NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

# STUDY MATERIAL

## ELECTIVE MATHEMATICS HONOURS

# EMT – 13

Statistics and its Application

Blocks : 1 & 2

# প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমত কোনও বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণ ক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে—যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন; যখনই কোনও শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটাই মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর, প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায় ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

সপ্তম পুনর্মুদ্রণ ঃ অক্টোবর, 2019

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

# পরিচিতি

**বিষয় : গণিত বিদ্যা** **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম : পর্যায় ঃ **EMT-13 : 1 & 2**

| | রচনা | সম্পাদনা |
|---|---|---|
| একক 1 | ড. মৃত্যুঞ্জয় পণ্ডিত | ড. শঙ্কর দে |
| একক 2 | ড. মৃত্যুঞ্জয় পণ্ডিত | ড. শঙ্কর দে |
| একক 3 | ড. মৃত্যুঞ্জয় পণ্ডিত | ড. শঙ্কর দে |
| একক 4 | ড. মৃত্যুঞ্জয় পণ্ডিত | ড. শঙ্কর দে |
| একক 5 | ড. মৃত্যুঞ্জয় পণ্ডিত | ড. শঙ্কর দে |
| একক 6 | ড. শঙ্কর দে | ড. মৃত্যুঞ্জয় পণ্ডিত |
| একক 7 | ড. শঙ্কর দে | ড. মৃত্যুঞ্জয় পণ্ডিত |
| একক 8 | ড. শঙ্কর দে | ড. মৃত্যুঞ্জয় পণ্ডিত |
| একক 9 | ড. কনক কান্তি দাশ | ড. শঙ্কর দে |
| একক 10 | ড. কনক কান্তি দাশ | ড. শঙ্কর দে |
| একক 11 | ড. কনক কান্তি দাশ | ড. শঙ্কর দে |
| একক 12 | ড. কনক কান্তি দাশ | ড. শঙ্কর দে |
| একক 13 | ড. কনক কান্তি দাশ | ড. শঙ্কর দে |

# নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

## EMT -13

### পরিসংখ্যান বিদ্যা ও প্রয়োগ

(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়

**1**

পর্যায়

# 2

# একক-1 ☐ প্রাথমিক আলোচনা ও তথ্য উপস্থাপনা

গঠন ঃ



## 1.1 প্রস্তাবনা ঃ

'পরিসংখ্যান' শব্দটির দুটি ভিন্ন অর্থ প্রচলিত আছে। বহুবাচনিক অর্থে পরিসংখ্যান বলতে কোনো বিশেষ বিষয়ের ওপর কোনো বিশেষ পদ্ধতিতে সংকলিত রাশিমালাকে বোঝায়। যেমন কোনো ব্যাবসায়ে লাভ ক্ষতির হিসাব নির্ণয়ের জন্য সংগৃহীত রাশিমালা, দেশের জন্ম-মৃত্যুর হিসাব নির্ণয়ের জন্য সংগৃহীত রাশিমালা ইত্যাদি। **একবাচনিক অর্থে** পরিসংখ্যান হল একটি বৈজ্ঞানিক পদ্ধতি যার দ্বারা রাশি তথ্যেব সংগ্রহণ, শ্রেণিবিন্যাস, বিশ্লেষণ ও সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায়।

## ☐ রাশিবিজ্ঞানেব সংজ্ঞা ঃ

বিজ্ঞানের যে শাখায় তত্ত্ব ও প্রক্রিয়ার দ্বারা কোনো বিশেষ বিষয়ের ওপর সংগৃহীত রাশিতথ্যের শ্রেণিবিন্যাস, উপস্থাপন, বিশ্লেষণ ও সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা হয়, তাকে রাশিবিজ্ঞান বলা হয়।

## 1.2 রাশিতথ্য ঃ

কোনো বিষয়ে পরিসংখ্যানীয় অনুসন্ধান কাজের জন্য সংগৃহীত তথ্যকে রাশিতথ্য বলা হয়। রাশিতথ্য সংকলনের মধ্যে ভুল থাকলে তা বিশ্লেষণ করে যে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যাবে, তা সঠিক হবে না। রাশিতথ্যের সঠিকতা (accuracy) ও বিশ্বস্ততার (reliability) ওপর সঠিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ নির্ভর করে। এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে রাশিতথ্যের মানগুলির বিভিন্নতার (variations) সঠিক কারণ জানা সম্ভব নয়—এখানে 'বিভিন্নতা' সম্ভাবনার (probability or chance) উপর ভিত্তি করে ধারণা করতে হবে।

রাশিতথ্যমালাকে দুইভাগে ভাগ করা যায় ঃ

(i) প্রাথমিক রাশিতথ্য (Primary data)

(ii) অপ্রাথমিক রাশিতথ্য (Secondary data)

প্রাথমিক রাশিতথ্য ঃ অনুসন্ধানের ক্ষেত্র থেকে কোনো বিশেষ উদ্দেশ্যে সরাসরি সংগৃহীত রাশিতথ্যকে প্রাথমিক রাশিতথ্য বলা হয়।

প্রাথমিক রাশিতথ্যের উদাহরণ হল ঃ আমাদের দেশে প্রতি দশবছর অন্তর আদমশুমারির (census) এর সাহায্যে ধর্ম, জীবিকা, আয় ইত্যাদি অনুসারে পুরুষ ও মহিলাদের বিস্তৃত বিবরণ।

অপ্রাথমিক রাশিতথ্য ঃ প্রাথমিক রাশিতথ্য কোনো ব্যক্তি বা সংস্থা ব্যবহার করলে তার বা তাদের কাছে এটি অপ্রাথমিক রাশিতথ্য।

একই তথ্য যে সংগ্রহ করছে তার কাছে প্রাথমিক তথ্য, আবার অন্য একজন যে ঐ তথ্য ব্যবহার করছে তার কাছে অপ্রাথমিক তথ্য।

## 1.3 রাশিতথ্যমালা সংগ্রহের পদ্ধতি ঃ

রাশিতথ্যমালা সংগ্রহের জন্য নিচের পদ্ধতিগুলি ব্যবহার করা হয়ে থাকে।

(i) প্রত্যক্ষ ব্যক্তিগত অনুসন্ধান

(ii) অপ্রত্যক্ষ মৌখিক অনুসন্ধান

(iii) প্রশ্নমালার দ্বারা অনুসন্ধান

(iv) দূরভাষের সাহায্যে অনুসন্ধান।

অনুসন্ধানের ক্ষেত্র বিস্তৃত না হলে প্রত্যক্ষ ব্যক্তিগত অনুসন্ধান পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়ে থাকে। অনুসন্ধানের ক্ষেত্র বিস্তৃত হলে অপেক্ষাকৃত কম সময়ে এবং ব্যয়ে অপ্রত্যক্ষ মৌখিক অনুসন্ধান পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়।

অনুসন্ধান ক্ষেত্রের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত কয়েকটি প্রশ্নমালা এবং তাদের উত্তরের জন্য শূন্যস্থান ও নির্দেশাবলি ডাকযোগে অথবা অনুসন্ধানকারী মারফত নির্দিষ্ট কয়েকজন উত্তরদাতার কাছে পাঠিয়ে দেওয়া হয় এবং নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে উত্তরমালা সংগ্রহ করা হয়। এই পদ্ধতিকে বলা হয় প্রশ্নমালার দ্বারা অনুসন্ধান। এই পদ্ধতিতে অল্প খরচে এবং অল্প সময়ের মধ্যে তথ্য সংগ্রহ করা যায়।

দূরভাষের মাধ্যমেও অল্প সময়ের মধ্যে পরিচিত ব্যক্তিদের কাছ থেকে তথ্য সংগ্রহ করা যায়।

## 1.4 সমগ্রক (Population) ও নমুনা (Sample) :

পরিসংখ্যানে তথ্যানুসন্ধানের সমগ্র পর্যবেক্ষণকে অথবা সাধারণ-বৈশিষ্ট্যপূর্ণ নির্দিষ্ট কতকগুলি পর্যবেক্ষণকে সমগ্রক বলা হয়।

সমগ্রক থেকে নেওয়া কতকগুলি নির্বাচিত পর্যবেক্ষণকে বলা হয় নমুনা।

## 1.5 পূর্ণতদন্ত (Complete enumeration or Census) এবং নমুনাতদন্ত (Partial enumeration or Sample Survey) :

পূর্ণতদন্ত : সমগ্রক (Population) এর প্রতিটি একক সম্বন্ধে তথ্য সংগ্রহ করা হলে, তাকে পূর্ণতদন্ত বলা হয়। এই পদ্ধতিতে সংগৃহীত রাশিতথ্যসমূহ অধিকতর বিশ্বাসযোগ্য ও সঠিক হয়। কিন্তু এই পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হলে প্রচুর সময় ও অর্থের প্রয়োজন হয়। এই পদ্ধতিতে আমাদের দেশে প্রতি দশ বছর অন্তর জনগণের শিক্ষা, বয়স, বৃত্তি, আয় প্রভৃতি অনুসারে পুরুষ ও মহিলাদের বিস্তৃত তথ্যানুসন্ধান করা হয়ে থাকে।

নমুনা তদন্ত : সমগ্রক থেকে নির্বাচিত নমুনার অন্তর্ভুক্ত এককগুলি সম্বন্ধে তথ্য অনুসন্ধান করাকে নমুনা তদন্ত বলা হয়। নমুনা তদন্ত করে কোনো বিশেষ বৈশিষ্ট্যসাপেক্ষে নমুনা সম্পর্কে যে সিদ্ধান্ত নেওয়া হয়, তা সমগ্রকের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

## 1.6 তথ্যের বৈশিষ্ট (Characteristics) :

সমগ্রকের প্রতিটি একক যে বিশেষ গুণের অধিকারী তাকে একক সমূহের বৈশিষ্ট্য বলা হয়। যথা আয়, ব্যয়, উচ্চতা ইত্যাদি কোনো সমগ্রকের একক সমূহের বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করে। এই বৈশিষ্ট্য দুই প্রকারের।

(i) পরিমেয় বৈশিষ্ট্য (measurable characteristics)

(ii) অপরিমেয় বৈশিষ্ট্য (non-measurable characteristics)

যে বৈশিষ্ট্যকে সংখ্যার দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাকে পরিমেয় বৈশিষ্ট্য বা চলক বলে। যথা—আয়, বয়স, উচ্চতা ইত্যাদি। যে বৈশিষ্ট্যগুলি সংখ্যার দ্বারা প্রকাশ করা যায় না তাকে অপরিমেয় বৈশিষ্ট্য বলে। যথা—জাতি, ধর্ম, বৃত্তি ইত্যাদি।

## 1.7 রাশিতথ্যের শ্রেণিবিন্যাসকরণ (Classification of data) :

রাশিতথ্যসমূহ সংগ্রহ করার পর সেগুলিকে সুশৃঙ্খল এবং সঠিকভাবে সাজাতে হবে, যাতে সহজে বোধগম্য এবং ব্যবহারের উপযোগী হয়। রাশিতথ্যসমূহকে তাদের সাদৃশ্য অনুযায়ী বিভিন্ন শ্রেণিতে বিভক্ত করার পদ্ধতিই হল শ্রেণিবিন্যাসকরণ।

সাধারণত চারটি পদ্ধতিতে রাশিতথ্যসমূহকে শ্রেণিবিন্যাসিত করা হয় ঃ

(i) **গুণের ভিত্তিতে** (On qualitative basis) ঃ রাশি তথ্যসমূহকে কোনো অপরিমেয় বৈশিষ্ট্যের সাপেক্ষে শ্রেণিবিন্যাসকরণের পদ্ধতিকে গুণগত শ্রেণিবিন্যাস বলে। যেমন লিঙ্গ, জাতি, পেশা, ধর্ম ইত্যাদির সাপেক্ষে শ্রেণিবিন্যাসকরণ।

(ii) **পরিমাপের ভিত্তিতে** (On quantitative basis) ঃ রাশিতথ্যসমূহকে কোনো পরিমেয় বৈশিষ্ট্যের সাপেক্ষে শ্রেণিবিন্যাসকরণের পদ্ধতিকে সংখ্যাগত শ্রেণিবিন্যাস বলে। যেমন আয়, উচ্চতা, ওজন, বয়স ইত্যাদির সাপেক্ষে শ্রেণিবিন্যাসকরণ।

(iii) **সময়ের ভিত্তিতে** (On time basis) ঃ এই পদ্ধতিতে রাশিতথ্যসমূহকে সময়ের সাপেক্ষে শ্রেণিবিন্যাস করা হয়। যেমন কোনো কারখানার সাপ্তাহিক উৎপাদন, মাসিক উৎপাদন, বাৎসরিক উৎপাদন ইত্যাদি।

(iv) **ভৌগোলিক অবস্থানের ভিত্তিতে** (On geographical basis) ঃ এই পদ্ধতিতে ভৌগোলিক বিন্যাস সাপেক্ষে তথ্যসমূহকে শ্রেণিবিন্যাস করা হয়। যেমন ভারত থেকে যে দেশগুলিতে চিনি রপ্তানি করা হয়, সেই দেশগুলির সাপেক্ষে চিনি রপ্তানির শ্রেণিবিন্যাসকরণ।

## 1.8 রাশিতথ্যের উপস্থাপনা ঃ

রাশিতথ্যসমূহকে সাধারণত তিনটি পদ্ধতিতে উপস্থাপনা করা হয়।

(i) বিবরণের মাধ্যমে (Textual presentation)

(ii) ছকের মাধ্যমে (Tabular presentation)

(iii) লেখ-এর মাধ্যমে (Graphical presentation)

**(i) বিবরণের মাধ্যমে ঃ**

এই পদ্ধতিতে রাশিতথ্যসমূহকে একটি বিবরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। এই পদ্ধতির সুবিধা হল যে, সাধারণ লোক এটা পড়ে বুঝতে পারে কিন্তু বিবরণলিপি দীর্ঘ হলে রাশিতথ্যসমূহের বৈশিষ্ট্যগুলি অনুধাবন করা খুব কষ্টসাধ্য কাজ।

**(ii) ছকের মাধ্যমে ঃ** এই পদ্ধতিতে সংগৃহীত রাশিতথ্যসমূহকে প্রথমে শ্রেণিবিন্যাসিত (classify) করে একটি ছকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

একটি ছককে মোটামুটি চারটি অংশে ভাগ করা হয়ে থাকে।

(ক) শিরোনাম (Title) ঃ ছকের বিষয়বস্তুর সংক্ষিপ্ত বিবরণ দিয়ে ছকের উপরের অংশে লিখিত অংশকে শিরোনাম বলা হয়।

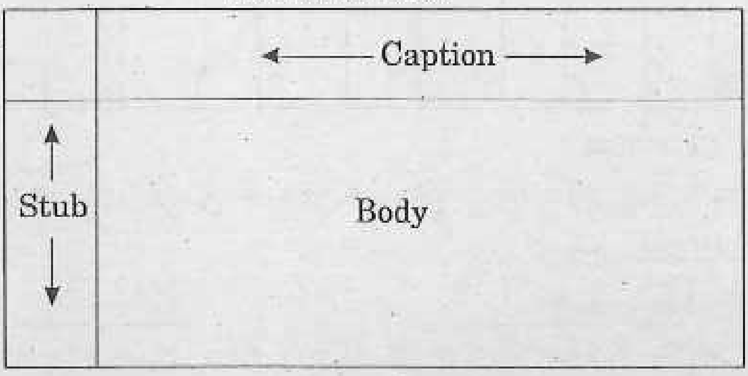
(খ) ছকের বামপাশের বিবরণলিপি (Stub or Row Headings) ঃ এটি ছকের বামদিক থেকে ডানদিকের সারিকৃত রাশিমালার বিবরণলিপি।

(গ) ছকের উপরিভাগের বিবরণ লিপি (Caption or Column Headings) ঃ এটি ছকের ওপর থেকে নিচে সারিকৃত রাশিমালার বিবরণ লিপি।

(ঘ) মূল অংশ (Body) ঃ এই অংশে রাশিতথ্যসমূহ প্রকাশ করা হয়।

নিচে একটি ছকের বিভিন্ন অংশ দেখানো হল ঃ

শিরোনাম (Title)




ছক তৈরি করার জন্য বাঁধা ধরা কোনো নিয়ম নেই। ছক এমনভাবে তৈরি করতে হবে যাতে রাশিতথ্যমালা সুস্পষ্টভাবে প্রকাশ করা যায়। ছক তৈরি করার ক্ষেত্রে নিচের নিয়মগুলি মোটামুটিভাবে মেনে চলা উচিত।

(i) শিরোনামটি পরিষ্কার ও অর্থবোধক হবে।

(ii) রাশিতথ্যসমুহের সঠিক একক নির্বাচন করতে হবে।

(iii) ছকের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সামঞ্জস্যপূর্ণ হবে।

(iv) সারিগুলির বিবরণলিপি সহজ, সুস্পস্ট ও সংক্ষিপ্ত হবে।

(v) সরাসরি তুলনীয় রাশিগুলি পাশাপাশি লিপিবন্ধ থাকবে।

নিচের প্রদত্ত বৈশিষ্ট্য অনুসারে একটি কারখানার কর্মচারীদের বিভাজন প্রকাশ করার জন্য একটি শূন্য ছক (blank table) তৈরি করা হল ঃ

(i) লিঙ্গ ঃ পুরুষ ও মহিলা

(ii) বয়স ঃ 20 এর নিচে, 20 থেকে 30, 30 এর বেশি

(iii) বিভাগ ঃ দক্ষ ও অদক্ষ

(iv) বেতন ঃ 1500 টাকার কম, 1500 থেকে 3000 টাকা, 3000 টাকার বেশি।

সমাধান : লিঙ্গ, বয়স, দক্ষতা ও বেতন অনুসারে একটি কারখানার কর্মচারীদের ছক।

| বয়স (বৎসরে) | 20 এর কম | | | | 20-30 | | | | 30 এর বেশি | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| বিভাগ | দক্ষ | | অদক্ষ | | দক্ষ | | অদক্ষ | | দক্ষ | | অদক্ষ | |
| বেতন (টাকায়) / লিঙ্গ | পুরুষ | মহিলা | পুরুষ | মহিলা | পুরুষ | মহিলা | পুরুষ | মহিলা | পুরুষ | মহিলা | পুরুষ | মহিলা |
| 1. 1500 এর কম | | | | | | | | | | | | |
| 2. 1500-3000 | | | | | | | | | | | | |
| 3. 3000 এর বেশি | | | | | | | | | | | | |

**(iii) লেখ এর মাধ্যমে :**

বিভিন্ন ধরনের লেখচিত্রের মাধ্যমে রাশিতথ্যসমূহকে প্রকাশ করা যায়। যেমন :

(ক) রেখাচিত্র (Line graph)

(খ) দণ্ডচিত্র (Bar graph)

(গ) আনুপাতিক চিত্র বা সেমিলগারিদম লেখচিত্র (Ratio chart or semi-logarithmic chart)

(ঘ) পাই চিত্র (Pie chart)

(ঙ) আয়তলেখ (Histogram)

(চ) পরিসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygon)

(ছ) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা (Ogive or cumulative Frequency curve) :

প্রতিটি পদ্ধতির সংক্ষিপ্ত বিবরণ দেওয়া হল।

**(ক) রেখাচিত্র :**

ছক কাগজে পরস্পর দুটি লম্ব রেখা নেওয়া হয়। অনুভূমিক রেখাকে x-অক্ষ এবং উল্লম্বরেখাকে y-অক্ষ ধরা হয়। x-অক্ষ বরাবর সময় (স্বাধীন চলক) এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ সাংখ্যমান (অধীন চলক) গণনা করে কয়েকটি বিন্দু পাওয়া যায়। এই বিন্দুগলি পর্যায়ক্রমে সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করলে যে চিত্র পাওয়া যাবে তাকে রেখাচিত্র বলে।

উদাহরণ : নিচের ছকে একটি ব্যবসায়িক প্রতিষ্ঠানের জানুয়ারি, 2006 এর প্রথম দশ দিনের দৈনিক লাভ-ক্ষতির হিসাব দেওয়া হল :

| মাসের দিনগুলি | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| লাভ (টাকায়) | 500 | 700 | 900 | 800 | | 300 | 500 | | | 300 |
| ক্ষতি (টাকায়) | | | | | 400 | | | 100 | 200 | |

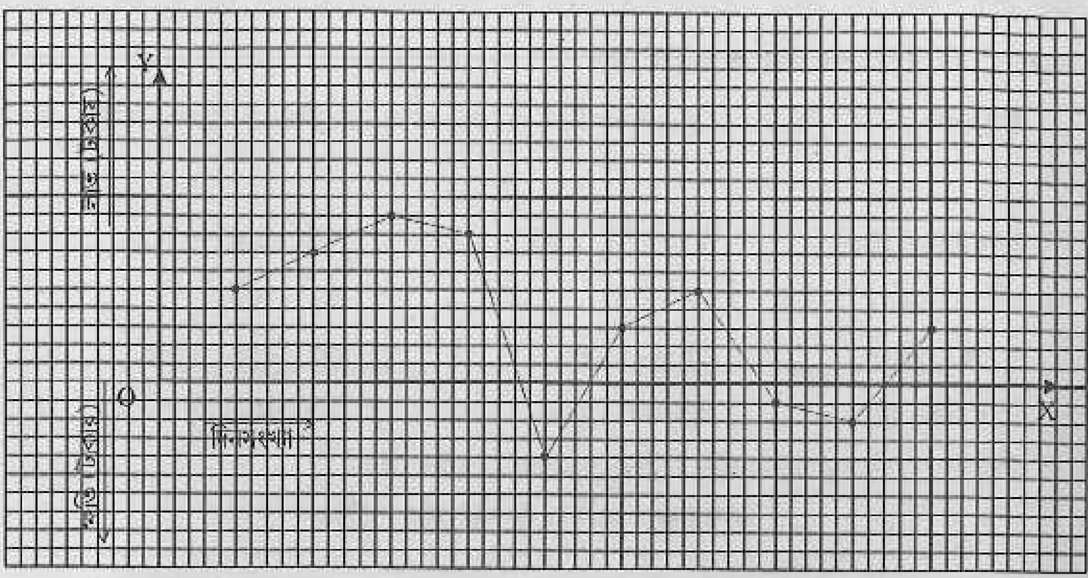
একটি রেখাচিত্রের মাধ্যমে ওপরের রাশিতথ্যকে প্রকাশ করা হ'ল।

দিনগুলি x-অক্ষ বরাবর এবং লাভক্ষতি y-অক্ষ বরাবর প্রকাশ করা হয়েছে।

অনুভূমিক স্কেলের পরিমাণ ঃ ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1দিন

উল্লম্ব স্কেল পরিমাণ ঃ ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 100 টাকা

প্রতিষ্ঠানের মাসের প্রথম দশদিনের লাভ-ক্ষতির রেখাচিত্র ঃ




**(খ) বারচিত্র ঃ**

বারচিত্রে একই প্রস্থযুক্ত এবং পরস্পর সমানদূরে অবস্থিত একাধিক সমান্তরাল বার বা দণ্ড থাকে। কোনো বারের দৈর্ঘ্য উহার যে রাশিতথ্যের মানকে প্রকাশ করে, তার সঙ্গে সমানুপাতিক হয়।

বারচিত্র দুই প্রকার—উল্লম্ব ও অনুভূমিক।

বারগুলি উল্লম্বভাবে কোনো রেখার ওপর পরস্পর সমান দূরত্বে লম্বভাবে থাকলে উল্লম্ব বারচিত্র পাওয়া যায়।

আবার বারগুলি অনুভূমিকভাবে কোনো উল্লম্বরেখার ওপর সমান দূরত্বে লম্বভাবে থাকলে অনুভূমিক বারচিত্র পাওয়া যায়।

প্রত্যেকটি বারচিত্রকে কয়েকটি উপবিভাগে ভাগ করা যায়। যথা ঃ

(i) জটিল বারচিত্র (Multiple or Compound Bar chart)

(ii) বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্র (Component Bar chart)

জটিল বারচিত্রে পরস্পর সম্পর্কিত বিভিন্ন প্রকারের রাশিতথ্যসমূহ গায়ে গায়ে লাগানো বিভিন্ন দণ্ডের দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

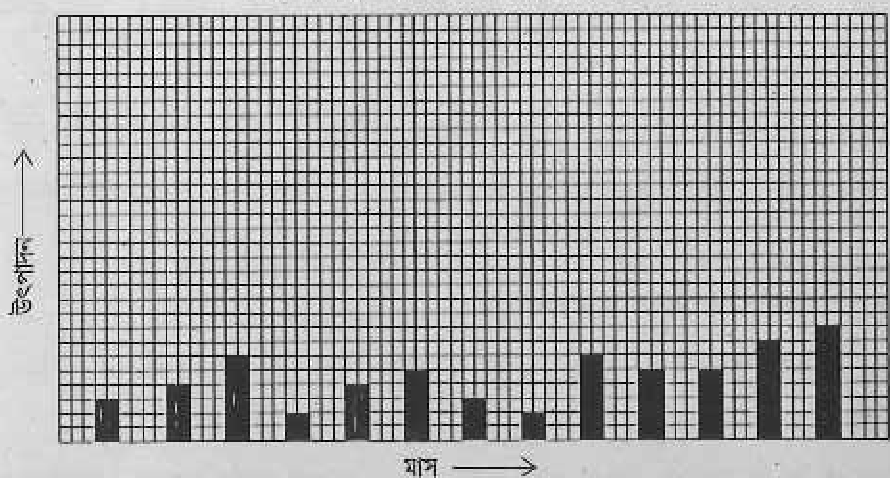
বহু-অংশে বিভক্ত বারচিত্রে একটি দণ্ডকে বিভিন্ন অংশে বিভক্ত করে রাশিতথ্যমালায় বিভিন্ন অংশ প্রকাশ করা হয়। সমগ্র দণ্ডটি রাশিতথ্যমালা সমগ্র মানকে প্রকাশ করে এবং দণ্ডের এক একটি অংশ প্রতিটি উপাংশের মানকে প্রকাশ করে।

উদাহরণ ঃ একটি T.V. তৈরির কারখানায় 2005 সালে উৎপাদনের মাসিক হিসাব দেওয়া হ'ল।

| | | |
|---|---|---|
| জানুয়ারি—150 | ফেব্রুয়ারি—200 | মার্চ—300 |
| এপ্রিল—100 | মে—200 | জুন—250 |
| জুলাই—150 | আগস্ট—100 | সেপ্টেম্বর—300 |
| অক্টোবর—250 | নভেম্বর—350 | ডিসেম্বর—400 |

উপরোক্ত রাশিতথ্যকে একটি দণ্ডচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

কারখানায় মাসিক উৎপাদনের দণ্ডচিত্র




এখানে অনুভূমিক অক্ষ বরাবর মাস এবং উল্লম্ব অক্ষ বরাবর উৎপাদন প্রকাশ করা হয়েছে।

উল্লম্ব স্কেলের পরিমাণ ঃ ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = 50

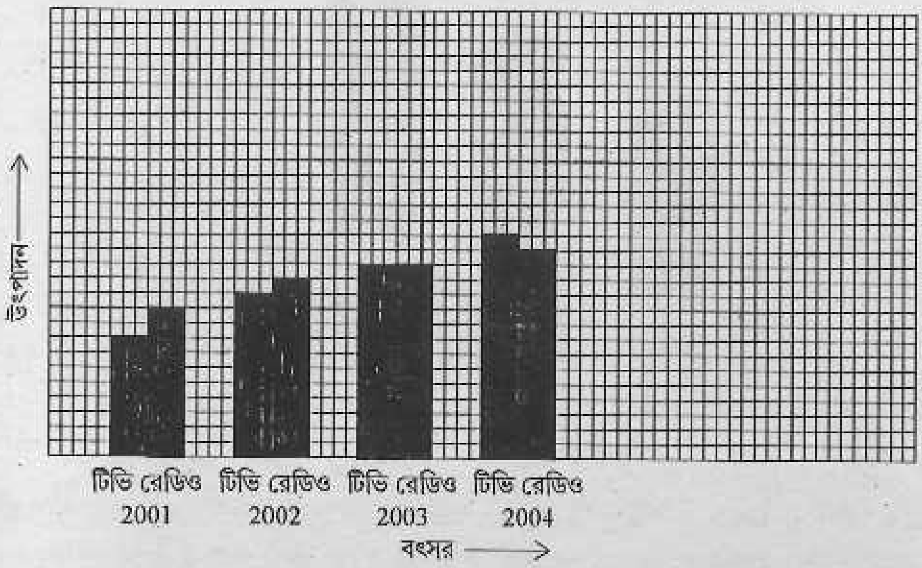
উদাহরণ ঃ নিচে কোনো প্রতিষ্ঠানের কয়েক বছরের উৎপাদনের রাশিতথ্যসমূহকে জটিল বার চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

| বৎসর | টিভি | রেডিও |
|---|---|---|
| 2001 | 800 | 1000 |
| 2002 | 1100 | 1200 |
| 2003 | 1300 | 1300 |
| 2004 | 1500 | 1400 |

**সমাধান ঃ** অনুভূমিক অক্ষ বরাবর বৎসর এবং উল্লম্ব অক্ষ বরাবর উৎপাদন ধরা হয়েছে।

**উল্লম্ব স্কেলের পরিমাণ ঃ** ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = 100

একটি প্রতিষ্ঠানে উৎপাদনের জটিল বারচিত্র



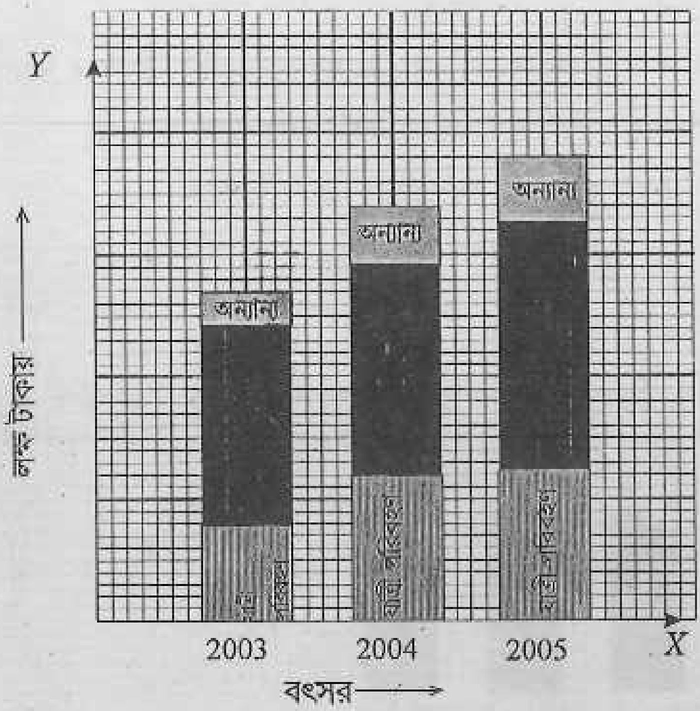

**উদাহরণ ঃ** একটি পরিবহন সংস্থায় 2003, 2004 এবং 2005 সালে বিভিন্ন খাতে আয়ের তথ্যসমূহকে একটি বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্রের সাহায্যে দেখানো হল ঃ

| বৎসর | 2003 (লক্ষ টাকায়) | 2004 (লক্ষ টাকায়) | 2005 (লক্ষ টাকায়) |
|---|---|---|---|
| যাত্রী পরিবহন | 10 | 12 | 13 |
| পণ্য পরিবহন | 15 | 18 | 20 |
| অন্যান্য | 2 | 4 | 5 |

সমাধান ঃ

এখানে অনুভূমিকরেখা বরাবর বৎসর এবং উল্লম্বরেখা বরাবর আয়কে প্রকাশ করা হয়েছে। উল্লম্ব স্কেলের পরিমাণ ঃ ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 লক্ষ টাকা।

**একটি পরিবহন সংস্থায় বিভিন্ন খাতে আয়ের বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্র**




**পাইচিত্র (Pie Chart)** ঃ পাইচিত্রে একটি বৃত্ত দ্বারা সম্পূর্ণ রাশিতথ্যকে প্রকাশ করা হয়। কয়েকটি ব্যাসার্ধ দ্বারা বৃত্তটিকে এমনভাবে ভাগ করা হয় যাতে প্রত্যেকটি বৃত্তাংশ রাশিতথ্যমালার এক একটি রাশিতথ্যের সমানুপাতিক হয়।

পাই চিত্র অঙ্কন করতে হলে প্রথমে বিভিন্ন রাশিতথ্যকে পূর্ণ রাশিতথ্যের শতকরা হিসাবে প্রকাশ করতে হবে।

পূর্ণবৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণের মান = 360°

$\because$ পূর্ণবৃত্ত সমগ্র রাশিতথ্যের মান প্রকাশ করে

$\therefore$ সমগ্র রাশিতথ্যের 100% = 360° এর সমানুপাতিক

$$\therefore \quad ,, \quad ,, \quad 1\% = \frac{360}{100} = 3{\cdot}6^\circ \quad ,, \quad ,,$$

বিভিন্ন রাশিতথ্যের শতকরা হিসাবকে 3.6 দিয়ে গুণ করে কেন্দ্রস্থ কোণগুলি নির্ণয় করা হয়।

এই কেন্দ্রীয় কোণগুলি সমগ্র রাশিতথ্যমালার বিভিন্ন অংশের সমানুপাতিক।

যে কোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত এঁকে তার কেন্দ্রে এই কেন্দ্রস্থ কোণগুলি অঙ্কন করে কয়েকটি বৃত্তাংশ পাওয়া যাবে। প্রত্যেকটি বৃত্তাংশ এক-একটি অংশ-রাশিতথ্যকে প্রকাশ করে।

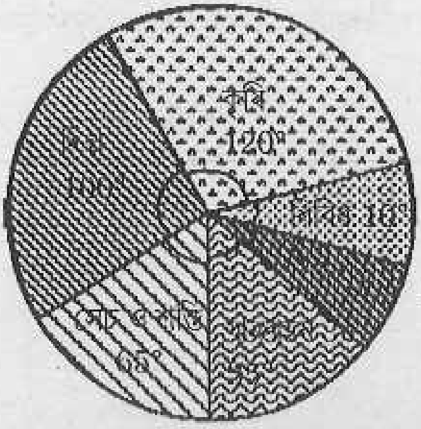
**উদাহরণ** ঃ একটি পঞ্চবার্ষিকী পরিকল্পনায় বিভিন্ন খাতে আনুমানিক ব্যয়গুলি দেখানো হল। পাইচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করুন ঃ

| বিষয় | টাকা (কোটিতে) |
|---|---|
| কৃষি | 12,000 |
| শিল্প | 10,000 |
| সেচ ও শক্তি | 6,500 |
| যানবাহন | 3,500 |
| শিক্ষা | 3,000 |
| বিবিধ | 1,000 |
| | মোট = 36,000 |

| বিভাগ | ব্যয় (কোটি টাকায়) | শতকরা পরিমাণ | কেন্দ্রস্থ কোণ |
|---|---|---|---|
| কৃষি | 12,000 | $\frac{12000}{36000} \times 100 = \frac{100}{3}$ | $\frac{100}{3} \times 3\cdot6 = 120°$ |
| শিল্প | 10,000 | $\frac{10000}{36000} \times 100 = \frac{1000}{36}$ | $\frac{1000}{36} \times 3\cdot6 = 100°$ |
| সেচ ও শক্তি | 6,500 | $\frac{6500}{36000} \times 100 = \frac{650}{36}$ | $\frac{650}{36} \times 3\cdot6 = 65°$ |
| যানবাহন | 3,500 | $\frac{3500}{36000} \times 100 = \frac{350}{36}$ | $\frac{350}{36} \times 3\cdot6 = 35°$ |
| শিক্ষা | 3,000 | $\frac{3000}{36000} \times 100 = \frac{300}{36}$ | $\frac{300}{36} \times 3\cdot6 = 30°$ |
| বিবিধ | 1,000 | $\frac{1000}{36000} \times 100 = \frac{100}{36}$ | $\frac{100}{36} \times 3\cdot6 = 10°$ |
| | 36,000 | | 360° |

যে কোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হ'ল।এই বৃত্তের কেন্দ্রে পরপর 120°, 100°, 65° ইত্যাদি কোণগুলি অঙ্কন করে নিচের পাইচিত্রটি পাওয়া গেল।

একটি বার্ষিকী পরিকল্পনায় বিভিন্ন খাতে ব্যয়ের পাইচিত্র।




## 1.9 পরিসংখ্যা বিভাজন (Frequency distribution) ঃ

তথ্যানুসন্ধানের সমগ্র ক্ষেত্র থেকে চলকের বিভিন্ন মানগুলি ঊর্ধক্রমানুযায়ী বা নিম্নক্রমানুযায়ী সাজিয়ে এবং তাদের অনুরূপ পরিসংখ্যাসহ সারিকরণ পদ্ধতিকে পরিসংখ্যা বিভাজন বলা হয়।

পরিসংখ্যা বিভাজন দুই প্রকারের হয় ঃ

(i) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন (Simple frequency distribution)

(ii) শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন (Grouped frequency distribution)

**(i) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন ঃ**

এই পদ্ধতিতে চলকের মানগুলি ঊর্ধানুক্রমে সাজিয়ে তাদের অনুরূপ পরিসংখ্যাসহ সারিকরণ (Classification) করা হয়। চলকের মান কম সংখ্যক থাকলে সরল পরিসংখ্যা বিভাজন পদ্ধতি প্রয়োগ করা সুবিধাজনক।

উদাহরণস্বরূপ, একটি ক্লাসে কোনো 50 নম্বরের পরীক্ষায় 20 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ ঃ

30, 33, 35, 20, 30, 40, 38, 35, 22, 35,

30, 20, 28, 22, 33, 35, 40, 38, 35, 30

**20 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন**

| নম্বর | টালিমার্ক | পরিসংখ্যা |
|---|---|---|
| 20 | ।। | 2 |
| 22 | ।। | 2 |
| 28 | । | 1 |
| 30 | ।।।। | 4 |
| 33 | ।। | 2 |
| 35 | $\cancel{||||}$ | 5 |
| 38 | ।। | 2 |
| 40 | ।। | 2 |

মোট = 20

**(ii) শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন ঃ**

চলকের মান অধিক সংখ্যায় থাকলে শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। রাশিতথ্যমালাকে সঠিকভাবে পর্যালোচনা করার জন্য চলকের মানের প্রসার (Range) অর্থাৎ চলকের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের অন্তরকে কয়েকটি সসীম উপ-প্রসার (Sub-range)-এ ভাগ করা হয়। এই উপ-প্রসারগুলির প্রত্যেকটিকে শ্রেণিবিভাগ (Class-interval) বলা হয় এবং এই শ্রেণিবিভাগগুলি একটি উল্লম্বস্তম্ভে মানের ঊর্ধক্রমে সাজানো হয়। প্রত্যেকটি শ্রেণিবিভাগে চলকের যতসংখ্যক মান থাকে, সেই সংখ্যাকে ওই শ্রেণিবিভাগের পরিসংখ্যা বলে।

প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা ঃ

**(i) অবিচ্ছিন্ন ও বিচ্ছিন্ন চলক (Continuous and discrete variables) ঃ**

যে চলক একটি প্রসারের মধ্যে যে কোনো মান গ্রহণ করতে পারে, তাকে অবিচ্ছিন্ন চলক বলা হয়। যেমন তাপমাত্রা, উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি।

যে চলক কেবলমাত্র কয়েকটি বিচ্ছিন্ন (isolated) মান গ্রহণ করতে পারে, তাকে বিচ্ছিন্ন চলক বলা হয়। যেমন কোনো পরিবারে শিশুর সংখ্যা, কলেজের ছাত্রসংখ্যা, ক্রিকেট খেলায় রানসংখ্যা ইত্যাদি।

**(ii) শ্রেণিবিভাগ (Class interval) ঃ**

রাশিতথ্যে চলকের মানের সংখ্যা বেশি হলে, চলকের মানের প্রসারকে কয়েকটি সসীম উপপ্রসারে ভাগ করা হয়। প্রত্যেকটি উপপ্রসারকে শ্রেণিবিভাগ বলে। প্রত্যেকটি শ্রেণিবিভাগ দুটি মানের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে। যদি কোন শ্রেণির এক প্রান্তের মান না দেওয়া থাকে, তবে সেই

শ্রেণিকে মুক্তপ্রান্ত শ্রেণি বলা হয়। যদি প্রান্তীয় মানগুলি অন্যান্য মানের থেকে অনেক দূরে থাকে, তখনই মুক্তপ্রান্ত শ্রেণি ব্যবহার করা হয়ে থাকে।

**(iii) শ্রেণি পরিসংখ্যা ও মোট পরিসংখ্যা (Class frequency and total frequency) ঃ**

শ্রেণিবিভাগগুলি মানের ঊর্ধ্বক্রমানুসারে উল্লম্বভাবে সাজানো হয়ে থাকে। প্রত্যেকটি শ্রেণিবিভাগে চলকের যতগুলি মান থাকে, সেই সংখ্যাকে ওই শ্রেণির পরিসংখ্যা বলা হয়। সমস্ত শ্রেণিবিভাগের পরিসংখ্যার সমষ্টিকে মোট পরিসংখ্যা বলা হয়।

**(iv) শ্রেণিসীমা (Class limits) ঃ**

প্রত্যেকটি শ্রেণিবিভাগ দুটি মানের মধ্যে সীমাবদ্ধ। যে কোনো শ্রেণিবিভাগের নিম্নপ্রান্তের মানকে নিম্ন শ্রেণিসীমা (lower class limit) এবং ঊর্ধ্বপ্রান্তের মানকে ঊর্ধ্ব শ্রেণিসীমা (upper class limit) বলা হয়।

**(v) শ্রেণিসীমানা (Class boundaries) ঃ**

যদি শ্রেণিবিভাগগুলি এমনভাবে গঠিত হয় যে, প্রত্যেকটি শ্রেণিবিভাগের ঊর্ধ্বসীমা তার পরবর্তী শ্রেণিবিভাগের নিম্নসীমার সমান হয়, তাহলে প্রত্যেকটি শ্রেণিবিভাগের নিম্নসীমা ও ঊর্ধ্বসীমাকে যথাক্রমে ওই শ্রেণিবিভাগের নিম্নসীমানা (lower class boundary) ও ঊর্ধ্বসীমানা (upper class boundary) বলা হয়। যদি কোনো শ্রেণির ঊর্ধ্বসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির নিম্নসীমার মধ্যে অন্তর d হয়, তাহলে

$$\text{নিম্ন শ্রেণিসীমানা} = \text{নিম্ন শ্রেণিসীমা} - \frac{1}{2}d$$

$$\text{এবং ঊর্ধ্ব শ্রেণিসীমানা} = \text{ঊর্ধ্ব শ্রেণিসীমা} + \frac{1}{2}d$$

**(vi) মধ্যবিন্দু বা মধ্যমান (Mid-value or class mark) ঃ**

কোনো শ্রেণিবিভাগের মধ্যস্থলে যে মানটি অবস্থিত তাকে ওই শ্রেণিবিভাগের মধ্যবিন্দু বলা হয়।

$$\text{মধ্যবিন্দু} = \frac{1}{2}\ (\text{নিম্নশ্রেণি সীমা} + \text{ঊর্ধ্বশ্রেণি সীমা})$$

$$\text{বা, মধ্যবিন্দু} = \frac{1}{2}\ (\text{নিম্নশ্রেণি সীমানা} + \text{ঊর্ধ্বশ্রেণি সীমানা})$$

**(vii) শ্রেণিদৈর্ঘ্য (Size or width of a class interval) ঃ**

কোনো শ্রেণিবিভাগের ঊর্ধ্ব ও নিম্নসীমানার অন্তরফলকে ঐ শ্রেণির দৈর্ঘ্য বলা হয়।

$\therefore$ শ্রেণিবিভাগের দৈর্ঘ্য = ঊর্ধ্বশ্রেণি সীমানা – নিম্নশ্রেণি সীমানা।

**(viii) পরিসংখ্যা ঘনত্ব (Frequency density) :**

একক দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট শ্রেণিবিভাগের পরিসংখ্যাকে পরিসংখ্যা ঘনত্ব বলা হয়।

$$\therefore \text{পরিসংখ্যা ঘনত্ব} = \frac{\text{শ্রেণি পরিসংখ্যা}}{\text{শ্রেণির দৈর্ঘ্য}}$$

**(ix) আপেক্ষিক পরিসংখ্যা (Relative frequency) :**

কোনো শ্রেণির পরিসংখ্যা ও মোটপরিসংখ্যার অনুপাতকে ওই শ্রেণির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা বলা হয়।

$$\therefore \text{আপেক্ষিক পরিসংখ্যা} = \frac{\text{শ্রেণি পরিসংখ্যা}}{\text{মোট পরিসংখ্যা}}$$

**(x) শতকরা পরিসংখ্যা (Percentage frequency) :**

কোন শ্রেণির পরিসংখ্যাকে শতকরা হিসাবে প্রকাশ করা হলে, তাকে ওই শ্রেণির শতকরা পরিসংখ্যা বলে।

$$\text{শতকরা পরিসংখ্যা} = \frac{\text{শ্রেণি পরিসংখ্যা}}{\text{মোট পরিসংখ্যা}} \times 100$$

উদাহরণ : একটি কারখানায় 50 জন শ্রমিকের সাপ্তাহিক মজুরি (টাকায়) নিচে দেওয়া হল :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 350, | 360, | 365, | 394, | 410, | 375, |
| 350, | 427, | 361, | 415, | 355, | 430, |
| 390, | 421, | 392, | 410, | 400, | 382, |
| 367, | 341, | 358, | 375, | 407, | 432, |
| 380, | 405, | 425, | 417, | 413, | 425, |
| 438, | 420, | 390, | 363, | 415, | 380, |
| 355, | 425, | 368, | 423, | 360, | 435, |
| 375, | 370, | 368, | 385, | 417, | 436, |
| 368, | 352 | | | | |

(i) এই তথ্যমালাকে 10 শ্রেণিবিভাগযুক্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের সাহায্যে প্রকাশ করুন।

(ii) প্রত্যেকটি শ্রেণির শ্রেণিসীমানা সহ মধ্যমানগুলি লিখুন।

(iii) প্রত্যেকটি শ্রেণির শতকরা পরিসংখ্যা নির্ণয় করুন।

সমাধান : রাশিতথ্যমালা থেকে দেখা যাচ্ছে যে,

সর্বোচ্চ মজুরি = 438 টাকা

এবং সর্বনিম্ন মজুরি = 341 টাকা

∴ প্রসার = 438 − 341 = 97 টাকা

∵ রাশিতথ্যগুলিকে 10টি শ্রেণিবিভাগে সাজাতে হবে।

∴ প্রত্যেক শ্রেণির দৈর্ঘ্য = $\frac{97}{10}$ = 9·7 = 10 (প্রায়)

∴ শ্রেণিবিভাগগুলি নেওয়া হবে—

340 – 350, 350 – 360, ........ 430 – 440

**50 জন শ্রমিকের সাপ্তাহিক মজুরির পরিসংখ্যা বিভাজন**

| মজুরির শ্রেণিবিভাগ | টালিমার্ক | পরিসংখ্যা | শ্রেণিসীমা | | শ্রেণিসীমানা | | আপেক্ষিক পরিসংখ্যা | শতকরা পরিসংখ্যা |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | নিম্ন | ঊর্ধ্ব | নিম্ন | ঊর্ধ্ব | | |
| 341-350 | $\vert\vert\vert$ | 3 | 341 | 350 | 340·5 | 350·5 | $\frac{3}{50}$=·06 | 6 |
| 351-360 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert$ | 6 | 351 | 360 | 350·5 | 360·5 | $\frac{6}{50}$=·12 | 12 |
| 361-370 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert\vert$ | 8 | 361 | 370 | 360·5 | 370·5 | $\frac{8}{50}$=·16 | 16 |
| 371-380 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ | 5 | 371 | 380 | 370·5 | 380·5 | ·1 | 10 |
| 381-390 | $\vert\vert\vert\vert$ | 4 | 381 | 390 | 380·5 | 390·5 | ·08 | 8 |
| 391-400 | $\vert\vert\vert$ | 3 | 391 | 400 | 390·5 | 400·5 | ·06 | 6 |
| 401-410 | $\vert\vert\vert\vert$ | 4 | 401 | 410 | 400·5 | 410·5 | ·08 | 8 |
| 411-420 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert$ | 6 | 411 | 420 | 410·5 | 420·5 | ·12 | 12 |
| 421-430 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert$ | 7 | 421 | 430 | 420·5 | 430·5 | ·14 | 14 |
| 431-440 | $\vert\vert\vert\vert$ | 4 | 431 | 440 | 430·5 | 440·5 | ·08 | 8 |
| মোট | | 50 | | | | | 1 | 100 |

## 1.10 ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন (Cumulative Frequency Distribution) ঃ

পরিসাংখ্যনীয় বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে অনেক সময় চলকের কোন একটি মানের চেয়ে রাশিতথ্যমালায় কতগুলি মান ছোটো বা বড়ো তা জানার প্রয়োজন হয়। এই সংখ্যা পরিসংখ্যাগুলিকে পরপর যোগ

করে পাওয়া যায়। এইভাবে পরিসংখ্যাগুলির পরপর যোগ করে পাওয়া যোগফলগুলিকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বলে। যে পরিসংখ্যা ছকে চলকের মানসমূহ এবং উহাদের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি উপস্থাপনা করা হয়, তাকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন বলে। ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা দুই প্রকার। চলকের মোট যতগুলি মান উহার একটি মান অপেক্ষা ছোটো তাকে ঐ মানটির 'অপেক্ষা ছোটো ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা' (Less than cumulative frequency) বলা হয়। আবার চলকের মোট যতগুলি মান উহার একটি মান অপেক্ষা বেশি হয় তাকে ওই মানটির 'অপেক্ষা বড়ো ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা' (More than cumulative frequency) বলা হয়।

উদাহরণ ঃ 50 জন ছাত্রের 100 নম্বরের একটি পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ ঃ

50, 49, 36, 48, 45, 31, 50, 48, 43, 42, 37, 32, 40, 39, 41,
47, 45, 39, 47, 43, 37, 39, 38, 56, 52, 36, 40, 51, 36, 54,
31, 46, 55, 41, 58, 42, 31, 53, 32, 53, 44, 59, 60, 36, 58,
53, 41, 38, 36, 60

(i) রাশিতথ্যগুলিকে 10টি শ্রেণিবিভাগযুক্ত একটি পরিসংখ্যা বিভাজনে সাজান।

(ii) রাশিতথ্যমালার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন (অপেক্ষা ছোটো এবং অপেক্ষা বড়ো) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে সর্বোচ্চ মান = 60,

সর্বনিম্নমান = 31

এবং শ্রেণি বিভাগ সংখ্যা = 10

$\therefore$ শ্রেণি দৈর্ঘ্য = $\dfrac{60-31}{10} = \dfrac{29}{10} = 2{\cdot}9 = 3$ (প্রায়)

$\therefore$ শ্রেণিবিভাগগুলি হবে,

31 – 33, 34 – 36, 37 – 39, ......58 – 60.

