{ds} = \frac{V^2}{\rho}$$

[P বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ $\dfrac{ds}{d\psi} = \rho = \dfrac{i}{\dfrac{d\psi}{ds}}$]

অতএব আমরা দেখি যে, বক্ররেখা APQ তে P চলমান কণিকার P বিন্দুতে বেগ কেবলমাত্র স্পর্শক দিশায় থাকবে এবং ঐ বেগ $V = \dfrac{ds}{dt}$ হবে ; কিন্তু ঐ স্পর্শক দিশায় কণাটির ত্বরণের উপাংশ $\dfrac{dV}{ds}$ বা $\dfrac{d^2 s}{dt^2}$ এবং অভিলম্ব দিশায় কণাটির ত্বরণের উপাংশ $\dfrac{V^2}{\rho}$ হয়।

9.4 বক্রের উপর চলমান কণার ক্রিয়া এবং বক্রের প্রতিক্রিয়া

m ভরবিশিষ্ট একটি কণা যদি কোনও একটি বক্রের উপর চলিতে বাধ্য হয় তাহলে কণাটির অবস্থান বক্রটির যে বিন্দুতে থাকবে, ঐ বিন্দুতে বক্রটির অভিলম্ব দিশায় কণাটির উপর বক্রটির প্রতিক্রিয়া থাকবে।



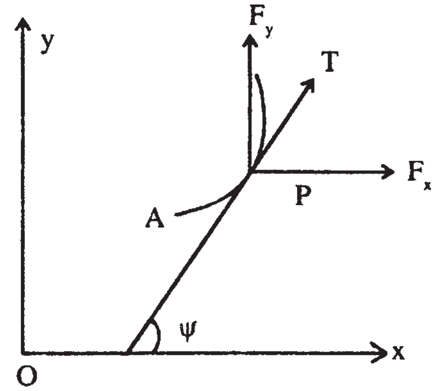
উপরন্তু যদি বক্রটি অমসৃণ হয় তা হলে কণাটির উপর অমসৃণতার জন্য যে বাধা আসবে এবং বক্রটির ঘর্ষণজনিত প্রতিক্রিয়ায় কণাটির গতির বিপরীতমুখে বক্রটির স্পর্শক দিশায় থাকবে।

9.5 বক্রের উপর কণার গতি নির্ণয়

বক্রের উপর কণার গতি নির্ণয় করতে হলে প্রথমতঃ বক্রটির জ্যামিতি জানা প্রয়োজন ; দ্বিতীয়তঃ কণাটির উপর অন্য বলের প্রভাব থাকলে তা সম্যক্‌রূপে জানতে হবে।

ধরা যাক যে বক্রটির উপর কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু A হতে কণাটির চাপের দৈর্ঘ্য মাপা হবে, কণাটি P বিন্দুতে থাকলে ঐ চাপের দৈর্ঘ্য s ধরা হল। O কে মূলবিন্দু এবং OX, OY যথাক্রমে x এবং y অক্ষ ধরে যদি P বিন্দুতে বক্রটির স্পর্শক PT x অক্ষের সঙ্গে ψ কোণ করে, তাহলে আমরা অবকলন গণিত হতে জানি যে, $\cos\psi = \dfrac{dx}{ds}$ এবং $\sin\psi = \dfrac{dy}{ds}$ হয়।

ধরা যাক যে, F_x এবং F_y বল দুইটি কণাটির উপর x এবং y অক্ষের দিকে ক্রিয়াশীল, তা হলে কণাটির স্পর্শকের দিশায় মোট ক্রিয়াশীল বল $F_x \cos\psi + F_y \sin\psi = F_x \dfrac{dx}{ds} + F_y \dfrac{dy}{ds}$ হয় এবং অভিলম্ব দিশায় মোট ক্রিয়াশীল বল হবে—$F_x \sin\psi + F_y \cos\psi = -F_x \dfrac{dy}{ds} + F_y \dfrac{dx}{ds}$



উপরন্তু ঐ অভিলম্বদিশায় কণাটির উপর বক্রের প্রতিক্রিয়া R থাকবে।

এখন বক্রের স্পর্শক দিশায় কণাটির ত্বরণ $\dfrac{d^2s}{dt^2} = V\dfrac{dV}{ds}$ ধরে কণাটির ভর m হলে গতিসূত্র অনুসারে কণাটির গতীয় সমীকরণ হবে $mV\dfrac{dV}{ds} = F_x \dfrac{dx}{ds} + F_y \dfrac{dy}{ds}$ .... (i)

আবার অভিলম্ব দিশায় কণাটির গতীয় সমীকরণ হবে $\dfrac{mV^2}{\rho} = R - F_x \dfrac{dy}{ds} + F_y \dfrac{dx}{ds}$ ....(ii)

(i) নং সমীকরণ সমাকলন করে আমরা পাই $\dfrac{mV^2}{2} = \int\left(F_x dx + F_y dy\right)$ ....(iii)

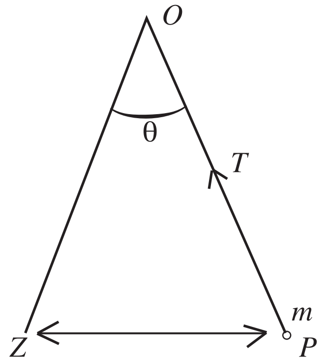
(iii) হতে v^2 এর লব্ধ মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে আমরা প্রতিক্রিয়া R এর মান পাই।

9.6 উল্লম্ব সমতলে সরল দোলকের প্রতি

কোনও স্থিরবিন্দু O হতে লঘু সম্প্রসারণহীন রজ্জুর দ্বারা যুক্ত m ভরবিশিষ্ট একটি কণাকে উল্লম্ব নিম্নদিশায় OZ রেখার সঙ্গে α কোণে ছেড়ে দেওয়া হল।

m ভরবিশিষ্ট কণার উপর দুইটি বল ক্রিয়া করবে,

একটি mg সোজা নীচের দিকে এবং অন্যটি রজ্জুটির টান T $\overrightarrow{mO}$ দিশায়।



সম্প্রসারণ হীন রজ্জুটির দৈর্ঘ্য l ধরা হল। O কে মূলবিন্দু এবং OZ রেখাকে আদি রেখা ধরে মেরুস্থানাংক ব্যবহার করলে দেখা যাবে যে,

m কণাটির বেগের অরীয় উপাংশ $-l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ এবং অনুপ্রস্থ দিশায় উপাংশ হবে $\frac{1}{l}\frac{d}{dt}\left(l^2\frac{d\theta}{dt}\right) = t\frac{d^2\theta}{dt^2}$

এখন নিউট্রনের গতীয় সূত্র অনুযায়ী $-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T$ .... (i)

এবং $ml\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = -mg\sin\theta$ .... (ii) হবে।

(ii) নং সমীকরণ সমাধান করে আমরা θ এবং $\frac{d\theta}{dt}$ কে t সময়ের অপেক্ষক হিসাবে পাই এবং (i) নং সমীকরণে $\frac{d\theta}{dt}$ এর লব্ধমান বসিয়ে আমরা রজ্জুর উপর টান $T = m\left(g\cos\theta + l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)$ পাই।

এখান আমরা (ii) নং সমীকরণটি নিয়ে বিশদ আলোচনা করব। ঐ সমীকরণ হতে পাই $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$

θ কোণের মান অতিক্ষুদ্র হলে $\sin\theta \simeq \theta$ হয় এবং ঐ সমীকরণটি দাঁড়ায় $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$

এটি সরলসমঞ্জস গতির সমীকরণ ; পূর্বেই আমরা দেখেছি যে এটি সমাধান করে $\theta = \alpha \cos \sqrt{\frac{g}{t}}\, t$ পাওয়া যাবে যেহেতু প্রারম্ভে t = 0 অবস্থায় θ = α এবং $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ধরা হয়েছে। এজন্য

$T = mg\left[\cos\theta + \alpha^2 \sin^2 \sqrt{\frac{g}{t}}\, t\right]$ হবে।

কিন্তু θ যদি অতিক্ষুদ্র না হয়, তাহলে $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$ সমীকরণটির উভয়দিকে $2\frac{d\theta}{dt}$ গুণ করে t সাপেক্ষে সমাকলন করে পাই $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha)$

(যেহেতু θ = α অবস্থানে $\frac{d\theta}{dt} = 0$)

লক্ষ্য করুন যে, t বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে θ হ্রাস পাচ্ছে ; এজন্য $\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}(\cos\theta - \cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$ হবে

এটি সমাকলন করলে $t = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_\alpha^\theta \frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\alpha)^{1/2}}$

উপরের সমাকলনটি বীজগণিতীয় (algebraic) বা বৃত্তীয় (circular) যেমন sin, cos ইত্যাদি অপেক্ষক দ্বারা প্রকাশ করা যায় না, ঐ সমাকলনটি সমাধান করতে হলে উপবৃত্তীয় (elliptic) অপেক্ষক প্রয়োগ করতে হবে।

যদি α ক্ষুদ্র হয় তাহলে নিম্নবর্ণিত উপায়ে সমাকলনটির আসন্নমান নির্ণয় করতে পারি, θ = α হতে আদিরেখা θ = 0 পর্যন্ত পৌঁছাতে কণাটির সময় লাগবে

$$\bar{t} = +\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\alpha)^{1/2}} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}}$$

এখন $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\phi$ বসিয়ে আমরা পাব

$$i = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi\right)^{1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\alpha}{2}\sin^4\phi + \cdots\right]d\theta$$

যেহেতু $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\phi = \frac{\pi}{4}, \int_0^{\pi}\sin^4\phi\, d\phi = \frac{3\pi}{16}$

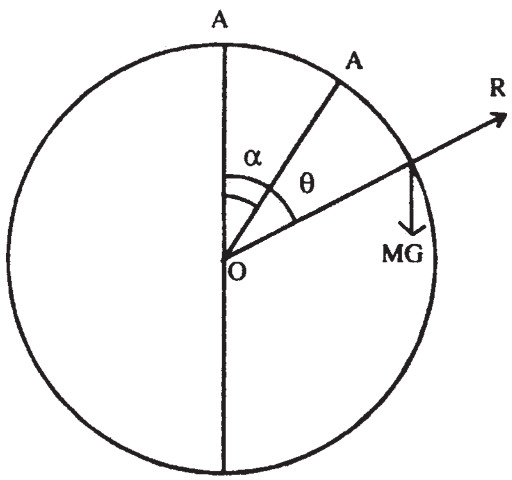
অতএব $\bar{t} \simeq \sqrt{\frac{l}{2g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]$

9.7 অনুশীলনী

এখন কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা মাধ্যাকর্ষণজনিত বলপ্রভাবে বক্ররেখার উপর কণার গতি বিশ্লেষণ করব।

উদাহরণ—1

ধরা যাক যে উল্লম্ব সমতলে মসৃণ বৃত্তাকার বক্রের বাইরের দিকে কণাটি রয়েছে এবং বৃত্তটির ব্যাস $2a$



মনে করি যে, বৃত্তটির কেন্দ্র O এবং কণাটি আদি দশায় বৃত্তটির উপর A_1 বিন্দু থাকে এবং $\angle AOA = \alpha$; A বিন্দুটি বৃত্তটির পরিধিতে সর্বোচ্চ বিন্দু যখন কণাটি মাধ্যাকর্ষণ হেতু স্থিরাবস্থা A_1, হতে বৃত্তটির উপর P বিন্দুতে আসে গতিবেগ v পায়, তখন $\angle AOP = \theta$ ধরলে $mV\dfrac{dV}{ds} = mg\sin\theta$ ..... (i)

এবং $m\dfrac{V^2}{\rho} = -R + mg\cos\theta$ .... (ii) হবে

কিন্তু যেহেতু এস্থলে বক্রটি a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত, এজন্য $s = a\theta$ এবং $\rho = a$ হয়।

(i) নং সমীকরণ সমাকলন করে আমরা পাই $V^2 = 2ga(\cos\alpha - \cos\theta)$

যেহেতু $\theta = \alpha$ অবস্থানে কণাটির গতিবেগ শূন্য ধরা হয়েছে।

উপরের সমীকরণ হতে আমরা পাই যে,

$$V^2 = u^2 - 2ga(1 - \cos\theta)$$

(যেহেতু $V = u$ যখন $\theta = 0$ ধরা হয়েছে)

V^2-এর এই লব্ধমান পর্বে প্রাপ্ত সমীকরণে বসিয়ে আমরা $R = \dfrac{m}{a}\left[u^2 + ga(3\cos\theta - 2)\right]$

আদি দশায় কণাটির গতিবেগের বিভিন্ন মানের জন্য কণাটির গতিপথে তার বেগ শূন্য অথবা প্রতিক্রিয়া R ধনাত্মক, শূন্য বা ঋণাত্মক হবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ $V^2 = u^2 - 2ga(1-\cos\theta)$ কে গতিশক্তির পরিবর্তন $\frac{1}{2}m\left(v^2 - u^2\right) =$ মাধ্যাকর্ষণ বল হেতু m ভরযুক্ত কণার উপর কার্যের পরিমাণ $mga(1-\cos\theta)$ রূপে চিন্তা করা যায়।

আবার (ii) নং সমীকরণ হতে $R = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{a}$

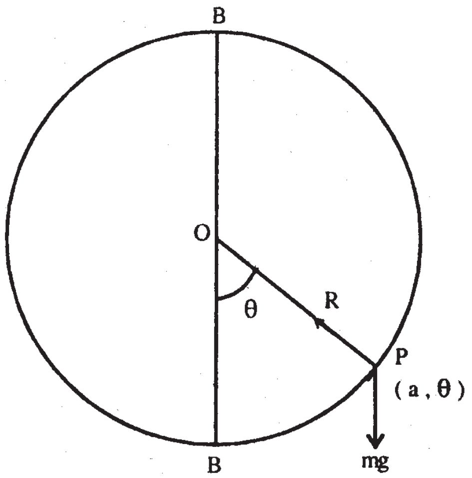
$= mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha)$ হয়।

এস্থলে লক্ষ্য করুন $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2\cos\alpha}{3}\right)$ হলে $R = 0$ হবে এবং কণাটি বক্রটির স্পর্শ ত্যাগ করবে এবং মাধ্যাকর্ষণ হেতু তার গতিপথ পূর্বে আলোচিত গ্রাসের ন্যায় হবে।

উদাহরণ—2

কণাটি মসৃণ বৃত্তাকার বক্রের ভিতরের দিকে থাকে ; পূর্বের ন্যায় বৃত্তটির ব্যাস $2a$ এবং তার কেন্দ্র O ধরা হল।

মনে করা যাক যে, বৃত্তটির পরিধির সর্বনিম্ন অবস্থান B বিন্দু হতে u গতিবেগে কণাটিকে ছোঁড়া হল এবং কণাটির ঐ বৃত্তাকার বক্রের ভিতরের দিকে চলতে বাধ্য হচ্ছে। বৃত্তটির উপর P (a, θ) বিন্দুতে কণাটির বেগ v হলে কণাটির গতীয় সমীকরণদ্বয় হবে



$m\frac{V}{a}\frac{dV}{d\theta} = -mg\sin\theta$ (iii) এবং $\frac{mV^2}{a} = R - mg\cos\theta$ (iv)

উদাহরণ—3

একটি কণাকে উল্লম্ব সমতলে অবস্থিত একটি অমসৃণ বৃত্তাকার বক্রের ভিতরের দিকে সর্বনিম্ন বিন্দু হতে V বেগে অনুভূমিক দিশায় ছোঁড়া হল। যদি কণাটি সম্পূর্ণ বৃত্তটি পরিক্রম করে, যখন ঐ সর্বনিম্ন বিন্দুতে ফিরে আসবে তখন তার গতিবেগ V হলে

$$V^2 = V^2 e^{-4\pi\mu} + \frac{2ga}{1+4\mu^2}(1-2\mu^2)(1-e^{-4\pi\mu})$$ হবে। (a বৃত্তটির ব্যাসার্ধ এবং μ চক্রের ঘর্ষণাঙ্ক)

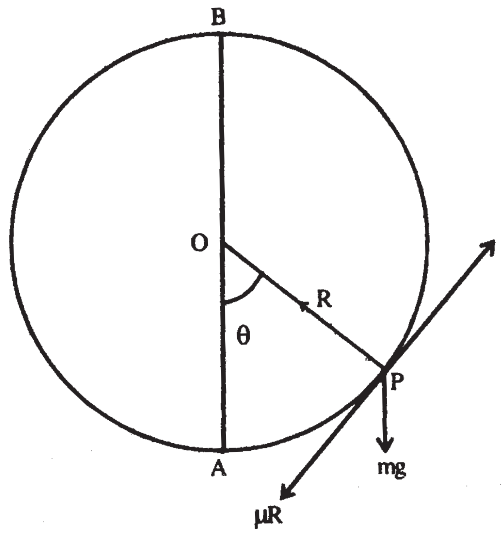
সমাধান ঃ

O কে বৃত্তটির কেন্দ্র এবং Aকে বৃত্তটির সর্বনিম্নবিন্দু ধরা হল। m ভরবিশিষ্ট কণাটি যখন P বিন্দুতে আসে ($AOP = \theta$) তখন তার উপর ক্রিয়াশীল বল mg উল্লম্ব দিশায় নিম্নদিকে, প্রতিক্রিয়া R বৃত্তের কেন্দ্র O অভিমুখে এবং ঘর্ষণজনিত বল μR স্পর্শক দিশায় কণাটির গতির বিপরীতদিকে কাজ করবে।

এখন কণাটির গতীয় সমীকরণদ্বয় হবে

$$mV\frac{dV}{ds} = -\mu R - mg\sin\theta \quad \text{.........} \quad \text{(i)}$$

এবং $$m\frac{V^2}{\rho} = R - mig\cos\theta \quad \text{.........} \quad \text{(ii)}$$



এস্থলে $s = a\theta$ এবং $\rho = a$ হয় ;

অথচ (i) এবং (ii) হতে R অপনয়ন করে আমরা পাই

$$\frac{dV}{d\theta} + 2\mu V^2 = -2ga(\mu\cos\theta + \sin\theta)$$

উপরের অবকলন সমীকরণের উভয়দিকে $e^{2\mu 0}$ গুণ করে পরে সমাকলন করে পাব

$$V^2 e^{2\mu\theta} = -2ga\int e^{2\mu\theta}(\mu\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta$$

$$= -2ga\left[\frac{e^{2\mu\theta}}{1+4\mu^2}\{(2\mu\cos\theta + \sin\theta)\mu + (2\mu\sin\theta - \cos\theta)\}\right] + c \quad \text{.........} \quad \text{(iii)}$$

কিন্তু আমরা ধরেছি $v = V$ যখন আদি অবস্থানে $\theta = 0$

অতএব $V^2 = \dfrac{-2ga}{1+4\mu^2}\left(2\mu^2-1\right)+c$

এজন্য $c = V^2 + \dfrac{2ga}{1+4\mu^2}\left(2\mu^2-1\right)$ .... (iv)

যখন কণাটি পুনরায় সর্বনিম্ন বিন্দু A তে ফিরে আসে তখন $\theta = 2\pi$ এবং গতিবেগ v ধরলে (iii) এবং (iv) হতে আমরা পাই

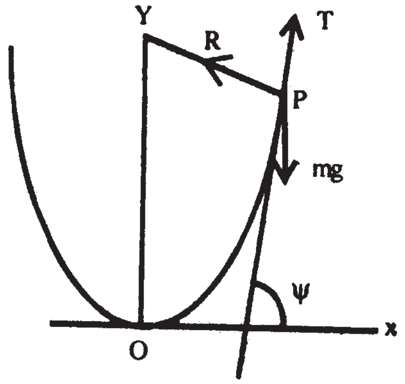
$$V^2 e^{4\mu\pi} = \frac{+2ga}{1+4\mu^2}\left[(2\mu^2-1)(1-e^{4\pi\mu})\right]+V^2$$

$$V^2 = V^2 e^{-4\pi\mu} + \frac{2ga}{1+4\mu^2}\left(1-2\mu^2\right)\left(1-e^{-4\pi\mu}\right)$$

উদাহরণ—4

উল্লম্বসমতলে একটি মসৃণ অধিবৃত্তাকার টিউব রয়েছে এবং ঐ অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুটি টিউবের সর্বনিম্নে রয়েছে। m ভরবিশিষ্ট একটি কণা শীর্ষবিন্দু হতে h উচ্চতায় স্থিরাবস্থায় টিউবের ভিতর গড়িয়ে দেওয়া হয় ; অধিবৃত্তটির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$ এবং বক্রতা ব্যাসার্ধ ρ হলে দেখান যে ঐ কণিকার উপর অধিবৃত্তটির প্রতিক্রিয়ার পরিমাণ $\dfrac{2mg(h+a)}{\rho}$ হবে।

সমাধান ঃ



অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু O এবং অনুভূমিক দিশায় OX এবং উল্লম্ব ঊর্ধ্বমুলে OY অক্ষ ধরে অধিবৃত্তটির সমীকরণ $x^2 = 4ay$ রূপে প্রকাশ করতে পারি। অধিবৃত্তের উপর P (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক PT, OX অক্ষের সঙ্গে ψ কোণ করলে $\sin\psi = \dfrac{dy}{dx}$ এবং $\cos\psi = \dfrac{dx}{ds}$ হবে।

$x^2 = 4ay$ হতে আমরা পাই $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{2a}$ এবং $\dfrac{d^2y}{dx} = \dfrac{1}{2a}$ আবার কণিকাটি স্পর্শক দিশায় এবং অভিলম্ব দিশায় গতির সমীকরণদ্বয় যথাক্রমে হবে $mV\dfrac{dV}{ds} = -mg\sin\psi = -mg\dfrac{dy}{ds}$ .... (i)

এবং $\dfrac{mV^2}{\rho} = R - mg\cos\psi$ .... (ii)

(i) নং সমীকরণ সমাধান করে আমরা পাই $mV^2 = 2mg(h-y)$ .... (iii)

যেহেতু যখন $y = h$ তখন $v = 0$ ধরা হয়েছে।

(ii) এবং (iii) হতে আমরা পাই $R = mg\cos\psi + \dfrac{mV^2}{\rho} = mg\cos\psi + 2mg\dfrac{(h-y)}{\rho}$

$$\text{কিন্তু}\quad \rho = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+\tan^2\psi)^{3/2}}{\frac{1}{2a}}$$

$$\text{অতএব}\quad \rho = 2a\sec^3\psi = \frac{2a}{\cos\psi}\sec^2\psi = \frac{2a}{\cos\psi}\left(1+\frac{y}{a}\right) = \frac{2(a+y)}{\cos\psi}$$

$$\text{এবং এজন্য}\quad R = mg\left[\frac{2(a+y)}{\rho} + \frac{2(h-y)}{\rho}\right] = \frac{2mg(h+a)}{\rho}$$

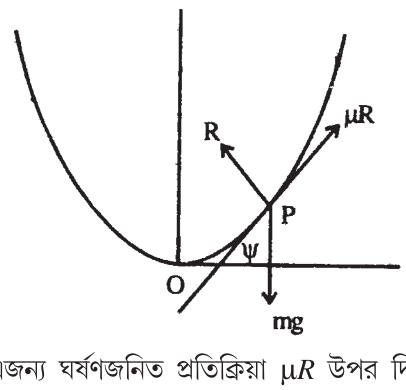
উদাহরণ—5

উল্লম্ব সমতলে নিম্নে শীর্ষবিন্দু এবং উর্ধ্বমুখী অক্ষবিশিষ্ট এবং অমসৃণ চক্রজ (cycloid) রয়েছে ; তার একটি কাস্প (Cusp) হতে একটি ভারীকণা স্থিরাবস্থা হতে চক্রজের ভিতরের দিকে ছেড়ে দেওয়া হল। শীর্ষবিন্দুতে পৌঁছালে কণাটির বেগের মান নির্ণয় করে দেখান যে অনুরূপ পরিস্থিতিতে মসৃণ চক্রজের শীর্ষবিন্দুতে পৌঁছালে বেগ পূর্বের বেগের মানের $(e^{-\pi\mu} - \mu^2)^{1/2} \big/ (1+\mu^2)^{1/2}$ ভাগ হবে। (μ অমসৃণ চক্রজের ঘর্ষণাঙ্ক)

সমাধান ঃ

ধরা যাক্ যে চক্রাজটির স্বকীয় (intrinsic) সমীকরণ $s = 4a\ \text{Sin}\ \psi$

এখন স্পর্শকদিশায় কণাটির গতির সমীকরণ হবে $mV\dfrac{dV}{ds} = \mu R - mg\sin\psi$ .... (i)



যেহেতু কণাটি নীচে নামছে এজন্য ঘর্ষণজনিত প্রতিক্রিয়া μR উপর দিকে হবে

আবার অভিলম্ব দিশার কণাটির গতির সমীকরণ $\dfrac{mV}{\rho} = R - mg\cos\psi$ .... (ii)

(i) এবং (ii) হতে R অপনয়ন করে পাই

$$V\frac{dV}{ds} - \mu\frac{V^2}{\rho} = g(\mu\cos\psi - \sin\psi) \qquad \text{........ (iii)}$$

কিন্তু $s = 4a\sin\psi$ বলে $\rho = \dfrac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi$ ধরে

(ii) হতে আমরা পাব $\dfrac{dV^2}{d\psi} - 2\mu V^2 = 8ag\cos\psi(\mu\cos\psi - \sin\psi)$

এখন উভয়দিকে সমাকলগুণক $e^{-2\mu\psi}$ দ্বারা গুণ করে পরে সমাকলন করে পাই

$V^2e^{-2\mu\psi} = 8ag\int e^{-2\mu\psi}\cos\psi(\mu\cos\psi - \sin\psi)d\psi + c$ এখন $d\left[e^{-\mu\psi}(\mu\cos\psi - \sin\psi)\right]$

$$= \left[-\mu e^{-\mu\psi}(\mu\cos\psi - \sin\psi) + e^{-\mu\psi}(-\mu\sin\psi - \cos\psi)\right]d\psi$$

$$= -\left(1+\mu^2\right)e^{-\mu\psi}\cos\psi$$

অতএব $V^2e^{-2\mu\psi} = -\dfrac{8ag}{2\left(1+\mu^2\right)}\left[e^{-\mu\psi}(\mu\cos\psi - \sin\psi)\right]^2 + c$

কিন্তু কণাটি যখন কাম্পে ছিল তখন তার বেগ শূন্য ছিল, এজন্য $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ অবস্থায় $V = 0$

অতএব ঐ শর্তানুযায়ী $c = \dfrac{4ag}{\left(1+\mu^2\right)}e^{-\mu\pi}$ হবে।

যখন কণাটি শীর্ষবিন্দুতে পৌঁছায় তখন $\psi = 0$; এ সময়ে গতিবেগ V হলে $V_1^2 = \dfrac{4ag}{\left(1+\mu^2\right)}\left(e^{-\mu\pi} - \mu^2\right)$ হবে।

কিন্তু চক্রাজটি মসৃণ হলে $\mu = 0$ হয়, অতএব তখন গতিবেগ V_2 হলে $V_2^2 = 4ag$

অতএব $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\left(e^{-\mu\pi} - \mu^2\right)^{1/2}}{\left(1+\mu^2\right)^{1/2}}$ হবে।

9.8 সারাংশ

অনুশীলনীতে কয়েকটি উদাহরণ সমাধান পদ্ধতি দেখে সমতলে কোনও বক্রের উপর একটি কণিকারগতি ও কণাটির উপর ঐ বক্রের প্রতিক্রিয়া এবং সমতলে সরল দোলকের গতি আলোচিত হয়েছে।

9.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. সমতলে কোনও বক্ররেখার উপর চলমান একটি কণিকার ঐ বক্ররেখায় স্পর্শক এবং অভিলম্ব দিশায় ত্বরণদ্বয় সমান হলে কণাটির গতিবেগ কিরূপ হবে?

(উত্তর ঃ $V = Ke^{\psi}$ (K ধ্রুবক)

2. উল্লম্ব সমতলে অবস্থিত একটি মসৃণ O বক্ররেখা বরাবর একটি কণা মাধ্যাকর্ষণ হেতু নীচে পড়ছে। যদি বক্রের উপর যে কোনও অবস্থানে কণাটির বেগ ঐ বক্রের সর্বোচ্চ বিন্দু হতে বক্র বরাবর কণাটির দূরত্বের সমানুপাতিক হয়। তাহলে দেখান যে বক্রটি একটি চক্রজ।

3. a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি অমসৃণ গোলকের ভিতরের দিকে তার বক্রতল বরাবর একটি কণাকে V বেগে ছুঁড়ে দেওয়া হল। যদি কণাটির উপর কোনও বহিঃস্থ বল ক্রিয়াশীল না থাকে এবং ঐ বক্রের ঘর্ষণাঙ্ক μ হয়। তা হলে দেখান যে $\frac{a}{\mu V}\left(e^{2\mu\pi}-1\right)$ সময় পরে কণাটি গোলকের বক্রতলের যে বিন্দু হতে ছোঁড়া হয়েছে সেই বিন্দুতে ফিরে আসবে। উল্লম্ব সমতলে নিম্নে শীর্ষবিন্দু এবং ঊর্ধ্বমুখী অক্ষবিশিষ্ট একটি অমসৃণ চক্রাজ রয়েছে। যদি ঐ চক্রাজের একটি কাস্প হতে স্থিরাবস্থায় একটি ভারী কণাকে ঐ চক্রাজ বরাবর ছেড়ে দেওয়া হয় এবং যদি তা ঐ চক্রাজের শীর্ষবিন্দুতে পৌঁছালে বেগশূন্য হয়। তাহলে দেখান যে $\mu^2 e^{\mu\pi} = 1$ হবে (μ চক্রাজটির ঘর্ষণাঙ্ক)।

একক 10 ❑ ভর পরিবর্তন সংক্রান্ত গতি (Mass Varying motion)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

আমরা পূর্বে কণার বিবিধ প্রকার গতি আলোচনাকালে তার ভরের কোনও পরিবর্তন চিন্তা করনি। কিন্তু বাস্তব অভিজ্ঞতা হতে আমরা দেখতে পাই বৃষ্টির ফোঁটা ভূপৃষ্ঠের দিকে যত নীচে নামে তত তা ভারী হতে থাকে ; আবার রকেট ছোঁড়ার পরে তার মধ্যে বারুদ ক্রমশঃ পুড়ে যায় এবং রকেটটি হাল্কা হতে থাকে। আমরা এখন সময়ের সঙ্গে বস্তুর ভর পরিবর্তন এবং গতি যুগপৎ আলোচনা করব।

দ্রষ্টব্য ঃ উচ্চতর গণিত শাস্ত্র এবং পদার্থবিদ্যা চর্চায় গতিবেগের সঙ্গে কণার ভরের পরিবর্তন ধরা হয়ে থাকে।

10.2 উদ্দেশ্য

আমরা কেবলমাত্র সময়ের সঙ্গে কণার ভরের পরিবর্তন সংশ্লিষ্ট গতি সংক্রান্ত সমস্যা নিয়ে অগ্রসর হব এবং এই অধ্যায়ে কেবলমাত্র কণার ঋজু রেখা গতি নিয়ে আলোচনা করব।

10.3 ভর পরিবর্তনের জন্য কণিকার গতির নিয়ম

ধরা যাক্ যে t সময়ে কণাটির ভর m এবং গতিবেগ v ছিল,

$t + \Delta t$ সময়ের কণাটির ভর পরিবর্তিত হয়ে $m + \Delta m$ হয় এবং কণাটির ভরবৃদ্ধির পূর্বে Δm পরিমাণ ভরের বেগ u থাকে এবং $m + \Delta m$ ভরের বেগ $V + \delta V$ হয়, তা হলে কণাটির মোট ভরবেগের পরিবর্তন

Δt সময়ে হবে $(m + \Delta m)(V + \Delta u) - mv - \Delta mu \simeq \Delta mv + m\Delta v - \Delta mu$ নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী সময় সাপেক্ষে ঐ ভরবেগের পরিবর্তনের হার বহিঃস্থ বলের সমানুপাতিক হবে।

অতএব $V\dfrac{dm}{dt} + m\dfrac{dV}{dt} - u\dfrac{dm}{dt} = F$ (F বহিঃস্থ বল)

অর্থাৎ $\dfrac{d}{dt}mV = F + u\dfrac{dm}{dt}$ হয়।

(ঋজুরেখ গতিতে আমরা ধরেছি $V + \delta V$, V, u এগুলি একই দিশায় থাকবে)

10.4 অনুশীলনী

উদাহরণ—1

একটি রকেট হতে অবিরত সুষমহারে পোড়া জ্বালানী নির্গত হচ্ছে। যদি জ্বালানী নির্গমনের হার λ (ধ্রুবক) হয় এবং রকেটের বেগের সাপেক্ষে জ্বালানীর বেগ u হয়, তা হলে দেখাও যে রকেটটির বেগের পরিবর্তন হবে—

$V - V_0 = -u\, ln\left(1 - \dfrac{\lambda t}{mo}\right)$; (প্রারম্ভে $t = 0$ সময়ের রকেটটির ভর ছিল m_0 এবং বেগ ছিল v_0)

সমাধান ঃ এখানে দেওয়া আছে যে, $\dfrac{dm}{dt} = -\lambda$ অতএব $m = m_0 - \lambda t$ হবে।

যেহেতু কোনও বহিঃস্থ বল রকেটটির উপর কাজ করছে না, এজন্য ঐ রকেটের ভরবেগের কোনও পরিবর্তন হবে না।

অতএব $(m - \Delta m)(V + \Delta V) + \Delta m\,(V - u) - mV = 0$ এখানে যে জ্বালানী নির্গত হচ্ছে তার ভর Δm এবং রকেটের বেগের পরিবর্তন V হতে $V + \Delta V$ হচ্ছে। এখন অতিক্ষুদ্র রাশি $\Delta m\, \Delta V$ অগ্রাহ্য করে আমরা পাব $mv - \Delta mv + m\Delta v + \Delta mv - u\Delta m - mv = 0$

অর্থাৎ $m\Delta V = u\Delta m$

অতএব $m\dfrac{dV}{dt} = u\dfrac{dm}{dt} = -\lambda u$

কিন্তু $m = m_0 - \lambda t$, অতএব $(m_0 - \lambda t)\dfrac{dV}{dt} = -\lambda u$

অর্থাৎ $\dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{\lambda u}{m_0 - \lambda t}$; অতএব $V - V_0 = -u\, ln\left(1 - \dfrac{\lambda t}{m_0}\right)$

যেহেতু $t = 0$ অবস্থায়, $m = m_0$, $V = V_0$

উদাহরণ—2

স্থিরাবস্থা হতে স্থির মেঘের মধ্য দিয়ে একটি কণা সোজা নীচে ভূতলে নামিবার সময় কণাটির গায়ে

জলীয় বাষ্প জমে কণাটির ভর বৃদ্ধি করছে। যদি t সময়ে তার বেগ V হয় এবং m ভরের জন্য কণাটির ভরবৃদ্ধির হার Kmu (K ধ্রুবক) হলে দেখান যে x দূরত্ব নামিবার পর কণাটির বেগ V

$KV^2 = g\left(1-e^{-2kx}\right)$ সমীকরণ হতে পাওয়া যায় এবং t সময়ে কণাটি—

$\frac{1}{K}\ln\left\{\left(e^{t\sqrt{kg}}+e^{-t\sqrt{kg}}\right)/2\right\}$ দূরত্ব অতিক্রম করবে। (K ধনাত্মক ধরা হয়েছে)

ইঙ্গিত ঃ অঙ্কটি সহজেই সমাধান সম্ভব।

10.5 সারাংশ

আমরা নিম্নে উল্লিখিত দুইটি উদাহরণ দ্বারা ভরপরিবর্তন যুক্ত বস্তুর গতি নিয়ে আলোচনা করেছি, যেমন (i) জলীয় বাষ্পের জন্য বৃষ্টির ফোঁটার ভরপরিবর্তন হয়ে ভূপৃষ্ঠে পতন এবং (ii) জ্বালানী নির্গমনের সঙ্গে সঙ্গে রকেটের গতি। ভরপরিবর্তনযুক্ত গতির অন্যপ্রকার উদাহরণও দেওয়া যেতে পারে এবং ঐ সমস্যাগুলি এই এককে প্রদর্শিত পথে অগ্রসর হলে সমাধান করা যাবে।

10.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলাকাকৃতি বৃষ্টির ফোঁটা ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতা হতে পড়িবার সময় জলীয় বাষ্পের জন্য ঐ ফোঁটাটির ব্যাসার্ধ K হারে বৃদ্ধি পায়। দেখান যে ভূপৃষ্ঠে যখন ঐ ফোঁটাটি পড়বে তখন তার ব্যাসার্ধ $K\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1+\sqrt{1+\frac{ga^2}{2hK^2}}\right)$ হবে।

2. M ভর বিশিষ্ট একটি রকেট হতে সময় সাপেক্ষে eM ভরযুক্ত জ্বালানী V আপেক্ষিক বেগে নিম্নাভিমুখে নির্গত হচ্ছে। যদি রকেটটির খোলস ইত্যাদির মোট ভর M' হয়, তা হলে দেখান যে, $eV > g$ না হলে রকেটটি বিস্ফোরণের সঙ্গে সঙ্গে উল্লম্ব উর্ধ্ব দিশায় উঠতে পারবে না এবং $\frac{eMV}{M'} > g$ না হলে রকেটটি একেবারেই উর্ধ্বে উঠতে পারবে না।

EMT-9
Block–2

একক 11 ❑ কণাপুঞ্জের গতি (Motion of a system of particles)

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

কতগুলি বস্তুকণা যদি পরস্পর বিচ্ছিন্ন থাকে এবং তাদের ওপর বিভিন্ন বল প্রযুক্ত হয়, তাহলে তাদের গতিপ্রকৃতি জানার উদ্দেশ্যে ঐ কণাগুলির সমষ্টিকে আমরা কণাপুঞ্জ বলে থাকি। কণাপুঞ্জের ওপর দুরকমের বল থাকতে পারে। একটি কণার ওপর ঐ কপুঞ্জের অন্য কণা দ্বারা প্রযুক্ত বলকে **অন্তর্বল** বলা হয়। আর যে বলটির কারণ কণাপুঞ্জের বাইরে নিহিত তাকে **বহির্বল** বলা হয়। আমাদের উদ্দেশ্য সম্মিলিতভাবে কণাগুলির গতিপ্রকৃতি সম্বন্ধে জ্ঞানলাভ করা। একটি মাত্র কণার জন্য আপনারা দেখেছেন কীভাবে সরাসরি নিউটনের গতিসূত্র প্রয়োগ করে

গতিসমীকরণ লেখা যায়। আমরা এখানে দেখব একটি কণাতন্ত্র (System)-এর জন্য কীভাবে গতিসমীকরণ লেখা সম্ভব। একইভাবে দেখানো যাবে যে কণাপুঞ্জ সম্বন্ধেও ভরবেগ, কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষী নীতিগুলি প্রযোজ্য। এবং সংরক্ষী বলের দ্বারা প্রযুক্ত হলে, শক্তির সংরক্ষণ নীতিও প্রয়োগ করা যাবে।

11.2 উদ্দেশ্য

এই এককে আপনারা জানতে পারবেন—

- যে কোন কণাপুঞ্জের গতি কিভাবে আলোচনা করা যাবে।
- কণাপুঞ্জের ভরকেন্দ্র, ভরবেগ, কৌণিক ভরবেগ, গতিশক্তি ইত্যাদির সম্বন্ধে।
- ভরবেগ ও কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি এক্ষেত্রে কি রূপ পরিগ্রহ করে।

11.3 কণাপুঞ্জ

কণাপুঞ্জ বলতে আমরা কতগুলি ভর-কণার (mass purticles) সমষ্টি বুঝব। প্রতিটি কণার একটি ভর আছে এবং নির্দিষ্ট মুহূর্তে নির্দিষ্ট অবস্থান আছে। আমরা n-সংখ্যক (সীমিত সংখ্যা) কণাদ্বারা গঠিত একটি কণাপুঞ্জের কথা আলোচনা করব। ধরা যাক নির্দিষ্ট স্থিরবিন্দু 0 সাপেক্ষে ঐ কণাগুলির অবস্থান ভেক্টর t সময়ে হল $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots, \vec{r_n}$, এবং কণাগুলির ভর $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (একটি কণাপুঞ্জ অসীম সংখ্যক কণার সমষ্টিও হতে পারে। বস্তুত, একটি দৃঢ়বস্তুকে আমরা অসীম সংখ্যক কণার সমষ্টি হিসেবে দেখব, যেখানে দুটি কণার মধ্যে দূরত্ব সর্বদা অপরিবর্তনীয়।

11.3.1 অন্তর্বল (Internal Forces)

কণাপুঞ্জের কণাগুলির মধ্যে অন্তর্বল থাকলে, আমরা সাধারণভাবে ধরব যে m_i কণা m_j কণার ওপর $(i \neq j)$ যে বল প্রয়োগ করে, m_j কণা m_i কণার ওপর সমমানের বিপরীতমখী বল প্রয়োগ করে। এবং এই বল দুটির ক্রিয়ারেখা হল কণাদুটির সংযোগকারী সরলরেখা। অর্থাৎ $\vec{R_{ij}}$ যদি i-তম কণার ওপর j-তম কণা দ্বারা প্রযুক্ত বল হয়, তবে,
$$\vec{R_{ij}} + \vec{R_{ji}} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad i \neq j.$$

11.3.2 কণাপুঞ্জের গতিসমীকরণ (Equations of Motion)

স্থিরবিন্দু 0 সাপেক্ষে m_i কণার অবস্থান ভেক্টর t-সময়ে $\vec{r_i}$ হলে, $i = 1, 2, \ldots$, ঐ কণাটির গতিবেগ ভেক্টর হল $\frac{d\vec{r_i}}{dt} = \dot{\vec{r_i}}$, এবং ত্বরণ ভেক্টর হবে, $\frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2} = \ddot{\vec{r_i}}$.

অতএব, m_i কণাটির গতিসমীকরণ হল (ভেক্টর রূপে)

$$m_i \frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2} = \vec{F_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{R_{ij}} \qquad \text{........} \quad (1)$$

যেখানে $\vec{F_i}$ হল m_i কণাটির ওপর প্রযুক্ত বহির্বল, এবং $\sum\limits_{j\neq i}^{n} \vec{R_{ij}}$ হল ঐ কণাটির ওপর অন্যান্য কণাদ্বারা প্রযুক্ত অন্তর্বলের সমষ্টি।

এইরূপ $i = 1, 2, ..., n$ এই n-সংখ্যক সমীকরণ পাওয়া যায়। (1)-এর মত প্রতি ভেক্টর সমীকরণকে আমরা তিনটি স্কেলার (scalar) সমীকরণ হিসেবেও লিখতে পারি। অর্থাৎ n-সংখ্যক কণার জন্য $3n$ সংখ্যক স্কেলার সমীকরণ পাওয়া যাবে। তাত্ত্বিক দিক থেকে (theoretically) বলা যায় যে এই $3n$-সংখ্যক সমীকরণ সমাধান করে n-সংখ্যক কণার $3n$-সংখ্যক স্থানাংক নির্ণীত হয়।

11.3.3 কণাপুঞ্জের ভরকেন্দ্রের গতি (Motion of the Centre of Mass)

পূর্বে বর্ণিত কণাপুঞ্জটি, যার কণাদের ভর ও অবস্থান জানা আছে, তার ভরকেন্দ্র হল একটি বিন্দু, যার অবস্থান—ভেক্টর নির্দিষ্ট মূলবিন্দু 0 সাপেক্ষে $\vec{R_c}$ হলে,

$$\vec{R_c} \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + \ldots + m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} m_i\vec{r_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{r_i}}{m}$$

যেখানে $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$, বস্তুকণাগুলির সমামগ্রিক ভর।

এবং $\vec{r_i}$ হল m_i ভরবিন্দুর 0 সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টর।

$$\therefore \; M\vec{R_c} = \sum m_i\vec{r_i} \qquad \text{.....} \quad (2)$$

যেহেতু কণাপুঞ্জটি গতিশীল, অতএব $\vec{r_i}$ সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়, অতএব ভরকেন্দ্রের অবস্থানও সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়।

(2) কে t-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে পাই

$$M\dot{\vec{R_c}} = \sum_i m_i\dot{\vec{r_i}} \quad \text{......} \; (3)$$ যেখানে $\dot{\vec{r_i}}$ দ্বারা $\frac{d\vec{r_i}}{dt}$ বোঝানো হয়েছে

(3)-কে অন্তরকলন করে পাই

$$M\ddot{\vec{R}}_c = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad .... \ (4) \quad \text{যেখানে} \quad \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \quad \text{ইত্যাদি}$$

এখন (1) নং সমীকরণ ছিল

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i} \vec{R}_{ij} + \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

এই n-সংখ্যক সমীকরণকে যোগ করে পাই

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{R}_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad .... \ (5)$$

এখন ডানদিকের প্রথম পদটিতে আমরা

$$\left(\vec{R}_{12} + \vec{R}_{21}\right) \cdot \left(\vec{R}_{13} + \vec{R}_{31}\right) \cdot \cdots \cdot \left(\vec{R}_{1n} + \vec{R}_{n1}\right).$$

$$\left(\vec{R}_{23} + \vec{R}_{32}\right) \cdot \cdots \cdot \left(\vec{R}_{2n} + \vec{R}_{n2}\right), \cdots \cdot \left(\vec{R}_{n-1,\,n} + \vec{R}_{n,n-1}\right).$$

এইরূপ জোড়ায় জোড়ায় পাব। কিন্তু এর প্রতিটিই শূন্য,

যেহেতু $\vec{R}_{ij} = -\vec{R}_{ij}$.

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j \\ j\neq 1}} \vec{R}_{ij} = 0$$

$$\therefore \sum m_1 \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad .... \ (6)$$

বা, (4) থেকে,

$$M\ddot{\vec{R}}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \quad .... \ (7)$$

অর্থাৎ বলা যায় যে কণাপুঞ্জের ভরকেন্দ্রটি এমনভাবে চলে যেন সমগ্র বস্তুকণার ভরসমন্বিত একটি কণা ঐ অবস্থানে আছে, এবং সমগ্র বহির্বলগুলি ঐ কণার ওপরেই ক্রিয়া করছে।

11.3.4 কণাপুঞ্জের ভরবেগ (Momentum of a system of particles)

নির্দিষ্ট স্থিরবিন্দু O সাপেক্ষে t সময়ে $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_n$ অবস্থানে $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ভরসমূহ একটি কণাপুঞ্জ গঠন করলে, কণাপুঞ্জটির ভরবেগ বলতে আমরা প্রতিটি কণার ভরবেগের ভেক্টর যোগফল বুঝব, অর্থাৎ কণাপুঞ্জের ভরবেগ $\vec{p}$ দ্বারা নির্দেশিত করলে $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}_i}$ .... (8)

অতএব, $$\vec{p} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt}(MR_c) = M\dot{\vec{R}_c} \quad \text{.........} \quad (9)$$

(9) থেকে দেখা যাচ্ছে যে কণাপুঞ্জের ভরবেগ, সমগ্র ভর M যুক্ত একটি কণা যদি ভরকেন্দ্রের সঙ্গো ভরকেন্দ্রের গতিতে চলে, তবে ঐ কণার ভরবেগের সমান।

11.3.5 কণাপুঞ্জের ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি

"কোন কণাপুঞ্জের ওপর প্রযুক্ত বলসমূহের ভেক্টর যোগফল যদি সর্বদা শূন্য হয়, তাহলে কণাপুঞ্জের ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকে।"

প্রমাণ : আমরা জানি যে ভরবেগ $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}_i}$

$$\therefore \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}_i}\right) = \sum m_i \ddot{\vec{r}_i} = M\ddot{\vec{R}_c}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

যেখানে $\vec{F}_i$ হল m_i কণার ওপর প্রযুক্ত বহির্বল।

অতএব, যদি $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$ সর্বদা হয়, তবে $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$, সর্বদা

অর্থাৎ সমাকলন দ্বারা, $\vec{P} =$ ধ্রুবক।

ভরবেগ সংরক্ষণ নীতির একটি স্কেলার রূপ

"যদি কোন কণাপুঞ্জের কণাগুলির ওপর প্রযুক্ত বলসমূহের একটি নির্দিষ্ট দিকে বিশ্লেষিতাংশগুলির যোগফল সর্বদা শূন্য হয়, তবে কণাপুঞ্জের ভরবেগের ঐ দিকে বিশ্লেষিতাংশ সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে।"

প্রমাণ ঃ নির্দিষ্ট দিকটি বরাবর x-অক্ষ নেওয়া হল।

এখন ধরা যাক $\vec{F}_i$ বলের বিশ্লেষিতাংশ Ox-বরাবর

F_{i_x} । শর্তানুযায়ী $\sum_{i=1}^{n} F_{i_x} = 0$

এখন আমরা জানি,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

এই ভেক্টর সমীকরণটির x-দিকে বিশ্লেষিতাংশ নিলে পাই,

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{i_x} = 0$$ সর্বদা, যেখানে P_x হল $\vec{P}$ ভেক্টরের x দিকে উপাংশ।

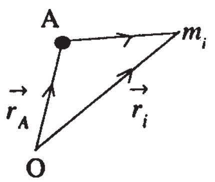
$\therefore$ সমাকলন দ্বারা, P_x = ধ্রুবক।

অতএব প্রমাণিত।

11.3.6 কণাপুঞ্জের কৌণিক ভরবেগ (Angular Momentum of a system of particles)

আমরা জানি যে, m_i ভরবিশিষ্ট কণার t সময়ে অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_i}$ হলে, একটি বিন্দু A, (যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_A}$)-এর সাপেক্ষে কণাটির কৌণিক ভরবেগ হল A সাপেক্ষে m_i-এর রৈখিক ভরবেগের ভ্রামক (moment of linear momentum)।

অর্থাৎ কণাটির ভরবেগ $m_i\vec{\vartheta}_i = m_i\dot{\vec{r_i}}$ হলে, A সাপেক্ষে এর কৌণিক ভরবেগ হল, A সাপেক্ষে $m_i\vec{\vartheta}_i$ -এর ভ্রামক।



এখন A সাপেক্ষে m_i-এর অবস্থান ভেক্টর হল $\vec{r_i} - \vec{r_A}$ । অতএব $m_i\vec{\vartheta}_i$ -এর A সাপেক্ষে ভ্রামক $= \left(\vec{r_1} - \vec{r_A}\right) \times m_i\vec{\vartheta}_i$

$\therefore$ m_i ভরের A সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ $\left(\vec{r_1} - \vec{r_A}\right) \times m_i\dot{\vec{r_i}}$

A সাপেক্ষে সমগ্র কণাপুঞ্জের কৌণিক ভরবেগ হল প্রতিটি কণার কৌণিক ভরবেগের ভেক্টর যোগফল। একে $\vec{L_A}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত করলে

$$= \vec{L_A} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\vec{r_i} - \vec{r_A}\right) \times m_i\dot{\vec{r_i}}\right]$$

অতএব $\vec{L_A} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r_i} \times m_i\dot{\vec{r_i}}\right) - \vec{r_A} \times \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{r_i}}$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r_i} \times m_i\dot{\vec{r_i}}\right) - \vec{r_A} \times M\dot{\vec{R_c}}$$

= (O বিন্দু সাপেক্ষে কণাপুঞ্জের কৌণিক ভরবেগ) $-\vec{r_A} \times M\vec{R_c}$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

1. A বিন্দু যদি ভরকেন্দ্র হয় অর্থাৎ যদি $\vec{r_A} = \vec{R_c}$ হয় তবে, $\vec{L_c} = \vec{L} - \vec{R_c} \times M\dot{\vec{R_c}}$

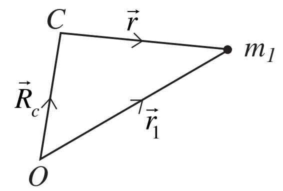
যেখানে $\vec{L}$ = আদিবিন্দু O সাপেক্ষে কণাপুঞ্জের কৌণিক ভরবেগ

$\therefore\ \vec{L} = \vec{L_c} + \vec{R_c} \times M\dot{\vec{R_c}}$

অতএব, কোন বিন্দু O-এর সাপেক্ষে কণাপুঞ্জের কৌণিক ভরবেগ = ভরকেন্দ্র c সাপেক্ষে কণাপুঞ্জের কৌণিক ভরবেগ + ভরকেন্দ্রের সঙ্গে ভ্রাম্যমান M -ভরযুক্ত কণার O সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ।

2. ধরা যাক ভরকেন্দ্র c সাপেক্ষে m_1-এর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_i'}$, অর্থাৎ, $\vec{r_i} = \vec{R_c} + \vec{r_i'}$

অতএব $\vec{L_c} = \sum\left(\vec{r_i} \times \vec{R_c}\right) \times m_i\dot{\vec{r_i}}$



$$= \sum \vec{r_i'} \times m_i\left(\dot{\vec{R_i}} \times \dot{\vec{r_i'}}\right)$$

$$= \sum \vec{r_i'} \times m_i\dot{\vec{R_c}} + \sum \vec{r_i'} \times m_i\dot{\vec{r_i'}}$$

$$= \left(\sum m_i\vec{r_i'}\right) \times \dot{\vec{R_c}} + \sum m_i\vec{r_i'} \times \dot{\vec{r_i'}}$$

কিন্তু, যেহেতু $\vec{r_i} = \vec{R_c} + \vec{r_i'}$

$$\therefore\quad \sum_i m_i\vec{r_i} = \sum m_i\vec{R_c} + \sum m_i\vec{r_i'}$$

$$= M\vec{R_c} + \sum m_i\vec{r_i'}$$

কিন্তু $M\vec{R}_c = \sum_i m_i \vec{r}_i$

$\therefore \quad \sum m_i \vec{r}_i' = 0$

অতএব, $\vec{L}_c = \sum m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i'$

অর্থাৎ ভরকেন্দ্র c সাপেক্ষে কণাপুঞ্জের কৌণিক ভরবেগ কেবলমাত্র c সাপেক্ষে বস্তুকণাগুলির অবস্থান ও বেগ ভেক্টরের ওপর নির্ভর করে।

কৌণিক ভরবেগ সংক্রান্ত সমীকরণ :

কণাপুঞ্জের m_i-কণার গতিসমীকরণ হল

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{R}_{ij} + \vec{F}_i \quad \text{..........} \quad \text{(i)}$$

0-সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে,

$$\vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{r}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{R}_{ij} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad i = 1, 2, ..., n$$

এইরূপ n-সংখ্যক সমীকরণকে যোগ করে পাই,

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{R}_{ij} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad \text{.........} \quad \text{(ii)}$$

কিন্তু, $\vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i\right)$......... (iii)

$\because \quad \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0$

এবং $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{R}_{ij}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left[\left(\vec{R}_{i1} + \vec{R}_{i2} + \cdots + \vec{R}_{i,\,i-1} + \vec{R}_{i,\,i-1} + \cdots + \vec{R}_{in}\right)\right]$$

$$= \left(\vec{r}_1 + \vec{R}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{R}_{13} + \cdots + \vec{r}_1 \times \vec{R}_{1n} \right.$$

$$+ \vec{r}_2 \times \vec{R}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{R}_{23} + \cdots + \vec{r}_2 \times \vec{R}_{2n}$$

$$\left. + \cdots + \vec{r}_n \times \vec{R}_{n1} + \vec{r}_n \times \vec{R}_{n2} + \cdots + \vec{r}_n \times \vec{R}_{n,n-1} \right)$$

$$= \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \right) \times \vec{R}_{12} + \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \right) \times \vec{R}_{13}$$

$$+ \cdots + \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_n \right) \times \vec{R}_{1n} \qquad \text{যেহেতু } \vec{R}_{ij} = -\vec{R}_{ij}$$

+ ইত্যাদি ....

