NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

ELECTIVE MATHEMATICS HONOURS

EMT 11

Numerical Analysis

•Numerical Analysis•

Blocks : 1 & 2

প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠ্যক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমত কোনো বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে— যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। ইন্দিরা গান্ধী মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ও রবীন্দ্র মুক্ত বিদ্যালয়ের কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ-কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশকিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

প্রথম পুনর্মুদ্রণ : ডিসেম্বর, 2014

ভারত সরকারের দূরশিক্ষা পর্ষদের বিধি অনুযায়ী এবং অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Council, Government of India

পরিচিতি

বিষয় : গণিতবিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম : পর্যায় : E M T : 11 : 01 & 02

রচনা	**সম্পাদনা**	**সম্পাদনা**
একক 1 – 8	ড. সমরজিৎ কর	ড. কনক কান্তি দাশ
একক 9 – 16	অধ্যাপক সাজাহান আলি মোল্লা	অধ্যাপক অমৃতাভ গুপ্ত

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

E M T – 11

সাংখ্যিক বিশ্লেষণ বিদ্যা
(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়
1
সাংখ্যিক বিশ্লেষণ বিদ্যা

পর্যায়
2
সাংখ্যিক বিশ্লেষণ বিদ্যা

একক 1 ❑ বিভিন্ন প্রকারের ভ্রান্তি ও ভ্রান্তির বীজগণিত

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা

ব্যবহারিক গণিত ও কারিগরি বিদ্যার বিভিন্ন সমস্যাগুলি সমাধানের মূল লক্ষ্য হল বিভিন্ন অপেক্ষক, সমাকল, অন্তরকল ইত্যাদির সাংখিক মান নির্ণয় এবং সমীকরণের সাংখিক সমাধান খুঁজে বার করা। সবসময় বৈশ্লেষিক (analytic) পদ্ধতিতে এদের মান নির্ণয় বা সমাধান সম্ভব হয় না। সাংখিক বিশ্লেষণ হল এমন একটি পদ্ধতি যার মাধ্যমে আসন্ন মান নির্ণয় বা সমাধান করা হয়। আসন্ন সমাধানে ভ্রান্তি থাকবেই। এই অধ্যায়ে বিভিন্ন প্রকার ভ্রান্তির উৎস, প্রকৃতি এবং পরিমাণ নির্ধারণ এবং তাদের পরিমাণ হ্রাসের প্রচেষ্টা করা হয়েছে।

সাংখিক পদ্ধতিতে কোনও গাণিতিক সমস্যা সমাধানের সময় সাধারণত তিনটি কারণে ভ্রান্তির উদ্ভব হয়।

প্রথমত : এটি সরবরাহীকৃত প্রাথমিক উপাত্ত সমূহে (initial data) উপস্থিত থাকতে পারে যা সম্পূর্ণ পদ্ধতিতে আগাগোড়া বর্তমান থাকে। এই ধরনের ভ্রান্তিকে অন্তর্নিহিত ভ্রান্তি বলা হয়।

দ্বিতীয়ত : কোনো সমস্যা সমাধানে একটি অসীম পদ্ধতিকে একটি সসীম পদ্ধতির দ্বারা পরিবর্তিত করার

ফলে একপ্রকার ভ্রান্তির উদ্ভব হয়। এই ধরনের ভ্রান্তিকে খণ্ডিতকরণ ভ্রান্তি (truncation earror) বলা হয়। উদাহরণ স্বরূপ একটি বৈশ্লেষিক অপেক্ষককে তার টেলর শ্রেণীর প্রসারণের (Taylor's series expansion) কিছু সংখ্যক অংকের সাহায্যে বর্ণনা করা। এই ভ্রান্তি অনেকাংশে আমাদের নিয়ন্ত্রণাধীন। এক্ষেত্রে আমরা আমাদের প্রয়োজন অনুযায়ী খণ্ডিতকরণ ভ্রান্তিকে হ্রাস করতে পারব।

তৃতীয়ত : অধিকাংশ পাটিগাণিতিক (যেমন যোগ-বিয়োগ, গুণ-ভাগ) প্রক্রিয়ায় অসীম ভগ্নাংশের কোন সংখ্যার পরিবর্তে একটি সসীম সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। কারণ গণকযন্ত্র কেবলমাত্র সীমিত সংখ্যক অংক নিয়ে গঠিত সংখ্যার পাটিগণিত করতে পারে। এই ধরনের ভ্রান্তিকে আসন্নীকরণ ভ্রান্তি (Rounding off error) বলা হয়। খণ্ডিতকরণ ভ্রান্তি ও আসন্নীকরণ ভ্রান্তি গণনার কারণে উদ্ভব হয় বলে এগুলি গণনামূলক ভ্রান্তি হিসেবে পরিচিত।

অন্তর্নিহিত ভ্রান্তি আমাদের নিয়ন্ত্রণাধীন নয়। আমরা চেষ্টা করব গণনামূলক ভ্রান্তিকে হ্রাস করতে।

1.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনারা যে বিষয়গুলি শিখতে পারবেন সেগুলি হল—

- ভ্রান্তির বিভিন্ন কারণ
- ভ্রান্তির সঠিক পরিমাণ

1.3 নির্ভুল এবং সমীপস্থ সংখ্যা (Exact and Approximate Number)

সাংখিক বিশ্লেষণে দুই প্রকারের সংখ্যা ব্যবহার করা হয়, নির্ভুল এবং সমীপস্থ। যে সংখ্যায় সকল অংক বর্তমান তাকে নির্ভুল বা যথার্থ সংখ্যা বলে, যেমন $2, \frac{2}{5}, \frac{7}{8}, \ldots$ ইত্যাদি। অনেক সংখ্যা আছে যেমন $\sqrt{3}, \pi, e \ldots$ইত্যাদি যেগুলি নির্ভুল কিন্তু সসীম আকারে প্রকাশ করা যায় না। যান্ত্রিক সীমাবদ্ধতার জন্য বিভিন্ন পাটিগাণিতিক প্রক্রিয়ায় কোনো সংখ্যার সকল অংক গ্রহণ করা সম্ভব নাও হতে পারে; সীমিত সংখ্যক গুরুত্বপূর্ণ অংক ব্যবহার করা হয়ে থাকে। কোনো নির্ভুল সংখ্যার ব্যবহৃত আসন্ন মানকে সমীপস্থ সংখ্যা বলা হয়। উদাহরণ স্বরূপ $\sqrt{3}$ এবং π সংখ্যাদুটির সমীপস্থ সংখ্যা হল যথাক্রমে 1.732 এবং 3.142।

একটি যথার্থ সংখ্যার অসংখ্য সমীপস্থ সংখ্যা থাকতে পারে। কোনো সংখ্যার রূপায়ণে যতগুলি অংক ব্যবহার করা হয় তাকে সার্থক অংক (significant figures) বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ 1.231, 4.0421, 13.2157 সংখ্যাগুলি যথাক্রমে 4, 5 এবং 6 সার্থক অংকবিশিষ্ট। 0.00235 সংখ্যাটিও সার্থক অংকবিশিষ্ট কারণ কোনো সংখ্যার বাম দিকে প্রথম অশূন্য (non-zero) অংকের বামদিকে শূন্য অসার্থক অংক।

1.4 আসন্নীকরণ ভ্রান্তি (Rounding-off Error)

কোনো সংখ্যাকে n সংখ্যক সার্থক অংকে আসন্নীকরণের সাধারণ নিয়মগুলি হল :

(i) n তম স্থানের ডানদিকের সমস্ত সংখ্যাগুলি বাদ দিতে হবে, যদি বাদ দেওয়া সংখ্যাটি ½ এর থেকে কম হয় n তম স্থানের সংখ্যাটিকে অপরিবর্তিত রাখতে হবে।

(ii) n তম স্থানের সংখ্যাটির সাথে 1 যোগ করতে হবে যদি বাদ দেওয়া সংখ্যাটি ½ এর থেকে বেশী হয়।

(iii) যদি বাদ দেওয়া সংখ্যাটি ½ এর সমান হয় তবে—

(a) n তম স্থানের সংখ্যাটি অপরিবর্তিত থাকবে যদি সেটা জোড় সংখ্যা হয়।

(b) n তম স্থানের সংখ্যাটির সাথে 1 যোগ করতে হবে যদি তা বিজোড় সংখ্যা হয়।

1.5 সার্থক ভ্রান্তি (Significant Error)

সার্থক সংখ্যা হ্রাসের ফলে এই ধরনের ভ্রান্তির উদ্ভব হয় বলে একে সার্থক ভ্রান্তি বলা হয়। এটি একটি গণনামূলক ভ্রান্তি। সাধারণত দুটি কারণের জন্য এই ভ্রান্তি ঘটে থাকে :

(a) দুইটি প্রায় সমান রাশির বিয়োগ করলে, এবং

(b) ভাগের সময়।

উদাহরণস্বরূপ : $ax^2+bx+c=0$ সমীকরনের দুটি বীজ হয়

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ ও } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

যখন $b^2 >> 4ac$ তখন $\sqrt{b^2-4ac}$ এর মান b এর খুব কাছাকাছি হয়।

এখন, $b>0$ হলে x_1 বীজে সার্থক ভ্রান্তির উদ্ভব হতে পারে। এক্ষেত্রে x_1 নিম্নলিখিত উপায়ে পুনঃ সূত্রায়িত করা হয় :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

আবার যদি, $b<0$ হয়, একইরকম ভাবে x_2 কেও পুনঃসূত্রায়িত করতে হয়।

1.6 ভ্রান্তি: পরম, আপেক্ষিক ও শতকরা ভ্রান্তি (Errors : Absolute, Relative and Percentage)

কোনো রাশির নির্ভুল মান এবং সমীপস্থ মান দুটির পার্থক্যকে ঐ রাশির পরম ভ্রান্তি বলা হয়।

কোনো রাশির পরম ভ্রান্তিকে তার নির্ভুল মান দ্বারা ভাগ করলে তাকে আপেক্ষিক ভ্রান্তি বলা হয়।

আপেক্ষিক ভ্রান্তির শতকরা হার হল 100 x আপেক্ষিক ভ্রান্তি

যদি কোনো রাশির নির্ভুল মান V_T এবং সমীপস্থ মান V_A হয় তখন

(i) পরম ভ্রান্তি $E_a = |V_T - V_A|$

(ii) আপেক্ষিক ভ্রান্তি $E_r = \frac{E_a}{V_T} = \frac{|V_T - V_A|}{V_T}$

(iii) আপেক্ষিক ভ্রান্তির শতকরা হার $E_\rho = E_r \times 100 = \frac{|V_T - V_A|}{V_T} \times 100$

মন্তব্য : (i) আপেক্ষিক ভ্রান্তির মাত্রা শূন্য; এটি পরিমাপে ব্যবহৃত এককের ওপর নির্ভর করে না।

(ii) কোনো পরিমাপন বা গণনাকার্যে পরমভ্রান্তি অপেক্ষা আপেক্ষিক ভ্রান্তির মান অধিকতর গুরুত্বপূর্ণ; কারণ আপেক্ষিক ভ্রান্তি যত কম হবে পরিমাপটি ততই নির্ভুল হবে।

(iii) সাংখিক বিশ্লেষণে কোনো সংখ্যাকে n সার্থক অংকে সংশোধিত করলে পরম ভ্রান্তি n তম স্থানে ½ এর থেকে কম অথবা সমান হবে। অর্থাৎ, একটি সংখ্যাকে m ভগ্নাংশ অংকে আসন্নীকরণ করলে পরমভ্রান্তি $E_a \le \frac{1}{2}.10^{-m}$ ... (1.5.1)

সত্যপ্রতিপাদন (verification) : ধরা যাক 21.34265 সংখ্যাটি 5 সার্থক অংকে সংশোধিত করা হয়েছে। এক্ষেত্রে পরমভ্রান্তি $E_a = |21.34265 - 21.343| = .00035$

(1.5.1) সমীকরণ থেকে $E_a \le \frac{1}{2} \times 10^{-3} = .0005$

1.7 উপপাদ্য : সংশোধিত সার্থক অংক এবং আপেক্ষিক ভ্রান্তির সম্পর্ক

যদি কোনো সংখ্যাকে n সার্থক অংকে আসন্নীকৃত করা হয় তাহলে আপেক্ষিক ভ্রান্তি $\frac{1}{K \times 10^{n-1}}$ এর থেকে কম হবে।

অর্থাৎ, $E_r < \frac{1}{K \times 10^{n-1}}$ $(n \neq 1)$

যেখনে K হল সংখ্যাটির প্রথম সার্থক অংক।

প্রমাণ : ধরি, সংখ্যাটির প্রকৃতমান N এবং সংখ্যাটিকে আসন্নীত করলে n সংখ্যাক সার্থক অংক বিশিষ্ট সংখ্যায় পরিণত হয় যার মধ্যে দশমিকের পরে m সংখ্যক অংক থাকে।

প্রথমত : $m<n$ হলে, সংখ্যাটির অখণ্ড অংশের অংক সংখ্যা হয় n-m।

এখন, যেহেতু N এর প্রথম সার্থক অংক K, সুতরাং

$E_a \leq ½ \times 10^{-m}$ এবং $N \geq K \times 10^{n-m-1} - \frac{1}{2} \times 10^{-m}$

$$\therefore E_r \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-m}}{K \times 10^{n-m-1} - \frac{1}{2} \times 10^{-m}} = \frac{1}{2K^{n-1} - 1}$$

আবার, যেহেতু $2K \times 10^{n-1} - 1 > K \times 10^{n-1}$, সুতরাং $K > 1$ এবং $n > 1$ হলে $E_r < \frac{1}{K \times 10^{n-1}}$।

দ্বিতীয়ত : $m = n$ হলে, N একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ হয় এবং K হয় দশমিকের পরবর্তী প্রথম সংখ্যা। সুতরাং,

$E_a \leq \frac{1}{2} \times 10^{-m}$ এবং $N \geq K \times 10^{-1} - \frac{1}{2} \times 10^{-m}$

$$\therefore E_r \leq \frac{\left(\frac{1}{2} \times 10^{-m}\right)}{\left(K \times 10^{-1} - \frac{1}{2} \times 10^{-m}\right)} = \frac{1}{\left(2K \times 10^{m-1} - 1\right)} = \frac{1}{2K \times 10^{n-1} - 1}$$

অর্থাৎ, $E_r < \frac{1}{K \times 10^{n-1}}$

তৃতীয়ত : $m>n$ হলে দশমিক পরবর্তী $(m-n+1)$ তম স্থানে K অবস্থিত হবে। সুতরাং,

$E_a \leq \frac{1}{2} \times 10^{-m}$ এবং $N \geq K \times 10^{-(m-n+1)} - \frac{1}{2} \times 10^{-m}$

$$\therefore E_r \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-m}}{K \times 10^{-(m-n+1)} - \frac{1}{2} \times 10^{-m}} = \frac{1}{2K \times 10^{n-1} - 1} < \frac{1}{K \times 10^{n-1}}$$

বা, $E_r < \frac{1}{K \times 10^{n-1}}$

সুতরাং, সমস্ত ক্ষেত্রেই $E_r < \dfrac{1}{K \times 10^{n-1}}$ (প্রমাণিত হল)

উদাহরণ :

মনেকরি, $N = 542.76293$ সংখ্যাটি অষ্টম সার্থক অংক পর্যন্ত সঠিক। এক্ষেত্রে $K = 5$ এবং $n = 8$ অতএব, $E_a \le 0.00001 \times ½ = 0.000005$

এবং আপেক্ষিক ভ্রান্তি $E_r \le \dfrac{0.000005}{542.76293 - 0.000005} = \dfrac{5}{54276293 - 5}$

$$= \frac{1}{2 \times 54276293 - 1}$$

$$< \frac{1}{2 \times 5 \times 10^7}$$

$$< \frac{1}{5 \times 10^7}$$

সুতরাং উপরোক্ত উপপাদ্যটির যথার্থতা প্রমাণিত হল।

1.8 ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র

ধরা যাক $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ একটি বৈশ্লেষিক (analytic) অপেক্ষক, যেখানে $x_1, x_2, ..., x_n$ হল n সংখ্যক স্বাধীন চলক।

চলকগুলির আসন্নমানে পরম ভ্রান্তির পরিমাণ যথাক্রমে $|\Delta x_1|, |\Delta x_2|, . . ., |\Delta x_n|$, এখানে আমাদের লক্ষ্য হল পরম ভ্রান্তি $|\Delta u|$ এবং আপেক্ষিক ভ্রান্তি $\left|\dfrac{\Delta u}{u}\right|$ নির্ণয় করা, চলকগুলির পরম ভ্রান্তির সাহায্যে।

এখন, $|\Delta u| = |\ f\ (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, . . ., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, . . ., x_n)\ |$

$$= \Big| f(x_1, x_2, . . ., x_n) + (\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + . . . + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}) f$$

$$+ (\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + . . . + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n})^2 f + . . . - f(x_1, x_2, . . ., x_n) \Big|$$

যেহেতু Δx_i $(i = 1, 2, . . ., n)$ এর মানগুলো এত ক্ষুদ্র যে তাদের বর্গ ও গুণফলগুলিকে অগ্রাহ্য করা

$$\therefore\ |\Delta u| = \left|\Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f}{\Delta x_2} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right|$$

$$\leq |\Delta x_1| \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| + |\Delta x_2| \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| + \ldots + |\Delta x_n| \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|$$

অর্থাৎ, $|\Delta u| \leq \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \quad \ldots (1.7.1)$

সুতরাং, আপেক্ষিক ভ্রান্তির মান হবে

$$E_r = \left|\frac{\Delta u}{u}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\Delta x_i}{u}\right| \quad \ldots (1.7.2)$$

মন্তব্য :

(i) যদি, $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ হয় তাহলে পরমভ্রান্তি

হবে $|\Delta u| \leq \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1;\ i = 1, 2, \ldots, n\right]$

সুতরাং, n সংখ্যক রাশির যোগফলে পরমভ্রান্তির মান প্রত্যেকটি রাশির পরমভ্রান্তির যোগফলের চেয়ে কম বা সমান।

(ii) যদি, $u = x_1 - x_2$ হয় তাহলে পরমভ্রান্তি হবে

$$|\Delta u| = |(x_1+\Delta x_1) - (x_1+\Delta x_2) - (x_1-x_2)| = |\Delta x_1 - \Delta x_2| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

সুতরাং, দুটি সংখ্যার বিয়োগফলে সর্বোচ্চ ভ্রান্তির পরিমাণ সর্বদা তাদের পরমভ্রান্তির যোগফলের চেয়ে কম বা সমান।

(iii) যদি, u, n সংখ্যক আসন্ন চলকের গুণফল হয় অর্থাৎ $u = x_1\ x_2 \ldots x_n$

$\therefore \ln u = \ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n$

সুতরাং আপেক্ষিক ভ্রান্তি $E_r = \left|\frac{\Delta u}{u}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial x_i}{u}\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta x_i}{x_i}\right|,\ x_i \neq 0$

$\left[\frac{1}{u}\ \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i},\ i = 1, 2, \ldots, n\right]$ এবং পরমভ্রান্তি $E_a = E_r \times u$

সুতরাং, n সংখ্যক রাশির (কোনোটাই শূন্য নয়) গুণফলে আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরম মান, প্রত্যেক রাশিতে আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরম মান, প্রত্যেক রাশিতে আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরমমানের যোগফল অপেক্ষা কম বা সমান হবে।

(a) যদি, $u = x^m$, $m>1$ হয় তাহলে,

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right| = m\left|\frac{\Delta u}{u}\right|$$

সুতরাং, কোনো রাশির m ঘাতে আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরমমান সেই রাশির আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরমমানের m গুণ।

(b) $u = x^{\frac{1}{m}}$ $(m>1)$ হলে

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right| = \frac{1}{m}\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$$

সুতরাং কোনো রাশির m তম বীজে আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরমমান সেই রাশির আপেক্ষিক ভ্রান্তির m ভাগের সমান।

(iv) যদি $u = {}^{x_1}/_{x_2}$ হয় তাহলে

$$ln\ u = ln\ x_1 - ln\ x_2 \text{ বা } \frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x_1}{x_1} - \frac{\Delta x_2}{x_2}$$

$$\therefore E_r = \left|\frac{\Delta u}{u}\right| = \left|\frac{\Delta x_1}{x_1} - \frac{\Delta x_2}{x_2}\right| \leq \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right|$$

সুতরাং, দুটি রাশির ভাগের আপেক্ষিক ভ্রান্তি তাদের আপেক্ষিক ভ্রান্তির যোগফলের চেয়ে কম বা সমান।

1.9 উদাহরণমালা

1. দুটি সংখ্যার আসন্ন মান 732.1 এবং 3.7583 দেওয়া আছে। এদের যোগফল নির্ণয় করুন এবং কয়টি অঙ্ক যথার্থ নির্দেশ করুন।

উত্তর : যেহেতু প্রথম সংখ্যাটিতে দশমিক বিন্দুর পর মাত্র একটি অঙ্ক যথার্থ, সুতরাং, যোগফলের মান দশমিক বিন্দুর পর একটিমাত্র অঙ্কের বেশি যথার্থ হবে না। যোগ করার সময় দ্বিতীয় সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর পর প্রথম অংক পর্যন্ত রাখতে হবে।

অর্থাৎ,

$3.7583 \simeq 3.8$

নির্ণেয় যোগফল $= 732.1 + 3.8 = 735.9$

2. দুটি সংখ্যার আসন্ন মান 57.4662 এবং 786.85 দেওয়া আছে, দ্বিতীয় সংখ্যা থেকে প্রথমটির বিয়োগফল নির্ণয় করুন।

উত্তর : প্রথম সংখ্যাটির দুই দশমিক আসন্নমান হল 57.47।

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $= 786.85 - 57.47 = 729.38$

3. নিচের সংখ্যাগুলিকে 4 দশমিক অংকে আসন্নীকরণ করুন।

(i) 2.46289 (ii) 0.46999 (iii) 0.0035869 (iv) 1.46294

উত্তর : (i) 2.4629 (ii) 0.4700 (iii) 0.0036 (iv) 1.4629

4. নিচের সংখ্যাগুলিকে 4 সার্থক অংকে (Significant figures) আসন্নীকরণ করুন—

(i) 5.2056 (ii) 0.0056812 (iii) 1.9998 (iv) 1.03578

উত্তর : (i) 5.206 (ii) 0.005681 (iii) 2.000 (iv) 1.036

5. $\frac{2}{3}$ সংখ্যাটিকে 4 সার্থক অংক সংখ্যায় সংশোধিত করুন এবং পরম ভ্রান্তি, আপেক্ষিক ভ্রান্তির মান বের করুন।

উত্তর : পরম ভ্রান্তি, $E_a = |V_T - \dot{V}_A| = \left|\frac{2}{3} - 0.6667\right| = 0.00033$

আপেক্ষিক ভ্রান্তি $E_r = \frac{E_a}{V_T} = \frac{0.00033}{\frac{2}{3}} = 0.0000495 \simeq 0.00005$

6. একটি লম্ব বৃত্তীয় বেলনের উচ্চতা 25.423 সে.মি. এবং ব্যাসার্ধ 0.735 সে.মি. $\pi = 3.1416$ দেওয়া আছে। প্রদত্ত মানগুলি শেষ অংক পর্যন্ত যথার্থ হলে বেলনের আয়তন নির্ণয় করুন এবং ঐ মানে পরম ভ্রান্তি ও আপেক্ষিক ভ্রান্তি নির্ধারণ করুন।

সমাধান : আয়তন V হলে, $V = \pi r^2 h$

যেখানে r = ব্যাসার্ধ, h = উচ্চতা,

দেওয়া আছে $r = 0.735$ সে.মি, $h = 25.423$ সে.মি, $\pi = 3.1416$ এবং মানগুলি শেষ অংক পর্যন্ত যথার্থ। সুতরাং, উপাত্তগুলিতে পরমভ্রান্তির সর্ব্বোচ্চ মান হবে $\Delta r = 0.0005$ সেমি, $\Delta h = 0.0005$ সেমি এবং $\Delta\pi = 0.00005$।

V এর আসন্ন মান হবে

$V^* = 3.1416 \times (0.735)^2 \times 25.423 = 43.15$ ঘন সেমি।

v কে π, r এবং h এর অপেক্ষক ধরলে, v তে ভ্রান্তির পরিমাণ হবে

$$\Delta v = \left(\frac{\partial v}{\partial \pi}\right)\Delta\pi + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\Delta r + \left(\frac{\partial v}{\partial h}\right)\Delta h$$

$$= (r^2h)\Delta\pi + (2\pi rh)\,\Delta r + (\pi r^2)\,\Delta h$$

$$\therefore |\Delta v| \le r^2h\,|\Delta\pi| + 2\pi rh\,|\Delta r| + \pi r^2\,|\Delta h|$$

$$= 0.00014 + 0.058 + 0.00085$$

$$\simeq 0.060$$

এবং আপেক্ষিক ভ্রান্তি $\left|\frac{\Delta v}{v}\right| = \frac{0.060}{43.15 + 0.06} \simeq 0.0014$

1.10 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) $\sqrt{20}$-এর মান নির্ণয়ে কতঘর দশমিক স্থান পর্যন্ত নিতে হবে যাতে ভ্রান্তির পরিমাণ 0.1%-এর বেশী না হয়?

(**সংকেত** : $E_r < \dfrac{1}{K \times 10^{n-1}}$ সূত্র প্রযোজ্য)

[**উত্তর** : 4]

(2) 27.8793-কে এমনভাবে আসন্নীকৃত করুন যাতে 4 ঘর পর্যন্ত সার্থক অঙ্ক (Significant figures) সঠিক থাকে।

(**সংকেত** : নিজে করুন) [**উত্তর** : 27.88]

(3) 4 ঘর পর্যন্ত সার্থক অঙ্ক রেখে 0.00243468 কে আসন্নীকৃত করুন।

(**সংকেত** : সমস্যা 2 দ্রষ্টব্য) [**উত্তর** : 0.002435]

(4) আসন্নীকৃত সংখ্যাসমূহ 0.348, 0.1834, 345.4, 235.2, 9.27, 11.75, 0.0849, 0.0214, 0.000354 যোগফল প্রত্যেকের সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত ধরে নির্ণয় করুন।

(**সংকেত** : সমস্যা 2 ও 3 দ্রষ্টব্য) [**উত্তর** : 602.25]

(5) আসন্নীকৃত রাশি 11.2461 এর পরম ভ্রান্তির মান 0.25×10^{-2} হলে এটির সার্থক অঙ্ক সংখ্যা কত?

(**সংকেত** : পরমভ্রান্তি $= 0.25 \times 10^{-2} = 0.0025\ldots$) [**উত্তর** : 4]

(6) তিন অঙ্ক পর্যন্ত $\sqrt{2.01} - \sqrt{2}$ এর সঠিক মান নির্ণয় করুন।

(**সংকেত** : $\sqrt{2.01} \approx 1.41774469\ldots$)
$\sqrt{2} \approx 1.41421356\ldots$

[**উত্তর** : 3.53×10^{-3}]

(7) x=2.11 এবং y=4.15-এ যথাক্রমে পরমভ্রান্তির পরিমাণ $\Delta x=0.005$ ও $\Delta y=0.001$ হলে, x+y এর মান নির্ণয়ে আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরিমাণ কত?

(**সংকেত** : $E_r = \dfrac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$)

[**উত্তর** : 0.001 (প্রায়)]

(8) দেওয়া আছে $u = \dfrac{5xy^2}{z^2}$; Δx, Δy, Δz যথাক্রমে x, y, z এর ভ্রান্তিসমূহ এবং x=y=z=1 ও $\Delta x=\Delta y=\Delta z=1$ হলে সর্বোচ্চ আপেক্ষিক ভ্রান্তির পরিমাণ (u-এর) কত?

(সংকেত : $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$ সূত্র প্রযোজ্য)

[উত্তর : $(E_r)_{max} = 0.006$]

1.11 সারাংশ

এই অধ্যায়ে গণনা প্রক্রিয়াতে নির্ভুল মান নির্ণয়ের বিভিন্ন অসুবিধার কারণে যে সমীপস্থ মান পাওয়া যায় সেই বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। নির্ভুল মানকে সমীপস্থ মান ধরে নিলে অবশ্যই কিছু ভ্রান্তি করা হয়। এই ভ্রান্তি কত রকম ভাবে চিন্তা করা হয় সেই বিষয় উল্লেখিত হয়েছে। সাধারণভাবে ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ণয়ের সাধারণ সূত্রটি উল্লেখ করা হয়েছে এবং তার প্রয়োগটি ব্যাখ্যা করা হয়েছে। ভ্রান্তি কত কমানো যেতে পারে বা সমীপস্থ মানকে আসল মানের ধরে নিলে কিভাবে ভ্রান্তি সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা পাবো তা ব্যাখ্যা করা হয়েছে। পরিশেষে কয়েকটি উদাহরণ-এর সাহায্যে বিষয়টিকে সহজবোধ্য করা হয়েছে।

1.12 সহায়ক গ্রন্থাবলি

(1) F.B. Hildebrand : Introduction to Numerical Analysis (Tata Migraw Hill, 1982)
(2) G. Shanker Rao : Numerical Analysis (New Age International, 1997)

একক 2 □ বিভিন্ন অন্তর (Differences), বিভাজিত অন্তর (Divided differences)

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

ধরা যাক, $y=f(x)$, $[a,b]$ অন্তরালে একটি অপেক্ষক যেখানে $f(x)$ এর গাণিতিক আকার বিশদভাবে (explicitly) জানা আছে। তখন x এর যেকোনো মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা যায়। কিন্তু, যদি $f(x)$-এর গাণিতিক সূত্র অজানা অথবা জটিল হয় তাহলেও আমরা x এর কোনো মানের জন্য $f(x)$ এর আসন্নমান সসীম অন্তরের সাহায্যে নির্ণয় করতে পারি।

2.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ার পরে আপনি যেগুলি পারবেন সেগুলি হল—

● তালিকার (সারণী) সাহায্যে যে কোনো আপেক্ষকের যে কোনো বিন্দুতে মান নির্ণয় করতে পারবেন।

● অগ্রান্তর (Forward difference) এবং পশ্চাদান্তর (Backward Difference) মধ্যে সম্পর্কের সাহায্যে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

2.3 অগ্রান্তর (Forward Difference)

ধরা যাক, $y=f(x)$, $[a,b]$ অন্তরালে একটি অপেক্ষক। এই অন্তরালে $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ হল $(n+1)$ সংখ্যক স্বতন্ত্র বিন্দু, ঐ বিন্দুগুলিতে $f(x)$ অপেক্ষককের মানগুলি জানা আছে এবং মানগুলি হল

$$
\begin{aligned}
y_0 &= f(x_0) \\
y_1 &= f(x_1) = f(x_0+h) \\
y_2 &= f(x_2) = f(x_0+2h) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= f(x_n) = f(x_0+nh)
\end{aligned}
$$

[এক্ষেত্রে বিন্দুগুলিকে সমদূরবর্তী ধরা হয়েছে যাদের সাধারণ অন্তর h]

অথবা

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h) - f(x_0) = y_1 - y_0 \\
&f(x_0+2h) - f(x_0+h) = y_2 - y_1 \\
&\ldots \\
&f(x_0+nh) - f(x_0+\overline{n-1}h) = y_n - y_1
\end{aligned}
$$

এই অন্তরগুলিকে $y=f(x)$ এর প্রথম অগ্রান্তর (first forward difference) বলা হয় এবং $\Delta y_0, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_{n-1}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। Δকে অগ্রান্তর প্রকারক (forward deffirence operator) বলা হয়। একইরকম ভাবে নিচের অন্তরগুলিকে

$$
\begin{aligned}
&\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0 \\
&\Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\Delta^2 y_{n-1} = \Delta(\Delta y_{n-1}) = \Delta y_n - \Delta y_{n-1} = y_n
\end{aligned}
$$

দ্বিতীয় অগ্রান্তর বলা হয়।

সাধারণভাবে r-তম অগ্রান্তরগুলি হল :

$$
\begin{aligned}
&\Delta^r y_0 = \Delta^{r-1} y_1 - \Delta^{r-1} y_0 \\
&\Delta^r y_1 = \Delta^{r-1} y_2 - \Delta^{r-1} y_1 \\
&\ldots \\
&\Delta^r y_{n-1} = \Delta^{r-1} y_n - \Delta^{r-1} y_{n-1}
\end{aligned}
$$

নিচের সারণীতে অগ্রান্তর নির্ণয়ের পদ্ধতি দেখানো হল :

সারণী নং 2.1 **অগ্রান্তর সারণী**

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		y_1-y_0				
x_1	y_1		$\Delta y_1-\Delta y_0$			
		y_2-y_1		$\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta y_2-\Delta y_1$		$\Delta^3 y_1-\Delta^3 y_0$	
		y_3-y_2		$\Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_1-\Delta^4 y_0$
x_3	y_3		$\Delta y_3-\Delta y_2$		$\Delta^3 y_2-\Delta^3 y_1$	
		y_4-y_3		$\Delta^2 y_3-\Delta^2 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta y_4-\Delta y_3$			
		y_5-y_4				
x_5	y_5					

পর্যবেক্ষণ 1. যেকোনো উর্দ্ধক্রমের অগ্রান্তর y_i এর দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1-\Delta y_0 = y_2-y_1 - (y_1-y_0) = y_2-2y_1+y_0$$
$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0 = y_3-2y_1+y_1 - (y_2-2y_1+y_0) = y_3-3y_2+3y_1-y_0$$
$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1-\Delta^3 y_0 = y_4-3y_3+3y_2-y_1 - (y_3-3y_2+3y_1-y_0) = y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0$$

এখানে ডানপক্ষের সহগগুলি Binomial coefficient

সুতরাং, সাধারণভাবে আমরা পাই

$$\Delta^n y_0 = y_n - {}^n c_1\, y_{n-1} + {}^n c_2\, y_{n-2} - \ldots + (-1)^n y_0$$

উদাহরণ 1. প্রদত্ত সারণী ব্যবহার করে অগ্রান্তর সারণী তৈরী করুন।

x :	0	1	2	3	4	5
f(x) :	12	15	20	27	39	52

উত্তর : অগ্রান্তর সারণীটি হল :

x	y = f(x)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	12					
		3				
1	15		2			
		5		0		
2	20		2		3	
		7		3		–10
3	27		5		–7	
		12		–4		
4	39		1			
		13				
5	52					

উপরের সারণী থেকে আমরা সহজেই বলতে পারি

$\Delta^2 f(3) = 1$, $\Delta^3 f(2) = -4$, $\Delta^4 f(0) = 3$ $\Delta f(4) = 1$ ইত্যাদি।

2.4 পশ্চাদান্তর (Backward Difference)

যখন y_1-y_0, y_2-y_1, . . ., y_n-y_{n-1} এই অন্তরগুলিকে ∇y_1, ∇y_2, . . .∇y_n দ্বারা চিহ্নিত করা হয় তখন অন্তরগুলিকে $y = f(x)$ অপেক্ষকের প্রথম পশ্চাদান্তর বলা হয়। ∇ কে পশ্চাদান্তর প্রকারক (Backward difference operator) বলা হয়। একইরকমভাবে উচ্চক্রমের পশ্চাদান্তরগুলি হল—

$\nabla y_r = y_r - y_{r-1}$, $\nabla^2 y_r = \nabla y_r - \nabla y_{r-1}$, $\nabla^3 y_r = \nabla^2 y_r - \nabla^2 y_{r-1}$ ইত্যাদি—

নিচের সারণীতে পশ্চাদান্তর নির্ণয়ের পদ্ধতি দেখানো হল :

সারণী নং 2.2 **পশ্চাদান্তর সারণী**

x	y = f(x)	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
x_0	y_0					
		y_1-y_0				
x_1	y_1		$\nabla y_2-\nabla y_1$			
		y_2-y_1		$\nabla^2 y_3-\nabla^2 y_2$		
x_2	y_2		$\nabla y_3-\nabla y_2$		$\nabla^3 y_4-\nabla^3 y_3$	
		y_3-y_2		$\nabla^2 y_4-\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_5-\nabla^4 y_4$
x_3	y_3		$\nabla y_4-\nabla y_3$		$\nabla^3 y_5-\nabla^3 y_4$	
		y_4-y_3		$\nabla^2 y_5-\nabla^2 y_4$		
x_4	y_4		$\nabla y_5-\nabla y_4$			
		y_5-y_4				
x_5	y_5					

উদাহরণ 2. প্রদত্ত সারণী ব্যবহার করে পশ্চাদান্তর সারণী তৈরী করুন

x :	0	1	2	3	4
f(x) :	2	3	12	35	78

উত্তর :

x	y = f(x)	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
0	2			
		1		
1	3		8	
		9		6
2	12		14	
		23		6
3	35		20	
		43		
4	78			

উপরের সারণী থেকে আমরা সহজেই বলতে পারি

$\nabla^2 f(4) = 20,\quad \nabla^2 f(2) = 8,\quad \nabla^3 f(3) = 6.$ . . ইত্যাদি

2.5 অন্য কয়েকটি প্রকারক (Other Difference Operators)

A. সরণ প্রকারক (Shift Operator)

$y = f(x)$ অপেক্ষকের জন্য সরন প্রকারক E এর সংজ্ঞা হল :

$Ef(x) = f(x+h)$ . . . (2.4.1)

আমরা জানি $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$= Ef(x) - f(x)$

বা, $(\Delta+1)\ f(x) = Ef(x)$

$\therefore\ \Delta+1 = E$ অথবা $\Delta = E-1$ . . . (2.4.2)

সমীকরণ (2.4.2) থেকে দেখা যায় অগ্রান্তর এবং সরণ প্রকারক পরস্পর সম্পর্কযুক্ত।

অনুরূপভাবে

$\nabla\ f(x+h) = f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$

বা, $\nabla Ef(x) = \Delta f(x) = (E-1)\ f(x)$

$\therefore\ \nabla E = E-1 = \Delta$

আবার, $E\ \nabla f(x) = E\ \{f(x) - f(x-h)\} = f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$

$\therefore\ E\nabla = \Delta = \nabla E$

সুতরাং, E এবং ∇ প্রকারক দুটি বিনিময়যোগ্য।

(2.4.1) সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$E^2f(x) = E\,\{E\,(f(x))\} = Ef(x+h) = f(x+2h)$

এবং সাধারণভাবে r একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে

$E^rf(x) = f(x+rh)$. . . (2.4.3)

$r=-1$ ধরলে পাওয়া যায়

$E^{-1}f(x) = f(x-h)$. . . . (2.4.4)

(2.4.1) এবং (2.4.4) নং সূত্রদ্বয় থেকে পাওয়া যায়

$E\,(E^{-1}f) = Ef(x-h) = f(x)$

অর্থাৎ $EE^{-1} = 1$ সেইকারণে, E^{-1} কে E প্রকারকের বিপরীত প্রকারক বলা হয়।

B. মধ্যান্তর প্রকারক (Central difference operator) :

মধ্যান্তর প্রকারকের সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

$$\delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

$$= \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right) f(x)$$

সুতরাং, $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$

$$\left.\begin{aligned}
\text{আবার,}\quad & E^{\frac{1}{2}}\delta = E^{\frac{1}{2}}\left(E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}}\right) = E-1 = \Delta \\
& E^{\frac{1}{2}}\delta = E^{-\frac{1}{2}}\left(E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(1-E^{-1}\right) = \nabla \\
& \therefore\ \Delta E^{-\frac{1}{2}} = E^{-\frac{1}{2}}\Delta = \delta
\end{aligned}\right\} \quad . . . (2.4.6)$$

$$\nabla E^{\frac{1}{2}} = E^{\frac{1}{2}}\nabla = \delta$$

সুতরাং, r-তম মধ্যান্তরের মান হবে

$$\delta^r f(x) = \left(\Delta E^{-\frac{1}{2}}\right)^r f(x) = \Delta^r E^{-\frac{r}{2}} f(x)$$

$$= \Delta^r f\left(x-\frac{r}{2}h\right)$$

অর্থাৎ, $\delta^r y_i = \Delta^r y_{i-\frac{r}{2}}$ . . . (2.4.7)

এবং $\Delta^r f(x) = \delta^r E^{\frac{r}{2}} f(x) = \delta^r f\left(x+\frac{r}{2}h\right)$

বা, $\Delta^k y_i = \delta^k y_{\frac{i+k}{2}}$ . . . (2.4.8)

নিচের সারণীতে মধ্যান্তর নির্ণয়ের পদ্ধতি দেখানো হল :

সারণী নং 2.3 : **মধ্যান্তর সারণী**

x	y = f(x)	δf(x)	$\delta^2 f(x)$	$\delta^3 f(x)$	$\delta^4 f(x)$	$\delta^5 f(x)$
x_0	y_0					
		$\delta y_{1/2}$				
x_1	y_1		$\delta^2 y_1$			
		$\delta y_{\frac{3}{2}}$		$\delta^3 y_{\frac{3}{2}}$		
x_2	y_2		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_2$	
		$\delta y_{5/2}$		$\delta^3 y_{5/2}$		$\delta^5 y_{5/2}$
x_3	y_3		$\delta^2 y_3$		$\delta^4 y_3$	
		$\delta y_{7/2}$		$\delta^3 y_{7/2}$		
x_4	y_4		$\delta^2 y_4$			
		$\delta y_{9/2}$				
x_5	y_5					

C. গড় প্রকারক (Averaging Operator)

গড় প্রকারক μ এর সংজ্ঞা হল

$$\mu(x) = \frac{1}{2}\left\{f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}}+E^{-\frac{1}{2}}\right) f(x) \quad \ldots (2.4.9)$$

সুতরাং, $\mu = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}}+E^{-\frac{1}{2}}\right)$ . . . (2.4.10)

পর্যবেক্ষণ 2. In the difference calculas E is regarded as the fundamental operator and Δ, ∇, δ, μ can be expressed in terms of E.

সারণী নং 2.4 : বিভিন্ন প্রকারকের সম্পর্ক :

	E	Δ	∇
E	E	$\Delta+1$	$(1-\nabla)^{-1}$
Δ	$E-1$	Δ	$(1-\nabla)^{-1}-1$
∇	$1-E^{-1}$	$1-(1+\Delta)^{-1}$	∇
δ	$E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}}$	$\Delta\,(1+\Delta)^{-\frac{1}{2}}$	$\nabla\,(1-\nabla)^{-\frac{1}{2}}$
μ	$\frac{1}{2}(E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}})$	$\left(1+\frac{\Delta}{2}\right)(1+\Delta)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(1-\frac{\nabla}{2}\right)(1-\nabla)^{-\frac{1}{2}}$

2.6 অন্তরের কয়েকটি ধর্ম (Some Properties of Differences)

এখানে অন্তরের কয়েকটি বিশেষ ধর্ম নিয়ে আলোচনা করা হবে। যদিও, ধর্মগুলি অগ্র, পশ্চাৎ এবং মধ্যম এই তিন ধরনের অন্তরের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, আমরা প্রধানত অগ্রান্তর নিয়ে আলোচনা করব।

1. ধ্রুবক অপেক্ষকের অন্তর সর্বদা শূন্য।

প্রমাণ : ধরা যাক $f(x) = c$ (ধ্রুবক)

$$\therefore \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$
$$= c-c = 0$$

2. $f(x)$ এবং $g(x)$ দুটি অপেক্ষক হলে, তাদের যোগফল (বিয়োগফল) গুণফল এবং ভাগফলের প্রথম অগ্রান্তরের মান হবে যথাক্রমে—

(i) $\Delta(f(x) \pm g(x)) = \Delta f(x) \pm \Delta g(x)$

(ii) $\Delta(f(x)\, g(x)) = (\Delta f).g + f.(\Delta g) + (\Delta f).(\Delta g)$

(iii) $\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\Delta f - f\Delta g}{(g+\Delta g)g}$

এখানে Δf এবং Δg যথাক্রমে $f(x)$ এবং $g(x)$ এর অগ্রান্তর সূচিত করছে।

প্রমাণ : (i) ধরি, $F(x) = (f(x) \pm g(x))$

$$\therefore \Delta F(x) = F(x+h) - F(x)$$

$= f(x+h) \pm g(x+h) - \{f(x) \pm g(x)\}$
$= \{f(x+h) - f(x)\} \pm \{g(x+h) - g(x)\}$
$= \Delta f(x) \pm \Delta g(x)$

সুতরাং $\Delta[\alpha f(x) \pm \beta g(x)] = \alpha\Delta f(x) \pm \beta\Delta g(x)$

যেখানে α এবং β দুটি ধ্রুবক।

(ii) $\Delta(f(x)\, g(x)) = f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)$
$= \{f(x) + \Delta f\}\, \{g(x) + \Delta g\} - f(x)\, g(x)$
$= f(x)\, \Delta g + g(x)\, \Delta f + (\Delta f)\, (\Delta g)$

(iii) $\Delta \left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\} = \dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$= \frac{g(x)\, f(x+h) - f(x)\, g(x+h)}{g(x+h)\, g(x)}$$

$$= \frac{g(x)\, \{f(x) + \Delta f\} - f(x)\, \{g(x) + \Delta g\}}{g\,(g+\Delta g)}$$

$$= \frac{g(x)\Delta f - f(x)\,\Delta g}{g\,(g+\Delta g)}$$

3. অগ্রান্তর প্রকারক Δ ধ্রুবক গুণনের সাপেক্ষে বিনিময় যোগ্য, অর্থাৎ

$\Delta\, [kf(x)] = k\Delta f(x)$

প্রমাণ : ধরি $\phi(x) = kf(x)$
$\therefore \Delta\phi(x) = \phi(x+h) - \phi(x)$
$= kf(x+h) - kf(x)$
$= k\, [f(x+h) - f(x)]$
$= k\Delta f(x)$

4. অগ্রান্তর প্রকারক Δ ঘাত সূত্র মেনে চলে, অর্থাৎ

$\Delta^m . \Delta^n f(x) = \Delta^{m+n}\, f(x)$

$\Delta^m . \Delta^n f(x) = (\Delta . \Delta . \, . \, . \; m$ সংখ্যক$)\; . \; (\Delta . \Delta . \, . \; .n$ সংখ্যক$)\; f(x)$
$= (\Delta . \Delta . \, . \, . \; \overline{m+n}$ সংখ্যক$)\; f(x)$
$= \Delta^{m+n}\, f(x)$

উদাহরণ : দেখান যে, $\Delta \log f(x) = \log\left\{1 + \dfrac{\Delta f(x)}{f(x)}\right\}$

উত্তর : $\Delta \log f(x) = \log f\,(x+h) - \log f(x)$

$$= \log\left\{\frac{f(x+h)}{f(x)}\right\}$$

$$= \log\left\{\frac{f(x+h) - f(x) + f(x)}{f(x)}\right\}$$

$$= \log\left\{1+\frac{\Delta f(x)}{f(x)}\right\}$$

উদাহরণ : প্রমাণ করুন $\Delta - \nabla = \Delta\nabla$

উত্তর : $(\Delta\nabla)\ f(x) = \Delta\ [\nabla f(x)]$

$= \Delta\ [f(x) - f(x-h)]$

$= \Delta f(x) - \Delta f(x-h)$

$= \Delta f(x) - \{f(x) - f(x-h)\}$

$= \Delta f(x) - \nabla f(x)$

$= (\Delta - \nabla)\ f(x)$

$\therefore \Delta\nabla = \Delta - \nabla$

উদাহরণ : প্রমাণ করুন $\mu\delta = \frac{1}{2}(\Delta+\nabla)$

$(\mu\delta)\ f(x) = \mu(\delta f(x))$

$$= \mu\left[\frac{1}{2}\left\{f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mu f\left(x+\frac{h}{2}\right) + \mu f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{f\left(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right) - f\left(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right)\right\} + \left\{f\left(x-\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Delta f(x) + \nabla f(x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta+\nabla)\ f(x)$$

$\therefore \mu\delta = \Delta+\nabla$

উদাহরণ : যদি $u_r(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-1})$ এবং $u_0(x)=1$ হয় তবে দেখান যে

$\Delta^i u_r(x) = r(r-1)\ldots(r-i+1)h^i\, u_{r-i}(x)\ (1 \le i \le r)$

যেখানে, $x_r = x_0+rh$ এবং $h>0\ (r=0, 1, 2, \ldots, n)$

উত্তর : যেহেতু $x_r = x_0+rh \therefore x_r = x_{r-1}+h \Rightarrow x_{r-1} = h\text{-}x_r,\ r=1,2,\ldots n$

$$\begin{aligned}
\Delta u_r(x) &= u_r(x+h) - u_r(x)\\
&= (x+h-x_0)(x+h-x_1)\ldots(x+h-x_{r-1}) - (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-1})\\
&= (x+h-x_0)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-2}) - (x-x_0)\ldots(x-x_{r-1})\\
&= (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-2})(x+h-x_0-x+x_{r-1})\\
&= rh(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-1})
\end{aligned}$$

সুতরাং সূত্রটি $n=1$ এর জন্য সত্য।

ধরা যাক সূত্রটি $i=k$ এর জন্যও সত্য। অর্থাৎ

$$\begin{aligned}
\Delta^k u_r(x) &= r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)h^k u_{r-k}(x)\\
&= r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)h^k[(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-k-1})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \Delta^{k+1}u_r(x) &= \Delta[\Delta^k u_r(x)]\\
&= r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)h^k[(x+h-x_0)(x+h-x_1)\ldots(x+h-x_{r-k-1})\\
&\qquad - (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-k-1})]\\
&= r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)h^k[(x+h-x_0)(x-x_0)\ldots(x-x_{r-k-2})\\
&\qquad - (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-k-1})]\\
&= r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)h^k(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-k-2})[x+h-x_0-x+x_{r-k-1}]\\
&= r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)h^k(x-x_0)\ldots(x-x_{r-k-2})[h-x_0+x_0+(r-k-1)h]\\
&= r(r-1)\ldots(r-k+1)(r-k)h^{k+1}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{r-k-2})\\
&= r(r-1)\ldots(r-k)h^{k+1}u_{r-(k+1)}
\end{aligned}$$

অর্থাৎ, সূত্রটি $i=k+1$ এর জন্য সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ উপায়ে প্রমাণিত হল সূত্রটি যে-কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা $i\ (1 \le i \le r)$ এর জন্য সত্য।

মন্তব্য : উপরের সূত্র থেকে বলা যায়

$\Delta^n u_n(x) = n!h^n u_0(x) = n!h^n$ যেহেতু $u_0(x)=1$

উদাহরণ : যদি h খুব ছোট হয় তবে প্রমাণ করুন

$\Delta^{n+1}f(x_0) \simeq h^{n+1} f^{n+1}(x_0)$ [ধরে নিন 'f' বৈশ্লেষিক]

উত্তর : আমরা জানি $\displaystyle \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

$$\Rightarrow \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \Delta f(x_0) \simeq hf'(x_0)$$

পুনরায়, $$\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = f''(x_0)$$

$$\Rightarrow \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\dfrac{\Delta f(x_0+h)}{h} - \dfrac{\Delta f(x_0)}{h}}{h} = f''(x_0)$$

$$\Rightarrow \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right]}{h^2} = f''(x_0)$$

$$\Rightarrow \Delta^2 f(x_0) \simeq h^2 f''(x_0)$$

একইভাবে আমরা পাই

$$\Delta^{n+1} f(x_0) \simeq h^{n+1} f^{n+1}(x_0)$$

অগ্রান্তর (Δ) এবং অন্তরকলন প্রকারকের (D) সম্পর্ক :

ধরা যাক, [a,b] অন্তরালে f(x) অপেক্ষকটি অন্তরকলনযোগ্য এবং সন্তত। টেলরের সূত্র থেকে পাই

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots$$

বা, $$Ef(x) = f(x) + hD(x) + \frac{h^2}{2!} D^2 f(x) + \frac{h^3}{3!} D^3 f(x) + \ldots$$

বা, $$(1+\Delta) f(x) = \left(1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} + \ldots\right) f(x)$$

$$= e^{hD} f(x)$$

$$\therefore e^{hD} = 1+\Delta = E$$

অথবা, $$hD = \log_e (1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots$$

$$\therefore D = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots\right]$$

সসীম অন্তরের মৌলিক উপপাদ্য :

যদি f(x) n ঘাতের একটি বহুপদী অপেক্ষক (polynomial function) হয় তাহলে f(x) এর n তম অন্তর

ধ্রুবক (n+1) তম অন্তর শূন্য হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক $f(x) = a+bx+cx^2+. . .+ px^n$ একটি n ঘাতের বহুপদী অপেক্ষক যেখানে a,b,c. . p হল ধ্রুবক এবং $p \neq 0$

$\therefore \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$= a+b\ (x+h) + C\ (x+h)^2 + . . . + p\ (x+h)^n - [a+bx+cx^2+. . .+px^n]$

$= a_1+b_1x+c_1x^2+. . . + p_1x^{n-1}$ [সরল করে]

যেখানে $a_1, b_1,. . . + p_1$ হল ধ্রুবক।

এখন, $\Delta^2 f(x) = \Delta. \Delta f(x) = \Delta\ [a_1+b_1x+c_1x^2+. . .+p_1x^{n-1}]$

$= a_1 + b_1\ (x+h) + c_1\ (x+h)^2 + . . . + p_1\ (x+h)^{n-1} -[a_1+b_1x+c_1x^2+. . . +p_1x^{n-1}]$

$= a_2 + b_2x + c_2x^2 + . . . + p_2x^{n-2}$ [সরল করে]

যেখানে $a_2, b_2, . . ., p_2$ হল ধ্রুবক

সুতরাং দেখা যাচ্ছে প্রথম অগ্রান্তরের পর n ঘাতের বহুপদী অপেক্ষকটি n–1 ঘাতের বহুপদী অপেক্ষকে পরিবর্তিত হয় এবং দ্বিতীয় অগ্রান্তরের পর সেটি n–2 ঘাতের বহুপদী অপেক্ষকে পরিবর্তিত হয়। এইরকমভাবে n–1 তম অগ্রান্তরের পর তা একটি এক ঘাতে অপেক্ষকে পরিবর্তিত হবে।

অর্থাৎ, $\Delta^{n-1}f(x) = a_{n-1} + P_{n-1}x$

$\therefore \Delta^n f(x) = \Delta\ (\Delta^{n-1}\ f(x))$

$= \Delta\ (a_{n-1}+ p_{n-1}x)$

$= a_{n-1} + p_{n-1}\ (x+h)- a_{n-1} - P_{n-1}x$

$= p_{n-1}\ h$

$= p_n$ (একটি ধ্রুবকরাশি)

$\therefore \Delta^{n+1}f(x) = \Delta p_n = 0.$ (প্রমাণিত)

2.7 উৎপাদকীয় ঘাত অপেক্ষক (Factorial Power Function)

কোনো সংখ্যার n তম উৎপাদকীয় ঘাতকে $x^{[n]}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় :

$x^{[n]} = x\ (x-h)\ (x-2h). . . (x- \overline{n-1}\ h)$

যেখানে প্রতিটি উৎপাদক h পরিমাণ হ্রাস পায়।

এক্ষেত্রে $x^{[0]}=1$ ধরা হয়। আবার h=0 হলে উৎপাদকীয় ঘাত সাধারণ ঘাতের সঙ্গে সমান হয়।

উৎপাদকীয় ঘাতের অন্তর :

ধরা যাক $\Delta x=h$, যা একটি ধ্রুবক। এখন, উৎপাদকীয় ঘাতের প্রথম অন্তর হল

$\Delta x^{[n]} = (x+h)^{[n]} - x^{[n]}$

$= \{(x+h)x\ (x-h)\ (x-2h)\dots(x-\overline{n-2}\,h)\} - \{x(x-h)\ (x-2h)\dots(x-\overline{n-1}\,h)\}$

$= x\ (x-h)\ (x-2h)\dots(x-\overline{n-2}\,h)\ \{(x+h) - (x-\overline{n-1}\,h)\}$

$= x\ (x-h)\ (x-2h)\dots(x-\overline{n-2}\,h)\ nh$

$= nh\ x^{[n-1]}$

সুতরাং, উৎপাদকীয় ঘাতের প্রথম অন্তর $\Delta x^{[n]} = nh\ x^{[n-1]}$ . . . (2.6.1)

এবং দ্বিতীয় অন্তর $\Delta^2 x^{[n]} = \Delta[\Delta x^{[n]}] = \Delta[nh\ x^{[n-1]}]$

$= n(n-1)h^2 x^{[n-2]}$

সুতরাং, গাণিতিক আরোহন (Mathematical induction) পদ্ধতিতে পাই

$\Delta^m x^{[n]} = n\ (n-1)\ (n-2)\dots(n-\overline{m-1})\ h^m x^{[n-m]}$ যেখানে $n = 1, 2, \dots, m$

স্পষ্টতই $\Delta^m x^{[n]} = 0$ যখন $m>n$.