(i) **50** জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন ঃ

| নম্বরের শ্রেণিবিভাগ | টালিমার্ক | পরিসংখ্যা |
|---|---|---|
| 31-33 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ | 5 |
| 34-36 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ | 5 |
| 37-39 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert$ | 7 |
| 40-42 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ | 7 |
| 43-45 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ | 5 |
| 46-48 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ | 5 |
| 49-51 | $\vert\vert\vert\vert$ | 4 |
| 52-54 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ | 5 |
| 55-57 | $\vert\vert$ | 2 |
| 58-60 | $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ | 5 |
| | | 50 |

(ii) **50** জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ঃ

| নম্বরের শ্রেণি-সীমানা | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা | |
|---|---|---|
| | অপেক্ষা কম | অপেক্ষা বড়ো |
| 30·5—33·5 | 5 | 50 = N |
| 33·5—36·5 | 10 | 45 |
| 36·5—39·5 | 17 | 40 |
| 39·5—42·5 | 24 | 33 |
| 42·5—45·5 | 29 | 26 |
| 45·5—48·5 | 34 | 21 |
| 48·5—51·5 | 38 | 16 |
| 51·5—54·5 | 43 | 12 |
| 54·5—57·5 | 45 | 7 |
| 57·5—60·5 | 50 = N | 5 |

এই ছকটি নিম্নলিখিতভাবেও প্রকাশ করা যায় ঃ

**50 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন**

| নম্বরের শ্রেণি-সীমানা | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা | |
|---|---|---|
| | অপেক্ষা কম | অপেক্ষা বেশি |
| 30·5 | 0 | 50 |
| 33·5 | 5 | 45 |
| 36·5 | 10 | 40 |
| 39·5 | 17 | 33 |
| 42·5 | 24 | 26 |
| 45·5 | 29 | 21 |
| 48·5 | 34 | 16 |
| 51·5 | 38 | 12 |
| 54·5 | 43 | 7 |
| 57·5 | 45 | 5 |
| 60.5 | 50 | 0 |

## 1.11 পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক প্রকাশ (Graphical representation of frequency distribution)

রাশিতথ্যমালায় পরিসংখ্যা বিভাজনকে নিম্নলিখিত পদ্ধতিতে লৈখিকভাবে প্রকাশ করা যায়।

(i) আয়তলেখ (Histogram)

(ii) পরিসংখ্যা বহুভুজ (Frequency polygon)

(iii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা (Ogive or Cumulative frequency curve)

**(i) আয়তলেখ ঃ** শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের রাশিতথ্য সাধারণত আয়তলেখর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। একটি অনুভূমিক সরলরেখার ওপর অঙ্কিত কয়েকটি পরস্পর সংলগ্ন আয়তক্ষেত্র নিয়ে আয়তলেখ গঠিত।

আয়তলেখ অঙ্কনের ক্ষেত্রে কোনো পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের শ্রেণিবিভাগগুলির শ্রেণিসীমানা সমূহ অনুভূমিক রেখার ওপর পরপর সংস্থাপন করতে হবে—তাদের মধ্যে কোনো ফাঁক থাকবে না। প্রতিটি শ্রেণিবিভাগকে ভূমি এবং অনুরূপ পরিসংখ্যা ঘনত্বকে (পরিসংখ্যা ÷ শ্রেণিবিভাগের দৈর্ঘ্য) উচ্চতা ধরে আয়তক্ষেত্রগুলি গঠন কবতে হবে।

প্রতিটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= দৈর্ঘ্য × উচ্চতা

= শ্রেণিদৈর্ঘ্য × শ্রেণি পরিসংখ্যা ঘনত্ব

$$= \text{শ্রেণি দৈর্ঘ্য} \times \frac{\text{শ্রেণি পরিসংখ্যা}}{\text{শ্রেণি দৈর্ঘ্য}} = \text{শ্রেণি পরিসংখ্যা}$$

প্রত্যেকটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অনুরূপ শ্রেণিবিভাগের পরিসংখ্যাকে এবং আয়তক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের মোটপরিসংখ্যাকে প্রকাশ করে।

পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রতিটি শ্রেণির দৈর্ঘ্য সমান হলে, প্রত্যেকটি আয়তক্ষেত্রের উচ্চতা ওই শ্রেণির পরিসংখ্যার সমানুপাতিক হয়ে যায়। এক্ষেত্রে পরিসংখ্যার ঘনত্ব নির্ণয় করার কোনো প্রয়োজন হয় না।

কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনে শ্রেণি বিভাগগুলির পরিবর্তে মধ্যমানগুলি দেওয়া থাকলে, মধ্যমানগুলিকে শ্রেণিসীমানাতে পরিবর্তিত করে আয়তলেখ অঙ্কন করতে হবে।

রাশিতথ্যমালায় চলকের যে মান সর্বাধিক সংখ্যায় থাকে, সেই মানকে সংখ্যাগুরু মান (mode) বলা হয়। আয়তলেখ-র সাহায্যে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা যায়।

**(ii) পরিসংখ্যা বহুভুজ ঃ**

সরল পরিসংখ্যা বিভাজন ও শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন উভয়কেই লৈখিকভাবে পরিসংখ্যা বহুভুজ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে চলকের মানগুলি অনুভূমিক রেখা (x-অক্ষ) বরাবর এবং এদের অনুরূপ পরিসংখ্যাগুলি উল্লম্বরেখা (y-অক্ষ) বরাবর বসিয়ে কয়েকটি বিন্দু পাওয়া যায়। এই বিন্দুগুলি সরলরেখা দ্বারা পরপর যোগ করা হয়। প্রথমবিন্দুটির সঙ্গে x-অক্ষের ওপর চলকের প্রথম মানের পূর্ববর্তী মানটি যোগ করা হয় এবং শেষ বিন্দুটির সঙ্গে x-অক্ষের ওপর চলকের শেষ মানের পরবর্তী মানটি যোগ করা হয়। এইভাবে যে বহুভুজটি উৎপন্ন হয় তাকে পরিসংখ্যা বহুভুজ বলে।

শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে, প্রথমে আয়তলেখ অঙ্কন করা হয়। আয়তক্ষেত্রের ওপরের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পরপর সরলরেখা দ্বারা যোগ করা হয়। প্রথম ও শেষ আয়তক্ষেত্র দুটির মধ্যবিন্দু দুটি যথাক্রমে পূর্ববর্তী ও পরবর্তী শ্রেণিবিভাগগুলির x-অক্ষের ওপর অবস্থিত মধ্যবিন্দুগুলির সঙ্গে যোগ করা হয়। যে বহুভুজটি পাওয়া গেল তাকে পরিসংখ্যা বহুভুজ বলা হয়।

**(iii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যারেখা ঃ**

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলির লৈখিক প্রকাশকেই ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যারেখা বলা হয়। শ্রেণিসীমানাগুলি অনুভূমিক রেখা (x-অক্ষ) বরাবর এবং অনুরূপ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি উল্লম্ব

রেখা (y-অক্ষ) বরাবর বসানো হয়। এই বিন্দুগুলি সরলরেখা দ্বারা পরপর যোগ করলে পরিসংখ্যা রেখা পাওয়া যায়। এটি দুই প্রকারের—

(i) অপেক্ষা-কম ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যারেখা

(ii) অপেক্ষা-বেশি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যারেখা

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যারেখার দ্বারা মধ্যমা, চতুর্থক প্রভৃতি নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ঃ একটি কলেজের 100 জন ছাত্রের উচ্চতার পরিসংখ্যা বিভাজন নিচে দেওয়া আছে।

| উচ্চতা (সেমিতে) | 121-130 | 131-140 | 141-150 | 151-160 | 161-170 | 171-180 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা | 12 | 16 | 30 | 20 | 14 | 8 |

এর থেকে একটি আয়তলেখ এবং একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করুন।

সমাধান ঃ **100 জন ছাত্রের উচ্চতার পরিসংখ্যা বিভাজন**

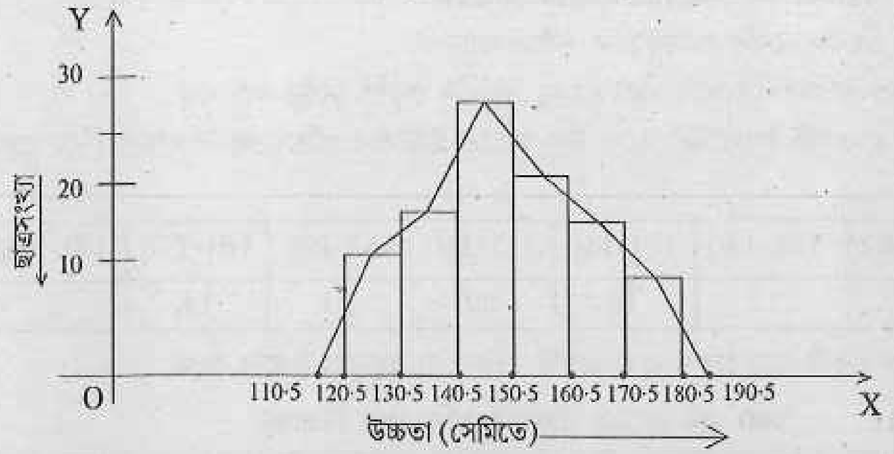
| উচ্চতার শ্রেণিবিভাগ (সেমিতে) | পরিসংখ্যা | শ্রেণি-সীমানা | শ্রেণি দৈর্ঘ্য |
|---|---|---|---|
| 121-130 | 12 | 120.5-130.5 | 10 |
| 131-140 | 16 | 130.5-140.5 | 10 |
| 141-150 | 30 | 140.5-150.5 | 10 |
| 151-160 | 20 | 150.5-160.5 | 10 |
| 161-170 | 14 | 160.5-170.5 | 10 |
| 171-180 | 8 | 170.5-180.5 | 10 |
| মোট | 100 | | |

এখানে প্রত্যেকটি শ্রেণি সমদৈর্ঘ্যসম্পন্ন।

আয়তলেখ অঙ্কনে 120.5, 130.5, 140.5... ইত্যাদি শ্রেণিসীমানাগুলি অনুভূমিক রেখা (x-অক্ষ) বরাবর এবং অনুরূপ শ্রেণি পরিসংখ্যাগুলি উল্লম্ব রেখা (y-অক্ষ) বরাবর সূচিত করে আয়তক্ষেত্রগুলি অঙ্কন করা হয়েছে। নির্ণেয় আয়তলেখটি পাওয়া গেল।

এখন, এই আয়তক্ষেত্রগুলি উপরের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুসমূহ পরপর সরলরেখাদ্বারা যোগ করা হল। প্রথম শ্রেণিবিভাগ 120.5-130.5-এর আয়তক্ষেত্রের ওপরের বাহুর মধ্যবিন্দুর সঙ্গে পূর্ববর্তী 110.5-120.5 শ্রেণিবিভাগের অনুভূমিক রেখায় মধ্যবিন্দুর যোগ করা হল। আবার শেষ শ্রেণিবিভাগ 170.5-180.5 এর আয়তক্ষেত্রের ওপরের বাহুর মধ্যবিন্দুর সঙ্গেপরবর্তী শ্রেণিবিভাগ

180.5-190.5 এর অনুভূমিক রেখায় মধ্যবিন্দুর যোগ করা হল। তাহলে নির্ণেয় পরিসংখ্যা বহুভুজটি পাওয়া গেল।




উদাহরণ ঃ 230 জন লোকের ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন নীচে দেওয়া হল। একটি আয়তলেখর সাহায্যে প্রকাশ করুন—

| ওজন (কেজিতে) | 30-40 | 40-50 | 50-70 | 70-100 |
|---|---|---|---|---|
| লোকসংখ্যা | 30 | 70 | 40 | 90 |

সমাধান ঃ এখানে শ্রেণি-সীমানাগুলি দেওয়া আছে কিন্তু শ্রেণি বিভাগগুলি সমদৈর্ঘ্যসম্পন্ন হয়।

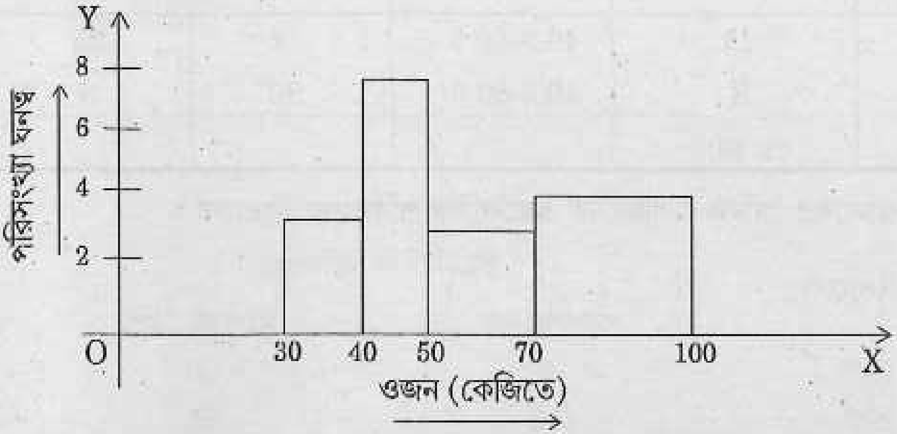
∴ পরিসংখ্যার ঘনত্ব নির্ণয় করতে হবে। আয়তলেখর আয়তক্ষেত্রগুলি অনুরূপ পরিসংখ্যা ঘনত্বের সঙ্গে আনুপাতিক হবে।

**230 জন লোকের ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন**

| ওজনের শ্রেণিসীমানা | পরিসংখ্যা (লোকসংখ্যা) f | শ্রেণি দৈর্ঘ্য (w) | পরিসংখ্যা ঘনত্ব (f/w) |
|---|---|---|---|
| 30-40 | 30 | 10 | 3 |
| 40-50 | 70 | 10 | 7 |
| 50-70 | 40 | 20 | 2 |
| 70-100 | 90 | 30 | 3 |
| মোট | 230 | | |

শ্রেণি সীমানাগুলি অনুভূমিক রেখা (x-অক্ষ) বরাবর ও পরিসংখ্যা ঘনত্ব উল্লম্বরেখা (y-অক্ষ) বরাবর দেখানো হয়েছে।

**230** জন লোকের ওজনের আয়তলেখ ঃ




উদাহরণ ঃ নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা (অপেক্ষা কম ও অপেক্ষা বেশি উভয় প্রকারের) অঙ্কন করুন এবং তা থেকে মধ্যমা নির্ণয় করুন।

**80** জন শ্রমিকের দৈনিক উপার্জনের পরিসংখ্যা বিভাজন

| উপার্জনের শ্রেণিবিভাগ (টাকায়) | শ্রমিক সংখ্যা |
|---|---|
| 20-29 | 10 |
| 30-39 | 15 |
| 40-49 | 22 |
| 50-59 | 25 |
| 60-69 | 8 |

সমাধান ঃ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যারেখা নির্ণয়ের গণনাকার্য্য

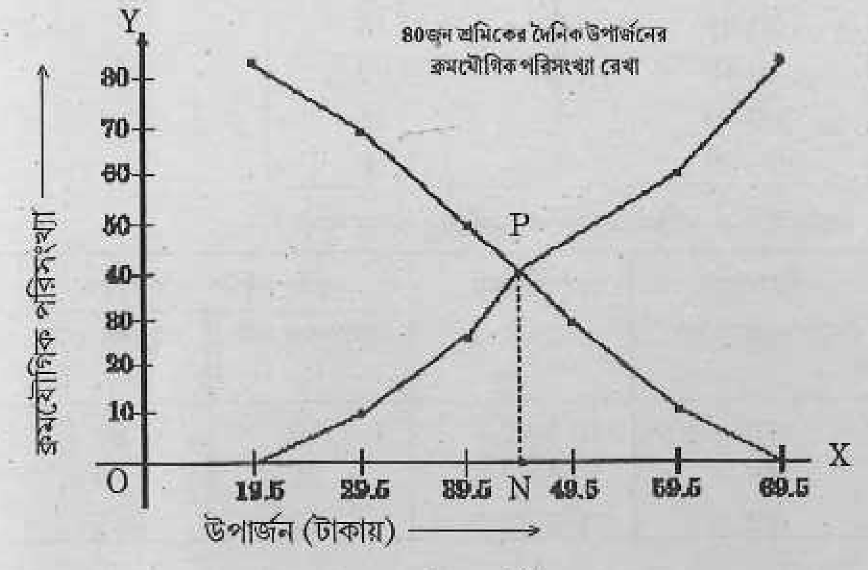
| উপার্জনের শ্রেণিবিভাগ (টাকায়) | পরিসংখ্যা (শ্রমিকের সংখ্যা) | শ্রেণিসীমানা | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা | |
|---|---|---|---|---|
| | | | অপেক্ষা কম | অপেক্ষা বেশি |
| 20-29 | 10 | 19.5-29.5 | 10 | 80 |
| 30-39 | 15 | 29.5-39.5 | 25 | 70 |
| 40-49 | 22 | 39.5-49.5 | 47 | 55 |

| উপার্জনের শ্রেণিবিভাগ (টাকায়) | পরিসংখ্যা (শ্রমিকের সংখ্যা) | শ্রেণিসীমানা | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা | |
|---|---|---|---|---|
| | | | অপেক্ষা কম | অপেক্ষা বেশি |
| 50-59 | 25 | 49.5-59.5 | 72 | 33 |
| 60-69 | 8 | 59.5-69.5 | 80 | 8 |
| মোট | = 80 | | | |

**80 জন শ্রমিকের দৈনিক উপার্জনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ঃ**

| শ্রেণিসীমানা | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা | |
|---|---|---|
| | অপেক্ষা কম | অপেক্ষা বেশি |
| 19.5 | 0 | 80 |
| 29.5 | 10 | 65 |
| 39.5 | 25 | 55 |
| 49.5 | 47 | 33 |
| 59.5 | 72 | 8 |
| 69.5 | 80 | 0 |

শ্রেণি সীমানাগুলি অনুভূমিক অক্ষ (x-অক্ষ) বরাবর এবং ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি উল্লম্ব অক্ষ (y-অক্ষ) বরাবর সূচিত করে পরিসংখ্যারেখা দুটিঅঙ্কন করা হল।



ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা দুটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দু থেকে x-অক্ষের ওপর PN লম্ব টানা হল। N বিন্দুর মানই হল মধ্যমার মান।

মেপে দেখা গেল, ON = 46·3

∴ মধ্যমা = 46·3 টাকা।

## 1.12 সারাংশ ঃ

এই এককে পরিসংখ্যানীয় অনুসন্ধানে কাজের জন্য রাশিতথ্য সংগ্রহের বিভিন্ন পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। এই এককে আমরা জানতে পারি রাশিতথ্যসমূহ সংগ্রহ করার পর কিভাবে সেগুলিকে সুশৃঙ্খল এবং সঠিকভাবে সাজিয়ে বিবরণের মাধ্যমে অথবা ছকের মাধ্যমে অথবা লেখ-এর মাধ্যমে উপস্থাপিত করা হয়।

## 1.13 অনুশীলনী

1. পরিসংখ্যানের সংজ্ঞা লিখুন। পরিসংখ্যান শব্দটি কোন্ দুটি অর্থে ব্যবহৃত হয়?
2. একটি পরিসংখ্যান ছকের বিভিন্ন অংশগুলি বর্ণনা করুন।
3. সরল পরিসংখ্যান ছকের বিভাজন ও শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যান ছকের বিভাজন কাকে বলে উদাহরণসহ লিখুন।
4. ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন কাকে বলে তা উদাহরণসহ লিখুন।
5. উদাহরণসহ সংজ্ঞা লিখুন।
   (ক) রেখাচিত্র (খ) বারচিত্র (গ) পাইচিত্র
   (ঘ) আয়তলেখ (ঙ) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যারেখা
6. লেখচিত্রের সাহায্যে রাশিতথ্যের উপস্থাপন বলতে কী বোঝায়? তার সুবিধাসমূহ আলোচনা করুন।
7. বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলরাশির সংজ্ঞা দিন।
8. নিচের কোন্‌টি বিচ্ছিন্ন চলরাশি ও কোন্‌টি অবিচ্ছিন্ন চলরাশি তা নির্দেশ করুন।
   (ক) কোনো পরিবারের লোকসংখ্যা
   (খ) কোনো শহরের দৈনিক তাপমাত্রা
   (গ) ফুটবল খেলায় গোলসংখ্যা
   (ঘ) কোনো পরীক্ষায় 50-এর মধ্যে প্রাপ্ত নম্বর।
9. 40 জন পরীক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নিচের নম্বরসমূহ নিয়ে 1-10, 11–20,....41-50 শ্রেণি নিয়ে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করুন এবং একটি আয়তলেখ অঙ্কন করুন।

28, 44, 22, 30, 40, 12, 47, 02, 16, 36, 40, 04, 13, 48, 49, 19, 30, 25, 26, 29, 32, 33, 26, 23, 28, 42, 11, 12, 02, 45, 08, 44, 09, 49, 28, 12, 31, 38, 24, 04

10. 100 নম্বরের পরীক্ষায় 50 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ ঃ

6, 36, 7, 36, 19, 35, 13, 37, 88, 33, 22, 38, 24, 39,
25, 51, 23, 38, 75, 32, 26, 55, 26, 65, 23, 72, 29, 68,
59, 26, 28, 73, 33, 84, 32, 88, 32, 83, 37, 23, 33, 86,
43, 93, 31, 96, 36, 93, 46, 5

(ক) 0-10, 10-20 ইত্যাদি শ্রেণি থেকে শুরু করে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করুন।

(খ) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি তৈরি করুন।

(গ) কতজন ছাত্র 50 এর কম নম্বর পেয়েছে?

(ঘ) কতজন ছাত্র 60 বা তার বেশি নম্বর পেয়েছে?

11. একটি অঞ্চলের 40টি গৃহস্থের মাসিক ইলেক্‌ট্রিসিটি বিল নিম্নরূপ ঃ

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 178, | 187, | 181, | 152, | 159, | 165, | 201 |
| 208, | 215, | 195, | 198, | 165, | 162, | 221, |
| 228, | 163, | 176, | 184, | 189, | 191, | 165, |
| 201, | 195, | 181, | 187, | 205, | 229, | 192, |
| 175, | 205, | 178, | 172, | 207, | 216, | 227, |
| 200, | 200, | 180, | 182, | 161 | | |

(ক) উপরিউক্ত তথ্যমালা 10 শ্রেণিবিভাগযুক্ত বিভাজনের সাহায্যে প্রকাশ করুন।

(খ) ঐ বিভাজন ছকের সাহায্যে একটি আয়তলেখ এবং পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করুন।

12. একটি কলেজে 500 জন ছাত্রের ওজন নিম্নরূপ ঃ

| ওজন (কেজিতে) | 40 এর কম | 50 এর কম | 60 এর কম | 70 এর কম | 80 এর কম |
|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্র সংখ্যা | 120 | 200 | 420 | 480 | 500 |

(i) উপরিউক্ত তথ্যমালার একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করুন।

(ii) কতজন ছাত্রের ওজন কমপক্ষে 40 কেজি কিন্তু 60 কেজি অপেক্ষা কম?

(iii) কতজন ছাত্রের ওজন কমপক্ষে 70 কেজি?

13. নিচের ছকে 100 জন ছাত্রের উচ্চতা দেওয়া হ'ল ঃ

| উচ্চতার শ্রেণিবিভাগ (সেমিতে) | পরিসংখ্যা (ছাত্রসংখ্যা) |
|---|---|
| 120-124 | 6 |
| 125-129 | 8 |
| 130-134 | 12 |
| 135-139 | 15 |
| 140-144 | 30 |
| 145-149 | 11 |
| 150-154 | 10 |
| 155-160 | 8 |
| মোট | 100 |

(ক) শ্রেণিসীমানা, মধ্যবিন্দু, শতকরা পরিসংখ্যা দেখিয়ে একটি ছক গঠন করুন।

(খ) ঐ তথ্যমালার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যারেখা (অপেক্ষা কম ও অপেক্ষা বেশি উভয় প্রকারের) অঙ্কন করুন।

14. নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যারেখা (অপেক্ষা কম ও অপেক্ষা-বেশি উভয় প্রকারের) অঙ্কন করুন।

| সাপ্তাহিক বেতন (টাকায়) | 200-209 | 210-219 | 220-229 | 230-239 | 240-249 | 250-259 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| শ্রমিকের সংখ্যা | 10 | 20 | 22 | 20 | 25 | 3 |

15. নিচের ছকে 60 জন ছাত্রের পরিসংখ্যান বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হল ঃ

| শ্রেণিবিভাগ ঃ | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা ঃ | 5 | 8 | 11 | 15 | 13 | 6 | 2 |

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা চিত্র ব্যবহার করে একজন ছাত্রের নম্বরের মধ্যমা নির্ণয় করুন।

16. একটি কারখানায় সাইকেলের উৎপাদনের মাসিক হিসাব নিম্নরূপ ঃ

জানুয়ারি—600 ফেব্রুয়ারি—800 মার্চ—900

এপ্রিল—500 মে—1000 জুন—1200

জুলাই—700 আগস্ট—900 সেপ্টেম্বর—1000

অক্টোবর—600 নভেম্বর—800 ডিসেম্বর—1000

উপরিউক্ত রাশিতথ্যকে (i) রেখাচিত্র ও (ii) বারচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করুন।

16. কোনো বিশ্ববিদ্যালয়ে তিন বছরের ছাত্রসংখ্যা নিম্নরূপ ঃ

| বৎসর | কলাবিভাগ | বিজ্ঞানবিভাগ | বাণিজ্যবিভাগ | মোট |
|---|---|---|---|---|
| 2003-04 | 15,000 | 10,000 | 8,000 | 33,000 |
| 2004-05 | 20,000 | 15,000 | 6,000 | 41,000 |
| 2005-06 | 24,000 | 20,000 | 5,000 | 49,000 |

উপরিউক্ত তথ্যকে একটি বহু-অংশ বিভক্ত বারচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপনা করুন।

17. ভারতের কোনো একটি রাজ্যের পরিকল্পনা খাতে ব্যয় নিম্নরূপ ঃ

| বিষয় | টাকা (কোটিতে) |
|---|---|
| কৃষি | 6000 |
| শিল্প | 5000 |
| যানবাহন | 3000 |
| সেচ ও শক্তি | 4000 |
| বিবিধ | 2000 |

উপরিউক্ত তথ্যকে একটি পাইচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করুন।

19. একজন উৎপাদকের উৎপাদন খরচ নিম্নরূপ ঃ

| | |
|---|---|
| কাঁচামালের মূল্য | 9600 টাকা |
| শ্রমের মূল্য | 7680 টাকা |
| প্রত্যক্ষ ব্যয় | 2880 টাকা |
| অন্যান্য ব্যয় | 3840 টাকা |

উপরিউক্ত তথ্যকে একটি পাইচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করুন।

20. এক ব্যক্তির মাসিক মাহিনা 36000 টাকা। মাসিক মাহিনার টাকা তিনি নিম্নভাবে খরচ করেন।

| বিষয় | খাদ্য | শিক্ষা | স্বাস্থ্য | ঘরভাড়া | বিবিধ | সঞ্চয় |
|---|---|---|---|---|---|---|
| খরচ (টাকা) | 10,000 | 6,000 | 5,000 | 8,000 | 4,000 | 3,000 |

এই রাশিতথ্যকে পাইচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করুন।

## 1.14 উত্তরমালা

10. (গ) 34 (ঘ) 13
12. (ii) 300 (iii) 20
15. 34

# একক-2 ☐ তথ্যের কেন্দ্রীয়প্রবণতা ও তার পরিমাপ

গঠন



## 2.1 প্রস্তাবনা :

রাশিতথ্যমালাকে শ্রেণিবিন্যাস ও পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের সাহায্যে সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করা হয়ে থাকে। কিন্তু রাশিতথ্যমালার প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্যসমূহের বিশ্লেষণের জন্য তাদের সংখ্যাগত পরিমাপ জানা প্রয়োজন।

সাধারণত পরিসংখ্যা বিভাজনে রাশিতথ্যমালার মানগুলি একটি কেন্দ্রীয় মানের দিকে বিস্তৃত হয়ে থাকে। যে কেন্দ্রীয় মানের দিকে রাশিতথ্যমালার মানসমূহ বিস্তৃত থাকে, তার সংখ্যাগত পরিমাপকে **পরিসংখ্যান গড়** বলে। রাশিতথ্যমালা ও কেন্দ্রীয় মানের একক একই।

## 2.2 কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের প্রকারভেদ :

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ সাধারণত তিন প্রকারের—
(i) মধ্যক (Mean), (ii) মধ্যমা (Median), (iii) সংখ্যাগুরুমান (Mode)

কেন্দ্রীয় প্রবণতার ভালো পরিমাপকের নিম্নলিখিত গুণগুলি থাকা প্রয়োজন।

(ক) এটি সঠিকভাবে সংজ্ঞাত হবে

(খ) এটি সহজবোধ্য হবে

(গ) এটিতে রাশিতথ্যমালার সবমানই ব্যবহৃত হবে

(ঘ) এটি সহজ বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ার দ্বারা নির্ণয় করা যাবে

(ঙ) এটি প্রান্তীয় মান দ্বারা প্রভাবিত হবে না।

(চ) এটি নমুনা বিচ্যুতি দ্বারা খুব কম প্রভাবিত হবে।

## 2.3 মধ্যক (Mean) ঃ

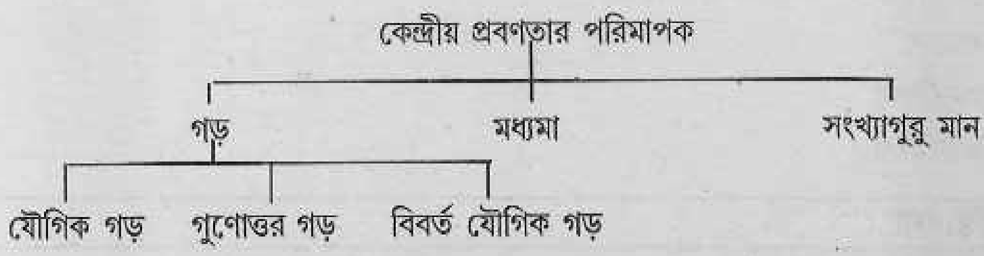
মধ্যক তিন প্রকারের ঃ

(i) সমান্তরীয় মধ্যক বা যৌগিক গড় (Arithmetic Mean or A.M.)

(ii) গুণোত্তরীয় মধ্যক বা গুণোত্তরীয় গড় (Geometric Mean or G.M.)

(iii) হরাত্মক মধ্যক বা বিবর্ত যৌগিক গড় (Harmonic Mean or H.M.)

সাধারণভাবে মধ্যক বলতে সমান্তরীয় মধ্যক বা যৌগিক গড়কে বোঝায়।




## 2.4 সিগমা চিহ্ন ($\Sigma$) ঃ

সিগমা ($\Sigma$) চিহ্নটি একটি গ্রীক অক্ষর এবং এর দ্বারা যোগফল বোঝায়। সমজাতীয় রাশিতথ্যমালার যোগফলকে প্রকাশের জন্য '$\Sigma$' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

ধরা যাক, একটি চলরাশির n সংখ্যক মানগুলি $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ হলে,

$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ অথবা $\sum x_i$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অনুরূপভাবে, $f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$

## 2.5 সমান্তরীয় মধ্যক বা যৌগিক গড় ঃ

$$\text{সমজাতীয় কতকগুলি রাশির যৌগিক গড়} = \frac{\text{রাশিগুলির সমষ্টি}}{\text{রাশিগুলির মোট সংখ্যা}}$$

যৌগিক গড়ের একক, রাশিগুলির মানের এককের সমান।

যৌগিক গড় নির্ণয়ের সূত্র ঃ

**(i) সরল বিভাজনের ক্ষেত্রে (Simple Distribution) ঃ**

যদি কোন চলরাশি x-এর n সংখ্যক মানগুলি $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ হয়, তবে তাদের যৌগিক গড় $(\bar{x}) = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots + x_n}{n} = \dfrac{\sum x}{n}$.

**(ii) সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে (Simple frequency distribution) ঃ**

যদি কোনো চলরাশি x এর n সংখ্যক মানগুলি $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ হয় এবং তাদের অনুরূপ পরিসংখ্যাগুলি $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots f_n$ হয়, তাহলে তাদের যৌগিক গড় $(\bar{x}) = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 \ldots\ldots + f_n} = \dfrac{\sum fx}{\sum f}$.

**(iii) শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে (Grouped frequency distribution) ঃ**

শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে প্রতিটি শ্রেণিবিভাগের পরিসংখ্যাকে ওই শ্রেণিবিভাগের মধ্যমানের অনুরূপ পরিসংখ্যা হিসেবে গণ্য করা হয়।

যদি শ্রেণিবিভাগগুলির মধ্যমানগুলি $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ এবং তাদের অনুরূপ পরিসংখ্যাগুলি $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ হয়, তাহলে তাদের যৌগিক গড় $(\bar{x}) = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n} = \dfrac{\sum fx}{\sum f}$.

যৌগিক গড়ের গুরুত্বপূর্ণ ধর্মসমূহ ঃ

(ক) কোনো চলরাশির মানগুলি থেকে তাদের যৌগিক গড়ের বিচ্যুতি সমূহের বীজগাণিতিক সমষ্টির মান শূন্য হবে।

প্রমাণ ঃ (i) সরল যৌগিক গড়ের ক্ষেত্রে ঃ

মনে করি, চলরাশি x-এর n সংখ্যক মানগুলি হ'ল ঃ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + .... + x_n}{n}$$

$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_3 + .... + x_n = n\bar{x}$

এখন $\bar{x}$ থেকে $x_1$-এর বিচ্যুতি $= x_1 - \bar{x}$

$\bar{x}$ থেকে $x_2$-এর বিচ্যুতি $= x_2 - \bar{x}$

$\bar{x}$ থেকে $x_n$-এর বিচ্যুতি $= x_n - \bar{x}$

$\therefore$ বিচ্যুতি সমূহের বীজগাণিতিক সমষ্টি

$$= (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + .... + (x_n - \bar{x})$$

$$= (x_1 + x_2 + .... + x_n) - n\bar{x}$$

$$= n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

**(ii) ভারযুক্ত যৌগিক গড় অর্থাৎ সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে ঃ**

মনে করি, চলরাশি x-এর n সংখ্যক মানগুলি হ'ল $x_1, x_2, .... x_n$ এবং তাদের অনুরূপ পরিসংখ্যাগুলি হ'ল যথাক্রমে $f_1, f_2, .... f_n$.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + .... + f_nx_n}{f_1 + f_2 + .... + f_n}$$

$$= \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fx}{N}, \text{ যেখানে } \sum f = N$$

$\therefore \quad \sum fx = N\bar{x}$

এখন, $\bar{x}$ থেকে $x_1$-এর বিচ্যুতি $= x_1 - \bar{x}$

$\bar{x}$ থেকে $x_2$-এর বিচ্যুতি $= x_2 - \bar{x}$

................................

$\bar{x}$ থেকে $x_n$-এর বিচ্যুতি $= x_n - \bar{x}$

$\therefore$ বিচ্যুতি সমূহের বীজগাণিতিক সমষ্টি

$$= f_1(x_1 - \bar{x}) + f_2(x_2 - \bar{x}) + .... + f_n(x_n - \bar{x})$$

$$= (f_1x_1 + f_2x_2 + .... + f_nx_n) - \bar{x}(f_1 + f_2 .....+ f_n)$$

$$= \sum fx - N\bar{x}$$

$$= N\bar{x} - N\bar{x} = 0.$$

(খ) যদি $y_i = \frac{x_i - c}{d}$ (i = 1, 2, 3, ..... n) যেখানে c ও d ধ্রুবক, তাহলে $\bar{x} = c + d\bar{y}$

প্রমাণ ঃ $y_i = \frac{x_i - c}{d}$

or, $x_i - c = d.y_i$

$\therefore \quad x_i = c + d.y_i$

$\therefore \quad f_i x_i = f_i(c + d.y_i)$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = \sum_{i-1}^{n} f_i (c + d.y_i)$$

$$= c\sum_{i=1}^{n} f_i + d\sum_{i=1}^{n} f_i y_i$$

$$= cN + d\sum_{i=1}^{n} f_i y_i$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N} = \frac{1}{N}\left[cN + d\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right]$$

$$= c + d \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i y_i}{N}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = c + d\bar{y}$$

মন্তব্য ঃ (i) যৌগিক গড় মূলবিন্দুর অবস্থান এবং স্কেলের ওপর নির্ভরশীল।

(ii) যদি $d = 1$ হয়, তাহলে $y_i = x_i - c$

$\therefore \quad \bar{y} = \bar{x} - c$

(গ) কোনো চলকের n সংখ্যক মানগুলি $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$ হলে,

$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - A)^2}{n}$ এর মান ক্ষুদ্রতম হবে যদি $A = \bar{x}$ হয়, $\bar{x}$ হ'ল গড় এবং A যে কোনো ধ্রুবক সংখ্যা।

সমাধান ঃ $x_i - A = (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - A)$

$$\therefore \quad \sum(x_i - A)^2 = \sum\left[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - A)\right]^2$$

$$= \sum\left[(x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - A) + (\bar{x} - A)^2\right]$$

$$= \sum(x_i - \bar{x})^2 + 2\sum(x_i - \bar{x})(\bar{x} - A) + \sum(\bar{x} - A)^2$$

$$= \sum(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - A)\sum(x_i - \bar{x}) + n(\bar{x} - A)^2$$

$$= \sum(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - A)\cdot 0 + n(\bar{x} - A)^2$$

$$= \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - A)^2$$

ডানপক্ষের উভয় রাশিই ধনাত্মক। প্রথম রাশিটি A নিরপেক্ষ এবং দ্বিতীয় রাশিটি A-এর ওপর নির্ভরশীল।

$\sum(x_i - A)^2$-এর মান ক্ষুদ্রতম হবে,

যখন $n(\bar{x} - A)^2 = 0$

অর্থাৎ যখন, $\bar{x} - A = 0$

অর্থাৎ যখন, $A = \bar{x}$

$\therefore$ $(x_i - A)^2$-এর মান ক্ষুদ্রতম হবে যখন $A = \bar{x}$

(ঘ) যদি $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ এই $n_1$ সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় $\bar{x}_1$ এবং $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ এই $n_2$ সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় $\bar{x}_2$ হয়, তাহলে $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots\ y_{n_2}$ এই $(n_1 + n_2)$ সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় হবে $\bar{x} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

সমাধান ঃ এখানে প্রদত্ত আছে,

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n_1}}{n_1} \quad \therefore \; x_1 + x_2 + x_{n_1} = n_1\bar{x}_1$$

এবং $$\bar{x}_2 = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n_2}}{n_2} \quad \therefore \; y_1 + y_2 + \ldots + y_{n_2} = n_2\bar{x}_2$$

এখন $$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n_1} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n_2}}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

যৌগিক গড় নির্ণয় ঃ

(ক) সরল যৌগিক গড় নির্ণয় ঃ

মনে করি, কোনো চলকের n সংখ্যক মান $x_1$, $x_2$, .... $x_n$-এর যৌগিক গড় $\bar{x}$। প্রদত্ত রাশিগুলির ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম মানের মাঝামাঝি কোন একটি মান A কে কাল্পনিক গড় ধরা হল। যদি $y_1$, $y_2$, .... $y_n$ যথাক্রমে $x_1$, $x_2$, .... $x_n$-এর কাল্পনিক গড় A থেকে বিচ্যুতি হয়, তবে

$$\bar{x} = A + \frac{\sum y_i}{n}$$

$$= A + \bar{y}$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত আছে $y_1 = x_1 - A,\ y_2 = x_2 - A,\ ....\ y_n = x_n - A$

$$\therefore \quad x_1 = A + y_1,\ x_2 = A + y_2,\ ....\ x_n = A + y_n$$

এখন,
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + .... + x_n}{n}$$

$$= \frac{(A+y_1)+(A+y_2)+....+(A+y_n)}{n}$$

$$= \frac{nA+(y_1+y_2+...+y_n)}{n}$$

$$= A + \frac{y_1+y_2+.....+y_n}{n}$$

$$= A + \frac{\sum y_i}{n}$$

$$= A + \bar{y}$$

মন্তব্য ঃ এই পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করাকে 'Deviation method' বলা হয়।

(খ) ভারযুক্ত যৌগিক গড় নির্ণয় ঃ

মনে করি, কোনো চলকের n সংখ্যক মান $x_1$, $x_2$, .... $x_n$

এবং তাদের পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1$, $f_2$, .... $f_n$। ধরা যাক্, কাল্পনিক গড় A (যে কোনো একটি রাশি)। যদি $y_1$, $y_2$, .... $y_n$ যথাক্রমে $x_1$, $x_2$, .... $x_n$-এর কাল্পনিক গড় A থেকে বিচ্যুতি হয়, তবে

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i}$$

$$= A + \bar{y}$$

প্রমাণ ঃ প্রশ্নানুযায়ী, $y_1 = x_1 - A, y_2 = x_2 - A, .... y_n = x_n - A$

$\therefore \quad x_1 = y_1 + A, x_2 = y_2 + A, .... x_n = y_n + A$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + .... + f_nx_n}{f_1 + f_2 + .... + f_n}$$

$$= \frac{f_1(y_1 + A) + f_2(y_2 + A) + ....f_n(y_n + A)}{f_1 + f_2 + .... + f_n}$$

$$= \frac{A(f_1 + f_2 + .... + f_n) + (f_1y_1 + f_2y_2 + .... + f_ny_n)}{f_1 + f_2 + .... + f_n}$$

$$= A + \frac{\sum f_iy_i}{\sum f_i}$$

$$= A + \bar{y}$$

(গ) শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে যৌগিক গড় নির্ণয় ঃ

শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের প্রতিটি শ্রেণিবিভাগের প্রতিটি মানকেই ওই শ্রেণিবিভাগের মধ্যবিন্দুর মানের সঙ্গে সমান ধরে নেওয়া হয়। প্রতিটি শ্রেণিবিভাগের পরিসংখ্যাকে ওই শ্রেণির মধ্যমানের ভার হিসেবে ধরে নিয়ে, ভারযুক্ত যৌগিক গড় নির্ণয়ের পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা হয়।

পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে শ্রেণিবিভাগগুলির দৈর্ঘ্য সমান হলে,

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i'}{\Sigma f_i} \times c$$

যেখানে $A$ = কাল্পনিক গড়,

$$d_i' = \frac{x_i - A}{c},$$

$x_i$ = i-শ্রেণিবিভাগের মধ্যমান,

$c$ = শ্রেণিবিভাগের দৈর্ঘ্য

প্রমাণ ঃ $d_i' = \dfrac{x_i - A}{c}$

$\therefore \quad c \times d_i' = x_i - A$

$\therefore \quad x_i = A + c \times d_i'$

$\therefore \quad f_i x_i = A\, f_i + c\, f_i\, d_i'$

or, $\sum f_i x_i = A \sum f_i + c \sum f_i d_i'$

or, $\dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = A + c\ \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$\therefore \quad \bar{x} = A + \dfrac{\sum f_i d_i'}{\sum f_i} \times c$

মন্তব্য ঃ এই পদ্ধতিকে Step Deviation method বলা হয়।

**পরিসংখ্যান গড় হিসাবে যৌগিক গড়ের ব্যবহার ঃ**

আদর্শ পরিসংখ্যান গড়ের সমস্ত ধর্মই যৌগিক গড়ের মধ্যে বিদ্যমান।

সুবিধা ঃ (i) এটি সঠিকভাবে সংজ্ঞাত

(ii) এটি সহজে বোধগম্য এবং সহজে গণনা করা যায়।

(iii) এটি সহজ বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করা যায়।

(iv) এটি নির্ণয়ে চলকের সমস্ত মানই ব্যবহৃত হয়।

(v) নমুনা বিচ্যুতির দ্বারা এটি খুবই কম প্রভাবিত হয়।

অসুবিধা ঃ (i) চলকের কোনও মান অনুক্ত থাকলে এটি নির্ণয় করা যায় না।

(ii) চলকের একটি বা দুটি মান খুব বেশি বা কম হলে এটি বিশেষভাবে প্রভাবিত হয়।

(iii) মুক্তপ্রান্ত শ্রেণিবিশিষ্ট পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে এটি সঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় না।

**উদাহরণ 1.** 10 জন শ্রমিকের দৈনিক আয় (টাকায়) নিম্নরূপ ঃ

45, 50, 61, 53, 63, 65, 67, 77, 80 ওই শ্রমিকের গড় আয় কত?

সমাধান ঃ যৌগিক গড় $(\bar{x}) = \dfrac{45+50+61+53+63+65+67+76+80}{10}$

$= \dfrac{560}{10} = 56$

$\therefore$ গড় আয় = 56 টাকা।

উদাহরণ **2.** প্রথম 6টি মৌলিক সংখ্যার যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** প্রথম 6টি মৌলিক সংখ্যাগুলি হল ঃ 2, 3, 5, 7, 11, 13

$$\text{তাদের যৌগিক গড়} = \frac{2+3+5+7+11+13}{6}$$

$$= \frac{41}{6} = 6.83$$

উদাহরণ **3.** 40 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর নিচে দেওয়া হ'ল ঃ

| প্রাপ্ত নম্বর | 60 | 65 | 75 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্র সংখ্যা | 15 | 8 | 10 | 5 | 2 |

উপরোক্ত রাশিতথ্যগুলির যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** প্রত্যক্ষ পদ্ধতি ঃ যৌগিক গড় নির্ণয়ের গণনা কার্য ঃ

| মান (x) | পরিসংখ্যা (f) | f × x |
|---|---|---|
| 60 | 15 | 900 |
| 65 | 8 | 520 |
| 70 | 10 | 700 |
| 80 | 5 | 400 |
| 90 | 2 | 180 |
| | $\sum f = 40$ | $\sum fx = 2700$ |

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{2700}{40} = 67{\cdot}5$$

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় = 67·5

**কাল্পনিক গড়ের পদ্ধতি ঃ**

যৌগিক গড় নির্ণয়ের গণনা কার্য

| মান (x) | পরিসংখ্যা (f) | A (= 70) থেকে পার্থক্যসমূহ d = x − 70 | $d' = \frac{d}{5}$ | f × d′ |
|---|---|---|---|---|
| 60 | 15 | − 10 | − 2 | − 30 |
| 65 | 8 | − 5 | − 1 | − 8 |
| 70 | 10 | 0 | 0 | 0 |
| 80 | 5 | 10 | 2 | 10 |
| 90 | 2 | 20 | 4 | 8 |
| | $\sum f = 40$ | | | $\sum fd' = -20$ |

$$\therefore \quad \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times i$$

$$= 70 + \frac{-20}{40} \times 5$$

$$= 70 - 2{\cdot}5 = 67{\cdot}5$$

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় = 67·5

**উদাহরণ 4.** একটি কারখানা 50 জন শ্রমিকের দৈনিক মজুরি নিম্নরূপ ঃ

| দৈনিক মজুরি (টাকায়) | 25-30 | 30-35 | 35-40 | 40-45 | 45-50 | 50-55 | 55-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| শ্রমিকের সংখ্যা | 2 | 1 | 5 | 9 | 21 | 10 | 2 |

এই রাশিতথ্য থেকে যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ যৌগিক গড় নির্ণয়ের গণনাকার্য।

| দৈনিক মজুরীর শ্রেণিবিভাগ | মধ্যমান (x) | পরিসংখ্যা (f) | A (= 47·5) থেকে পার্থক্যসমূহ d = x − 47·5 | $d' = \frac{d}{5}$ | f×d' |
|---|---|---|---|---|---|
| 25-30 | 27·5 | 2 | −20 | −4 | −8 |
| 30–35 | 32·5 | 1 | −15 | −3 | −3 |
| 35-40 | 37·5 | 5 | − 10 | − 2 | − 10 |
| 40-45 | 42·5 | 9 | − 5 | − 1 | − 9 |
| 45-50 | 47·5 | 21 | 0 | 0 | 0 |
| 50-55 | 52·5 | 10 | 5 | 1 | 10 |
| 55-60 | 57·5 | 2 | 10 | 2 | 4 |
| | | $\Sigma f = 50$ | | | $\Sigma fd' = -16$ |

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times i$$

$$= 47{\cdot}5 + \frac{-16}{50} \times 5$$

$$= 47{\cdot}5 - 1{\cdot}6 = 45{\cdot}9$$

$\therefore$ যৌগিক গড় = 45.9 টাকা

উদাহরণ **5.** নিচের পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড় 28·8। অনুক্ত পরিসংখ্যাটি নির্ণয় করুন।

| নম্বর | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা | 4 | 6 | 20 | – | 7 | 3 |

সমাধান ঃ মনে করি, অনুক্ত পরিসংখ্যাটি = $f_1$

| নম্বরের শ্রেণিবিভাগ | মধ্যমান (x) | পরিসংখ্যা (f) | A (= 25) থেকে পার্থক্যসমূহ $d = x - 25$ | $d' = \frac{d}{10}$ | $f \times d'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0-10 | 5 | 4 | – 20 | – 2 | – 8 |
| 10-20 | 15 | 6 | – 10 | – 1 | – 6 |
| 20-30 | 25 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 30-40 | 35 | $f_1$ | 10 | 1 | $f_1$ |
| 40-50 | 45 | 7 | 20 | 2 | 14 |
| 50-60 | 55 | 3 | 30 | 3 | 9 |
| | | $\sum f = f_1 + 40$ | | | $\sum fd' = f_1 + 9$ |

$$\therefore \quad \bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times i$$

$$= 25 + \frac{f_1 + 9}{f_1 + 40} \times 10$$

প্রশ্নানুসারে, $28{\cdot}8 = 25 + 10 \times \frac{f_1 + 9}{f_1 + 40}$

or, $3{\cdot}8 = 10 \times \frac{f_1 + 9}{f_1 + 40}$

or, $3{\cdot}8(f_1 + 40) = 10(f_1 + 9)$

or, $10f_1 - 3{\cdot}8f_1 = 152 - 90$

$\therefore \quad 6{\cdot}2\, f_1 = 62$

$$\therefore \quad f_1 = \frac{62}{6{\cdot}2} = 10$$

$\therefore$ অনুক্ত পরিসংখ্যা = 10

উদাহরণ **6.** নিচের পরিসংখ্যা বিভাজনটির যৌগিক গড় 50 ; অনুক্ত পরিসংখ্যা $f_1$ ও $f_2$-এর মান নির্ণয় করুন।

| নম্বরের শ্রেণিবিন্যাস | 0-20 | 20-40 | 40-60 | 60-80 | 80-100 | মোট |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা | 17 | $f_1$ | 32 | $f_2$ | 19 | 120 |

সমাধান ঃ অনুক্ত পরিসংখ্যা $f_1$ ও $f_2$-এর মধ্যে যে কোনো একটির অনুরূপ মধ্যমানকে কাল্পনিক গড় ধরা হ'ল।

যৌগিক গড় নির্ণয়ের গণনা কার্য

| নম্বরের শ্রেণিবিভাগ | পরিসংখ্যা (f) | মধ্যমান (x) | A (= 70) থেকে পার্থক্য d = x − 70 | $d' = \frac{d}{20}$ | $f \times d'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0-20 | 17 | 10 | − 60 | − 3 | − 51 |
| 20-40 | $f_1$ | 30 | − 40 | − 2 | $-2f_1$ |
| 40-60 | 32 | 50 | − 20 | − 1 | − 32 |
| 60-80 | $f_2$ | 70 | 0 | 0 | 0 |
| 80-100 | 19 | 90 | 20 | 1 | 19 |
| | $\sum f = 68 + f_1 + f_2$ | | | | $\sum fd' = -2f_1 - 64$ |

$$\therefore \quad 68 + f_1 + f_2 = 120$$

$$\therefore \quad f_1 + f_2 = 52 \text{ .......... (1)}$$

আবার, $$\bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times i$$

$$= 70 + \frac{-2f_1 - 64}{120} \times 20$$

$$\therefore \quad 50 = 70 - \frac{2(f_1 + 32)}{6}$$

or, $$-20 = -\frac{1}{3}(f_1 + 32)$$

or, $$60 = f_1 + 32$$

$$\therefore \quad f_1 = 60 - 32 = 28$$

(1) নং থেকে পাই, $f_2 = 50 - f_1 = 52 - 28 = 24$

$\therefore \quad f_1 = 28$ এবং $f_2 = 24$

**উদাহরণ 7.** নিচে প্রদত্ত রাশিতথ্যমালা থেকে একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন গঠন করুন এবং তা থেকে বিভাজনটির যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

| নম্বর | ছাত্র সংখ্যা |
|---|---|
| 10-এর কম | 175 |
| 20-এর কম | 360 |
| 30-এর কম | 680 |
| 40-এর কম | 790 |
| 50-এর কম | 900 |
| 60-এর কম | 1000 |

সমাধান ঃ পরিসংখ্যা বিভাজন ও যৌগিক গড় নির্ণয়ের গণনা কার্য।

| নম্বরের শ্রেণিবিভাগ | ছাত্রসংখ্যা | মধ্যমান | A (= 24·5) থেকে পার্থক্য $d = x - 24{\cdot}5$ | $d' = \dfrac{d}{10}$ | $f \times d'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0-9 | 175 | 4·5 | –20 | –2 | –350 |
| 10–19 | 360–175 = 185 | 14·5 | – 10 | – 1 | – 185 |
| 20–29 | 680–360 = 320 | 24·5 | 0 | 0 | 0 |
| 30–39 | 790–680 = 110 | 34·5 | 10 | 1 | 110 |
| 40–49 | 900–790 = 110 | 44·5 | 20 | 2 | 220 |
| 50–59 | 1000–900 = 100 | 54·5 | 30 | 3 | 300 |
| | $\sum f = 1000$ | | | | $\sum fd' = 95$ |

$$\therefore \quad \bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times i$$

$$= 24{\cdot}5 + \frac{95}{1000} \times 10$$

$$= 24{\cdot}5 + {\cdot}95 = 25{\cdot}45$$

**উদাহরণ 8.** 100 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড় 50। পরে দেখা গেল যে, 48 নম্বরটি ভুলবশত 84 হিসাবে ধরা হয়েছে।

(i) শুদ্ধ গড় নম্বরটি নির্ণয় করুন।

(ii) ভুল নম্বরটি বাদ দিয়ে গড় নম্বর নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$\because \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\therefore \quad \sum x = \bar{x} \times n$$

$$= 50 \times 100 = 5000$$

(i) 48 নম্বরটি ভুলবশত 84 ধরা হয়েছে

$\therefore$ $(84 - 48) = 36$ নম্বর বেশি নেওয়া হয়েছে।

$\therefore$ শুদ্ধ $\sum x = 5000 - 36 = 4964$

$\therefore$ শুদ্ধ গড় $= \dfrac{4964}{100} = 49{\cdot}64$

(ii) ভুল নম্বরটি বাদ দিলে বাকি 99টি নম্বরের মোট যোগফল $= 5000 - 84 = 4916$

$\therefore$ নির্ণেয় গড় $= \dfrac{4916}{99} = 49{\cdot}66$ (প্রায়)

**উদাহরণ 9.** একটি কারখানায় শ্রমিকদের মাসিক আয় 5000 টাকা এবং পুরুষ ও মহিলা শ্রমিকদের মাসিক আয় যথাক্রমে 5200 টাকা এবং 4200 টাকা। ওই কারখানার পুরুষ ও মহিলা শ্রমিকদের শতকরা হার নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক্, পুরুষ শ্রমিকের সংখ্যা $= n_1$

এবং মহিলা শ্রমিকের সংখ্যা $= n_2$

প্রদত্ত ঃ

| শ্রমিকের সংখ্যা | গড় |
|---|---|
| পুরুষ $= n_1$ | $\bar{x}_1 = 5200$ |
| মহিলা $= n_2$ | $\bar{x}_2 = 4200$ |

আমরা জানি, $\bar{x} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$\therefore \quad 5000 = \frac{n_1 \times 5200 + n_2 \times 4200}{n_1 + n_2}$$

or, $\quad 5000(n_1 + n_2) = 5200n_1 + 4200n_2$

or, $\quad 5000n_1 + 5000n_2 = 5200n_1 + 4200n_2$

or, $\quad 200n_1 = 800n_2$

$$\therefore \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{4}{1}$$

$\therefore \quad n_1 : n_2 = 4 : 1$

$\therefore$ পুরুষ শ্রমিকের শতকরা হার $= \frac{4}{5} \times 100 = 80$

এবং মহিলা শ্রমিকের শতকরা হার $= \frac{1}{5} \times 100 = 20$

## 2.6 গুণোত্তরীয় মধ্যক বা গুণোত্তরীয় গড় (Geometric Mean) :

সমজাতীয় n সংখ্যক ধনাত্মক রাশির গুণফলের n তম মূলকে ওই রাশিগুলির গুণোত্তরীয় মধ্যক বা গড় বলা হয়। এটি কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক একটি সংখ্যা।

যদি n সংখ্যক সমজাতীয় রাশিগুলি $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ হলে, তাদের গুণোত্তরীয় মধ্যক বা গড় $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n}$ ।

চলকের মান $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ এবং তাদের পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ হলে, গুণোত্তরীয় মধ্যক $G = \left[x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots . x_n^{f_n}\right]^{\frac{1}{N}}$ (যেখানে $\sum f_i = N$)

**গুণোত্তরীয় গড় নির্ণয়ের সূত্র :**

**(i) সরল বিভাজনের ক্ষেত্রে :**

যদি কোনো চলরাশির x-এর n-সংখ্যক ধনাত্মক মানগুলি $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$ হয়, তবে তাদের গুণোত্তরীয় গড় $G = (x_1 x_2 x_3 \ldots . x_n)^{\frac{1}{n}}$

$$\therefore \quad \log G = \frac{1}{n} \log (x_1 \, x_2 \, \ldots . \, x_n)$$

$$= \frac{1}{n} [\log x_1 + \log x_2 + \ldots . + \log x_n]$$

$$= \frac{1}{n} \sum \log x$$

$$\therefore \quad G = \text{anti log}\left(\frac{\sum \log x}{n}\right)$$

**(ii) সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে ঃ**

যদি কোনো চলরাশি x-এর n সংখ্যক ধনাত্মক মানগুলি $x_1$, $x_2$, $x_3$ ..... $x_n$ হয় এবং তাদের অনুরূপ পরিসংখ্যাগুলি $f_1$, $f_2$, $f_3$, .... $f_n$ হয়, তাহলে তাদের গুণোত্তরীয় গড়

$$G = \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots x_n^{f_n}\right)^{\frac{1}{f_1+f_2+f_n}}$$

$$= \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots x_n^{f_n}\right)^{\frac{1}{N}}$$, যেখানে $N = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n$

$$\therefore \quad \log G = \frac{1}{N}\log\left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots x_n^{f_n}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left[f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots + f_n \log x_n\right]$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f \log x$$

$$\therefore \quad G = \text{anti log}\left(\frac{1}{N}\Sigma f \log x\right)$$

**পরিসংখ্যান গড় হিসাবে গুণোত্তর গড়ের ব্যবহার ঃ**

**সুবিধা ঃ** (i) বীজগাণিতিক নিয়মে এটি নির্ণয় করা যায়।

(ii) রাশিতথ্যমালার সমস্ত মানই ব্যবহৃত হয়।

(iii) রাশিতথ্যমালার একটি বা দুটি রাশির মান খুব বেশি বা কম হলে, এটির মানের খুব পরিবর্তন হয় না।

অসুবিধা ঃ (i) রাশিতথ্যমালার কোনো মান শূন্য বা ঋনাত্মক থাকলে এটি ব্যবহার করা যায় না।

(ii) গাণিতিক জটিলতার জন্য অনেক সময় এটির মান সহজে নির্ণয় করা যায় না।

**উদাহরণ 10.** 3, 6, 24, 48 সংখ্যা চারটির গুণোত্তর গড় নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** নির্ণেয় গুণোত্তর গড়

$$= (3\times6\times24\times48)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left[3\times(3\times2)\times(2^3\times3)\times(2^4\times3)\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left(3^4\times2^8\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= 3 \times 2^2 = 12$$

**উদাহরণ 11.** 18, 25, 32, 45, 48, 56 সংখ্যাগুলির গুণোত্তর গড় নির্ণয় করুন।
**সমাধান ঃ** মনে করি, নির্ণেয় গুণোত্তর গড় G

$$G = (18\times25\times32\times45\times48\times56)^{\frac{1}{6}}$$

$$\therefore \quad \log G = \frac{1}{6}[\log 18+\log 25+\log 32+\log 45+\log 48+\log 56]$$

$$= \frac{1}{6}[1{\cdot}2553+1{\cdot}3979+1{\cdot}5051+1{\cdot}6532+1{\cdot}6812+1{\cdot}7482]$$

$$= \frac{1}{6}\times 9{\cdot}2409 = 1{\cdot}54015$$

$$\therefore \quad G = \text{Anti log}\ (1{\cdot}54015) = 34{\cdot}69$$

**উদাহরণ 12.** গুণোত্তর গড় পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত ভারযুক্ত শ্রেণিসূচক বিভাজন ছক থেকে সাধারণ সূচক নির্ণয় করুন।

| শ্রেণি | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
|---|---|---|---|---|---|
| শ্রেণিসূচক | 120 | 110 | 95 | 105 | 115 |
| ভার | 6 | 5 | 7 | 4 | 3 |

**সমাধান ঃ**

| শ্রেণি | শ্রেণিসূচক (x) | ভার (f) | **logx** | **f × logx** |
|---|---|---|---|---|
| A | 120 | 6 | 2·0792 | 12·4752 |
| B | 110 | 5 | 2·0414 | 10·2070 |
| C | 95 | 7 | 1·9777 | 13·8439 |
| D | 105 | 4 | 2·0212 | 8·0848 |
| E | 115 | 3 | 2·0607 | 6·1821 |
| | | $\sum f = 25$ | | 50·7930 |

মনে করি, গুণোত্তর গড় G

$$\therefore \quad \log G = \frac{\sum(f_i\times\log x_i)}{\sum f_i}$$

$$= \frac{50 \cdot 7930}{25} = 2 \cdot 0317$$

$$\therefore \quad G = \text{anti log } (2 \cdot 0317)$$

$$= 107 \cdot 6$$

## 2.7 বিবর্ত যৌগিক গড় (Harmonic Mean) :

সমজাতীয় কয়েকটি রাশির কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি পরিমাপক সংখ্যা হ'ল বিবর্ত যৌগিক গড়। রাশিগুলির অন্যোন্যকের যৌগিক গড়ের অন্যোন্যককে ওই রাশিগুলির বিবর্ত যৌগিক গড় বলে।

যদি n সংখ্যক সমজাতীয় রাশি $x_1, x_2, \ldots x_n$-এর বিবর্ত যৌগিক গড় $H$ হয়, তাহলে

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

$$\therefore H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

যদি রাশিগুলি $x_1, x_2, \ldots x_n$ হয় এবং তাদের পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2 \ldots f_n$ ও তাদের যৌগিক গড় H হয়, তবে

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots + \frac{f_n}{x_n}}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

$$= \frac{1}{N}\left[\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots + \frac{f_n}{x_n}\right], \quad \text{যেখানে } N = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

$$\therefore H = \frac{N}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots + \frac{f_n}{x_n}}$$

বিবর্ত যৌগিক গড়ের ব্যবহার :

সুবিধা : (i) এটি সঠিকভাবে সংজ্ঞাত

(ii) এটি নির্ণয়ে রাশিতথ্যমালার সমস্ত মানই ব্যবহৃত হয়।

(iii) এটি সহজ বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করা যায়।

(iv) বিভিন্ন গতিবেগে একই দূরত্ব অতিক্রম করা, বিভিন্ন মূল্যের একই দ্রব্যের ক্রয়মূল্য বা বিক্রয়মূল্যের গড় নির্ণয়ে এটি ব্যবহার করা সুবিধাজনক।

অসুবিধা ঃ (i) রাশিতথ্যমালার কোনো মান শূন্য হলে এটি ব্যবহার করা যায় না।

(ii) এটি সহজে বোধগম্য নয়।

**উদাহরণ 13.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ সংখ্যাগুলির ভার যথাক্রমে 4, 8 ও 12 ; বিবর্ত যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** বিবর্ত যৌগিক গড় $= \dfrac{4+8+12}{4.\dfrac{1}{\frac{1}{2}} + 8.\dfrac{1}{\frac{1}{4}} + 12.\dfrac{1}{\frac{1}{6}}}$

$$= \frac{4+8+12}{4.2+8.4+12.6} = \frac{24}{112} = \frac{3}{14}$$

**উদাহরণ 14.** একটি ট্রেন ঘন্টায় 40 কিমি বেগে 200 কিমি গেল এবং আবার ওই দূরত্ব ঘন্টায় 50 কিমি বেগে ফিরে এল। ট্রেনটির গড় গতিবেগ কত?

**সমাধান ঃ** এখানে ভারযুক্ত বিবর্ত যৌগিক গড় পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হবে।

| গতিবেগ | অতিক্রান্ত পথ | $\frac{f}{x}$ |
|---|---|---|
| $x_1 = 40$ | $f_1 = 200$ | $\frac{200}{40}$ |
| $x_2 = 50$ | $f_2 = 200$ | $\frac{200}{50}$ |
| | মোট = 400 | |

গড় গতিবেগ (H) $= \dfrac{f_1+f_2}{\dfrac{f_1}{x_1}+\dfrac{f_2}{x_2}}$

$$= \frac{400}{\frac{200}{40}+\frac{200}{50}}$$

$$= \frac{400}{5+4} = \frac{400}{9} = 44\frac{4}{5} \text{ কিমি/ঘণ্টা}$$

**উদাহরণ 15.** যে কোনো দুটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য প্রমাণ করুন যে,

(i) A.M $\geq$ G.M $\geq$ H.M.