$= 0$ .... (iv)

যেহেতু এই রাশির প্রতিটি পদই শূন্য, কারণ, $\vec{R}_{ij}$-র ক্রিয়ারেখা $\vec{r}_i - \vec{r}_i$ রেখা বরাবর,

অর্থাৎ $\vec{R}_{12} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ ইত্যাদি।

সুতরাং আমরা পাই, (iii) ও (iv) থেকে

$$\frac{d}{dt} \sum \left(\vec{r}_1 \times m_i \vec{r}_i \right) = \sum \vec{r}_1 \times \vec{F}_i$$

বা, $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_1 \times \vec{F}_i \quad \text{..........} \quad \text{(v)}$$

অর্থাৎ, 0 সাপেক্ষে কণাপুঞ্জের কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার হল 0 সাপেক্ষে বহির্বলগুলির ভ্রামকের ভেক্টর যোগফলের সমান।

11.3.7 কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি

"যদি কোনো নির্দিষ্ট স্থিরবিন্দু সাপেক্ষে বহির্বল সমূহের ভ্রামকগুলির ভেক্টর যোগফল সর্বদা শূন্য হয়, তাহলে এই স্থিরবিন্দুর সাপেক্ষে কণাপুঞ্জের কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক"।

প্রমাণ : ওপরের (v) থেকে, $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_1 \times \vec{F}_i$

প্রদত্ত শর্ত থেকে $\sum \vec{r_1} \times \vec{F_i} = 0$

অতএব $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ সর্বদা

অতএব সমাকলন দ্বারা পাই $\vec{L} =$ ধ্রুবক।

11.4 কেবলমাত্র পরস্পর অন্তর্বল প্রযুক্ত কণাপুঞ্জের গতিসমীকরণ

ধরা যাক m_1, m_2, ..., m_n ভরযুক্ত n সংখ্যক কণা t সময়ে যথাক্রমে (কোন স্থির বিন্দু 0 সাপেক্ষে) $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \cdots, \vec{r_n}$ অবস্থানে আছে। কণাগুলির কোনটির ওপরেই কোনো বহির্বল নেই। i-তম কণা j-তম কণার ওপর অন্তর্বল $\vec{F_{ji}}$ প্রয়োগ করে, এবং j-তম কণা, i-তম কণার ওপর অন্তর্বল $\vec{F_{if}}$ প্রয়োগ করে, যেখানে এই বলদুটি, m_i ও m_j-র সংযোগকারী রেখা বরাবর ক্রিয়া করে, এবং পরস্পরের মান সমান ও অভিমুখ বিপরীত হয়,

অর্থাৎ $\vec{F_{ij}} + \vec{F_{ji}} = 0$.

অতএব i-তম কণার গতিসমীকরণ

$$m_i \ddot{\vec{r_i}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{R_{ij}}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

n-সংখ্যক এইরূপ সমীকরণগুলিকে যোগ করে পাই,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r_i}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \vec{R_{ij}} = 0$$

(আমরা আগেই দেখেছি ডানদিকের যোগফলটি শূন্য হয়)।

অতএব, $\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r_i}} = 0$

বা, $\frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r_i}} = 0$

সমাকলন করে পাই, $\sum_{i} m_i \dot{\vec{r_i}} =$ ধ্রুবক।

অর্থাৎ এক্ষেত্রে কণাপুঞ্জের ভরবেগ ধ্রুবক।

আবার, $\sum m_i \dot{\vec{r_i}} = M\dot{\vec{R_c}}$, যেখানে $\vec{R_c}$ হল কণাপুঞ্জের ভরকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর।

অর্থাৎ এক্ষেত্রে ভরকেন্দ্রের গতি ধ্রুবক।

একইভাবে, $\sum_{t=1}^{n} \vec{r_i} \times m_i \ddot{\vec{r_i}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \vec{R_{iJ}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{F_i}$

এবং $\vec{F_i} = 0$ হলে,

$\sum \vec{r_i} \times m_i \ddot{\vec{r_i}} = 0$ যেহেতু আগেই দেখেছি $\sum \vec{r_i} \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{R_{iJ}} = 0$

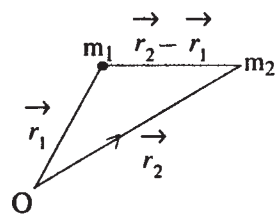
বা, $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times m_i \dot{\vec{r_i}} = 0$

বা, $\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times m_i \dot{\vec{r_i}} =$ ধ্রুবক

অর্থাৎ এক্ষেত্রে O বিন্দু সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক।

11.4.1 দুটি কণা দিয়ে গঠিত কণাপুঞ্জের শুধু অন্তর্বল প্রযুক্ত গতি

এখানে m_1, m_2 দুটি কণা আছে। তাদের মোট ভর $M = m_1 + m_2$ যদি t-সময়ে তাদের অবস্থান ভেক্টর হয় (নির্দিষ্ট মূলবিন্দু O সাপেক্ষে) $\vec{r_1}$ এবং $\vec{r_2}$ তাহলে তাদের গতি সমীকরণ হল :



$$m_1 \ddot{\vec{r_1}} = \vec{R}_{12} \text{ .... (i)}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r_2}} = \vec{R}_{21} \text{ ....(ii)}$$

ধরা যাক m_2, m_1-এর ওপর $\vec{R}_{12}$ বল প্রয়োগ করে, যা $\vec{r_2} - \vec{r_1}$ ভেক্টরের দিকে প্রসারিত, এবং যার মান $|\vec{r_1} - \vec{r_2}|$ এর ওপর নির্ভর করে।

অর্থাৎ $\vec{R}_{12} = f(r)\vec{e}$ .... (iiia) যেখানে $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$,

$r = |\vec{r}|$.

এবং $\vec{e}$ হল $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$ -এর সমান্তরাল একক ভেক্টর অর্থাৎ $\vec{r} = r\vec{e}$.

অতএব $\vec{R}_{21} = -\vec{R}_{12} = -f(r)\vec{e}$ .... (iiib).

অতএব, (i) ও (ii) যোগ করে,

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0.$$

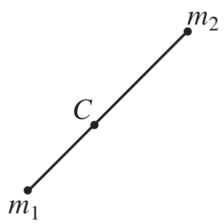
সমাকলন করে,

$$m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \text{ধ্রুবক},$$

বা, $(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}_c = $ ধ্রুবক,

অর্থাৎ কণাদুটির ভরকেন্দ্র ধ্রুব-গতিতে চলছে। অতএব যেহেতু ভরকেন্দ্র ধ্রুবগতিতে একটি নির্দিষ্ট দিকে চলছে— আমরা ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে গতিসমীকরণ লিখতে পারি।

অতবে, m_1, m_2-এর অবস্থান ভেক্টর ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ হলে, তাদের গতিসমীকরণ,



$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = f(r)\vec{e}$, যেখানে $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ এবং $\vec{e}$, m_1 থেকে m_2 এর

$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = f(r)\vec{e}$ দিকে একক ভেক্টর।

এখন যদি m_1, m_2-এর মধ্যে বল নিউটনের মাধ্যাকর্ষণ অর্থাৎ ব্যস্ত বর্গ নিয়ম অনুযায়ী হয় তাহলে $f(r) = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, যেখানে G = মাধ্যাকর্ষণের ধ্রুবক,

অতএব, $\ddot{\vec{r}}_1 = \dfrac{Gm_2}{r^2}\vec{e}$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1}{r^2}\vec{e}$$

অতএব, $\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -\left(\dfrac{Gm_1}{r^2} + \dfrac{Gm_2}{r^2}\right)\vec{e} = \dfrac{-G(m_1 + m_2)}{r^2}\vec{e}$

$$\therefore\ m_2\left(\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1\right) = \frac{-G(m_1+m_2)m_2}{r^2}\vec{e} = \frac{-m_2\mu}{r^2}\vec{e}$$ যেখানে $\mu = G\ (m_1 + m_2)$.

এই সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে, যে প্রথম কণার ভর $(m_1 + m_2)$ মনে করলে, দ্বিতীয় কণার গতি প্রথম কণার সাপেক্ষে এমন হবে যেন প্রথম কণা স্থির আছে।

নিউটনের গতিসূত্র অনুযায়ী,

m_2 ও m_1 সাপেক্ষে পর্যায়কাল

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1+m_2)}}a^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{Gm_1\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)}}a^{3/2} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_1}\sqrt{1+m_2/m_1}}$$

11.5 কণাপুঞ্জের গতিশক্তি

কতগুলি কণা অর্থাৎ m_1, m_2, ..., m_n ভরবিশিষ্ট কণার t সময়ে অবস্থান ভেক্টর $\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \cdots, \dot{\vec{r}}_n$ হলে তাদের গতিবেগ ভেক্টরগুলি হল যথাক্রমে $\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \cdots, \dot{\vec{r}}_n$ । এখন কণাপুঞ্জের গতিশক্তি বলতে আমরা বুঝি প্রতিটি কণার গতিশক্তি সমষ্টি। অর্থাৎ কণাপুঞ্জের গতিশক্তি T হলে,

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i$$, যেখানে T_i হল m_i কণার গতিশক্তি

কিন্তু $$T_i = \frac{1}{2}m_i\vartheta i^2 = \frac{1}{2}m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

$$\therefore\ T = \sum_{t}^{n} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2} \quad \text{..................} \quad \text{(i)}$$

দেখা যাচ্ছে গতিশক্তি একটি স্কেলার রাশি। যদি কার্তীয় স্থানাংক ব্যবহার করা যায় এবং x_i, y_i, z_i যদি m_1-এর লম্ব-কার্তীয় স্থানাংক হয়, তাহলে

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \left(\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}\right)$$

$$= \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2$$

$$= \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2$$

অতবে কার্তীয় স্থানাংক মাধ্যমে কণাপুঞ্জের গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] \quad .... \quad \text{(ii)}$$

11.5.1 কণাপুঞ্জের গতিশক্তির সময়ের সঙ্গে পরিবর্তনের হার

T-এর সময়ের সঙ্গো পরিবর্তনের হার পাওয়া যায় t-সাপেক্ষে অন্তর্কলন করলে

$$\therefore \; \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_1^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i\right] = \frac{1}{2}\sum m_i \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dt}\cdot\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dt}\right) = \frac{1}{2}\sum m_i\left(\ddot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i \quad .... \quad \text{(iii)}$$

কিন্তু আমরা জানি যে, m_i কণার গতিসমীকরণ হল

$$m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \vec{R}_{iJ} \quad .... \quad \text{(iv)}$$

অতএব (iii)-কে লেখা যায়

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i\left(\vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n R_{ij}\right)\cdot\dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i + \sum_i\sum_j \vec{R}_{ij}\cdot\dot{\vec{r}}_i \quad .... \quad \text{(v)}$$

(v)-এর ডানদিকের প্রথম পদটি হল বহিঃস্থ বলগুলির কার্য (work) করার হার। আর দ্বিতীয় পদগুলি হল অন্তঃস্থ বলের কার্যের হয়। অতএব কণাপুঞ্জের গতিশক্তির পরিবর্তনের হার কণাগুলির ওপর প্রযুক্ত অন্তর্বল ও বহির্বল সমূহ কর্তৃক কার্যের হারের সমান। একে শক্তিনীতি (Principle of Energy) বলা হয়।

11.5.2 সংরক্ষী তন্ত্রের গতি-সংরক্ষণ নীতি

এখন যদি প্রযুক্ত বলগুলি কোন স্থিতিশক্তি অপেক্ষক V, যেখানে $V = V\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n\right)$ এর ওপর এমনভাবে নির্ভরশীল হয় যে, $\frac{-\delta V}{\delta x}, \frac{-\delta V}{\delta y}, \frac{-\delta V}{\delta z}$ যথাক্রমে m_1 কণার ওপর প্রযুক্ত বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশের সমান হয়, অর্থাৎ

$$\frac{-\delta V}{\delta x} = \left(\vec{F}_1 + \sum_{j \neq 1} \vec{R}_{1.j}\right)_{x\text{-উপাংশ}}$$

$$\frac{-\delta V}{\delta y} = \left(\vec{F}_1 + \sum_{j \neq 1} \vec{R}_{1.j}\right)_{y\text{-উপাংশ}}$$

$$\frac{-\delta V}{\delta z} = \left(\vec{F}_1 + \sum_{j \neq 1} \vec{R}_{1.j}\right)_{z\text{-উপাংশ}}$$

এবং এইরূপ প্রতিটি কণার জন্য সত্য হয় তবে আমরা বস্তুতন্ত্রটিকে সংরক্ষীতন্ত্র (Conservative system) বলি। এইক্ষেত্রে (v) নং সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\frac{dT}{dt} = -\sum_i \left(\frac{\delta V}{\delta x_i}\dot{x}_i + \frac{\delta V}{\delta y_i}\dot{y}_i + \frac{\delta V}{\delta z_i}\dot{z}_i\right) \quad \ldots\ldots\ \text{(vi)}$$

কিন্তু $V\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n,\right) = V(x_1, y_1, z_1\ ;\ x_2, y_2, z_2\ ;\ \ldots\ldots,\ x_n, y_n, z_n\ ;)$

অতএব $\frac{dV}{dt} = \sum_i \left(\frac{\delta V}{dx_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\delta V}{\delta y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\delta V}{\delta z_i}\frac{dz_i}{dt}\right)$

অতএব (vi)-কে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

অর্থাৎ $\frac{d}{dt}(T + V) = 0$

অর্থাৎ $T + V =$ ধ্রুবক (vii)

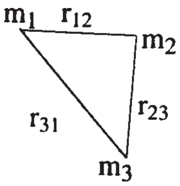
(vii) নং কে সংরক্ষী তন্ত্রের জন্য শক্তি সংরক্ষণ নীতি বলা হয়।

(এখান কণাপুঞ্জের মধ্যে কোনো বাধক (constraint) নেই ধরা হয়েছে)

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ

(i) এমন হতে পারে যেখানে অন্তর্বল নেই এবং বহির্বল সমূহ একটি স্থিতিশক্তি থেকে উদ্ভূত যেমন একটি ইলেকট্রোম্যাজনেটিক স্থিতিশক্তি

(ii) এমন হতে পারে যেখানে বহির্বল নেই, কিন্তু অন্তর্বলগুলি একটি স্থিতিশক্তি থেকে উদ্ভূত যেমন তিনটি কণা পরস্পর মাধ্যাকর্ষণ দ্বারা আকৃষ্ট হলে



$$V = -G\frac{m_1m_2}{r_{12}} - G\frac{m_2m_1}{r_{23}} - G\frac{m_3m_1}{r_{31}}$$

যেখানে G = মাধ্যাকর্ষণ ধ্রুবক,

$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ ইত্যাদি।

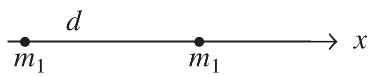
11.6 উদাহরণ

1. দুটি কণা পরস্পর ব্যস্তবর্গ নিয়ম অনুসারে আকৃষ্ট করে এবং ঐ আকর্ষণ ভরদ্বয়ের গুণফলের ওপর নির্ভর করে। কণা দুটি প্রথমে স্থির অবস্থা থেকে দূরত্ব d থেকে রওনা হলে কোন স্থানে তাদের সংঘর্ষ ঘটবে?

ধরা যাক কণাদুটির প্রাথমিক অবস্থান x-অক্ষের যথাক্রমে আদিবিন্দু ও $x = d$ বিন্দু $t = 0$ সময়ে। এর পরে t সময়ে এদের অবস্থান যথাক্রমে $x = x_1$ ও $x = x_2$ হলে,

$$m_1\ddot{x}_1 = \frac{m_1m_2}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -\frac{m_1m_2}{(x_1 - x_2)^2}$$



হল কণাদুটির গতিসমীকরণ।

অতএব $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$

$\therefore \quad m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 =$ ধ্রুবক = প্রারম্ভিক মান = 0

$\therefore \quad m_1x_1 + m_2x_2 =$ ধ্রুবক = প্রারম্ভিক মান = m_2d

$\therefore \quad m_1x_1 = m_2(d - x_2)$

যখন এরা পরস্পর মিলিত হবে তখন $x_1 = x_2 = x_0$ ধরা যাক

$$\therefore \quad m_1 x_0 = m_2`(d - x_0)$$

$$\therefore \quad x_0 = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2}.$$

11.7 সারাংশ

কণাপুঞ্জের ভরকেন্দ্র এমন একটি বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{R}$, কণাগুলির অবস্থান ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right)$$

যেহেতু কণাগুলির ওপর কোনো বাধক নেই, সেজন্য তাদের গতি ইচ্ছামত হতে পারে। ফলে $\vec{R}$ এর মান ক্রমাগত পরিবর্তন হতে পারে।

কণাগুলির ওপর যত বল প্রযুক্ত আছে তাদের ভেক্টর যোগফল প্রসূত লব্ধি বল M-ভর যুক্ত একটি কণার ওপর ক্রিয়াশীল হয়, তা হলে কণাটির ভরকেন্দ্রের গতি প্রাপ্ত হয়, অর্থাৎ $M\ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

আবার যে কোনো O সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার, বহির্বলসমূহের O-সাপেক্ষে ভ্রামক ভেক্টরের যোগফল।

কণাপুঞ্জগুলি যদি একটি সংরক্ষী বলতন্ত্রের অধীন থাকে, তা হলে দেখা যায় যে কণাপুঞ্জের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি এদের যোগফল ধ্রুবক হয়।

11.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

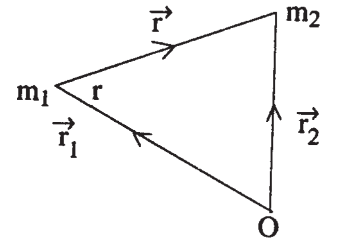
প্রশ্ন 1. m_1, m_2 দুটি কণা পরস্পর মাধ্যাকর্ষণ নিয়মানুযায়ী বলাধীন এবং যখন m_2-এর m_1 থেকে দূরত্ব d তখন m_2-এর গতিবেগ, m_1 এর সাপেক্ষে V_0, m_1, m_2 যোগাযোগকারী রেখার লম্বদিকে। m_1-এর সাপেক্ষে m_2-এর গতিপথ নির্ণয় করুন।

ধরা যাক 0 একটি স্থির বিন্দু এবং তার সাপেক্ষে t সময়ে m_1, m_2-এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

তাহলে গতিসমীকরণদ্বয় হল,

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r} \quad \text{যেখানে} \quad r = \left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|$$

$$m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r}$$



অতএব $\quad \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{m_1}{r^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) - \frac{m_2}{r^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$

$$= -\frac{(m_1 + m_2)}{r^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$$

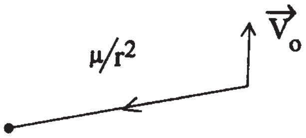
অতএব, $\quad m_2\left(\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1\right) = -\frac{m_2(m_1 + m_2)}{r^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$

এখন $\quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ লিখলে,

$$m_2 \ddot{\vec{r}} = -\frac{m_2(m_1 + m_2)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

অর্থাৎ m_2-এর গতিসমীকরণ m_1 সাপেক্ষে এমন যেন m_1 স্থির আছে এবং m_2-এর ওপর m_1-মুখী আকর্ষণী বল $\frac{m_2(m_1 + m_2)}{r^2}$ ক্রিয়া করছে।

অতএব $\quad \ddot{\vec{r}} = -\frac{m_1 + m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$



কিন্তু আমরা জানি যে একটি কণা যদি একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দুর দিকে প্রতি একক ভরে $\frac{\mu}{r^2}$ এই আকর্ষণী বলাধীন থাকে এবং তা যদি V_0 গতিতে ব্যাসার্ধ ভেক্টরের লম্বদিকে প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহলে কণাটির গতিপথ একটি কণিক হয় যার একটি নাভিবিন্দু 0 এবং

(i) যদি $V_0^2 < \frac{2\mu}{d}$ হয় তবে তা উপবৃত্ত

(ii) যদি $V_0^2 > \frac{2\mu}{d}$ হয় তবে সেটি পরাবৃত্ত

(iii) যদি $V_0^2 = \frac{2\mu}{d}$ হয় তবে সেটা অধিবৃত্ত

অতএব আমাদের সমস্যায় m_2-এর গতি m_1-এর সাপেক্ষে একটি কণিক হবে এবং কণিকটি উপবৃত্ত, যদি $V_0^2 < \frac{2}{d}(m_1 + m_2)$, অথবা $V_0^2 > \frac{2}{d}(m_1 + m_2)$ অথবা $V_0^2 = \frac{2}{d}(m_1 + m_2)$ কণিকটি উপবৃত্ত, পরাবৃত্ত বা অধিবৃত্ত হবে।

প্রশ্ন 2. তিনটি সমান ভরের কণা একটি সমতলে পরস্পর সমান দূরত্বে স্থির অবস্থায় একটি মসৃণ টেবিলের ওপর রাখা হল। কণাগুলি যদি পরস্পরকে ব্যস্ত বর্গ নিয়ম অনুসারে আকৃষ্ট করে তবে তাদের গতিপথ কীরূপ হবে?

একক 12 ❑ দৃঢ়বস্তুর গতি জ্যামিতি

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

একটি দৃঢ়বস্তুর অবস্থান বুঝতে হলে জানা চাই অন্তত তার তিনটি অসমরেখীয় বিন্দুর অবস্থান—কেননা দৃঢ়বস্তুর যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব সর্বদা ধ্রুবক থাকে। তিনটি বিন্দুর অবস্থান জানা গেলে তাদের মধ্যগামী সমতলটি জানা যায়। ঐ সমতলের সাপেক্ষে অন্যান্য বিন্দুর অবস্থান সঠিক জানা যায়। একটি দৃঢ়বস্তুর সাধারণ সরণকে দুটি অংশে ভাগ করা যায়। একটি হল সাধারণ চলন আর একটি হল একটি বিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণন।

12.2 উদ্দেশ্য

এই এককে আপনারা জানতে পারবেন—

- একটি দৃঢ় বস্তুর অবস্থান জানবার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট কটি সংখ্যার মান প্রয়োজন।
- একটি দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য মাত্রা (degree of freedom) কাকে বলে।
- দৃঢ় বস্তুর গতিকে দুভাগে ভাগ করা যায়—একটি চলন ও অপরটি ঘূর্ণন।
- যে কোন সরণকে একটি চলন ও একটি ঘূর্ণন এর দ্বারা রূপান্তরিত করা যায়।

12.3 দৃঢ়বস্তুর সংজ্ঞা

একটি দৃঢ়বস্তু (Rigid Body) বলতে আমরা বুঝি এমন এক বস্তুকণাপুঞ্জের সমষ্টি, যার যে কোনো দুটি কণার মধ্যে দূরত্ব সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে, এবং যে কোনো তিনটি কণা A, B, C দ্বারা গঠিত দুটি সরলরেখার

AB, AC এর মধ্যের কোণ সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে, যত বড় বলই ঐ বস্তুর ওপর ক্রিয়া করুক না কেন। অর্থাৎ প্রযুক্ত বলের দ্বারা দৃঢ়বস্তুর কোনো (deformation) হয় না।

12.4 দৃঢ়বস্তুর অবস্থান নিরূপণ ও স্বাতন্ত্র্যমাত্রা

আপনারা জানেন যে একটি কণার অবস্থান সঠিকভাবে নির্ধারণ করতে গেলে ত্রিমাত্রিক দেশে (Space) নির্দিষ্ট লম্ব-কার্তীয় অক্ষের (fixed rectangular Cartesian axes) নিরিখে কণাটির স্থানাংক বা মূলবিন্দুর সাপেক্ষে কণাটির অবস্থান ভেক্টর জানাই যথেষ্ট। অর্থাৎ কিনা তিনটি স্বাধীন রাশি (independent variable/ quantity) জানা থাকলে আমরা কণাটির অবস্থান নির্দেশ করতে পারি। স্বাভাবিকভাবেই, দৃঢ়বস্তু অসংখ্য কণাপুঞ্জের সমষ্টি হওয়ায় এর অবস্থান মাত্র তিনটি রাশি দ্বারা সূচিত করা যাবে না। ধরুন বস্তুতে A, B, C তিনটি অরৈখিক (non-collinear) বিন্দু, অর্থাৎ কোনও এক মূহূর্তে তিনটি কণার অবস্থান A, B, C তে। P-যদি বস্তুটির অন্য একটি কণার অবস্থান হয়, তবে $PA = r_1$, $PB = r_2$, $PC = r_3$ প্রতিটিই ধ্রুব রাশি। এখন যে কোনো সময়েই A থেকে P-এর দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে, এবং P সবসময়ই A বিন্দুকে কেন্দ্র করে r_1 ব্যাসার্ধের গোলকের ওপরে থাকবে। সেরকম P, B-কে কেন্দ্র করে r_2 ব্যাসার্ধের গোলকের ওপরেও থাকবে, এবং C-কে কেন্দ্র করে r_3 ব্যাসার্ধের গোলকের ওপরেও থাকবে। এই গোলকগুলি জোড়ায় জোড়ায় একটি করে বৃত্তে ছেদ করে। এই তিনটি বৃত্তের একমাত্র সাধারণ ছেদবিন্দু P-এর স্থানাংক নির্ধারণ করবে।

আর একদিক দিয়ে বিবেচনা করলে, আমরা দেখতে পাই কোনো সময়ে A ও B এর অবস্থান জানা থাকলে AB সরলরেখার ওপর সকলবিন্দুই জানা আছে। এখন A ও B-এর অবস্থান যদি সর্বদাই একই থাকে, তবে AB রেখার ওপরের কণাগুলিও স্থির থাকে। অতএব AB রেখার সাপেক্ষে বস্তুটি ঘুরে ঘুরে বিভিন্ন সম্ভাব্য অবস্থানে যেতে পারে। এরপরে যদি C বিন্দু (AB রেখার ওপরে নয়) কেও নির্দিষ্ট অবস্থানেই রাখা হয়,তবে বস্তুর সাপেক্ষে ABC এই সমতলটির অবস্থানকে নির্দিষ্ট করে দেওয়া হয়। এক্ষেত্রে বস্তুটির কেবলমাত্র একটি অবস্থান (Position)-ই সম্ভব। অর্থাৎ দৃঢ়বস্তুর কোনো একটি কণার অবস্থান জানার জন্য তিনটি অরৈখিক বিন্দুর থেকে তার দূরত্ব জানাই যথেষ্ট, এবং ঐ তিনটি বিন্দুর অবস্থান নির্দিষ্ট থাকলে বস্তুটির অবস্থানও নির্দিষ্ট হয়ে যায়।

এখন, A, B, C বিন্দুগুলির অবস্থান কোনো লম্বকার্তীয় অক্ষের সাপেক্ষে জানতে হলে প্রতিটি বিন্দুর জন্য তিনটি স্বাধীন চলই দরকার ও যথেষ্ট যেমন, (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3$, যথাক্রমে A, B ও C-এর স্থানাংক। এই নয়টি সংখ্যা (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) এবং (x_3, y_3, z_3) জানা থাকলেই বস্তুটির অবস্থান জানা সম্ভব। কিন্তু বস্তুটি দৃঢ় হওয়াতে AB, BC, CA প্রতিটিরই দৈর্ঘ্য ধ্রুবক। অর্থাৎ $\sum(x_1 - x_2)^2 =$ constant, $\sum(x_2 - x_3)^2 =$ constant এবং $\sum(x_3 - x_1)^2 =$ constant.

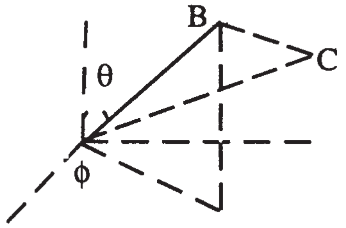
আমরা এপ্রকারের তিনটি সমীকরণ পেলাম, যার সাহায্যে নয়টি রাশির মধ্যে তিনটিকে অপনয়ন করতে পারি। অর্থাৎ মোট ছয়টি চলের মান জানলেই আমরা বস্তুটির অবস্থান নির্ধারণ করতে পারি।

এভাবে আমরা ভাবতে পারি যে, $A(x_1, y_1, z_1)$-কে নির্দিষ্ট করা হল। তাহলে B-কে জানার জন্য (x_2, y_2, z_2)-এর মধ্যে দুটিই যথেষ্ট, কারণ তৃতীয়টি $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 =$ ধ্রুবক থেকে

পাওয়া যায়। (B সবসময়ই A কেন্দ্র একটি গোলকের ওপর থাকবে।) A ও B নির্দিষ্ট হলে C বড়জোর AB-সরলরেখার সাপেক্ষে ঘুরতে পারে। কাজেই C-কে নির্দিষ্ট করার জন্য একটি স্থানাংক-ই যথেষ্ট।

ত্রিমাত্রিক দেশে অতএব ছয়টি স্বাধীন চলরাশির দ্বারা একটি দৃঢ়বস্তুর অবস্থান নির্দিষ্ট করা যায়। আমরা বলে থাকি যে দৃঢ়বস্তুর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা হল 6.

মন্তব্য L লম্ব-কার্তীয় স্থানাংক ব্যবহার না করে যদি আমরা মেরু স্থানাংক ব্যবহার করি, তবে A বিন্দু জানার জন্য তিনটি মেরুস্থানাংক প্রয়োজন। A-এর সাপেক্ষে B জানার জন্য দুটি কোণ θ, ϕ জানার জন্য ABC সমতল A বিন্দুগামী কোনো নির্দিষ্ট সমতলের সঙ্গে যে কোণ করছে তা জানা দরকার। এটি জানলেই যথেষ্ট কারণ ঐ সমতল A ও B থেকে C কতদূরে তা জানা আছে। অতএব ছয়টি সংখ্যা জানলেই বস্তুটির অবস্থান জানা যাচ্ছে।



মন্তব্য 2. দৃঢ়বস্তুটির ওপর আরও কোনও বাধক (Constraint) কাজ করতে পারে, যেমন বস্তুটির একটি বিন্দু সর্বদাই নির্দিষ্ট (স্থির) থাকতে বাধ্য হতে পারে। এক্ষেত্রে স্বাতন্ত্র্যমাত্রাও কমে যাবে।

12.5 দৃঢ় বস্তুর সরণ ও অয়লারের উপপাদ্য

আগে আপনারা দেখেছেন একটি বস্তুকণার সরণকে একটি ভেক্টরের মাধ্যমে লেখা যায়। আপনারা এখন দেখবেন যে দৃঢ়বস্তুর ক্ষেত্রে সরণ বলতে আমরা কী বুঝি। এপ্রসঙ্গে প্রথমে একটি উপপাদ্য আলোচনা করি।

অয়লারের উপপাদ্য (Euler's Theorem) :

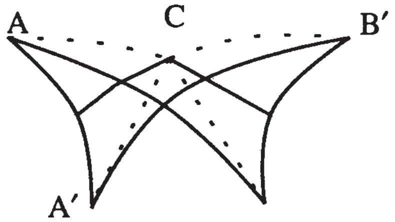
একটি দৃঢ় বস্তুর একটি বিন্দু O স্থির থাকলে, বস্তুটির একটি অবস্থান থেকে অন্য একটি অবস্থানে সরণকে O বিন্দুগামী একটি অক্ষ সাপেক্ষে একটি ঘূর্ণন দ্বারা রূপায়িত করা যায়।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক O দৃঢ়বস্তুর একটি বিন্দু যেটি স্থিরাবস্থায় আছে। বস্তুটির ওপর একক দূরত্বের দুটি বিন্দু A ও B নেওয়া হল, তাহলে কোণ AOB সর্বদা ধ্রুবক। এখন বস্তুটির সরণের ফলে A ও B যথাক্রমে A' ও B' বিন্দুতে যায় তাহলে $\angle A'OB' = \angle AOB$. O বিন্দুতে কেন্দ্র আছে এরূপ একটি একক ব্যাসার্ধের গোলকের কথা ভাবলে, তার ওপর চাপ AB = চাপ $A'B'$.

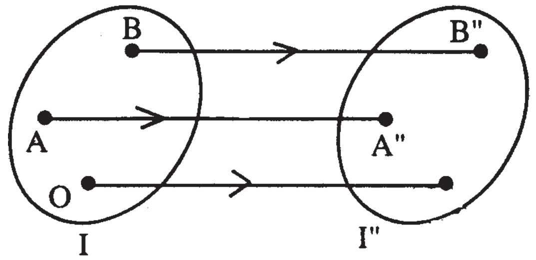
এখন দুটি সমতল নেওয়া হল যারা যথাক্রমে $\angle AOA'$ ও $\angle BOB'$ কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। এই সমতল দুটি গোলকতলের ওপর C বিন্দুতে ছেদ করলে (গোলকীয় কোণ) $\angle ACB = \angle A'CB'$ যেহেতু OA, OB এবং OA', OB' এর মধ্যে কোণ ধ্রুব।

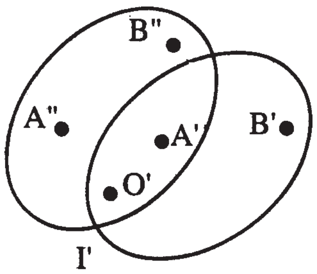
$$\therefore \quad \angle ACA' = \angle ACB - \angle BCA' = \angle A'CB' - \angle BCA' = \angle BCB'$$

অতএব OC অক্ষসাপেক্ষে $\angle ACA'$ কোণে ঘুরালে A বিন্দু A' এ যায় এবং $\angle ACA' = \angle BCB'$ হওয়াতে B বিন্দু B' বিন্দুতে যায়। অর্থাৎ OC-অক্ষ সাপেক্ষে একটি ঘূর্ণন দিয়ে বস্তুটির প্রথম অবস্থান থেকে দ্বিতীয় অবস্থানে নিয়ে যেতে পারি।



উপপাদ্য ঃ একটি দৃঢ়বস্তুর সাধারণ সরণকে একটি চলন (translation) ও তার পর একটি নির্দিষ্ট অক্ষ সাপেক্ষে ঘূর্ণন (Rotation) দ্বারা রূপায়িত করা যায়।





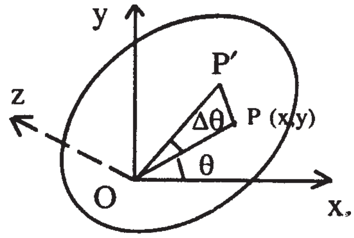
প্রমাণ ঃ যদি O, A, B এই তিনটি অসমরৈখিক বিন্দু একটি সরণের ফলে O', A', B' বিন্দুতে যায়, তাহলে আমরা এভাবে পারি—বস্তুটির প্রতিটি বিন্দুকে একটি চলন $\overrightarrow{OO'}$ দিলাম। ফলে O বিন্দু O'-এ গেল। এবং A, B যথাক্রমে A'', B'' গেল যেখানে $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \overrightarrow{OO'}$ এবার O' এর ভিতর দিয়ে অয়লারের উপপাদ্য অনুসারে বলা যায় একটি অক্ষ $O'C$ আছে যার সাপেক্ষে ঘূর্ণন দিলে $O'A''$ যাবে $O'A'$ এ এবং $O'B''$ যাবে $O'B'$-এ, অর্থাৎ অবস্থান I'' যাবে অবস্থান I'' এ। অতএবদেখা গেল যে I অবস্থান থেকে I' অবস্থানে যাওয়া যায় প্রথমে একটি বিন্দুর সরণের সমান চলন ও তৎপরে ঐ বিন্দুগামী একটি অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনে।

12.6 একটি সমতলীয় পাতের গতি (Motion of a plane Lamina)

(i) একটি স্থির বিন্দু সাপেক্ষে গতি ঃ

আমরা অয়লারের উপপাদ্য থেকে জানি যে একটি বিন্দু স্থির থাকলে কোন সরণকে ঐ স্থিরবিন্দুগামী একটি অক্ষ সাপেক্ষে ঘূর্ণন দ্বারা পাওয়া যায়। অতএব সময় t থেকে $t + \Delta t$-এর জন্য একটি অক্ষ পাওয়া যাবে যার সাপেক্ষে সামান্য ঘূর্ণনের ফলে একটি অল্প সরণ পাওয়া যাবে। যেহেতু এখানে একটি সমতলীয়পাত সম্বন্ধে আলোচনা হচ্ছে, অতএব, ঘূর্ণন অক্ষটি পাতের ওপর লম্ব।

পাতের ওপর স্থির বিন্দুটিকে O বিন্দু নিয়ে, ঐ বিন্দুগামী স্থির অক্ষ Ox, Oy ঐ সমতলে নিলে তাদের লম্ব Oz দিকে ঘূর্ণন ভেক্টর থাকবে। অতএব যদি $P(x, y)$ পাতের যে কোনো বিন্দু হয় এবং P-এর ঘূর্ণন বেগ ω হয় এবং OP, x-অক্ষের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে, তা হলে Δt সময়ে ঘূর্ণনের ফলে P বিন্দু P' বিন্দুতে যাবে, যেখানে $\angle POP' = \Delta\theta = \omega\Delta t$ হবে।



ঐ সামান্য সময়ে P-বিন্দু OP-ব্যাসার্ধ সহ একটি ক্ষুদ্র বৃত্তচাপ বরাবর যাবে, যার কেন্দ্র O. অতএব $\Delta t \to O$ হলে, P বিন্দুতে আমরা পাই $\dot{\theta} = \omega$ এবং ঐ বিন্দুর রৈখিক বেগ হল $(OP)\ \omega = OP.\ \dot{\theta}$, যার দিকহল ঐ সমতলে OP-র ওপর লম্ব।

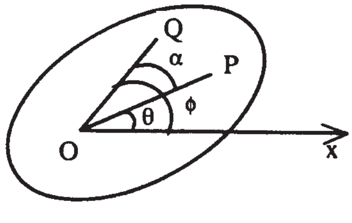
ভেক্টরের সাহায্য নিলে, ঘূর্ণনবেগ ω কে, O বিন্দুতে $\omega\vec{k}$ ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে $\omega\vec{k}$, O বিন্দুতে স্থানীয় ভেক্টর, $\hat{k}, OZ$ ব্যবহার একক ভেক্টর। P বিন্দুতে রৈখিক বেগ $\vec{\vartheta}$ ভেক্টর হল

$$\vec{\vartheta} = \overrightarrow{OP} \times \omega\vec{k}$$

$$= \left|\overrightarrow{OP}\right| \left|\omega\,\vec{k}\right| \sin\left(\overrightarrow{OP},\, \vec{k}\right)\vec{e_2}$$

$$= r\omega \sin 90^\circ \vec{e_2} = r\omega\,\vec{e_2}$$

যেখানে একক ভেক্টর e_2, $\overrightarrow{OP}$ ও $\vec{k}$ -এর ওপর লম্ব, অর্থাৎ এটি xy সমতলে আছে এবং OP-র ওপর লম্ব।



মন্তব্য ঃ এখানে উল্লেখ করা যায় P বিন্দুর ঘূর্ণনবেগ ω হলে, তলের প্রতিটি বিন্দুরই একটি ঘূর্ণন বেগ থাকবে। কারণ, Q যদি পাতের অন্য একটি বিন্দু হয়, তবে $\angle QOX = \phi$ বলা যাক যেখানে $\phi = \theta + \alpha$.

$\alpha = \angle QOP =$ একটি ধ্রুব কোণ

$= (OP,\ OQ$ রেখা দুটির মধ্যস্থ কোণ)

$\therefore \quad \dot{\phi} = \dot{\theta} = \omega$

$\therefore \quad Q$-এর কৌণিক ভরবেগ $= P$-এর কৌণিক ভরবেগ।

পাতটির প্রতিটি বিন্দুরই কৌণিক বেগ ω এবং ω কে বলা হবে বস্তুটির কৌণিক বেগ।

Q বিন্দুর গতিবেগ ভেক্টর $\vec{\vartheta}_Q$ হলে,

$$\vec{\vartheta}_Q = \overrightarrow{OQ} \times \omega \vec{k}$$

এবং P-এর গতিবেগ

$$\vec{\vartheta} = \overrightarrow{OP} \times \omega \vec{k} = \left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}\right) \times \omega \vec{k}$$

$$= \vec{OQ} \times \omega \vec{k} + \overrightarrow{QP} \times \omega \vec{k}$$

$$= \vec{\vartheta}_Q + \overrightarrow{QP} \times \omega \vec{k}$$

$$\therefore \ \vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_Q + \overrightarrow{QP} \times \omega \vec{k}$$

$$\therefore \ \vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_Q + \overrightarrow{QP} \times \omega \vec{k}$$

এখন θ বিন্দুর সাপেক্ষে (relative to Q) P বিন্দুর গতিবেগ $= \vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_Q$

অতএব, পাতটি O বিন্দু সাপেক্ষে ω কৌণিক বেগ জনিত যে কোণ বিন্দু P-এর গতিকে আমরা অন্য একটি বিন্দুর গতিবেগ ভেক্টর ও ঐ বিন্দুর সাপেক্ষে P-এর কৌণিক বেগ ভেক্টর দুটির যোগফলের সমান।

মন্তব্য ঃ সমতলীয় গতিযুক্ত সমতলীয় পাতের অবস্থান জ্ঞাপক তিনটি পরস্পর স্বতন্ত্র স্থানাঙ্ক প্রয়োজন।

কারণ পাতটির যে কোন একটি বিন্দু O জানার জন্য দুটি স্থানাঙ্ক দরকার। তাছাড়া O বিন্দুগামী পাতের একটি রেখার অবস্থান জানা যায় যদি ঐ রেখা নির্দিষ্ট একটি দিকের সঙ্গে যে কোণ করে সেটা জানা থাকে। এই তিনটি পরস্পর স্বতন্ত্র স্থানাঙ্ক জানা থাকলে পাতের অবস্থান জানা যায়।

12.7 দৃঢ়বস্তুর দ্বিমাত্রিক গতি জ্যামিতি (Two Dimensional Motion of a Rigid Body)

একটি বস্তু যদি এমনভাবে গতিশীল হয় যে, প্রতিটি বস্তুকণার গতিপথ একটি নির্দিষ্ট স্থির সমতলের সমান্তরাল হয় এবং ঐ তলের ওপর লম্ব কোনো সরলরেখা বস্তুটির যে সব কণার মধ্য দিয়ে যায় তার প্রতিটিই একইভাবে চলমান হয়, তবে বলা হয় যে বস্তুটি দ্বিমাত্রিক গতি-সম্পন্ন।

উদাহরণ (i) একটি বেলনাকার ভারী বস্তু একটি আনত সমতলের ওপর গড়িয়ে যায়। এখানে বেলনটির প্রতিটি কণার গতিপথ আনত সমতলের সর্বোচ্চ নতিরেখার মধ্যগামী একটি উল্লম্ব তলের সমান্তরাল।

(ii) একটি গোলক একটি অনুভূমিক তলের ওপর গড়াচ্ছে। গোলকটির ভরকেন্দ্র দিয়ে যে উল্লম্বতল, গোলকটির সব বিন্দুগুলিই ঐ তলের সমান্তরাল তলের ওপর আছে।

12.8 সারাংশ

একটি দৃঢ়বস্তুর অবস্থান জানতে ছয়টি স্বতন্ত্র সংখ্যা জানা প্রয়োজন। যেমন তিনটি কণার নয়টি স্থানাঙ্ক, যাদের মধ্যে তিনটি দূরত্ব ধ্রুবক থাকায়, 9—3 = 6 টি স্বতন্ত্র স্থানাঙ্ক জানা যথেষ্ট। একটি সমতলীয় পাতের সমতলীয় গতিতে থাকাকালীন অবস্থান জানতে দরকার ঐ পাতের যে কোন একটি বিন্দুর অবস্থান (দুটি স্থানাঙ্ক দ্বারা রূপায়িত) এবং ঐ বিন্দুগামী পাতের একটি সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট দিকের সঙ্গে যে কোণ করে তাহা।

একটি দৃঢ়বস্তুর সাধারণ সরণ, একটি চলন ও একটি ঘূর্ণন দ্বারা রূপায়িত করা যায়।

একই সমতলে গতিশীল পাতের উহার যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে কৌণিক বেগ সমান।

12.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. দ্বিমাত্রিক গতি কাকে বলে? উদাহরণ দিন।

2. একটি দণ্ডের একপ্রান্ত স্থির আছে। দণ্ডটি উল্লম্বতলে চললে তার স্থানাঙ্ক একটি কোণ দ্বারা নির্ণয় করুন।

3. দুটি দণ্ড AB ও BC, B বিন্দুতে মুক্তভাবে সংযুক্ত আছে এবং A বিন্দু স্থির আছে ও AB, BC উল্লম্বতলে আছে। দণ্ডদুটির অবস্থান জানবার জন্য কটি কোণ জানা আবশ্যক?

4. একটি গোলাকার চাকতির ভরকেন্দ্র স্থির আছে এবং চাকতিটি উল্লম্ব তলে চলছে। চাক্তিটির অবস্থান নির্ণয়ের জন্য কটি কোণ জানা প্রয়োজন ও যথেষ্ট?

5. একটি ভারী গোলক একটি নতসমতলের ওপর স্থাপিত হল। গোলকটির গতি দ্বিমাত্রিক হবে কি না বিচার করুন।

একক 13 ❑ দৃঢ়বস্তুর জাড্য-ভ্রামক (Moment of Inertia)

গঠন

13.1 প্রস্তাবনা

ইতিপূর্বে আপনারা দেখেছেন যে, নিউটনের গতিসূত্র থেকে সরাসরি একটি বা কোনো সসীমসংখ্যক কণাসমন্বিত গোষ্ঠীর গতি-সমীকরণ লেখা সম্ভব। কিন্তু দৃঢ়বস্তু অসংখ্য (infinite) কণার সমাহার হওয়াতে, এর গতি-সমীকরণগুলি লেখার জন্য আমাদের আরও কিছু নতুন ধারণার প্রয়োজন। প্রথমেই আপনারা পড়বেন দৃঢ়বস্তুর জাড্য-ভ্রামক সম্পর্কে।

এই অধ্যায়ে আমরা প্রথমে জাড্য-ভ্রামকের সংজ্ঞা জানব এবং বিভিন্ন আকারবিশিষ্ট দৃঢ়বস্তুর জাড্য-ভ্রামক নির্ণয় করব। জাড্য-ভ্রামক সংক্রান্ত দুই-একটি উপপাদ্য আলোচনা করব এবং কিছু সহজ উদাহরণ সহযোগে এই ধারণাগুলি পরিষ্কার করা হবে।

এই অধ্যায়ে দৃঢ়বস্তুর গতিসমীকরণ সম্বন্ধে কোনো আলোচনা হবে না। জাড্য-ভ্রামক সহযোগে কীভাবে গতি সমীকরণ লিখিত হয় তা আপনারা পরবর্তী অধ্যায়ে দেখবেন।

13.2 উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়ের উদ্দেশ্য হল দৃঢ়বস্তুর জাড্য-ভ্রামকের সংজ্ঞা দেওয়া, বিভিন্ন আকৃতি বিশিষ্ট দৃঢ়বস্তুর জাড্য-ভ্রামক নির্ণয় করা এবং কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য আলোচনা করা।

13.3 সংজ্ঞা ঃ জাড্য ভ্রামক ও জাড্য গুণফল

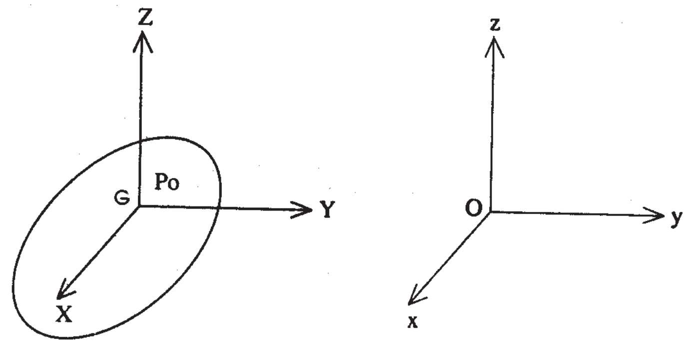
ধরা যাক একটি দৃঢ়বস্তু যে সমস্ত বিভিন্ন ক্ষুদ্র ভর-অংশ (elementary mass) সমন্বয়ে গঠিত, তার যে-কোনো একটির ভর m, এবং সেটি একটি সরলরেখা থেকে r দূরত্বে অবস্থিত। তা হলে, $\sum mr^2$, (যেখানে যোগফলটি দৃঢ়বস্তুর সমস্ত ক্ষুদ্র ভর-অংশের (mass-element) .... ওপর প্রসারিত, হল ঐ সরলরেখার সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক। অর্থাৎ, প্রতিটি বস্তু-অংশ বা ভর-অংশ নেওয়া হল, এবং তাদের ভরের সঙ্গে একটি বিশেষ সরলরেখার হতে তাদের দূরত্বের বর্গকে গুণ করে, এ-প্রকারের সবকটি গুনফল যোগ করা হল। এই যোগফলই হল ঐ সরলরেখার সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক।

ঐ যোগফল যদি MK^2-এর সমান হয়, সেখানে $M = \sum m$, বস্তুটির সামগ্রিক ভর, তাহলে, $MK^2 = \sum mr^2$, K-কে বলা হয় ঘূর্ণন-ব্যাসার্ধ (Radius of gyration)। Ox, Oy, Oz, O বিন্দুতে অবস্থিত পরস্পর লম্ব কার্তেজীয় অক্ষত্রয় (RectangularCartesian Axes) হলে, ভর-অংশ m-এর স্থানাংক যদি হয় (x, y, z) তবে, Ox হতে ঐ ভরঅংশের দূরত্ব হবে $\sqrt{y^2 + z^2}$ । অতএব Ox সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক হল $\sum m(y^2 + z^2)$ । Oy এবং Oz-এর সাপেক্ষে ঐ জাড্য-ভ্রামক হবে যথাক্রমে $\sum m(z^2 + x^2)$ এবং $\sum m(x^2 + y^2)$ ।

সংজ্ঞা ঃ $\sum myz, \sum mzx,$ এবং $\sum mxy$ —এই তিনটি রাশিকে, যথাক্রমে Oy ও Oz-এর সাপেক্ষে, Oz ও Ox এর সাপেক্ষে এবং Ox ও Oy-এর সাপেক্ষে জাড্য-গুণফল (Product of Inertia) বলা হয়।

13.4 সমান্তরাল-অক্ষের উপপাদ্য ও লম্ব-অক্ষের উপপাদ্য (Theorems of Parallel and Perpendicular Axes) ঃ

সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য।



ধরা যাক, নির্দিষ্ট মূলবিন্দু O-তে Ox, Oy, Oz তিনটি পরস্পর লম্ব অক্ষ এবং GX, GY, GZ হল G বিন্দুতে ঐ তিনটির সমান্তরাল অক্ষ, যেখানে G হল একটি দৃঢ়বস্তুর ভরকেন্দ্র (Centre of Mass, বা Centre of Inertia)। বস্তুটির একটি ক্ষুদ্র ভর-অংশ P-বিন্দুতে অবস্থিত, যার স্থানাঙ্ক O-x-y-z সাপেক্ষে (x, y, z) এবং GX-Y-Z সাপেক্ষে (X, Y, Z)। এছাড়া Ox ইত্যাদি সাপেক্ষে G-এর স্থানঙ্ক ধরি $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$। অতএব $x = X + \bar{x}$, $y = Y + \bar{y}$, $z = Z + \bar{z}$ তাহলে Ox সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক হল

$$A = \sum m(y^2 + z^2) = \sum m[(Y + \bar{y})^2 + (Z + \bar{z})^2]$$

$$= \sum m(Y^2 + Z^2) + 2\bar{y}\sum mY + 2\bar{z}\sum mZ + (\sum m)(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)$$

কিন্তু, $GX - GY - GZ$ সাপেক্ষে বস্তুটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হল

$$\left(\frac{\sum mX}{\sum m} = 0,\ \frac{\sum mY}{\sum m} = 0,\ \frac{\sum mZ}{\sum m} = 0\right) \text{ অর্থাৎ } \sum mX = 0 \text{ ইত্যাদি।}$$

$$\therefore \quad A = \sum m(Y^2 + Z^2) + M(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)$$

$$= A' + M(\bar{y}^2 + \bar{z}^2), \ (M = \sum m = \text{ বস্তুটির ভর})$$

যেখানে A' হল GX সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক এবং $M(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)$ হল G-তে অবস্থিত একটি M-ভর বিশিষ্ট বস্তুকণার (particle of mass M) জাড্য-ভ্রামক Ox-এর সাপেক্ষে। অর্থাৎ **"একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সাপেক্ষে একটি দৃঢ় বস্তুর জাড্য-ভ্রামক হল ঐ বস্তুটির ভরকেন্দ্রগামী সমান্তরাল রেখার সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামকের এবং বস্তুটির ভরকেন্দ্রে যদি একটি কণা অবস্থিত হয় যার ভর বস্তুটির ভরের সমান, রেখাটির সাপেক্ষে ঐ বস্তুকণার জাড্য-ভ্রামকের যোগফল।"**

আবার, Oy, Oz সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-গুণফলকে যদি D বলি, তবে,

$$D = \sum myz = \sum m(Y + \bar{y})(Z + \bar{z})$$

$$= \sum mYZ + \bar{y}\bar{z}\sum m + Y\sum u\bar{z} + Z\sum m\bar{z}$$

$$= D' + M\bar{y}\bar{z}$$

যেখানে D' হল GY, GZ-এর সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য গুনফল এবং $M\bar{y}\bar{z}$ হল M ভরবিশিষ্ট ভরকেন্দ্রে অবস্থিত একটি বস্তুকণার GY, GZ-এর সাপেক্ষে জাড্য-গুণফল। অর্থাৎ, "দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সাপেক্ষে একটি দৃঢ়বস্তুর জাড্যগুণফল হল ঐ বস্তুর ভরকেন্দ্রগামী দুটি সমান্তরাল রেখার সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্যগুণফল এবং ঐ

বস্তুটির ভরকেন্দ্রে যদি একটি বস্তুকণা থাকে যার ভর বস্তুটির ভরের সমান, রেখাদুটি সাপেক্ষে তার জাড্য-গুণফল— এই দুইয়ের যোগফলের সমান।”

লম্ব অক্ষের উপপাদ্য ঃ

ধরা যাক দৃঢ়বস্তুটি একটি সমতল (Plane lamina)। ঐ তলের ওপরে Ox, Oy অক্ষদ্বয় এবং তলের ওপর লম্ব Oz অক্ষ নিলাম।

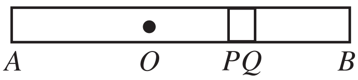
তবে, Oz সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক হল $\sum m(x^2 + y^2)$, যেখানে m ভরবিশিষ্ট বস্তু-ভর-অংশের স্থানাঙ্ক (x, y, O)

$= \sum mx^2 + \sum my^2$

= x-অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক + y-অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক।

13.5 কয়েকটি উদাহরণ ঃ

(i) সরু সুষম দণ্ড (Thin Uniform Rod) যার ভর M ও দৈর্ঘ্য $2a$.