(2.6.1) এর সাহায্যে আমরা এখন একটি সূত্র প্রতিষ্ঠিত করব।

ধরা যাক, $S_m = \sum_{i=0}^{m-1} x_i^{[n]}$ . . . (2.6.2) যেখানে $x_{i+1}-x_i = h$, $i=1, 2, \dots, n$

(2.6.1) থেকে আমরা পাই $x^{[n]} = \dfrac{\Delta x^{[n+1]}}{(n+1)h}$, এটি (2.6.2) তে বসিয়ে পাই

$$S_m = \frac{1}{h(n+1)} \sum_{i=0}^{m-1} \Delta x_i^{[n+1]}$$

$$= \frac{1}{h(n+1)} \left[\Delta x_0^{[n+1]} + \Delta x_1^{[n+1]} + \Delta x_2^{[n+1]} + \dots + \Delta x_{m-1}^{[n+1]}\right]$$

$$= \frac{1}{h(n+1)} \left[x_1^{[n+1]} - x_0^{[n+1]} + x_2^{[n+1]} - x_1^{[n+1]} + \dots + x_m^{[n+1]} - x_{m-1}^{[n+1]}\right]$$

$$= \frac{1}{h(n+1)} \left[x_m^{[n+1]} - x_0^{[n+1]}\right]$$

সুতরাং, $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} x_i^{[n]} = \frac{1}{h(n+1)} \left[x_m^{[n+1]} - x_0^{[n+1]}\right]$

উপরোক্ত, সূত্রটিকে নিউটন-লিবনিজ্ সূত্র বলা হয়।

উদাহরণ : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ বহুপদী অপেক্ষকটিকে এবং তার অন্তর সমূহকে উৎপাদকীয় চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করুন। দেওয়া আছে $h=1$।

সমাধান : ধরা যাক $f(x) = 2x^3-3x^2+3x-10 = Ax\ (x-1)\ (x-2) + Bx\ (x-1) + (Cx+D)$

$x=0$ বসিয়ে পাই $D=-10$

$x=1$,, ,, $C+D=-8$ বা $c=2$

$x=2$,, ,, $2B+2C+D=0$ বা $B=3$

আবার, উভয়পক্ষের x^3 এর সহগ সমান করে পাই $A=2$

সুতরাং, $f(x) = 2x^{[3]} + 3x^{[2]} + 2x^{[1]}-10$

এখন, $\Delta f(x) = 2.3x^{[2]} + 3.2\ x^{[1]} + 2.1$

$\Delta^2 f(x) = 2.3.2\ x^{[1]} + 3.2.1$

$\Delta^3 f(x) = 2.3.2.1$

উদাহরণ 2 :

$f(x) = (3x+2)\ (x-2)\ (x+1)\ (5x-1)$ এবং অন্তরের মান 1 হলে $\Delta^4 f(x)$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : যেহেতু $f(x) = (3x+2)\ (x-2)\ (x+1)\ (5x-1)$

$= 15x^4-8x^3-39x^2-12x+4$

বহুপদীয় অপেক্ষকটির ঘাত 4, সুতরাং

$\Delta^4 f(x) = 15.4!(1)^4 = 15.24 = 360$

উদাহরণ 3:

যদি $x^{[n]}$ উৎপাদকীয় চিহ্নক হয় এবং x_{c_r} দ্বিপদ সহগ হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে

$^x c_{n-r} = \dfrac{1}{n!} \Delta^r x^{[n]}$ । দেওয়া আছে অন্তরের মান 1

সমাধান :

যেহেতু অন্তর=1 , সুতরাং আমরা পাই

$$x^{[n]} = x(x-1)(x-2)\ .\ .\ .\ (x-\overline{n-1})$$

$$= \frac{x(x-1)\ .\ .\ .\ (x-\overline{n-2})(x-\overline{n-1})(x-n)(x-n-1)\ .\ .\ .\ 3.2.1}{(x-n)\ (x-n-1)\ .\ .\ .3.2.1}$$

$$= \frac{x!}{(x-n)!} = \frac{n!x!}{n!\ (x-n)!} = n!x_{c_n}$$

$\therefore\ x^{[n-r]} = (n-r)!\ ^x c_{n-r}\ .\ .\ .\ (1)$

আবার $\Delta^r x^{[n]} = n\ (n-1)(n-2)\ .\ .\ .\ (n-r+1)\ x^{[n-r]}$

$= n(n-1)(n-2)\ .\ .\ .\ (n-r+1)\ (n-r)!\ ^x c_{n-r}$ [(1)এর সাহায্যে]

$= n!\ ^x c_{n-r}$

$$\therefore\ x_{c_{n-r}} = \frac{1}{n!}\Delta^r x^{[n]} \ . \ . \ . \ (2)$$

মন্তব্য: যদি n=r হয় তাহলে (2) থেকে পাই

$$x_{c_0} = 1 = \frac{1}{n!}\Delta^n x^{[n]} \text{ or, } \Delta^n x^{[n]} = n!$$

অন্তর সারণীতে ভ্রান্তির সম্প্রসারণ (Propagation of Errors in Difference Table)

অন্তর সারণীতে অপেক্ষক y এর মান লিপিবদ্ধ করার সময় আসন্নীকরণের জন্য মানের শেষ অংকে ±½ এককের ভ্রান্তি থাকতে পারে। আবার y এর মানে অনিচ্ছাকৃত ভ্রান্তিও প্রবেশ করতে পারে। আমরা দেখব এই ভ্রান্তি অগ্রান্তরের বৃদ্ধির সাথে দ্রুত বৃদ্ধি পায়। নিচের সারণীতে ভ্রান্তির সম্প্রসারণ দেখানো হল :

সারণী নং 2.5 : ভ্রান্তির সম্প্রসারণ সারণী

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0+\varepsilon$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1+\varepsilon$		$\Delta^5 y_0-5\varepsilon$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2+\varepsilon$		$\Delta^4 y_1-4\varepsilon$	
		$\Delta y_3+\varepsilon$		$\Delta^3 y_2-3\varepsilon$		$\Delta^5 y_1+10\varepsilon$
x_4	$y_4+\varepsilon$		$\Delta^2 y_3-2\varepsilon$		$\Delta^4 y_2+6\varepsilon$	
		$\Delta y_4-\varepsilon$		$\Delta^3 y_3+3\varepsilon$		$\Delta^5 y_3-10\varepsilon$
x_5	y_5		$\Delta^2 y_4+\varepsilon$		$\Delta^4 y_3-4\varepsilon$	
		Δy_5		$\Delta^3 y_4-\varepsilon$		$\Delta^5 y_4+5\varepsilon$
x_6	y_6		$\Delta^2 y_5$		$\Delta^4 y_4+\varepsilon$	
		Δy_6		$\Delta^3 y_5$		
x_7	y_7		$\Delta^2 y_6$			
		Δy_7				
x_8	y_8					

উপরের সারণী থেকে বলা যায়—

(i) অন্তরের ক্রম বৃদ্ধির সঙ্গে ভ্রান্তিও বৃদ্ধি পাবে

(ii) যে কোনো সারির ε-এর সহগগুলি হল $(1-\varepsilon)^n$ এর সহগ (binomial coefficient) উদাহরণস্বরূপ চতুর্থ অন্তরের ভ্রান্তিগুলি হল ε, -4ε, 6ε, $-\Delta\varepsilon$ এবং ε

(iii) যে কোনো অন্তর সারিতে ভ্রান্তির বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য।

উদাহরণ : নিচের সারণীতে y-এর মান ভুল দেওয়া আছে যেখানে y একটি x এর ত্রিপদী অপেক্ষক। অন্তর সারণী ব্যবহার করে ভুল নির্ণয় করুন।

x :	0	1	2	3	4	5	6	7
y :	25	21	18	18	27	45	76	123

সমাধান :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	25			
		−4		
1	21		1	
		−3		2
2	18		3	
		0		6
3	18		9	
		9		0
4	27		9	
		18		4
5	45		13	
		31		3
6	76		16	
		47		
7	123			

যেহেতু y একটি ত্রিপদী অপেক্ষক, $\Delta^3 y$ ধ্রুবক। তৃতীয় অন্তরের সারির যোগফল হল 15। $\Delta^3 y$ সারির প্রত্যেকটির মান $15/5 = 3$, সুতরাং y-এর চতুর্থ পদটিতে ভ্রান্তি আছে এবং $\Delta^3 y$ এর পদগুলি নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়।

$3+(-1)$, $3-3(-1)$, $3+3(-1)$, $3-(-1)$

$\therefore$ x=3 এর জন্য y এর ভ্রান্তির মান হল $\varepsilon = -1$

$\therefore y + \varepsilon = 18 \Rightarrow y = 19$

অর্থাৎ y এর প্রকৃত মান হল 19।

2.8 বিভাজিত অন্তর (Divided Difference)

ধরা যাক, [a,b] অন্তরালে $a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b$, (n+1) সংখ্যক স্বতন্ত্র বিন্দু। বিন্দুগুলি সমদুরবর্তী নাও হতে পারে। যদি বিন্দুগুলি সমদূরবর্তী না হয় তাহলে অগ্রান্তর, পশ্চাদান্তর ইত্যাদি গঠন করা সম্ভব নয়। সেক্ষেত্রে আমরা বিভাজিত অন্তর গঠন করব।

দুটি স্বতন্ত্র বিন্দু x_0, x_1-এর জন্য অপেক্ষক f(x) এর প্রথম ক্রমের বিভাজন অন্তর হল

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \quad ...\ (2.6.1)$$

অনুরূপে তিনটি স্বতন্ত্র বিন্দু x_0, x_1ও x_2 এর জন্য f(x) এর বিভাজন অন্তরের সংজ্ঞা হল

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2} \quad ...\ (2.6.2)$$

সাধারণভাবে (n+1) সংখ্যক বিন্দু $x_0, x_1, ... x_n$ এর জন্য f(x) এর বিভাজন অন্তরের সজ্ঞা হল

$$f(x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{f(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{x_0 - x_n} \quad ...\ (2.6.3)$$

(n+1) সংখ্যক বিন্দুর জন্য গঠিত বিভাজন অন্তরকে n-ক্রমের বিভাজন অন্তর বলা হয়।

2.9 বিভাজন অন্তরের কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম

(1) ধ্রুবক অন্তরের বিভাজন অন্তরের মান শূন্য।

ধরা যাক f(x)=c (ধ্রুবক)

$$\therefore f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{c - c}{x_1 - x_0} = 0$$

(2) cf(x) এর বিভাজন অন্তর, যেখানে c একটি ধ্রুবক, c গুণিতক f(x) এর বিভাজন অন্তর।

ধরা যাক, F(x) = cf(x)

$$\therefore F(x_0, x_1) = \frac{F(x_0) - F(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{cf(x_0) - cf(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{c\{f(x_0) - f(x_1)\}}{x_0 - x_1}$$

$$= cf(x_0, x_1)$$

(3) দুটি অপেক্ষকের যোগফলের বিভাজন অন্তর তাদের বিভাজন অন্তরের যোগফলের সমান।

ধরি, F(x) = f(x) + g(x)

$$\therefore F(x_0, x_1) = \frac{F(x_0) - F(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0) + g(x_0) - f(x_1) - g(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$= \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} + \frac{g(x_0) - g(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$= f\,(x_0, x_1) + g\,(x_0, x_1)$$

মন্তব্য : যদি $F(x) = \lambda f(x) \pm \mu g(x)$ হয় তাহলে

$f\,(x_0, x_1) = \lambda f(x_0, x_1) \pm \mu g(x_0, x_1)$ হবে।

(4) বিভাজন অন্তর তার বিন্দুগুলির প্রতিসম অপেক্ষক (Symmetric function)

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1, x_0)$$

এখন, $$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \quad \ldots (2.7.1)$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_2}\left[\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right]$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_2}\left[\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{(x_0 - x_2) f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} - \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}\right]$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad \ldots (2.7.2)$$

একইরকম ভাবে, $$f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} +$$

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} \quad \ldots (2.7.3)$$

ওপরের (2.7.2) এবং (2.7.3) সমীকরণগুলি থেকে দেখা যাচ্ছে যে ডানদিকের প্রত্যেক পদের আকার একই

ধরনের; পদগুলিকে স্থান পরিবর্তন করে লিখলে যোগফলের কোনো পরিবর্তন হবে না।
অর্থাৎ $f(x_0, x_1, x_2) = f(x_0, x_2, x_1) = f(x_2, x_1, x_0)$
সাধারণভাবে, $f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_0)$
অর্থাৎ বিভাজিত অন্তর তার বিন্দুগুলির সাপেক্ষে প্রতিসম।
(5) x^n এর n তম বিভাজন অন্তরের মান ধ্রুবক এবং (n+1) তম মান শূন্য।
ধরি, $f(x) = x^n$

$$\therefore f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

$$= x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + \ldots + x_0 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \ldots (2.7.4)$$

$$f(x_1, x_0) = x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_0 + \ldots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

$$f(x, x_0, x_1) = \frac{f(x, x_0) - f(x_1, x_0)}{x - x_1} = \frac{x^{n-1} - x_1^{n-1}}{x - x_1} + x_0 \frac{x^{n-2} - x_1^{n-2}}{x - x_1}$$

$$+ x_0^2 \frac{x^{n-3} - x_1^{n-3}}{x - x_1} + \ldots + x_0^{n-2}$$

$$= x^{n-2} + x^{n-3}x_1 + \ldots + x_1^{n-2} + x_0 (x^{n-3} + x^{n-4}x_1 + \ldots + x_1^{n-3})$$
$$+ x_0^2 (x^{n-4} + x^{n-5}x_1 + \ldots + x_1^{n-4}) + \ldots + x_0^{n-2}$$
$$= x^{n-2} + (x_1+x_0)x^{n-3} + (x_1^2 + x_0x_1 + x_0^2)\, x^{n-4} + \ldots + x_0^{n-2} \ldots (2.7.5)$$

(2.7.4) এবং (2.7.5) সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে x^n এর প্রথম এবং দ্বিতীয় বিভাজন অন্তর যথাক্রমে (n–1) এবং (n–2) ঘাতের। সুতরাং গাণিতিক আরোহ সূত্র থেকে আমরা বলতে পারি n তম বিভাজন অন্তর (n–n) ঘাতের, অর্থাৎ ধ্রুবক এবং (n+1) তম বিভাজন অন্তর শূন্য।

(6) রৈখিক রূপান্তর (Linear Transformation) :

$x = a + bt$, $x_i = a+bt_i$; $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ এবং $f(x) = f(a+bt) = F(t)$ হলে
$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = b^{-n} F(t_0, t_1, \ldots, t_n) \quad \ldots (2.7.6)$
এক্ষনে, $x_i - x_j = 6(t_i - t_j)$, $f(x_i) = F(t_i)$; $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ তাহলে (2.7.3) নং সূত্র থেকে পাওয়া যায়

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{F(t_i)}{b^n\ (t_i - t_0)(t_i - t_1)\ldots(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})\ldots(t\ \ - t_n)}$$

$$= b^{-n} F(t_0, t_1, \ldots, t_n) \qquad \ldots (2.7.7)$$

2.10 সমদূরবর্তী পাতবিন্দু সমূহের জন্য বিভাজন অন্তর এবং অগ্রান্তরের মধ্যে সম্পর্ক

ধরা যাক y=f(x) অপেক্ষকটির মান (n+1) সমদূরবর্তী বিন্দুতে $x_0, x_1, \ldots x_n$ এ জানা আছে। অর্থাৎ

$y_i = f(x_i)$, $i=0,1,2,\ldots,n$ এবং $x_i = x_0 + ih$, h = ধ্রুবক

তাহলে $f(x_0,x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{\Delta f(x_0)}{h} = \dfrac{\Delta y_0}{h}$

$$f(x_1,x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x_1)}{h} = \frac{\Delta y_1}{h}$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1,x_2)}{x_0 - x_2} = \frac{\dfrac{\Delta y_0}{h} - \dfrac{\Delta y_1}{h}}{-2h} = \frac{\Delta(y_1 - y_0)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_0, x_1, x_2) - f(x_1, x_2, x_3)}{x_0 - x_3}$$

$$= \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} - \frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2}\right) \Big/ -3h$$

$$= \frac{\Delta^2 (y_1 - y_0)}{3!h^3} = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}$$

সাধারণভাবে বলা যায়,

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n} \quad \ldots\ (2.8.1)$$

বিভাজন অন্তর সারণী :

(2-6) নং সারণীর সাহায্যে বিভিন্ন ক্রমের বিভাজন অন্তরের মান নির্ণয় করা হয়। x এবং y এর মানগুলি সারণীর মধ্যস্থলে, x-এর অন্তরগুলি বামদিকে এবং বিভাজন অন্তরগুলি লিপিবদ্ধ করা হয়।

সারণী নং 2-6 : **বিভাজন অন্তর সারণী**

				x	f(x)				
				x_0	$f(x_0)$				
			x_0-x_1			$f(x_0,x_1)$			
		x_0-x_2		x_1	$f(x_1)$		$f(x_0,x_1,x_2)$		
	x_0-x_3		x_1-x_2			$f(x_1,x_2)$		$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$	
x_0-x_4		x_1-x_3		x_2	$f(x_2)$		$f(x_1,x_2x_3)$		$f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$
	x_1-x_4		x_2-x_3			$f(x_2,x_3)$		$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$	
		x_2-x_4		x_3	$f(x_3)$		$f(x_2,x_3,x_4)$		
			x_3-x_4			$f(x_3,x_4)$			
				x_4	$f(x_4)$				

2.11 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) নিচের সারণীর জন্য একটি অগ্রান্তর সারণী প্রস্তুত করুন।

x	0	10	20	30
y	0	0.174	0.347	0.518

(সংকেত : অগ্রান্তর সারণী প্রস্তুত প্রণালী দ্রষ্টব্য)

(2) $y = f(x) = x^3+2x+1$ অপেক্ষকের জন্য একটি অন্তর সারণী (Differnece table) তৈরী করুন যখন $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

(সংকেত : Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, . . . প্রভৃতি নির্ণয় করার পদ্ধতি অনুসরণ করুন)

(3) অন্তরসারণী ও দ্বিতীয় ক্রমের অন্তর ধ্রুবক ব্যবহার করে নিম্নলিখিত শ্রেণীটির ষষ্ঠপদটি নির্ণয় করুন— 8, 12, 19, 29, 42,. . .

(সংকেত : $x=6$ এর জন্য $y=K(x)$ ধরে সারণী প্রস্তুত করুন) [**উত্তর** : 58]

(4) অন্তরদৈর্ঘ 1 ধরে $\Delta\left[\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}\right]$ এর মান নির্ণয় করুন।

[**সংকেত** : বহুপদরাশির ক্ষেত্রে সূত্র প্রযোজ্য] (**উত্তর** : $\dfrac{-3}{(x+3)(x+4)} - \dfrac{2}{(x+2)(x+3)}$)

(5) প্রমাণ করুন যে :—

a) $\Delta u = 3x(x-1)$ যেখানে $u = x(x-1)(x-2)$

b) $\Delta^3 (1-x)(1-2x)(1-3x) = -36$ যেখানে অন্তর = 1

(6) দেখান যে $e^x = \left(\dfrac{\Delta^2}{E}\right) e^x \dfrac{Ee^x}{\Delta^2 e^x}$ যেখানে অন্তর = h

(**সংকেত** : $Ee^x=e^{x+h}$, $\Delta e^x=e^{x+h}-e^x$ ইত্যাদি. . .)

(7) প্রমাণ করুন যে

$$u_0 + \frac{u_1 x}{1!} + \frac{u_2 x^2}{2!} + \frac{u_3 x^3}{3!} + \ldots$$

$$= e^x \left[u_0 + x\Delta u_0 + \frac{x^2}{2!}\Delta^2 u_0 + \frac{x^3}{3!}\Delta^3 u_0 + \ldots \right]$$

[**সংকেত** : L.H.S. কে 'E' দিয়ে প্রকাশ করে ভাবুন]

(8) নিম্নলিখিত তালিকার লুপ্ত পদটি নির্ণয় করুন।

x	0	1	2	3	4
y	1	3	9	?	81

(**সংকেত** : লক্ষণীয় যে $\Delta^4 f(x) = 0$. . .) (**উত্তর** : $f(3) = 31$)

2.12 সারাংশ

একটি চলরাশি বা অপেক্ষকের জন্য কিন্তু বিচ্ছিন্ন মান প্রদত্ত আছে, তার থেকে অপেক্ষকটির সম্বন্ধে ধারণা করার জন্য মূলত: পারস্পরিক অন্তর এবং বিভাজিতি অন্তর এর প্রয়োগ করার কথা চিন্তা করা হয়েছে সেই কারণেই অগ্রান্তর বা পশ্চাদান্তর বিষয়ে আলোচনা করা আছে। এদের মধ্যে সম্পর্ক এবং বিশেষ কয়েকটি ধর্ম উল্লেখিত হয়েছে। উৎপাদকীয় ঘাত অপেক্ষক সংজ্ঞায়িত হয়েছে। বিভাজিত অন্তর ও তাদের প্রধান প্রধান ধর্ম ব্যাখ্যাত হয়েছে। বিশেষ করে সমদূরবর্তী পাতবিন্দু সমূহের জন্য বিভাজিত ক্রম অন্তর ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করা হয়েছে।

2.13 সহায়ক গ্রন্থাবলি

1. Gupta, Malik : Calculus of Finite Differences & Numerical Analysis. (Krishna Prakashan Mandir)
2. Amitava Gupta, S.C. Bose : Introduction to Numerical Analysis. (Academic Publishers)

একক 3 ❑ নিউটনের সম্মুখ ও পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন (Interpolation) সূত্রদ্বয় (ভ্রান্তিসহ)

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

ধরা যাক, [a, b] অন্তরালে চলক x এর $a = x_0 < x_1 <\ldots < x_n = b$, (n + 1) সংখ্যক বিভিন্ন মানের জন্য f (x) অপেক্ষকের মানগুলি জানা আছে এবং মানগুলি হল যথাক্রমে $y_0, y_1, \ldots, y_n$. f (x), [a, b] অন্তরালে x এর কোনো মানের জন্য যা তালিকা থেকে পাওয়া যাবে না, যে পদ্ধতিতে f (x) এর একটি আসন্ন মান নির্ণয় করা যায় তাকে আন্তঃপাঠন পদ্ধতি (Method of interpolation) বলা হয়। আন্তঃপাঠন কথাটি এখানে ব্যবহার করা হয়েছে কারণ এই পদ্ধতিতে [a, b] অন্তরালে x এর ক্ষুদ্রতম এবং বৃহত্তম মানের মধ্যবর্তী কোনো মানের জন্য f (x) এর মান নির্ণয় করা হয়। যদি [a, b] অন্তরালের সামান্য বাইরের কোনো বিন্দুর জন্য f (x) এর মান নির্ণয় করা হয় তখন পদ্ধতি টিকে বহিঃ পঠন (Extrapolation) বলা হয়।

আন্তঃপাঠন পদ্ধতিতে f (x) এর বদলে একটি সরল অপেক্ষক ϕ (x) এমন ভাবে নেওয়া হয় যেন $x_0, x_1, \ldots, x_n$ বিন্দুগুলিতে f (x) এবং ϕ (x) এর মান সমান হয় অর্থাৎ

$\phi(x_i) = f(x_i) = y_i \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \ \ldots (3.1.1)$

ϕ (x) অপেক্ষকটিকে আন্তঃ পাঠন অপেক্ষক (interpolation polynomial) বলা হয় এবং প্রদত্ত x বিন্দুতে ϕ (x) এর মানকে ঐ বিন্দুতে f (x) এর আসন্নমান হিসাবে গ্রহণ করা হয়। সাধারণ ভাবে আমরা লিখি

$f(x) \simeq \phi(x) \ \ldots. (3.1.2)$

যদি আমরা লিখি $f(x) = \phi(x) + R_{n+1}(x) \ \ldots (3.1.3)$

তখন R_{n+1} (x) কে বলা হয় আন্তঃ পাঠন সূত্রে ভ্রান্তির পরিমান। ϕ (x) অপেক্ষকটি বিভিন্ন প্রকারের হতে পারে। যখন ϕ (x) একটি বহুপদ রাশিমালা তাকে তখন আমরা বহুপদ আন্তঃপঠন বলি। যখন ϕ (x) একটি সূচক অপেক্ষক তখন তাকে আমরা সূচক আন্তঃপাঠন বলি। ϕ (x) একটি ত্রিকোনমিতিক অপেক্ষক হলে তাকে আমরা ত্রিকোনমিতিক আন্তঃপাঠন বলি। এই অধ্যায়ে আমরা কেবল বহুপদ আন্তঃপাঠন নিয়েই আলোচনা করব।

জ্যামিতিক ভাষায় বলা যায় x – y তলে আন্তঃ পাঠন বহুপদ রাশিমালাটি একটি n মাত্রার অধিবৃত্ত সূচিত করে, যা প্রদত্ত $(x_0, y_0), (x_1, y_1)... (x_n, y_n)$, (n + 1) সংখ্যক বিন্দুনামী।

[a, b] অন্তরালে, যে কোনও অন্তরকলন যোগ্য অপেক্ষক f (x) এর জন্য একটা বহুপদ আন্তঃপাঠন রাশিমালা পাওয়া যাবে উয়ারস্টাসের (Weirstrass' theorem) উপপাদ্যের সাহায্যে : প্রদত্ত [a, b] অন্তঃরালে যে কোনও সন্তত অপেক্ষক f (x) এবং প্রদত্ত ধনাত্বক রাশি ε (যত ক্ষুদ্রই হোকনা কেন) এর জন্য একটি n ঘাতের বহুপদ রাশিমালা p (x) পাওয়া যাবে যার জন্য,

$|f(x) - p(x)| < \varepsilon,\ x \in [a,b]$ এবং $\varepsilon > 0$.

3.1.1 আন্তঃপাঠন সূত্রে ভ্রান্তি (Error in Interpolation Formula)

ধরা যাক, [a, b] অন্তরালে f (x) একটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক এবং ϕ (x) একটি n মাত্রার বহুপদ আন্তঃ পাঠন রাশিমালা যেখানে

$f(x_i) = \phi(x_i)\ (i = 0, 1, 2, ..., n)\ ...\ (3.1.4)$

ধরা যাক R_{n+1} (x), আন্তঃপাঠন সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ। অর্থাৎ

$f(x) = \phi(x) + R_{n+1}(x)$

or, $R_{n+1}(x) = f(x) - \phi(x)\ ...\ (3.1.5)$

সুতরাং (3.1.4) এবং (3.1.5) থেকে পাই

$R_{n+1}(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, ..., n)\ ...\ (3.1.6)$

(3.1.6) থেকে আমরা ধরতে পারি

$R_{n+1}(x) - \omega(x)\ \psi(x)\ ...\ (3.1.7)$

যেখানে $\omega(x) = (x-x_0)(x - x_1) ... (x - x_n)\ ...\ (3.1.8)$

একটি n মাত্রার বহুপদরাশি এবং ψ (x), x এর যে কোন অপেক্ষক।

এখন আমরা $x = \alpha$ এর জন্য (যা x_i, i = 0, 1,..., n এর থেকে আলাদা) ভ্রান্তির মান নির্ণয় করব।

(3.1.5) এবং (3.1.7) থেকে পাই $f(\alpha) = \phi(\alpha) + \omega(\alpha)\ \psi(\alpha)\ ...\ (3.1.9)$

ধরা যাক F (x) একটি সহায়ক অপেক্ষক যেখানে

$F(x) = f(x) - \phi(x) - \omega(x)\ \psi(x)\ ...\ (3.1.10)$

সুতরাং $F(x)$ এর মান $(n+2)$ বিন্দুতে α, x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ শূন্য হবে এবং $F(x)$ একটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক যেহেতু $f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য।

সুতরাং $F(x)$ রোলের উপপাদ্যের (Rolle's theorem) সকল শর্ত পূরণ করে।

অতএব (3.1.10) এর সমীকরণে রোলের উপপাদ্য $(n+1)$ বার ব্যবহার করে $[a, b]$ অন্তরালে একটি বিন্দু c এর জন্য

$$F^{n+1}(c) = 0,\ a < c < b \ldots (3.1.11)$$

(3.1.10) সমীকরণকে $(n+1)$ তম অন্তরকলন করে পাই

$$F^{n+1}(x) = f^{n+1}(x) - 0 - (n+1)!\ \psi(\alpha)$$

যেহেতু $\phi(x)$ একটি n মাত্রার বহুপদরাশি এবং $\omega(x)$ একটি $(n+1)$ মাত্রার রাশি, (3.1.11) থেকে পাই

$$0 = F^{n+1}(c) = f^{n+1}(c) - (n+1)!\ \psi(\alpha)$$

বা $\psi(\alpha) = \dfrac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \ldots (3.1.12)$

$\therefore$ (3.1.17) থেকে পাই

$$R_{n+1}(\alpha) = \omega(\alpha)\ \psi(\alpha) = \omega(\alpha)\ \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!},\ a < c < b \ldots (3.1.13)$$

α কে x দ্বারা পরিবর্তিত করে পাই

$$R_{n+1}(x) = \omega(x)\ \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} = (x-x_0)\ (x-x_1) \ldots (x-x_n)\ \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!};\ a < c < b \ldots (3.1.14)$$

মন্তব্য : যদি আন্তঃপাঠন বিন্দুগুলি x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ সমদূরবর্তী হয় এবং $h\ (>0)$ দুইটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব হয়, অর্থাৎ

$$x_r = x_0 + rh\ (r = 0, 1, \ldots, n)$$

তাহলে একটি নতুন চলক $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ ব্যবহার করে (3.1.14) কে লেখা যায়

$$R_{n+1}(x) = u\ (u-1) \ldots (u-n)\ h^n\ \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}$$

3.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি যে যেটি করতে পারবেন সেটি হল

- আন্তঃপাঠন (Interpolation) সূত্রের সাহায্যে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধান।

3.3 নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্র (Newton's Forward Interpolation Formula)

ধরা যাক, $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $(n + 1)$ সংখ্যক সমদূরবর্তী x এর মানের জন্য f (x) অপেক্ষকের যথাক্রমে $y_0, y_1, \dots, y_n$ মানগুলি দেওয়া আছে, অর্থাৎ যখন

$x_i = x_0 + ih,\ x_0 = a,\ h = \frac{b-a}{n}$

তখন $f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \dots, n$ .... (3.2.1)

মানগুলি দেওয়া আছে। এখন আমাদের লক্ষ্য হল একটি বহুপদ রাশিমালা p (x) নির্ণয় করা যার ঘাত $\leq n$ এবং x_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ বিন্দুতে মান y_i এর সমান, অর্থাৎ

$p(x_i) = f(x_i) = y_i\ (i = 0, 1, \dots n)$ ..... (3.2.2)

যেহেতু, p (x) একটি n ঘাতী বহুপদ রাশিমালা, সুতরাং, p (x) কে নিচের আকারে লেখা যায়

$p(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + A_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x - x_n)$ ... (3.2.3)

(3.2.2) এর শর্তগুলি বারংবার ব্যবহার করে $A_0, A_1, \dots, A_n$ সহগগুলি নির্ণয় করা যায়।

(3.2.3) তে $x = x_0$ বসিয়ে পাই

$p(x_0) = A_0 \quad \therefore A_0 = p(x_0) = f(x_0) = y_0$

(3.2.3) তে $x = x_1$ বসিয়ে পাই

$p(x_1) = f(x_1) = A_0 + A_1(x_1 - x_0) = y_0 + A_1 h$

$$\therefore y_1 = y_0 + A_1 h \Rightarrow A_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

(3.2.3) তে $x = x_2$ বসিয়ে পাই

$p(x_2) = f(x_2) = A_0 + A_1(x_2-x_0) + A_2(x_2-x_0)(x_2 - x_1)$

$$\therefore y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot 2h + A_2 \cdot 2h \cdot h$$

$$\Rightarrow y_2 = y_0 + 2(y_1 - y_0) + A_2 \cdot 2h^2$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{y_2 - 2h_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

একই রকম ভাবে আমরা পাই

$$A_r = \frac{\Delta^r y_0}{r!\,h^r},\ r = 0, 1, 2, \ldots, n$$

সুতরাং A_0, A_1, A_2, ..., A_n এর মানগুলি (3.2.3) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} + \cdots$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{r-1})\frac{\Delta^r y_0}{r!h^r} + \cdots$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{r!h^n} \cdots \quad (3.2.4)$$

ধরা যাক $u = \frac{x - x_0}{h}$; তাহলে $\frac{x - x_r}{h} = \frac{x - x_0 - rh}{h} = u - r,\ r \le n$

u একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা; এর কোন মাত্রা নেই। u কে দশা (Phase) বলা হয়।
u সাপেক্ষে (3.2.4) নং সমীকরণকে লেখা যায়

$$p(x) = y_0 + u\Delta y_0 + u(u-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \cdots + u(u-1)\cdots(u-r+1)\frac{\Delta^r y_0}{r!} + \cdots$$

$$+ u(u-1)\cdots(u-n+1)\frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

বা $p(x) = y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{u}{r}\Delta^r y_0 + \cdots$

$$+ \binom{u}{n}\Delta^n y_0 \cdots \quad (3.2.5)$$

(3.2.5) নং সমীকরণকে নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্র বলা হয়। x_0 বিন্দুটিকে প্রারম্ভিক বিন্দু (initial point) বলে। যে বিন্দুতে f (x) এর মান নির্ণয় করতে হবে সেটি যদি সারণীর প্রথমদিকে অর্থাৎ x_0, x_1, ইত্যাদির নিকটে থাকে, তাহলে f (x) এর আসন্নমান নির্ণয়ের জন্য নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্রটি ব্যবহার করা হয়। f (x) কে p (x) দ্বারা পরিবর্তিত করার জন্য নিউটনের অগ্রআন্তঃপাঠন পদ্ধতিতে ভ্রান্তির

পরিমান

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(c)$$

$$= \frac{u(u-1)\cdots(u-n+1)(u-n)}{n!} h^{n+1} f^{n+1}(c) \cdots (3.2.6)$$

যেখানে $\min\{x, x_0, x_n\} < c < \max\{x, x_0, x_n\}$

3.3.1 নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্রটির সুবিধা — অসুবিধা

সুবিধা :

(1) u এর বিভিন্ন মানের জন্য 1, $\binom{u}{1}$, $\binom{u}{2}$ .... সহগগুলির মান লিপিবদ্ধ করলে তা বিভিন্ন সমস্যায় ব্যবহার করা যাবে।

(2) কোনো একটি y এর ভুল মান লিপিবদ্ধ হলে সারণী অনিয়মিত হয়ে পড়বে এবং সহজেই ভুলের উপস্থিতি জানা যাবে।

(3) x এর দু-একটি মান বাড়ালে বা কমালে সারণী এবং সূত্রটির বিশেষ পরিবর্তন হবে না।

অসুবিধা :

(1) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ বিন্দুগুলি সমদূরবর্তী হতে হবে। অন্যথায় সূত্রটি প্রযোজ্য হবে না।

(2) প্রদত্ত y এর মানগুলির সংখ্যা পর্যাপ্ত হতে হবে; অন্যথায় প্রয়োজনীয় অন্তর সারণী গঠন করা যাবে না।

উদাহরণ : (3.2.1) নিচের সারণী ব্যবহার করে f (1.5) এর মান নির্ণয় করুন।

x :	1	2	3	4	5	6	7	8
f (x) :	1	8	27	64	125	216	343	572

সমাধান : এখানে $x = 1.5$, $x_0 = 1$, $h = 1$ । যেহেতু x এর মান সারণীর প্রথমদিকে অবস্থিত, সুতরাং, নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করতে হবে।

$$f(x) \simeq y_0 + u\Delta y_0 + u(u-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \cdots$$

এখানে $u = \dfrac{x-x_0}{h} = \dfrac{1.5-1}{1} = .5$ এবং $\Delta y_0, \Delta^2 y_0 \cdots$ ইত্যাদির মানগুলি অগ্রান্তর সারণী থেকে পাওয়া যাবে

x	y = f (x)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	1			
		7		
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		6
5	125		30	
		91		6
6	216		36	
		127		6
7	343		42	
		169		
8	512			

y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ এর মানগুলি নিউটনের আন্তঃপাঠন সূত্রে বসিয়ে পাই

$$f(1.5) = 1 + 0.5 \times 7 + (0.5)(-0.5) \times \frac{12}{2!} + (0.5)(-0.5)(-1.5) \times \frac{6}{3!}$$

$= 1 + 3.5 - 1.5 + 0.375$

$= 3.375$

3.4 নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র (Newton's Backward Interpolation Formula)

ধরা যাক, চলক x এর (n + 1) সংখ্যক সমদূরবর্তী বিন্দু $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$, যেখানে $x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ এর জন্য $y = f(x)$ এর মান গুলি $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ জানা আছে।

এখানে আমাদের লক্ষ্য হল একটি n ঘাতের বহুপদ রাশিমালা q (x) নির্ণয় করা যেখানে

$$q(x_i) = f(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \ldots (3.3.1)$$

ধরা যাক, x এর যে মানের জন্য f (x) এর আসন্নমান নির্ণয় করতে হবে, সেই মানটি সারণীর শেষের দিকে, অর্থাৎ x_n এর নিকটবর্তী। যেহেতু q (x) একটি n ঘাতের বহুপদ রাশিমালা সুতরাং, তাকে নিচের আকারে লেখা যেতে পারে:

$$q(x) = a_0 + a_1 (x - x_n) + a_2 (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + a_r (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots$$
$$\ldots (x - x_{n-r+1}) + \ldots + a_n (x - x_n) \ldots (x - x_1) \ldots (3.3.2)$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ সহগগুলিকে এমনভাবে নির্ণয় করতে হবে যেন (3.3.1) এর সমীকরণ গুলি সিদ্ধ হয়।

(3.3.2) নং সমীকরণে $x = x_n$ বসিয়ে পাই

$q(x_n) = f(x_n) = y_n = a_0$

$\therefore a_0 = y_n$

(3.3.2) নং সমীকরণে $x = x_{n-1}$ বসিয়ে পাই

$$q(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) = y_{n-1} = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) = y_n - a_1 h$$

$$\therefore a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\nabla f(x_n)}{h} = \frac{\Delta f(x_{n-1})}{h}$$

(3.3.2) নং সমীকরণে $x = x_{n-2}$ বসিয়ে পাই

$$q(x_{n-2}) = f(x_{n-2}) = y_{n-2} = a_0 + a_1(x_{n-2} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})$$

$$= a_0 + a_1(-2h) + a_2(-2h)(-h)$$

$$= y_n - 2h\frac{y_n - y_{n-1}}{h} + 2h^2 a_2$$

$$\Rightarrow 2h^2 a_2 = y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} = \nabla^2 y_n$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\nabla^2 y_n}{2!\,h^r} = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{r!\,h^2}$$

একই রকম ভাবে আমরা পাই

$$a_r = \frac{\nabla^r y_n}{r!\,h^r} = \frac{\Delta^r y_{n-r}}{r!\,h^r}$$

(3.3.2) নং সমীকরণে a_r $(r = 0, 1, \ldots, n)$ মানগুলি বসিয়ে পাই

$$q(x) = y_n + (x - x_n)\frac{\nabla y_n}{h} + (x - x_n)(x - x_{n-1})\frac{\nabla^2 y_n}{2!\,h^2} + \ldots$$

$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_{n-r+1})\frac{\nabla^r y_n}{r!\,h^r} + \ldots$$

$$\ldots + (x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)\frac{\nabla^n y_n}{n!\,h^n} \ldots(3.3.3)$$

অথবা $q(x) \quad y_n + (x - x_n)\dfrac{\Delta y_{n-1}}{h} + (x - x_n)(x - x_{n-1})\dfrac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2} + \ldots$

$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_{n-r+1}) \frac{\Delta^r y_{n-r}}{r!\, h^r} + \ldots$$

$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) \frac{\nabla^n y_0}{n!\, h^n} \ldots (3.3.4)$$

$u = \dfrac{x - x_n}{h}$ ধরলে পাওয়া যায়

$$\frac{x - x_{n-r}}{h} = \frac{(x - x_n) - (x_n - x_{n-r})}{h} = u + r$$

অতএব, u চলকের সাহায্যে (3.3.2) সমীকরণকে লেখা যায়

$$q(x) = y_n + u\nabla y_n + u(u+1)\frac{\nabla^2 y_n}{2!} + \cdots + u(u+1)\cdots(u+r-1)\frac{\nabla^2 y_n}{r!}$$

$$+ \cdots + u(u+1)\cdots(u+n-1)\frac{\nabla^2 y_n}{n!} \ldots\ldots (3.3.5)$$

অথবা $f(x) \simeq q(x) = y_n + u\Delta y_{n-1} + u(u+1)\dfrac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} + \ldots$

$$+ u(u+1) \ldots (u+r-1)\frac{\Delta^r y_{n-r}}{r!} + \ldots$$

$$+ u(u+1) \ldots (u+n-1)\frac{\Delta^n y_0}{n!} \quad \ldots..(3.3.6)$$

(3.3.5) অথবা (3.3.6) নং সমীকরণকে নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র বলা হয়।

নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন পদ্ধতিতে ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{n+1}(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)(x - x_0)\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}$$

$$= u(u+1) \cdots (u+n-1)(u+n)\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdots\cdots (3.3.7)$$

যেখানে সর্বনিম্ন $\{x, x_0, x_n\} < c <$ সর্বোচ্চ $\{x, x_0, x_n\}$

3.5 উদাহরণমালা

প্রদত্ত সারণী ব্যবহার করে f (2.8) এর মান নির্ণয় করুন।

x :	0	1	2	3
f (x) :	1	2	11	34

সমাধান : এখানে x = 2 – 8 মানটি সারণীর শেষের দিকে অবস্থিত। সুতরাং পশ্চাদান্তর সারণী প্রস্তুত করে নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপঠন সূত্রের সাহায্যে f (2.8) এর মান নির্ণয় করতে হবে।

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1			
		1		
1	2		8	
		9		$\underline{6}$
2	11		$\underline{14}$	
		$\underline{23}$		
3	$\underline{34}$			

এখানে $x_n = x_3 = 3,\ h = 1,\ x = 2.8$

$$\therefore\ u = \frac{x - x_3}{h} = -0.2$$

$$\therefore\ f(2.8) = 34 + (-0.2) \times 23 + \frac{(-0.2)(-0.2+1)}{2!} \times 14$$

$$+ \frac{(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)}{3!} \times 6$$

$$= 34 - 4.6 - 1.12 - 0.288 = 27.992$$

উদাহরণ : প্রদত্ত সারণী ব্যবহার করে f (0.33) এবং f (0.39) এর মান নির্ণয় করুন।

x :	0.30	0.32	0.34	0.36	0.38	0.40
y :	1.7596	1.7698	1.7804	1.7912	1.8024	1.8139

সমাধান : অন্তর সারণীটি হল :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0.30	1.7596					
		0.0102				
0.32	1.7698		0.0004			
		0.0106		–0.0002		
0.34	1.7804		0.0002		0.0004	
		0.0108		0.0002		–0.0001
0.36	1.7912		0.0004		0.0003	
		0.0112		0.0001		
0.38	1.8024		0.0003			
		0.0115				
0.40	1.8139					

(i) এখানে $x = 0.33$ মানটি সারণীর প্রথমের দিকে অবস্থিত, সুতরাং নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে।

$$f(x) = y_0 + u\Delta y_1 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_2 \quad \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_3 + \cdots$$

এখানে $h = 0.02$ এবং $x_0 = 0.32$

$$\therefore\ u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.33 - 0.32}{0.02} = 0.05$$

$$\therefore\ f(0.33) = 1.7698 + 0.5 \times 0.0106 + \frac{0.5\,(0.5 - 1)}{2} \times 0.0002$$

$$+ \frac{0.5\,(0.5 - 1)\,(0.5 - 2)}{6} \times 0.0002$$

$$+ \frac{0.5\,(0.5-1)\,(0.5-2)\,(0.5-3)}{24} \times (-0.0003)$$

$$= 1.7698 + 0.0053 - 0.000025 + 0.0000125 + 0.0000117$$

$$= 1.775099 \simeq 1.7751$$

মন্তব্য : উপরের অন্তরসারী থেকে দেখা যাচ্ছে যে তৃতীয় ক্রমের অন্তরে অসংগতি আছে। পরবর্তী অন্তরগুলিতে অসংগতির পরিমান আরও বৃদ্ধি পাচ্ছে। সুতরাং, y এর মান নির্ণয়ে আমরা যদি তৃতীয় বা তার পরবর্তী অন্তরগুলি ব্যবহার করি ভ্রান্তির পরিমান বৃদ্ধি পাবে।

(ii) $x = 0.39$ মানটি সারণীর শেষের দিকে অবস্থিত, সুতরাং নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে।

$$f(x) = f(x_2) + u\Delta f(x_{n-1}) + \frac{u(u+1)}{2}\Delta^2 f(x_{n-2}) + \cdots$$

এখানে $x = 0.39$, $x_n = 0.40$, $h = 0.02$

$$\therefore u = \frac{x - x_n}{h} = -\frac{0.01}{0.02} = -0.5$$

$$\therefore f(0.39) = 1.8139 + (-0.5) \times (0.0115) + \frac{(-0.5)(-0.5+1)}{2} \times 0.0003$$

$$= 1.8139 - 0.00575 - 0.000038 = 1.808112 \simeq 1.8081$$

উদাহরণ : নিচের সারণী ব্যবহার করে কতজন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর 40 থেকে 45 এর মধ্যে থাকতে পারে তা নির্ণয় করুন।

প্রাপ্তনম্বর :	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
ছাত্র সংখ্যা :	31	42	51	35	31

সমাধান :

প্রথমে আমরা সমষ্টি (cumulative frequency) সারণী তৈরী করব।

প্রাপ্তনম্বর $\leqslant x$:	40	50	60	70	80
ছাত্র সংখ্যা $f(x)$:	31	73	124	159	190

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
40	$\underline{31}$				
		$\underline{42}$			
50	73		$\underline{9}$		
		51		$\underline{-25}$	
60	124		–16		$\underline{37}$
		35		12	
70	159		–4		
		31			
80	190				

এখানে $x = 45$ মানটি সারণীর প্রথমে দিকে অবস্থিত। সুতরাং, নিউটনের অগ্র আন্তঃপঠন সূত্রের সাহায্যে

f (45) এর মান নির্ণয় করতে হবে।

এখানে $x_0 = 40,\ h = 10$

$$\therefore u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{45 - 40}{10} = 0.5$$

নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্র হল :

$$f(x) \simeq p(x) = y_0 + \frac{u}{1!}\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots$$

$$\therefore f(45) = 31 + 0.5 \times 42 + \frac{0.5\,(0.5-1)}{2} \times 9 + \frac{(0.5)\,(0.5-1)\,(0.5-2)}{6} \times (-25)$$

$$+ \frac{(0.5)\,(0.5-1)\,(0.5-2)\,(0.5-3)}{24} \times 37$$

$= 31 + 21 - 1.125 - 1.5625 - 1.4453$

$\simeq 47.87$

অতএব, প্রাপ্ত নম্বর 45 এর নিচে এমন ছাত্রের সংখ্যা হল 47.87 বা 48.

কিন্তু প্রাপ্ত নম্বর 40 এর নিচে ছাত্রের সংখ্যা হল 31

সুতরাং ছাত্রের সংখ্যা যাদের প্রাপ্ত নম্বর 40 থেকে 45 এর মধ্যে তার সংখ্যা হল 48 – 31 = 17.

3.6 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) আন্তঃপাঠন বলতে কি বোঝেন? এর কি কি পদ্ধতি আছে। (সংকেত : 3.2, 3.3 দ্রষ্টব্য)

(2) আন্তঃপাঠনে সম্ভাব্য ভ্রান্তির উৎপত্তি সম্বন্ধে আলোচনা করুন।

(3) প্রদত্ত বিন্দুজোড়ার সাহায্যে রৈখিক আন্তঃপাঠন অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

a) (0,1) ও (1,3)

b) (–2,3) ও (7,12)

(**সংকেত** : দুটি বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখার সমীকরণ দ্রষ্টব্য)

(4) নিম্নলিখিত সারণীর উপযুক্ত দ্বিঘাত আন্তঃপাঠন অপেক্ষক নির্ণয় করুন

x :	0	1	2	3
f (x) :	1	3	7	13

[**সংকেত** : $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$ নির্ণয় করে সূত্র প্রযোজ্য] (**উত্তর** : $x^2 + x + 1$)

(5) নিউটনের আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করে নিম্নলিখিত সারণীর থেকে 1905 -এর জনসংখ্যা নির্ণয় করুন

Year :	1891	1901	1911	1921	1931
Population :	98,752	132,285	168,076	195,690	246,050

[**সংকেত** : অন্তর সারণী প্রস্তুত করে ভাবুন] (**উত্তর** : 147,841(প্রায়))

(6) $\text{Sin } 45^0 = 0.7071$, $\text{Sin } 50^0 = 0.7660$, $\text{Sin } 55^0 = 0.8192$, $\text{Sin } 60^0 = 0.8660$ দেওয়া থাকলে যে কোন আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করে $\text{Sin}52^0$ -র মান নির্ণয় করুন।

[**সংকেত** : সমস্যা (5) এর মত] (**উত্তর** : 0.7880032)

(7) নিম্নলিখিত সারণীটি দেওয়া আছে।

x :	1	2	3	4	5	6	7	8
f (x) :	1	8	27	64	125	216	343	512

f (7.5) নির্ণয় করুন

[**সংকেত** : নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র] (**উত্তর** : 421.875)

(8) Γ (x) এর সারণী নিম্নে দেওয়া হল :

x :	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19
Γ (x) :	0.93304	0.92980	0.92670	0.92373	0.92088

Γ (1.1673) এর মান নির্ণয় করুন (**উত্তর** : 0.92723)

3.7 সারাংশ

আলোচ্য অধ্যায়ে সাংখ্যিক বিশ্লেষণ এর বিশেষ দুটি সূত্র আলোচিত হয়েছে। নিউটনের অগ্রআন্তঃ এবং পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্রদুটি অত্যন্ত উপযোগী সূত্র, এই সূত্রদুটির প্রয়োগ পরবর্তী কালে অনেক ক্ষেত্রেই পাওয়া যাবে। উদাহরণ হিসাবে এরকম কয়েকটি সমস্যা আলোচিত হয়েছে। অনুশীলনীতে প্রয়োগমূলক কয়েকটি অঙ্ক দেওয়া হয়েছে।

3.8 সহায়ক গ্রন্থাবলি

1. Gupta, Malik : Calculus of Finite Differences & Numerical Analysis (Krishna Prakashan Mandir)
2. F. B. Hildebrand : Introduction to Numerical Analysis (Tata Migraw Hill)

একক 4 ❑ ল্যাগরাঞ্জের ইন্টারপোলেশন সূত্র (ভ্রান্তিসহ) ও নিউটনের সঙ্গে তুলনা

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

ধরা যাক [a, b] অন্তরালে $f(x)$ একটি অন্তত অপেক্ষক এবং x এর $(n + 1)$ সংখ্যক স্বতন্ত্র মান $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, গুলির জন্য $f(x)$ এর মান গুলি জানা আছে।

[a,b] অন্তরালে আমরা একটি n ঘাতের বহুপদ রাশিমালা

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ .... (4.1)

নির্ণয় করব যেখানে $P(x_i) = f(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ .... (4.2)

এখন $P(x)$ থাকবে যদি ভ্যাণ্ডারমণ্ড ডিটারমিনেন্ট (Vandarmond Determinant)

$$v(x_0, x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ..... & x_1^n \\ .... & .... & .... & .... & \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0 \text{ হয়}$$

ধরি, $$v(x_0, x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ .... & .... & .... & .... & \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & ... & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{vmatrix}$$

ডিটারমিনেন্টের ধর্ম থেকে পাই

$v(x_0, x_1, ..., x_n) = (x-x_0)(x-x_1) ... (x-x_{n-1}) A$; যেখানে A একটি ধ্রুবক, উভয় পক্ষে x^n এর সহগ সমান করে পাই

$$A = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = v(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

অতএব, $v(x_0, x_1, \dots, x_n) = v(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)$

পদ্ধতিটি পুনঃ পুনঃ ব্যবহার করে পাই

$v(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$ [যেহেতু x_i গুলি স্বতন্ত্র]

4.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি সে বিষয়টি করতে পারবেন সেটি হল—

- ল্যাগরাঞ্জের সূত্রের সাহায্যে (Lagranges Interpolation) বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধান।

4.3 রৈখিক আন্তঃপাঠন (Linear Interpolation)

এখানে $n = 1$ এবং আমরা একটি একঘাত রাশিমালা নির্ণয় করব। অর্থাৎ

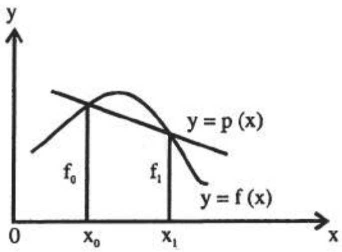
$P(x) = a_0 + a_1 x$ — (4.1.2)

যেখানে a_0, a_1 ধ্রুবক এবং $P(x_i) = f(x_i)$; $i=0,1$

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) = p(x_0) = a_1 x_0 + a_0 \\ f(x_1) = p(x_1) = a_1 x_1 + a_2 \end{aligned}\right\} \dots (4.1.2)$$

(4.1.1) এবং (4.1.2) থেকে পাই

$$\begin{vmatrix} P(x) & x & 1 \\ f(x_0) & x_0 & 1 \\ f(x_1) & x_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



সরল করে পাই $P(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$

$= l_0(x) f(x_0) + l_1(x) f(x_1) \quad \dots (4.1.3)$

যেখানে $l_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}, l_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

$l_0(x)$ এবং $l_1(x)$ কে ল্যাগ্র্যাঞ্জের মৌলিক অপেক্ষক বলা হয় এবং

$$l_0(x)+l_1(x)=1$$
$$l_0(x_0)=1, l_0(x_1)=0$$
$$l_1(x_0)=0, l_1(x_1)=1$$

অথবা $l_i(x_j)=\delta_{ij}=\left|\begin{matrix}1 & i\neq j\\ \\ 0 & i=j\end{matrix}\right\}\ldots (4.1.4)$

(4.1.3) সূত্রটাকে ল্যাগরাঞ্জের রৈখিক আন্তঃ পঠন সূত্র বলা হয়।

4.4 ল্যাগরাঞ্জের সাধারণ আন্তঃপাঠন সূত্র (General Interpolation Formula)

ধরাযাক, [a,b] অন্তরালে x এর (n+1) সংখ্যাক স্বতন্ত্র মান $a_0 = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ এর জন্য একটি অপেক্ষক y = f(x) এর মানগুলি দেওয়া আছে এবং প্রদত্ত মানগুলি হল

$y_i = f(x_i)$ (i=0, 1, ..., n) ... (4.2.1)

[a,b] অন্তরালে একটি n ঘাতের বহুপদ রাশিমালা P (x) নির্ণয় করা যাবে যার জন্য

$P(x_i) = y_i$ (i = 0, 1, ... n) .... (4.2.2)

হবে এবং তখন P (x) কে আন্তঃ পাঠন বহুপদরাশিমালা বলা হবে। ল্যাগরাঞ্জের পদ্ধতি অনুসারে আমরা ধরব—

$$P(x)=C_0l_0(x)+C_1l_1(x)+\ldots\ldots+C_nl_n(x) \quad \ldots (4.2.3)$$

যেখানে $l_i(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\;[i=1,2,\ldots,n]$

এবং $C_0, C_1, \ldots, C_n$ ধ্রুবক। .... (4.2.4)

(4.3.3) নং সমীকরণে $x = x_i$ বসালে পাই

$$P(x_i) = C_il_i(x_i)$$

বা $C_i=\dfrac{y_i}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$; i = 1, 2, ..., n

C_i এর মানগুলি (4.2.3) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}C_il_i(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \quad \ldots (4.2.5)$$

(4.3.5) নং সূত্রটিকে ল্যাগরাঞ্জের সাধারণ আন্তঃপাঠন সূত্র বলা হয়।

ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপঠন সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_n)f^{n+1}(c),\quad a< c< b$$

যদি $f^{n+1}(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে।

কয়েকটি বিশেষ ধর্ম :

1. ল্যাগ্রাঞ্জের মূল অপেক্ষক $l_i(x)$ গুলি চলক x এবং পাতবিন্দু $x_0, x_1, ..., x_n$ এর উপর নির্ভর করে, কিন্তু y এর মানের উপর নির্ভর করে না।

2. চলক x এর রৈখিক রূপান্তর ঘটালে ল্যাগরাঞ্জের মূল অপেক্ষক এর মান পরিবর্তন হয় না।

ধরা যাক, $x= a + bt$; a, b ধ্রুবক।

তাহলে $x_i = a + bt_i$ এবং $x-x_r = b\,(t-t_r)$

অতএব $x_r - x_j = t\,(t_r - t_j),\ r \neq j$

$$\text{সুতরাং,}\quad l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\,....\,(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\,.....\,(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\,.....\,(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\,.....\,(x_i-x_n)}$$

$$= \frac{b^n(t-t_0)(t-t_1)\,....\,(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\,.....\,(t-t_n)}{a^n\,(t_i-t_0)(t_i-t_1)\,.....\,(t_i-t_{i-1})(t-t_{i+1})\,.....\,(t_i-t_n)}$$

$$= \omega_i(t)$$

সুতরাং, x এর রৈখিক রূপান্তরের ফলে ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্রের কোনো পরিবর্তন হয় না।

3. ল্যাগরাঞ্জের মূল অপেক্ষকগুলির যোগফল 1, অর্থাৎ

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$$

ধারাবাহিক, $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$

উভয়পক্ষের log নিয়ে অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{x-x_i}$$

$$\text{বা}\quad \omega'(x) = \sum_{i=0}^{n}(x-x_0)(x-x_1)\,...\,(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\,...\,(x-x_n)$$

$$\text{এবং}\quad \omega'(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\,...\,(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\,...\,(x_i-x_n)$$

$$\therefore\ l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\,\omega(x_i)} \qquad ....(4.2.6)$$

ধরি, $\dfrac{1}{\omega(x)} = \dfrac{A_0}{x-x_0} + \dfrac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \dfrac{A_n}{x-x_n}$

$$\therefore 1 = A_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + A_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \ldots$$
$$+ A_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \qquad \ldots (4.2.7)$$

(4.3.7) নং সমীকরনে $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$ বসিয়ে পাই

$1 = A_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)$ বা $A_0 = \dfrac{1}{\omega^1(x_0)}$

$1 = A_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)$ বা $A_1 = \dfrac{1}{\omega^1(x_1)}$

....