(ii) G.M. $= \sqrt{A.M. \times H.M}$

**সমাধান ঃ** মনে করি, $x_1$, $x_2$ যে কোনো দুটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা,

$$\therefore \text{AM} = \frac{x_1+x_2}{2},\ \text{G.M.} = \sqrt{x_1x_2},\ \text{H.M.} = \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$$

এখন, $\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0$

or, $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2} \geq 0$

or, $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2}$

or, $\dfrac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$

$\therefore$ A.M. $\geq$ G.M.

আবার, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}\right)^2 \geq 0$

$$\text{or, } \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}\geq 0$$

$$\text{or, } \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geq\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}$$

$$\therefore\ \sqrt{x_1x_2}\geq\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$$

$\therefore$ G.M. $\geq$ H.M.

$\therefore$ A.M. $\geq$ G.M. $\geq$ H.M.

$$\text{(ii) A.M.} \times \text{H.M.} = \frac{x_1+x_2}{2}.\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$$

$$= (x_1 + x_2)\ .\ \frac{x_1x_2}{(x_1+x_2)} = x_1x_2$$

$$= \left(\sqrt{x_1x_2}\right)^2 = (\text{G.M.})^2$$

$$\therefore \text{G.M.} = \sqrt{A.M.\times H.M.}$$

উদাহরণ **16.** (a) 2, 8, 32 সংখ্যাগুলির যৌগিক, গুণোত্তর ও বিবর্ত যৌগিক গড় নির্ণয় করে দেখান যে, A.M. $\geq$ G.M. $\geq$ H.M.

(b) নিচের সংখ্যাগুলির A.M., G.M. ও H.M. নির্ণয় করুন।

(i) 5, 5, 5, 5

(ii) 3, 5, 8, 0, 4, 10

সমাধান ঃ (a) যৌগিক গড় = $\frac{2+8+32}{3}=\frac{42}{3}=14$

গুণোত্তর গড় = $(2.8.32)^{1/3} = (2.2^3.2^5)^{1/3}$

$= (2^9)^{1/3} = 2^3 = 8$

$$\text{বিবর্ত যৌগিক গড়} = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}}$$

$$= \frac{3}{\frac{21}{32}} = \frac{3\times 32}{21} = \frac{32}{7} = 4\frac{4}{7}$$

$\because 14 > 8 > 4\frac{4}{7}$

$\therefore AM > GM > HM$

(b) (i) $\because$ সমস্ত সংখ্যাগুলি সমান

$\therefore AM = GM = HM$

(ii) $AM = \frac{3+5+8+0+4+10}{6} = \frac{30}{5} = 5$

G.H. ও H.M. নির্ণয় করা যায় না, যেহেতু একটি রাশির মান শূন্য।

**বিভিন্ন প্রকার গড়ের পারস্পরিক সম্পর্ক ঃ**

(i) যে কোনো সংখ্যক ধনাত্মক সংখ্যার যৌগিক গড় (AM), গুণোত্তর গড় (GM) এবং বিবর্ত যৌগিক গড় (H.M.) এর মধ্যে সম্পর্ক হল ঃ A.M. ≥ G.M. ≥ H.M.

(ii) দুটি সংখ্যার ক্ষেত্রে, G.M. = $\sqrt{A.M.\times H.M.}$

## 2.8 মধ্যমা (Median) ঃ

মধ্যমা হ'ল সমজাতীয় কয়েকটি রাশির কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক একটি সংখ্যা, রাশিতথ্যমালাকে তাদের মানের ঊর্ধ্বক্রমে বা অধঃক্রমে সাজালে, যে রাশিটির মান ঠিক মাঝখানে থাকে তাকে মধ্যমা বলা হয়।

মধ্যমা নির্ণয় ঃ

**(ক) সরল বিভাজন (Simple distribution) :**

ধরা যাক্, কোনো রাশিতথ্যমালার পর্যবেক্ষণ সংখ্যা n এবং তাদেরকে মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজানো হ'ল।

(i) n অযুগ্ম হলে, মধ্যপদ একটি হবে এবং ওই মধ্যপদের মানই হবে রাশিতথ্যমালার মধ্যমা, এখানে $\left(\frac{n+1}{2}\right)$তম পদের মানই মধ্যমা।

উদাহরণ. **17.** মধ্যমা নির্ণয় করুন ঃ

14, 5, 20, 8, 16, 12, 25

সংখ্যাগুলিকে মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,

5, 8, 12, 14, 16, 20, 25

এখানে, n = 7 (অযুগ্ম)

$\therefore$ মধ্য পদটি হবে $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ তম বা 4 তম পদ

4 তম পদের মান = 14

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = 14

(ii) n যুগ্ম হলে, মধ্যপদ দুটি হবে এবং মধ্যপদ দুটির মানের যৌগিক গড়ই হবে রাশিতথ্যমালার মধ্যমা।

এখানে $\frac{n}{2}$ তম পদের মান এবং $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদের মানের যৌগিক গড়ই হবে মধ্যমার মান।

উদাহরণ **18.** মধ্যমা নির্ণয় করুন

39, 52, 6, 8, 20, 42, 38, 41

মানের উর্ধক্রমে সাজিয়ে পাই,

6, 8, 20, 38, 39, 41, 42, 52

এখানে n = 8 (যুগ্ম)

মধ্যপদ দুটি হবে $\frac{8}{2}$ বা 4 তম পদ এবং $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ বা, 5 তম পদ

$$\therefore \text{মধ্যমা} = \frac{4\text{তম পদের মান} + 5\text{তম পদের মান}}{2}$$

$$= \frac{38+39}{2} = \frac{77}{2} = 38 \cdot 5$$

**(খ) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন (Simple frequency distribution) ঃ**

ধরা যাক্, মোট পরিসংখ্যা = N

চলরাশির প্রতিটি মানের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম) নির্ণয় করে, যে মানের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{N+1}{2}$ হয়, তাকে মধ্যমা বলা হয়।

$\therefore$ মধ্যমা = $\frac{N+1}{2}$ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার অনুরূপ চলরাশির মান।

**উদাহরণ 19.** মধ্যমা নির্ণয় করুন ঃ

5, 2, 1, 3, 4, 2, 2, 1, 4, 5, 3, 6, 3, 2, 1, 3, 6, 5, 5, 4.

মধ্যমা নির্ণয়ের গণনাকার্য্য

| সংখ্যা x | টালিমার্ক | পরিসংখ্যা f | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম) |
|---|---|---|---|
| 1 | /// | 3 | 3 |
| 2 | /// | 4 | 7 |
| 3 | //// | 4 | 11 |
| 4 | /// | 3 | 14 |
| 5 | //// | 4 | 18 |
| 6 | // | 2 | 20 |
| | | N = 20 | |

এখানে $\frac{N+1}{2} = \frac{20+1}{2} = \frac{21}{2} = 10{\cdot}5$

$\therefore$ মধ্যমা = 10·5 এই ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার অনুরূপ রাশির মান

= $\frac{1}{2}$ [10 ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার অনুরূপ রাশির মান

+ 11 ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার অনুরূপ রাশির মান ]

$= \frac{1}{2} \times (3 + 3) = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

**(গ) শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন (Grouped frequency distribution) ঃ**

প্রত্যেকটি শ্রেণির শ্রেণিসীমানা অবশ্যই নির্ণয় করতে হবে। প্রত্যেক শ্রেণিসীমানার বিপরীতে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা ছোটো) নির্ণয় করতে হবে। মোট পরিসংখ্যা N হলে, চলরাশির যে মানের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{N}{2}$, তাকে মধ্যমা বলা হয়।

মধ্যমা নিম্নলিখিত তিনটি পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়।

(i) সূত্রের সাহায্যে ঃ

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{N}{2}$ যে শ্রেণির অন্তর্গত হয়, তাকে মধ্যমা শ্রেণি বলা হয়।

$$\text{মধ্যমা} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - F}{f_m} \times i$$

যেখানে, $l_1$ = মধ্যমা শ্রেণির নিম্নসীমানা

$N$ = মোট পরিসংখ্যা

$F$ = মধ্যমাশ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম)

$f_m$ = মধ্যমা শ্রেণির পরিসংখ্যা

$i$ = মধ্যমা শ্রেণির দৈর্ঘ্য।

**(ii) সরল অন্তঃমান নির্ণয় পদ্ধতিতে (Simple interpolation method)**

$$\frac{\text{মধ্যমা} - l_1}{l_2 - l_1} = \frac{\frac{N}{2} - F_1}{F_2 - F_1}$$ যেখানে, ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম) $F_1$ ও $F_2$ এর মধ্যে $\frac{N}{2}$ অবস্থিত

এবং ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $F_1$ এবং $F_2$-এর অনুরূপ ঊর্ধ্বশ্রেণিসীমানা যথাক্রমে $l_1$ এবং $l_2$ অর্থাৎ $l_1$, $l_2$ হল মধ্যমা শ্রেণির যথাক্রমে নিম্ন ও ঊর্ধ্ব শ্রেণিসীমানা।

**(iii) লেখচিত্রের সাহায্যে ঃ**

x-অক্ষ বরাবর রাশিতথ্যের চলকের মান এবং y-অক্ষ বরাবর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম ও অপেক্ষা বেশি) রেখা দুটি অঙ্কন করতে হবে। ধরা যাক, উভয় ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দু থেকে x-অক্ষের ওপর PM লম্ব টানা হল। M বিন্দুতে চলরাশির মানই হবে মধ্যমা।

**উদাহরণ 20.** 200 জন ছাত্রের গণিতের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে মধ্যমা নির্ণয় করুন।

| নম্বর % | 10-19 | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা | 7 | 11 | 20 | 46 | 57 | 37 | 7 | 15 |

সমাধান ঃ প্রথম পদ্ধতি (সূত্রের সাহায্যে) ঃ

মধ্যমা নির্ণয়ের গণনাকার্য্য

| নম্বরের শ্রেণিবিভাগ | শ্রেণি-সীমানা | পরিসংখ্যা | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম) | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা বেশি) |
|---|---|---|---|---|
| 10-19 | 9.5-19.5 | 7 | 7 | 200 = N |
| 20-29 | 19.5-29.5 | 11 | 18 | 193 |
| 30-39 | 29.5-39.5 | 20 | 38 | 182 |
| 40-49 | 39.5-49.5 | 46 | 84 | 162 |
| 50-59 | 49.5-59.5 | 57 | 141 | 116 |
| 60-69 | 59.5-69.5 | 37 | 178 | 59 |
| 70-79 | 69.5-79.5 | 7 | 185 | 22 |
| 80-89 | 79.5-89.5 | 15 | 200=N | 15 |
| মোট | | N = 200 | | |

এখানে N = 200 $\qquad \therefore \dfrac{N}{2} = \dfrac{200}{2} = 100$

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 100, ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 84 ও 141 এর মধ্যবর্তী

∴ মধ্যমা শ্রেণিসীমানা হবে 49.5 – 59.5

$$\text{এখন, মধ্যমা} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - F}{f_m} \times i$$

এখানে, $l_1 = 49.5$

$N = 200$

$F$ = মধ্যমা শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা

$= 84$

$f_m$ = মধ্যমা-শ্রেণির পরিসংখ্যা = 57

$i$ = মধ্যমাশ্রেণির দৈর্ঘ্য = 10

$$\therefore \text{মধ্যমা} = 49.5 + \frac{100-84}{57} \times 10$$

$$= 49{\cdot}5 + \frac{16}{57} \times 10$$

$$= 45{\cdot}5 + \frac{160}{57} = 49{\cdot}5 + 2{\cdot}8 = 52{\cdot}3$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি (সরল অন্তমানের সাহায্যে) ঃ

$\frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100$ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাটি 84 ও 141 এর মধ্যবর্তী।

$\therefore F_1 = 84, F_2 = 141$

মধ্যমা শ্রেণিসীমানা ঃ $49{\cdot}5 - 59{\cdot}5$

$\therefore l_1 = 49{\cdot}5, l_2 = 59{\cdot}5$

এখন, $\frac{\text{মধ্যমা} - l_1}{l_2 - l_1} = \frac{\frac{N}{2} - F_1}{F_2 - F_1}$

$\therefore \frac{\text{মধ্যমা} - 49{\cdot}5}{59{\cdot}5 - 49{\cdot}5} = \frac{100-84}{141-84}$

বা, $\frac{\text{মধ্যমা} - 49{\cdot}5}{10} = \frac{16}{57}$

$\therefore \text{মধ্যমা} - 49{\cdot}5 = \frac{160}{57}$

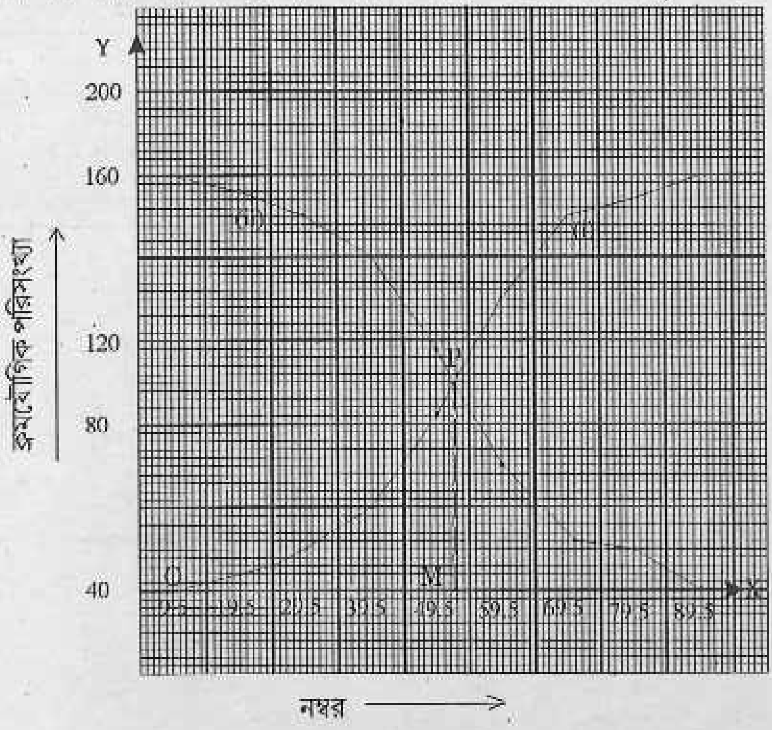
$\therefore \text{মধ্যমা} = 49{\cdot}5 + \frac{160}{57}$

$$= 49{\cdot}5 + 2{\cdot}8 = 52{\cdot}3$$

তৃতীয় পদ্ধতি (লেখচিত্রের সাহায্যে) ঃ

200 জন ছাত্রের নম্বরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখাদ্বয় (i) অপেক্ষা কম (ii) অপেক্ষা বেশি।

শ্রেণি-সীমানাগুলি অনুভূমিক অক্ষ (x-অক্ষ) বরাবর এবং ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি (অপেক্ষা-কম এবং অপেক্ষা বেশি) উল্লম্ব অক্ষ (y-অক্ষ) বরাবর সূচিত করে পরিসংখ্যা রেখা দুটি




অঙ্কন করা হ'ল। ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা দুটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দু থেকে x-অক্ষের ওপর PM লম্ব টানা হ'ল। M বিন্দুর মানই হ'ল মধ্যমার মান।

মেপে দেখা গেল, OM = 52·3

∴ মধ্যমা = 52·3

**পরিসংখ্যান গড় হিসাবে মধ্যমার ব্যবহার ঃ**

**সুবিধা ঃ** (i) এটি সহজে গণনা করা যায়

(ii) মুক্তপ্রান্ত শ্রেণিবিশিষ্ট পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রেও এটি নির্ণয় করা যায়।

(iii) কর্মদক্ষতা, বুদ্ধি, সততা প্রভৃতি বৈশিষ্ট্যের পরিমাণ নির্ণয়ে মধ্যমার ব্যবহার সুবিধাজনক।

(iv) মধ্যমা রাশিতথ্যমালার মধ্যমানকে প্রকাশ করে। সেজন্য এটিকে কেন্দ্রীয় প্রবণতার সঠিক পরিমাপক বলা হয়।

অসুবিধা ঃ (i) এটি নির্ণয়ে রাশিতথ্যমালার প্রত্যেকটি রাশি ব্যবহৃত হয় না।

(ii) এটি নির্ণয়ে সহজ বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা সম্ভব নয়।

## 2.9 চতুর্থক, দশমক এবং শততমক (Quartiles, Deciles and Percentiles)

রাশিতথ্যমালাকে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজালে মধ্যমা রাশিতথ্যমালার পর্যবেক্ষণ সংখ্যাকে দুটি সমানভাগে বিভক্ত করে।

চতুর্থক ঃ রাশিতথ্যমালাকে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজালে তার এক-চতুর্থাংশ, দুই-চতুর্থাংশ ও তিন-চতুর্থাংশ অবস্থানে স্থিত রাশির মানকে যথাক্রমে প্রথম চতুর্থক $Q_1$ (First Quartile), দ্বিতীয় চতুর্থক $Q_2$ (Second Quartile) এবং তৃতীয় চতুর্থক $Q_3$ (Third Quartile) বলা হয়। স্পষ্টতই $Q_2$ এর মান মধ্যমার সমান।

(i) সরল বিভাজন অথবা সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে ঃ

$$Q_1 = \frac{N+1}{4} \text{ তম পদের মান}$$

$$Q_2 = \frac{N+1}{2} \text{ তম পদের মান}$$

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4} \text{ তম পদের মান।}$$

(ii) শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে

$$Q_1 = \text{ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা } \frac{N}{4} \text{ এর অনুরূপ রাশির মান}$$

$$Q_2 = \quad ,, \quad ,, \quad \frac{N}{2} \quad ,, \quad ,, \quad ,,$$

$$Q_3 = \quad ,, \quad ,, \quad \frac{3N}{4} \quad ,, \quad ,, \quad ,,$$

সূত্রের সাহায্যে, $Q_1 = l_1 + \dfrac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i$

এবং $Q_3 = l_1 + \dfrac{\frac{3N}{4} - F}{f} \times i$

যেখানে, $l_1$ = যে শ্রেণিবিভাগে $Q_1$ বা $Q_3$ অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমানা

$N$ = মোট পরিসংখ্যা

$F$ = যে শ্রেণি বিভাগে $Q_1$ বা $Q_3$ অবস্থিত তার পূর্ববর্তী শ্রেণিবিভাগের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা

$f$ = যে শ্রেণি বিভাগে $Q_1$ বা $Q_3$ অবস্থিত তার পরিসংখ্যা।

$i$ = যে শ্রেণিবিভাগে $Q_1$ বা $Q_3$ অবস্থিত তার দৈর্ঘ্য।

**দশমক (Deciles) :** যে নয়টি মান $D_1$, $D_2$, $D_3$, .... $D_9$, মানের উর্ধ্বক্রমে সজ্জিত রাশিমালাকে 10টি সমান অংশে বিভক্ত করে তাদের যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, .....নবম দশমক বলা হয়।

**(i)** সরল বিভাজন অথবা সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে

$D_1 = \frac{N+1}{10}$ তম পদের মান

$D_2 = \frac{2(N+1)}{10}$ ” ” ”

.....................................................................

$D_9 = \frac{9(N+1)}{10}$ ” ” ”

**(ii)** শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে

$D_1$ = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{N}{10}$ এর অনুরূপ রাশির মান

$D_2$ = ” ” $\frac{2N}{10}$ ” ” ”

.....................................................................

$D_9$ = ” ” $\frac{9N}{10}$ ” ” ”

**শততমক (Percentiles) :**

যে 99টি মান $P_1$, $P_2$, $P_3$....$P_{99}$, মানের উর্ধ্বক্রমে সজ্জিত রাশিমালাকে 100টি সমান অংশে বিভক্ত করে তাদের যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ইত্যাদি শততমক বলা হয়।

(i) সরল বিভাজন অথবা সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে

$P_1 = \frac{N+1}{100}$ তম পদের মান

$P_2 = \frac{2(N+1)}{100}$ ” ” ”

.....................................................................

$P_{99} = \frac{99(N+1)}{100}$ ” ” ”

(ii) শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে

$P_1$ = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{N}{100}$ এর অনুরূপ রাশির মান

$P_2$ = ,, ,, $2\frac{N}{100}$ ,, ,, ,, ,,

.....................................................................................

$P_{99}$ = ,, ,, $99\frac{N}{100}$ ,, ,, ,, ,,

উদাহরণ **21.** নিচের সংখ্যাগুলির চতুর্থকগুলি নির্ণয় করুন ঃ

12, 10, 17, 14, 19, 21, 27, 30, 32, 28, 34

সমাধান ঃ সংখ্যাগুলি মানের উর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে লিখলে পাওয়া যায়—

10, 12, 14, 17, 19, 21, 27, 28, 30, 32, 34

এখানে, n = 11

$\therefore$ প্রথম চতুর্থক $(Q_1) = \frac{N+1}{4}$ তম পদের মান

$= \frac{11+1}{4}$ বা 3 তম পদের মান

$= 14$

দ্বিতীয় চতুর্থক $(Q_2) = \frac{N+1}{2}$ তম পদের মান

$= \frac{11+1}{2}$ বা 6 তম পদের মান

$= 21$

তৃতীয় চতুর্থক $(Q_3) = 3\frac{(N+1)}{4}$ তম পদের মান

$= 3 \times \frac{11+1}{4}$ বা 9 তম পদের মান

$= 30.$

উদাহরণ **22.** নিচের সংখ্যাগুলির চতুর্থকগুলি নির্ণয় করুন ঃ

85, 91, 84, 290, 150, 272, 342, 380, 420, 412

সমাধান ঃ রাশিগুলিকে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজানো হল এবং তাদের সারিবদ্ধ অবস্থায় লেখা হল ঃ

| অবস্থান (Rank) | মান |
|---|---|
| 1 | 84 |
| 2 | 85 |
| $2\cdot75 \longrightarrow$ | $\longleftarrow Q_1$ |
| 3 | 91 |
| 4 | 150 |
| 5 | 272 |
| $5\cdot5 \longrightarrow$ | $\longleftarrow Q_2$ |
| 6 | 290 |
| 7 | 342 |
| 8 | 380 |
| $8\cdot25 \longrightarrow$ | $\longleftarrow Q_3$ |
| 9 | 412 |
| 10 | 420 |

এখানে $N = 10$

$Q_1$ এর অবস্থান $= \frac{1}{4}(10 + 1) = \frac{1}{4} \times 11 = 2\cdot75$

$Q_2$ এর অবস্থান $= \frac{1}{2}(10 + 1) = \frac{1}{2} \times 11 = 5\cdot5$

$Q_3$ এর অবস্থান $= \frac{3}{4}(10 + 1) = \frac{3}{4} \times 11 = 8\cdot25$

সরল অন্তঃমান পদ্ধতি প্রয়োগ করে $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ এর মান

**$Q_1$ নির্ণয় ঃ** $\quad \frac{Q_1 - 85}{91 - 85} = \frac{2\cdot75 - 2}{3 - 2}$

বা, $\frac{Q_1 - 85}{6} = \cdot75$

বা, $Q_1 - 85 = 6 \times \cdot75 = 4\cdot5$

$\therefore Q_1 = 85 + 4\cdot5 = 89\cdot5$

**$Q_2$ বা মধ্যমা নির্ণয় ঃ** $\frac{Q_2 - 272}{290 - 272} = \frac{5\cdot5 - 5}{6 - 5}$

বা, $\frac{Q_2 - 272}{18} = \cdot5$

বা, $Q_2 - 272 = 18 \times \cdot 5 = 9$

$\therefore Q = 281$

$Q_3$ নির্ণয় ঃ $\dfrac{Q_3 - 380}{412 - 380} = \dfrac{8{\cdot}25 - 8}{9 - 8}$

বা, $\dfrac{Q_3 - 380}{32} = \cdot 25$

বা, $Q_3 - 380 = 32 \times \cdot 25 = 8$

$\therefore Q_3 = 388$

**উদাহরণ 23.** নিচের বিভাজনের চতুর্থকগুলি নির্ণয় করুন ঃ

| শ্রেণিবিভাগ | 10-19 | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা | 5 | 9 | 14 | 20 | 25 | 15 | 8 | 4 |

সমাধান ঃ

চতুর্থক নির্ণয়ের গণনাকার্য্য ঃ

| শ্রেণিবিভাগ | শ্রেণিসীমানা | পরিসংখ্যা f | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম) |
|---|---|---|---|
| 10-19 | 9.5-19.5 | 5 | 5 |
| 20-29 | 19.5-29.5 | 9 | 14 |
| 30-39 | 29.5-39.5 | 14 | 28 |
| 40-49 | 39.5-49.5 | 20 | 48 |
| 50-59 | 49.5-59.5 | 25 | 73 |
| 60-69 | 59.5-69.5 | 15 | 88 |
| 70-79 | 69.5-79.5 | 8 | 96 |
| 80-89 | 79.5-89.5 | 4 | 100 = N |

এখানে, N = 100

$\therefore \frac{1}{4}N = 25, \quad \frac{1}{2}N = 50, \quad \frac{3}{4}N = 75$

| শ্রেণি সীমানা | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম) |
|---|---|
| 9.5 | 0 |
| 19.5 | 5 |
| 29.5 | 14 |
| $Q_1 \longrightarrow$ | $\longleftarrow \frac{1}{4}N$ |
| 39.5 | 28 |
| 49.5 | 48 |
| $Q_2 \longrightarrow$ | $\longleftarrow \frac{1}{2}N$ |
| 59.5 | 73 |
| $Q_3 \longrightarrow$ | $\longleftarrow \frac{3}{4}N$ |
| 69.5 | 88 |
| 79.5 | 96 |
| 89.5 | 100 |

সরল অন্তঃমান পদ্ধতিতে $Q_1$, $Q_2$ ও $Q_3$ এর মান নির্ণয় ঃ

$Q_1$ : $$\frac{Q_1 - 29{\cdot}5}{39{\cdot}5 - 29{\cdot}5} = \frac{25 - 14}{28 - 14}$$

বা, $$\frac{Q_1 - 29{\cdot}5}{10} = \frac{11}{14}$$

বা, $$Q_1 - 29{\cdot}5 = \frac{110}{14}$$

বা, $Q_1 - 29{\cdot}5 = 7{\cdot}86$

$\therefore Q_1 = 29.5 + 7.86 = 37.36$

$Q_2$ : $$\frac{Q_2 - 49{\cdot}5}{59{\cdot}5 - 49{\cdot}5} = \frac{50 - 48}{73 - 48}$$

বা, $$\frac{Q_2 - 49.5}{10} = \frac{2}{25}$$

বা, $Q_2 - 49.5 = \frac{20}{25} = \cdot 8$

$\therefore Q_2 = 49.5 + \cdot 8 = 50.3$

$Q_3 : \frac{Q_3 - 59\cdot5}{69\cdot5 - 59\cdot5} = \frac{75 - 73}{88 - 73}$

বা, $\frac{Q_3 - 59\cdot5}{10} = \frac{2}{15}$

বা, $Q_3 - 59\cdot5 = \frac{20}{15} = 1\cdot33$

$\therefore Q_3 = 59\cdot5 + 1\cdot33 = 60\cdot83$

## 2.10 সংখ্যাগুরু মান বা ভূয়িষ্ঠক (Mode) ঃ

সংখ্যাগুরু মান হ'ল সমজাতীয় কয়েকটি রাশির কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক একটি সংখ্যা। রাশিতথ্যমালার যে মানটির পরিসংখ্যা সবথেকে বেশি, তাকে সংখ্যাগুরু মান বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, 5, 8, 10, 10, 15, 12, 10 সংখ্যাগুলির সংখ্যাগুরু মান হবে 10, কারণ 10 সংখ্যাটি সর্বাধিক 3 বার আছে।

(i) কোনো সংখ্যা বিভাজনের একাধিক সংখ্যাগুরু মান থাকতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, 4, 5, 8, 9, 10, 14, 5, 8, 15, 12 এই সংখ্যাগুলির বিভাজনে সংখ্যাগুরু মান 5 ও 8।

(ii) কোনো বিভাজনের সংখ্যাগরিষ্ঠ মান নাও থাকতে পারে। উদাহরণস্বরূপ 5, 6, 8, 9, 12 এই সংখ্যা বিভাজনের কোনো সংখ্যাগুরু মান নেই।

সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় ঃ

(ক) সরল বিভাজন ও সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে চলরাশির যে মানটির পরিসংখ্যা সব থেকে বেশি, সেই মানটিই হল সংখ্যাগুরু মান।

**(খ) (i) সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে ঃ**

$$\text{সংখ্যাগুরু মান} = l_1 + \frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2} \times i$$

যেখানে, $l_1$ = সর্বোচ্চ পরিসংখ্যাযুক্ত শ্রেণির নিম্নসীমানা

$f$ = সর্বোচ্চ পরিসংখ্যাযুক্ত শ্রেণির পরিসংখ্যা

$f_1$ = সংখ্যাগুরুমান শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা

$f_2$ = সংখ্যাগুরুমান শ্রেণির পরবর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা

$i$ = সংখ্যাগুরুমান শ্রেণির দৈর্ঘ্য

(ii) অসমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে নিচের আসন্ন (approximate) সম্পর্ক ব্যবহার করে সংখ্যাগুরুমান স্থূলভাবে নির্ণয় করা হয়।

**যৌগিক গড় – সংখ্যাগুরুমান = 3(যৌগিক গড় – মধ্যমা)**

**উদাহরণ 24.** নিচের বিভাজনের সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করুন

| উচ্চতা (সেমিতে) | ছাত্রসংখ্যা (পরিসংখ্যা) |
|---|---|
| 125 | 12 |
| 128 | 16 |
| 130 | 30 |
| 131 | 20 |
| 133 | 14 |
| 136 | 8 |

**সমাধান ঃ** পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে দেখা যাচ্ছে যে, সর্বাধিক পরিসংখ্যা = 30 এবং চলকের অনুরূপ মান = 130 সেমি।

∴ নির্ণেয় সংখ্যাগুরুমান = 130 সেমি।

**উদাহরণ 25.** নিচের বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

| বয়স | 5-14 | 15-24 | 25-34 | 35-44 | 45-54 | 55-64 | 65-74 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| দুর্ঘটনায় মৃতের সংখ্যা | 5 | 8 | 15 | 13 | 25 | 9 | 5 |

**সমাধান ঃ সংখ্যাগুরু মান নির্ণয়ের গণনাকার্য্য ঃ**

| বয়সের শ্রেণিবিভাগ | শ্রেণিসীমানা | পরিসংখ্যা |
|---|---|---|
| 5-14 | 4.5-14.5 | 5 |
| 15-24 | 14.5-24.5 | 8 |
| 25-34 | 24.5-34.5 | 15 |
| 35-44 | 34.5-44.5 | 13 |
| 45-54 | 44.5-54.5 | 25 |
| 55-64 | 54.5-64.5 | 9 |
| 65-74 | 64.5-74.5 | 5 |

এখানে সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা = 25

∴ সংখ্যাগুরুমান শ্রেণি হবে 44·4 – 54·5

∴ $l_1 = 44{\cdot}5,\ f = 25,\ f_1 = 13,\ f_2 = 9,\ i = 10$

∴ সংখ্যাগুরু মান $= l_1 + \dfrac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2} \times i$

$$= 44{\cdot}5 + \frac{25 - 13}{2 \times 25 - 13 - 9} \times 10$$

$$= 44{\cdot}5 + \frac{12}{28} \times 10$$

$$= 44{\cdot}5 + \frac{30}{7} = 44{\cdot}5 + 4{\cdot}3 = 48{\cdot}8$$

∴ সংখ্যাগুরুমান = 48·8 সেমি।

**পরিসংখ্যান গড় হিসাবে সংখ্যাগুরুমানের ব্যবহার ঃ**

সুবিধা ঃ (i) এটি সহজ বোধগম্য ও সহজে নির্ণয় করা যায়।

(ii) মুক্তপ্রান্ত শ্রেণিবিশিষ্ট শ্রেণিবিভাগের ক্ষেত্রেও এটি ব্যবহার করা যায়।

(iii) চলকের একটি বা দুটির মান খুব বেশি বা কম হলেও, এর মান প্রভাবিত হয় না।

অসুবিধা ঃ (i) রাশিতথ্যমালার সব মান ব্যবহৃত হয় না।

(ii) সংখ্যাগুরুমান একাধিক থাকতে পারে।

(iii) চলরাশির পরিসংখ্যাগুলি একই হয়ে গেলে এর মান অর্থহীন হয়ে পড়ে।

**যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের পারস্পরিক সম্পর্ক ঃ**

তিনটি গড়ের মধ্যে পারস্পরিক আসন্ন সম্পর্কটি হল ঃ

**যৌগিক গড় – সংখ্যাগুরু মান = 3 × (যৌগিক গড় – মধ্যমা)**

**উদাহরণ 26.** 100 জন শ্রমিকের সাপ্তাহিক বেতনের পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া হল। বিভাজনটির (i) যৌগিক গড় (ii) মধ্যমা (iii) চতুর্থকদ্বয় (iv) সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করুন।

| বেতন (টাকায়) | 260-269 | 270-279 | 280-289 | 290-299 | 300-309 | 310-319 | 320-329 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| শ্রমিকের সংখ্যা | 6 | 14 | 29 | 23 | 16 | 10 | 2 |

সমাধান ঃ (i) যৌগিক গড় নির্ণয়ের গণনাকার্য্য ঃ

| বেতনের শ্রেণিবিভাগ | মধ্যমান | পরিসংখ্যা f | A (= 284.5) হইতে পার্থক্য d | $d' = \frac{d}{10}$ | f × d' |
|---|---|---|---|---|---|
| 260-269 | 264.5 | 6 | − 20 | −2 | − 12 |
| 270-279 | 274.5 | 14 | −10 | −1 | −14 |
| 280–289 | 284.5 | 29 | 0 | 0 | 0 |
| 290–299 | 294.5 | 23 | 10 | 1 | 23 |
| 300–309 | 304.5 | 16 | 20 | 2 | 32 |
| 310–319 | 314.5 | 10 | 30 | 3 | 30 |
| 320–329 | 324.5 | 2 | 40 | 4 | 8 |
| | | Σf = 100 | | | Σfd' = 67 |

যৌগিক গড় $\bar{x} = A + \frac{Sfd'}{Sf} \times 10$

$$= 284.5 + \frac{67}{100} \times 10$$

$$= 284.5 + 6.7 = 291.2$$

∴ নির্ণেয় যৌগিক গড় = 291.20 টাকা

(ii) & (iii) মধ্যমা ও চতুর্থক দ্বয় নির্ণয় ঃ

বেতনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

| বেতনের শ্রেণিসীমানা | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম) |
|---|---|
| 269.5 | 6 |
| 279.5 | 20 |
| $Q_1 \longrightarrow$ | $\longleftarrow \frac{1}{4}N = 25$ |
| 289.5 | 49 |
| $Q_2 \longrightarrow$ | $\longleftarrow \frac{1}{2}N = 50$ |
| 299.5 | 72 |
| $Q_3 \longrightarrow$ | $\longleftarrow \frac{3}{4}N = 75$ |
| 309.5 | 88 |
| 319.5 | 98 |
| 329.5 | 100 = N |

প্রথম চতুর্থক $Q_1 = \frac{N}{4}$ তম পদের মান

$$= \frac{100}{4} \text{ বা } 25 \text{ তম পদের মান}$$

মধ্যমা $Q_2 = \frac{N}{2}$ তম পদের মান

$$= \frac{100}{2} \text{ বা } 50 \text{ তম পদের মান}$$

তৃতীয় চতুর্থক $Q_3 = \frac{3N}{4}$ তম পদের মান

$$= 3 \times \frac{100}{4} \text{ বা } 75 \text{ তম পদের মান}$$

অন্তঃমান প্রয়োগ করে পাই ঃ

$$\frac{Q_1 - 279{\cdot}5}{289{\cdot}5 - 279{\cdot}5} = \frac{25 - 20}{49 - 20}$$

বা, $\frac{Q_1 - 279{\cdot}5}{100} = \frac{5}{29}$

বা, $Q_1 - 279.5 - \frac{500}{29}$

বা, $Q_1 = 279.5 + 17.2 = 296.7$

$\therefore$ প্রথম চতুর্থক = 296·70 টাকা

$$\frac{Q_2 - 289{\cdot}5}{299{\cdot}5 - 289{\cdot}5} = \frac{50 - 49}{72 - 49}$$

বা, $\frac{Q_2 - 289{\cdot}5}{10} = \frac{1}{23}$

বা, $Q_2 - 289.5 = \frac{10}{23} = .43$

$\therefore \quad Q_2 = 289.5 + .43 = 289.93$

$\therefore$ মধ্যমা = 289.93 টাকা

$$\frac{Q_3 - 299{\cdot}5}{309{\cdot}5 - 299{\cdot}5} = \frac{75 - 72}{88 - 72}$$

বা, $\frac{Q_3 - 299{\cdot}5}{10} = \frac{3}{16}$

বা, $Q_3 - 299.5 = \frac{30}{16} = 1{\cdot}87$

$\therefore Q_3 = 299{\cdot}5 + 1{\cdot}87 = 301.37$

$\therefore$ তৃতীয় চতুর্থক = 301·37 টাকা

(iv) সংখ্যাগুরুমান নির্ণয়ের গণনাকার্য্য

| বেতনের শ্রেণিসীমানা | পরিসংখ্যা |
|---|---|
| 259.5-269.5 | 6 |
| 269.5-279.5 | 14 |
| 279.5-289.5 | 29 |
| 289.5-299.5 | 23 |
| 299.5-309.5 | 16 |
| 309.5-319.5 | 10 |
| 319.5-329.5 | 2 |

এখানে সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা = 29

$\therefore$ সংখ্যাগুরুমান শ্রেণি হবে 279.5 – 289.5

$\therefore l_1 = 279.5,\ f = 29,\ f_1 = 14,\ f_2 = 23,\ i = 10$

$\therefore$ সংখ্যাগুরুমান $= l_1 + \frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2} \times i$

$$= 279.5 + \frac{29 - 14}{2' \, 29 - 14 - 23} \times 10$$

$$= 279.5 + \frac{15}{21} \times 10$$

$$= 279.5 + 7{\cdot}1 = 286.6$$

$\therefore$ সংখ্যাগুরুমান = 286.60 টাকা।

## 2.11 সারাংশ

এই এককে পরিসংখ্যা বিভাজনে রাশিতথ্যমালার মানগুলি যে কেন্দ্রীয় মানের দিকে বিস্তৃত থাকে তার সংখ্যাগত পরিমাপ নির্ধারণ করার বিভিন্ন পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে।

## 2.12 অনুশীলনী

1. নিচের সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় নির্ণয় করুন ঃ

   (i) 43, 63, 39, 48, 28

   (ii) 40, 45, 56, 52, 58, 60, 65, 62, 72, 75

   (iii) প্রথম দশটি স্বাভাবিক সংখ্যার

   (iv) 6 এর প্রথম 6টি ধনাত্মক গুণিতকের

2. মধ্যমা নির্ণয় করুন ঃ

   (i) 9, 7, 8, 12, 5, 10, 4

   (ii) 33, 86, 68, 32, 80, 48, 70, 64

   (iii) 23, 28, 26, 20, 32, 10, 6, 15

3. সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করুন ঃ

   (i) 3, 4, 8, 7, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 3

   (ii) 15, 10, 4, 7, 7, 3, 5, 2, 12, 9, 4, 7

   (iii) 5, 8, 9, 5, 4, 6, 3, 7, 12, 4, 10

4. বিবর্ত যৌগিক গড় নির্ণয় করুন ঃ

   (i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

   (ii) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots \frac{1}{2n-1}$

   (iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\dots \frac{1}{2n}$

5. গুণোত্তর গড় নির্ণয় করুন ঃ

   (i) 2, 9, 2, 12, 9, 12

   (ii) 126, 184, 267, 375, 458

   (iii) 5, 15, 45, 135, 405

6. নিচের বিভাজনগুলির যৌগিক গড়, মধ্যমা নির্ণয় করুন :

(i)

| উচ্চতা (সেমি) | 110 | 115 | 120 | 125 | 130 |
|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা | 15 | 20 | 25 | 30 | 10 |

(ii)

| মান (x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা (f) | 7 | 12 | 26 | 17 | 25 | 23 |

7. নিচের পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড় 18, তাহলে p-এর মান নির্ণয় করুন

| চল (x) | 13 | 15 | 17 | 19 | 20+p | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা (f) | 8 | 2 | 3 | 4 | 5p | 6 |

8. নিচের পরিসংখ্যা বিভাজনের গড় হল 117 পাউন্ড তাহলে, x এর মান নির্ণয় করুন।

| ওজন (পাউন্ডে) | 100 | 110 | 120 | x + 25 | 140 | মোট |
|---|---|---|---|---|---|---|
| লোকসংখ্যা | 1 | 4 | 2 | 2 | 1 | 10 |

9. প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের ক্ষেত্রে যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করুন।

| বেতন (সাপ্তাহিক) টাকায় | 300-309 | 310-319 | 320-329 | 330-339 | 340-349 | 350-359 | 360-369 | 370-379 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| শ্রমিকের সংখ্যা | 9 | 20 | 24 | 38 | 48 | 27 | 17 | 6 |

10. নিচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে উচ্চতার যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করুন।

| উচ্চতা (x) সেমিতে | 158-161 | 162-165 | 166-169 | 170-173 | 174-177 | 178-181 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা (f) | 11 | 23 | 31 | 18 | 12 | 5 |

11. নিচের বিভাজনটির যৌগিক গড় 28·8 ; অনুক্ত পরিসংখ্যাটি নির্ণয় করুন :

| নম্বর | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা | 4 | 6 | f | 10 | 7 | 3 |

12. নিচের বিভাজনটির যৌগিক গড় 72.5 ; অনুক্ত পরিসংখ্যা $f_1$ এবং $f_2$ এর মান নির্ণয় করুন।

| নম্বর (x) | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 | 90-99 | মোট |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা (f) | 2 | 3 | 11 | $f_1$ | 32 | $f_2$ | 7 | 100 |

13. নিচের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে যৌগিকগড় ও মধ্যমার মান নির্ণয় করুন।

| মান | পরিসংখ্যা |
|---|---|
| 10 এর নিচে | 4 |
| 20 এর নিচে | 16 |
| 30 এর নিচে | 40 |
| 40 এর নিচে | 76 |
| 50 এর নিচে | 96 |
| 60 এর নিচে | 112 |
| 70 এর নিচে | 120 |
| 80 এর নিচে | 125 |

14. নিচের বিভাজন থেকে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করুন ঃ

| ওজন (x) গ্রাম | 410-419 | 420-429 | 430-439 | 440-449 | 450-459 | 460-469 | 470-479 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা (f) | 14 | 20 | 39 | 54 | 45 | 18 | 10 |

15. নিচের পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যমা ও সংখ্যাগুরুমনি যথাক্রমে 27 এবং 26। a ও b এর মান নির্ণয় করুন।

| মান (x) | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা (f) | 3 | a | 20 | 12 | b |

16. নিচের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক দেওয়া হল ঃ

| দৈনিকমজুরি (টাকায়) | 50-55 | 55-60 | 60-65 | 65-70 | 70-75 | 75-80 | 80-85 | 85-90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| শ্রমিকের সংখ্যা | 5 | 20 | 10 | 10 | 9 | 6 | 12 | 8 |

মান নির্ণয় করুন ঃ

(i) যৌগিক গড় (ii) সংখ্যাগুরু শ্রেণি (iii) 80 টাকার নিচে পারিশ্রমিক পায় এমন শ্রমিকের সংখ্যা (iv) 65 টাকা এবং তার বেশি কিন্তু 85 টাকার কম মজুরি পায় এমন শ্রমিকের সংখ্যা।

17. 100 জন লোকের সাপ্তাহিক আয় নিচের ছকে দেখানো হ'ল ঃ

| সাপ্তাহিক (আয়) টাকায় | 550-600 | 600-650 | 650-700 | 700-750 | 750-800 | 800-850 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| লোকসংখ্যা | 8 | 15 | 30 | 20 | 15 | 9 |

রাশিতথ্যমালার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা অঙ্কন করে মধ্যমার মান নির্ণয় করুন।

18. 17 নং অঙ্কের ছক থেকে রাশিতথ্যমালায় একটি আয়তলেখ অঙ্কন করুন এবং তা থেকে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

## 2.13 উত্তরমালা

1. (i) 44.2 (ii) 58.5 (iii) 5.5 (iv) 21
2. (i) 8 (ii) 66 (iii) 21.5
3. (i) 3 (ii) 7 (iii) 4, 7
4. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{n}$ (iii) $\frac{1}{n+1}$
5. (i) 6 (ii) 251.5 (iii) 45
6. (i) 120 সেমি, 120 সেমি

   (ii) 4, 4
7. 11 8. 100 পাউণ্ড
9. 339.05 টাকা, 340.23 টাকা, 342.73 টাকা
10. 167.98 সেমি, 167.56 সেমি, 167.02 সেমি
11. f = 20
12. $f_1 = 20$, $f_2 = 25$
13. 37.88, 36.25
14. 445.75 গ্রাম
15. a = 8, b= 7
16. (i) 69 (ii) 55 – 60 (iii) 60 (iv) 37
17. 690 টাকা
18. 680 টাকা

# একক-3 ☐ তথ্যের বিকেন্দ্রন প্রবণতা ও তার পরিমাপ



## 3.1 প্রস্তাবনা :

পূর্বের অধ্যায়ে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক সংখ্যা (গড়, মধ্যমা, সংখ্যাগুরু মান) সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু এদের দ্বারা কোনো রাশিতথ্যমালার সঠিক বৈশিষ্ট্য নির্ণয় সবসময় করা যায় না। রাশিতথ্যমালার মানগুলি গড়ের খুব কাছাকাছি হতে পারে, আবার তার থেকে অনেক বেশি দূরে হতে পারে।

উদাহরণস্বরূপ, 30, 32, 40 ও 50 এর

$$\text{গড়} = \frac{40+32+40+50}{4} = \frac{152}{4} = 38$$

এই ক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে সংখ্যাগুলি গড়ের খুব নিকটবর্তী।

আবার, 4, 22, 26, 100 এর গড়

$$= \frac{4+22+26+100}{4} = \frac{152}{4} = 38$$

এই ক্ষেত্রে সংখ্যাগুলি গড়ের থেকে অনেক বেশি বিস্তৃত।

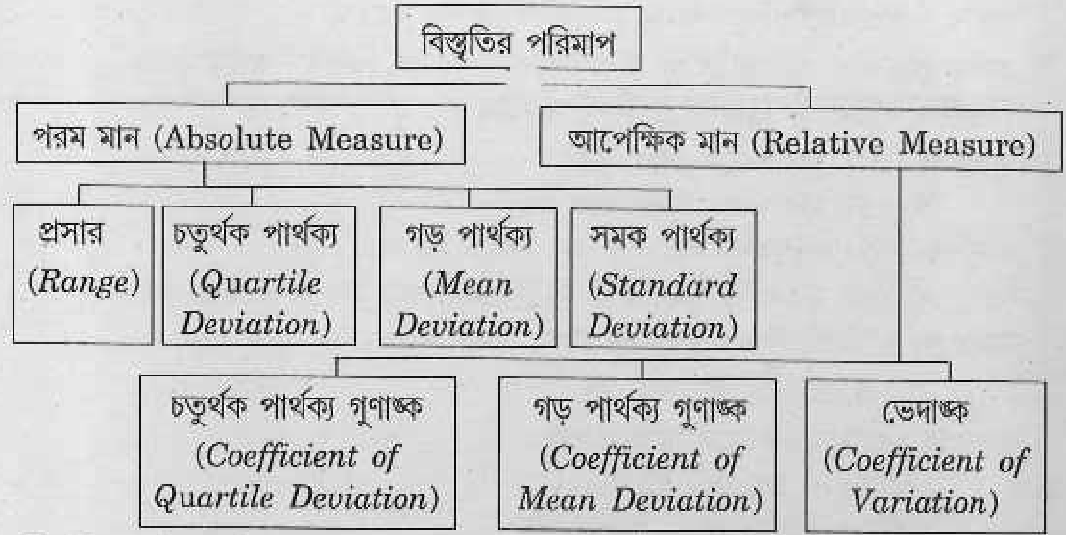
সুতরাং শুধুমাত্র গড় নির্ণয় করে রাশিতথ্যমালায় বৈশিষ্ট্যের সঠিক প্রকাশ করা সম্ভব নয়। সেজন্য রাশিতথ্যমালার মানসমূহ গড়ের থেকে কতটা বিস্তৃত তা জানা প্রয়োজন।

## 3.2 বিকেন্দ্রন (Dispersion)

রাশিতথ্যমালার মানসমূহের বিকেন্দ্রন বলতে তাদের কেন্দ্রীয় মানের থেকে তাদের পার্থক্যগুলিকে (*deviation*) বোঝায়। এই পার্থক্যগুলির সাহায্যে রাশিতথ্যমালার মানগুলি নিজেদের মধ্যে কী পরিমাণে বিস্তৃত তা পরিমাপ করা যায়। রাশিতথ্যমালার চলকের মানগুলি সব সমান হলে, বিস্তৃতির পরিমাণও শূন্য হবে।

বিকেন্দ্রন পরিমাপের একক, রাশিতথ্যমালার এককের সমান।

## 3.3 বিস্তৃতির পরিমাপ সমূহ (Measures of Dispersion)




বিস্তৃতির পরিমাপ দুই প্রকারের—

(ক) পরম পরিমাপ

(খ) আপেক্ষিক পরিমাপ

(ক) বিস্তৃতির পরম পরিমাপগুলি হল ঃ

(*i*) প্রসার

(*ii*) চতুর্থক পার্থক্য

(*iii*) গড় পার্থক্য

(*iv*) সমক পার্থক্য

বিস্তৃতির পরিমাপের একক ও রাশিতথ্যমালার মানের একক একই।

(খ) বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপ তিন প্রকারের ঃ-

(*i*) চতুর্থক পার্থক্য গুণাঙ্ক

(*ii*) গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক

(*iii*) ভেদাঙ্ক

বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপের কোনো একক নেই।

## 3.4 প্রসার ঃ

রাশিতথ্যমালার অন্তর্গত বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম রাশিদ্বয়ের অন্তরফল হল প্রসার।

সরল বিভাজনের ক্ষেত্রে, প্রসার = রাশির বৃহত্তম মান – রাশির ক্ষুদ্রতম মান

শ্রেণিবদধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে ঃ

প্রসার = সর্বোচ্চ শ্রেণির মধ্যমান – সর্বনিম্ন শ্রেণির মধ্যমান

অথবা প্রসার = সর্বোচ্চ শ্রেণির ঊর্ধ্বসীমানা – সর্বনিম্ন শ্রেণির নিম্নসীমানা

**বিস্তৃতির পরিমাপক হিসাবে প্রসারের ব্যবহার ঃ**

সুবিধা ঃ (*i*) ইহা সহজে বোঝা যায়।

(*ii*) ইহা সহজে নির্ণয় করা যায়।

অসুবিধা ঃ (*i*) রাশিতথ্যমালার সব মান ব্যবহৃত হয় না।

(*ii*) মুক্ত প্রান্ত শ্রেণিবিশিষ্ট বিভাজনের ক্ষেত্র ইহা নির্ণয় করা যায় না।

উদাহরণ **1.** নিম্নলিখিত মানসমূহের প্রসার নির্ণয় করুন।

5, 8, 20, 10, 32, 35

সমাধান ঃ মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,

5, 8, 10, 20, 32, 35

$\therefore$ প্রসার = সর্বোচ্চমান – সর্বনিম্ন মান

$= 35 - 5 = 30$

উদাহরণ **2.** নীচের বিভাজনের প্রসার নির্ণয় করুন।

| নম্বরের শ্রেণিবিভাগ | 20-24 | 25-29 | 30-34 | 35-39 | 40-44 |
|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা | 5 | 3 | 2 | 4 | 6 |

সমাধান ঃ প্রসার = সর্বোচ্চ শ্রেণির মধ্যমান – সর্বনিম্নশ্রেণির মধ্যমান

$$= \left(\frac{40+44}{2}\right) - \left(\frac{20+24}{2}\right)$$

$$= 42 - 22 = 20$$

## 3.5 চতুর্থক পার্থক্য ঃ

চতুর্থকের পার্থক্যের মান তৃতীয় চতুর্থক ও প্রথম চতুর্থকের অন্তরফলের অর্ধেকের সমান।

∴ চতুর্থক পার্থক্য (*Quartile deviation*)

$$= \left(\frac{Q_3 - Q_1}{2}\right)$$ যেখানে $Q_1$ = প্রথম চতুর্থক এবং $Q_3$ = তৃতীয় চতুর্থক।

**উদাহরণ 3.** নীচের সংখ্যাগুলির চতুর্থক পার্থক্য নির্ণয় করুন ঃ

2, 10, 17, 4, 19, 21, 20, 30, 32, 25, 34

**সমাধান ঃ** সংখ্যাগুলিকে মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,

2, 4, 10, 17, 19, 20, 21, 25, 30, 32, 34

এখানে, $n = 11$

$\therefore\ Q_1 = \frac{11+1}{4}$ তম পদের মান

= 3 তম পদের মান

= 10

$Q_3 = 3.\left(\frac{11+1}{4}\right)$ তম পদের মান

= 9 তম পদের মান

= 30

∴ চতুর্থক পার্থক্য $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{1}{2}(30 - 10)$

$$= \frac{1}{2} \times 20 = 10$$

**উদাহরণ 4.** নীচের বিভাজনটির চতুর্থক পার্থক্য নির্ণয় করুন ঃ

| $x$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 3 | 6 | 8 | 10 | 4 | 2 | 2 |

সমাধান ঃ চতুর্থক নির্ণয়ের গণনাকার্য

| $x$ | $f$ | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম) |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 3 |
| 4 | 6 | 9 |
| 6 | 8 | 17 |
| 8 | 10 | 27 |
| 10 | 4 | 31 |
| 12 | 2 | 33 |
| 14 | 2 | $35 = N$ |
| | $N = 35$ | |

এখানে, $N = 35$

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ তম পদের মান

$= \frac{35+1}{4}$ বা, 9 তম পদের মান

$= 4$

$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ তম পদের মান

$= 3 \times 9$ বা 27 তমপদের মান

$= 8$

$\therefore$ চতুর্থক পার্থক্য $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{8-4}{2} = 2$

**বিস্তৃতির পরিমাপক হিসাবে চতুর্থক পার্থক্যের ব্যবহার ঃ**

**সুবিধা ঃ** (*i*) ইহা সহজে নির্ণয় করা যায়,

(*ii*) মুক্ত-প্রান্ত শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে এটি ব্যবহার করা যায়।

**অসুবিধা ঃ** (*i*) রাশিতথ্যমালার সবমান ব্যবহৃত হয় না।

(*ii*) ইহার মান কেবলমাত্র প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থকের উপর নির্ভরশীল।

## 3.6. গড় পার্থক্য (Mean Deviation) ঃ

কোনও একটি গড় (মধ্যক, মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মান) থেকে চলকের মানসমূহের পার্থক্যের পরম মানগুলির যৌগিক গড়কে গড় পার্থক্য বলা হয়।

**(ক) সরল বিভাজনের ক্ষেত্রে ঃ**

ধরা যাক্, কোনো চলকের $n$ সংখ্যক মান যথাক্রমে $x_1$, $x_2$, ....$x_n$ এবং তাদের মধ্যক $\bar{x}$

$$\therefore \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + .....x_n}{n}$$

$(i)$ যৌগিক গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য $= \dfrac{\Sigma |x_i - \bar{x}|}{n}$

$(ii)$ মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য $= \dfrac{\Sigma |x_i - M_e|}{n}$ যেখানে $M_e$ = মধ্যমা

**(খ) পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে ঃ**

ধরা যাক, কোনো চলকের $n$ সংখ্যক মান যথাক্রমে $x_1$, $x_2$, ...$x_n$ এবং তাদের পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1$, $f_2$, ...$f_n$.

$$\therefore \text{মধ্যক } \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} \text{ যেখানে } N = \Sigma f_i$$

$(i)$ যৌগিক গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য $= \dfrac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{N}$

$(ii)$ মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য $= \dfrac{\Sigma f_i |x_i - M_e|}{N}$

**বিস্তৃতির পরিমাপক হিসাবে গড় পার্থক্যের ব্যবহার ঃ**

**সুবিধা ঃ** $(i)$ ইহা সহজে বোধগম্য এবং সহজে নির্ণয় করা যায়।

$(ii)$ ইহার মান নির্ণয়ে রাশিতথ্যমালার সব মানই ব্যবহৃত হয়।

$(iii)$ ইহার মান প্রান্তীয় রাশিসমূহের দ্বারা বিশেষভাবে প্রভাবিত হয় না।

অসুবিধা ঃ $(i)$ ইহা নির্ণয়ে শুধুমাত্র পার্থক্যসমূহের পরমমানগুলিই ব্যবহার করা হয়।

$(ii)$ ইহা নির্ণয়ে বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ার প্রয়োগ সম্ভব নয়।

মন্তব্য ঃ মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্যর মান সর্বনিম্ন হয়।

উদাহরণ 5. নীচের সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় এবং মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নিরূপণ করুন ঃ

7, 9, 24, 14, 26

সমাধান ঃ মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই,

7, 9, 14, 24, 26

এখানে, $n = 5$

$\Sigma x = 7 + 9 + 14 + 24 + 26 = 80$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{80}{5} = 16$$

যৌগিক গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় কার্য

| $x$ | $\lvert x - \bar{x} \rvert$ |
|---|---|
| 7 | 9 |
| 9 | 7 |
| 14 | 2 |
| 24 | 8 |
| 26 | 10 |
| মোট = | 36 |

$\therefore$ যৌগিক গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য

$$= \frac{\Sigma \lvert x - \bar{x} \rvert}{n} = \frac{36}{5} = 7{\cdot}2$$

আবার, মধ্যমা = $\dfrac{n+1}{2}$ তম পদের মান

$= \dfrac{5+1}{2}$ বা 3 তম পদের মান

$= 14$

$\therefore$ মধ্যমা $(M_e) = 14$

মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয়ের গণনাকার্য

| $x$ | $\|x - M_e\|$ |
|---|---|
| 7 | 7 |
| 9 | 5 |
| 14 | 0 |
| 24 | 10 |
| 26 | 12 |
| মোট = | 34 |