ধরুন দণ্ডটি AB, যার মধ্যবিন্দু O। PQ হল AB-তে অবস্থিত এক ক্ষুদ্র ভর-অংশ, যা O থেকে x দূরত্বে অবস্থিত। $OP = x$, PQ-এর ভর হল $\frac{M}{2a}, \delta x$, যেখানে $\delta x = PQ$ (PQ-র দৈর্ঘ্যে)।

তাহলে, O-বিন্দুগামী AB-র ওপর লম্ব একটি সরলরেখার সাপেক্ষে, জাড্য-ভ্রামক হবে,

$$\sum\left(\frac{M}{2a}\delta x\right)x^2 = \frac{m}{2a}\int_{-a}^{a} x^2 dx$$

(এখানে বস্তুটি সন্তত বলে, যোগফলটিকে আমরা সমাকলন হিসেবে প্রকাশ করতে পারি)।

$$= \frac{M}{2a}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{-a}^{a} = \frac{Ma^2}{3}$$

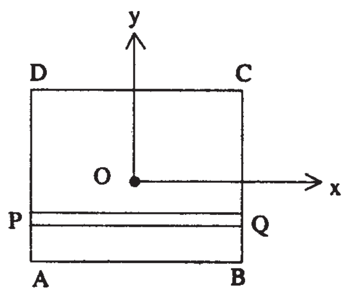
আবার A বিন্দুগামী উপরের রেখার একটি সমান্তরাল সরলরেখার সাপেক্ষে, জাড্য-ভ্রামক হবে,

$$\sum\left(\frac{M}{2a}\delta x\right)(x+a)^2 = \frac{M}{2a}\int_{-a}^{a}(x+a)^2 dx$$

$$= \frac{M}{2a}\left[\frac{(x+a)^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{M}{2a}\cdot\frac{8a^3}{3} = M\frac{4a^2}{3}$$

(এটি সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য দ্বারা সহজে হবে—সমাধান করুন)।

(ii) সুষম আয়তাকার তল (Rectangular Lamina), যার ভর M, দৈর্ঘ্য $2a$, প্রস্থ $2b$.



O-বিন্দু ঐ আয়তক্ষেত্রের কেন্দ্র। এর ভিতর দিয়ে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সমান্তরাল অক্ষদ্বয় Ox, Oy নেওয়া হল। এখন দৈর্ঘ্য AB-র সমান্তরাল অসংখ্য সরলরেখা দ্বারা আয়তক্ষেত্রকে অসংখ্য অত্যন্ত সরু আয়তাকার ফালিতে (strip) বিভক্ত করা যায়। সরলরেখার সংখ্যা বাড়িয়ে গেলে শেষপর্যন্ত প্রতিটি ফালি একএকটি প্রস্থহীন সরলরেখাকৃতি দণ্ডের মতো হবে। PQ এরূপ একটি দণ্ড হলে, এর মধ্যবিন্দু দিয়ে Oy যাবে এবং Oy সাপেক্ষে এর জাড্য-ভ্রামক হবে, $(M_{PQ})\cdot\frac{a^2}{3}$, যেখানে M_{PQ} হল PQ-র ভর, এবং $PQ = 2a$। অতএব, Oy-সাপেক্ষে সমগ্র তলটির জাড্য-ভ্রামক হল $\sum(M_{PQ})\frac{a^2}{3} = M\frac{a^2}{3}$, যেখানে $\sum M_{PQ} = M$ ।

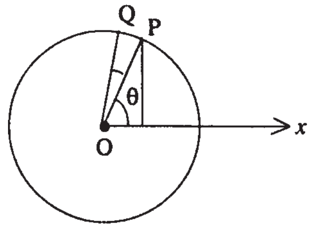
একইভাবে, Ox-সাপেক্ষে জাড্য-ভ্রামক হবে $M\frac{b^2}{3}$ এবং লম্ব-অক্ষের উপপাদ্য অনুযায়ী, Oz যদি তলের ওপর লম্ব হয় তবে এর সাপেক্ষে জাড্য-ভ্রামক হল $M(b^2 + a^2)/3$.

(iii) আয়তাকার ঘনবস্তু (Rectangular Parallelopiped) যার ভর M ও ধারগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$, $2b$ ও $2c$.

এক্ষেত্রেও আমরা কেন্দ্র O-গামী একটি অক্ষ Ox নিই, যেটি মনে করা যাক $2a$-দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ধারটির সমান্তরাল। ঘনকটিকে ভাবতে পারি ঐ অক্ষটির ওপর লম্ব অসংখ্য আয়তাকার তল দ্বারা গঠিত। প্রতিটি তলের জাড্য-ভ্রামক Ox-সাপেক্ষে $=$ (তলের ভর) $\times \frac{b^2+c^2}{3}$. অতএব সবকটি তলের ওপর যোগ করে, Ox-সাপেক্ষে ঘনটির জাড্য-ভ্রামক হবে $\sum$ (তলের ভর) $\frac{b^2+c^2}{3} = M\frac{b^2+c^2}{3}$.

এভাবে যদি Oy, $2b$-দৈর্ঘ্যের সমান্তরাল হয়, তবে Oy-সাপেক্ষে জাড্য-ভ্রামক $M\frac{c^2+a^2}{3}$ এবং Oz, $2c$-দৈর্ঘ্যের সমান্তরাল হয় তবে, Oz-সাপেক্ষে জাড্য-ভ্রামক $M\frac{a^2+b^2}{3}$.

(iv) একটি বৃত্তের পরিসীমা (Circumference of a Circle) যার ভর M, কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ a



Ox কেন্দ্রগামী একটি অক্ষ, PQ একটি ক্ষুদ্র অংশ দৈর্ঘ্য (elementary length) যেখানে $\angle XOP = \theta$, $\angle POQ = \delta\theta$.

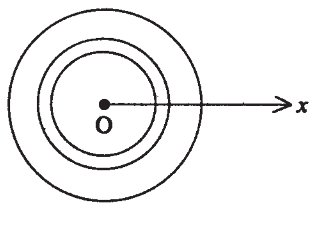
$\therefore \ \widehat{PQ} = a\delta\theta$ এবং এর ভর $\dfrac{M}{2\pi a} \cdot a\delta\theta$

Ox সাপেক্ষে PQ-র জাড্য-ভ্রামক $\left(\dfrac{M}{2\pi a} a\delta\theta\right)(a \sin \theta)^2$

Ox সাপেক্ষে বৃত্তের পরিসীমার জাড্য-ভ্রামক $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\frac{M}{2\pi a} a\delta\theta\right)(a \sin\alpha)^2 = \frac{Ma^2}{2}$

(v) একটি বৃত্তাকার চাকতি (Circular Disc) ভর M, কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ a.

চাকতিটিকে অসংখ্য সমকেন্দ্রিক বৃত্তের দ্বারা অসংখ্য আংটিতে (ring) বিভক্ত করা যায়, যেমন, ছবিতে দুটি বৃত্ত দেখানো হয়েছে যাদের ব্যাসার্ধ r ও $r + \delta r$, যতই এই সব বৃত্তের সংখ্যা বাড়বে, প্রতিটি আংটি একটি ক্ষীণ বৃত্তে পরিণত হবে।



r ও $r + \delta r$-এর মধ্যের আংটির ভর হল $\dfrac{M}{\pi a^2} \cdot 2\pi r\delta r$ এবং Ox-সাপেক্ষে এর জাড্য-ভ্রামক $\left(\dfrac{M}{\pi a^2} \cdot 2\pi r\delta r\right)\dfrac{r^2}{2}$.

$\therefore$ Ox-সাপেক্ষে বৃত্তের জাড্য-ভ্রামক,

$$\frac{M}{a^2}\int_0^a r^3 dr = \frac{Ma^2}{4}$$

মন্তব্য ঃ লম্ব-অক্ষের উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখানো যায় যে, কেন্দ্রগামী লম্ব-অক্ষের সাপেক্ষে বৃত্তের পরিসীমার জাড্য-ভ্রামক হল $\dfrac{Ma^2}{2} + \dfrac{Ma^2}{2} = Ma^2$ এবং বৃত্তাকার চাকতির জাড্য-ভ্রামক $\dfrac{Ma^2}{4} + \dfrac{Ma^2}{4} = \dfrac{Ma^2}{2}$.

(vi) উপবৃত্তাকার চাকতি (Elliptic Disc), যার ভর M, অক্ষদুটির দৈর্ঘ্য $2a$ ও $2b$ এবং কেন্দ্রগামী Ox, Oy অক্ষের সাপেক্ষে এর পরিসীমার সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

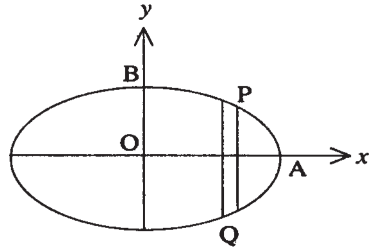
উপাক্ষ (minor axis) y-অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল রেখা দ্বারা চাকতিটিকে অসংখ্য দণ্ডে বিভক্ত করা যায়। তার একটি PQ, Qy থেকে x-দুরত্বে অবস্থিত ও এর প্রস্থ δx.

P-এর স্থানাঙ্ক (a cos ϕ, b sin ϕ), হলে, Q-এর হবে (a cos ϕ, $-b$ sin ϕ). অতএব PQ-

এর ভর হল $\dfrac{M(2b\sin\phi)\delta x}{\pi ab} = \dfrac{M}{\pi ab}(2b\sin\phi)\delta(a\cos\phi)$ এবং Ox সাপেক্ষে এর জাড্য-ভ্রামক হল,

$$= \frac{M(2b\sin\phi)\delta(a\cos\phi)}{\pi ab}\cdot\frac{(b\sin\phi)^2}{3} \quad (PQ\text{-এর দৈর্ঘ্য } 2b \sin\phi)$$

$\therefore$ Ox-সাপেক্ষে চাকতিটির জাড্য-ভ্রামক



$$= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} M\,\frac{2b\sin\phi\, d(a\cos\phi)}{\pi ab}\cdot\frac{b^2\sin^2\phi}{3}$$

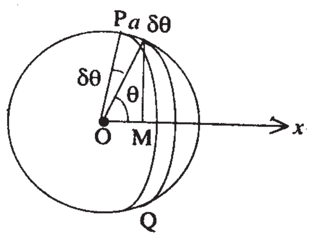
(A বিন্দুতে $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ এবং B বিন্দুতে $\phi = 0$ এবং চাকতিটি Oy-সাপেক্ষে সদৃশ (symmetric))

$$= \frac{4Mb^2}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2\phi}{2}\right)^2 d\phi$$

$$= \frac{Mb^2}{4}.$$

একইভাবে Oy-সাপেক্ষে চাকতির জাড্য-ভ্রামক $\dfrac{Ma^2}{4}$ এবং লম্ব অক্ষ Oz-সাপেক্ষে $M\left(\dfrac{a^2+b^2}{4}\right)$.

(vii) ফাঁপা গোলক (Hollow Sphere) একটি ব্যাস (diamater)-এর সাপেক্ষে।



ফাঁপা গোলকটিকে একটি ব্যাসের ওপর লম্ব পরস্পর সমান্তরাল তলের দ্বারা কয়েকটি ফালিতে বিভক্ত করা যায়, যেমন PQ. যাদের প্রতিটির পরিসীমা একটি বৃত্ত।

ব্যাসটিকে x-অক্ষ ধরলে, অক্ষটি বৃত্তগুলির তলের ওপর লম্ব ও কেন্দ্রগামী।

Ox-সাপেক্ষে PQ-জাড্য-ভ্রামক হল $\left(\dfrac{M}{4\pi a^2}\cdot 2\pi a\sin\theta\right)$ $(a\delta\theta)$. $(a \sin\theta)^2$

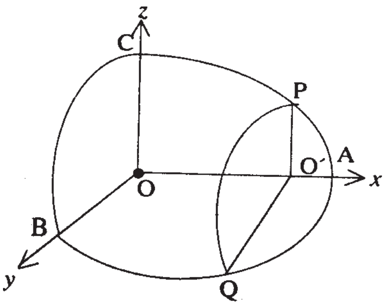
$$= \frac{Ma^2}{2}\sin^3\theta\,\delta\theta \text{ (ছবি দ্রষ্টব্য)}$$

$\therefore$ Ox-সাপেক্ষে ফাঁপা গোলকের জাড্য-ভ্রামক হল,

$$\frac{Ma^2}{2}\int_a^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta = \frac{2Ma^2}{3}$$

M, ফাঁপা গোলকটির ভর।

(vii) একটি ঘন উপবৃত্তক (Solid Ellipsoid) যার পরিসীমার সমীকরণ হল $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, একটি মুখ্য-অক্ষ (Principal axis) সাপেক্ষে এর জাড্য-ভ্রামক নির্ণয় করা হবে।



ধরা যাক, উপবৃত্তকটিকে x-অক্ষের ওপর লম্ব পরস্পর সমান্তরাল তলের দ্বারা চাকতিতে বিভক্ত করা হল, প্রতিটি চাকতিই একটি উপবৃত্তের আকারে হবে এবং y-o-z তলের সঙ্গে সমান্তরাল হবে। ধরা যাক, এরকম একটি চাকতি y-o-z তল থেকে x দূরত্বে আছে এবং এর প্রস্থ δx.

ছবিতে উপবৃত্তকের একটি অংশ দেখানো হয়েছে, যেটি $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ এই অষ্টকে (octant) অবস্থিত। OA, OB, OC মুখ্য অক্ষের অর্ধেক। ঐ চাকতিটি একটি উপবৃত্ত, যার মুখ্য অক্ষ $O'Q$, $O'P$ এবং কেন্দ্র O', যেখানে,

$O'P = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $O'Q = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, যেহেতু $OO' = x$.

চাকতিটির ক্ষেত্রফল $\pi.O'P.O'Q$-এর ভর হল $\pi bc.\delta x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).\rho$,

যেখানে ρ উপবৃত্তকের ঘনত্ব (density)।

$\therefore$ Ox (লম্ব-অক্ষ)-এর সাপেক্ষে চাকতিটির জাড্য-ভ্রামক $=\left(\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\rho\delta x\right)\frac{PO'^2+QO'^2}{4}$

$$= \pi bc\ \delta x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2\rho.\frac{b^2+c^2}{4}$$

$\therefore$ Ox-সাপেক্ষে উপবৃত্তকের জাড্য-ভ্রামক

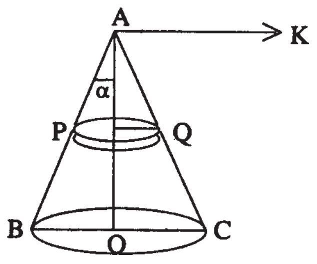
$$= \pi bc\frac{b^2+c^2}{4}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2\rho\delta x$$

$$= \pi abc\cdot\frac{b^2+c^2}{4}\cdot\frac{16}{15}\rho = M.\frac{b^2+c^2}{5}$$

যেখানে $M = \left(\frac{4}{3}\pi abc\right)\rho$ হল উপবৃত্তকের ভর।

একইভাবে যথাক্রমে Oy ও Oz-এর সাপেক্ষে উপবৃত্তকের জাড্য-ভ্রামক হল $M\frac{c^2 + a^2}{5}$ ও $M\frac{a^2 + b^2}{5}$.

(ix) অক্ষের সাপেক্ষে এবং ভূমির সঙ্গে সমান্তরাল, অক্ষের ওপর লম্ব ও শীর্ষগামী একটি সরলরেখার সাপেক্ষে, একটি ঘন লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কু (Right Circular Cone)-র জাড্য-ভ্রামক।



শঙ্কুটির শীর্ষবিন্দু A, ভূমি একটি বৃত্ত, যার কেন্দ্র O, AO অক্ষ, BC একটি ভূমির ব্যাস। AK, BC-এর সমান্তরাল একটি রেখা। ধরা যাক, শঙ্কুর উচ্চতা (hight) h, এবং ভূমির ব্যাসার্ধ a, শীর্ষকোণ (vertical angle) 2α এবং ভর M ভূমির সঙ্গে। সমান্তরাল সমতলদ্বারা শঙ্কুকে সরু বৃত্তাকার চাকতিতে বিভক্ত করা হল।

A-কে মূলবিন্দু, AO বরাবর x-axis নেওয়া হল।

PQ চাকতিটি বৃত্তাকার এবং A থেকে x দূরত্বে অবস্থিত, এবং এর প্রস্থ δx.

AO লম্ব-অক্ষ, যার সাপেক্ষে PQ চাকতির জাড্য-ভ্রামক (PQ-এর ভর). $\frac{(\text{PQ-এর ব্যাসার্ধ})^2}{2}$

$$= \pi(x\tan\alpha)^2\,\delta x.\rho.\frac{(x\tan\alpha)^2}{2}.\rho \text{ হল শঙ্কুর ঘনত্ব}$$

$\therefore$ AO সাপেক্ষে শঙ্কুটির জাড্য-ভ্রামক হবে,

$$\frac{\pi\rho}{2}\int_0^h x^4\tan^4\alpha.dx = \frac{\pi}{10}\rho\tan^4\alpha.h^5$$

কিন্তু $a = h\tan\alpha$ এবং $M = \frac{1}{3}\pi a^2 h\rho$

$\therefore$ জাড্য-ভ্রামক $= \frac{3Ma^2}{10}$.

AK-সাপেক্ষে PQ-এর জাড্য-ভ্রামক বের করতে হলে সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য ব্যবহার করা যায়। AM-এর সঙ্গে সমান্তরাল PQ চাকতিটির একটি ব্যাস আছে, যার সাপেক্ষে চাকতিটি জাড্য-ভ্রামক।

$$\rho\pi(x\tan\alpha)^2.\frac{(x\tan\alpha)^2}{4}\delta x = \frac{\rho\pi}{4}x^4\tan^4\alpha\,\delta x$$

অতএব, AM সাপেক্ষে চাকতিটির জাড্য-ভ্রামক $= \left(\frac{\rho\pi}{4}x^4\tan^4\alpha\right)\delta x + \rho\pi(x\tan\alpha)^2 x^2\delta x$.

$\therefore$ AM সাপেক্ষে শঙ্কুর জাড্য-ভ্রামক,

$$\int_0^h \frac{\rho\pi}{4}\tan^4 ax^4 dx + \int_0^h \rho\pi x^4 \tan^2 \alpha\, dx$$

$$= \frac{3Ma^2}{20} + \frac{3Mh^2}{5} = \frac{3M}{20}\left(a^2 + 4h^2\right)$$

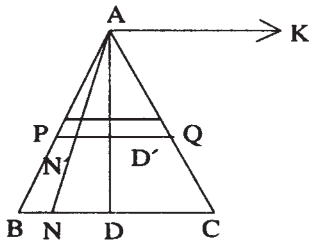
(x) একটি ঘন বৃত্তাকৃতি বেলন (Solid Right Circular Cylinder)।

Cylinder টিকে অক্ষের ওপর লম্ব সমান্তরাল তল দ্বারা বৃত্তাকার চাকতিতে বিভক্ত করা যায়, যাদের যেকোনো একটির জাড্য-ভ্রামক অক্ষের সাপেক্ষে হল (ভর) $\frac{a^2}{2}$ (a বেলনটির ব্যাসার্ধ)

$\therefore$ বেলনটির জাড্য-ভ্রামক অক্ষের সাপেক্ষে, হবে Σ (চাকতির ভর) $\frac{a^3}{3} = M\frac{a^2}{2}$,

যেখানে M হল বেলনটির ভর।

(xi) ABC একটি ত্রিভুজ হলে A বিন্দুতে BC-এর সঙ্গে সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে এবং A বিন্দুগামী BC-র ওপর লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে (ত্রিভুজের $AK \parallel BC$, $AN \perp BC$ জাড্য ভ্রামক নির্ণয় এবং A-গামী তলের ওপর লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে



$AD = h$ ত্রিভুজের উচ্চতা। BC-র সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা ABC-কে সরুসরু ফালিতে বিভক্ত করা হল—এরকম একটি ফালি, A থেকে x দূরত্বে অবস্থিত, AN ও AD, PQ-কে N' ও D'-এ ছেদ করে এবং ফালির প্রস্থ δx.

ত্রিভুজটির ভর M ও ঘনত্ব ρ হলে $\rho = \dfrac{M}{\frac{1}{2}ah}$, $a = BC$. AK-এর সাপেক্ষে ফালির জাড্য-ভ্রামক = (ফালির ভর), x^2 = $(PQ.\ \delta x)x^2$। কিন্তু $PQ = \frac{x}{h}BC = \frac{ax}{h}$

$\therefore$ AK-এর সাপেক্ষে সমগ্র ত্রিভুজটির জাড্য-ভ্রামক $= \int_0^h \left(\frac{\rho ax}{h}dx\right)x^2 = \frac{Mh^2}{2}$

AN-সাপেক্ষে PQ-এর জাড্য-ভ্রামক হল

$$\left(\frac{x\rho a}{h}\delta x\right)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{ax}{2h}\right)^2 + (N'D')^2\right) \text{ সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য}$$

$$= \frac{x\rho a}{h}\delta x\left(\frac{1}{3}\left(\frac{ax}{2h}\right)^2 + \frac{x^2}{h^2}ND^2\right)$$

$\therefore$ AN সাপেক্ষে ত্রিভুজের জাড্য-ভ্রামক

$$\int_0^h \left(\frac{x\rho a}{h}\right)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{ax}{2h}\right)^2 + \frac{x^2}{h^2}ND^2\right)dx$$

$$= \frac{\rho a^3 h}{48} + \frac{\rho a h}{4}(ND)^2$$

$$= \frac{\rho\alpha^3 h}{48} + \frac{\rho a h}{4}\left(AD^2 - h^2\right)$$

$$= \frac{Ma^2}{24} + \frac{M}{2}(AD)^2 - \frac{Mh^2}{2}$$

$\therefore$ AZ, A বিন্দুতে তলের ওপর লম্ব হলে, তার সাপেক্ষে জাড্য-ভ্রামক $= \frac{Ma^2}{24} + \frac{M}{2}\left(AD^2\right)$,

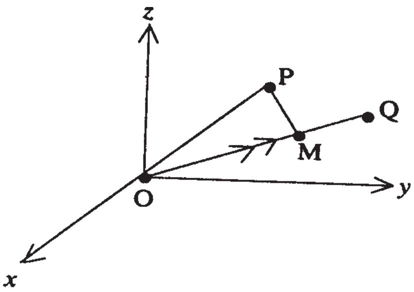
যেখানে $AD^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$ (অ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য)

$\therefore$ নির্ণেয় ভ্রামক $= \frac{M}{12}\left(3b^2 + 3c^2 - a^2\right)$।

13.6 জাড্য-ভ্রামক সম্পর্কিত উপবৃত্তক (Momental Ellipsoid) এবং প্রধান অক্ষ (Principal Axes)

ধরা যাক, Ox, Oy, Oz ত্রিমাত্রিক দেশে নির্দিষ্ট অক্ষ।

A, B, C যথাক্রমে Ox, Oy, Oz সাপেক্ষে একটি দৃঢ়বস্তুর জাড্য-ভ্রামক এবং D, E, F যথাক্রমে Oy, Oz ; Oz, Ox ; Ox, Oy সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-গুণফল।



OQ, O বিন্দুগামী একটি রেখা যার দিক-কোসাইন $[\lambda, \mu, \nu]$

$P(x, y, z)$ বিন্দুতে বস্তুটির একটি ক্ষুদ্র ভর-অংশ অবস্থিত যার ভর m, $PM \perp OQ$ এবং P বিন্দুস্থিত m ভরের জাড্য-ভ্রামক OQ-র সাপেক্ষে হবে $m.PM^2$

কিন্তু, $\overrightarrow{OP} = [x, y, z]$

এবং $\overrightarrow{OQ}$ বরাবর একক ভেক্টর $[\lambda, \mu, \nu]$

$\therefore$ $OM = \overrightarrow{OP}.\ [\lambda, \mu, \nu] = \lambda x + \mu y + \nu z$

$\therefore$ $PM^2 = OP^2 - OM^2 = (x + y + z)^2 - (\lambda x + \mu y + \nu z)^2$

$$= x^2(1-\lambda^2)+y^2(1-\mu^2)+z^2(1-v^2)-2\lambda\mu xy-2\mu vyz-2v\lambda zx$$

$$= x^2(\mu^2+v^2)+y^2(\lambda^2+v_2)+z^2(\lambda^2+\mu^2)-2\lambda\mu xy-2\mu vyz-2v\lambda zx$$

$\therefore$ OQ সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর জাড্য-ভ্রামক হল,

$\Sigma m.PM^2$

$$= \Sigma m\left\{x^2(\mu^2+v^2)+y^2(\lambda^2+v^2)+z^2(\lambda^2+\mu^2)-2\lambda\mu xy-2\mu vyz-2v\lambda zx\right\}$$

$$= \Sigma m\left\{\lambda^2(y^2+z^2)+\mu^2(x^2+z^2)+v^2(x^2+y^2)\right\}-2\Sigma m\{\lambda\mu xy+\mu vyz+v\lambda zx\}$$

$$= \lambda^2 A+\mu^2 B+v^2 C-2\mu vD-2\mu\lambda E-2\lambda\mu F$$

এখন ধরা যাক OQ সরলরেখার ওপর Q এমন একটি বিন্দু যে, OQ-র সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুটির জাড-ভ্রামক $|OQ|$ দূরত্বের বর্গের সঙ্গে ব্যস্তানুপাতিক (i*nv*ersel*y* propor*t*ion*a*l *to* $|OQ|^2$).

অর্থাৎ, $A\lambda^2+B\mu^2+Cv^2-2D\mu v-2E\lambda v-2F\lambda\mu=\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{MK^4}{|OQ|^2}$, বলা যায়, যেখানে, M বস্তুটির ভর ও K, একটি ধ্রুবকরাশি। (K-এর মাত্রা হল দৈর্ঘ্যের)।

Q-এর স্থানাংক $(x,\ y,\ z)$ হলে,

যেহেতু OQ-র সমীকরণ $\dfrac{x}{\lambda}=\dfrac{y}{\mu}=\dfrac{z}{v}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+v_2}}=|OQ|$

$\therefore$ $\lambda=\dfrac{x}{|OQ|}$ ইত্যাদি।

$\therefore$ Q বিন্দুর সঞ্চারপথ হবে

$$Ax^2+By^2+Cz^2-2Dyz-2Ezx-2Fxy=MK^4$$

বাঁদিকের রাশিমালাটি নিশ্চিত ধনাত্মক (positive definite) হওয়াতে, ওপরের সমীকরণটি O বিন্দুতে কেন্দ্রযুক্ত একটি উপবৃত্তক (ellipsoid)। একে বলা হয় O-বিন্দুতে এই দৃঢ়বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক সম্পর্কিত উপবৃত্তক।

যেহেতু Q-এর সংজ্ঞা বিশেষভাবে Ox, Oy, Oz অক্ষের ওপর নির্ভরশীল নয়, সেহেতু বলা যায় যে O বিন্দুতে যেকোনো তিনটি পরস্পর লম্ব-অক্ষের সাপেক্ষে Q-র সঞ্চারপথ একই উপবৃত্তক হবে। আপনারা জানেন যে যেকোনো এলিপসয়েডের জন্য তার কেন্দ্রগামী এমন তিনটি পরস্পর লম্ব অক্ষ পাওয়া যায়, যাদের সাপেক্ষে লিখলে উপবৃত্তকের সমীকরণে xz, zx ও yx জড়িত পদগুলি অনুপস্থিত থাকে। এদের বলা হয় উপবৃত্তকের মুখ্য বা প্রধান অক্ষ (principal axis)। ওপরের জাড-ভ্রামক সম্পর্কিত উপবৃত্তাকারকেও ঐ মুখ্য-অক্ষের সাপেক্ষে লেখা যায়,

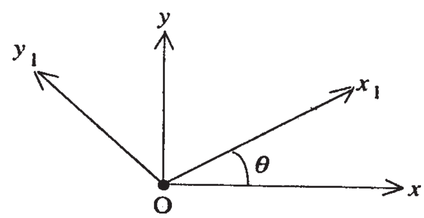
$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = MK^4$ এইরূপে। এই মুখ্য অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুটির জাড্য-ভ্রামকগুলি হল A', B', C' এবং প্রতিটি জাড্য-গুণফলই শূন্য।

অতএব আমরা বলতে পারি—

"যেকোনো দৃঢ়বস্তুর জন্যই ত্রিমাত্রিক দেশের প্রতিটি বিন্দুতে এমন তিনটি পরস্পর লম্ব অক্ষ থাকবে, যাদের সাপেক্ষে (দুটি দুটি করে নিয়ে) দৃঢ়বস্তুটির সবকটি জাড্য-গুণফল শূন্য হবে। এই অক্ষগুলিকে ঐ বিন্দুতে বস্তুটির প্রধান অক্ষ বলা হয়।" এই তিনটি অক্ষকে বলা হয় ঐ বিন্দুতে দৃঢ়বস্তুটির মুখ্য অক্ষ (principal axes)। যেকোনো দুটি মুখ্য অক্ষের মধ্যগামী সমতলকে বলা হয় ঐ দৃঢ় বস্তুটির মুখ্য তল।

মন্তব্য 1. ওপরের আলোচনায় আমরা দেখেছি যে, O বিন্দুগামী একটি সরলরেখার দিক কোসাইন জানা থাকলে এবং O বিন্দুতে অবস্থিত লম্ব কার্তেজীয় অক্ষতন্ত্র সাপেক্ষে কোনো দৃঢ়বস্তুর জাড্য-ভ্রামক ও গুণফল জানা থাকলে, সরলরেখাটির সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক নির্ণয় করা যায়।

বস্তুটি একটি সমতল পাত (plane lamina) হলে, ধরুন, Ox, Oy ঐ সমতলে অবস্থিত, Oz লম্ব।



তাহলে, $A = \Sigma my^2, B = \Sigma mx^2$,

$F = \Sigma mxy, D = E = O$, এবং

$C = \Sigma m\left(x^2 + y^2\right) = A + B$

ধরা যাক Ox_1, Oy_1, Ox, Oy-এর O-বিন্দুসাপেক্ষে θ-কোণ দ্বারা ঘূর্ণনের ফলে প্রাপ্ত অক্ষদ্বয়।

$A' = Ox_1$ সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক $= A\ \cos^2\theta + B\ \sin^2\theta - 2F\ \sin\theta\ \cos\theta$,

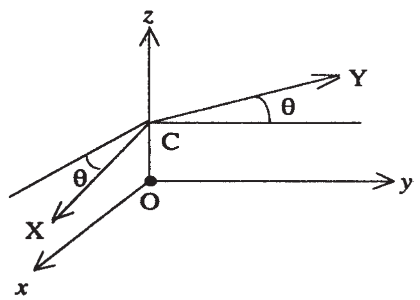
যেহেতু Ox_1-এর দিককোসাইন $[\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0]$ এবং $F' = Ox_1, Oy_1$ সাপেক্ষে জাড্য-গুণফল

$$= \Sigma mx'y' = \Sigma m(x\cos\theta + y\sin\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta)$$

$$= \Sigma m\left((y^2 - x^2)\sin\theta\cos\theta + xy(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right)$$

$$= (A - B)\sin\theta\cos\theta + F\cos 2\theta$$

মন্তব্য 2. Oz অক্ষটি O বিন্দুতে কোনো দৃঢ়বস্তুর মুখ্য অক্ষ হবার যথেষ্ট ও প্রয়োজনীয় শর্ত হল $D = O = E$.



অনুসিদ্ধান্ত ঃ একটি সরলরেখা তার কোনো বিন্দুতে একটি দৃঢ়বস্তুর মুখ্য অক্ষ হতে পারে কি না তা নির্ণয় করা যায়, এবং, যদি হয়, তবে অন্য দুটি মুখ্য অক্ষও নির্ধারণ করা যায়।

ধরা যাক প্রদত্ত সরলরেখাটি Oz অক্ষ এবং এর উপর C বিন্দুতে সরলরেখাটি একটি দৃঢ়বস্তুর একটি মুখ্য অক্ষ। ধরা যাক C বিন্দুতে বস্তুটির অন্য দুটি জাড্যের মুখ্য অক্ষ হল CX এবং CY, যেখানে Cx, Cy যথাক্রমে Ox এবং Oy-এর সঙ্গে θ কোণে নত।

(CXY তলটি Oxy তলের সমান্তরাল)।

OC = h, হলে, (x,y,z) যদি ঐ বস্তুর কোনো কণার (যার ভর m) স্থানাংক হয় Ox, Oy, Oz-এর সাপেক্ষে, এবং (x',y',z') স্থানাংক হয় একই বস্তুকণার CX, CY, CZ সাপেক্ষে, তবে,

$$z = z' + h, x = x'\cos\theta - y\sin\theta; y = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

$$\therefore \quad z' = z - h, x' = x\cos\theta + y\sin\theta, y' = -x\sin\theta + y\cos\theta.$$

$$\therefore \quad D' = \Sigma my'z' = \Sigma m(-xz\sin\theta + yz\cos\theta + hx\sin\theta - hy\cos\theta)$$

$$= D\cos\theta - E\sin\theta + Mh(\bar{x}\sin\theta - \bar{y}\cos\theta) \quad \text{...........} \quad \text{(i)}$$

এবং $E' = \Sigma mx'x' = \Sigma m(xz\cos\theta + yz\sin\theta - hx\cos\theta - hy\sin\theta)$

$$= D\sin\theta + E\cos\theta - Mh(\bar{x}\cos\theta + \bar{y}\sin\theta) \quad \text{...........} \quad \text{(ii)}$$

এবং $F' = \Sigma mx'y'$

$$= \Sigma M\left[-x^2\sin\theta\cos\theta + xy\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + y^2\sin\theta\cos\theta\right]$$

$$= \frac{A-B}{2}\sin 2\theta = F\cos 2\theta \quad \text{...........} \quad \text{(iii)}$$

যেখানে A, B, C, Ox, Oy, Oz-এর সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক, D, E, F হল Oy, Oz ; Oz, Ox ; Ox, Oy-এর সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-গুণফল। A', B', C', D', E', F' হল CX, CY, CZ-এর সাপেক্ষে ওই একই রাশিগুলি।

$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} = \frac{\Sigma mx}{M}, \bar{y} = \frac{\Sigma my}{M}, \bar{z} = \frac{\Sigma mz}{M},$$

যেখানে $M = \Sigma m$, বস্তুটির মোট ভর এবং $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ বস্তুটির ভরকেন্দ্রর স্থানাংক, Ox, Oy, Oz-এর সাপেক্ষে।

যেহেতু CX, CY, CZ, জাড্যের মুখ্য অক্ষ,

অতএব, $F = E = D = 0$

$\therefore$ (iii) থেকে, $tan\ 2\theta = \dfrac{2F}{B-A}$ .... (iv)

এবং (i) ও (ii) থেকে,

$$Mh = \frac{E\sin\theta - D\cos\theta}{\bar{x}\sin\theta - \bar{y}\cos\theta} = \frac{D\sin\theta + E\cos\theta}{\bar{x}\cos\theta + \bar{y}\sin\theta}$$

$$= \frac{E}{\bar{x}} = \frac{D}{\bar{y}} \quad \text{...........} \quad (v)$$

$$\therefore \quad h = \frac{D}{M\bar{y}} = \frac{E}{M\bar{x}} \quad \text{...........} \quad (vi)$$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্তটি হল ঃ $E\bar{y} = D\bar{x}$,

অর্থাৎ, $\frac{\Sigma myz}{\Sigma my} = \frac{\Sigma mzx}{\Sigma mx}$। এক্ষেত্রে $h = \frac{D}{My} = \frac{E}{Mx}$ থেকে z-অক্ষের ওপর C বিন্দুর অবস্থান পাওয়া যায় এবং (iv) থেকে C বিন্দুতে অন্য দুটি মুখ্য অক্ষের দিক পাওয়া যায়।

মন্তব্য ঃ অক্ষ Oz যদি O বিন্দুতে বস্তুটির মূখ্য অক্ষ হয়, তবে সাধারণত Oz-এর ওপর অন্য কোনো বিন্দুতে সেটি মুখ্য অক্ষ হবে না। কারণ, Ox, Oy, Oz-এই তিনটি মুখ্য অক্ষ হলে, $D = E = F = O$। অর্থাৎ h সসীম হতে পারে একমাত্র যদি $\bar{x} = \bar{y} = 0$ হয়, অর্থাৎ, z-অক্ষটি বস্তুটির ভরকেন্দ্র দিয়ে যায়। এক্ষেত্রে h-এর মান অনির্ণেয় (indeterminate) এবং Oz, এর ওপর যেকোনো বিন্দুতেই Oz-মুখ্য অক্ষ। কিন্তু অন্যথায়, Oz-আর কোনো বিন্দুতে মুখ্য অক্ষ হবে না।

অতএব বস্তুটির ভরকেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা যদি তার কোনো বিন্দুতে বস্তুটির মুখ্য-অক্ষ হয় তবে রেখাটি যেকোনো বিন্দুতেই বস্তুটির মুখ্য অক্ষ।

13.7 সম জাড্য-ভ্রামক বিশিষ্ট বস্তুতন্ত্র (Equimomental bodies or material systems)

দুটি বস্তুকে (অথবা দুটি বস্তুতন্ত্র) সম জাড্য-ভ্রামক বিশিষ্ট বা ইকুইমোমেন্টাল বলা হবে যদি ত্রিমাত্রিক দেশে যেকোনো সরলরেখায় সাপেক্ষে বস্তু দুটির জাড্য-ভ্রামক একই হয়।

উপপাদ্য ঃ দুটি দৃঢ়বস্তু (বা বস্তুতন্ত্র) সমজাড্য-ভ্রামক বিশিষ্ট হবে, যদি (i) তাদের মোট ভর সমান হয়, (ii) তাদের ভরকেন্দ্রের অবস্থান একই হয়। (iii) এবং ভরকেন্দ্রে তাদের উভয়েরই একই মুখ্য অক্ষ এবং সমান মুখ্য-জাড্য-ভ্রামক (principal moments of inertia) থাকে। (এই উপপাদ্যের প্রমাণ সহজ তবে এখানে দেওয়া হল না)।

উদাহরণ ঃ (i) M ভরবিশিষ্ট, $2a$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ডের জন্য একটি সমজাড্য-ভ্রামক বিশিষ্ট কণাতন্ত্র নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন O হল দণ্ডটির ভরকেন্দ্র। O বিন্দুতে এবং দণ্ডটির দুই প্রান্তবিন্দুতে তিনটি ভর রাখা হল। প্রান্তবিন্দু দুটিতেই ভর m রাখলে এবং কেন্দ্রে $M - 2m$ ভরবিশিষ্ট একটি কণা রাখলে তিনটির সম্মিলিত ভর হয় M এবং ভরকেন্দ্র O-তেই থাকে।

O-এর ভিতর দিয়ে দণ্ডের ওপর লম্ব একটি রেখার সাপেক্ষে দণ্ডের জাড্য-ভ্রামক $\frac{1}{3}Ma^2$ এবং কণাগুলির জাড্য-ভ্রামক $2ma^2$

$\therefore \quad m = \frac{1}{6}M$ নিলে আমরা নির্ণেয় কণাতন্ত্রটি পাই। দণ্ড বরাবর একটি রেখার সাপেক্ষে দণ্ডটির এবং কণাগুলির জাড্য-ভ্রামক শূন্য।

একইভাবে দেখান যে, $\frac{M}{2}$ ভরযুক্ত দুটি কণা, কেন্দ্রবিন্দু থেকে $\frac{a}{\sqrt{3}}$ দূরত্বে O-এর দুদিকে থাকলে তারাও দণ্ডটির সঙ্গে সমভ্রামকযুক্ত।

13.8 সারাংশ

এই অধ্যায়ে আপনারা

- জাড্য-ভ্রামকের ও জাড্য গুণফলে সংজ্ঞা পেলেন।
- মুখ্য-অক্ষতন্ত্র সম্বন্ধে জানলেন।
- বিভিন্ন বস্তুর জাড্য-ভ্রামক নির্ণয় করলেন।

দণ্ড, আয়তক্ষেত্র, আয়তাকার ঘনবস্তু, ফাঁপা ও ঘন গোলাকার জাড্য-ভ্রামকের মানগুলি মনে রাখলে পরবর্তী অধ্যায়ে সুবিধা হবে।

এখানে জাড্য-ভ্রামকের একটি তালিকা দেওয়া হল।

	বস্তু	অক্ষ	O
(i)	সরু সুষম দণ্ড	প্রান্তবিন্দুগামী লম্ব অক্ষ	$M\frac{4a^3}{3}$
	দৈর্ঘ্য $2a$, ভর M	মধ্যবিন্দুগামী লম্ব অক্ষ	$M\frac{a^2}{3}$
(ii)	আয়তক্ষেত্র,	কেন্দ্রগামী $2a$ ধারের সমান্তরাল অক্ষ	$M\frac{b^2}{3}$
	$2a \times 2b$, ভর M	কেন্দ্রগামী $2b$ ধারের সমান্তরাল অক্ষ	$M\frac{a^2}{3}$
(iii)	আয়তাকার সুষম ঘনবস্তু,	কেন্দ্রগামী $2a$ ধারের সমান্তরাল অক্ষ	$M\frac{b^2+c^2}{3}$
	$2a \times 2b \times 2c$ ভর M		
(iv)	বৃত্তাকার চাকতি,	কেন্দ্রগামী ব্যাসের সাপেক্ষে	$\frac{Ma^2}{4}$
	ভর M, ব্যাসার্ধ a	কেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে	$\frac{Ma^2}{2}$
(v)	বত্তাকার আংটি,	কেন্দ্রগামী ব্যাস,	$\frac{Ma^2}{2}$
	ভর M, ব্যাসার্ধ a	কেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ	Ma^2
(vi)	ফাঁপাবৃত্তাকার বেলন	অক্ষের সাপেক্ষে	Ma^2
	ভর M, ব্যাসার্ধ a		

($v$ii) ঘনবৃত্তাকার বেলন ভর M, ব্যাসার্ধ a	অক্ষের সাপেক্ষে	$\frac{Ma^2}{2}$
($v$iii) উপবৃত্তাকার চাকতি	x-অক্ষ	$M\frac{b^2}{4}$
পরিসীমা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	y-অক্ষ	$M\frac{a^2}{4}$
ভর M	z-অক্ষ	$M\frac{a^2+b^2}{4}$
(ix) ফাঁপা গোলক, ব্যাসার্ধ a, ভর M	ব্যাস	$\frac{2Ma^2}{3}$
(x) ঘন গোলক, ব্যাসার্ধ a, ভর M	ব্যাস	$\frac{2Ma^2}{5}$
(xi) ঘন উপবৃত্তক যার পরিসীমা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ভর M	x-অক্ষ	$M\frac{b^2+c^2}{5}$

● যদি Ox, Oy, Oz সাপেক্ষে কোন দৃঢ়বস্তুর জাড্য-ভ্রামক যথাক্রমে হয় A, B, C তবে $A = \Sigma m\left(y^2+z^2\right)$ ইত্যাদি যদি Oy, Oz ; Oz, Ox ; Ox, Oy এই জোড়গুলির সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-গুণফল হয় যথাক্রমে D, E ও F তবে, $D = \Sigma myz$ ইত্যাদি।

যদি O বিন্দুগামী একটি সরলরেখার দিক কোসাইন হয় $[\lambda, \mu, \gamma]$ তবে ঐ রেখার সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক হল ঃ $A\lambda^2 + B\mu^2 + C\gamma^2 - 2D\mu\gamma - 2E\gamma\lambda - 2F\lambda\mu$

● বস্তুটি একটি সমতল ল্যামিনা হলে, তার ওপর Ox, Oy ঐ দুটি অক্ষের সাপেক্ষে যদি ল্যামিনাটির জাড্য-ভ্রামক হয় যথাক্রমে A ও B, তবে $A = \Sigma my^2, B = \Sigma mx^2$ এবং জাড্য গুণফল $F = \Sigma mxy$। যদি লম্ব-অক্ষ Oz নিই তবে তার সাপেক্ষে জাড্য-ভ্রামক $C = \Sigma m\left(y^2+x^2\right) = A + B$ এবং জাড্য-গুণফল $D = D = O$.

অতএব, ঐ ল্যামিনার ওপর একটি রেখা Ox-এর সঙ্গে O-কোণে নত হলে, তার সাপেক্ষে জাড্য-ভ্রামক হবে, $A\cos^2\theta + B\sin^2\theta - 2F\sin\theta\cos\theta$.

13.9 সর্বশেষে প্রশ্নাবলি ও সমাধান-সংকেত

প্রশ্ন 1. দেখান যে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ এই উপবৃত্ত আকারের সামতলিক ক্ষেত্রটি মোমেন্টাল এলিপসয়েড ঐ উপবৃত্তের কেন্দ্রের সাপেক্ষে হল $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)z^2$ = ধ্রুবক।

সমাধান ঃ উপবৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ভর M এবং ধরা যাক, এলিপসয়েডটির কেন্দ্র O এবং এর পরাক্ষ ও উপাক্ষ যথাক্রমে Ox ও Oy বরাবর। Ox ও Oy ছাড়া O বিন্দুতে Oz, তলটির ওপর লম্ব অক্ষ।

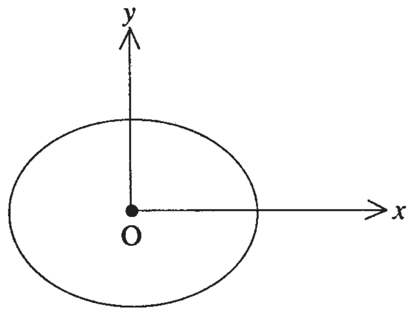
উপবৃত্তাকার ক্ষেত্রটি Ox এবং Oy-এর সাপেক্ষে সদৃশ (symmetric) হওয়াতে, $F = Ox$, Oy সাপেক্ষে জাড্য-গুণফল $= O$ এবং বস্তুটির যেকোনো বিন্দুতে z-স্থানাঙ্ক O বলে, Oz, Ox সাপেক্ষে জাড্য-গুণফল $= E = O$ এবং Oz, Oy সাপেক্ষে জাড্য-গুণফল $= D = O$।

অতএব, O বিন্দুতে Ox, Oy, Oz তিনটিই মুখ্য অক্ষ এবং $A = Ox$ সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক $= M\frac{b^2}{4}$, $B = Oy$ সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক $= M\frac{a^2}{4}$, $C = Oz$ সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক $= M\frac{a^2+b^2}{4}$ (লম্ব অক্ষের উপপাদ্য অনুসারে)।

$\therefore$ O বিন্দুতে মোমেন্টাল এলিপসয়েড $Ax^2+By^2+Cz^2 =$ ধ্রুবক।

বা, $\frac{b^2x^2}{4}+\frac{a^2y^2}{4}+\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)z^2 =$ ধ্রুবক।

বা, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)z^2 =$ ধ্রুব রাশি।



প্রশ্ন 2. পূর্বের প্রশ্নের উপবৃত্তাকার ক্ষেত্রের জন্য, পরাক্ষের (Major axis) এক প্রান্তে মোমেন্টাল এলিপসয়েড নির্ণয় করুন।

পরাক্ষের এক প্রান্তে Oy-এর সমান্তরাল একটি অক্ষ নিন এবং Oz-এর সমান্তরাল আর একটি অক্ষ নিন। বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক ঐ অক্ষ দুটির সাপেক্ষে হয় যথাক্রমে

$$B=\frac{Ma^2}{4}+Ma^2=\frac{5Ma^2}{4}\ \text{(সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য)}$$

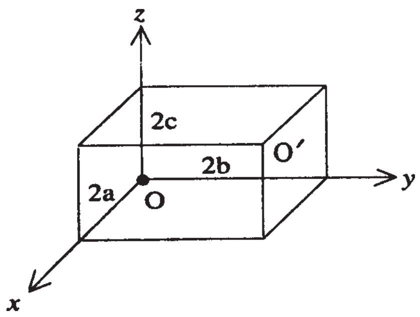
$$C=\frac{M}{4}\left(a^2+b^2\right)+Ma^2=\frac{5Ma^2}{4}+\frac{Mb^2}{4}\ \text{(সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য)}$$

এবং $A=\frac{Mb^2}{4}$

$D = E = O$ (লম্ব অক্ষ উপস্থিত)

এবং $F = O$ (যেহেতু Ox সাপেক্ষে বস্তুটি সদৃশ) ইত্যাদি।

প্রশ্ন 3. একটি সুষম আয়তাকার ঘনবস্তুর ভর M ও তিনটি ধারের দৈর্ঘ্য $2a$, $2b$, $2c$, ঘনবস্তুটির একটি শীর্ষবিন্দু O-তে এর মোমেন্টাল এলিপসয়েড নির্ণয় করুন। O', কোণাকুনিভাবে O-এর বিপরীত শীর্ষবিন্দু হলে, OO'-এর সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক নির্ণয় করুন।



O বিন্দুর মধ্যদিয়ে পরস্পর লম্ব তিনটি ধার (side) বরাবর Ox, Oy, Oz অক্ষ নিন। O মূলবিন্দু।

A যদি Ox বরাবর বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক হয়, তবে, A = (বস্তুর কেন্দ্রগামী Ox -এর সমান্তরাল অক্ষসাপেক্ষে বস্তুর জাড্য-ভ্রামক) + M (O থেকে কেন্দ্রের দূরত্বের বর্গ)

(কেন্দ্র অর্থাৎ ভরকেন্দ্র, যার স্থানাঙ্ক (a, b, c))

$$\frac{M}{3}\left(b^2+c^2\right)+M\left(b^2+c^2\right)=\frac{4M}{3}\left(b^2+c^2\right)$$

$B = Oy$ সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক $= 4M\left(\dfrac{c^2+a^2}{3}\right)$ এবং

$C = Oz$ সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক $= 4M\dfrac{a^2+b^2}{3}$

ভরকেন্দ্র দিয়ে তিনটি ধারের সঙ্গে সমান্তরাল তিনটি অক্ষ নিলে, প্রতিটি অক্ষের সাপেক্ষেই বস্তুটির সাদৃশ্য (symmetry) আছে। অতএব এদের সাপেক্ষে দুটি-দুটি করে অক্ষ নিলে, জাড্য গুণফল শূন্যই হবে।

অতএব, $D = (Oy, Oz)$ সাপেক্ষে জাড্যগুণফল $= O + M(b\text{e}) = Mb\text{c}$ (সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য)

$E = Oz, Ox$ সাপেক্ষে জাড্যগুণফল $= Mca$

$F = Ox, Oy$ সাপেক্ষে জাড্য-গুণফল $= Mab$

$\therefore$ O-তে মোমেন্টাল এলিপসয়েডের সমীকরণ

$$\frac{4M}{3}\{(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2\}=2M(bcyz+cazx+abxy)=MK^4$$

এখন, O'-এর স্থানাঙ্ক $= (2a, 2b, 2c)$ এবং $OO' = R = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

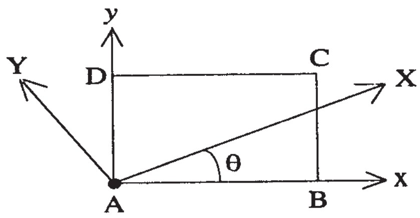
$\therefore$ OO' সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য-ভ্রামক

$$= \frac{MK^4}{R^2}=\frac{2}{3}M\left(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\right)/\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

প্রশ্ন 4. একটি আয়তক্ষেত্রাকার সমতল বস্তুর $ABCD$-র ধার দুটির দৈর্ঘ্য $2a$ এবং $2b$. $AB = 2a$, $AD = 2b$, দেখান যে, A-বিন্দুতে বস্তুটির একটি মুখ্য অক্ষ AB-র সঙ্গে $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3ab}{2(a^2-b^2)}$ কোণে নত।

AB-এর সাপেক্ষে আয়তক্ষেত্রটির জাড্য-ভ্রামক $= A_1 = \frac{4}{3}Mb^2$

AD-এর সাপেক্ষে আয়তক্ষেত্রটির জাড্য-ভ্রামক $= B_1 = \frac{4}{3}Ma^2$ এবং $F_1 = AB$, AD সাপেক্ষে জাড্য-গুণফল $= Mab$. (সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য)। (M বস্তুটির ভর)। ধরুন A বিন্দুতে AX, AY আয়তক্ষেত্রটির মুখ্য-অক্ষ। এক্ষেত্রে যেকোনো লম্ব-অক্ষই মুখ্য অক্ষ হবে, অর্থাৎ AZ, A বিন্দুতে তলের ওপর লম্ব হলে তা সবসময়ই লম্ব অক্ষ। AB ও AX-θ কোণে নত হলে, AX, AY সাপেক্ষে তলটির কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক



$(x', y') = (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$, যেখানে (x, y) হল ঐ বিন্দুটির AB, AD সাপেক্ষে স্থানাঙ্ক।

$\therefore$ AX, AY সাপেক্ষে জাড্য গুণফল $= \Sigma mx'y'$

(m, (x', y') বিন্দুতে ভর)

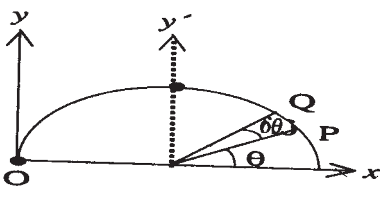
$= \Sigma m(x\cos\theta + y\sin\theta)(-x\sin\theta + y\cos\theta)$

$= \frac{1}{2}(A_1 - B_1)\sin 2\theta + F_1\cos 2\theta = 0$, AX, AY যদি মুখ্য-অক্ষ হয়।

$$\therefore \quad \tan 2\theta = \frac{2F_1}{B_1 - A_1} = \frac{3ab}{2(a^2-b^2)}$$

প্রশ্ন 5. একটি সুষম সরু তারকে অর্ধবৃত্তের আকারে বাঁকানো হয়েছে, যার ব্যাসার্ধ a, দেখান যে দুটি ব্যাস-এর এক প্রান্তে, তারটির সমতলের ওপর যে মুখ্য অক্ষ আছে তারা ব্যাসটির সঙ্গে যথাক্রমে $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{\pi}$ ও $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{\pi}$ কোণে নত।

সমাধান ঃ OR ব্যাসটির কেন্দ্র C। O-তে লম্বঅক্ষদ্বয় Ox (OR বরাবর) ও Oy নেওয়া হল। PQ, তারাটির ওপর ক্ষুদ্র অংশ (elementary length), $\angle PCP = \theta$, $\angle PCQ = \delta\theta$ এবং চাপ $PQ = a\delta\theta$, $Cy' \parallel Oy$.