$1 = A_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})$ বা $A_n = \dfrac{1}{\omega^1(x_n)}$

এখন A_i $(i=0, 1, \ldots, n)$, (4.2.6) নং সমীকরনে বসিয়ে পাই

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_r)\,\omega^1(x_r)} = \sum_{i=1}^{n} l_i(x)$$

ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্রের সুবিধা-অসুবিধা :

সুবিধা :

(1) পাতবিন্দুগুলি $x_0, x_1, \ldots, x_n$ সমদূরবর্তী না হলেও সূত্রটি প্রয়োগ করা চলে।

(2) x এর মান সারণীর প্রথম, মধ্য বা শেষ প্রান্তে যেখানেই থাকুক না কেন, সূত্রটি ব্যবহার করা চলে।

(3) চলক x এর মান রৈখিক রূপান্তর করে অনেক সময় $\omega_i(x)$ এর মান নির্ণয় করা সহজ হয়।

অসুবিধা :

(1) পদ্ধতিটি শ্রমসাধ্য।

(2) যে কোনো x এর জন্য f (x) এর মান নির্ণয়ে সমস্ত উপাত্ত $(x_0,y_0), (x_1, y_1) \ldots (x_n,y_n)$ ব্যবহার করা চলে।

(3) এক বা একাধিক বিন্দু সংযোজন বা বিয়োজন করলে সমস্ত l_i (x) এর মানের পরিবর্তন ঘটে। প্রত্যেকটি l_i (x) এর মান পুনরায় নির্ণয় করতে হবে।

(4) এই পদ্ধতিতে কোনও 'আন্তর সারণী' প্রস্তুত করতে হয় না। তারফলে y এর কোনও মানে বা কোনও পদে ভ্রান্তি ঘটলে সহজেই তার ইঙ্গিত পাওয়া যায় না।

ব্যবহারিক গণনায় এই পদ্ধতির প্রয়োগ কম হলেও বস্তুতাত্বিক অলোচনায় এর প্রয়োগ আছে।

গণনা পদ্ধতি (Computational scheme)

ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল

$$f(x) \simeq p(x) = \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)} = \omega(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{D_i}$$

যেখানে $D_i = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$
আমরা নিচের সারণীটি তৈরী করব।

row product					D_i	y_i	y_i/D_i
$\underline{x - x_0}$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	$\ldots\ x_0 - x_{n-1}$	$x_0 - x_n$	D_0	y_0	y_0/D_0
$x_1 - x_0$	$\underline{x - x_1}$	$x_1 - x_2$	$\ldots\ x_1 - x_{n-1}$	$x_1 - x_n$	D_1	y_1	y_1/D_1
$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$\underline{x - x_2}$	$\ldots\ x_2 - x_{n-1}$	$x_2 - x_n$	D_2	y_2	y_2/D_2
....	......	.....	....				
....	......	.....	....				
$x_{n-1} - x_0$	$x_{n-1} - x_1$	$x_{n-1} - x_2$	$\ldots\ \underline{x - x_{n-1}}$	$x_{n-1} - x_n$	D_{n-1}	y_{n-1}	y_{n-1}/D_{n-1}
$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	$\ldots\ x_n - x_{n-1}$	$\underline{x - x_n}$	D_n	y_n	y_n/D_n

D_i এর মান (i+1) -তম সারির পদগুলি এবং $\omega(x)$ এর মান সারণীর মূখ্য কৌনিক (principal diagonal) পদগুলির গুণফল।

উদাহারণ : নিচের সারণী ব্যবহার করে ল্যাগরাঞ্জের অপেক্ষাকটি নির্ণয় করুন

x :	0	1	2	3
f (x) :	1	2	11	34

সমাধান : গণনা পদ্ধতির সারণীটি হল :

				D_i	y_i	y_i/D_i
$x - x_0 = \underline{x}$	$(x_0 - x_1) = -1$	$(x_0 - x_2) = -2$	$(x_0 - x_3) = -3$	$-6x$	1	$1/(-6x)$
$x_1 - x_0 = 1$	$(x - x_1) = \underline{x-1}$	$(x_1 - x_2) = -1$	$(x_1 - x_3) = -2$	$2(x-1)$	2	$1/(x-1)$
$x_2 - x_0 = 2$	$(x_2 - x_1) = 1$	$(x - x_2) = x-2$	$(x_2 - x_3) = -1$	$-2(x-2)$	11	$11/[-2(x-2)]$
$x_3 - x_0 = 3$	$(x_3 - x_1) = 2$	$(x_3 - x_2) = 1$	$(x - x_3) = \underline{x-3}$	$6(x-3)$	34	$34/[6(x-3)]$

এখানে $\omega(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$

$$\therefore\ p(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\left[-\frac{1}{6x} + \frac{1}{x-1} - \frac{11}{2(x-2)} + \frac{34}{6(x-3)}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[-(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-2)(x-3) - 33x(x-1)(x-3) + 34x(x-1)(x-2)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 + 6x^3 - 30x^2 + 36x - 33x^3 + 132x^2 - 99x + 34x^3 - 102x^2 + 68x\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[6x^3 + 6x^2 - 6x + 6\right] = x^3 + x^2 - x + 1$$

4.5 উদাহরণমালা

উদাহারণ : ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্রের সাহায্যে নিচের সারণী থেকে f (0) এর মান নির্ণয় করুন।

x :	–1	–2	2	4
f (x) :	–1	–9	11	69

সমাধান : এখানে $x = 0$, $x_0 = -1$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ এবং গণনা পদ্ধতির সারণীটি হল

				D_i	y_i	y_i/D_i
$x - x_0 = \underline{1}$	$x_0 - x_1 = 1$	$x_0 - x_2 = -3$	$x_0 - x_3 = -5$	15	–1	–1/15
$x_1 - x_0 = -1$	$x - x_1 = \underline{2}$	$x_1 - x_2 = -4$	$x_1 - x_3 = -6$	–48	–9	9/48
$x_2 - x_0 = 3$	$x_2 - x_1 = 4$	$x - x_2 = \underline{-2}$	$x_2 - x_3 = -2$	48	11	11/48
$x_3 - x_0 = 5$	$x_3 - x_1 = 6$	$x_3 - x_2 = 2$	$x - x_3 = \underline{-4}$	–240	69	–69/240

$$\omega(0) = 1 \times 2 \times (-2) \times (-4) = 16$$

$$p(0) = \omega(0) \sum_{i=0}^{3} \frac{f(x_i)}{(0-x_i)\,\omega'(x_i)}$$

$$= 16\left[-\frac{1}{15} + \frac{9}{48} + \frac{11}{48} - \frac{69}{240}\right]$$

$$= -\frac{16}{15} - \frac{69}{49} + \frac{9}{3} + \frac{11}{3} = -\frac{85}{15} + \frac{20}{3} = \frac{100-85}{15} = 1$$

4.6 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্রটি নির্ণয় করুন। এই পদ্ধতির সুবিধা-অসুবিধা গুলি কি কি? ল্যাগরাঞ্জের পদ্ধতিতে কি বিপরীত আন্তঃপাঠন সম্ভব? যদি সম্ভব হয় তাহলে প্রয়োজনীয় সূত্র নির্ণয় করুন।

(2) f (x) কে বহুপদরাশি (সর্বোচ্চ ঘাত 3) ধরে নিম্নলিখিত সারণী থেকে f (x) কে নিরূপণ করুন।

x :	0	1	2	3
f (x) :	1	2	11	34

[**সংকেত** : ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন (ইন্টারপোলেশন) সূত্র] (**উত্তর** : $f(x) = x^3+x^2-x+1$)

(3) ল্যাগরাঞ্জের সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত সারণী থেকে f (1) নির্ণয় করুন।

x :	0	2	3	4
f (x) :	5	19	50	105

[**সংকেত** : সমস্যা '2' এর মত] (**উত্তর** : f (1) = 6)

(4) নিম্নলিখিত সারণীর সাহায্যে ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্র প্রয়োগ করে $x = 102$ বিন্দুতে y -এর মান নির্ণয় করুন।

x :	93.0	96.2	100.0	104.2	108.7
y :	11.38	12.80	14.70	17.07	19.91

[**সংকেত** : উদাহরণমালা (4.5) এর উদাহরণ দ্রষ্টব্য] (**উত্তর** : 15.85)

(5) নিচের সারণী থেকে $f(10.7)$ -এর মান নির্ণয় করুন।

x :	10.5	10.6	10.8	10.9	11.1	11.4
y :	.26969	.33839	.39544	.40022	.38332	.32257

[**সংকেত** : উপরের অনুশীলনী সমূহ্ দ্রষ্টব্য] (**উত্তর** : 0.37700)

(6) নিম্নলিখিত সারণীটি দেওয়া আছে

x	y	$\frac{dy}{dx}$
0.4	1.554284	0.243031
0.5	1.561136	−0.089618

$0.4 < x < 0.5$ অন্তরালে, $f(x)$ -এর $x = a$ বিন্দুতে চরম মান থাকলে $[a, f(a)]$ নির্ণয় করুন।

(**সংকেত** : ল্যাগরাঞ্জের আন্ত:পাঠন সূত্র, চরম মানের জন্য $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = 0$ হবে)

[**উত্তর** : $a = .47305$; $f(a) = 1.795388$]

4.7 সারাংশ

এই অধ্যায়েও ইন্টারপোলেশান বা আন্তঃপাঠন এর একটি বিশেষ সূত্র আলোচিত হয়েছে। এটি ল্যাগরাঞ্জের ইন্টারপোলেশান বা আন্তঃপাঠন সূত্র। এটি সর্বক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়। এই সূত্রটি প্রয়োগ এর ফলে উদ্ভুত ভ্রান্তির পরিমাণ কত হতে পারে সেটি নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে। পরিশেষে নিউটনের আন্ত:পাঠন সূত্রটির সঙ্গে এই সূত্রটি তুলনা করে কোন্ ক্ষেত্রে কোন্ সূত্র প্রয়োগ করা সুবিধাজনক তার ধারণা দেওয়া হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ ও অনুশীলনীর মাধ্যমে বিষয়টির উপযোগিতা আলোচিত হয়েছে।

4.8 সহায়ক গ্রন্থাবলি

1. S. A. Mollah : Numerical Analysis & Computational Procedures. (Books & Allied (P) Ltd.)
2. A. Gupta, S. C. Bose : Introduction to Numerical Analysis. (Academic Publishers)

একক 5 ❑ স্টারলিং ও বেসেলের কেন্দ্রীয় আন্তঃপাঠন সূত্রাবলী (Central Interpolation Formula for Starling and Bessel's)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

x এর মান প্রদেয় $x-y$ সারণীর প্রথম অথবা শেষের দিকে দেওয়া থাকলে y এর মান নিউটনের আন্তঃপাঠন সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায় (যেখানে বিন্দুগুলি সমদূরবর্তী), কিন্তু, x এর মান সারণীর মাঝের দিকে থাকলে নিউটনের অগ্র বা পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করা সুবিধা জনক নয়; কারণ, এক্ষেত্রে মূলবিন্দুকে মধ্যভাগে নিলে প্রাপ্ত অন্তরের সংখ্যা অনেক খানি হ্রাস পায়। সেইজন্য আমরা মধ্যান্তর ব্যবহার করে প্রয়োজনীয় আন্তঃপাঠন বহুপদ রাশিমালা গঠন করব।

5.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি যে বিষয়গুলি করতে পারবেন সেগুলি হল-

- গাউসের পদ্ধতিতে বিভিন্ন গাণিতিক সমাধান।
- স্টারলিং এবং বেসেলের আন্তঃপাঠন সূত্রের প্রয়োগ।

5.3 গাউসের আন্তঃপাঠন সূত্র (Gauss' Interpolation Formula)

(i) বিজোড় সংখ্যক সমদূরবর্তী বিন্দুর জন্য :

ধরা যাক [a, b] অন্তরালে $(2n+1)$ সংখ্যক সমদূরবর্তী

$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, অর্থাৎ $x_{\pm i} = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ [h ধ্রুবক] বিন্দুগুলিতে $y = f(x)$ অপেক্ষকের মানগুলি দেওয়া আছে এবং মানগুলি হল

$y_{\pm i} = f(x_{\pm i})$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ .... (5.2.1)

এখানে আমরা একটি 2n ঘাতের বহুপদ রাশিমালা $p(x)$ নির্ণয় করব যেখানে

$p(x_{\pm i}) = y_{\pm i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ .... (5.2.2)

যেহেতু $p(x)$ একটি 2n ঘাতী বহুপদী রাশিমালা, সুতরাং $p(x)$ কে নিচের আকারে লেখা যায়

$$p(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + A_3(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1) + A_4(x-x_{-1})$$
$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + A_5(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots$$
$$+ A_{2n-1}\left(x-x_{-\overline{n-1}}\right)\left(x-x_{-\overline{n-2}}\right)\cdots(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n) \quad \text{...., (5.2.3)}$$

A_i $(i = 0, 1, \ldots, 2n)$ সহগগুলি এমনভাবে নির্ণয় করতে হবে যেন (5.2.2) নং শর্তগুলি পূরণ হয়।
(5.2.3) নং সমীকরণে $x = x_0$ বসিয়ে পাই

$p(x_0) = f(x_0) = y_0 = A_0 \Rightarrow A_0 = y_0$

(5.2.3) নং সমীকরণে $x = x_1$ বসিয়ে পাই

$p(x_1) = f(x_1) = y_1 = A_0 + A_1(x_1 - x_0) = A_0 + A_1 h$

$$\therefore A_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}$$

(5.2.3) নং সমীকরণে $x = x_{-1}$ বসিয়ে পাই

$p(x_{-1}) = f(x_{-1}) = y_{-1} = A_0 + A_1(x_{-1} - x_0) + A_2(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)$

$$y_{-1} = y_0 + (-h)\frac{\Delta y_0}{h} + A_2(-h)(-2h)$$
$$= y_0 - (y_1 - y_0) + 2h^2 A_2$$

$$\text{বা, } A_2 = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2!\,h^2} = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\,h^2}$$

(5.2.3) নং সমীকরণে $x = x_2$ বসিয়ে পাই

$$p(x_2) = f(x_2) = y_2 = A_0 + A_1(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$+ A_3(x_2 - x_{-1})(x_2 - x_0)(x - x_1)$$

বা, $y_2 = A_0 + 2hA_1 + 2h.hA_2 + 3h.2h.hA_3$

$$= y_0 + 2(y_1 - y_0) + y_1 - 2y_0 + y_{-1} + 3!h^3A_3$$

$$\therefore A_3 = \frac{y_2 - 3y_1 + 3y_0 + y_{-1}}{3!\,h^3} = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!\,h^3}$$

একই রকম ভাবে আমরা পাই

$$A_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!\,h^4},\ A_5 = \frac{\Delta^5 y_{-2}}{5!\,h^5},\ \cdots,\ A_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)!\,h^{2n-1}}$$ এবং

$$A_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{2n!\,h^{2n}}$$

A_i $(i = 0, 1, ..., 2n)$ এর মানগুলি (5.2.3) নং সমীকরণ বসিয়ে পাই

$$p(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} + \left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}$$

$$+ \left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\left(\frac{x-x_2}{h}\right)\frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!} + \cdots$$

$$+ \left(\frac{x-x_{-n-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_{-n-2}}{h}\right)\cdots\left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\cdots\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_n}{h}\right)\frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2h)!}$$

... (5.2.4)

ফেজ u এর মান $\frac{x - x_0}{h}$ ধরলে পাওয়া যায়

$$\frac{x - x_i}{h} = \frac{x - x_0 - ih}{h} = u - \frac{ih}{h} = u - i$$

এবং $\frac{x - x_{-i}}{h} = \frac{x - x_0 + ih}{h} = u + i \quad (i = 0, 1, ..., n)$

অতএব, u চলকের সাহায্যে (5.2.3) সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$f(x) \simeq p(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(u+1)(u)(u-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$+ \cdots + \frac{(u+n-1)\cdots(u+1)u(u-1)\cdots(u-n)\Delta^{2n}y_{-n}}{(2n)!} \quad \ldots (5.2.5)$$

$$= y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_{-1} + \binom{u+1}{3}\Delta^3 y_{-1} + \binom{u+1}{4}\Delta^4 y_{-2} + \binom{u+2}{5}\Delta^5 y_{-2} +$$

$$\cdots + \binom{u+n-1}{2n-1}\Delta^{2n-1}y_{-n+1} + \binom{u+n-1}{2n}\Delta^{2n}y_{-n} \quad \ldots (5.2.6)$$

এবং ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{2n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\cdots(x-x_{-n})\frac{f^{2n+1}(c)}{(2n+1)!}$$

$$= (u+n)(u+n-1)(u+n-2)\ldots(u+1)u(u-1)\ldots(u-n+1)(u-n)\frac{h^{2n+1}f^{2n+1}(c)}{(2n+1)!}$$

$$= u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\ldots(u^2-n^2)\frac{h^{2n+1}f^{2n+1}(c)}{(2n+1)!} \quad \ldots (5.2.7)$$

যেখানে $a < c < b$

(5.2.5) অথবা (5.2.6) নং সূত্রটি গাউসের অগ্র আন্তঃপাঠন (মধ্যান্তর) সূত্র (Gauss's Forward Central Difference Formula) বা গাউসের প্রথম আন্তঃপাঠন সূত্র (First Interpolation Formula of Gauss) নামে পরিচিত।

(ii) জোড় সংখ্যক সমদূরবর্তী বিন্দুর জন্য :

ধরা যাক [a,b] অন্তরালে 2n সংখ্যক সমদূরবর্তী বিন্দুর জন্য $y = f(x)$ অপেক্ষকটির মান দেওয়া আছে। গাউসের আন্তঃপাঠন সূত্রের জন্য আমরা বিন্দু গুলিকে সূচিত করব :

$x_0, x_{\pm1}, x_{\pm2}, \ldots, x_{\pm(n-1)}, x_n$ অর্থাৎ $x_{\pm i} = x_0 \pm ih \ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$

যেখানে h একটি ধ্রুবক।

মনে করা যাক, $y = f(x)$ অপেক্ষকের মান

$y_i = f(x_i)$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n)$ দেওয়া আছে।

আমরা একটি $(2n-1)$ ঘাতের বহুপদী রাশিমালা $Q(x)$ নির্ণয় করব যেখানে

$$\left.\begin{aligned} Q(x_i) &= f(x_i) = y_i \,(i = 0, \pm 1, ..., \pm(n-1)) \\ Q(x_n) &= f(x_n) = y_n \end{aligned}\right\} \quad ... (5.2.8)$$

ধরা যাক, $Q(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + a_3 (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) +$
$a_4 (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + a_5 (x - x_{-2})(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + ...$

$$+ a_{2n-2}\left(x - x_{\overline{-(n-2)}}\right)\left(x - x_{\overline{n-3}}\right) ... (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) ... \left(x - x_{\overline{n-2}}\right)(x - x_{n-1})$$

$$+ a_{2n-1}\left(x - x_{\overline{-n-1}}\right)\left(x - x_{\overline{-n-2}}\right) ... (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) ... (x - x_{n-1}) \quad ...(5.2.9)$$

a_i $(i = 0, 1, ..., n-1)$ সহগগুলি এমনভাবে নির্ণয় করতে হবে যেন (5.2.8) নং শর্ত পূরণ হয়।

(i) নং এর মত করে (5.2.9) নং সমীকরণে $x_0, x_{\pm 1}, x_{\pm 2}, ..., x_{\pm(n-1)}$ মানগুলি বসিয়ে পাই

$$a_0 = y_0,\; a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!\,h},\; a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\,h^2},\; a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!\,h^3},\; \cdots,\; a_{2n-2} = \frac{\Delta^{2n-2} y_{-n+1}}{(2n-2)!\,h^{2n-2}}$$

এবং $a_{2n-1} = \dfrac{\Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{(2n-1)!\,h^{2n-1}}$

a_i $(i = 0, 1, ..., 2n-1)$ সহগগুলি (5.2.9) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$Q(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\,\frac{\Delta y_0}{1!} + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_1}{h}\right)\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}$$
$$+ \left(\frac{x - x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_1}{h}\right)\frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}$$
$$+ \cdots + \left(\frac{x - x_{\overline{-n-1}}}{h}\right)\left(\frac{x - x_{\overline{-n-2}}}{h}\right) \cdots \left(\frac{x - x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h}\right) \cdots$$
$$\left(\frac{x - x_{n-2}}{h}\right)\left(\frac{x - x_{n-1}}{h}\right)\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{(2n-1)!} \quad ... (5.2.10)$$

ফেজ u এর মান $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ ধরে পাই

$$\frac{x - x_i}{h} = (u - i), \ \frac{x - x_{-i}}{h} = u + i$$

এবং (5.2.10) নং সূত্রটিকে নিচের আকারে লেখা যায়

$$f(x) \simeq Q(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(u+1)u(u-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$+ \cdots + \frac{(u+n-1)\cdots(u+1)u(u-1)\cdots(u-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n+1} \quad \ldots (5.2.11)$$

$$= y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_{-1} + \binom{u+1}{3}\Delta^3 y_{-1} + \binom{u+1}{4}\Delta^4 y_{-2} +$$

$$\cdots + \binom{u+n-2}{2n-2}\Delta^{2n-2} y_{-n+1} + \binom{u+n-1}{2n-1}\Delta^{2n-1} y_{-n+1} \quad \ldots (5.2.12)$$

ভ্রান্তির পরিমান হবে

$$\frac{(u+n-1)(u+n-2)\cdots(u+1)u(u-1)\cdots(u-n+1)(u-n)}{(2n)!} h^{2n} f^{2n}(c)$$

$$\ldots (5.2.13)$$

যেখানে $a < c < b$

(5.3.2) নং সমীকরণে $x = x_1$ বসিয়ে পাই

$$\begin{aligned} \overline{P}(x_1) = f(x_1) = y_1 &= B_0 + B_1(x_1 - x_0) + B_2(x_1 - x_{-1})(x_1 - x_0) \\ &= B_0 + B_1 h + B_2\, 2h.h \\ &= B_0 + (y_0 - y_{-1}) + 2h^2 B_2 \end{aligned}$$

$$\therefore B_2 = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\,h^2}$$

(5.3.2) নং সমীকরণে $x = x_{-2}$ বসিয়ে পাই

$$\overline{P}(x_{-2}) = f(x_{-2}) = y_{-2} = B_0 + B_1(x_{-2} - x_0) + B_2(x_{-2} - x_{-1})(x_{-2} - x_0)$$

$$+ B_3(x_{-2} - x_{-1})(x_{-2} - x_0)(x_{-2} - x_1)$$

$$= y_0 + 2(y_{-1} - y_0) + y_1 - 2y_0 + y_{-1} - 3!\,h^3 B_3$$

বা, $B_3 = \dfrac{y_1 - 3y_0 + 3y_{-1} - y_{-2}}{3!h^3} = \dfrac{\Delta^3 y_{-2}}{3!\,h^3}$

একই রকম ভাবে আমরা পাই

$$B_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!\,h^4},\ \cdots,\ B_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n}}{(2n-1)!\,h^{2n-1}} \text{ এবং } B_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{2n!\,h^{2n}}$$

B_i (i = 0, 1, 2 ..., n) মান গুলি (5.3.2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\bar{P}(x) = y_0 + \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\frac{\Delta y_{-1}}{1!} + \left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}$$

$$+\left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!} + \left(\frac{x-x_{-2}}{h}\right)\left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!} + \ldots$$

$$+\left(\frac{x-x_{-(n-1)}}{h}\right)\left(\frac{x-x_{-(n-2)}}{h}\right)\cdots\left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\cdots\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right)\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n}}{(2n-1)!}$$

$$+\left(\frac{x-x_{-n}}{h}\right)\cdots\left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\cdots\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right)\frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{2n!} \qquad \ldots (5.3.3)$$

এখন ফেজ $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ ব্যবহার করে পাই

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x_i}{h} &= \frac{x - x_0 - ih}{h} = u - i \\ \text{এবং } \frac{x - x_{-i}}{h} &= \frac{x - x_0 + ih}{h} = u + i \end{aligned}\right\} \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

মন্তব্য : মধ্যান্তর ব্যবহার করে গাউসের আন্তঃপাঠন সূত্রাবলীঃ

অমরা জানি $\Delta^K y_i = \delta^K y_{i+k/2}$

এই সম্পর্কটি ব্যবহার করে গাউসের (5.2.6) এবং (5.2.12) নং আন্তঃপাঠন বহুপদ রাশিগুলিকে যথাক্রমে লেখা যায়

$$p(x) = y_0 + \binom{u}{1}\partial y_{\frac{1}{2}} + \binom{u}{2}\partial^2 y_0 + \binom{u+1}{3}\partial^3 y_{\frac{1}{2}} + \binom{u+1}{4}\partial^4 y_0$$

$$+ \ldots + \binom{u+n-1}{2n-1}\partial^{2n-1} y_{\frac{1}{2}} + \binom{u+n-1}{2n}\partial^{2n} y_0$$

এবং .. (5.2.14)

$$Q(x) = y_0 + \binom{u}{1}\partial y_{\frac{1}{2}} + \binom{u}{2}\partial^2 y_0 + \binom{u+1}{3}\partial^3 y_{\frac{1}{2}} + \binom{u+1}{4}\partial^4 y_0 + \dots$$
$$+ \binom{u+n-2}{2n-2}\partial^{2n-2} y_0 + \binom{u+n-1}{2n-1}\partial^{2n-1} y_{\frac{1}{2}} \qquad \dots (5.2.15)$$

5.4 গাউসের (মধ্যান্তর) পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র

(i) বিজোড় সংখ্যক সমদূরবর্তী বিন্দুর জন্য :

ধরা যাক [a, b] অন্তরালে (2n +1) সংখ্যক সমদূরবর্তী বিন্দু $x_{\pm i}$ (i = 0, 1, 2, ..., n) গুলিতে f (x) অপেক্ষকের মানগুলি দেওয়া আছে, যেখানে h একটি ধ্রুবক এবং y = f (x) অপেক্ষকের মানগুলি হল

$$y_{\pm i} = f(x_{\pm i}),\ i = o,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n \qquad \dots(5.3.1)$$

এখানে আমরা একটি 2n ঘাতের বহুপদ রাশিমালা $\overline{P}(x)$ নির্ণয় করব যেখানে

$$\overline{P}(x_{\pm i}) = y_{\pm i},\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

ধরা যাক, $\overline{P}(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_{-1})(x - x_0) + B_3(x - x_{-1})(x - x_0)$
$(x - x_1) + B_4(x - x_{-2})(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + B_5(x - x_{-2})(x - x_{-1})(x - x_0)$
$(x - x_1)(x - x_2) + \dots + B_{2n-1}\left(x - x_{-\overline{n-1}}\right)\left(x - x_{-\overline{n-2}}\right)\cdots\left(x - x_{-1}\right)(x - x_0)(x - x_1)$
$\dots (x - x_{n-1}) + B_{2n}(x - x_{-n})\left(x - x_{-\overline{n-1}}\right)\dots(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})$
...(5.3.2)

(5.3.2) সমীকরণে $x = x_{-1}$ বসিয়ে পাই

$$\overline{P}(x_{-1}) = f(x_{-1}) = y_{-1} = B_0 + B_1(x_{-1} - x_0)$$

বা, $y_{-1} = y_0 + B_1(-h) \Rightarrow B_1 = \dfrac{y_0 - y_{-1}}{h} = \dfrac{\Delta y_{-1}}{h}$

ধরা যাক, $\overline{Q}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_{-1})(x - x_0) + b_3(x - x_{-1})(x - x_0)$
$(x - x_1) + b_4(x - x_{-2})(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + b_5(x - x_{-2})(x - x_{-1})(x - x_0)$
$(x - x_1)(x - x_2) + \dots + b_{2n-2}\left(x - x_{-\overline{n-1}}\right)\left(x - x_{-\overline{n-2}}\right)\cdots\left(x - x_{-1}\right)(x - x_0)(x - x_1)$
$\dots (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})$ .... (5.3.8)

(i) নং এর মত করে (5.3.8) নং সমীকরণে $x = x_0, x_{\pm 1}, \dots x_{\pm\overline{n-1}}, x_{-n}$ মানগুলি বসিয়ে পাই

$$b_0 = y_0,\ b_1 = \frac{\Delta y_{-1}}{1!\,h},\ b_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\,h^2},\ b_3 = \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!\,h^3},\ b_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!\,h^4}\cdots,\ b_{2n-2} = \frac{\Delta^{2n-2} y_{\overline{-n-2}}}{(2n-2)!\,h^{2n-2}}$$

এবং $b_{2n-1} = \dfrac{\Delta^{2n-1} y_{\overline{-n-1}}}{(2n-1)!\,h^{2n-1}}$

b_i $(i = 0, 1, 2 \ldots, n)$ এর মানগুলি (5.3.8) নং সমীকরনে বসিয়ে পাই

$$\bar{Q}(x) = y_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\frac{\Delta y_{-1}}{1!} + \left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} + \left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)$$

$$\frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!} + \left(\frac{x-x_{-2}}{h}\right)\left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!}$$

$$+\cdots\left(\frac{x-x_{\overline{-n-1}}}{h}\right)\left(\frac{x-x_{\overline{-n-2}}}{h}\right)\cdots\left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\cdots\left(\frac{x-x_{n-2}}{h}\right)\frac{\Delta^{2n-2} y_{-n+1}}{(2n-2)!}$$

$$+\left(\frac{x-x_{\overline{-n-1}}}{h}\right)\left(\frac{x-x_{\overline{-n-2}}}{h}\right)\cdots\left(\frac{x-x_{-1}}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\cdots$$

$$\left(\frac{x-x_{n-2}}{h}\right)\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right)\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n}}{(2n-1)!} \qquad \text{.... (5.3.9)}$$

ফেজ u এর মান $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ ব্যবহার করে পাই

$x - x_i = h\,(u - i),\ x - x_{-i} = h\,(u + i)$

এবং (5.3.9) সূত্রটি নিচের আকারে লেখা যায়

$f(x) \simeq \bar{Q}(x) = y_0 + u\Delta y_{-1} +$

$$\frac{(u+1)\,u}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(u+1)\,u\,(u-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(u+2)(u+1)\,u\,(u-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$+\cdots+\frac{(u+n-1)(u+n-2)\cdots(u+1)\,u\,(u-1)\cdots(u-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n}$$

...(5.3.10)

$$= y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_{-1} + \binom{u+1}{2}\Delta^2 y_{-1} + \binom{u+1}{3}\Delta^3 y_{-2} + \binom{u+2}{4}\Delta^4 y_{-2}$$

$$+ \binom{u+n-1}{2n-1}\Delta^{2n-1} y_{-n} \quad \cdots\cdots (5.3.11)$$

এবং ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{2n}(x) = (x - x_{-n})\left(x - x_{\overline{-n-1}}\right) \ldots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})\frac{f^{2n}(c)}{(2n)\,!}$$

যেখানে $a < c < b$.

অতএব, (5.3.3) সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$\overline{P}\,(x) = y_0 + u\Delta y_{-1} + \frac{(u+1)\,u}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(u+1)\,u\,(u-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(u+2)(u+1)\,u\,(u-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots$$

$$+ \frac{(u+n-1)(u+n-2)\cdots(u+1)\,u\,(u-1)\cdots(u-n+1)}{(2n-1)\,!}\Delta^{2n-1} y_{-n} +$$

$$\frac{(u+n)(u+n-1)\cdots(u+1)\,u\,(u-1)}{2n!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

$$\ldots(5.3.4)$$

$$= y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_{-1} + \binom{u+1}{2}\Delta^2 y_{-1} + \binom{u+1}{3}\Delta^3 y_{-2} + \binom{u+2}{4}\Delta^4 y_{-2} + \cdots$$

$$+ \binom{u+n-1}{2n-1}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \binom{u+n}{2n}\Delta^{2y} y_{-n} \quad \cdots\cdots (5.3.5)$$

এবং ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{2n+1}(x) = (x - x_{-n})\left(x - x_{\overline{-n-1}}\right) \ldots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

$$\frac{f^{2n+1}(c)}{(2n+1)\,!}$$

$$= \frac{(u+n)(u+n-1)\cdots(u+1)u(u-1)\cdots(u-n+1)(u-n)}{(2n+1)!} h^{2n+1} f^{2n+1}(c)$$

...(5.3.6)

যেখানে $a < c < b$.

(5.3.5) বা (5.3.6) নং সূত্রটি গাউসের পশ্চাদ আন্তঃপাঠন (Gauss's Backward Interpolation) সূত্র বা গাউসের দ্বিতীয় আন্তঃপাঠন (Gauss's 2nd Interpolation Formula) সূত্র হিসাবে পরিচিত।

(ii) বিন্দুর সংখ্যা যুগ্ম :

ধরা যাক [a, b] অন্তরালে 2n সংখ্যক সমদূরবর্তী বিন্দুর জন্য $y = f(x)$ অপেক্ষকটির মান দেওয়া আছে। বিন্দুগুলি হল

$x_0, x_{\pm 1}, x_{\pm 2}, \ldots, x_{\pm 1(n-1)}, x_n$ অর্থাৎ $x_{\pm i} = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ যেখানে h একটি ধ্রুবক। অপেক্ষকের মান গুলি হল :

$$y_{\pm i} = f(x_{\pm i}) \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \text{ এবং } f(x_{-n}) = y_{-n} \qquad \ldots(5.3.7)$$

আমরা $(2n-1)$ ঘাতের একটি বহুপদী অপেক্ষক $\overline{Q}(x)$ রাশিমালা নির্ণয় করব যেখানে

$$\overline{Q}(x_{\pm i}) = y_{\pm i} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots. n$$

5.5 গাউসের তৃতীয় পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র

(i) ধরা যাক, [a, b] অন্তরালে 2n সংখ্যক সমদূরবর্তী বিন্দু, যথা $x_{\pm i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ এবং x_n এর জন্যে অপেক্ষক $y = f(x)$ এর মানগুলি দেওয়া আছে। যদি প্রারম্ভিক বিন্দু x_0 এর স্থলে x_1 এবং ফেজ u এর স্থলে $u-1$ এবং সহগের সূচক চিহ্নগুলি 1 দ্বারা বৃদ্ধি করা হয় তাহলে গাউসের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন পদ্ধতি (5.3.10) এবং (5.3.11) সূত্রটি হবে

$$f(x) \simeq \overline{Q}'(x) = y_1 + (u-1)\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!}\Delta^4 y_{-1}$$

$$+ \cdots + \frac{(u+n-2)\cdots u(u-1)(u-2)\cdots(u-n)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n+1} \quad \ldots(5.4.1)$$

$$= y_1 + \binom{u-1}{1}\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{u}{3}\Delta^3 y_0 + \binom{u+1}{4}\Delta^4 y_{-1} + \ldots$$

$$+ \binom{u+n-2}{2n-1}\Delta^{2n-1} y_{-n+1} \quad \cdots\cdots (5.4.2)$$

এবং ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{2n}(x) = (u + n - 1)(u + n - 2) \ldots u(u - 1)(u - 2) \ldots (u - n + 1)(u - n)$$

$$\frac{h^{2n} f^{2n}(c)}{(2n)!} \quad \ldots (5.4.3)$$

যেখানে $a < c < b$.

(5.4.3) নং সূত্রটি গাউসের তৃতীয় আন্তঃপাঠন (Gauss's Third Interporation Formula) সূত্র হিসাবে পরিচিত।

5.6 স্টারলিংয়ের আন্তঃপাঠন সূত্র (বিজোড় সংখ্যক বিন্দুর জন্য) Stirling's Interpolation Formula for Odd Number of Points.

ধরা যাক, [a, b] অন্তরালে $(2n + 1)$ সংখ্যক সমদূরবর্তী বিন্দু, $x_0, x_{\pm 1}, x_{\pm 2} \ldots x_{\pm n}$ গুলিতে $f(x)$ অপেক্ষকের মানগুলি দেওয়া আছে, যেখানে h একটি ধ্রুবক এবং $y = f(x)$ অপেক্ষকের মানগুলি হল

$y_{\pm i} = f(x_{\pm i}),\ i = 0, 1, \ldots, n$ .... (5.5.1)

$(2n + 1)$ সংখ্যক বিন্দুর জন্য গাউসের সম্মুখ আন্তঃপাঠন (5.2.5) সূত্র এবং গাউসের পশ্চাৎ আন্তঃ পাঠন (5.3.4) গড় করে স্টারলিংয়ের আন্তঃপাঠন সূত্রটি পাওয়া যাবে।

অর্থাৎ স্টারলিংয়ের আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল

$$f(x) \simeq s(x) = \frac{p(x) + \bar{p}(x)}{2}$$

$$= y_0 + \frac{u}{1!}\,\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{u(u^2 - 1^2)}{3!}\,\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}$$

$$+ \frac{u^2(u^2 - 1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{u(u^2 - 1^2)(u^2 - 2^2)}{5!}\,\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \cdots$$

$$+ \frac{u^2(u^2 - 1^2)\cdots(u^2 - (n-1)^2)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \quad \ldots. (5.5.2)$$

এবং ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{2n+1}(x) = \frac{u(u^2 - 1^2)(u^2 - 2^2)\cdots(u^2 - n^2)}{(2n + 1)!} h^{2n+1} f^{2n+1}(c) \cdots (5.5.3)$$

যেখানে $a < c < b$.

(5.5.2) নং সূত্রটি স্টারলিংয়ের মধ্য আন্তঃ পাঠন সূত্র নামে পরিচিত।

মন্তব্য : 1) যদি x এর মান x_0 এর খুব নিকটে, অর্থাৎ $x_0 - \frac{h}{4} < x < x_0 + \frac{h}{4}$ বা $-0.25 < u < 0.25$ হয় তখন এই সূত্রটি ব্যবহার করা হয়।

2) যদি মধ্যান্তর সারণীটি বিজোড় ক্রমের অন্তরে শেষ হয় তাহলে যেকোন মধ্যান্তর পদ্ধতি ব্যবহার করা অপেক্ষা স্টারলিংয়ের মধ্যান্তর পদ্ধতি ব্যবহার করা সুবিধাজনক।

5.7 বেসেলের আন্তঃপাঠন সূত্র (জোড় সংখ্যক বিন্দুর জন্যে) Bessel's Interpolation Formula (for even number of Points.)

ধরা যাক, [a, b] অন্তরালে 2n সংখ্যক সমদুরবর্তী বিন্দু, $x_{\pm 1}$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ গুলিতে $f(x)$ অপেক্ষকের মানগুলি দেওয়া আছে, যেখানে h একটি ধ্রুবক এবং $y = f(x)$ অপেক্ষকের মানগুলি হল

$y_{\pm 1} = f(x_{\pm i}), i = 0, 1, ..., n$ .... (5.6.1)

বেসেলের আন্তঃ পাঠন সূত্রটি হল গাউসের অগ্র আন্তঃ পাঠন (5.2.5) এবং গাউসের পশ্চাৎ আন্তঃ পাঠন সূত্র দুটির সামন্তরীয় মধ্যক

অর্থাৎ

$$f(x) \simeq \frac{p(x) + \overline{Q}'(x)}{2} = B(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + v\Delta y_0 +$$

$$\frac{v^2 - \frac{1}{4}}{2!} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{v(v^2 - \frac{1}{4})}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(v^2 - \frac{1}{4})(v^2 - \frac{9}{4})}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2}$$

$$+ \cdots + \frac{v(v^2 - \frac{1}{4})(v^2 - \frac{9}{4}) \cdots (v^2 \frac{(2n-3)^2}{4})}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-n+1} \cdots\cdots (5.6.2)$$

যেখানে $v = u - \frac{1}{2} = \frac{x - x_0}{h} - \frac{1}{2}$

এবং ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{2n}(x) = \frac{(v^2 - \frac{1}{4})(v^2 - \frac{9}{4}) \cdots (v^2 - \frac{(2n-1)^2}{4})}{(2n)!} h^{2n} f^{2n}(c) \cdots (5.6.3)$$

(5.6.2) নং সূত্রটিকে বেসেলের আন্তঃ পাঠন সূত্র (Bessel's Interpolation Formula) বলা হয়।

মন্তব্য : (1) যদি x_0 এর মান এভাবে নেওয়া হয় যেখানে $-0.25 < v < 0.25$ বা $-0.25 < u - \frac{1}{2} < 0.25$ বা $0.25 < u < 0.75$ তখন এই সূত্রটি ব্যবহার করা হয়।

(2) যদি মধ্যান্তর সারণীটি জোড় ক্রমের অন্তরে শেষ হয় তাহলে যেকোনো মধ্যান্তর পদ্ধতি ব্যবহার করা অপেক্ষা বেসেলের মধ্যান্তর সূত্র ব্যবহার করা সুবিধাজনক।

5.8 মধ্যান্তর সারণী

নিচের সারণী থেকে আমরা সহজেই বলতে পারি কিভাবে বিভিন্ন ক্রমের অন্তরের জন্য বিভিন্ন প্রকার আন্তঃপঠন সূত্র ব্যবহৃত হয়।

x	f (x)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	$\Delta^7 y$	পদ্ধতি
x_{-5}	y_{-5}								নিউটনের
		Δy_{-5}							পশ্চাদ
x_{-4}	y_{-4}		$\Delta^2 y_{-5}$						
		Δy_{-4}		$\Delta^3 y_{-5}$					
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$		$\Delta^4 y_{-5}$				
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_4$		$\Delta^5 y_{-5}$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		$\Delta^6 y_{-5}$		গাউসের
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$		$\Delta^7 y_{-5}$	পশ্চাদ
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$		
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$		$\Delta^7 y_{-4}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$		স্টারলিং
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$		$\Delta^7 y_{-3}$	বেসেল
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$		$\Delta^7 y_{-2}$	গাউসের
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		$\Delta^6 y_{-1}$		সম্মুখ
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$				
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$					
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$						নিউটনের
		Δy_4							সম্মুখ
x_5	y_5								

মন্তব্য : সারণীর মধ্যভাগে আন্তঃ পাঠনের জন্য সাধারণত গাউসের সূত্র ব্যবহৃত হয় না, স্টারলিং অথবা বেসেলের সূত্র ব্যবহার করা হয়। তবে দুটি সূত্র দ্বারা প্রাপ্ত মানে খুব সামান্য পার্থক্য দেখা যায়।

5.9 উদাহরণমালা

নিচের সারণী থেকে স্টারলিং অথবা বেসেলের সূত্র ব্যবহার করে (i) f (1.315) এবং (ii) f (1.362) এর মান নির্ণয় করুন।

x :	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
f (x) :	1.54308	1.66852	1.81066	1.97091	2.15090	2.35241	2.57746

সমধান : অন্তর সারণীটি হল

x	y = f (x)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_{-3} = 1.0$	1.54308				
		0.12544			
$x_{-2} = 1.1$	1.66852		0.01670		
		0.14214		0.00141	
$x_{-1} = 1.2$	1.81066		0.01811		0.00022
		0.16025		0.00163	
$x_0 = 1.3$	1.97091		0.01974		0.00015 → স্টারলিং
		0.17999		0.00178	
$x_1 = 1.4$	2.15090		0.02152		0.00024 → বেসেল
		0.20151		0.00202	
$x_2 = 1.5$	2.35241		0.02354		
		0.22505			
$x_3 = 1.6$	2.57746				

(i) $x = 1.315$ বিন্দুটি সারণীর মধ্যস্থলে অবস্থিত সেইজন্য স্টারলিং বা বেসেলের সূত্র ব্যবহার করা যায়।
এখানে $x_0 = 1.3$

$$u = \frac{1.315 - 1.3}{0.1} = \frac{0.015}{0.01} = 0.15$$

যেহেতু $-0.25 < u = 0.15 < 0.25$ আমরা স্টারলিংএর সূত্র ব্যবহার করব।

স্টারলিং সূত্র ব্যবহার করে

$$f(x) \simeq S(x) = y_0 + u\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{u(u^2 - 1^2)}{3!}\,\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}$$

$$+ \frac{u^2(u^2 - 1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots$$

$$= 1.97091 + 0.15 \times \frac{0.16025 + 0.17999}{2} + \frac{(0.15)^2}{2} \times (0.01974)$$

$$+ \frac{0.15\left\{(0.15)^2 - 1\right\}}{6} \quad \frac{0.00163 + 0.00178}{2} + \frac{(0.15)^2 \left\{(0.15)^2 - 1\right\}}{24} \times 0.00015$$

$$= 1.97091 + 0.025518 + 0.0002221 - 0.0000417 - 0.0000001$$

$$= 1.9966083 \simeq 1.99661$$

এখানে $x_0 = 1.3$

$$u = \frac{1.362 - 1.3}{0.1} = 0.62, \; v = u - \frac{1}{2} = 0.62 - 0.5 = 0.12$$

যেহেতু $0.25 < u < 0.75$ আমরা বেসেলের সূত্র ব্যবহার করব

বেসেলের সূত্র থেকে

$$f(x) \simeq B(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + v\Delta y_0 + \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{2!} \times \frac{\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{-1}}{2} + \frac{v(v^2 - \frac{1}{4})}{3!} \Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \frac{(v^2 - 1/4)(v^2 - 9/4)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-1} + \Delta^2 y_{-2}}{2} + \cdots$$

$$= \frac{1.97091 + 2.15090}{2} + 0.12 \times 0.17999 + \frac{(0.12)^2 - 0.25}{2} \left(\frac{0.01974 + 0.02152}{2}\right)$$

$$+ \frac{0.12\left\{(0.12)^2 - 0.25\right\}}{6} 0.00178 + \frac{\left\{(0.12)^2 - 0.25\right\}\left\{(0.12)^2 - 2.25\right\}}{24} \times \frac{0.00015 + 0.00024}{2}$$

$$= 2.060905 + 0.0215988 - 0.002430214 - 0.000084 + 0.0000042$$

$$= 2.080069466 \simeq 2.08007$$

5.10 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) নিচের সারণী ব্যবহার করে আন্তঃ পাঠন বহুপদ রাশিমালা নির্ণয় করুন (i) নিউটনের অগ্র আন্তঃ পঠন সূত্র (ii) স্টারলিংয়ের সূত্র এবং (iii) ল্যাগ্রানাজের সূত্র ব্যবহার করে। দেখান যে বহুপদ রাশিমালা অভিন্ন।

x :	–2	0	2	4	6
f (x) :	4	10	16	116	410

[সংকেত : 5.9 দ্রষ্টব্য] (উত্তর : $10-\frac{35}{12}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{91}{48}x^3+\frac{1}{64}x^4$)

(2) নিচের সারণী ব্যবহার করে f (0.345) এর মান নির্ণয় করুন

x :	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4
f (x) :	2.74560	2.82922	2.97427	3.18993	3.49034

[সংকেত : সমস্যা (1) ও 5.9 দ্রষ্টব্য] (উত্তর : 3.06187)

(3) নিচের সারণী ব্যবহার করে f ($7^0 17$) এর মান নির্ণয় করুন

x :	$7^0 00'$	$7^0 05'$	$7^0 10'$	$7^0 15'$	$7^0 25'$	$7^0 30'$
f (x) :	1.7316889	1.7282715	1.7248360	1.7213824	1.7144210	1.7109135

[সংকেত : একইভাবে ভাবুন] (উত্তর : 1.7199958)

(4)

x :	1.150	1.155	1.160	1.165	1.170	1.175	1.180	1.185
y :	0.912	0.914	0.916	0.918	0.920	0.922	0.924	0.926

ওপরের সারণী থেকে স্টার্লিং এর আন্তঃপাঠন সূত্র প্রয়োগ করে f (1.168) নির্ণয় করুন।

[সংকেত : 1.168 সারণীর মাঝামাঝি আছে] (উত্তর : f (1.168) = 0.919)

(5) সমস্যা (4) টি বেসেলের আন্তঃপাঠন সূত্র প্রয়োগ করে দেখান যে তা থেকে একই উত্তর পাওয়া যাচ্ছে। (সংকেত : বেসেলের সূত্রাবলী ভালো করে লক্ষ করুন)

5.11 সারাংশ

এই অধ্যায়ে অপর দুটি আন্তঃ পাঠন (interpolation) সূত্র আলোচনা করা হয়েছে। একটি হল গাউসের আন্তঃ পাঠন সূত্র-এটি মূলতঃ সারণীর মধ্যমান সমূহের উপর যে অন্তর ফল পাওয়া যায় তার উপর ভিত্তি করে নির্ণীত। এই সূত্রটির নির্ণয় পদ্ধতি সামান্য জটিল হলেও প্রয়োগে ভ্রান্তি কম হবার সম্ভাবনা। এছাড়ও বিজোড় সংখ্যক বিন্দুর জন্য স্টারলিং-এর এবং জোড় সংখ্যক বিন্দুর জন্য বেসেলের সূত্র দুটি আলোচনা করা হয়েছে। মধ্যান্তর সারণী তৈরী করার পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ এবং অনুশীলনী দেওয়া হয়েছে যাতে এই সূত্রগুলির সঙ্গে আরো পরিচিত হওয়া যায়।

5.12 সহায়ক গ্রন্থাবলি

1. F. B. Hildebrand : Introduction to Numerical Analysis (Tala Migraw Hill)
2. A. Gupta, S. C. Bose : Introduction to Numerical Analysis. (Academic Publishers, Kolkata)

একক 6 □ বিপরীত আন্তঃপাঠন (Inverse Interpolation)

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

ধরা যাক, $[a, b]$ অন্তরালে $(n+1)$ সংখ্যক স্বতন্ত্র বিন্দু $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots x_n = b$ গুলিতে $y = f(x)$ অপেক্ষকে মান যথাক্রমে $y_i = f(x_i)$ $i = 0, 1, \ldots, n$ দেওয়া আছে, অপেক্ষকটির একটি অনন্য বিপরীত অপেক্ষক $x = f^{-1}(y) = F(y)$ আছে তালিকার প্রসারের মধ্যে।

বিপরীত আন্তঃ পাঠনের সমস্যাটি হল :

y এর মান দেওয়া আছে; অনুসঙ্গী x এর মান নির্ণয় করতে হবে। আমরা বলতে পারি, y এর একগুচ্ছ মানের জন্য অনুসঙ্গী x এর মানগুলি দেওয়া আছে। সুতরাং সাধারণ আন্তঃ পাঠন সূত্রে x এর পরিবর্তে y, y এর পরিবর্তে x এবং f এর পরিবর্তে F লিখতে হবে।

বিপরীত আন্তঃ পাঠন সমস্যাটি সমাধানের জন্য আমরা নিম্নলিখিত তিনটি পদ্ধতি আলোচনা করব।

(a) পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি (Method of Iteration) সমদূরবর্তী বিন্দুর জন্য

(b) ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃ পাঠন পদ্ধতির ব্যবহার করে

(c) বিভাজন অন্তর ব্যবহার করে।

6.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি যে বিষয়টি করতে পারবেন সেটি হল

- বিপরীত আন্তঃপাঠন সূত্র (Inverse Interpolation Formula) ব্যবহার করে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধান।

6.3 পুনরাবৃত্তি পদ্ধতিতে বিপরীত আন্তঃপাঠন

পুনরাবৃত্তি পদ্ধতিতে বিপরীত আন্তঃপাঠন :

ধরাযাক n সংখ্যক সমদূরবর্তী বিন্দু x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ গুলিতে $y = f(x)$ অপেক্ষকের মানগুলি y_i $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$ দেওয়া আছে যেখানে $x_i = x_0 + ih$.

বিপরীত আন্তঃ পাঠনে আমরা y এর একটি মানের জন্য x এর মান নির্ণয় করব যেখানে—

(i) y এর মান সারণীর প্রথমের দিকে অর্থাৎ y_0 এর নিকট অবস্থিত।

(ii) y এর মান সারণীর শেষের দিকে অর্থাৎ y_n এর নিকট অবস্থিত।

(iii) y এর মান সারণীর মধ্যভাগে অবস্থিত।

আমরা y এর উপস্থিতির উপর নির্ভর করে নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন পদ্ধতি, নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃ পাঠন পদ্ধতি এবং যেকোনো উপযোগী মধ্য আন্তঃ পাঠন পাদ্ধতি ব্যবহার করব।

(i) **যখন y এর মান সারণীর প্রথমদিকে অবস্থিত**

এক্ষেত্রে আমরা নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্রটি নেব

অর্থাৎ $$y = y_0 + u\Delta y_0 + u(u-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \cdots (6.1.1)$$

যেখানে $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ বা $x = x_0 + uh$ ... (6.1.2)

এবং ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{n+1}(x) = u(u-1)(u-2)\ldots(u-n)h^n \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdots (6.1.3)$$

(6.1.1) নং সমীকরণটি সাজিয়ে পাই

$$\frac{y - y_0}{\Delta y_0} = u + \frac{u(u-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0} + \cdots$$

$$+\ \frac{u(u-1)(u-2)\cdots(u-n+1)}{n!}\ \frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_0}\ \cdots (6.1.4)$$

(6.1.3) নং সমীকরণে দ্বিতীয় এবং উচ্চ ক্রমের অন্তরগুলিকে উপেক্ষা করে পাই u এর প্রারম্ভিক আসন্ন মান

$$u^{(1)} = \frac{y-y_0}{\Delta y_0}\ \ldots (6.1.5)$$

এখন আমরা u এর পরপর আসন্ন মানগুলি নির্ণয় করব (6.1.4) নং সমীকরণে পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি ব্যবহার করে

$$u^{(K+1)} = \frac{y-y_0}{\Delta y_0} - \frac{u^{(K)}(u^{(K)}-1)}{2!}\ \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{u^{K}\left(u^{(K)}-1\right)\left(u^{(K)}-2\right)}{3!}\ \frac{\Delta^3 y}{\Delta y_0}$$

$$\cdots - \frac{u^{K}\left(u^{(K)}-1\right)\left(u^{(K)}-2\right)\cdots\left(u^{(K)}-n+1\right)}{n!}\ \frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_0}\ \cdots (6.1.6)$$

যতক্ষন না পর্যন্ত (K + 1) তম আসন্ন মান $u^{(K+1)}$ এবং K তম আসন্ন মান সমান হয়। যদি y এর প্রদেয় মানে u এর মান $u^{(K)}$ হয় তাহলে (6.1.2) থেকে x এর মান হবে—

$x = x_0 + u^{(K)} h.$

(ii) যখন y এর মান সারণীর শেষের দিকে অবস্থিত

এক্ষেত্রে আমরা নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্রটি ব্যবহার করব।

অর্থাৎ

$$y = y_n + u\Delta y_{n-1} + \frac{u(u+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \cdots$$

$$+\ \frac{u(u+1)(u+2)\cdots(u+n-1)}{n!}\Delta^n y_0\ \cdots (6.1.7)$$

(6.1.7) নং সমীকরণটি সাজিয়ে পাই

$$\frac{y-y_n}{\Delta y_{n-1}} = u + \frac{u(u+1)}{2!}\ \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{\Delta y_{n-1}} + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{\Delta y_{n-1}} +$$

$$\cdots + \frac{u(u+1)(u+2)\cdots(u+n-1)}{n!}\ \frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_{n-1}}\ \cdots (6.1.8)$$

যেখানে $u = \dfrac{x - x_n}{h}$ বা $x = x_n + uh$ ... (6.1.9)

আগের মতো করে দ্বিতীয় এবং উচ্চ ক্রমের অন্তর গুলিকে উপেক্ষা করে পাই

$$u^{(1)} = \frac{y - y_n}{\Delta y_{n-1}} \qquad \text{... (6.1.10)}$$

(6.1.8) নং সমীকরণে পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি ব্যবহার করে পাই

$$u^{(K+1)} = \frac{y - y_n}{\Delta y_{n-1}} - \frac{u^{(K)}(u^{(K)}+1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{\Delta y_{n-1}} - \frac{u^K\left(u^{(K)}+1\right)\left(u^{(K)}+2\right)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{\Delta y_{n-1}}$$

$$\cdots - \frac{u^K\left(u^K+1\right)\cdots\left(u^{(K)}+n-1\right)}{n!}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_{n-1}} \cdots \text{(6.1.11)}$$

যদি y এর প্রদেয় মানে $u^{(K+1)}$ এর আসন্ন মান $u^{(K)}$ এর আসন্ন মানের সমান হয় তাহলে (6.1.9) থেকে x এর মান হবে

$$x = x_n + u^{(K)}h$$

(iii) যখন y এর মান সারণীর মধ্যভাগে অবস্থিত

এক্ষেত্রে আমরা গাউসের অগ্র মধ্যান্তর সূত্রটি ব্যবহার করব। সূত্রটি হল

$$y = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{u\left(u^2-1^2\right)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$

$$\frac{(u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots \text{(6.1.12)}$$

অর্থাৎ

$$\frac{y - y_0}{\Delta y_0} = u + \frac{u(u-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_{-1}}{\Delta y_0} + \frac{u\left(u^2-1^2\right)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-1}}{\Delta y_0} +$$

$$\frac{(u+1)\,u\,(u-1)\,(u-2)}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-2}}{\Delta y_0} + \cdots \text{(6.1.13)}$$

যেখানে $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ বা $x = x_0 + uh$ ... (6.1.14)

(6.1.13) নং সমীকরণে পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি ব্যবহার করে পাই

$$u^{(K+1)} = \frac{y-y_0}{\Delta y_0} - \frac{u^{(K)}(u^{(K)}-1)}{2!}\,\frac{\Delta^2 y_{-1}}{\Delta y_0} - \frac{u^{(K)}\left\{\left(u^{(K)}\right)^2-1^2\right\}}{3!}\,\frac{\Delta^3 y_{-1}}{\Delta y_0}$$

$$-\frac{\left(u^{(K)}+1\right)u^{(K)}\left(u^{(K)}-1\right)\left(u^{(K)}-2\right)}{4!}\,\frac{\Delta^4 y_{-2}}{\Delta y_0} \cdots (6.1.15)$$

যদি y এর প্রদেয় মানে $u^{(k+1)}$ এর আসন্ন মান $u^{(K)}$ এর আসন্ন মান সমান হয় তাহলে (6.1.14) থেকে x এর মান হবে

$$x = x_0 + u^{(K)}h.$$

উদাহরণ : নিচের সারণী থেকে x এর মান নির্ণয় করুন যখন

(i) y = 1.14742 (ii) y = 1.14964 (iii) y = 1.14842

x :	0.536	0.537	0.538	0.539	0.540	0.541
y :	1.1471202	1.1476828	1.1482466	1.1488115	1.1493776	1.1499448

সমধান : অন্তর সারণীটি হল

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0.536	1.1471202		
		0.0005626	
0.537	1.1476828		0.0000012
		0.0005638	
0.538	1.1482466		0.0000011
		0.0005649	
0.539	1.1488115		0.0000012
		0.0005661	
0.540	1.1493776		0.0000011
		0.0005672	
0.541	1.1499448		

(i) y = 1.14746 বিন্দুটি সারণীর প্রথমের দিকে অবস্থিত সেইজন্য (6.15) এবং (6.16) সূত্রদুটি ব্যবহার করব

এখানে $u^{(1)} = \dfrac{1.14742 - 1.1471202}{0.0005626} = 0.53288304$

(6.16) নং সূত্র থেকে

$$u^{(2)} = 0.53288304 - \frac{0.53288304\,(0.53288304-1)}{2!} \times \frac{0.0000012}{0.0005626} = 0.5331484$$

$$u^{(3)} = 0.53288304 - \frac{0.5331484\,(0.5331484-1)}{2!} \times \frac{0.0000012}{0.0005626} = 0.5331484$$

এখানে $u^{(2)} = u^{(3)} = 0.5331484$ সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত

$$\therefore x = x_0 + u^{(3)}h = 0.536 + 0.5331484 \times 0.001$$
$$= 0.536533148 \simeq 0.5365331$$

(ii) $y = 1.14964$ বিন্দুটি সারণীর শেষের বিন্দু 1.1499448 এর কাছাকাছি সুতরাং (6.1.10) এবং (6.1.11) সূত্রদুটি ব্যবহার করব

এখানে $u^{(1)} = \dfrac{y-y_n}{\Delta y_{n-1}} = \dfrac{1.14964 - 1.1499448}{0.0005672} = -0.53737658$

(6.1.11) নং সূত্র থেকে

$$u^{(2)} = -0.53737658 - \frac{-0.53737658\,(-0.53737658+1)}{2!} \times \frac{0.0000011}{0.0005672} = -0.53713552$$

$$u^{(3)} = -0.53737658\ \frac{-0.53713552\,(-0.53713552+1)}{2!} \times \frac{0.0000011}{0.0005672} = -0.53713549$$

$\therefore u^{(2)} = u^{(3)}$ সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত

$$\therefore x = x_n + u^{(2)}h = 0.541 - 0.5371355 \times 0.001$$
$$= 0.540462864 \simeq 0.5404629$$

(iii) $y = 1.14842$ বিন্দুটি সারণীর মধ্যভাগে অবস্থিত, সুতরাং (6.1.15) সূত্রটি ব্যবহার করব

এখানে $u^{(1)} = \dfrac{1.14842 - 1.1482466}{0.0005649} = 0.30695698$

$$u^{(2)} = 0.30695698 - \frac{0.30695698\,(0.30695698-1)}{2!} \times \frac{0.0000011}{0.0005649} = 0.30716410$$

$$u^{(3)} = 0.30695698 - \frac{0.3071641\,(0.3071641-1)}{2!} \times \frac{0.0000011}{0.0005649} = 0.307164181$$

$\therefore u^{(2)} = u^{(3)}$ সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত

$$\therefore x = x_0 + hu^{(2)} = 0.538 + 0.307164 \times 0.001$$
$$= 0.538307164 \simeq 0.5383072$$

6.4 ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন পদ্ধতি ব্যবহার করে বিপরীত আন্তঃ পাঠন ও উদাহরণ

ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল

$$L(x) = y = \sum_{r=0}^{n} \frac{\omega(x) f(x_r)}{(x - x_r)\,\omega'(x_r)} = \sum_{r=0}^{n} \frac{\omega(x)\, y_r}{(x - x_r)\,\omega'(x_r)}$$

এই সূত্রে x এর স্থলে y এবং y এর স্থলে x বসিয়ে পাই

$$x = \sum_{r=0}^{h} \frac{\omega(y)(x_r)}{(y - y_r)\,\omega'(y_r)}$$

$$\text{বা } x = \frac{(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_n)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\cdots(y_0-y_n)} x_0 + \frac{(y-y_0)(y-y_2)\cdots(y-y_n)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)\cdots(y_1-y_n)} x_1$$

$$+\cdots+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_{r-1})(y-y_{r+1})\cdots(y-y_n)}{(y_r-y_0)(y_r-y_1)\cdots(y_r-y_{r-1})(y_r-y_{r+1})\cdots(y_r-y_n)} x_r$$

$$+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_{n-1})}{(y_n-y_0)(y_n-y_1)\cdots(y_n-y_{n-1})} x_n \cdots (6.3.1)$$

(6.3.1) নং সূত্রটিও বিপরীত আন্তঃ পাঠনে ব্যবহার করা হয়।

উদহরণ : নিচের সারণীর সহায্যে y = 0.6742 মানের জন্য x এর মান নির্ণয় করুন

x :	3.5	4.0	4.8	5.6
y :	0.5441	0.6020	0.6812	0.7482

সমাধান

এখানে $x_0 = 3.5$, $x_1 = 4.0$, $x_2 = 4.8$, $x_3 = 5.6$

এবং $y_0 = 0.5441$, $y_1 = 0.6020$, $y_2 = 0.6812$, $y_3 = 0.7482$ এবং $y = 0.6742$

(6.3.1) নং সূত্রে বসিয়ে পাই

$$x = \frac{(0.6742 - 0.6020)(0.6742 - 06812)(0.6742 - 0.7482)}{(0.5441 - 0.6020)(0.5441 - 0.6812)(0.5441 - 0.7482)} \times 3.5$$

$$+ \frac{(0.6742 - 0.5441)(0.6742 - 0.6812)(0.6742 - 0.7482)}{(0.6020 - 0.5441)(0.6020 - 0.6812)(0.6020 - 0.7482)} \times 4.0$$

$$+ \frac{(0.6742 - 0.5441)(0.6742 - 6020)(0.6742 - 0.7482)}{(0.6812 - 0.5441)(0.6812 - 0.6020)(0.6812 - 0.7482)} \times 4.8$$

$$+ \frac{(0.6742 - 0.5441)(0.6742 - 0.6020)(0.6742 - 0.6812)}{(0.7482 - 0.5441)(0.7482 - 0.6020)(0.7482 - 0.6812)} \times 5.6$$

$= 4.7232814 \simeq 4.723$

6.5 বিভাজন অন্তর ব্যবহার করে বিপরীত আন্তঃপাঠন

নিউটনের বিভাজন অন্তর সূত্র ব্যবহার করে বিপরীত আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল

$$x = x_0 + (y-y_0)\,F(y_0, y_1) + (y-y_0)(y-y_1)\,F(y_0, y_1, y_2) + \ldots$$
$$+ (y-y_0)(y-y_1) \ldots (y-y_{n-1})\,F(y_0, y_1, \ldots y_n) \qquad \ldots (6.4.1)$$

যেখানে

$$F(y_0) = x_0$$

$$F(y_0, y_1) = \frac{F(y_1) - F(y_0)}{y_1 - y_0} = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$$

$$F(y_0, y_1, y_2) = \frac{F(y_1, y_2) - F(y_0, y_1)}{y_2 - y_0} = \text{ইত্যাদি}$$

বিভিন্ন ক্রমের বিভাজন অন্তর 6.4.1 নং এর সারণীতে দেখানো হল। সারণীতে x এর মানগুলি ডানদিকে এবং y এর মানগুলি বামদিকে লিখতে হবে

সারণী নং. : 6.4.1 বিপরীত আন্তঃপাঠন বিভাজন সারণী :

				y	x				
				y_0	x_0				
			y_0-y_1			$F(y_0, y_1)$			
		y_0-y_2		y_1	x_1		$F(y_0, y_1, y_2)$		
	y_0-y_3		y_1-y_2			$F(y_1, y_2)$		$F(y_0, y_1, y_2, y_3)$	
y_0-y_4		y_1-y_3		y_2	x_2		$F(y_1, y_2, y_3)$		$F(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$
	y_1-y_4		y_2-y_3			$F(y_2, y_3)$		$F(y_1, y_2, y_3, y_4)$	
		y_2-y_4		y_3	y_3		$F(y_2, y_3, y_4)$		
			y_3-y_4			$F(y_3, y_4)$			
				y_4	x_4				

উদহরণ ঃ নিচের সারণী থেকে x এর মান নির্ণয় করুন, যখন $y = 0.6742$

x :	3.5	4.0	4.8	5.6
y :	0.5441	0.6020	0.6812	0.7482

সমাধান : বিভাজন সারণীটি হল

			y	x			
			0.5441	3.5			
		0.0579			8.6355785		
	0.1371		0.6020	4.0		10.688778	
0.2041		0.0792			10.101010		9.2692369
	0.146_		0.6812	4.8		12.580629	
		0.0670			11.940298		
			0.7482	5.6			

(6.4.1) নং সূত্রটি ব্যবহার করে

$$x = 3.5 + (0.6742 - 0.5441) \times 8.6355785 + (0.6742 - 0.5441)(0.6742 - 0.6020) \times 10.688778 + (0.6742 - 0.5441)(0.6742 - 0.6020)(0.6742 - 0.6812) \times 9.2692369$$

$$= 3.5 + 0.1301 \times 8.6355785 + 0.1301 \times 0.0722 \times 10.688778 + 0.1301 \times 0.0722 \times (-0.007) \times 9.2692369 = 4.7232813 \simeq 4.723$$

অনুসিদ্ধান্ত :

বিপরীত আন্তঃ পাঠন সূত্র ব্যবহার করে সহজেই $f(x) = 0$ সমীকরণের বাস্তব বীজ নির্ণয় করা যায়। এখানে $y = 0$ মানের জন্য x এর মান নির্ণয় করতে হবে। যদি বীজের মান α হয় তাহলে (6.4.1) নং সূত্রে $y = 0$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\alpha = x_0 - y_0 F(y_0, y_1) + y_0 y_1 F(y_0, y_1, y_2) - y_0 y_1 y_2 F(y_0, y_1, y_2, y_3) + \ldots \tag{6.4.2}$$

$x_0, x_1, x_2 \ldots$ এর মানগুলি α বীজের সন্নিকটে নিতে হবে। (6.4.2) নং সূত্রে ডানদিকে প্রথম অগ্রাহ্য পদে দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে যতগুলি শূন্য থাকবে বীজ α এর মান দশমিক বিন্দুর ততগুলি স্থান পর্যন্ত যথার্থ হবে।

উদাহরণ : বিপরীত আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করে

$x^2 - 2\log_{10}(x + 13) = 0$ সমীকরণটির (1.5, 1.6) অন্তরালে অবস্থিত বীজের আসন্ন মান ছয় সার্থক অংক পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $y = f(x) = x^2 - 2\log_{10}(x+13)$

যেহেতু $f(1.5) = -0.072736$, $f(1.6) = 0.231294$ আমরা $x_0 = 1.5$ নেব,

			y	x			
			– 0.072736	1.5			
		– 0.029501			0.338972		
	– 0.059203		–0.043235	1.51		– 0.038748	
– .119207		– 0.029702			0.336678		0.010186
	– 0. 089706		– 0.013533	1.52		– 0.037534	
		– 0.060004			0.333311		
			– 0.046471	1.54			

$\therefore \alpha = x_0 - y_0 F(y_0, y_1) + y_0 y_1 F(y_0, y_1, y_2) - y_0 y_1 y_2 F(y_0, y_1, y_2, y_3)$

$= 1.5 + 0.338972 \times 0.072736 - 0.338972 \times 0.336678 \times (-0.003145)$

$+ 0.010186 \times 0.000043$

$= 1.524534 \simeq 1.52453$

যেহেতু প্রথম অগ্রাহ্য পদের পরম মান 10^{-6} অপেক্ষা ছোট, সুতরাং α এর মান 7 টি সার্থক অংক পর্যন্ত যথার্থ। সুতরাং বীজটির 6 টি সার্থক অংক পর্যন্ত আসন্ন মান 1.52453.