$\therefore$ মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য $= \dfrac{\Sigma|x - M_e|}{n}$

$$= \frac{34}{5} = 6{\cdot}8$$

**উদাহরণ 6.** নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড় থেকে গড় পার্থক্যের মান নির্ণয় করুন।

| প্রাপ্ত নম্বর | 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | মোট |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্র সংখ্যা | 4 | 6 | 10 | 20 | 10 | 6 | 4 | 60 |

**সমাধান ঃ** গড় পার্থক্য নির্ণয়ের গণনাকার্য

| $x$ | $f$ | $fx$ | $\|x - \bar{x}\|$ | $f \times \|x - \bar{x}\|$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 20 | 30 | 120 |
| 15 | 6 | 90 | 20 | 120 |
| 25 | 10 | 250 | 10 | 100 |
| 35 | 20 | 700 | 0 | 0 |
| 45 | 10 | 450 | 10 | 100 |
| 55 | 6 | 330 | 20 | 120 |
| 65 | 4 | 260 | 30 | 120 |
| মোট | $N = 60$ | $\Sigma fx = 2100$ | | 680 |

যৌগিক গড় $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{N} = \dfrac{2100}{60} = 35$

$\therefore$ যৌগিক গড় থেকে গড় পার্থক্য $= \dfrac{\Sigma f\,|x-\bar{x}|}{N}$

$$= \frac{680}{60} = 11{\cdot}33$$

**উদাহরণ 7.** নীচে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক দেওয়া হল ঃ

| ওজনের শ্রেণিবিন্যাস (কেজিতে) | 0-20 | 20-40 | 40-60 | 60-80 |
|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা | 10 | 30 | 40 | 20 |

($i$) যৌগিক গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করুন।

($ii$) মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** ($i$) যৌগিক গড় নির্ণয়ের গণনাকার্য

| শ্রেণিবিভাগ | পরিসংখ্যা $f$ | মধ্যমান ($x$) | $A(=50)$থেকে পার্থক্য $d = x - 50$ | $d' = \dfrac{d}{20}$ | $f \times d'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0-20 | 10 | 10 | $-40$ | $-2$ | $-20$ |
| 20-40 | 30 | 30 | $-20$ | $-1$ | $-30$ |
| 40–60 | 40 | 50 | 0 | 0 | 0 |
| 60–80 | 20 | 70 | 20 | 1 | 20 |
| | $N = 100$ | | | | $\Sigma fd' = -30$ |

$\therefore$ যৌগিক গড় $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times 20$

$$= 50 + \frac{-30}{100} \times 20$$

$$= 50 - 6 = 44$$

যৌগিক গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয়ের গণনাকার্য

| $x$ | $f$ | $\|x - \bar{x}\|$ | $f \times \|x - \bar{x}\|$ |
|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 34 | 340 |
| 30 | 30 | 14 | 420 |
| 50 | 40 | 6 | 240 |
| 70 | 20 | 26 | 520 |
| মোট | $N = 100$ | | 1520 |

∴ যৌগিক গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য

$$= \frac{\Sigma f\,|x - \bar{x}|}{N} = \frac{1520}{100} = 15{\cdot}2$$

(*ii*) মধ্যমা নির্ণয়ের গণনাকার্য্য

| শ্রেণিবিভাগ | পরিসংখ্যা | ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম) |
|---|---|---|
| 0–20 | 10 | 10 |
| 20–40 | 30 | 40 $\longleftarrow \frac{N}{2} = 50$ |
| 40–60 | 40 | 80 |
| 60–80 | 20 | 100 = $N$ |
| | $N$ = 100 | |

এখন, $\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$

50 ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাটি 40 ও 80 ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা দুটির মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore F_1 = 40,\ F_2 = 80$

মধ্যমা শ্রেণিসীমানা ঃ 40 – 60

$\therefore l_1 = 40,\ l_2 = 60$

$$\frac{\text{মধ্যমা} - l_1}{l_2 - l_1} = \frac{\frac{N}{2} - F_1}{F_2 - F_1}$$

$$\therefore \frac{\text{মধ্যমা} - 40}{60 - 40} = \frac{50 - 40}{80 - 40}$$

বা, $\frac{\text{মধ্যমা} - 40}{20} = \frac{10}{40}$

বা, মধ্যমা $- 40 = \frac{200}{40}$

$= 5$

∴ মধ্যমা = 45

মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয়ের গণনাকার্য

| মধ্যমান ($x$) | $f$ | $\lvert x - 45\rvert$ | $f \times \lvert x - 45 \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 35 | 350 |
| 30 | 30 | 15 | 450 |
| 50 | 40 | 5 | 200 |
| 70 | 20 | 25 | 500 |
| | $N = 100$ | | 1500 |

$\therefore$ মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য $= \dfrac{\Sigma f \times \lvert x-45\rvert}{N} = \dfrac{1500}{100} = 15$

## 3.7 সমক পার্থক্য (Standard deviation) ঃ

রাশিতথ্যমালার যৌগিক গড় থেকে রাশিগুলির পার্থক্যগুলির বর্গসমূহের যৌগিক গড়ের ধনাত্মক বর্গমূলকে সমক পার্থক্য ($S.\ D$) বলা হয়। সমক পার্থক্যকে $\sigma$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং ইহার মান সর্বদা ধনাত্মক।

ভেদমান $= (S.\ D)^2 = \sigma^2$

**সমক পার্থক্য নির্ণয় ঃ**

**(ক) সরল বিভাজনের ক্ষেত্রে ঃ**

ধরা যাক, একটি চলকের $n$ সংখ্যক মানগুলি হল

$x_1, x_2, \ldots x_n$ এবং তাদের যৌগিক গড় $\overline{x}$ ।

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\overline{x})^2}{n}}$$

**(খ) সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে ঃ**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i(x_i-\overline{x})^2}{N}} \text{ যেখানে } N = \Sigma f_i$$

## 3.8 সমক পার্থক্যের ধর্ম ঃ

উপপাদ্য ঃ (1) চলকের মান $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ হলে

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

অথবা, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$ যেখানে $d = x - A$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\Sigma(x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2)\right]$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{n}[\Sigma x^2 - 2\bar{x}\Sigma x + \Sigma\bar{x}^2]$$

$$= \frac{\Sigma x^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\Sigma x}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\Sigma x^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$= \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

আবার, $\sigma^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^2$

$$= \frac{1}{n}\Sigma[(x-A) - (\bar{x}-A)]^2$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma[(x - A)^2 - 2(\bar{X} - A)(\bar{x} - A) + (\bar{x} - A)^2]$$

$$= \frac{1}{n}[\Sigma(x - A)^2 - 2(\bar{x} - A)\,\Sigma(x - A) + \Sigma(\bar{x} - A)^2]$$

$$= \frac{1}{n}[\Sigma(x - A)^2 - 2n(\bar{x} - A)^2 + n(\bar{x} - A)^2]$$

$$\left[\because \Sigma(x - A) = \Sigma x - nA = n\bar{x} - nA = n(\bar{x} - A)\right]$$

$$= \frac{1}{n}[\Sigma(x - A)^2 - n(\bar{x} - A)^2]$$

$$= \frac{\Sigma(x-A)^2}{n} - (\bar{x} - A)^2$$

$$= \frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$$

$$\left[\because (\bar{x} - A)^2 = \left(\frac{\Sigma x}{n} - A\right)^2 = \left(\frac{\Sigma x - nA}{n}\right)^2 = \left(\frac{\Sigma(x-A)}{n}\right)^2 = \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2\right]$$

যেখানে, $x - A = d$

মন্তব্য ঃ $\sigma^2 = \frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2$

$$\therefore \frac{\Sigma d^2}{n} = \sigma^2 + \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2$$

সুতরাং, (ক) যে-কোনো মান $A$ এর সাপেক্ষে মূল-গড়-বর্গ-পার্থক্যের বর্গের মান সমক পার্থক্যের বর্গের মান অপেক্ষা বেশি।

(খ) যৌগিক গড়ের সাপেক্ষে রাশিতথ্যমালার মূল-গড়-বর্গ-পার্থক্যের মান সমক পার্থক্যের বর্গের মান।

**উপপাদ্য 2.** চলকের মান $x_1, x_2 \ldots x_n$ তাদের পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, \ldots f_n$ হলে

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2}$$

বা, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$ যেখানে $d = x - A$

বা, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2} \times i$ যেখানে $d' = \frac{x - A}{i}$

প্রমাণ : $\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\Sigma fx}{N}$ যেখানে $N = \Sigma f.$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(x - \bar{x})^2}{N}}$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{\Sigma f(x - \bar{x})^2}{N}$$

$$= \frac{1}{N}[\Sigma f(x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2]$$

$$= \frac{1}{N}[\Sigma fx^2 - 2\bar{x}\ \Sigma fx + \Sigma f\bar{x}^2]$$

$$= \frac{1}{N}[\Sigma fx^2 - 2\bar{x}\ \Sigma fx + N\bar{x}^2]$$

$$= \frac{1}{N}[\Sigma fx^2 - 2\bar{x}\,.\,N\bar{x} + N\bar{x}^2] \qquad [\because \Sigma fx = N\bar{x}]$$

$$= \frac{1}{N}[\Sigma fx^2 - N\bar{x}^2]$$

$$= \frac{\Sigma fx^2}{N} - \bar{x}^2$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2}$$

আবার, $\sigma^2 = \frac{1}{N}\Sigma f(x - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f\{(x-A)-(\bar{x}-A)\}^2$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f\{(\bar{x}-A)^2-2(\bar{x}-A)(x-A)+(\bar{x}-A)^2\}$$

$$= \frac{1}{N}[\Sigma f(x-A)^2-2(\bar{x}-A)\Sigma f(x-A)+N(\bar{x}-A)^2]$$

$$= \frac{1}{N}[\Sigma f(x-A)^2-2N(\bar{x}-A)^2+N(\bar{x}-A)^2]$$

$$[\because \Sigma f(x-A) = \Sigma fx - NA$$
$$= N\bar{x} - NA$$
$$= N(\bar{x}-A)]$$

$$= \frac{1}{N}[\Sigma f(x-A)^2-N(\bar{x}-A)^2] \quad \left[ \because \ (\bar{x}-A)^2 = \left(\frac{\Sigma fx}{N}-A\right)^2 \right.$$

$$= \frac{\Sigma f(x-A)^2}{N}-(\bar{x}-A)^2 \quad = \left\{\frac{\Sigma fx-NA}{N}\right\}^2$$

$$= \frac{\Sigma f(x-A)^2}{N} - \left\{\frac{\Sigma f(x-A)}{N}\right\}^2 \left. = \left\{\frac{\Sigma f(x-A)}{N}\right\}^2 \right]$$

$$= \frac{\Sigma fd^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2, \text{ যেখানে } d = x - A$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

এখন, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma f(x-A)^2}{N}-\left\{\frac{\Sigma f(x-A)}{N}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma f\left(\frac{x-A}{i}\right)^2}{N} - \left\{\frac{\Sigma f\left(\frac{x-A}{i}\right)}{N}\right\}^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2} \times i \text{ যেখানে } \frac{x-A}{i} = d'$$

**উপপাদ্য ঃ সমক পার্থক্যের মান মূলবিন্দুর উপর নির্ভর করে না, কিন্তু স্কেল পরিবর্তনের উপর নির্ভর করে।**

প্রমাণ ঃ ধরা যাক্, কোনো চলরাশি $x$ এর $n$ সংখ্যক মান হল $x_1, x_2, .....x_n$ ; এখন মূলবিন্দুকে $x = a$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হল এবং চলকের মানগুলি প্রত্যেকটিকে একটি ধনাত্মক রাশি $b$ দ্বারা ভাগ করে স্কেল পরিবর্তন করা হল।

$\therefore$ পরিবর্তিত মূলবিন্দু ও স্কেলের সাপেক্ষে $x$ চলকের মানগুলি হবে

$$\frac{x_1-a}{b}, \frac{x_2-a}{b}, ..., \frac{x_n-a}{b}$$

ধরা যাক্, $y_i = \dfrac{x_i - a}{b}$

$$or,\ by_i = x_i - a$$

$$\therefore x_i = a + by_i \qquad .......(1)$$

$$\therefore \Sigma x_i = na + b\Sigma y_i$$

$$or,\ \frac{\Sigma x_i}{n} = a + b\frac{\Sigma y_i}{n}$$

$$\therefore \overline{x} = a + b\,\overline{y} \qquad ......(2)$$

(1) নং ও (2) নং থেকে পাই,

$$x_i - \overline{x} = b(y_i - \overline{y})$$

$$\therefore \Sigma(x_i - \overline{x})^2 = b^2\Sigma(y_i - \overline{y})^2$$

$$\therefore \frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n} = b^2\frac{\Sigma(y_i - \overline{y})^2}{n}$$

$\therefore\ \sigma_x^2 = b^2\sigma_y^2$

$\therefore\ \sigma_x = b\sigma_y.$

$\therefore$ $x$ চলকের সমক পার্থক্য $a$ এর উপর নির্ভর করে না কিন্তু $b$ এর উপর নির্ভরশীল।

$\therefore$ সমক পার্থক্যের মান মূলবিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না কিন্তু উহার মান স্কেলের উপর নির্ভরশীল।

. সংযুক্ত সমক পার্থক্য (*Composite standard deviation*).

$n_1$ সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় ও সমক পার্থক্য যথাক্রমে $\bar{x}_1$ ও $\sigma_1$ এবং $n_2$ সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় ও সমক পার্থক্য যথাক্রমে $\bar{x}_2$ ও $\sigma_2$ হলে, $(n_1 + n_2)$ সংখ্যক মিলিত রাশির

$$\text{যৌগিক গড় } (\bar{x}) = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$\text{এবং সমক পার্থক্য } (\sigma) = \sqrt{\frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1d_1^2 + n_2d_2^2}{n_1 + n_2}}$$

যেখানে $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$, $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$.

## 3.9 বিস্তৃতির পরিমাপক হিসাবে সমক পার্থক্যের ব্যবহার ঃ

**সুবিধা ঃ** (*i*) ইহা নির্ণয়ে রাশিতথ্যমালার সমস্ত মানই ব্যবহৃত হয়।

(*ii*) ইহা নমুনা বিচ্যুতির (sample fluctuations) দ্বারা কম প্রভাবিত হয়।

(*iii*) ইহা সঠিকভাবে সংজ্ঞাত।

**অসুবিধা ঃ** (*i*) ইহার গণনাকার্য সহজসাধ্য নয়।

(*ii*) মুক্তপ্রান্ত শ্রেণিবিশিষ্ট পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে ইহা নির্ণয় করা যায় না।

## 3.10 বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপসমূহ (*Relative measures of dispersion*) ঃ

দুই বা ততোধিক ভিন্ন এককযুক্ত রাশিতথ্যমালার বিস্তৃতির পরম পরিমাপের সাহায্যে তুলনা সহজে করা যায় না। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের শতকরা আকারে প্রকাশিত বিস্তৃতির পরম পরিমাপই বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপ। বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপের কোনো একক নেই।

বিস্তৃতির প্রধানত তিনটি আপেক্ষিক পরিমাপ আছে।

(i) চতুর্থক পার্থক্য গুণাঙ্ক (*Coefficient of Quartile Deviation*)

(ii) গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক (*Coefficient of Mean Deviation*)

(iii) ভেদাঙ্ক (*Coefficient of Variation*)

$$(i)\ \text{চতুর্থক পার্থক্য গুণাঙ্ক} = \frac{\text{চতুর্থক পার্থক্য}}{\text{মধ্যমা}} \times 100\% = \frac{Q_3 - Q_1}{2Q_2} \times 100\%$$

$$(ii)\ \text{গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক} = \frac{\text{যৌগিক গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য}}{\text{যৌগিক গড়}} \times 100\%$$

$$\text{বা, গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক} = \frac{\text{মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য}}{\text{মধ্যমা}} \times 100\%$$

$$(iv)\ \text{ভেদাঙ্ক} = \frac{\text{সমক পার্থক্য}}{\text{যৌগিক গড়}} \times 100\%$$

যদি কোনো রাশিতথ্যমালার ভেদাঙ্ক অপর আর একটি রাশিতথ্যমালার ভেদাঙ্ক অপেক্ষা কম হয়, তাহলে প্রথম রাশিতথ্যমালাকে দ্বিতীয়টি অপেক্ষা বেশি সঙ্গতিপূর্ণ বলা হয়।

**উদাহরণ 8.** প্রথম দশটি স্বাভাবিক সংখ্যার যৌগিক গড় ও সমক পার্থক্য নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** প্রথম দশটি স্বাভাবিক সংখ্যা হ'ল ঃ

1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

যৌগিক গড় ও ***S. D.*** নির্ণয়ের গণনাকার্য ঃ

| $x$ | $x^2$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| 6 | 36 |
| 7 | 49 |
| 8 | 64 |
| 9 | 81 |
| 10 | 100 |
| মোট = 55 | 385 |

এখানে $n = 10$

$\therefore$ যৌগিক গড় $(\bar{x}) = \dfrac{\Sigma x}{n} = \dfrac{55}{10} = 5{\cdot}5$

$$S.\,D. = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{385}{10} - \left(\frac{55}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{38{\cdot}5 - (5{\cdot}5)^2}$$

$$= \sqrt{38{\cdot}5 - 30{\cdot}25} = \sqrt{8{\cdot}25} = 2{\cdot}87$$

**উদাহরণ 9.** নিম্নলিখিত রাশিগুলির সমক পার্থক্য নির্ণয় করুন।

4, 8, 10, 12, 16

**সমাধান ঃ** প্রথম পদ্ধতিঃ প্রদত্ত সংখ্যাগুলির যৌগিক গড়

$$= \frac{4+8+10+12+16}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

**সম্যক পার্থক্য নির্ণয়ের গণনাকার্য**

| রাশি $x$ | যৌগিক গড় 10 থেকে রাশিগুলির পার্থক্য $= x - 10$ | $(x - 10)^2$ |
|---|---|---|
| 4 | $-6$ | 36 |
| 8 | $-2$ | 4 |
| 10 | 0 | 0 |
| 12 | 2 | 4 |
| 16 | 6 | 36 |
| মোট = 50 | | $\Sigma(x - 10)^2 = 80$ |

এখানে, $n = 5$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(x-10)^2}{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ মনে করি, কল্পিত গড় $= 9$

| রাশি $(x)$ | $d = x - 9$ | $d^2$ |
|---|---|---|
| 4 | $-5$ | 25 |
| 8 | $-1$ | 1 |
| 10 | 1 | 1 |
| 12 | 3 | 9 |
| 16 | 7 | 49 |
| | $\Sigma d = 5$ | $\Sigma d^2 = 85$ |

এখানে, $n = 5$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{85}{5} - \left(\frac{5}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{17 - 1} = \sqrt{16} = 4$$

**উদাহরণ 10.** নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড়, *S. D.* এবং ভেদমান নির্ণয় করুন।

| $x$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 9 | 18 | 25 | 27 | 14 | 7 |

সমাধান ঃ যৌগিক গড় এবং *S. D.* নির্ণয়ের গণনাকার্য

| $x$ | $f$ | $d = x - A$ $= x - 40$ | $d' = \dfrac{d}{10}$ | $d'^2$ | $f \times d'$ | $f \times d'^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | $-30$ | $-3$ | 9 | $-27$ | 81 |
| 20 | 18 | $-20$ | $-2$ | 4 | $-36$ | 72 |
| 30 | 25 | $-10$ | $-1$ | 1 | $-25$ | 25 |
| $40 = A$ | 27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 14 | 10 | 1 | 1 | 14 | 14 |
| 60 | 7 | 20 | 2 | 4 | 14 | 28 |
| | $\Sigma f = 100$ | | | | $\Sigma fd' = -60$ | $\Sigma f \times d'^2 = 220$ |

যৌগিক গড় $(\bar{x}) = A + \dfrac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times i$

$$= 40 + \frac{-60}{100} \times 10$$

$$= 40 - 6 = 34$$

$$S.\ D.\ (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'}{\Sigma f}\right)^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{220}{100} - \left(\frac{-60}{100}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{2{\cdot}20 - {\cdot}36} \times 10$$

$$= \sqrt{1{\cdot}84} \times 10$$

$$= 1{\cdot}356 \times 10 = 13{\cdot}56$$

ভেদমান $= \sigma^2 = (13{\cdot}56)^2 = 183{\cdot}87$

**উদাহরণ 11.** নীচের বিভাজন থেকে ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন।

| নম্বর | 0 – 10 | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা | 4 | 10 | 16 | 12 | 8 |

**সমাধান ঃ** যৌগিক গড় এবং সমক পার্থক্য নির্ণয়ের গণনাকার্য

| নম্বরের শ্রেণিবিভাগ | পরিসংখ্যা $f$ | মধ্যমান $(x)$ | $d = x - 25$ | $d' = \frac{d}{10}$ | $d'^2$ | $f \times d'$ | $f \times d'^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0–10 | 4 | 5 | – 20 | – 2 | 4 | – 8 | 16 |
| 10–20 | 10 | 15 | – 10 | – 1 | 1 | –10 | 10 |
| 20–30 | 16 | 25(=$A$) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 30–40 | 12 | 35 | 10 | 1 | 1 | 12 | 12 |
| 40–50 | 8 | 45 | 20 | 2 | 4 | 16 | 32 |
| | $N = 50$ | | | | | $\Sigma fd'$=10 | $\Sigma fd'^2$=70 |

যৌগিক গড় $(\bar{x}) = A + \frac{\Sigma fd'}{N} \times i$

$$= 25 + \frac{10}{50} \times 10 = 25 + 2 = 27$$

$$S.\,D.\,(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{70}{50} - \left(\frac{10}{50}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{1{\cdot}4 - {\cdot}04} \times 10$$

$$= \sqrt{1{\cdot}36} \times 10 = 1{\cdot}17 \times 10 = 11{\cdot}7$$

ভেদাঙ্ক $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$= \frac{11{\cdot}7}{27} \times 100\% = 43{\cdot}3\%$$

উদাহরণ **12.** নীচে দুই জন ব্যাটস্‌ম্যান $A$ ও $B$-এর কোনো মরশুমে পর পর দশ ইনিংসে রানের স্কোর দেওয়া হ'ল ঃ

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 32 | 28 | 47 | 63 | 71 | 39 | 10 | 60 | 96 | 14 |
| $B$ | 19 | 31 | 48 | 53 | 67 | 90 | 10 | 62 | 40 | 80 |

রান করার ক্ষেত্রে কোন্ ব্যাটস্‌ম্যান বেশি সঙ্গতিপূর্ণ তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ যৌগিক গড় এবং **S. D.** নির্ণয়ের গণনাকার্য

| ব্যাটস্‌ম্যান $A$ | | | ব্যাটস্‌ম্যান $B$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| স্কোর ($x$) | $d = x - 60$ | $d^2$ | স্কোর ($x$) | $d = x - 40$ | $d^2$ |
| 32 | − 28 | 784 | 19 | − 21 | 441 |
| 28 | − 32 | 1024 | 31 | − 9 | 81 |
| 47 | − 13 | 169 | 48 | 8 | 64 |
| 63 | 3 | 9 | 53 | 13 | 169 |
| 71 | 11 | 121 | 67 | 27 | 729 |
| 39 | − 21 | 441 | 90 | 50 | 2500 |
| 10 | − 50 | 2500 | 10 | − 30 | 900 |
| 60 | 0 | 0 | 62 | 22 | 484 |
| 96 | 36 | 1296 | 40 | 0 | 0 |
| 14 | − 46 | 2116 | 80 | 40 | 1600 |
| | $\Sigma d = -140$ | $\Sigma d^2 = 8460$ | | $\Sigma d = 100$ | $\Sigma d^2 = 6958$ |

ব্যাটসম্যান $A$ এর ক্ষেত্রে ঃ

$$\text{যৌগিক গড়} = 60 + \frac{-140}{10}$$
$$= 60 - 14$$
$$= 46$$

$$S.\,D. = \sqrt{\frac{8460}{10} - \left(\frac{-140}{10}\right)^2}$$
$$= \sqrt{846 - 196}$$
$$= \sqrt{650} = 25{\cdot}5$$

$$\therefore \text{ ভেদাঙ্ক} = \frac{SD}{\text{যৌগিকগড়}} \times 100\% = \frac{25{\cdot}5}{46} \times 100\% = 55{\cdot}43\%$$

ব্যাটস্‌ম্যান $B$-এর ক্ষেত্রে ঃ

$$\text{যৌগিক গড়} = 40 + \frac{100}{10}$$
$$= 40 + 10 = 50$$

$$S.\,D. = \sqrt{\frac{6958}{10} - \left(\frac{100}{10}\right)^2}$$
$$= \sqrt{695{\cdot}8 - 100}$$
$$= \sqrt{595{\cdot}8} = 24{\cdot}41$$

$$\therefore \text{ ভেদাঙ্ক} = \frac{SD}{\text{যৌগিকগড়}} \times 100\%$$
$$= \frac{24{\cdot}41}{50} \times 100\% = 48{\cdot}82\%$$

$\therefore$ $B$ ব্যাটস্‌ম্যান এর ভেদাঙ্ক $A$ ব্যাটস্‌ম্যানের ভেদাঙ্ক অপেক্ষা কম।
$\therefore$ রান করার ক্ষেত্রে $B$ ব্যাটস্‌ম্যান বেশি সঙ্গতিপূর্ণ।

## 3.11 সারাংশ

এই এককে রাশিতথ্যমালার মানসমূহ তাদের কেন্দ্রীয় মানের থেকে কি পরিমাণ বিচ্যুতি হয়েছে তা নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে। শুধু গড় নির্ণয় দ্বারা রাশিতথ্যমালার সঠিক প্রকাশ সম্ভব নয়। সেজন্য বিস্তৃতির (dispersion) পরিমাপও জানা দরকার।

## 3.12 অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত মানসমূহের প্রসার নির্ণয় করুন।

   (*i*) (টাকা) 30, 15, 16, 28, 40, 10, 20

   (*ii*) (সেমি) 120, 110, 112, 138, 140, 100, 115, 160

2. নীচের বিভাজনের প্রসার নির্ণয় করুন ঃ

| $x$ | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 2 | 8 | 5 | 7 | 6 | 2 |

3. নীচের বিভাজনের প্রসার নির্ণয় করুন ঃ

| ওজনের শ্রেণিবিভাগ (কেজিতে) | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
|---|---|---|---|---|---|
| লোকসংখ্যা | 2 | 4 | 5 | 6 | 3 |

4. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের চতুর্থক পার্থক্য নির্ণয় করুন ঃ

   (*i*) 4, 12, 18, 15, 45, 16, 30

   (*ii*) 10, 33, 37, 25, 12, 46, 54, 41, 30

5. নিম্নলিখিত রাশিগুলির (*i*) যৌগিক গড় সাপেক্ষে, (*ii*) মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন ঃ

   20, 40, 45, 65, 70, 25, 50, 85

6. নীচের বিভাজনের যৌগিক গড় এবং যৌগিক গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করুন ঃ

| নম্বর | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা | 5 | 11 | 18 | 22 | 16 | 8 |

7. নীচের বিভাজনের মধ্যমা থেকে গড় পার্থক্য নির্ণয় করুন ঃ

| শ্রেণিবিভাগ | 2-4 | 4-6 | 6-8 | 8-10 |
|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা | 3 | 4 | 2 | 1 |

8. নীচের সংখ্যা শ্রেণিসমূহের সমক পার্থক্যের মান নির্ণয় করুন ঃ

(*i*) 20, 60, 120, 85, 40

(*ii*) 43, 63, 59, 46, 52, 65, 54, 60

9. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের সমক পার্থক্যের মান নির্ণয় করুন ঃ

| মান ($x$) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | মোট |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা ($f$) | 9 | 18 | 25 | 27 | 14 | 7 | 100 |

10. নীচের বিভাজনের সমক পার্থক্যের মান নির্ণয় করুন ঃ

| দৈনিক বেতন (টাকায়) | 20-24 | 25-29 | 30-34 | 35-39 |
|---|---|---|---|---|
| শ্রমিক সংখ্যা | 16 | 28 | 14 | 12 |

11. নীচের বিভাজন ছক থেকে চতুর্থক পার্থক্য গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন ঃ

| শ্রেণিবিভাগ | 6-10 | 11-15 | 16-20 | 21-25 | 26-30 |
|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা | 20 | 30 | 50 | 40 | 10 |

12. নীচের বিভাজন ছক থেকে নম্বরের ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন ঃ

| প্রাপ্ত নম্বর | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
|---|---|---|---|---|---|
| ছাত্রসংখ্যা | 2 | 35 | 46 | 12 | 5 |

13. দুইজন ব্যাটস্‌ম্যান $A$ এবং $B$ পরপর দশটি ক্রিকেট ম্যাচে নিম্নলিখিত রান করেছিল।

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 14 | 13 | 26 | 53 | 17 | 29 | 79 | 36 | 84 | 49 |
| $B$ | 37 | 22 | 56 | 52 | 14 | 10 | 37 | 48 | 20 | 4 |

স্কোর করবার ক্ষেত্রে কোন্ খেলোয়াড় বেশি সজাতিপূর্ণ?

14. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে কোন্ শ্রেণিটির পরিবর্তনশীলতা বেশি তা নির্ণয় করুন ঃ

| শ্রেণিবিভাগ | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 10 | 18 | 32 | 40 | 22 | 18 |
| $B$ | 18 | 22 | 40 | 32 | 18 | 10 |

15. একই শিল্পে নিযুক্ত দুটি কারখানা $A$ ও $B$ এর শ্রমিকদের দৈনিক বেতন সংক্রান্ত তথ্যসমূহ নিম্নরূপ ঃ

| | কারখানা $A$ | কারখানা $B$ |
|---|---|---|
| শ্রমিক সংখ্যা | 550 | 650 |
| গড় বেতন (টাকায়) | 50 | 45 |
| সমক পার্থক্য (টাকায়) | 10 | 10·5 |

নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দিন ঃ

(ক) কোন্ কারখানা $A$ বা $B$ দৈনিক বেতন বাবদ অধিক অর্থ ব্যয় করে?

(খ) কোন্ কারখানা $A$ বা $B$, ব্যক্তিগত বেতনের ক্ষেত্রে বেশি পরিবর্তনশীল?

## 3.13 উত্তরমালা

1. (i) 30 টাকা (ii) 60 কেজি
2. 50
3. 40 কেজি
4. (i) 9 (ii) 8
5. 35%, 36.84%
6. 5, 1.63, 11.31
7. 1.4
8. (i) 34.9 (ii) 6.36
9. 13.56
10. 5.03 টাকা
11. 23%
12. 19.6%
13. B
14. B
15. (ক) B (খ) B.

# একক-4 ☐ সহপরিবর্তন (Correlation)

গঠন



## 4.1 প্রস্তাবনা ঃ

আগের অধ্যায়গুলিতে একটি মাত্র চলকের বৈশিষ্ট্যসমূহ যথা উচ্চতা, ওজন, আয় প্রভৃতির গড়, সমক পার্থক্য প্রভৃতি নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু বাস্তবক্ষেত্রে দুই বা ততোধিক চলকের পারস্পরিক সম্পর্ক জানার প্রয়োজন হয়। একটি বিদ্যালয়ের ছাত্র-ছাত্রীদের বয়স ও উচ্চতার মধ্যে, বিভিন্ন জিনিসের দাম ও চাহিদার মধ্যে, স্বামী-স্ত্রীর বয়সের মধ্যে, বিজ্ঞাপন ও বিক্রয়ের মধ্যে, পরিবারের আয় ও ব্যয়ের মধ্যে কীরূপ সম্বন্ধ তা জানার প্রয়োজন হয়ে পড়ে। দুটি চলকের একটির মান বৃদ্ধি করলে অপর চলকের মানের বৃদ্ধি বা হ্রাস হতে পারে। চলকদ্বয়ের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক আছে কিনা এবং থাকলে তাদের সম্পর্কের প্রকৃতি কীরূপ তা নির্ণয় করা হয় সহপরিবর্তনের সাহায্যে।

## 4.2 দ্বিচলভিত্তিক রাশিতথ্য (Bivariate data) :

দুটি চলকের মান একই সঙ্গে পরিমাপ করে যে জোড়াগুলি (*Pairs*) পাওয়া যায় তাদের দ্বিচলভিত্তিক রাশিতথ্যমালা বলা হয়। ধরা যাক্ $x$ ও $y$ দুইটি চলক। তাদের $n$ সংখ্যক জোড়ামানকে প্রকাশ করা হয় এইভাবে—

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots\ldots (x_n, y_n)$

**উদাহরণ :** 10 জন ছাত্রের উচ্চতা (সেমিতে) ও ওজনের (কিলোগ্রামে) একটি দ্বিচলভিত্তিক রাশিতথ্যমালা দেওয়া হল।

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| উচ্চতা (সেমি) | 100 | 110 | 108 | 125 | 118 | 120 | 125 | 126 | 124 | 127 |
| ওজন (কেজি) | 22 | 23 | 20 | 28 | 24 | 26 | 30 | 27 | 25 | 29 |

প্রথম ছাত্রের উচ্চতা ও ওজনের জোড়ামান (100, 22), দ্বিতীয় ছাত্রের (110, 23) ইত্যাদি। এই জোড়ামানগুলি $(x, y)$ আকারে প্রকাশ করা হয়েছে যেখানে, $x$ = উচ্চতা (সেমি) এবং $y$ = ওজন (কেজি) সূচিত করে। দ্বিচলভিত্তিক রাশিতথ্যমালায় রাশিতথ্যের সংখ্যা বেশি হলে দ্বিচলভিত্তিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করা হয়।

নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে 100টি পরিবারের মোট আয় $y$ এবং খাদ্যসামগ্রীর জন্য ব্যয় (শতাংশ) $x$ কে দেখানো হয়েছে।

| আয় টাকা ($y$) খাদ্যসামগ্রীর জন ব্যয় (শতাংশ) ($x$) | 4000-5000 | 5000-6000 | 6000-7000 | 7000-8000 | 8000-9000 | মোট |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20-25 | 6 | 5 | 3 | 2 | 3 | 19 |
| 25-30 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 21 |
| 30-35 | 2 | 2 | 9 | 5 | 10 | 28 |
| 35-40 | 1 | 2 | 8 | 9 | 12 | 32 |
| মোট | 12 | 13 | 25 | 20 | 30 | 100 |

এখানে $x$ চলকের জন্য 4টি শ্রেণিবিভাগ এবং $y$ চলকের জন্য 5টি শ্রেণিবিভাগ ধরা হয়েছে। ছকটিতে মোট $4 \times 5 = 20$ টি পৃথক ঘর (cell) ব্যবহার করা হয়েছে। দুটি চলকের প্রতি জোড়া মানকে উপযুক্ত ঘরে চিহ্নিত করা যায়। এইভাবে প্রাপ্ত বিভাজনকে দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজন বলা হয়।

## 4.3 সহ পরিবর্তন (Correlation) :

সহপরিবর্তন বলতে দুটি চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক বোঝায়। চলক দুটি কী পরিমাণে সম্পর্কযুক্ত তার প্রবণতা (tendency) প্রকাশ করাকেই বলে সহপরিবর্তন।

দুটি চলকের মান একমুখী হলে অর্থাৎ প্রথম চলকের মান বৃদ্ধি বা হ্রাস পেলে দ্বিতীয় চলকের মানেরও যথাক্রমে বৃদ্ধি বা হ্রাস হয়, তখন চলক দুটির সহপরিবর্তন মান ধনাত্মক ধরা হয়। একদল ছাত্রের বয়স ও উচ্চতার সহপরিবর্তনের মান ধনাত্মক।

চলক দুটির মান বিপরীতমুখী হলে অর্থাৎ প্রথম চলকের মান বৃদ্ধি পেলে দ্বিতীয় চলকের মান হ্রাস পায় বা প্রথম চলকের মান হ্রাস পেলে দ্বিতীয় চলকের মান বৃদ্ধি পায়, তখন চলক দুটির সহপরিবর্তনের মান ঋণাত্মক ধরা হয়। কোন দ্রব্যের মূল্য এবং চাহিদার সহপরিবর্তনের মান ঋণাত্মক। এখানে x ও y চলক দুটির মধ্যে সম্বন্ধ বলতে আমরা রৈখিক সম্বন্ধ বুঝবো। তাহলে এখানে x ও y এর সহপরিবর্তনের মান চলক দুটির মধ্যে $y = ax + b$ বা $x = cy + d$ আকারের সম্বন্ধ থাকার প্রবণতা নির্দেশ করবে।

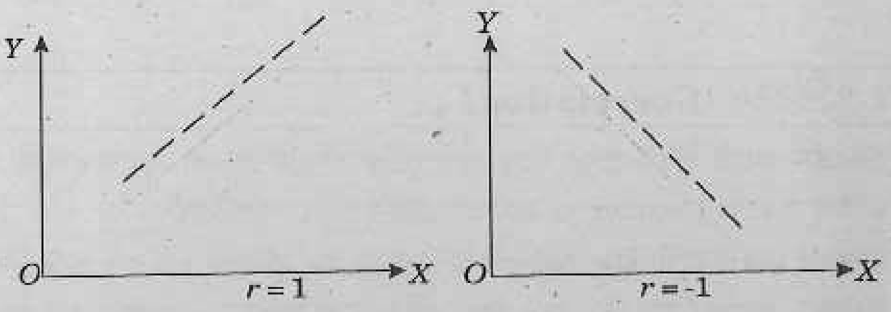
যদি একটি চলকের পরিবর্তনের সঙ্গে অন্য চলকের পরিবর্তন কোনো ভাবে যুক্ত না হয়, চলক দুটির সহপরিবর্তনের মান শূন্য ধরা হয়। কয়েকটি ছাত্রের ওজন ও তাদের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের মধ্যে কোনো সম্বন্ধ নেই। সেজন্য তাদের সহপরিবর্তনের মান শূন্য।

## 4.4 বিক্ষেপণ চিত্র (Scatter Diagram) :

দ্বিচলভিত্তিক রাশিতথ্যমালার লৈখিক প্রকাশকেই বিক্ষেপণ চিত্র বলে। $x$-চলককে $x$-অক্ষ বরাবর এবং $y$-চলককে $y$-অক্ষ বরাবর ধরে রাশিতথ্যমালার প্রতি জোড়া মানকে ছক কাগজে বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করে যে চিত্র পাওয়া সেটাই হল বিক্ষেপণ চিত্র।

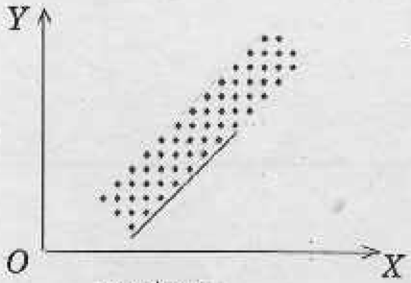
বিক্ষেপণ চিত্রে বিন্দুগুলি একই সরলরেখা বরাবর থাকতে পারে বা একই সরলরেখায় না থেকে অন্য একটি সরলরেখার খুব নিকটবর্তী স্থানে অবস্থান করে অথবা বিন্দুগুলি বিক্ষিপ্তভাবে অবস্থান করতে পারে। বিন্দুগুলির অবস্থান থেকে চলক দুটির সহপরিবর্তনের প্রকৃতি ও মাত্রা নির্ণয় করা যায়। নীচে বিভিন্ন ধরনের বিক্ষেপণ চিত্র দেওয়া হল :

(i) বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে চলকদ্বয়ের পারস্পরিক সম্বন্ধকে পূর্ণ ধরা হয় এবং সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক $r$-এর মান $+1$ বা $-1$ হয়। সরলরেখার নতি ধনাত্মক হলে, $r$-এর মান $+1$ হবে এবং সরলরেখার নতিঋণাত্মক হলে $r$-এর মান $-1$ হবে।

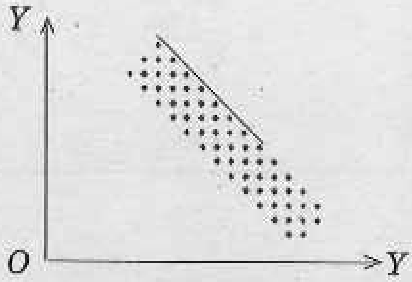



(ii) বিক্ষেপণ চিত্রের বিন্দুগুলি সরলরেখায় না থেকে অন্য একটি সরলরেখায় খুব নিকটবর্তী

হয় তবে চলকদ্বয়ের পারস্পরিক সম্বন্ধকে আংশিক ধরা হয় এবং $r$-এর মান $-1$ এবং $+1$-এর মধ্যে ভগ্নাংশ ধরা হয়।

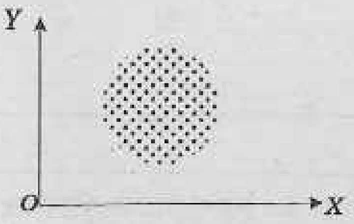



r ধনাত্মক

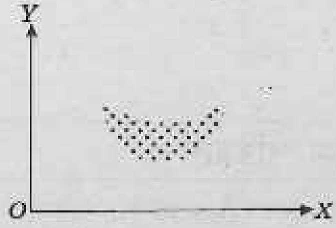



r ঋনাত্মক

(iii) বিক্ষেপণ চিত্রে বিন্দুগুলি সরলরৈখিক পথে না থেকে যদি বিক্ষিপ্তভাবে থাকে, তবে চলকদ্বয়ের মধ্যে কোনো সম্বন্ধ নেই এবং $r$-এর মান শূন্য।




$r = O$




$r = O$

## 4.5 সহ-ভেদমান (Covariance) ঃ

দুটি চলক $x$ ও $y$-এর $n$ সংখ্যক জোড়ামানগুলি ধরা হল $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots (x_n, y_n)$ তাহলে $cov(x, y) = \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ যেখানে $\bar{x}$ ও $\bar{y}$ যথাক্রমে $x$ ও $y$ রাশিগুলির যৌগিক গড়।

$$cov(x, y) = \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

$$= \frac{1}{n}\sum(xy-\bar{x}y-x\bar{y}+\bar{x}\,\bar{y})$$

$$= \frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\frac{\sum y}{n} - \bar{y}\frac{\sum x}{n} + \frac{n\bar{x}\bar{y}}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$$

$$= \frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\bar{y}$$

$$= \frac{1}{n}\sum xy - \frac{\sum x}{n}.\frac{\sum y}{n}$$

$$\therefore \quad cov(x, y) = \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}) \quad \text{.................. (1)}$$

$$= \frac{1}{n}\sum xy - \frac{\sum x}{n}.\frac{\sum y}{n} \quad \text{.................... (2)}$$

## 4.6 সহপরিবর্তন পরিমাপ ঃ

দুটি চলকের সহপরিবর্তনের মাত্রার পরিমাপ করা হয় সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের সাহায্যে। মনে রাখতে হবে যে, সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক একটি আপেক্ষিক পরিমাপ এবং সেজন্য এর কোনো একক নেই।

সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক (গুণফল ভ্রামক পদ্ধতি) ঃ

Karl Pearson-এর গুণফল ভ্রামক পদ্ধতিতে সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক $r = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$

যেখানে $\text{cov}(x, y) = x$ ও $y$-এর সহভেদমান,

$s_x = x$ চলকের সমক পার্থক্য

এবং $s_y = y$ চলকের সমক পার্থক্য

$$\therefore \quad r = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma y}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum(y-\overline{y})^2}}$$

আবার $\frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})^2$

$$= \frac{1}{n}\sum(x^2-2x\overline{x}+\overline{x}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum x^2 - 2\overline{x}\sum\frac{x}{n} + \frac{n\overline{x}^2}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum x^2 - 2\overline{x}^2 + x^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum x^2 - \overline{x}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum x^2 - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left[n\sum x^2 - (\sum x)^2\right]$$

অনুরূপে, $\frac{1}{n}\sum(y-\overline{y})^2 = \frac{1}{n^2}\left[n\sum y^2 - (\sum y)^2\right]$

$$\therefore \quad r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \frac{\sum x}{n}.\frac{\sum x}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\left[n\sum x^2 - (\sum x)^2\right]}\sqrt{\frac{1}{n^2}\left[n\sum y^2 - (\sum y)^2\right]}}$$

$$\therefore \quad r = \frac{n\sum xy - \sum x\sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$r$ নির্ণয়ের জন্য এই সূত্রগুলি ব্যবহার করা হয় ঃ-

(i) $r = \dfrac{\frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sigma_x\sigma_y}$

(ii) $r = \dfrac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$

(iii) $r = \dfrac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2}\sqrt{\sum Y^2}}$

যেখানে $X = x - \overline{x}$, $Y = y - \overline{y}$

(iv) $r = \dfrac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{n\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$

যেখানে $X = x - A$, $Y = y - B$

এবং $A$ ও $B$ যথাক্রমে $x$ ও $y$ চলকের কল্পিত গড়ের মান।

## 4.7 সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক ($r$) এর ধর্ম ঃ

(i) সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক একটি সংখ্যা। ইহার কোনো একক নেই।

(ii) সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের মান মূলবিন্দুর অবস্থান এবং স্কেল পরিবর্তনের উপর নির্ভর করে না।

ধরা যাক্, $x$ ও $y$ চলরাশি দুটির $n$ জোড়ামান যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ...... $(x_n, y_n)$ এবং তাদের সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের মান $r_{xy}$।

এখন $x$ ও $y$ এর মূলবিন্দু যথাক্রমে $a$ ও $b$ তে এবং স্কেল যথাক্রমে $c$ ও $d$ তে পরিবর্তিত করা হল,

$$\therefore \quad u_i = \frac{x_i - a}{c} \text{ এবং } v_i = \frac{y_i - b}{d}.$$

$u$ ও $v$ চলক দ্বয়ের সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক $r_{uv}$ হলে, $r_{xy} = r_{uv}$ যখন $c$ ও $d$ একই চিহ্নযুক্ত এবং $r_{xy} = - r_{uv}$ যখন $c$ ও $d$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

প্রমাণ ঃ

$$\because \quad u_i = \frac{x_i - a}{c}$$

$$\therefore \quad x_i = a + cu_i$$

$$\therefore \quad \bar{x} = a + c\bar{u}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum(a + cu_i - a - c\bar{u})^2$$

$$= \frac{1}{n}c^2\sum(u_i - \bar{u})^2$$

$$= c^2\sigma_u^2$$

$$\therefore \quad s_x = |c|\ s_u \quad [\because s_x \geq 0]$$

অনুরূপভাবে, $s_y = |d|\ s_v$

$$\text{cov}\ (x, y) = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$= \frac{1}{n}\sum(a + cu_i - a - c\bar{u})(a + dv_i - a - d\bar{v})$$

$$= \frac{1}{n}\sum c(u_i - \bar{u})d(v_i - \bar{v})$$

$$= \frac{cd}{n}\sum(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$$

এখন, $$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$= \frac{cd\,\text{cov}(u, v)}{|c|\sigma_u|d|\sigma_v}$$

$$= \frac{cd}{|c||d|}\cdot\frac{\text{cov}(u, v)}{\sigma_u\sigma_v}$$

$$= \frac{cd}{|c||d|}\, r_{uv}$$

c ও $d$ একই চিহ্নযুক্ত হলে $\frac{cd}{|c||d|} = 1$

এবং $c$ ও $d$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে $\frac{cd}{|c||d|} = -1$

$\therefore$ $r_{xy} = r_{uv}$ যখন $c$ ও $d$ একই চিহ্নযুক্ত এবং $r_{xy} = -r_{uv}$ যখন $c$ ও $d$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

$\therefore \quad |r_{xy}| = |r_{uv}|$

$\therefore$ সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের ম'· মূলবিন্দুর অবস্থান এবং স্কেল পরিবর্তনের উপর নির্ভর করে না।

**(iii) সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক $r$ হলে, যে-কোনো ক্ষেত্রে $-1 \leq r \leq 1$ হবে।**

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, $x$ ও $y$ চলকদ্বয়ের $n$ সংখ্যক জোড়ামানগুলি হল ঃ

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots\ldots\ldots (x_n, y_n)$

এবং $u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}$, $v_i = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}$ $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n,$

যেখানে $x$ ও $y$ চলকের যৌগিক গড় ও সমক পার্থক্য যথাক্রমে $\bar{x}, \bar{y}$ এবং $\sigma_x$, $\sigma_y$

$$\text{এখন, } \sum u_i^2 = \sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}\right)^2$$

$$= \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} = \frac{n\sigma_x^2}{\sigma_x^2} = n$$

অনুরূপভাবে, $\sum v_i^2 = n$

$$\Sigma u_i v_i = \sum \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \cdot \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}$$

$$= \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{n \operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = nr$$

এখন, $\sum(u_i + v_i)^2 \geq 0$

বা, $\sum(u_i^2+v_i^2+2u_iv_i)\geq 0$

বা, $\sum u_i^2 + \sum v_i^2 + 2 \ \Sigma u_iv_i \geq 0$

বা, $n + n + 2nr \geq 0$

বা, $2n + 2nr \geq 0$

বা, $2n(1+r) \geq 0$

$\therefore \quad 1 + r \geq 0 \qquad \therefore \quad r \geq -1$

আবার, $\sum(u_i - v_i)^2 \geq 0$

বা, $\sum(u_i^2+v_i^2-2u_iv_i) \geq 0$

বা, $\sum u_i^2+\sum v_i^2-2\sum u_iv_i \geq 0$

বা, $n + n - 2nr \geq 0$

বা, $2n(1 - r) \geq 0$

$\therefore \quad 1 - r \geq 0 \quad \therefore \quad r \leq 1$

$\therefore \quad -1 \leq r \leq 1$

**উদাহরণ 1.** নীচের প্রদত্ত তথ্য থেকে Pearson-এর সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের মান নির্ণয় করুন ঃ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 48 | 35 | 17 | 23 | 47 |
| $y$ | 45 | 20 | 40 | 25 | 45 |

সমাধান ঃ সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের গণনাকার্য

| $x$ | $y$ | $X = x - \bar{x}$ $= x - 34$ | $Y = y - \bar{y}$ $= y - 35$ | $X^2$ | $Y^2$ | $XY$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 48 | 45 | 14 | 10 | 196 | 100 | 140 |
| 35 | 20 | 1 | – 15 | 1 | 225 | – 15 |
| 17 | 40 | – 17 | 5 | 289 | 25 | – 85 |
| 23 | 25 | – 11 | – 10 | 121 | 100 | 110 |
| 47 | 45 | 13 | 10 | 169 | 100 | 130 |
| $\Sigma x =$ 170 | $\Sigma y =$ 175 | $\Sigma X = 0$ | $\Sigma Y = 0$ | $\Sigma X^2$ = 776 | $\Sigma Y^2$ = 550 | $\Sigma XY$ = 280 |

$\bar{x}$ = $x$-এর যৌগিক গড় = $\frac{170}{5} = 34$

$\bar{y}$ = $y$-এর যৌগিক গড় = $\frac{175}{5} = 35$

$$r = \frac{\sum XY}{\sum X^2 \sum Y^2}$$

$$= \frac{280}{\sqrt{770}\sqrt{550}} = \frac{280}{653{\cdot}30} = 0{\cdot}429$$

বিকল্প পদ্ধতি :

[$\bar{x}$ ও $\bar{y}$-এর মান পূর্ণসংখ্যা না হলে, নীচের পদ্ধতি ব্যবহার করা সুবিধাজনক। এখানে সুবিধামতো দুটি কল্পিত গড় 30 ও 25 ধরে নেওয়া হল।]

| $x$ | $y$ | $X = x - 30$ | $Y = y - 25$ | $X^2$ | $Y^2$ | $XY$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 48 | 45 | 18 | 20 | 324 | 400 | 360 |
| 35 | 20 | 5 | –5 | 25 | 25 | –25 |
| 17 | 40 | –13 | 15 | 169 | 225 | – 195 |
| 23 | 25 | – 7 | 0 | 49 | 0 | 0 |
| 47 | 45 | 17 | 20 | 289 | 400 | 340 |
| | | $\Sigma X = 20$ | $\Sigma Y = 50$ | $\Sigma X^2 = 856$ | $\Sigma Y^2 = 1050$ | $\Sigma XY = 480$ |

$$r = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{n\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

$$= \frac{5\times480 - 20\times50}{\sqrt{5\times856 - (20)^2}\sqrt{5\times1050 - (50)^2}}$$

$$= \frac{2400 - 1000}{\sqrt{4280 - 400}\sqrt{5250 - 2500}}$$

$$= \frac{1400}{\sqrt{3880}\sqrt{2750}}$$

$$= \frac{1400}{62 \cdot 29 \times 52 \cdot 44}$$

$$= \frac{1400}{3266 \cdot 49} = 0 \cdot 429$$

**উদাহরণ 2.** $x$ ও $y$ চলকের কল্পিত গড় যথাক্রমে 69 ও 112 ধরে নিম্নলিখিত রাশিতথ্যমালা থেকে *Pearson*-এর সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন ঃ

| $x$ | 78 | 89 | 96 | 69 | 59 | 79 | 68 | 61 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 125 | 137 | 156 | 112 | 107 | 136 | 123 | 108 |

**সমাধান ঃ** সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয়ের গণনাকার্য

| $x$ | $y$ | $X = x - 69$ | $Y = y - 112$ | $X^2$ | $Y^2$ | $XY$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 78 | 125 | 9 | 13 | 81 | 169 | 117 |
| 89 | 137 | 20 | 25 | 400 | 625 | 500 |
| 96 | 156 | 27 | 44 | 729 | 1936 | 1188 |
| 69 | 112 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 59 | 107 | – 10 | – 5 | 100 | 25 | 50 |
| 79 | 136 | 10 | 24 | 100 | 576 | 240 |
| 68 | 123 | – 1 | 11 | 1 | 121 | 11 |
| 61 | 108 | – 8 | – 4 | 64 | 16 | 32 |
| | | $\Sigma X = 47$ | $\Sigma Y = 108$ | $\Sigma X^2 = 1475$ | $Y^2 = 3468$ | $\Sigma XY = 2116$ |

$$r = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{n\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

$$= \frac{8 \times 2166 - 47 \times 108}{\sqrt{8 \times 1475 - (47)^2}\sqrt{8 \times 3468 - (108)^2}}$$

$$= \frac{16928 - 5076}{\sqrt{11800 - 2209}\sqrt{27744 - 11664}}$$

$$= \frac{11852}{\sqrt{9591}\sqrt{16080}}$$

$$= \frac{11852}{97 \cdot 93 \times 126 \cdot 80} = \frac{11852}{12417 \cdot 52} = 0 \cdot 954$$

উদাহরণ **3.** নীচের তথ্য থেকে $x$ ও $y$-এর মধ্যে সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের মান নির্ণয় করুন :

$n = 10$, $\Sigma x = 140$, $\Sigma y = 150$, $\Sigma(x - 10)^2 = 180$, $\Sigma(y - 15)^2 = 215$, $\Sigma(x - 10)(y - 15) = 60$.