$\therefore$ CR সাপেক্ষে তারটির জাড্য-ভ্রামক,

$= \int(\rho . ad\theta)(a\sin\theta)^2$ (ρ = ঘনত্ব = ভর/তারের দৈর্ঘ্য $= M/\pi a$ যেখানে M = ভর)।

$$= 2a^2\rho.\frac{\pi}{4} = \frac{Ma^2}{2} = A$$

Cy' সাপেক্ষে তারটির জাড্য-ভ্রামক $= \int_0^{\pi}(\rho a d\theta)(a\cos\theta)^2 = \frac{Ma^2}{2}$

$\therefore$ $B = Oy$ সাপেক্ষে তারটির জাড্য-ভ্রামক $= \frac{Ma^2}{3} + Ma^2 = \frac{3Ma^2}{2}$

(এই তারটির ভরকেন্দ্র Cy'-এর ওপর অবস্থিত, যার দূরত্ব Oy থেকে a)।

অথবা $\left(B = \int_o^{\pi}(a + a\cos\theta)^2(\rho a d\theta) = \frac{3Ma^2}{2}\right)$ এবং $F = Ox$, Oy সাপেক্ষে তারটির জাড্য গুণফল

$$= \int_0^{\pi}(\rho a d\theta)(a\sin\theta)(a + a\cos\theta) = \rho a^2\int_0^{\pi}\sin\theta(1+\cos\theta)\,d\theta$$

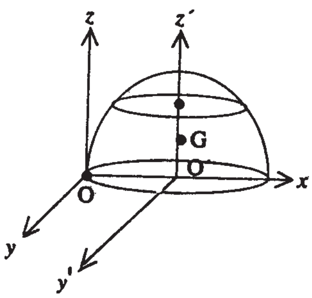
$$= 2Ma^2 / \pi$$

$\therefore$ 0 বিন্দুতে একটি মুখ্য অক্ষ Ox-এর সঙ্গে θ কোণে নত হল, $\tan 2\theta = \frac{2F}{B-A} = \frac{4}{\pi}$ ইত্যাদি।

প্রশ্ন 6. দেখান যে, ABC যদি একটি ত্রিভুজ হয় যার C কোণটি $90°$, তবে C বিন্দুতে ত্রিভুজটির তিনটি মুখ্য অক্ষ আছে তার একটি ত্রিভুজের তলের ওপর লম্ব এবং অপর দুটি CA ও CB-র সঙ্গে $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{ab}{a^2-b^2}$ কোণে নত। ($CA = b$, $CB = a$).

প্রশ্ন 7. দেখান যে, একটি ঘন-অর্ধগোলকের (solid hemisphere) ভূমির (base) পরিসীমার ওপরের একটি বিন্দুতে মোমেন্টাল এলিপসয়েডের সমীকরণ $2x^2 + 7(y^2+z^2) - \frac{15}{4}xz =$ constant.

সমাধান ঃ O ভূমির পরিসীমার ওপর বিন্দু, Ox, O বিন্দুগামী ব্যস বরাবর, Oy, O বিন্দুর ভূমি তলের ওপর Ox-এর ওপর লম্ব। Oz ভূমির তলের ওপর লম্ব।



G : $\left(a, 0, \frac{3}{8}a\right)$ গোলকটির ভরকেন্দ্র।

একই ভূমির সঙ্গে সমান্তরাল চাকতি ভূমি থেকে z-দূরত্বে থাকলে এবং তার প্রস্থ ∂z হলে, Ox সাপেক্ষে তার জাড্য-ভ্রামক হল $\pi\rho(a^2 - z^2)\partial z\left(\frac{1}{4}(a^2 - z^2) + z^2\right)$ (চাকতির ভরকেন্দ্র (a, o, z) বিন্দুতে)।

$\therefore$ Ox সাপেক্ষে অর্ধগোলকটির জাড্য-ভ্রামক $= A$

$$= \frac{1}{4}\pi\rho\int_0^a (a^2 - z^2)(a^2 + 3z^2)\,dz = \frac{2}{5}Ma^2, \quad M = \frac{2}{3}\pi a^3\rho \; = \text{ভর}$$

oy সাপেক্ষে চাকতির জাড্য-ভ্রামক হল

$$\pi\rho(a^2 - z^2)\delta z\left[\frac{1}{4}(a^2 - z^2) + a^2 + z^2\right]$$

$\because$ o থেকে $(a,\ o,\ z)$ এর দূরত্ব $\sqrt{a^2 + z^2}$

$\therefore$ Oy-সাপেক্ষে অর্ধগোলকটির জাড্য-ভ্রামক

$$B = A + \int_0^a \pi\rho(a^2 - z^2)a^2 dz = A + Ma^2 = \frac{7}{5}Ma^2$$

$\left(\int_0^a \pi\rho(a^2 - z^2)dz = M = \text{অর্ধ গোলকটির ভর}\right)$ এবং, $C = Oz$ সাপেক্ষে অর্ধগোলকটির জাড্য-ভ্রামক

$$= \int_0^a \pi\rho(a^2 - z^2)dz\left[\frac{1}{2}(a^2 - z^2) + a^2\right]$$

$$= \frac{\pi\rho}{2}\int_0^a (a^2 - z^2)(3a^2 - z^2)dz = \frac{7}{5}Ma^2$$

এখন সরুচাকতিটির কেন্দ্রে যদি Ox, Oy, Oz এর সমান্তরাল অক্ষ নেওয়া যায়, তো, দুটি দুটি করে নিয়ে এদের সাপেক্ষে চাকতির জাড্য গুণফলগুলি সবই শূন্য।

$\therefore$ $(Ox,\ Oy)$ সাপেক্ষে চাকতির জাড্য-গুণফল।

$= O$ + (চাকতির ভর) $(a \cdot 0)$ $= \left(\pi\rho(a^2 - z^2)\partial z\right)a \cdot 0 = 0$

$(Oy,\ Oz)$ সাপেক্ষে চাকতির জাড্য গুণফল = (চাকতির ভর) $0 \cdot z = 0$

$(Oz,\ Ox)$ সাপেক্ষে চাকতির জাড্য গুণফল = (চাকতির ভর) $(z \cdot a)$

$$= \left(\pi\rho(a^2 - z^2)\partial z \cdot az\right)$$

$\therefore$ $E = (Oz,\ Ox)$ সাপেক্ষে অর্ধগোলকের জাড্য-গুণফল

$$= \int_0^a \pi\rho(a^2 - z^2)az\,dz = \frac{3}{8}Ma^2$$

$$D = F = O$$

$\therefore$ O বিন্দুতে মোমেন্টাল এলিপসয়েড হল

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Ezx \;=\; \text{constant}$$

বা, $\quad 2x^2 + 7\left(y^2 + z^2\right) = \dfrac{15}{4}zx = \;\text{constant}$

প্রশ্ন 8. অর্ধগোলকটি ফাঁপা হলে দেখান যে ভূমির পরিসীমার ওপর যে কোনো বিন্দুতে মোমেন্টাল এলিপসয়েডের সমীকরণ হল।

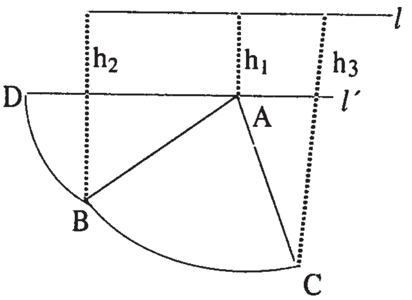
$$2x^2 + 5\left(y^2 + z^2\right) - 3zx = 0$$

(সংকেত ঃ অর্ধগোলকটির ভূমির সঙ্গে সমান্তরাল বৃত্তে ভাগ করে নিন।)

প্রশ্ন 9. ত্রিভুজের সমতলের ওপর যে কোনো একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সাপেক্ষে ত্রিভুজের জাড্য-ভ্রামক নির্ণয় করুন। এর থেকে দেখান যে, ত্রিভুজের ভর M হলে ত্রিভুজটি তার বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলিতে অবস্থিত $M/3$ ভরের তিনটির কণা দ্বারা গঠিত তন্ত্রের সঙ্গে একই জাড্য-ভ্রামক বিশিষ্ট হবে। (equimomental হবে)।

সমাধান ঃ ABC ত্রিভুজে, যার সমতলে l একটি সরলরেখা, A, B, C থেকে l লম্ব দূরত্ব h_1, h_2, h_3, $h_1 < h_2 < h_3$.

$l'A$ বিন্দুগামী l এর সঙ্গে সমান্তরাল সরলরেখা।



CB (বা বর্ধিত CB) l' কে D তে মিলিত হয়। যদি মনে করি ACD এবং ABD ও ABC-র সমান ঘনত্বযুক্ত বস্তুতে নির্মিত ত্রিভুজ, (সবকটি ত্রিভুজের ঘনত্ব = ভর / ক্ষেত্রফল = ρ ধরা যাক।)

তবে, ΔABC-এর ভর $= M_1 - M_2$, যেখানে, M_1 ও M_2 যথাক্রমে ΔADC ও ΔADB এর ভর। কিন্তু এই দুটি ত্রিভুজের একই ভূমি AD। অতএব, $\dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{h_3 - h_2}{h_2 - h_1}$

$$\therefore \quad M_1 = M\left(h_3 - h_1\right) / \left(h_3 - h_2\right)$$

$$M_2 = M\left(h_2 - h_1\right) / \left(h_3 - h_2\right)$$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের জাড্য-ভ্রামক, l' সাপেক্ষে

$=$ ADC-র জাড্য-ভ্রামক l' সাপেক্ষে $-\Delta ADB$ এর জাড্য-ভ্রামক l' সাপেক্ষে

$$= \frac{1}{6}M_1\left(h_3 - h_1\right)^2 - \frac{1}{6}\left(h_2 - h_1\right)^2 = \frac{1}{6}M\left\{\left(h_3 - h_1\right)^3 - \left(h_2 - h_1\right)^3\right\}\Big/\left(h_3 - h_2\right)$$

$$= \frac{1}{6}M\left\{3h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_2h_3 - 3h_3h_1 - 3h_1h_2\right\}$$

এখন ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র l থেকে $\frac{1}{3}(h_1 + h_2 + h_3)$ দূরত্বে, এবং l' থেকে $\frac{1}{3}(h_2 + h_3 - 2h_1)$ দূরত্বে আছে।

অতএব পরপর দুবার সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখি যে, l সাপেক্ষে ΔABC এর জাড্য-ভ্রামক = l' সাপেক্ষে তার জাড্য-ভ্রামক $-\frac{1}{9}M(h_2 + h_3 - 2h_1)^2 + \frac{1}{9}(h_1 + h_2 + h_3)^2$

$$= \frac{1}{3}M\left\{\left(\frac{h_2 + h_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_3 + h_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)^2\right\}$$

যা কিনা, l সাপেক্ষে ত্রিভুজের বাহুর মধ্যবিন্দুগুলিতে অবস্থিত $\frac{M}{3}$-ভরের তিনটি কণার জাড্য-ভ্রামকের সমষ্টির সমান।

কণা তিনটির মোট ভর = M = ত্রিভুজটির ভর এবং তাদের ভরকেন্দ্রও ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রেই অবস্থিত। অতএব ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী তিনটি অক্ষ যদি ত্রিভুজের মুখ্য অক্ষ হয় তবে তারা কণা তিনটি দ্বারা গঠিত তন্ত্রেরও মুখ্য অক্ষ হবে। অতএব, ত্রিভুজ ও কণাতন্ত্রটি ইকুইমোমেন্টাল।

প্রশ্ন 10. $ABCD$ একটি সুষম সামান্তরিক, যার ভর M। তার চারটি বাহুর মধ্যবিন্দুতে $M/6$ ভরের এক-একটি কণা রাখা হল এবং দুই কর্ণের ছেদবিন্দুতে $M/3$ ভর রাখা হল। দেখান যে, সামন্তরিকটি এই পাঁচটি কণার সঙ্গে একই জাড্য-ভ্রামক বিশিষ্ট।

একক 14 ❑ ডালাম্বারের নীতি ও তৎপ্রয়োগে দৃঢ়বস্তুর গতিসূত্রাদি

গঠন

14.1 প্রস্তাবনা

আমরা আগেই বলেছি যে একটি দৃঢ়বস্তু অসংখ্য (infinite) কণার সমষ্টি। কাজেই দৃঢ়বস্তুর গতিসূত্রকে কেবলমাত্র একটি ভেক্টর গতি সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব নয়। নিউটনের গতিসূত্র থেকে সরাসরি এই গতিসমীকরণ লেখা যাবে না। দৃঢ়বস্তুর গতিসমীকরণগুলি নির্ণয়ের আগে আমরা তাই এই নীতি বিবৃত করব।

14.2 উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়ে আমাদের উদ্দেশ্য হল

- ডালাম্বারের নীতি বিবৃত করা
- ঐ নীতির সাহায্যে দৃঢ়বস্তুর গতিসূত্রাদি নির্ণয় করা
- দৃঢ়বস্তুর গতিকে তার ভরকেন্দ্রের গতি ও ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে গতি—এই দুটি অংশে বিভক্ত করা।

14.3 ডালাম্বারের নীতি—বিবৃতি (D'Alembert's Principal Statement)

ধরা যাক t সময়ে m-ভরের একটি বস্তুকণার ওপর $\vec{F}$ বল প্রযুক্ত আছে, এবং কোনো স্থির মূলবিন্দু O-এর সাপেক্ষে কণাটির অবস্থান ভেক্টর $\bar{r}$।

অতএব, কণাটির গতিসমীকরণ (equation of motion) হল

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad .... \text{ (i)}$$

এখন O বিন্দুতে লম্ব-অক্ষ Ox, Oy, Oz সাপেক্ষে $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ এবং $\vec{F} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$ হলে, যেখানে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ হল Ox, Oy, Oz বরাবর একক ভেক্টর, (1) লিখতে পারি $m\ddot{x} = X, m\ddot{y} = Y, m\ddot{z} = Z$ .... (2) এই তিনটি হল লম্ব-অক্ষের সাপেক্ষে কণাটির স্কালার গতিসমীকরণ।

এখন (1) কে আমরা লিখতে পারি নিম্নরূপে

$$-m\ddot{\vec{r}} + \vec{F} = 0 \quad \text{(প্রতি সময়ের জন্য)}$$

(এখানে t সাপেক্ষে অবকলন নির্দেশ করে)।

অর্থাৎ স্থিতিবিদ্যার ভাষায় বললে, কণাটি প্রতিটি সময় t-এর জন্যে $-m\ddot{\vec{r}}$ ও $\vec{F}$, এই দুটি বলের সম্মিলিত প্রয়োগের ফলে সাম্যাবস্থায় (equilibrium) থাকবে।

কণার ওপর $\vec{F}$ বলটি হল প্রযুক্ত বহির্বল (external force). $m\ddot{\vec{r}}$ কে বলা যায় কণাটির ত্বরণ বল (effective force) $-m\ddot{\vec{r}}$ কে বলা যায় কণাটির বিপরীত ত্বরণ বল (*re*ve*r*sed effe*c*t*iv*e fo*rc*e).

অতএব, আমরা ভাবতে পারি যে, একটি কণার গতির ক্ষেত্রে প্রতিটি সময়ে বহির্বল $\vec{F}$ ও বিপরীত ত্বরণ-বল $-m\ddot{\vec{r}}$, এই দুটি বল সাম্যাবস্থায় আছে।

এখন একটি দৃঢ়বস্তুর কথা চিন্তা করলে আমরা দেখি যে দৃঢ়বস্তুটি অসংখ্য কণার সমষ্টি। প্রতিটি কণা m_i-এর ওপর বহির্বল $\vec{F_i}$ ছাড়াও অন্যান্য কণা দ্বারা প্রযুক্ত অন্তর্বলও (internal force) থাকবে। এখন যদি ধরি যে কণা m_i ওপর কণা $m_j(j \neq i)\vec{R}_{ij}$ বল প্রয়োগ করে, যেখানে $\vec{R}_{ij}$ বলটির ক্রিয়ারেখা m_i ও m_j, এই দুটি কণার সংযোগকারী রেখা বরাবর এবং $\vec{R}_j = m_j$ কর্তৃক m_i এর ওপর অন্তর্বল এবং $\vec{R}_{ji} = -\vec{R}_{ij}$ অর্থাৎ m_i, m_j-এর ওপর যে বল প্রয়োগ করে, এবং mj, mi এর ওপর যে বল প্রয়োগ করে তারা সমানমানযুক্ত ও বিপরীতমুখী। অন্তর্বল ঘটিত এই ধারণার ফলে আমরা দেখি যে একটি দৃঢ়বস্তুতে যত অন্তর্বল আছে, তারা একটি বলগোষ্ঠী তৈরি করবে যা সাম্যে থাকে (A system of forces in equilibrium)। (কারণ অন্তর্বল সমূহের ভেক্টর যোগফল = 0 এবং তাদের যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক ভেক্টর যোগফল = 0) (এ প্রসঙ্গে Unit-11 দেখুন)।

সেক্ষেত্রে, ডালাম্বারের নীতি বলছে

—"একটি দৃঢ়বস্তুর প্রতিটি (বস্তুকণাতে) প্রযুক্ত বহির্বল, এবং প্রতিটি কণার বিপরীত ত্বরণ-বল একত্রে যে বলগোষ্ঠী (System of Forces) গঠন করে তা প্রতিসময়ে (at every instant of time) সাম্যাবস্থায় থাকবে।

14.4 ডালাম্বার নীতি থেকে দৃঢ়বস্তুর গতিসূত্র (Deduction of Equations of Motion of a Rigid Body)

⟶ ধরি, একটি দৃঢ়বস্তুর P_i বিন্দুতে m_i ভর অবস্থিত। কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দু সাপেক্ষে P_i এর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_i}$ এবং P_i বিন্দুতে প্রযুক্ত বহির্বল $\vec{F_i}$

ডালাম্বারের নীতি অনুযায়ী, সমগ্র বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলগোষ্ঠী, অর্থাৎ $\sum\left(\vec{F_i} - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)$ সাম্যে আছে।

এখন আমরা স্থিতিবিদ্যা থেকে জানি যে বলগোষ্ঠীর সাম্যের প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত দুটি হল—

(i) বলগুলির সবকটির ভেক্টর যোগফল শূন্য এবং (ii) কোনো একটি বিন্দুর সাপেক্ষে বলগুলির ভ্রামক-ভেক্টরগুলির ভেক্টর যোগফল শূন্য।

অর্থাৎ, $$\sum_i\left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right) = \vec{0} \qquad \text{........ } (1a)$$

বা, $$\sum m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum \vec{F}_i$$

বা, $$\frac{d}{dt}\sum m_i\dot{\vec{r}}_i = \sum \vec{F}_i \qquad \text{........ } (1b)$$

এবং O বিন্দুসাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে,

$$\sum_i \vec{r}_i \times\left(-m_i\ddot{\vec{r}}_i + \vec{F}_i\right) = 0$$

বা, $$\sum m_i\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad \text{........ } (2a)$$

এটাকে আমরা লিখতে পারি,

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i\right) = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad \text{........ } (2b)$$

যেহেতু $$\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0$$

সমীকরণ $(1b)$ বলছে যে বস্তুটির সমগ্র রৈখিক ভরবেগ (total linear momentum)-এর পরিবর্তনের হার বর্হিবলগুলির ভেক্টর যোগফলের সমান।

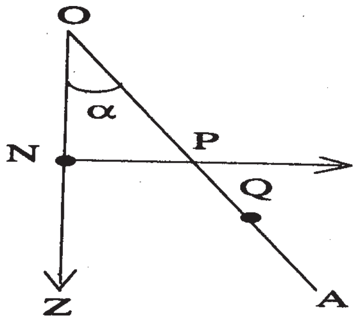
$(2b)$ বলে যে O-সাপেক্ষে বস্তুটির সমগ্র কৌণিক ভরবেগ (total angular momentum)-এর পরিবর্তনের হার, O-সাপেক্ষে বর্হিবলগুলির ভ্রামকের ভেক্টর যোগফলের সমান।

O বিন্দুতে Ox, Oy, Oz লম্ব কার্তীয় অক্ষের সাপেক্ষে Pi-এর স্থানাঙ্ক (x_i, y_i, z_i), $\vec{F_i}$-এর উপাংশ (component) $[X_i, Y_i, Z_i]$ হলে, $1(b)$ ও $2(b)$ কে লিখতে পারি,

$$\sum m_i \ddot{x}_i = \sum X_i ; \sum m_i \ddot{y}_i = \sum Y_i ; \sum m_i \ddot{z}_i = \sum Z_i \qquad \text{........} \quad (3)$$

এবং
$$\left.\begin{aligned} \sum m_i(y_i\ddot{z}_i - z_i\ddot{y}_i) &= \sum(y_iZ_i - z_iY_i) \\ \sum m_i(z_i\ddot{x}_i - x_i\ddot{z}_i) &= \sum(z_iX_i - x_iZ_i) \\ \sum m_i(x_i\ddot{y}_i - y_i\ddot{z}_i) &= \sum(x_iY_i - y_iX_i) \end{aligned}\right] \qquad \text{........} \quad (4)$$

মোট এই ছটি সমীকরণকেই দৃঢ়বস্তুর গতিসমীকরণ বলা হবে। আমরা আগেই দেখেছি দৃঢ়বস্তুর স্বাতন্ত্র্যমাত্রা ছয়, অতএব ছয়টি সমীকরণই দৃঢ়বস্তুর গতি নির্ধারণের জন্য যথেষ্ট।



উদাহরণ, একটি সুষম দণ্ড OA, যার দৈর্ঘ্য $2a$, O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরতে পারে। Oz, O-এর ভিতর দিয়ে উল্লম্ব, এবং Oz এর সঙ্গে একটি নির্দিষ্ট (ধ্রুব) কোণ α-তে আনত অবস্থায় OA, ধ্রুব কৌণিক গতিবেগ (constant angular velocity) ω নিয়ে ঘুরছে। α-কোণটি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ OA দণ্ড, OZ এর সঙ্গে α কোণে নত অবস্থায় ঘুরছে। PQ, OA-র ওপরে একটি দৈর্ঘ্যের ক্ষুদ্র অংশ (elementary length)। $OP = x$, $PQ = \delta x$ ধরা যাক। PN, OZ এর ওপর লম্ব। দণ্ডটি ঘুরলে, P-বিন্দু N-এর চারিদিকে N-কেন্দ্রে, NP-ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে ভ্রমণ করে।

অতএব P-এর ত্বরণ হল $\omega^2 PN$, $\overrightarrow{PN}$ দিক বরাবর। (Centripetal acceleration)।

PQ-এর ভর হল $\dfrac{M}{2a}\Delta x$

$\therefore$ PQ-এর ওপর ত্বরণ বল, $\left(\dfrac{M}{2a}\Delta x\right)\omega^2 PN$, $\overrightarrow{PN}$ বরাবর

$\therefore$ PQ-এর ওপর বিপরীত ত্বরণ বল,

$\left(\dfrac{M}{2a}\Delta x\right)\omega^2 PN$, $\overrightarrow{NP}$ বরাবর

দণ্ডের প্রতিটি বিন্দুতে অভিকর্ষজ বল (gravity) ক্রিয়ারত, যেমন PQ-এর ওপর অভিকর্ষজ বল $\left(\dfrac{M}{2a}\Delta x\right).g$ এছাড়াও O-বিন্দুতে দণ্ডটির ওপরে প্রতিক্রিয়া বল আছে।

কাজেই ডালাম্বারের নীতি অনুসারে, দণ্ডের প্রতি ক্ষুদ্র অংশের বিপরীত ত্বরণ বল, অভিকর্ষজ বল ও O বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল, সাম্যে আছে। অতএব O বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে,

$$\sum\left(\frac{M}{2a}\Delta x\right)\omega^2(x\sin\alpha)x\cos\alpha - \sum\left(\frac{M}{2a}\Delta x\right)g.x\sin\alpha = 0$$

(প্রথম পদটি বিপরীত ত্বরণ বলের ভ্রামক, পরেরটি অভিকর্ষজ বলের ভ্রামক, দুটি ভ্রামকের দিক (se*n*se) বিপরীত। প্রতিক্রিয়া বলের ভ্রামক O-বিন্দু সাপেক্ষে শূন্য। প্রতিক্রিয়া বলটির মান ও দিক দুটিই অজানা তাই ঐ বলকে এড়িয়ে যাবার জন্যই O বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়েছি।)

বা, $$\int_0^{2a} \omega^2 x^2 \sin\alpha\cos\alpha\, dx = \int_0^{2a} g\, x \sin\alpha\, dx$$

$$\therefore \quad \omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{2a} = g\sin\alpha\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{2a}$$

$$\frac{8a^3}{3}\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha = 2a^2 g\sin\alpha,$$

$$\therefore \quad \sin\alpha\left[(\cos\alpha)\frac{4a\omega^2}{3} - g\right] = 0$$

$\therefore$ হয় $\alpha = 0$ (যেখানে দণ্ডটি উল্লম্ব ভাবে স্থির)

বা, $\cos\alpha = {}^{3g}\!/_{4a\omega^2}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{3g}{4a\omega^2}\right)$, এই কোণটি সম্ভব হতে হলে $3g < 4a\omega^2$ হতে হবে,

অন্যথায় উল্লম্ব সাম্যবস্থাই শুধু সম্ভব।

14.5 ভরকেন্দ্রের গতি ও ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে গতি

ধরুন দৃঢ়বস্তুটির ভরকেন্দ্র (Centre of inertia বা centre of mass), G, যার অবস্থান ভেক্টর মূলবিন্দু O সাপেক্ষে $\vec{R}$। তাহলে,

$$\vec{R} = \frac{\Sigma m_i\vec{r}_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i\vec{r}_i}{M}$$

যেখানে, $M = \Sigma m_i$, বস্তুটির ভর।

অতএব, $$M\vec{R} = \sum m_i\vec{r}_i,$$

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum m_i\ddot{\vec{r}}_i, M\ddot{\vec{R}} = \sum m_i\ddot{\vec{r}}_i$$

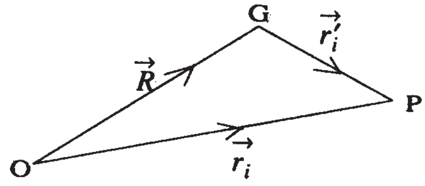
$\therefore$ সমীকরণ $(1a)$ থেকে পাই,

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum \vec{F}_i, \qquad \text{........} \quad (5)$$

বা, $$M\ddot{\bar{x}} = \sum X_i \qquad \text{........} \quad (5a)$$

$$M\ddot{\bar{y}} = \sum Y_i \qquad \text{........} \quad (5b)$$

$$M\ddot{\bar{z}} = \sum Z_i \qquad \text{........} \quad (5c)$$



যেখানে $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ হল Ox, Oy, Oz সাপেক্ষে G এর স্থানাংক। কিন্তু, সমীকরণ (5) হল M-ভরযুক্ত একটিমাত্র কণার গতিসমীকরণ, যেখানে তার ওপর $\sum \vec{F}_i$ বল প্রযুক্ত আছে। এই সমীকরণ (5), বা ($5a$) – ($5c$) দেখে একথা বলা যায় যে, বস্তুর ভরকেন্দ্র এমনভাবে চলে যেন বস্তুর সমস্ত ভর ঐ ভরকেন্দ্রে ঘনীভূত, এবং সমস্ত বহির্বলগুলি যেন, তারা যে দিকে (direction) ছিল, সেই দিক অক্ষুণ্ণ রেখে, ঐ ভরকেন্দ্রে প্রযুক্ত হয়েছে।

P_{i} বস্তুকণাটির অবস্থান ভেক্টর G-এর সাপেক্ষে $\vec{r}_i'$ হলে,

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$$

এখানে, $\dfrac{\sum m_i \vec{r}_i'}{\sum m_i}$ হল G-এর সাপেক্ষে ভরকেন্দ্র G এরই অবস্থান ভেক্টর, অর্থাৎ = 0.

$$\therefore \quad \sum m_i \vec{r}_i' = 0$$

$$\therefore \quad \sum m_i \vec{r}_i' = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i' = 0$$

এখন, $\sum m_i \left(\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i\right)$

$$= \quad \sum m_i \left(\vec{R} + \vec{r}_i'\right) \times \left(\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}_i\right)$$

$$= \quad \sum m_i \vec{R} \times \ddot{\vec{R}} + \sum m_i \vec{r}_i' \times \ddot{\vec{r}}_i' + \sum m_i \vec{R} \times \ddot{\vec{r}}_i' + \sum m_i \vec{r}_i' \times \ddot{\vec{R}}$$

$$= \quad \left(\vec{R} \times \ddot{\vec{R}}\right) \sum m_i + \sum m_i \vec{r}_i' \times \ddot{\vec{r}}_i' + \vec{R} \times \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i' + \left(\sum m_i \vec{r}_i'\right) \times \ddot{\vec{R}}$$

$$= \quad M\left(R \times \ddot{\vec{R}}\right) + \sum m_i \vec{r}_i' \times \ddot{\vec{r}}_i', \quad \text{(i) প্রয়োগ করে।}$$

$$= \quad \vec{R} \times \sum \vec{F}_i + \sum m_i \vec{r}_i' \times \ddot{\vec{r}}_i', \quad \text{(5) থেকে।} \qquad \text{........} \quad [6(a)]$$

একইভাবে আমরা পাই,

$$\sum \vec{r}_i \times F_i = \vec{R} \times \sum \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i' + \vec{F}_i \qquad \text{.......} \quad [6(b)]$$

সমীকরণ $6(a)$, $6(b)$ থেকে পাই,

$$\vec{R}\times\sum\vec{F}_i+\sum m_i\vec{r}_i'\times\ddot{\vec{r}}_i'=\vec{R}\times\sum\vec{F}_i+\sum\vec{r}_i'\times\vec{F}_i$$

অর্থাৎ, $\sum m_i\vec{r}_i'\times\sum\ddot{\vec{r}}_i'=\sum\vec{r}_i'\times\vec{F}_i$ .... (7)

Ox, Oy, Oz এর সমান্তরাল Gx', Gy', Gz' অক্ষের সাপেক্ষে P_i-এর স্থানাঙ্ক (x_i', y_i', z_i') হলে, সমীকরণে (7) থেকে পাই,

$$\sum m_i(y_i'\ddot{z}_i'-z_i'\ddot{y}_i')=\sum(y_i'Z_i-z_i'Y_i) \quad .... \quad (7a)$$

$$\sum m_i(z_i'\ddot{x}_i'-x_i'\ddot{z}_i')=\sum(z_i'X_i-x_i'Z_i) \quad .... \quad (7b)$$

$$\sum m_i(x_i'\ddot{y}_i'-y_i'\ddot{x}_i')=\sum(x_i'Y_i-y_i'X_i) \quad .... \quad (7c)$$

সমীকরণ (6), বা $(7a)$ – $(7c)$-কে বলা হয় G বিন্দু সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুটির গতি সমীকরণ।

লক্ষ্য করুন যে আকারে সমীকরণ (7), সমীকরণ (2) এরই অনুরূপ। এবং G বিন্দুর গতিসমীকরণ (5) এর সঙ্গে সমীকরণ (7) এর কোনো সরাসরি যোগাযোগ নেই ; এই দুটি সমীকরণ পরস্পর অসংযুক্ত (u*nc*oupled)। অর্থাৎ কিনা G যদি স্থিরবিন্দুও হত, তা হলেও সমীকরণ (7) একই থাকত।

অর্থাৎ যদি ভরকেন্দ্রটি স্থিরবিন্দু হত এবং একই বহির্বল বস্তুটির ওপর একইভাবে প্রযুক্ত থাকত, তাহলে ভরকেন্দ্রটির সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুটি চলার ধরন একই থাকত।

14.6 সারাংশ

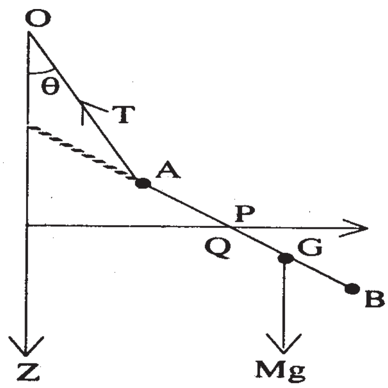
এই এককে আপনারা

- ডালাম্বারের নীতি সম্বন্ধে পড়লেন।
- ঐ নীতি প্রয়োগ করে কীভাবে দৃঢ়বস্তুর গতিসূত্র লেখা যায় তা দেখলেন।
- দেখা গেল যে ছটি সমীকরণ দ্বারা একটি দৃঢ়বস্তুর গতি নিরূপতি হয়।
- তিনটি সমীকরণ হল দৃঢ়বস্তুর ভরকেন্দ্রের সমীকরণ। দৃঢ়বস্তুর ভরকেন্দ্র এমনভাবে সঞ্চারমান যে, দৃঢ়বস্তুটির সমস্ত ভর যেন ঐ বিন্দুতেই কেন্দ্রীভূত এবং সমস্ত বহির্বলও যেন ভরকেন্দ্রেই প্রযুক্ত আছে।
- বাকী তিনটি সমীকরণকে ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে ভ্রামক-সমীকরণ হিসেবে লেখা যায়। ভরকেন্দ্রের গতি থেকে ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে গতিটি একেবারে অসংযুক্ত (uncoupled) এই তিনটি সমীকরণের সমাধান প্রথম তিনটির ওপর নির্ভর করে না। অর্থাৎ, যদি ভরকেন্দ্রটি স্থিরও থাকে, তবুও তার সাপেক্ষে বস্তুর (ভ্রামক) গতি-সমীকরণগুলি একই হয়।

14.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি ও সমাধান

প্রশ্ন 1. $2a$ দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ড, তার একপ্রান্তে আটকানো একটি দড়ির দ্বারা O বিন্দু থেকে ঝোলানো আছে। দড়ির দৈর্ঘ্য l_1 দড়ি ও দণ্ড দুটিই O বিন্দুগামী উল্লম্ব রেখার চারিদিকে ধ্রুব কৌণিক বেগে ঘোরে এবং উল্লম্বের সঙ্গে দড়ি ও দণ্ড যথাক্রমে θ ও ϕ কোণে নত। দেখান যে,

$$\frac{3l}{a} = \frac{4\tan\theta - 3\tan\phi}{\tan\phi - \tan\phi} \cdot \frac{\sin\phi}{\sin\theta}$$



ইঙ্গিত ঃ OA হল দড়ি, AB দণ্ড, M দণ্ডের ভর, দড়িটিকে ভরহীন ধরা হল। PQ, দণ্ডের দৈর্ঘ্যের ক্ষুদ্র অংশ $AP = x$, $PQ = \delta x$.

দণ্ডটির ওপর বহির্বলগুলি হল (i) প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশে প্রযুক্ত অভিকর্ষজ বল, যার কারণ হল দণ্ডটির ভর, Mg, ওর ভরকেন্দ্র G বিন্দুতে উল্লম্বভাবে, নীচের দিকে ক্রিয়াশীল। (ii) A বিন্দুতে দড়ি-দ্বারা প্রযুক্ত টান T, এবং দণ্ডের প্রতি ক্ষুদ্র অংশে প্রযুক্ত বিপরীত ত্বরণ-বল আছে।—যেমন PQ-এর ওপরে $\left(\frac{M}{2a}\delta x\right)\omega^2 PN$, $\overrightarrow{NP}$ বরাবর।

এই সমস্ত বলদ্বারা গঠিত বলগোষ্ঠী সাম্যাবস্থায় আছে।

A বিন্দু সাপেক্ষে এই গোষ্ঠীর ভ্রামক নিয়ে পাই,

$$-Mga\sin\phi + \int_0^{2a}\left(\frac{M}{2a}dx\right)\omega^2 PNx\cos\phi = 0.$$

$$\therefore \quad Mga\sin\phi = \frac{M}{2a}\omega^2\cos\phi\int_0^{2a} x\,PN\,dx$$

কিন্তু $PN = l\sin\theta + x\sin\phi$

$$\therefore \quad Mga\sin\phi = \frac{M}{2a}\omega^2\cos\phi\left(l\sin\theta\int_0^{2a} xdx + \sin\phi\int_0^{2a} x^2dx\right)$$

$$g\,a\sin\phi = \omega^2\cos\phi\left(al\sin\theta + \frac{4a^2}{3}\sin\phi\right) \quad \ldots (1)$$

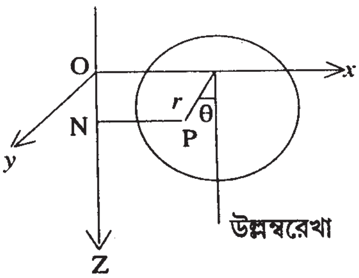
এবং O-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই,

$$= Mg(a\sin\phi + l\sin\theta) + \frac{M}{2a}\omega^2\int_0^{2a}(l\sin\theta + x\sin\phi)(l\cos\theta + x\cos\phi)\,dx$$

$$g(a\sin\phi + l\sin\theta) = \omega^2\left(l^2\sin\theta\cos\theta + \frac{4a^2}{3}\sin\phi\cos\phi + al\sin(\theta+\phi)\right) \quad .... \ (2)$$

এরপর অঙ্কটির সমাধান সহজেই সম্ভব।

প্রশ্ন 2. একটি সরু গোল ভারী চাকতি (thin heavy disc) তার নিজের সমতলে অবস্থিত একটি অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে। এই অক্ষটি আবার তার নিজের ওপর অবস্থিত একটি বিন্দুর সাপেক্ষে আনুভূমিক ভাবে ধ্রুব কৌণিক বেগ নিয়ে ঘোরে। দেখান যে, চাকতির সমতলটি উল্লম্ব তলের সঙ্গে $\cos^{-1}\dfrac{gh}{k^2\omega^2}$ কোণে নত থাকবে, যেখানে *h* হল অক্ষটির থেকে চাকতিটির ভরকেন্দ্রের দূরত্ব। k হল অক্ষটির সাপেক্ষে চাকতিটির ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ।



স্থির অবস্থায় চাকতিটি উল্লম্ব (vertical) থাকে। Ox অক্ষ চাকতির সমতলেই অবস্থিত, এবং Ox ; O বিন্দু সাপেক্ষে আনুভূমিক তলে ঘুরতে পারে। অক্ষটি O-এর সাপেক্ষে ঘুরতে শুরু করে, আর সঙ্গে সঙ্গেই চাকতিটি অক্ষের সাপেক্ষে θ কোণে ঘুরে যাবে, এবং ঐ অবস্থাতেই অক্ষটির সঙ্গে Oz-এর চারিদিকে ঘোরে, (Oz উল্লম্ব) চাকতির ওপর P-তে ক্ষেত্রের ক্ষুদ্র অংশ (elementary area) নেওয়া হল। Oy হল আনুভূমিক, উল্লম্ব তল (vertical plane) Oxz এর ওপর লম্ব। P-এর স্থানাঙ্ক (x, y, z)।

$\therefore \quad y = r\sin\theta, z = r\cos\theta, r$ হল P থেকে Ox এর দূরত্ব। P বিন্দু Oz এর সাপেক্ষে PN ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে ঘোরে। PN, Oz-এর ওপর লম্ব। N-এর স্থানাংক $(0, 0, r\cos\theta)$

$\therefore \quad PN = \sqrt{x^2 + r^2\sin^2\theta}$

P-তে ক্ষেত্রের ক্ষুদ্র অংশ δA হলে, তার ভর হল $\rho\delta A$, ρ ঘনত্ব = ভর/ক্ষেত্রফল, এবং δA-র ওপর বিপরীত ত্বরণ বল হল $(\rho\omega^2\delta A)NP$, $\overrightarrow{NP}$ বরাবর।

এখন, $\overrightarrow{NP}$ ভেক্টর $= [x, r\sin\theta, 0]$

এবং, তবে δA-র ওপর বিপরীত ত্বরণ বলকে ভেক্টর সাহায্যে লেখা যায়,

$\left[(\rho\omega^2\delta A)NP\right]\ \overrightarrow{NP}$ দিকে একক ভেক্টর

$= (\rho\omega^2\delta A)NP.\dfrac{\overrightarrow{NP}}{NP} = \rho\omega^2\delta A\ [x, r\sin\theta, 0]$

$= (X, Y, O)$, যেখানে, $\quad X = \rho\omega^2\delta A x$,

$$Y = \rho\omega^2\delta A r\sin\theta.$$

বহির্বলগুলি হল (i) চাকতির ভরকেন্দ্রে মোট ভার Mg, উল্লম্বভাবে নীচের দিকে ক্রিয়াশীল, (ii) অক্ষ বরাবর অজানা প্রতিক্রিয়া বল। এই প্রতিক্রিয়া বলগুলিকে এড়িয়ে যাবার জন্য Ox সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই,

Ox সাপেক্ষে Mg-এর ভ্রামক + Ox সাপেক্ষে বিপরীত ত্বরণ বলের ভ্রামক = 0.

এখন Mg, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে, O-বিন্দু সাপেক্ষে এর ভ্রামক

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 0 & 0 & Mg \end{vmatrix}$$

এবং, O বিন্দু সাপেক্ষে P-এ ক্রিয়াশীল অন্তস্থ বলের ভ্রামক হল,

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & r\sin\theta & r\cos\theta \\ X & Y & O \end{vmatrix}$$

এই ভ্রামকগুলির x-উপাংশ হল Ox সাপেক্ষে এদের ভ্রামক।

$$\therefore \quad Mg\bar{y} - \sum Yr\cos\theta = 0$$

কিন্তু $\quad y = h\sin\theta.$

$$\therefore \quad Mgh\sin\theta = \sum Yr\cos\theta = \iint \rho\omega^2 r^2 \sin\theta\cos\theta dA$$

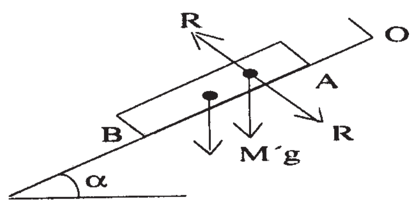
$$= \omega^2 \sin\theta\cos\theta \iint \rho r^2 dA$$

$$= (\omega^2 \sin\theta\cos\theta) MK^2$$

যেহেতু, $\rho r^2 dA$, হল dA ক্ষেত্রটির Ox সাপেক্ষে জাড্য-ভ্রামক

$$\therefore \quad \sin\theta \neq O \text{ হলে } \cos\theta = \frac{Mgh}{\omega^2 Mk^2} = \frac{gh}{\omega^2 k^2}$$

প্রশ্ন 3. m-ভরের একটি তক্তা, একটি আনত মসৃণ তলের সর্বোচ্চ নতিরেখা বরাবর স্থির আছে। তলটি α-কোণে অনুভূমিক তলের সঙ্গে নত। M' ভরের একটি লোক, তক্তাটির ওপরের প্রান্ত থেকে নীচের দিকে তক্তা বরাবর হাঁটতে শুরু করে এমনভাবে যে, তক্তাটি নড়ে না।



দেখান যে,

$\sqrt{\dfrac{2M'a}{(M+M)g\sin\alpha}}$ সময়ের পরে লোকটি তক্তার অন্য প্রান্তে পৌঁছবে। a হল তক্তাটির দৈর্ঘ্য।

সমাধান ঃ ধরা যাক যে, t সময়ে লোকটি তক্তার ওপরপ্রান্তে বিন্দু থেকে y দৈর্ঘ্য হাঁটে, এবং ঐ একই সময়ে তক্তাটিও O থেকে x দূরত্ব ভ্রমণ করে।

লোকটির ওপর তক্তার মোট প্রতিক্রিয়া বল (relation) R, এটি ঘর্ষণ ও লম্ব প্রতিক্রিয়ার লব্ধি। তক্তা (OA) বরাবর R-এর উপাংশ F হলে,

লোকটির গতির কথা ভাবলে,

$$-M'(\ddot{x}+\ddot{y}) + M'g\sin\alpha + F = 0 \qquad \text{.........} \quad \text{(i)}$$

তক্তাটির গতির কথা ভাবলে

$$-M\ddot{x} + Mg\sin\alpha - F = 0 \qquad \text{.........} \quad \text{(ii)}$$

কিন্তু যদি তক্তাটি একেবারেই না নড়ে,

$$\dot{x} = \ddot{x} = 0$$

$$\therefore \quad F = Mg \ \sin \ \alpha$$

এবং $-M\ddot{y} + M'g\sin\alpha + Mg\sin\alpha = 0$

$t = 0$ তে, $y = 0$, $\ddot{y} = 0$

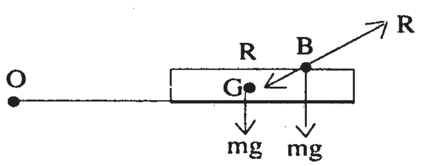
$$\therefore \quad y = \left(\left(1+\frac{M}{M'}\right)g\sin\alpha\right)t$$

$$y = \left(\left(1+\frac{M}{M'}\right)g\sin\alpha\right)\frac{t^2}{2}$$

তক্তার অপরপ্রান্তে যেতে হলে, $t = T$ সময়ে $y = a$ হলে,

$$T = \sqrt{\frac{2M'a}{(M+M')g\sin\alpha}}$$

প্রশ্ন 4. m ভর ও $2a$ দৈর্ঘ্যের একটি অমসৃণ তক্তা, আনুভূমিক মেঝের ওপর শুয়ে আছে এবং M ভরের একটি লোক তক্তার এক প্রান্ত থেকে আর এক প্রান্তে যায়। এই সময়ে তক্তাটি কতটা সরে তা নির্ণয় করুন।



পারস্পরিক ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া বলের ফলে চলমান লোকও তক্তাটিকে আমরা একটি বস্তুতন্ত্র (system) হিসেবে ভাবতে পারি।

অতএব, ডালাম্বারের নীতি অনুযায়ী,

$M\ddot{x} + m\ddot{y} = 0$ (যেহেতু আনুভূমিক দিকে কোনো বহির্বল নেই)

যেখানে, $OG = y$, G হল তক্তার ভরকেন্দ্র, t সময়ে

এবং $OB = x$, B, t সময়ে লোকটির অবস্থান,

এবং O বিন্দুতে তক্তা ও লোক যাত্রা শুরু করেছিল।

$\therefore \quad M\dot{x} + m\dot{y}$ = ধ্রুবক = প্রাথমিক মান (initial value)

$= 0$

যেহেতু, $t = 0$ তে, $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$

$\therefore \quad Mx + my =$ ধ্রুবক = প্রাথমিক মান $= ma$

যেহেতু $t = 0$ তে, $x = 0, \ y = ma$

যখন লোকটি তক্তার অপরপ্রান্তে যায় তখন $x = x_f, y = y_f$

হলে, $\quad x_f = y_f + a$

$$\therefore \quad yf = \frac{a(m-M)}{m+M}$$

$\therefore$ তক্তাদ্বারা যতখানি দৈর্ঘ্য ভ্রমন হয়

$$= y_f - a = a\frac{m-M}{m+M} - a = \frac{-2Ma}{m+M}$$

অর্থাৎ লোকটি যে দিকে হাঁটে, তক্তা তার উল্টোদিকে $\dfrac{2Ma}{m+M}$ দৈর্ঘ্য ভ্রমণ করে।

একক 15 ❑ স্থির অক্ষ সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর গতি (Motion of a rigid body about a fixed axis)

গঠন

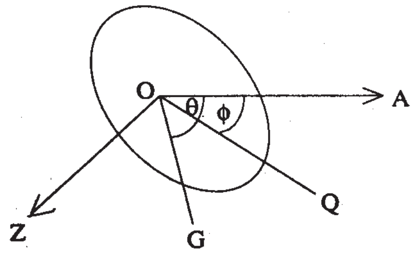
15.1 প্রস্তাবনা

একটি দৃঢ়বস্তুর একটি সরলরেখা স্থির থাকলে, একমাত্র সম্ভাব্য গতি হতে পারে ঐ অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণন। এই ঘূর্ণন মাপার জন্য অক্ষগামী কোন সমতলের কৌণিক গতি জানলেই যথেষ্ট। সেজন্য অক্ষের মধ্য একটি নির্দিষ্ট স্থির সমতল সাপেক্ষে অক্ষগামী অন্যান্য সমতল যে কোণ করে তার পরিবর্তনের হারই ঐ সমতলের ঘূর্ণনগতি। কিন্তু দেখা যাবে যে, যে কোন সমতলই নেওয়া হোক না কেন, তাদের ঘূর্ণনগতি একই হবে, যাকে বলা হবে বস্তুটির কৌণিক বেগ। এটি ω বা θ° দ্বারা নির্দিষ্ট হয়।

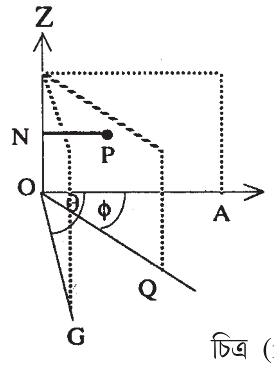
15.2 উদ্দেশ্য

- একটি দৃঢ়বস্তুর একটি বিন্দু বা একটি সরলরেখা স্থির থাকলে তার সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর গতি জানাই এই এককের উদ্দেশ্য।
- বিশেষ উদাহরণ হিসেবে এখানে আনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে যৌগিক দোলকের গতি বিশ্লেষণ করা হয়েছে।

15.3 স্থির অক্ষ সাপেক্ষে গতি ; গতিশক্তি ; কৌণিক ভরবেগ ; গতি সমীকরণ



চিত্র (i)



চিত্র (ii)

ধরা যাক, একটি দৃঢ়বস্তু একটি স্থির অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরছে। অক্ষটিকে Oz দ্বারা সূচিত করা হল। চিত্র (i) দেখুন। Oz অক্ষটি যেন লম্বভাবে এই কাগজের সমতলটিকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। Oz অক্ষের মধ্য দিয়ে ZOA একটি তল, যা ত্রিমাত্রিক দেশ সাপেক্ষে স্থির/নির্দিষ্ট (fixed) বা অপরিবর্তনশীল। ZOA যেন কাগজের তলটিকে OA বরাবর ছেদ করেছে। OZ এর ভিতর দিয়ে ZOG আর একটি সমতল, যেটি ঐ দৃঢ়বস্তু সাপেক্ষে অপরিবর্তনশীল (fixed in the body), এবং সেটি কাগজের তলকে OG বরাবর ছেদ করে। ZOA ও ZOG-এর মধ্যের কোণ θ ধরা যাক।

বস্তুর P বিন্দু এবং Oz -এর মধ্যগামী তলটি কাগজের তলটিকে OQ তে ছেদ করে, এবং ZOA-র সঙ্গে ϕ কোণে নত বলে মনে করা যাক।

দৃঢ়বস্তুটি যখন Oz সাপেক্ষে ঘোরে, $\angle QOG$-এর কোনো পরিবর্তন হয় না। অতএব, θ-র পরিবর্তনের হার ও ϕ এর পরিবর্তনের হার একই।

$$\theta = \phi + (\text{ধ্রুবকোণ})$$

$$\therefore \quad \dot{\theta} = \dot{\phi}, \ddot{\theta} = \ddot{\phi}$$

Oz অক্ষ থেকে P বিন্দুর দূরত্ব r হলে, P, Oz সাপেক্ষে r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তপথে ভ্রমণ করে। $r = PN$ হলে, (চিত্র (ii) $PN \perp Oz$, N এই বৃত্তের কেন্দ্র। P-এর ত্বরণের উপাংশ দুটি হল—(i) $r\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2$, PN বরাবর ও $r\dfrac{d^2\phi}{dt^2}$, PN-এর ওপর লম্ব।

ত্বরণ বলগুলি (P-এর ওপর) হল

(i) $mr\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2 = mr\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{PN}$ বরাবর এবং

(ii) $mr\dfrac{d^2\phi}{dt^2} = mr\ddot{\theta}$, $\overrightarrow{PN}$ এর ওপর লম্ব, θ-বর্ধমান দিকে।

এই বলগুলির ভ্রামক Oz-সাপেক্ষে যথাক্রমে শূন্য এবং $mr^2\ddot{\theta}$।

এই ত্বরণ বলগুলির ভ্রামকের সমষ্টি হল $\sum mr^2\ddot{\theta}$

$= \ddot{\theta}\sum mr^2$ (যেহেতু θ, বস্তুকণাগুলির ওপর নির্ভর করে না)

$= Mk^2\ddot{\theta}$ যেখানে M হল বস্তুটির মোট ভর, k হল Oz সাপেক্ষে বস্তুটির ঘূর্ণন-ব্যাসার্ধ।

ডালাম্বারের সূত্র অনুযায়ী, ত্বরণ বলগুলির ভ্রামকের সমষ্টি হল বহির্বলগুলির Oz সাপেক্ষে ভ্রামকের যোগফলের সমান। অর্থাৎ,

$$Mk^2\ddot{\theta} = L$$

যেখানে L হল Oz সাপেক্ষে বহির্বলের ভ্রামকের সমষ্টি। এটিই হল স্থির অক্ষ Oz-এর সাপেক্ষে বস্তুটির গতিসমীকরণ।

P-বস্তুকণাটির গতিবেগ হল $r\dot{\phi}$ বা $r\dot{\theta}$, PN এর লম্ব দিকে। অতএব, এই বস্তুটির গতিশক্তি

$=$ কণাগুলির গতিশক্তির যোগফল $= \dfrac{1}{2}\sum m\left(r\dot{\theta}\right)^2$

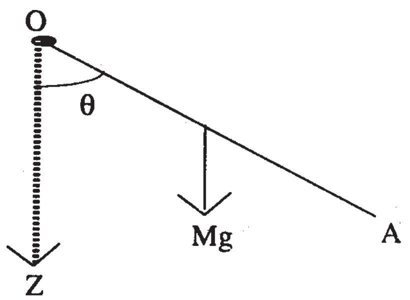
$= \dfrac{1}{2}\dot{\theta}^2\sum mr^2 = \dfrac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$ ($\dot{\theta}$ সমস্ত বস্তুকণার জন্যই সমান)।

এবং, বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ = বস্তুকণাগুলির কৌণিক ভরবেগের সমষ্টি

$= \Sigma r.\, mr\dot{\theta} = \Sigma mr^2\dot{\theta}$

$= Mk^2\dot{\theta}$

15.4 একটি উদাহরণ



একটি M ভর ও $2a$ দৈর্ঘ্যের সুষম দণ্ডের একটি প্রান্তবিন্দু স্থির, এবং দণ্ডটি ঐ বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরতে পারে। দণ্ডটি ঐ প্রান্তবিন্দু থেকে উল্লম্ব অবস্থায় ঝোলানো ছিল, এমন সময় ω কৌণিক বেগ দিয়ে সেটিকে ঘুরিয়ে দেওয়া হল। দণ্ডটির গতিবিধি আলোচনা করুন।

দণ্ড OA, উল্লম্ব অক্ষ Oz বরাবর ঝুলছিল, এবং ω কৌণিক বেগ দিয়ে তাকে O সাপেক্ষে ঘুরিয়ে দেওয়া হল। বহির্বল গুলি এখানে দণ্ডটির ভার Mg এবং O বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল। দণ্ডটি O বিন্দু সাপেক্ষে, অর্থাৎ O বিন্দুগামী আনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরছে। ঐ অক্ষের সাপেক্ষে (অর্থাৎ এক্ষেত্রে O-এর সাপেক্ষে) ভ্রামক নিলে প্রতিক্রিয়া বলের ভ্রামক শূন্য হয়।

t সময়ে দণ্ডটি θ কোণ ঘুরলে, ঐ সময়ে O-**এর সাপেক্ষে** Mg-এর ভ্রামক হল $-Mga\sin\theta$, (–চিহ্ন কারণ ভ্রামকটি চাইছে θ-কে কমিয়ে দিতে)।

$\therefore$ দণ্ডটির গতিসমীকরণ $Mk^2\ddot{\theta} = -Mga\sin\theta.$

k হল দণ্ডটির O-সাপেক্ষে ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ। $k_2 = \dfrac{4a^2}{3}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{4a}\sin\theta$$