6.6 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) বিপরীত আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করে $x^2 - \text{Sin } x = 0$ সমীকরণটির (0.8, 0.9) অন্তরালে অবস্থিত বীজের আসন্ন মান ছয় সার্থক অংক পর্যন্ত নির্ণয় করুন

(**সংকেত** 6.4.1 উদাহরণ দ্রষ্টব্য) [**উত্তর** : 0.767149]

(2) ল্যাগরাঞ্জের বিপরীত আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করে নিম্নলিখিত সারণী থেকে x এর দুই দশমিক পর্যন্ত আসন মান নির্ণয় করুন যখন f (x) = 19

x :	0	1	2
f (x) :	0	1	20

(**সংকেত** $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2;\ y = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 20$ ধরে নিন) [**উত্তর** : x = 2.8]

(3) ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন সূত্র বিপরীতভাবে ব্যবহার করে y = f (x) = 13.6 এর জন্য x -এর মান নিম্নলিখিত সারণী থেকে নির্ণয় করুন।

x	y = f (x)
30	15.9
35	14.9
40	14.1
45	13.3
50	12.5

(**সংকেত** : আগের উদাহরণবলি দ্রষ্টব্য) [**উত্তর** : x = 43.1]

(4) আন্তঃপাঠন পদ্ধতিতে $y = \text{Cosh } x = 1.285$ এর জন্য x -এর মান নির্ণয় করুন (সারণী নিম্নে প্রদত্ত হল)।

x	y = Cos x
0.736	1.2832974
0.737	1.2841023
0.738	1.2849085
0.739	1.2857159
0.740	1.2865247
0.741	1.2873348

(**সংকেত** : লক্ষণীয় যে x অবশ্যই 0.738 এবং 0.739 অন্তরালে আছে। এবার বেসেলের ফর্মুলা প্রয়োগ করুন) [**উত্তর** : x = 0.7381134]

(5) পুনরাবৃত্ত পদ্ধতি প্রয়োগ করে f (x) = 3000 এর জন্য x এর মান বের করুন

x	10	15	20
f (x)	1754	2648	3564

(**সংকেত** $\Delta^2 y_0$ এর পরের উচ্চতর পদ শূন্য ধরে নিন) [**উত্তর** : x = 16.896]

6.7 সারাংশ

এই অধ্যায়ে মূলতঃ বিপরীত আন্তঃপাঠনের ধারণা দেওয়া হয়েছে। এই বিষয়ে বিভিন্ন সূত্র নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে। বিশেষ করে ল্যাগরাঞ্জের বিপরীত আন্তঃপাঠনের সূত্র নির্ধারণ ও তার প্রয়োগ অত্যন্ত উপযোগী, এ ছাড়াও বিভাজন অন্তর ব্যবহার করে বিপরীত আন্তঃ পাঠন বিষয়ে সূত্র নির্ণয় করা হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ উল্লেখ করে অনুচ্ছেদ সম্বন্ধের বিস্তারিত ব্যাখ্যা হয়েছে। এছাড়া অনুশীলনীর জন্য কয়েকটি সমস্যা উল্লেখিত হয়েছে।

6.8 সহায়ক গ্রন্থাবলি

1. Gupta, Malik : Calculus of Finite Differences and Numerical Analysis. (Krishna Prakashan Mandir)
2. A. Gupta, S. C. Bose : Introduction to Numerical Analysis. (Academic Publishers)

একক 7 ❑ সাংখ্যিক অবকলন (Numerical Differentiation)

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

ধরা যাক, $[a, b]$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকটির মান চলক x এর $n+1$ সংখ্যক মান $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$ এর জন্য যথাক্রমে $f(x_0), f(x_1) \ldots . f(x_n)$ দেওয়া আছে, $[a, b]$ অন্তরালে x এর কোনও মানের জন্য $f(x)$ এর অন্তরকলজ অর্থাৎ $f^r(x)$ $(r \geq 1)$ নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক $\varphi(x)$, $f(x)$ এর একটি আন্তঃপাঠন অপেক্ষক এবং ভ্রান্তি $R_{n+1}(x)$

অর্থাৎ $f(x) = \varphi(x) + R_{n+1}(x)$ ... (7.2.1)

এবং $f(x_i) = \varphi(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots n)$ ...(7.1.2)

(7.1.1) এর উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ করলে পাওয়া যায়

$$f'(x) = \varphi'(x) + R'_{n+1}(x) \quad \ldots (7.1.3)$$

ভ্রান্তির মান নগন্য হলে (7.1.3) নং থেকে লেখা যায়

$$f'(x) \simeq \varphi'(x) \quad \ldots (7.1.4)$$

সাধারণ ভাবে $f(x)$ অপেক্ষকের r তম অন্তরকলজের আসন্ন মান নেওয়া হয়

$$f^r(x) \simeq \varphi^r(x) \quad \ldots (7.1.5)$$

সুতরাং, সঠিক আন্তঃপাঠন বহুপদ রাশিমালার সাহায্যে অপেক্ষকের যে কোনো ক্রমের অন্তরকলজের আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়। যদি পাতবিন্দু x_i $(i = 0,1, \ldots n)$ গুলি সমদূরবর্তী হয় তাহলে আমরা $f(x)$ অপেক্ষকটিকে (i) নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন (ii) নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃ পাঠন (iii) গাউসের আন্তঃ

পাঠন (iv) স্টারলিং এবং (v) বেসেলের আন্তঃপাঠন সূত্র গুলির সাহায্যে লেখা যায়। x এর যেকোনো মান সারণীর প্রথম দিকে বা শেষের দিকে থাকলে নিউটনের অগ্র ও পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন ব্যবহার করা হয় অন্যথায় আমরা যেকোনো কেন্দ্রীয় আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করব যদি পাতবিন্দু সারণীর মাঝের দিকে থাকে।

7.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি যেটি করতে পারবেন সেটি হল

- সাংখ্যিক অন্তরকলন পদ্ধতিতে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধান।

7.3 অন্তরকলনে ভ্রান্তি (Error in Differentiation)

(3.1.14) নং সূত্র থেকে আমরা জানি আন্তঃপাঠন বহুপদ রাশিমালায় ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} = \omega(x)\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \quad \cdots (7.2.1)$$

যেখানে অবম $\{x, x_0, \dots x_n\} < c <$ চরম $\{x, x_0, \dots x_n\}$ এবং $c = c(x)$ একটি অজানা x এর অপেক্ষক। (7.2.1) নং সমীকরণের অন্তরকলজ করলে পাওয়া যায়

$$R'_{n+1}(x) = \omega'(x)\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} + \frac{f^{n+2}(c)}{(n+2)!}c'(x) \quad \dots (7.2.2)$$

(7.2.2) নং সমীকরণটি x বিন্দুতে ভ্রান্তির পরিমাণ নির্দেশ করে। যদি x কোনো পাতবিন্দু x_i ($i = 0, 1, \dots n$) এর মান গ্রহণ করে, তাহলে (7.2.2) নং সমীকরণের দ্বিতীয় পদটি শূন্য হবে এবং ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R'_{n+1}(x_i) = \omega'(x_i)\frac{f^{n+1}(c_i)}{(n+1)!} \quad \dots (7.2.3)$$

যেখানে অবম $\{x_0, x_1, \dots x_n\} < c_i <$ চরম $\{x_0, x_1, \dots x_n\}$

ভ্রান্তি $R_{n+1}(x)$ কে বিভাজন অন্তর আকারে প্রকাশ করলে, অন্তরকলনের ভ্রান্তি $R'_{n+1}(x)$ কে আরও সুবিধাজনক আকারে প্রকাশ করা যায়।

সাধারণভাবে যদি আমরা ধরি

$$R_{n+1}(x) = \omega(x)\, f(x, x_0, x_1, \dots x_n)$$

$$R'_{n+1}(x) = \omega'(x) f(x, x_0, x_1, \dots x_n) + \omega(x) f'(x, x_0, \dots x_n)$$

$$= \omega'(x) f(x, x_0, x_1, \dots x_n) + \omega(x) f(x, x, x_0 \dots x_n)$$

$$= \omega'(x)\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} + \omega(x)\frac{f^{n+2}(c_1)}{(n+2)!} \quad \dots (7.2.4)$$

যেখানে অবম $\{x, x_0, x_1, \ldots x_n\} < c, c_1 <$ চরম $\{x, x_0, x_1, \ldots x_n\}$

(7.2.4) নং সূত্রকে r বার অন্তরকলজ করলে পাওয়া যায় (লিব্‌নিজের সূত্র ব্যবহার করে)

$$R_{n+1}^{r}(x) = \sum_{i=0}^{r} {}^{r}c_i\, \omega^i(x) \frac{d^{r-i}}{dx^{r-i}}\left[f(x, x_0, \ldots x_n)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \frac{r!}{i!}\, \omega^i(x)\, f\left(\overbrace{x, x, \ldots x,}^{r-i+1 \text{ বার}} x_0, \ldots x_n\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \frac{r!\, \omega^i(x)}{i!\,(n+r-i+1)}\, f^{\,n+r-i+1}(c) \quad \ldots (7.2.5)$$

যেখানে অবম $\{x, x_0, x_1, \ldots x_n\} < c <$ চরম $\{x, x_0, x_1, \ldots x_n\}$

7.4 সমদূরবর্তী পাতবিন্দু সমূহের জন্য অন্তরকলজ নির্ণয় (Differentiation for Equidistance Points)

মনে করি, পাতবিন্দু $x_i = x_0 + ih$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ সমূহে $y = f(x)$ এর মানগুলি দেওয়া আছে, x বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকলন নির্ণয় করতে হবে।

(A) যদি x বিন্দুটি x_0 এর নিকটে অবস্থিত হয়, তবে নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করতে হবে, নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল

$$f(x) = f(x_0) + u\frac{\Delta f(x_0)}{1!} + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 f(x_0) + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)(u-4)}{5!}\Delta^5 f(x_0) + \cdots$$

$$= f(x_0) + u\Delta f(x_0) + (u^2 - u)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2} + (u^3 - 3u^2 + 2u)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{6}$$

$$+ (u^4 - 6u^3 + 11u^2 - 6u)\frac{\Delta^4 f(x_0)}{24} + (u^5 - 10u^4 + 35u^3 - 50u^2 + 24u)\frac{\Delta^5 f(x_0)}{120} + \cdots \quad (7.3.1)$$

যেখানে $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ ... (7.3.2)

এবং h পাতবিন্দুর মধ্যবর্তী দুরত্ব।

$$\therefore \frac{d}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{du} \quad \ldots (7.3.3)$$

(7.3.1) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_0) + (2u-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2} + (3u^2 - 6u + 2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{6} + \right.$$

$$\left.(4u^3 - 18u^2 + 22u - 6)\frac{\Delta^4 f(x_0)}{24} + (5u^4 - 40u^3 + 105u^2 - 100u + 24)\frac{\Delta^5 f(x_0)}{120} + \cdots\right] \ldots (7.3.4)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f(x_0) + 6(u-1)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{6} + (12u^2 - 36u + 22)\frac{\Delta^4 f(x_0)}{24}\right.$$

$$\left. + (20u^3 - 120u^2 + 210u - 100)\frac{\Delta^5 f(x_0)}{120} + \cdots\right] \quad \ldots .(7.3.5)$$

এবং $f'''(x) = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 f(x_0) + (24u - 36)\frac{\Delta^4 f(x_0)}{24} + (60u^2 - 240u + 210)\frac{\Delta^5 f(x_0)}{120} + \right.$

$\ldots +$ ইত্যাদি, $\ldots (7.3.6)$

এখন x এর মান যদি x_0 এর সমান হয় অর্থাৎ $u = 0$ তখন অন্তরকলন গুলির আকার হবে

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_0) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(x_0) - \frac{1}{4}\Delta^4 f(x_0) + \frac{1}{5}\Delta^5 f(x_0) - \ldots\right] \cdots (7.3.7)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f(x_0) - \Delta^3 f(x_0) + \frac{11}{12}\Delta^4 f(x_0) - \frac{5}{6}\Delta^5 f(x_0) + \cdots\right] \cdots (7.3.8)$$

এবং $f^{iv}(x_0) = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 f(x_0) - \frac{3}{2}\Delta^4 f(x_0) + \frac{7}{4}\Delta^5 f(x_0) + \cdots\right] \cdots (7.3.9)$

ইত্যাদি।

(7.3.4) নং সূত্র থেকে প্রথম অন্তরকলনে ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R'_{n+1}(x) = h^n \frac{d}{du}\{u(u-1)(u-2)\cdots(u-n)\}\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} + \qquad \ldots (7.3.10)$$

$$h^{n+1}\{u(u-1)(u-2)\cdots(u-n)\}\frac{f^{n+1}(c')}{(n+2)!}$$

যেখানে, অবম $\{x, x_0, x_1, \ldots x_n\} < c, c' <$ চরম $\{x, x_0, x_1, \ldots x_n\}$ $[x_0, x_n]$ অন্তরালে যদি $f^{n+1}(x)$ এবং $f^{n+1}(x)$ এর মান প্রায় অপরিবর্তিত থাকে, তবে (2.8.1) নং সূত্র থেকে

$$R'_{n+1}(x) = \frac{1}{h}\left[\frac{d}{du}\{u(u-1)(u-2)\cdots(u-n)\}\frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!} + \right.$$

$$\left.\{u(u-1)(u-2)\cdots(u-n)\}\frac{\Delta^{n+2}y_0}{(n+2)!}\right] \qquad \ldots (7.3.11)$$

(7.3.10) এবং (7.3.11) নং সূত্র থেকে $x = x_0$ বিন্দুতে ভ্রান্তির পরিমাণ যথাক্রমে

$$R'_{n+1}(x_0) = (-1)^n h^n \frac{f^{n+1}(c)}{n+1} \cdots (7.3.12)$$

এবং $$R'_{n+1}(x_0) = (-1)^n \frac{\Delta^{n+1}y_0}{h(n+1)} \qquad \ldots (7.3.11)$$

যেখানে, অবম $\{x, x_0, x_n\} < c <$ চরম $\{x, x_0, x_n\}$

x_n এর সন্নিকটস্থ কোনো বিন্দুতে অন্তরকলনের মান নির্ণয় করতে হলে, নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করতে হবে।

নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল

$$f(x) = f(x_n) + u\frac{\Delta f(x_{n-1})}{1!} + u(u+1)\frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2!} + u(u+1)(u+2)\frac{\Delta^3 f(x_{n-3})}{3!}$$

$$+ u(u+1)(u+2)(u+3)\frac{\Delta^4 f(x_{n-4})}{4!} + u(u+1)(u+2)(u+3)(u+4)\frac{\Delta^5 f(x_{n-5})}{5!} + \cdots$$

$$= f(x_n) + u\Delta f(x_{n-1}) + (u^2+u)\frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2} + (u^3+3u^2+2u)\frac{\Delta^3 f(x_{n-3})}{6}$$

$$+ (u^4+6u^3+11u^2+6u)\frac{\Delta^4 f(x_{n-4})}{24} + (u^5+10u^4+35u^3+50u^2+24u)\frac{\Delta^5 f(x_{n-5})}{120} + \cdots (7.3.14)$$

যেখানে $u = \dfrac{x - x_n}{h}$ ... (7.3.15)

$$\therefore \frac{d}{du} = \frac{1}{h}\frac{d}{du} \qquad \text{... (7.3.16)}$$

(7.3.14) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_{n-1}) + (2u+1)\frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2} + (3u^2 + 6u + 2)\frac{\Delta^3 f(x_{n-3})}{6}\right.$$

$$\left. + (4u^3 + 18u^2 + 22u + 6)\frac{\Delta^4 f(x_{n-1})}{24} + (5u^4 + 40u^3 + 105u^2 + 100u + 24)\frac{\Delta^5 f(x_{n-5})}{120} + \cdots\right] \cdots (7.3.17)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f(x_{n-2}) + (6u+6)\frac{\Delta^3 f(x_{n-3})}{6} + (12u^2 + 36u + 22)\frac{\Delta^4 f(x_{n-4})}{24} + \right.$$

$$\left.(20u^3 + 120u^2 + 210u + 100)\frac{\Delta^5 f(x_{n-5})}{120} + \cdots\right] \quad (7.3.18)$$

এবং $f'''(x) = \dfrac{1}{h^3}\left[\Delta^3 f(x_{n-3}) + (24u + 36)\dfrac{\Delta^4 f(x_{n-4})}{24} + (60u^2 + 240u + 210)\dfrac{\Delta^5 f(x_{n-5})}{120} + \cdots\right] \cdots (7.3.19)$

ইত্যাদি।

যদি $x = x_n$ হয় তবে (7.3.15) থেকে পাই $u = 0$ এক্ষেত্রে অন্তরকলনগুলির আকার হবে

$$f'(x_n) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_{n-2}) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(x_{n-3}) + \frac{1}{4}\Delta^4 f(x_{n-4}) + \frac{1}{5}\Delta^5 f(x_{n-5}) + \cdots\right]$$

$$\cdots (7.3.20)$$

$$f''(x_n) = \frac{1}{h}\left[\Delta^2 \left(x_{n-2}\right) + \Delta^3 f\left(x_{n-3}\right) + \frac{11}{12}\Delta^4 f\left(x_{n-4}\right) + \frac{5}{6}\Delta^5 f(x_{n-5}) + \ldots\right] \ldots (7.3.21)$$

এবং $f'''(x_n) = \dfrac{1}{h}\left[\Delta^3 f(x_{n-3}) + \dfrac{3}{2}\Delta^4 f(x_{n-4}) + \dfrac{7}{2}\Delta^5 f(x_{n-5}) + \cdots\right] \cdots (7.3.22)$

(7.3.17) নং সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ (7.3.10) এবং (7.311) নং সূত্রদ্বয়ের অনুরূপ হবে।

(c) সারণীর মধ্যভাগে x এর কোনও মানের জন্য অন্তরকলন নির্ণয় করতে হলে, আমরা স্টারলিং বা বেসেলের আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করতে পারি।

মনে করি, বিজোড় সংখ্যক সমদূরবর্তী পাতবিন্দু $x_{-n}, x_{-n+1}, x_{-n+2} \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ সমূহে $y = f(x)$ অপেক্ষকের মানগুলি দেওয়া আছে।

এখানে, $x \pm i = x_0 \pm ih$ ($h>0$, $i = 0, 1, ...n$)
স্টারলিংএর আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল

$$f(x) \simeq s(x) = y_0 + \frac{u}{1!}\,\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{u^3 - u}{3!}\,\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}$$

$$+ \frac{u^4 - u^2}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{u^5 - 5u^3 + 4u}{5!}\,\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \cdots \quad (7.3.23)$$

যেখানে $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ ... (7.3.24)

$$\therefore \frac{d}{dx} = \frac{1}{u}\frac{d}{du} \quad \text{... (7.3.25)}$$

এখানে ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{2n+1}(x) = u(u^2 - 1^2)(u^2 - 2^2)\cdots(u^2 - n^2)\,h^{2n+1}\,\frac{f^{2n+1}(c)}{(2n+1)!} \quad \cdots (7.3.26)$$

যেখানে, অবম $\{x, x_{-n}, x_n\} < c <$ চরম $\{x, x_{-n}, x_n\}$
(7.3.23) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে এবং (7.3.25) সম্পর্ক ব্যবহার করে

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + u\Delta^2 y_{-1} + \frac{3u^2 - 1}{6}\,\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \right.$$

$$\left.\frac{2u^3 - u}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{5u^4 - 15u^2 + u}{120}\,\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \cdots\right] \quad \text{... (7.3.27)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{-1} + u\,\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{6u^2 - 1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{2u^3 - 3u}{12}\right.$$

$$\left.\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \cdots\right] \quad \text{... (7.3.28)}$$

একই রকম ভাবে, $x = x_0$ বিন্দুতে, $u = 0$
(7.3.27) এবং (7.3.28) নং সমীকরণ থেকে পাই

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{1}{30}\,\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \cdots\right] \cdots (7.3.29)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\,\Delta^4 y_{-2} + \cdots\right] \cdots (7.3.30)$$

(7.3.26) নং থেকে

$$R'_{2n+1}(x) = h^{2n}\,\frac{d}{du}\left[u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\cdots(u^2-n^2)\right]\frac{f^{2n+1}(c)}{(2n+1)!} +$$
$$h^{2n+1}\left[u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\cdots(u^2-n^2)\right]\frac{d}{dx}\left[\frac{f^{2n+1}(c)}{(2n+1)!}\right]$$

আগের মতো করে আমরা পাই

$$R'_{2n+1}(x) = h^{2n}\,\frac{d}{du}\left[u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\cdots(u^2-n^2)\right]\frac{f^{2n+1}(c)}{(2n+1)!} +$$
$$h^{2n+1}\left[u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\cdots(u^2-n^2)\right]\frac{f^{2n+1}(c')}{(2n+2)!} \cdots (7.3.31)$$

যেখানে, অবম $\{x, x_{-n}, x_n\} < c, c' <$ চরম $\{x, x_{-n}, x_n\}$

$$= h^{2n}\,\frac{d}{du}\left[u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\cdots(u^2-n^2)\right]\frac{\Delta^{2n+1}y_{-(n+1)}}{(2n+1)!\,h^{2n+1}}$$
$$+ h^{2n+1}\left[u(u^2-1^2)(u^2-2^2)\cdots(u^2-n^2)\right]\frac{\Delta^{2n+2}y_{-(n+1)}}{(2n+2)!\,h^{2n+2}}$$

$$\therefore\ R'_{2n+1}(x_0) = \frac{(-1)^n\, n!}{(2n+1)!\,h}\,\Delta^{2n+1}y_{-(n+1)} \cdots (7.3.32)$$

মন্তব্য : বেসেলের অন্তরকলন সূত্র উপরিউক্ত উপায়ে একই ভাবে বর্ণনা করা যাবে।

7.5 অসমদূরবর্তী পাতবিন্দুসমূহের জন্য অন্তরকলজ নির্ণয় (Differentiation Formula for Unequal Spaced Arguments)

(A) নিউটনের বিভাজন আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করে অন্তরকলজ নির্ণয়

ধরা যাক $[a, b]$ অন্তরালে $(n+1)$ সংখ্যক পাতবিন্দু $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ সমূহে $y = f(x)$ অপেক্ষকের মান $y_i = f(x_i)$; $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$ দেওয়া আছে।

এই পাতবিন্দু সমূহের জন্যে নিউটনের বিভাজন অন্তর আন্তঃপাঠন সূত্রটি হল

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_0, x_1, x_2) +$$

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots (x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots x_n)$$

$$= f(x_0) + (x-x_0)\,\delta f(x_0) + \{x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0 x_1\}\,\delta^2 f(x_0) +$$

$$\{x^3 - (x_0 + x_1 + x_2)x^2 + (x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2)x - x_0x_1x_2\}\,\delta^3 f(x_0) +$$

$$\{x^4 - (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)x^3 + (x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x^2 -$$

$$(x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3)x + x_0x_1x_2x_3\}\,\delta^4 f(x_0) \ldots (7.4.1)$$

এবং ভ্রান্তির পরিমাণ

$$R_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_n) f(x, x_0, x_1, \ldots x_n) \ldots (7.4.2)$$

(7.4.1) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$f'(x) = \delta f(x_0) + \{2x - (x_0+x_1)\}\,\delta^2 f(x_0) + \{3x^2 - 2(x_0 + x_1 + x_2)x + (x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2)\}$$

$$\delta^3 f(x_0) + \{4x^3 - 3(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)x^2 + 2(x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x$$

$$- (x_0x_1x_2 + x_0x_2x_3 + x_0x_1x_3 + x_1x_2x_3)\}\,\delta^4 f(x_0) + \ldots (7.4.3)$$

$$f''(x) = 2\delta^2 f(x_0) + \{6x - 2(x_0+x_1 + x_2)\}\,\delta^3 f(x_0) + \{12x^2 - 6(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)x$$

$$+ 2(x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\}\,\delta^4 f(x_0) + \ldots (7.4.4)$$

এবং

$$f'''(x) = 6\delta^3 f(x_0) + \{24 - 6(x_0+x_1 + x_2 + x_3)\}\,\delta^4 f(x_0) + \ldots (7.4.5)$$

ইত্যাদি।

(7.4.2) নং সমীকরণ হতে একই ভাবে ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ণয় করা যাবে।

(B) ল্যাগরানজের আন্তঃপাঠন সূত্র ব্যবহার করে অন্তরকলজ নির্ণয়

ল্যাগর‍্যানজের আন্তঃপাঠন সূত্র হল

$$f(x) \simeq L(x) = \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x - x_i)\,\omega'(x_i)}$$

যেখানে, $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$

$$\therefore L'(x) = \omega'(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)} - \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)^2\,\omega'(x_i)} \quad \ldots (7.4.6)$$

কিন্তু যেকোনো পাতবিন্দু $x = x_r$ এর জন্য (7.4.6) নং সূত্র প্রযোজ্য হবে না। সুতরাং আমরা L (x) কে নিম্নোক্ত উপায়ে অন্তরকলন করব

$$L(x) = \omega(x) \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq r}}^{n} \frac{f(x_i)}{(x - x_i)\,\omega'(x_i)}$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{r-1})(x - x_{r+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_r - x_0)(x_r - x_1) \ldots (x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1}) \ldots (x_r - x_n)} f(x_r)$$

$$\therefore L'(x_r) = \omega'(x_r) \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq r}}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_r - x_i)\,\omega'(x_i)} + f(x_r) \sum_{i \neq r} \frac{1}{x_r - x_i} \quad (r = 0, 1, \ldots n) \cdots (7.4.7)$$

যেহেতু

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{r-1})(x - x_{r+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_r - x_0)(x_r - x_1) \ldots (x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1}) \ldots (x_r - x_n)}\right] = \sum_{i \neq r} \frac{1}{x_r - x_i}$$

7.6 উদাহরণমালা

1) নিচের তালিকা ব্যবহার করে f′ (1.1) এবং f′ (1.6) এর মান নির্ণয় করুন

x :	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
f (x) :	7.989	8.403	8.781	9.129	9.451	9.750	10.031

সমাধান : এখানে আমরা নিউটনের অগ্র এবং পশ্চাৎ অন্তরকলন সূত্র ব্যবহার করব কারণ পাতবিন্দুগুলি সমদূরবর্তী।

এখানে অগ্রান্তর সারণীটি হল

x	f (x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
1.0	7.987			
		0.414		
1.1	8.403		–0.036	
		0.378		0.006
1.2	8.781		–0.030	
		0.348		0.004
1.3	9.129		–0.026	
		0.322		0.004
1.4	9.451		–0.023	
		0.299		0.005
1.5	9.750		– 0.018	
		0.281		
1.6	10.031			

এখন $f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$

এবং $h = 0.1$, $x_0 = 1.1$, $\Delta\ y_0 = 0.378$, $\Delta^2\ y_0 = -\ 0.036$, $\Delta^3\ y_0 = 0.006$

$$\therefore f'(1.1) = \frac{1}{0.1}\left[0.378 - \frac{1}{2}(-0.036) + \frac{1}{3}(0.006)\right] = 3.946$$

যেহেতু $x = 1.6$ সারণীর শেষের বিন্দু, আমরা

$f'(x_n) = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y_n \cdots\right]$ সূত্রটি ব্যবহার করব, এখানে, $x_n = 1.6$

$$\therefore f'(1.6) = \frac{1}{0.1}\left[0.281 + \frac{1}{2}(-0.018) + \frac{1}{3}(0.005)\right] = 2.727$$

2) নিচের তালিকা থেকে f′ (10) এর মান নির্ণয় করুন

x :	3	5	11	27	34
f (x) :	–13	23	899	17315	35606

সমাধান : যেহেতু পাতবিন্দুগুলি অসমদূরবর্তী, আমরা নিউটনের বিভাজন অন্তর অন্তরকলন সূত্র ব্যবহার

করতে পারি।

x	f (x)	δf	$\delta^2 f$	$\delta^3 f$	$\delta^4 f$
3	−13				
		18			
5	23		16		
		146		0.998	
11	899		39.96		0.0002
		1025		1.003	
17	17315		69.04		
		2613			
34	35606				

এই পাতবিন্দু সমূহের জন্যে নিউটনের বিভাজন অন্তর অন্তরকলন সূত্রটি হল

$$f'(x) = f(x_0,x_1) + (2x-x_0-x_1)\, f(x_0, x_1,x_2) + \{3x^2 - 2x\,(x_0 + x_1 + x_2) +$$

$$(x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2)\}\, f(x_0,x_1,x_2,x_3) + \{4x^3 - 3x^2(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) + 2x\,(x_0x_1 +$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_0x_3 + x_1x_3 + x_0x_2) - (x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_0x_2x_3 + x_0x_1x_3)]\, f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$$

$$\therefore f'(10) = 18 + 12 \times 16 + 23\,(0.998) - 426 \times (0.0002)$$

$$= 232.869.$$

7.7 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) তিনটি সমদূরবর্তী বিন্দু x_0, x_1, x_2 এর জন্যে $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,2)$ হলে দেখান যে

(a) $y'_0 = \dfrac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \dfrac{1}{3}h^2 y'''(c_0)$

(b) $y'_1 = \dfrac{1}{2h}(-y_0 + y_2) - \dfrac{1}{6}h^2 y'''(c_1)$

(2) নিচের সারণী ব্যবহার করে $f'(1.1)$ এবং $f''(1.1)$ এর 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানগুলি নির্ণয় করুন।

x :	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
f (x) :	0.000	0.128	0.544	1.296	2.432	4.000

[**সংকেত** : উদাহরণ 7.6 এর 1 নং উদাহরণ দ্রষ্টব্য] (**উত্তর** : 0.630, 6.600)

(3) নিচের সারণী ব্যবহার করে $f'(50)$ এবং $f''(53)$ এর মান 3 সার্থক অংক পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করুন

x :	50	51	52	53	54	55	56
f (x) :	3.6840	3.7084	3.7325	3.7563	3.7798	3.8030	3.8259

[**সংকেত** : 7.6 এর 2 নং উদাহরণ দ্রষ্টব্য] (**উত্তর** : 0.0246, 0.0236)

(4) নিচের সারণী ব্যবহার করে $f'(0)$ এবং $f''(0)$, $f'(20)$ এবং $f''(20)$, এর মান নির্ণয় করুন।

x :	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0
f (x) :	1.5708	1.5738	1.5828	1.5981	1.6200

[**সংকেত** : এইভাবে ভাবুন] (**উত্তর** : 0.0000, 0.0002, 0.0051, 0.0003)

(5) প্রদত্ত সারণীতে x এর বিভিন্ন মানের জন্য $y = \log_e (x^2 + 17)$ এর মানগুলি দেওয়া আছে। সাংখ্যিক এবং বৈশ্লেষিক উভয় পদ্ধতিতে $x = 4.04$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় করুন।

ল্যাগরানজের এবং স্টারলিংয়ের অন্তরকলন সূত্র ব্যবহার করে আপেক্ষিক ত্রুটির পরিমাণ নির্ধারণ করুন।

x	y
4.00	3.496508
4.02	3.501356
4.04	3.506206
4.06	3.511056
4.08	3.515906

(**উত্তর** : $y'(4.04) = 0.384030$)

6)

x :	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
y :	10.0	16.5	27.3	45.0	74.2

ল্যাগরাঞ্জের অবকলন সূত্রের সাহায্যে উপরের সারণী থেকে $f'(3.5)$ নির্ণয় করুন।

[**সংকেত** : x এর মান সমুহ সমদূরবর্তী] (**উত্তর** : $f'(3.5) \cong 16.8$)

7.8 সারাংশ

এই অধ্যায়ে মূলতঃ সাংখ্যিক অবকলন বা অন্তরকলন নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে। অন্তরকলন করার ফলে প্রকৃত মান থেকে প্রয়োগকৃত মানের কিছু তারতম্য হয়। সেই ভ্রান্তি বিষয়ে অবগত করা হয়েছে। ভ্রান্তি কত পর্যন্ত গ্রহণযোগ্য হতে পারে তার বিষয়ে ধারণা দেওয়া হয়েছে। সমদূরবর্তী পাতবিন্দু এবং অসমদূরবর্তী পাতবিন্দু সমূহের জন্য সাংখ্যিক অন্তরকলজ নির্ণয় করা হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ এবং সংকেত সহ অনুশীলনী সহযোগে বিষয়টা সহজবোধ্য করার চেষ্টা হয়েছে।

7.9 সহায়ক গ্রন্থাবলি

(1) A. Gupta, S. C. Bose : Introduction to Numerical Analysis. (Academic publishers)

(2) F. B. Hildebrand : Introduction to Numerical Analysis (Tata Migraw Hill)

একক 8 ❑ সাংখ্যিক পদ্ধতিতে সমাকলন (Numerical Integration)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

উচ্চ গণিতে এবং বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় নির্দিষ্ট সমাকলের মান নির্ণয় প্রায়ই অনাবশ্যক হয়ে পড়ে। অনেক সময় যদিও $f(x)$ অপেক্ষকটির বৈশ্লেষিক আকার সম্পূর্ণরূপে পরিচিত, তার নির্দিষ্ট সমাকল সর্বদা সহজ উপায়ে বা একেবারেই নির্ণয় করা সম্ভবপর নয়। উদারহরণ স্বরূপ $f(x) = e^{\sin x}$, e^{-x^3} . . . ইত্যাদি। আবার $f(x)$ অপেক্ষকটির বৈশ্লেষিক আকার অজানা কিন্তু সেটির একটি সেট তালিকা মান জানা।
এসমস্ত ক্ষেত্রে কেবলমাত্র সাংখ্যিক পদ্ধতিতেই অপেক্ষকটির নির্দিষ্ট সমাকলের আসন্নমান নির্ণয় করা সম্ভব।

এই পদ্ধতিতে প্রদত্ত অন্তরালে অপেক্ষকটিকে উপযুক্ত আন্তঃপাঠন বহুপদ রাশিমালা দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা এবং এটির নির্দিষ্ট সমাকলকে প্রদত্ত অপেক্ষকের নির্দিষ্ট সমাকলের আসন্ন মান হিসাবে গ্রহণ করা হয়।

ধরা যাক, নির্দিষ্ট সমাকল $\int^{b} f(x)dx$

এর মান নির্ণয় করতে হবে। [a,b] অন্তরালে চল x এর এক সেট মান $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ এর জন্য যথাক্রমে $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ নির্ণয় করা হল।

এই মানগুলির জন্য f(x) অপেক্ষকের আন্তঃপাঠন বহুপদ রাশিমালা $\varphi(x)$ এবং ভ্রান্তি $R_{n+1}^{(x)}$ হলে

$$f(x) = \varphi(x) + R_{n+1}^{(x)} \quad \ldots (8.1.1)$$

সুতরাং $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b R_{n+1}^{(x)} dx \quad \ldots (8.1.2)$

যেহেতু $\varphi(x)$ একটি n-ঘাতের বহুপদ রাশিমালা, সুতরাং $\int_a^b \varphi(x)dx$ -এর মান সহজেই নির্ণয় করা যায়।

ভ্রান্তি $\int_a^b R_{(n+1)}^{(x)}$ -এর মান নগন্য হলে আমরা লিখতে পারি

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b \varphi(x)dx \quad \ldots (8.1.3)$$

$\int_a^b \varphi(x)dx$ এর মানকে $\int_a^b f(x)dx$ -এর আসন্ন মান হিসাবে নেওয়া হয় এবং ভ্রান্তির পরিমাণ হল

$$E = \int_a^b R_{(n+1)}^{(x)} dx$$

$$= \int_a^b (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} dx \quad \ldots (8.1.4)$$

যেখানে $a < c < b$।

8.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি

- সাংখ্যিক সমাকলন পদ্ধতিতে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে সক্ষম হবেন।

8.3 সমদূরবর্তী পাতবিন্দু সমূহের জন্য সাধারণ কোয়াড্রাচার সূত্র (গাউস লিজেনডার সূত্র)

ধরা যাক, [a,b] অন্তরালে x-এর এক সেট (n+1) সংখ্যক মান $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ এর জন্য যথাক্রমে $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{n-1}, y_n$ নির্ণয় করা হল।

[a,b] অন্তরালে এই বিন্দুগুলির জন্য নিউটনের অগ্র আন্তঃপাঠন রাশিমালাটি হল

$$f(x) \simeq \varphi(x) = f(x_0) + u\Delta f(x_0) \; \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \frac{u\,(u-1)\,(u-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0) +$$

$$\frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 f(x_0) + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)(u-4)}{5!}\Delta^5 f(x_0) + \ldots (8.2.1)$$

যেখানে $u = \dfrac{x - x_0}{h}$, $a = x_0$, $b = x_n$ এবং $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$

(8.1.5) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে সমাকল করে পাই

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx$$

$$\text{বা, } I \simeq h\int_0^n \left[f(x_0) + u\Delta f(x_0) + \frac{u^2-u}{2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{u^3-3u^2+2u}{6}\Delta^3 f(x_0) \right.$$

$$\left. + \frac{u^4+6u^3+11u^2-6u}{24}\Delta^4 f(x_0) + \ldots \right] du$$

$$= h\left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\Delta y_0 + \frac{2n^3-3n^2}{12} + \frac{n^4-4n^3+4n^2}{24}\Delta^3 y_0 + \ldots \right] \ldots (8.2.2)$$

(8.2.2) নং সমীকরণটি হল সাধারণ কোয়াড্রাচার সূত্র। এই সূত্র থেকে আমরা তিনটি গুরুত্বপূর্ণ কোয়াড্রাচার সূত্র যথা (i) ট্রাপিজয়ডাল সূত্র (ii) সিম্পসনের $\frac{1}{3}$ সূত্র ও (iii) ওয়েডেলের সূত্র ব্যাখ্যা করব।

8.4 ট্রাপিজয়ডালের সূত্র (Trapezoidal Rule)

এটি দ্বিবিন্দু কোয়াড্রাচার সূত্র। অর্থাৎ এখানে n=1, সুতরাং (8.2.2) নং সমীকরণে n=1 বসিয়ে

$$I_T = h[y_0 + \tfrac{1}{2}\Delta y_0]$$

$$= h[y_0 + ½(y_1-y_0)] = \frac{h}{2}(y_0+y_1) \ldots (8.3.1)$$

সাংখ্যিক সমাকলন পদ্ধতিতে (8.3.1) নং সূত্রটি ট্রাপিজয়ডালের সূত্র হিসাবে পরিচিত।

ভ্রান্তি :

উপরোক্ত সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ

$$E_T = \int_a^b f(x)dx - I_T = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] \ldots (8.3.2)$$

ধরা যাক, $f(x)$ অপেক্ষকটির যেকোনো ক্রমের অন্তর কলন $[x_0, x_1]$ অন্তরালে সন্তত। সুতরাং একটি অপেক্ষক $F(x)$ পাওয়া যাবে যার জন্য $F'(x) = f(x)$ হবে।

$$\therefore \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = F(x_0+h) - F(x_0) \ldots$$

$$= \left[F(x_0) + hF'(x_0) + \frac{h^2}{2!}F''(x_0) + \frac{h^3}{3!}F'''(x_0) \ldots\right] - F(x_0)$$

[টেলরের উপপাদ্য ব্যবহার করে]

$$= hF'(x_0) + \frac{h^2}{2}F''(x_0) + \frac{h^3}{3!}F'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}F^{iv}(x_0) + \ldots$$

$$= hf(x_0) + \frac{h^2}{2}f'(x_0) + \frac{h^3}{6}f''(x_0) + \frac{h^4}{24}f'''(x_0) + \ldots (8.3.3)$$

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_0+h)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \ldots\right]$$

$$= hf(x_0) + \frac{h^2}{2}f'(x_0) + \frac{h^3}{4}f''(x_0) + \frac{h^4}{12}f'''(x_0) + \ldots (8.3.4)$$

(8.2.2), (8.2.3) এবং (8.2.4) নং সূত্র হতে পাই—

$$E_T \simeq \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) h^3 f''(x_0)$$

$$= -\frac{h^3}{12}f''(x_0)$$

$$\simeq -\frac{h^3}{12}f''(c) \ldots (8.2.5)$$

যেখানে $a = x_0 < C < x_1 = b$

যৌগিক ট্রাপিজয়ডাল সূত্র (Composite Trapezoidal Rule)

ধরা যাক, সাংখ্যিক পদ্ধতিতে

$$I_T \equiv \int_a^b f(x)dx \ldots (8.2.6)$$

সমাকলটির মান নির্ণয় করতে হবে, [a,b] অন্তরালটি খুব ছোট না হলে $x_0=a$ এবং $x_1=b$ ধরে ট্রাপিজয়ডাল সূত্রটি প্রয়োগ করলে ভ্রান্তির পরিমাণ বেশ বড় হবে, সেজন্য [a,b] অন্তরালকে $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$,. . $[x_{n-1}, x_n]$, nসংখ্যক ক্ষুদ্র উপঅন্তরালে বিভক্ত করা হয় এবং প্রত্যেকটি উপঅন্তরালে ট্রাপিজয়ডাল সূত্র ব্যবহার করা হয়।

$$\text{অতএব } I_T^C = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

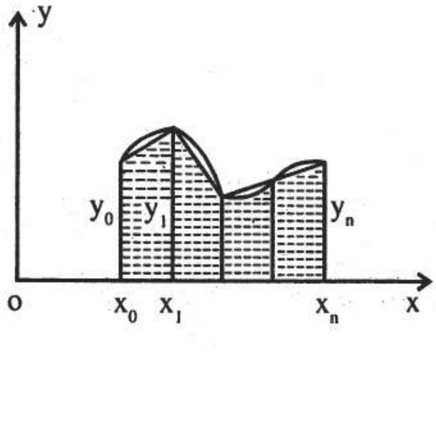
$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}[y_0 + y_1] + \frac{h}{2}[y_1 + y_2] + \ldots + \frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n]$$

$$= \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + y_n] \ldots (8.2.7)$$

(8.2.7) নং সূত্রকে যৌগিক ট্রাপিজয়ডাল সূত্র বলা হয়। যৌগিক ট্রাপিজয়ডাল সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ হবে

$$E_T^C \simeq -\frac{nh^3}{12}f''(c); \quad (x_0 < c < x_n) \ldots (8.3.8)$$



জ্যামিতিক তাৎপর্য :

[a,b] অন্তরালে $y=f(x)$ লেখচিত্রকে n সংখ্যক জ্যা দ্বারা প্রতিস্থাপন করা হল। যেন i-তম জ্যাটির প্রান্ত বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক হয় (x_{i-1}, y_{i-1}) এবং (x_i, y_i) $(i=1, 2, \ldots n)$। এক্ষেত্রে $\int_a^b f(x)dx$-এর আসন্ন মান হবে n সংখ্যক ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি।

সিম্পসনের সমাকল সূত্র : (Simpson's $\frac{1}{3}$ rule)

এটি তিন বিন্দুর সমাকলন সূত্র। অর্থাৎ এখানে n=2

(8.2.2) নং সূত্রে n=2 বসিয়ে পাই

$$I_s = \frac{h}{2}\left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{16-12}{12}\Delta^2 y_0\right]$$

$$= h[y_0 + 2(y_1-y_0) + \tfrac{1}{3}(y_2-2y_1+y_0)]$$

$$= \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] \ldots (8.3.1)$$

সাংখ্যিক সামাকলন পদ্ধতিতে (8.3.1) নং সূত্রটি সিম্পসনের সূত্র হিসাবে পরিচিত।

সিম্পসনের সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ

$$E_s = \int_a^b f(x)dx - I_s$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \ldots (8.3.2)$$

যদি, $F'(x) = f(x)$ হয় তবে (ট্রাপিজয়ডালের অনুরূপে)

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx = F(x_0 + 2h) - F(x_0)$$

$$= F(x_0) + 2hF'(x_0) + \frac{4h^2}{2!}F''(x_0) + \frac{8h^3}{3!}F'''(x_0) + \frac{16h^4}{4!}F^{iv}(x_0)$$

$$+ \frac{32h^5}{5!}F^{v}(x_0) + \ldots\ ] - F(x_0)$$

$$= 2hf(x_0) + 2h^2 f'(x_0) + \frac{4}{3}h^3 f''(x_0) + \frac{2}{3}h^4 f'''(x_0) + \frac{4}{15}h^5 f^{iv}(x_0) + \ldots (8.3.3)$$

আবার,

$$I_s = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_0+h) + f(x_0+2h)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\,[f(x_0) + \left\{f(x_0) + h'f(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(x_0)\right.$$

$$\left.+\ldots\right\} + \left\{f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{4h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{8h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{16h^4}{4!}f^{iv}(x_0)\right.$$

$$\left.+\ldots\right\}]$$

$$= 2hf(x_0) + 2h^2f'(x_0) + \frac{4}{3}h^3f''(x_0) + \frac{2}{3}h^4f'''(x_0) + \frac{5}{18}h^5f^{iv}(x_0) + \ldots \quad (8.3.4)$$

(8.3.3) এবং (8.3.4) থেকে মানগুলি (8.3.2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$E_s \simeq \left(\frac{4}{15} - \frac{5}{18}\right)h^5f^{iv}(c) = -\frac{h^5}{90}f^{iv}(c)\ldots (8.3.5)$$

যেখানে $a=x_0<c<x_2=b$

সিম্পসনের যৌগিক সমাকল সূত্র :

ধরা যাক (2m+1) সংখ্যক সমদূরবর্তী বিন্দুতে $(a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b)$ অপেক্ষক $y=f(x)$-এর মানগুলি হল $y_i = f(x_i)$ $(i=0,1,\ldots n)$

এখানে n যুগ্ম এবং $n=2m$; $h= \dfrac{b-a}{n}$

$$x_i = x_0+ih \qquad i=1,2,\ldots n.$$

ধরা যাক $\int_a^b f(x)dx$ -এর মান নির্ণয় করতে হবে। আমরা লিখতে পারি

$$I_s^c = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_{2m}} f(x)dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx$$

2h দৈর্ঘ্যের উপ অন্তরাল $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]\ldots[x_{2m-2}, x_{2m}]$ সমূহে সিম্পসনের সমাকল সূত্র প্রয়োগ করলে পাই

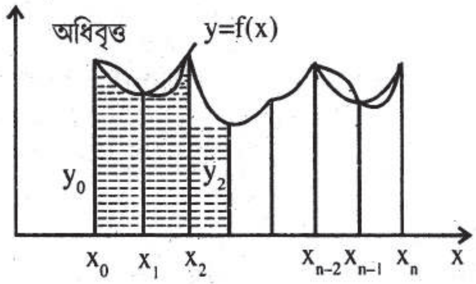
$$I_s^c \simeq \frac{n}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

$$= \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})\right] \ldots (8.3.6)$$

যৌগিক সিম্পসনের সমাকল সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ

$$E_s^c \simeq -\frac{nh^5}{180} f^{iv}(c); \ (x_0 < c < x_n) \ldots (8.3.7)$$



জ্যামিতিক তাৎপর্য :

সিম্পসনের সমাকলন সূত্র আরোহণের সময় $[x_{i-2}, x_i]$ $(i=2, 3, \ldots n)$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষককে একটি দুইঘাত অন্তঃপঠন রাশিমালা দ্বারা প্রতিস্থাপন করা হয় যেটা (x_{i-1}, y_{i-1}) এবং (x_i, y_i) বিন্দু দিয়ে যায়। এখানে (8.3.1) সূত্রে Is এর মান x অক্ষ y_0 y_2 কোটীদ্বয় এবং অধিবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

মন্তব্য : উপঅন্তরালের সংখ্যা বিজোড় হলে অর্থাৎ n জোড় হলে সিম্পসনের সূত্র ব্যবহার করা যাবে না।

ওয়েডেলের সমাকলন সূত্র :

সাতটি সমদূরবর্তী পাতবিন্দুর জন্য অর্থাৎ (8.1.4) নং সূত্রে n=6 বসিয়ে পাওয়া যায়

$$I_w = h\left[6y_0 + 18\Delta y_0 + 27\Delta^2 y_0 + 24\Delta^3 y_0 + \frac{123}{10}\Delta^4 y_0 + \frac{33}{10}\Delta^5 y_0 + \frac{41}{140}\Delta^6 y_0\right]$$

$$= h\left[6y_0 + 18\Delta y_0 + 27\Delta^2 y_0 + 24\Delta^3 y_0 + \frac{123}{10}\Delta^4 y_0 + \frac{33}{10}\Delta^5 y_0 + \frac{3}{10}\Delta^6 y_0\right]$$

$$- \frac{h}{140}\Delta^6 y_0 \ldots (8.4.1)$$

যদি h এর মান এমন হয় যাতে $\Delta^6 y_0$ নগন্য হয় তবে (8.4.1) নং সমীকরণ থেকে লেখা যায়

$$I_w \simeq \frac{3h}{10}\left[20y_0 + 60\Delta y_0 + 90\Delta^2 y_0 + 80\Delta^2 y_0 + 41\Delta^4 y_0 + 11\Delta^5 y_0 + \Delta^6 y_0\right]$$

$$= \frac{3h}{10}\left[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6\right] \ldots (8.4.2)$$

(8.4.2) নং সূত্রটিকে ওয়েডেলের সমকলন সূত্র বলা হয়।

ভ্রান্তির পরিমাণ হবে

$$E_w \simeq -\frac{h^4}{140} f^{vi}(c); (x_0 < c < x_6) \ldots (8.4.3)$$

8.5 ওয়েডেলের যৌগিক সমাকলন সূত্র

[a,b] অন্তরালে $n=(6m)$ উপঅন্তরালে বিভক্ত করে অর্থাৎ
$[a,b] = [x_0,x_6] \cup [x_6,x_{12}] \cup \ldots \cup [x_{n-6}, x_n]$
এখন প্রত্যেকটি অন্তরালে (8.4.2) সূত্র ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$I_w^c = \frac{3h}{10}\,[(y_0+y_n) + 5(y_1+y_5+y_7.\,.\,.+y_{n-5}+y_{n-1}) + (y_2+y_4+y_8+y_{10}.\,.\,.+y_{n-4}+y_{n-2}) + 6(y_3+y_9+.\,.+y_{n-3}) + 2\,(y_6+y_{12}+.\,.\,.+y_{n-6})]\;.\,.\,.\;(8.4.4)$$

(8.4.4) সূত্রটিকে ওয়েডেলের যৌগিক সমাকলন সূত্র বলা হয়। ভ্রান্তির পরিমাণ হবে

$$E_w^c = -\frac{nh^5}{840} f^{vi}(c);\;(a<\xi<b)\;.\,.\,.(8.4.5)$$

8.6 ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন ব্যবহার করে নিউটন কোটের সমাকলন সূত্র

ধরা যাক, [a,b] অন্তরালে x এর এক সেট মান $a = x_0<x_1<x_2.\,.\,.<x_n=b$ এর জন্য f(x) এর মান যথাক্রমে $y_0, y_1.\,.\,.\,y_n$ দেওয়া আছে। এখন $\int_a^b f(x)dx$ -এর মান নির্ণয় করতে হবে। এই বিন্দুগুলির জন্য ল্যাগ্রানজের আন্তঃপাঠন বহুপদ রাশিমালাটি হল

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)} f(x_i)$$

এবং ভ্রান্তি $R_{n+1}(x)$ হলে

$$f(x) = L_n(x) + R_{n+1}(x)\;.\,.\,.\;(8.5.1)$$

সুতরাং $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + \int_a^b R_{n+1}(x)dx.\,.\,.\;(8.5.1)$

অতএব $\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b L_n(x)dx$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)\,f(x_i)}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)}dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \frac{\omega(x)dx}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, H_L^{(n)} \quad \ldots (8.5.3)$$

যেখানে $\quad H_L^{(n)} = \int_a^b \frac{\omega(x)dx}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)} \quad \ldots$

এখন ধরা যাক প্রদত্ত পাতবিন্দুগুলি সমদূরবর্তী এবং

$$x_i = x_0 + ih \;(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots n)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

ধরা যাক

$$x = x_0 + ht,\ \therefore\ x - x_i = (t-i)\,h \qquad \ldots (8.5.5)$$

$$dx = hdt \text{ এবং}$$

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

$$= h^{n-1}t\,(t-1)\,(t-2)\ldots(t-n)$$

এবং $\omega'(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)$

$$= h^n\, i(i-1)\,(i-2)\ldots 2.1\,(-1)\,(-2)\ldots\left(-\overline{n-i}\right)$$

$$= h^n\, i!\,(n-i)!\,(-1)^{n-i}$$

$$\therefore\ H_L^{(n)} = \int_0^n \frac{h^{n+1}\ t(t-1)\,(t-2)\ldots(t-n)h\,dt}{h^n\ i!\,(n-i)!\,(-n)^{n-i}\ h(t-i)}$$

$$= \frac{(-1)^{n-i}\,h}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\,(t-2)\ldots(t-n)}{(t-i)}\,dt \qquad \ldots (8.5.6)$$

$$= (b-a)K_i^{(n)} = nhk_i^{(n)} \qquad \ldots (8.5.7)$$

যেখানে $K_i^{(n)} = \frac{(-1)^{n-i}}{n.\ i!\,(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\,(t-2)\ldots(t-n)}{(t-i)}\,dt \quad \ldots (8.5.8)$

$$\therefore\ \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) \sum_{i=1}^{n} f(x_i)K_i^{(n)} \quad \ldots (8.5.9)$$

(8.5.9) সূত্রটিকে নিউটন কোটের সমাকল সূত্র বলা হয়। এই পদ্ধতিতে ভ্রান্তির পরিমাণ হবে

$$\rho_{n+1} = \int_a^b R_{n+1}(x)dx = \int_{x_0}^{x_{n+1}} (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}dx$$

$$= h^{n+2}\int_0^n \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)}{(n+1)!} f^{n+1}(c)\,dt \quad \ldots (8.5.10)$$

যেখানে $a<c<b$

8.7 সহগ $K_i^{(n)}$ এর ধর্মাবলি

(1) $\sum_{i=0}^{n} K_i^{(n)} = 1$

প্রমাণ : ধরি $f(x) = 1$

অতএব (8.5.9) নং সূত্র থেকে $\int_a^b dx = (b-a)\sum_{i=1}^{n} K_i^{(n)}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} K_i^{(n)} = 1$$

(2) $K_i^{(n)} = K_{n-i}^{(n)}$

প্রমাণ : (8.5.6) থেকে $K_i^{(n)} = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!\,i!}\int_0^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-i)}dt$

i এর পরিবর্তে (n–i) লিখে পাওয়া যায়

$$K_{n-i}^{(n)} = \frac{1}{n}\frac{(-1)^i}{i!(n-i)!}\int_0^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-n+i)}dt$$

ধরা যাক $\quad t + t' = n$

$$\therefore K_{n-i}^{(n)} = \frac{1}{n}\frac{(-1)^i}{i!(n-i)!}\int_n^0 \frac{(n-t')(n-1-t')\ldots(-t'+1)(-t')}{-t'+i}(-dt')$$

$$= \frac{1}{n} \frac{(-1)^{i+n+2}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t'(t'-1)\ldots(t'-n)}{t'-i} dt'$$

$$= K_n^{(r)} \qquad [\text{যেহেতু } (-1)^{n+i+2} = (-1)^{n-i+(2i+2)} = (-1)^{n-i}]$$

8.8 সংজ্ঞাসমূহ

(1) বদ্ধ ও মুক্ত ধরনের সমাকলন সূত্র

কোন সমাকলন সূত্রকে বদ্ধ ধরনের (closed type) বলা হবে যদি সমাকলনের নিম্নসীমা ও উর্দ্ধসীমা আন্তঃপাঠন বিন্দুসমূহের অন্তর্ভূক্ত হয়, অন্যথায় প্রদত্ত সূত্রটিকে মুক্ত (open type) বলা হয়।

(2) ক্রটিহীন মাত্রা (Degree of Precision)

কোনো সমাকলন সূত্রের ক্রটিহীন মাত্রা K হবে যদি সূত্রটি K বা K অপেক্ষা কম ঘাতের সকল বহুপদ রাশিমালার সমাকলনের ভ্রান্তির মান শূন্য দেয়।

8.8.1 ট্রাপিজয়ডাল, সিম্পসন এবং ওয়েডেল সূত্রের ক্রটিহীন মাত্রার পরিমাণ

(a) ট্রাপিজয়ডাল সূত্র :

এখানে $$E_T = h^3 \int_0^1 \frac{t(t-1)f''(c)}{2!} dt = -\frac{h^3}{12} f''(c)$$

$$= -\frac{(b-a)}{12} f''(c) \qquad a < c < b \ldots (8.8.1)$$

অতএব ক্রটিহীন মাত্রা 1.