**সমাধান :** ধরা যাক্, $X = x - 10$, $Y = y - 15$

$$\therefore \quad \Sigma X = \Sigma(x - 10)$$

$$= \Sigma X - \Sigma 10 = 140 - 10 \times n$$

$$= 140 - 10 \times 10 = 140 - 100 = 40$$

$$\Sigma \text{Y} = \Sigma(y - 15)$$

$$= \Sigma y - \Sigma 15 = 150 - 15 \times n$$

$$= 150 - 15 \times 10 = 150 - 150 = 0$$

$$\Sigma X^2 = \Sigma(x - 10)^2 = 180$$

$$\Sigma Y^2 = \Sigma(y - 15)^2 = 215$$

$$\Sigma XY = \Sigma(x - 10)(y - 15) = 60$$

$$\therefore \quad r = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{n\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

$$= \frac{10 \times 60 - 40 \times 0}{\sqrt{10 \times 180 - (40)^2}\sqrt{10 \times 215 - 0}}$$

$$= \frac{600}{\sqrt{1800 - 1600}\sqrt{2150}} = \frac{600}{\sqrt{200}\sqrt{2150}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{43}} = \frac{6}{6 \cdot 56} = 0 \cdot 915$$

উদাহরণ **4.** 12 জোড়া পর্যবেক্ষণলব্ধ রাশিতথ্য থেকে $x$ ও $y$ চলকদ্বয়ের মধ্যে সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয়ের সময় নীচের ফলগুলি পাওয়া গেল :

$n = 12$, $\Sigma x = 30$, $\Sigma y = 5$, $\Sigma x^2 = 670$, $\Sigma y^2 = 285$, $\Sigma xy = 334$

পরবর্তীকালে দেখা গেল যে, একজোড়া মান ভুল করে ($x = 11$, $y = 4$) লেখা হয়েছে, যেখানে সঠিক মান ছিল ($x = 10$, $y = 14$)। সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের সঠিক মান নির্ণয় করুন।

**সমাধান :** $\Sigma x$-এর সঠিক মান $= 30 -$ ($x$-এর ভুল মান) $+$ ($x$-এর সঠিক মান)

$$= 30 - 11 + 10 = 29$$

$\Sigma y$-এর সঠিক মান = 5 − ($y$-এর ভুল মান) + ($y$-এর সঠিক মান)

$$= 5 - 4 + 14 = 15$$

$\Sigma x^2$-এর সঠিক মান = 670 − ($x$-এর ভুল মান)$^2$ + ($x$-এর সঠিক মান)$^2$

$$= 670 - (11)^2 + (10)^2$$

$$= 670 - 121 + 100 = 649$$

$\Sigma y^2$-এর সঠিক মান = 285 − ($y$-এর ভুল মান)$^2$ + ($y$-এর সঠিক মান)$^2$

$$= 285 - 4^2 + (14)^2 = 465$$

$\Sigma xy$-এর সঠিক মান $= 334 - 11 \times 4 + 10 \times 14 = 430$

$$\therefore \quad \text{সঠিক } r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\sqrt{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}}$$

$$= \frac{12\times 430 - 29\times 15}{\sqrt{12\times 649 - (29)^2}\times\sqrt{12\times 465 - (15)^2}}$$

$$= \frac{4725}{\sqrt{6947}\times\sqrt{5355}} = \frac{4725}{83{\cdot}35\times 73{\cdot}17}$$

$$= 0{\cdot}775$$

## 4.8 ব্যবহার ঃ

**গুণফল ভ্রামক সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক ঃ**

($i$) দুটি চলকের পারস্পরিক সম্পর্কের প্রকৃতি ও পরিমাণ নির্ণয়ে ইহা ব্যবহৃত হয়।

(ii) $r$ এর মান ধনাত্মক হলে চলকদ্বয়ের মানগুলি সমমুখী হবে অর্থাৎ একটি রাশির উচ্চমান সমূহ অপরটির উচ্চমানের সঙ্গো এবং একটি রাশির নিম্নমানসমূহ অপরটির নিম্নমানসমূহের সঙ্গো সম্বন্ধযুক্ত হবে। $r$-এর মান ঋণাত্মক হলে চলকদ্বয়ের মানগুলি বিপরীতমুখী হবে অর্থাৎ একটি রাশির উচ্চমানসমূহ অপরটির নিম্নমানসমূহের সঙ্গো এবং নিম্নমানসমূহ অপরটির উচ্চমানসমূহের সঙ্গো সম্বন্ধযুক্ত হবে।

## 4.9 সারাংশ

এই এককে দুটি চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ আছে কিনা বা থাকলে তাদের মধ্যে সম্বন্ধের প্রকৃতি নির্ণয় করা হয়েছে।

## 4.10 অনুশীলনী

1. সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের মান নির্ণয় করুন ঃ

   (i) $\Sigma x = 125$, $\Sigma x^2 = 1585$, $\Sigma y = 80$, $\Sigma y^2 = 650$, $\Sigma xy = 1007$, $n = 10$

   (ii) $n = 10$, $\Sigma x = 90$, $\Sigma y = 100$, $\Sigma(x-5)^2 = 170$, $\Sigma(y-10)^2 = 250$, $\Sigma(x-5)(y-10) = 40$

2. নিচের দ্বি-চলক রাশিতথ্যমালা থেকে একটি বিক্ষেপণ চিত্র অঙ্কন করুন ঃ

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $y$ : | 4 | 5 | 7 | 9 | 13 | 16 | 17 |

3. নিচের রাশিতথ্যমালা থেকে সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন ঃ

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (i) $x$ : | 6 | 2 | 10 | 4 | 8 | | |
| $y$ : | 9 | 11 | 5 | 8 | 7 | | |
| (ii) $x$ : | 42 | 44 | 58 | 55 | 89 | 98 | 66 |
| $y$ : | 56 | 49 | 53 | 58 | 65 | 76 | 58 |

4. নীচে 10 জন ছাত্রের গণিত ও পরিসংখ্যান বিষয়ে নম্বর দেওয়া আছে, $x$ ও $y$-এর সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন।

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| গণিত ($x$) | 32 | 38 | 48 | 43 | 40 | 22 | 41 | 69 | 35 | 64 |
| পরিসংখ্যান ($y$) | 30 | 31 | 38 | 43 | 33 | 11 | 27 | 76 | 40 | 59 |

5. $x$ এবং $y$-এর মূলবিন্দু যথাক্রমে 44 এবং 26 ধরে নীচের তথ্যসমূহ থেকে pearson-এর সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের মান নির্ণয় করুন ঃ

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 43 | 44 | 46 | 40 | 44 | 42 | 45 | 42 | 38 | 40 | 42 | 57 |
| $Y$ | 29 | 31 | 19 | 18 | 19 | 27 | 27 | 29 | 41 | 30 | 26 | 10 |

6. নীচের ছক থেকে $X$ ও $Y$ চলকদ্বয়ের pearson সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন ঃ

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 39 | 65 | 62 | 90 | 82 | 75 | 25 | 98 | 36 | 78 |
| $Y$ | 47 | 53 | 58 | 86 | 62 | 68 | 60 | 91 | 51 | 84 |

এখন, $X$-এর প্রতিটি মানকে 5 দিয়ে গুণ করে প্রত্যেকের সঙ্গে 8 যোগ করা হ'ল এবং $Y$-এর প্রতিটি মানকে 6 দিয়ে গুণ করে প্রত্যেকটি মান থেকে 5 বিয়োগ করা হল। $X$ ও $Y$ চলকদ্বয়ের নতুন মানের শ্রেণি থেকে সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন।

## 4.11 উত্তরমালা

1. (i) 0.47 (ii) + .80
3. (i) – 0.92 (ii) + 0.90
4. 0.935
5. – 0.73
6. 0.78, একই থাকবে

# একক-5 □ নির্ভরণ বা প্রতিগমন তত্ত্ব (Regression Theory)

গঠন



## 5.1 প্রস্তাবনা ঃ

দুটি চলক পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত হলে একটি চলকের কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য অপর চলকের অজ্ঞাত মান নির্ণয় করা বা পূর্বাভাস দেওয়ার পরিসংখ্যানীয় পদ্ধতিকে **নির্ভরণ বা প্রতিগমন** বলা হয়। নির্ভরণ বা প্রতিগমন হ'ল দুটি চলকের গড় সম্বন্ধের পরিমাপ।

## 5.2 প্রতিগমন বা নির্ভরণ রেখা (Line of regression)

প্রদত্ত দ্বিচলক তথ্যের উপর ভিত্তি করে দুটি চলকের পারস্পরিক সম্পর্ককে সম্ভাব্য সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় এবং এই সমীকরণ থেকে একটি চলকের নির্দিষ্ট কোনো মানের জন্য অপর চলকের মান নির্ধারণ করা যায়। এই সমীকরণকে নির্ভরণ বা প্রতিগমন সমীকরণ বলা হয় এবং এই সরলরেখার লৈখিক চিত্রকে নির্ভরণ বা প্রতিগমন লেখ বলা হয়।

যদি চলকের মধ্যে সরলরৈখিক সম্পর্ক থাকে তাহলে তাদের মধ্যে সরল নির্ভরণ বা প্রতিগমন আছে এবং সরলরেখাটিকে নির্ভরণ বা প্রতিগমন সরলরেখা বলা হয়।

ধরা যাক, রাশিতথ্যমালায় $x$ শ্রেণি ও $y$ শ্রেণির মান দেওয়া আছে। তাহলে দুটি প্রতিগমন রেখা পাওয়া যাবে।

(i) $x$ এর উপর $y$ এর প্রতিগমন রেখা।

(ii) $y$ এর উপর $x$ এর প্রতিগমন রেখা।

## 5.3 নির্ভরণ বা প্রতিগমন সমীকরণ (Regression equations)

(i) $x$ এর উপর $y$ এর প্রতিগমন সমীকরণ ঃ

এই সমীকরণের সাহায্যে স্বাধীন চলক $x$ এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য অধীন চলক $y$ এর সর্বোৎকৃষ্ট সম্ভাব্য মান নির্ণয় করা যায়।

ধরা যাক, পর্যবেক্ষণ থেকে $x$ ও $y$ এর $n$ সংখ্যক জোড় মান হ'ল $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$..... $(x_n, y_n)$।

এই রাশিতথ্যসমূহের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ সবচেয়ে উপযুক্ত সরলরেখার সমীকরণ ধরা হল—

$$y = a + bx \quad ............(1)$$

বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতম পদ্ধতি (method of least squares) প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি পাওয়া যাবে— [একক 6 দেখুন]

$$\Sigma y = na + b\Sigma x \quad ......(2)$$

এবং $\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$ ......(3)

(1) নং থেকে, $\frac{\Sigma y}{n} = a + b\frac{\Sigma x}{n}$

$$\therefore \quad \overline{y} = a + b\overline{x} \quad ...... (4)$$

(1) নং থেকে (4) নং বিয়োগ করে পাই,

$$y - \overline{y} = b(x - \overline{x}) \quad ......(5)$$

(2) নং থেকে পাই, $\Sigma x\Sigma y = na\Sigma x + b(\Sigma x)^2$

(3) নং থেকে পাই, $n\Sigma xy = na\Sigma x + nb(\Sigma x)^2$

$\therefore$ বিয়োগ করে পাই,

$$\Sigma x\Sigma y - n\Sigma xy = b\left[(\Sigma x)^2 - n\Sigma x^2\right]$$

$$\therefore \quad b = \frac{\Sigma x\Sigma y - n\Sigma xy}{(\Sigma x)^2 - n\Sigma x^2}$$

$$= \frac{n\,\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \frac{\Sigma x}{n}\cdot\frac{\Sigma y}{n}}{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

(5) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$y-\overline{y}=\frac{\frac{\Sigma xy}{n}-\frac{\Sigma x}{n}\frac{\Sigma y}{n}}{\frac{\Sigma x^2}{n}-\left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}(x-\overline{x})$$

$$=b_{yx}(x-\overline{x})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

যেখানে $$b_{yx}=\frac{\frac{\Sigma xy}{n}-\frac{\Sigma x}{n}\frac{\Sigma y}{n}}{\frac{\Sigma x^2}{n}-\left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

(6) নং সমীকরণকে $x$ এর উপর $y$ এর প্রতিগমন সমীকরণ বলা হয়। এই সমীকরণ থেকে $x$ এর কোনো প্রদত্ত মানের জন্য $y$ এর সবচেয়ে সম্ভাব্য মান নির্ণয় করা যাবে।

$byx$ হল (6) নং সরলরেখার প্রবণতা এবং ইহাকে $x$ এর উপর $y$-এর প্রতিগমন গুণাঙ্ক বলা হয়।

**মন্তব্য ঃ** $$b_{yx}=\frac{\frac{\Sigma xy}{n}-\frac{\Sigma x}{n}\frac{\Sigma y}{n}}{\frac{\Sigma x^2}{n}-\left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

$$=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x{}^2}$$

$$=\frac{r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2}\quad\left[\because r=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]$$

**($ii$) $y$ এর উপর $x$ এর প্রতিগমন সমীকরণ ঃ**

এই সমীকরণের সাহায্যে স্বাধীন চলক $y$-এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য অধীন চলক $x$ এর সর্বোৎকৃষ্ট সম্ভাব্য মান নির্ণয় করা যাবে।

ধরা যাক, পর্যবেক্ষণ থেকে প্রাপ্ত $x$ ও $y$ এর $n$ সংখ্যক জোড়া মান হল $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$.... $(x_n, y_n)$ এই রাশিতথ্যসমূহের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ উপযুক্ত সরলরেখার সমীকরণ ধরা হল

$$x = a + by\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতম পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি পাওয়া যাবে—

$$\Sigma x = na + b\Sigma y \quad ............(2)$$

এবং $$\Sigma xy = a\Sigma y + b\Sigma y^2 \quad ...........(3)$$

(2) নং থেকে পাই, $$\frac{\Sigma x}{n} = a + b\frac{\Sigma y}{n}$$

$$\therefore \bar{x} = a + b\bar{y} \quad .......(4)$$

(1) নং থেকে (4) বিয়োগ করে পাই,

$$x - \bar{x} = b(y - \bar{y})............. (5)$$

(2) নং থেকে পাই, $$\Sigma x\Sigma y = na\Sigma y + b(\Sigma y)^2$$

(3) নং থেকে পাই, $$n\Sigma xy = na\Sigma y + nb\Sigma y^2$$

বিয়োগ করে পাই, $$\Sigma x\Sigma y - n\Sigma xy = b\left[(\Sigma y)^2 - n\Sigma y^2\right]$$

$$\therefore \ b = \frac{\Sigma x\Sigma y - n\Sigma xy}{(\Sigma y)^2 - n\Sigma y^2}$$

$$= \frac{n\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}$$

$$= \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \frac{\Sigma x}{n}\cdot\frac{\Sigma y}{n}}{\left(\frac{\Sigma y^2}{n}\right) - \left(\frac{\Sigma y}{n}\right)^2}$$

(5) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$x - \bar{x} = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \frac{\Sigma x}{n}\cdot\frac{\Sigma y}{n}}{\left(\frac{\Sigma y^2}{n}\right) - \left(\frac{\Sigma y}{n}\right)^2}(y - \bar{y})$$

$$= b_{xy}(y - \bar{y})\ ...........(6)$$

যেখানে $$b_{xy} = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \frac{\Sigma x}{n} \cdot \frac{\Sigma y}{n}}{\left(\frac{\Sigma y^2}{n}\right) - \left(\frac{\Sigma y}{n}\right)^2}$$

(b) নং সমীকরণকে $y$ এর উপর $x$ এর প্রতিগমন সমীকরণ বলা হয়। এই সমীকরণ থেকে $y$ এর কোনো প্রদত্ত মানের জন্য $x$ এর সবচেয়ে সম্ভাব্য মান নির্ণয় করা যাবে। $b_{yx}$ কে $y$ এর উপর $x$ এর প্রতিগমন গুণাঙ্ক বলা হয়।

**মন্তব্য :** $$b_{xy} = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \frac{\Sigma x}{n} \cdot \frac{\Sigma y}{n}}{\left(\frac{\Sigma y^2}{n}\right) - \left(\frac{\Sigma y}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_y^2}$$

$$= \frac{r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_y^2} \quad \left[\because r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]$$

$$= r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

## 5.4 রৈখিক প্রতিগমনের ধর্ম :

(i) $x$ এর উপর $y$ এর প্রতিগমন সমীকরণ হল

$$y - \overline{y} = b_{yx}(x - \overline{x}) \text{ ........(1)}$$

যেখানে, $$b_{yx} = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \frac{\Sigma x}{n} \frac{\Sigma y}{n}}{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

বা, $$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$y$-এর উপর $x$-এর প্রতিগমন সমীকরণ হল ঃ

$$x - \bar{x} = b_{xy}\,(y - \bar{y}) ......(2)$$

$$\text{যেখানে } b_{xy} = \frac{\dfrac{\Sigma xy}{n} - \dfrac{\Sigma x}{n}\dfrac{\Sigma y}{n}}{\dfrac{\Sigma y^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma y}{n}\right)^2}$$

$$\text{বা, } b_{xy} = r\frac{a_x}{a_y}$$

(ii) $b_{yx} \times b_{xy} = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}.r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} = r^2$

$\because \sigma_x, \sigma_y$ উভয়েই ধনাত্মক।

$\therefore$ $r, b_{xy}, b_{yx}$ একই চিহ্নযুক্ত।

(iii) (1) নং এবং (2) নং সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু হল $(\bar{x}, \bar{y})$ ।

(iv) প্রতিগমন গুণাঙ্কদ্বয় মূলবিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না। কিন্তু স্কেল পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল।

(v) $r = +1$, হলে প্রতিগমন সরলরেখা দুটি অভিন্ন হয়।

(vi) $r = 0$ হলে, প্রতিগমন সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হয়। তখন কোনো চলক অপর চলকের দ্বারা প্রভাবিত হয় না।

## 5.5 প্রতিগমনের ব্যবহার ঃ

(i) একটি চলকের প্রদত্ত মানের জন্য অপর চলকের সম্ভাব্য মান নির্ণয় করা যায়।

(ii) $r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$ এই সূত্রের দ্বারা প্রতিগমন গুণাঙ্ক থেকে সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের মান নির্ণয় করা যায়।

**উদাহরণ 1.** নিচের তথ্য থেকে $x$ এর উপর $y$ এর প্রতিগমন সমীকরণ নির্ণয় করুন ঃ

| $x$ : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ : | 6 | 8 | 11 | 8 | 12 |

$y$ এর উপর $x$ এর প্রতিগমন সমীকরণও নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

প্রথম পদ্ধতি ঃ প্রতিগমন সমীকরণ নির্ণয়ের গণনাকার্য

| $x$ | $y$ | $X = x - 3$ | $Y = y - 9$ | $X^2$ | $Y^2$ | $XY$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | –2 | –3 | 4 | 9 | 6 |
| 2 | 8 | –1 | –1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 11 | 0 | 2 | 0 | 4 | 0 |
| 4 | 8 | 1 | –1 | 1 | 1 | –1 |
| 5 | 12 | 2 | 3 | 4 | 9 | 6 |
| $sX$=15 | $sY$=45 | | | $sX^2$=10 | $sY^2$=24 | $sXY$=12 |

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{45}{5} = 9$$

$$b_{yx} = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{12}{10} = 1.2$$

$$b_{xy} = \frac{\Sigma XY}{\Sigma Y^2} = \frac{12}{10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$x$ এর উপর $y$ এর প্রতিগমন সমীকরণ হবে

$$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$$

বা, $y - 9 = 1.2(x - 3)$

বা, $y - 9 = 1.2x - 3.6$

$\therefore\ y = 1.2x + 5.4$

$y$ এর উপর $x$ এর প্রতিগমন সমীকরণ হবে

$$x - \bar{x} = b_{yx}(y - \bar{y})$$

বা, $x - 3 = 0.5(y - 9)$

বা, $x - 3 = 5y - 4.5$

$\therefore\ x = 5y - 1.5$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

প্রতিগমন সমীকরণের নির্ণয় কার্য ঃ

| $x$ | $y$ | $x^2$ | $y^2$ | $xy$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1 | 36 | 6 |
| 2 | 8 | 4 | 64 | 16 |
| 3 | 11 | 9 | 121 | 33 |
| 4 | 8 | 16 | 64 | 32 |
| 5 | 12 | 25 | 144 | 60 |
| S $x$ = 15 | S $y$ = 45 | S $r^2$ = 55 | S $y^2$ = 429 | S $xy$ = 147 |

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{45}{5} = 9$$

$$b_{yx} = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \frac{\Sigma x}{n}\frac{\Sigma y}{n}}{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{147}{5} - 3 \times 9}{\frac{55}{5} - (3)^2}$$

$$= \frac{29.4 - 27}{11 - 9} = \frac{2.4}{2} = 1.2$$

$$b_{xy} = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \frac{\Sigma x}{n}\frac{\Sigma y}{n}}{\frac{\Sigma y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma y}{n}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{147}{5}-27}{\frac{429}{5}-81}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}=0.5$$

$x$ এর উপর $y$ এর প্রতিগমন সমীকরণ হবে

$$y-\overline{y}=b_{yx}(x-\overline{x})$$

বা, $y - 9 = 1.2(x - 3)$

$\therefore\ y = 1.2x + 5.4$

$y$ এর উপর $x$ এর প্রতিগমন সমীকরণ হবে

$$x-\overline{x}=b_{xy}(y-\overline{y})$$

বা, $x - 3 = 0.5(y - 9)$

$\therefore\ x = 0.5y - 1.5$

তৃতীয় পদ্ধতি ঃ [$\overline{x}$ ও $\overline{y}$ এর পূর্ণসংখ্যা না হলে নীচের পদ্ধতি ব্যবহার করা সুবিধাজনক। দুটি কল্পিত গড় 4 এবং 8 ধরে নেওয়া হল।]

**প্রতিগমন সমীকরণ নির্ণয়ের গণনা কার্য**

| $x$ | $y$ | $X = x - 4$ | $Y = y - 8$ | $X^2$ | $Y^2$ | $XY$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | –3 | –2 | 9 | 4 | 6 |
| 2 | 8 | –2 | 0 | 4 | 0 | 0 |
| 3 | 11 | –1 | 3 | 1 | 9 | –3 |
| 4 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 12 | 1 | 4 | 1 | 16 | 4 |
| s$X$=15 | s$Y$=45 | s$X$ = –5 | s$Y$ = 5 | s$X^2$=15 | s$Y^2$=29 | s$XY$=7 |

$$\overline{x}=\frac{\Sigma x}{n}=\frac{15}{5}=3$$

$$\overline{y}=\frac{\Sigma y}{n}=\frac{45}{5}=9$$

$$b_{yx}=\frac{\frac{\Sigma XY}{n}-\frac{\Sigma X}{n}\frac{\Sigma Y}{n}}{\frac{\Sigma X^2}{n}-\left(\frac{\Sigma X}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{7}{5} - \frac{-5}{5} \times \frac{5}{5}}{\frac{15}{5} - \left(\frac{-5}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{7}{5} + 1}{3 - 1} = \frac{12}{5 \times 2} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$b_{xy} = \frac{\frac{\Sigma XY}{n} - \frac{\Sigma X}{n}\frac{\Sigma Y}{n}}{\frac{\Sigma Y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma Y}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{7}{5} - \frac{-5}{5} \times \frac{5}{5}}{\frac{29}{5} - \left(\frac{5}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{7}{5} + 1}{\frac{29}{5} - 1} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$x$ এর উপর $y$ এর প্রতিগমন সমীকরণ হবে

$$y - \overline{y} = b_{xy}(x - \overline{x})$$

বা, $y - 9 = 1.2(x - 3)$

$\therefore \; y = 1.2x + 5.4$

$y$ এর উপর $x$ এর প্রতিগমন সমীকরণ হবে

$$x - \overline{x} = b_{xy}(y - \overline{y})$$

বা, $x - 3 = 0.5(y - 9)$

$\therefore \; x = 0.5y - 1.5$

উদাহরণ **2.** নীচে রাশিতথ্য দেওয়া আছে ঃ

| | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|
| $A.M.$ | 20 | 25 |
| $S.D.$ | 5 | 4 |

$X$ ও $Y$ এর মধ্যে সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক = 0.6

প্রতিগমন সমীকরণ দুটি নির্ণয় করুন ঃ

সমাধান ঃ $\bar{X}=20, \bar{Y}=25, \sigma_X=5, \sigma_Y=4, r=0.6$

এখন $$b_{YX}=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=0.6\times\frac{4}{5}=\frac{2.4}{5}=0.48$$

$$b_{XY}=r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}=0.6\times\frac{4}{5}=\frac{0.30}{5}=0.75$$

$X$ এর উপর $Y$ এর প্রতিগমন সমীকরণ হবে

$$Y-\bar{Y}=b_{YX}(X-\bar{X})$$

বা, $Y-25=0.48(X-20)$

$\therefore\ Y=0.48X+25-9.6$

$\therefore\ Y=0.48X+15.4$

$Y$ এর উপর $X$ এর প্রতিগমন সমীকরণ হবে

$$X-\bar{X}=b_{XY}(Y-\bar{Y})$$

বা, $X-20=0.75(Y-25)$

বা, $X=0.75Y+20-18.75$

$\therefore\ X=0.75Y+1.25$

উদাহরণ **3.** 10 জন মহিলার বয়স ($x$) এবং রক্তচাপ ($y$) এর নিম্নলিখিত তথ্যগুলি পাওয়া গেল ঃ

| | বয়স | রক্তচাপ |
|---|---|---|
| যৌগিক গড় | 53 | 142 |
| ভেদমান | 130 | 165 |

এবং $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})=1220$

$x$ এর উপর $y$ এর প্রতিগমন সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং তা থেকে 45 বছর বয়স্কা মহিলার রক্তচাপ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $n=10, \bar{x}=53, \bar{y}=142, \sigma_x^2=130, \sigma_y^2=165$

এখন $\operatorname{cov}(x,y)=\dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}=\dfrac{1220}{10}=122$

$$\therefore\ b_{yx}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}=\frac{122}{130}=0.94$$

$x$ এর উপর $y$ এর প্রতিগমন সমীকরণ হবে

$$y-\bar{y}=b_{yx}(x-\bar{x})$$

বা, $y-142=0.94(x-53)$

$$\therefore\ y=0.94x+92.18$$

যখন $x=45$, $y=0{\cdot}94\times 45+92{\cdot}18$

$=42{\cdot}3+92{\cdot}18$

$=134{\cdot}48$

$\therefore$ নির্ণেয় রক্তচাপ $=134{\cdot}48$ একক।

উদাহরণ 4. পর্যবেক্ষণের তথ্য থেকে দুটি প্রতিগমন রেখার সমীকরণ দেওয়া আছে $x+2y=5$ এবং $2x+3y=8$ ; $\bar{x}$, $\bar{y}$ এবং $r$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক্, $x$-এর উপর $y$-এর প্রতিগমন সমীকরণ

$$x+2y=5$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

$$\therefore\quad b_{yx}=-\frac{1}{2}$$

আবার, $y$-এর উপর $x$-এর প্রতিগমন সমীকরণ

$$2x+3y=8$$

বা, $2x = -3y + 8$

$\therefore \quad x = -\frac{3}{2}y + 4$

$\therefore \quad b_{xy} = -\frac{3}{2}$

$\therefore \quad r^2 = b_{yx} \times b_{xy}$

$$= -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2} = \frac{3}{4} < 1$$

$\therefore$ সমীকরণ দুটি ধরে নেওয়া সঠিক হয়েছে।

$\therefore \quad r = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because b_{xy}$ ও $b_{yx}$ ঋণাত্মক)

এখন $x + 2y = 5$

$2x + 3y = 8$

সমাধান করে পাই, $x = 1, y = 2$

$\therefore \quad \bar{x} = 1, \bar{y} = 2$

## 5.6 সারাংশ

এই এককে দুটি চলক পরস্পর রৈখিকভাবে সম্বন্ধযুক্ত ধরে একটির মান দেওয়া থাকলে অপরটির মান নির্ণয় করার পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

## 5.7 অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত তথ্য থেকে $x$-এর উপর $y$-এর রৈখিক প্রতিগমন সমীকরণ নির্ণয় করুন ঃ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $Y$ | 3 | 2 | 5 | 4 | 6 |

2. নীচের রাশিতথ্যমালা থেকে $X$-এর উপর $Y$-এর প্রতিগমন রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন ঃ

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| স্বামীর বয়স $X$ | 25 | 27 | 29 | 33 | 26 | 32 | 35 | 31 | 36 | 30 |
| স্ত্রীর বয়স $Y$ | 20 | 24 | 24 | 29 | 21 | 26 | 28 | 30 | 29 | 28 |

3. নিম্নলিখিত তথ্য থেকে প্রতিগমন সমীকরণদ্বয় নির্ণয় করুন ঃ

| $X$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 9 | 8 | 10 | 12 | 11 | 13 | 14 | 16 | 15 |

$X$ ও $Y$-এর মধ্যে সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের মানও নির্ণয় করুন।

4. বিশ্ববিদ্যালয়ের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর কলেজ পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের উপর একটি সরল নির্ভরন (বা প্রতিগমন) রেখা মানানসই (*fit*) ভাবে বসাও ঃ

| কলেজে প্রাপ্ত নম্বর $(X)$ | 35 | 42 | 20 | 50 | 72 | 64 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| বিশ্ববিদ্যালয়ে প্রাপ্ত নম্বর $(Y)$ | 40 | 48 | 24 | 60 | 84 | 68 |

5. নিম্নলিখিত তথ্য থেকে প্রতিগমন সমীকরণদ্বয় নির্ণয় করুন ঃ

| স্বামীর বয়স | 25 | 22 | 28 | 26 | 35 | 20 | 22 | 40 | 20 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| স্ত্রীর বয়স | 18 | 15 | 20 | 17 | 22 | 14 | 16 | 21 | 15 | 14 |

(i) স্ত্রীর বয়স 19 হলে স্বামীর সম্ভাব্য বয়স কত হবে?

(ii) স্বামীর বয়স 30 হলে স্ত্রীর সম্ভাব্য বয়স কত হবে?

6. নিম্নলিখিত রাশিতথ্য থেকে প্রতিগমন সমীকরণদ্বয় নির্ণয় করুন ঃ

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 9 | 8 | 10 | 12 | 11 | 13 | 14 | 16 | 15 |

7. নিম্নলিখিত তথ্যসমূহ দেওয়া আছে

| | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|
| যৌগিক গড় | 39·5 | 47·5 |
| সম্যক পার্থক্য | 10·8 | 16·8 |

এবং $X$ ও $Y$-এর সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক = ·42

(i) প্রতিগমন সমীকরণদ্বয় নির্ণয় করুন।

(ii) $X = 50$ হলে, $Y$-এর মান গণনা করুন।

8. দুইটি প্রতিগমন রেখা $x + 0{\cdot}2y = 4{\cdot}2$ এবং $y + 0{\cdot}8x = 8{\cdot}4$ দেওয়া আছে

(i) $\bar{x}$ ও $\bar{y}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

(ii) $r$-এর মান নির্ণয় করুন।

(iii) $x = 4$ হলে $y$-এর সম্ভাব্য মান কত হবে।

9. দুইটি প্রতিগমন রেখা $x + 2y = 5$ এবং $2x + 3y = 8$ এবং $\sigma_x^2 = 12$ দেওয়া আছে। $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\sigma_y$ এবং $r$ নির্ণয় করুন।

10. নিম্নলিখিত তথ্যাবলি থেকে প্রতিগমন গুণাঙ্কদ্বয় নির্ণয় করুন ঃ

$Sx = 50,\ Sy = 30,\ Sxy = 1000,\ Sx^2 = 3000,\ Sy^2 = 1800,\ n = 10$

## 5.8 উত্তরমালা

1. $Y = 0.8 \times + 1.6$
2. $Y = 0.8 \times + 1.58$
3. $Y = 0.95 \times - 11.25$

   $X = 0.95 \times + 13.6$

   $r = 0.95$
4. $Y = 1.106 \times + 1.83$
5. $x = 2.23y - 12.76$

   $y = 0.39x + 7.22$

   (i) 30 (ii) 19
6. $X = 0.95Y - 64,$

   $Y = 0.95 \times + 7.25$
7. (i) $Y = .65 \times + 21.82$

   $X = .27Y + 26.68$

   (ii) 54
8. (i) 3, 6 (ii) $-$ .4 (iii) 5.2
9. $\bar{x} = 1,\ \bar{y} = 2,\ \sigma_y = 2,\ r = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
10. $b_{yx} = 0.31,\ b_{xy} = 0.50$

# একক-6 ☐ সমগ্রক (বা পূর্ণক) এবং নমুনা [Population and Sample]

গঠন



## 6.1 সমগ্রক (Population) :

সমগ্রক (বা পূর্ণক)-এর সংজ্ঞা দেবার আগে আমরা সসীম সমগ্রক ও অসীম সমগ্রকের পার্থক্য একটি উদাহরণের সাহায্যে বোঝাবো। ধরুন, কোনো বৈদ্যুতিক বাল্‌ব তৈরির কারখানার শ্রমিকদের বেতন সম্বন্ধে কিছু জানতে চাই। এক্ষেত্রে কারখানার সমস্ত শ্রমিকদের বেতনের সমাহার হবে আমাদের আলোচ্য সমগ্রক। এই সমগ্রকটি একটি সসীম সমগ্রক। এখন ধরুন আমরা ওই কারখানায় তৈরি বাল্‌বগুলির গড় আয়ু জানতে চাই। তখন ইতিমধ্যে তৈরি ও ভবিষ্যতে তৈরি হবে এবং যা তৈরি হতে পারত কিন্তু হয়নি এই রকম সমস্ত বাল্‌বের আয়ু নিয়ে একটি অসীম সমগ্রকের কল্পনা করা যেতে পারে। এখন থেকে অন্য কিছু বলা না থাকলে সমগ্রক (বা পূর্ণক) বললে আমরা অসীম সমগ্রক বুঝবো।

এখানে আমরা একটি সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষণ (random experiment) যুক্ত করতে পারি যেখানে পরীক্ষণটি একবার সম্পাদন করার অর্থ হল ওই কারখানায় তৈরি হয়েছে এমন বাল্‌বের সমাহার থাকে উদ্দেশ্যহীনভাবে (at random) একটি বাল্‌ব বেছে নেওয়া এবং তার আয়ু লক্ষ করা। আবার বাল্‌বের আয়ুর মানের অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চল X-এর নিবেশন অপেক্ষক জানতে পারলে যে-কোনো নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে বাল্‌বের আয়ুষ্কাল থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করা যাবে। আমরা আবার লক্ষ করছি যে, বাল্‌বের আয়ুর এই সমগ্রকটি প্রকল্পিত (hypothetical) কারণ এখানে

এমন বাল্‌বের আয়ু বিবেচনা করতে হবে যে বালব্ তৈরি হতে পারত কিন্তু হয়নি। এই উদাহরণ থেকে অসীম প্রকল্পিত সমগ্রকের (infinite hypothetical population) সংজ্ঞা কীভাবে দেওয়া যায় তার একটা ইঙ্গিত পাওয়া গেল।

**অসীম প্রকল্পিত সমগ্রকের সংজ্ঞা ঃ**

মনে করুন $E$ একটি সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষণ (random experiment) এবং $S$ এই পরীক্ষণের ঘটনা দেশ (event space)। ধরুন $S$ এর উপর সংজ্ঞাত $X$ একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চল (random variable)। এখন $E$-এর পুনঃপুনঃ সম্পাদনে আমরা $X$-এর পর্যবেক্ষিত মানের (observed values) একটি অসীম ক্রম পাব। X এর পর্যবেক্ষিত মানের এই অসীম ক্রমকে সামগ্রিকভাবে বলা হয় সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$-এর সমগ্রক (population)।

এখানে $X$-এর নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ হলে আমরা $F(x)$ কে $X$-এর সমগ্রকের নিবেশন অপেক্ষক বলব এবং $X$-এর নিবেশনকে সমগ্রকের নিবেশন (distribution of the population) বলব।

যদি $X$ বিচ্ছিন্ন (discrete) চলক হয় তাহলে $X$ এর সমগ্রককে বিচ্ছিন্ন সমগ্রক বলে এবং যদি $X$ অবিচ্ছিন্ন (continuous) চলক হয় তাহলে $X$-এর সমগ্রককে অবিচ্ছিন্ন সমগ্রক বলে। এখানে সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$-কে বলা হবে সমগ্রক চল।

মন্তব্য ঃ কোনো সসীম সমগ্রককে $\{y_1, y_2, \ldots\ldots y_N\}$ এই সেট দিয়ে প্রকাশ করলে এবং সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$ সমগ্রক চল হলে অন্য কিছু উল্লেখ করা না হলে আমরা ধরে নেব সমগ্রকের নিবেশন $P(X = y_i) = \dfrac{1}{N}, i = 1, 2, \ldots\ldots N$ থেকে পাওয়া যাবে যেখানে অখণ্ড সংখ্যা $N$ কে সমগ্রকের আকার (size) বলা হবে।

## 6.2 নমুনা (Sample) ঃ

মোটামুটিভাবে বলা যায় যে নমুনা হল সমগ্রকের (সসীম বা অসীম) অংশ যাতে সমগ্রকের সসীম সংখ্যক মান (একই মান একাধিক বার থাকতে পারে) থাকে।

এখন অসীম সমগ্রক থেকে নেওয়া কোনো সমসম্ভব নমুনা (random sample) বলতে আমরা কী বুঝি তা স্পষ্ট করে বলব।

সমগ্রক চল $X$-এর সঙ্গে যুক্ত সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষণ $E$-এর সসীম সংখ্যক বার পুনঃপুনঃ সম্পাদনে (ধরা যাক $n$ বার) $X$-এর পর্যবেক্ষিত মানগুলি $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ হলে $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ কে $X$-এর সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$ আকারের একটি সমসম্ভব নমুনা (random sample) বলে।

এখানে $x_1$, $x_2$, ....... $x_n$ এই মানগুলির প্রত্যেককে নমুনা মান (sample value) বলে। যদি পরীক্ষণ $E$ কে পুনরায় $n$ বার সম্পাদন করা হয় তাহলে $X$-এর পর্যবেক্ষিত মানগুলি সাধারণভাবে পূর্বের মানগুলি থেকে পৃথক হবে, ধরা যাক এই মানগুলি $x_1', x_2', .......x_n'$ এইভাবে $X$-এর সমগ্রক থেকে $n$-আকারের নমুনা বার বার চয়ন করতে থাকলে, নমুনা মানগুলির মধ্যে fluctuations লক্ষ করা যাবে—এই জন্যে নমুনাকে সমসম্ভব নমুনা (random sample) বলা হয়।

**সসীম সমগ্রক থেকে সংগৃহীত নমুনা ঃ**

রাশিবিজ্ঞানে আমাদের লক্ষ্য হল সমগ্রক থেকে চয়ন করা নমুনার উপর ভিত্তি করে সমগ্রক সম্বন্ধে ধারণা করা।

তাই সসীম সমগ্রকের ক্ষেত্রে নমুনাটি এমনভাবে নেওয়া প্রয়োজন যাতে এই ধারণা সৃষ্টি যথাযথ হয়। এই প্রয়োজনের তাগিদে নমুনা সংগ্রহের বিভিন্ন পদ্ধতি উদ্ভাবিত হয়েছে। তাদের মধ্যে প্রয়োগের ব্যাপকতায় বিশেষ উল্লেখযোগ্য পদ্ধতিটি হল সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ (Simple Random Sampling) পদ্ধতি।

সসীম সমগ্রকের ক্ষেত্রে আমরা সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতি বলতে সেই নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতিকে বোঝাই যাতে সমগ্রকের প্রতিটি এককের নমুনায় বর্তমান থাকার সম্ভাবনা সমান।

সসীম সমগ্রকের ক্ষেত্রে সমসম্ভব নমুনা চয়ন আবার দুভাবে হতে পারে। পুনঃস্থাপনাসহ নমুনা সংগ্রহ (Simple Random Sampling with Replacement—*SRSWR*) ও পুনঃস্থাপনাবিহীন নমুনা সংগ্রহ (Simple Random Sampling Without Replacement—*SRSWOR*)। প্রথম ক্ষেত্রে সংগৃহীত এককটির পর্যবেক্ষণ হয়ে যাবার পর এককটিকে সমগ্রকে ফিরিয়ে দেওয়া হয় এবং ফলে একই একক নমুনায় একাধিকবার থাকতে পারে। যদি অসীম পূর্ণকটির আকার (size) $N$ হয় এবং নমুনার আকার $n$ হয় তাহলে পুনঃস্থাপনাসহ নমুনা সংগ্রহ করলে মোট $N^n$ সংখ্যক নমুনা পাওয়া যেতে পারে যাদের প্রত্যেকটির সম্ভাবনা $\frac{1}{N^n}$ এবং নমুনা সংগ্রহের যে-কোনো স্তরে সমগ্রকের প্রতিটি এককের সংগৃহীত হবার সম্ভাবনা $\frac{1}{N}$। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অর্থাৎ পুনঃস্থাপনাবিহীন নমুনা সংগ্রহ করা হলে মোট $^NP_n$ সংখ্যক নমুনা পাওয়া যেতে পারে যাদের প্রত্যেকটির সম্ভাবনা হল $\frac{1}{^NP_n}$ এবং নমুনা সংগ্রহের যে-কোনো স্তরে সমগ্রকের প্রতিটি এককের সংগৃহীত হবার সম্ভাবনা হবে $\frac{^{N-1}P_{n-1}}{N_{P_n}} = \frac{1}{N}$।

## 6.3 নমুনার নিবেশন (Distribution of Sample) ঃ

মনে করুন $X$ এর সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$-আকারের যে-কোনো সমসম্ভব নমুনা হল ($x_1$, $x_2$, ....... $x_n$)। এখানে $x_1$, $x_2$, ........ $x_n$ নমুনা মানগুলিকে প্রথম মান, দ্বিতীয় মান ইত্যাদি হিসাবে distinguish করা হবে যদিও মানগুলি পৃথক নাও হতে পারে। এখন $\{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}$ এই সেটের উপর একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $\widehat{X}$-এর সংজ্ঞা নীচে দেওয়া হল ঃ

$$\widehat{X}(x_i) = x_i,\ i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n।$$

$\widehat{X}$ চলটির নিবেশনকে একটি বিচ্ছিন্ন (discrete) নিবেশনরূপে সংজ্ঞা দেওয়া হয় যেখানে

$$P(\widehat{X} = x_i) = \frac{1}{n},\ i = 1, 2, \ldots\ldots n।$$

$\widehat{X}$-এর এই নিবেশনকে নমুনার নিবেশন (*Distribution of Sample*) বলা হয়।

যদি $\bar{F}(x)$, $\widehat{X}$-এর নিবেশন অপেক্ষক হয় তাহলে $\bar{F}(x) = P(\widehat{X} \le x), x \in R$ এবং $\bar{F}(x)$ অপেক্ষক দ্বারা নমুনার নিবেশন নিরূপিত হয়। এখন আমরা প্রমাণ করব নমুনার আকার $n$ বৃহৎ হলে, $x$ এর যে-কোনো বাস্তব মানের জন্যে $F(x) \simeq \bar{F}(x)$, যেখানে $F(x)$ হল সমগ্রকের নিবেশন অপেক্ষক। $\widehat{X}$-এর সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$ আকারের প্রদত্ত সমসম্ভব নমুনা ($x_1$, $x_2$, .... $x_n$)-এর জন্যে $\bar{F}(x) = P(\widehat{X} \le x)$।

মনে করুন $i$-এর $m$ সংখ্যক বিভিন্ন মানের জন্য $x_i \le x$ যেখানে $x_i$ হল নমুনার $i$-তম নমুনা মান। এখানে $0 \le m \le n$।

এখন $P(\widehat{X} \le x) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$ (যেখানে $\frac{1}{n}$ কে $m$ বার লেখা হয়েছে) $= \frac{m}{n}$

সুতরাং $\bar{F}(x) = P\left(\widehat{X} \le x\right) = \frac{m}{n}$ ......... (1)

ধরা যাক সমগ্রকের সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষণটি $E$ এবং এর ঘটনাদেশ $S$।

যদি সমগ্রক চলটি $X$ হয় তাহলে আমরা লক্ষ করছি $E$ এর $n$ বার সম্পাদনে $X$-এর পর্যবেক্ষিত মানগুলি হল $x_1$, $x_2$, ......... $x_n$। তাহলে $E$ পরীক্ষণটির $n$ বার সম্পাদনে $E$ এর সঙ্গে যুক্ত ($X \le x$) ঘটনাটির পরিসংখ্যা অনুপাত (frequency ratio) হবে $\frac{m}{n}$। সুতরাং সম্ভাবনার পরিসংখ্যা তাৎপর্য (frequency interpretation) অনুসারে আমরা পাই $P(X \le x) \simeq \frac{m}{n}$ যদি $n$ বৃহৎ হয়।

আবার $F(x) = P(X \le x)$ .................. (2)

তাহলে (1) ও (2) থেকে আমরা পাই $F(x) \simeq \bar{F}(x)$ যখন $n$ বৃহৎ। ........... (3)

এখন (3) থেকে আমরা বলতে পারি যে নমুনার আকার বৃহৎ হলে নমুনার নিবেশন এবং সমগ্রকের নিবেশনের প্রায় সমান। এই জন্য নমুনার নিবেশনকে সমগ্রকের নিবেশনের পরিসাংখ্যিক প্রতিমূর্তি (statistical image) বলা হয়।

## 6.4 নমুনার নিবেশনের বৈশিষ্ট্যজ্ঞাপক কয়েকটি পরিমাপ (Some measures expressing the characteristics of distribution of sample) ঃ

*EMT* 12 (পর্যায় *I*)-এর একক 8-এ আমরা দেখেছি যে সম্ভাবনা নিবেশনের চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যজ্ঞাপক অনেকগুলি পরিমাপ আছে। এর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ কয়েকটি পরিমাপ হল গড়, ভেদমান, বিভিন্ন ক্রমের পরিঘাত (moments of different orders), প্রতিবৈষম্যাঙ্ক (Coefficient of skewnels), তীক্ষ্ণতাঙ্ক (Coefficient of kurtosis), মধ্যমা (median), ভূয়িষ্ঠক (mode) ইত্যাদি।

নমুনার নিবেশনের এই পরিমাপগুলির নামের পূর্বে 'নমুনালব্ধ' বা শুধু 'নমুনা' শব্দটি যোগ করা হয়।

তাহলে নমুনালব্ধ গড় (বা নমুনা গড়), নমুনালব্ধ ভেদমান (বা নমুনা ভেদমান), নমুনালব্ধ সমক বিচ্যুতি (বা নমুনা সমক বিচ্যুতি), নমুনালব্ধ প্রতিবৈষম্যাঙ্ক, নমুনালব্ধ তীক্ষ্ণতাঙ্ক ইত্যাদি পরিমাপগুলি নমুনা নিবেশনের চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যজ্ঞাপক কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ পরিমাপ। সমগ্রকের নিবেশনের চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যজ্ঞাপক যে-কোনো পরিমাপকে (যেমন গড়) আমরা সংক্ষেপে 'সমগ্রক বৈশিষ্ট্য' বলে উল্লেখ করব এবং নমুনার নিবেশনের চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য-জ্ঞাপক যে কোন পরিমাপকে (যেমন নমুনালব্ধ গড়) 'নমুনা বৈশিষ্ট্য' (Sample characteristics) বলে উল্লেখ করব।

সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$-আকারের সমসম্ভব নমুনা ($x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$)-এর ক্ষেত্রে কয়েকটি নমুনা বৈশিষ্ট্যের জন্য নীচের রাশিগুলি পাই ঃ

($i$) নমুনালব্ধ গড় (Sample mean), $\bar{x}$ ঃ

$$\bar{x} = E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot x_1 + \frac{1}{n} \cdot x_2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n} x_n$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(*ii*) নমুনালব্ধ ভেদমান (**Sample variance**) $S^2$ ঃ

$$S^2 = E\left[\left(\hat{X}-\bar{x}\right)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

যেখানে $S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$ হল নমুনালব্ধ সমকবিচ্যুতি (sample standard deviation)।

(iii) নমুনালব্ধ $k$-তম পরিঘাতকে $a_k$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং আমরা পাই $a_k = E(\hat{X}^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^k$ ।

(iv) নমুনালব্ধ $k$-তম কেন্দ্রীয় পরিঘাত (k-th order central moment) কে $m_k$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং আমরা পাই $m_k = E\left[\left(\hat{X}-\bar{x}\right)^k\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k$ ।

(v) নমুনার প্রতিবৈষম্যাঙ্ক (Coefficient of sample skewness) $g_1$ ঃ $g_1 = \frac{m_3}{S^3}$ ।

(vi) নমুনার তীক্ষ্ণতাঙ্ক (Coefficient of sample Kertosis) $b_2$ ঃ $b_2 = \frac{m_4}{S^4}$ ।

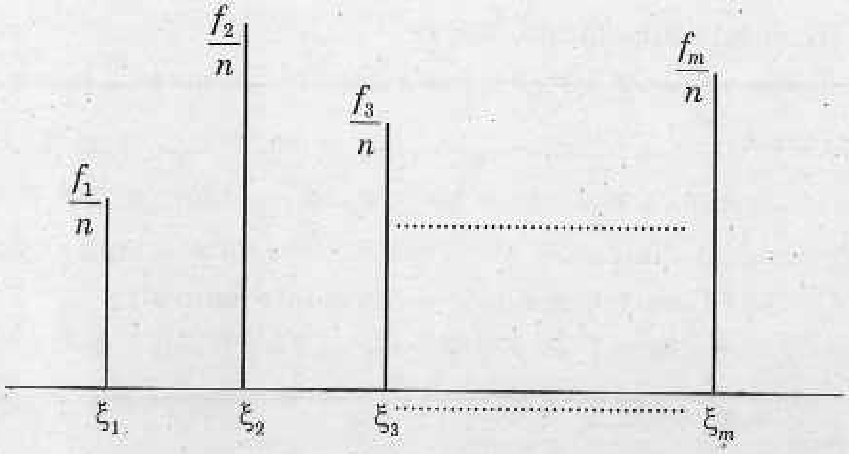
## 6.5 নমুনার পরিসংখ্যা চিত্র (Frequency diagram of a sample) ঃ

বিচ্ছিন্ন সমগ্রক (discrete population) থেকে চয়ন করা নমুনার ক্ষেত্রে নমুনা নিবেশনকে কীভাবে চিত্রের সাহায্যে বোঝানো যায় তা নীচে বলা হল ঃ

ধরুন $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n)$ একটি সমসম্ভব নমুনা। এক্ষেত্রে নমুনায় যে-কোনো নমুনা মান সাধারণত একাধিক বার থাকে, যেমন $x_2 = x_3 = x_4 = x_7$ হতে পারে। মনে করুন নমুনায় distinct মানগুলি হল $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots\ldots \xi_m$ যেখানে $m \le n$ এবং $\xi_1 < \xi_2 < \ldots\ldots < \xi_m$ ।

ধরুন নমুনায় $\xi_j$ মানটি $f_j$ বার আছে অর্থাৎ $f_j$ হল এর পরিসংখ্যা (*frequency*) [$j = 1, 2, \ldots\ldots m$]। এক্ষেত্রে $P(X=\xi_j) = \frac{f_j}{n}, j = 1, 2, \ldots\ldots m$ এবং $\sum_{j=1}^{m} f_j = n$ ।

এখন $x$-অক্ষের উপর প্রতিটি $j$-এর জন্য $\xi_j$ বিন্দুতে $\frac{f_j}{n}$-এর সমান করে কোটি আঁকা হলে, $\bar{X}$-এর সম্ভাবনা চিত্র (probability diagram) পাই। এই চিত্রকে নমুনার পরিসংখ্যা চিত্র (frequency diagram) বলা হয়।




এখন সমগ্রক চল $X$ হলে, সম্ভাবনার পরিসংখ্যা তাৎপর্য (frequency interpretation) অনুসারে আমরা পাই $P(X = \xi_j) \simeq \frac{f_j}{n}$ যদি $n$ বৃহৎ হয়।

তাহলে দেখা যাচ্ছে নমুনার আকার বৃহৎ হলে পরিসংখ্যা চিত্রের $j$ বিন্দুতে কোটির মান সমগ্রকের সম্ভাবনা চিত্রের (probability diagram) $j$ বিন্দুতে কোটি $P(X = j)$ এর সঙ্গে প্রায় (approximately) সমান—এর থেকে আমরা বলতে পারি বিচ্ছিন্ন সমগ্রকের ক্ষেত্রে নমুনার পরিসংখ্যা চিত্র হল সমগ্রকের সম্ভাবনা চিত্রের পারিসাংখ্যিক প্রতিমূর্তি।

**মন্তব্য ঃ** অবিচ্ছিন্ন সমগ্রক (Continuous population) থেকে চয়ন করা নমুনার নিবেশনকেও চিত্রের সাহায্যে বোঝানো যায়। এরূপ চিত্রকে আয়তলেখ (Histogram) বলে। একক 1-এ 'আয়তলেখ' উদাহরণ দিয়ে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

## 6.6 দ্বিচল নমুনা (Bivariate Sample) ঃ

মনে করুন, কোনো সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষণ $E$-এর ঘটনাদেশ $S$-এর উপর সংজ্ঞায়িত দুটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$ ও $Y$। তাহলে $(X, Y)$ একটি দ্বিমাত্রিক সম্ভাবনাশ্রয়ী চল যা $S$ থেকে $R \times R$ থেকে একটি চিত্রণ (mapping)। ধরুন $E$ এর কোনো সম্পাদনে $\omega(\in S)$ এই ফলটি (outcome)

পাওয়া গেল। যদি $X(w) = x$, $Y(w) = y$ যেখানে $x \in R$, $y \in R$ তাহলে $(X, Y)(w) = (X(w), Y(w)) = (x, y) \in R \times R$। এখানে $(x, y)$ হল দ্বিমাত্রিক চল $(X, Y)$ এর একটি পর্যবেক্ষিত মান (Observed value)। $E$-এর পুনঃ পুনঃ সম্পাদনে $(X, Y)$-এর পর্যবেক্ষিত মানের একটি অসীম ক্রম পাওয়া যাবে। (X, Y) এর পর্যবেক্ষিত মানের এই অসীমক্রমকে সামগ্রিকভাবে $(X, Y)$-এর দ্বিমাত্রিক সমগ্রক (Bivariate Population) বলে।

এখন সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষণ $E$ এর সসীম সংখ্যক বার পুনঃপুনঃ সম্পাদনে (ধরা যাক $n$ বার) $(X, Y)$-এর মানগুলি $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots\ldots (x_n, y_n)$ হলে $((x_1, y_1)(x_2, y_2), \ldots\ldots (x_n, y_n))$ কে $X, Y$-এর দ্বিমাত্রিক সমগ্রক থেকে চয়ন করা একটি $n$-আকারের দ্বিচল সমসম্ভব নমুনা (bivariate random sample) বা শুধু দ্বিচল নমুনা (bivariate sample) বলা হয়।

**দ্বিচল নমুনার নিবেশন (Distribution of a bivariate sample) ঃ**

ধরুন $X, Y$-এর দ্বিমাত্রিক সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$-আকারের একটি দ্বিচল নমুনা হল $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots (x_n, y_n)$। এখন দুটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $\hat{X}$, $\hat{Y}$-এর সংজ্ঞা নীচে দেওয়া হল ঃ

$$\hat{X}(x_i, y_i) = x_i,\ \hat{Y}(x_i, y_i) = y_i,\ i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n।$$

$\hat{X}$ এবং $\hat{Y}$-এর যৌথ নিবেশন (joint distribution) কে একটি বিচ্ছিন্ন (discrete) নিবেশন রূপে সংজ্ঞা দেওয়া হয় যেখানে $P(\hat{X} = x_i, \hat{Y} = y_i) = \frac{1}{n},\ i = 1, 2 \ldots\ldots n$। এই নিবেশনকে $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots\ldots\ldots (x_n, y_n)$ দ্বিচল নমুনার নিবেশন বলে।

দ্বিচল নমুনা নিবেশনের চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যজ্ঞাপক কয়েকটি পরিমাপ ঃ

$$\bar{x} = E(\hat{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ P\left(\hat{X} = x_i, \hat{Y} = y_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{y} = E\left(\hat{Y}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_{x2} = E\left(\hat{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$a_{y2} = E\left(\bar{Y}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$S_x^2 = E[(\widehat{X} - \bar{x})^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$S_y^2 = E[(\bar{Y} - \bar{y})^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

যেখানে $S_x$, $S_y$ হল যথাক্রমে $\widehat{X}$ ও $\bar{Y}$ এর সমক বিচ্যুতি এবং $\bar{x}$, $\bar{y}$ হল $\widehat{X}$ ও $\bar{Y}$ এর নমুনালব্ধ গড়। আমরা লক্ষ করছি $S_x^2 = a_{x2} - (\bar{x})^2$, $S_y^2 = a_{y2} - (\bar{y})^2$। নমুনালব্ধ সহভেদমান (Sample covariance), $m_{11}$ :

$$m_{11} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

নমুনালব্ধ সহগাঙ্ক (sample correlation coefficient), $r$ :

$$r = \frac{m_{11}}{S_x S_y} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x S_y}$$

যেখানে $S_x > 0$, $S_y > 0$

নমুনালব্ধ নির্ভরণাঙ্কদ্বয় (two sample regression coefficients), $b_{yx}$ এবং $b_{yx}$ :

$$b_{xy} = r\frac{S_x}{S_y},\ b_{yx} = r\frac{S_y}{S_x}$$

**নমুনালব্ধ সহগাঙ্কের কয়েকটি ধর্ম ঃ**

(i) সহগাঙ্কের (সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের) মান মূলবিন্দুর অবস্থানের উপর এবং স্কেল পরিবর্তনের উপর নির্ভর করে না।

(ii) $-1 \le r \le 1$

এই ধর্মগুলি প্রমাণের জন্য একক 4 দেখুন।

একক 4-এ বিক্ষেপণ চিত্রের (Scatter diagram or dot diagram) সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে এবং এই চিত্রের সাহায্যে সহপরিবর্তন গুণাঙ্কের তাৎপর্য ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

**একটি প্রদত্ত দ্বিচল নমুনার নমুনালব্ধ নির্ভরণ রেখাদ্বয়** (Regression lines of a bivariate sample).

ধরা যাক কোনো দ্বিমাত্রিক সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$ আকারের সমসম্ভব দ্বিচল নমুনা হল ($x_1$, $y_2$), ....($x_n$, $y_n$)। এখানে দ্বিচল নমুনা নিবেশন হল $\widehat{X}$ ও $\bar{Y}$ এর যৌথ নিবেশন যেখানে

$$P(\widehat{X} = x_i, \bar{Y} = y_i) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, .....n$$ ।

এখন $\widehat{X}$ এর উপর $\bar{Y}$ এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে গেলে $y = a + bx$ আকারের এখন সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যাতে

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2$ এর মান লঘিষ্ঠ হয়।

ধরুন $S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2$

তাহলে $a$, $b$ এর মান এরূপে নির্ণয় করতে হবে যাতে $S$ এর মান লঘিষ্ঠ হয়।

অতএব $a$, $b$ নিরূপণকারী সমীকরণ দুটি হবে $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$

বা, $-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + bx_i)] = 0$

এবং $-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i[y_i - (a + bx_i)] = 0$

তাহলে $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$ সমীকরণ দুটি থেকে পাওয়া গেল

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n}(a + bx_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

বা, $n\bar{y} = na + nb\bar{x}$

এবং $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = an\bar{x} + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

বা, $\bar{y} = a + b\bar{x}$ ....(1)

এবং $a\bar{x} + \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.....(2)

এখন (1) ও (2) সমাধান করে আমরা পাই [একক 5 এর 5.3 অনুচ্ছেদ দেখুন]

$b = r\dfrac{S_y}{S_x}$ এবং $a = \bar{y} - r\dfrac{S_y}{S_x}\bar{x}$

যেখানে $r = \dfrac{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \cdot \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}}{S_x S_y}$

এবং, $S_x > 0,\ S_y > 0$

সুতরাং $\tilde{X}$ এর উপর $\tilde{Y}$ এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণ হবে

$$y - \bar{y} = r\,\frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x})$$

অনুরূপভাবে $c$, $d$ এর যে মানের জন্য $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - c - dy_i)^2$ এব মান লঘিষ্ঠ হয় সেই মানগুলি থেকে অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে $\tilde{Y}$ এর উপর $\tilde{X}$ এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণ হবে

$$x - \bar{x} = r\frac{S_x}{S_y}(y - \bar{y})$$

**মন্তব্য :** (1) এক্ষেত্রে দেখানো যায় যে $|r|$ কে সাযুজ্যতার উৎকর্ষের পরিমাপ (Measure of goodness of fit) বলে ধরা যাবে।

(2) $\tilde{X}$ এর উপর $\tilde{Y}$ এর নির্ভরেখার সমীকরণ থেকে $x$ এর প্রদত্ত মানের জন্য $y$ এর নির্ণীত মানের উৎকর্ষ $S_y\sqrt{1-r^2}$ এর মান থেকে বোঝা যাবে এবং $\tilde{Y}$-এর উপর $\tilde{X}$ এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণ থেকে $y$ এর প্রদত্ত মানের জন্য $x$-এর নির্ণীত মানের উৎকর্ষ $S_x\sqrt{1-r^2}$ এর মান থেকে বোঝা যাবে।

(3) নির্ভরণ রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয়ের উপরের পদ্ধতিকে "লঘিষ্ঠ বর্গনীতি" (least square method) বলা হয়।

(4) নির্ভরণ রেখা দুটি $(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দুতে ছেদ করে। [একক 5 দেখুন।]

## 6.7 উদাহরণমালা :

**উদা. 1.** $(x_1, x_2, \ldots . x_n)$ এই নমুনার ক্ষেত্রে – 1 এবং 1 থেকে নমুনামানগুলির বিচ্যুতির বর্গের গড় যথাক্রমে 7 এবং 3। নমুনাটির সমক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + 1)^2 = 7$ এবং $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)^2 = 3$

তাহলে আমরা পাই $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i + 1)^2 - (x_i - 1)^2] = 4$

বা, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}4x_i = 4$

বা, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = 1$

সুতরাং $\bar{x} = 1.$

তাহলে নমুনা ভেদমান $S^2$ হলে আমরা পাই

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)^2 = 3.$$

সুতরাং নির্ণেয় সমক বিচ্যুতি = $\sqrt{3}$.