দুটিকে $2\dfrac{d\theta}{dt}$ দিয়ে গুণ করে পাই,

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}^2\right) = -\frac{3g}{2a}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

সমাকলের পরে, $\dot{\theta}^2 = \dfrac{3g}{2a}\cos\theta + C$

প্রথমে, $t = 0,\ \theta = 0,\ \dot{\theta} = \omega$

$$\therefore \quad C = \omega^2 - \frac{3g}{2a}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}(\cos\theta - 1) + \omega^2 \text{.................(i)}$$

এটির দ্বারা t সময়ে দণ্ডটির কৌণিক বেগ জানা যায়। এই সমীকরণটিকে আর সমাকলন সম্ভব নয়, সেজন্য θ-কে সরাসরি t-র অপেক্ষক হিসেবে প্রকাশ করা গেল না। তবে (i) থেকে দেখা যায় যে, কৌণিক বেগ $\dot{\theta}, \theta$ বাড়লে, কমে $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ হলে।

এখন দণ্ডটিকে যদি একটি সম্পূর্ণ ঘূর্ণন সমাপ্ত করতে হয়, তবে অন্তত O বিন্দুর ওপরে দণ্ডটিকে খাড়া হতে হবে।

ঐ অবস্থানে তাহলে $\dot{\theta}$-কে ≥ 0 হতে হয়।

ঐ অবস্থানে $\dot{\theta} = 0$ হলে,

$$\theta = \pi,\ \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}(-2) + \omega^2 = \omega^2 - \frac{3g}{a} = 0$$

বা, $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{a}}$

এটিই ω-র নিম্নতম মান যার জন্য দণ্ডটি সম্পূর্ণ ঘূর্ণন করতে পারে। ঐ কৌণিক বেগ নিয়ে চলা শুরু হলে,

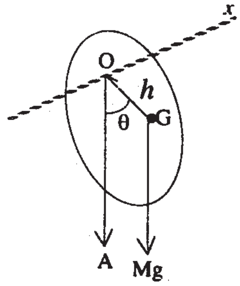
$$\theta^2 = \frac{3g}{2a}(1 + \cos\theta) = \frac{3g}{a}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

সমাকলনের ফলে $t\sqrt{\frac{3g}{a}} = \int_0^0 \frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = 2\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

যা থেকে θ কোণ ঘোরার সময় পাওয়া যায়।

15.5 যৌগিক দোলক (Compound Pendulum)

কোনো দৃঢ়বস্তু যদি তার সঙ্গে দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত একটি অনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে দোলে, এমনভাবে যে অক্ষের প্রতিক্রিয়া বল দ্বারা বস্তুটির ওপর একমাত্র বহির্বল তার ভার বা ওজন, তবে এই জাতীয় দোলককে বলা হয় যৌগিক দোলক। এক্ষেত্রে, হাওয়ার বাধা ও অক্ষের ঘর্ষণকে উপেক্ষা করা হয়।



যৌগিক দোলকের দোলনকাল (Time period)/ পর্যায়কাল

বস্তুটির ভরকেন্দ্র G, এবং দোলকের অক্ষ Ox। G এর মধ্য দিয়ে অক্ষের ওপর লম্ব একটি তল যা অক্ষকে O বিন্দুতে ছেদ করে নেওয়া হল। $OG = h$ ধরা যাক।

O বিন্দুতে OA উল্লম্বরেখা।

$\angle AOG = \theta$

$\therefore$ ত্রিমাত্রিক দেশে নির্দিষ্ট একটি তল xOA, দৃঢ়বস্তু সাপেক্ষে নির্দিষ্ট একটি তল, xOG-এর সঙ্গে, θ-কোণে নত।

$\therefore$ বস্তুটির ঘূর্ণনগতি (কৌণিক গতি) $\dot{\theta}$

বস্তুটির ওপর বহির্বলগুলি হল ঃ—

(i) ভার Mg, G-এর মধ্য দিয়ে উল্লম্বভাবে নীচের দিকে

(ii) O বিন্দুতে অক্ষজনিত প্রতিক্রিয়াবল।

O বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই—

$Mk^2\ddot{\theta} = -Mgh\sin\theta$, (ভ্রামকটি θ-কে কমাবার চেষ্টা করে)

যেখানে k হল Ox-সাপেক্ষে বস্তুর ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ।

$\therefore \quad \ddot{\theta} = -\frac{gh}{k^2}\sin\theta$ (সরল দোলকের কথা মনে করুন)

এখন, ক্ষুদ্র দোলনের (small oscillations) জন্য, θ ক্ষুদ্র, এবং প্রথম ঘাতের পদই রাখলে, $\ddot{\theta} - \frac{gh}{k^2}\theta$

এটি সরল দোলগতির সমীকরণ, যার দোলনকাল $2\pi\Big/\sqrt{\frac{gh}{k^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gh}}$

সংজ্ঞা ঃ সমতুল্য পেণ্ডুলাম।

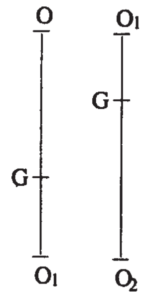
ক্ষুদ্র দোলনের জন্য যৌগিক পেণ্ডুলামটির দোলনকাল $2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gh}}$ এখন O বিন্দু থেকে ভরহীন দড়ির দ্বারা একটি যে কোনো বস্তুকণাতে লম্বিত করলে, দড়ির দৈর্ঘ্য যদি হয় $l = \frac{k^2}{h}$, তবে এই সরল পেণ্ডুলামটির দোলনকাল $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gh}}$, যৌগিক দোলকটির সঙ্গো সমান। এই জাতীয় সরল দোলককে বলা হয় ওই যৌগিক দোলকটির সমতুল্য দোলকু।

সংজ্ঞা ঃ (i) লম্বন-কেন্দ্র (Centre of suspension) যৌগিক দোলকটির অক্ষ Ox, G বিন্দুগামী উল্লম্ব-তলটিকে যে বিন্দুতে ছেদ করে (O বিন্দু) তাকে বলা হয় লম্বন-কেন্দ্র।

(ii) দোলন-কেন্দ্র (Centre of Oscillation) OG রেখানেক O_1 পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যাতে $OO_1 = \frac{k^2}{h}$ হয়। O_1 বিন্দুকে বলা হবে যৌগিক দোলকটির দোলনকেন্দ্র।

অর্থাৎ যদি বস্তুটির সমস্ত ভর O_1-এ একত্রিত করে, একটি ভরহীন দড়ির দ্বারা যার দৈর্ঘ্য $\frac{K^2}{h}$, O থেকে লম্বিত করা হবে, তবে আমরা একটি সমতুল্য সরল দোলক পাব।

একটি যৌগিক দোলকের লম্বনকেন্দ্র ও দোলনকেন্দ্র পরস্পর বিনিময়যোগ্য (interchangeable)



ধরুন যৌগিক পেণ্ডুলামটির দোলনকেন্দ্র O_1 ও লম্বনকেন্দ্র $O, OO_1 = \frac{k^2}{h}$ যদি $O1$ থেকে বস্তুটিতে লম্বিত করা যায়, তবে আমরা দেখাব যে বস্তুটির দোলনকাল হবে O_1, O দৈর্ঘ্যের একটি সকল দোলকের দোলনকাল।

O_1-এর মধ্য দিয়ে Ox-এর সমান্তরাল একটি অনুভূমিক অক্ষ নেওয়া হল, যার সাপেক্ষে বস্তুটি ঘুরতে পারে।

এখন G-এর ভিতর দিয়ে যদি একটি সমান্তরাল অক্ষ নেওয়া যায়, যার সাপেক্ষে বস্তুটির ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ K, তবে

$$Mk^2 = Mk^2 + M(OG)^2,$$

$$\therefore \quad k^2 = K^2 + OG^2$$

$$\therefore \quad OO_1 = \frac{k^2}{h} = \frac{K^2 + OG^2}{h} = \frac{K^2 + h^2}{h} > h = OG$$

এবং, $K^2 = OG.OO_1 - OG^2 = h.OO_1 - h^2 = h(OO_1 - h)$

$$= \quad OG.(OO_1 - OG) = OG.GO_1. \qquad \text{........ (i)}$$

এখন, O_1-এর মধ্য দিয়ে সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে দোলনের সময়, O_2 যদি দোলনকেন্দ্র হয়, তবে, একইভাবে দেখানো যায় যে,

$$K^2 = O_1G.GO_2 = O_2G.GO_1 \qquad \text{........ (ii)}$$

(i) ও (ii) তুলনা করলে পাই O এবং O_2 একই বিন্দু। অর্থাৎ O_1-এর লম্বনকেন্দ্র থাকলে, O তে দোলনকেন্দ্র থাকবে, এবং বিপরীতটিও সত্য।

অর্থাৎ লম্বনকেন্দ্র ও দোলনকেন্দ্র দুটি বদলযোগ্য।

যৌগিক দোলকের ন্যূনতম পর্যায়কাল/দোলনকাল (Minimum time of Oscillation of a Compound Pendulum)

দৃঢ়বস্তুটির ভরকেন্দ্র G-এর মধ্য দিয়ে, ঘূর্ণন-অক্ষের সমান্তরাল একটি অক্ষ নেওয়া হল, যার সাপেক্ষে বস্তুটির ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ K.

তাহলে, $k^2 = K^2 + h^2$

একটি সমতুল্য সাধারণ দোলকের দৈর্ঘ্য l হলে,

$$l = \frac{k^2}{h} = \frac{K^2 + h^2}{h} = h + \frac{K^2}{h} \qquad \text{........ (i)}$$

সমতুল্য সাধারণ দোলকের পর্যায়কালকে ন্যূনতম হতে হলে,

$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$-কে ন্যূনতম, অর্থাৎ l কে ন্যূনতম হতে হবে।

অর্থাৎ যেহেতু K-ধ্রুবক,

$$\frac{d}{dh}\left(h + \frac{K^2}{h}\right) = 0, \text{ বা, } \quad 1 - \frac{K^2}{h^2} = 0$$

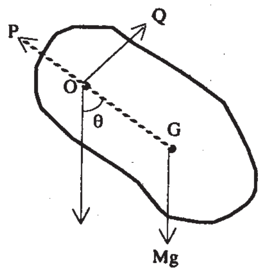
বা, $h = K$

$\therefore \quad l = 2K$

অর্থাৎ লম্বনকেন্দ্র O কে G থেকে K দূরত্বে থাকতে হবে, এবং এই অবস্থায় সমতুল্য দোলকটির, অর্থাৎ যৌগিক দোলকটিরও পর্যায়কাল ন্যূনতম হবে।

15.6 ঘূর্ণন-অক্ষের প্রতিক্রিয়া (Reactions of the axis of Rotation)

সাধারণভাবে ঘূর্ণন অক্ষের প্রতিক্রিয়া নিরূপণ করা সহজ নয়। আমরা কেবলমাত্র দু-একটি অপেক্ষাকৃত সহজ ক্ষেত্রের জন্যই আলোচনা করব।



ধরা যাক বস্তুটির ভরকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে, ঘূর্ণন অক্ষের ওপর লম্ব যে তলটি আছে, বস্তুটি এবং বস্তুটির ওপর ক্রিয়াশীল বলগুলিও সেই তলের সাপেক্ষে সদৃশ (Symmetrical), এবং প্রতিক্রিয়াবল ব্যতীত, বস্তুটির ভারই একমাত্র বহির্বল।

সাদৃশ্যের ধারণা থেকে বলা যায়, অক্ষের প্রতিক্রিয়া বল গুলিকে, ঐ তলের ওপর ক্রিয়াশীল কেবলমাত্র একটি বলের দ্বারাই প্রকাশ করা যাবে। ঐ তলে, GO বরাবর, এবং GO-র ওপর লম্ব বরাবর বলটির উপাংশ হল P এবং Q.

ডালাম্বারের নীতি থেকে আমরা জানি যে, ভরকেন্দ্র G এমনভাবে চলে, যেন বস্তুটির সমস্ত ভর MG-তে কেন্দ্রীভূত আছে।

এবং সমস্ত বলই, G-বিন্দুতে ক্রিয়াশীল আছে।

এখন, G, O-এর সাপেক্ষে একটি বৃত্তে ঘোরে।

অতএব, GO দিকে এবং GO-র লম্ব দিকে, G-এর গতিসমীকরণগুলি হল ঃ

$$Mh\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = P - Mg\cos\theta \qquad \text{........ (i)}$$

$$Mh\frac{d^2\theta}{dt^2} = Q - Mg\sin\theta \qquad \text{........ (ii)}$$

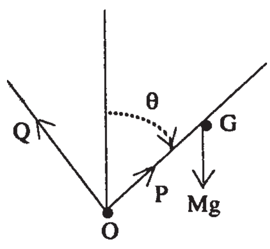
$h = OG$,

এবং O বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক-সমীকরণটি হল

$$Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = Mgh\sin\theta \qquad \text{........ (iii)}$$

(ii) ও (iii) এর মধ্যে $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ অপসারণ করে Q পাওয়া যায়। (iii) কে অবকলন করে, এবং প্রাথমিক শর্ত দ্বারা অবকলনের ধ্রুবক বের করলে, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ পাওয়া যায়। (i)-এ $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ বসিয়ে P পাওয়া যায়।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক $2a$ দৈর্ঘ্যের একটি সুষম দণ্ড তার একটি প্রান্তবিন্দু O-এর সাপেক্ষে ঘুরতে পারে। প্রাথমিকভাবে দণ্ডটি O বিন্দুর ওপরে উল্লম্ব অবস্থায় দণ্ডায়মান ছিল।



ধরা যাক t সময়ে দণ্ডটি উল্লম্ব অবস্থান থেকে θ-কোণে ঘুরেছে।

O বিন্দুতে প্রতিক্রিয়াকল, ঐ উল্লম্ব সমতলেই (যে সমতলে দণ্ডটি ঘুরছে) আছে, এবং t সময়ে OG বরাবর ও OG-র ওপর লম্ব বরাবর প্রতিক্রিয়াবলের উপাংশ দুটি হল, P এবং Q।

এখানে $h = a, k^2 = 4a^2/3$

$$-Ma\dot{\theta}^2 = P - Mg\cos\theta,$$

$$-Ma\ddot{\theta} = Q - Mg\sin\theta$$

এবং, $M.\frac{4a^2}{3}\ddot{\theta} = +Mga\sin\theta$

$$\therefore \quad \ddot{\theta} = \frac{3g}{4a}\sin\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{2a}\cos\theta + C$$

$\theta = 0$ তে, $\theta = 0$,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}(1-\cos\theta)$$

$$P = -M.\frac{3g}{2}(1-\cos\theta) + Mg\cos\theta$$

$$= Mg\left\{\frac{5}{2}\cos\theta \frac{-3}{2}\right\}$$

$$Q = Mg\sin\theta - M\frac{3g}{4}\sin\theta = \frac{M}{4}g\sin\theta$$

$\therefore$ উল্লম্ব দিকে প্রতিক্রিয়াবলের উপাংশ (যে কোনো সময়ে)

$$= P\cos\theta + Q\sin\theta = Mg\left\{\frac{5}{2}\cos^2\theta - \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{4}\right\}$$

$$Mg\left\{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\cos^2\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right\} = Mg\left(\frac{1-3\cos\theta}{2}\right)^2$$

$\therefore$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$-এ উল্লম্ব দিকে প্রতিক্রিয়াবল শূন্য।

15.7 সারাংশ

এই অধ্যায়ে আপনারা

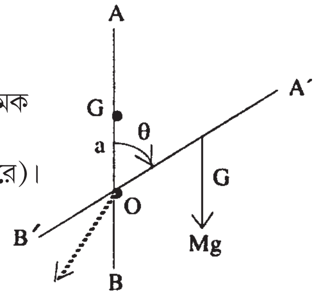
- একটি স্থির অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত দৃঢ় বস্তুর গতিসমীকরণ নির্ধারণ করলেন এবং দেখলেন যে ভরকেন্দ্রের গতিসমীকরণ ব্যতীত, কেবলমাত্র আর একটি ভ্রামক-সমীকরণ জানা থাকলেই ঘূর্ণনরত দৃঢ়বস্তুর গতি (motion) নিরূপণ করা যায়।
- যৌগিক দোলক সম্পর্কে জানলেন। এটি ঘূর্ণনরত দৃঢ়বস্তুর একটি বিশেষ উদাহরণ, যেখানে অক্ষের প্রতিক্রিয়াবল ছাড়া একমাত্র বহির্বল হল বস্তুটির ভার এবং অক্ষটি আনুভূমিক।
- সরল আকারের দৃঢ়বস্তুর জন্য অক্ষের প্রতিক্রিয়াবল কিভাবে নির্ধারণ করা যায় তা দেখলেন।

15.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি ও সমাধান

প্রশ্ন 1. $3a$ দৈর্ঘ্যের একটি সুষম দণ্ড তার ওপর অবস্থিত O বিন্দুগামী একটি আনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে উল্লম্ব তলে ঘুরতে পারে। O বিন্দুটি দণ্ডের কেন্দ্র থেকে a দূরত্বে অবস্থিত। অস্থিত সাম্যের (unstable equilibrium) অবস্থায় স্থিরাবস্থা থেকে রডটি ঘুরতে শুরু করে। দেখান যে আনুভূমিক অবস্থায় এলে দণ্ডটির কৌণিক বেগ হবে $\sqrt{8g/7a}$

ধরা যাক, t সময়ে দণ্ডটি O বিন্দু সাপেক্ষে ঘুরে, AB অবস্থান থেকে $A'B'$ অবস্থানে গেছে, যেখানে $\angle AOA' = \theta$.

(যেহেতু প্রাথমিক অবস্থানটি অস্থিত সাম্যের, অতএব G, O-এর ওপরে থাকবে।



O-বিন্দু সাপেক্ষে দণ্ডটির ভ্রামক-সমীকরণ $mk^2\ddot{\theta} = mga\sin\theta$

(ভ্রামকের দিক, θ-যেদিকে বাড়ে সেইদিকে)। (দণ্ডটির, ভর m)

যেখানে $mk^2 = O$-গামী আনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির জাড্য-ভ্রামক

$= \dfrac{m}{3}\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 + ma^2 = \dfrac{7}{4}ma^2$ (সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য অনুসারে)।

$$\therefore \quad \ddot{\theta} = \frac{4g}{7a}\sin\theta$$

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{4g}{7a}\sin\theta\,\dot{\theta}$$

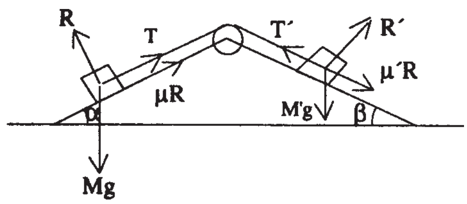
সমাকলনের পরে, $\dot{\theta}^2 = \dfrac{8g}{7a}(1-\cos\theta)$ $\qquad \because \dot{\theta} = 0$ যখন $\theta = 0$.

$\therefore \quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$ (দণ্ড অনুভূমিকা), $\theta = \sqrt{\dfrac{8g}{7a}}$

প্রশ্ন 2. দুটি অমসৃণ সমতল যথাক্রমে আনুভূমিক তলের সঙ্গে α ও β কোণে নত, এবং তারা অপর প্রান্ত বরাবর পরস্পরকে স্পর্শ করে আছে।

দুটি তলের ওপর দুটি অসমান ভর, যথাক্রমে M এবং M', একটি সূক্ষ্ম দড়ি দ্বারা পরস্পর সংযুক্ত আছে। দড়িটি দুটি তলের শীর্ষবিন্দুতে অবস্থিত m ভর ও a ব্যাসার্ধের একটি মসৃণ পুলীর ওপর দিয়ে যায়। দেখান যে, ভর দুটির যে কোনোটির ত্বরণ হল $\dfrac{g\left[M(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - M'(\sin\beta + \mu\cos\beta)\right]}{M + M' + m\dfrac{k^2}{a^2}}$

যেখানে, μ, μ', তল দুটির ঘর্ষণাঙ্ক, k-নিজের অক্ষের সাপেক্ষে পুলীটির ঘূর্ণনব্যাসার্ধ, এবং M ভরটি নিচের দিকে যায়।



$M > M'$.

t সময় পরে ধরা যাক ভর M, নীচের দিকে (তার প্রাথমিক অবস্থান থেকে) x-দূরত্ব যায়, এবং ঐ একই সময়ে M' ওপরের দিকে x-দূরত্ব অতিক্রম করে, এবং ঐ একই সময়ে পুলীটি নিজের অক্ষের সাপেক্ষে θ কোণে ঘুরে যায়।

যেহেতু পুলীটি মসৃণ, অতএব, বলা যায়, $x = a\theta$. ...... (i) (a পুলীটির ব্যাসার্ধ)।

$\therefore \quad \dot{x} = a\dot{\theta}$। কিন্তু ভরদুটির গতিবেগ হল $v = \dot{x} = a\dot{\theta}$ এবং ভর M-এর ত্বরণ, $\ddot{x}$ নীচের দিকে, এবং ভর M'-এর ত্বরণ, $\ddot{x}$ ওপরের দিকে।

$\therefore$ ভর দুটির গতিসমীকরণ হল ঃ

$$M\ddot{x} = Mg\sin\alpha - \mu R - T \quad \text{..........} \quad \text{(i)}$$

$$M'\ddot{x} = -Mg\sin\beta - \mu' R' + T' \quad \text{..........} \quad \text{(ii)}$$

যেখানে, $R = Mg\cos\alpha, R' = M'g\cos\beta.$

এবং পুলীটির গতিসমীকরণ (এটি একটি ঘূর্ণনশীল দৃঢ়বস্তু)

$mk^2\ddot{\theta} = (T - T')a$ ..... (iv) (এটি ভ্রামক-সমীকরণ, অক্ষের সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাওয়া)। (k হল অক্ষের সাপেক্ষে পুলীর ঘূর্ণন ব্যসার্ধ)

(ii) ও (iii) থেকে পাই,

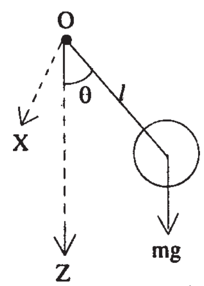
$$(M + M')\ddot{x} = Mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - M'g(\sin\beta + \mu'\cos\beta) + T' + T,$$

বা, $$(M + M')\ddot{x} = Mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - M'g(\sin\beta + \mu'\cos\beta) - \frac{mk^2\ddot{\theta}}{a}$$

কিন্তু (i) থেকে $\ddot{\theta} = \dfrac{\ddot{x}}{a}$

অতএব $$\left(M + M' + \frac{mk^2}{a^2}\right)\ddot{\theta} = g\left[M(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - M'(\sin\beta + \mu'\cos\beta)\right]$$

প্রশ্ন 3. সূক্ষ্ম তারের দ্বারা a ব্যাসার্ধের একটি গোলককে একটি স্থিরবিন্দু থেকে ঝোলানো হয়। গোলকের কেন্দ্র ও স্থিরবিন্দুর দূরত্ব l দেখান যে ক্ষুদ্র দোলনের (small-oscillation) পর্যায়কাল হল $2\pi\sqrt{\dfrac{5l^2 + 2a^2}{5lg}}\left[1 + \dfrac{1}{4}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right]$, যেখানে α হল দোলনের বিস্তার।



দোলকটি একটি আনুভূমিক অক্ষ, OX এর সাপেক্ষে ক্ষুদ্র দোলনে দুলছে, O স্থিরবিন্দু, OZ, উল্লম্বরেখা, θ, t সময়ে OZ-এর সঙ্গে তারটির নতি।

অতএব, দোলকটির ঘূর্ণনজনিত ভ্রামক সমীকরণ হল, $mk^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$ (O সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে), যেখানে k হল OX সাপেক্ষে দোলকের ঘূর্ণনব্যাসার্ধ, $k^2 = l^2 + \dfrac{2a^2}{5}$ এবং m হল গোলকের ভর। (সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য অনুসারে)

(ডানদিকে '–' চিহ্ন নেওয়া হল কারণ ডার mg-র ভ্রামক সর্বদাই θ-কে কমাবার চেষ্টা করছে)।

$\therefore \quad k^2\ddot{\theta} = -gl\sin\theta$

$2\dot{\theta}$ দিয়ে উভয়পক্ষ গুণ করে সমাকলন করে পাই,

$$k^2\dot{\theta}^2 = 2gl\cos\theta + C$$

এখন যেহেতু α হল দোলনটির বিস্তার, অতএব $\theta = \alpha$ তে, $\dot{\theta} = 0.$

$\therefore \quad k^2\dot{\theta}^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\alpha)$

$$k\dot{\theta} = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

$$\therefore \quad k\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\alpha)}} = \int_0^{1} dt$$ যেখানে t_1 হল পর্যায়কালের এক চতুর্থাংশ।

$$\therefore \quad t_1 = \frac{k}{\sqrt{4gl}}\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

বসান, $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\phi$, যার দ্বারা,

$$t_1 = \frac{k}{\sqrt{gl}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi}}$$

এই সমাকলটির সম্পূর্ণ নিরূপণ সম্ভব নয়। কিন্তু ক্ষুদ্র দোলনের জন্য θ ক্ষুদ্র ধরে আমরা লিখতে পারি, ($\sin\phi \sin\frac{\alpha}{2}$ ও তাহলে ক্ষুদ্র)

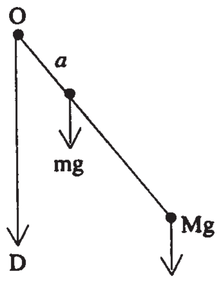
$$t_1 = \frac{k}{\sqrt{gl}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi\right)$$

$$= \frac{k}{\sqrt{gl}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}(1 - \cos 2\phi)\right)d\phi$$

$$= \frac{k}{\sqrt{gl}}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

পর্যায়কাল $= 4t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{5l^2 + 2a^2}{5gl}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$

প্রশ্ন 4. একটি স্থিরবিন্দু থেকে 1 দৈর্ঘ্যের সূক্ষ্ম তার দ্বারা M ভরের একটি বস্তুকণাকে লম্বিত করে একটি সরল দোলক তৈরি হয়েছে। M অপেক্ষা অনেক ক্ষুদ্র একটি ভর m কে স্থিরবিন্দু থেকে a দূরত্বে তারের সঙ্গে দৃঢ়ভাবে গ্রথিত করা হল। দেখান যে ক্ষুদ্র দোলনের পর্যায়কাল, এর ফলে $\frac{m}{2M}\frac{a}{1}\left(1 - \frac{a}{l}\right)T$ পরিমাণ কমে যাবে, যেখানে T হল সরলদোলকটির ক্ষুদ্র দোলনের পর্যায়কাল।



সরল দোলকটির পর্যায়কাল $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{8}}$. m-ভর গ্রথিত হবার ফলে আমরা দুটি কণাদ্বারা গঠিত একটি কণাপুঞ্জ পাই যারা দৃঢ়ভাবে, ভরহীন তার দ্বারা সংযুক্ত। এরা একটি যৌগিক

দোলক গঠন করে। এদুটিকে একটি যৌগিক দোলক হিসেবে নিয়ে, ভ্রামক-সমীকরণ (O-স্থির বিন্দু বা লম্বনবিন্দু) O-এর সাপেক্ষে হবে,

$$ma^2\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} = -mga\sin\theta - mgl\sin\theta$$

বা, $\left(Ma^2 + ml^2\right)\ddot{\theta} = -(ma + Ml)\,g\sin\theta$

যার থেকে দেখি যে ক্ষুদ্র দোলনের পর্যায়কাল হবে

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{ma^2 + Ml^2}{(ma + Ml)\,g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{ma^2}{Ml^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{ma}{Ml}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{Ml^2}\right)\left(1 - \frac{ma}{2Ml}\right) \text{ যেহেতু } \quad \frac{m}{M} << 1$$

$$= T - T.\frac{am}{2lM}\left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

প্রশ্ন 5. একটি যৌগিক দোলকের লম্বনকেন্দ্র অথবা দোলনকেন্দ্রে একটি ভর দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত করা হল। দেখান যে পর্যায়কাল অপরিবর্তিত থাকে।

ধরা যাক যে দোলনকেন্দ্রর্বতে একটি ভর m দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত হয়েছে।

অতএব, অক্ষের সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে,

$$Mk^2\,\ddot{\theta} + ml^2\,\ddot{\theta} = -Mgh\,\sin\theta - mgl\,\sin\theta$$

যেখানে, $l = OO' = \dfrac{k^2}{h}$

$$\left(Mk^2 + ml^2\right)\ddot{\theta} = -(Mgh + mgl)\sin\theta$$

$\therefore$ ক্ষুদ্র দোলনের পর্যায়কাল $= 2\pi\sqrt{\dfrac{Mk^2 + ml^2}{g(Mh + ml)}} = T_1$

এবং $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k^2}{gh}}$

$$\therefore \quad T_1^2 - T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left\{\frac{Mk^2 + ml^2}{Mh^2 + ml} - \frac{k^2}{h}\right\} = \frac{4\pi^2}{g}\left\{\frac{Mk^2h + ml^2h - Mhk^2 - mlk^2}{Mh^2 + mlh}\right\}$$

$$= \frac{4\pi^2}{g}\left\{\frac{m\left(l^2h - lk^2\right)}{Mh^2 + mlh}\right\} = \frac{4\pi^2}{g}\frac{ml\left(lh - k^2\right)}{Mh^2 + mlh} = 0 \quad \because lh = k^2$$

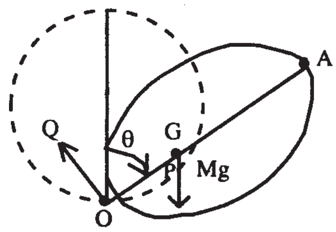
$\therefore \quad T = T_1$

আবার m ভরকে লম্বনকেন্দ্রেই সংযুক্ত করলে, mg-এর ভ্রামক অক্ষের সাপেক্ষে শূন্য হবে অর্থাৎ ভ্রামক-সমীকরণের কোনো পরিবর্তন হবে না। অতএব T এর কোনো পরিবর্তন হবে না।

মন্তব্য ঃ একইভাবে দেখানো যাবে যে যদি OG রেখার ওপর কোনো বিন্দুতে m ভরকে দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত

করা যায়, পর্যায়কাল বাড়বে না কমবে তা নির্ণয় করবে ভরটি লম্বনকেন্দ্রের নীচে না ওপরে, কোথায় সংযুক্ত হয়েছে তার ওপর।

প্রশ্ন 6. একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র (circular area) একটি আনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে। অক্ষটি বৃত্তের ওপর লম্ব এবং তার পরিসীমার ওপর একটি বিন্দু O দিতে গেছে। O বিন্দুগামী ব্যাসটি যখন O-এর ওপরে উল্লম্বভাবে খাড়া এই অবস্থায় ঘূর্ণন শুরু হয়। দেখান যে, ঐ ব্যাসটি যখন θ কোণ ঘুরছে, O বিন্দুতে ব্যাস বরাবর ও ব্যাসের লম্ব বরাবর প্রতিক্রিয়া বলগুলি হল : $\frac{W}{3}(7\cos\theta - 4)$ এবং $\frac{W}{3}\sin\theta$ যথাক্রমে।



বৃত্তটি উল্লম্বতলে ঘুরছে। প্রাথমিকভাবে, OA ব্যাস উল্লম্ব ছিল, t সময়ে OA, উল্লম্বের সঙ্গে θ কোণে নত।

OA বরাবর এবং OA-র ওপর লম্ব বরাবর O বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বলের উপাংশ P এবং Q হলে, বৃত্তের ভরকেন্দ্র G-এর গতিসমীকরণ দুটি হল,

$$Ma\dot{\theta}^2 = -P + Mg\cos\theta$$

$$Ma\ddot{\theta} = -Q + Mg\sin\theta, \quad (Mg \text{ ক্ষেত্রটির ভার})$$

এবং, O-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে,

$$Mk^2\ddot{\theta} = Mga\sin\theta, \text{ যেখানে } \quad k^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \quad \text{...... (i)}$$

$$\therefore \quad \frac{3a^2}{2}\ddot{\theta} = ag\sin\theta \quad (\text{ভ্রামকটি } \theta\text{-কে বাড়াবার চেষ্টা করে})।$$

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{4g}{3a}\cos\theta + A \quad \text{...... (ii)}$$

প্রাথমিকভাবে, $\theta = 0, \dot{\theta} = 0, \ \therefore A = 4g/3a$

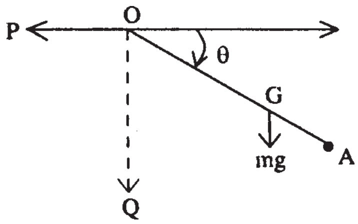
$$\dot{\theta}^2 = -\frac{4g}{3a}(1 - \cos\theta)$$

$$\therefore \quad P = Mg\cos\theta - Ma\dot{\theta}^2 = \frac{Mg}{3}(7\cos\theta - 4) \quad [\text{(ii) থেকে}]$$

$$Q = Mg\sin\theta - Ma\ddot{\theta} = \frac{Mg}{3}\sin\theta \quad [\text{(i) থেকে}]$$

প্রশ্ন 7. একটি সুযম সরু দণ্ডের এক প্রান্ত একটি মসৃণ কব্জার (smooth hinge) সঙ্গে আটকানো আছে, এবং আনুভূমিক অবস্থা থেকে দণ্ডটিকে পড়তে দেওয়া হল। দেখান যে, আনুভূমিক দিকে দণ্ডের ওপর কব্জার প্রতিক্রিয়াবল যখন দণ্ডটি আনুভূমিকের সঙ্গে 45° কোণে নত তখনই বৃহত্তম হবে, এবং তখন উল্লম্ব দিকে প্রতিক্রিয়াবল হবে দণ্ডের ভারের $\frac{11}{8}$ অংশ।

O বিন্দুটি মসৃণ কব্জার সঙ্গে আটকানো আছে। আনুভূমিক অবস্থার থেকে ছেড়ে দিলে দণ্ডটি O-এর



সাপেক্ষে উল্লম্ব তলে ঘুরবে। ধরা যাক দণ্ডের ভর M, এবং দৈর্ঘ্য $2a$, t সময়ে দণ্ডটি আনুভূমিকের সঙ্গে θ কোণে নত। O বিন্দুতে প্রতিক্রিয়াবলের উপাংশ হল P এবং Q যথাক্রমে আনুভূমিক ও উল্লম্ব দিকে। (t সময়ে)।

ভরকেন্দ্র G-এর গতিসমীকরণগুলি হল ঃ

$$Ma\theta^2 = P\cos\theta - Q\sin\theta - Mg\sin\theta \qquad \text{.........} \quad \text{(i)}$$

(M হল দণ্ডটির ভর)।

$$Ma\ddot{\theta} = P\sin\theta + Q\cos\theta + Mg\cos\theta \qquad \text{.........} \quad \text{(ii)}$$

এবং $M.k^2\ddot{\theta} = Mga\cos\theta$ .... (iii) $\qquad k^2 = \dfrac{4a^2}{3}$

$$\therefore \quad \ddot{\theta} = \frac{3g}{4a}\cos\theta \qquad \text{.........} \quad (iv)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}\sin\theta + C$$

প্রাথমিক শর্ত হল $\theta = 0, \dot{\theta} = 0 \qquad \therefore \quad C = 0,$

$$\therefore \quad \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}\sin\theta \qquad \text{.........} \quad (v)$$

অতএব, $P\cos^2\theta = Ma.\dfrac{3g}{2a}\sin\theta\cos\theta + Q\sin\theta\cos\theta + Mg\sin\theta\cos\theta$

$$P\sin^2\theta = Ma.\frac{3g}{4a}\cos\theta\sin\theta - Q\cos\theta\sin\theta - Mg\sin\theta\cos\theta.$$

$$\therefore \quad P = \frac{9}{8}Mg\sin 2\theta.$$

$\therefore$ P-এর মান বৃহত্তম যখন $\theta = 45°$.

একইভাবে, $Q\sin^2\theta = P\cos\theta\sin\theta - Mg\sin^2\theta - Mg.\dfrac{3}{2a}\sin^2\theta$

$$Q\cos^2\theta = -P\cos\theta\sin\theta - Mg\cos^2\theta + Mg\frac{3}{4a}\cos^2\theta$$

$$\therefore \quad Q = -Mg + \frac{3Mg}{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{2} - \sin^2\theta\right)$$

$\therefore$ $\theta = 45°$ তে, Q হল

$$-Mg - \frac{3Mg}{8} = -\frac{11Mg}{8}$$

(অর্থাৎ Q ছবিতে যে দিকে দেখানো হয়েছে প্রকৃতপক্ষে তার উল্টোদিকে আছে)।

একক 16 ❑ দৃঢ়বস্তুর গতিসংরক্ষণ নীতি সমূহ

গঠন

16.1 প্রস্তাবনা

একটি দৃঢ়বস্তুর ওপর বল প্রযুক্ত হলে তার ভরবেগের পরিবর্তন গতিসমীকরণ অনুযায়ী কীভাবে হয় তাই আপনারা এই এককে দেখবেন। কণাগতিবিদ্যায় আমরা দেখেছি ভরবেগ ও কৌণিক ভরবেগেরনীতিগুলি কী। এখানে দৃঢ় বস্তুর ক্ষেত্রে ঐ সব রাশির পরিবর্তনের নিয়মগুলি বিস্তৃতভাবে আলোচনা হবে, এবং কোন শর্তে সেগুলি সংরক্ষিত হয় সেটাও আমরা দেখব। সংরক্ষীবলের ক্ষেত্রে দৃঢ়বস্তুর স্থিতিশক্তির সংজ্ঞা দেওয়া হবে, এবং শক্তির নিত্যতা সম্পর্কেও আলোচনা থাকবে। এখানে স্থিতিশক্তি প্রকাশ্যভাবে সময়ের ওপর নির্ভর করবে না।

16.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনারা জানতে পারবেন,

- দৃঢ়বস্তুর গতিসমীকরণগুলিকে কী করে সমাধান করা যায়।
- দ্বিতীয়ক্রমের সমীকরণটি সমাকল করে নতুন সমীকরণ পাওয়া যায়।
- কোনোদিকে বলসমূহের উপাংশগুলির যোগফল শূন্য হলে সেদিকে ভরবেগ অপরিবর্তত থাকে।

- কোনোদিকের সাপেক্ষে বলগুলির ভ্রামকের যোগফল শূন্য হলে সেদিকে কৌণিক ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকে।
- সংরক্ষী বলতন্ত্রের অধীনে দৃঢ়বস্তুর গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি যোগফল অপরিবর্তিত থাকে।

16.3 দৃঢ়বস্তুর ভরবেগ (Linear Momentum of a rigid body)

একটি স্থিরবিন্দু O কে আদি বিন্দু নিয়ে স্থির অক্ষ Ox, Oy, Oz নেওয়া যাক্। এই অক্ষ সাপেক্ষে একটি গতিশীল দৃঢ়বস্তুর যে কোন একটি বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক t সময়ে (x, y, z) হলে x, y, z প্রত্যেকে t অপেক্ষক। স্থান ভেক্টর ব্যবহার করলে $\left(\overrightarrow{OP}\right) = \vec{r} = \left(\vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z\right)$ যেখানে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ একক ভেক্টর যথাক্রমে Ox, Oy, Oz দিকে।

P বিন্দুর t সময়ে গতিবেগ হল $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} - \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right)$$

$= \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z$ যেখানে $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ ইত্যাদি

$$\dot{\vec{r}} = \frac{dr}{dt}$$

অনুরূপভাবে P বিন্দু, ত্বরণ $\ddot{\vec{r}} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\right)$ অতএব দৃঢ়বস্তুকে কতগুলি কণার সমষ্টি মনে করলে আমরা m_1, m_2, ... দ্বারা বিভিন্ন কণা নির্দেশ করব এবং $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots\ldots$ দ্বারা তাদের অবস্থান নির্দেশ করব।

m_1 কণার t সময়ে ভরবেগ $= m_1 \dfrac{d\vec{r}_1}{dt}$

m_2 কণার t সময়ে ভরবেগ $= m_2 \dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$ ইত্যাদি

$\therefore$ দৃঢ় বস্তুটির ভরবেগ = প্রতিটি কণার ভরবেগের ভেক্টর যোগফল $= \sum_i m_i \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$, ... (1)

যেখানে i = 1, 2, ... অর্থাৎ সমগ্র বস্তুর কণার ওপর যোগফল।

আমরা জানি দৃঢ় বস্তুটির একটি ভরকেন্দ্র G আছে যার অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{R}$ হলে $\overrightarrow{R}$ t এর অপেক্ষক, এবং

$$\overrightarrow{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \qquad \text{........................ (2)}$$

এখন দৃঢ় বস্তুর ভর $\sum m_i = M$ লিখলে

$$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

এবার দুধারে t সাপেক্ষে অন্তরকলন নিয়ে পাই

$$M\frac{d\vec{R}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \qquad \text{........................} \quad (3)$$

অতএব (1) ও (3) থেকে দেখা গেল দৃঢ় বস্তুর ভরবেগ = $M\frac{d\vec{R}}{dt}$; অর্থাৎ যদি M অর্থাৎ দৃঢ়বস্তুর ভর যুক্ত একটি কণা ভরকেন্দ্রের বেগে চলে তাহলে **সেই কণার ভরবেগ = দৃঢ় বস্তুটির ভরবেগ**।

আবার যদি ভরকেন্দ্র G কে আদি বিন্দু নিয়ে এবং Gx', Gy', Gz' যথাক্রমে Ox, Oy, Oz এর সমান্তরাল অক্ষ নেওয়া যায় এবং এই অক্ষ সাপেক্ষে যে কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x', y', z') হয় তা হলে

$$x = \bar{x} + x'$$
$$y = \bar{y} + y'$$
$$z = \bar{z} + z'$$

যেখানে $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ হল G এর স্থানাঙ্ক (Ox, Oy, Oz সাপেক্ষে) অর্থাৎ

$$\vec{R} = \bar{x}\,\vec{i} + \bar{y}\,\vec{i} + \bar{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{r}\,' = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}$$

i তম কণার ক্ষেত্রে

তাহলে

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}_i\,'}{dt}$$

এবং $\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{R}}{dt} + \sum m_i \frac{d\vec{r}_i\,'}{dt}$

$$= M\frac{d\vec{R}}{dt} + \sum m_i \frac{d\vec{r}_i\,'}{dt}$$

কিন্তু $\dfrac{\sum m_i\ \vec{r}_i\,'}{\sum m_i}$ হল Gx', Gy', Gz' সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর ভরকেন্দ্র G এর অবস্থান ভেক্টর = 0.

$\therefore \quad \sum m_i\ \vec{r}_i\,' = 0$

$\therefore \quad \sum m_i\ \dot{\vec{r}}_i\,' = 0 \qquad$ .... (4)

অর্থাৎ ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে বস্তুর বিভিন্ন বিন্দুর গতিবেগের জন্য ভরবেগের যোগফল = 0

দৃঢ় বস্তুর ভরবেগ $M\dfrac{d\vec{R}}{dt}$ ভেকটরের কোন দিকে (যার দিক্ কোসাইন (l, m, n) বিশ্লেষিতাংশ নিয়ে পাই

$$M\frac{d\vec{R}}{dt}.\left(l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}\right)$$

$$= \quad M\left(\frac{d\bar{x}}{dt}l+\frac{d\bar{y}}{dt}m+\frac{d\bar{z}}{dt}n\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

এই স্কালার কে বস্তুটির (l, m, n) দিকে ভরবেগ — উপাংশ বলা হয়। অতএব $M\dfrac{d\bar{x}}{dt}$ হল x দিকে, $M\dfrac{d\bar{y}}{dt}$ হল y দিকে এবং $M\dfrac{d\bar{z}}{dt}$ হল z-দিকে বস্তুটির ভরবেগের উপাংশ।

16.4 ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি

একটি দৃঢ় বস্তুর বেলায় আমরা দেখলাম $M\dfrac{d\vec{R}}{dt}$ হল বস্তুটির ভরবেগ এবং যে কোন দিকে (যাকে $\vec{e}$ একক ভেকটর দ্বারা চিহ্নিত করা যায়) ভরবেগের উপাংশ $= M\dfrac{d\vec{R}}{dt}.\vec{e}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (6)

আবার ডালাম্বারের নীতি অনুসারে দৃঢ়বস্তুর ভরকেন্দ্র G এর গতি সমীকরণ হল

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt}^2 = \sum_i \vec{F}_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

(যেখানে $\vec{R}$ হল G-এর অবস্থান ভেকটর

$\vec{F}_i$ হল $\vec{r}_i$ বিন্দুতে m_{i} কণার ওপর বহিঃস্থ বল)

(7) নং সমীকরণ থেকে বলা যায় যে ভরবেগের পরিবর্তনের হার = সমগ্র বহির্বল সমূহের ভেক্টর যোগফল।

ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি (Principal of conservation of linear momentum of a rigid body)

"যদি একটি দৃঢ় বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বহির্বলগুলি এমন হয় যে তাহাদের একটি নির্দিষ্ট দিকে বিশ্লেষিতাংশগুলির যোগফল সর্বদা শূন্য থাকে, তা হলে ঐ দিকে দৃঢ় বস্তুর ভরবেগের সর্বদা ধ্রুবক থাকবে।"

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $\vec{e}$ একটি একক ভেক্টর একটি নির্দিষ্ট দিকে আছে। অতএব ওপরের (7) নং সমীকরণ থেকে $\vec{e}$ ভেক্টর দিয়ে গুণ করে পাই, $M\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}.\vec{e} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right).\vec{e}$ কিন্তু দক্ষিণ পক্ষ শূন্য শর্তানুযায়ী।

অতএব $M\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}.\vec{e} = 0$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (8)

এই সমীকরণটি যেহেতু সর্বক্ষণের জন্য সত্য এবং $\vec{e}$ যেহেতু একটি নির্দিষ্ট দিকে একক ভেক্তর, অতএব $\dfrac{d\vec{e}}{dt} = 0$

অতএব,

$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{d\vec{R}}{dt}.\vec{e}\right) = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}.e + M\frac{d\vec{R}}{dt}.\frac{d\vec{e}}{dt}$$

$$= M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}.e = 0 \qquad \text{........................} \quad (9)$$

অতএব (9) নং সমীকরণ সমাকল করে পাই,

$$M\frac{d\vec{R}}{dt}.\vec{e} = \text{ ধ্রুবক}$$

অর্থাৎ $\vec{e}$ দিকে ভরবেগ সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে।

মন্তব্য ঃ আমরা কণাপুঞ্জতে \$ 11.3.7 এ দেখেছি যে, যে কোন কণাপুঞ্জের জন্য ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি কার্যকরী, অতএব একটি দৃঢ়বস্তুর জন্য ওপরের ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি সত্য এবং একাধিক দৃঢ় বস্তুর জন্যও সত্য।

16.5 দৃঢ়বস্তুর কৌণিক ভরবেগ (Angular momentum of a rigid body)

16.3 এর মত স্থির বিন্দু O সাপেক্ষে অক্ষত্রয় Ox, Oy, Oz নিয়ে দৃঢ় বস্তুর যে কোন বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর t সময়ে $\vec{r}$ (t) দিয়ে সূচিত করছি। দৃঢ় বস্তুটিকে কতগুলি বস্তুকণা m_1, m_2 .... ইত্যাদি দ্বারা গঠিত মনে করছি ইত্যাদি যারা যথাক্রমে $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots\ldots$ ইত্যাদি অবস্থান ভেক্টরে t সময় রয়েছে। এখন O বিন্দু সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ বলতে বুঝি প্রতিটি কণার ভরবেগের O সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফল। অর্থাৎ m_i কণা যদি $\vec{r}_i$ তে অবস্থান করে তবে $m_i\dot{\vec{r}}_i$ ভরবেগের 0 সাপেক্ষে ভ্রামক হল $\vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i$ অতএব দৃঢ়বস্তুর 0 সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ যদি $\vec{L}$ দ্বারা সূচিত হয় তবে

$$\vec{L} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i\right) \qquad \text{........................} \quad (10)$$

এবার $\vec{L}$ ভেকটরকে t সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i\left[\left(\dot{\vec{r}}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i\right) + \left(\vec{r}_i \times m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\right] \qquad \text{........................} \quad (11)$$

$$= \sum_i\left(\vec{r}_i \times m_i\ddot{\vec{r}}_i\right) \text{ যেহেতু } \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0$$

ডালাম্বারের নীতি থেকে আমরা গতি সমীকরণ পাই বহির্বল ও কার্যকরীবলের বিপরীত বল সমূহ কোন গতিশীল তন্ত্রকে সাম্যে রাখে। অতএব স্থিতিবিদ্যা অনুসারে ঐ বল সমূহের ভেক্টর যোগফল শূন্য এবং ঐ বল সমূহের কোন বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফলও শূন্য। দ্বিতীয় শর্তটি থেকে পাই।

$$\sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right) = 0 \qquad \text{........................} \quad (12)$$

এই সমীকরণকে লিখতে পারা যায়

$$\sum \vec{r}_i \times m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad \text{........................} \quad (13)$$

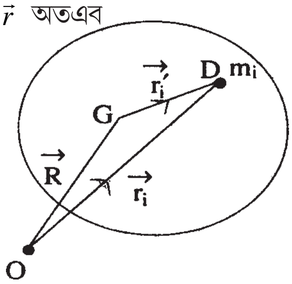
অতএব (11) ব্যবহার করে (13) কে লিখতে পারি

$$\frac{dL}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad \text{........................} \quad (14)$$

(14) সমীকরণটি ভাষায় দাঁড়ায় এরূপ "একটি দৃঢ় বস্তুর স্থিরবিন্দুর সাপেক্ষে কৌণিক ভরকেন্দ্রের ভরবেগের পরিবর্তনের হার = ঐ বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বহির্বলগুলির ঐ বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক ভেকটর সমূহের যোগফল।"

16.5.1 ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে-বস্তুর কৌণিক ভরবেগ

ভরকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর $\vec{R}$ এবং যে কোন বিন্দুর অবস্থান ভেকটর $\vec{r}$ অতএব



$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

$$\text{বা,} \quad M\vec{R} = \sum m_i \vec{r}_i$$

আবার ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে m_i কণার অবস্থান ভেকটর $\vec{r}_i'$ অতএব $\vec{r}_i' = \vec{R} + \vec{r}_i'$

অতএব (13) থেকে পাই,

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \\
&= \sum \left(\vec{R} + \vec{r}_i'\right) \times m_i \left(\vec{R} + \dot{\vec{r}}_i'\right) \\
&= \sum \left(\vec{R} \times m_i \dot{\vec{R}}\right) + \sum \left(\vec{R} \times m_i \dot{\vec{r}}_i'\right) + \sum \left(\vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{R}}\right) + \sum \left(\vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{r}}_i'\right) \\
&= \left(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}\right) \sum m_i + \vec{R} \times \left(\sum m_i \dot{\vec{r}}_i'\right) + \left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i'\right) \times \vec{R} + \sum_i \left(\vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{r}}_i\right) \\
&= \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \sum_i \left(\dot{\vec{r}}_i' \times m_i \dot{\vec{r}}_i'\right) \qquad \text{........................ (15)}
\end{aligned}$$

$$\text{যেহেতু} \quad \sum m_i \dot{\vec{r}}_i' = 0$$

$$\sum m_i \vec{r}_i' = 0$$

অতএব (15) থেকে দেখা গেল যে একটি দৃঢ় বস্তুর স্থিরবিন্দু O সাপেক্ষে কৌণিক ভর বেগ = ভরকেন্দ্রের বেগে ধাবমান M ভরের কণার O সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ + ভর কেন্দ্র G সাপেক্ষে বস্তুর কণাগুলির G সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ।

কোন রেখার দিকে কৌণিক ভরবেগ

ধরা যাক O গামী একটি সরলরেখা আছে যার দিক্ কোসাইন (l, m, n) তা হলে দৃঢ় বস্তুর ঐ রেখা সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ = ঐ রেখার যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগের ভেক্টরের ঐ রেখার দিকে বিশ্লেষিতাংশ = $\vec{L}.\left(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}\right) = L_x l + L_y m + L_z n$ যেখানে L_x, L_y, L_z হল $\vec{L}$ ভেকটরের কার্তিয় বিশ্লেষিতাংশ। অতএব L_x হল Ox দিকে কৌণিক ভরবেগ। L_y হল Oy দিকে, L_z হল Oz দিকে কৌণিক ভরবেগ।

16.6 দৃঢ় বস্তুর কৌণিক ভরবেগ সংক্রান্ত সংরক্ষণ নীতি (Conservation of Angular Momentum)

"যদি কোন একটি স্থির দিকে একটি দৃঢ় বস্তুর ভেকটর যোগফলের বিশ্লেষিতাংশ সর্বদা শূন্য হয় তা হলে ঐ দিকে কৌণিক ভরবেগ সর্বদা অপরিবর্তিত থাকবে।"

প্রমাণ ঃ আমরা (14) নং সমীকরণে দেখেছি যে O এর সাপেক্ষে $\vec{L}$ যদি কৌণিক ভরবেগ হয় তবে

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad \text{.......................} \quad (14)$$

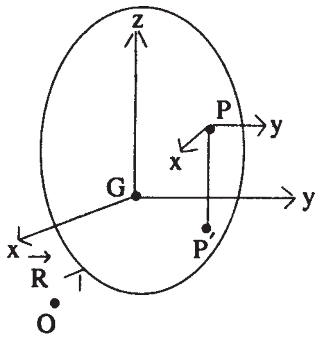
অর্থাৎ $\vec{L}$ এর পরিবর্তনের হার বস্তুটির ওপর প্রযুক্ত বহির্বল সমূহের ভ্রামক যোগফল।

এখন একটি নির্দিষ্ট দিক্ একটি একক ভেকটর $\vec{e}$ দ্বারা সূচিত করা যাক। প্রদত্ত শর্তানুসারে

$$\left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i\right).\vec{e} = 0$$

অতএব (14) নং সমীকরণ থেকে পাই

$$\frac{d\vec{L}}{dt}.\vec{e} = 0 \qquad \text{.......................} \quad (15)$$



অতএব $\frac{d}{dt}\left(\vec{L}.\vec{e}\right) = \frac{d\vec{L}}{dt}.\vec{e} + \vec{L}.\frac{d\vec{e}}{dt}$

$$= \frac{d\vec{L}}{dt}.\vec{e} + 0 \left(\because \frac{d\vec{e}}{dt} = 0\right) \qquad \text{.......................} \quad (16)$$

অতএব (15) ও (16) থেকে পাচ্ছি

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}.\vec{e}\right) = 0$$

অতএব সমাকল করে $\vec{L}.\vec{e}$ = ধ্রুবক

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \sum_i \left(m_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_i\right) \qquad \text{.......................} \quad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} \times M\dot{\vec{R}}\right) + \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_i{}'$$

$$= \vec{R} \times M\ddot{\vec{R}} + \frac{d}{dt}\sum\left(m_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_i{}'\right) \qquad \text{.......................} \quad (2)$$

আবার $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum\left(\vec{R} + \vec{r}_i{}'\right) \times \vec{F}_i$

$$= \vec{R} \times \sum \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i \qquad \text{.......................} \quad (3)$$

$$= \vec{R} \times M\ddot{\vec{R}} + \sum \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i$$