(b) সিম্পসনের সূত্র :

এখানে $$E_s = P_3 = h^5 \int_0^1 \frac{t(t-1)(t-2)\,dt}{3!} f^{iv}(c)$$

$$= -\frac{h^5}{90} f^{iv}(c) = \frac{(b-a)^5}{2880} f^{iv}(c) \quad (a < c < b) \ldots (8.8.2)$$

অতএব, ক্রটিহীন মাত্রা 3.

(c) ওয়েডেলের সূত্র :

এখানে $$E_w = -\frac{h^7}{140} f^{vi}(c) \qquad a < c < b$$

অতএব ক্রটিহীন মাত্রা 5.

8.9 উদাহরণ মালা

(1) (i) ট্রাপিজয়ডাল ও (ii) সিম্পসনের সূত্র ব্যবহার করে এবং $[0, \pi/2]$ অন্তরালকে 5টি উপ-অন্তরালে ভাগ করে $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\text{Sinx}}\, dx$ এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করুন।

সমাধান :

এখানে $f(x) = \sqrt{\text{Sin x}}$, $a=0$, $b=\pi/2$ এবং $n=6$

$$\therefore h = \frac{\pi/2 - 0}{6} = \Pi/_{12} = 0.2612$$

x_i (i=0 থেকে 6)	y_i (i=0 থেকে 6)	y_i (i=0,6)	y_i (i=1, 3, 5)	y_i (i=2, 4)
0	0.0000	0.0000		
$\frac{\pi}{12}$	0.5087		0.5087	
$\frac{2\pi}{12}$	0.7071			0.7071
$\frac{3\pi}{12}$	0.8409		0.8409	
$\frac{4\pi}{12}$	0.9306			0.9306
$\frac{5\pi}{12}$	0.9828		0.9828	
$\frac{6\pi}{12}$	1.0000	1.0000		
		1.0000	2.3324	1.6377

(i) ট্রাপিজয়ডালের সমাকলন সূত্র (যৌগিক) হল

$$I_T^C = \frac{h}{2}\left[(y_0 + y_6) + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)\right]$$

$$= \frac{\pi}{12}\,\frac{h}{2}\left[1.0000 + 2(2.3324 + 1.6377)\right]$$

$$= \frac{0.2612}{2}\left[1.0000 + 2(2.3324 + 1.6377)\right]$$

$= 1.17027 \simeq 1.170$ (3 দশমিক স্থান পর্যন্ত)

(ii) সিম্পসনের সমাকলন সূত্র টি (যৌগিক) হল

$$I_S^C = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_4 + y_6)\right]$$

$$= \frac{\pi}{36}\left[1.0000 + 4 \times 2.3324 + 2 \times 1.6377\right]$$

$= 1.18726 \simeq 1.187$ (3 দশমিক স্থান পর্যন্ত)

(2) ওয়েডেলের সূত্র ব্যবহার করে [0,2] অন্তরালকে 12টি উপঅন্তরালে ভাগ করে $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$ এর চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $a=0$, $b=2$, $n=12$

$$\therefore h = \frac{2-0}{12} = \frac{1}{6}$$

x	f(x)	x	f(x)
$x_0 = 0$	1.00000	$x_6 = \frac{6}{6}$	0.50000
$x_1 = \frac{1}{6}$	0.97297	$x_7 = \frac{7}{6}$	0.42353
$x_2 = \frac{2}{6}$	0.90000	$x_8 = \frac{8}{6}$	0.36000
$x_3 = \frac{3}{6}$	0.80000	$x_9 = \frac{9}{6}$	0.30769
$x_4 = \frac{4}{6}$	0.69231	$x_{10} = \frac{10}{6}$	0.26470Â
$x_5 = \frac{5}{6}$	0.59016	$x_{11} = \frac{11}{6}$	0.22930
		$x_{12} = \frac{12}{6}$	0.20000

ওয়েডেলের সমাকলন সূত্রটি হল—

$$I_W^C = \frac{3h}{10}\left[(y_0+y_{12}) + 5(y_1+y_5+y_7+y_{11}) + (y_2+y_4+y_8+y_{10}) + 6(y_3+y_9) + 2y_6\right]$$

$$= \frac{3}{60}\left[(1.00000+0.20000) + 5 \times (0.97297+0.59016+0.42353+0.22930) + (0.90000+0.69231+0.36000+0.26470) + 6 \times (0.80000+0.30769) + 2 \times 0.50000\right]$$

$$= \frac{1}{20} \times 22.14295 = 1.1071475 \simeq 1.1071$$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত]

8.10 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) সাংখ্যিক পদ্ধতিতে সমাকলন নির্ণয় প্রয়োজন হয় কেন? এই পদ্ধতির মূলনীতি ব্যাখ্যা করুন।

(2) সমাকলনের ট্রাপিজিয়াম সূত্রটি অবরোহণ করুন এবং এই সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ধারণ করুন। সূত্রটির এরূপ নামকরণের তাৎপর্য ব্যাখ্যা করুন।

(3) যৌগিক ট্রাপিজিয়াম সূত্র নির্ণয় করুন। এই সূত্রটি কখন প্রয়োজন হয়?
(**সংকেত** : 8.2.7 নং সূত্র দ্রষ্টব্য)।

(4) তিনটি সমদূরবর্তী বিন্দুর জন্য নিউটনের অগ্র আন্ত:পাঠন বহুপদ রাশিমালাটি সমাকলন করে সিম্পসনের সমাকলন সূত্রটি অবরোহণ করুন। এই সূত্রে ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ধারণ করুন এবং সূত্রটির জ্যামিতিক তাৎপর্য ব্যাখ্যা করুন।

(5) সিম্পসনের যৌগিক সমাকলন সূত্র নির্ণয় করুন এবং ভ্রান্তির পরিমাণ নির্ধারণ করুন।
[**সংকেত** : তত্ত্ব অংশ (Theory part) দ্রষ্টব্য]

(6) [0,0.4] অন্তরালকে 4টি সমান উপ অন্তরালে ভাগ করে (a) ট্রাপিজিয়াম সূত্র এবং (b) সিম্পসনের $\frac{1}{3}$ সূত্র ব্যবহার করে $\int_0^{0.4} \cos x \, dx$ এর মান নির্ণয় করুন

[**সংকেত** : উদাহরণ 8.9 দ্রষ্টব্য]

[**উত্তর** : a) 0.3891 b) 0.3894

(7) $[0, \frac{\pi}{2}]$ অন্তরালকে 6টি উপ-অন্তরালে ভাগ করে (a) ট্রাপিজিয়াম সূত্র (b) সিম্পসনের সূত্র এবং (c) ওয়েডেলের সূত্র ব্যবহার করে $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, dx$ এর মান তিন দশমিক আসন্ন মান পর্যন্ত

নির্ণয় করুন

[**সংকেত** : একইভাবে ভাবুন] [উত্তর : a) 1.186 b) 1.188 (c) 1.189]

(8) নিম্নলিখিত পদ্ধতিতে $\int_{1.2}^{1.6} (x + \frac{1}{x})\, dx$ এর মান নির্ণয় করুন। কমপক্ষে চারটি অন্তরাল (interval) নিতে হবে।

(i) সিম্পসনের $\frac{1}{3}$ সূত্র ব্যবহার করে, (ii) ট্রাপিজিয়াম সূত্র ব্যবহার করে।

[**সংকেত** : উদাহরণের কষে দেওয়া সমস্যাটি দ্রষ্টব্য] [**উত্তর** : 0.85]

8.11 সারাংশ

আলোচ্য অধ্যায়ে সাংখ্যিক সমাকলন আলোচনা হয়েছে। এর জন্য কয়েকটি সূত্র আছে। ট্রাপিজয়ডল সূত্র, সিম্পসনের সূত্র, ওয়েডেল-এর সূত্র, নিউটন কোটের সূত্র, বিভিন্ন সূত্রের উপযোগিতা ভিন্ন, এই সব উপযোগিতার কথা চিন্তা করে বিভিন্ন স্বত্তের প্রয়োগমূলক ব্যবহার দেখানো হয়েছে। বিভিন্ন ক্ষেত্রে যে üýáü÷ǿ $K_i^{(n)}$ পাওয়া যাবে তার ধর্মাবলিসমূহ উল্লেখ করা হয়েছে ও অনুশীলনীর মাধ্যমে বিষয়টা সহজতর এবং বোধগম্য করার চেষ্টা করা হয়েছে।

8.12 সহায়ক গ্রন্থাবলি

(1) S.A. Mollah : Numerical Analysis and Computational Procedures, (Books and Allied (P) Ltd.)

(2) F.B. Hildebrand : Introduction to Numerical Analysis. (Tata Migraw Hill)

পরিভাষা

বাংলা থেকে ইংরাজি

অন্তরকলন	Differention
অন্তর	Difference
অগ্রান্তর	Forward difference
আসন্নিকরণ ভ্রান্তি	Rounding off error
আপেক্ষিক ভ্রান্তি	Relative error
আন্তঃপাঠন	Interpolation
উৎপাদকীয় ঘাত অপেক্ষক	Factorial power function
কেন্দ্রীয়	Central
কোয়াড্রাচার	Quadrature
গাউসের আন্তঃপঠন	Gauss interpolation
গাউসের (মধ্যান্তর) পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন	Gauss' (central) Backword interpolation.
ট্রাপিজয়ডাল সূত্র	Trapzoidal Law
নিউটনের অগ্রআন্তঃপাঠন সূত্র	Newton's forward interpolation formale
নিউটনের পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন সূত্র	Newton's Backward interpolation formula
নিউটন কোর্টের সূত্র	Newton cote's formula
নির্ভুল	Exact
পরম ভ্রান্তি	Absolute error
পশ্চাৎ আন্তঃপাঠন	Backward interpolation
পশ্চাদান্তর	Backward difference
প্রকারক	Operator
পাতবিন্দু সমূহ	Nodal points (Nodes)
পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি	Method of Iteration
বিভাজিত অন্তর	Divided Difference
বেসেলের অন্তঃপাঠন সূত্র	Bessel's interpolation formula
বিপরীত আন্তঃপাঠন সূত্র	Inverse interpolation formula
যৌগিক সিম্পসনের সূত্র	Simpson's Compound formula
ভ্রান্তি	Error
ভ্রান্তির বীজগণিত	Algebra of error
ভ্রান্তির বীজগণিত	Algebra of error

মধ্যান্তর সারণী	Central difference table
রৈখিক আন্তঃপাঠন	Liner interpolation
ল্যাগরাঞ্জের আন্তঃপাঠন	Lagrange's interpolation
সম্মুখ আন্তঃপাঠন	Forward interpolation
সংশোধিত সার্থক অঙ্ক	Correct significant digit
সমাকলন	Integration
স্টারলিং-এর আন্তঃপাঠন সূত্র	Starling's interpolation formula
সাংখ্যিক অবকলন	Numerical differentiation
সাংখ্যিক সমাকলন	Numerical integration
সমীপস্থ	Approximate
সার্থক ভ্রান্তি	Significant error
শতকরা ভ্রান্তি	Percentage error

পর্যায়
2

সাংখ্যিক বিশ্লেষণ বিদ্যা

একক 9 ❑ সমীকরণের সাংখ্যিক সমাধান—I (Numerical Solution of Equations—I)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

বিজ্ঞান ও প্রকৌশলে প্রায়শঃ আমরা $f(x) = 0$ আকারের সমীকরণ থেকে তার বীজ বা মূল নির্ণয় করে থাকি। উল্লেখ্য যে, সমীকরণটি দ্বিঘাত ত্রিঘাত অথবা আরও বেশী ঘাতবিশিষ্ট বীজগাণিতিক বা অবীজগাণিতিক হতে পারে, এমনকি বীজটি বাস্তব না হয়ে জটিলও হতে পারে। যদিও আমরা সমীকরণের সঠিক বীজ নির্ণয়ের জন্য কার্ডন পদ্ধতি, অয়লার পদ্ধতি, ফেরাবীর পদ্ধতি, দেকার্তের পদ্ধতি প্রভৃতি জানি, তবুও এখানে আমরা উল্লিখিত সমীকরণগুলির বীজ বা মূলের আসন্ন মান নির্ণয়ের জন্য কয়েকটি সাংখ্যিক পদ্ধতির আলোচনা করব কয়েকটি এককে।

এই এককে আমরা সারণি পদ্ধতি এবং সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি আলোচনা করব।

9.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি

- কোন সমীকরণে বাস্তব বীজের সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা করতে পারবেন
- কোন সমীকরণের বীজগুলির অবস্থান সম্বন্ধে ধারণা করতে পারবেন
- কোন সমীকরণের বীজ বা বীজগুলির সাংখ্যিক মান নির্ণয় করতে পারবেন যা পছন্দমত স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

9.3 দেকার্তের চিহ্ন রীতি (Descartes' Rule of Signs)

একটি মূলদ, অখণ্ডক ও বাস্তব সহগবিশিষ্ট বীজগাণিতিক সমীকরণ $f(x) = 0$-এর ধনাত্মক বীজ বা মূলের সংখ্যা $f(x)$ বহুপদী রাশির চিহ্নের পরিবর্তনের সংখ্যা অপেক্ষা বেশী হতে পারে না এবং ঋণাত্মক বীজের সংখ্যা $f(-x)$ বহুপদী রাশির চিহ্নের পরিবর্তনের সংখ্যা অপেক্ষা বেশী হতে পারে না। যদি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বীজের সংখ্যা কমে তবে তারা দুই-এর গুণিতক হিসাবে কমবে। অর্থাৎ $f(x) = 0$, যদি n ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী রাশি সমীকরণ হয় এবং $f(x)$-এ m_1 সংখ্যক চিহ্নের পরিবর্তন থাকে এবং $f(-x)$-এ m_2 সংখ্যক চিহ্নের পরিবর্তন থাকে, তবে ধনাত্মক ও ঋণাত্বক বীজের সর্বাধিক সংখ্যা m_1 এবং m_2 অর্থাৎ কমপক্ষে $n - (m_1 + m_2)$ সংখ্যক জটিল বীজ থাকবে।

এখন আমরা একটি উপপাদ্যের উল্লেখ করব যার সাহায্যে পরবর্তীকালে আমরা যে-কোন সমীকরণ $f(x) = 0$-এর বীজ নির্ণয় করার জন্য ব্যবহার করব।

উপপাদ্য 1 : যদি $f(x)$, $f'(x)$, $[a, b]$ অন্তরালে উভয়েই সন্তত হয় এবং যদি $f(a).f(b) < 0$ হয়, তবে $f(x) = 0$ সমীকরণের অন্ততঃ একটি বীজ $[a, b]$ অন্তরালের মধ্যে অবস্থান করবে। আরও যদি $f'(x)$, $[a, b]$ অন্তরালে একই চিহ্নযুক্ত (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হয়, তবে $f(x) = 0$ সমীকরণের একটিমাত্র বীজ $[a, b]$ অন্তরালের মধ্যে থাকবে।

9.4 সারণি পদ্ধতি (Tabulation Method)

মনে করুন, $f(x) = 0$ সমীকরণটির সব বাস্তব বীজগুলি (a, b) মুক্ত অন্তরালে অবস্থান করে। এখন (a, b) অন্তরাল থেকে একটি ছোট অন্তরাল (a_0, b_0) $[(a_0, b_0) \subseteq (a, b)]$ নির্ণয় করুন, যেখানে $f(a_0).f(b_0) < 0$ এবং $f'(x)$ একই চিহ্নযুক্ত (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)। অর্থাৎ (a_0, b_0) অন্তরালে $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটিমাত্র বীজ $x = \alpha$ (ধরা যাক) (a_0, b_0) অন্তরালে অবস্থান করবে। আবার x-এর পৃথক মান যথা a_0, $a_0 + h$, $a_0 + 2h$, ..., $a_0 + rh$, $a_0 + \overline{r+1}h, \ldots,$ $a_0 + nh = b_0$-এর জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করুন, যেখানে h হল ধাপ-দৈর্ঘ্য (সাধারণতঃ $h = 1$ ধরা হয়)। মনে করুন $f(a_0 + rh) \cdot f(a_0 + \overline{r+1}h) < 0$ তাহলে $x = \alpha$ বীজটি $(a_0 + rh, a_0 + \overline{r+1}h)$ অন্তরালে অবস্থান করবে। এখন $(a_0 + rh, a_0 + \overline{r+1}h)$ অন্তরালটিকে (a_1, b_1) অন্তরাল দ্বারা সূচিত করুন। আবার x-এর পৃথক মান যথা $a_1, a_1 + \frac{h}{10}, a_1 + \frac{2h}{10}, \ldots,$ $a_1 + \frac{sh}{10}, a_1 + \frac{\overline{s+1}h}{10}$, $a_1 + \frac{nh}{10} = b_1$-এর জন্য $f(x)$-এ মান নির্ণয় করুন এবং মনে করুন $f\left(a_1 + \frac{sh}{10}\right) \cdot f\left(a_1 + \frac{(s+1)h}{10}\right) < 0$. অতএব, $x = \alpha$ বীজটি $\left(a_1 - \frac{sh}{10},\ a_1 + \frac{\overline{s+1}h}{10}\right)$ অন্তরালের মধ্যে অবস্থান

করবে এবং $\left(a_1 + \frac{sh}{10}, a_1 + \frac{(s+1)h}{10}\right)$ অন্তরালটিকে $(a_2,\ b_2)$ অন্তরাল দ্বারা সূচিত করুন। আবার x-এর পৃথক মান যথা $a_2, a_2 + \frac{h}{10^2}, a_2 + \frac{2h}{10^2}, \ldots, a_2 + \frac{kh}{10^2}, a_2 + \frac{\overline{k+1}h}{10^2}, \ldots, a_2 + \frac{nh}{10^2} = b_2$-এর জন্য $f(x)$-এর মানগুলি নির্ণয় করুন এবং মনে করুন $f\left(a_2 + \frac{kh}{10^2}\right) \cdot f\left(a_2 + \frac{(k+1)h}{10^2}\right) < 0$, অতএব, $x = \alpha$ বীজটি , $\left(a_2 + \frac{kh}{10^2},\ a_2 + \frac{(k+1)h}{10^2}\right)$ অন্তরালের অন্তর্গত এবং অন্তরালটিকে $(a_3,\ b_3)$ অন্তরাল দ্বারা সূচিত করুন। এইভাবে প্রতিটি ক্ষুদ্র অন্তরাল আরও ক্ষুদ্র হতে হতে $x = \alpha$-এর দিকে অভিসারী হবে।

এই পদ্ধতি দ্বারা প্রাথমিকভাবে একটি বীজের সম্ভাব্য অবস্থান নির্ণয় করতে পারবেন।

উদাহরণ 1 : সারণি পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত সমীকরণটির ধনাত্মক বীজগুলি নির্ণয় করুন, দুই বা তিন দশমিক স্থান পর্য্যন্ত শুদ্ধ।

$$x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 76x - 79 = 0$$

সমাধান : মনে করুন, $f(x) = x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 76x - 79 = 0$, দেকার্তের চিহ্ন রীতি প্রয়োগ করে আমরা $f(x) = 0$ সমীকরণটির সর্বাধিক তিনটি ধনাত্মক এবং মাত্র একটি ঋণাত্মক বীজ পাব। এখন 0 (শুন্য) থেকে আরম্ভ এবং ধাপ-দৈর্ঘ 1 নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মানগুলি নির্ণয় করা হল :

সারণি : T_0

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	–79	–19	1	–13	–31	1

সারণি T_0 থেকে পাচ্ছি $f(1)\cdot f(2) < 0$, $f(2)\cdot f(3) < 0$ এবং $f(4)\cdot f(5) < 0$

অর্থাৎ ধনাত্মক বীজ তিনটি α, β, γ যথাক্রমে (1, 2), (2, 3) এবং (4, 5) অন্তরালে অবস্থান করছে।

α $(1 < \alpha < 2)$ নির্ণয় করার জন্য 1 থেকে আরম্ভ করে এবং ধাপ-দৈর্ঘ্য 0·1 নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি : $T_1^{\alpha}(1 < \alpha < 2)$

x	1·0	1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0
$f(x)$						–3·81	–2·05	–06·9	0·25		

যেহেতু $f(1{\cdot}7){\cdot}f(1{\cdot}8) < 0$, α বীজটি (1·7, 1·8) অন্তরালের অন্তর্গত। এখন 1·7 থেকে আরম্ভ করে এবং ধাপ-দৈর্ঘ্য (step-length) 0·01 নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি : $T_2^{(\alpha)}(1\cdot 7 < \alpha < 1\cdot 8)$

x	1·70	1·71	1·75	1·76	1·77	1·78
$f(x)$	–0·69	–0·58	–0·17	–0·07	0·01	0·10

এখানে $f(1{\cdot}76)\cdot f(1{\cdot}77) < 0$, α বীজটি (1·76, 1·77) অন্তরালে অবস্থান করছে। আবার 1·76 থেকে আরম্ভ করে এবং 0·001 মাপ-দৈর্ঘ্য নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হ'ল।

সারণি : $T_3^{(\alpha)}(1\cdot 76 < \alpha < 1\cdot 77)$

x	1·760	1·761	1·765	1·767	1·768	1·769
$f(x)$	–0·07	...	–0·030	...	–0·003	0·005

এখানে $f(1{\cdot}768){\cdot}f(1{\cdot}769) < 0$, অতএব α বীজটি (1·768, 1·769) অন্তরালে অবস্থান করছে। আবার 1·768 থেকে আরম্ভ করে এবং ধাপ-দৈর্ঘ্য 0·0001 নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি : $T_4^{(\alpha)}(1\cdot 768 < \alpha < 1\cdot 769)$

x	1·7680	1·7681	1·7683	1·7684
$f(x)$	–0·003	–0·0024	–0·0008	0·001

$\therefore$ $f(1{\cdot}7683)\cdot f(1{\cdot}7684) < 0$ এর α বীজটি (1·7683, 1·7684) অন্তরালের অন্তর্গত।

$\therefore$ $\alpha = 1{\cdot}768$, $f(x) = 0$ একটি বীজ তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

এখন $\beta(2 < \beta < 3)$ কে বাদ দিয়ে $\gamma(4 < \gamma < 5)$ বীজটি নির্ণয় করব। এখানে 4 থেকে আরম্ভ করে এবং ধাপ-দৈর্ঘ্য 0·1 নিয়ে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি : $T_1^{(\gamma)}(4 < \gamma < 5)$

x	4·0	4·1	4·5	4·6	4·7	4·8	4·9	5·0
$f(x)$	–31	–31·14	...	–22·25	...	...	–6·48	1

দেখা যাচ্ছে, $f(4{\cdot}9){\cdot}f(5{\cdot}0) < 0$ অতএব, γ বীজটি $(4{\cdot}9,\ 5{\cdot}0)$ অন্তরালে অবস্থান করে। এখন $4{\cdot}9$ থেকে আরম্ভ করে এবং $0{\cdot}01$ ধার-দৈর্ঘ্য ধরে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি : $T_2^{(\gamma)}(4\cdot 9 < \gamma < 5\cdot 0)$

x	4·90	4·91	4·94	4·95	4·97	4·98	4·99	5·00
$f(x)$	6·48	–5·79	...	–2·89	...	–0·59	0·20	...

এখানে $f(4{\cdot}98){\cdot}f(4{\cdot}99) < 0$ অতএব, γ বীজটি $(4{\cdot}98,\ 4{\cdot}99)$ অন্তরালে অবস্থান করে। এখানে $4{\cdot}98$ থেকে আরম্ভ করে এবং $0{\cdot}001$ ধাপ-দৈর্ঘ্য ধরে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হল।

সারণি : $T_3^{(\gamma)}(4\cdot 98 < \gamma < 4\cdot 99)$

x	4·980	4·981	4·985	4·986	4·987	4·988	4·989
$f(x)$	–0·59	...	–0·201	...	–0·042	0·037	...

$\therefore\ f(4{\cdot}987){\cdot}f(4{\cdot}988) < 0$

$\therefore\ \gamma = 4{\cdot}99,\ f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

9.5 সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি

এটা একটি পৌনঃপুনিক পদ্ধতি (iterative method)। এখানে সারণি পদ্ধতি দ্বারা একটি সম্ভাব্য ছোট অন্তরাল $(a_0,\ b_0)$ নির্ণয় করতে হবে যেখানে $f(a_0)\cdot f(b_0) < 0$ এবং $f'(x)$ একই চিহ্নযুক্ত হবে। অর্থাৎ, $f(x) = 0$ সমীকরণটি একটিমাত্র বাস্তব বীজ $x = \alpha$ থাকবে ঐ অন্তরাল $(a_0,\ b_0)$-তে।

এখন $(a_0,\ b_0)$ অন্তরালকে দুইটি সমান উপ-অন্তরাল $(a_1,\ x_1)$ ও $(x_1,\ b_1)$-এ বিভক্ত করা হল অর্থাৎ, $x_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$। এখন যদি x_1, $f(x) = 0$-এর বীজ হয়, তবে $f(x_1) = 0$ হবে, নতুবা $f(a_0)\ f(x_1) < 0$ বা $f(x_1)\ f(b_0) < 0$ হবে। ধরি $f(a_0)\ f(x_1) < 0$, অতএব, $f(x) = 0$ সমীকরণের বীজটি $(a_0,\ x_1)$ অন্তরালে অবস্থান করে। এখন (a_0, x_1) অন্তরালটিকে (a_1, b_1) অন্তরাল দ্বারা সূচিত করা হল এবং $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$। আবার $(a_1,\ b_1)$ অন্তরালটিকে দুটি সমান আন্তরাল $(a_1,\ x_2)$ এবং $(x_2,\ b_1)$-তে বিভক্ত করা হল। অর্থাৎ $x_2 = \dfrac{b_1 + a_1}{2}$। এখন যদি x_2, $f(x) = 0$ সমীকরণটির বীজ হয়, তবে $f(x_2) = 0$ হবে নতুবা $f(a_1)\cdot f(x_2) < 0$ বা $f(x_2)\cdot f(b_1) < 0$ হবে। মনে করি, $f(x_2)\cdot f(b_1) < 0$, তবে $f(x) = 0$ সমীকরণের বাস্তব

বীজটি (x_2, b_1) অন্তরালে থাকবে। এখন (x_2, b_1) অন্তরালটিকে (a_2, b_2) অন্তরাল দ্বারা সূচিত করা হল। অতএব,

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2^2}(b_0 - a_0)$$

এইভাবে, আমরা $x_{n+1} \frac{a_n + b_n}{2}$ নির্ণয় করব, যা $f(x) = 0$ সমীকরণের $x = \alpha$ বীজের $(n + 1)$-তম প্রায়িক মান ধরা হবে এবং $x = \alpha$, (a_n, b_n) অন্তরালের মধ্যে অবস্থান করবে।

যেখানে, $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$

আবার, $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}(b_n - a_n) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \to 0$

$\therefore$ x_{n+1}-এর পরপর মানগুলি যথা, x_1, x_2, ..., x_{n+1}, $x = \alpha$-তে অভিসারী।

9.6 গণনার ধারা বা পদ্ধতি

সারণি : 9.6.1

যখন $f(a_0) > 0$ এবং $f(b_0) < 0$

n	$a_n\,(+ve)$	$b_n\,(-ve)$	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	a_0	b_0	$x_1\left(= \frac{a_0 + b_0}{2}\right)$	$f(x_1) > 0$
1	$a_1(= x_1)$	$b_1(= b_0)$	$x_2\left(= \frac{a_1 + b_1}{2}\right)$	$f(x_2) > 0$
2	$a_2(= x_2)$	$b_2(= b_1)$	$x_3\left(= \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$	$f(x_3) < 0$
3	$a_3(= a_2)$	$b_3(= x_3)$	$x_4\left(= \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$	$f(x_4) < 0$
4	$a_4(= a_3)$	$b_4(= x_4)$	$x_5\left(= \frac{a_4 + b_4}{2}\right)$	$f(x_5) > 0$
5	$a_5(= a_5)$	$b_5(= b_4)$	$x_6\left(= \frac{a_5 + b_5}{2}\right)$	$f(x_6) < 0$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

সারণি : **9.6.2**

যখন $f(a_0) > 0$ এবং $f(b_0) < 0$

n	an (–ve)	bn (+ve)	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	a_0	b_0	$x_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$	$f(x_1) > 0$
1	$a_1(= a_0)$	$b_1(= x_1)$	$x_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$	$f(x_2) > 0$
2	$a_2(= a_1)$	$b_2(= x_2)$	$x_3 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$	$f(x_3) < 0$
3	$a_3(= x_3)$	$b_3(= b_2)$	$x_4 = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$	$f(x_4) < 0$
4	$a_4(= x_4)$	$b_4(= b_3)$	$x_5 = \dfrac{a_4 + b_4}{2}$	$f(x_5) > 0$
5	$a_5(= a_4)$	$b_5(= x_5)$	$x_6 = \dfrac{a_5 + b_5}{2}$	$f(x_6) < 0$
6	$a_6(= x_6)$	$b_6(= b_5)$	$x_7 = \dfrac{a_6 + b_6}{2}$	$f(x_7) < 0$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

9.7 উদাহরণ

উদাহরণ 1 : সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতির দ্বারা $x^3 - 3x + 1{\cdot}06 = 0$ সমীকরণের ধনাত্মক বাস্তব বীজগুলি নির্ণয় করুন, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান : মনে করুন $f(x) = x^3 - 3x + 1{\cdot}06$, $\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$

$\therefore f(0) = 1{\cdot}06, f(1) = -0{\cdot}94, f(2) = 3{\cdot}03$; অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণটির দুটি ধনাত্মক বীজ আছে যারা (0, 1) এবং (1, 2) অন্তরালে অবস্থান করে এবং (0, 1) অন্তরালে $f'(x) < 0$ ও (1, 2) অন্তরালে $f'(x) > 0$.

$\therefore$ (0, 1) এবং (1, 2) উভয় অন্তরালে $f(x) = 0$ সমীকরণের মাত্র একটি করে বীজ বর্তমান।

সারণি : 9.6.3

α (0 < α < 1)-এর জন্য

	n	a_n (+ve)	b_n (–ve)	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
	0	0	1	$x_1 = 0{\cdot}5$	$-0{\cdot}32 < 0$
	1	0	0·5	$x_2 = 0{\cdot}25$	$0{\cdot}33 > 0$
	2	0·25	0·5	$x_3 = 0{\cdot}375$	$-0{\cdot}012 < 0$
	3	0·25	0·375	$x_4 = 0{\cdot}312$	$0{\cdot}154 > 0$
	4	0·312	0·375	$x_5 = 0{\cdot}344$	$0{\cdot}069 > 0$
	5	0·344	0·375	$x_6 = 0{\cdot}3595$	$0{\cdot}028 > 0$
	6	0·3595	0·375	$x_7 = 0{\cdot}3672$	$0{\cdot}0079 > 0$
	7	0·3672	0·375	$x_8 = 0{\cdot}3711$	$-0{\cdot}0022 < 0$
	8	0·3672	0·3711	$x_9 = 0{\cdot}3692$	$0{\cdot}0027 > 0$
	9	0·3692	0·3711	$x_{10} = 0{\cdot}3702$	$0{\cdot}00014 > 0$
	10	0·3702	0·3711	$x_{11} = 0{\cdot}3706$	$-0{\cdot}0006 < 0$
Check	11	0·3702	0·3706	$x_{12} = 0{\cdot}3704$	$-0{\cdot}0003 < 0$

$\therefore$ **α = 0·370,** তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সারণি : 9.6.4

$\beta\,(1 < \beta < 2)$

n	$a_n\,(+ve)$	$b_n\,(+ve)$	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	1	2	1·5	$-0{\cdot}06 < 0$
1	1·5	2	1·75	$1{\cdot}17 > 0$
2	1·5	1·75	1·62	$0{\cdot}45 > 0$
3	1·5	1·62	1·56	$0{\cdot}17 > 0$
4	1·5	1·56	1·53	$0{\cdot}05 > 0$
5	1·5	1·53	1·515	$-0{\cdot}007 < 0$
6	1·515	1·53	1·5225	$0{\cdot}0217 > 0$
7	1·515	1·5225	1·5188	$0{\cdot}0067 > 0$
8	1·515	1·5188	1·5169	$-0{\cdot}0003 < 0$
9	1·5169	1·5188	1·51785	$0{\cdot}0034 > 0$
10	1·5169	1·51785	1·517375	$0{\cdot}0015 > 0$
Check 11	1·5169	1·517375	1·517138	$-0{\cdot}0006 > 0$

$\therefore$ **β = 1·517,** তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 2 : সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি প্রয়োগ করে $10^x + \sin x + 2x = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন। তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান : মনে করুন $f(x) = 10x + \sin x + 2x$

$\therefore\ f(0) = 1,\ f(1) = 12{\cdot}8,\ f(-1) = -2{\cdot}74$ এবং $f(-1)\cdot f(0) < 0$

আবার, $f'(x) = 10x \log_e x + \cos x + 2 > 0$, $(-1, 0)$ অন্তরালে।

অতএব, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটিমাত্র বীজ $(-1, 0)$ অন্তরালে অবস্থান করে।

সারণি : 9.6.5

n	$a_n\,(-ve)$	$b_n\,(+ve)$	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	–1·0	0·0	–0·5	$-1{\cdot}16 < 0$
1	–0·5	0·0	–0·25	$-0{\cdot}18 < 0$
2	–0·25	0·0	–0·125	$0{\cdot}37 > 0$
3	–0·25	–0·125	–0·1875	$0{\cdot}088 > 0$
4	–0·25	–0·1875	–0·2187	$-0{\cdot}050 < 0$
5	–0·2187	–0·1875	–0·2031	$0{\cdot}018 > 0$
6	–0·2187	–0·2031	–0·2109	$-0{\cdot}016 < 0$
7	–0·2109	–0·2031	–0·2070	$0{\cdot}001 > 0$
8	–0·2109	–0·2070	–0·20895	$-0{\cdot}007 < 0$
9	–0·20895	–0·2070	–0·20798	$-0{\cdot}003 < 0$
10	–0·20798	–0·2070	–0·20749	$-0{\cdot}008 < 0$
Check 11	–0·20749	–0·2070	–0·20724	$0{\cdot}0003 > 0$

$\therefore$ **α = –0·207,** $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব বীজ, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 3 : $e^x - 3x = 0$, সমীকরণের যে বাস্তব বীজটি 1 এবং 2-এর মধ্যে অবস্থান করে তা নির্ণয় করুন, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান : মনে করুন $f(x) = e^x - 3x$

$\therefore$ $f(1) = -0{\cdot}28$, $f(1{\cdot}5) = -0{\cdot}02$, $f(1{\cdot}6) = 0{\cdot}15$ এবং $f'(x) = e^x - 3 > 0$, $(1{\cdot}5, 1{\cdot}6)$ অন্তরালে এবং $f(1{\cdot}5) \cdot f(1{\cdot}6) < 0$.

$\therefore$ $f(x) = 0$ সমীকরণের মাত্র একটি বীজ $(1{\cdot}5, 1{\cdot}6)$ অন্তরালে অবস্থান করবে।

সারণি : 9.6.6

	n	$a_n(+ve)$	$b_n\,(+ve)$	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
	0	1·5	1·6	1·55	$0{\cdot}06 > 0$
	1	1·5	1·55	1·525	$0{\cdot}02 > 0$
	2	1·5	1·525	1·5125	$0{\cdot}00056 > 0$
	3	1·5	1·5125	1·5062	$-0{\cdot}00904 < 0$
	4	1·5062	1·5125	1·50935	$-0{\cdot}00426 < 0$
Check	5	1·50935	1·5125	1·51092	$-0{\cdot}00184 < 0$

$\therefore$ **α = 1·51,** $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব বীজ, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 4 : $x^x + 2x - 6 = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব ধনাত্মক বীজ নির্ণয় করুন সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতির সাহায্যে, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান : মনে করুন $f(x) = x^2 + 2x - 6$ এবং $f'(x) = x^x\,(1 + \log_e x) + 2$

এখন, $f(1) = -3$, $f(2) = 2$

$\therefore$ $f(1).\ f(2) < 0$ এবং $(1,\ 2)$ অন্তরালে $f'(x) > 0$

$\therefore$ $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটিমাত্র বাস্তব বীজ $(1,\ 2)$ অন্তরালে থাকবে।

সারণি : 9.6.7

	n	$a_n(-ve)$	$b_n(+ve)$	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
	0	1·0	2·0	1·5	$-1{\cdot}16 < 0$
	1	1·5	2·0	1·75	$0{\cdot}16 > 0$
	2	1·5	1·75	0·625	$-0{\cdot}55 < 0$
	3	1·625	1·75	1·6875	$-0{\cdot}207 < 0$
	4	1·6875	1·75	1·71875	$-0{\cdot}026 < 0$
	5	1·71875	1·75	1·73438	$0{\cdot}067 > 0$
	6	1·71875	1·73438	1·72656	$0{\cdot}0206 > 0$
	7	1·71875	1·72656	1·72266	$-0{\cdot}0026 < 0$
	8	1·72266	1·72656	1·72461	$0{\cdot}00898 > 0$
Check	9	1·72266	1·72461	1·723635	$0{\cdot}00318 > 0$

$\therefore$ **α = 1·72,** $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব ধনাত্মক বীজ, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5 ঃ সমদ্বিখণ্ডক পদ্ধতি প্রয়োগ করে $x + 1nx - 2 = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব ধনাত্মক বীজ নির্ণয় করুন, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন $f(x) = x + 1nx - 2$,

$\therefore \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x}, f(1) = -1, f(2) = 0{\cdot}69$

$\therefore \quad f(1) \cdot f(2) < 0$ এবং $f'(x) > 0, (1,2)$ অন্তরালে।

$\therefore \quad f(x) = 0$ সমীকরণের একটিমাত্র বীজ (1, 2) অন্তরালে অবস্থান করে।

সারণি : 9.6.8

n	$a_n\,(-ve)$	$b_n\,(+ve)$	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	1·0	2·0	1·5	–0·09 < 0
1	1·5	2·0	1·75	0·31 > 0
2	1·5	1·75	1·625	0·11 > 0
3	1·5	1·625	1·562	0·008 > 0
4	1·5	1·562	1·531	–0·043 < 0
5	1·531	1·562	1·5465	–0·017 < 0
6	1·5465	1·562	1·5542	–0·0048 < 0
7	1·5542	1·562	1·5581	0·0016 > 0
8	1·5542	1·5581	1·5562	–0·0015 < 0
9	1·5562	1·5581	1·55715	0·000007 > 0
Check 10	1·5562	1·55715	1·55668	–0·00076 < 0

$\therefore$ **α = 1·56,** $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 6 ঃ $x \tan x + 2x^2 = 2 \cdot 5$ সমীকরণটির ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক বীজটি সমদ্বিখণ্ডক পদ্ধতির সাহায্যে নির্ণয় করুন, ছয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করুন, $f(x) = x \tan x + 2x^2 - 2 \cdot 5 \;\therefore\; f'(x) = \tan x + x \sec^2 x + 4x$

এখন $f(0,) = -2{\cdot}5, f(1) = 1{\cdot}06, f(0 \cdot 5) = -1{\cdot}73, f(0 \cdot 8) = -0{\cdot}40, f(0 \cdot 9) = 0{\cdot}25$

$\therefore \quad f(0{\cdot}8){\cdot}f(0{\cdot}9) < 0$ এবং $f'(x) > 0$, (0·8, 0·9) অন্তরালে। অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণের একটিমাত্র বীজ (0, 8, 0·9) অন্তরালে বর্তমান।

সারণি : **9.6.9**

	n	$a_n\,(-ve)$	$b_n\,(+ve)$	$x_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
	0	0·8	0·9	0·85	–0·09 < 0
	1	0·85	0·9	0·88	0·11 > 0
	2	0·85	0·88	0·86	–0·02 < 0
	3	0·86	0·88	0·87	0·04 > 0
	4	0·86	0·87	0·865	0·011 > 0
	5	0·86	0·865	0·862	–0·0086 < 0
	6	0·862	0·865	0·863	–0·0019 < 0
	7	0·863	0·865	0·864	0·0047 > 0
	8	0·863	0·864	0·8635	0·0014 > 0
	9	0·863	0·8635	0·8632	–0·00060 < 0
	10	0·8632	0·8635	0·8633	0·000063 > 0
	11	0·8632	0·8633	0·86325	–0·00027 < 0
	12	0·86325	0·8633	0·86327	–0·000137 < 0
	13	0·86327	0·8633	0·86328	–0·00007 < 0
	14	0·86328	0·8633	0·86329	–0·0000033 < 0
	15	0·86329	0·8633	0·863295	0·0000030 > 0
	16	0·86329	0·863295	0·8632925	0·000013 > 0
	17	0·86329	0·8632925	0·8632912	0·0000048 > 0
	18	0·86329	0·8632912	0·8632906	0·0000007 > 0
	19	0·86329	0·8632906	0·8632903	–0·0000012 < 0
	20	0·8632903	0·8632906	0·8632904	–0·0000005 < 0
Check	21	0·8632904	0·8632906	0·8632905	0·000000002 > 0
	22	0·8632904	0·8632906	0·86329025	–0·000000029 < 0

$\therefore$ **α = 0·863290**, $f(x) = 0$ সমীকরণটির ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক বীজ, ছয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

9.8 অনুশীলনী

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান করুন, সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতির সাহায্যে :

1. $\tan x + x = 0$
2. $x^3 - 1{\cdot}1x^2 + 4x - 4{\cdot}4 = 0$
3. $x^3 - 9x + 1 = 0$
4. $2x - 3\sin x - 5 = 0$
5. $\log x = \cos x$
6. $x^2 + 4\sin x = 0$
7. $x = 1n\ 2(x + 1)$

9.9 উত্তরমালা

1. 2·03, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ
2. 1·1, দুই সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ
3. 2·94, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ
4. 2·88, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ
5. 1·30, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ
6. –1·934, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ
7. 1·678, চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ

একক 10 ❑ সমীকরণের সাংখ্যিক সমাধান—II (Numerical Solution of Equations—II)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

একক 9-এর মত এই এককে আমরা কোন সমীকরণের সাংখ্যিক সমাধান করার জন্য একটি বিশেষ উপযোগী পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব। এই পদ্ধতিটি সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতি অপেক্ষা দ্রুত অভিসারী ও ফলপ্রসূ। এই পদ্ধতিটি হল কপট অবস্থান (false position বা regula-falsi) পদ্ধতি।

10.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করলে আপনি সমীকরণ সমাধানের এমন একটি সাংখ্যিক পদ্ধতির কথা জানতে পারবেন যার জ্যামিতিক অর্থ সহজবোধ্য ও চিত্তাকর্ষক।

10.3 কপট অবস্থান পদ্ধতি

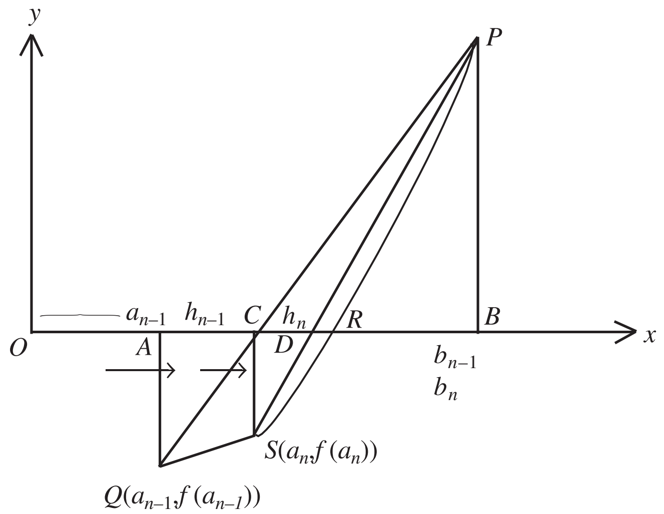
মনে করি $x = \alpha$, $y = f(x)$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ।

এই পদ্ধতি প্রয়োগ করার জন্য প্রথমে সারণি পদ্ধতি প্রয়োগ করে একটি ক্ষুদ্র অন্তরাল $[a_0, b_0]$ নির্ণয় করতে হবে যেখানে $x = \alpha$ অবস্থান করে, অর্থাৎ $[a_0, b_0]$ অন্তরালে $f(a_0)\, f(b_0) < 0$ এবং $f'(x)$ একই চিহ্নযুক্ত হবে।

এই পদ্ধতি ক্ষুদ্র অন্তরালে $[a_0, b_0]$-তে $y = f(x)$-এর লেখচিত্রকে $(a_0, f(a_0))$ এবং $(b_0, f(b_0))$ এই দুই বিন্দুগামী জ্যা দ্বারা উপস্থাপন করার ধারণার উপর নির্ভরশীল। যদি জ্যাটি x-অক্ষকে $x_1 = a_1 = a_0 +$

h_0 বিন্দুতে ছেদ করে তবে ঐ বিন্দুই $x_1 = a_1 = a_0 + h_0$, α বীজের প্রথম প্রায়িক মান হবে। এখন আমরা দুটি ক্ষুদ্র অন্তরাল পাব যথা (a_0, x_1) ও (x_1, b_0) যার যে-কোন একটিতে $x = \alpha$ বীজটি অবস্থান করবে। অর্থাৎ $f(a_0)f(x_1) < 0$ বা $f(x_1)f(b_0) < 0$, যে-কোন একটি শর্ত পাওয়া যাবে। যদি $f(x_1)f(b_0) < 0$ হয়, তবে $x = \alpha$ বীজটি (x_1, b_0) অন্তরালে অবস্থান করবে। এখন (x_1, b_0) অন্তরালকে (a_1,b_1) অন্তরাল দ্বারা চিহ্নিত করা হল। আবার $y = f(x)$-এর লেখকে $(a_1, f(a_1))$ এবং $(b_1, f(b_1))$ বিন্দুগামী জ্যা দ্বারা উপস্থাপন করলে এবং উক্ত জ্যাটি যদি x-অক্ষকে $x_2 = a_2 = x_1 + h_1$ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $x_2 = a_2 = x_1 + h_1$; α, বীজটির দ্বিতীয় প্রায়িক মান সূচিত করবে। এইভাবে বীজটির প্রায়িক মানগুলি যথা x_1 x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1} পাব যারা $x = \alpha$, বীজটির সঠিক মানের দিকে অভিসারী হবে।

মনে করি $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ α, (a_{n-1}, b_{n-1}) এই ক্ষুদ্র অন্তরালে অবস্থান করে, অর্থাৎ $f(a_{n-1}) < 0$ এবং $f(b_{n-1}) > 0$ এবং $f'(x)$ একই চিহ্নযুক্ত (a_{n-1}, b_{n-1}) অন্তরালে। মনে করি PQR, (a_{n-1}, b_{n-1}) ক্ষুদ্র অন্তরালে $y = f(x)$-এর লেখচিত্র যা x-অক্ষকে R বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব, $x = OR$ $(= \alpha)$ বীজটির সঠিক মান সূচিত করে। যদি $(a_{n-1}, f(a_{n-1}))$ এবং $(b_{n-1}, f(b_{n-1}))$ বিন্দুগামী জ্যা দ্বারা $(b_n, f(b_n))$ এবং $(a_{n-1}, f(a_{n-1}))$ এর মধ্যবর্ত্তি PRQ লেখচিত্রকে সূচিত করা হয় এবং PQ জ্যাটি যদি x-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $OC = x_n = a_{n-1} + h_{n-1} = x_{n-1} + h_{n-1} = a_n$ বীজটির প্রায়িক মান সূচিত করবে এবং $x = \alpha$ বীজটি (a_n, b_{n-1}) বা (a_n, b_n) অন্তরালে অবস্থান করবে এবং $y = f(x)$,



(a_n, b_n) অন্তরালে PRS দ্বারা চিহ্নিত করা হল। যদি PS জ্যাটি x-অক্ষকে D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $OD = x_{n-1} = a_n + h_n = x_n + h_n$, α বীজটির পরবর্তী প্রায়িক মান সূচিত করবে।

এখন সদৃশ ত্রিভুজ CDS এবং DBP থেকে পাই

$$\frac{CD}{CS} = \frac{BD}{PB} \text{ বা } \quad CD = \frac{BD}{PB} \times CS = \frac{CS}{PB} \cdot (CB - CD)$$

$$\therefore \qquad CD = \frac{|f(a_n)|}{|f(b_n)|}(CB - CD)$$

$$\therefore \qquad CD\left[1 + \frac{|f(a_n)|}{|f(b_n)|}\right] = \frac{|f(a_n)|}{|f(b_n)|} \cdot CB = \frac{|f(a_n)|}{|f(b_n)|}(OB - OC)$$

$$\text{বা} \qquad CD\left[\frac{|f(a_n)| + |f(b_n)|}{|f(b_n)|}\right] = \frac{|f(a_n)|}{|f(b_n)|}(b_n - a_n)$$

$$\therefore \qquad CD = h_n = \frac{|f(a_n)|}{|f(a_n)| + |f(b_n)|} \cdot (b_n - a_n) \qquad (10.3.1)$$

$$\therefore \qquad x_{n+1} = x_n + h_n = x_n + \frac{|f(a_n)|}{|f(a_n)| + |f(b_n)|} \cdot (b_n - a_n) \qquad (10.1.1)$$

(10.3.1) সূত্রটিকে কপট অবস্থান পদ্ধতির পৌনঃপুনিক সূত্র বলা হয়।

10.4 গণনার ধারা বা পদ্ধতি

সারণি : 10.4.1

যখন $f(a_0) > 0$ এবং $f(b_0) < 0$

n	$a_n(+)$	$b_n(-)$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$h = \frac{\lvert f(a_n)\rvert(b_n - a_n)}{\lvert a_n\rvert + \lvert b_n\rvert}$	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
0	a_0	b_0	$f(a_0)$	$f(b_0)$	$h_0 = \frac{\lvert f(a_0)\rvert(b_0 - a_0)}{\lvert a_0\rvert + \lvert b_0\rvert}$	$x_1 = a_0 + h_0$	$f(x_1) > 0$
1	$a_1(= x_1)$	$b_1(= b_0)$	$f(a_1)$	$f(b_1)$	$h_1 = \frac{\lvert f(a_1)\rvert(b_1 - a_1)}{\lvert f(a_1)\rvert + \lvert f(b_1)\rvert}$	$x_2 = a_1 + h_1$	$f(x_2) < 0$
2	$a_2(= a_1)$	$b_2(= x_2)$	$f(a_2)$	$f(b_2)$	$h_2 = \frac{\lvert f(a_2)\rvert(b_2 - a_2)}{\lvert f(a_2)\rvert + \lvert f(b_2)\rvert}$	$x_3 = a_2 + h_2$	$f(x_3) < 0$
3	$a_3(= a_2)$	$b_3(= x_3)$	$f(a_3)$	$f(b_3)$	$h_3 = \frac{\lvert f(a_3)\rvert(b_3 - a_3)}{\lvert f(a_3)\rvert + \lvert f(b_3)\rvert}$	$x_4 = a_3 + h_3$	$f(x_4) > 0$
4	$a_4(= x_4)$	$b_4(= b_3)$	$f(a_4)$	$f(b_4)$	$h_4 = \frac{\lvert f(a_4)\rvert(b_4 - a_4)}{\lvert f(a_4)\rvert + \lvert f(b_4)\rvert}$	$x_5 = a_4 + h_4$	$f(x_5) > 0$
	...	...	...	...	...	...	...

সারণি : 10.4.2

যখন $f(a_0) < 0$ এবং $f(b_0) > 0$

n	$a_n(-)$	$b_0(+)$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$h_n = \dfrac{\lvert f(a_n)\rvert(b_n - a_n)}{\lvert f(a_n)\rvert + \lvert f(b_n)\rvert}$	$x_{n+1}=a_n+h_n$	$f(x_{n+1})$
0	a_0	b_0	$f(a_0)$	$f(b_0)$	$h_0 = \dfrac{\lvert f(a_0)\rvert(b_0 - a_0)}{\lvert f(a_0)\rvert + \lvert f(b_0)\rvert}$	$x_1 = a_0 + h_0$	$f(x_1) > 0$
1	$a_1(= a_0)$	$b_1(= x_1)$	$f(a_1)$	$f(b_1)$	$h_1 = \dfrac{\lvert f(a_1)\rvert(b_1 - a_1)}{\lvert f(a_1)\rvert + \lvert f(b_1)\rvert}$	$x_2 = a_1 + h_1$	$f(x_2) > 0$
2	$a_2(= a_1)$	$b_2(= x_2)$	$f(a_2)$	$f(b_2)$	$h_2 = \dfrac{\lvert f(a_2)\rvert(b_2 - a_2)}{\lvert f(a_2)\rvert + \lvert f(b_2)\rvert}$	$x_3 = a_2 + h_2$	$f(x_3) > 0$
3	$a_3(= x_3)$	$b_3(= b_2)$	$f(a_3)$	$f(b_3)$	$h_3 = \dfrac{\lvert f(a_3)\rvert(b_3 - a_3)}{\lvert f(a_3)\rvert + \lvert f(b_3)\rvert}$	$x_4 = a_3 + h_3$	$f(x_4) < 0$
4	$a_4(= a_3)$	$b_4(= x_4)$	$f(a_4)$	$f(b_4)$	$h_4 = \dfrac{\lvert f(a_4)\rvert(b_4 - a_4)}{\lvert f(a_4)\rvert + \lvert f(b_4)\rvert}$	$x_5 = a_4 + h_4$	$f(x_5) > 0$
	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...