উদা. 2. যদি কোনো সমসম্ভব নমুনার প্রসার (Range) এবং সমকবিচ্যুতি (standard deviation) যথাক্রমে $R$ এবং $S$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন $S^2 \leq \frac{R^2}{4}$।

সমাধান ঃ ধরুন সমসম্ভব নমুনাটি $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$। মনে করুন, নমুনা মানগুলির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে $b$ এবং $a$।

তাহলে $R = b - a$, যেখানে $b > a$।

এখন $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, $\bar{x}$ নমুনাগড়।

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} - \bar{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - \bar{x}\right)^2 + \frac{2}{n}\left(\frac{a+b}{2} - \bar{x}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - \bar{x}\right)^2 - 2\left(\frac{a+b}{2} - \bar{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2} - \bar{x}\right)^2$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2 \left[\because \left(\frac{a+b}{2} - \bar{x}\right)^2 \geq 0\right]$$

সুতরাং আমরা পাই $S^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2$ .......(1)

এখন, $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2$

$$= \sum_{x_i \leq \frac{a+b}{2}}\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \sum_{x_i > \frac{a+b}{2}}\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

আবার যে-কোনো নমুনামান $x_i$ এর জন্য $a \leq x_i$।

সুতরাং $x_i \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2$

তাহলে, $\sum_{x_i \leq \frac{a+b}{2}}\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq n_1\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2$, যদি

$i$ এর $n_1$ সংখ্যক মানের জন্য $x_i \leq \frac{a+b}{2}$ সম্পর্কটি সত্য হয়।

আবার যে-কোনো নমুনামান $x_i \leq b$।

সুতরাং $x_i > \frac{a+b}{2} \Rightarrow \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2$

তাহলে $\sum_{x_i > \frac{a+b}{2}}\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq n_2\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2$

যেখানে $i$ এর $n_2$ সংখ্যক মানের জন্য $x_i > \frac{a+b}{2}$ সম্পর্কটি সত্য হয়।

সুতরাং আমরা পাই,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{a+b}{2}\right)^2 \le n_1\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2+n_2\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\text{বা, } \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{a+b}{2}\right)^2 \le n_1\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+n_2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\text{বা, } \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{a+b}{2}\right)^2 \le (n_1+n_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \;......(2)$$

কিন্তু $n_1 + n_2 = n$.

সুতরাং (1) ও (2) থেকে আমরা পাই

$$S^2 \le \frac{1}{n}\; n\; \frac{R^2}{4} [\because\; R=b-a]$$

অতএব, $S^2 \le \frac{R^2}{4}$।

উদা. **3.** দুটি পরীক্ষার ফল নিম্নরূপ ঃ

| রসায়ন ($\hat{X}$) | পদার্থবিদ্যা ($\hat{Y}$) |
|---|---|
| $\bar{x} = 75$<br>$S_x = 6$<br>$r_{xy}\ (= r) = 0{\cdot}72$। | $\bar{y} = 70$<br>$S_y = 8$ |

[প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহার করা হয়েছে।]

নির্ভরণ রেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় করুন। একজন ছাত্র রসায়নে 65 পেয়েছে। পদার্থবিদ্যায় তার সম্ভাব্য নম্বর কী? ঐ সম্ভাব্য নম্বরের উৎকর্ষ বিচার করুন।

সমাধান ঃ $\hat{X}$ এর উপর $\hat{Y}$ এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণ হল

$$y - \bar{y} = r\,\frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x})$$

এবং $Y$ এর উপর $X$ এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণ হল

$$x - \bar{x} = r\frac{S_x}{S_y}(y - \bar{y})$$

এখন $\bar{x}$, $\bar{y}$, $S_x$, $S_y$ এবং $r$ এর প্রদত্ত মানগুলি নিয়ে নির্ভরণ রেখা দুটির সমীকরণ হয়।

$$y - 70 = 0{\cdot}72 \times \frac{8}{6}(x - 75),$$

$$x - 75 = 0{\cdot}72 \times \frac{6}{8}(y - 70)$$

বা, $y - 70 = 0{\cdot}96(x - 75)$,

$x - 75 = 0{\cdot}54(y - 70)$।

এখন একজন ছাত্রের রসায়নের নম্বর (65) দেওয়া আছে অর্থাৎ $x = 65$ বলা আছে। তাহলে ওই ছাত্রের পদার্থবিদ্যায় সম্ভাব্য নম্বর ($y_e$) নির্ণয় করার জন্য $\widehat{X}$ এর উপর $\bar{Y}$ এর নির্ভরণ রেখাটি বিবেচনা করতে হবে অর্থাৎ $y - 70 = 0{\cdot}96(x - 75)$ এই সমীকরণ থেকে $y_e$ এর মান নির্ণয় করতে হবে। এখন $x = 65$ এবং $y = y_e$ ধরে এই সমীকরণ থেকে আমরা পাই—

$$y_e = 70 + 0{\cdot}96(65 - 75)$$

বা, $y_e = 70 - 10 \times 0{\cdot}96 = 70 - 9{\cdot}6 = 60{\cdot}4$

সুতরাং নির্ণেয় সম্ভাব্য নম্বর হবে $60{\cdot}4 \simeq 60$

এখানে নির্ণেয় সম্ভাব্য মানের উৎকর্ষ $S_y\sqrt{1-r^2}$ এর মান থেকে বোঝা যাবে যেখানে $S_y\sqrt{1-r^2} = 8\sqrt{1-(0.72)^2} = 5.55$.

উদা. 4. একটি দ্বিচলক নমুনার নির্ভরণ রেখাদ্বয়ের সমীকরণ $x + 2y - 5 = 0$ এবং $2x + 3y - 8 = 0$ যেখানে $S_x^2 = 12$. $\bar{x}, \bar{y}$, $S_y$ এবং $r$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ আমরা জানি নির্ভরণ রেখাদুটি $(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন $x + 2y - 5 = 0$, $2x + 3y - 8 = 0$ সমীকরণ দুটি সমাধান করে আমরা পাই $x = 1$, $y = 1$।

সুতরাং $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 2$

এখন $(i)$ ও $(ii)$ এর মধ্যে একটি সত্য হবে।

$(i)$ $x + 2y - 5 = 0$ সরলরেখাটি $\widehat{X}$ এর উপর $\bar{Y}$ এর নির্ভরণরেখা এবং $2 + 3y = 8 = 0$ সরলবেখাটি $\bar{Y}$ এর উপর $\widehat{X}$ এর নির্ভরণ রেখা।

$(ii)$ $x + 2y - 5 = 0$ সরলরেখাটি $\bar{Y}$ এর উপর $\widehat{X}$ এর নির্ভরণ রেখা এবং অন্যটি $\widehat{X}$

এর উপর $\bar{Y}$ এর নির্ভরণ রেখা, যেখানে দ্বিচল নমুনা নিবেশনের সংশ্লিষ্ট দ্বিমাত্রিক সম্ভাবনাশ্রয়ী চল হল $(\bar{X}, \bar{Y})$।

প্রথম ক্ষেত্রে $r\dfrac{S_y}{S_x} = -\dfrac{1}{2}$ এবং $r\dfrac{S_x}{S_y} = -\dfrac{3}{2}$

যা থেকে আমরা পাই $r^2 = \dfrac{3}{4}$

সুতরাং এক্ষেত্রে $r = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$।

এখন যেহেতু $S_x > 0, S_y > 0$ এবং $r\dfrac{S_y}{S_x} = -\dfrac{1}{2}$ আমরা পাই $r < 0$।

সুতরাং $r = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (এখানে লক্ষ করছি $\left|-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$)।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $r\dfrac{S_x}{S_y} = -2$ এবং $\dfrac{S_y}{S_x} = -\dfrac{2}{3}$ যা থেকে আমরা পাই $r^2 = \dfrac{4}{3} > 1$

যা অসম্ভব কারণ $-1 \leq r \leq 1$

অতএব $r = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

এখন $r\dfrac{S_x}{S_y} = -\dfrac{3}{2}$ থেকে আমরা পাই

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{12}}{S_y} = -\dfrac{3}{2}$ [$\because$ এখানে $S_x^2 = 12$]

সুতরাং $S_y = 2$.

## 6.8 সারাংশ

এই এককে সমগ্রকের ও সমগ্রক থেকে চয়ন করা সমসম্ভব নমুনার (Random Sample) ধারণা ব্যাখ্যা করা হয়েছে। এরপর দেখানো হয়েছে কীভাবে বৃহৎ নমুনার ক্ষেত্রে নমুনার

নিবেশনকে সমগ্রকের নিবেশনের পরিসাংখিক প্রতিমূর্তি বলা যায়। নমুনার নিবেশনের চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যজ্ঞাপক কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ পরিমাপের উল্লেখ করা হয়েছে। সবশেষে দ্বিচল নমুনার নিবেশনের চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যজ্ঞাপক কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ পরিমাপ উল্লেখ করে এই নিবেশনের নির্ভরণ রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় করা হয়েছে।

## 6.9 অনুশীলনী

1. যদি $m_k$ এবং $a_k$ $(k \ge 1)$ যথাক্রমে নমুনালব্ধ $k$-তম কেন্দ্রীয় পরিঘাত ও মূলবিন্দু সাপেক্ষে নমুনালব্ধ $k$-তম পরিঘাত হয় তাহলে প্রমাণ করুন

   $(i)$ $m_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j a_{k-j} (\bar{x})^j$

   $(ii)$ $a_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} m_{k-j} (\bar{x})^j$

   যেখানে $\bar{x}$ হল নমুনাগড়।

2. কোনো কারখানার 20 জন শ্রমিকের দৈনিক মজুরির পরিমাণ নীচে দেওয়া হল ঃ
   25, 36, 32, 27, 28, 39, 40, 32, 28
   30, 32, 36, 34, 28, 34, 28, 32, 30,
   30, 32.
   এই নমুনার গড়, মধ্যমা (median) এবং ভূয়িষ্টক (mode) নির্ণয় করুন। [মধ্যমা ও ভূয়িষ্টকের সংজ্ঞার জন্য একক 2 দেখুন।]

3. যদি $n$-আকারের কোনো সমসম্ভব নমুনার সমকবিচ্যুতি ও প্রসার যথাক্রমে $S$ ও $R$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন $S^2 \ge \dfrac{R^2}{2n}$.

4. কোনো প্রদত্ত নমুনা $(x_1, x_2, \ldots x_n)$-এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন যে $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ এর মান লঘিষ্ঠ হবে যখন $a$ এর মান নমুনাগড় $\bar{x}$ এর সমান।

5. প্রমাণ করুন যে সমসম্ভব নমুনার নমুনাগড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্যের মান নমুনা সমক বিচ্যুতির থেকে বেশি হতে পারে না।

6. $n$-আকারের একটি সমসম্ভব নমুনায় কেবলমাত্র $a$ ও $b$ এই দুটি ভিন্ন সংখ্যা সমান পরিসংখ্যা নিয়ে বর্তমান। নমুনাটির সমকবিচ্যুতি এবং নমুনাগড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করুন। নমুনাটির প্রতিবৈষম্য গুণাঙ্ক ও তীক্ষ্ণতা গুণাঙ্ক কত?

7. 10 জন ছাত্রের marks এর নমুনায় দেখা গেল একজন বিশেষ ছাত্র অন্য ছাত্রদের গড় marks থেকে 25 কম পেয়েছে। প্রমাণ করুন যে নমুনায় সমস্ত ছাত্রদের গড় marks এর সমকবিচ্যুতি কমপক্ষে 7·5 হবে। যদি এই সমকবিচ্যুতির প্রকৃতমান 12 হয় তাহলে বিশেষ ছাত্রটির marks বাদ দিলে সমকবিচ্যুতির মান কত হবে?

8. 11 আকারের দ্বিমাত্রিক নমুনা থেকে পাওয়া যায় $\bar{x} = 7$, $S_x = 2$, $\bar{y} = 9$, $S_y = 4$, $r = 0{\cdot}5$। পরে দেখা গেল যে, নমুনা মানগুলির এক জোড়া ($x = 7$, $y = 9$) ত্রুটি পূর্ণ এবং উহা বর্জন করা হল। এই বর্জন দ্বারা $r$-এর মান কীরূপ প্রভাবিত হবে?

9. কলকাতা ও মুম্বাই দুটি শহরের প্রত্যেকটি থেকে কোনো একটি জিনিসের দামের 25টি পর্যবেক্ষণ থেকে নেওয়া একটি রাশিতথ্য নীচে দেওয়া হল।

কলকাতায় দামের গড়মান = 65 টাকা। মুম্বাইতে দামের গড়মান = 67 টাকা। কলকাতায় দামের সমক বিচ্যুতি = 2·5 টাকা। মুম্বাইতে দামের সমক বিচ্যুতি = 3·5 টাকা। দুটি শহরের জিনিসটির দামের নমুনা সহগাঙ্ক = 0·8। কলকাতায় জিনিসটির দামের 70 টাকার পরিপ্রেক্ষিতে মুম্বাইয়ে ওই জিনিসটির সর্বাপেক্ষা সম্ভাবনাপূর্ণ দামটি বাহির করুন।

10. নীচের দ্বিচল নমুনার ক্ষেত্রে নমুনা সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন এবং নির্ভরণ রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় করুন ঃ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 8 | 10 | 5 | 8 | 9 |
| $Y$ | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 |

11. দ্বিচল নমুনার ক্ষেত্রে নির্ভরণ রেখাদুটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্ম কোণটির মান θ হলেদেখান

$$\tan\theta = \left|\frac{1-r^2}{r}\cdot\frac{S_x S_y}{S_x^2 + S_y^2}\right|$$

যেখানে $S_x$, $S_y$, $r$ এর প্রচলিত এবং $r \neq 0$।

12. দুটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$ ও $Y$ এর মধ্যে $4X + 9Y - 8 = 0$ সম্পর্কটি বিদ্যমান। $(X, Y)$ এর সমগ্রক থেকে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots (x_n, y_n)$ দ্বিচল নমুনাটি চয়ন করা হয়েছে। নমুনাটির নমুনা সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন।

13. $(X, Y)$ এর সমগ্রক থেকে নেওয়া একটি সমসম্ভব নমুনা $(x_1, y_1), \ldots\ldots (x_n, y_n)$ এর নির্ভরণ রেখা দুটির সমীকরণ হল $y = 2x$ এবং $x = \frac{y}{8}$। প্রদত্ত নমুনাটির নমুনা সহগাঙ্ক নির্ণয়

করুন। $(U, V)$ এর সমগ্রক থেকে যদি $(u_i, v_i)$, $i = 1, 2, \ldots n$ একটি নমুনা লওয়া হয় যেখানে $u_i = x_i + y_i$, $v_i = x_i - y_i$, $i = 1, 2, \ldots n$ তবে $(u_i, v_i), i = 1, 2, \ldots n$ নমুনার নির্ভরণ রেখাদুটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

## 6.10 উত্তরমালা

2. 32, 32, 32 ;

6. $\frac{1}{2} \mid a - b \mid, g_1 = 0, b_2 = 1$ ;

7. 9·9

8. $r$ এর মানের কোনো পরিবর্তন হবে না।

9. 72·60 টাকা

10. $r = 0{\cdot}802,\ y = 0{\cdot}429x - 1{\cdot}432,\ x = 1{\cdot}50y + 5.$

12. $-1$

13. $\frac{1}{2},\ v = -\frac{5}{7}u,\ u = -\frac{15}{13}v.$

# একক-7 নমুনাঙ্ক ও নমুনাজ নিবেশন [Statistic and Sampling Distribution]

গঠন



## 7.1 প্রস্তাবনা ঃ

একক 6-এ আমরা প্রমাণ করেছি যে সমসম্ভব নমুনার আকার $n$ বৃহৎ হলে, $x$ এর যে-কোনো বাস্তব মানের জন্য $\bar{F}(x) \simeq F(x)$, যেখানে $\bar{F}$, $F$ যথাক্রমে নমুনার ও সমগ্রকের নিবেশন অপেক্ষক। এর থেকে আমরা অনুমান করতে পারি যে বৃহৎ আকারের নমুনার ক্ষেত্রে নমুনার কোনো বৈশিষ্ট্য (যেমন নমুনা গড়, নমুনা ভেদমান ইত্যাদি) সমগ্রকের অনুরূপ বৈশিষ্ট্যের সঙ্গে প্রায় সমান হবে। কিন্তু এভাবে নমুনার কোনো বৈশিষ্ট্যকে (Sample characteristics) সমগ্রকের কোনো বৈশিষ্ট্যের (population characteristic) আসন্নমান ধরলে একটি সমস্যার সৃষ্টি হয়। বিষয়টি একটি উদাহরণ দিয়ে বোঝানো যাক। মনে করুন নমুনাগড় $\bar{x}$ কে সমগ্রক গড় $m$ এর আসন্নমানরূপে ধরা হল। সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ এর নমুনা মানগুলি বিভিন্ন নমুনার (একই আকারের) ক্ষেত্রে যদৃচ্ছভাবে পরিবর্তিত হওয়ায়, একটি বিশেষ নমুনার ক্ষেত্রে নমুনা গড় $(\bar{x})$ এর মান সমগ্রক গড়ের নিকটবর্তী হতে পারে কিন্তু অন্য নমুনায় তা নাও হতে পারে। এই কারণে নমুনাগড় $\bar{x}$ কে সমগ্রকগড় $m$-এর উৎকৃষ্ট আসন্নমান রূপে (good approximation) ধরা যাবে কি না তা একটি বিশেষ নমুনার উপর নির্ভর করে বলা যাবে না—তা ঠিক করতে গেলে নমুনার মানগুলি যদৃচ্ছভাবে পরিবর্তিত হলে নমুনাগড়ের মানের সম্ভাবনাভিত্তিক পরিবর্তনের নিয়মটি আমাদের জানা দরকার যা $\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ এর সম্ভাবনা নিবেশন থেকে জানা যাবে যেখানে $X_1, X_2, \ldots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল এবং এই চলগুলির প্রত্যেকের নিবেশন

ও সমগ্রক চল $X$ এর নিবেশন অভিন্ন। এখানে আমরা লক্ষ করছি যে $X$-এর সমগ্রক থেকে নেওয়া একটি বিশেষ সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$-এর ক্ষেত্রে নমুনাগড় $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots. + x_n}{n}$-এর মান হল সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots. + X_n}{n}$ এর একটি পর্যবেক্ষিত মান (observed value)। $\bar{X}$ এই সম্ভাবনাশ্রয়ী চলের নিবেশনকে নমুনাগড় $\bar{x}$ এর নমুনাজ নিবেশন (Sampling distribution) এবং $\bar{x}$ কে একটি নমুনাঙ্ক (statistic) বলা হবে। আমরা এই এককে সাধারণভাবে যে-কোনো নমুনাঙ্ক $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ও তার নমুনাজ নিবেশন সম্বন্ধে আলোচনা করব।

## 7.2 নমুনাঙ্ক (*Statistic*) ঃ

মনে করুন $X$ এর সমগ্রক থেকে $n$ আকারের সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ চয়ন করা হয়েছে। এখন $n$ আকারের বিভিন্ন মানুষের ক্ষেত্রে আমরা $n$-সংখ্যক বাস্তব চল $x_1, x_2, \ldots x_n$ পাই এবং এক্ষেত্রে এই চলগুলির যে কোন অপেক্ষককে (যার মান বাস্তব সংখ্যা) এখন $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ কোন নমুনাঙ্ক হলে এবং যদি $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ এর রাশিতে সমগ্রকের কোন অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্ক (parameter) প্রত্যক্ষভাবে না থাকে তাহলে নমুনাঙ্কটি দ্বারা নমুনার নিবেশনের কোনো বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করবে। উদাহরণস্বরূপ, নমুনার বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করে এখন কয়েকটি নমুনাঙ্ক হল নমুনা গড়

$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, নমুনা ভেদমান $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$,

$k$-তম নমুনা পরিঘাত $a_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ ইত্যাদি।

## 7.3 নমুনাঙ্কের নমুনাজ নিবেশন (Sampling distribution of a statistic)

মনে করুন $X$ এর সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$ আকারের যে কোনো সমসম্ভব নমুনা (random sample) হল $(x_1, x_2, \ldots\ldots xn)$ এবং $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ একটি নমুনাঙ্ক। $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ এই নমুনাঙ্কের অনুসঙ্গী (corresponding) সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি হল $f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ যেখানে $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ পরস্পর অনপেক্ষ (mutually independent) সম্ভাবনাশ্রয়ী চল যাদের প্রত্যেকের সম্ভাবনা নিবেশন এবং $X$-এর সম্ভাবনা নিবেশন অভিন্ন। সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $f(X_1, X_2, \ldots X_n)$-এর

সম্ভাবনা নিবেশনকে নমুনাঙ্ক $f(x_1, x_2, ..x_n)$ এর নমুনাজ নিবেশন (sampling distribution) বলা হয়। তাহলে নমুনাঙ্ক $f(x_1, x_2, ..x_n)$ এর নমুনাজ নিবেশন নির্ণয় করতে গেলে $f(X_1, X_2,.....X_n)$ এর নিবেশন নির্ণয় করতে হবে। আমরা লক্ষ করছি $f(X_1, X_2,.....X_n)$ এর নিবেশন $X_1, X_2,.....X_n$ এর যৌথ নিবেশন অপেক্ষক $\Psi(x_1, x_2,...x_n)$ থেকে পাওয়া যাবে যেখানে $\Psi(x_1, x_2,...x_n) = F(x_1)\, F(x_2)...F(x_n)$ এবং $F(x)$ হল সমগ্রক চল $X$ এর নিবেশন অপেক্ষক।

## 7.4 নমুনাঙ্কের সমকভ্রান্তি (Standard error of a statistic) ঃ

মনে করুন $f(x_1, x_2, ..x_n)$ একটি নমুনাঙ্ক। এই নমুনাঙ্কের অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি $f(X_1, X_2,.....X_n)$। সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $f(X_1, X_2,.....X_n)$ এর সমক বিচ্যুতিকে (যদি অস্তিত্ব থাকে) নমুনাঙ্ক $f(x_1, x_2, ..x_n)$ এর সমক ভ্রান্তি (standard error) বলা হয়। যদি $f(X_1, X_2,.....X_n)$ এর গড় মান $\theta$ হয় তাহলে বিভিন্ন সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে নমুনামানগুলি যদৃচ্ছভাবে পরিবর্তন হওয়ার জন্যে নমুনাঙ্ক $f(x_1, x_2, ..x_n)$ এর মানের যদৃচ্ছভাবে (at random) পরিবর্তন হবে এবং এক্ষেত্রে নমুনাঙ্কের মান $\theta$ এর কাছে থাকার সম্ভাবনা খুব প্রবল বলা যাবে যদি সমকভ্রান্তির মান খুব কম হয়।

## 7.5 নমুনাগড়ের সমকভ্রান্তি (Standard error of sample mean) ঃ

মনে করুন সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$ এর সমগ্রক থেকে চয়ন করা যে-কোনো সমসম্ভব নমুনা হল $(x_1, x_2, ..x_n)$। এখানেও আমরা যথারীতি বুঝবো সমগ্রকটি অসীম সমগ্রক। নমুনা গড় $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ....x_n}{n}$ এবং এই নমুনাঙ্কের অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি $\dfrac{X_1 + X_2 + ..... + X_n}{n}$ যেখানে $X_1, X_2, .......X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল যাদের প্রত্যেকের নিবেশনও $X$ এর নিবেশন অভিন্ন।

$\dfrac{X_1 + X_2 + ..... + X_n}{n}$ (= $\bar{X}$ ধরুন) এই সম্ভাবনাশ্রয়ীর চলটির সমকবিচ্যুতি (standard deviation) হবে নমুনাগড়ের সমকভ্রান্তি।

মনে করুন $X$ এর ভেদমান var($X$) এর অস্তিত্ব আছে এবং ধরুন var($X$) = $\sigma^2$ যেখানে $\sigma$ হল $X$ এর সমকবিচ্যুতি।

তাহলে $\text{var}(X_1) = \text{var}(X_2) = .... = \text{var}(X_n) = \sigma^2$।

এখন $X_1, X_2, ....X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ হওয়ায়,

$$\text{var}(\bar{X}) = \text{var}\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + .... + X_n)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}[\text{var}(X_1) + \text{var}(X_2) + .... + \text{var}(X_n)]$$

$$= \frac{1}{n^2}[\sigma^2 + \sigma^2 + .... + \sigma^2]$$

$$= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

সুতরাং $\bar{X}$ এর সমকবিচ্যুতি হবে $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$। তাহলে এক্ষেত্রে নমুনাগড়ের সমকভ্রান্তি হবে $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$।

**মন্তব্য ঃ** একক 6 এ আমরা উল্লেখ করেছি যে সসীম সমগ্রক থেকে দুভাবে সমসম্ভব নমুনা চয়ন করা যেতে পারে। পুনঃস্থাপনা সহ নমুনা সংগ্রহ (SRSWR) ও পুনস্থাপনাবিহীন নমুনা (SRSWOR)। উভয়ক্ষেত্রে নমুনাগড়ের সমকভ্রান্তি নির্ণয় করা যায়। [অনুশীলনী দেখুন]।

## 7.6 উদাহরণমালা ঃ

**উদা 1.** $X$ এর সমগ্রকের নিবেশন নীচের সারণিতে প্রকাশ করা হল ঃ

| $X$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0.1 | 0.5 | 0.4 |

$X$ এর সমগ্রক থেকে 2 আকারে যে সমস্ত নমুনা (পুনঃস্থাপনাসহ) চয়ন করা যায় তা লিখুন এবং প্রত্যেক নমুনার নমুনা গড় $\bar{x}$ এর মান লিখুন। এরপর সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $\bar{X}$ এর সম্ভাবনা সারণি তৈরী করুন এবং এই সারণি থেকে নমুনাগড়ের নমুনাজ নিবেশনের ভেদমান $\sigma^2_{\bar{X}}$ নির্ণয় করুন। সমগ্রকের ভেদমান $\sigma^2_X$ নির্ণয় করে দেখান যে $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{1}{2}\sigma^2_X$।

**সমাধান ঃ** এখানে সমগ্রকচল $X$ এর spectrum হল $\{-1, 0, 2\}$। এই সমগ্রক থেকে 2 আকারের নমুনার (পুনঃস্থাপনা সহ) সংখ্যা হল $3 \times 3 = 9$।

এই নমুনাগুলি এবং প্রত্যেক নমুনার নমুনাগড় নীচের সারণিতে প্রকাশ করা হল ঃ

| নমুনা | নমুনা গড় $\bar{x}$ |
|---|---|
| (–1, –1) | $\frac{-1-1}{2}=-1$ |
| (–1, 0) | $\frac{-1+0}{2}=-0.5$ |
| (–1, 2) | $\frac{-1+2}{2}=0.5$ |
| (0, 0) | $\frac{0+0}{2}=0$ |
| (0, –1) | $\frac{0-1}{2}=-0.5$ |
| (0, 2) | $\frac{0+2}{2}=1$ |
| (2, 0) | $\frac{2+0}{2}=1$ |
| (2, –1) | $\frac{2-1}{2}=0.5$ |
| (2, 2) | $\frac{2+2}{2}=2$ |

উপরের সারণি থেকে দেখা যাচ্ছে যে সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $\bar{X}$ একটি বিচ্ছিন্ন চল যার spectrum হল {–1, –0.5, 0, 0.5, 1, 2}।

এখন $(\bar{X}=0)$ ঘটনাটি ঘটে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $(X_1=0, X_2=0)$ ঘটনাটি ঘটে।

[$X_1$, $X_2$ পরস্পর অনপেক্ষ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল যাদের প্রত্যেকের নিবেশন এবং $X$ এর নিবেশন অভিন্ন]

সুতরাং $\quad P(\bar{X}=0)=P(X_1=0)P(X_2=0)$

$$=P[P(X=0)]^2=(0.5)^2$$

$$=0.25$$

আবার $(\bar{X} = -0.5)$ ঘটে যদি এবং একমাত্র যদি $(X_1 = -1, X_2 = 0)$ বা $(X_1 = 0, X_2 = -1)$ ঘটে।

তাহলে $P(\bar{X} = -0.5)$

$$= P(X_1 = -1)\, P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)\, P(X_2 = -1)$$

$$= 0.1 \times 0.5 + 0.5 \times 0.1$$

$$= 0.1$$

এইভাবে আমরা নীচের সম্ভাবনা সারণিটি ( $\bar{X}$ এর জন্য) পাই ঃ

| $\bar{x}$ | $-1$ | $-0.5$ | $0$ | $0.5$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\bar{X} = \bar{x})$ | 0.01 | 0.1 | 0.25 | 0.08 | 0.4 | 0.16 |

নমুনাগড়দের গড় হবে

$$E(\bar{X}) = -1 \times 0.01 + (-0.5) \times 0.1 + 0 \times 0.25 + 0.5 \times 0.08 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.16$$

$$= 0.7$$

তাহলে $\bar{X}$ এর ভেদমান $\sigma_{\bar{X}}^2$ হবে

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = (-1)^2 \times 0.01 + (0.05)^2 + (0.5)^2 \times 0.08 + 1^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.16 - (0.7)^2$$

$$= 0.605$$

এখন সমগ্রকের ভেদমান $\sigma_X^2$ হবে

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (-1)^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.4 - [-1 \times 0.1 + 2 \times 0.4]^2$$

$$= 0.1 + 1.6 - 0.49 = 1.21 = 2 \times 0.605$$

তাহলে দেখা যাচ্ছে $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{2}\sigma_X^2$ ।

উদাঃ **2.** নীচের 5টি পরিবারের সদস্যদের সমগ্রক থেকে চয়ন করা 2 আকারের সমসম্ভব নমুনার (পুনঃস্থাপনা সহ ও পুনস্থাপনাবিহীন) সমকভ্রান্তি নির্ণয় করুন ঃ

| পরিবার | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| সদস্যদের সংখ্যা | 4 | 3 | 2 | 5 | 7 |

সমাধান ঃ সমগ্রক গড় $m=\dfrac{4+3+2+5+7}{5}$

$$=\frac{21}{5}$$

সমগ্রক ভেদমান $\sigma^2=\dfrac{4^2+3^2+2^2+5^2+7^2}{5}-\left(\dfrac{21}{5}\right)^2$

$$=\frac{74}{25}$$

এখানে সমগ্রকের আকার $N = 5$ এবং নমুনার আকার $n = 2$

সমসম্ভব নমুনার (পুনঃস্থাপনাসহ) নমুনাগড়ের সমকভ্রান্তি $=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{74}}{5\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{37}}{5}$ ।

সমসম্ভব নমুনার (পুনঃস্থাপনা বিহীন) নমুনাগড়ের সমকভ্রান্তি [অনুশীলনী দেখুন]

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{74}}{5\sqrt{2}}.\sqrt{\frac{5-2}{5-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{74}}{5\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{111}}{10}=\sqrt{1.11}$$

উদাঃ **3.** পোয়াসঁ $\mu$ সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$ আকারের সমসম্ভব নমুনার নমুনাগড়ের নমুনাজ নিবেশন নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে সমগ্রক চল $X$ এর নিবেশন পোয়াসঁ নিবেশন যার গড় $\mu$ ($> 0$)।

এই সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$ আকারের যে-কোনো সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2, \ldots . x_n)$ এর জন্য নমুনা গড় $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ এবং $\bar{x}$ এর অনুষঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চল

$\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ যেখানে $X_1, X_2, ....X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ পোয়াসঁ $\mu$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

ধরুন $Y = X_1 + X_2 + .... + X_n$। এখানে পোয়াসঁ নিবেশনের পুনরুৎপাদন ধর্ম (reproductive property) অনুসারে $X_1 + X_2 + ... + X_n$ এর নিবেশন হবে পোয়াসঁ নিবেশন যার প্রচল (parameter) $n\mu$।

তাহলে $\bar{X} = \dfrac{Y}{n}$ যেখানে $Y$ এর নিবেশন হবে $n\mu$ প্রচল বিশিষ্ট পোয়াসঁ নিবেশন।

এখন পোয়াসঁ নিবেশনের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই

$$P(Y = r) = \frac{e^{-n\mu} .(n\mu)^r}{\underline{|r}}, r = 0,1,...$$

সুতরাং $P\left(\bar{X} = \dfrac{r}{n}\right)$

$$= P(X_1 + X_2 + ...X_n = r)$$

$$= P(Y = r) = \frac{e^{-n\mu} .(n\mu)^r}{\underline{|r}} (r = 0,1,2,...)।$$

তাহলে এক্ষেত্রে নমুনাগড়ের নমুনাজ নিবেশন (যা একটি বিচ্ছিন্ন নিবেশন) $P\left(\bar{X} = \dfrac{r}{n}\right)$ এর মান থেকে পাওয়া যাবে যেখানে

$$P\left(\bar{X} = \frac{r}{n}\right) = \frac{e^{-n\mu} .(n\mu)^r}{\underline{|r}} r = 0,1,2,...$$

এবং $\bar{X}$ একটি বিচ্ছিন্ন (discrete) সম্ভাবনাশ্রয়ী চল যার spectrum হল

$$\left\{\frac{r}{n} : r = 0,1,2....\right\}$$

উদাঃ **4.** $\gamma(l)$ সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$ আকারের সমসম্ভব নমুনার নমুনাগড়ের নমুনাজ নিবেশন নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে সমগ্রক চল $X$ এর নিবেশন $\gamma(l)$ নিবেশন যেখানে $l > 0$। এই সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$ আকারের যে-কোনো সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2, ....x_n)$ এর জন্য নমুনাগড়

$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ এবং $\bar{x}$ এর অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + .... X_n}{n}$, যেখানে $X_1$, $X_2$, ....$X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ $\gamma(l)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

ধরুন $Y = X_1 + X_2 + ...... + X_n$

তাহলে $\bar{X} = \dfrac{Y}{n}$ যেখানে পুনরুৎপাদন ধর্ম (reproductive property) অনুসারে $Y$ এর নিবেশন হবে $\gamma(nl)$ নিবেশন। এখন সম্ভাবনাশ্রয়ী চলের $\bar{X} = \dfrac{Y}{n}$ এই রূপান্তরের অনুসঙ্গী বাস্তবমানের অপেক্ষকটি হল $\bar{x} = \dfrac{y}{n}$ যেখানে $\dfrac{d\bar{x}}{dy} = \dfrac{1}{n} > 0$ ($y$ এর যে-কোনো মানের জন্যে)।

সুতরাং যদি $f_{\bar{Y}}(y)$ এবং $f_{\bar{X}}(\bar{x})$ যথাক্রমে $Y$ ও $\bar{X}$ এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হয় তাহলে

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}) = n\, f_Y(y)$$

এখন $Y$ একটি $\gamma(nl)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল হওয়ায় আমরা পাই

$$f_Y(y) = \frac{e^{-y} y^{nl-1}}{\Gamma(nl)}, \text{ যখন } 0 < y < \infty$$

$$= 0 \qquad \text{অন্যত্র।}$$

সুতরাং $$f_{\bar{X}}(\bar{x}) = \frac{n\, e^{-n\bar{x}} (n\bar{x})^{nl-1}}{\Gamma(nl)}, 0 < \bar{x} < \infty$$

$$= 0 \text{ অন্যত্র}$$

এবং এই ঘনত্ব অপেক্ষকটি নমুনাগড়ের নির্ণেয় নমুনাজ নিবেশন নির্ধারণ করে।

## 7.7 সারাংশ :

এই এককে নমুনাঙ্ক (statistic) ও তার নমুনাজ নিবেশনের (sampling distribution) ধারণা ব্যাখ্যা করা হয়েছে। নমুনাঙ্কের নমুনাজ নিবেশন কীভাবে নির্ণয় করা যায় তা কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে দেখানো হয়েছে।

## 7.8 অনুশীলনী

1. $X$ এর সমগ্রকের নিবেশন নীচের সারণিতে প্রকাশ করা হল :

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0.4 | 0.5 | 0.1 |

2. সমগ্রক থেকে চয়ন করা 2 আকারের সকল সমসম্ভব নমুনা (পুনঃস্থাপনা সহ) থেকে সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $\bar{X}$ এর সম্ভাবনা সারণি (probability table) তৈরি করুন এবং $\sigma^2_{\bar{X}}$ এর মান নির্ণয় করে দেখান $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{1}{2}\sigma^2$ যেখানে $\sigma^2$ সমগ্রকের ভেদমান।

2. N আকারের একটি সসীম সমগ্রক (যার ভেদমান $\sigma^2$ ) থেকে চয়ন করা $n$ আকারের যে-কোনো সমসম্ভব নমুনার (পুনঃস্থাপনাবিহীন) ক্ষেত্রে দেখান যে, নমুনাগড়ের সমকভ্রান্তি (standard error) হবে $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$।

[সংকেত $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$, যেখানে $X_1$, $X_2$, .... $X_n$ এর নিবেশন এবং সমগ্রক চল $X$ এর নিবেশন অভিন্ন। এখানে $X_1$, $X_2$, ...$X_n$ অনপেক্ষ নয়। এখানে $P(X = y_i) = \frac{1}{N}$, $i = 1, 2, ... N$, যেখানে $\{y_1, y_2, ... y_N\}$ সমগ্রককে প্রকাশ করে।

$$\text{var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\text{var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\text{cov}(X_i, X_j)\right]$$

$(i,j=1, 2, ....n)$

এখানে $\text{var}(X_1) = \text{var}\ (X_2) = .... = \text{var}(X_n) = \sigma^2$

এবং সমগ্রক গড় $m = \frac{y_1 + y_2 + .... + y_N}{N}$,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}\right)^2.$$

যেকোন $i$, $j \in \{1, 2, ...n\}$ এবং $i \neq j$ এর জন্য $\text{cov}(X_i, X_j)$ এর একই মান হবে, ধরুন $a_1$

তাহলে $$a = E[(X_1 - m)(X_2 - m)]$$
$$= E(X_1X_2) - m^2$$
$$E(X_1X_2) = \sum y_r y_s P(X_1 = y_r, X_2 = y_s), \ (r, s = 1, 2, ....N)$$

যেখানে $P(X_1 = y_r, X_2 = y_s)$
$$= P(X_1 = y_r)\, P(X_2 = y_s \mid X_1 = y_r)$$
$$= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1}$$

তাহলে দেখানো যায়,
$$E(X_1X_2) = \frac{N^2m^2 - (Nm^2 + N\sigma^2)}{N(N-1)}$$

এবং $$\text{cov}(X_1, X_2) = -\frac{\sigma^2}{N-1}$$

তাহলে $$\text{var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2 - 2.\, {}^nc_2 . \frac{\sigma^2}{N-1}\right]$$
$$= \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

সুতরাং নির্ণেয় সমকভ্রান্তি হবে $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$.

3. $dF = e^{-x}dx, 0 \leq x < \infty$,দ্বারা সংজ্ঞাত সমগ্রক থেকে $n$ আকারের সমসম্ভব নমুনা নিয়ে ক্ষুদ্রতম নমুনামানের নমুনাজ নিবেশন নির্ণয় করুন এবং এই নিবেশনের গড় ও ভেদমান নির্ণয় করুন।

[সংকেত ঃ এখানে নমুনাঙ্কটি হল $u = \min\{x_1, x_2, ....x_n\}$ এবং অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি হল $U = \min\{X_1, X_2, .....X_n\}$. $U$ এর নিবেশন অপেক্ষক $F_U(u)$ হলে

$$F_U(u) = P(U \leq u)$$

$$= 1 - P(U > u)$$
$$= 1 - P(X_1 > u)\, P(X_2 > u) \,.....\, P(X_n > u)$$
$$= 1 - [P(X > u)]^n$$
$$= 1 - e^{-nu} \quad \text{যখন} \quad u \geq 0 \text{ হয়।}$$

$u < 0$ হলে $F_U(u) = 0$। $U$ এর ঘনত্ব অপেক্ষক $f_U(u)$ হলে $f_U(u) = F_U'(u)$।

আমরা পাই $f_U(u) = ne^{-nu}$, $u > 0$

$$= 0 \qquad \text{অন্যত্র}$$

এবং এই ঘনত্ব অপেক্ষক নমুনাঙ্ক $u$ এর নমুনাজ নিবেশন নির্ধারণ করে।

4. দ্বিপদ $(N, p)$ সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$ আকারের সমসম্ভব নমুনার নমুনাগড়ের নমুনাজ নিবেশন নির্ণয় করুন।

5. $\{1, 3, 5, 7\}$ এই সেটটি 4 আকারের একটি সসীম সমগ্রককে প্রকাশ করে। এই সমগ্রক থেকে চয়ন করা 3 (three) আকারের যে-কোনো সমসম্ভব নমুনার (পুনঃস্থাপনাবিহীন) ক্ষেত্রে নমুনাগড়ের নমুনাজ নিবেশনের গড় ও ভেদমান নির্ণয় করুন।

## 7.9 উত্তরমালা

3. $f_U(u) = ne^{-nu}$, $u > 0$

$= 0$ অন্যত্র ;

$\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2}$

4. $\bar{X}$ এর p.m.f. হল $f(\bar{x}) = {}^{Nn}C_r\, p^r (1-p)^{Nn-r}$, যেখানে

$\bar{x} = \frac{r}{n}$, $r = 0, 1, 2, \ldots Nn$.

5. গড় 4, ভেদমান $\frac{5}{9}$.

# একক-8 ❑ নর্মাল সমগ্রক থেকে আহৃত সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে নমুনাগড় ও নমুনা ভেদমানের নমুনাজ নিবেশন [Sampling distributions of sample mean and sample variance for random sample drawn from normal population]

গঠন



## 8.1 প্রস্তাবনা :

ব্যবহারিক প্রয়োগের অধিকাংশ ক্ষেত্রে দেখা যায় যে সমগ্রকের নিবেশনটি নর্মাল বিধি (normal law) মেনে চলে। এ ছাড়া রাশিবিজ্ঞানসম্মত বিশ্লেষণের দিক থেকেও নর্মাল সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষকের (probability density function) ব্যবহার সুবিধাজনক। এইসব কারণে এই এককে আমরা নর্মাল সমগ্রকের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ নমুনাঙ্কের নমুনাজ নিবেশন নির্ণয় করব। EMT 13-এর পর্যায় 2 তে আপনারা দেখতে পাবেন কীভাবে এই নমুনাঙ্কগুলির নমুনাজ নিবেশন কোনো সমগ্রকের "অজানা পূর্ণকাঙ্কের অন্তর প্রাক্কলক" (interval estimator of unknown parameter of a population) এবং "প্রকল্প বিচার" (Testing of Hypothesis)-এর ক্ষেত্রে কাজে লাগে।

## 8.2 নর্মাল সমগ্রক থেকে নেওয়া সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে নমুনাগড়ের নমুনাজ নিবেশন (Sampling distribution of the sample mean for random sample drawn from a normal population] :

উপপাদ্য **1.** নর্মাল $(m, \sigma)$ সমগ্রক থেকে নেওয়া সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$-এর ক্ষেত্রে নমুনাগড় $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}$ এর নমুনাজ নিবেশন নর্মাল $\left(m, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ নিবেশন হবে।

প্রমাণ : নমুনা গড় $\bar{x}$-এর অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি $\bar{X}$ হলে $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n}$ আমরা পাই, যেখানে $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ অনপেক্ষ $(m, \sigma)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

এখানে সমগ্রকের সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$-এর নিবেশন নর্মাল $(m, \sigma)$ নিবেশন হওয়ায়, $X$ এর বিশিষ্ট অপেক্ষক (Characteristic function) হবে

$$\phi_X(t) = e^{imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \text{ যেখানে } i = \sqrt{-1} \text{ ।}$$

সুতরাং যদি $X_r$ এর বিশিষ্ট অপেক্ষক $\phi_{X_r}(t)$ হয় $(r = 1, 2 \ldots\ldots\ldots n)$ আমরা পাই $\phi_{X_r}(t) = e^{imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ এবং তাহলে $\phi_{\bar{X}}(t)$, $\bar{X}$ এর বিশিষ্ট অপেক্ষক হলে আমরা পাই

$$\phi_{\bar{X}}(t) = E\left[e^{it\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}\right)}\right]$$

$$= E\left[e^{\frac{itX_1}{n}} \cdot e^{\frac{itX_2}{n}} \ldots . e^{\frac{itX_n}{n}}\right]$$

$$= E\left(e^{\frac{itX_1}{n}}\right) E\left(\frac{itX_2}{n}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots E\left(e^{\frac{itX_n}{n}}\right)$$

[$\because X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ]

$$= \phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \phi_{X_2}\left(\frac{t}{n}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \phi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$= \left[\phi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

$$= \left[e^{\frac{imt}{n} - \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{n}\right)^2}\right]^n$$

$$= e^{imt - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{t^2}{n}}$$

তাহলে প্রমাণ করা গেল যে $\bar{X}$ -এর বিশিষ্ট অপেক্ষক $\phi_{\bar{X}}(t)$ হবে $\phi_{\bar{X}}(t) = e^{imt - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2}$ যা নর্ম্যাল $\left(m,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ নিবেশনের বিশিষ্ট অপেক্ষক।

যেহেতু বিশিষ্ট অপেক্ষক অনন্যভাবে (uniquely) একটি নিবেশন নির্ধারণ করে, প্রমাণিত হল যে $\bar{X}$ এর নিবেশন নর্মাল $\left(m,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ হবে এবং তাহলে প্রমাণ করা গেল যে নর্মাল $(m,\ \sigma)$ সমগ্রক থেকে সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে নমুনাগড়ের নমুনাজ নিবেশন নর্মাল $\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ নর্ম্যাল $(m,\ \sigma)$ সমগ্রক থেকে নেওয়া সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে $U = \dfrac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটির নিবেশন নর্মাল (0, 1) নিবেশন হবে অর্থাৎ $u = \dfrac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ নমুনাঙ্কের নমুনাজ নিবেশন নর্মাল (0, 1) নিবেশন হবে।

## 8.3 নর্ম্যাল সমগ্রক থেকে নেওয়া সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে নমুনা ভেদমানের নমুনাজ নিবেশন।

উপপাদ্য **1.** নর্ম্যাল $(m,\ \sigma)$ সমগ্রক থেকে নেওয়া $n$ আকারের সমসম্ভব নমুনার ভেদমান $S^2$

হলে, $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ এই নমুনাঙ্কের নমুনাজ নিবেশন হবে $n-1$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত $\chi^2$—নিবেশন।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক নর্ম্যাল $(m,\sigma)$ সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$ আকারের সমসম্ভব নমুনাটি হল $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$। তাহলে নমুনা ভেদমান $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, যেখানে $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n}$।

এখন $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2$

তাহলে $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ নমুনাঙ্কের অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি হবে $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2$ .. (1)

যেখানে $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ নর্ম্যাল $(m, \sigma)$ চল।

$$\text{এখন } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-m+m-\bar{X}}{\sigma}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-m}{\sigma}\right)^2 + \frac{n}{\sigma^2}(m-\bar{x})^2 + \frac{2(m-\bar{X})}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-m}{\sigma}\right)^2 + \frac{n}{\sigma^2}(m-\bar{X})^2 + \frac{2(m-X)}{\sigma^2}n(\bar{X}-m)$$

$$\left[\because\ \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]$$

$$\text{অতএব } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-m}{\sigma}\right)^2 - \frac{n(\bar{X}-m)^2}{\sigma^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

পুনরায় প্রত্যেক $X_i$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ নর্ম্যাল $(m, \sigma)$ চল হওয়ায় $\frac{X_i-m}{\sigma}$ $(i = 1, 2, \ldots.. n)$ নর্ম্যাল $(0, 1)$ চল হবে।

যেহেতু $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ, $\dfrac{X_1-m}{\sigma}, \dfrac{X_2-m}{\sigma}, \ldots\ldots\ldots \dfrac{X_n-m}{\sigma}$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চলগুলিও পরস্পর অনপেক্ষ হবে।

ধরা যাক $Y_i = \dfrac{X_i-m}{\sigma}$, $i = 1, 2, \ldots\ldots n$।

আমরা লক্ষ করছি $Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n$ পরস্পর অনপেক্ষ নর্মাল (0, 1) চল।

এখন $$\frac{n}{\sigma^2}\left(\bar{X}-m\right)^2 = \frac{n}{\sigma^2}\left(\frac{X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n}{n}-m\right)^2$$

$$= \frac{n}{\sigma^2}\left[\frac{(X_1-m)+(X_2-m)+\ldots\ldots\ldots+(X_n-m)}{n}\right]^2$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{X_1-m}{\sigma}+\frac{X_2-m}{\sigma}+\ldots\ldots\ldots+\frac{X_n-m}{\sigma}\right]^2$$

$$= \frac{1}{n}\left(Y_1+Y_2+\ldots\ldots\ldots+Y_n\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{n}}Y_1+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_2+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_n\right)^2$$

তাহলে (1) ও (2) থেকে আমরা পাই

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{n}}Y_1+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_2+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_n\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

যেখানে $\dfrac{1}{\sqrt{n}}Y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}Y_2 + \ldots\ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}Y_n$ এই রৈখিক সমষ্টির (linear combination) ক্ষেত্রে $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots + \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1$

সুতরাং $EMT$ 12 (পর্যায় 2) এর একক 14 তে উপপাদ্য III অনুসারে $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{n}}Y_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}Y_2 + \ldots.. + \frac{1}{\sqrt{n}}Y_n\right)^2$ এই সম্ভাবনাশ্রয়ী চলকটির নিবেশন হবে $\chi^2$-নিবেশন যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা $n - 1$।

সুতরাং (3) থেকে আমরা পাই $\frac{nS^2}{\sigma^2}$-এর নিবেশন হবে $n - 1$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত $\chi^2$-নিবেশন। অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

**নর্ম্যাল $(m, \sigma)$ সমগ্রকের ক্ষেত্রে $S^2$ এবং $s^2 = \frac{n}{n-1} S^2$ $(n > 1)$-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক।**

$S^2$-এর ঘনত্ব অপেক্ষক

নমুনা ভেদমান $S^2$-এর নমুনাজ নিবেশন অনুষঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $S^2$-এর ঘনত্ব অপেক্ষক থেকে নির্ণয় করা যাবে। এই অনুচ্ছেদের উপপাদ্য 1 থেকে আমরা জানি যে $\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$-এর নিবেশন $\chi^2(n - 1)$ নিবেশন হবে।

এখন $S^2 = \frac{\sigma^2}{n}\chi^2$, সম্ভাবনাশ্রয়ী চলের রূপান্তরের অনুষঙ্গী বাস্তব চলের অপেক্ষকটি হল

$$S^2 = \frac{\sigma^2}{n}\chi^2 \text{ যেখানে}$$

$$\frac{dS^2}{d\chi^2} = \frac{\sigma^2}{n} > 0, \text{ যে-কোনো } \chi^2\text{-এর মানের জন্যে।}$$

সুতরাং যদি $f_1(S^2)$ এবং $f_2(\chi^2)$ যথাক্রমে $S^2$ এবং $\chi^2$ এর ঘনত্ব অপেক্ষক হয় তাহলে আমরা পাই

$$f_1(S^2) = f_2(\chi^2) \left|\frac{d\chi^2}{dS^2}\right|।$$

$$\text{এখন } f_2(\chi^2) = \frac{e^{\frac{-\chi^2}{2}} \cdot \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}-1}}{2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \text{ যদি } \chi^2 > 0$$

$$= 0 \text{ অন্যত্র}$$

$$\text{সুতরাং } f_1(S^2) = \frac{e^{-\frac{nS^2}{2\sigma^2}}\left(\frac{nS^2}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{n}{\sigma^2}, \text{ যদি } S^2 > 0 \quad .......(4)$$

$$= 0 \text{ অন্যত্র।}$$

নমুনাঙ্ক $s^2$

যে-কোনো সমগ্রক থেকে নেওয়া $n$ আকারের সমসম্ভব নমুনার ক্ষেত্রে নমুনাঙ্ক $s^2$ এর সংজ্ঞা নীচে দেওয়া হল ঃ

$$s^2 = \frac{n}{n-1} S^2 \; (n > 1)$$

*EMT* 13 (পর্যায়-2) এর একক 9 তে দেখানো হয়েছে যে $s^2$ যে-কোনো সমগ্রকের ক্ষেত্রে সমগ্রক ভেদমান $\sigma^2$ এর খুব উৎকৃষ্ট প্রাক্‌কলনীমান (very good estimate) হবে।

এখন নর্মাল $(m, \sigma)$ সমগ্রকের ক্ষেত্রে আমরা সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $s^2$ এর ঘনত্ব অপেক্ষক নির্ণয় করব।

$s^2 = \frac{n}{n-1} S^2$-এর বাস্তব চলের রূপান্তরটি হল $s^2 = \frac{n}{n-1}S^2$ যেখানে $\frac{ds^2}{dS^2} = \frac{n}{n-1} > 0$, $S^2$ এর যে-কোনো মানের জন্য।

তাহলে $s^2$-এর ঘনত্ব অপেক্ষক $\phi_1(s^2)$ হলে আমরা পাই

$\phi_1(s^2) = f_1(s^2)\left|\frac{dS^2}{ds^2}\right|$ যেখানে (4) থেকে $S^2$-এর ঘনত্ব অপেক্ষক $f_1(S^2)$ পাওয়া যায়।

$$\text{সুতরাং } \phi_1(s^2) = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(s^2\right)^{\frac{n-3}{2}} e^{\frac{-(n-1)s^2}{2\sigma^2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \text{ যদি } s^2 > 0$$

$$= 0 \text{ অন্যত্র।}$$

উপপাদ্য **2.** নর্মাল $(m, \sigma)$ সমগ্রকের ক্ষেত্রে $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-m)}{s}$ এই নমুনাঙ্কের নমুনাজ নিবেশন হবে $n-1$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত $t$-নিবেশন যেখানে $s^2 = \dfrac{n}{n-1} S^2$, $\bar{x}$ হল নমুনালব্ধ গড়, $S^2$ নমুনা ভেদমান এবং $n(>1)$ হল নমুনার আকার।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক সমসম্ভব নমুনা (random sample) হলে $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$। তাহলে নমুনালব্ধ গড় $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}$। এখন $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-m)}{s}$-এর অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চল হল $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-m)}{s}$, যেখানে $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}$, $s^2 = \dfrac{n}{n-1} S^2$ এবং $X_1$, $X_2$, ....... $X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ নর্মাল $(m, \sigma)$ চল।

8.2 অনুচ্ছেদের উপপাদ্য 1 এর অনুসিদ্ধান্ত থেকে আমরা জানি যে

$\dfrac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ একটি নর্মাল (0, 1) চল।

ধরুন $U = \dfrac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $Y = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-m)}{s}$

$$\text{তাহলে } Y = \frac{\dfrac{X-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\dfrac{n}{n-1}\dfrac{S^2}{\sigma^2}}}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{n-1}}}$$

যেখানে $V = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ -এর নিবেশন $n - 1$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত $X^2$ নিবেশন (যা আগেই প্রমাণ করা হয়েছে)।

আবার $EMT$ 12 (পর্যায় 2) এর একক 14 তে উপপাদ্য III থেকে জানা যায় $S^2$, $\bar{X}$ অনপেক্ষ।

তাহলে $U = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ও $V = \frac{nS^2}{\sigma^2}$

অনপেক্ষ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল হবে।

সুতরাং আমরা পাই

$Y = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}}$ যেখানে $U$, $V$ যথাক্রমে নর্মাল (0, 1) এবং $\chi^2(n - 1)$ চল এবং $U$, $V$ অনপেক্ষ।

তাহলে EMT 12 (পর্যায় 2)-এর একক 14 তে 14·4 অনুচ্ছেদের উপপাদ্য অনুসারে $Y = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}}$ একটি $t$ চলক যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা $n - 1$। সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

## 8.4 উদাহরণমালা ঃ

1. নর্ম্যাল নিবেশন বিশিষ্ট সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$-এর গড় 68 সেমি. এবং সম্যক বিচ্যুতি (standard deviation) 2·5 সেমি.। $X$-এর সমগ্রক থেকে নেওয়া সমসম্ভব নমুনার আকার কত হলে নমুনা গড় ও সমগ্রক গড়ের পার্থক্য 1 সেমি. এর বেশি না হওয়ার সম্ভাবনা 0.95 হয়?