অতএব (2) ও (3) থেকে পাই,

$$\frac{d}{dt}\sum_i\left(m_i\dot{\vec{r}}_i'\times\vec{r}_i'\right)=\sum_i\left(\vec{r}_i'\times\vec{F}_i\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

"অতএব G এর সাপেক্ষে ভরবেগের পরিবর্তনের হার বল সমূহের G-র সাপেক্ষে ভ্রামকের সমান।"

16.7 দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তি (Kinetic energy of a rigid body)

একটি দৃঢ়বস্তুর গতিশক্তি বলতে আমরা বুঝি, $T=\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}i,\vec{v}i$ $\left(\begin{array}{l}\mathrm{m_i}=\mathrm{i}\text{ তম কণার ভর}\\ \mathrm{v}=\mathrm{i}\text{ তম কণার গতিবেগ}\end{array}\right)$ যেখানে দৃঢ় বস্তুটিকে অনেকগুলি ক্ষুদ্র বস্তু কণার সমষ্টি ধরা হয় এবং এই কণাগুলির প্রত্যেকটির গতিশক্তির যোগফলকে আমরা দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তি বলে থাকি।

স্বাভাবিক T কখনও ঋণাত্মক নয়। $T>0$ যে কোন গতির জন্য এবং একমাত্র স্থিতির জন্য $T=0$. গতিশক্তি সময়ের ওপর, নির্ভরশীল। প্রকৃতপক্ষে $\frac{dT}{dt}=\sum_i m_i.\vec{v}_i.\frac{d\vec{v}_i}{dt}$

আবার যেহেতু $\vec{r}_i, m_i$ এর অবস্থান ভেক্টর।

অতএব $T=\frac{1}{2}m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}$

এবং $\frac{dT}{dt}=\sum m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}$

$=\sum m_i\ddot{\vec{r}}_i.\dot{\vec{r}}_i$

$=\sum_i\left(\vec{F}_i\right).\dot{\vec{r}}_i$ $\qquad$ ($\because$ m_i এর গতি সমীকরণ $m_i\ddot{\vec{r}}_i=\vec{F}_i$)

= বস্তুটির ওপর ক্রিয়মান বল সমূহের কার্য করবার হার সমূহের যোগফল।

অতএব "গতিশক্তির পরিবর্তনের হার = প্রযুক্ত বল সমূহ কর্ত্তৃক কার্য করার হার।" এটিকে অনেক সময়ে শক্তিনীতি (Principal of energy) বলা হয়।

16.8 দৃঢ় বস্তুর স্থিতিশক্তি (Potential Energy) ও শক্তিসংরক্ষণ (Conservation Energy)

সংজ্ঞা ঃ দৃঢ় বস্তুর ওপর ক্রিয়মান বলসমূহকে কখনও কখনও একটি স্কালার অপেক্ষক $V(\vec{r}_1,\vec{r}_2\ldots\ldots)$ প্রতিটি কণার অবস্থান ভেক্টরের ওপর এমন ভাবে নির্ভর করে যে m_i কণার ওপর বল $\vec{F}_i=\left(-\frac{\partial V}{\partial x_i},-\frac{\partial V}{\partial y_i},-\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)$ এইরূপ অপেক্ষক V কে বল তন্ত্রের **স্থিতিশক্তি** বলা হয়। এবং এরূপ বস্তুতন্ত্রকে সংরক্ষী বলতন্ত্র (Conservative force system) বলা হয়।

16.9 শক্তি সংরক্ষণ নীতি

সংরক্ষী বলতন্ত্রের অধীনে বলগুলি দ্বারা কৃত কার্যের হার $= \sum_i \vec{F}_i, \dot{\vec{r}}_i$

$$= -\sum_i \left[\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_i},\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot\frac{dz_i}{dt}\right]$$

$$= -\frac{dV}{dt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

যেহেতু V শুধুমাত্র স্থানাঙ্কগুলির ওপর নির্ভর করে। (16) ও (17) থেকে আমরা পাই,

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

অতএব $\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0$

অতএব সমাকল করে পাই $T + V$ = ধ্রুবক = প্রাথমিক মান .... (18)

অতএব দেখা গেল যে,

"কোন দৃঢ় বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলসমূহ যদি সর্বদা একটি অপেক্ষকের আংশিক অন্তরকলন দ্বারা প্রাপ্তব্য হয়, এবং অপেক্ষকটি যদি t এর ওপর নির্ভরশীল না হয় তা হলে বস্তুতন্ত্রটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল সমগ্রগতির বেলায় ধ্রুবক থাকে।"

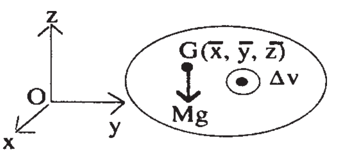
(শক্তি সংরক্ষণ নীতি)

16.10 সারাংশ

এই এককে আমরা দেখলাম, কোনো স্থির দিকে দৃঢ়বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলগুলির উপাংশ সর্বদা শূন্য হলে ঐ দিকে দৃঢ়বস্তুর ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকে। কোনো স্থির দিকের সাপেক্ষে বলগুলির ভ্রামক যোগফল সর্বদা শূন্য হলে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ ঐ দিকে অপরিবর্তিত থাকবে। সংরক্ষী বলের অধীন কোনো দৃঢ়বস্তুর গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল সর্বদা ধ্রুবক হয়।

16.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. একটি দৃঢ় বস্তুর ওপর ওজন বল একটি সংরক্ষী বল—দেখান।



Ox, Oy, Oz স্থির অক্ষ নিলাম, যেখানে Oz অক্ষ ঊর্ধ্বে উল্লম্ব দিকে।

একটি দৃঢ় বস্তু যার মোট ওজন W = Mg এবং আয়তন Vo নেওয়া যাক। তা হলে প্রতি একক আয়তনে ওজন বল $= \frac{W}{V_0} = \rho g$ এবং যেখানে $\rho = M/16$ তা উল্লম্ব নীচের দিকে প্রসারিত।

অতএব একটি ছোট আয়তন Δv নিলে তার ওপর বল হল

$$\left(0,0,-\Delta v\left(\frac{W}{V_0}\right)\right)=(0,0,-\rho\Delta vg)=(0,0,-g\Delta m)$$

যেখানে $\Delta m = \Delta v$ আয়তনের ভর $= \rho\Delta v$

অতএব একটি অপেক্ষক V, যেখানে $-\dfrac{dv}{dz}=-\rho g$

$V=\rho g\int dz=\rho gz$ এই অপেক্ষকটি নিলাম। V z -স্থানাঙ্কের অপেক্ষক।

অতএব যে কোন বিন্দু $(x,\ y,\ z)$ এর জন্য

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial V}{\partial z}=\rho g$$

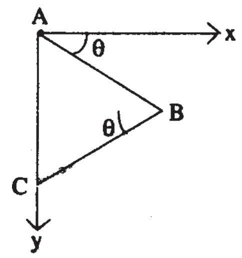
অতএব দেখা গেল $V=\rho g\int zdv=\rho gV_0\bar{z}=Mg\bar{z}$ (যেখানে $\bar{z}$ হল ভর কেন্দ্রের z স্থানাঙ্ক) স্থিতিশক্তি। অতএব দৃঢ়বস্তুটির গতির বেলায় $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ ভরকেন্দ্র G-এর স্থানাঙ্ক হলে,

$$M\ddot{\bar{x}}=0$$
$$M\ddot{\bar{y}}=0$$
$$M\ddot{\bar{z}}=-\int_{V_0}\rho gdv=-\rho gV_0=-Mg$$

যেহেতু ওজন বলগুলি সমান্তরাল ও সমমুখী, অতএব ঐ বলগুলির লব্ধি (0, 0, $-Mg$) ভরকেন্দ্রে ক্রিয়া করে এবং বস্তুটির গতির জন্য শুধু ভরকেন্দ্রে ঐ বল ক্রিয়া করছে ধরলেই হবে।

প্রশ্ন 2. দুটি সমান দৈর্ঘ্য ও ভরের দণ্ড, AB ও BC, প্রতিটিরই দৈর্ঘ্য $2a$, B বিন্দুতে মুক্তভাবে যুক্ত আছে (freely jointed), AB, A বিন্দু সাপেক্ষে ঘুরতে পারে, এবং C, A বিন্দুগামী উল্লম্ব সরলরেখাটির ওপর স্বচ্ছন্দভাবে (freely) চলাফেরা (move) করতে পারে। প্রাথমিক ভাবে দুটি দণ্ডকে একত্রে আনুভূমিকবস্থায় রাখা হল, C যেখানে A-এর ওপর সমাপতিত এবং এই অবস্থা থেকে ছেড়ে দেওয়া হল। দেখান যে, দণ্ডদুটি যখন আনুভূমিক রেখার সঙ্গো θ কোণে নত, তখন প্রতিটি দণ্ডের কৌণিক বেগ $\sqrt{\dfrac{3g}{a}\dfrac{\sin\theta}{1+3\cos^2\theta}}$

সমাধান ঃ A বিন্দুগামী আনুভূমিক রেখা বরাবর x-অক্ষ এবং উল্লম্ব রেখা বরাবর y-অক্ষ নেওয়া হল। ধরা যাক t সময়ে AB, Ax-এর সঙ্গো θ কোণে নত হয়। অতএব, BC ও Ax সমান্তরাল রেখার সঙ্গো ঐ একই কোণে নত হবে।



দণ্ড দুটিরই ভর M ধরা যাক। এই দৃঢ়বস্তুটির (দুটি দণ্ডের সমন্বয়ে গঠিত) গতি দ্বিমাত্রিক, এবং t সময়ে AB-এর গতিশক্তি হল $\frac{1}{2}M\left[\dot{\bar{x}}^2+\dot{\bar{y}}^2\right]+\frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$

যেখানে $(\bar{x},\bar{y})$ হল AB-এর ভরকেন্দ্রের স্থানাংক, $\bar{x}=a\cos\theta, \bar{y}=a\sin\theta$, এবং k হল, ভরকেন্দ্র বিন্দু সাপেক্ষে দণ্ডের ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ।

$\therefore$ AB-এর গতিশক্তি হল

$$\frac{1}{2}M\left(a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2+a^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}M\frac{a^2}{3}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}M\frac{4a^2}{3}\dot{\theta}^2$$

(যেহেতু দণ্ডটি A বিন্দু সাপেক্ষে ঘুরছে, সরাসরিও লেখা যায়, গতিশক্তি $=\frac{1}{2}M$(A-সাপেক্ষে ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ)$^2.\theta^2$) একইভাবে, t সময়ে BC-এর ভারকেন্দ্রের স্থানাংক, $(a\cos\theta,\ 3a\sin\theta)$

$\therefore$ BC-এর গতিশক্তি $=\frac{1}{2}M\left(a^2\sin^2\theta+9a^2\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M\frac{a^2}{3}\dot{\theta}^2$ এবং t সময়ে দণ্ড দুটির স্থিতিশক্তি

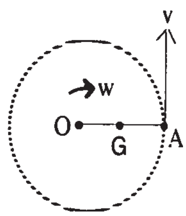
$= -\ Mg(a\sin\theta)-Mg(3a\sin\theta)=-4Mag\sin\theta$

(যেহেতু ভারই একমাত্র কার্য্যকরী বল)।

অতএব শক্তির সংরক্ষণ দ্বারা পাই $\frac{1}{2}M\left(\frac{4a^2}{3}+\frac{a^2}{3}+a^2\sin^2\theta+9a^2\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2-4Mga\sin\theta=$ ধ্রুবক $=$ প্রাথমিক মান $= 0$

$$\therefore\quad \dot{\theta}^2=\frac{3g\sin\theta}{a\left(1+3\cos^2\theta\right)}$$

প্রশ্ন। M-ভর ও a ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার আংটি (circularring) একটি মসৃণ আনুভূমিক তলের ওপর আছে। m ভরের একটি কীট ঐ আংটির ওপর স্থিরাবস্থা থেকে আংটির ধার বরাবর ধ্রুব গতিবেগ (speed) v নিয়ে হাঁটতে শুরু করে দেখান যে, আংটির কেন্দ্র $\frac{m}{M+2m}\frac{v}{a}$ কৌণিক গতিবেগ নিয়ে একটি বৃত্তপথে চলবে।



ধরা যাক, বৃত্তাকার আংটিটির কেন্দ্র O, এবং চলতে শুরু করার t সময় বাদে কীটটি পরিসীমার ওপর A বিন্দুতে আছে। A বিন্দুতে কীটটির রৈখিক বেগ v, বৃত্তের স্পর্শক অভিমুখে। আংটি এবং কীটটিকে নিয়ে যে দৃঢ়বস্তুতন্ত্র গঠিত হয়, তার ভরকেন্দ্র OA এর উপর অবস্থিত হবে, (যেহেতু o, আংটিটির ভরকেন্দ্র) ধরা যাক ভরকেন্দ্রটি G. $OG = x$ এবং $GA = y$, $x + y = a$.

$\therefore\quad x=\frac{O.M+a.m}{M+m}=\frac{ma}{M+m}$ এবং $y=a=\frac{am}{M+m}=\frac{Ma}{M+m}$

যেহেতু গতি এখানে আনুভূমিক তলে হচ্ছে এবং এই তলটি মসৃণ, অতএব আনুভূমিক তলে কোনো বহির্বল নেই। (উল্লম্ব দিকের বলগুলি সুস্থিত অবস্থায় আছে)।

অতএব, ভরকেন্দ্র G-এর ওপর কোনো বহির্বল নেই, এবং সেক্ষেত্রে G সর্বদাই স্থির থাকবে, যেহেতু প্রাথমিকভাবে G স্থির ছিল।

$\therefore$ বস্তুতন্ত্রটি G-এর সাপেক্ষে চলবে, অর্থাৎ G বিন্দুগামী লম্ব-অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরবে।

ধরা যাক O বিন্দু G-এর সাপেক্ষে কৌণিক বেগ W নিয়ে ঘোরে।

এখন আংটির সাপেক্ষে (অর্থাৎ A বিন্দুর সাপেক্ষে) কীটটির রৈখিক গতিবেগ $v\uparrow$ এবং A বিন্দুর রৈখিক গতিবেগ G এর সাপেক্ষে, $y\omega\downarrow$। (v এর বিপরীত দিকে)

অতএব কীটের গতিবেগ হল G সাপেক্ষে $v - y\omega$। এখন যেহেতু কোনো বহির্বল এই বস্তুতন্ত্রের ওপর নেই, অতএব এর কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক থাকবে।

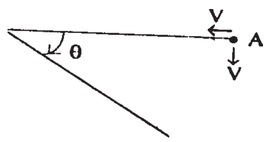
অর্থাৎ G এর সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ, প্রাথমিক মান O-এর সমান থাকবে।

কিন্তু, G সাপেক্ষে আংটির কৌণিক ভরবেগ = 0 সাপেক্ষে আংটির কৌণিক ভরবেগ + O বিন্দুতে যদি M একটি ভর, O বিন্দুর সঙ্গেই চলে, তবে G সাপেক্ষে তার কৌণিক ভরবেগ = $M \cdot a\omega \cdot a + Mx\omega \cdot x = M\omega\ (a^2 = x^2)$

$\therefore$ G বিন্দু সাপেক্ষে বস্তুতন্ত্রের কৌণিক ভরবেগ = G সাপেক্ষে কীটের কৌণিক ভরবেগ + G সাপেক্ষে আংটির কৌণিক ভরবেগ = $-m(v - y\omega)\ x + M\omega\ (a^2 + x^2)$

$$\therefore \quad \omega = \frac{mv}{(M+2m)a} \qquad (x \text{ ও } y \text{ এর মান বসিয়ে})$$

দণ্ড OA, একটি আনুভূমিক তলের ওপর O-বিন্দুর সাপেক্ষে বাধাহীনভাবে ঘুরতে পারে। দণ্ডটি স্থিরাবস্থায় ছিল, এমন সময়, একটি কীট (যার ভর দণ্ডের ভরের এক-তৃতীয়াংশ), A প্রান্ততে এসে বসে এবং সুষম গতি V নিয়ে দণ্ড বরাবর হাঁটতে থাকে। একই সময়ে দণ্ডটিকে এমনভাবে O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরিয়ে দেওয়া হয় যে A বিন্দুর রৈখিক গতিবেগও V হয়। দেখান যে, পোকাটি যখন O বিন্দুতে পৌঁছবে, দণ্ডটি তখন একটি সমকোণে ঘুরছে এবং তখন দণ্ডের কৌণিক গতিবেগ হবে প্রারম্ভিক কৌণিক গতিবেগের দ্বিগুণ।



ধরা যাক, প্রারম্ভিক কৌণিক বেগ ω দিয়ে দণ্ডটিকে ঘুরিয়ে দেওয়া হয়েছিল। তাহলে A বিন্দুর প্রারম্ভিক রৈখিক গতিবেগ = $2a\omega$ ($2a$ ধরি, O-র দৈর্ঘ্য)

= V (দেওয়া আছে)।

$\therefore \quad \omega = V/2a.$ (i)

ধরা যাক t সময়ে দণ্ডটি θ কোণ ঘুরেছে। ঐ সময়ে পোকাটি vt দূরত্ব অতিক্রম করে।

যেহেতু দণ্ডটি বাধাহীন ভাবে ঘুরছে অতঃপর বলা যায় ঘর্ষণবল অনুপস্থিত।

অর্থাৎ কিনা আনুভূমিক তলটির ওপর (যে তলে চলাচল হচ্ছে) দণ্ডের ও পোকার ওপর কোনো বহির্বল নেই। একমাত্র O বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল থাকতে পারে, যা ভ্রামক O সাপেক্ষে শূন্য। (এছাড়া অন্যান্য বল, যথাদণ্ড ও পোকার ভার ও তলের লম্ব প্রতিক্রিয়া, পরস্পরের সমান ও বিপরীতমুখী।

অতএব O বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে বলা যায় যে ঐ বিন্দু সাপেক্ষে দণ্ড ও পোকা দ্বারা গঠিত এই বস্তুতন্ত্রটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হবে, অর্থাৎ

$$M.\frac{4a^2}{3}\dot{\theta} + \frac{M}{3}(2a - Vt)^2\dot{\theta} = \text{ধ্রুবক} = \text{প্রারম্ভিক মান}$$

$$= M.\frac{4a^2}{3}\cdot\frac{V}{2a} + \frac{M}{3}.4a^2\cdot\frac{V}{2a}$$

$$= \frac{4}{3}MVa \quad (\text{দণ্ডের ভর } M)$$

$$\therefore \quad \dot{\theta} = \frac{4VA}{4a^2 + (2a - Vt)^2}$$

$$\therefore \quad \theta = -2\tan^{-1}\frac{2a - Vt}{2a} + C$$

C হল সমাকলন ধ্রুবক।

$t = 0$ তে, $\theta = 0$,

সমাকলন ধ্রুবক $= \pi/2$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}\frac{2a - Vt}{2a}$$

পোকাটি যখন 0-তে পৌঁছায়, তখন সময় লাগে $t = \dfrac{2a}{V}$

এবং তখন $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

এবং $\dot{\theta}$ (কৌণিক বেগ)

$$= \frac{\frac{4}{3}MVa}{\frac{4}{3}Ma^2} = \frac{V}{a} = 2\omega = \text{ প্রারম্ভিক কৌণিক বেগের দ্বিগুণ।}$$

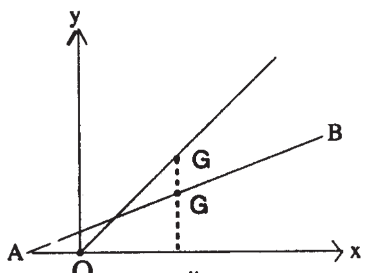
এই অঙ্কগুলি দেখার আগে একক 17 পাঠ প্রয়োজন।

শক্তির সংরক্ষণ সূত্র প্রয়োগ করে কিছু দ্বিমাত্রিক গতির সমস্যা সমাধান।

1. একটি সুষম দণ্ডকে এক প্রান্ত একটি আনুভূমিক টেবিলের সঙ্গে ঠেকিয়ে এমনভাবে রাখা হল যে, দণ্ডটি আনুভূমিক রেখার সঙ্গে α কোণে নত থাকে। এই অবস্থায় দণ্ডটিকে ছেড়ে দেওয়া হল। দেখান যে টেবিলটি যথার্থভাবে অমসৃণ বা যথার্থভাবে মসৃণ যাই-ই হোক না কেন, আনুভূমিক অবস্থায় পৌঁছানোর সময় দণ্ডটির কৌণিক বেগ হবে $\sqrt{\dfrac{3g}{2a}\sin\alpha}$ এবং উভয় ক্ষেত্রেই, দণ্ডের প্রান্তটি কখনো টেবিল ছেড়ে উঠবে না।

এই অংকের প্রথম অংশটি আগেই (দ্বিমাত্রিক গতি—*Ex*. 8. একক 17, সর্বশেষ প্রশ্নাবলি) সমাধান করা হয়েছে—কাজেই এখন শক্তির সংরক্ষণ সূত্র ব্যবহার করে আমরা শুধু টেবিলটি যথার্থ মসৃণ—এই অংশর জন্য সমাধান করব।

ধরা যাক, প্রারম্ভিকভাবে দণ্ডটি টেবিলের ওপর O প্রান্তটি রেখে, আনুভূমিক রেখার সঙ্গে α কোণে নত ছিল। আগের মতই O এর মধ্য দিয়ে আনুভূমিক ও উল্লম্ব রেখা বরাবর Ox ও Oy নেওয়া হল। (দণ্ডটি যে উল্লম্ব তলে অবস্থিত সেই উল্লম্ব তলে।)



এখন, এক্ষেত্রে ঘর্ষণ উপস্থিত না থাকায়, ভারকেন্দ্র G এর ওপরে আনুভূমিক দিকে কোনো বল নেই। এবং প্রারম্ভিক ভাবে, আনুভূমিক দিকে G-এর গতিবেগও ছিল শূন্য।

অতএব, Ox, Oy সাপেক্ষে যদি G এর স্থানাঙ্ক হয় $(\bar{x}, \bar{y})$, t সময়ে তবে, $M\ddot{\bar{x}} = 0$

বা, $\dot{\bar{x}}$ = ধ্রুবক = প্রারম্ভিক মান = 0,

বা, $\bar{x}$ = ধ্রুবক = প্রারম্ভিক মান = $a\cos\alpha$

অর্থাৎ G এর x স্থানাঙ্ক সবসময়ই এক থাকে।

এটা সম্ভব হতে পারে যদি G, একটি উল্লম্ব সরলরেখায় চলে।

G-এর গতিপথ অতএব y-অক্ষের সমান্তরাল। এর জন্য দণ্ডের প্রান্তবিন্দু O কে স্থির থাকলে হবে না। ধরা যাক, t সময়ে দণ্ডের নীচের প্রান্তটি A বিন্দুতে গেছে, যার স্থানাঙ্ক $(x, 0)$.

এই সমস্যায় ঘর্ষণবল অনুপস্থিত, প্রান্তবিন্দুতে লম্ব-প্রতিক্রিয়া কোনো কাজ করছে না কারণ লম্বদিকে নীচের প্রান্তের কোনো চলন নেই, এবং একমাত্র বল যা কাজ করে তা হলো দণ্ডটির ভার, যেটি সংরক্ষী বল। অতএব এক্ষেত্রে আমরা শক্তির সংরক্ষণসূত্র প্রয়োগ করতে পারব।

প্রারম্ভিকভাবে, স্থিতিশক্তি $= Mga \sin \alpha$

(Ox-রেখাকে আদর্শ অবস্থান ধরে),

এবং গতিশক্তি $= O$,

t সময়ে, স্থিতিশক্তি $Mga \sin \theta$

এবং গতিশক্তি $\frac{1}{2}M\left(\dot{\bar{y}}^2 + k^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}M\left(\dot{\bar{y}}^2 + \frac{a^2}{3}\dot{\theta}^2\right)$

(ভরকেন্দ্রের গতিশক্তি + ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে গতিশক্তি)।

অতএব,

$$\frac{1}{2}M\left(\dot{\bar{y}}^2 + k^2\dot{\theta}^2\right) + Mga\sin\theta \quad = \text{ধ্রুবক} = \text{প্রারম্ভিক মান}$$

$$= Mga \sin \alpha$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}M\left(\dot{\bar{y}}^2 + \frac{a^3}{3}\dot{\theta}^2\right) = Mga(\sin\alpha - \sin\theta)$$

এখন $\bar{y} = a\sin\theta,\ \dot{\bar{y}} = a\cos\theta\ \dot{\theta}$ ইত্যাদি

অতএব, $\frac{1}{2}a^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{3}\right)\dot{\theta}^2 = ga(\sin\alpha - \sin\theta)$

দণ্ডটি আনুভূমিক হলে $\theta = 0$, এবং $\dot{\theta}\Big]_{\theta=0} = \omega$ হলে, $\frac{1}{2}a\left(1 + \frac{1}{3}\right)\omega^2 = g\sin\alpha$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}\sin\alpha}$$

এছাড়াও G-এর সাপেক্ষে (t সময়ে) ভ্রামক নিয়ে, $M\frac{a^2}{3}\ddot{\theta} = -Ra\cos\theta$

সমাকলন করে,

$$M\frac{a^2}{3}\dot{\theta}^2 = -2Ra\sin\theta + C \text{ ধ্রুবক}$$

প্রারম্ভিক শর্ত, $\theta = \alpha, \dot{\theta} = 0$

$\therefore \quad C = 2aR \sin \alpha$

$$\therefore \quad M\frac{a^2}{3}\dot{\theta}^2 = 2aR(\sin\alpha - \sin\theta)$$

$\therefore \quad R = \dfrac{Ma\dot{\theta}^2}{6(\sin\alpha - \sin\theta)}$

এখন, $0 < \theta < \alpha$ অতএব $\sin \alpha > \sin \theta$.

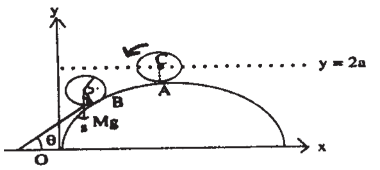
$\therefore \quad R > 0$

অর্থাৎ, দণ্ডটি পড়বার সময়, এর নীচের প্রান্ত কখনোই টেবিল ছেড়ে উঠবে না।

একটি গোলক যার ব্যাসার্ধ b, না পিছলিয়ে $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ এই সাইক্লয়েডের ওপর দিয়ে নীচের দিকে গড়াচ্ছে। যাত্রা শুরুর সময় গোলকের কেন্দ্র $y = 2a$ সরলরেখার ওপর ছিল এবং যাত্রা স্থিরাবস্থা থেকে শুরু হয়। দেখান যে, নিম্নতম বিন্দুতে গোলকের কেন্দ্রের গতিবেগ V হবে $V^2 = g\dfrac{10}{7}(2a - b)$

গোলকের ভর m ধরা যাক।

t সময়ে সাইক্লয়েডের সঙ্গে গোলকের স্পর্শবিন্দু B, $OB = s$ ধরা যাক, যেখানে O, সাইক্লয়েডের নিম্নতম বিন্দু। B বিন্দু সাইক্লয়েডের স্পর্শক Ox-এর সঙ্গে θ কোণে নত, এবং ধরা যাক প্রারম্ভিকভাবে যে ব্যাসার্ধটি (CA) সাইক্লেয়েডের ওপর লম্ব ছিল, সেটি ϕ কোণ ঘুরেছে t সময়ে, অর্থাৎ t সময়ে কেন্দ্রগামী উল্লম্বরেখার (এই রেখাটি দুই মাত্রিক দেশে একটি নির্দিষ্ট দিক) সঙ্গে ঐ ব্যাসার্ধটি (যেটি গোলকটির সাপেক্ষে নির্দিষ্ট) $\theta + \phi$ কোণে নত।



অতএব, গোলকের কৌণিক গতিবেগ $(\dot{\theta} + \dot{\phi})$

এখন গড়ানোর জন্য, $= v = b\,(\dot{\theta} + \dot{\phi})$, যেখানে v হল কেন্দ্রের গতিবেগ

এবং, যেহেতু গোলকটি গড়াচ্ছে, অতএব শক্তির সংরক্ষণ সূত্র প্রয়োগ করা যাবে।

যদি t সময়ে গোলকের কেন্দ্রের উত্ততা হয় y (Ox-এর ওপরে), তবে,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mk^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + mgy = mg2a.$$

যেখানে v হল, t সময়ে কেন্দ্রর গতিবেগ, এবং $k^2 = \dfrac{2}{5}b^2$

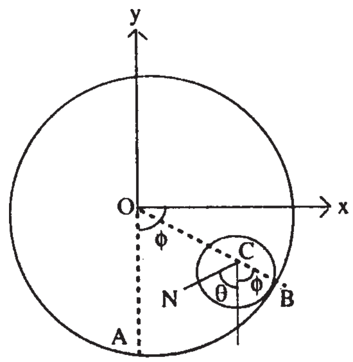
$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m.\frac{2}{5}b^2.\frac{v^2}{b^2} = mg(2a - y)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{2}{5}\right)v^2 = mg(2a - y)$$

অতএব, সর্বনিম্ন বিন্দুতে যখন গোলকের স্পর্শবিন্দু পৌছবে তখন গোলকের কেন্দ্রের উচ্চতা b এবং কেন্দ্রের গতিবেগ V হলে, $\dfrac{1}{2}m.\dfrac{7}{5}V^2 = mg(2a - b)$

$$\therefore \quad V^2 = \frac{10g}{7}(2a - b)$$

প্রশ্ন। একটি ফাঁপা বৃত্তাকার বেলনকেস্থিরাবস্থায়, অক্ষ আনুভূমিক করে রাখা হয়েছে। এর ভেতরে, একটি বৃত্তাকার চাকতি, তার তলকে উল্লম্ব রেখে গড়াচ্ছে। যখন চাকতিটি তার নিম্নতম অবস্থানে থাকে, তখন তার কেন্দ্রের গতিবেগ $\sqrt{\frac{8}{3}g(a-b)}$ দেখান যে, বৃত্তের কেন্দ্র, বেলনের কেন্দ্রের সাপেক্ষে ϕ কোণ পরিমাণ ঘুরবে $-\sqrt{\frac{3(a-b)}{2g}}\log\tan\left(\pi/4+\phi/4\right)$ সময়ে। a হল বেলনের ও b বৃত্তের ব্যাসার্ধ।



চাকতির মধ্য দিয়ে উল্লম্ব তলটি, বেলনকে একটি বৃত্তে ছেদ করে যার কেন্দ্র O। ছবিতে সেটিই দেখানো হয়েছে।

প্রথম চাকতি ও বেলনের মধ্যের স্পর্শবিন্দু ছিল, A, OA উল্লম্বরেখা। ওপরদিকে গড়িয়ে t সময়ে বৃত্তটি B বিন্দুতে পৌঁছেছে এবং ঐ একই সময় θ কোণ পরিমাণ ঘুরেছে। C হল বৃত্তের কেন্দ্র।

এখন, যেহেতু বৃত্তটি গড়াচ্ছে, অতএব, বৃত্তচাপ AB = বৃত্তচাপ CN (CN প্রথমে OA বরাবর ছিল অর্থাৎ উল্লম্ব ছিল)

বা, $a\phi = b(\theta+\phi)$,

যেখানে, OA ও OC এর মধ্যে t সময়ে কোণে ϕ এবং উল্লম্ব ও CN এর মধ্যে কোণ θ

$\therefore \quad b\dot{\theta} = (a-b)\dot{\phi}$ .... (i)

O এর মধ্য দিয়ে আনুভূমিক ও উল্লম্বদিকে x ও y অক্ষ নেওয়া হল।

অতএব, t সময়ে C এর স্থানাঙ্ক হল $(\bar{x},\bar{y})$

যেখানে, $\bar{x}=(a-b)\sin\phi, \bar{y}=-(a-b)\cos\phi$

t সময়ে চাকতিটির গতিশক্তি (চাকতির ভর M)

$= \frac{1}{2}M\left[\dot{\bar{x}}^2+\dot{\bar{y}}^2\right]+\frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$

$= \frac{1}{2}M\left[\left((a-b)\cos\phi\,\dot{\phi}\right)^2+\left((a-b)\sin\phi\,\dot{\phi}\right)^2\right]+\frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$

$= \frac{1}{2}M(a-b)^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}M\frac{b^2}{2}\dot{\theta}^2 \qquad \because k^2=\frac{b^2}{2}$

$= \frac{3M}{4}(a-b)^2\dot{\phi}^2$, (i) ব্যবহার করে।

প্রারম্ভিকভাবে, চাকতিটির গতিশক্তি ছিল $\frac{1}{2}M\left(\frac{8}{3}g(a-b)\right)+\frac{1}{2}M\frac{b^2}{2}\omega^2$,

যেখানে, কেন্দ্রের গতিবেগ $\sqrt{\frac{8}{3}g(a-b)}$ এবং কেন্দ্রের সাপেক্ষে কৌণিক গতিবেগ ধরা যাক ω, কিন্তু, স্থিরবিন্দু O এর সাপেক্ষে কেন্দ্রের গতি হল $(a-b)\dot{\phi}$ (ϕ যেদিকে বাড়ে সেই দিকে)।

অতএব, নিম্নতম বিন্দুতে, $\dot{\phi}=\omega$ হলে,

$$(a-b)^2\omega^2 = \frac{8}{3}g(a-b)$$

অতএব $\omega^2 = \frac{8}{3}g\Big/(a-b)$

অতএব, $\omega^2 = \frac{(a-b)^2}{b^2}\cdot\frac{8}{3}g\Big/(a-b)$ ((i) থেকে)

অতএব, প্রারম্ভিক গতিশক্তি হল

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{8}{3}g(a-b)+\frac{1}{2}(a-b)\frac{8}{3}g\right)=\frac{3M}{3}g(a-b)$$

যেহেতু, ঘর্ষণ উপস্থিত থাকলে তা কোনো কাজ করছে না, অতএব শক্তির নিত্যতা সূত্র প্রয়োগ করা যায়, এবং $\frac{3M}{4}(a-b)^2\dot{\phi}^2-\frac{3M}{4}\cdot\frac{8g}{3}(a-b)=t$ সময় ও প্রারম্ভিক সময়ে গতিশক্তির অন্তর = বৃত্তের ভারকেন্দ্রকে তার প্রারম্ভিক অবস্থান থেকে বর্তমান অবস্থানে আনার জন্য ভারবল দ্বারা কৃতকার্য

$$= \quad (-Mg)\left[-(a-b)\cos\phi-(-(a-b))\right]$$

$$= \quad Mg(a-b)\left[\cos\phi-1\right]$$

$$\therefore \quad \frac{3M}{4}(a-b)\dot{\phi}^2 = \frac{3M}{4}\cdot\frac{8g}{3}-Mg+Mg\cos\phi$$

$$\therefore \quad \phi^2 = \frac{4g(1+\cos\phi)}{3(a-b)} = \frac{8g}{3(a-b)}\cos^2\frac{\phi}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{8g}{3(a-b)}}\cos\frac{\phi}{2}$$

সমাকলন করে,

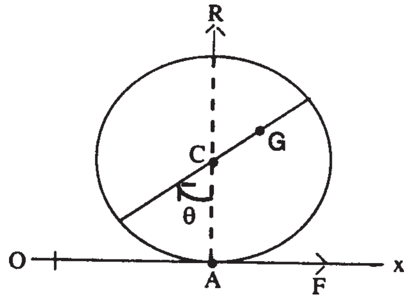
$$t = \sqrt{\frac{3(a-b)}{8g}}\int_0^{\phi}\sec\frac{\phi}{2}\,d\phi$$

$$= \sqrt{\frac{3(a-b)}{8g}}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{4}\right)$$

প্রশ্ন। একটি বৃত্তকার বেলনের ভারকেন্দ্র, তার অক্ষ থেকে C দূরত্বে অবস্থিত। বেলনটি আনুভূমিক তলের ওপর গড়াচ্ছে। অস্থিত সাম্যের অবস্থা থেকে বেলনটি চলতে (গড়াতে) শুরু করে। দেখান যে, ভরকেন্দ্রটি কখন তার নিম্নতম অবস্থানে থাকতে তখন বেলনের ওপর তলের লম্ব প্রতিক্রিয়া হল বেলনের ভারের $1+\frac{4c^2}{(a-c^2)+k^2}$ গুণ, যেখানে k হল ভরকেন্দ্রের মধ্যগামী অক্ষের সাপেক্ষে বেলনের ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ, এবং a হল বেলনটির ব্যাসার্ধ।

বেলনের ভরকেন্দ্র G এর মধ্যগামী উল্লম্ব তলটি বেলনকে একটি বৃত্তে ছেদ করে, ছবিতে সেটি দেখানো হয়েছে। C এই বৃত্তের কেন্দ্র। প্রারম্ভিক ভাবে স্পর্শবিন্দু ছিল O, এবং এই সময়ে যেহেতু বেলনটি অস্থিত

সাম্যে ছিল অতএব, G, C-এর উল্লম্বভাবে ওপরে ছিল। t সময়ে ধরা যাক বেলনটি θ কোণ ঘুরেছে, এবং বর্তমান স্পর্শবিন্দু A এবং O কে আদিবিন্দু, OA বরাবর x-অক্ষ নেওয়া হল। t সময়ে গোলকটির চলন x হলে (অর্থাৎ $OA = x$ হলে),



$a\theta = x$ (গড়ানোর জন্য)

বেলনের ভারকেন্দ্র G-এর স্থানাঙ্ক হল $(\bar{x}, \bar{y})$ t সময়ে।

$$\left.\begin{aligned} x &= OA + c\sin\theta = a\theta + c\sin\theta \\ y &= CA + c\cos\theta = a + c\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

ভারকেন্দ্র G এর গতিসমীকরণগুলি হবে

$M\ddot{\bar{x}} = F$

এবং $\quad M\ddot{\bar{y}} = R - Mg \qquad$ (ii) (বেলনের ভর M)

এখন ভারকেন্দ্রের সাপেক্ষে আমরা ভ্রামক-সমীকরণটি নিতে পারি, অথবা, যেহেতু বেলনটি গড়াচ্ছে, এবং তার ফলে ঘর্ষণবল কোনো কাজ করছে না, এবং লম্ব-প্রতিক্রিয়ার লম্বদিকে সরণ হচ্ছে বলে R-ও কোনো কাজ করে না, অতএব আমরা শক্তির নিত্যতা সূত্র প্রয়োগ করতেই পারি।

ভারকেন্দ্রটি তার প্রারম্ভিক অবস্থ্যায় $(a + c)$ উচ্চতায় ছিল। t সময়ে $(a + c\text{os }\theta)$ উচ্চতায় আছে। ভারকেন্দ্রকে এই প্রারম্ভিক অবস্থা থেকে বর্তমান অবস্থায় আনতে ভার-বলকে যে পরিমাণ কাজ করতে হয়েছে তা হল,

$$\int_{a+c}^{a+c\cos\theta} -Mg\,dy$$

$$= \quad Mg\big[(a+c) - (a+\cos\theta)\big] = Mgc\,(1-\cos\theta)$$

এবং t সময়ে গতিশক্তি হল

$$\frac{1}{2}M\left(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2\right) + \frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$$

$$= \quad \frac{1}{2}M\left(c^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + c^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2ac\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + k^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$= \quad \frac{1}{2}M(c^2 + a^2 + 2ac\cos\theta + k^2)\,\dot{\theta}^2$$

$\therefore$ যেহেতু প্রারম্ভে গতিশক্তি শূন্য ছিল,

অতএব,

$$Mgc(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}M\big[c^2 + a^2 + 2ac\cos\theta + k^2\big]\dot{\theta}^2 \qquad \text{....... (iii)}$$

বা, $\quad \dot{\theta}^2 = \dfrac{2gc(1-\cos\theta)}{c^2 + a^2 + 2ac\cos\theta + k^2}$

যখন $\theta = \pi$ হয় (অর্থাৎ সুস্থিত সাম্যে), তখন আমাদের R-এর মান দরকার।

$$R = Mg + M\ddot{\bar{y}}$$

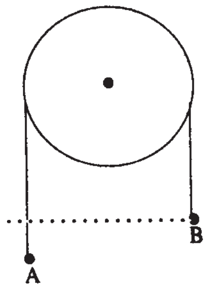
$$= \; Mg - Mc\left[\sin\theta.\ddot{\theta} + \cos\theta.\dot{\theta}^2\right]$$

$$\therefore \quad R\Big]_{\theta=\pi} = Mg - Mc(-1).\frac{2gc\left(1-(-1)\right)}{c^2+a^2+k^2-2ac}$$

$$= \; Mg + 4mg\frac{c^2}{c^2+a^2-2ac+k^2}$$

$$= \; Mg\left(1+\frac{4c^2}{(a-c)^2+k^2}\right)$$

প্রশ্ন। একটি সুষম বৃত্তাকার চাকতি, যার ব্যাসার্ধ a, উল্লম্বতলের তার কেন্দ্রগামী একই মসৃণ আনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে। একটি অমসৃণ শিকল (chain), যার ভর, চাকতিটির ভরের সমান এবং যার দৈর্ঘ্য চাকতির পরিসীমার সমান, চাকতির ওপর দিকে দুদিকে সমান অবস্থায় ঝুলছে। একদিকে সামান্য পরিমাণ শিকলটিকে নামিয়ে দেওয়া হল। দেখান যে শিকলের অপর প্রান্তটি যখন চাকতি পর্যন্ত পৌঁছবে তখন শিকলটির গতিবেগ হবে $\sqrt{\dfrac{\pi ag}{6}}$



প্রারম্ভিক ভাবে, চাকতির দুদিকে শিকলের $\dfrac{\pi a}{2}$ দৈর্ঘ্য ঝুলছিল। প্রান্ত A-কে একটু টেনে নামিয়ে দিলে, ঐ দিকে ভার বেশি হওয়াতে শিকলটি ঐ দিকে পড়তে শুরু করবে। এবং অপর প্রান্ত B ওপর দিকে উঠবে। একই সঙ্গে বৃত্তটি নিজের কেন্দ্রের সাপেক্ষে ঘুরতে শুরু করবে।

t সময়ে যদি B প্রান্তটি x দূরত্বে ওপরে ওঠে ও ঐ সময়ে চাকতিটি θ কোণ ঘুরে যায়,

তবে $x = a\theta$ (i)

এক্ষেত্রে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির আলোচনার জন্য চাকতি ও শিকল দুটির কথাই মনে রাখতে হবে।

শিকলটি t সময়ে $\dot{x}$ রৈখিক গতিবেগে চলছে এবং চাকতিটি ঐ সময়ে $\dot{\theta}$ কৌণিক বেগে ঘুরছে।

t সময়ে এদের গতিশক্তি $\frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$

যেখানে k হল কেন্দ্রের সাপেক্ষে চাকতির ঘূর্ণন-ব্যাসার্ধ, এবং M হল চাকতির ভর। শিকলের ভরও তাহলে M.

ঐ সময়ে স্থিতিশক্তি

$$-\frac{Mg}{2\pi a}\left(\frac{\pi a}{2}+x\right).\frac{1}{2}\left(\frac{\pi a}{2}+x\right)$$

$$-\frac{Mg}{2\pi a}\left(\frac{\pi a}{2}-x\right).\frac{1}{2}\left(\frac{\pi a}{2}-x\right) \qquad \text{(বৃত্তের আনুভূমিক ব্যাসের নিরিখে)}$$

প্রারম্ভে, গতিশক্তি O এবং

স্থিতিশক্তি, $-\frac{Mg}{2\pi a}\left(\frac{\pi a}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi a}{2}\right)$

$$-\frac{Mg}{2\pi a}\left(\frac{\pi a}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi a}{2}\right)$$

$$= -\frac{Mg\pi a}{8}$$

অতএব,

$$\frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{Mg}{4\pi a}\left[\left(\frac{\pi a}{2}+x\right)^2 + \left(\frac{\pi a}{2}-x\right)^2\right] = -\frac{Mg\pi a}{8}$$

বা, $\frac{1}{2}k^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{g}{4\pi a}\left[\frac{\pi^2 a^2}{2} + 2x^2\right] - \frac{Mg\pi a}{8}$

$$\left(k^2 = \frac{a^2}{2},\ x = a\theta, \dot{x} = a\dot{\theta}\right)$$

$\therefore\quad \frac{3}{4}\dot{x}^2 = \frac{gx^2}{2\pi a}$

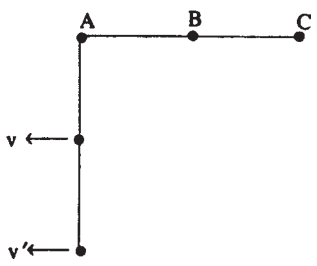
অতএব অন্যপ্রান্তটি যখন চাকতি পর্যন্ত পৌঁছায়,.

অর্থাৎ $x = \frac{\pi a}{2}$ হয়

তখন $\dot{x}^2 = \frac{\pi ag}{6}$

বা, $\dot{x} = \sqrt{\frac{\pi ag}{6}}$

প্রশ্নঃ একটি ভারহীন দণ্ড ABC, তার প্রান্ত A (যেটিকে আটকে রাখা হয়েছে) এর সাপেক্ষে ঘুরতে পারে। মধ্যবিন্দু B অন্যপ্রান্ত বিন্দু C তে দুটি সমান ভরের কণা দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত আছে। আনুভূমিক অবস্থায় দণ্ডটিকে স্থির রেখে তারপর ছেড়ে দেওয়া হল। দেখান যে, উল্লম্ব অবস্থায় এই বস্তুতন্ত্রটির কৌণিক গতিবেগ হবে $\sqrt{\frac{6g}{5a}}$ এবং সমতুল্য, সরল দোলকটির দৈর্ঘ্য হবে $\frac{5a}{3}$



সমান ভরদুটি B ও C বিন্দুতে দৃঢ়ভাবে একটি ভারহীন দণ্ডের দ্বারা সংযুক্ত

এবং A বিন্দুর মধ্য দিয়া আনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরছে। তারা একটি যৌগিক দোলক গঠন করেছে। ধরা যাক দণ্ডের দৈর্ঘ্য $2a$. ভরদুটির প্রতিটির মান m.

উল্লম্ব অবস্থায় ভরদুটির রৈখিক গতিবেগ যথাক্রমে v ও v', যেখানে $v = a\omega$, $v' = 2a\omega$, ω হল ঐ সময়ে দণ্ডের কৌণিক বেগ।

ঐ অবস্থায় স্থিতিশক্তি হল $-Mga - mg \cdot 2a$

এবং গতিশক্তি হল $\frac{1}{2}ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}m(4a^2)\omega^2$

প্রারম্ভিক ভাবে, গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি দুইই শূন্য,

অতএব শক্তির নিত্যতা সূত্র অনুসারে,

$$0 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}m4a^2\omega^2 - mga - 2mga$$

$$\therefore \quad 5a^2\omega^2 = 6ga$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{5a}}$$

এবং l = সমতুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য

$$= \frac{k^2}{h} \quad \text{যেখানে} \quad k^2 = \frac{ma^2 + m4a^2}{2m} = \frac{5a^2}{2}$$

এবং $h = \frac{ma + 2am}{m + m} = \frac{3}{2}a$

$$\therefore \quad l = \frac{k^2}{h} = \frac{5a}{3}$$

(k হল A সাপেক্ষে বস্তুতন্ত্রটির ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ, h হল A থেকে বস্তুতন্ত্রটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব)।

একক 17 ❑ দ্বি-মাত্রিক গতি (Two-dimensional Motion)

গঠন

17.1 প্রস্তাবনা

বহু গতি সমস্যা যেমন একটি গোলাকৃতি ভারী বলকে একটি নত সমতলে এক স্থানে স্থির অবস্থায় ছাড়লে বলটি নীচের দিকে একটি উল্লম্বতলে এমনভাবে গড়িয়ে চলে যে তার প্রতিটি বিন্দু সর্বদা একটি উল্লম্বতলে থাকে। আর বলটির প্রতিটি বিন্দু একই স্থির সমতলের সমান্তরাল সমতলে গতিশীল হয়। এরূপ গতিই দ্বিমাত্রিক গতির উদাহরণ। আমরা এই এককে দ্বিমাত্রিক গতির বিভিন্ন উদাহরণ সমাধান করে দেখাব। এখানে ভরকেন্দ্রের গতি ও ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে বস্তুর ঘূর্ণন গতি এই দুটো সমাধান দ্বারা পুরো সমাধান পাওয়া যায়।

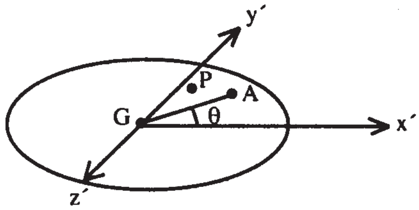
17.2 উদ্দেশ্য

এই এককে দৃঢ়বস্তুর দ্বিমাত্রিকগতি সম্বন্ধে জানতে পারবেন—

- বিশদ আলোচনায় দ্বিমাত্রিক গতির প্রকৃতি।
- দ্বিমাত্রিক গতি হতে হলে বলগুলি ভরকেন্দ্রের সমতলে ক্রিয়া করা প্রয়োজন।
- কি ধরনের গতি সমক্যায় দ্বিমাত্রিক গতি হয় ও কিভাবে তাদের সমাধান হয় উদাহরণস্বরূপ দেখানো হবে।

17.3 দ্বিমাত্রিক গতির পরিচয়

একটি দৃঢ়বস্তু যদি এমনভাবে চলে যে তার প্রতিটি বিন্দু সর্বদা একটি নির্দিষ্ট সমতলে থাকে এবং ঐ সমতলগুলি একটি স্থির সমতলের সঙ্গে সর্বদা সমান্তরাল থাকে, তাহলে দৃঢ়বস্তুর এরূপ গতিকে দ্বি-মাত্রিক গতি বলা হয়।



যদি স্থির সমতলকে xy তল নেওয়া হয়। এবং তার একটি বিন্দু O কে আদি বিন্দু নেওয়া হয় তাহলে বস্তুটির প্রতিটি কণা xy তলের সমান্তরাল তলে থাকবে অর্থাৎ প্রতিটি কণার z স্থানাঙ্ক ধ্রুবক থাকবে। G যদি বস্তুটির ভরকেন্দ্র হয়, এবং Gx', Gy', Gz' যথাক্রমে Ox, Oy, Oz-এর সমান্তরাল অক্ষ নেওয়া হয়। এবং G-এর স্থানাঙ্ক (Ox, Oy, Oz) সাপেক্ষে $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ হয়, তবে $\bar{z}$ সর্বদা অপরিবর্তিত থাকবে। অতএব আমাদের বস্তুটির অবস্থান প্রতি মুহূর্তে জানার জন্য $\bar{x}$ ও $\bar{y}$ জানতে হবে তবে G-এর অবস্থান জানা যাবে। যেহেতু প্রতিটি বিন্দুর z স্থানাঙ্ক অপরিবর্তিত থাকে অতএব প্রতিটি বিন্দুর x', y' স্থানাঙ্ক জানলেই G সাপেক্ষে বস্তুটির প্রতিটি বিন্দুর অবস্থান জানা যাবে। যে কোন বিন্দু P (x', y', z')-এর লম্ব অভিক্ষেপ P' $Gx'y'$ তলে নেওয়া যায়, তবে সেই বিন্দুতে P'-এর স্থানাঙ্ক হবে x', y' এখন P' বিন্দুর অবস্থান জানা থাকলেই P-এর অবস্থান জানা যায়। অতএব আমাদের Gxy তলের বিন্দুগুলি জানা হলেই চলবে।

যেহেতু, প্রতিটি বিন্দু Z-স্থানাঙ্ক স্থির থাকে, অতএব বস্তুটি Z-অক্ষ সাপেক্ষে ঘুরতে পারে। আমরা G গামী সমান্তরাল GZ অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটির ঘূর্ণন নির্ণয় করব।

$Gx'y'$ তলে A একটি বিন্দু নিলাম GA Gx'-এর সহিত θ কোণ করে। t পরিবর্তিত হলে θ পরিবর্তিত হয় কিন্তু $Gx'y'$ তলে অন্য যে কোন বিন্দু P নিলে $\angle PGA$ এই কোণটি সকল সময়ের জন্য অপরিবর্তিত থাকে, যেহেতু G, P, A একটি দৃঢ়বস্তুর তিনটি বিন্দু।

অতএব $\angle PGx' = \angle PGA + \angle AGx'$

$$= \angle PGA + \theta$$

অতএব $\frac{d}{dt}(\angle PGx') = \frac{d\theta}{dt}$, যেহেতু $\frac{d}{dt}\angle PGA = 0$ অতএব, $\theta°$ হল GZ' অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটির কৌণিক গতিবেগ (*Angular Velocity about GZ'*)

17.4 দ্বি-মাত্রিক গতির গতি সমীকরণসমূহ

আমরা দৃঢ়বস্তুর গতি সমীকরণ থেকে

জানি,
$$M\ddot{x} = \Sigma F_x \quad \text{.....................} \quad (1)$$
$$M\ddot{y} = \Sigma F_y \quad \text{.....................} \quad (2)$$
$$M\ddot{z} = \Sigma F_z \quad \text{.....................} \quad (3)$$

আর G সাপেক্ষে গতির জন্য

$$\Sigma m\,(y'\ddot{z}' - z'\ddot{y}') = \Sigma\left(y'F_z - z'F_y\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\Sigma m\,(z'\ddot{x}' - x'\ddot{z}') = \Sigma\left(z'F_x - x'F_z\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\Sigma m(x'\ddot{y}' - y'\ddot{x}') = \Sigma\left(x'F_y - y'F_x\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

এখন যেহেতু দ্বি-মাত্রিক গতিতে z-এর কোন পরিবর্তন হয় না, অতএব সর্বত্র $Fz = 0$ হবে আবার যেহেতু z-অক্ষের দিক পরিবর্তন হয় না, অতএব বস্তুটির ওপর প্রযুক্তি বলগুলি কেবলমাত্র $Gx'y'$ তলে থাকবে অর্থাৎ যে সকল বিন্দুতে বল ক্রিয়া করে, সেই বিন্দুগুলি G যে সমতলে থাকে সেই সমতলের বিন্দু হতে হবে।

অতএব, (3) (4) ও (5) নং সমীকরণ $0 = 0$ এই রূপ হবে এবং দ্বি-মাত্রিক গতির জন্য

$$M\ddot{\bar{x}} = \Sigma F_x \qquad \ldots \quad (1)'$$

$$M\ddot{\bar{y}} = \Sigma F_y \qquad \ldots \quad (2)'$$

$$\Sigma m(x'\ddot{y}' - y'\ddot{x}') = \Sigma\left(x'F_y - yF_x\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)'$$

এই তিনটি গতিসূত্র প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট (1)′, (2)′ থেকে $\bar{x}, \bar{y}$ পাওয়া যাবে আর (6)′ থেকে θ এর মান পাওয়া যাবে। (6)′ কে সহজতর রূপে নিম্নে দেখানো হচ্ছে।

এখানে $x' = r\cos(\theta + \phi)$, যেখানে ϕ সময়ের সঙ্গে অপরিবর্তিত থাকে।

$$y' = r\sin(\theta + \phi)$$

$\therefore$ (6)′-এর বামপক্ষ

$$= \Sigma m(x'\ddot{y}' - y'\ddot{x}')$$

$$= \frac{d}{dt}\Sigma m(x'\dot{y}' - y'\dot{x}')$$

$$= \frac{d}{dt}\Sigma m\left[r^2\cos^2(\theta + \phi)\,\dot{\theta} + r^2\sin^2(\theta + \phi)\,\dot{\theta}\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\Sigma mr^2\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\dot{\theta}\;\Sigma mr^2$$

(যেহেতু, সব বিন্দুর জন্য $\dot{\theta}$ সমান)

$= \frac{d}{dt}\left(Mk^2\dot{\theta}\right)$, যেখানে $\Sigma mr^2 =$ বস্তুটির GZ' অক্ষ সাপেক্ষে জাড্য ভ্রামক।

$$= MK^2\ddot{\theta} \qquad \ldots. \quad (7)$$

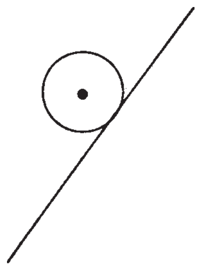
অতএব, (7) এর সাহায্যে (6)′ কে লেখা যাচ্ছে

$$= MK^2\ddot{\theta} = \Sigma\left(x'F_y - y'F_x\right) \qquad \ldots. \quad (6)$$

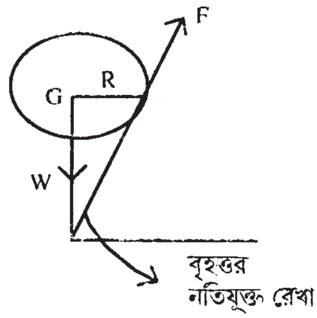
= বলসমূহের GZ' সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফল।

অতএব (1)′, (2)′ ও (6)′ এই তিনটি গতি সমীকরণ হল দ্বি-মাত্রিক গতি নির্ণয় করাতে প্রয়োজন।

দ্বি-মাত্রিক গতির উদাহরণ ঃ



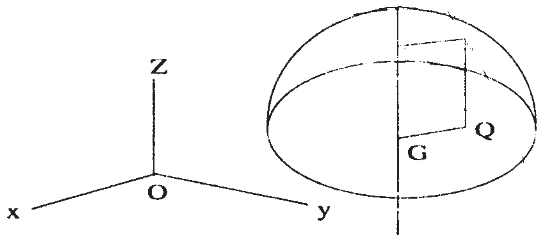
(1) একটি গোলাকার পাত যখন উল্লম্ব তলে একটি নততলের স্থিরাবস্থা থেকে ছেড়ে দেওয়া হয়। এই ক্ষেত্রে পাতটির ওজন বল, তলের লম্ব প্রতিক্রিয়া বল ও ঘর্ষণ বল (যদি তলটি রুক্ষ হয়) প্রত্যেকেই G গামী উল্লম্বতলে অবস্থিত। অতএব এখানে পাতটির দ্বিমাত্রিক গতি হবে।



(2) একটি ভারীগোলককে যদি একটি নততলের ওপর থেকে নততলের বৃহত্তম নতিযুক্ত রেখা (line of greatest slope) বরাবর কোন গতিসহ ছেড়ে ছেড়ে দেওয়া হয়। তাহলে গোলকটির ঐ রেখাও G গামী উল্লম্ব সমতলের সমান্তরাল গতি হবে ও দ্বি-মাত্রিক গতি হবে।

17.5 দ্বি-মাত্রিক গতির গতিশক্তি

ধরা যাক একটি দৃঢ় বস্তুর ত্রিমাত্রিক গতি xy তলের সমান্তরাল তলে প্রতিটি বিন্দু চলছে। অতএব, ভরকেন্দ্র G-এর মধ্যগামী Z-অক্ষ নিয়ে, ও Gx', Gy' অক্ষদ্বয়ের দিক সর্বদা Ox, Oy অক্ষের সমান্তরাল নেওয়া হল। G-এর স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ (ox, oy, oz সাপেক্ষে) হলে $\bar{z}$ সর্বদা অপরিবর্তিত থাকবে। আর দৃঢ় বস্তুটির GZ অক্ষের সাপেক্ষে $\dot{\theta}$ কোণে ঘূর্ণিত, যেখানে θ হচ্ছে t সময়ে Gxy তলে P একটি বস্তু বিন্দু হলে PG রেখাটি Gx-এর সঙ্গে যে কোন করে। বিভিন্ন বিন্দু Q, ইত্যাদি জন্য ঐ কোন θ থেকে আলাদা অর্থাৎ ϕ হলে $\dot{\phi} = \dot{\theta}$ যেহেতু $\phi \sim \theta = \angle PGQ$ = ধ্রুবক (সময়ের সাপেক্ষে) অতএব আমরা দ্বি-মাত্রিক গতি জানবার জন্য $\bar{x}, \bar{y}$ ও θ জানলেই হল। অতএব, গতিশক্তি



$= \frac{1}{2}\Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ যেখানে সমগ্র বস্তুকণার ওপর যোগ করতে হবে।

যেখানে $x = \bar{x} + r\cos\phi$, যেখানে $r = GQ$.