10.5 উদাহরণ

উদাহরণ 1 ঃ $2x - \log_{10} x^{-7} = 0$ সমীকরণটির যে বীজটি 3 এবং 4-এর মধ্যে অবস্থান করে তা নির্ণয় করুন, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ হবে।

সমাধান ঃ মনে করি $f(x) = 2x - \log_{10} x - 7 = 2x - \log_e x \cdot \log_{10} e^{-7}$

$\therefore \quad f(3) = -1{\cdot}48, f(4) = 0{\cdot}40$ এবং $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}\log_{10} e = 2 - \frac{1}{2 \cdot 303x} > 0[3, 4]$ অন্তরালে, অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি মাত্র বীজ [3, 4] অন্তরালে অবস্থান করে।

	n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	h_n	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
	0	3·0	4·0	–1·48	0·40	0·79	3·79	0·0014 > 0
	1	3·0	3·79	–1·48	0·0014	0·789	3·789	–0·00052 < 0
	2	3·789	3·79	–0·00052	0·0014	0·000271	3·789271	–0·0000014 < 0
Check	3	3·789271	3·79	–0·0000014	0·0014	0·0000007	3·7892717	–0·0000012 < 0

$$h_n = \frac{|f(a_n)|(b_n - a_n)}{|f(a_n)| + |f(b_n)|}, \; h_{n+1} = a_n + h_n$$

$\therefore$ x = **3·789** সমীকরণটির তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ বীজ।

উদাহরণ 2 ঃ $\sin x + \cos x - 1 = 0$ সমীকরণটির কপট অবস্থান পদ্ধতির সাহায্যে একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন, চার সার্থক অঙ্ক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \sin x + \cos x - 1 \quad \therefore f'(x) = \cos x - \sin x$

$\therefore f(0) = 0, f(0{\cdot}5) = 0{\cdot}36, f(1{\cdot}0) = 0{\cdot}38, f(1{\cdot}5) = 0{\cdot}07, f(2{\cdot}0) = -0{\cdot}51$ এবং $f'(x) < 0$, [1·5, 2·0] অন্তরালে।

অতএব, $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটিমাত্র বাস্তব বীজ অবস্থান করে [1·5, 2·0] অন্তরালে।

	n	$a_n(+)$	$b_n(-)$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	h_n	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
	0	1·5	2·0	0·07	–0·51	0·06	1·56	0·0107 > 0
	1	1·56	2·0	0·0107	–0·51	0·00904	1·56904	0·00175 > 0
	2	1·56904	2·0	0·00175	–0·51	0·00147	1·57051	0·000286 > 0
	3	1·57051	2·0	0·000286	–0·51	0·000241	1·570751	0·000045 > 0
Check	4	1·570751	2·0	0·000045	–0·51	0·000038	1·570789	–0·0000073 > 0

$$h_n = \frac{|f(a_n)|(b_n - a_n)}{|f(a_n)| + |f(b_n)|},\ x_{n+1} = a_n + h_n$$

$\therefore$ x = **1·571** $\sin x - \cos x - 1 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ, যা চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 3 ঃ কপট অবস্থান পদ্ধতির সাহায্যে $x1nx = 1$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = x1nx - 1$ $\quad\therefore f'(x) = 1nx + 1$

$\therefore f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 0{\cdot}39$ এবং $f'(x) > 0$ [1, 2] অন্তরালে। অতএব, $f(x) \equiv x1nx - 1 = 0$ সমীকরণটির একটিই বীজ অবস্থান করে [1, 2] অন্তরালে।

	n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	h_n	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
	0	1·0	2·0	–1·0	0·39	0·72	1·72	–0·067 < 0
	1	1·72	2·0	–0·067	0·39	0·0411	1·7611	–0·00333 < 0
	2	1·7611	2·0	–0·00333	0·39	0·002022	1·763122	–0·000158 < 0
Check	3	1·763122	2·0	–0·000158	0·39	0·000096	1·763218	–0·0000075 < 0

$$h_n = \frac{|f(a_n)|(b_n - a_n)}{|f(a_n)| + |f(b_n)|},\ x_{n+1} = a_n + h_n$$

$\therefore$ x = **1·763,** $x1nx = 1$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ, যা তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 4 ঃ কপট অবস্থান পদ্ধতি প্রয়োগ করে, $x^3 + 2x - 2 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন যা পাঁচ সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করি $f(x) = x^3 + 2x - 2$ $\quad\therefore f'(x) = 3x^2 + 2$

$\therefore f(0) = -2$, $f(1) = 1$ এবং $f'(x) > 0$, [0, 1] অঞ্চলে। অতএব, $x^3 + 2x - 2 = 0$ সমীকরণটির একটি মাত্র বাস্তব বীজ [0, 1] অন্তরালে অবস্থিত।

	n	$a_n(-)$	$b_n(+)$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	h_n	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
	0	0·0	1·0	–1·0	1·46	0·41	1·41	–0·67 < 0
	1	0·41	1·0	–0·67	1·46	0·18	1·59	–0·061 < 0
	2	0·59	1·0	–0·061	1·46	0·0164	1·6064	–0·0025 < 0
	3	0·6064	1·0	–0·0025	1·46	0·00067	1·60707	–0·000113 < 0
	4	0·60707	1·0	–0·000113	1·46	0·0000304	1·6071004	–0·0000045 < 0
Check	5	0·6071004	1·0	–0·0000045	1·46	0·0000012	1·6071016	–0·00000017 < 0

$$h_n = \frac{\left|f(a_n)\right|(b_n - a_n)}{\left|f(a_n)\right| + \left|f(b_n)\right|},\ x_{n+1} = a_n + h_n$$

$\therefore$ x = **0·60710**, সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ, পাঁচ সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

10.6 অনুশীলনী

কপট অবস্থান পদ্ধতি দ্বারা নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন ঃ

1. $2x - 3\sin x - 5 = 0$
2. $\log x = \cos x$
3. $x = 1n\ 2(x + 1)$
4. $x^3 + 7x^2 + 9 = 0$
5. $e^x - 3x = 0$

10.7 উত্তরমালা

1. 2·883, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।
2. 1·418, চার সার্থক অঙ্ক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।
3. 1·678, চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।
4. –7·175, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।
5. 0·619, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

একক 11 ❑ সমীকরণের সাংখ্যিক সমাধান—III
(Numerical Solution of Equations—III)

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

9 এবং 10 এককের মত এই এককে আমরা আরও দুটি সমীকরণ সমাধানের সাংখ্যিক পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব। এই দুটি পদ্ধতি অবশ্যই দ্রুত অভিসারী এবং খুবই ফলপ্রসূ, কিন্তু শর্তসাপেক্ষে প্রযোজ্য। এই এককে আমরা পৌনঃপুনিক পদ্ধতি ও নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি আলোচনা করব।

11.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি জানতে পারবেন

- সমীকরণ সমাধানের পৌনঃপুনিক পদ্ধতি ও তার অভিসারিতার শর্ত
- নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি ও তার অভিসারিতার কথা

11.3 সমীকরণ সমাধানের পৌনঃপুনিক পদ্ধতি

মনে করি, $x = \alpha$, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব মূল বা বীজ। প্রথমে সারণি পদ্ধতি প্রয়োগ করে একটি ছোট অন্তরাল (a_0, b_0) নির্ণয় করতে হবে, যার মধ্যে α বিদ্যমান এবং যেখানে $f(a_0)\ f(b_0) < 0$ এবং $f'(x)$ একই চিহ্নযুক্ত [ধনাত্মক বা ঋণাত্মক] হবে। আরও মনে করি $\phi(x)$, $\phi'(x)$ ঐ অন্তরাল $[a_0, b_0]$ -তে অবশ্যই সন্তত।

এই পদ্ধতিতে $f(x) = 0$ সমীকরণকে $x = \phi(x)$ এই সমতুল্য আকারে লিখতে হবে এবং পৌনঃপুনিক সূত্র হবে $x_{n+1} = \phi(xn)$। যদি উপরোক্ত অন্তরাল $[a_0, b_0]$ তে $|\phi'(x)| < 1$ হয় এবং যদি $x_0(a_0 \le x_0 \le b_0)$ প্রারম্ভিক মান হয়, তবে $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\ldots$ এই আসন্ন মানগুলি অবশ্যই α-র প্রতি অভিসারী (convergent) হবে।

যদি x_0-কে আসন্ন মান ধরা হয়, তাহলে প্রথম আসন্ন মানটি হবে $x_1 = \phi(x_0)$, দ্বিতীয় আসন্ন মান $x_2 = \phi(x_1)$, ..., এবং $(n + 1)$ তম আসন্ন মান $x_{n+1} = \phi(x_n)$ এবং যে-কোন পরস্পর কাছাকাছি দুটি পৌনঃপুনিক মানের যে কোনও একটিকে x-এর মান বলে গণ্য করা যেতে পারে।

11.4 পৌনঃপুনিক পদ্ধতির অভিসরণ (Convergence)

মনে করি, $x = \alpha$, $f(x) = 0$ বা $x = \phi(x)$ সমীকরণের একটি বাস্তব বীজ এবং $x_{n+1} = \phi(x_n)$ এই পৌনঃপুনিক সূত্র দ্বারা বর্ণিত আসন্ন মানগুলি $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \ldots$। অতএব অন্তরকলনের মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$|\alpha - x_1| = |\phi(\alpha) - \phi(x_0)| = |\alpha - x_0||\phi'(\xi_1)|, \quad \text{যেখানে } x_0 < \xi_1 < \alpha$$

$$|\alpha - x_2| = |\phi(\alpha) - \phi(x_1)| = |\alpha - x_1||\phi'(\xi_2)|, \quad \text{যেখানে } x_1 < \xi_2 < \alpha$$

$$|\alpha - x_3| = |\phi(\alpha) - \phi(x_2)| = |\alpha - x_2||\phi'(\xi_3)|, \quad \text{যেখানে } x_2 < \xi_3 < \alpha$$

....

$$|\alpha - x_{n+1}| = |\phi(\alpha) - \phi(x_n)| = |\alpha - x_n||\phi'(\xi_{n+1})|, \text{ যেখানে } \quad x_n < \xi_{n+1} < \alpha$$

$$\therefore \quad |\alpha - x_{n+1}| = |\alpha - x_0||\phi'(\xi_1)||\phi'(\xi_2)||\phi'(\xi_3)|\ldots|\phi'(\xi_{n+1})|$$

মনে করি, $[a_0, b_0]$ অন্তরালে সন্তত অপেক্ষক $|\phi'(x)|$ -এর চরম মান ρ, অর্থাৎ ঐ অন্তরালে $|\phi'(x)| \le \rho$, তাহলে, $|\alpha - x_{n+1}| \le |\alpha - x_0| \cdot \rho^n$ অথবা

$\underset{n\to\infty}{Lt}|\alpha - x_{n+1}| \le |\alpha - x_0| \underset{n\to\infty}{Lt}\rho^n = 0$ যদি $\rho < 1$ অর্থাৎ যদি $[a_0, b_0]$ অন্তরালে $|\phi'(x)| < 1$ হয়

$= \infty$ যদি $\rho > 1$, অর্থাৎ যদি $[a_0, b_0]$ অন্তরালে $|\phi'(x)| > 1$ হয়

অর্থাৎ $\underset{n\to\infty}{Lt}\, x_{n+1} = \alpha$, যখন $|\phi'(x)| < 1$ হবে, $[a_0, b_0]$ অন্তরালে।

মন্তব্য ঃ দেখা যাচ্ছে পৌনঃপুনিক পদ্ধতি শর্তসাপেক্ষে অভিসারী এবং শর্তটি হল $[a_0, b_0]$-তে $|\phi'(x)| < 1$। অতএব পৌনঃপুনিক পদ্ধতি প্রয়োগ করার আগে শর্তটি সিদ্ধ হয়েছে, কিনা তা দেখে নেওয়া বাঞ্ছনীয়।

11.5 উদাহরণ

উদাহরণ 1 ঃ $x^3 - 9x + 1 = 0$ এই সমীকরণের ধনাত্মক বীজ বা মূলগুলি নির্ণয় করুন, চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করি $f(x) = x^3 - 9x + 1$। এখন $f(0) = 1$, $f(1) = -7$, $f(2) = -9$, $f(3) = -1$, $\therefore$ $f(0), f(1) = -7 < 0$ এবং $f(2)\,.\,f(3) = -9 < 0$, অতএব ধনাত্মক বীজ দুটি যথাক্রমে $[0, 1]$ এবং $[2, 3]$ অন্তরালে অবস্থিত। $f'(x) = 3x^2 - 9 < 0$, $[0, 1]$ অন্তরালে ও $f'(x) > 0$, $[2, 3]$ অন্তরালে।

এখন $x^3 - 9x + 1 = 0$-কে আমরা নিম্নলিখিতভাবে লিখতে পারি

(i) $x = (9x-1)^{1/3} = \phi_1'(x)$ $\quad\therefore\ \phi_1'(x) = \dfrac{3}{(9x-1)^{2/3}}$

(ii) $x = \dfrac{1}{9-x^2} = \phi_2 = (x)$ $\quad\therefore \phi_2'(x) = \dfrac{2x}{(9-x^2)^2}$

(iii) $x = \sqrt{9 - \dfrac{1}{x}} = \phi_3(x)$ $\quad\therefore \phi_3'(x) = \dfrac{1}{2x^2\sqrt{9-\dfrac{1}{x}}}$

যেহেতু

$\max[|\phi_1'(0)|, |\phi_1'(1)|] = \max[3, 0{\cdot}75] = 3$ $\quad\therefore |\phi_1'(x)| > 1, [0, 1]$ অন্তরালে

$\max[|\phi_1'(2)|, |\phi_1'(3)|] = \max[0{\cdot}45, 0{\cdot}30] = 0{\cdot}45$ $\quad\therefore |\phi_1'(x)| < 1, [2, 3]$ অন্তরালে

$\max[|\phi_2'(0)|, |\phi_2'(1)|] = \max[0, 0{\cdot}30] = 0{\cdot}03$ $\quad\therefore |\phi_2'(x)| < 1, [0, 1]$ অন্তরালে

$\max[|\phi_2'(2)|, |\phi_2'(3)|] = \max[0{\cdot}16, \infty] = \infty$ $\quad\therefore |\phi_2'(x)| > 1, [2, 3]$ অন্তরালে

$\max[|\phi_3'(0)|, |\phi_3'(1)|] = \max[\infty, 0{\cdot}17] = \infty$ $\quad\therefore |\phi_3'(x)| > 1, [0, 1]$ অন্তরালে

$\max[|\phi_3'(2)|, |\phi_3'(3)|] = \max[0{\cdot}04, 0{\cdot}01] = 0{\cdot}04$ $\quad\therefore |\phi_3'(x)| < 1, [2, 3]$ অন্তরালে

অতএব $x = (9x-1)^{1/3} = \phi_1(x)$ এবং $x = \sqrt{9-\frac{1}{x}} = \phi_3(x), [2,3]$ অন্তরালে অবস্থিত বীজটির অভিসারী পৌনঃপুনিক মান দেবে এবং $x = \sqrt{9-\frac{1}{x^2}} = \phi_2(x), [0,1]$ অন্তরালে অবস্থিত বীজটির অভিসারী পৌনঃপুনিক মান দেবে।

(a) যে বীজটি [0, 1] অন্তরালে অবস্থান করে তার মান নির্ণয় করুন চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ। এখানে $\phi_2(x) = \frac{1}{9-x^2}$, এবং $x_0 = 0$ ধরে

n	x_n	$x_{n+1} = \phi(x_n)$
0	0	0·11
1	0·11	0·1113
2	0·1113	0·11126
3	0·11126	0·111264

$\therefore$ [0, 1] অন্তরালে অবস্থিত বীজটি $\boldsymbol{x = 0{\cdot}1113}$**,** চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

(b) [2, 3] অন্তরালে অবস্থিত বীজটির নির্ণয়।

এখানে বীজটি $x = (9x-1)^{1/3} = \phi_1(x)$ বা $x = \sqrt{9-\frac{1}{x}} = \theta_3(x)$ যে-কোন একটি দ্বারা নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু যেহেতু $\max\left[|\phi_1'(2)|, |\phi_1'(3)|\right] = 0{\cdot}45$ এবং $\max\left[|\phi_3'(2)|, |\phi_3'(3)|\right] = 0{\cdot}04$, $x = \sqrt{9-\frac{1}{x}} = \phi_3(x)$ বেশি দ্রুত অভিসারী হবে।

(i) $x = (9x-1)^{1/3} = \phi_1(x)$, এবং $x_0 = 2$ ধরে

n	x_n	$x_{n+1} = \phi(x_n)$
0	2.0	2·57
1	2·57	2·81
2	2·81	2·90
3	2·90	2·93
4	2·93	2·938
5	2·938	2·9411
6	2·9411	2·94222
7	2·94222	2·94261
8	2·94261	2·94274

$\therefore$ [2, 3] অন্তরালে অবস্থিত বীজটি x = **2·943** চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

(ii) $x = \sqrt{9 - \frac{1}{x}} = \phi_3(x)$, এবং $x_0 = 2$ ধরে,

n	x_n	$x_{n+1} = \phi^3(x_n)$
0	2·0	2·92
1	2·92	2·94
2	2·94	2·9427
3	2·9427	2·9428

$\therefore$ [2, 3] অন্তরালে অবস্থিত বীজটি x = **2·943**, চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 2 ঃ নিম্নলিখিত অবীজগাণিতিক সমীকরণের বীজ নির্ণয় করুন।

$x^2 - \sin x = 0 (0 < x < \pi / 2)$, চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = x^2 - \sin x$, $f(0{\cdot}2) = -9{\cdot}16$; $f(0{\cdot}5) = -0{\cdot}23 < 0$, $f(0{\cdot}8) = -0{\cdot}08$, $f(1) = 0{\cdot}16 > 0$

$\therefore$ বীজটি [0·8, 1] এই অন্তরালের অন্তর্গত। $f'(x) = 2x\cos x > 0, [0{\cdot}8, 1]$ অন্তরালে।

মনে করি, $x = \sqrt{\sin x} = \phi(x); |\phi'(x)| = \left|\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\right| < 1, [0{\cdot}8, 1]$ অন্তরালে।

n	x_n	$x_{n+1} = \phi(x_n)$
0	0.8	0·85
1	0·85	0·867
2	0·867	0·873
3	0·873	0·875
4	0·875	0·876
5	0·876	0·8765
6	0·8765	0·87664
7	0·87664	0·87669
8	0·87669	0·87671
9	0·87671	0·87672

$\therefore$ x = **0·8768,** $x^2 - \sin x = 0$ এই সমীকরণের বীজ, চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 3 ঃ পৌনঃপুনিক পদ্ধতির সাহায্যে $x^2 + 1nx - 2 = 0$, এই সমীকরণের বীজ নির্ণয় করুন যা 1 এবং 2-এর মধ্যে অবস্থান করে, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করি, $f(x) = x^2 + 1nx - 2 \therefore f(1) = -1 < 0, f(2) = 2{\cdot}69 > 0$ এবং $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0, [1, 2]$ অন্তরালে

এখন ধরি, $x = \sqrt{2 - 1nx} = \phi(x) \therefore |\phi'(x)| = \left|-\frac{1}{2x\sqrt{2-1nx}}\right| < 1, [1, 2]$ অন্তরালে, যেহেতু

$\max[|\phi'(1)|, |\phi'(2)|] = \max[0, 35, 0{\cdot}21] = 0{\cdot}35 < 1$

n	x_n	$x_{n+1} = \phi(x_n)$
0	1	1·4
1	1·4	1·29
2	1·29	1·32
3	1·32	1·312
4	1·312	1·3147
5	1·3147	1·3139
6	1·3139	1·31415
7	1·31415	1·31408
8	1·31408	1·31410
9	1·31410	1·31409

$\therefore x = \mathbf{1{\cdot}3141}$, $x^2 + 1nx - 2 = 0$ এই সমীকরণের বীজ, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 4 ঃ পৌনঃপুনিক পদ্ধতির সাহায্যে $x^3 + x + 1 = 0$ এই সমীকরণের ধনাত্মক বীজটি নির্ণয় করুন, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করি, $f(x) = x^3 + x - 1$, $\therefore f(0) = -1 < 0$, $f(0{\cdot}5) = -0{\cdot}38 < 0$, $f(0{\cdot}8) = 0{\cdot}31 > 0$ অতএব $x^3 + x - 1 = 0$-এর ধনাত্মক বীজটি 0·5 এবং 0·8-এর মধ্যে অবস্থান করে, এবং $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, (0·5, 0·8) অন্তরালে। এখন $x^3 + x - 1 = 0$ কে $x + \frac{1}{x^2+1} = \phi(x)$ ধরি এবং $|\phi'(x)| = \left|-\frac{2x}{x^2+1}\right| < 1, [0 \cdot 5, 08]$ অন্তরালে, যেহেতু $\max\left[|\phi'(0{\cdot}5)|, |\phi'(0{\cdot}8)|\right] = max\ [0{\cdot}64, 0{\cdot}59] = 0{\cdot}64 < 1$

n	x_n	$x_{n+1} = \phi(x_n)$
0	0·5	0·8
1	0·8	0·61
2	0·61	0·73
3	0·73	0·65
4	0·65	0·70
5	0·70	0·67
6	0·67	0·69
7	0·69	0·677
8	0·677	0·686
9	0·686	0·680
10	0·680	0·684

$\therefore$ x = **0·68**, $x^3 + x - 1 = 0$ এই সমীকরণের বীজ দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 5 ঃ পৌনঃপুনিক পদ্ধতি প্রয়োগ করে, $3x - \cos x - 1 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন, ছয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করি, $f(x) = 3x - \cos x - 1$, $\therefore$ $f(0) = -2$, $f(1) = 1{\cdot}46$ আবার $f'(x) = 3 + \sin x > 0$, $(0,\ 1)$ অন্তরালে।

$\therefore$ $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটিমাত্র বীজ $(0,\ 1)$ অন্তরালে অবস্থান করে। এখন সমীকরণটিকে $x = \dfrac{1+\cos x}{3} = \phi(x)$, ধরি।

$\therefore$ $|\phi'(x)| = \left|-\dfrac{\sin x}{3}\right| < 1, (0,1)$ অন্তরালে।

n	x_n	$x_{n+1} = \phi(x_n)$
0	0	0·7
1	0·7	0·6
2	0·6	0·61
3	0·61	0·606
4	0·606	0·607
5	0·607	0·6071
6	0·6071	0·607102
7	0·607102	0·6071015
8	0·6071015	0·6071016

$\therefore$ x = **0·607102**, $f(x) = 0$ সমীকরণটি একটি বীজ, ছয় সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 6 ঃ $x - 4 + 2x = 0$ সমীকরণটির যে বীজটি 1 এবং 2-এর মধ্যে বর্তমান তার মান পৌনঃপুনিক পদ্ধতি দ্বারা বের করুন, ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করি, $f(x) = x - 4 + 2^x$ $\therefore$ $f(1) = -1$ এবং $f(2) = 2$ আবার $f'(x) = 1 + 2x \log 2 > 0$, $(1, 2)$ অন্তরালে। অতএব $f(x) = 0$ সমীকরণের একটিমাত্র বীজ $(1, 2)$ অন্তরালে বর্তমান।

এখন $x - 4 + 2^x = 0$ বা, $2x = 4 - x$ বা, $x \log_e 2 = \log_e (4 - x)$

বা, $x = \dfrac{\log_e(4-x)}{\log_e 2} = \dfrac{1n(4-x)}{1n2} = \phi(x)$ ধরি

এখন $|\phi'(x)| = \left|\dfrac{1}{4-x} \cdot \dfrac{1}{1n2}\right| < 1, (1,2)$ অন্তরালে।

$\therefore$ $x = \phi(x) = \dfrac{1n(4-x)}{1n2}$, অভিসারী পৌনঃপুনিক সূত্র দেবে।

n	x_n	$x_{n+1} = \phi(x_n)$
0	1	1·6
1	1·6	1·3
2	1·3	1·4
3	1·4	1·37
4	1·37	1·39
5	1·39	1·38
6	1·38	1·389
7	1·389	1·385
8	1·385	1·387
9	1·387	1·386
10	1·386	1·3862
11	1·3862	1·3861
12	1·3861	1·3862
13	1·3862	1·38615
14	1·38615	1·38618
15	1·38618	1·38616
16	1·38616	1·38617
17	1·38617	1·386165
18	1·386165	1·386168
19	1·386168	1·386166
20	1·386166	1·386167
21	1·386167	1·3861669
22	1·3861669	1·3861669

$\therefore$ x = **1·386167**, $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ, ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

11.6 সমীকরণ সমাধানে নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি

মনে করি, $x = \alpha$, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি বাস্তব বীজ। এখানেও পৌনঃপুনিক পদ্ধতির মত সারণি পদ্ধতির প্রয়োগ করে একটি ক্ষুদ্র অন্তরাল (a_0, b_0) নির্ণয় করতে হবে, যার মধ্যে α বিদ্যমান এবং যেখানে $f(a_0)f(b_0) < 1$ এবং $f'(x)$ একই চিহ্নযুক্ত (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হবে।

যদি $x = x_0$, $f(x) = 0$ সমীকরণটির একটি প্রায়িক বা আসন্ন মান হয়, তাহলে $f(x_0)$ অবশ্যই সাংখ্যিকভাবে ক্ষুদ্র হবে। মনে করি, বীজটির সংশোধনী h, তাহলে বীজটির সঠিক মান $x = x_0 + h$ এবং $f(x_0 + h) = 0$, এখন h-র মান নির্ণয় করতে হবে।

টেলরের ধারা অনুযায়ী

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \ldots = 0$$

এখন h-এর দুই বা উচ্চতর ঘাতগুলিকে উপেক্ষা করে পাই

$$f(x_0) + hf'(x_0) \simeq 0 \text{ অর্থাৎ প্রায়িকভাবে } h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ এবং } x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

অতএব x_0-কে প্রারম্ভিক প্রায়িক মান ধরে প্রথম প্রায়িক মানটি পাই,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

....

এবং $(n + 1)$-তম প্রায়িক মান হবে

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

এটা হল নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতির পৌনঃপুনিক সূত্র।

11.7 নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতির অভিসরণ

পৌনঃপুনিক পদ্ধতির সঙ্গে তুলনা করে উপরোক্ত সূত্রটিকে নিম্নলিখিতভাবে লিখতে পারি

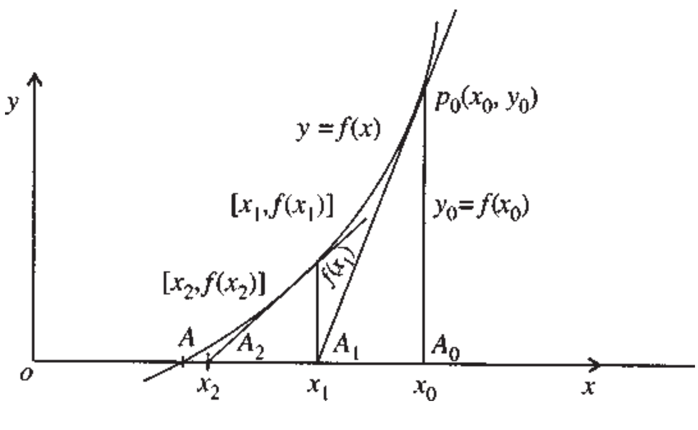
$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

অতএব পরপর প্রায়িক মানগুলি অভিসারী হবে যদি

$$|\phi'(x)| = \left|1 - \frac{\{f'(x)^2\} - f(x)f''(x)}{\{f'(x)^2\}}\right| < 1 \text{ অথবা } \left|\frac{f(x)f''(x)}{\{f'(x)\}^2}\right| < 1 \text{ হয়}$$

অথবা $\{f'(x)\}^2 > |f(x)f''(x)|$ হয়।

11.8 নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতির জ্যামিতিক তাৎপর্য



ox এবং oy-কে অক্ষ ধরে $y = f(x)$-এর লেখচিত্র অঙ্কন করলাম।

মনে করি, $P_0[x_0, f(x_0)]$ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষকে A_1 বিন্দুতে ছেদ করে, যেখানে $oA_1 = x_1$ এবং $P_1[x_1, f(x_1)]$ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষকে A_2 বিন্দুতে ছেদ করবে, যেখানে $oA_2 = x_2$ ইত্যাদি।

অতএব $P_0A_0 = (x_0 - x_1)\tan < P_0A_1A_0 = (x_0 - x_1)f'(x_0)$

বা, $f(x_0) = (x_0 - x_1)f'(x_0)$

বা, $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

অতএব $y = f(x)$ বক্ররেখার x_0, x_1, x_2, ..., x_n বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষকে যে সব বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুগুলিই যথাক্রমে বীজটির প্রায়িক আসন্ন মান যথা x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1} ....।

মন্তব্য ঃ (i) যদি $f'(x) = 0$ বা অতিক্ষুদ্র হয়, তবে নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করা যাবে না।

(ii) যদি প্রাথমিক প্রায়িক মান বীজের যথেষ্ট কাছাকাছি হয়, তবেই নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি কার্যকর হয়।

11.9 উদাহরণ

উদাহরণ 1 ঃ নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে $x^3 - 8x - 4 = 0$ সমীকরণটির 3 ও 4-এর মধ্যে অবস্থিত বীজটি নির্ণয় করুন, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করি, $f(x) = x^3 - 8x - 4$ $\therefore f(3) = -1 < 0$ এবং $f(4) = 28 > 0$, $f'(x) = 3x^2 - 8 > 0$, (3, 4) অন্তরালে, অতএব $f(x) \equiv x^3 - 8x - 4 = 0$ সমীকরণটির একটিমাত্র বীজ আছে (3, 4) অন্তরালে, $x_0 = 3$ ধরে পাই।

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n + h_n$
0	3	–1·0	19·0	0·05	3·05
1	3·05	–0·027	19·9075	0·0014	3·0514
2	3·0514	0·000513	19·93312	–0·0000257	3·051374
3	3·051374	–0·000005	19·932649	0·00000025	3·0513742

অতএব $x = \mathbf{3{\cdot}0514}$, $x^3 - 8x - 4 = 0$ সমীকরণটির বীজ, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 2 ঃ নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে $x^4 + x - 4 = 0$ সমীকরণটির বাস্তব বীজটি নির্ণয় করুন, ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ ধরি, $f(x) + x^x + x - 4$ এবং $f'(x) = x^x(1 + 1nx) + 1$,

$f(1) = -2$, $f(1{\cdot}5) = -0{\cdot}66$, $f(1{\cdot}6) = -0{\cdot}27$, $f(1{\cdot}7) = 0{\cdot}16$

অতএব $x^x + x - 4 = 0$ সমীকরণটির বাস্তব বীজটি 1·6 এবং 1·7-এর মধ্যে আছে।

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n + h_n$
0	1·6	–0·27	4·12	0·066	1·666
1	1·666	0·0065	4·5352	–0·00143	1·66457
2	1·66457	0·0000318	4·525536	–0·000007	1·664563
3	1·664563	0·0000002	4·5254887	0·00000004	1·664563

$\therefore$ **x = 1·664563,** $x^x + x - 4 = 0$ সমীকরণের বাস্তব বীজ, ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 3 ঃ নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে $10^x + x - 4 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব ধনাত্মক বীজ নির্ণয় করুন ছয়, দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করি, $f(x) = 10^x + x - 4 \ \therefore f'(x) = 10^x 1n10 + 1$

$\therefore$ $f(0) = -3$, $f(0{\cdot}5) = -0{\cdot}34$, $f(0{\cdot}6) = 0{\cdot}58$ অতএব $f(x) = 0$

সমীকরণটির বাস্তব ধনাত্মক বীজটি 0·5 এবং 0·6-এর মধ্যে অবস্থান করে। $x_0 = 0{\cdot}5$ ধরে

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n + h$
0	0·5	–0·34	8·28	0·04	0·54
1	0·54	0·007369	8·9839	–0·00082	0·53918
2	0·53918	0·0000079	8·968851	–0·00000088	0·5391792
3	0·5391792	–0·0000007	8·9688360	0·00000008	0·5391792

$\therefore$ **x = 0·539179,** $x^x + x - 4 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ, ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 4 ঃ নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে $3x - \cos x - 1 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন, পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

সমাধান ঃ মনে করি, $f(x) = 3x - \cos x - 1$

$\therefore$ $f(0) = -2$, $f(0{\cdot}5) = 0{\cdot}37$, $f(0{\cdot}7) = 0{\cdot}34$

অতএব $3x - \cos x - 1 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ 0·5 এবং 0·7 -এর মধ্যে বর্তমান।

$\therefore f'(x) = 3 + \sin x$ এবং $x_0 = 0 \cdot 5$ ধরি।

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n + h$
0	0·5	–0·37	3·48	0·1063	0·6063
1	0·6063	–0·00286	3·56983	0·000801	0·607101
2	0·607101	–0·00000231	3·570489	0·00000064	0·60710164
3	0·60710164	–0·00000017	3·570489	0·00000003	0·60710163

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 0 \cdot 60710}$, $3x - \cos x - 1 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব বীজ পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

11.10 ধনাত্মক সংখ্যার q-তম মূলের সাংখ্যিক মান নির্ণয়

মনে করি, R একটি ধনাত্মক সংখ্যা এবং $x = R^{1/q}$, যেখানে q একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। তাহলে $x^q = R$ এবং $f(x) \equiv x^q - R = 0$ সমীকরণে, নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে গ্রায়িক সূত্র পাই

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^q - R}{qx_n^{q-1}} = \frac{(q-1)x_n^q + R}{qx_n^{q-1}} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots)$$

উদাহরণ 1 ঃ $x^5 - a = 0$ সমীকরণ থেকে নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতিতে প্রতিষ্ঠা করুন

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}\left[4x_n + \frac{a}{x_n^4}\right]$$

এবং $\sqrt[5]{3}$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $f(x) \equiv x^5 - a = 0$ সমীকরণে, নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - a}{5x_n^4} = \frac{1}{5}\left[4x_n + \frac{a}{x_n^4}\right]$$

$a = 3$ বসিয়ে পাই $\quad x_{n+1} = \frac{1}{5}\left[4x_n + \frac{3}{x_n^4}\right] = \frac{4x_n^5 + 3}{5x_n^4}$

$x_0 = 1$ ধরে পাই

n	x_n	x_{n+1}
0	1	1·4
1	1·4	1·276
2	1·276	1·2471
3	1·2471	1·2457
4	1·2457	1·2457301

অতএব $\sqrt[5]{3} = 1{\cdot}2457$

উদাহরণ 2 ঃ a-র বর্গমূল নির্ণয় করার জন্য নিম্নলিখিত প্রায়িক সূত্রটি প্রমাণ করুন $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$ এবং $\sqrt{2}$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, $x = \sqrt{a} \quad \therefore x^2 = a$

$f(x) \equiv x^2 - a =$ সমীকরণে নিউটন র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left[\frac{x_n^2 + a}{x_n}\right] = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

এখন $a = 2$ বসিয়ে পাই, $\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 + 2}{x_n}\right)$,

$x_0 = 1$ ধরে

n	x_n	x_{n+1}
0	1	1·5
1	1·5	1·42
2	1·42	1·414
3	1·414	1·4142

$\therefore \quad \sqrt{2} = 1 \cdot 414,$ চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

11.11 অনুশীলনী

(a) পৌনঃপুনিক পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির বীজ নির্ণয় করুন।

(i) $x^3 + x^2 - 1 = 0$

(ii) $x^2 - x - 0{\cdot}1 = 0$

(iii) $x = \frac{1}{2} + \sin x$

(iv) $\sin x = 5x - 2$

(b) নিউটন-র‍্যাফসন পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির বীজ নির্ণয় করুন

(i) $\tan x + x = 0$

(ii) $x^2 + 4\sin x = 0$

(iii) $e^x - 3x = 0$

(iv) $3x^3 + 5x - 40 = 0$

(c) (i) $\sqrt[7]{5}$

(ii) $\sqrt[7]{111}$

(iii) $\sqrt[7]{125}$

গুলির মান নির্ণয় করুন।

11.12 উত্তরমালা

(a) (i) 0·755, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

(ii) 1·09, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

(iii) 1·477, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

(iv) 0·524, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

(b) (i) 2·03, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

(ii) –1·934, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

(iii) 0·619, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

(iv) 2·140, চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

(c) (i) 1·258

(ii) 1·960

(iii) 1·993

একক 12 ❑ বর্গ-ম্যাট্রিক্সের ব্যস্তম্যাট্রিক্স নির্ণয় (Determination of Inverse Matrix of a Square Matrix)

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

এই এককে আমরা কোনও বর্গ-ম্যাট্রিক্সের ব্যস্তম্যাট্রিক্স নির্ণয় করার পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব। এই আলোচনার আগে ম্যাট্রিক্স সম্বন্ধে কিছু সাধারণ ধারণার উল্লেখ করব।

মনে করি, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গ-ম্যাট্রিক্স, যেখানে $a_{ij}(i, j = 1, 2, ...n)$ কে A ম্যাট্রিক্সের উপাদান বলা হয় এবং a_{ij} কে i-তম পংক্তি (row) এবং j-তম স্তম্ভের (column) উপাদান বলা হয়।

$|A| = |a_{ij}|$-কে A ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক (determinant) বলা হয়।

যদি $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, এমন হয় যে—

(i) $|A| = |a_{ij}| \neq 0$, তবে A ম্যাট্রিক্সকে অবিশিষ্ট (non-singular) ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

(ii) $|A| = |a_{ij}| = 0$, তবে A ম্যাট্রিক্সকে বিশিষ্ট (singular) ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

আবার, A ম্যাট্রিক্সের পংক্তিগুলিকে স্তম্ভে লিখলে বা স্তম্ভগুলিকে পংক্তিতে লিখলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়, তাকে A-এর পরিবর্ত (transpose) ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং A' বা Tran A দ্বারা সূচিত করা হয়।

যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ হয়, তবে $A' = [a_{ji}]_{n\times n}$ হবে।

যদি A_{ij}, a_{ij} উপাদানের সহউৎপাদক (co-factor) হয়, তবে $\left[A'_{ij}\right] = \left[A_{ji}\right]$ কে ম্যাট্রিক্সের সংলগ্ন (adjoint) ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা হয় :

$$\text{Adj } A = \left|A'_{ij}\right| = \left[A_{ji}\right]$$

$\dfrac{\text{Adj}\,A}{|A|}$ কে A ম্যাট্রিক্সের ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং A^{-1} দ্বারা সূচিত করা হয়, অর্থাৎ

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,A}{|A|}$$

$|A| \neq 0$ অর্থাৎ A বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স নয়। অতএব A^{-1} বিদ্যমান হতে হলে, A-কে অবশ্যই অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স হতে হবে।

যদি A ম্যাট্রিক্সের ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স B হয়, তবে $A \cdot B = B \cdot A = 1$ ... (12.1.1)

যেখানে I একটি একক ম্যাট্রিক্স, যার ক্রম A-র ক্রমের সমান

$$\therefore\ A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \qquad (12.1.2)$$

$$\text{এবং } A \cdot I = I \cdot A = A \qquad (12.1.3)$$

12.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করে আপনি

- যে-কোন ক্রমের বর্গ-ম্যাট্রিক্সের ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে পারবেন।
- রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান করতে পারবেন।

12.3 ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের পদ্ধতি

ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি আছে, তবে এখানে আমরা মাত্র দুটি পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব। 3×3 ক্রম ম্যাট্রিক্সের জন্য আমরা সাধারণতঃ সহউৎপাদক (co-factor) নির্ণয় করে ব্যস্তম্যাট্রিক্স নির্ণয় করে থাকি। কিন্তু যদি A-র ক্রম 3×3 এর বেশী হয় তবে এই পদ্ধতি খুই শ্রমসাধ্য, তাই অন্য পদ্ধতি প্রয়োগ করব 12.7-এ।

12.4 উদাহরণ

উদাহরণ 1 : নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সের ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

সমাধান :

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} (C_3' = C_3 + C_1)$

$$= -6(\neq 0)$$

$$\therefore [A_{ij}] = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -8 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[A_{ji}] = [A'_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -8 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & -8 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{\frac{7}{6}} & \mathbf{\frac{4}{3}} & \mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{\frac{5}{6}} & \mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

উদাহরণ 2 : নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সের ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

সমাধান : মনে করি,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} C_2' = C_2 - C_1 \\ C_3' = C_3 - C_1 \end{pmatrix}$$

$$= 6 (\neq 0)$$

$$\therefore A_{ij} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{[A_{ji}]}{|A|} = \frac{[A_{ij}']}{|A|} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{\frac{1}{3}} \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & -\mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{\frac{1}{6}} & -\mathbf{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

12.5 ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান

এখানে রৈখিক সমীকরণসমূহকে এইভাবে লেখা হল :

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_1 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad (12.5.1)$$

বা, $AX = b$ (12.5.2)

যেখানে $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ এবং $b = [b_1, b_2, ..., b_n]$

(12.5.2) থেকে পাই $A^{-1}\cdot AX = A^{-1}b$

বা, $X = A^{-1}b$

বা, $[x_1, x_2, ..., x_n] = A^{-1}b = [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n]$

$\therefore\ x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ x_3 = \alpha_3,\ ...,\ x_n = \alpha_n$, রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান।

12.6 উদাহরণ

উদাহরণ 1 : ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করুন :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

সমাধান :

মনে করি, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\therefore\ AX = b$ বা $X = A^{-1}b$

12.4 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 1 থেকে পাই, $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & -8 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & -8 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 14-8-12 \\ -820 \\ 10-4-12 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1}$

উদাহরণ 2 : ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করুন :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

সমাধান :

ধরি, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $AX = b$ এবং $X = A^{-1}b$

12.4 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 2 থেকে পাই, $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0+4+2 \\ 18-6+0 \\ 18+2-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3}$

12.7 ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ে গাউস-জর্ডনের (Gauss-Jordan) পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স A এবং একই ক্রমের একটি একক ম্যাট্রিক্স I কে পাশাপাশি লেখা হয়। বর্ধিত ম্যাট্রিক্সের উপর বিশেষ পদ্ধতি প্রয়োগ করে ম্যাট্রিক্স A-কে একক ম্যাট্রিক্সে পরিবর্তন করব। তখন একক ম্যাট্রিক্সের পরিবর্তিত ম্যাট্রিক্সটিই A-এর ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স হবে। এখানে উদাহরণের সাহায্যে পদ্ধতিটির বিশ্লেষণ করব।

12.8 উদাহরণ

উদাহরণ 1 : নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন :

$$A = \begin{bmatrix} 0\cdot 89 & 4\cdot 32 & -0\cdot 47 & 0\cdot 95 \\ 1\cdot 13 & -0\cdot 89 & 0\cdot 61 & 5\cdot 63 \\ 6\cdot 32 & -0\cdot 73 & -0\cdot 65 & 1\cdot 06 \\ 0\cdot 74 & 1\cdot 01 & 5\cdot 28 & -0\cdot 88 \end{bmatrix}$$

সমাধান : A-কে একটি 4×4 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স দ্বারা প্রবর্ধিত (augment) করে পাই,

$$\left[\begin{array}{cccc c cccc} 0\cdot 89 & 4\cdot 32 & -0\cdot 47 & 0\cdot 95 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1\cdot 13 & -0\cdot 89 & 0\cdot 61 & 5\cdot 63 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6\cdot 32 & -0\cdot 73 & -0\cdot 65 & 1\cdot 06 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0\cdot 74 & 1\cdot 01 & 5\cdot 28 & -0\cdot 88 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

প্রথম কীলক উপাদান (Pivot element) 0·89 দ্বারা প্রথম কীলক পংক্তি (Pivot row) কে ভাগ করলাম, তারপর একে –1·13, –6·32 এবং –0·74 দ্বারা গুণ করে দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পংক্তিতে যথাক্রমে যোগ করে পাই,

$$\sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c c c c c c c c c c} 1 & : & 4\cdot 8539 & -0\cdot 5281 & 1\cdot 0674 & 1\cdot 1236 & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & : & -6\cdot 3749 & 1\cdot 2068 & 4\cdot 4238 & -1\cdot 2697 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & : & -31\cdot 4066 & 2\cdot 6876 & -5\cdot 6860 & -7\cdot 1012 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & : & -2\cdot 5819 & 5\cdot 6708 & -1\cdot 6699 & -0\cdot 8315 & : & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ -1\cdot 13 \\ -6\cdot 32 \\ -0\cdot 74 \end{array}$$

এখন কীলক উপাদান –6·3749 দ্বারা দ্বিতীয় কীলক পংক্তিকে ভাগ করলাম, তারপর তাকে –0·8539, 31·4066 এবং 2·5819 দ্বারা গুণ করে প্রথম, তৃতীয় এবং চতুর্থ পংক্তিগুলির সঙ্গে যথাক্রমে যোগ করে পাই,

$$\sim \left[\begin{array}{c c c c c c c c c} 1 & 0 & : & 0\cdot 3907 & 4\cdot 4355 & 0\cdot 1567 & 0\cdot 7616 & : & 0 \quad 0 \\ 0 & 1 & : & -0\cdot 1893 & -0\cdot 6939 & 0\cdot 1992 & -0\cdot 2569 & : & 0 \quad 0 \\ 0 & 0 & : & -3\cdot 2577 & -27\cdot 4790 & -0\cdot 8450 & -4\cdot 9277 & : & 1 \quad 0 \\ 0 & 0 & : & 5\cdot 1820 & -3\cdot 4615 & -0\cdot 3172 & -0\cdot 4051 & : & 0 \quad 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4\cdot 8539 \\ \\ 31\cdot 4066 \\ -2\cdot 5189 \end{array}$$

এখান কীলক উপাদান –3·2577 দ্বারা তৃতীয় কীলক পংক্তিকে ভাগ করলাম এবং তারপর তাকে যথাক্রমে –0·3907, 0·1893, –5·1820 দ্বারা গুণ করে প্রথম, দ্বিতীয় এবং চতুর্থ পংক্তির সঙ্গে যোগ করে পাই

$$
\sim \begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccccc} 1\,0\,0 & : & 1\cdot 1399 & 0\cdot 0554 & 0\cdot 1706 & 0\cdot 1199 & : & 0 \\ 0\,1\,0 & : & 0\cdot 9029 & 0\cdot 2483 & 0\cdot 1294 & -0\cdot 0581 & : & 0 \\ 0\,0\,1 & : & 8\cdot 4351 & 0\cdot 2594 & 1\cdot 5126 & -0\cdot 3070 & : & 0 \\ 0\,0\,0 & : & -47\cdot 1722 & -1\cdot 6614 & -8\cdot 2434 & 1\cdot 5909 & : & 1 \end{array}\right]\end{array} \begin{array}{c} -0\cdot 3907 \\ 0\cdot 1893 \\ \\ -5\cdot 1820 \end{array}
$$

এখন কীলক উপাদান –47·1722 দ্বারা চতুর্থ কীলক পংক্তিকে ভাগ করলাম এবং তারপর তাকে যথাক্রমে –1·1399, –0·9029, –8·4351 দ্বারা গুণ করে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পংক্তির সঙ্গে যোগ করে পাই,

$$
\sim \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 0\cdot 0153 & -0\cdot 0286 & 0\cdot 1583 & 0\cdot 0242 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0\cdot 2165 & -0\cdot 0284 & -0\cdot 0277 & 0\cdot 0191 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & -0\cdot 0375 & 0\cdot 0381 & -0\cdot 0227 & 0\cdot 1788 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0\cdot 0352 & 0\cdot 1748 & -0\cdot 0337 & -0\cdot 0212 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1\cdot 1399 \\ -0\cdot 9029 \\ -8\cdot 4351 \\ \\ \end{array}
$$

$$
\therefore \boldsymbol{A^{-1}} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{0\cdot 0153} & \mathbf{-0\cdot 0286} & \mathbf{0\cdot 1583} & \mathbf{0\cdot 0242} \\ \mathbf{0\cdot 2165} & \mathbf{-0\cdot 0277} & \mathbf{-0\cdot 0277} & \mathbf{0\cdot 0191} \\ \mathbf{-0\cdot 0375} & \mathbf{0\cdot 0381} & \mathbf{-0\cdot 0227} & \mathbf{0\cdot 1788} \\ \mathbf{0\cdot 0352} & \mathbf{0\cdot 1748} & \mathbf{-0\cdot 0337} & \mathbf{-0\cdot 0212} \end{array}\right]
$$

উদাহরণ 2 : নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন :

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}
$$

সমাধান : $\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & : & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & : & 3 & 2 & 1 & : & 0 & 0 \\ 0 & : & -1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 \\ 0 & : & -7 & 0 & -2 & : & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ -2 \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & : & 5 & -2 & 3 & : & 0 \\ 0 & 1 & : & -1 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & -7 & 5 & -7 & : & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3 \\ \\ 7 \end{array}
$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccccc}1 & 0 & 0 & : & \frac{11}{7} & -2 & \frac{5}{7}\\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7}\\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{5}{7} & 1 & -\frac{1}{7}\end{array}\right] \quad \therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{\frac{11}{7}} & \mathbf{-2} & \mathbf{\frac{5}{7}}\\ \mathbf{\frac{2}{7}} & \mathbf{0} & -\mathbf{\frac{1}{7}}\\ -\mathbf{\frac{5}{7}} & \mathbf{1} & -\mathbf{\frac{1}{7}}\end{bmatrix}$$

উদাহরণ 3 : নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সের ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন :

$$A=\begin{bmatrix}6\cdot7 & 1\cdot1 & 2\cdot2\\ 3\cdot1 & 9\cdot4 & -1\cdot5\\ 2\cdot1 & -1\cdot5 & 8\cdot4\end{bmatrix}$$

সমাধান :

$$\left[\begin{array}{ccccc}\boxed{6\cdot7} & 1\cdot1 & 2\cdot2 & : & 1\\ 3\cdot1 & 9\cdot4 & -1\cdot5 & : & 0\\ 2\cdot1 & -1\cdot5 & 8\cdot4 & : & 0\end{array}\right]$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0\cdot164179 & 0\cdot328358 & 0\cdot149254\\ 0 & 8\cdot891045 & -2\cdot517913 & -0\cdot462687\\ 0 & -1\cdot844776 & 7\cdot710446 & -0\cdot313433\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ -3\cdot1\\ -2\cdot1\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc}0\cdot164179 & 0\cdot328358 & 0\cdot149254 & : & 0\\ \boxed{8\cdot891045} & -2\cdot517913 & -0\cdot462687 & : & 1\\ -1\cdot844776 & 7\cdot710406 & -0\cdot313433 & : & 0\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc}0 & : & 0\cdot374853 & 0\cdot157798 & -0\cdot018466\\ 1 & : & -0\cdot283197 & -0\cdot052040 & 0\cdot112473\\ 0 & : & 7\cdot188011 & -0\cdot409435 & 0\cdot207487\end{array}\right]\begin{array}{l}-0\cdot164179\\ \\ -7\cdot188011\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc}0\cdot374853 & 0\cdot157798 & -0\cdot018466 & : & 0\\ -0\cdot283197 & -0\cdot052040 & 0\cdot112473 & : & 0\\ \boxed{7\cdot188011} & -0\cdot409435 & 0\cdot207487 & : & 1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc}0 & : & 0\cdot179150 & -0\cdot029287 & -0\cdot052150\\ 0 & : & -0\cdot068171 & 0\cdot120648 & 0\cdot039398\\ 1 & : & -0\cdot056961 & 0\cdot028866 & 0\cdot139120\end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0 \cdot 179150} & \mathbf{-0 \cdot 029287} & \mathbf{-0 \cdot 052150} \\ \mathbf{-0 \cdot 068171} & \mathbf{0 \cdot 120648} & \mathbf{0 \cdot 039398} \\ \mathbf{-0 \cdot 056961} & \mathbf{0 \cdot 028866} & \mathbf{0 \cdot 139120} \end{bmatrix}$$

উদাহরণ 4 : নিম্নে প্রদত্ত A ম্যাট্রিক্সের ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

সমাধান : অন্যপ্রণালী

ধরি, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = k_1 \quad \ldots \quad \text{(i)}$

$0x_1 + 5x_2 + 0x_3 = k_2 \quad \ldots \quad \text{(ii)}$

$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = k_3 \quad \ldots \quad \text{(iii)}$

(ii) থেকে পাই, $x_2 = \frac{k_2}{5} = 0 \cdot k_1 + \frac{1}{5}k_2 + 0 \cdot k_3 \ldots$

(iii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই,

$$x_1 + 2x_2 = k_3 - k_1$$

বা, $x_1 = \frac{2}{3}k_2 = k_3 - k_1$

বা, $x_1 = -k_1 - \frac{2}{5}k_2 + k_3$

(i) থেকে পাই,

$$3x_3 = k_1 - x_1 - 2x_2$$

$$= k_1 + k_1 + \frac{2}{5}k_2 - k_3 - \frac{2}{5}k_2$$

$$= 2k_1 - k_3$$

$$\therefore x_3 = \frac{2}{3}k_1 - \frac{1}{3}k_3$$

$$= \frac{2}{3}k_1 = 0 \cdot k_2 - \frac{1}{3}k_3$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{5} & 1 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & -\mathbf{\frac{2}{5}} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{5}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{0} & -\mathbf{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

উদাহরণ 5 : নিম্নে প্রদত্ত A ম্যাট্রিক্সের ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

সমাধান :

মনে করি $\quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = k_1 \qquad$ (i)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = k_2 \qquad \text{(ii)}$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = k_3 \qquad \text{(iii)}$$

(i) এবং (iii) যোগ করে পাই,

$$4x + 2x_3 = k_1 + k_3 \qquad \text{(iv)}$$

(iii)-কে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) থেকে বিয়োগ করে পাই,

$$-3x_1 + 3x_3 = k_2 - 2k_3 \qquad \text{(v)}$$

[(iv) × 3 – (v) × 2] করে পাই,

$$18x_1 = 3k_1 + 3k_3 - 2k_2 + 4k_3 = 3k_1 - 2k_2 + 7k_3$$

$$\therefore x_1 = \frac{3}{18}k_1 - \frac{2}{18}k_2 + \frac{7}{18}k_3 \qquad \text{(vi)}$$

(iv) থেকে পাই,

$$x_3 = \frac{1}{2}[k_1 + k_3 - 4x_1]$$

$$= \frac{1}{2}\left[k_1 + k_3 - \frac{12}{18}k_1 + \frac{8}{18}k_2 - \frac{28}{18}k_3\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{6}{18}K_1 + \frac{8}{18}K_2 - \frac{10}{18}K_3\right]$$

$$= \left[\frac{3}{18}k_1 + \frac{4}{18}k_2 - \frac{5}{18}k_3\right] = \left[\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{9}k_2 - \frac{5}{18}k_3\right]$$

(iii) থেকে পাই,

$$x_2 = k_3 - 2x_1 + x_3 = k_3 - \frac{6}{18}k_1 + \frac{4}{18}k_2 - \frac{14}{18}k_3 + \frac{3}{18}k_1 + \frac{4}{18}k_2 - \frac{5}{18}k_3$$

$$= -\frac{3}{18}k_1 + \frac{8}{18}k_2 - \frac{1}{18}k_3$$

$$= -\frac{1}{6}k_1 + \frac{4}{9}k_2 - \frac{1}{18}k_3$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{9} & \frac{7}{18} \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & -\frac{5}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{1}{6}} & \mathbf{-\frac{1}{9}} & \mathbf{\frac{7}{18}} \\ \mathbf{-\frac{1}{6}} & \mathbf{\frac{4}{9}} & \mathbf{-\frac{1}{18}} \\ \mathbf{\frac{1}{6}} & \mathbf{\frac{2}{9}} & \mathbf{-\frac{5}{18}} \end{bmatrix}$$

12.9 অনুশীলনী

নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সগুলির ব্যস্ত-ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0\cdot 89 & 4\cdot 32 & -0\cdot 47 & 0\cdot 95 \\ 1\cdot 13 & -0\cdot 89 & 0\cdot 61 & 5\cdot 63 \\ 6\cdot 32 & -0\cdot 73 & -0\cdot 65 & 1\cdot 06 \\ 0\cdot 74 & 1\cdot 01 & 5\cdot 28 & -0\cdot 88 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6\cdot 7 & 1\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 3\cdot 1 & 9\cdot 4 & -1\cdot 5 \\ 2\cdot 1 & -1\cdot 5 & 8\cdot 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 4\cdot 17 & 3\cdot 62 & -1\cdot 68 & -2\cdot 26 \\ 3\cdot 21 & -0\cdot 86 & 2\cdot 42 & -3\cdot 20 \\ 2\cdot 38 & 1\cdot 95 & -3\cdot 27 & 1\cdot 58 \\ 1\cdot 44 & 2\cdot 95 & -2\cdot 14 & 1\cdot 86 \end{bmatrix}$

12.10 উত্তরমালা

(a) $\begin{bmatrix} 1\cdot 5714 & -2\cdot 0000 & 0\cdot 7143 \\ 0\cdot 2857 & 0 & -0\cdot 1428 \\ -0\cdot 7143 & 1\cdot 0000 & -0\cdot 1428 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0\cdot 0153 & -0\cdot 0286 & 0\cdot 1583 & 0\cdot 0242 \\ 0\cdot 2165 & -0\cdot 0284 & -0\cdot 0277 & 0\cdot 0191 \\ -0\cdot 0375 & 0\cdot 0381 & -0\cdot 0227 & 0\cdot 1788 \\ 0\cdot 0352 & 0\cdot 1748 & -0\cdot 0337 & -0\cdot 0212 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0\cdot 1792 & -0\cdot 0293 & -0\cdot 0522 \\ -0\cdot 0682 & 0\cdot 1206 & 0\cdot 0394 \\ -0\cdot 0570 & 0\cdot 0289 & 0\cdot 1391 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -0\cdot 1586 & 0\cdot 2986 & 0\cdot 2082 & 0\cdot 1441 \\ 0\cdot 1581 & -0\cdot 0848 & -0\cdot 3924 & 0\cdot 3796 \\ -0\cdot 1869 & 0\cdot 2703 & -0\cdot 3726 & 0\cdot 5544 \\ -0\cdot 3430 & 0\cdot 2143 & 0\cdot 0325 & 0\cdot 4619 \end{bmatrix}$

একক 13 ❑ ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান ও বিশিষ্ট ভেক্টর (Eigenvalues and Eigenvectors of Matrices)

গঠন

13.1 প্রস্তাবনা

এই এককে আমরা ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান ও বিশিষ্ট ভেক্টর নির্ণয় নিয়ে আলোচনা করব। যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $n \times n$ ক্রমের একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স, $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ একটি স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স এবং λ একটি ধ্রুবক হয়, তবে λ-এর যে কোন মানের জন্য $AX = \lambda X$ ভেক্টর সমীকরণের একটি সমাধান শূন্য ভেক্টর $X(= 0)$। এখন আমরা আলোচনা করব যে কোন অশূন্য ভেক্টর X এবং ধ্রুবক λ, $AX = \lambda X$-কে সিদ্ধ করবে কিনা? যদি সিদ্ধ করে তবে λ-এর মান এবং তার অনুসঙ্গী ভেক্টর X-এর মান নির্ণয় করব। বোঝার সুবিধার জন্য এখানে আমরা প্রথমে বীজগাণিতিক ও পরে সাংখ্যিক পদ্ধতির আলোচনা করব।

13.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করে আপনি

- কোন ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান ও অনুসঙ্গী বিশিষ্ট ভেক্টর সম্বন্ধে ধারণা করতে পারবেন।
- বীজগাণিতিক পদ্ধতি ও সাংখ্যিক পদ্ধতি দ্বারা কোন ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান ও বিশিষ্ট ভেক্টর নির্ণয় করতে পারবেন।

13.3 ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান, বিশিষ্ট ভেক্টর ও বৈশিষ্ট্য সমীকরণ

আমরা আলোচনার জন্য একটি ভেক্টর সমীকরণ

$$AX = \lambda X \qquad (13.1.1)$$

ধরলাম, যেখানে $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $n \times n$ ক্রমের একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স, যাকে বলা হয় সমীকরণের সহগ ম্যাট্রিক্স, এবং

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

একটি স্তম্ভ ভেক্টর এবং λ একটি ধ্রুবক।

এটা স্পষ্ট যে, λ-এর যে কোন মানের জন্য (13.1.1) ভেক্টর সমীকরণের শূন্য ভেক্টর $x = 0$ একটি সমাধান, এখন আমাদের বিচার্য্য বিষয়, অন্য কোন ভেক্টর $X(X \neq 0)$ এবং λ, সমীকরণ (13.1.1)-কে সিদ্ধ করতে পারে কিনা?