[দেওয়া আছে যে আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশনের সম্ভাবনা ঘনত্ব বক্ররেখার নীচে এবং 1·96 তে কোটির ডানদিকের ক্ষেত্রফল 0·025]

সমাধান ঃ নমুনা গড় $\bar{x}$ এর অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলকটি $\bar{X}$ হলে এবং নমুনার আকার $n$

হলে আমরা পাই $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}$ । এখানে সমগ্রক চল $X$ এর নিবেশন নর্মাল নিবেশন যার গড় 68 সেমি. এবং সম্যক বিচ্যুতি 2·5 সেমি।

সুতরাং $U = \dfrac{\bar{X} - 68}{\dfrac{2 \cdot 5}{\sqrt{n}}}$ ।

আদর্শ স্বাভাবিক চল (standard normal variate) হবে।

এখন $P\left(\left|\bar{X} - 68\right| \not> 1\right) = 0 \cdot 95$

বা, $P\left(\left|\bar{X} - 68\right| \leq 1\right) = 0 \cdot 95$

বা, $P\left(\left|\dfrac{\bar{X} - 68}{\dfrac{2 \cdot 5}{\sqrt{n}}}\right| \leq \dfrac{1}{\dfrac{2 \cdot 5}{\sqrt{n}}}\right)$

বা, $P\left(|U| \leq \dfrac{\sqrt{n}}{2 \cdot 5}\right) = 0 \cdot 95$

বা, $1 - P\left(|U| > \dfrac{\sqrt{n}}{2 \cdot 5}\right) = 0 \cdot 95$

বা, $P\left(|U| > \dfrac{\sqrt{n}}{2 \cdot 5}\right) = 0 \cdot 05$

সুতরাং, $P\left(U > \dfrac{\sqrt{n}}{2 \cdot 5}\right) = \dfrac{0 \cdot 05}{2} = 0 \cdot 025$

[আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশনের ক্ষেত্রে $P(U > a) = P(U < -a)$]

তাহলে ক্ষেত্রফলের যে মান দেওয়া আছে তার থেকে আমরা পাই

$$\frac{\sqrt{n}}{2 \cdot 5} = 1 \cdot 96$$

বা, $n = (2{\cdot}5 \times 1{\cdot}96)^2 = 24{\cdot}01 \simeq 24$

অতএব নমুনার আকার হবে 24।

2. কোন নর্মাল সমগ্রকের গড় ওই সমগ্রক থেকে নেওয়া 100 আকারের নমুনার নমুনাগড়ের সমক বিচ্যুতির সমান।

এই সমগ্রক থেকে নেওয়া 25 আকারের নমুনার গড় ঋণাত্মক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0{\cdot}3085\right]$$

সমাধান ঃ মনে করুন প্রদত্ত নর্মাল সমগ্রকের গড় $m$ এবং সমক বিচ্যুতি $\sigma$। তাহলে 100 আকারের নমুনার নমুনা গড়ের সমক ভ্রান্তি (standard error) হবে $\frac{\sigma}{\sqrt{100}} = \frac{\sigma}{10}$।

তাহলে প্রদত্ত শর্তানুসারে আমরা পাই $m = \frac{\sigma}{10}$।

মনে করুন 25 আকারের নমুনার নমুনাগড়ের অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি $\bar{X}$ তাহলে $\bar{X}$ একটি নর্ম্যাল $\left(m, \frac{\sigma}{5}\right)$ চল হবে।

সুতরাং $\dfrac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{5}}$ একটি নর্ম্যাল (0, 1) চল হবে।

এখন $P\left(\bar{X} < 0\right)$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{5}} < \frac{-m}{\frac{\sigma}{5}}\right)$$

$$= P\left(U < -\frac{1}{2}\right), \quad \left[\because\ m = \frac{\sigma}{10}\right]$$

$$= P\left(U > \frac{1}{2}\right), \quad \text{[প্রতিসাম্যের জন্য]}$$

আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশনের সারণি থেকে আমরা পাই $P\left(U > \frac{1}{2}\right) = 0{\cdot}3085$। সুতরাং নির্ণেয় সম্ভাবনার মান $0{\cdot}3085$।

## 8.5 সারাংশ ঃ

এই এককে নর্ম্যাল সমগ্রক থেকে চয়ন করা নমুনার ক্ষেত্রে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ নমুনাঙ্কের নমুনাজ নিবেশন নির্ণয় করা হয়েছে।

## 8.6 অনুশীলনী ঃ

1. নর্মাল $(m, 2)$ সমগ্রক থেকে নেওয়া 15 আকারের নমুনার গড় $\bar{x}$ হলে এবং অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি $\bar{X}$ হলে, $3(\bar{X} - m) \geq 4$ এই ঘটনাটির সম্ভাবনা নির্ণয় করুন ঃ

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\cdot 58} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 0{\cdot}4951\right]$$

2. একটি নর্মাল নিবেশনের গড়ের মান নির্ণয় করতে হবে। তার জন্যে যে নমুনা নেওয়া হয়েছে তার আকার এমন বড় যাতে নমুনার গড় ও সমগ্রক গড়ের পার্থক্য সমগ্রকের সমক বিচ্যুতির শতকরা 25 ভাগের বেশি না হবার সম্ভাবনা $0{\cdot}95$ হয়। নমুনাটি কত বড়?

3. নর্মাল $(m, \sigma)$ সমগ্রক থেকে নেওয়া $n$ আকারের সমসম্ভব নমুনার ভেদমান $S^2$-এর নমুনাজ নিবেশনের ভেদমান নির্ণয় করুন।

4. নর্মাল $(m, \sigma)$ সমগ্রক থেকে 25 আকারের সমসম্ভব নমুনা নেওয়া হয়েছে যেখানে $m = 30$, $\sigma = 4$। প্রমাণ করুন নমুনা গড়ের মান 25 ও 35 এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা $0{\cdot}99$ অপেক্ষা বেশি হবে।

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{4} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 0{\cdot}9999683\right]$$

5. একটি নর্ম্যাল সমগ্রকের গড় ও সমক বিচ্যুতি যথাক্রমে 0·1 এবং 2·1। এই সমগ্রক থেকে নেওয়া 900 আকারের সমসম্ভব নমুনার নমুনা গড়ের মান ঋণাত্মক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1\cdot 43}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = 0\cdot 0765\right]$$

## 8.7 উত্তরমালা ঃ

1. 0·0049
2. নমুনার মোটামুটি আকার 62।
3. $\dfrac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$।
5. 0·0765

### সহায়ক গ্রন্থাবলি


1. **Statistical Methods—N.G Das** [M. Das and Co.]
2. বাণিজ্যিক গণিত ও পরিসংখ্যান—ডঃ রণজিত ধর (টি. ডি. পাবলিকেশনস্ প্রাইভেট লিমিটেড)
3. সম্ভাবনার গাণিতিক তত্ত্ব ও তাহার প্রয়োগ—কালীপদ দাস (পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ)
4. **Ground Work of Mathematical Probability and Statistics** —Amritava Gupta [Acadamic Publishers]
5. Mathematical Statistics—**S. K. De and S. Sen** [U.N. Dhur and Sons. Private Ltd.]
6. রাশিবিজ্ঞানে অনুমিতিতত্ত—দিলীপ রায় (পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ)

**EMT - 13**

**পরিসংখ্যান বিদ্যা ও প্রয়োগ**

**পর্যায় - 2**

# একক 9 ☐ সমগ্রকের পূর্ণকাঙ্ক সমূহের প্রাক্কলন—বিন্দু প্রাক্কলন ও অন্তর প্রাক্কলন (Estimation of parameters of a population—Point Estimation and Interval Estimation)

গঠন



## 9 সমগ্রকের পূর্ণকাঙ্ক সমূহের প্রাক্কলন—বিন্দু প্রাক্কলন ও অন্তর প্রাক্কলন (Estimation of parameters of a population—Point Estimation and Interval Estimation)

## 9.1 প্রস্তাবনা

মনে করা যাক সমগ্রকের নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ এবং অনুসঙ্গী (Corresponding) সম্ভাবনাশ্রয়ী চলকটি $X$। এখন কোনো সমগ্রকের পূর্ণকাঙ্ক (parameter) বলতে কী বোঝায় তা একটি উদাহরণের সাহায্যে আমরা ব্যাখ্যা করব। যদি $X$ এর নিবেশন স্বাভাবিক নিবেশন (normal distribution) হয় তাহলে $X$ এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x)$ এর আকার হবে $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ যেখানে $-\infty < x < \infty$, $\sigma > 0$। এখানে $m$ ও $\sigma$ সংখ্যা দুটি যথাক্রমে নিবেশনটির গড় ও সমক পার্থক্য এই দুটি উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করে। $m$ ও $\sigma$ সংখ্যা দুটি সমগ্রকের দুটি পূর্ণকাঙ্ক যেখানে আমরা লক্ষ্য করছি যে $-\infty < m < \infty$, $\sigma > 0$ এই শর্তে $m$, $\sigma$ সংখ্যাদুটির যে-কোনো একটির বা উভয়ের

মান পরিবর্তন করলে বিভিন্ন স্বাভাবিক সমগ্রক (normal populations) পাওয়া যাবে। এখানে $m^2 + 3m + 2$, $7m - 8$, $2\sigma^3 + m$, $\sigma^2 + 6$ ইত্যাদি রাশিগুলিও স্বাভাবিক সমগ্রকের পূর্ণকাঙ্ক হবে।

অনেকক্ষেত্রে সমগ্রকের নিবেশন অপেক্ষকের functional form জানা থাকে কিন্তু সমগ্রকটির কয়েকটি পূর্ণকাঙ্কের মান অজ্ঞাত থাকে। এক্ষেত্রে সমগ্রক থেকে চয়ন করা সমসম্ভব নমুনার (random sample) সাহায্যে কীভাবে এই পূর্ণকাঙ্কগুলির মান উৎকৃষ্ট উপায়ে নির্ণয় করা যায় তা এই এককে আমরা আলোচনা করব। EMT 13-এর পর্যায় I-এ আমরা লক্ষ্য করেছি নমুনা গড় $\bar{x}$ এর মানকে সমগ্রক গড় $m$ এর আসন্ন মান ধরলে $\bar{x}$ কে বলা হবে $m$ এর একটি প্রাক্কলনীমান (estimate) এবং একটি বিশেষ নমুনা $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ -এর সাহায্যে এই আসন্নমানের উৎকৃষ্টতা বিচার করা সম্ভব নয়—

এখানে $\bar{x} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}$ এই সম্ভাবনাশ্রয়ী চলকের নিবেশনের সাহায্যে আসন্নমানের উৎকৃষ্টতা সম্বন্ধে ধারণা করা যায়।

কোনো সমগ্রকের অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-এর আসন্ন মান নির্ণয়ের জন্য $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ এই নমুনাঙ্ক (statistic) নির্বাচন করলে $f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ হবে $\theta$ র একটি প্রাক্কলনীমান। এরূপ প্রাক্কলনীমান নির্ণয়ের পদ্ধতিকে সমগ্রকের পূর্ণকাঙ্ক সমূহের প্রাক্কলন বলে।

'প্রাক্কলনীমান' এবং 'প্রাক্ কলনীমানের উৎকৃষ্টতা' এর অর্থ স্পষ্ট করে পরের অনুচ্ছেদে বলা হয়েছে।

## 9.2 প্রাক্কলনী মান ও প্রাক্কলক (Estimate and Estimator)

ধরা যাক $\theta$ কোনো সমগ্রকের একটি পূর্ণকাঙ্ক এবং $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ এই সমগ্রক থেকে চয়ন করা $n$ আকারের একটি সমসম্ভব নমুনা। মোটামুটিভাবে বলা যায় কোনো নমুনাঙ্ক $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-এর প্রাক্কলনীমান হবে যদি বোঝা যায় যে ভিন্ন ভিন্ন নমুনার জন্য $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ নমুনাঙ্কের মান ভিন্ন ভিন্ন হলেও অধিকাংশ ক্ষেত্রে যেন $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$-এর মান $\theta$-এর নিকটবর্তী হয়।

সুতরাং নমুনাঙ্ক $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$-এর নমুনাজ নিবেশনের (sampling distribution) সম্ভাবনা ভর যদি $\theta$-র প্রকৃত মানকে কেন্দ্র করে ঘনসন্নিবিষ্ট থাকে, তাহলে যে-কোনো নমুনার নমুনামানগুলির জন্য $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$-এর মান $\theta$-র প্রকৃত মানের নিকটে থাকার সম্ভাবনা খুব বেশি হবে এবং এই প্রকার নমুনাঙ্ক $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ কে বলা হয় $\theta$-র একটি প্রাক্কলনীমান। এক্ষেত্রে অনুসঙ্গী (corresponding) সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক $f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ কে বলা হয় $\theta$-র একটি প্রাক্কলক (estimator) যেখানে $f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$-এর সম্ভাবনা নিবেশন (probability distribution) থেকে $\theta$-র প্রাক্কলনীমান $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$-এর উৎকৃষ্টতা সম্বন্ধে ধারণা করা যাবে।

আমরা লক্ষ্য করছি যে $\theta$-র প্রাক্‌কলনীমান $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ এর উৎকর্ষের পরিমাপ (measure of goodness of estimate) $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$-এর নমুনাজ নিবেশনের সম্ভাবনা ভরের (probability mass) $\theta$-কেন্দ্রিক বিস্তৃতির পরিমাপের সঙ্গে ব্যস্তসমানুপাতিক এবং আমরা জানি যে এই বিস্তৃতির একটি পরিমাপ হল $\sqrt{E[(A-\theta)^2]}$ যেখানে $A = f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$।

সুতরাং একই পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-র জন্য ভিন্ন ভিন্ন প্রাক্‌কলনীমান নির্ণয় করা যেতে পারে যেখানে প্রাক্‌কলনীমানগুলির উপরোক্ত উৎকর্ষতার পরিমাপ্ ভিন্ন হতে পারে আবার অভিন্ন হতেও পারে।

একই পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-র দুটি প্রাক্‌কলনীমানের উৎকৃষ্টতা নিম্নলিখিত উপায়ে তুলনা করতে পারি ঃ

যদি $\theta$ পূর্ণকাঙ্কের $a_1 = f_1(x_1, x_3 \ldots\ldots x_n)$ এবং $a_2 = f_2(x_1, x_3, \ldots\ldots x_n)$ দুটি প্রাক্‌কলনীমান হয় এবং যদি $A_1 = f_1(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n), A_2 = f_2(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ অনুসঙ্গী (Corresponding) প্রাক্‌কলক হয় তাহলে প্রাক্‌কলনীমান $a_1$ প্রাক্‌কলনীমান $a_2$ অপেক্ষা উৎকৃষ্টতর হবে যখন $E[(A_1-\theta)^2] < E[(A_2-\theta)^2]$ হয়। [নমুনাঙ্ক (statistic) ও নমুনাজ নিবেশন (sampling distribution)-এর ধারণার জন্য EMT-13-এর পর্যায় I দেখুন।]

## 9.3 বিন্দু প্রাক্‌কলন ও অন্তর প্রাক্‌কলন (Point estimation and Interval estimation)

যদি একটিমাত্র নমুনাঙ্ক $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ ঠিক করে তাকে কোনো সমগ্রকের কোনো পূর্ণকাঙ্ক $\theta$ এর প্রাক্‌কলনীমানরূপে ব্যবহার করা হয় তাহলে $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ কে বিন্দু প্রাক্‌কলনী মান (point estimate) বলে এবং অনুসঙ্গী (corresponding) প্রাক্ কলক $f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ কে বিন্দু প্রাক্‌কলক (point estimator) বলে। তাহলে 9.2 অনুচ্ছেদে "প্রাক্‌কলনী মান" বলতে বিন্দু প্রাক্ কলনীমানকেই বোঝানো হয়েছে। কিন্তু কোনো বিন্দু প্রাক্‌কলনীমানকে পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-র আসন্নমান রূপে গ্রহণ করলে ব্যবহারিক দিক থেকে কতটা ভুল হল ($\theta$ অজ্ঞাত থাকায়) তার কোনো ধারণা করা যায় না। আমরা যদি তার বদলে দুটি প্রাক্‌কলক $A = f_1(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n), B = f_2(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ এমনভাবে নির্ণয় করি যাতে $(A, B)$ এই অন্তরের (interval) মধ্যে $\theta$ থাকবার সম্ভাবনা (যা দেওয়া থাকবে) খুবই প্রবল, ধরা যাক 0·95, তাহলে আমাদের ব্যবহারিক প্রয়োগের দিক থেকে ঝুঁকি অনেক কমে যায়। এক্ষেত্রে $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী নমুনার ক্ষেত্রে $a = f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n), b = f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$, ধরলে $(a, b)$ অন্তরকে $\theta$ পূর্ণকাঙ্কের একটি একটি আস্থা অন্তর (confidence interval) বলে এবং অনুসঙ্গী অন্তর $(A, B)$ কে $\theta$-এর একটি অন্তর প্রাক্‌কলক (interval estimator) বলে।

সমগ্রকের কোনো পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-এর বিন্দু প্রাক্‌কলনীমান নির্ণয়ের সমস্যাকে বিন্দু প্রাক্‌কলন (point estimation) এবং আস্থা অন্তর নির্ণয়ের সমস্যাকে অন্তর প্রাক্‌কলন (interval estimation) বলে। একক 11 তে অন্তর প্রাক্‌কলন সম্বন্ধে বিশদ্‌ভাবে আলোচনা করা হয়েছে। এখন থেকে কোনো পূর্ণকাঙ্কের প্রাক্‌কলনীমান বললে আমরা বিন্দু প্রাক্‌কলনীমান এবং প্রাক্‌কলক বলতে বিন্দু প্রাককলক বোঝাবো।

এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে প্রাক্‌কলক (estimator) হল একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চল (random variable) যার নির্দিষ্ট নমুনায় প্রাপ্ত বিশেষ মানই হল প্রাক্‌কলনীমান (estimate)। আমরা আগেই উল্লেখ করেছি যে একই পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-এর জন্য বিভিন্ন প্রাক্‌কলক নির্ণয় করা যায়। তাহলে প্রশ্ন হচ্ছে, আমরা কোনও পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-এর প্রাক্‌কলনের জন্যে একাধিক প্রাক্‌কলকের মধ্যে কোন্ প্রাক্‌কলকটি বেছে নেব। এর জন্য আমাদের দেখা দরকার উৎকৃষ্ট প্রাক্‌কলকের কী কী ধর্ম বাঞ্ছনীয়, যে ধর্মগুলি থেকে প্রাক্‌কলকটির উৎকৃষ্টতা সম্বন্ধে ধারণা করা যায়।

প্রাক্‌কলকের উৎকৃষ্টতা নির্ণয় করতে সাহায্য করবে এমন কয়েকটি বাঞ্ছনীয় ধর্ম হল—

(i) পক্ষপাতশূন্যতা (Unbiasedness)

(ii) সামঞ্জস্য (Consistency)

(iii) দক্ষতা (Efficiency)

(iv) পর্যাপ্ততা (Sufficiency)

আমরা এখানে কেবলমাত্র প্রাক্‌কলকের পক্ষপাতশূন্যতা ও সামঞ্জস্য নিয়ে আলোচনা করব।

## 9.4 প্রাক্‌কলনীমানের পক্ষপাতশূন্যতা (Unbiasedness) ও সামঞ্জস্য (Consistency)

ধরা যাক, কোনো সমগ্রকের সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি (population random variable) হল $X$ এবং $\theta$ এই সমগ্রকের একটি অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্ক (unknown parameter)।

মনে করুন এই সমগ্রক থেকে $n$ আকারের একটি সমসম্ভব নমুনা (random sample) ($x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$) নেওয়া হল।

[সমগ্রক ও সমসম্ভব নমুনা—এগুলির স্পষ্ট ধারণার জন্য EMT-13-এর পর্যায় 1 দেখুন।]

$f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ নমুনাঙ্ককে অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-এর একটি পক্ষপাতশূন্য (unbiased) প্রাক্‌কলনীমান (estimate) বলা হবে যদি $E(A) = \theta$ হয় যেখানে $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$-এর অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি (estimator) $A = f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$।

[অজ্ঞাত $\theta$-এর মান যাই হোক না কেন, $E(A) = \theta$ হতে হবে।]

এক্ষেত্রে $f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটিকে $\theta$ এর একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্‌কলক (unbiased estimator) বলা হয়। এখানে মনে রাখা প্রয়োজন যে $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ (mutually independent) চল যাদের প্রত্যেকের নিবেশন অপেক্ষক (distribution function) সমগ্রক চল $X$ এর নিবেশন অপেক্ষকের সমান।

কোনো নমুনাঙ্ক (statistic) $f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n)$ কে অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-এর একটি সমঞ্জস প্রাক্‌কলনীমান (consistent estimate) বলা হয়, যদি $\theta$-এর মান যাই হোক না কেন, $n \to \infty$ হলে

$A \xrightarrow[\text{in p}]{} \theta$ হয় যেখানে $A = f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ হল অনুসঙ্গী প্রাক্‌কলক। অর্থাৎ যে-কোনো পূর্বনির্দিষ্ট $\in (> 0)$-এর জন্য $\lim_{n \to \infty} P(|A - \theta| < \in) = 1$

বা তুল্যভাবে $\lim_{n \to \infty} P(|A - \theta| \geq \in) = 0$

এক্ষেত্রে প্রাক্‌কলক $f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ কে $\theta$-এর একটি সমঞ্জস প্রাক্‌কলক (consistent estimator) বলা হয়।

যদি প্রাক্ কলনীমান $a = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ এরূপ হয় যে $E(A) \neq \theta$ যেখানে $A = f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$, তাহলে প্রাক্‌কলনীমান a কে পক্ষপাতদুষ্ট (biased) প্রাক্‌কলনীমান বলা হয়। এখানে $E(A) - \theta$ এর মানকে প্রাক্‌কলনীমান a এর পক্ষপাত (bias) বলা হয়।

কোনো প্রাক্‌কলনীমানকে ধনাত্মক পক্ষপাতদুষ্ট (positively biased) অথবা ঋণাত্মক পক্ষপাতদুষ্ট (negatively biased) বলা হয় যদি ওই প্রাক্‌কলনীমানের পক্ষপাত যথাক্রমে ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হয়।

## সমঞ্জস প্রাক্‌কলনীমানের তাৎপর্য

সমঞ্জস প্রাক্‌কলনীমানের সংজ্ঞা থেকে দেখা যাচ্ছে যে যদি $a = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n)$ নমুনাঙ্ক (statistic) $\theta$ পূর্ণকাঙ্কের সুসমঞ্জস প্রাক্‌কলনীমান হয় তাহলে $n \to \infty$ হলে, $A \xrightarrow[\text{in p}]{} \theta$ হবে [$A = f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$] অর্থাৎ প্রত্যেক পূর্ব নির্দিষ্ট $\in (>0)$ এর জন্য $\lim_{n \to \infty} P(|A - \theta| < \in) = 1$ হবে। তাহলে $\in$ এর মান যথেষ্ট ছোট ধরে আমরা বলতে পারি "নমুনার আকার $n$ উপযুক্ত খুব বড় সংখ্যা নিয়ে $|A - \theta|$ এর মান যদৃচ্ছভাবে ছোট হওয়ার সম্ভাবনার মানকে 1 এর যথেষ্ট কাছে আনা যায় অর্থাৎ প্রাক্‌কলক $A$ এর মান $\theta$-র খুব কাছে থাকার সম্ভাবনা খুবই প্রবল হয়।"

## পক্ষপাতশূন্যতা ও সামঞ্জস্য সংক্রান্ত কয়েকটি উপপাদ্য ঃ

**উপপাদ্য I ঃ নমুনালব্ধ গড় সমগ্রক গড়ের একটি পক্ষপাতশূন্য এবং সমঞ্জস প্রাক্‌কলনী মান।**

**প্রমাণ ঃ** সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$ এর সমগ্রক থেকে একটি $n$ আয়তনের নমুনা গ্রহণ করা হল। ধরা যাক, নমুনাটি $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ এবং $m$ হল সমগ্রকের গড়। নমুনা লব্ধ গড় $\bar{x}$ হলে, $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}$, $\bar{x}$ এর অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি $\overline{X}$ হলে,

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}।$$

এক্ষেত্রে $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n$ চলগুলির নিবেশন $X$-এর নিবেশনের সমান। $E(X_1), E(X_2), \ldots\ldots, E(X_n)$ গুলির অস্তিত্ব আছে এবং এরা প্রত্যেকে $E(X) = m$ এর সমান।

অতএব, $E(\overline{X})$ এরও অস্তিত্ব আছে এবং

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= \frac{1}{n}[E(X_1) + E(X_2) + \ldots\ldots + E(X_n)] \\ &= \frac{1}{n}[m + m + \ldots\ldots + m] \\ &= \frac{1}{n}(nm) = m \end{aligned}$$

সুতরাং $\overline{X}$ সমগ্রকের গড় $m$ এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক এবং $\bar{x}$ হল $m$ এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলনী মান।

দ্বিতীয় ভাগ ঃ ধরা যাক, সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$ এর সমক বিচ্যুতির ($\sigma$) অস্তিত্ব বর্তমান। ধরি, $\in (> 0)$ একটি প্রদত্ত বাস্তব সংখ্যা।

যেহেতু, $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ (independent) এবং প্রত্যেকের নিবেশন $X$-এর নিবেশনের সমান ; অতএব আমরা লিখতে পারি যে,

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(\overline{X}) &= \operatorname{Var}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2}[\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n)] \\ &= \frac{1}{n^2}[\operatorname{Var}(X_1) + \operatorname{Var}(X_2) + \ldots\ldots + \operatorname{Var}(X_n)] \\ &= \frac{1}{n^2}[\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(X) + \ldots\ldots + \operatorname{Var}(X)] \\ &= \frac{1}{n^2}[n\sigma^2] = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

আবার আমরা জানি যে, $E(\overline{X}) = m$।

সুতরাং, চেবিশেভের অসমতা (Tchebycheff's inequality) থেকে পাই,

$$P\left(|\overline{X} - m| \geq \in\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\in^2}$$

এবং আমরা জানি $P\left(|\overline{X} - m| \geq \in\right) \geq 0$

একত্রে লিখলে পাই,

$$0 \leq P\left(|\overline{X} - m| \geq \in\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\in^2}$$

আবার, $\lim_{n \to \infty} \frac{\sigma^2}{n\in^2} = 0$

সুতরাং আমরা লিখতে পারি যে,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X} - m| \geq \in\right) = 0$$

(প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা $\in > 0$-এর জন্য)

অতএব, $\overline{X} \xrightarrow[\text{in p}]{} m$ যখন $n \to \infty$।

সুতরাং, $\overline{X}$ সমগ্রক গড় $m$ এর সমঞ্জস প্রাক্কলক এবং $\bar{x}$ হল $m$ এর সমঞ্জস প্রাক্কলনী মান।

উপপাদ্য II ঃ নমুনালব্ধ $k$ তম পরিঘাত $a_k$ সমগ্রক পরিঘাত $\alpha_k$ এর পক্ষপাতশূন্য এবং সমঞ্জস প্রাক্কলন মান (যদি $\alpha_k$ এর অস্তিত্ব থাকে)।

প্রমাণ ঃ $X$ একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চল যার সমগ্রক থেকে একটি $n$ আয়তনের সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ গ্রহণ করা হল।

নমুনালব্ধ পরিঘাত $a_k = \dfrac{x_1{}^k + x_2{}^k + \ldots\ldots x_n{}^k}{n}$ এর অনুষঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি হল,

$$A_k = \frac{X_1{}^k + X_2{}^k + \ldots\ldots + X_n{}^k}{n}$$

যেখানে, $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল এবং প্রত্যেকের নিবেশন $X$ এর নিবেশনের সমান।

এখন যদি, $E(X^k)$ এর অস্তিত্ব থাকে এবং $E(X^k) = \alpha_k$ হয় তবে $E(X_1{}^k) = E(X_2{}^k) = \ldots\ldots = E(X_n{}^k) = \alpha_k$।

$$E(A_k) = E\left(\frac{X_1{}^k + X_2{}^k + \ldots\ldots + X_n{}^k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}(\alpha_k + \alpha_k + \ldots\ldots + \alpha_k)$$

$$= \alpha_k$$

সুতরাং, $A_k$, সমগ্রক পরিঘাত $\alpha_k$-এর একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক এবং $a_k$, $\alpha_k$ এর প্রাক্কলনী মান।

পুনরায়, $X_1{}^k, X_2{}^k, \ldots\ldots, X_n{}^k$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চলগুলির নিবেশন $X^k$ এর নিবেশনের সমান এবং চলগুলির পরস্পর অনপেক্ষ এবং $E(X^k)$ এর অস্তিত্ব বর্তমান ও $E(X^k) = \alpha_k$।

বৃহৎ সংখ্যাবিধি (Law of Large numbers) থেকে লিখতে পারি যে,

$$\frac{X_1{}^k + X_2{}^k + \ldots\ldots + X_n{}^k}{n} \xrightarrow[\text{inp}]{} \alpha_k \qquad \text{যখন } n \to \infty$$

সুতরাং, $A_k \xrightarrow[\text{inp}]{} \alpha_k$ যখন $n \to \infty$।

অতএব, $A_k$, $\alpha_k$ এর সমঞ্জস প্রাক্কলক এবং $a_k$, $\alpha_k$ এর সমঞ্জস প্রাক্কলনী মান।

উপপাদ্য III : নমুনালব্ধ ভেদমান $S^2$, সমগ্রক ভেদমান $\sigma^2$ এর একটি সমঞ্জস প্রাক্কলনী মান কিন্তু পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলনী মান নয়।

প্রমাণ : ধরা যাক, $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ সমগ্রক থেকে গৃহীত একটি $x$ আয়তনের সমসম্ভব নমুনা। নমুনালব্ধ ভেদমান $S^2$ হলে,

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(xi - \bar{x}\right)^2$$

যেখানে, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$

নমুনালব্ধ ভেদমান এর অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি হবে,

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Xi - \overline{X})^2$$

যেখানে, $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

এবং $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ হল পরস্পর অনপেক্ষ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল এবং প্রত্যেকের নিবেশনই সমগ্রকের সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$ এর নিবেশনের সমান।

$S^2$ কে আমরা লিখতে পারি যে,

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\overline{X}\right)^2$$

যেহেতু $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ, সুতরাং $X_1^2, X_2^2, \ldots\ldots, X_n^2$ পরস্পর অনপেক্ষ হবে।

আবার $X_1^2, X_2^2, \ldots\ldots X_n^2$ এর নিবেশন $X^2$ এর নিবেশনের সমান।

অতএব, $E(X_1^2) = E(X_2^2) = \ldots\ldots = E(X_n^2) = E(X^2) = \alpha_2$

যেখানে, $\alpha_2$ হল দ্বিতীয় সমগ্রক পরিঘাত।

(যেহেতু Var $(X) = \sigma^2$ এর অস্তিত্ব বর্তমান সেই কারণে $\alpha_2$-এর অস্তিত্ব বর্তমান।)

সুতরাং বৃহৎ সংখ্যা বিধি থেকে পাই,

$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots\ldots X_n^2}{n} \xrightarrow[\text{inp}]{} \alpha_2$ যখন $n \to \infty$ এবং $\frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}$ $\xrightarrow[\text{inp}]{} m$ যখন $n \to \infty$ যেখানে, $m = E(X)$, সমগ্রক গড়।

সুতরাং আমরা পেলাম,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[\text{inp}]{} \alpha_2 \quad \text{যখন } n\to\infty$$

এবং $\overline{X} \xrightarrow[\text{in p}]{} m$ যখন $n\to\infty$

এবং তাহলে, $\left(\overline{X}\right)^2 \xrightarrow[\text{in p}]{} m^2$ যখন $n\to\infty$

অতএব আমরা লিখতে পারি যে,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2-\left(\overline{X}\right)^2 \xrightarrow[\text{in p}]{} \alpha_2-m^2$$

যখন $n\to\infty$

অথবা, $S^2 \xrightarrow[\text{in p}]{} \sigma^2$ যখন $n\to\infty$

যেহেতু $\alpha_2-m^2=\sigma^2$

অতএব $S^2$, সমগ্রক ভেদমান $\sigma^2$ এর সমঞ্জস প্রাক্কলক এবং $S^2$ সমগ্রক ভেদমান $\sigma^2$ এর সমঞ্জস প্রাক্কলন মান।

এখন দেখা যায় যে,

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X\mathrm{i}-\overline{X})^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X\mathrm{i}-m+m-\overline{X}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Xi-m)^2+\left(m-\overline{X}\right)^2-\frac{2}{n}\left(\overline{X}-m\right)\sum_{i=1}^{n}(X\mathrm{i}-m)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X\mathrm{i}-m)^2+\left(m-\overline{X}\right)^2-\frac{2}{n}\left(\overline{X}-m\right)n\left(\overline{X}-m\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X\mathrm{i}-m)^2+\left(\overline{X}-m\right)^2-2\left(\overline{X}-m\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X\mathrm{i}-m)^2-\left(\overline{X}-m\right)^2$$

এখন, $E(S)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[(X_i-m)^2\right]-E\left[\left(\overline{X}-m\right)^2\right]$

এক্ষেত্রে, $E[(X_1 - m)^2] = E[(X_2 - m)^2] = \dots\dots\dots$

$$= E[(X_n - m)^2] = E[(X - m)^2] = \sigma^2$$

এবং $E\left[\left(\overline{X} - m\right)^2\right] = \text{Var}\left(\overline{X}\right)$

যেহেতু $E\left(\overline{X}\right) = m$

অতএব, $\text{Var}\left(\overline{X}\right) = \text{Var}\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots\dots + X_n}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n^2}[\text{Var}\, X_1 + \text{Var}\, X_2 + \dots\dots + \text{Var}\, X_n]$$

(যেহেতু, $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ)

$$= \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

সুতরাং $E(S^2) = \frac{1}{n}(n\sigma^2) - \frac{\sigma^2}{n}$

$$= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

অতএব, $S^2$ সমগ্রকের ভেদমান $\sigma^2$-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক নয় এবং $S^2$ সমগ্রকের ভেদমান $\sigma^2$ এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলনী মান নয়। প্রাক্কলনী মানের পক্ষপাত এর মান—

$$E(S^2) - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n} \quad (\sigma > 0)$$

এক্ষেত্রে, প্রাক্কলনী মানটি ঋণাত্মকভাবে পক্ষপাতদুষ্ট।

**সমগ্রকের ভেদমান $\sigma^2$ এর একটি পক্ষপাত শূন্য এবং সমঞ্জস প্রাক্কলনী মান :**

$\sigma^2$ এর একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলনী মান হিসাবে নমুনাঙ্ক $s^2$ গ্রহণ করলে

যেখানে, $\quad s^2 = \frac{n}{n-1}S^2 \quad (n > 1)$

দেখা যায়,

$$E(s^2) = \frac{n}{n-1}E(S^2)$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

সুতরাং $s^2$, $\sigma^2$ এর একটি পক্ষপাতমূলক প্রাক্কলক।

আমরা জানি যে, $S^2 \xrightarrow[\text{in p}]{} \sigma^2$ যখন $n \to \infty$।

ধরি $X_0$ একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চল যার বর্ণালী (Spectrum)-তে কেবলমাত্র একটি বিন্দু আছে তা হল $\frac{n}{n-1}$.

এখন যেহেতু $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$

সুতরাং, $X_0 \xrightarrow[\text{in p}]{} 1$ যখন $n\to\infty$

আমরা লিখতে পারি যে,

$$X_0 S^2 \xrightarrow[\text{in p}]{} 1 \,.\, \sigma^2 \quad \text{যখন } n\to\infty$$

অথবা, $\frac{n}{n-1} S^2 \xrightarrow[\text{in p}]{} \sigma^2$ যখন $n\to\infty$

অতএব, $s^2 \xrightarrow[\text{in p}]{} \sigma^2$ যখন $n\to\infty$

সুতরাং, $s^2$, $\sigma^2$ এর একটি পক্ষপাতশূন্য এবং সমঞ্জস প্রাককলনী মান।

## 9.5 উদাহরণমালা ঃ

1. প্রমাণ করুন যে, যদি নমুনাঙ্ক $t$ পূর্ণকাঙ্ক $\theta$ এর একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্‌কলনী মান হয়, তবে $t^2$, $\theta^2$ এর একটি পক্ষপাতদুষ্ট প্রাক্‌কলনী মান। যদি নমুনাঙ্ক $t$ পূর্ণকাঙ্ক $\theta$ এর একটি সমঞ্জস প্রাক্‌কলনী মান হয় তবে $t^2$, $\theta^2$-এর একটি সমঞ্জস প্রাক্‌কলনী মান।

সমাধান ঃ ধরা যাক, $T$, $t$ নমুনাঙ্কের সাপেক্ষে গৃহীত সম্ভাবনাশ্রয়ী চল। যদি, $t$, $\theta$ এর পক্ষপাতশূন্য প্রাককলনী মান হয়, $E(T) = \theta$ হবে।

$$\begin{aligned} E\left[(T-\theta)^2\right] &= E(T^2 - 2\theta T + \theta^2) \\ &= E(T^2) - 2\theta E(T) + \theta^2 \\ &= E(T^2) - 2\theta^2 + \theta^2 \\ &= E(T^2) - \theta^2 \end{aligned}$$

এখন যেহেতু, $E\left[(T-\theta)^2\right] \geq 0$

সুতরাং, $E(T^2) - \theta^2 \geq 0$

$E(T^2) = \theta^2$ একমাত্র তখনই সম্ভব যখন $E\left[(T-\theta)^2\right] = 0$ হয় এবং এই সম্পর্কটি সত্য হলে $T$ এর স্পেকট্রাম-এর কেবলমাত্র একটি মান আছে তা হল $\theta$ যা একটি তুচ্ছ ঘটনা। সুতরাং আমরা ধরে নিতে পারি যে,

$$E\left[(T-\theta)^2\right] > 0$$

সুতরাং $\quad E(T^2) > \theta^2$

অর্থাৎ, $t^2$, $\theta^2$ এর একটি পক্ষপাতদুষ্ট প্রাক্কলনী মান $\left(E(T^2) \neq \theta^2\right)$।

এখন, প্রশ্নানুসারে, $t$, $\theta$ এর সমঞ্জস প্রাক্কলনী মান।

অর্থাৎ, $T \xrightarrow[\text{in p}]{} \theta$ যখন $n \to \infty$ যেখানে, $n$ হল গৃহীত নমুনার আয়তন।

সুতরাং $T - \theta \xrightarrow[\text{in p}]{} 0$ যখন $n \to \infty$

ধরা যাক, $\varepsilon (> 0)$ প্রদত্ত একটি সংখ্যা।

এখন, $\quad P\left[(T - \theta)^2 \geq \varepsilon\right]$

$$= P\left[|T - \theta| \geq \sqrt{\varepsilon}\right]$$

$$\lim_{n \to \infty} P\left[|T - \theta| \geq \sqrt{\varepsilon}\right] = 0$$

$(\because\ T \xrightarrow[\text{in p}]{} \theta$ যখন $n \to \infty)$

সুতরাং, $\lim_{n \to \infty} P\left[(T - \theta)^2 \geq \varepsilon\right] = 0$

$\therefore\ (T - \theta)^2 \xrightarrow[\text{in p}]{} 0$ যখন $n \to \infty$

এখন, $\quad T^2 = (T - \theta + \theta)^2$

$$= (T - \theta)^2 + 2\theta(T - \theta) + \theta^2$$

উপরোক্ত সম্পর্কগুলির সাহায্যে পাই,

$$T^2 \xrightarrow[\text{in p}]{} 0 + 0 + \theta^2 \text{ যখন } n \to \infty$$

অথবা, $\quad T^2 \xrightarrow[\text{in p}]{} \theta^2$ যখন $n \to \infty$

অতএব, $t^2$, $\theta^2$ এর সমঞ্জস প্রাক্কলনী মান।

2. যদি নর্ম্যাল সমগ্রক $(\mu, 1)$ থেকে নেওয়া $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ একটি সমসম্ভব নমুনা (random sample) হয়, তাহলে দেখান যে $t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ নমুনাঙ্ক (statistic), $\mu^2 + 1$ এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলনী মান (unbiased estimate) হবে।

সমাধান : $t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ এই নমুনাঙ্কের অনুসঙ্গী (corresponding) সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি $T$ ধরলে আমরা পাই,

$T = \frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \ldots\ldots + X_n^2)$ যেখানে $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ নর্ম্যাল $(\mu, 1)$ চল।

নর্ম্যাল $(\mu, 1)$ নিবেশনের ক্ষেত্রে আমরা জানি $E(X) = \mu$ এবং $\text{var}(X) = 1$ অর্থাৎ $E(X^2) - [E(X)]^2 = 1$

এখানে অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি $X$। তাহলে এক্ষেত্রে $E(X)^2 = 1 + \mu^2$ এবং $E(X) = \mu$। সুতরাং $E(X_1^2) = E(X_2^2) = \ldots\ldots = E(X_n^2) = E(X^2) = \mu^2 + 1$।

তাহলে $$E(T) = \frac{1}{n}[E(X_1^2) + E(X_2^2) + \ldots\ldots + E(X_n^2)]$$

$$= \frac{1}{n}\left[(\mu^2 + 1) + (\mu^2 + 1) + \ldots\ldots + (\mu^2 + 1)\right]$$

$$= \frac{n(\mu^2 + 1)}{n} = \mu^2 + 1$$

অতএব $T$, $\mu^2 + 1$ এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক এবং $t\left(= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$, $\mu^2 + 1$-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলনীমান হবে।

## 9.6 সারাংশ

এই এককে পরিসংখ্যান বিদ্যার বিন্দু প্রাক্কলন বিষয়ে প্রাথমিক ধারণা দেওয়া হয়েছে। বিন্দু প্রাক্কলনীমানের 'পক্ষপাতশূন্যতা' ও 'সামঞ্জস্য' এই দুটি বাঞ্ছনীয় ধর্ম সম্বন্ধে বিশেষভাবে আলোচনা করা হয়েছে এবং এই দুটি ধর্ম সম্পর্কিত কয়েকটি উপপাদ্য প্রমাণ করা হয়েছে।

## 9.7 অনুশীলনী

1. যদি $t = t(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$, সমগ্রক পূর্ণকাঙ্ক $\theta$ এর সমঞ্জস (consistent) প্রাক্কলনীমান হয় তাহলে দেখান যে $\frac{n}{n+1}t$ এই নমুনাঙ্কটিও $\theta$ এর সমঞ্জস প্রাক্কলনী মান হবে।

2. দ্বিপদ $(1, \theta)$ সমগ্রক থেকে $n$ আকারের একটি সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ নেওয়া হয়েছে যেখানে $0 < \theta < 1$। যদি $t = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$ হয় তবে দেখান যে $\frac{t(t-1)}{n(n-1)}$ নমুনাঙ্কটি, $\theta^2$-এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলনীমান হবে।

3. মনে করুন কোনো সমগ্রক পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-এর একটি প্রাক্কলক $A_n = f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$। যদি $\lim_{n\to\infty} E(A_n) = \theta$ এবং $\lim_{n\to\infty} \text{Var}\, A_n = 0$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $A_n$, $\theta$ এর সমঞ্জস প্রাক্কলক (consistent estimator)।

4. কোনো নর্ম্যাল সমগ্রকের গড় (mean) এবং সমক বিচ্যুতি (standard deviation) যথাক্রমে 0 ও $\sigma$। দেখান যে $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n}$, $\sigma^2$ এর পক্ষপাতশূন্য প্রাক্‌কলনী মান হবে। অনুসঙ্গী প্রাক্‌কলক $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{n}$ এর ভেদমান (variance) নির্ণয় করুন এবং এর থেকে দেখান যে $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n}$ নমুনাঙ্কটি $\sigma^2$ এর সমঞ্জস প্রাক্‌কলনীমান হবে।

5. যদি সমগ্রক পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-র পরস্পর অনপেক্ষ তিনটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্‌কলক $T_1, T_2, T_3$ হয় যেখানে $\mathrm{Var}(T_1) : \mathrm{Var}(T_2) : \mathrm{Var}(T_3) = 2 : 3 : 5$, তাহলে বিচার করে দেখুন $\frac{1}{4}(2T_1 + T_2 + T_3)$, $\frac{1}{4}(T_1 + 2T_2 + T_3)$, $\frac{1}{4}(T_1 + T_2 + 2T_3)$ এই প্রাক্‌কলকগুলির কোন্‌টি উৎকৃষ্টতম?

## 9.8 উত্তরমালা

5. $\frac{1}{4}(2T_1 + T_2 + T_3)$

# একক 10 ☐ বিন্দু প্রাক্কলনীমান নির্ণয়ের পদ্ধতি (Method of finding point estimates)

গঠন :



## 10.1 প্রস্তাবনা

সমগ্রকের কোনও পূর্ণকাঙ্কের জন্য কোনও প্রাক্কলক (estimator) ঠিক করলে তার উৎকৃষ্টতার বাঞ্ছনীয় ধর্মগুলি কীভাবে পরীক্ষা করা যায় তা আমরা একক 9-এ আলোচনা করেছি। কিন্তু এই প্রাক্কলকগুলি কী ভাবে পাওয়া যায়? কোনও পূর্ণকাঙ্কের নির্ণয় করার কোনও পদ্ধতি আছে কি? রাশিবিজ্ঞানীরা এখনও এমন কোনও পদ্ধতি পাননি যার সাহায্যে প্রতি ক্ষেত্রেই দক্ষতম প্রাক্কলক (most efficient estimator) নির্ণয় করা যায়। এর ফলে প্রাক্কলনীমান নির্ণয়ের একাধিক পদ্ধতি পাওয়া যায়। এই পদ্ধতিগুলির মধ্যে অন্যতম পদ্ধতি হল 'গরিষ্ঠ আশংসামান পদ্ধতি' যে পদ্ধতিতে পাওয়া প্রাক্কলকের মধ্যে উৎকৃষ্ট প্রাক্কলকের বাঞ্ছনীয় ধর্ম থাকে।

আমরা এই এককে প্রাক্কলনীমান নির্ণয়ের কেবলমাত্র "গরিষ্ঠ আশংসামান পদ্ধতি" নিয়ে আলোচনা করব।

## 10.2 গরিষ্ঠ আশংসামান পদ্ধতি (Maximum Likelihood Method)

ধরা যাক, সমগ্রকের নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ যার অপেক্ষকীয় আকার (functional form) জানা আছে কিন্তু নিবেশন অপেক্ষকের কয়েকটি অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্ক (unknown parameters) আছে। মনে করুন এই অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্কগুলি হল $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k$। আমাদের প্রদত্ত সমসম্ভব নমুনা [random sample] $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ এর ভিত্তিতে পূর্ণকাঙ্কগুলির প্রাক্কলনীমান নির্ণয় করতে হবে। আমরা এক্ষেত্রে গরিষ্ঠ আশংসা প্রাক্কলন পদ্ধতির (Method of maximum likelihood estimation) সাহায্য নেব। এই পদ্ধতিতে প্রথমে একটি অপেক্ষক নির্ণয় করতে হবে যাকে আশংসা অপেক্ষক (likelihood function) বলা হবে।

**Case (i) সমগ্রকের নিবেশন বিচ্ছিন্ন (Discrete population)**

ধরি, সমগ্রকের সম্ভাবনাশ্রয়ী বিচ্ছিন্ন চলকটি $X$ এবং $X$-এর spectrum-এর যে-কোনো বিন্দু $x_i$-এর জন্য মনে করি,

$$P(X = x_i) = f_{x_i}(\theta_1, \theta_2, \dots \theta_k)$$

একটি বিশেষ (Particular) $n$ আয়তনের নমুনা $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ চয়ন করার ঘটনাটিকে (event) লেখা যায়,

$(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$, যেখানে স্পষ্টতই ঘটনাটির সম্ভাবনা,

নমুনার মান $x_1, x_2, \dots, x_n$ এবং পূর্ণকাঙ্ক $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$-এর অপেক্ষক। যেটিকে আশংসা অপেক্ষক (likelihood function) বলা হয় এবং একে $L(x_1, x_2, \dots, x_n ; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ দ্বারা প্রকাশ করলে আমরা পাই—

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$
$$= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

এখন, $X_1, X_2, \dots, X_n$ পরস্পর অনপেক্ষ এবং প্রত্যেকের নিবেশন সমগ্রক চালক $X$-এর নিবেশনের সমান ; সুতরাং, আমরা লিখতে পারি যে,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n ; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$
$$= f_{x_1}(\theta_1, \theta_2, \dots,) f_{x_2}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \dots f_{x_n}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

**Case (ii) সমগ্রকের নিবেশন অবিচ্ছিন্ন (Continuous Population) :**

এক্ষেত্রে একটি বিশেষ নমুনা $(x_1, x_2, \dots, x_n)$-এর জন্য

$(x_2 < X_1 < x_1 + dx_1, x_2 < X_2 \leq x_2 + dx_2, \dots, x_n < X_n \leq x_n + d_{xn})$ ঘটনাটির সম্ভাবনা নমুনা বিন্দু $x = (X_1, X_2, \dots X_n)$ এর সম্ভাবনা অবকলন (probability differential)।

অর্থাৎ, $L(x_1, x_3, \dots x_n, \theta_1, \theta_3 \dots \theta_k)\, dx_1, dx_2 \dots\dots\dots\dots dx_n$

যেখানে $L(x_1, x_2, \dots x_n, \theta_1, \theta_3, \dots \theta_k)$ হল নমুনা বিন্দু $x$-এর ঘনত্ব অপেক্ষক।

এখানে $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ এর ঘনত্ব অপেক্ষক $L(x_1, x_3 \dots x_n ; \theta_1, \theta_3 \dots \theta_k)$ কে আশংসা অপেক্ষক বলে।

যদি $f(x ; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ সমগ্রকের ঘনত্ব অপেক্ষক হয় তাহলে এক্ষেত্রে আমরা পাই,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n ; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$
$$= f(x_1 ; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)\, f(x_2 ; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \dots f(x_n ; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

নির্দিষ্ট নমুনা মানের জন্য আশংসা অপেক্ষকটি শুধুমাত্র পূর্ণকাঙ্কগুলির অর্থাৎ, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$-এর অপেক্ষককে পরিণত হয়, গরিষ্ঠ আশংসা পদ্ধতিটির সাহায্যে আমরা পূর্ণকাঙ্কগুলির মান $x_1, x_2, \ldots, x_n$-এর অপেক্ষক আকারে নির্ণয় করতে পারি যেখানে এই মানগুলি (যদি অস্তিত্ব থাকে) আশংসা অপেক্ষকটির গরিষ্ঠ মানটি দেয়। তাই যদি পূর্ণকাঙ্কগুলির মান,

$$\theta_1 = \hat{\theta}_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\theta_1 = \hat{\theta}_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta_k = \hat{\theta}_k (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

হয় যার জন্য আশংসা অপেক্ষকটির মান গরিষ্ঠ (globally maximum) হয়, তাহলে $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots \hat{\theta}_k$ নমুনাঙ্কগুলিকে যথাক্রমে $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ পূর্ণকাঙ্কগুলির গরিষ্ঠ আশংসা ভিত্তিক প্রাক্‌কলনী মান (maximum likelihood estimates) বলা হয়।

যেহেতু $L > 0$, তাই $L$ অপেক্ষকটির মান গরিষ্ঠ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\log_e L$ অপেক্ষকটির মান গরিষ্ঠ হয়। তাহলে $\log_e L$ অপেক্ষকটি continuously differentiable হলে এবং গরিষ্ঠ মানের অস্তিত্ব থাকলে,

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ পূর্ণকাঙ্ক সমূহের গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক প্রাক্‌কলনী মান নির্ণয়কারী সমীকরণগুলি হবে—

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta_1} = 0, \frac{\partial \log L}{\partial \theta_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial \log L}{\partial \theta_k} = 0$$

এই সমীকরণগুলিকে আশংসা সমীকরণ (likelihood equation) বলা হয়। এই সমীকরণগুলিকে সমাধান করে প্রাপ্ত মানই $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ এর গরিষ্ঠ আশংসা ভিত্তিক প্রাক্‌কলনী মান।

## 10.3 কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ পূর্ণকাঙ্কের গরিষ্ঠ আশংসা ভিত্তিক প্রাক্‌কলনীমান ঃ

(a) দ্বিপদ $(N, p)$ সমগ্রক [Binomial (N, p) population] ঃ

ধরা যাক $N$-এর মান জ্ঞাত। কিন্তু, $p$ পূর্ণকাঙ্কটি অজানা যেখানে, $0 < p < 1$। দ্বিপদ $(N, p)$ সমগ্রকের সম্ভাবনা ভর অপেক্ষকটি $(p. m. f)$ হল

$$P(X = x) = \binom{N}{n} p^x (1-p)^{N-x}$$

যেখানে, $x = 0, 1, 2, \ldots, N$.

যেখানে, $X$ হল সমগ্রকের সম্ভাবনাশ্রয়ী চল, $X$-এর সমগ্রক থেকে একটি $n$ আয়তনের সমসম্ভব নমুনা $x_1, x_2, \ldots, x_n$ চয়ন করা হল।

এখানে আশংসা অপেক্ষকটি হল

$$L = \mathrm{L}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n \;; p)$$

$$= \binom{N}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{N-x_1} \binom{N}{x_2} p^{x_2} (1-p)^{N-x_2} \dots \binom{N}{x_n} p^{x_n} (1-p)^{N-x_n}$$

$$= \binom{N}{x_1}\binom{N}{x_2}\dots\binom{N}{x_n} p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{nN-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

এখন, নমুনা-মান $x_1, x_2 \dots x_n$ কে ধ্রুবক রেখে আমাদের $p$-এর এমন মান নির্ণয় করতে হবে যার জন্য $L$ এর মান সার্বিকরূপে চরম (globally maximum) হয়। $p$ এর যে মানের জন্য $L$ এর মান সার্বিকরূপে চরম হয় দেখা যায় যে সেই মানটির জন্য $\log_e L$ ও সার্বিকভাবে চরম হয়।

সুতরাং $$\log_e L = \log_e \left\{ \binom{N}{x_1}\binom{N}{x_2}\dots\binom{N}{x_n} \right\} + \log_e p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} + \log(1-p)^{nN-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$= \log_e \left\{ \binom{N}{x_1}\binom{N}{x_2}\dots\binom{N}{x_n} \right\} + \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \log_e p + \left( nN - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \log_e (1-p)$$

আশংসো সমীকরণ হল,

$$\frac{\partial \log_e L}{\partial p} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{nN - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n\bar{x}}{p} - \frac{nN - n\bar{x}}{1-p} = 0$$

যেখানে $\bar{x} =$ নমুনার গড় $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

এখন $$\frac{n\bar{x}}{p} - \frac{nN - n\bar{x}}{1-p} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}(1-p) - (n-\bar{x})p = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{\bar{x}}{N}$$

আবার, $$\frac{\partial^2 (\log_e L)}{\partial p^2} = -\frac{n\bar{x}}{p^2} - \frac{nN - n\bar{x}}{(1-p)^2} \left[ \frac{\partial^2 (\log_e L)}{\partial p^2} \right]_{p=\frac{\bar{x}}{N}}$$

$$= -x\left[\frac{\bar{x}}{\left(\frac{\bar{x}}{N}\right)^2} + \frac{N-\bar{x}}{\left(1-\frac{\bar{x}}{N}\right)^2}\right]$$

$$= -x\left[\frac{N^2}{\bar{x}} + \frac{N^2}{(N-\bar{x})}\right]$$

এখন $\bar{x} \neq 0$ এবং $\bar{x} \neq N$

$$\therefore \left[\frac{\partial^2(\log_e L)}{\partial p^2}\right]_{p=\frac{\bar{x}}{N}} < 0$$

সুতরাং, $p = \frac{\bar{x}}{N}$ মানের জন্য $\log_e L$ এর চরম মানটি পাই, অর্থাৎ, $p = \frac{\bar{x}}{N}$ এ $L$-এর চরম মান পাওয়া যায়।

সুতরাং, $p$ এর চরম আশংসা ভিত্তিক প্রাক্‌কলনী মান হল $\hat{p}$ যার মান $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{N}$

দেখানো যায় (10.4-এর উদাহরণ 4) যে $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{N}$ হল $p$ এর সমঞ্জস এবং পক্ষপাতশূন্য প্রাক্‌কলনী মান।

**(b) নর্মাল (m, σ) সমগ্রক [Normal (m, σ) population] :**

ধরা যাক, নর্মাল $(m, \sigma)$ সমগ্রকের $m$ এবং $\sigma$ দুটি পূর্ণকাঙ্কই অজানা। নর্মাল $(m, \sigma)$ সমগ্রকের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকটি হল,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

প্রদত্ত সমগ্রক থেকে একটি $n$ আয়তনের সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ নেওয়া হল।

সুতরাং এক্ষেত্রে আশংসা অপেক্ষকটি হবে,

$$L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n ; m, \sigma)$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sigma^n} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}$$

এখন $x_1, x_2, \ldots, x_n$ অর্থাৎ নমুনার মানগুলিকে ধ্রুবক রেখে আমাদের $m, \sigma$ এর মান নির্ণয় করতে হবে যাতে $L$ এর মান গরিষ্ঠ হয়।

এখন , $\log_e L = -\frac{n}{2}\log_e 2\pi - n\log_e \sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$

σ (< 0) এর মানকে স্থির রেখে $m$ এর জন্য আশংসা সমীকরণটি হল,

$$\frac{\partial \text{LogL}}{\partial \text{m}} = 0$$

সুতরাং $$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = nm$$

$$\Rightarrow n\bar{x} = nm$$

$$\Rightarrow \bar{x} = m \text{ (যেখানে, } \bar{x} = \text{নমুনা গড়)}$$

আবার, $$\frac{\partial^2 \log L}{\partial m^2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$$

এক্ষেত্রে $\sigma (> 0)$ এবং নমুনার মান ধ্রুবক ধরলে $m = \bar{x}$ এর জন্য $\log L$ এর চরম মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ, $L$-এর চরম মান পাওয়া যায় $m = \bar{x}$ এর জন্য ধরি, মানটি $L_1$ ।

সুতরাং, $$\log_e L_1 = -\frac{n}{2}\log_e 2\pi - n\log_e \sigma - \frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

প্রয়োজনীয় আশংসা সমীকরণটি হল,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(\log_e L_1) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = s^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}(\log_e L_1) = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$\sigma^2 = S^2$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}(\log_e L_1) = \frac{n}{S^2} - \frac{3}{S^4}(ns^2) = -\frac{2n}{S^2} < 0$$

যেখানে $S^2 > 0$, $S^2$ হল নমুনালব্ধ ভেদমান।

অতএব, $\log L_1$ এর চরম মান পাওয়া যায় যখন $\sigma^2 = S^2$ অর্থাৎ $\sigma = S$

সুতরাং, $m$ এবং σ এর চরম আশংসা প্রাক্কলক দুটি হল,

$$\hat{m} = \bar{x} \text{ এবং } \hat{\sigma} = S$$

দেখানো যায় $\hat{m} = \bar{x}$ হল $m$ এর সমঞ্জস ও পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলনী মান এবং $\hat{\sigma}^2 = S^2$ হল $\sigma^2$ এর সমঞ্জস কিন্তু পক্ষপাতদুষ্ট প্রাক্কলনী মান।

## 10.4 উদাহরণমালা

একটি সমগ্রকের সম্ভাবনা ভর অপেক্ষকটি হল,

$$P(X = i) = \frac{1}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^i$$

$$\mu > 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

$\mu$ এর গরিষ্ঠ আশংসা ভিত্তিক প্রাক্‌কলনী মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সমগ্রক থেকে একটি $n$ আয়তনের সমসম্ভব নমুনা গ্রহণ করা হল যার মান ধরা যাক, $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

এক্ষেত্রে আশংসা অপেক্ষকটি হবে,

$$L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n\ ;\ \mu)$$

$$= \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^n \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{\sum_{r=1}^{n} x_r}$$

সুতরাং, $\log_e L = x \log_e \left(\frac{1}{1+\mu}\right) + \sum_{r=1}^{n} x_r \log_e\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$

$$= -x \log_e (1+\mu) + \left(\sum_{r=1}^{n} x_r\right)\{(\log_e \mu) - \log_e (1+\mu)\}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} x_r \log_e \mu - \left(n + \sum_{r=1}^{n} x_r\right)\log_e(1+\mu)$$

এক্ষেত্রে, আশংসা সমীকরণটি হল, $\frac{\partial(\log_e L)}{\partial \mu} = 0$

অর্থাৎ, $\frac{\sum_{r=1}^{n} x_r}{\mu} - \frac{n + \sum_{r=1}^{n} x_r}{(1+\mu)} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1+\mu}{\mu} = \frac{n + \sum_{r=1}^{n} x_r}{\sum_{r=1}^{n} x_r}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\mu} = \frac{n + n\bar{x}}{n\bar{x}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\mu}=1+\frac{1}{\bar{x}}$$

$$\Rightarrow \mu=\bar{x}$$

যেখানে, $\bar{x}$ হল নমুনালব্ধ গড়।

$\therefore$ $\mu$-এর গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক প্রাক্কলনী মান হল $\hat{\mu}=\bar{x}$

2. একটি পূর্ণকের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকটি হল, $f(x)=2\gamma\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}x^2e^{-\gamma x^2}$

$$-\infty<x<\infty,\ \gamma>0$$

পূর্ণকাঙ্ক $\gamma$ এর গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক প্রাক্কলনীমানটি একটি $n$ আয়তনের নমুনার উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করুন।

সমাধান : ধরি, সমগ্রক থেকে নেওয়া একটি $n$ আয়তনের সমসম্ভব নমুনা, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

সুতরাং প্রাপ্ত নমুনার উপর ভিত্তি করে আশংসা অপেক্ষকটি হবে,

$$L=L(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n;\gamma)$$

$$=2^n\gamma^n\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\ \ldots\ldots x_n)^2$$

$$=2^n(\pi)^{-\frac{n}{2}}(x_1x_2\ldots x_n)^2e^{-\gamma\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\gamma^{\frac{3n}{2}}e^{-\gamma\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

অতএব, $\log_eL=\log_e2^n+\log_2(\pi)^{-\frac{n}{2}}+\frac{3n}{2}\log_e\gamma-\gamma\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$

আশংসা সমীকরণটি হবে,

$$\frac{\partial(\log_eL)}{\partial\gamma}=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{3n}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{3n}{2\gamma}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\Rightarrow\ \gamma=\frac{3n}{2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

$$\frac{\partial^2(\log_eL)}{\partial\gamma^2}=-\frac{3n}{2\gamma^2}$$

$\gamma$ এর সমস্ত বাস্তব মানের ($\neq 0$) জন্যই $\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}(\log_e L) < 0$

সুতরাং, প্রাচল $\gamma$ এর গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক প্রাককলনী মান হবে, $\hat{\gamma} = \frac{3n}{2\sum_{i=1}^{x} x_i^2}$

**3. একটি সমগ্রকের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকটি হল $f(x) = \lambda x^{\lambda-1}$ $(0 < x < 1)$, $\lambda > 0$,পূর্ণকাঙ্ক $\lambda$ এর গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক প্রাক্‌কলনী মান নির্ণয় করুন।**

সমাধান : ধরা যাক, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ একটি সমসম্ভব নমুনা, প্রদত্ত সমগ্রক থেকে গৃহীত।
নমুনাটির উপর ভিত্তি করে আশংসা অপেক্ষকটি হবে,

$$L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \lambda)$$
$$= \lambda^n (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\lambda - 1} \text{ যেখানে } \lambda > 0$$

সুতরাং, $\log_e L = n \log_e \lambda + (\lambda - 1)\log_e(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ নমুনার মান ধ্রুবক, এবং এক্ষেত্রে আশংসা সমীকরণটি হল,

$$\frac{\partial(\log_e L)}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{n}{\lambda} + \log_e(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

বা, $\lambda = -\frac{n}{\log_e(x_1\ x_2 \ldots x_n)}$

যেখানে অবশ্যই $\log_e(x_1, x_2 \ldots x_n) \neq 0$.