$y = \bar{y} + r\sin\phi$

অতএব $\dot{x} = \dot{\bar{x}} - r\sin\phi\,\dot{\phi} = \dot{\bar{x}} - r\dot{\theta}\sin\phi$

$\dot{y} = \dot{\bar{y}} + r\dot{\theta}\cos\phi$

অতএব, $\dot{x} = \dot{\bar{x}} - y'\dot{\theta}, \dot{y} = \dot{\bar{y}} + x'\dot{\theta}$

(যেখানে $x' = r\sin\phi$

$y = r\sin\phi.$

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\Sigma m\left(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2 - 2\dot{\bar{x}}y'\dot{\theta} + 2\dot{\bar{y}}x'\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}\Sigma m\left(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2\right) + \dot{\theta}\,\Sigma m\left(x'\dot{\bar{y}} - y'\dot{\bar{x}}\right)$$

$$+\frac{\dot{\theta}^2}{2}\Sigma m\,(x'^2 + y'^2)$$

$$= \frac{M}{2}\left(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2\right) + \theta\left[\dot{\bar{y}}\sum mx' - \dot{\bar{x}}\sum my'\right] + \frac{\dot{\theta}^2}{2}\sum mr^2$$

$$= \frac{M}{1}(u^2 + v^2) + O + \frac{1}{2}MK^2\dot{\theta}^2$$

যেখানে, $\sqrt{u^2 + v^2} = G$-এর গতিবেগ,

$MK^2 = \Sigma mk^2 = GZ'$ অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্যভ্রামক।

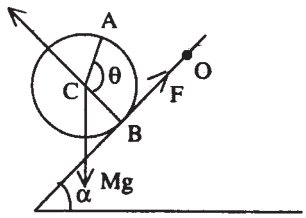
17.6 দ্বি-মাত্রিক গতির শক্তি সংরক্ষণ নীতি

আমরা, 16.9-এ দেখেছি যে যদি বলসমূহ সংরক্ষী হয় এবং বাধক সমূহ সময় নিরপেক্ষ হয় তবে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি দূয়ের যোগফল ধ্রুবক হয়। এই নীতি দ্বিমাত্রিক গতির বেলায় ও প্রয়োজ্য। প্রকৃতপক্ষে $T + V$ = ধ্রুবক এটি গতি সমীকরণগুলির একটি সমাকল। বহু সমস্যা সমাধানকালে এই সমীকরণ ব্যবহার করা যায়।

17.7 দ্বি-মাত্রিক গতির উদাহরণ

1. একটি সুষম গোলক একটি অমসৃণ নততলের ওপর গড়াচ্ছে (Rolling)। তলটি এতটাই অমসৃণ যে তার ওপর পিছলানো (sliding বা slipping) সম্ভব নয়। গোলকটির গতি (motion) আলোচনা করুন।

এক্ষেত্রে গোলকটি দ্বিমাত্রিক গতিতে আছে। গোলকের কেন্দ্রের ভিতর দিয়ে উল্লম্ব তলটি ছবিতে দেখানো হয়েছে।



প্রাথমিক অবস্থায় গোলকটি O বিন্দুতে তলকে স্পর্শ করেছিল। এরপর O গামী সর্বোচ্চ নতিরেখা বরাবর গোলকটি গড়াতে থাকে। ধরা যাক, t সময়ে গোলকটি $OB = x$ দূরত্ব অতিক্র করেছে, যেখানে B হল এই সময়ে গোলক ও তলের স্পর্শবিন্দু (points of contact)। যে ব্যাসার্ধটি প্রাথমিকভাবে তলের ওপর লম্ব ছিল, সেটি এখন C^A দ্বারা দেখানো হয়েছে। অর্থাৎ প্রাথমিকভাবে A বিন্দু, O বিন্দুতে সমাপতিত ছিল। G হল গোলকের কেন্দ্র। এখন, $\angle BCA = \theta$ হলে, বলা যায়, t সময়ে GA ব্যাসার্ধটি, θ কোণ ঘুরেছে, অর্থাৎ কিনা গোলকটিই θ কোণ ঘুরেছে।

CA রেখাটি বলা যায় গোলকটির সাপেক্ষে নির্দিষ্ট., যেহেতু প্রারম্ভিকভাবে সেটি তলের ওপর লম্ব ছিল, আবার, CB রেখাটি t সময়ে তলের ওপর লম্ব, অর্থাৎ দ্বি-মাত্রিক উল্লম্ব তল সাপেক্ষে এই লম্ব দিকটিও নির্দিষ্ট। গোলকটি কেবলমাত্র ঘুরছে, কিন্তু পিছলাচ্ছে না। অতএব, গোলকের কেন্দ্রটি যে পরিমাণ দূরত্ব অতিক্রম করবে, গোলকটি সেই পরিমাণেই ঘুরবে, বা, দূরত্ব OB = বৃত্তচাপ AB অর্থাৎ $x = a\theta$ (ঘূর্ণনের জন্য) ......(i)

গোলকটির ভরকেন্দ্রের গতি সমীকরণ হল

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - F \qquad \text{.....} \quad \text{(ii)}$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = O = Mg\cos\alpha - R \qquad \text{.....} \quad \text{(iii)}$$

(যেহেতু লম্বদিকে গোলকের কেন্দ্রের কোনো গতি নেই)

(R হল গোলকটির ওপর তলের লম্ব প্রতিক্রিয়া বল, এবং F হল ঘর্ষণবল)।

এবং কেন্দ্র সাপেক্ষে ঘূর্ণন সমীকরণটি হল

$$Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = Fa \qquad \text{.....} \quad (\text{i}v)$$

$\therefore$ (i) থেকে $\ddot{x} = a\ddot{\theta}$, অতএব (ii) ও (i$v$) এর মধ্যে F অপসারণ করে পাই,

$$\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)\ddot{x} = g\sin\alpha,$$

বা, $$\ddot{x} = \frac{a^2}{a^2+k^2}g\sin\alpha \qquad \text{.....} \quad (v)$$

অর্থাৎ, গোলকের কেন্দ্রটি, $\frac{a^2}{a^2+k^2}g\sin\alpha$ এই ধ্রুব ত্বরণ নিয়ে চলে। কেন্দ্রের গতিবেগ,

$\dot{x} = \left(\frac{a^2}{a^2+k^2}g\sin\alpha\right)t + A$ (সমাকলন ধ্রুবক)।

কিন্তু প্রারম্ভিক মান হল, $t = 0,\ x = 0,\ \dot{x} = 0$

$\therefore\ A = 0$

$\therefore\ x = \left(\frac{a^2}{a^2+k^2}g\sin\alpha\right)\frac{t^2}{2}$

এখন, গোলকের জন্য, $k^2 = \frac{2a^2}{5}$, অর্থাৎ

$$x = \left(\frac{5}{7}g\sin\alpha\right)\frac{t^2}{2}$$

এবং একইভাবে এই সমস্ত ক্ষেত্রের সমাধান করা যায়, যেমন—পাতলা ফাঁপা গোলক,

$$k^2 = \frac{2a^2}{3}, \qquad x = \left(\frac{3}{5}g\sin\alpha\right)\frac{t^2}{2}$$

বৃত্তাকার চাকতি

$$k^2 = \frac{a^3}{2}, \qquad x = \left(\frac{2g}{3}\sin\alpha\right)\frac{t^2}{2}$$

সরু বৃত্তাকার আংটি

$$k^2 = a^2, x = \left(\frac{1}{2}g\sin\alpha\right)\frac{t^2}{2}$$

ইত্যাদি।

একটি নিরেট গোলকের জন্য,

$$F = Mg\sin\alpha - \frac{5}{7}Mg\sin\alpha = \frac{2}{7}Mg\sin\alpha$$

এবং $R = Mg \cos \alpha$

এবং এক্ষেত্রে $\dfrac{F}{R} = \dfrac{2}{7}\tan\alpha$

অতএব, কখনোই না পিছলানোর জন্য শর্ত $F < \mu R$ থেকে পাই,

$$\frac{2}{7}\tan\alpha < \mu$$

অর্থাৎ, μ যথেষ্ট বড় হলে, গোলকটি কখনোই পিছলাবে না।

মন্তব্য 1. এই জাতীয় সমস্যাগুলি সমাধান করতে হলে মনে রাখতে হবে (i) ঘর্ষণ একটি স্বনিয়ন্ত্রিত (self-adjusting) বল অর্থাৎ একটি তলের ওপর একটি বস্তু চলাফেরা করলে, ঘর্ষণ বল চেষ্টা করবে স্পর্শবিন্দুটি আপেক্ষিক স্থিরাবস্থায় রাখতে। সেক্ষেত্রে গড়ানো বা Rolling হবে।

(ii) ঘর্ষণ বল, তলের লম্ব-প্রতিক্রিয়া (normal reaction) বলের একটি নির্দিষ্ট গুণিতকের (multiple) বেশি হতে পারে না। অর্থাৎ $F \le \mu R$, যেখানে ঘর্ষণাঙ্ক μ, তল এবং বস্তু দুটির ওপরে নির্ভর করে। আমাদের আলোচনায় μ-কে ধ্রুবরাশি ধরা হবে। μR-কে বলা হয় সীমাস্থ ঘর্ষণ।

(iii) ঘর্ষণের মূল নীতিই হল যে, যদি না সীমাস্থ ঘর্ষণ অতিক্রম করে যায়, তবে ঘর্ষণের প্রচেষ্টা হবে স্পর্শবিন্দুকে আপেক্ষিক স্থিরাবস্থায় রাখার। যদি সীমাস্থ ঘর্ষণ প্রয়োগ করেও তা না রাখা যায়, তবে পিছলানো (Sliding বা Slipping) শুরু হবে।

(i*v*) পূর্বের চিত্রে, B-বিন্দুর রৈখিক গতিবেগ = u

= G সাপেক্ষে B এর গতিবেগ + G এর নিজের গতিবেগ

$= -a\dot{\theta} + \dot{x}$

$\therefore \quad u = \dot{x} - a\dot{\theta}$

এখন ঘূর্ণন হলে, B-বিন্দু আপেক্ষিক স্থিরাবস্থা থাকবে, এ কথার অর্থ, প্রতি মুহূর্তে স্পর্শবিন্দুর রৈখিক গতিবেগ, শূন্য হবে।

$\therefore \quad \dot{x} - a\dot{\theta}$

বা, সমাকলন করলে, $x = a\theta$

(যেহেতু $t = 0$ তে, $x = \theta = 0$)

এটিই ঘূর্ণনের শর্ত।

মন্তব্য 2. যদি গোলকটি ঘোরার সঙ্গে পিছলোতেও থাকে, তখন আর $x = a\theta$ সূত্র প্রয়োজ্য হয় না। এক্ষেত্রে, $F = \mu R$ (অর্থাৎ ঘর্ষণবল সীমাস্থ হবেই), এবং ঘর্ষণবল সবসময়েই স্পর্শবিন্দুর গতির অভিমুখের বিপরীতে হবে।

এক্ষেত্রে $F = \mu R = \mu Mg \cos \alpha$

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \text{একটি ধ্রুবক}$$

$$\dot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,t$$

$$x = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,t^2$$

যেহেতু $x = 0,\ \dot{x} = 0,$ যখন $t = 0$

এবং, $Mk^2\ddot{\theta} = Fa = \mu Mga\cos\alpha$

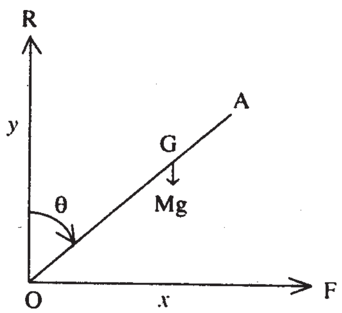
$$\therefore\quad \ddot{\theta} = \frac{uga}{k^2}\cos\alpha = \text{ একটি ধ্রুবক}$$

$$\dot{\theta} = \frac{uga}{k^2}t\cos\alpha$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{uga}{k^2}\cos\alpha\right)t^2$$

যেহেতু $\theta = \dot{\theta} = 0$ যখন $t = 0$

2. একটি সুষম দণ্ডকে উল্লম্ব অবস্থায় ধরে রাখা আছে এবং দণ্ডের নীচের প্রান্তটি একটি যথার্থ অমসৃণ তলের ওপর বিশ্রামে আছে। (Resting upon a perfectly rought table). দণ্ডটিকে ছেড়ে দিলে, সেটি ঐ নীচের প্রান্তটির সাপেক্ষে ঘোরে (rotates)। আলোচনা করুন।



ধরা যাক, AO দণ্ডটি, O বিন্দু সাপেক্ষে t সময়ে θ কোণ ঘুরেছে। প্রারম্ভে দণ্ডটি উল্লম্ব ছিল। এবং ছেড়ে দেবার পরে দণ্ডটি উল্লম্ব তলেই ঘোরে। কাজেই এর গতি দ্বিমাত্রিক। O-এর মধ্য দিয়ে ঐ উল্লম্ব তলে Ox, Oy অক্ষ (চিত্র দেখুন) নেওয়া হল। দণ্ডের O বিন্দুতে তার ওপর দুটি বল আছে—Ox বরাবর ঘর্ষণবল F এবং Oy বরাবর তলের লম্ব প্রতিক্রিয়া R।

t সময়ে দণ্ডের ভারকেন্দ্র G-এর স্থানাংক $(\bar{x}, \bar{y})$ হলে, $\bar{x} = a\sin\theta, \bar{y} = a\cos\theta$

$\therefore$ ভারকেন্দ্রের গতিসমীকরণ হল,

$$M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = F = M\left[a\cos\theta\,\dot{\theta} - a\sin\theta\,\dot{\theta}^2\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

এবং $$M\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = M\left[-a\sin\theta\,\dot{\theta} - a\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right] = R - Mg \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

এছাড়াও, G-এর সাপেক্ষে ভ্রামক সমীকরণটি হল

$$\frac{Ma^2}{3}\ddot{\theta} = Ra\sin\theta - Fa\cos\theta$$

$$= Mga\sin\theta - Ma^2\dot{\theta}$$ ((i) ও (ii) থেকে R ও F-এর মান বসিয়ে পাই)।

$$\therefore\quad \frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} = Mga\sin\theta \quad \ldots\ldots\text{(iii)}$$

(এই সমীকরণটি O-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়েও একবারেই পাওয়া যায়)।

সমাকলনের পরে,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}(1 - \cos\dot{\theta}),$$ যেহেতু $\theta = 0$ তে, $\dot{\theta} = 0$

(i) ও (ii) থেকে,

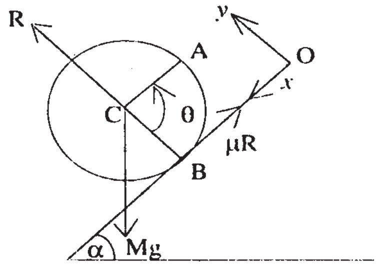
$$F = \frac{3Mg}{4} \sin\theta\ (3\cos\theta - 2) \text{ এবং } R = \frac{Mg}{4}(1 - 3\cos\theta)^2$$

দেখা যাচ্ছে যে, $R, \cos\theta = \frac{1}{3}$ মুহূর্তটিকে শূন্য হলেও, তার চিহ্ন ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক হয়ে যায় না, অর্থাৎ O প্রান্তটি তল ছেড়ে উঠে যাবে না। ঘর্ষণ F অবশ্য $\theta = \cos^{-1}\frac{2}{3}$ তে তার দিকের পরিবর্তন করে।

$\frac{F}{R} \to \infty$ যখন $\theta \to \cos^{-1}\frac{1}{3}$

অতএব, তলটি ঘর্ষণাঙ্ক অসীম না হলে (যা বাস্তবে হওয়া অসম্ভব) দণ্ডেরপ্রান্তটি তলের ওপর পিছলাবে।

3. একটি অযথার্থভাবে অমসৃণ (imperfectly rough) গোলক স্থিরাবস্থা থেকে একটি নততলের ওপর চলতে শুরু করে। এ সম্বন্ধে আলোচনা।



ধরা যাক t সময়ে গোলকের কেন্দ্র C, স্থিরাবস্থা থেকে x-দূরত্ব অতিক্রম করেছে, এবং ঐ একই সময়ে, গোলকটি C-এর সাপেক্ষে θ কোণ পরিমাণ ঘুরেছে। অর্থাৎ t-সময়ে CB যদি তলের ওপর লম্ব হয়, তবে θ হল CA ও CB-এর মধ্যে কোণ, যেখানে CA ছিল প্রারম্ভিকভাবে তলের ওপর লম্ব।

এখান ধরা হচ্ছে যে, ঘর্ষণবল যথেষ্ট পরিমাণে উপস্থিত হতে পারছে না বলে গোলকটি গড়াতে পারছে না, এবং ঘোরার সঙ্গে সঙ্গে পিছলাচ্ছে। এখানে সর্বোচ্চ ঘর্ষণবল ক্রিয়াশীল রয়েছে একথাই ধরতে হবে (তা সত্ত্বেও গড়ানো সম্ভবপর হচ্ছে না)। অতএব স্পর্শবিন্দুতে তলের ঘর্ষণ μR, যেখানে R হল গোলকের ওপর তলের লম্ব-প্রতিক্রিয়া।

প্রারম্ভিক স্পর্শবিন্দু O হলে, O-এর মধ্য দিয়ে তলের সর্বোচ্চ নতিরেখা বরাবর x-অক্ষ ও তলের ওপর লম্ব y অক্ষ নেওয়া হল।

$\therefore$ গোলকের ব্যাসার্ধ a হলে, t সময়ে তার ভরকেন্দ্র C-এর স্থানাঙ্ক (x, a)।

$\therefore$ যেহেতু y স্থানাঙ্ক ধ্রুবক, অতএব, ভরকেন্দ্রের y-দিকে ত্বরণ সর্বদাই শূন্য।

ভরকেন্দ্রের গতিসমীকরণ থেকে পাই,

$$M\ddot{x} = Mg\sin\alpha - \mu R \quad \text{.........................} \quad \text{(i)}$$

$$M\ddot{y} = 0 = R - Mg\cos\alpha \quad \text{........................} \quad \text{(ii)}$$

M হল গোলকের ভর।

এবং C-এর সাপেক্ষে ভ্রামক সমীকরণটি হল $Mk^2\ddot{\theta} = \mu Ra$ ....(iii)

যেখানে নিরেট গোলকের জন্য $K^2 = \frac{2a^2}{5}$

$\therefore$ এক্ষেত্রে $\ddot{\theta} = \frac{5\mu g}{2a}\cos\alpha$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{5\mu g}{2a}\cos\theta\right)t$$

$$\theta = \left(\frac{5\mu g}{2a}\cos\alpha\right)\frac{t^2}{2}$$

যেহেতু $t = 0$-তে, $\theta = \dot{\theta} = 0$

এবং $\quad \ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

$$\dot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t$$

$$x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{t^2}{2}$$

$\because \quad t = 0$-তে, $x = \dot{x} = 0,$

t সময়ে স্পর্শবিন্দু B-এর রৈখিক গতিবেগ হল, C-এর গতিবেগ + C সাপেক্ষে B-এর গতিবেগ $= \dot{x} - a\dot{\theta} = g\left(\sin\alpha - \frac{7}{2}\mu\cos\alpha\right)t$, নীচের দিকে,

[A] যদি $\sin\alpha - \frac{7}{2}\mu\cos\alpha > 0$ হয়, অর্থাৎ $\mu < \frac{2}{7}\tan\alpha$ হয়, তবে B-এর গতিবেগ সর্বদাই ধনাত্মক হবে, অর্থাৎ B-বিন্দু সর্বদাই একটি পিছলানো গতি (slip velocity) থাকবে, এবং গোলকটি কখনই শুধু গড়াবে না।

[B] $\mu = \frac{2}{7}\tan\alpha$ হলে, B-এর গতিবেগ প্রথম থেকেই শূন্য, অর্থাৎ গোলকটি প্রথম থেকেই গড়ায়, এবং এক্ষেত্রে সর্বোচ্চ ঘর্ষণবল μR উপস্থিত থাকে।

[C] $\mu > \frac{2}{7}\tan\alpha$ হলে, B-এর গতিবেগ ধনাত্মক হয়, যা অসম্ভব, কারণ ঘর্ষণবল দ্বারা বড়জোর স্পর্শবিন্দুটিকে স্থিরাবস্থায় আনা যায়।

অর্থাৎ এক্ষেত্রেও গোলকটি প্রথম থেকেই গড়াচ্ছে এবং সর্বোচ্চ ঘর্ষণবল উপস্থিত নেই, বা F (ঘর্ষণবল) $< \mu R$. এটি আমার পূর্বেই আলোচনা করেছি।

17.8 সারাংশ

দ্বিমাত্রিক গতিতে দৃঢ়বস্তুর প্রতিটি বিন্দু একটি নির্দিষ্ট সমতলের সমান্তরাল সমতলে সর্বদা থাকে। ফলে ভরকেন্দ্র G-এর স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y})$ এবং GZ সাপেক্ষে ঘূর্ণন $\dot{\theta}$ এই তিনটি সাধারণ স্থানাঙ্ক বলা যায় দ্বিমাত্রিক গতির বেলায় যদি ভরকেন্দ্রের অবস্থান $(\bar{x}, \bar{y})$ এবং GZ-এর সাপেক্ষে কৌণিক গতিবেগ $\dot{\theta} = \omega$ হয়, তবে $\bar{x}, \bar{y}$ ও ω নির্ণয় করার জন্য

$$M\ddot{x} = \Sigma F_x,\ M\ddot{y} = \Sigma F_y,$$
$$Mk^2\ddot{\theta} = \Sigma(x'F_y - y'F_x)$$

এই তিনটি সমীকরণ প্রয়োজন ও যথেষ্ট। এদের সমাধান সাহায্যে দ্বিমাত্রিক গতি জানায় যদি বলগুলি সংরক্ষী হয় এবং কোন স্পষ্টভাবে সময়সহবাধক সমীকরণ না থাকে, তবে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল ধ্রুবক হয়।

17.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি ও সমাধান

প্রশ্ন 1. একটি ঘন নিরেট বেলনাকার চোঙ (solid cylinder)-কে অক্ষ আনুভূমিক অবস্থায় একটি নত-তলের ওপর রাখা হল। আনুভূমিক তলের সঙ্গে এই তলটির নতিকোণ α। দেখান যে, চোঙটিকে গড়াতে হলে, চোঙ ও তলের মধ্যের ঘর্ষণাংক, অন্তত $\frac{1}{3}\tan\alpha$ হতেই হবে এবং চোঙটি নিরেট না হয়ে ফাঁপা হলে ঐ ঘর্ষণাঙ্ক $\frac{1}{2}\tan\alpha$ হবে।

সমাধান ঃ পূর্বের অনুচ্ছেদটি দেখুন। এক্ষেত্রে, আমরা চোঙের ভারকেন্দ্রের ভিতর দিয়ে উল্লম্ব তলটির কথা ভাবব। চোঙের ভার, তলের লম্ব-প্রতিক্রিয়া এই তলেই ক্রিয়াশীল।

অতএব এক্ষেত্রে $F = Mg\sin\alpha - \dfrac{a^2}{a^2 + K^2}Mg\sin\alpha$

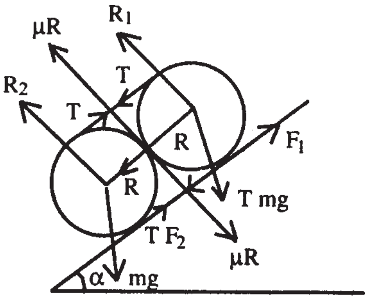
$= \dfrac{k^2}{a^2 + k^2}Mg\sin\alpha$ (পূর্বের অনুচ্ছেদের সমীকরণ (i), (ii), (iii), (iv) একই থাকে)।

এবং $R = \mathrm{Mg}\cos\alpha$

গড়নের জন্য $F \leq \mu R$, বা, $\mu \geq \dfrac{k^2}{a^2 + k^2}\tan\alpha$

$\therefore$ বেলনটি নিরেট হলে, $k^2 = \dfrac{a^2}{2}$, $\mu \geq \dfrac{1}{3}\tan\alpha$

বেলনটি ফাঁপা হলে, $k^2 = a^2$, $\mu \geq \dfrac{1}{2}\tan\alpha$



প্রশ্ন 2. সবদিকে সমান দুটি বেলনকে একসঙ্গে একটি ইলস্টিক/স্থিতিস্থাপক দড়ি দিয়ে বাঁধা আছে। দড়িটির টান T. বেলুনদুটি অক্ষ আনুভূমিক অবস্থায় একটি অমসৃণ নততল দিয়ে গড়িয়ে যায়। দেখান যে, বেলনদুটির ত্বরণ হল $\dfrac{2}{3}g\sin\alpha\left[1 - \dfrac{2\mu T}{mg\sin\alpha}\right]$, যেখানে μ হল বেলনদুটির মধ্যের ঘর্ষনাংক।

ধরা যাক ওপরের বেলনটির ওপর ঘর্ষণ ও লম্ব-প্রতিক্রিয়া বল হল

যথাক্রমে F_1 ও R_1 তলার বেলনটির জন্য এগুলি হল F_2 ও R_2 যথাক্রমে। বেলনদুটির মধ্যে প্রতিক্রিয়া R এবং ঘর্ষণ (এক্ষেত্রে পিছলানো) μR. দড়ির টান T.

ধরা যাক, প্রতিটি বেলনের ভারকেন্দ্র t সময়ে x-দূরত্ব চলেছে এবং ঐ সময়ে বেলনটি তার অক্ষের সাপেক্ষে θ কোণ ঘুরেছে।

অতএব, $x = a\theta$ (i) (গড়ানোর জন্য)

ওপরের বেলনের জন্য পাই, (ভরকেন্দ্রের গতিসমীকরণ)

$$R! - \text{mg} \cos \alpha + \mu R = 0 \qquad \text{(ii)}$$

এবং $$m\ddot{x} = mg \sin\alpha + 2T - F_1 - R \qquad \text{(iii)}$$

এবং তলার বেলনের জন্য, (ভরকেন্দ্রের গতিসমীকরণ)

$$R_2 - \text{mg} \cos \alpha - \mu R = 0 \qquad \text{(iv)}$$

$$m\ddot{x} = mg \sin\alpha - 2T - F_2 + R \qquad \text{(v)}$$

এছাড়াও, দুটি বেলনেরই, অক্ষের সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে যথাক্রমে পাই—

$$mk^2\ddot{\theta} = (F_1 - \mu R)a \qquad \text{(vi)}$$

এবং $$mk^2\ddot{\theta} = (F_2 - \mu R)a \qquad \text{(vii)}$$

যেখানে $k^2 = \dfrac{a^2}{2}$

$\therefore$ (iii) ও (v) থেকে,

$$4T = 2R + F_1 - F_2,$$

এবং (vi), (vii) থেকে,

$$(F_1 - \mu R)a = (F_2 - \mu R)a$$

$\therefore$ $F_1 = F_1 = F$ ধরা যাক,

এবং $R = 2T$

অবার, (iii) থেকে,

$$m\ddot{x} = mg \sin\alpha + 2T - R - F$$
$$= \text{mg} \sin \alpha - F \qquad \text{(viii)}$$

এবং $$mk^2\ddot{\theta} = (F - \mu R)a$$

বা, $$m\frac{a^2}{2}\,\frac{\ddot{x}}{a} = (F + \mu R)a$$

$$\therefore \quad m\frac{\ddot{x}}{2} = F - \mu R \qquad \text{(ix)}$$

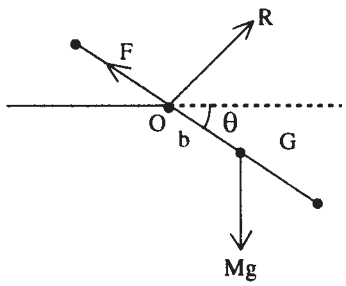
$\therefore$ (viii) ও (ix) থেকে, F অপনয়ন করে,

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \mu R$$

$$= mg\sin\alpha\left[1 - \frac{2\mu T}{mg\sin\alpha}\right] \quad \because \; R = 2T$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha\left[1 - \frac{2\mu T}{mg\sin\alpha}\right]$$

প্রশ্ন 3. একটি সুষম, অমসৃণ দণ্ডকে (যার দৈর্ঘ্য $2a$) একটি অমসৃণ টেবিলের ওপর, টেবিলের একটি ধারের সঙ্গে লম্বভাবে রাখা হল এমনভাবে, যে, দণ্ডের ভারকেন্দ্র ঐ টেবেলির ধার থেকে b দূরত্ব সামনে থাকে। দেখান যে θ কোণ ঘুরবার পরে দণ্ডটি পিছলাতে শুরু করবে, যেখানে $\tan\theta = \dfrac{\mu a^2}{a^2 + 9b^2}$, μ হল দণ্ড ও টেবিলের মধ্যের ঘর্ষণাংক।



দণ্ডটি t সময়ে, O বিন্দু সাপেক্ষে θ কোণ ঘুরেছে, যেখানে O হল টেবিলের ধারে অবস্থিত। এপর্যন্ত দণ্ডটি পিছলোয়নি, শুধু θ কোণ ঘুরেছে এটাই ধরা হয়েছে।

দণ্ড বরাবর ঘর্ষণবল F ও O বিন্দুতে দণ্ডের ওপর লম্ব প্রতিক্রিয়া বল R আছে, এবং ভারকেন্দ্র G তে দণ্ডের ভার Mg নীচের দিকে উল্লম্বভাবে আছে।

$\therefore$ G-এর গতিসমীকরণ হল

$$-mb\ddot{\theta}^2 = mg\sin\theta - F$$

$$mb\ddot{\theta} = mg\cos\theta - R$$

এবং O বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক-সমীকরণ

$$mk^2\ddot{\theta} = mgb\cos\theta$$

বা, $$m\left(\frac{a^2}{3} + b^2\right)\ddot{\theta} = mgb\cos\theta$$

বা, $$\ddot{\theta} = \frac{3gb}{a^2 + 3b^2}\cos\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6gb}{a^2 + 3b^2}\sin\theta + C$$

প্রারম্ভিকভাবে, $\theta = 0, \; \theta = 0$

$c = 0.$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6gb}{a^2 + 3b^2}\sin\theta$$

$\therefore \quad F = mg\sin\theta + mb\left[\dfrac{6gb}{a^2+3b^2}\sin\theta\right]$

$= mg\sin\theta\dfrac{(a^2+9b^2)}{a^2+3b^2}$

এবং $R = \text{mg} \cos \theta - mb\ddot{\theta}$

$= mg\cos\theta - mb\dfrac{3gb}{a^2+3b^2}\cos\theta$

$= mg\cos\theta.\dfrac{a^2}{a^2+3b^2}$

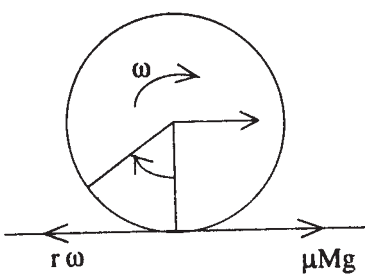
$\therefore$ যখন ঘর্ষণ সীমাস্থ হয়ে যায়, $F = \mu R$, তখনই দণ্ডটি পিছলাতে শুরু করে, তবে,

$\mu = \dfrac{F}{R} = (\tan\theta)\dfrac{a^2+9b^2}{a^2}$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\dfrac{\mu a^2}{a^2+9b^2}$

4. r ব্যাসার্ধের একটি গোলক, ω কৌণিক গতিবেগে, একটি আনুভূমিক ব্যাসের সাপেক্ষে ঘুরছে। গোলকটিকে সাবধানে একটি আনুভূমিক টেবিলের ওপর রাখা হল, যার সঙ্গে গোলকের ঘর্ষণাংক μ। দেখান যে, গোলকটি $\dfrac{2\omega r}{7\mu g}$ সময় ধরে পিছলাবে এবং তারপর $\dfrac{2}{7}\omega$ কৌণিক বেগে ঘুরবে।

প্রারম্ভিকভাবে কৌণিক বেগ ω দিয়ে গোলকটিকে সাবধানে টেবিলের ওপর রাখা হল। ছবিতে গোলকটি যে ব্যাসের সাপেক্ষে ঘুরছে, তার ওপর লম্ব ভরকেন্দ্রগামী তলটি দেখানো হয়েছে। যেহেতু প্রথমেই কৌণিক গতিবেগ ω ছিল, অতএব, স্পর্শবিন্দুটিতে প্রথমেই রৈখিক গতিবেগ বা পিছলানোর গতিবেগ ছিল rω, অতএব, এই অবস্থায় গড়ানো সম্ভব নয়, এবং ঘর্ষণবল ঐ পিছলানো গতিবেগের বিপরীতে আছে।



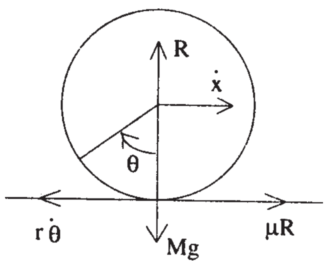
ধরা যাক t সময়ে, গোলকটির কেন্দ্র x-দূরত্ব অতিক্রম করে এবং এ সময়ে গোলকটি θ কোণ ঘুরে যায়।

$\therefore \quad M\ddot{x} = \mu Mg$ (এখানে R = Mg)

এবং $M.\dfrac{2r^2}{5}\ddot{\theta} = -\mu rMg$

এবং t = 0-তে, $x = 0, \dot{x} = 0, \theta = 0, \dot{\theta} = \omega$

অতএব $\dot{x} = \mu gt$,



এবং $r\dot{\theta} = \frac{-5}{2}\mu gt + r\omega$

অতএব, স্পর্শবিন্দুর রৈখিক গতিবেগ t সময়ে হল

$\dot{x} - r\dot{\theta} = \frac{7}{2}\mu gt - r\omega$

এটি শূন্য হবে $t = \frac{2\omega r}{7\mu g}$

সময়ে, অর্থাৎ এপর্যন্ত গোলকটি পিছলাবে। এবার ধরা যাক যে পরবর্তী সময়ে গোলকটি ঘুরবে, এবং ঘর্ষণবল হল F (যা কিনা μMg-এর থেকে ছোটও হতে পারে)। এই সময়ে $r\dot{\theta} = -\frac{5}{2}\mu g.\frac{2\omega r}{7\mu g} + r\omega = \frac{2\omega r}{7}$

অতএব, এই পর্যায়ের জন্য,

$M\ddot{x} = F,$

$M.\frac{2r^2}{5}\ddot{\theta} = -Fr$

এবং x, θ হল চলন ও ঘূর্ণনের পরিমাণ, গড়ানো শুরু হবার পর t সময়ে। এখানে গড়ানো শুরুর মুহূর্তে $t = 0$ এবং $\dot{x} = \frac{2\omega r}{7}, \dot{\theta} = \frac{2\omega}{7}$.

এবং $\dot{x} = r\dot{\theta}$ (গড়ানোর জন্য)

অতএব $F = -M.\frac{2r}{5}\ddot{\theta} = M\ddot{x}$

$\therefore \quad -\frac{2r}{5}\ddot{\theta} = \ddot{x} = r\ddot{\theta}$

$\therefore \quad \ddot{\theta} = 0$

$\ddot{\theta} =$ ধ্রুবক = প্রারম্ভিক মান $= \frac{2\omega}{7}$

এবং $\dot{x} =$ ধ্রুবক = প্রারম্ভিক মান $= \frac{2\omega r}{7}$

$\therefore \quad F = 0$

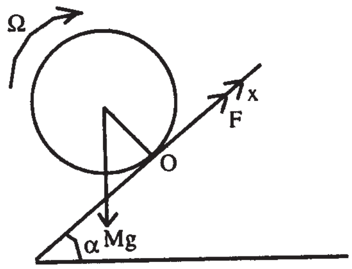
অর্থাৎ বিনা ঘর্ষণেই গোলকটি গড়াতে পারে।

$$\left(\frac{F}{R} = 0 < \mu\right)$$

অতএব, পিছলানো থামার পরে গোলকটি $-\frac{2\omega}{7}$ কৌণিক বেগে গড়ায়।

5. একটি সুষম গোলক (ব্যাসার্ধ a) একটি আনুভূমিক ব্যাসের সাপেক্ষে Ω কৌণিক বেগে ঘুরছে এই অবস্থায় গোলকটিকে অত্যন্ত সাবধানে একটি নততলের ওপর রাখা হল। গোলকের কৌণিক ভরবেগ এমনই ছিল যে, গোলকটি অতঃপর সর্বোচ্চ নতিরেখা বরাবর ওপরে যাওয়ার চেষ্টা করবে। দেখান যে ঘর্ষণাংক $\mu = \tan\alpha$ হলে, গোলকের কেন্দ্রটি $\frac{2\omega Q}{5g\sin\alpha}$ সময় ধরে স্থির থাকবে, এবং তারপরে $\frac{5}{7}g\sin\alpha$ ত্বরণে নীচের দিকে যাবে। α হল তলটির নতি।

প্রাথমিকভাবে স্পর্শবিন্দুটির রৈখিক বেগ $a\Omega$, নীচের দিকে, অর্থাৎ, গোলকটি পিছলাবে, এবং ঘর্ষণ, ওপরদিকে বরাবর আছে। (চিত্র দেখুন) প্রাথমিক স্পর্শবিন্দুতে আদিবিন্দু এবং সর্বোচ্চ নতিরেখা বরাবর x-অক্ষ ওপরদিকে নিলে,



$M\ddot{x} = -Mg\sin\alpha + \mu R$ (পিছলানোর জন্য $F = \mu R$)

$O = R - \text{Mg} \cos\alpha$

এবং $M \cdot \frac{2a^2}{5}\ddot{\theta} = -\mu Ra$

এবং $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0, \theta = 0, \dot{\theta} = \Omega$

অতএব, $M\ddot{x} = \mu Mg\cos\alpha = Mg\sin\alpha$

$= 0$ যেহেতু $\mu = \tan\alpha$

$\therefore\quad \dot{x} =$ ধ্রুবক $=$ প্রারম্ভিক মান $= 0$

এবং $x =$ ধ্রুবক $=$ প্রারম্ভিক মান $= 0$

আর,

$$a\ddot{\theta} = -\frac{5}{2}g\sin\alpha$$

$$\therefore\quad a\dot{\theta} = a\Omega - \left(\frac{5}{2}g\sin\alpha\right)t$$

অতএব x = 0 এবং

$$\dot{x} - a\dot{\theta} = \left(\frac{5}{2}g\sin\alpha\right)t - a\Omega$$

$\dot{x} - a\dot{\theta}$ শূন্য হবে যখন $t = t_0 = \dfrac{2a\Omega}{5g\sin\alpha}$

অতএব $t = t_0$ পর্যন্ত ভরকেন্দ্র স্থির আছে এবং গোলকটি এক জায়গায় দাঁড়িয়ে দাঁড়িয়ে এমনভাবে ঘুরছে যে স্পর্শবিন্দুর পিছলানোর গতিবেগ আছে।

$t = t_0$ থেকে গতি কী হতে তা আলোচনা করা যাক। এরকম হতে পারে গোলকটি ওপরের দিকে গড়ানো শুরু করল। দেখা যাক সেটা সম্ভব কিনা। সেটা যদি হয় তো ধরা যাক ঘর্ষণ একই দিকে কাজ করে, (ওপরের দিকে), x-উপর দিকে, এবং $t = t_0$-কে নতুন প্রারম্ভিক সময় নেওয়া হল, যে সময়ে $x = \theta = 0$.

অতএব, $M\ddot{x} = -Mg\sin\alpha + F$

এবং $M.\frac{2a^2}{5}\ddot{\theta} = -Fa$

এবং $\dot{x} = a\theta$

$\therefore \frac{2a}{5}\ddot{\theta} = \frac{-F}{M} = \frac{2}{5}\ddot{x}$

$\therefore \ddot{x} + \frac{2}{5}\ddot{x} = -g\sin\alpha$

$\therefore \frac{7}{5}\ddot{x} = -g\sin\alpha$

$\ddot{x} = -\frac{5}{7}g\sin\alpha$

অর্থাৎ গোলকের কেন্দ্রের গতি নীচের দিকে।

এছাড়াও, $F = -\frac{2a}{5}\ddot{\theta}$

$$= -\frac{2}{5}\ddot{x} = -\frac{2}{5}\left(-\frac{5}{7}g\sin\alpha\right)$$

$$= \frac{2}{7}g\sin\alpha$$

এবং $R = \mathrm{Mg} \cos \alpha$

$\therefore \frac{F}{R} = \frac{2}{7}\tan\alpha\angle\mu$

$\therefore$ গড়ানো সম্ভব এবং গোলকের কেন্দ্রটি $\frac{5}{7}g\sin\alpha$ ত্বরণে নীচের দিকে যায়।

মন্তব্য ঃ গড়ানোর সময় ঘর্ষণ যে কোনো দিক অভিমুখী হতে পারে, তাই এখানে গড়ানোর সময়েও ঘর্ষণকে পূর্বের অভিমুখের রাখা হয়েছে। নীচের দিকে নিলেও সমস্যাটির সমাধানে অসুবিধা হত না। কিন্তু, পিছলানোর সময় ঘর্ষণবলের অভিমুখ সবসময় স্পর্শবিন্দুর রৈখিক গতিবেগের বিপরীতেই হবে।

6. একটি সুষম বৃত্তাকার চাকতিকে একটি নততল বরাবর ঘূর্ণনব্যতীত, u, গতিবেগ দিয়ে ওপরের দিকে উৎক্ষিপ্ত করা হল। চাকতির তলটি উল্লম্ব এবং নততলটিকে সর্বোচ্চ নতিরেখা বরাবর ছেদ করেছে। দেখান যে $\frac{\mu}{g(3\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}$, এই সময়ের পরে চাকতিটি আর পিছলাবে না। μ হল ঘর্ষণাংক এবং α তলের নতিকোণ।

স্পর্শবিন্দুর প্রারম্ভিক গতিবেগ $= u$, ওপরের দিকে, (প্রারম্ভিক স্পর্শবিন্দুকে আদি বিন্দু, সর্বোচ্চ নতিরেখা বরাবর x-অক্ষ ওপরদিকে, ও তলের ওপর লম্ব বরাবর y-অক্ষ নেওয়া হয়েছে)।

অতএব, ঘর্ষণ, প্রথমদিকে নীচের দিকে অভিমুখী হবে। যেহেতু স্পর্শবিন্দুতে অশূন্য রৈখিক গতিবেগ বর্তমান অতএব প্রথম থেকে চাকতিটি পিছলাতে শুরু করবে। এবং $F = \mu R$ হবে, R লম্ব-প্রতিক্রিয়া।

চাকতির ভারকেন্দ্র c-এর গতিসমীকরণগুলি হল—

$M\ddot{x} = -\mu R - Mg\sin\alpha$

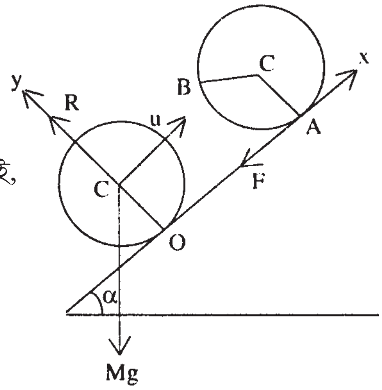
$O = R - Mg\cos\alpha$

এবং, c-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে,

$$M\frac{a^2}{2}\ddot{\theta} = Fa = \mu Ra$$
$$= (\mu Mg\cos\alpha)a$$

প্রারম্ভিক শর্তাদি হল, $t = 0, x = \theta = 0$

$$\dot{x} = u, \dot{\theta} = 0.$$



(i) ও (ii) কে সমাকলন করে, প্রারম্ভিক শর্ত ব্যবহার করে পাই,

$$\dot{x} = u - (\mu\cos\alpha + \sin\alpha)gt$$

$$a\dot{\theta} = 2(\mu g\cos\alpha)t$$

$\therefore\ \dot{x} - a\dot{\theta}$ শূন্য হবে $t = t_1$-এ,

যেখানে $t_1 = \dfrac{\mu}{g(\sin\alpha + 3\mu\cos\alpha)}$

7. একটি গোলককে প্রারম্ভিক রৈখিক গতিবেগ V এবং কৌণিক গতিবেগ Ω দিয়ে একটি নততল বরাবর উৎক্ষিপ্ত করা হল (গোলকটি যেদিকে ওপরদিকে গড়াবে সেভাবেই উৎক্ষিপ্ত করা হল)। যদি $V > a\Omega$ হয়, দেখান যে, ঘর্ষণবল প্রথমে নীচের দিকে অভিমুখে, পরে উর্ধ অভিমুখে থাকে এবং গোলকটি মোট $\dfrac{17V + 4a\Omega}{18g\sin\alpha}$ সময় ধরে ওপরদিকে ওঠে।

$\left(\mu = \frac{1}{7}\tan\alpha, \alpha\ \text{নতিকোণ}\right)$

প্রারম্ভিক স্পর্শবিন্দু O-কে আদিবিন্দু নেওয়া হল। CO ব্যাসার্ধটি প্রথমে তলের ওপর লম্ব ছিল এবং t সময়ে সেটি CA অবস্থানে আছে। t সময়ে CB, তলের ওপর লম্ব। গোলকটি t সময়ে $\angle BOA = \theta$ কোণ ঘুরেছে।

O-গামী সর্বোচ্চ নতিরেখা বরাবর ওপরদিকে x-অক্ষ নেওয়া হল। y-অক্ষ O বিন্দুতে তলের ওপর লম্ব।

অতএব, ভারকেন্দ্রের গতিসমীকরণ হল,

$$M\ddot{x} = -Mg\sin\alpha - F \qquad \text{.............................(1)}$$

$$O = R - Mg\cos\alpha \qquad \text{.............................(2)}$$

এবং $M.\dfrac{2a^2}{5}\ddot{\theta} = Fa$ ....(3)

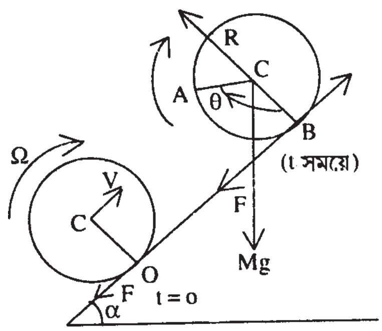
(প্রারম্ভিকভাবে, স্পর্শবিন্দুর রৈখিক গতিবেগ $V - a\Omega > 0$, অতএব, পিছলানো হবে এবং ঘর্ষণবল, Ox অক্ষের বিপরীত দিকে অর্থাৎ নীচের দিকে থাকবে)।

t সময়ে স্পর্শবিন্দু B-এর রৈখিক গতিবেগ, OX-বরাবর, $u = \dot{x} - a\dot{\theta}$ এবং যতক্ষণ পর্যন্ত u ধনাত্মক থাকবে, গোলকটি পিছলে পিছলে ওপরে উঠবে।

যেহেতু পিছলানো হচ্ছে, ঘর্ষণবল সম্পূর্ণ পরিমাণে প্রযুক্ত হবে, অর্থাৎ $F = \mu R$

$$= \frac{1}{7}\tan\alpha(Mg\cos\alpha) = \frac{1}{7}Mg\sin\alpha$$

অতএব, $\ddot{x} = -g\sin\alpha\left(1+\frac{1}{7}\right) = -\frac{8}{7}\sin\alpha$



$$\dot{x} = V - \frac{8}{7}\sin\alpha . t \quad \text{..............(4)}$$

এবং $\ddot{\theta} = \frac{(5F)a}{2a^2M} = \frac{5g\sin\alpha}{14a}$

$$\therefore a\dot{\theta} = a\Omega + \frac{5g\sin\alpha}{14}t \quad \text{..............(5)}$$

(যেহেতু $t = 0$ তে $x = \theta = 0, \dot{x} = V, \dot{\theta} = \Omega$).