যদি I একটি $n \times n$ ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স হয়, তবে (13.1.2) ভেক্টর সমীকরণকে আমরা এইভাবে লিখতে পারি।

$$AX = I\lambda X = \lambda IX$$

$$\text{বা, } (A - \lambda I)X = 0 \qquad (13.1.2)$$

ম্যাট্রিক্স সমীকরণ (13.1.2), n অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একটি সমরৈখিক সমীকরণ সূচিত করে। যথা

$$\left.\begin{matrix} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{matrix}\right\} (13.1.3)$$

এখন (13.1.3) সমীকরণসমূহের শূন্য সমাধান ($X = 0$) ছাড়াও অন্য কোন সমাধান ($X \neq 0$) থাকতে পারে যদি সহগ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক অজ্ঞাত রাশির সংখ্যা থেকে কম হয়। এবং এটি তখনই সম্ভব যখন সহগ ম্যাট্রিক্স $A - \lambda I$ বিশিষ্ট (singular) হবে অর্থাৎ $|A - \lambda I| = 0$ হবে। অতএব আমাদের আলোচনায়, λ -এর যে সকল মান $|A - \lambda I| = 0$ কে সিদ্ধ করবে সেইসকল মানগুলির বিশেষ প্রয়োজনীয় কার্যকারিতা থাকবে।

সংজ্ঞা : যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, একটি $n\times n$ ক্রমের বর্গ ম্যাটিক্স ও λ একটি ধ্রুবক হয়, তবে

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn-\lambda} \end{vmatrix}$$

একটি n ঘাতবিশিষ্ট λ -এর বহুপদী রাশি (Polynomial) যাকে A -ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য বহুপদী রাশি (Characteristic Polynomial) বলা হয় এবং $| A - \lambda I] = 0$ এই সমীকরণকে বৈশিষ্ট্য সমীকরণ (Characteristic Equation) বলা হয়।

বৈশিষ্ট্য সমীকরণের মানগুলিকে A-র বিশিষ্ট মান (Eigenvalue বা Characteristic value) বলা হয়।

সমস্ত λ-এর মানগুলিকে A-ম্যাট্রিক্সের বর্ণালী (spectrum) বলা হয়। λ যদি A-ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান হয়, তবে অবশ্যই $|A - \lambda I| = 0$ হবে এবং তখন অবশ্যই একটি ভেক্টর পাওয়া যাবে $X(X \neq 0)$, যেখানে

$$(A - \lambda I)X = 0 \text{ অথবা } AX = \lambda IX = \lambda X$$

এবং তখন $X(X \neq 0)$-কে A-ম্যাট্রিক্সের λ আইগেন মানের সাপেক্ষে বিশিষ্ট ভেক্টর (Eigen-vector) বলা হয়।

13.4 উদাহরণ

উদাহরণ 1 : নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান ও বিশিষ্ট ভেক্টরগুলি নির্ণয় করুন।

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

সমাধান : A-ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য সমীকরণ $|A - \lambda I| = 0$

$$\text{অর্থাৎ, } \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

বা, $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 45\lambda = 0$

বা, $\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 15) = 0$

অতএব, A-ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মানগুলি **0, 3, 15**

মনে করি A-ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান 0 হলে তখন বিশিষ্ট ভেক্টর

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ (A - 0I)X_1 = 0$$

বা, $\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ বা, $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -6 & 7 & -4 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_1 \leftrightarrow R_3)$

বা, $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_2^1 - r_2 + 3r_1, R_3^1 = r_3 - 4r_1)$

বা, $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_3^1 = R_3 + 2R_2)$

সহগ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক দুই। অতএব $3 - 2 = 1$, একটি রৈখিকভাবে স্বাধীন (Linearly Independent) সমাধান আছে।

অতএব, $2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$

$$-5x_2 + 5x_3 = 0$$

$x_2 = k_1$ ধরলে, $x_3 = k_1$, $\therefore x_1 = \dfrac{k_1}{2}$

$\therefore$ বিশিষ্ট মান $\lambda = 0$-এর জন্য বিশিষ্ট ভেক্টর

$$\boldsymbol{X_1 = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{2} \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

মনে করি A ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান $\lambda = 3$ হলে তখন বিশিষ্ট ভেক্টর

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [A - 3I]X_2 = 0 \quad \text{বা} \quad \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{বা,} \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -6 & 4 & -4 \\ 5 & -6 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_1 \leftrightarrow R_3)$$

$$\text{বা,} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(R_1' = \frac{1}{2}R_1,\ R_2' = \frac{1}{2}R_2\right)$$

$$\text{বা,} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_2' = R_2 + 3R_1 \\ R_3' = R_3 - 5R_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{বা,} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_3' = R_3 + R_2)$$

সহগ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক দুই। অতএব $3 - 2 = 1$, একটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান থাকবে।

$\therefore\ x_1 - 2x_2 = 0$

$2x_2 + x_3 = 0$

$x_3 = k_2,\ x_2 = -\dfrac{k_2}{2},\ x_1 = -k_2$

$\therefore$ বিশিষ্ট মান $\lambda = 3$ হলে বিশিষ্ট ভেক্টর

$$\boldsymbol{X_2} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{k_2} \\ -\dfrac{\boldsymbol{k_2}}{\boldsymbol{2}} \\ \boldsymbol{k_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{k_2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{-1} \\ -\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

বিশিষ্ট মান $\lambda = 15$ হলে

$$(A - 15I)X_3 = 0 \quad \text{বা,} \begin{bmatrix} -7 & -6 & 2 \\ -6 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{বা,} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -12 \\ -6 & -8 & -4 \\ -7 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_1 \leftrightarrow R_3)$$

$$\text{বা,} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & -4 & -2 \\ -7 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(R_1' = \frac{R_1}{2},\ R_2' = \frac{R_2}{2} \right)$$

$$\text{বা,} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & -10 & -20 \\ 0 & 20 & 40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} R_2' = R_2 + 3R_1 \\ R_3' = R_3 + 7R_1 \end{matrix} \right)$$

$$\text{বা,} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(R_2' = \frac{R_2}{10}, R_3' \frac{R_3}{20} \right)$$

$$\text{বা,} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_3' = R_3 + R_2)$$

সহগ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক দুই। অতএব $3 - 2 = 1$, একটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান থাকবে

অতএব, $x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0$

$x_2 + 2x_3 = 0$

$x_3 = k_3$ ধরলে, $x_2 = -2k_3$, $x_1 = 2k_3$

$$\therefore X_3 = \begin{bmatrix} 2k_3 \\ -2k_3 \\ k_3 \end{bmatrix} = k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

উদাহরণ 2 : নিম্নে বর্ণিত ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান ও বিশিষ্ট ভেক্টরগুলি নির্ণয় করুন।

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

সমাধান : A-ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য সমীকরণ $A - \lambda I = 0$

অতএব $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ বা, $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 2-\lambda \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \; (C_3' = C_3 + C_2)$

বা, $(2-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ বা, $(2-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; (C_2' = C_2 - C_3)$

বা, $(2 - \lambda)\,[(6 - \lambda)\,(4 - \lambda) - 8] = 0$ বা, $(2 - \lambda)\,[24 - 6\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 8] = 0$

বা, $(2 - \lambda)\,(\lambda^2 - 10\lambda + 16) = 0$ বা, $(2 + \lambda)\,(\lambda - 2)\,(\lambda - 8) = 0$

অতএব A ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মানগুলি **2, 2, 8**

A-ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান 8 ধরে, যদি

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

বিশিষ্ট ভেক্টর হয়, তবে

$$(A - 8I)X_1 = 0$$

বা, $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ বা, $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(R_1' = \frac{1}{2} R_1\right)$

বা, $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} R_2' = R_2 - 2R_1 \\ R_3' = R_3 + 2R \end{pmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_3' = R_3 - R_2)$

সহগ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক দুই। অতএব $3 - 2 = 1$, একটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান থাকবে।

অতএব, $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$-x_2 - x_3 = 0$

$x_3 = k_1$ ধরলে $x_2 = -k_1$, $x_1 = 2k_1$

$$\therefore \boldsymbol{X_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{2k_1} \\ \boldsymbol{-k_1} \\ \boldsymbol{k_1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{k_1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

A-ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান $\lambda = 2$ ধরলে, X_2 যদি বিশিষ্ট ভেক্টর হয়, তবে $[A - 2I]\, X_2 = 0$

বা, $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ বা, $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_3' = R_3 + R_2)$

বা, $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_2' = R_2 + 2R_1)$

এখানে সহগ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক এক, অতএব সমীকরণগুলির দুটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান থাকবে।

সমীকরণটি $-2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$x_3 = 0,\ x_1 = k_2,\ x_2 = 2k_2$ বা, $x_2 = 0,\ x_3 = 2k_3,\ x_1 = -k_3$

$\therefore$ আইগেন-সদিক রাশিগুলি

$$\boldsymbol{X_2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k_2} \\ \boldsymbol{2k_2} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{k_2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \text{ এবং } \boldsymbol{X_3} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-k_3} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{2k_3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{k_3}\begin{bmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{2} \end{bmatrix}$$

উদাহরণ 3 : নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির বিশিষ্ট মান ও বিশিষ্ট ভেক্টরগুলি নির্ণয় করুন।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

সমাধান : A-ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য সমীকরণ $|A - \lambda I| = 0$

বা, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ বা, $(1 - \lambda)\ [(1 - \lambda)^2 - 1] - [1 - \lambda - 1] + [1-1+\lambda] = 0$

বা, $(1 - \lambda)\ [1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1] + 2\lambda = 0$ বা, $(1 - \lambda)\ [\lambda(\lambda - 2)] + 2\lambda = 0$

বা, $\lambda[(1-\lambda)(\lambda-2)+2] = 0$ বা, $\lambda[\lambda - 2 - \lambda^2 + 2\lambda + 2] = 0$

বা, $\lambda^2(\lambda - 3) = 0 \qquad \therefore\ \lambda = 0,\ 0,\ 3$

অতএব, বিশিষ্ট মানগুলি $\lambda = \mathbf{0,\ 0,\ 3}$

A-ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান $\lambda = 3$ এর জন্য যদি X_1 বিশিষ্ট ভেক্টর হয়, তবে

$(A - 3I)X_1 = 0$

বা, $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ বা, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_1 \leftrightarrow R_3)$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_2' = R_2 - R_1 \\ R_3' = R_3 + 2R_1 \end{pmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_3' = R_3 + R_2)$

সমীকরণগুলি $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

$-3x_2 + 3x_3 = 0$

$x_3 = k_1$ ধরলে, $x_2 = k_1 \quad \therefore \; x_1 = k_1$

$\therefore$ বিশিষ্ট ভেক্টর

$$X_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A-ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট মান $\lambda = 0$ এর জন্য, যদি X_2 বিশিষ্ট ভেক্টর হয়, তবে

$| A - 0I]X_2 = 0$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ বা, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

সহগ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক এক, অতএব $3 - 1 = 2$টি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান থাকবে।

সমীকরণটি $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_3 = 0$, $x_2 = k_2$ ধরলে $x_1 = -k_2$

বা, $x_2 = 0$, $x_3 = k_3$ ধরলে $x_1 = -k_3$

$\therefore$ বিশিষ্ট ভেক্টরগুলি

$$X_2 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ k_2 \\ 0 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} -k_3 \\ 0 \\ k_3 \end{bmatrix} = k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

অতএব বিশিষ্ট ভেক্টরগুলি

$$\boldsymbol{X_1 = k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, X_2 = k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, X_3 = k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}$$

উদাহরণ 4 : প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স থেকে তার বিশিষ্ট মান ও বিশিষ্ট ভেক্টরসমূহ নির্ণয় করুন।

$$A = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\1 & 5 & 1\\1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

সমাধান : A-ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য সমীকরণ $|A - \lambda I| = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 1\\1 & 3-\lambda & 1\\1 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = 0 \text{ বা, } \begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 1\\0 & 4-\lambda & 1\\-(2-\lambda) & -(2-\lambda) & (3-\lambda)\end{vmatrix} = 0 \begin{pmatrix}R_1' = R_1 - R_3\\R_2' = R_2 - R_3\end{pmatrix}$$

$$\text{বা, } (2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 4-\lambda & 1\\-1 & -(2-\lambda) & 3-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\text{বা, } (2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 4-\lambda & 1\\0 & -(2-\lambda) & 4-\lambda\end{vmatrix} = 0 \ (R_3' = R_3 + R_1)$$

বা, $[(4 - \lambda)^2 + (2 - \lambda)]\ (2 - \lambda) = 0$

বা, $[16 - 8\lambda + \lambda^2 + 2 - \lambda]\ (2 - \lambda) = 0$ বা, $(2 - \lambda)\ (\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$

বা, $(2 - \lambda)\ (\lambda - 3)\ (\lambda - 6) = 0$

$\therefore$ বিশিষ্ট মানগুলি $\lambda = \mathbf{2, 3, 6}$

মনে করি A-ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট ভেক্টর X_1, যখন বিশিষ্ট মান $\lambda = 2$

$$\therefore [A - 2I]X_1 = 0 \quad \text{বা, } \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_2' = R_2 - R_1 \\ R_3' = R_3 - R_1 \end{pmatrix}$

সহগ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক দুই, অতএব $3 - 2 = 1$, একটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান থাকবে।

সমীকরণগুলি $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$2x_2 = 0$$

$x_3 = k_1,\ x_2 = 0,\ x_1 = -k_1$ একটি সমাধান।

$\therefore\ \lambda = 2$ এর জন্য বিশিষ্ট ভেক্টর

$$\boldsymbol{X_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-k_1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{k_1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{k_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

ধরি, A-ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট ভেক্টর X_2, যখন বিশিষ্ট মান $\lambda = 3$

$\therefore\ [A - 3I]X_2 = 0$ বা, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_1 \leftrightarrow R_3)$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_2' = R_2 - R_1)$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_3' = R_3 - R_2)$

সহগ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক দুই, অতএব $3 - 2 = 1$, একটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান থাকবে।

সমীকরণগুলি $\quad x_1 + x_2 = 0$

$$x_2 + x_3 = 0$$

$x_3 = k_2$ ধরলে $x_2 = -k_2 \quad \therefore x_1 = k_2$

$\therefore \lambda = 3$ এর জন্য বিশিষ্ট ভেক্টর

$$\boldsymbol{X_2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k_2} \\ -\boldsymbol{k_2} \\ \boldsymbol{k_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{k_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

মনে করি A ম্যাট্রিক্সের বিশিষ্ট ভেক্টর X_3, যখন বিশিষ্ট মান $\lambda = 6$

অতএব $[A - 6I]\ X_3 = 0$

$$\text{বা, } \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{বা, } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_1 \leftrightarrow R_3)$$

$$\text{বা, } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_2' = R_2 - R_1 \\ R_3' = R_3 + R_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{বা, } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (R_3' = R_3 + 2R_2)$$

সহগ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক দুই, অতএব $3 - 2 = 1$, একটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান থাকবে?

সমীকরণগুলি $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$

$$-2x_2 + 4x_3 = 0$$

$\therefore \quad x_3 = k_3, x_2 = 2k_3, x_1 = k_3$

অতএব $\lambda = 6$ এর জন্য বিশিষ্ট ভেক্টর

$$\boldsymbol{X_3} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k_3} \\ \boldsymbol{2k_3} \\ \boldsymbol{k_3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{k_3}\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

13.5 পৌনঃপুনিক পদ্ধতি দ্বারা বিশিষ্ট মান ও বিশিষ্ট ভেক্টরের সাংখ্যিক মূল্যায়ন

এই পৌনঃপুনিক পদ্ধতিটি আমরা কয়েকটি উদাহরণ সহকারে আলোচনা করব। তাত্ত্বিক বিশ্লেষণে জানা যায় যে এই পদ্ধতিতে কেবল সাংখ্যিকভাবে বৃহত্তম বিশিষ্ট মানই পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1 : পৌনঃপুনিক পদ্ধতি দ্বারা নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির বৃহত্তম বিশিষ্ট মান এবং তার অনুসঙ্গী বিশিষ্ট ভেক্টর নির্ণয় করুন।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 16 & 36 \end{bmatrix}$$

সমাধান : ইচ্ছানুরূপ একটি প্রারম্ভিক ভেক্টর নিন

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

অতএব $AX^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 16 & 36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 36 \end{bmatrix} = 36\begin{bmatrix} 0{\cdot}1667 \\ 0{\cdot}4167 \\ 1{\cdot}0 \end{bmatrix} = 36\,\left[X^{(1)}\right]$

লক্ষ্য করুন নিচে দাগ দেওয়া উপাদান হল স্তম্ভের সাংখ্যিকভাবে বৃহত্তম উপাদান যা দিয়ে স্তম্ভকে ভাগ করা হয়েছে পরের ধাপে।

$$\text{এখন } A \cdot X^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 16 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{\cdot}1667 \\ 0{\cdot}4167 \\ 1{\cdot}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{\cdot}00 \\ 19{\cdot}25 \\ \underline{43{\cdot}33} \end{bmatrix} = 43{\cdot}33 \begin{bmatrix} 0{\cdot}1846 \\ 0{\cdot}4443 \\ 1{\cdot}0 \end{bmatrix} = 43{\cdot}33\left[X^{(2)}\right]$$

$$A \cdot X^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 16 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{\cdot}1846 \\ 0{\cdot}4443 \\ 1{\cdot}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{\cdot}15 \\ 19{\cdot}25 \\ \underline{43{\cdot}85} \end{bmatrix} = 43{\cdot}85 \begin{bmatrix} 0{\cdot}1859 \\ 0{\cdot}4358 \\ 1{\cdot}0 \end{bmatrix} = 43{\cdot}85\left[X^{(3)}\right]$$

$$A \cdot X^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 16 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{\cdot}1859 \\ 0{\cdot}4358 \\ 1{\cdot}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{\cdot}16 \\ 19{\cdot}57 \\ \underline{43{\cdot}88} \end{bmatrix} = 43{\cdot}88 \begin{bmatrix} 0{\cdot}1860 \\ 0{\cdot}4460 \\ 1{\cdot}0 \end{bmatrix} = 43{\cdot}88\left[X^{(4)}\right]$$

$$A \cdot X^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 16 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{\cdot}1860 \\ 0{\cdot}4460 \\ 1{\cdot}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{\cdot}16 \\ 19{\cdot}57 \\ \underline{43{\cdot}88} \end{bmatrix} = 43{\cdot}88 \begin{bmatrix} 0{\cdot}1860 \\ 0{\cdot}4460 \\ 1{\cdot}0 \end{bmatrix} = 43{\cdot}88\left[X^{(5)}\right]$$

এই পর্যায়ে আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি যে বৃহত্তম বিশিষ্ট মানটি 43·88 এবং তার অনুসঙ্গী বিশিষ্ট ভেক্টর হল

$$\begin{bmatrix} 0 \cdot 1860 \\ 0 \cdot 4460 \\ 1 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

উপরের গণনাকে এখন আমরা সারণি পদ্ধতিতে লিখতে পারি।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 16 & 36 \end{bmatrix}$$

মনে করুন প্রারম্ভিক ভেক্টর $X^{(0)} = [0,\ 0,\ 1]$

সারণি 13.5.1

	λx_1	λx_2	λx_3	λ	x_1	x_2	x_3
0	6	15	36	36	0·1667	0·4167	1·0000
1	8·0002	19·2504	43·3340	43·334	0·1846	0·4442	1·0000
2	8·1460	19·5516	43·8456	43·8456	0·1858	0·4459	1·0000
3	8·1552	19·5705	43·8776	43·8776	0·1859	0·4460	1·0000
4	8·1558	19·5717	43·8796	43·8796	0·1859	0·4460	1·0000

অতএব বৃহত্তম বিশিষ্ট মান $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{43{\cdot}88}$ এবং বিশিষ্ট ভেক্টরটি হল

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0 \cdot 1859} \\ \mathbf{0 \cdot 4460} \\ \mathbf{1 \cdot 0000} \end{bmatrix}$$

উদাহরণ 2 : নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির বৃহত্তম বিশিষ্ট মান ও তার অনুসঙ্গী বিশিষ্ট ভেক্টর নির্ণয় করুন, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 8 \\ 10 & 5 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

সমাধান : মনে করুন

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 8 \\ 10 & 5 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

এবং প্রারম্ভিক বিশিষ্ট ভেক্টর

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

সারণি **13.5.2**

n	λx_1	λx_2	λx_3	λ	x_1	x_2	x_3
1	9	10	8	10	0·9	1·0	0·8
2	24·5	13·2	8·6	24·5	1·0	0·53	0·35
3	17·1	12·3	8·82	17·1	1·0	0·72	0·50
4	20·2	13·1	8·78	20·2	1·0	0·65	0·43
5	18·94	12·82	8·64	18·94	1·0	0·68	0·46
6	19·48	12·94	8·70	19·48	1·0	0·663	0·447
7	19·21	12·87	8·68	19·21	1·0	0·670	0·452
8	19·316	12·898	8·686	19·316	1·0	0·6677	0·4497
9	19·2746	12·8888	8·6814	19·2746	1·0	0·66869	0·45041
10	19·2902	12·8930	8·6825	19·2902	1·0	0·66837	0·45010
11	19·2845	12·89175	8·68193	19·2845	1·0	0·66850	0·45020
12	19·2866	12·89230	8·68210	19·2866	1·0	0·66846	0·45016
13	19·2859	12·89214	8·68202	19·2859	1·0	0·66847	0·45017

অতএব বৃহত্তম বিশিষ্ট মান $\boldsymbol{\lambda}$ **= 19·28** এবং তার অনুসঙ্গী ভেক্টর হল **[1,0·6685, 0·4502]**

উদাহরণ 3 : নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির বৃহত্তম বিশিষ্ট মান এবং তার অনুসঙ্গী বিশিষ্ট ভেক্টর নির্ণয় করুন, পাঁচ সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$\begin{bmatrix} 1\cdot25 & 2\cdot31 & 1\cdot09 & 2\cdot56 \\ 2\cdot31 & 3\cdot87 & 4\cdot21 & 5\cdot23 \\ 1\cdot09 & 4\cdot21 & 2\cdot23 & 2\cdot28 \\ 2\cdot56 & 5\cdot23 & 2\cdot28 & 4\cdot34 \end{bmatrix}$$

সমাধান : মনে করুন

$$A = \begin{bmatrix} 1\cdot25 & 2\cdot31 & 1\cdot09 & 2\cdot56 \\ 2\cdot31 & 3\cdot87 & 4\cdot21 & 5\cdot23 \\ 1\cdot09 & 4\cdot21 & 2\cdot23 & 2\cdot28 \\ 2\cdot56 & 5\cdot23 & 2\cdot28 & 4\cdot34 \end{bmatrix}$$

এবং প্রারম্ভিক ভেক্টর $X^{(0)} = (1, 0, 0, 0)'$

সারণি 13.5.3

n	λx_1	λx_2	λx_3	λx_4	λ	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1·25	2·31	1·09	2·56	2·56	0·49	0·90	0·42	1·00
2	5·718867	11·642538	7·560586	11·280039	11·642538	0·491	1·00	0·65	0·97
3	6·115450	12·813810	8·406290	12·178760	12·81381	0·477	1·00	0·656	0·95
4	6·057040	12·709060	8·362080	12·07748	12·70906	0·4766	1·00	0·6579	0·9503
5	6·055630	12·710770	8·363300	12·07441	12·71077	0·47642	1·00	0·657970	0·9499
6	6·054456	12·708559	8·362342	12·072372	12·708559	0·476408	1·00	0·658009	0·949940
7	6·054587	12·708908	8·362508	12·072605	12·708908	0·476405	1·00000	0·658004	0·949932

অতএব বৃহত্তম বিশিষ্ট মান $\boldsymbol{\lambda}$ **= 12·709** এবং তার অনুসঙ্গী বিশিষ্ট ভেক্টর হল **[0·47640, 1·00000, 0·65800, 0·94993]**

13.6 অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সগুলির বিশিষ্ট মান নির্ণয় করুন।

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} a & h & g \\ o & b & o \\ o & c & c \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সগুলির বিশিষ্ট মান ও বিশিষ্ট ভেক্টরগুলির নির্ণয় করুন।

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

3. নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির বৃহত্তম বিশিষ্ট মান নির্ণয় করুন।

(a) $\begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

(*b*) $\begin{bmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

13.7 উত্তরমালা

1. (a) (1, 2, 3), (b) (1, 1, 3), (c) $\left(-1, \frac{-1 \pm 5}{2}\right)$, (d) (a, b, c)

   (e) $\left(2, -1, -1 \pm \sqrt{3}\right)$

2. (a) (8, –1, –1) ; $k_1\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}, k_2\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}, k_3\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

   (b) (3, 2, 6) ; $k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, k_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, k_3\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

   (c) (5, –3, –3) ; $k_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, k_2\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}, k_3\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$

   (d) (1, –2, 4) ; $k_1\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}, k_2\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}, k_3\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$

   (e) (0, 3), $k_1\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{bmatrix}, k_2\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{2}{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$

3. (a) 98·522 (b) 9 (c) 11·66

একক 14 ❑ রৈখিক সমীকরণসমূহের সাংখ্যিক সমাধান–I (Solution of Systems of Linear Equations—I)

গঠন

14.1 প্রস্তাবনা

এই এককে আমরা n-সংখ্যক অজ্ঞাত রাশির n-সংখ্যক রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধান নির্ণয় করার পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব।

আমরা ধরি রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটি এইরকম :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (14{\cdot}1{\cdot}1)$$

যেখানে সহগ $a_{ij}(i, j = 1,2,\cdots n)$ এবং $b_i(i = 1,2,\cdots,n)$ সবই ধ্রুবক।

যদি $b_i = 0 (i = 1,2,\cdots,n)$ হয়, তবে উপরের রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটিকে সমঘাত (Homogeneous) বলা হয়, অন্যথায় একে অসমঘাত (non-homogeneous) বলা হয়।

উপরের রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটিকে (14·1·1), আমরা সংক্ষিপ্ত আকারে ম্যাট্রিক্স দ্বারা উপস্থাপন করতে পারি যেমন

$$AX = b \tag{14·1·2}$$

যেমন

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

কে সহগ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ কে ডানপক্ষ ভেক্টর বলা হয় যেগুলি আমাদের জানা।

এবং $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ কে সমাধান ভেক্টর বলা হয় যা নির্ণয় করতে হবে।

যদি সহগ ম্যাট্রিক্সের কর্ণ বরাবর উপাদানগুলি যথা $a_{11}, a_{22,} a_{33}, \cdots, a_{nn}$ নিম্নলিখিত শর্তগুলিকে সিদ্ধ করে।

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1,2,3,\ldots.,n) \tag{14·1·3}$$

বা, $|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|$

$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}|$$

$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{33}| + \cdots + |a_{3n}|$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

$$|a_{nn}| > |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn-1}|$$

তখন (14·1·1) বা (14·1·2) সমীকরণতন্ত্রটিকে কঠোরভাবে কর্ণ আধিপত্যযুক্ত (Strictly Diagonally Dominant) বলা হয়।

(14·1·1) বা (14·1·2) সমীকরণতন্ত্রটির সমাধান বলতে কী বুঝি একগুচ্ছ অজ্ঞাত রাশির মান যেগুলি রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটিকে সিদ্ধ করে।

আমরা জানি যে (14·1·1) বা (14·1·2) তে বর্ণিত রৈখিক সমীকরণতন্ত্রটির সমাধান থাকে, যদি র‍্যাঙ্ক $[A]$ = র‍্যাঙ্ক $[A, b]$।

যদি সমাধান থাকে, তবে সমীকরণতন্ত্রটির সমাধানের প্রকৃতি নিম্নলিখিতভাবে হবে :

(i) যদি A^{-1} বিদ্যমান হয় তথা $|A| \neq 0$ এবং $b \neq 0$, এবং র‍্যাঙ্ক $[A]$ = র‍্যাঙ্ক $[A, b] = n$ হয়, তবে সমীকরণতন্ত্রটির একটিমাত্র সমাধান থাকবে।

(ii) যদি A^{-1} বিদ্যমান হয় তথা $|A| \neq 0$ এবং $b \neq 0$ হয় এবং র‍্যাঙ্ক $[A]$ = র‍্যাঙ্ক $[A, b] = n$ হয়, তবে সমীকরণতন্ত্রটির একটি মাত্র শূন্য সমাধান $X = 0$ (Trival Solution) থাকবে।

(iii) যদি A^{-1} বিদ্যমান না হয় তথা $|A| = 0$ এবং $b \neq 0$, এবং র‍্যাঙ্ক $[A]$ = র‍্যাঙ্ক $[A, b] < n$ হয়, তবে সমীকরণতন্ত্রটির অসীম সংখ্যক সমাধান থাকবে।

(iv) যদি A^{-1} বিদ্যমান না হয় তবে $|A| = 0$ এবং $b = 0$, এবং র‍্যাঙ্ক $[A]$ = র‍্যাঙ্ক $[A, b] < n$ হয়, তবে সমীকরণতন্ত্রটির একটি শূন্য সমাধান (Trival Solution) ছাড়াও অসীম সংখ্যক সমাধান থাকবে।

14.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করে আপনি

- গাউস ও গাউস-জর্ডন পদ্ধতির দ্বারা রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

14.3 গাউসের অপনয়ন পদ্ধতি (Gauss Elimination Method)

এটা রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করার পুরোনো, সহজ ও প্রত্যক্ষ পদ্ধতি এবং অজ্ঞাত রাশির পরপর অপনয়নের উপর নির্ভরশীল। আমরা এখানে তিন অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট তিনটি রৈখিক সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি আলোচনা করব যেগুলি n অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট n সংখ্যক রৈখিক সমীকরণের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

ধরি তিন অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট ও তিনটি রৈখিক সমীকরণ একইরকম

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= b_3^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{14.3.1}$$

যখন $a_{ij}^{(1)}(i\,;j = 1,2,3)$ এবং $b_i^{(1)}(i = 1,2,3)$ সকলেই জ্ঞাত রাশি।

মনে করি $a_{11}^{(1)} \neq 0$, $(14 \cdot 2 \cdot 1)$-এর প্রথম সমীকরণকে পরপর $-\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ এবং $-\dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ দ্বারা গুণ করে, যথাক্রমে দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণের সঙ্গে যোগ করলে, আমরা রৈখিক সমীকরণতন্ত্র (14·3·1) কে নিম্নলিখিতভাবে পাই

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= b_2^{(2)} \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 &= b_3^{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{14·3·2}$$

যখন $a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - \dfrac{a_{12}^{(1)} \cdot a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - \dfrac{a_{13}^{(1)} . a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - \dfrac{b_1^{(1)} \cdot a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - \frac{a_{12}^{(1)} \cdot a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \frac{a_{13}^{(1)} \cdot a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \frac{b_1^{(1)} \cdot a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

এখন মনে করি, $a_{33}^{(2)} \neq 0$, (14·2·2) এর দ্বিতীয় সমীকরণকে $-\dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ দ্বারা গুণ করে তৃতীয় সমীকরণের সঙ্গে যোগ করলে রৈখিক সমীকরণতন্ত্র (14·2·2) কে নিম্নলিখিতভাবে পাই।

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 &= b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(2)} x_3 &= b_3^{(2)} \end{aligned}\right\} \qquad (14{\cdot}3{\cdot}3)$$

যেখানে $a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - \dfrac{a_{23}^{(2)} \cdot a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$

এখানে $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, a_{33}^{(3)}$ রাশিগুলিকে কীলক (Pivot) সহগ বলা হয়। উপরোক্ত সমীকরণগুলিকে কীলক সমীকরণ (Pivotal Equations) বলা হয়। এখন যথাক্রমে x_3, x_2 এবং x_1-এর মান তৃতীয়, দ্বিতীয় ও প্রথম সমীকরণ থেকে পাওয়া যাবে।

14.4 উদাহরণ

উদাহরণ 1 : গাউস অপনয়ন পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করুন, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

সমাধান : প্রক্রিয়া 1

প্রথমে অজ্ঞাত রাশি x_1 কে দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণ থেকে অপনয়ন করার জন্য প্রথম সমীকরণকে পরপর $-\frac{1}{2}\left(=-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}=m_{21}\right)$ এবং $-\frac{3}{2}\left(=-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}=m_{31}\right)$ দ্বারা গুণ করে যথাক্রমে দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণের সঙ্গো যোগ করে পাই

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3 &= 9 \\ 0\cdot 5x_2+2\cdot 5x_3 &= 1\cdot 5 \\ -3\cdot 5x_2+0\cdot 5x_3 &= -5\cdot 5 \end{aligned}\right\} \qquad (14\cdot 4\cdot 1)$$

এখন তৃতীয় সমীকরণ থেকে x_2 অপনয়ন করার জন্য, দ্বিতীয় সমীকরণকে $-\frac{-3\cdot 5}{0\cdot 5}\left(=-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}=m_{32}\right)$ দ্বারা গুণ করে তৃতীয় সমীকরণের যোগ করে পাই

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3 &= 9 \\ 0\cdot 5x_2+2\cdot 5x_3 &= 1\cdot 5 \\ 18x_3 &= 5\cdot 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14\cdot 4\cdot 2)$$

(14.4.2) হল কীলক সমীকরণসমূহ।

$$\therefore \qquad x_3=\frac{5\cdot 0}{18}=0\cdot 2778$$

$$x_2=\frac{1\cdot 5-2\cdot 5\times 0\cdot 2778}{0\cdot 5}=1\cdot 611$$

$$x_1=\frac{9-3\times 1\cdot 611-0\cdot 2778}{2}=1\cdot 945$$

$\therefore$ তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ $\boldsymbol{x_1=1\cdot 94,\ x_2=1\cdot 61,\ x_3=0\cdot 278}$

প্রক্রিয়া 2 : [সংক্ষিপ্ত আকারে গণনার প্রক্রিয়া]

পদ	m_{ij}	x_1	x_2	x_3	b	$c = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} + b_i (i = 1,2,3)$
I		$\boxed{2}$	3	1	9	15 (= 2 + 3 + 1 + 9)
	$m_{21} = -\frac{1}{2} = -0\cdot 5$	1	2	3	6	12 (= 1 + 2 + 3 + 6)
	$m_{31} = -\frac{3}{2} = -1\cdot 5$	3	1	2	8	14 (= 3 + 1 + 2 + 8)
II			$\boxed{0\cdot5}$	2·5	1·5	4·5 (= −0·5 × 15 + 12 = 0·5 + 2·5 + 1·5)
	$m_{32} = -\frac{-3\cdot5}{0\cdot5} = 7$		−3·5	0·5	−5·5	−8·5 (= −1·5 × 15 + 14 = −3·5 + 0·5 − 5·5)
III				18	5·0	23(= 7 × 4·5 − 8·5 = 18 + 5·0)

∴ কীলক সমীকরণগুলি

$$\begin{aligned} 18x_3 &= 5\cdot0 \\ 0\cdot5x_2 + 2\cdot5x_3 &= 1\cdot5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_3 = \frac{5\cdot0}{18} = 0\cdot2778$$

$$x_2 = \frac{1\cdot5 - 2\cdot5 \times 0\cdot2778}{0\cdot5} = 1\cdot611$$

$$x_1 = \frac{9 - 3 \times 1\cdot611 - 0\cdot2778}{2} = 1\cdot945$$

∴ তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ অজ্ঞাত রাশিগুলির মান

$$\mathbf{x_1 = 1\cdot94,\ x_2 = 1\cdot61,\ x_3 = 0\cdot278}$$

উদাহরণ 2 : গাউস অপনয়ন পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করুন, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 5 \\ 2x - y + z &= -1 \\ x + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

সমাধান : x অজ্ঞাত রাশিকে দ্বিতীয় এবং তৃতীয় সমীকরণ হতে অপনয়ন করার জন্য প্রথম সমীকরণকে পরপর $-\frac{2}{1}\left(=-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}=m_{21}\right)$ এবং $-\frac{1}{1}\left(=-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}=m_{31}\right)$ দ্বারা গুণ করে যথাক্রমে দ্বিতীয় এবং তৃতীয় সমীকরণের সঙ্গে যোগ করে পাই

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 5 \\ -7y - 3z &= -11 \\ -y + z &= -3 \end{aligned} \qquad (14{\cdot}4{\cdot}3)$$

এখন তৃতীয় সমীকরণ থেকে y-কে অপনয়ন করার জন্য, দ্বিতীয় সমীকরণকে $-\frac{-1}{-7}\left(=-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(2)}}=m_{32}\right)$ দ্বারা গুণ করে তৃতীয় সমীকরণের সঙ্গে যোগ করে পাই

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 5 \\ 7y - 3z &= -11 \\ 1{\cdot}4286z &= -1{\cdot}4286 \end{aligned}$$

$\therefore \quad z = -1, y = \frac{-11+3(-1)}{-7} = \frac{14}{7} = 2, x = 5 - 3\times 2 - 2\times(-1) = 1$

$\therefore \quad \mathbf{x = 1,\ y = 2,\ z = -1}$

প্রক্রিয়া 2 : [সংক্ষিপ্ত আকারে গণনার প্রক্রিয়া]

m_{ij}	x	y	z	b	$c = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} + b_i (i = 1,2,3)$
	$\boxed{1}$	3	2	5	11 (= 1 + 3 + 2 + 5)
$m_{21} = -\frac{1}{2} = -2$	2	−1	1	−1	1 (= 2 − 1 + 1 − 1)
$m_{31} = -\frac{1}{1} = -1$	1	2	3	2	8 (= 1 + 2 + 3 + 2)
		$\boxed{-7}$	−3	−11	−21 (= −2 × 11 + 1 = −7 − 3 − 11)
$m_{32} = -\frac{-1}{-7} = -7$		−1	1	−3	−3 (= −1 × 11 + 8 = −1 +1 −3)
			1·4286	−1·4286	$0\left(=-\frac{1}{7}\times(-21)-3\right)$ = 1·4286 − 1·4286

$\therefore$ কীলক সমীকরণগুলি

$$1{\cdot}4286z = -1{\cdot}4286$$
$$-7y - 3z = -11$$
$$x + 3y + 2z = 5$$

$\therefore$ $z = -1, y = \dfrac{-11+3z}{-7} = \dfrac{-11-3}{-7} = 2, x = 5 - 3\cdot 2 - 2(-1) = 1$

$\boldsymbol{x = 1{\cdot}00,\ \ y = 2{\cdot}00,\ z = -1{\cdot}00}$ তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 3 : গাউস অপনয়ন পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করুন। চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$x + 2y + 3z = 10$$
$$x + 3y - 2z = 7$$
$$2x - y + z = 5$$

সমাধান : প্রক্রিয়া—1

অজ্ঞাত রাশি x কে দ্বিতীয় এবং তৃতীয় সমীকরণ থেকে অপনয়নের জন্য প্রথম সমীকরণকে -1 এবং -2 দ্বারা গুণ করে যথাক্রমে দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণের সঙ্গে যোগ করে পাই

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 10 \\ y - 5z &= -3 \\ -5y - 5z &= -15 \end{aligned} \qquad (14{\cdot}4{\cdot}4)$$

অজ্ঞাত রাশি y কে তৃতীয় সমীকরণ হতে অপনয়নের জন্য দ্বিতীয় সমীকরণকে 5 দ্বারা গুণ করে তৃতীয় সমীকরণের সঙ্গে যোগ করে পাই

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 10 \\ y - 5z &= -3 \\ -30z &= -30 \end{aligned}\right\} \qquad (14{\cdot}3{\cdot}5)$$

$\therefore$ $z = 1,\ y = 2,\ x = 10 - 3 - 4 = 3$

$\therefore$ **x = 3·000, y = 2·000, z = 1·000** [চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।]

প্রক্রিয়া 2 : [সংক্ষিপ্ত আকারে গণনার প্রক্রিয়া]

m_{ij}	x	y	z	b	$c = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} + b_i (i = 1,2,3)$
	$\boxed{1}$	2	3	10	16
$m_{21} = -\frac{1}{1} = -1$	1	3	–2	7	9
$m_{31} = -\frac{2}{1} = -2$	2	–1	1	5	7
		$\boxed{1}$	–5	–3	–7
$m_{32} = -\frac{-5}{1} = -5$		–5	–5	–15	–25
			$\boxed{-30}$	–30	–60

$\therefore$ কীলক সমীকরণগুলি

$$\begin{aligned} -30z &= -30 \\ y - 5z &= -3 \\ x + 2y + 3z &= 10 \end{aligned}$$

$\therefore$ $z = 1, \; y = -3 + 5 \cdot 1 = 2, \; z = 3$

$\therefore$ $\mathbf{z = 3{\cdot}000, \; y = 2{\cdot}000, \; z = 1{\cdot}000,}$ চার সার্থক সংখ্যা পর্যন্ত শুদ্ধ।

14.5 জর্ডন বা গাউস-জর্ডন অপনয়ন পদ্ধতি

জর্ডন বা গাউস-জর্ডন অপনয়ন পদ্ধতি প্রায় গাউস-অপনয়ন পদ্ধতির অনুরূপ। তিনি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট তিনটি রৈখিক সমীকরণের সমাধান 14·3 তে আলোচনা করেছি। এটা n-সংখ্যক অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট n-সংখ্যক রৈখিক সমীকরণের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। এখানে দ্বিতীয় এবং তৃতীয় সমীকরণ থেকে x_1-কে অপনয়ন করা হয়। পরবর্তী অংশে x_2 কে তৃতীয় সমীকরণ থেকে অপনয়ন করা হয়। এখানে প্রথমে x_1-এর সহগকে কীলক সহগ (Pivot Coefficient) এবং পরবর্তী ধাপে x_2-এর সহগকে কীলক সহগ ধরা হয়।

জর্ডন বা গাউস-জর্ডন অপনয়ন পদ্ধতিতে x_1-এর সহগকে কীলক সহগ ধরে x_1 কে দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণ থেকে অপনয়ন করা হয়। পরবর্তী অংশে x_2-এর সহগকে কীলক সহগ ধরে প্রথম ও তৃতীয় সমীকরণ থেকে x_2-কে অপনয়ন করা হয়।

জর্ডন বা গাউস-জর্ডন অপনয়ন পদ্ধতি আমরা উদাহরণের সাহায্যে বর্ণনা করব।

14.6 উদাহরণ

উদাহরণ 1 : গাউস-জর্ডন পদ্ধতি প্রয়োগ করে 14·4-এর উদাহরণ 2 তে বর্ণিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান করুন।

সমাধান :

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 5 \\ 2x - y + z &= -1 \\ x + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad (14\cdot6\cdot1)$$

প্রথম সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করে এবং দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে বিয়োগ এবং প্রথম সমীকরণকে তৃতীয় সমীকরণ থেকে বিয়োগ করে পাই

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 5 \\ -7y - 3z &= -11 \\ -y + 5z &= -3 \end{aligned} \qquad (14\cdot6\cdot2)$$

এখন দ্বিতীয় সমীকরণকে $\frac{3}{7}$ এবং $-\frac{1}{7}$ দ্বারা গুণ করে প্রথম ও তৃতীয় সমীকরণের সঙ্গে যথাক্রমে যোগ করে পাই

$$\begin{aligned} x + 0\cdot7143z &= 0\cdot2857 \\ -7y - 3z &= -11 \\ 1\cdot4286z &= -1\cdot4286 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad z = -1, y = \frac{-11+3(-1)}{-7} = \frac{-14}{-7} = 2, \quad x = 0\cdot2857 - 0\cdot7143\,(-1) = 1\cdot0000$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 1, y = 2, z = -1}$$

উদাহরণ 2 : গাউস-জর্ডন পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করুন, দুই দশমিক পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 &= 24 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= -8 \end{aligned}$$

সমাধান প্রক্রিয়া—1 :

প্রথম সমীকরণকে যথাক্রমে $-\frac{4}{3} = -1\cdot33333$ এবং $-\frac{4}{3} = -1\cdot33333$ দ্বারা গুণ করে দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণের সঙ্গে যোগ করে পাই

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= 11\\
-9{\cdot}99997x_2 + 15{\cdot}66666x_3 &= 9{\cdot}33337\\
-13{\cdot}99997x_2 + 3{\cdot}66666x_3 &= -22{\cdot}66663
\end{aligned}
$$

এখন দ্বিতীয় সমীকরণকে যথাক্রমে $-\dfrac{9}{-9\cdot99997} = 0{\cdot}90000$ এবং $-\dfrac{-13\cdot99997}{-9\cdot99997} = -1{\cdot}40000$ দ্বারা গুণ করে প্রথম ও তৃতীয় সমীকরণের সঙ্গে যোগ করে পাই

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 12{\cdot}09999x_3 &= 19{\cdot}40003\\
-9{\cdot}99997x_2 + 15{\cdot}66666x_3 &= 9{\cdot}33337\\
-18{\cdot}6666x_3 &= -35{\cdot}73335
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad x_3 = \frac{35\cdot73335}{18\cdot16666} = 1\cdot956;\ x_2 = \frac{9\cdot33337 - 15\cdot66666\times1\cdot956}{-9\cdot99997} = 2\cdot131$$

$$x_1 = \frac{19\cdot40003 - 12\cdot09999\times1\cdot956}{3} = -1\cdot423$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x_1 = -1{\cdot}42,\ x_2 = 2{\cdot}13,\ x_3 = 1{\cdot}96,}$ দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

প্রক্রিয়া 2 : [সংক্ষিপ্ত আকারে গণনার প্রক্রিয়া]

m_{ij}	x_1	x_2	x_3	b	$c = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} + b_i$
	$\boxed{3}$	9	–2	11	21
$-\frac{4}{3} = -1\cdot33333$	4	2	13	24	43
$-\frac{4}{3} = -1\cdot33333$	4	–2	1	–8	–5
	3	9	–2	11	21
$-\frac{9}{-9\cdot99999} = 0\cdot900000$		$\boxed{-9{\cdot}99997}$	15·66666	9·33337	15·00004
$-\frac{-13\cdot99997}{-9\cdot99999} = -1\cdot40000$		–13·99997	3·66666	–22·66663	–32·99993
	3		12·09999	19·40003	34·50002
		–9·99997	15·66666	9·33337	15·00004
			$\boxed{-18{\cdot}26666}$	–35·73335	–50·00001

$\therefore$ কীলক সমীকরণগুলি

$$
\begin{aligned}
-\ 18{\cdot}26666x_3 &= -35{\cdot}73335 \\
-9{\cdot}99997x_2 + 15{\cdot}66666x_3 &= 9{\cdot}33337 \\
3x_2 + 12{\cdot}09999x_3 &= 19{\cdot}40003
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad x_3 = \dfrac{35 \cdot 73335}{18 \cdot 26666} = 1 \cdot 956\ ;\ x_2 = \dfrac{9 \cdot 33337 - 15 \cdot 66666 \times 1 \cdot 956}{-9 \cdot 99997} = 2 \cdot 131$

এবং $x_1 = \dfrac{19 \cdot 40003 - 12 \cdot 09999 \times 1 \cdot 956}{3} = -1 \cdot 423$

$\therefore$ **$x_1 = 1{\cdot}42$, $x_2 = 2{\cdot}13$ এবং $x_3 = -1{\cdot}96$,** দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

14.7 অনুশীলনী

নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান করুন, গাউস অপনয়ন ও গাউস জর্ডন অপনয়ন পদ্ধতি প্রয়োগ করে

1. $$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 5 \\ 2x - y + z &= -1 \\ x + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

   দুই সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

2. $$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 5 \end{aligned}$$

   দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

3. $$\begin{aligned} 5{\cdot}09x + 3{\cdot}46y + 1{\cdot}09z &= 1{\cdot}28 \\ 2{\cdot}82x + 6{\cdot}46y - 4{\cdot}27z &= 4{\cdot}65 \\ 1{\cdot}27x + 3{\cdot}09y + 7{\cdot}54z &= 2{\cdot}19 \end{aligned}$$

   দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

4. $$\begin{aligned} 27x_1 + 6x_2 - x_3 &= 85{\cdot}10 \\ 6x_1 + 15x_2 + 2x_3 &= 72{\cdot}00 \\ x_1 + x_2 + 54x_3 &= 110{\cdot}22 \end{aligned}$$

   দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

5.
$$7x_1 + 2x_2 - x_3 = 17{\cdot}20$$
$$-x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 18{\cdot}90$$
$$x_1 + 5x_2 - 11x_3 = 28{\cdot}05$$

তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

6.
$$2{\cdot}38x_1 + 1{\cdot}95x_2 - 3{\cdot}27x_3 + 1{\cdot}78x_4 = 2{\cdot}16$$
$$3{\cdot}21x_1 - 0{\cdot}86x_2 + 2{\cdot}42x_3 - 3{\cdot}20x_4 = 3{\cdot}28$$
$$1{\cdot}44x_1 + 2{\cdot}95x_2 - 2{\cdot}14x_3 + 1{\cdot}86x_4 = 1{\cdot}42$$
$$4{\cdot}17x_1 + 3{\cdot}62x_2 - 1{\cdot}68x_3 - 2{\cdot}26x_4 = 5{\cdot}21$$

তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

7.
$$-10x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 100 = 0$$
$$6x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 100 = 0$$
$$3x_1 + 6x_2 - 10x_3 + 100 = 0$$

তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

14.8 উত্তরমালা

1. $x = 1{\cdot}0$, $y = 2{\cdot}0$, $z = -1{\cdot}0$, দুই সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।
2. $x_1 = 0{\cdot}64$, $x_2 = 0{\cdot}27$, $x_3 = 0{\cdot}00$, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।
3. $x = -1{\cdot}99$, $y = 2{\cdot}75$, $z = 1{\cdot}75$, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।
4. $x_1 = 2{\cdot}43$, $x_2 = 3{\cdot}57$, $x_3 = 1{\cdot}93$, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।
5. $x_1 = 1{\cdot}55$, $x_2 = 2{\cdot}55$, $x_3 = 1{\cdot}25$, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।
6. $x_1 = 0{\cdot}807$, $x_2 = 0{\cdot}237$, $x_3 = -0{\cdot}105$, $x_4 = -0{\cdot}358$, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।
7. $x_1 = 175$, $x_2 = 195$, $x_3 = 160$, তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ।

একক 15 ❑ রৈখিক সমীকরণসমূহের সাংখ্যিক সমাধান–II (Solution of Systems of Linear Equations—II)

গঠন

15.1 প্রস্তাবনা

এই এককে আমরা গাউস-সাইডেল পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব। এই পদ্ধতি রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধানের জন্য বিশেষ উপযোগী। এটি একটি পৌনঃপুনিক পদ্ধতি। এই পদ্ধতি প্রয়োগ করার প্রাথমিক শর্ত এই যে, রৈখিক সমীকরণসমূহকে অবশ্যই কঠোরভাবে কর্ণ আধিপত্যযুক্ত হতে হবে, অর্থাৎ সহগ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ কে এমন হতে হবে যে

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{3} |a_{ij}| \quad [i = 1,2,3,\ldots,n]$$

15.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি জানতে পারবেন

- গাউস-সাইডেল পৌনঃপুনিক পদ্ধতির কথা
- গাউস-সাইডেল পদ্ধতির অভিসরণের শর্ত ও তার ব্যাখ্যা

15.3 গাউস-সাইডেল পদ্ধতি

এখন আমরা রৈখিক সমীকরণসমূহ ধরি এই রকম ঃ

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n-1}x_n & = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{22}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3,n-1}x_{n-1} + a_{3n}x_n & = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n & = b_{\mathrm{n}} \end{array}\right\} \qquad (15.3.1)$$

যেখানে

$$a_{ij} \neq 0 \ (i = 1,2,3,\ldots,n) \text{ এবং } \left|a_{ij}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{3} \left|a_{ij}\right| \ [i = 1,2,3,\ldots,n]$$

গাউস-সাইডেল পৌনঃপুনিক (Iteration) পদ্ধতিতে (15.2.1)-এর সমীকরণগুলিকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা হয় ঃ

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 - \cdots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1,n}x_n\right] \\[2ex] x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - \cdots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n\right] \\[2ex] x_3 = \dfrac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{34}x_4 - \cdots - a_{3,n-1}x_{n-1} - a_{3,n}x_n\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \dfrac{1}{a_{n-1,n-1}}\left[b_{n-1} - a_{n-1,1}x_1 - a_{n-1,2}x_2 - a_{n-1,3}x_3 - \ldots\ldots\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. - a_{n-1,n-2}x_{n-2} - a_{n-1,n}x_n\right] \\[2ex] x_n = \dfrac{1}{a_{n,n}}\left[b_n - a_{n,1}x_1 - a_{n,2}x_2 - a_{n,3}x_3 - \ldots\ldots\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. - a_{n,n-2}x_{n-2} - a_{n,n-1}x_{n-1}\right] \end{array}\right\} \qquad (15.3.2)$$

এই পদ্ধতিতে প্রথম আসন্ন মানের জন্য যে কোন পছন্দমাফিক মান নেওয়া যেতে পারে, যথা

$$x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, x_3 = x_3^{(0)}, \ldots . x_n = x_n^{(0)}$$

[সাধারণতঃ প্রথম আসন্ন মান $x_i^{(0)} = 0$ ধরা হয়]

উপরোক্ত সমীকরণ (15.3.2)-এ $x_i = 0$, বসালে $x_i^{(0)} = \dfrac{b_i}{a_{ii}} (i = 1,2,3,\ldots,n)$ পাই, এবং এই মানগুলিকে আমরা প্রথম আসন্ন মান বা প্রায়িক মান হিসাবে গণ্য করতে পারি এবং পৌনিক সংকেতে মানগুলি $x_i^{(1)} (i = 1,2,3,\ldots,n)$ লেখা হয়। এইভাবে পরপর $x_i^{(n)}$ পৌনঃপুনিক মান নির্ণয় করা হয়।

গাউস-সাইডেল পদ্ধতির পৌনঃপুনিক সূত্র নিম্নলিখিতভাবে লেখা হয় ঃ

$$\left.\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1,n1}x_{n-1}^{(k)} - a_{1,n}x_n^{(k)}\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\Big[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots \\
&\qquad\qquad -a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{2,n}x_n^{(k)}\Big] \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\Big[b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots \\
&\qquad\qquad -a_{3,n-1}x_{n-1}^{(k)} - a_{3,n}x_n^{(k)}\Big] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1}^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{n-1,n-1}}\Big[b_{n-1} - a_{n-1,1}x_1^{(k+1)} - a_{n-1,2}x_2^{(k+1)} - \cdots \\
&\qquad\qquad -a_{n-1,n-2}x_{n-2}^{(k+1)} - a_{n-1,n}x_n^{(k)}\Big] \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{n,n}}\Big[b_n - a_{n,1}x_1^{(k+1)} - a_{n,2}x_2^{(n+1)} - \cdots \\
&\qquad\qquad -a_{n,n-2}x_{n-2}^{(k+1)} - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\Big]
\end{aligned}\right\} \qquad (15.3.3)$$

k-এর কততম মান বা কতগুলি প্রায়িক মান নির্ণয় করতে হবে তা প্রয়োজনীয় শুদ্ধতার উপর নির্ভরশীল।

15.4 গাউস-সাইডেল পদ্ধতির অভিসরণ

(15.3.3) পৌনঃপুনিক সূত্রগুলিকে এইভাবে লেখা যায়

$$x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ij}}\left[b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\right] \quad (\text{i} = 1, 2, ..., n)$$

ভ্রান্তি

$$\varepsilon_i^{(k)} = x_i - x_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

আমরা লিখি

$$\varepsilon^{(k)} = \left(\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \ldots.., \varepsilon_n^{(k)}\right)$$

$$\left\|\varepsilon^{(k)}\right\| = \max_i \left|\varepsilon_i^{(k)}\right|$$

তাহলে পাই

$$\varepsilon_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j<i} a_{ij}\varepsilon_j^{(k+1)} + \sum_{j>i} a_{ij}\varepsilon_j^{(k)}\right]$$

এবার K, Ki-এর এইরকম সংজ্ঞা দেওয়া হল

$$K = \max_i \frac{\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|}{\left|a_{ii}\right|}$$

$$K_i = \frac{\sum_{j<i}\left|a_{ij}\right|}{\left|a_{ii}\right|} \quad (i = 1,2,\ldots.,n)$$

আবার ধরব

$$K < 1$$

অতএব

$0 \le K_i \le K < 1$ এবং

$$\left|\varepsilon_i^{(k+1)}\right| \le \frac{1}{|a_{ii}|}\left[\sum_{j<i}|a_{ij}|\left|\varepsilon_j^{(k+1}\right| + \sum_{j>i}|a_{ij}|\left|\varepsilon_j^{(k)}\right|\right]$$

$$\le \frac{1}{|a_{ii}|}\left[\sum_{j<i}|a_{ij}|\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\| + \sum_{j>i}|a_{ij}|\left\|\varepsilon^{(k)}\right\|\right]$$

$$\le K_i\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\| + (K - K_i)\left\|\varepsilon^{(k)}\right\|$$

এখন কোন বিশেষ i-এর জন্য

$$\left|\varepsilon_i^{(k+1)}\right| = \left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\|$$

যার ফলে

$$\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\| \le K_i\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\| + (K - K_i)\left\|\varepsilon^{(k)}\right\|$$

অথবা

$$\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\| \le \frac{K - K_i}{1 - K_i}\left\|\varepsilon^{(k)}\right\|$$

যেহেতু

$$(K - K_i)/(1 - K_i) \le K$$

কেননা $K < 1$

আমরা পাই

$$\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\| \le K\left\|\varepsilon^{(k)}\right\|$$