অতএব, $\dot{x} - a\dot{\theta} = (V - a\Omega) - \left(\frac{3}{2}\sin\alpha\right)t$

অতএব t-বাড়ালে; $\dot{x} - a\dot{\theta}$ কমে যায় এবং $t = t_1$-এ $\dot{x} = a\dot{\theta}$ হলে,

$$t_1 = \frac{V - a\Omega}{\frac{3}{2}g\sin\alpha} \quad \text{.............................(6)}$$

এই সময়ে,

$\dot{x}$ হল,

$$\dot{x}_{t=t_1} = V - \left(\frac{8}{7}\sin\alpha\right)t_1$$

$$= V - \frac{16}{21}(V - a\Omega) = \frac{5V + 16a\Omega}{21} \quad \text{.............................(7)}$$

এই সময়ে, স্পর্শবিন্দুর রৈখিক গতিবেগ শূন্য হয়ে যায় এবং এরকম হতে পারে যে, এরপর গড়ানো শুরু হয়।

অতএব যদি ধরি যে, গোলকটি এবার গড়াচ্ছে, যেখানে এই মুহূর্তটিকেই এবার প্রারম্ভিক সময় ধরা হল এবং x ও θ এই সময় থেকেই মাপা শুরু হল, তবে,

$M\ddot{x} = -F - Mg\sin\alpha$

$R = Mg\cos\alpha$

ও $M\frac{2a^2}{5}\ddot{\theta} = Fa.$

এবং $x = a\theta$

(F-এর μR-এর কম হতে পারে)

অতএব, $\ddot{x} + \frac{2}{5}\ddot{x} = -g\sin\alpha$

এবং তার থেকে পাই,

$\frac{7}{5}\ddot{x} = -g\sin\alpha,$

$F = -\frac{2}{7} Mg\sin\alpha$

$\therefore \left|\frac{F}{R}\right| = \frac{2}{7}\tan a > \mu$, যা সম্ভবই নয়।

অতএব গোলকটির পক্ষে কোনোদিকেই গড়ানো সম্ভবপর নয়।

$x = a\theta$ তাহলে সম্ভব নয়।

কিন্তু, আবার সমীকরণ (7)-এ ফিরে গেলে দেখি, $t = t_1$-এর পরে, গোলকটি যদি পিছলায়-ও, $\dot{x} > a\dot{\theta}$ হতে পারে না।

$\therefore \dot{x} < a\dot{\theta}$ হবে, $t > t_1$ হলে,

অতএব, স্পর্শবিন্দুটি উলটোদিকে পিছলাতে শুরু করবে, কারণ এর রৈখিক গতিবেগ হবে, $t > t_1$ হলে, ধনাত্মক Ox-এর বিপরীতে। এক্ষেত্রে ঘর্ষণবল তাহলে দিক পরিবর্তন করে, তলের ওপরদিক অভিমুখে থাকবে।

কিন্তু $t = t_1$-এ, $\dot{x} - a\dot{\theta} = 0$ হলেও, $\dot{x}$ কিন্তু শূন্য হয়নি, অর্থাৎ গোলকের কেন্দ্রটির এখনো Ox অভিমুখে একটি গতি আছে। যতক্ষণ পর্যন্ত না এই গতি শূন্য হবে, গোলকটি ওপরে উঠবে। এই গতিটির জন্য, $t = t_1$-কেই প্রারম্ভিক সময় ধরে নিয়ে, x ও θ-কেও এই সময় থেকেই মাপলে, আমরা একইভাবে পাব,

$M\ddot{x} = F' - Mg\sin\alpha$

$0 = R - Mg\cos\alpha$

$\frac{2a^2}{5} M\ddot{\theta} = -F'a.$

F = ঘর্ষণবল = $\mu R = \mu Mg\cos\alpha$

$= \frac{1}{7} Mg\sin\alpha$

$\therefore \ddot{x} = -\frac{6}{7} g\sin\alpha$

$\dot{x} = -\frac{6}{7} g\sin\alpha +$ ধ্রুবক।

এখন t = 0-তে, $\dot{x} = \frac{5V + 16a\Omega}{21}$ .... ((7) থেকে)

অতএব,

$\dot{x} = \left(-\frac{6}{7} g\sin\alpha\right)t + \frac{5V + 16a\Omega}{21}$

$\dot{x} = 0$ হবে $t = t_2$ তে

(এখানে $\dot{x}$, t বাড়লে কমে)

$t_2 = \frac{5V + 16a\Omega}{18g\sin\alpha}$

এবং $\ddot{x} = \frac{6}{7} g\sin\alpha$,

অর্থাৎ, $\dot{x}$, একবার শূন্য হবার পরে আবার ধনাত্মক হতে পারবে না।
অর্থাৎ গোলকটি আর ওপরে উঠবে না।
$\therefore$ ওপরে ওঠার সর্বমোট সময়

$$t_1 + t_2 = \frac{17V + 4a\Omega}{18g\sin\alpha}$$

8. একটি সুষম দণ্ডকে এক প্রান্ত একটি আনুভূমিক টেবিলের সঙ্গে ঠেকিয়ে এমনভাবে রাখা হল যে দন্ডটি আনুভূমিক রেখার সঙ্গে α কোণে নত থাকে। এই অবস্থায় দণ্ডটিকে ছেড়ে দেওয়া হল। দেখান যে টেবিলটি যথার্থভাবে অমসৃণ হলে যখন আনুভূমিক অবস্থায় পৌঁছবে তখন দণ্ডটির কৌণিক গতিবেগ হবে $\sqrt{\frac{3g}{2a}\sin\alpha}$ এবং দণ্ডের নীচের প্রান্তটি কখনই টেবিল ছেড়ে উঠবে না।

টেবিলটি যথার্থভাবে অমসৃণ হলে, দণ্ড OA, O-বিন্দু (যেটি টেবিলের ওপর আছে) তার সাপেক্ষে ঘুরবে। ভারকেন্দ্রের গতিসমীকরণগুলি হবে,

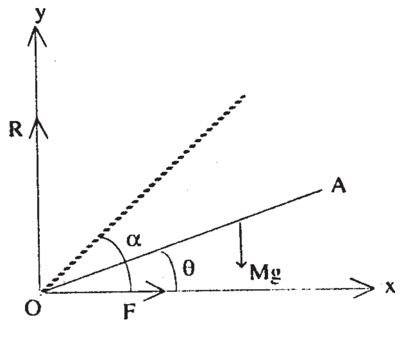
$$M\ddot{x} = F \qquad \text{..............................} \quad \text{(i)}$$

$$M\ddot{y} = R - mg \qquad \text{..............................} \quad \text{(ii)}$$

যেখানে (x, y), t-সময়ে ভারকেন্দ্রের স্থানাংক। (অক্ষ Ox, আনুভূমিক, Oy উল্লম্ব, যেরকম ছবিতে দেখানো হয়েছে) এবং O-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে,

$$M\frac{4a^2}{3}\ddot{\theta} = -Mga\cos\theta \qquad \text{............................} \quad \text{(iii)}$$

(θ হল t সময়ে Ox-এর সঙ্গে দণ্ডের নতিকোণ)।



প্রারম্ভিক শর্ত হল,

$t = 0,\ x = a\cos\alpha,\ y = a\sin\alpha$

$\dot{x} = \dot{y} = 0$

$\theta = \alpha,\ \dot{\theta} = 0$

অতএব, (iii)-কে সমাকলন করে,

$$\frac{2a^2}{3}\dot{\theta}^2 = -ag\sin\theta + c$$

এবং প্রারম্ভিক শর্তদ্বারা, $c = ga\sin\alpha$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}(\sin\alpha - \sin\theta) \qquad \text{..............................} \quad \text{(iv)}$$

দণ্ডটি আনুভূমিক হলে,

$$\theta = 0, \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}\sin\alpha$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{2a}\sin\alpha}$$

এছাড়া, $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\alpha.$

অতএব, $y = a\cos\theta\dot{\theta}$

$$\ddot{y} = -a\sin\theta,\dot{\theta}^2 + a\cos\theta,\ddot{\theta}$$

$\therefore\ R = Mg + M\ddot{y}$

$$= Mg - Ma\sin\theta\dot{\theta}^2 + Ma\cos\theta.\ddot{\theta}$$

(iv) থেকে $\dot{\theta}^2$ ও (iii) থেকে $\ddot{\theta}$-এর মান বসিয়ে পাই,

$$R = Mg - \frac{3Mg}{2}\sin\theta\sin\alpha - \frac{3Mg}{4}\cos^2\alpha + \frac{3Mg}{2}\sin^2\theta$$

$$= Mg - \frac{3Mg}{2}\left[\sin\alpha\sin\theta - \sin^2\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta\right]$$

$$= \frac{Mg}{2}\left[2 - 3\sin\alpha\sin\theta + 3\sin^2\theta - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right]$$

$$= \frac{Mg}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\sin^2\theta - 3\sin\alpha\sin\theta\right]$$

$$= \frac{Mg}{2}\left[\frac{\cos^2\alpha}{2} + \frac{\sin^2\alpha}{2} + \frac{9}{2}\sin^2\theta - 3\sin\alpha\sin\theta\right]$$

$$= \frac{Mg}{2}\left[\frac{\cos^2\alpha}{2} + \left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)^2\right]$$

> 0 যে কোনো θ-র জন্য।

$\therefore$ যেহেতু R কখনই শূন্য হতে পারে না, দণ্ডের টেবিল ছেড়ে উঠিবে না।

একক 18 ☐ দৃঢ়বস্তুর সহসাগতি ও ঘাতজগতি

গঠন

18.1 প্রস্তাবনা

একটি টেনিস বলকে দেওয়ালের দিকে ছুঁড়ে দিলে বলটি দেওয়াল থেকে প্রত্যাবৃত্ত হয়। এখানে দেখা যাচ্ছে দেওয়ালের সঙ্গে সংঘর্ষের পূর্বে বলটির ভরবেগ ছিল দেওয়ালমুখী ও দেওয়ালের লম্ব দিকে আবার খুব সামান্য সময়ের জন্য দেওয়ালের সঙ্গে লিপ্ত থেকে পরমুহূর্তেই বলটির ভরবেগ অনেক পরিবর্তিত হয়ে সেটা দেওয়াল বিমুখী হয়। এই যে পরিবর্তন সেটা কিভাবে ঘটল এটা চিন্তা করলে আমরা দেখছি যে, যে সামান্য সময়ের জন্য বলটি দেওয়ালের সঙ্গে লিপ্ত ছিল, সেই সময়কাল খুবই অল্প হলেও, এমন একটি অতি প্রবল দেওয়াল বিমুখী বল (force) বল (ball) টির ওপর ক্রিয়া করেছে যে, ফলে বলটির ভরবেগের একটি সীমিত পরিবর্তন ঘটেছে। বলটির ওপর সামান্য সময়ের জন্য প্রযুক্ত দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া বল ক্রিয়া করে বলটির বেগের পরিবর্তন ঘটাচ্ছে। এই জাতীয় বলকে ঘাতবল (Impulsive force) এবং তজ্জনিত গতিপরিবর্তনকে ঘাতজগতি (Impulsivemotion) বলা হয়। ঘাত বল বিভিন্ন ধরনের হতে পারে। যেমন—

(a) দুটি বস্তুর সংঘর্ষ জনিত বল,

(b) একটি বস্তুর একাধিক অংশে বিভক্ত কালে একটি অংশ অপর অংশের ওপর প্রযুক্ত বল।

(c) একটি চলমান বস্তুর ওপর হঠাৎ প্রয়োগ করে একটি বিন্দুকে স্থিরীকরণ ইত্যাদি।

18.2 উদ্দেশ্য

এই এককে আপনারা জানতে পারবেন—

- হঠাৎ কোন বৃহৎ বল অতি অল্প সময়ের জন্য একটি দৃঢ়বস্তুর ওপর প্রযুক্ত হলে দৃঢ়বস্তুর কিরূপ গতি পরিবর্তন হয়।

- বস্তুটি বলপ্রযুক্ত হওয়ার পূর্বে গতিতে বা স্থিতাবস্থায় থাকলেও অতি অল্প সময়ের জন্য বলটির প্রয়োগের ফলে বস্তুটির গতিবেগ পরিবর্তিত হয়।
- গতিবেগ পরিবর্তনের পরিমাণ বলটির ওপর এবং তার প্রয়োগকালের গুণফলের ওপর নির্ভর করে। বলটির পরিমাণ অতি বৃহৎ ও কার্যকাল অতি ক্ষুদ্র হওয়ায় তাদের গুণফল একটি সমীতি সংখ্যা হয় এবং ঐ সীমিত সংখ্যাকে বলটির ঘাত (Impulse) বলা হয় এবং এরূপ বলকে ঘাতবল (Impulsive Force) বলা হয়।

18.3 বলের ঘাত (Impulse of a Force)

সংজ্ঞা ঃ একটি দৃঢ় বস্তুর ওপর একটি বিন্দুতে t_1 সময়ে একটি বল $\vec{F} \equiv (X, Y, Z)$ ক্রিয়া করতে শুরু করে t_2 সময় পর্যন্ত ক্রিয়া করল। এই সময়ের জন্য বলটির ঘাত হল $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt.$

যদি একটি কণার ওপর একটি বল $\vec{F}$ প্রযুক্ত হয় তা হলে $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$

ফলে বলটির (t_1, t_2) এই সময়ের জন্য ঘাত

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\vec{r}} dt = \left[m\dot{\vec{r}}\right]_{t_1}^{t_2}$$

$= m\vec{v} - m\vec{u}$, যেখানে $\vec{v} = \left(\dot{\vec{r}}\right)_{t_2} = t_2$ সময়ে গতিবেগ

$\vec{u} = \left(\dot{\vec{r}}\right)_{t_1} = t_1$ সময়ে গতিবেগ

অতএব একটি কণার বেলায় প্রযুক্ত বলের কোন সময়কালে ঘাত হল কণাটির ঐ সময়ে ভরবেগের পরিবর্তনের সমান।

18.3.1 ঘাত বলের ঘাত (Impulse of an impulsive force)

যদি একটি বল $\vec{F}$ এমন হয় যে তার মান খুবই বড় এবং বলটি t সময় থেকে $t + \Delta t$ সময় পর্যন্ত ক্রিয়াশীল থাকে তবে এই বলের ঘাত হল $\int_{t}^{t+\Delta t} \vec{F} dt.$ এখন যদি $\Delta t \to 0+$ হয় তাহলে,

$$\int_{t}^{t+\Delta t} \vec{F} dt = \vec{F} \Delta t \text{ (আসন্নমান)}$$

18.4 দ্বিমাত্রিক গতিবিশিষ্ট দৃঢ়বস্তুর ঘাতবল প্রযুক্ত গতি সমীকরণসমূহ

ধরা যাক একটি দৃঢ়বস্তু দ্বিমাত্রিক গতিতে চলে এবং t সময়ে তার কয়েকটি বিন্দুতে ঐ সমতলে অবস্থিত কয়েকটি ঘাতবল ক্রিয়া করে। আমরা দৃঢ়বস্তুর ঘাতবল জনিত গতি পরিবর্তন নির্ণয় করব।

দৃঢ়বস্তুটির প্রতিটি বিন্দু যে স্থির সমতলের সমান্তরাল তলে চলে, তাকে xy-তল নিয়ে আমরা দৃঢ়বস্তুর গতি সমীকরণ লিখব।

ধরা যাক, t সময়ে G-এর স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ (এখানে $\bar{z}$ ধ্রুবক)।

ধরা যাক t সময়ে $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2)\ldots A_n(x_n, y_n, z_n)$ বিন্দুতে বল $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ বলগুলি ক্রিয়া করে। এখানে বলগুলি xy তলের সমান্তরাল এবং ঐ বলগুলির মধ্যে কতগুলি ঘাতবল ও অন্যগুলি সীমিতবল।

ডালাম্বারের নীতি থেকে দৃঢ়বস্তুর বেলায় পাই, ভরকেন্দ্র G-এর গতি সমীকরণদ্বয় হল

$$M\ddot{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$M\ddot{\bar{y}} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

যেখানে M = দৃঢ়বস্তুর ভর।

ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে গতির সমীকরণ হল $MK^2\dot{\omega} = \sum_{j=1}^{n}\left(x'j\ F_{iy} - y'_j F_{ix}\right)$

যেখানে MK^2 হল G গামী z-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্যভ্রামক এবং $x'_j = x_j - \bar{x},\ y'_j = y_j - \bar{y}$ (অর্থাৎ G-কে, আদি বিন্দু নিলে x'_j, y'_j হল A_i-এর স্থানাঙ্ক) এবং ω হল G গামী অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনবেগ বা কৌণিক গতি এবার আমরা (1), (2), (3) এই সমীকরণগুলিকে t থেকে $t + \Delta t$ সময়ের জন্য সমাকল করে পাই,

$$\left[M\dot{\bar{x}}\right]_t^{t+\Delta t} = \sum_{j=1}^{n} \int_t^{t+\Delta t} F_{jx}dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\left[M\dot{\bar{y}}\right]_t^{t+\Delta t} = \sum_{j=1}^{n} F_{jy}dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$[MK^2\omega]\overset{t+\Delta t}{t} = \sum_{i=1}^{n} \int_t^{t+\Delta t} (x'_j - y'_{jx})dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

এবং $\Delta t \to 0+$ করলে ডানদিকে $\int_t^{t+\Delta t} F_{jx}dt \to I_{jx}$ .... (7)

অর্থাৎ I_{jx} হল F_{jx} বলের ঘাত।

আবার, যেহেতু, Δt খুবই ছোট, অতএব ঐ অল্পসময়ে কোন বিন্দুর সরণ আবহেলাযোগ্য। অতএব x'_j ঐ সময়ে একই মানে থাকে; ফলে

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_t^{t+\Delta t} \left(x'_{jy} F_{jy} - y'_j F_{jx}\right) dt = \lim_{\Delta t \to 0} \left[x'_j \int_t^{t+\Delta t} F_{jy} dt - y'_j \int_t^{t+\Delta t} F_{jx} dt \right]$$

$$= \left(x'_j I_{jy} - y'_j I_{jx}\right) \qquad \text{.............................. (8)}$$

এভাবে (7) ও (8) ব্যবহার করে আমরা (4), (5), (6) থেকে $= t \to 0+$ নিলে পাই,

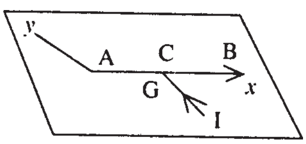
$$M(U - u) = \sum_{j=1}^{n} I_{jx} \qquad \text{.............................. (9)}$$

$$M(V - v) = \sum_{j=1}^{n} I_{jy} \qquad \text{............................ (10)}$$

$$MK^2(\Omega - \omega) = \sum_{j=1}^{n} \left(x'_j I_{jy} - y'_j I_{jx}\right) \qquad \text{.............................. (11)}$$

যেখানে u, v ও U, V যথাক্রমে ঘাতবল প্রয়োগের ঠিক আগে এবং অব্যবহিত পরে ভরকেন্দ্রর গতিবেগের কার্তীয় বিশ্লেষিতাংশ এবং ω, Ω যথাক্রমে ভরকেন্দ্রগামী z-সমান্তরাল অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটির t সময়ের ঠিক আগে ও t সময়ের ঠিক পরে কৌণিক গতিবেগ। অতএব দেখা যাচ্ছে x-দিকে বস্তুটির ভরবেগের পরিবর্তন ঘাতবলসমূহের x-দিকে ঘাত বিশ্লেষিতাংশের যোগফল। একইভাবে (10) থেকে পাই, y-দিকে বস্তটির ভরবেগের পরিবর্তন = ঘাতবল সমূহের ঘাতের y-দিকে বিশ্লেষিতাংশগুলির যোগফল। আবার (ii) থেকে দেখা যাচ্ছে, বস্তুটির G-এর সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন = G সাপেক্ষে ঘাতবলগুলির ভ্রামকসমূহের যোগফল।

উদাহরণ 1. ধরা যাক একটি সুষম দণ্ড AB-এর একটি বিন্দু C এমন যে $AC = x < 2a$ = দণ্ড AB-এর দৈর্ঘ্য। দণ্ডটি প্রথমে একটি মসৃণ টেবিলের ওপর শায়িত আছে। এমন C বিন্দুতে AB-এর লম্ব দিকে এবং টেবিলের তলে একটি ঘাতবল I প্রযুক্ত হল। M দণ্ডটির ভর হলে এর ঘাতবল প্রয়োগ করার পরে মুহূর্তে গতিবেগ নির্ণয় করুন।



AB দিকে x-অক্ষ ও AB-এর লম্বদিকে টেবিলের তলে y-অক্ষ নেওয়া যাক A বিন্দুর স্থিরাবস্থা অবস্থানকে আদি বিন্দু নেওয়া গেল। দণ্ডটির মধ্যবিন্দু $\overline{x} = a, \overline{y} = 0$ যেহেতু দণ্ডটি স্থির ছিল অতএব $u = 0$, $v = 0$, $\omega = 0$. ঘাতবলের প্রয়োগবিন্দু $(x, 0)$ এবং ঘাত = (0, I, 0) যেহেতু অন্যান্য বলগুলি অর্থাৎ গ্রাভিটি ও টেবিলের প্রতিক্রিয়া বল সীমিতমানের অতএব তাদের ঘাত = 0, এবং দণ্ডটির ঘাত সমীকরণ থেকে পাই—

$$MU - 0 = 0$$

$$MV - 0 = I$$

$$M\frac{a^2}{3}\Omega - 0 = (x - a)I$$

অতএব ঘাতবল প্রয়োগের সঙ্গে সঙ্গে দণ্ডটির গতি হবে এইরূপ ঃ

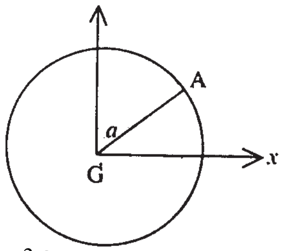
(1) তার ভরকেন্দ্র $\frac{1}{M}$ বেগে y-দিকে চলে।

(2) দণ্ডটি G-এর পরিপ্রেক্ষিতে $\Omega = \frac{31}{Ma^2}(x - a)$ কৌণিক গতিতে ঘুরতে আরম্ভ করে।

উদাহরণ 2. একটি a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলাকার পাত কেন্দ্র সাপেক্ষে ω কৌণিক বেগে ঘুরছে। হঠাৎ পরিধির একটি বিন্দুকে স্থির করলে (ঘাতবল ঐ বিন্দুতে প্রয়োগ করে) পাতটির নতুন গতি কিরূপ?

সমাধান ঃ ধরা যাক্ ভরকেন্দ্র G পরিপ্রেক্ষিতে গোলাকার পাত ω কৌণিক বেগে ঘুরছিল। এবার পরিধির বিন্দু A-তে x, y দিকে I_x, I_y ঘাত যুক্ত ঘাতবল প্রযুক্ত হয়ে A স্থির হল; ফলে পাতটি A সাপেক্ষে ঘুরতে আরম্ভ করবে। ধরা যাক A সাপেক্ষে পাতটির কৌণিক গতিবেগ = Ω. অতএব কেন্দ্রের গতি হবে $(0.-a\Omega)$. [এখানে GA দিকে x-অক্ষ ও তার লম্বদিকে y-অক্ষ নেওয়া হয়েছে।]

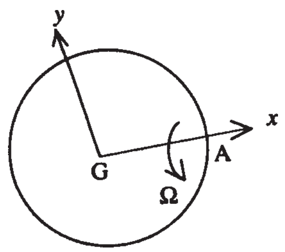
A-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$, অতএব গতি সমীকরণগুলি হল



$$M(0 - 0) = I_x$$

$$M(-a\Omega - 0) = 1_y$$

$$\frac{1}{2} Ma^2(\Omega - \omega) = aI_y - 0I_x = aI_y$$



অতএব $I_y = Ma\Omega$

এবং $\frac{1}{2} Ma^2(\Omega - \omega) = -Ma^2\Omega$

অর্থাৎ $-\frac{1}{2} Ma^2\omega = -\frac{3}{2} Ma^2\Omega$

$\therefore \Omega = \frac{\omega}{3}$.

18.5 ঘাতবল জনিত গতিশক্তির পরিবর্তন

ধরা যাক একটি দ্বিমাত্রিক গতিতে একটি দৃঢ়বস্তুর একটি বিন্দু A-তে সহসা একটি ঘাতবল প্রযুক্ত হয়েছে। বস্তুটির ভরকেন্দ্রের গতির x, y দিকে বিশ্লেষিতাংশ ঘাতবল প্রয়োগের পূর্বে u, v এবং G গামী z-সমান্তরাল অক্ষ সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ ω হলে এবং ঘাতবল প্রযুক্ত হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে G-এর গতি U, V এবং কৌণিক ভরবেগ Ω হলে গতি সমীকরণ থেকে পাই,

$$M\ (U - u) = I_x$$

$$M\ (V - v) = I_y$$

$$MK^2\ (\Omega - \omega) = x'l_y - y'I_x,$$

যেখানে x', y' হল যথাক্রমে G-এর সাপেক্ষে A-এর স্থানাঙ্ক ঘাতবল প্রযুক্ত হওয়ার মুহূর্তে।

অতএব, গতিশক্তির পরিবর্তন

= ঘাতবল প্রয়োগের পরমুহূর্তে গতিশক্তি – ঘাতবল প্রয়োগের একান্ত পূর্বমুহূর্তে গতিশক্তি

$$= \frac{1}{2}M\left(U^2 + V^2 + K^2\Omega\right) - \frac{1}{2}M\left(u^2 + v^2K^2\omega^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}M\left[(U-u)(U+u)(V-v)(V+v) + K^2(\Omega-\omega)(\Omega+\omega)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[I_x(U+u) + I_y(V+v) + \left(x'I_y - y'I_x\right)(\Omega+\omega)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[I_x(U-y'\Omega) + I_y(V+x'\Omega) + I_x(u-y'\omega) + I_y(v+x'\omega)\right]$$

$$= \left[I_x\left(\frac{(U-y'\Omega)+(u-y'\omega)}{2}\right) + I_y\frac{(V+x'\Omega)+(v+x'\omega)}{2}\right]$$

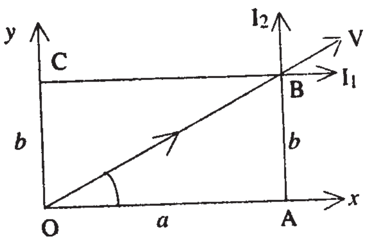
অতএব দেখা যাচ্ছে গতিশক্তির পরিবর্তন

$$= \vec{I}.\frac{\left(\vec{V}_A + \vec{v}_A\right)}{2}$$

অর্থাৎ ঘাতবলের ঘাত $\vec{I}$ এবং A বিন্দুতে ঘাতবল প্রযুক্ত হওয়ার পূর্বে ও পরে গতিবেগ দুটির গড়-এর স্কেলার গুণফল।

3. উদাহরণ ঃ

একটি স্থির আয়তক্ষেত্রের পাতের একটি শীর্ষবিন্দুতে একটি ঘাত বল প্রযুক্ত হল। ঘাত যদি যথাক্রমে বাহু দুটির বরাবর I_1, I_2 হয় এবং ফলে শীর্ষবিন্দুটির গতিবেগ কর্ণবরাবর V হয় তা হলে আয়তক্ষেত্রটির গতিশক্তি কত?



সমাধান ঃ আয়তক্ষেত্রের $(OABC)$ B বিন্দুতে বল প্রযুক্ত হলে এবং a, b বাহু দৈর্ঘ্য হলে গতিশক্তির পরিবর্তন

= ঘাতবলজনিত গতিশক্তি

$$= I_1\frac{aV}{\sqrt{a^2+b^2}} + I_2\frac{bV}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{\left(I_1a + I_2b\right)V}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

18.6 কৌণিক ভরবেগ ও ঘাতবল

কণাপুঞ্জের গতি এককে 12·3.7 (v) নং সমীকরণে আমরা যে কোনে বিন্দু O সাপেত্রে কৌণিক ভরবেগ

$\vec{L}$ হলে $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_j \times \vec{F}_j$ .... (1)

যেখানে $\vec{L} = \sum \vec{r}_j \times m_j \vec{r}_j$

এবং যেখানে $\vec{F}_j$ বল তে অবস্থিত কণার ওপর ক্রিয়াশীল এখন যদি $\vec{F}_j$ বলগুলি দ্বিমাত্রিক অর্থাৎ xy তলে অবস্থিত হয় অর্থাৎ $\vec{F}_j = \left(X_j, Y_j\right)$ হয় তাহলে যদি (1)-নং সমীকরণের স্কেলার রূপ থেকে পাই,

$$\frac{d}{dt}\sum\left(x_j m_j y_j - y_j m_j x_j\right) = \sum_j \left(x_j F_{jy} - y_j F_{jx}\right)$$

এবার উভয় পক্ষকে থেকে t + Δt (Δt > 0) এই অন্তরে সমাকল করলে পাই,

$$\left[\sum m_j\left(x_j \dot{y}_j - y_j \dot{x}_j\right)\right]_t^{t+\Delta t} = \sum_j \left[x_j \int_t^{t+\Delta t} F_{jy}dt - y_j \int_t^{t+\Delta t} F_{jx}dt\right]$$

এবার $\Delta t \to 0^+$ করলে ঘাতবলের ক্ষেত্রে আমরা পাই, O বিন্দু সাপেক্ষে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন

$$= \sum_j \left(x_j I_{jy} - y_j I_{jx}\right)$$

= ঘাতবলসমূহের ঘাত (I_{jx}, I_{jy}) ইত্যাদির O বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক সমূহের যোগফল

∴ প্রমাণিত হল যে "দ্বিমাত্রিক গতির ক্ষেত্রে কোন দৃঢ়বস্তু বা কণাপুঞ্জের উপর ঘাতবল ক্রিয়া করলে যেকোন বিন্দু O সাপেক্ষে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন = O বিন্দু সাপেক্ষে ঘাতবলের ঘাত-এর ভ্রামক সমূহের যোগফল।"

দৃঢ়বস্তুর বেলায় O বিন্দুগামী z-অক্ষ সাপেক্ষে

$$MK^2\omega = \sum_j \left(x_j I_{jx} - y_j I_{jy}\right)$$

যেখানে MK^2 হল O গামী OZ অক্ষ সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর জাড্যভ্রামক। ω হল OZ সাপেক্ষে বস্তুটির কৌণিক গতিবেগ এবং ডানপক্ষ হল ঘাতবল সমূহের ঘাতের OZ সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফল।

18.6.1 পারকাশন কেন্দ্র (Centre of Percussion)

ধরা যাক একটি দৃঢ়বস্তু একটি স্থির অক্ষের সাপেক্ষ ঘুরতে পারে এবং একটি ঘাতবল ঐ বস্তুটির ওপর একটি বিন্দুতে ক্রিয়া এমনভাবে করলে যে ফলে অক্ষটির ওপর ঘাতপ্রতিক্রিয়া বল শূন্য। ঘাতবলের ক্রিয়ারেখাকে

'পারকাশন রেখা' (line of percussion) বল হয়। ভরকেন্দ্র G ও অক্ষ বিন্দুগামী সমতলের যে বিন্দুতে পারকাশন রেখা ছেদ করে তাকে পারকাশন কেন্দ্র (Centre of Percussion) বাল হয়।

ঘাতবল $\vec{I}$ OG-কে C বিন্দু ছেদ করলে এবং $OC = C$, $OG = h$

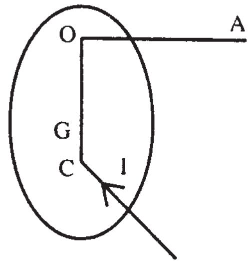
$\vec{I}$ ও $\vec{GO}$ এর মধ্যে কোন ϕ হলে M = দৃঢ় বস্তুর ভর এবং ঘাতবল হেতু ঘাতজ গতির কৌণিক গতি Ω হলে,

$$Mh\Omega = I \sin \phi$$

$$0 = I \cos \phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

O-এর সাপেক্ষে $M\left(K^2 + h^2\right)\Omega = IC = Mh\Omega C$

$$C = \frac{K^2 + h^2}{h} = h + \frac{K^2}{h}$$



18.7 সারাংশ

সহসাগতির কারণ হল এক বা একাধিক ঘাত বল বস্তুর ওপর প্রয়োগ। বস্তুটি ঘাত বল প্রযুক্ত হওয়ার পূর্বে গতিতে থাকতে পারে অথবা স্থির থাকতে পারে। ঘাতবল খুবই অল্প সময়ের জন্য ক্রিয়াশীল একটি বৃহৎ বল। অল্প সময়ের জন্য হলেও ঐ সময়ে বস্তুটির ভরগতির একটি হঠাৎ পরিবর্তন অর্থাৎ একটি অসন্তত পরিবর্তন ঘটে। এই পরিবর্তন ঘাত বলের ঘাতের সঙ্গো যুক্ত যে কোন বল $\vec{F}$ এর ঘাত হল $\vec{I} = \lim_{\Delta t \to o+} \int_t^{t+\Delta t} \vec{F} dt$ বলটি যদি সীমিত হয় অর্থাৎ $\left|\vec{F}\right| < K$ যেখানে K একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা, সেক্ষেত্রে $\vec{I} = 0.$ কিন্তু বল খুব বড় মানের হলে $\vec{I} \neq 0$ হয় এবং সেখানে সহসা গতি পরিবর্তন হয়।

দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে কোন দৃঢ় বস্তুর ভরকেন্দ্রের গতিবেগ ঘাতবল প্রয়োগের অব্যবহিত পূর্বে ও পরে যদি যথাক্রমে (u, v) এবং (U, V) হয় এবং ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে বস্তুটির কৌণিক বেগ যদি পূর্বে ও পরে যথাক্রমে ω ও Ω হয় তাহলে, M ভর হলে,

$$M\ (U - u) = \Sigma I_x$$
$$M\ (V - v) = \Sigma I_y$$
$$MK^2\ (\Omega - \omega) = \Sigma x' I_y - y' I_x)$$

যেখানে I_x, I_y হল $m(x, y)$ বিন্দুতে ঘাতবলের ঘাতের উপাংশ এবং Σ হল যতগুলি ঘাতবল প্রযুক্ত হয়েছে তাদের জন্য যোগ এবং (x', y') হল (x, y) বিন্দুর ভরকেন্দ্র G-এর সাপেক্ষে স্থানাঙ্কদ্বয়। অর্থাৎ $x = \bar{x} + x', y = \bar{y} + y'$, যেখানে $\bar{x}, \bar{y}$ হল ভরকেন্দ্রে স্থানাঙ্ক। ঘাতবলের বেলায় ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি ও কৌণিক সংরক্ষণ নীতি প্রযোজ্য।

18.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. $m_1 + m_2$ ভরের একটি ঘনবস্তু একটি বিস্ফোরণে m_1, m_2 ভরযুক্ত দুটি কণা অংশে বিভক্ত হয়ে বস্তুটির আগের দিকেই চলতে শুরু করলে এবং বিস্ফোরণ জাত গতিশক্তি E হলে, দেখান যে, বস্তুর অংশ দুটির মধ্যে

আপেক্ষিক গতি $= \sqrt{\left\{\dfrac{2E(m_1+m_2)}{m_1 m_2}\right\}}$

ধরা যাক u হল পূর্ণবস্তুটির বিস্ফোরণের পূর্বমুহূর্তের গতিবেগ এবং বিস্ফোরণের পরে অংশ দুটির গতিবেগ v_1, v_2 তা হলে,

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2 + E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \qquad \text{.........................} \quad (1)$$

বিস্ফোরণের ফলে ভরবেগের পরিবর্তন হয় না অতএব

$$(m_1 + m_2)\ u = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad \text{.........................} \quad (2)$$

অতএব, (1), (2) থেকে

$$\frac{1}{2}\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1+m_2} + E = \frac{1}{2}m_v v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

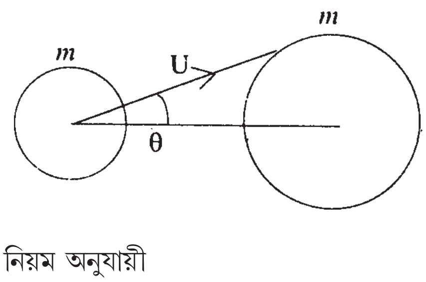
$$\therefore \quad (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2 + 2(m_1+m_2)E = (m_1+m_2)(m_2 v_1^2 + m_2 v_2^2)$$

$$v_1^2\left[m_1^2 - (m_1+m_2)m_1\right] + v_2^2\left[m_2^2 - (m_1 m_2 + m_2^2)\right] + 2v_1 v_2 m_1 m_2$$

$$= -2(m_1+m_2)E + v_1^2 m_1 m_2 + v_2^2 m_1 m_2 - 2v_1 v_2 m_1 m_2 = +2(m_1+m_2)E$$

$$(v_1 - v_2) = \frac{2(m_1+m_2)}{m_1 m_2}E$$

2. একটি গোলকের আর একটি সমান ভরযুক্ত স্থির গোলকের সহিত তিযকভাবে সংর্ঘষ হলে এবং গোলক দুটি মসৃণ ও পূর্ণভাবে স্থিতিস্থাপক হলে, দেখান যে সংঘর্ষের পর গোলক দুটির পথ পরস্পর লম্ব।



যদি গতিশীল গোলকের গতিবেগ U এবং U-এর দিক তাদের কেন্দ্রের রেখার সঙ্গে θ কোণ করে এবং যদি সংঘর্ষের অব্যবহিত পরে একটির গতিবেগ v_1 ও অপরটির v_2 হয়, এবং v_1, v_2 যথাক্রমে ϕ_1, ϕ_2 কোণ কেন্দ্ররেখার সঙ্গে করে তা হলে নিউটনের পরীক্ষিত নিয়ম অনুযায়ী

$$\left.\begin{aligned} v_2 \cos\phi_2 - v_1 \cos\phi_1 &= U\cos\theta \\ v_2 \sin\phi_2 - v_1 \sin\phi_1 &= U\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ভরবেগ নিত্যতা থেকে পাই,

$$\left.\begin{aligned} mU\cos\theta &= mv_2 \cos\phi_2 + mv_1 \cos\phi_1 \\ mU\sin\theta &= mv_2 \sin\phi_2 + mv_1 \sin\phi_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

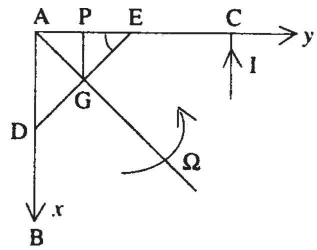
(2) থেকে $U = v_2^2 + v_1^2 + 2v_1v_2\cos(\phi_1 - \phi_2)$

আবার, (1) থেকে $U^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2v_1v_2(\phi_1 - \phi_2)$

$$\therefore \quad \cos(\phi_1 - \phi_2) = 0$$

$$\therefore \quad \phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

3. দুটি সুষম দণ্ড AB ও AC দৃঢ়ভাবে A বিন্দুতে দৃঢ়ভাবে পরস্পর লম্বভাবে যুক্ত। এখন C বিন্দুতে I ঘাতের ঘাতবল AC-এর লম্বভাবে ক্রিয়া করলে দণ্ডদুটির গতি নির্ণয় করুন।



$[CP = CA - AP$

$\quad = 2a - AG \cos 45°$

$\quad = 2a - a \sin 45° \cos 45°$

$\quad = 2a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a}{2}$]

সমাধান ঃ দণ্ড দুটির ভরকেন্দ্র G, A বিন্দুর মধ্য দিয়ে AB ও AC দিকে x ও y অক্ষ। G-এর স্থানাঙ্ক $[a, a)$ G-এর গতিসমীকরণ হল—

যেখানে (U, V) হল G-এর গতি বেগ উপাংশদ্বয় এবং Ω হল কৌণিক গতি

$M\ (U - 0) = -I$

$M\ (V - 0) = 0$

$$M\left[\left(\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{2}\right)+\left(\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{2}\right)\right]\Omega = 1\left(\frac{3a}{2}\right)$$

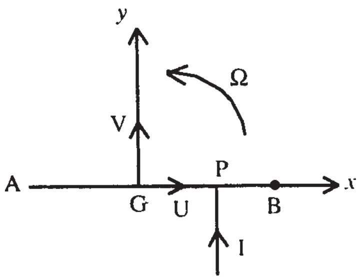
(যেহেতু G-এর সাপেক্ষে দণ্ডদুটির জাড্যভ্রামক = AB-এর জাড্য ভ্রামক + AC-এর জাড্য ভ্রামক)

$$\therefore \quad U = -\frac{1}{M}, V = 0, \frac{5Ma^2}{3}\Omega = \frac{3aI}{2}$$

অতএব, দৃঢ়বস্তুটির ভরকেন্দ্রের বেগ $\dfrac{1}{M}$ এবং ঘূর্ণন গতি = $\dfrac{9I}{10Ma}$.

4. একটি দণ্ড AB একটি আনুভূমিক মসৃণ টেবিলে শায়িত আছে। দণ্ডটির একটি বিন্দু P-তে লম্বভাবে একটি ঘাতবল (ঘাত $= I$) ক্রিয়া করে। দণ্ডটির সহসা গতি কিরূপ?

চিত্রাঅনুযায়ী ভরকেন্দ্র G-এর গতিবেগ x ও y দিকে যথাক্রমে U এবং V হলে এবং G সাপেক্ষে দণ্ডটির কৌণিক গতি Ω হলে



$m\ (U - 0) = 0$ m = দণ্ডের ভর

$m\ (V - 0) = I$ $2a$ = দণ্ডের দৈর্ঘ্য

$m\dfrac{a^2}{3}(\Omega = 0) = Ip$ $p = GP$ -এর দৈর্ঘ্য যেখানে p বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $= (a + p,\ 0)$

$\therefore \quad U = 0,\ V = \dfrac{1}{m}$ এবং $\Omega = \dfrac{3Ip}{ma^2}$

y-দিকে A-এর গতিবেগ = G-এর গতিবেগ + G সাপেক্ষে A-এর গতিবেগ

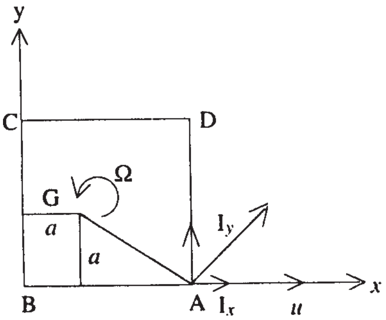
$= V - a\Omega$

$= \dfrac{1}{m} = \dfrac{3Ip}{ma}$

$= \dfrac{I}{ma}(a - 3p)$

অতএব A স্থির থাকবে যদি $p = \dfrac{a}{3}$ হয়।

5. একটি বর্গক্ষেত্রকার পাত $ABCD$ একটি মসৃণ আনুভূমিক তলের ওপর রয়েছে। হঠাৎ যদি A শীর্ষবিন্দুটির BA-এর দিকে u বেগ চলতে আরম্ভ করে, তবে ঐ সময়ে পাতটির কৌণিক গতি বেগ কত হবে?



ধরা যাক, G-এর গতিবেগ উপাংশ U, x-দিকে, V, y-দিকে এবং Ω হল G-এর সাপেক্ষে কৌণিক গতি। তাহলে যেহেতু A বিন্দুর গতিবেগ দেওয়া আছে $(u,\ 0)$.

অতএব $\quad U + a\Omega = u$

$\qquad v + a\Omega = 0$

যেহেতু ঘাতবল শুধুমাত্র A বিন্দুতে প্রযুক্ত হয়েছে।

অতএব ঘাতবলের ঘাত Ix, Iy হলে,

$$\left.\begin{array}{l} m(U - 0) = Ix \\ m(V - 0) = Iy \\ m\dfrac{2}{3}a^2(\Omega - 0) = I_x a + I_y a \end{array}\right\}$$

$$\therefore \quad \frac{2ma}{3}\Omega = I_x + I_y = mU + mV$$

$$= m(u - a\Omega) - ma\Omega$$

$\therefore \quad \frac{2ma}{3}\Omega + 2ma\Omega = mu$

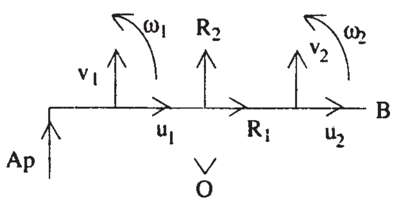
$\frac{8ma}{3}\Omega = mu$

$\therefore \quad \Omega \frac{3a}{8a}$

$U = u - a\Omega = u - \frac{3u}{8} = \frac{5u}{8}$

$V = -a\Omega = -\frac{3u}{8}$

6. দুটি সুষম দণ্ড AO, OB যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$, $2b$ এবং ভর m ও M, O বিন্দুতে মসৃণভাবে যুক্ত আছে এবং একটি সরলরেখায় একটি মসৃণ টেবিলের ওপর আছে। এখন A বিন্দুতে AOB-এর লম্বদিকে একটি P ঘাত যুক্ত ঘাতবল প্রয়োগ করা হল। ঐ সময়ে O বিন্দুতে ঘাত প্রতিক্রিয়া বল কত?



ধরা যাক O বিন্দুতে AO দণ্ডের ওপর ক্রিয়মান প্রতিক্রিয়া বল R_1, R_2 AOB দিকে ও তার লম্বদিকে।

যেহেতু O-এর গতিবেগ উপাংশ সমান $mu_1 = R_1$

তাহলে AO দণ্ডের জন্য

$mv_1 = R_2 + P$

$m\frac{a^2}{3}w_1 = R_2 a - Pa$

আবার, OB দণ্ডের জন্য

$Mu_2 = -R_1$

$Mv_2 = -R_2$

$M\frac{b^2}{3}\omega_2 = R_2 a$

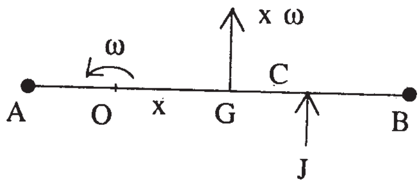
$\therefore \ u_1 = u_2$

$v_1 + a\omega 7_1 = v_2 - b\omega_2$

$\therefore \ mu_1 + Mu_2 = 0 \quad \therefore \ u_1 = u_2 = 0 \ \therefore \ R_1 = 0$

$mv_1 + Mv_2 = P$

প্রশ্ন 7. M ভর ও $2a$ দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ড স্থিরাবস্থা আছে এমন সময় তার ওপর লম্বভাবে কেন্দ্রের থেকে C দূরত্বে একটি J ঘাতের একটি ধাক্কা দেওয়া হল। দণ্ডটি কোন বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরতে শুরু করবে সেটি বের করুন এবং ধাক্কার পরে দণ্ডটির গতিশক্তি কত হবে তাও বের করুন।



এখানে সহসা বল প্রয়োগ করা হয়েছে যার কাছে দণ্ডের ওপর প্রযুক্ত অন্যান্য সসীমবলগুলিকে তুচ্ছ মনে করা যায়। এই সহসাঘাতবলটির ঘাত J।

ধরা যাক ধাক্কার পরে দণ্ডটি O বিন্দু সাপেক্ষে ঘোরে, যেখানে O, G-এর যেদিকে ধাক্কা দেওয়া হয়েছিল সেদিকে নয়, অন্যদিকে অবস্থিত।

$OG = x$ ধরা যাক।

এখন ধাক্কার ঘাতটি হবে, ধাক্কার পরে ও আগে দণ্ডটির রৈখিক ভরবেগের পার্থক্য। এই রৈখিক ভরবেগ আবার G বিন্দুর সঙ্গেই সঞ্চারশীল M ভরের একটি বস্তুকণার ভরবেগের সমান।

ধাক্কার পরে, G বিন্দুর রৈখিক বেগ $x\omega$.

$\therefore \quad M(x\omega - O) = J.$ .... (i)

এছাড়াও, O-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই—

O-এর সাপেক্ষে ধাক্কার পরেও ধাক্কর আগে ভ্রামকের পার্থক্য $= O$ বিন্দু সাপেক্ষে ইমপালসের ভ্রামক।

অর্থাৎ $MK2(\omega - 0) = J(x + c)$

যেখানে K হল O-এর সাপেক্ষে দণ্ডটি ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ $K^2 = \frac{a^2}{3} + x^2$

$$\therefore \quad M\left(\frac{a^2}{3} + x^2\right)\omega = J(c + x) \quad \text{..........................} \quad \text{(ii)}$$

কিন্তু $\omega = \frac{J}{Mx}$ ((i) থেকে)

$\therefore$ (ii) থেকে পাই,

$$a^2 + 3x^2 = 3(c + x)x$$

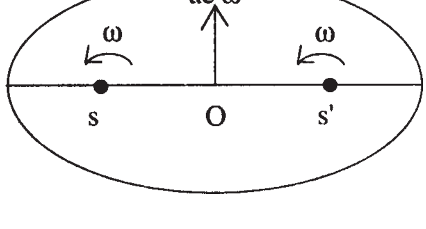
$\therefore \quad x = \frac{a^2}{3c}$, এর থেকে O -এর অবস্থান পাওয়া যায়।

ধাক্কার দ্বারা প্রাপ্ত গতিশক্তি হল,

$$\frac{1}{2}MK^2\theta^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{a^2}{3} + x^2\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{J^2}{M}\frac{a^2 + 3c^2}{a^2}, \quad x \text{ ও } \omega\text{-র মান বসিয়ে।}$$

প্রশ্ন 8. একটি উপবৃত্তাকার পাত, তার নিজের সমতলে একটি ফোকাসের সাপেক্ষে ω কৌণিক বেগে ঘুরছে। অর্থাৎ এই ফোকাসটিকে আবদ্ধ করে রাখা হয়েছে। হঠাৎ, এই ফোকাসকে মুক্ত করে, অন্য ফোকাসকে আবদ্ধ (fixed) করা হল। দেখান যে উপবৃত্তাকার পাতটি এখন ঐ ফোকাসের সাপেক্ষে $\frac{2 - 5e^2}{2 + 3e^2}\omega$ কৌণিক বেগে ঘুরবে e হল উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা।



উপবৃত্তটি ফোকাস s-এর সাপেক্ষে নিজের সমতলে কৌণিক বেগ ω নিয়ে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে ঘুরছে (anticlockurse)। হঠাৎ s-কে মুক্ত করে দিয়ে s'-কে আবদ্ধ (fixed) করা হয়। এবং পাতটি s'-এর সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে ω' কৌণিক বেগ নিয়ে ঘুরতে থাকে।

O হল উপবৃত্তটির কেন্দ্র।

এখন s' কে আবদ্ধ করার মুহূর্তে ঐ বিন্দুতে একটি ঘাতবল প্রযুক্ত হয়, s'-এর সাপেক্ষে যার ঘাতের ভ্রামক শূন্য। এখন, s'-কে আবদ্ধ করার পরে s'-এর সাপেক্ষে পাতটির কৌণিক ভরবেগ।

= (s' গামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে পাতটির জাড্য-ভ্রামক) ω'

$$= M\left[\frac{\left(a^2+b^2\right)}{4}+a^2e^2\right]\omega' = \frac{M}{4}\left[2+3e^2\right]\omega' \qquad \because b^2 = a^2\left(1-e^2\right)$$

এবং, $OS' = ae$ (M, পাতটির ভর)

আবার, s'-কে আবদ্ধ করার আগে, পাতটি s-এর সাপেক্ষে ঘুরছিল, এবং s' সাপেক্ষে তখন পাতের কৌণিক ভরবেগ = ভরকেন্দ্র O-র সঙ্গে চলমান M ভরযুক্ত কণার কৌণিক ভরবেগ + ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে পাতটির কৌণিক ভরবেগ

$$= -M \text{ (}O\text{-এর রৈখিক গতি). } OS' = -M\,(ae\omega)\,ae + M\frac{a^2+b^2}{4}\omega + M\frac{a^2+b^2}{4}\omega$$

এখানে, যে সমস্ত ভ্রামক, বা কৌণিক ভরবেগ ঘড়ির কাঁটার দিকে (clockwise), তাদের সঙ্গে ঋণাত্মক চিহ্ন নেওয়া হয়েছে।

অর্থাৎ ω, বা, ω'-এর দিকটিকেই ধনাত্মক নেওয়া হয়েছে।

অন্যান্য বহির্বলের অনুপস্থিতিতে,

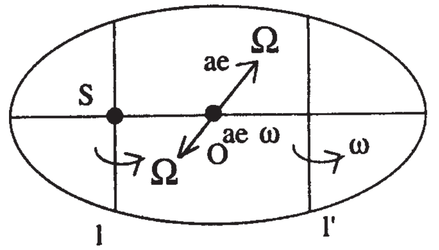
s' সাপেক্ষে ঘাতবলপ্রয়োগের ঠিক পরে ও ঠিক আগে কৌণিক ভরবেগের পার্থক্য।

= s' সাপেক্ষে ঘাতবলের ভ্রামক = O

বা, $$\frac{M}{4}\left(2+3e^2\right)\omega' - \frac{M}{4}\left(2-5e^2\right)\omega = 0$$

বা, $$\omega' = \frac{2-5e^2}{2+5e^2}\omega$$

প্রশ্ন 9. e উৎকেন্দ্রতার একটি উপবৃত্তাকার পাত তার একটি নাভিলম্বের সাপেক্ষে পাক খাচ্ছে (spinning), Ω কৌণিক বেগে। সহসা এই আবদ্ধ নাভিলম্বকে মুক্ত করে দিয়ে অন্য নাভিলম্বটিকে আবদ্ধ করা হল। দেখান যে এই নাভিলম্বের সাপেক্ষে পাতটির নতুন কৌণিক বেগ হবে $\frac{1-4e^2}{1+4e^2}\Omega$



ধরা যাক পাতটি (যার ভর M) প্রথমে নাভিলম্ব l-এর সাপেক্ষে ঘুরছে, Ω কৌণিক বেগে। l-কে মুক্ত করে দিয়ে l'-কে বন্ধ করা হল। এখন ধরি, পাতটি l' সাপেক্ষে ω কৌণিক বেগে পাক্ খাবে। Ω ও ω দুটিই একই দিকে নেওয়া হল। l-এর সাপেক্ষে ঘোরার সময় ভরকেন্দ্রের গতিবেগ ছিল $ae\Omega$, এবং l' এর সাপেক্ষে ঘোরার সময় ভরকেন্দ্রের রৈখিক গতিবেগ $ae\omega$, এবং দুটি বিপরীতদিকে।

l'-কে আবদ্ধ করার পরে l' সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ

$$= M\left[\frac{a^2}{4} + a^2e^2\right]\omega = \frac{Ma^2\omega}{4}\left(1+4e^2\right)$$

এবং l'-এর সাপেক্ষে, l'-কে আবদ্ধ করার আগে পাতটির কৌণিক ভরবেগ

= ভরকেন্দ্রে অবস্থিত ও ভরকেন্দ্রের সঙ্গো গতিশীল M ভরের একটি কণার l' সাপেক্ষে কৌণির ভরবেগ + ভরকেন্দ্রগামী l'-এর সমান্তরাল রেখার সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ

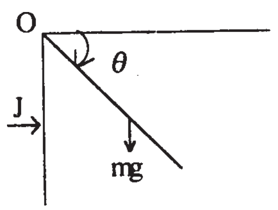
$$= -M(ae\Omega)ae + M\frac{a^2}{4}\Omega$$

$$= \frac{Ma^2}{4}\left(1-4e^2\right)$$

অতএব, ঘাতবল প্রয়োগের জন্য l'-এর সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন = l' সাপেক্ষে ঘাতবলের ভ্রামক = O.

বা, $\frac{Ma^2\omega}{4}\left(1+4e^2\right) - \frac{Ma^2\Omega}{4}\left(1-4e^2\right) = 0$ ইত্যাদি।

প্রশ্ন 10. একটি $2a$ দৈর্ঘ্য ও m ভরের দণ্ড তার একটি প্রান্তের সাপেক্ষে যৌগিক দোলকের মত দুলতে পারে। দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে স্থিরাবস্থায় ছিল, এবং ঐ অবস্থায় থেকে ঘুরতে শুরু করে যখন উল্লম্ব অবস্থায় আসে তখন তার মধ্যবিন্দুতে লম্বভাবে এমন একটি ধাক্কা (blow) দেওয়া হয় যে তার কৌণিক বেগের দিক উলটে বার ও মানে অর্ধেক হয়ে যায়। ঐ ধাক্কার ঘাতটি নির্ণয় করুন।



দণ্ডটি t সময়ে θ কোণে ঘুরলে, O বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে,

$$\frac{1}{2}m\frac{4a^2}{3}\ddot{\theta} = mga\cos\theta$$

সমাকলন করে,

$$\theta^2 = \frac{3g}{2a}\sin\theta$$

$\because\ \theta = 0, \dot{\theta} = 0$

উল্লম্ব অবস্থায় কৌণিক বেগ হবে $\sqrt{\frac{3g}{2a}\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{3g}{2a}$

ধরা যাক ঐ অবস্থায় প্রযুক্ত ধাক্কার ঘাত হল J

$\therefore$ O-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে,

O-সাপেক্ষে ঘাত প্রযুক্ত হবার পরে ও আগে কৌণিক ভরবেগের পার্থক্য = O-সাপেক্ষে ঘাতের ভ্রামক।

$$\Rightarrow m.\frac{4a^2}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{2a}}-\left(-\sqrt{\frac{3g}{2a}}\right)\right)=Ja$$

(যেহেতু ঘাতবল প্রয়োগের ফলে নতুন কৌশিক গতিবেগ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{2a}}$, আগের কৌণিক গতিবেগের বিপরীতে)। এখানে J-এর ভ্রামকের দিকটি ঘড়ির কাটার বিপরীতে, এবং একটিকে ধনাত্মক নেওয়া হয়েছে।

$$\therefore = J = m\sqrt{6ga}$$