এই অসমতার পৌনঃপুনিক প্রয়োগ করে পাই

$$\left\|\varepsilon^{(k)}\right\| \le K^k\left\|\varepsilon^{(0)}\right\|$$

যেহেতু $K < 1$, $\left\|\varepsilon^{(k)}\right\| \to 0$, যখন $k \to \infty$

অথবা প্রত্যেক i-এর জন্য

$$\varepsilon_i^{(k)} \to 0,\ \text{যখন}\ k \to \infty$$

অর্থাৎ পৌনঃপুনিক প্রক্রিয়াটি অভিসারী হবে।

15.5 উদাহরণ

উদাহরণ 1 ঃ গাউস-সাইডেল, পৌনঃপুনিক পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করুন, তিন সার্থক অংক পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &= 9 \\ 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 &= 33 \end{aligned}$$

সমাধান ঃ

প্রথম প্রণালী ঃ এখানে $|a_{11}| = 1, |a_{12}| + |a_{13}| = 1 + 4 = 5 \quad \therefore |a_{11}| < |a_{12}| + |a_{13}|$

অতএব রৈখিক সমীকরণগুলি কঠোরভাবে কর্ণ আধিপত্যযুক্ত নয়। এখন সমীকরণগুলি এইভাবে সাজালে

$$\begin{aligned} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 &= 33 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

অভিসরণ শর্তটি পালিত হচ্ছে।

অতএব পৌনঃপুনিক সূত্রগুলি একইরকম হবে

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}\left[20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}\left[33 - 4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left[9 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right]$$

প্রথম আসন্ন মান $\qquad x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$

$$\therefore \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{8}[20 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0] = 2 \cdot 5 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{11}[33 - 4 \times 2 \cdot 5 + 0] = 2 \cdot 0909 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}[9 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot 0909] = 1 \cdot 1023 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{8}[20 + 3 \times 2 \cdot 0909 - 2 \times 1 \cdot 1023] = 3 \cdot 0085 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{11}[33 - 4 \times 3 \cdot 0085 + 1 \cdot 1023] = 2 \cdot 0062 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}[9 - 3 \cdot 0085 - 2 \cdot 0062] = 0 \cdot 9963 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{8}[20 + 3 \times 2 \cdot 0062 - 2 \times 0 \cdot 9963] = 3 \cdot 0032 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{11}[33 - 4 \times 3 \cdot 0032 + 0 \cdot 9963] = 1 \cdot 9985 \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{4}[9 - 3 \cdot 0032 - 1 \cdot 9985] = 0 \cdot 9996 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \frac{1}{8}[20 + 3 \times 1 \cdot 9985 - 2 \times 0 \cdot 9996] = 2 \cdot 9995 \\ x_2^{(4)} = \frac{1}{11}[33 - 4 \times 3 \cdot 0032 + 0 \cdot 9996] = 1 \cdot 9988 \\ x_3^{(4)} = \frac{1}{4}[9 - 2 \cdot 9995 - 1 \cdot 9988] = 1 \cdot 0004 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(5)} = \frac{1}{8}[20 + 3 \times 1 \cdot 9988 - 2 \times 1 \cdot 0004] = 2 \cdot 9994 \\ x_2^{(5)} = \frac{1}{11}[33 - 4 \times 2 \cdot 9994 + 1 \cdot 0004] = 2 \cdot 0002 \\ x_3^{(5)} = \frac{1}{4}[9 - 2 \cdot 994 - 2 \cdot 0002] = 1 \cdot 0001 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(6)} = \frac{1}{8}[20 + 3 \times 2 \cdot 0002 - 2 \times 1 \cdot 0001] = 3 \cdot 0000 \\ x_2^{(6)} = \frac{1}{11}[33 - 4 \times 3 \cdot 0000 + 1 \cdot 0001] = 2 \cdot 0000 \\ x_3^{(6)} = \frac{1}{4}[9 - 3 \cdot 0000 - 2 \cdot 0000] = 1 \cdot 0000 \end{cases}$$

$\therefore$ **x_1 = 3·00, x_2 = 2·00, x_3 = 1·00** তিন সার্থক অংক পর্যন্ত শুদ্ধ।

দ্বিতীয় প্রণালী ঃ

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	2·5	2·0909	1·1023
2	3·0085	2·0062	0·9963
3	3·0032	1·9985	0·9996
4	2·9995	1·9988	1·0004
5	2·9994	2·0002	1·0001

$\therefore$ $\mathbf{x_1 = 3{\cdot}00,\ x_2 = 2{\cdot}00,\ x_3 = 1{\cdot}00}$ তিন সার্থক সংখ্যা পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 2 ঃ গাউস-সাইডেল পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করুন, দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 &= 24 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= -8 \end{aligned}$$

সমাধান ঃ

প্রথম প্রণালী ঃ এখন সমীকরণগুলিকে কর্ণ আধিপত্যযুক্ত আকারে লিখে পাই

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= -8 \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 &= 24 \end{aligned}$$

এখানে পৌনঃপুনিক সূত্রগুলি এইরকম

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left[-8 + 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{9}\left[11 - 3x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{13}\left[24 - 4x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)}\right]$$

প্রথম আসন্ন মান

$$x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0,\ x_3^{0} = 0$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}[-8 + 2 \times 0 - 0] = -2 \cdot 00 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{9}[11 - 3 \times (-2 \cdot 00) + 2 \times 0] = 1 \cdot 89 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{13}[24 - 4 \times (-2) - 2 \times 1 \cdot 89] = 2 \cdot 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}[-8 + 2 \times 1 \cdot 89 - 2 \cdot 17] = -1 \cdot 60 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{9}[11 - 3 \times (-1 \cdot 60) + 2 \times 2 \cdot 17] = 2 \cdot 24 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{13}[24 - 4 \times (-1 \cdot 60) - 2 \times 2 \cdot 24] = 1 \cdot 99 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{4}[-8 + 2 \times (2 \cdot 24) - 1 \cdot 99] = -1 \cdot 38 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{9}[11 - 3 \times (-1 \cdot 38) + 2 \times 1 \cdot 99] = 2 \cdot 21 \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{13}[24 - 4 \times (-1 \cdot 38) - 2 \times (2 \cdot 21)] = 1 \cdot 93 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \frac{1}{4}[-8 + 2 \times 2 \cdot 21 - 1 \cdot 93] = -1 \cdot 378 \\ x_2^{(4)} = \frac{1}{9}[11 - 3 \times (-1 \cdot 378) + 2 \times 1 \cdot 93] = 2 \cdot 110 \\ x_3^{(4)} = \frac{1}{13}[24 - 4 \times (-1 \cdot 378) - 2 \times (2 \cdot 110)] = 1 \cdot 946 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(5)} = \frac{1}{4}[-8 + 2 \times 2 \cdot 110 - 1 \cdot 946] = -1 \cdot 431 \\ x_2^{(5)} = \frac{1}{9}[11 - 3 \times (-1 \cdot 431) + 2 \times 1 \cdot 946] = 2 \cdot 132 \\ x_3^{(5)} = \frac{1}{13}[24 - 4 \times (-1 \cdot 431) - 2 \times 2 \cdot 132] = 1 \cdot 958 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(6)} = \frac{1}{4}[-8 + 2 \times 2 \cdot 132 - 1 \cdot 958] = -1 \cdot 424 \\ x_2^{(6)} = \frac{1}{9}[11 - 3 \times (-1 \cdot 424) + 2 \times 1 \cdot 958] = 2 \cdot 132 \\ x_3^{(6)} = \frac{1}{13}[24 - 4(-1 \cdot 424) - 2 \times 2 \cdot 132] = 1 \cdot 956 \\ x_1^{(7)} = \frac{1}{4}[-8 + 2 \times 2 \cdot 132 - 1 \cdot 956] = -1 \cdot 423 \end{cases}$$

$\therefore$ **$x_1 = -1{\cdot}42$, $x_2 = 2{\cdot}13$, $x_3 = 1{\cdot}96$,** দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

দ্বিতীয় প্রণালী ঃ

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	–2·00	1·89	2·17
2	–1·60	2·24	1·99
3	–1·38	2·21	1·93
4	–1·378	2·110	1·946
5	–1·431	2·132	1·958
6	–1·424	2·132	1·956
7	–1·423		

$\therefore$ **$x_1 = -1{\cdot}42$, $x_2 = 2{\cdot}13$, $x_3 = 1{\cdot}96$,** দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 3 ঃ গাউস-সাইডেল পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করুন, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$\begin{aligned} 6{\cdot}31x_1 - 0{\cdot}73x_2 - 0{\cdot}65x_3 + 1{\cdot}06x_4 &= 2{\cdot}95 \\ 0{\cdot}89x_1 + 4{\cdot}32x_2 - 0{\cdot}47x_3 + 0{\cdot}95x_4 &= 3{\cdot}36 \\ 0{\cdot}74x_1 + 1{\cdot}01x_2 + 5{\cdot}28x_3 - 0{\cdot}88x_4 &= 1{\cdot}97 \\ 1{\cdot}13x_1 - 0{\cdot}89x_2 + 0{\cdot}61x_3 + 5{\cdot}63x_4 &= 4{\cdot}27 \end{aligned}$$

সমাধান ঃ এখানে,

$$|6\cdot 32|-|-0\cdot 73|-|-0\cdot 65|+|1\cdot 06|=3\cdot 88>0$$

$$|4\cdot 32|-|0\cdot 89|-|-0\cdot 47|-|0\cdot 95|=2\cdot 01>0$$

$$|5\cdot 28|-|0\cdot 74|-|1\cdot 01|-|-0\cdot 88|=2\cdot 65>0$$

$$|5\cdot 63|-|1\cdot 13|-|-0\cdot 89|+|0\cdot 61|=3\cdot 00>0$$

অতএব প্রদত্ত সমীকরণগুলি কর্ণ আধিপত্যযুক্ত। পৌনঃপুনিক সূত্রগুলি ঃ

$$x_1^{(k+1)}=0\cdot 46677+0\cdot 11551x_2^{(k)}+0\cdot 10285x_3^{(k)}-0\cdot 16772x_4^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)}=0\cdot 77778-0\cdot 20602x_1^{k+1}+0\cdot 10880x_3^{(k)}-0\cdot 21991x_4^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)}=0\cdot 37311-0\cdot 14015x_1^{(k+1)}-0\cdot 19129x_2^{(k+1)}-0\cdot 16667x_4^{(k)}$$

$$x_4^{(k+1)}=0\cdot 75844+0\cdot 20017x_1^{(k+1)}+0\cdot 15808x_2^{(k+1)}-0\cdot 10835x_3^{(k)}+1$$

I_1	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	0	0	0
I_1	0·46677	0·68116	0·17739	0·75321
I_2	0·43737	0·54133	0·33380	0·72006
I_3	0·44286	0·56451	0·32307	0·72379
I_4	0·44381	0·56233	0·32398	0·72315
I_5	0·44376	0·56258	0·32383	0·72322
I_6		0·56254	0·32385	0·72321
I_7		0·56255		

অতএব $\boldsymbol{x_1 = 0{\cdot}4438}$, $\boldsymbol{x_2 = 0{\cdot}5626}$, $\boldsymbol{x_3 = 0{\cdot}3238}$, $\boldsymbol{x_4 = 0{\cdot}7232}$, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

উদাহরণ 4 : গাউস-সাইডেল পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান বের করুন, পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

$$4{\cdot}50x_1 + 0{\cdot}15x_2 + 0{\cdot}30x_3 = 1{\cdot}57$$
$$0{\cdot}15x_1 - 10{\cdot}50x_2 + 0{\cdot}45x_3 = -3{\cdot}86$$
$$0{\cdot}45x_1 + 0{\cdot}30x_2 - 15{\cdot}00x_3 = 14{\cdot}28$$

সমাধান ঃ সমীকরণগুলি কর্ণ আধিপত্যযুক্ত। অতএব পৌনঃপুনিক সূত্রগুলি ঃ

$$x_1^{(k+1)} = 0\cdot 348889 - 0\cdot 033333x_1^{(k)} - 0\cdot 666666x_1^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = 0\cdot 367619 - 0\cdot 014286x_1^{(k+1)} - 0\cdot 042857x_3^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = -0\cdot 952000 + 0\cdot 030000x_1^{(k+1)} + 0\cdot 020000x_2^{(k+1)}$$

I	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	0·348889	0·372603	–0·934081
2	0·398741	0·333284	–0·933380
3	0·40000	0·333332	–0·933333
4	0·40000	0·333333	–0·933333

$\therefore$ $\mathbf{x_1 = 0{\cdot}40000,\ x_2 = 0{\cdot}33333,\ x_3 = -0{\cdot}93333,}$ পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ।

15.6 অনুশীলনী

নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত, গাউস-সাইডেল পদ্ধতি প্রয়োগ করে।

(i)
$$6{\cdot}1x_1 + 2{\cdot}2x_2 + 1{\cdot}2x_3 = 16{\cdot}55$$
$$2{\cdot}2x_1 + 5{\cdot}5x_2 - 1{\cdot}5x_3 = 10{\cdot}55$$
$$1{\cdot}2x_1 - 1{\cdot}5x_2 + 7{\cdot}2x_3 = 16{\cdot}80$$

(ii)
$$6{\cdot}7x_1 + 1{\cdot}1x_2 + 2{\cdot}2x_3 = 20{\cdot}5$$
$$3{\cdot}1x_1 + 9{\cdot}4x_2 - 1{\cdot}5x_3 = 22{\cdot}9$$
$$2{\cdot}1x_1 - 1{\cdot}5x_2 + 8{\cdot}4x_3 = 28{\cdot}8$$

(iii) $27x_1 + 6x_2 - x_3 = 85$

$6x_1 + 15x_2 + 2x_3 = 72$

$x_1 + y_1 + 54x_3 = 110$

(iv) $2x_1 - x_2 + x_3 = 5{\cdot}74$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7{\cdot}58$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -0{\cdot}69$

(v) $5x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 24$

$2x_1 + 6x_2 + x_3 = 25$

$3x_1 + x_2 - 4x_3 = 8$

(vi) $1{\cdot}44x_1 + 2{\cdot}95x_2 - 2{\cdot}14x_3 + 1{\cdot}86x_4 = 1{\cdot}42$

$3{\cdot}21x_1 - 0{\cdot}86x_2 + 2{\cdot}42x_3 - 3{\cdot}20x_4 = 3{\cdot}28$

$4{\cdot}17x_1 + 3{\cdot}62x_2 - 1{\cdot}68x_3 - 2{\cdot}26x_4 = 5{\cdot}21$

$2{\cdot}38x_1 + 1{\cdot}95x_2 - 3{\cdot}27x_3 + 1{\cdot}58x_4 = 2{\cdot}16$

(vii) $13x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 18$

$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 31$

$2x_1 + 12x_2 + x_3 + 4x_4 = 13$

$3x_1 - 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 29$

(viii)
$$\begin{aligned} 2x - y \qquad\qquad &= 0 \\ -x + 2y - z \qquad &= 0 \\ -y + 2z - v &= 0 \\ -z + 2v &= 0 \end{aligned}$$

15.7 উত্তরমালা

(i) $x_1 = 1{\cdot}4999,\ x_2 = 2{\cdot}0000,\ x_3 = 2{\cdot}5000$

(ii) $x_1 = 1{\cdot}5000,\ x_2 = 2{\cdot}5000,\ x_3 = 3{\cdot}5000$

(iii) $x_1 = 2{\cdot}4300,\ x_2 = 3{\cdot}5700,\ x_3 = 1{\cdot}9200$

(iv) $x_1 = 1{\cdot}247,\ x_2 = 2{\cdot}334,\ x_3 = 0{\cdot}910$

(v) $x_1 = 3{\cdot}000,\ x_2 = 3{\cdot}000,\ x_3 = 1{\cdot}000$

(vi) $x_1 = 0{\cdot}8072,\ x_2 = 0{\cdot}2372,\ x_3 = -0{\cdot}1046,\ x_4 = -0{\cdot}3581$

(vii) $x_1 = 1{\cdot}0000,\ x_2 = 2{\cdot}0000,\ x_3 = 3{\cdot}0000,\ x_4 = 4{\cdot}0000$

(viii) $x = 0{\cdot}2000,\ y = 0{\cdot}4000,\ z = 0{\cdot}6000,\ \mathrm{v} = 0{\cdot}8000$

একক 16 ❑ সাধারণ অবকল সমীকরণের সাংখ্যিক সমাধান (Numerical Solution of Ordinary Differential Equations)

গঠন

16.1 প্রস্তাবনা

আমরা গণিত, যন্ত্র-বিজ্ঞান তথ্য বিজ্ঞানের ছাত্র হিসাবে এমন অনেক অবকল সমীকরণের সম্মুখীন হই যার সঠিক গাণিতিক সমাধান পাওয়া যায় না, কিন্তু ঐসব অবকল সমীকরণগুলির সাংখ্যিক পদ্ধতির দ্বারা সমাধান করা যায়। সাধারণ সমীকরণের ক্ষেত্রে সাংখ্যিক পদ্ধতিকে দু'ভাগে ভাগ করা যায় ঃ (a) শ্রেণী পদ্ধতি (Series Method), (b) প্রত্যক্ষ সাংখ্যিক পদ্ধতি (Direct Numerical Method)।

পাঠ্যসূচীর প্রয়োজনীয়তায় আমরা এখানে মাত্র তিনটি পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব। যথা (a) অয়লাবের (Eul*er*) পদ্ধতি, (b) পরিবর্তিত অয়লাবের পদ্ধতি, (c) রঙ্গে-কুট্টা (Runge-Kutta) পদ্ধতি।

16.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি একঘাত ও একক্রমের অবকল সমীকরণের সাংখ্যিক সমাধান করতে পারবেন

- অয়লারের পদ্ধতি ও পরিবর্তিত অয়লারের পদ্ধতির দ্বারা
- রঙ্গো-কুট্টা পদ্ধতি দ্বারা

16.3 অয়লারের পদ্ধতি

এই পদ্ধতি এক-ক্রম ও একঘাত (First order first degree) সমীকরণের জন্য উপযোগী।

এখন আমরা এক-ক্রম ও একঘাত অবকল সমীকরণ ধরি, এইরকম ঃ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ এবং } y(x_0) = y_0 \tag{16.3.1}$$

যখন $x = x_n$, $y = y_n$-এর সাংখ্যিক মান নির্ণয় করতে হবে। এখন $x_0, x_1, x_2 \cdots, x_{r-1}, x_{r+1}, \cdots x_n$ বিন্দু দ্বারা $[x_0, x_n]$ এই অন্তরালকে n-সংখ্যক সমান উপঅন্তরালে বিভাজিত করলাম, যেখানে $x_r = x_0 + rh$ বা $x_r = x_{r-1}h$; আরও মনে করি x-এর মানের অনুরূপ y-এর মান যথাক্রমে $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$। আমরা আরও ধরি $[x_{r-1}, x_r]$ এই অন্তরালে

$$f(x, y) \simeq f(x_{r-1}, y_{r-1}) \tag{16.3.2}$$

এখন (16.3.1) সমীকরণকে $[x_{r-1}, x_r]$ অন্তরালে সমাকলন করে পাই

$$\int_{x_{r-1}}^{x_r} dy = \int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x, y)dx$$

বা, $$y_r - y_{r-1} = \int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x_{r-1}, y_{r-1})dx \qquad \text{(16.3.2-এর সাহায্যে)}$$

$$\simeq f(x_{r-1}, y_{r-1})\int_{x_{r-1}}^{x_r} dx = (x_r - x_{r-1})f(x_{r-1}, y_{r-1})$$

বা, $$y_r \simeq y_{r-1} + hf(x_{r-1}, y_{r-1}) \tag{16.3.3}$$

(16.3.3) সমীকরণ ব্যবহার করে y_r-এর মান নিম্নলিখিতভাবে পাওয়া যায়

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = y(x_1) \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = y(x_2) \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) = y(x_3) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) = y(x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (16.3.4)$$

(16.3.4) সমীকরণ থেকে স্পষ্ট যে y-এর মানগুলি ধাপ-দৈর্ঘ্য h-এর উপর নির্ভরশীল। ধাপ-দৈর্ঘ্য h যত ছোট হবে y-এর মানগুলি তত নির্ভুল হবে।

16.4 উদাহরণ

উদাহরণ 1 ঃ অয়লারের পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে $y(0{\cdot}02)$-এর মান নির্ণয় করুন, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত যেখানে ধাপ-দৈর্ঘ্য $h = 0{\cdot}01$.

$$\frac{dy}{dx} = x^3 + y; \;\; y(0) = 1$$

সমাধান ঃ এখানে $x_0 = 0, y_0 = y(0) = 1, h = 0 \cdot 01$ এবং $f(x, y) = x^3 + y$

(16.3.4) ব্যবহার করে পাই

$$y_1 = y(0 \cdot 01) = y_0 + 0 \cdot 01 \times f(x_0, y_0) = 1 + 0 \cdot 01[0 + 1] = 1 + 0 \cdot 01 = 1 \cdot 0100$$

$$y_2 = y(0 \cdot 02) = y_1 + 0 \cdot 01 \times f(x_1, y_1) = 1 \cdot 0100 + 0 \cdot 01\left[(0.01)^3 + 1 \cdot 01\right]$$

$$= 1{\cdot}0201$$

অতএব $\boldsymbol{y}$ **(0·02) = 1·0201**

উদাহরণ 2 ঃ অয়লারের পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে $y(1)$-এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ, নির্ণয় করুন, যখন ধাপ-দৈর্ঘ্য $h = 0{\cdot}1$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{1+x} \;\; \text{এবং} \;\; y(0 \cdot 3) = 2$$

সমাধান ঃ এখানে $x_0 = 0 \cdot 3, y_0 = 2, h = 0 \cdot 1$ এবং $f(x, y) = -\dfrac{y}{1+x}$

(16.3.4) সমীকরণগুলি ব্যবহার করে পাই

$$y_1 = y(0\cdot 4) = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + 0\cdot 1\left[-\frac{2}{1+0\cdot 3}\right] = 2 + 0\cdot 1\left(-\frac{2}{1\cdot 3}\right) = 1\cdot 84615$$

$$y_2 = y(0\cdot 5) = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1\cdot 84615 + 0\cdot 1\left[-\frac{1\cdot 84615}{1+1\cdot 4}\right]$$

$$= 1\cdot 84615 + 0\cdot 1\left[-\frac{1\cdot 84615}{1\cdot 4}\right] = 1\cdot 71428$$

$$y_3 = y(0\cdot 6) = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1\cdot 71428 + 0\cdot 1\left[-\frac{1\cdot 71428}{1+0\cdot 5}\right] = 1\cdot 59999$$

$$y_4 = y(0\cdot 7) = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1\cdot 59999 + 0\cdot 1\left[-\frac{1\cdot 59999}{1+0\cdot 6}\right] = 1\cdot 49999$$

$$y_5 = y(0\cdot 8) = y_4 + hf(x_4, y_4) = 1\cdot 49999 + 0\cdot 1\left[-\frac{1\cdot 49999}{1+0\cdot 7}\right] = 1\cdot 41176$$

$$y_6 = y(0\cdot 9) = y_5 + hf(x_5, y_5) = 1\cdot 41176 + 0\cdot 1\left[-\frac{1\cdot 41176}{1+0\cdot 8}\right] = 1\cdot 33333$$

$$y_7 = y(1\cdot 0) = y_6 + hf(x_6, y_6) = 1\cdot 33333 + 0\cdot 1\left[-\frac{1\cdot 33333}{1+0\cdot 9}\right] = 1\cdot 26315$$

অতএব $\boldsymbol{y(1\cdot 0) = 1\cdot 26315 \simeq 1\cdot 2632}$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ)

উদাহরণ 3 ঃ নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে y-এর মান নির্ণয় করুন, যখন $x = 1$ এবং $h = 0\cdot 2$, পাঁচ সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ ঃ

$$\frac{dy}{dx} = xy, y = 1 \text{ যখন } x = 0$$

সমাধান ঃ এখানে $x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0\cdot 2$ এবং $f(x, y) = xy$, (16.3.4) প্রয়োগ করে পাই

$$y_1 = y(0\cdot 2) = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0\cdot 2(1\times 0) = 1$$

$$y_2 = y(0\cdot 4) = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1 + 0\cdot 2(1\times 0\cdot 2) = 1\cdot 04$$

$$y_3 = y(0\cdot 6) = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1\cdot 04 + 0\cdot 2(1\cdot 04\times 0\cdot 4) = 1\cdot 1232$$

$$y_4 = y(0\cdot 8) = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1\cdot 1232 + 0\cdot 2(1\cdot 1232\times 0\cdot 6) = 1\cdot 257984$$

$$y_5 = y(1\cdot 0) = y_4 + hf(x_4, y_4) = 1\cdot 257984 + 0\cdot 2(1\cdot 257984\times 0\cdot 8) = 1\cdot 459261$$

অতএব **$y(1) = 1{\cdot}459261 \simeq 1{\cdot}4593$** [পাঁচ সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত]

উদাহরণ 4 ঃ অয়লারের পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নে প্রদত্ত অবকলন সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন (পাঁচ ধাপ পর্যন্ত) ঃ

$$\frac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 0 \text{ এবং } h = 0{\cdot}2$$

সমাধান ঃ এখানে $x_0 = 0, y_0 = 0, h = 0\cdot 2$ এবং $f(x,y) = x + y$ (16.3.4) প্রয়োগ করে পাই

$$y_1 = y(0\cdot 2) = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0\cdot 2(0+0) = 0\cdot 0$$

$$y_2 = y(0\cdot 4) = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0 + 0\cdot 2(0\cdot 2 + 0\cdot 0) = 0\cdot 04$$

$$y_3 = y(0\cdot 6) = y_2 + hf(x_2, y_2) = 0 - 04 + 0\cdot 2(0\cdot 4 + 0\cdot 04) = 0\cdot 128$$

$$y_4 = y(0\cdot 8) = y_3 + hf(x_3, y_3) = 0\cdot 128 + 0\cdot 2(0\cdot 6 + 0\cdot 128) = 0\cdot 2736$$

$$y_5 = y(1\cdot 0) = y_4 + hf(x_4, y_4) = 0\cdot 2736 + 0\cdot 2(0\cdot 8 + 0\cdot 2736) = 0\cdot 48832$$

অতএব **$y(1{\cdot}0) = 0{\cdot}48832 \simeq 0{\cdot}4883$**

16.5 পরিবর্তিত অয়লারের পদ্ধতি (Modified Euler's Method)

$y_0, y_1, \ldots, y_{r-1}$ নির্ণীত হওয়ার পর y_r-এর প্রারম্ভিক মান $y_r^{(0)}$ (16.3.3) থেকে নেওয়া হয়, অর্থাৎ

$$y_r^{(0)} = y_{r-1} + \int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x,y)\,dx = y_{r-1} + hf(x_{r-1}, y_{r-1}) \qquad (16.5.1)$$

যেখানে h ধাপ-দৈর্ঘ্য এবং $[x_{r-1}, x_r]$ এই অন্তরালে $f(x,y) \simeq f(x_{r-1}, y_{r-1})$

এখন, যদি $[x_{r-1}, x_r]$ অন্তরালে $f(x,y) \simeq f(x_{r-1}, y_{r-1})$ না বসিয়ে ঐ অন্তরালে ট্রাপেজয়ডাল নিয়ম ব্যবহার করি, তবে আমরা পাই

$$y_r = y_{r-1} + \frac{h}{2}\left[f(x_{r-1}, y_{r-1}) + f(x_r, y_r)\right]$$

যা y_r নির্ণয় করার একটি সমীকরণ। এর সমাধানের পৌনঃপুনিক সূত্র হল

$$y_r^{(n)} = y_{r-1} + \frac{h}{2}\left[f\left(x_{r-1}, y_{r-1}\right) + f\left(x_r, y_r^{(n-1)}\right)\right] \qquad (16.5.2)$$

$y_r^{(0)}$ এই প্রারম্ভিক মান থেকে শুরু করে $y_r^{(1)}, y_r^{(2)}$, ... পরপর (16.5.2) দ্বারা গণনা করা হয় এবং পরিশেষে আমরা পাই $y_r \simeq y_r^{(n)}$ উপযুক্ত n-এর জন্য।

16.6 উদাহরণ

উদাহরণ 1 ঃ ধাপ-দৈর্ঘ্য $h = 0{\cdot}05$ নিয়ে, পরিবর্তিত অয়লারের পদ্ধতির সাহায্যে, নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে y-এর মান নির্ণয় করুন, যখন $x = 0{\cdot}05$ এবং $x = 0{\cdot}1$, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ ঃ

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \text{ যখন } y(0) = 1$$

সমাধান ঃ এখানে $x_0 = 0, y_0 = y(0) = 1, h = 0 \cdot 05$ এবং $f(x, y) = x + y$ (16.5.1) সমীকরণে $r = 1$ বসিয়ে পাই

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf\left(x_0, y_0\right) = 1 + 0 \cdot 05[0 + 1] = 1 \cdot 05$$

এখন (16.5.2) -তে $n = 1$ এবং $r = 1$ বসিয়ে পাই

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1, y_1^{(0)}\right)\right]$$

যখন $x = 0{\cdot}05$ এবং $y_1^{(0)} = 1 \cdot 05$

$$\therefore \quad y_1^{(1)} = 1 + \frac{0 \cdot 05}{2}\left[(0 + 1) + (0 \cdot 05 + 1 \cdot 05)\right] = 1 \cdot 0525$$

(16.5.2) তে $r = 1$ এবং $n = 2$, বসিয়ে পাই

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1, y_1^{(1)}\right)\right]$$

$$\therefore \quad y_1^{(2)} = 1 + \frac{0 \cdot 05}{2}\left[(0+1) + (0 \cdot 05 + 1 \cdot 0525)\right] = 1 \cdot 05256$$

(16.5.2) তে $r = 1$, $n = 3$ বসিয়ে পাই

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(2)}\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{0 \cdot 05}{2}\left[(0+1) + (0 \cdot 05 + 1 \cdot 05256)\right] = 1 \cdot 05256$$

এখন দেখা যাচ্ছে যে

$$y_1^{(2)} = y_1^{(3)} = 1 \cdot 05256$$

$$\therefore \quad x_1 = 0 \cdot 05,\ y_1 = 1 \cdot 05256$$

আবার (16.5.1) তে $r = 1$ বসিয়ে পাই

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1 \cdot 05256 + 0 \cdot 05[0 \cdot 05 + 1 \cdot 05256] = 1 \cdot 10769$$

[16.5.2)-তে $r = 2$ এবং $n = 1$, বসিয়ে পাই

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f\left(x_2, y_2^{(0)}\right)\right]$$

এখানে $x_2 = 0 \cdot 1,\ y_2^{(0)} = 1 \cdot 10769$

$$\therefore \quad y_2^{(1)} = 1 \cdot 05256 + \frac{0 \cdot 05}{2}\left[0 \cdot 05 + 1 \cdot 05256 + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 10769)\right] = 1 \cdot 11032$$

(16.5.2) তে $r = 2$ এবং $n = 2$ বসিয়ে পাই,

$$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f\left(x_2, y_2^{(1)}\right)\right]$$

$$= 1 \cdot 05256 + \frac{0 \cdot 05}{2}\left[0 \cdot 05 + 1 \cdot 05256 + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 11032)\right] = 1 \cdot 11038$$

আবার (16.5.2) তে $r = 2,\ n = 3$ বসিয়ে পাই

$$y_2^{(3)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f\left(x_2, y_2^{(2)}\right)\right]$$

$$= 1\cdot 05256 + \frac{0\cdot 05}{2}\left[(0\cdot 05 + 1\cdot 05256) + (0\cdot 1 + 1\cdot 110381)\right] = 1\cdot 11038$$

এখন $y_2^{(2)} = y_2^{(3)} \quad \therefore y(0\cdot 1) = 1\cdot 11038$

অতএব $\boldsymbol{y(0{\cdot}05) \simeq 1{\cdot}0526}$ এবং $\boldsymbol{y(0{\cdot}1) = 1{\cdot}1104}$

উদাহরণ 2 ঃ নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ হতে $y(4{\cdot}4)$-এর মান নির্ণয় করুন, $h = 0{\cdot}2$ ধরে।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-y^2}{5x},\ y = 1 \text{ যখন } x = 4$$

সমাধান ঃ এখানে $x_0 = 4, y_0 = y(4) = 1, h = 0\cdot 2$ এবং $f(x,y) = \dfrac{2-y^2}{5x}$ (16.5.1) থেকে পাই

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0\cdot 2\left[\frac{2-1^1}{5\times 4}\right] = 1\cdot 01$$

(16.5.2) থেকে পাই

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(0)}\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{0\cdot 2}{2}\left[\frac{2-1^2}{5\times 4} + \frac{2-(1\cdot 01)^2}{5\times 4\cdot 2}\right] = 1\cdot 00967$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \frac{0\cdot 2}{2}\left[\frac{2-1^2}{5\times 4} + \frac{2-(1\cdot 00967)^2}{5\times 4\cdot 2}\right] = 1\cdot 00967$$

$$\therefore \qquad y_1 = 1\cdot 00967,\ x_1 = 4\cdot 2,\ x_2 = 4\cdot 4$$

আবার (16.5.1) থেকে পাই

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1 \cdot 00967 + 0 \cdot 2\left[\frac{2-(1 \cdot 00967)^2}{5 \times 4 \cdot 2}\right] = 1 \cdot 01901$$

(16.5.2) থেকে পাই

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f\left(x_2, y_2^{(0)}\right)\right]$$

$$= 1 \cdot 00967 + 0 \cdot 1\left[\frac{2-(1 \cdot 00967)^2}{5 \times 4 \cdot 2} + \frac{2-(1 \cdot 01901)^2}{5 \times 4 \cdot 4}\right] = 1 \cdot 01871$$

$$y_2^{(2)} = 1 \cdot 00867 + 0 \cdot 1\left[\frac{2-(1 \cdot 00967)^2}{5 \times 4 \cdot 2} + \frac{2-(1 \cdot 01871)^2}{5 \times 4 \cdot 4}\right] = 1 \cdot 01871$$

$$\therefore \quad y_2^{(1)} = y_2^{(2)}$$

অতএব $\mathbf{y_2 = y(4 \cdot 4) = 1 \cdot 01871}$

উদাহরণ 3 ঃ নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ হতে $y(2\cdot1)$-এর মান নির্ণয় করুন, যখন $h = 0\cdot05$, চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ ঃ

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x} \quad \text{যখন} \quad y(2) = 2$$

সমাধান ঃ এখানে $x_0 = 2,\ y_0 = y(2) = 2,\ h = 0 \cdot 05$ এবং $f(x, y) = 1 - \frac{y}{x}$

(16.5.1) থেকে পাই

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + 0 \cdot 05\left[1 - \frac{2}{2}\right] = 2$$

(16.5.2) থেকে পাই

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(0)}\right)\right]$$

$$= 2 + \frac{0 \cdot 05}{2}\left[1 - \frac{2}{2} + 1 - \frac{2}{2 \cdot 05}\right] = 2 \cdot 00061$$

$$y_1^{(2)} = 2 + \frac{0 \cdot 05}{2}\left[1 - \frac{2}{2} + 1 - \frac{2 \cdot 00061}{2 \cdot 05}\right] = 2 \cdot 00060$$

$$\therefore \quad x_1 = 2 \cdot 05,\ y_1 = 2 \cdot 00060$$

(16.5.1) থেকে পাই

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 2 \cdot 0006 + 0 \cdot 05\left[1 - \frac{2 \cdot 0006}{2 \cdot 05}\right] = 2 \cdot 0018$$

(16.5.2) থেকে পাই

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f\left(x_2, y_2^{(0)}\right)\right] \ ; \text{ যখন } x^2 = 2{\cdot}1$$

$$= 2 \cdot 0018 + \frac{0 \cdot 05}{2}\left[1 - \frac{2 \cdot 0006}{2 \cdot 05} + 1 - \frac{2 \cdot 0018}{2 \cdot 1}\right] = 2 \cdot 00237$$

$$y_2^{(2)} = 2 \cdot 0018 + \frac{0 \cdot 05}{2}\left[1 - \frac{2 \cdot 0006}{2 \cdot 05} + 1 - \frac{2 \cdot 00237}{2 \cdot 1}\right] = 2 \cdot 00236$$

$\therefore \quad y_2 \simeq 2{\cdot}0024$। অতএব $\boldsymbol{y(2 \cdot 1) = 2 \cdot 0024}$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)

16.7 রুঙ্গে-কুট্টার দ্বিক্রম ও চতুর্থক্রম পদ্ধতি (Second and Fourth order Runge-Kutta Methods)

দ্বিক্রম ও চতুর্থক্রমের রুঙ্গে-কুট্টা পদ্ধতির প্রমাণ জটিল ও দীর্ঘ হওয়ায় শুধু কার্যকর সূত্রগুলিই দেওয়া হল।

(a) দ্বিক্রম রুঙ্গে-কুট্টা পদ্ধতির কার্যকর সূত্র

যেখানে
$$\left.\begin{aligned} & y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ & k_1 + hf(x_n, y_n) \\ & k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{aligned}\right\} \tag{16.7.1}$$

h হচ্ছে ধাপ-দৈর্ঘ্য

(b) চতুর্থক্রম রুঙ্গো-কুট্টা পদ্ধতির কার্যকর সূত্র

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

যখন

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_n, y_n\right) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right) \end{aligned}\right\}$$

h হচ্ছে ধাপ-দৈর্ঘ্য

Note : প্রমাণের জন্য ‘Numerical Methods’ by Stanten (পৃ 151) বা ‘Numerical Analysis and Computational Procedure’ by S. A. Mollah (পৃ 308) দেখুন।

16.8 উদাহরণ

উদাহরণ 1 ঃ নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে রুঙ্গো-কুট্টা পদ্ধতির সাহায্যে, $y(0{\cdot}4)$-এর মান নির্ণয় করুন, $h = 0{\cdot}1$ ধরে, পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ ঃ

$$\frac{dy}{dx} = x - y, \;\; y(0) = 1$$

সমাধান ঃ দ্বিক্রম ও চতুর্থক্রম রুঙ্গো-কুট্টা পদ্ধতি প্রয়োগ করে উপরোক্ত অবকল সমীকরণটিকে সমাধান করা হচ্ছে।

(a) দ্বিক্রম রুঙ্গো-কুট্টা পদ্ধতির প্রয়োগ

এখানে $x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0 \cdot 1$ এবং $f(x,\ y) = x - y$

(16.7.1) থেকে পাই

$$y_{n+1} + y_n + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$

যেখানে

$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right) \text{ এবং } k_2 = hf\left(x_n + h,\ y_n + k\right)$$

$$\therefore \quad k_1 = hf\left(x_0, y_0\right) = 0 \cdot 1[0 - 1] = -0 \cdot 1$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + h,\ y_0 + k_1\right) = 0 \cdot 1\left[(0 + 0 \cdot 1) - (1 - 0 \cdot 1)\right] = -0 \cdot 08$$

$$\therefore \quad y_1 = y_0 = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) = 1 + \frac{1}{2}[-0 \cdot 1 - 0 \cdot 08] = 0 \cdot 91$$

$$\therefore \quad y_1 = y(0 \cdot 1) = 0 \cdot 91$$

$y(0{\cdot}2)$-এর জন্য, $x_1 = 0{\cdot}1$ এবং $y_1 = 0{\cdot}91$

$$k_1 = hf\left(x_1, y_1\right) = 0 \cdot 1[0 \cdot 1 - 0 \cdot 91] = -0 \cdot 081$$

$$k_2 = hf\left(x_1 + h, y_1 + k\right) = 0 \cdot 1\left[0 \cdot 2 - (0 \cdot 91 - 0 \cdot 081)\right] = -0 \cdot 0629$$

$$\therefore \quad y_2 = y_1 + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) = 0 \cdot 91 + \frac{1}{2}[-0 \cdot 081 - 0 \cdot 0629] = 0 \cdot 83805$$

$$\therefore \quad y(0{\cdot}2) = 0{\cdot}83805$$

$y(0{\cdot}3)$-এর জন্য, $x_2 = 0{\cdot}2$, এবং $y_2 = 0{\cdot}83805$

$$k_1 = hf(x_2, y_2) = 0 \cdot 1[0 \cdot 2 - 0 \cdot 83805] = -0 \cdot 063805$$

$$k_2 = hf(x_2 + h, y_2 + k_1) = 0 \cdot 1[0 \cdot 3 - (0 \cdot 83805 - 0 \cdot 063805)]$$

$$= -0{\cdot}047424$$

$$\therefore \quad y_3 = y_2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0 \cdot 83805 + \frac{1}{2}(-0 \cdot 063805 - 0 \cdot 047424)$$

$$= 0{\cdot}782436$$

$$\therefore \quad y(0{\cdot}3) = 0{\cdot}782436$$

$y(0{\cdot}4)$-এর জন্য $x_3 = 0 \cdot 3,\ y_3 = 0 \cdot 782436$

$$k_1 = hf(x_3, y_3) = 0 \cdot 1[0 \cdot 3 - 0 \cdot 782436] = -0 \cdot 048244$$

$$k_2 = hf(x_3 + h, y_3 + k) = 0 \cdot 1[0 \cdot 4 - (0 \cdot 782436 - 0 \cdot 048244)]$$

$$= -0{\cdot}033419$$

$$\therefore \quad y_4 = y_3 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0 \cdot 782436 + \frac{1}{2}(-0 \cdot 048244 - 0 \cdot 033419)$$

$$= 0{\cdot}741604$$

$\therefore$ **y(0·4) = 0·741604**

(b) চতুর্থক্রম রুঙ্গো-কুট্টা পদ্ধতির প্রয়োগ

$y(0{\cdot}1)$-এর জন্য, $x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0 \cdot 1$ এবং $f(x, y) = x - y$

(16.7.2) থেকে পাই

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

যেখানে

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$\therefore \quad k_1 = hf(x_0, y_0) = 0 \cdot 1[0 - 1] = -0 \cdot 1$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0 \cdot 1[0 \cdot 05 - (1 - 0 \cdot 05)] = -0 \cdot 09$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0 \cdot 1[0 \cdot 05 - (1 - 0 \cdot 045)] = -0 \cdot 0905$$

$$k_4 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_3) = 0 \cdot 1[0 \cdot 1 - (1 - 0 \cdot 0905)] = -0 \cdot 08095$$

$$\therefore \quad y_1 = y(0 \cdot 1) = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$= 1 + \frac{1}{6}[-0 \cdot 1 - 0 \cdot 18 - 0 \cdot 1810 - 0 \cdot 08095] = 0 \cdot 909675$$

$$\therefore \quad y(0 \cdot 1) = 0 \cdot 909675$$

$y(0{\cdot}2)$-এর জন্য, $x_1 = 0{\cdot}1$, $y_1 = 0{\cdot}909675$

$$k_1 = hf(x_1, y_1) = 0 \cdot 1\ [0 \cdot 1 - 0 \cdot 909675] = -0 \cdot 0809675$$

$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = 0 \cdot 1[(0 \cdot 1 + 0 \cdot 05) - (0 \cdot 909675 - 0 \cdot 0404837)]$$

$$= -0{\cdot}0719191$$

$$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{k_2}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = 0 \cdot 1[(0 \cdot 1 + 0 \cdot 05) - (0 \cdot 909675 - 0 \cdot 0359595)]$$

$$= 0{\cdot}0723716$$

$$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0 \cdot 1[(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) - (0 \cdot 909675 - 0 \cdot 0723716)]$$

$$= -\ 0{\cdot}0637303$$

$$\therefore \quad y(0 \cdot 2) = y_1 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$$= 0 \cdot 909675 + \frac{1}{6}[-0 \cdot 0809675 - 0 \cdot 1438382 - 0 \cdot 1447432 - 0 \cdot 0637303]$$

$$= 0{\cdot}837462$$

$y(0{\cdot}3)$-এর জন্য, $x_2 = 0{\cdot}2$, $y_2 = 0{\cdot}837462$

$$k_1 = hf\left(x_2, y_2\right) = 0 \cdot 1\left[0 \cdot 2 - 0 \cdot 837462\right] = -0 \cdot 0637462$$

$$k_2 = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1}{2}\right) = 0 \cdot 1\left[(0 \cdot 2 + 0 \cdot 05) - (0 \cdot 837462 - 0 \cdot 0318731)\right]$$

$$= -0{\cdot}0555589$$

$$k_3 = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_2}{2}\right) = 0 \cdot 1\left[(0 \cdot 2 + 0 \cdot 05) - (0 \cdot 837462 - 0 \cdot 027779)\right]$$

$$= -\ 0{\cdot}0559683$$

$$k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3) = 0 \cdot 1[(0 \cdot 2 + 0 \cdot 1) - (0 \cdot 837462 - 0 \cdot 0559683)]$$

$$= -\ 0{\cdot}481494$$

$$\therefore \quad y(0 \cdot 3) = y_2 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$$= 0{\cdot}837462 + \{-0{\cdot}0637462 - 0{\cdot}1111178 - 0{\cdot}1119366 - 0{\cdot}0481494]$$

$$= 0{\cdot}781632$$

$\therefore \quad \mathbf{y(0{\cdot}3) \;=\; 0{\cdot}781632}$

$y(0{\cdot}4)$ এর জন্য, $x_3 = 0{\cdot}3, \; y_3 = 0{\cdot}781632$

$$k_1 = hf(x_3, y_3) = 0\cdot 1[0\cdot 3 - 0\cdot 781632] = -0\cdot 0481632$$

$$k_2 = hf\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k_1}{2}\right) = 0\cdot 1[(0\cdot 3 + 0\cdot 05) - (0\cdot 781632 - 0\cdot 0240816)]$$

$$= -0{\cdot}0407550$$

$$k_3 = hf\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k_2}{2}\right) = 0\cdot 1[(0\cdot 3 + 0\cdot 05) - (0\cdot 781632 - 0\cdot 0203775)]$$

$$= -0{\cdot}0411254$$

$$k_4 = hf(x_3 + h, y_3 + k_3) = 0\cdot 1[(0\cdot 3 + 0\cdot 1) - (0\cdot 781632 - 0\cdot 0411254)]$$

$$= -0{\cdot}0340507$$

$$\therefore \quad y(0\cdot 4) = y_3 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$= 0\cdot 781632 + \frac{1}{6}[-0\cdot 0481632 - 0\cdot 0815100 - 0\cdot 0822508 - 0\cdot 0340507]$$

$$= 0{\cdot}7406362$$

$\therefore \quad \mathbf{y(0{\cdot}4) \;=\; 0{\cdot}7406362 \;\simeq\; 0{\cdot}74064}$ [পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত]

উদাহরণ 2 ঃ বুঙ্গো-কুট্টা পদ্ধতি প্রয়োগ করে, $y(1{\cdot}4)$-এর মান নির্ণয় করুন, নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে ঃ

$$\frac{dy}{dx} = x.\sqrt[3]{y} \quad \text{যখন } y(1) = 1 \text{ এবং } h = 0{\cdot}1$$

সমাধান ঃ এখানে $x_0 = 1, \; y_0 = 1, \; h = 0\cdot 1$ এবং $f(x, y) = x\sqrt[3]{y}$

$$\therefore \quad k_1 = hf(x_0, y_0) = 0\cdot 1\left[1\cdot \sqrt[3]{1}\right] = 0\cdot 1$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0\cdot 1\left[(1+0\cdot 05)\sqrt[3]{1+0\cdot 05}\right] = 0\cdot 106722$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0\cdot 1\left[(1+0\cdot 05)\sqrt[3]{1+0\cdot 053361}\right] = 0\cdot 106835$$

$$k_4 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right) = 0\cdot 1\left[(1+0\cdot 05)\sqrt[3]{1+0\cdot 106835}\right] = 0\cdot 108613$$

$$y(1\cdot 1) = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{6}[0\cdot 100000 + 0\cdot 213444 + 0\cdot 213670 + 0\cdot 108613] = 1\cdot 105954$$

$y(1{\cdot}2)$-এর জন, $x_1, = 1{\cdot}1,\ y_1 = 1{\cdot}105954$

$$k_1 = hf\left(x_1, y_1\right) = 0\cdot 1\left[1\cdot 1 \times \sqrt[3]{1\cdot 105954}\right] = 0\cdot 113755$$

$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2},\ y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = 0\cdot 1\left[(1\cdot 1+0\cdot 05)\sqrt[3]{1\cdot 105954+0\cdot 056878}\right]$$

$$= 0{\cdot}110450$$

$$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2},\ y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = 0\cdot 1\left[(1\cdot 1+0\cdot 05)\sqrt[3]{1\cdot 105954+0\cdot 055225}\right]$$

$$= 0{\cdot}120873$$

$$k_4 = hf\left(x_1 + h, y_1 + k_3\right) = 0\cdot 1\left[(1\cdot 1+0\cdot 1)\sqrt[3]{1\cdot 105954+0\cdot 120873}\right]$$

$$= 0{\cdot}128462$$

$$\therefore \quad y(1\cdot 2) = y_1 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$$= 1 \cdot 105954 + \frac{1}{6}[0 \cdot 113755 + 0 \cdot 220900 + 0 \cdot 241746 + 0 \cdot 128462]$$

$$= 1{\cdot}223431$$

$$\therefore \quad y(1{\cdot}2) = 1{\cdot}223431$$

$y(1{\cdot}3)$-এর জন্য, $x_2 = 1{\cdot}2$, $y_2 = 1{\cdot}223431$

$$k_1 = hf(x_2, y_2) = 0 \cdot 1\left[1 \cdot 2 \times \sqrt[3]{1 \cdot 223431}\right] = 0 \cdot 128344$$

$$k_2 = hf\left(x_2 + \frac{h}{2},\ y_2 + \frac{k_1}{2}\right) = 0 \cdot 1\left[(1 \cdot 2 + 0 \cdot 05)\sqrt[3]{1 \cdot 223431 + 0 \cdot 064172}\right]$$

$$= 0{\cdot}135989$$

$$k_3 = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_2}{2}\right) = 0 \cdot 1\left[(1 \cdot 2 + 0 \cdot 05)\sqrt[3]{1 \cdot 223431 + 0 \cdot 067994}\right]$$

$$= 0{\cdot}136124$$

$$k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3) = 0 \cdot 1\left[(1 \cdot 2 + 0 \cdot 1)\sqrt[3]{1 \cdot 223431 + 0 \cdot 136124}\right]$$

$$= 0{\cdot}144015$$

$$\therefore \quad y(1 \cdot 3) = y_2 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$= 1 \cdot 223431 + \frac{1}{6}[0 \cdot 128344 + 0 \cdot 271978 + 0 \cdot 272248 + 0 \cdot 144015]$$

$$= 1{\cdot}359528$$

$$\therefore \quad y(1{\cdot}3) = 1{\cdot}359528$$

$y(1{\cdot}4)$-এর জন্য, $x_3 = 1{\cdot}3$, $y_3 = 1{\cdot}359528$

$$k_1 = hf(x_3, y_3) = 0 \cdot 1\left[1 \cdot 3 \times \sqrt[3]{1 \cdot 359528}\right] = 0 \cdot 144014$$

$$k_2 = hf\left(x_3 + \frac{h}{2},\ y_3 + \frac{k_1}{2}\right) = 0 \cdot 1\left[(1 \cdot 3 + +0 \cdot 05)\sqrt[3]{1 \cdot 359528 + 0 \cdot 072007}\right]$$

$$= 0{\cdot}152148$$

$$k_3 = hf\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k_2}{2}\right) = 0 \cdot 1\left[(1 \cdot 3 + 0 \cdot 05)\sqrt[3]{1 \cdot 359528 + 0 \cdot 076074}\right]$$

$$= 0{\cdot}152292$$

$$k_4 = hf(x_{3\_}h, y_3 + k_3) = 0 \cdot 1\left[(1 \cdot 3 + 0 \cdot 1)\sqrt{1 \cdot 359528 + 0 \cdot 152292}\right]$$

$$= 0{\cdot}160680$$

$$\therefore\ y(1 \cdot 4) = y_3 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$$= 1 \cdot 359528 + \frac{1}{6}[0 \cdot 144014 + 0 \cdot 304296 + 0 \cdot 304584 + 0 \cdot 160680]$$

$$= 1{\cdot}511790$$

$\therefore$ **$y(1{\cdot}4)$ = 1·511790 ≃ 1·51179** [পাঁচ দশমিক পর্যন্ত]

উদাহরণ 3 ঃ রুঙ্গে-কুট্টা পদ্ধতি প্রয়োগ করে, নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে $y(0{\cdot}6)$-এর মান নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dy}{dx} = xy,\ y(0) = 2 \text{ এবং } h = 0{\cdot}2 \text{ নিয়ে}$$

সমাধান ঃ এখানে $x_0 = 0,\ y_0 = y(0) = 2,\ h = 0 \cdot 2$ এবং $f(x, y) = xy$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0 \cdot 2 \times (0 \times 2) = 0 \cdot 00$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0 \cdot 2\left[(0 + 0 \cdot 1) \times (2 + 0)\right] = 0 \cdot 04$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0 \cdot 2\left[(0 + 0 \cdot 1) \times (2 + 0 \cdot 02)\right] = 0 \cdot 0404$$

$$k_4 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right) = 0 \cdot 2\left[(0 + 0 \cdot 2) \times (2 + 0 \cdot 0404)\right] = 0 \cdot 081616$$

$$y(0 \cdot 2) = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$$= 2 + \frac{1}{6}[0 \cdot 0000 + 0 \cdot 08 + 0 \cdot 0808 + 0 \cdot 081616]$$

$$= 2{\cdot}0404027 \simeq 2{\cdot}040403$$

$$\therefore\ y(0{\cdot}2) = 2{\cdot}040403$$

$y(0{\cdot}4)$-এর জন্য, $x_1 = 0{\cdot}2$, $y_1 = 2{\cdot}040403$

$$k_1 = hf\left(x_1, y_1\right) = 0 \cdot 2[0 \cdot 2 \times 2 \cdot 040403] = 0 \cdot 0816161$$

$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = 0 \cdot 2\left[(0 \cdot 2 + 0 \cdot 1) \times (2 \cdot 040403 + 0 \cdot 408080)\right]$$

$$= 0{\cdot}1248726$$

$$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = 0 \cdot 2\left[(0 \cdot 2 + 0 \cdot 1) \times (2 \cdot 040403 + 0 \cdot 0624363)\right]$$

$$= 0{\cdot}1261704$$

$$k_4 = hf\left(x_1 + h, y_1 + k_3\right) = 0 \cdot 2\left[(0 \cdot 2 + 0 \cdot 2) \times (2 \cdot 040403 + 0 \cdot 1261704)\right]$$

$$= 0{\cdot}1733259$$

$$\therefore\ y(0 \cdot 4) = y_1 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$$= 2 \cdot 040403 + \frac{1}{6}[0 \cdot 0816161 + 0 \cdot 2497452 + 0 \cdot 2523408 + 0 \cdot 1733259]$$

$$= 2{\cdot}1665743 \simeq 2{\cdot}166574$$

$y(0{\cdot}6)$-এর জন্য, $x_2 = 0{\cdot}4$, $y_2 = 2{\cdot}166574$

$$k_1 = hf(x_2, y_2) = 0 \cdot 2[0 \cdot 4 \times 2 \cdot 166574] = 0 \cdot 1733259$$

$$k_2 = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1}{2}\right) = 0 \cdot 2[(0 \cdot 4 + 0 \cdot 1) \times (2 \cdot 166574 + 0 \cdot 866628)]$$

$$= 0{\cdot}2253237$$

$$k_2 = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_3}{2}\right) = 0 \cdot 2[(0 \cdot 4 + 0 \cdot 1) \times (2 \cdot 166574 + 0 \cdot 1126619)]$$

$$= 0{\cdot}2279236$$

$$k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3) = 0 \cdot 2[(0 \cdot 4 + 0 \cdot 2) \times (2 \cdot 166574 + 0 \cdot 2279236)]$$

$$= 0{\cdot}2873397$$

$$y(0 \cdot 6) = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 2 \cdot 166574 + \frac{1}{6}[0 \cdot 1733259 + 0 \cdot 4506474 + 0 \cdot 4558472 + 0 \cdot 2873397]$$

$$= 2{\cdot}3944340$$

$\therefore$ **$y(0{\cdot}6) = 2{\cdot}394434$**

16.9 অনুশীলনী

(1) অয়লারের পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে $y(0{\cdot}04)$-এর মান নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \text{ যখন } x = 0,\ y = 1 \text{ এবং } h = 0{\cdot}02$$

(2) পরিবর্তিত অয়লারের পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে $y(0{\cdot}2)$-এর মান নির্ণয় করুন। তিনি দশমিক স্থান পর্যন্ত ঃ

$$\frac{dy}{dx} = \log(x + y) \text{ যখন } y(0) = 1 \text{ এবং } h = 0{\cdot}1$$

(3) অয়লারের পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে $y(0{\cdot}02)$, $y(0{\cdot}04)$ এবং $(0{\cdot}06)$-এর মান নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y \text{ যখন } y(0) = 1 \text{ এবং } h = 0{\cdot}02$$

(4) পরিবর্তিত অয়লারের পদ্ধতি প্রয়োগ করে 3নং প্রশ্নের উত্তর নির্ণয় করুন।

(5) রুঙ্গে-কুট্টা পদ্ধতি প্রয়োগ করে $\frac{dy}{dx} = x + y$, যখন $y(0) = 1$ এবং $h = 0{\cdot}1$, এই অবকল সমীকরণ থেকে $y(0{\cdot}4)$-এর মান নির্ণয় করুন।

(6) চারক্রম রুঙ্গে-কুট্টা পদ্ধতি প্রয়োগ করে, নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে $y(1{\cdot}2)$ এবং $y(1{\cdot}3)$ -এর মানগুলি নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \text{ যখন } y(1) = 0 \text{ এবং } h = 0{\cdot}1$$

(7) চারক্রম রুঙ্গে-কুট্টা পদ্ধতি প্রয়োগ করে, নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে $y(0{\cdot}4)$ -এর মান নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dy}{dx} = xy \text{ যখন } y(0) = 2 \text{ এবং } h = 0{\cdot}1$$

(8) চারক্রম রুঙ্গে-কুট্টা পদ্ধতি প্রয়োগ করে, নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে $y(0{\cdot}6)$-এর মান নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \cdot 5 - x + y^2}{1 + y + x^2}, \quad \text{যখন } y(0) = 0 \text{ এবং } h = 0{\cdot}1$$

(9) চারক্রম রুঙ্গে-কুট্টা পদ্ধতি প্রয়োগ করে, নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণ থেকে $y(0{\cdot}5)$-এর মান নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + \frac{1}{4}y^2, \quad \text{যখন } y(0) = 1 \text{ এবং } h = 0{\cdot}1$$

16.10 উত্তরমালা

(1) 0·9606

(2) 1·008

(3) 1·0202, 1·0408, 1·0619

(4) 1·0202, 1·0408, 1·0619

(5) 1·5836

(6) 0·24631, 0·41357

(7) 2·1666

(8) 0·114574

(9) –0·84945

মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

— রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে, সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নূতন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

— সুভাষচন্দ্র বসু

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

— Subhas Chandra Bose

Price : ₹. 225.00

(NSOU-র ছাত্রছাত্রীদের কাছে বিক্রয়ের জন্য নয়)

Published by : Netaji Subhas Open University, DD-26, Sector-I, Salt Lake, Kolkata-700 064 &
Printed at : The Saraswati Printing Works, 2, Guru Prosad Chowdhury Lane, Kolkata 700 006