আবার, $\frac{\partial^L(\log_e L)}{\partial \lambda^2} = \frac{-n}{\lambda^2} < 0$

[$\lambda$ ($\neq 0$) এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য ]

সুতরাং প্রাচল $\lambda$ এর চরম আশংসা প্রাককলকটি হল, $\hat{\lambda} = -\frac{n}{\log_e(x_1\ x_2 \ldots x_n)}$

**4. প্রমাণ করুন যে, 10.3 এর $(a)$ তে $\hat{p}$, $p$-এর একটি পক্ষপাতশূন্য এবং সমঞ্জস প্রাক্‌কলনী মান।**

সমাধান : ধরা যাক, $\frac{\bar{x}}{N}$ এর সাপেক্ষে সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি হল $Y$, তাহলে

$$Y = \frac{X}{N} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{nN}$$

যেখানে, $X_1, X_2, \ldots X_n$ হল পরস্পর অনপেক্ষ দ্বিপদ $(N, p)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।
এখন, $E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_n) = Np$

এবং, $E(Y)$

$$= E\left(\frac{\overline{X}}{N}\right)$$

$$= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{nN}\right)$$

$$= \frac{1}{nN} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

$$= \frac{1}{nN} [E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)]$$

$$= \frac{1}{nN} (nNp)$$

$$= \text{p} \ (\text{যেখানে}, 0 < p < 1)$$

$p$ এর মান যাই হোক না কেন।

সুতরাং, $Y = \frac{X}{N}$, $p$ এর একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্কলক, এবং $\frac{\overline{x}}{N}$, $p$ এর একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাককলনী মান।

আবার, $\frac{X_1}{N}, \frac{X_2}{N}, \ldots, \frac{X_n}{N}$

প্রত্যেকে পরস্পর অনপেক্ষ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল এবং প্রত্যেকের নিবেশন $\frac{X}{N}$ এর নিবেশনের সমান।

$$E\left(\frac{X_i}{N}\right) = E\left(\frac{X}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{N} E(X)$$

$$= \frac{1}{N}(Np) = p$$

যেখানে, $i = 1, 2, \ldots, n$.

অতএব, বৃহৎ সংখ্যা বিধি থেকে লিখতে পারি যে,

$$\frac{\frac{X_1}{N} + \frac{X_2}{N} + \ldots + \frac{X_n}{N}}{n} \xrightarrow[inp]{} p \text{ যখন } n \to \infty$$

অথবা, $Y \xrightarrow[inp]{} p$ যখন $n \to \infty$

এক্ষেত্রে, $Y = \frac{X}{N}$, $p$ এর একটি সমঞ্জস প্রাক্কলক, এবং $\frac{\overline{x}}{N}$, $p$ এর একটি সমঞ্জস প্রাক্কলনী মান।

5. $X$ একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী যার সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকটি হল,

$$f(x\,;\,\theta) = \text{\\}(x^{p-1}e^{-x/\theta}, \theta^{p}\,\Gamma\,(p))\ ,\ 0 < x < \infty\ \therefore$$

যেখানে, $p$ এর মান জ্ঞাত এবং $p > 0$. এই সমগ্রক থেকে $x_1, x_2 \ldots, x_n$ একটি $n$ আয়তনের নমুনা গ্রহণ করে পূর্ণকাঙ্ক $\theta\,(> 0)$ এর গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক প্রাক্কলনী মান হয় $\frac{\bar{x}}{p}$ (যেখানে, $\bar{x}$ হল নমুনালব্ধ গড়)। প্রমাণ করুন যে প্রাককলনী মানটি পক্ষপাতশূন্য এবং সমঞ্জস।

সমাধান ঃ ধরা যাক $\frac{\bar{X}}{p}$, প্রাককলনী মান $\frac{\bar{x}}{p}$ এর সাপেক্ষে গৃহীত সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

এখন, $X = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$

এবং $X_1, X_2, \ldots, X_n$ হল পরস্পর অনপেক্ষ এমন সম্ভাবনাশ্রয়ী চল যাদের প্রত্যেকের নিবেশন সমগ্রকের সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$ এর নিবেশনের সমান।

এক্ষেত্রে, সমগ্রকের গড় $m$ হলে,

$$m = E(X) = \int_0^{\infty} \frac{x\,.\,x^{p-1}e^{-x/\theta}}{\theta^{p}\,\Gamma\,(p)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\theta^{p} < (p)} \int_0^{\infty} x^{p}\ e^{-x/\theta}\ dx$$

$$= \frac{1}{\theta^{p}\Gamma(p)} \int_0^{\infty} (\theta u)^{p} e^{-u}\ \theta\,\mathrm{du} \quad [x = \theta u \text{ বসিয়ে পাই }]$$

$$= \frac{\theta^{p+1}}{\theta^{p}\Gamma(p)} \int_0^{\infty} u^{p}\ e^{-u} du$$

$$= \frac{\theta}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} u^{(p+1)-1} e^{-u}\ du$$

$$= \frac{\theta}{\Gamma(p)}\,\Gamma(p+1)$$

$$= \frac{\theta p\ \Gamma(p)}{\Gamma(p)} = p\theta\ (\theta > 0, p > 0)$$

সুতরাং, $E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_n) = p\theta$

$$E(X) = \frac{1}{n} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

$$= \frac{1}{n} [E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)]$$

$$= \frac{np\theta}{n} = p\theta$$

সুতরাং, $E\left(\frac{X}{p}\right)$

$$= \frac{1}{p} E(X)$$

$$= \frac{p\theta}{p} = \theta$$

অতএব, $\bar{X}$, $\theta$ এর একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাক্‌কলক এবং স্বাভাবিকভাবেই $\frac{\bar{x}}{p}$, $\theta$ এর একটি পক্ষপাতশূন্য প্রাককলনী মান।

এখন, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চলগুলির উপর বৃহৎ সংখ্যা বিধি থেকে পাই,

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[in\ p]{} p\theta \text{ যখন } n \to \infty$$

অথবা $X \xrightarrow[in\ p]{} p\theta$ যখন $n \to \infty$

বা, $\frac{X}{p} \xrightarrow[in\ p]{} \theta$ যখন $n \to \infty$

সুতরাং, $\frac{X}{p}$, $\theta$ এর সমঞ্জস প্রাক্‌কলক এবং $\frac{\bar{x}}{p}$, $\theta$ এরা সমঞ্জস প্রাককলনী মান।

6. একটি সমগ্রকের ঘনত্ব অপেক্ষকটি হল, $f(x) = \frac{2(\alpha - x)}{\alpha^2}$ $(0 < x < \alpha)$। প্রমাণ করুন যে, একটি একক আকারের নমুনা $x_1$ সাপেক্ষে পূর্ণকাঙ্ক $\alpha$ এর গরিষ্ঠ আশংসা ভিত্তিক প্রাক্‌কলনী মানটি হয় $2x_1$ এবং প্রাক্‌কলনী মানটি পক্ষপাতদুষ্ট।

সমাধান : নমুনা, $x_1$ সাপেক্ষে আশংসা অপেক্ষকটি হল,

$$L = L(x_1 ; \alpha) = \frac{2(\alpha - x_1)}{\alpha^2}$$

যেখানে, $0 < x_1 < \alpha$.

সুতরাং, $\log_e L = \log_e 2(\alpha - x_1) - 2\log_e \alpha$

অশ্ংসো সমীকরণটি হবে, $\frac{\partial(\log_e L)}{\partial\alpha} = 0$

সুতরাং, $\frac{1}{\alpha - x_1} - \frac{2}{\alpha} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha - x_1} = \frac{2}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2\alpha - 2x_1$$

$$\Rightarrow \alpha = 2x_1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\log_e L) = -\frac{1}{(\alpha - x_1)^2} + \frac{2}{\alpha^2}$$

$\alpha = 2x_1$ বসিয়ে পাই, $\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\log_e L)\right]_{\alpha = 2x_1}$

$$= -\frac{1}{{x_1}^2} + \frac{2}{4{x_1}^2}$$

$$= -\frac{1}{{x_1}^2} + \frac{1}{2{x_1}^2} = -\frac{1}{2{x_1}^2} < 0$$

সুতরাং, $\alpha$ এর গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক প্রাক্কলনী মানটি হল, $\hat{\alpha} = 2x_1$

ধরা যাক, $2X_1$ হল $2x_1$ এর সাপেক্ষে সম্ভাবনাশ্রয়ী চল, যেখানে, $X_1$ এর নিবেশন সমগ্রকের সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$ এর নিবেশনের সমান।

এখন, $E(2X_1)$

$$= E(2X)$$

$$= \int_0^\alpha 2x.\frac{2(\alpha - x)}{\alpha^2}\,dx$$

$$= \frac{4}{\alpha^2}\int_0^\alpha (\alpha x - x^2)\,dx$$

$$= \frac{4}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^\alpha$$

$$= \frac{4}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha^3}{2} - \frac{\alpha^3}{3}\right]$$

$$= \frac{4}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^3}{6} = \frac{2\alpha}{3} \neq \alpha$$

অতএব, $2X_1$, পূর্ণকাঙ্ক $\alpha$ এর একটি পক্ষপাতদুষ্ট প্রাক্কলক এবং $2x_1$, $\alpha$ এর একটি পক্ষপাতদুষ্ট প্রাক্কলনী মান।

## 10.5 সারাংশ

এই এককে কোনও সমগ্রকের (বিচ্ছিন্ন বা সন্তত) অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্ক সমূহের প্রাক্কলনীমান নির্ণয়ের গরিষ্ঠ আশংসা পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হয়েছে। আমরা লক্ষ্য করেছি যে গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক প্রাক্কলনীমান অধিকাংশক্ষেত্রে সমঞ্জস ও পক্ষপাতশূন্য হয় এবং প্রায় সবক্ষেত্রেই সমঞ্জস হয়।

## 10.6 অনুশীলনী

**1.** পোয়াসঁ (*Poisson*) $\mu$ সমগ্রকের সম্ভাবনা ভর অপেক্ষকটি হল, $f(x) = \dfrac{e^{-\mu}\mu^x}{\underline{|x}}$

যেখানে, $x = 0, 1, 2, \ldots, \mu > 0$। এখানে অজানা পূর্ণকাঙ্ক $\mu$ এর গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক প্রাক্কলনী মানটি নির্ণয় করুন এবং প্রমাণ করুন যে, এই মানটি $\mu$ এর পক্ষপাতশূন্য এবং সমঞ্জস প্রাককলনী মান।

**2.** একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$ এর সম্ভাবনা ভর অপেক্ষকটি হল, $P(X = i) = p(1-p)^i$

$i = 0, 1, 2, \ldots$ যেখানে $p(0 < p < 1)$ হল অজানা পূর্ণকাঙ্ক। $x_1, x_2, \ldots, x_n$ একটি $n$ আয়তনের নমুনার উপর ভিত্তি করে, $p$ এর গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক প্রাক্কলনী মান $p$ নির্ণয় করুন। এবং প্রমাণ করুন যে, $\hat{p}$, $p$ এর সমঞ্জস প্রাক্কলনী মান।

[সংকেত ঃ এখানে $\hat{p} = \dfrac{1}{1 + \bar{x}}$ এর সাপেক্ষে সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি

$\dfrac{1}{1 + \bar{X}}$, যেখানে $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$

$$m = E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} ip(1-p)^i$$

$$= p(1-p) + 2p(1-p)^2 + 3p(1-p)^3 + \ldots$$

$$= p[(1-p) + 2(1-p)^2 + 3(1-p)^3 + \ldots \quad [\because 0 < p < 1]$$

$$= p(1-p)\,[1-(1-p)]^{-2}$$
$$= \frac{1-p}{p}$$
$$E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_n) = \frac{1-p}{p}$$

বৃহৎ সংখ্যাবিধি থেকে পাই, $\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[in\ p]{} \frac{1-p}{p}$ যখন $n \to \infty$

অথবা, $\frac{1}{\overline{X}+1} \xrightarrow[in\ p]{} p$ যখন $n \to \infty$ ]

**3.** একটি সন্তত সমগ্রকের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকটি হল $f(x) = (1+\alpha)\,x^{\alpha}$ ; $0 < x < 1$, $(1 + \alpha > 0)$, পূর্ণকাঙ্ক $\alpha$ এর গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক প্রাক্কলনীমানটি নির্ণয় করুন।

**4.** কোনও সমগ্রকের সম্ভাবনা ভর অপেক্ষকটি $(p\,.\,m.\,f)$ হল

$$P(X = i) = \frac{1}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{i}, \mu > 0, i = 0, 1, 2, \ldots\ldots ;$$

$(x_1, x_2, \ldots x_n)$ এই সমসম্ভব নমুনার ভিত্তিতে $\mu$ এর গরিষ্ঠ আশংসাভিত্তিক মান $\bar{\mu} = \bar{x}$ (10·4 এর উদাহরণ 1) ধরে নিয়ে প্রমাণ করুন যে $\hat{\mu}$, $\mu$ এর পক্ষপাতশূন্য ও সমঞ্জস প্রাক্কলনী মান।

**5.** কোনও সন্তত সমগ্রকের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ যদি } a \le x \le b, \text{ যেখানে } b > a$$
$$= 0 \text{ অন্যত্র।}$$

$(x_1, x_2, \ldots x_n)$ এই সমসম্ভব নমুনার ভিত্তিতে $a, b$ এর গরিষ্ঠ আশংসা ভিত্তিক প্রাক্কলনী মানগুলি নির্ণয় করুন।

**6. 10.4** এ উদাহরণ **5** এর সমগ্রক পূর্ণকাঙ্ক $\theta$ এর গরিষ্ঠ প্রাক্কলনী মান নির্ণয় করুন।

## 10.4 উত্তরমালা

1. $\hat{\mu} = \bar{x}$,

2. $\hat{p} = \frac{1}{1+\bar{x}}$

3. $\hat{\alpha} = -\frac{n}{\log_e(x_1 x_2 \ldots x_n)} - 1$ ;

5. $\hat{a} = x_s$, $\hat{b} = x_r$ যেখানে $x_s$ লঘিষ্ঠ নমুনা মান এবং $x_r$ গরিষ্ঠ নমুনামান।

6. $\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{p}$

# একক 11 ☐ অন্তর প্রাক্‌কলন—আস্থা অন্তর (Interval Estimation—Confidence Interval)

গঠন ঃ



## 11.1 প্রস্তাবনা

একক 9 তে আমরা অন্তর প্রাক্‌কলনের (Interval estimation) প্রাথমিক ধারণা পেয়েছি এবং সেখানে বিন্দু প্রাক্‌কলনের চেয়ে অন্তর প্রাক্‌কলনে কী সুবিধা পাওয়া যায় তার উল্লেখ করা হয়েছে। এই এককে অন্তর প্রাক্‌কলনকে স্পষ্ট করে বোঝাবার জন্য প্রথমে আস্থা অন্তরের (confidence interval) সংজ্ঞা দেওয়া হবে এবং পরে আস্থা অন্তর নির্ণয় করার পদ্ধতি ব্যাখ্যা করে বিশেষ কয়েকটি ক্ষেত্রে আস্থা অন্তর নির্ণয় করা হবে।

## 11.2 আস্থা অন্তর (Confidence interval)

ধরা যাক সমগ্রকের সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি হল $X$ এবং তার নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$। মনে করুন $\theta$ হল সমগ্রকের একটি অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্ক (unknown parameter)। মনে করুন $X$ এর সমগ্রক থেকে একটি সমসম্ভব নমুনা হল $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$। এখন যদি যে-কোনো প্রদত্ত $\in (0 < \in < 1)$ এর জন্য, দুটি নমুনাঙ্ক (statistic's) $a = f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$, $b = f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ নির্ণয় করা যায় যাতে, $\theta$-র মান যাই হোক না কেন, $P(A < \theta < B) = 1 - \in$ হয়, যেখানে $a, b$ এই নমুনাঙ্ক দুটির অনুষঙ্গী (corresponding) সম্ভাবনাশ্রয়ী চল দুটি হল যথাক্রমে $A = f_1(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ এবং $B = f_2(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$, তাহলে $(a, b)$ অন্তরকে $\theta$ পূর্ণকাঙ্কের $1 - \in$ আস্থা অঙ্ক (confidence coefficient) বিশিষ্ট একটি আস্থা অন্তর (confidence interval) বলে।

আমরা লক্ষ্য করছি যে আস্থাঙ্ক $1-\epsilon$ এর মান অনুযায়ী আস্থা অন্তর $(a, b)$ পাওয়া যাবে এবং আরও লক্ষণীয় যে $1-\epsilon$ এর নির্দিষ্ট $(0<\epsilon<1)$ মানের জন্য একই পূর্ণকাঙ্ক $\theta$-র জন্য অসংখ্য আস্থা অন্তর পাওয়া যেতে পারে।

এখানে $a$ ও $b$ নমুনাঙ্ক দুটিকে $\theta$ পূর্ণকাঙ্কের যথাক্রমে নিম্ন আস্থা সীমা (lower confidence limit) ও ঊর্ধ্ব আস্থা সীমা (upper confidence limit) বলা হয়।

এখানে $P(A<\theta<B)=1-\epsilon$ এই সম্পর্ক থেকে আমরা বলতে পারি যে $(A, B)$ random অন্তরে অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্ক $\theta$ এর মান থাকার সম্ভাবনা হল $1-\epsilon$। এক্ষেত্রে সাধারণত $\epsilon$ এর মান 0·05, 0·01, 0·001 ইত্যাদি নেওয়া হয়, ফলে অনুরূপ আস্থা অঙ্কের মান হয় যথাক্রমে 0·95, 0·99, 0·999 ইত্যাদি এবং আস্থা অন্তরগুলিকে যথাক্রমে 95% বা 99% বা 99·9% আস্থা অন্তর বলা হয়। একটি 99% আস্থা অন্তর এর ক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি যে, বৃহৎ সংখ্যক, ধরা যাক $N$ সংখ্যক নমুনার ক্ষেত্রে পূর্ণকাঙ্কটিকে ওই আস্থা অন্তরে প্রায় 0·99 $N$ বার পাওয়া যাবে।

আগেই বলা হয়েছে যে, একটি পূর্ণকাঙ্কের জন্য প্রদত্ত নমুনা এবং প্রদত্ত আস্থা অঙ্ক-এর উপর ভিত্তি করে একাধিক আস্থা-অন্তর নির্ণয় করা সম্ভব। এদের মধ্যে উৎকর্ষতার তুলনা করতে হলে অন্তরের দৈর্ঘ্য অর্থাৎ $(b-a)$ কে আমরা বিপরীত সূক্ষ্মতা মাপক (inverse measure of precision) হিসাবে গ্রহণ করি। অর্থাৎ দুটি অন্তরের দৈর্ঘ্যের মধ্যে তুলনা করি। স্পষ্টতই এদের মধ্যে ছোট দৈর্ঘ্য যেটি হয় সেই অন্তরটিই আমাদের পছন্দ।

## 11.3 আস্থা-অন্তর নির্ণয়ের পদ্ধতি

ধরা যাক, $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_k$ হল পূর্ণকের অজানা পূর্ণকাঙ্ক। ধরা যাক, আমরা এর মধ্যে পূর্ণকাঙ্ক $\theta_1$ এর প্রাককলন মান নির্ণয়ে উৎসাহী।

পর্যায় *I* : প্রথমে একটি নমুনাঙ্ক $Z=Z(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n;\theta_1)$ চয়ন করুন (যদি সম্ভব হয়) যার নমুনাজ নিবেশন $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_k$ পূর্ণকাঙ্কগুলির উপর নির্ভরশীল নয়, এবং নমুনাঙ্কটিও $\theta_2, \theta_3, \ldots\ldots, \theta_k$ পূর্ণকাঙ্কগুলির উপর নির্ভরশীল নয়।

পর্যায় II : $\alpha_\epsilon$ এবং $\beta_\epsilon\ (>\alpha_\epsilon)$ দুটি $\epsilon$ এর উপর নির্ভরশীল সংখ্যা চয়ন করুন যেখানে,

$$\int_{\alpha_\epsilon}^{\beta_\epsilon} f_z(z)\,dz = 1-\epsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$f_Z(z)$, $Z$ সমসম্ভব চলকের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক। $Z$ নমুনাঙ্ক $z$ এর সাপেক্ষে সমসম্ভব চল। $f_Z(z)$ সমস্ত অজানা পূর্ণকাঙ্কগুলির উপর অনির্ভরশীল।

পর্যায় III : উপরোক্ত সম্পর্ক $(A)$ থেকে লেখা যায় যে,

$$P(\alpha_\epsilon<Z<\beta_\epsilon)=1-\epsilon$$

নমুনাঙ্ক $z$ যদি $\theta_1$ এর এমন অপেক্ষক যে, $\alpha_\epsilon < Z < \beta_\epsilon$ অসমীকরণটিকে $A < \theta_1 < B$ আকারে প্রকাশ করা যায় তাহলে আমরা উপরোক্ত সম্পর্কটিকে

$P(A < \theta_1 < B) = 1 - \epsilon$ আকারে প্রকাশ করতে পারি। যেখানে $A$ এবং $B$ যথাক্রমে নমুনাঙ্ক $a$ এবং $b$ সাপেক্ষে গৃহীত সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক এবং নমুনাঙ্কগুলি $\epsilon$ এর উপর নির্ভরশীল।

অতএব, $(a, b)$ অন্তরটিকে পূর্ণকাঙ্ক $\theta_1$ এর একটি আস্থা অন্তর হবে।

## 11.4 নর্মাল (m, σ) নিবেশনের পূর্ণকাঙ্ক m-এর জন্য আস্থা অন্তর।

কোনও প্রাচলের জন্য প্রদত্ত নমুনা এবং আস্থা অঙ্কের উপর ভিত্তি করে দুটি আস্থা অন্তর $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$ পাওয়া গেলে $(a_1, b_1)$ অন্তরটি $(a_2, b_2)$ অন্তরটির চেয়ে গ্রহণযোগ্য হবে, যদি $b_1 - a_1 < b_2 - a_2$ হয়। এখন আমরা নর্মাল $(m, \sigma)$ পূর্ণকের জন্য আস্থা অন্তর নির্ণয় করব।

পূর্ণকাঙ্ক $m$ এর আস্থা অন্তর ঃ

প্রথম ভাগ ঃ যখন σ-এর মান জ্ঞাত।

ধরা যাক, নর্মাল $(m, \sigma)$ পূর্ণক থেকে একটি $n$ আয়তনের নমুনা $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ গ্রহণ করা হল। যেহেতু σ এর মান জ্ঞাত, এক্ষেত্রে আমরা একটি নমুনাঙ্ক $u$ গ্রহণ করলাম,

$$u = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{x} - m\right)}{\sigma}$$

যেখানে, $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ নমুনালব্ধ গড় আমরা জানি যে, $u$ এর নমুনাজ নিবেশনটি হল নর্মাল (0, 1)।

ধরা যাক, নমুনাঙ্ক $u$ এর সাপেক্ষে গৃহীত সমসম্ভব চলটি হল,

$$U = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - m\right)}{\sigma}$$

যেখানে, $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}$ এবং

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ হল পরস্পর নির্ভরশীল নয় এমন নর্মাল $(m, \sigma)$ চল।

এখন ধরা যাক, $1 - \epsilon\,(0 < \epsilon < 1)$ হল প্রদত্ত আস্থা অঙ্ক। এখন, আমরা $u_\epsilon$ এবং $-u_\epsilon$ দুটি সংখ্যা খুঁজে বার করতে পারি যার জন্য

$$P(-u_\epsilon < U < u_\epsilon) = 1 - \epsilon$$

অর্থাৎ $$P(|U| > u_\epsilon) = \epsilon \ldots\ldots\ldots(i)$$

যেহেতু $U$ এর নিবেশন মূলবিন্দু সাপেক্ষে প্রতিসম। সুতরাং $(i)$ কে লেখা যায় যে,

$$P(U > u_\epsilon) = \frac{\epsilon}{2} \text{ ............... (ii)}$$

(ii) নং কে লেখা যায়,

$$P(U \le u_\epsilon) = 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

অথবা, $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_\epsilon} e^{-u^2/2}\, du = 1 - \frac{\epsilon}{2} \text{ ............ (iii)}$$

স্পষ্টতই নর্মাল নিবেশনের টেবিল থেকে $\epsilon$ এর নির্দিষ্ট মানের জন্য $u_\epsilon$ এর মান পাওয়া যায়।

এখন, $P(-u_\epsilon < U < u_\epsilon) = 1 - \epsilon$ থেকে পাই,

$$P\left(-u_\epsilon < \frac{\sqrt{n}\,(\overline{X} - m)}{\sigma} < u_\epsilon\right)$$

$$= 1 - \epsilon \text{ ............... (iv)}$$

$$\sigma(>0) \text{ হলে, } \left(-u_\epsilon < \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - m)}{\sigma} < u_\epsilon\right)$$

থেকে পাই, $$\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\epsilon < \overline{X} - m < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\epsilon\right)$$

অথবা, $$\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\epsilon - \overline{X} < -m < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\epsilon - \overline{X}\right)$$

অথবা, $$\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\epsilon < m < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\epsilon\right)$$

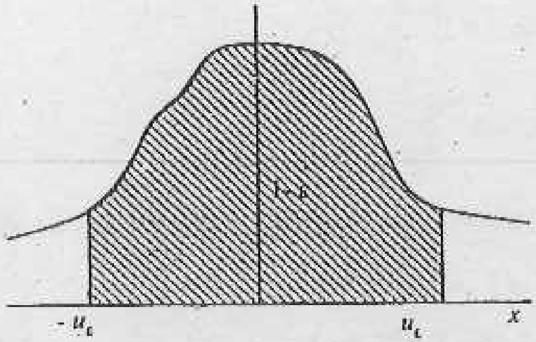
সুতরাং (iv) নং টিকে আমরা লিখতে পারি যে,

$$P\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\epsilon < m < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\epsilon\right)$$

$$= 1 - \epsilon \text{ ......... } (v)$$

এর থেকে আমরা লিখতে পারি যে, $\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\epsilon, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\epsilon\right)$ হল প্রাচল $m$ এর আস্থা অন্তর। যেখানে $1 - \epsilon$ হল আস্থা অঙ্ক এবং $u_\epsilon$ এর মান টেবিল থেকে গৃহীত।

নীচের চিত্রের প্রমাণ নর্মাল ঘনত্ব অপেক্ষক $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ এর দুটি বিন্দু $u_\epsilon$ এবং $-u_\epsilon$ এর মধ্যে রেখাঙ্কিত ক্ষেত্রফলটি হল সম্ভাবনা $P(-u_\epsilon < U < u_\epsilon)$ এর মান অর্থাৎ, $1-\epsilon$




দ্বিতীয় ভাগ : যখন, $\sigma$ এর মান অজ্ঞাত

পূর্ণক থেকে গৃহীত একটি $n$ আয়তনের নমুনা $X_1, X_2, X_n$। এখানে একটি নমুনাঙ্ক $t$ গ্রহণ করা হল $t = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{x}-m)}{s}$ যেটি শুধুমাত্র অজানা পূর্ণকাঙ্ক $m$ এর উপর নির্ভরশীল। $\bar{x}$ হল নমুনালব্ধ গড় এবং $s^2 = \frac{n}{n-1} S^2, n > 1$

$S^2$ হল নমুনালব্ধ ভেদমান।

আমরা জানি যে, নমুনাঙ্ক $t$ এর নমুনাজ নিবেশন হল $t$ নিবেশন যার স্বাতন্ত্রের মাত্রা $(n-1)$। $t$ নিবেশন মূলবিন্দু সাপেক্ষে প্রতিসম হয়।

ধরা যাক, $1-\epsilon\,(0 < \epsilon < 1)$ হল আস্থা-অঙ্ক। $t$ নিবেশনের প্রতিসমতার জন্য আমরা দুটি সংখ্যা $t_\epsilon$ এবং $-t_\epsilon$ পাই যার জন্য,

$$P(-t_\epsilon < t < t_\epsilon) = 1-\epsilon \;\ldots\ldots \text{(i)}$$

এখানে, $t = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-m)}{s}$ হল নমুনাঙ্ক $t = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-m)}{s}$ এর সাপেক্ষে গৃহীত সমসম্ভব চল।

সুতরাং, $(i)$ নং থেকে পাই,

$$P\left(-t_\epsilon < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-m)}{s} < t_\epsilon\right) = 1-\epsilon$$

অথবা, $$P\left(-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\epsilon < \bar{X} - m < \frac{s}{\sqrt{n}}t_\epsilon\right) = 1-\epsilon$$

অথবা, $P\left(-\overline{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\epsilon < -m < -\overline{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\epsilon\right) = 1 - \epsilon$

অথবা, $P\left(\overline{X} - \frac{s}{\sqrt{n}\, t_\epsilon} < m < \overline{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\epsilon\right) = 1 - \epsilon$ ......... (ii)

সুতরাং এক্ষেত্রে $\sigma$ এর মান সজ্ঞাত হলে প্রাচল $m$ এর আস্থা অন্তরটি হবে,

$$\left(\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\epsilon,\ \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\epsilon\right)$$

আস্থা-অঙ্ক $1 - \epsilon$ হলে যেহেতু $t$ নিবেশন মূলবিন্দু সাপেক্ষে প্রতিসম, সুতরাং ($i$) নং থেকে পাই,

$$P(t > t_\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$$

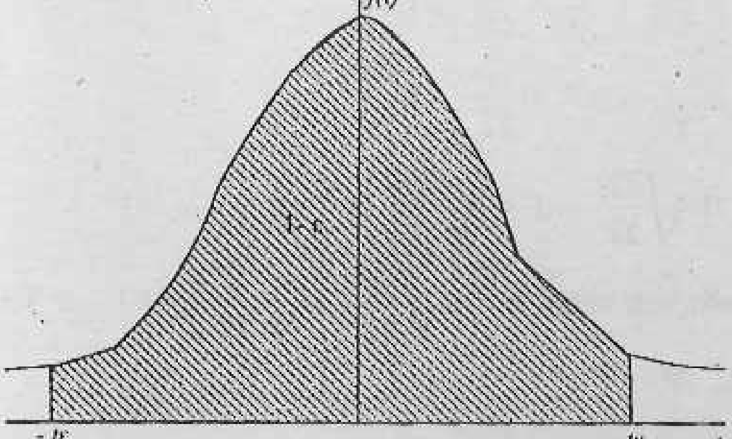
$t$ নিবেশনের টেবিল থেকে সহজেই

$t$ এর নির্দিষ্ট মানের জন্য $(n - 1)$ স্বাতন্ত্র্যতার জন্য $t_\epsilon$ এর মান পাওয়া যায়,

নীচের চিত্রে $t$ সমসম্ভব চলের ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n-1}\; B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)\left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{n/2}}$$

$-\infty < t < \infty$ এর দুটি বিন্দু $\pm t_1$ এর মধ্যস্থিত রেখাঙ্কিত ক্ষেত্রফলটিই সম্ভাবনা $P(-t_1 < t < t_1)$ এর মান অর্থাৎ $(1 - t)$ কে প্রকাশ করে।




## 11.5 নর্ম্যাল (m, σ) সমগ্রকের পূর্ণকাঙ্ক σ এর জন্য আস্থা-অন্তর

পূর্ণাঙ্ক থেকে একটি $n$ আয়তনের সমসম্ভব নমুনা $n_1, n_2, \ldots\ldots n_n$ গ্রহণ করা হল। এখন আমরা একটি নমুনাঙ্ক $\chi^2$ গ্রহণ করলাম, $\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ যার নমুনাজ নিবেশনটি হল $\chi^2$ নিবেশন স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা

$(n-1)$। এক্ষেত্রে নমুনাঙ্ক $\chi^2$ টি শুধুমাত্র অজানা প্রাচল $\sigma$ এর উপর নির্ভরশীল। সুতরাং স্বাভাবিক ভাবেই $\frac{nS^2}{\sigma^2}$, $\sigma$ এর আস্থা অন্তর নির্ণয়ে একটি গুরুত্বপূর্ণ নমুনাঙ্ক। এখানে, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(xi - \bar{x})^2$ হল নমুনাজ ভেদমান। কিন্তু $\chi^2$ নিবেশন একটি অপ্রতিসম নিবেশন। সুতরাং এক্ষেত্রে আমরা আস্থা অঙ্ক $(1-\in)$ এর উপর ভিত্তি করে দুটি সংখ্যা $\chi^2_{\in_1}$, $\chi^2_{\in_2}$ (যেখানে, $\chi^2_{\in_1} < \chi^2_{\in_2}$) নির্ণয় করব যার জন্য

$$P\left(\chi^2_{\in_1} < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\in_2}\right) = 1-\in \text{ ......... } (i)$$

হয়।

এক্ষেত্রে, $\chi^2_{\in_1}$ $(>0)$ এর মান জানা থাকলেই আমরা $(i)$ নং এর সাহায্যে $\chi^2_{\in_2}$-এর মান নির্ণয় করতে হবে।

$$P(0 < \chi^2 < \chi^2_{\in_1}) = \frac{\in}{2}$$

$$\text{এবং } P(\chi^2 > \chi^2_{\in_2}) = \frac{\in}{2}$$

এগুলি $(i)$ নং এর সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ এবং $\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ হল $\chi^2(n-1)$ চল।

এখন $(i)$ নং থেকে পাই,

$$P\left(\frac{\chi^2_{\in_1}}{nS^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{\in_2}}{nS^2}\right) = 1-\in$$

অথবা, $$P\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{\in_1}} > \sigma^2 > \frac{nS^2}{\chi^2_{\in_2}}\right) = 1-\in$$

অথবা, $$P\left(\sqrt{\frac{nS^2}{\chi^2_{\in_2}}} < \sigma^2 < \sqrt{\frac{nS^2}{\chi^2_{\in_1}}}\right) = 1-\in \text{ ......... (ii)}$$

সুতরাং $\sigma$ এর জন্য আস্থা অন্তরটি হল $\left(S\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{\in_2}}}, S\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{\in_1}}}\right)$ এবং $1-\in$ হল আস্থা-অঙ্ক।

এক্ষেত্রে $\chi^2_{\in_1}$ এবং $\chi^2_{\in_2}$ হল,

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\in_1}) = 1-\frac{\in}{2}$$

এবং $$P(\chi^2 > \chi^2_{\in_2}) = \frac{\in}{2}$$

$\chi^2_{\in_1}$ এবং $\chi^2_{\in_2}$ এর মানদ্বয় $\chi^2$ এর টেবিল থেকে পাওয়া যায় $\in$ এর নির্দিষ্ট মানের জন্য এবং $\chi^2$ এর স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রা $(n-1)$ এর জন্য।

নীচের চিত্রে সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $\chi^2$ এর ঘনত্ব অপেক্ষক

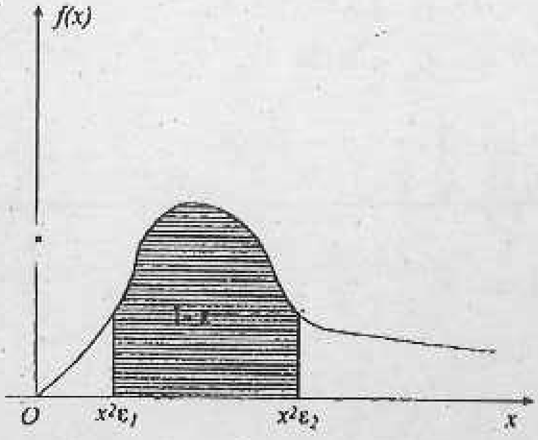
$$f(\chi^2) = \frac{e^{-x^2/2}\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{x-3}{2}}}{2\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \text{ যদি } \chi^2 > 0$$

$$= 0 \quad \text{অন্যত্র}$$

এর দুটি বিন্দু $\chi^2_{\epsilon_1}$ এবং $\chi^2_{\epsilon_2}$ এর মধ্যে রেখাঙ্কিত ক্ষেত্রফলটি হল সম্ভাবনা

$$P(\chi^2_{\epsilon_1} < \chi^2 < \chi^2_{\epsilon_2}) = 1 - \epsilon$$

$(0 < \epsilon < 1)$ এর মান।




## 11.6 উদাহরণমালা

1. 8 বৎসর বয়স্ক বালকদের নিয়ে গৃহীত কোনও পরীক্ষায়, নম্বরের পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতি দেখা গেল 5·2। 20 জন বালকের নম্বরের একটি সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ করে দেখা গেল যে তার নমুনাজ গড় 16·9। পূর্ণকটিকে নর্মাল পূর্ণক ধরে নিয়ে পূর্ণকের গড়ের 95% আস্থা অন্তরটি নির্ণয় করুন।

$$\left[\text{প্রদত্ত, } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1\cdot96}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 0\cdot025\right]$$

ধরা যাক, $X$ হল পূর্ণকের সমসম্ভব চল। পূর্ণকটির নিবেশন নর্মাল। পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতি $\sigma =$ 5·2। $m$ পূর্ণকের গড়। এখন আমরা একটি নমুনাঙ্ক $u = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - m)}{\sigma}$ গ্রহণ করলাম। যার নমুনাজ নিবেশন $N(0, 1)$।

95% আস্থা অন্তর নির্ণয়ে আস্থা অঙ্কটি হবে অর্থাৎ, $1 - \in = 0{\cdot}95$ বা, $\in = 0{\cdot}05$।

এখন, $U = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - m)}{\sigma}$ হল নমুনাঙ্ক, $u = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - m)}{\sigma}$ এর সাপেক্ষে সমসম্ভব চল। $\in$ এর উপর নির্ভরশীল দুটি সংখ্যা $+u_\in$ এবং $-u_\in$ পেতে পারি যার জন্য $P(-u_\in < U < u_\in) = 0{\cdot}95$।

$$\therefore \; P\left(\overline{X} - \sigma\frac{u_\in}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + \sigma\frac{u_\in}{\sqrt{n}}\right) = 0{\cdot}95$$

95% আস্থা অন্তরটি হবে,

$$\left(\bar{x} - \sigma\frac{u_\in}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \sigma\frac{u_\in}{\sqrt{n}}\right)$$

আবার, $$P(-u_\in < U < u_\in) = 0{\cdot}95$$

$$\Rightarrow \; P(U > u_\in) = 0{\cdot}025$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_\in}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 0{\cdot}025$$

প্রদত্ত মান থেকে পাই,

$$u_\in = 1{\cdot}96$$

এখন, নমুনাজ গড় $\bar{x} = 16{\cdot}9$

$$n = 20 \text{ এবং } \sigma = 5{\cdot}2$$

সুতরাং, $$\bar{x} - \sigma\frac{u_\in}{\sqrt{n}}$$

$$= 16{\cdot}9 - 5{\cdot}2\,\frac{1{\cdot}96}{\sqrt{20}} \simeq 14{\cdot}62$$

$$\bar{x} + \frac{u_\in}{\sqrt{n}}\sigma = 16{\cdot}9 - 5{\cdot}2\,\frac{1{\cdot}96}{\sqrt{20}} \simeq 19{\cdot}18$$

পূর্ণকের গড়ের জন্য নির্ণেয় আস্থা অন্তরটি হল $(14{\cdot}62,\ 19{\cdot}18)$।

2. সমসম্ভব নমুনা থেকে পাওয়া গেছে যে 10টি ধাতব পাত্রের বেধের ভেদমান 0·04 বর্গ মিলিমিটার। ধাতব পাত্রের বেধের নিবেশন নর্মাল নিবেশন মান্য করে ধরে নিয়ে পুরুত্বের ভেদমানের জন্য একটি 0·95 আস্থা অঙ্কের আস্থা অন্তর নির্ণয় করুন।

এক্ষেত্রে, পূর্ণকের ভেদমান $\sigma^2$-এর জন্য অন্তর প্রাককলন করতে হবে।

$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ একটি নমুনাঙ্ক নেওয়া হল সেটির $\chi^2(n-1)$ নিবেশন বর্তমান।

এখানে, নমুনার আয়তন $n$ এবং নমুনাজ ভেদমান $S^2$।

আস্থা অঙ্কটি হল $1 - \epsilon = 0.95$, $\epsilon = 0.05$। এক্ষেত্রে আমরা দুটি সংখ্যা $\chi^2_{\epsilon_1}$ এবং $\chi^2_{\epsilon_2}$ খুঁজে পাই যার জন্য

$$P\left(\chi^2_{\epsilon_1} < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\epsilon_2}\right) = 0.95$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{n}{\chi^2_{\epsilon_2}} S^2 < \sigma^2 < \frac{n}{\chi^2_{\epsilon_1}} S^2\right) = 0.95$$

সুতরাং $\sigma^2$ এর জন্য আস্থা অন্তরটি হবে, $\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{\epsilon_2}}, \frac{nS^2}{\chi^2_{\epsilon_1}}\right)$।

এখন $\chi = 0.05$ হলে $\chi^2_{\epsilon_1}$ এবং $\chi^2_{\epsilon_2}$ এর মান পাই,

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\epsilon_1}) = 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

$$= 1 - 0.025$$

$$= 0.975$$

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\epsilon_2}) = \frac{\epsilon}{2} = 0.025$$

যেখানে, $\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ হল $\chi^2(9)$ চল। $(\because \; n = 10)$

$X^2$ এর টেবিল থেকে পাই,

$$\chi^2_{\epsilon_1} = 2.700 \text{ এবং } \chi^2_{\epsilon_2} = 19.023 \text{।}$$

প্রদত্ত নমুনার ক্ষেত্রে, $n = 10$

এবং $S^2 = 0.04$

$$\frac{nS^2}{\chi^2_{\epsilon_2}} = \frac{10 \times 0.04}{19.023} = \frac{0.4}{19.023}$$

$$\frac{nS^2}{\chi^2_{\epsilon_1}} = \frac{10 \times 0.04}{2.700} = \frac{0.4}{2.700}$$

সুতরাং বেধের ভেদমানের জন্য 0.95 আস্থা অঙ্কের আস্থা অন্তর হল,

$$\left(\frac{0.4}{19.023}, \frac{0.4}{2.700}\right)$$

3. ধরা যাক, কোনও বিশ্ববিদ্যালয়ের ছাত্রদের উচ্চতার নিবেশনটি নর্মাল নিবেশন, যার পূর্ণকের ভেদমান 6·1504 ইঞ্চি, 100 জন ছাত্রের একটি সমসম্ভব নমুনা গ্রহণ করে দেখা গেল নমুনাজ গড় 68·52 ইঞ্চি। বিশ্ববিদ্যালয়ের ছাত্রদের গড় উচ্চতার 98% অন্তর প্রাককলন করুন।

**সমাধান ঃ** এখানে, প্রদত্ত পূর্ণকটি নর্মাল। পূর্ণকের গড় $m$ এর জন্য আস্থা অন্তর নির্ণয় করতে হলে নমুনাঙ্কটি নিতে হবে,

$$u = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - n\right)}{\sigma}$$

যেহেতু এখানে পূর্ণকের ভেদমান $\sigma^2$ এর মান প্রদত্ত, $\sigma^2 = 6{\cdot}1504$।

নমুনাঙ্কটির নমুনাজ নিবেশন $N(0, 1)$। এখন, 98% আস্থা অন্তর নির্ণয়ে আস্থা অঙ্কটি হল, $1 - \in = 0{\cdot}98$ প্রদত্ত আস্থা অঙ্কের উপর ভিত্তি করে আমরা এমন দুটি সংখ্যা $\pm u_{\in}$ খুঁজে বার করব যার জন্য

$$P(-u_{\in} < U < u_{\in}) = 0{\cdot}98$$

যেখানে, $U = \dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - m\right)}{\sigma}$, নমুনাঙ্ক $u = \dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{x} - m\right)}{\sigma}$ এর সাপেক্ষে সমসম্ভব চল।

$$\in = 0{\cdot}02$$

$$\therefore \quad P(-u_{\in} < U < u_{\in}) = 0{\cdot}98$$

$$\Rightarrow \quad P(U > u_{\in}) = \frac{\in}{2} = \frac{0{\cdot}02}{2} = 0{\cdot}01$$

নর্মাল নিবেশনের টেবিল থেকে পাই, $u_{\in} = 2{\cdot}327$

প্রদত্ত, $\bar{x} = 68{\cdot}52$

$n = 100$

এবং $\sigma = \sqrt{6{\cdot}1504} = 2{\cdot}48$

এখন, পূর্ণকের গড় $m$ এর জন্য 98% আস্থা অন্তরটি হল,

$$\left(\bar{x} - \sigma\frac{u_{\in}}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \sigma\frac{u_{\in}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{x} - \sigma\frac{u_{\in}}{\sqrt{n}} = 68{\cdot}52 - \frac{(2{\cdot}48)\,(2{\cdot}327)}{\sqrt{100}}$$

$$= 67{\cdot}943$$

$$\bar{x} + \sigma \frac{u_\epsilon}{\sqrt{n}} = 68.52 + \frac{(2.48)\,(2.327)}{\sqrt{100}} = 69.097$$

$\therefore$ নির্ণেয় আস্থা অন্তরটি হল

$$(67.943,\ 69.097)$$

4. বর্ষাকালে পশ্চিমবঙ্গের একটি বিশেষ অঞ্চলে বৃষ্টিপাতের পরিমাপ করা হল কয়েকটি দিনের বৃষ্টিপাতের পরিমাপগুলি হল (মিলিমিটারে) 9·4, 8·8, 10·6, 12·2, 11·8, 11·4, 9·9, 10·8, 12·1 এবং 11·7। পূর্ণকের গড় এবং প্রমাণ বিচ্যুতির জন্য 99% আস্থা অন্তরটি নির্ণয় করুন। এক্ষেত্রে বৃষ্টিপাতের পরিমাপে পূর্ণকটিকে নর্মাল হিসাবে ধরা যাবে।

সমাধান :

প্রথমভাগ : যেহেতু প্রদত্ত পূর্ণকটি নর্মাল সুতরাং পূর্ণকের গড়ের জন্য আস্থা অন্তর নির্ণয় করতে হলে এবং পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতি অজানা হলে আমরা নমুনাঙ্ক ধরব, $t = \dfrac{(\bar{x} - m)\sqrt{n}}{s}$

যেখানে, $\bar{x}$ = নমুনাজ গড়

$n$ = নমুনার আয়তন

$m$ = পূর্ণকের গড়

$$s^2 = \frac{n}{n-1} S^2$$

যেখানে, $S^2$ = নমুনাজ ভেদমান

এখানে, নমুনাঙ্ক $t$ এর নিবেশন হল $t$ নিবেশন যার স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রা $(n-1)$।

| $x_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|
| 9·4 | 88·36 |
| 8·8 | 77·44 |
| 10·6 | 112·36 |
| 12·2 | 148·84 |
| 11·8 | 139·24 |
| 11·4 | 129·96 |
| 9·9 | 98·01 |
| 10·8 | 116·64 |
| 12·1 | 146·41 |
| 11·7 | 136·89 |
| মোট 108·7 | 1194·15 |

এখানে, $n = 10$

$$\overline{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{108.7}{10} = 10.87$$

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\overline{x})^2$$

$$= \frac{1194.15}{10} - (10.87)^2 = 1.2581$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{10}{9} \cdot 1.2581 = 1.3979$$

$$\therefore \quad S = 1.12165, \quad s = 1.18233$$

আস্থা অঙ্কটি $1 - t$ হলে আমরা এমন দুটি সংখ্যা খুঁজে পাব যাতে,

$$P(-t_\epsilon < t < t_\epsilon) = 1 - \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad P(t > t_\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$$

যেখানে, $t$ হল নমুনাঙ্ক $t$ এর সাপেক্ষে গৃহীত সমসম্ভব চল, অর্থাৎ, $t = \dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{x} - m)}{s}$।

99% আস্থা অন্তর নির্ণয়ে আস্থা অঙ্ক $1 - \epsilon = 0.99$ বা, $\epsilon = 0.01$।

$$\therefore \quad P(t > t_\epsilon) = 0.005$$

এখানে, $t$ এর নিবেশন $t$ নিবেশন (স্বাতন্ত্রতার মাত্রা 9)।

সুতরাং টেবিল থেকে পাই, $t_\epsilon = 3.250$।

এখানে, পূর্ণকের গড় $m$ এর জন্য আস্থা অন্তরটি হবে, $\left(X - \dfrac{st_\epsilon}{\sqrt{n}},\ X + \dfrac{st_\epsilon}{\sqrt{n}}\right)$।

বা, $$\left(10.87 - \frac{(1.18233)\ (3.250)}{\sqrt{10}},\ 10.87 + \frac{(1.18233)\ (3.250)}{\sqrt{10}}\right)$$

অর্থাৎ, $(9.65,\ 12.09)$

দ্বিতীয় ভাগ : পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতির জন্য আস্থা অন্তর নির্ণয়ে একটি নমুনাঙ্ক $\chi^2 = \dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ ধরা যাক

কটির নিবেশন হল $\chi^2$ নিবেশন স্বাতন্ত্রতার মাত্রা $(n - 1)$। $n$ হল নমুনার আয়তন এবং $S^2$ হল নমুনাজ ভেদমান। এখন, $1 - \epsilon$ আস্থা অঙ্ক হলে আমরা এমন দুটি সংখ্যা $\chi^2_{\epsilon_1}$ এবং $\chi^2_{\epsilon_2}$ খুঁজে পাই যার জন্য,

$$P(\chi^2_{\epsilon_1} < \chi^2 < \chi^2_{\epsilon_2}) = 1 - \epsilon$$

এখানে, $1-\epsilon = 0{\cdot}99$

$\therefore \quad \epsilon = 0{\cdot}01$

$\chi^2_{\epsilon_1}$ এবং $\chi^2_{\epsilon_2}$ এর মান পাই,

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\epsilon_1}) = 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

$$= 1 - 0{\cdot}005 = {\cdot}995$$

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\epsilon_2}) = \frac{\epsilon}{2} = 0{\cdot}005$$

$\chi^2$ চলের স্বাতন্ত্রতার মাত্রা $(10-1) = 9$ হলে টেবিল থেকে পাই,

$\chi^2_{\epsilon_1} = 1{\cdot}734926,\ \chi^2_{\epsilon_2} = 23{\cdot}5893$

অতএব, পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতি σ এর আস্থা অন্তরটি হবে, $\left(S\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{\epsilon_2}}},\ S\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{\epsilon_1}}}\right)$

$$S\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{\epsilon_2}}} = (1{\cdot}12165)\sqrt{\frac{10}{23{\cdot}5893}}$$

$$= 0{\cdot}730$$

$$S\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{\epsilon_1}}} = (1{\cdot}12165)\sqrt{\frac{10}{1{\cdot}734926}}$$

$$= 2{\cdot}693$$

অর্থাৎ, নির্ণেয় 99% আস্থা অন্তরটি হল (0·730, 2·693)।

5. একটি পরীক্ষায় 17 জন পরীক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের গড় 57 এবং ভেদমান 64 হলে, পূর্ণকটিকে নর্ম্যাল ধরে নিয়ে পূর্ণকের গড়ের আস্থা অন্তরটি নির্ণয় করুন (আস্থা অঙ্ক 0·99 ধরে)। পূর্ণকটি নর্মাল এবং পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতি অজানা হওয়ায় পূর্ণকের গড়ের ($m$) আস্থা অন্তর নির্ণয়ে গৃহীত নমুনাঙ্কটি হবে,

$$t = \frac{(\bar{x} - m)\sqrt{n}}{s}$$

যার নমুনাজ নিবেশনটি হল $t$ নিবেশন (স্বাতন্ত্রতার মাত্রা $n-1$)। এখানে, $\bar{x}$ হল নমুনাজ গড় এবং $n$ হল নমুনার আয়তন,

$$\bar{x} = 57,\ n = 17 \text{ এবং } S^2 = 64$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{17}{16}\cdot(64)$$

$$= 68$$

$$\therefore \quad s = 8{\cdot}2462$$

আস্থা অঙ্কটি $1-\in$ হলে,

$$P(-t_{\in} < t < t_{\in}) = 1 - \in$$

$$\Rightarrow \qquad P(t > t_{\in}) = \frac{\in}{2}$$

প্রদত্ত, $1 - \in = 0{\cdot}99$ ; $\in = 0{\cdot}01$

সুতরাং $\frac{\in}{2} = 0{\cdot}005$

$\therefore \quad P(t > t_{\in}) = 0{\cdot}005$

যেখানে $t$ এর নিবেশন হল $t$ নিবেশন (স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রা 16)।

$\therefore \quad t_{\in} = 2{\cdot}921$

সুতরাং এক্ষেত্রে $m$ এর জন্য আস্থা অন্তরটি হবে, $\left(\bar{x} - \frac{st_{\in}}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \frac{st_{\in}}{\sqrt{n}}\right)$

$$\bar{x} - \frac{st_{\in}}{\sqrt{n}} = 57 - \frac{(8{\cdot}2462)\,(2{\cdot}921)}{\sqrt{17}}$$

$$= 51.158$$

$$\bar{x} + \frac{st_1}{\sqrt{n}} = 57 + \frac{(8{\cdot}2462)\,(2{\cdot}921)}{\sqrt{17}}$$

$$= 62{\cdot}842$$

অতএব, পূর্ণকের গড়ের আস্থা অন্তরটি হবে,

$$(51{\cdot}158,\ 62{\cdot}842)$$

[সংকেত ঃ নমুনাঙ্ক $u = \frac{(\bar{x} - m)\sqrt{n}}{\sigma}$

$$P\left(\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - m)}{\sigma} \geq 1{\cdot}960\right) = 0{\cdot}025$$

$$u_{\in} = 1{\cdot}960]$$

## 11.7 সারাংশ

এই এককে মূলত নর্ম্যাল $(m, \sigma)$ সমগ্রকের ক্ষেত্রে পূর্ণকাঙ্ক $m$ এবং $\sigma$ এর জন্য আস্থা অন্তর নির্ণয় করার পদ্ধতি বুঝিয়ে বলা হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণে $m$ ও $\sigma$ এর আস্থা অন্তর নির্ণয় করা হয়েছে।

## 11.8 অনুশীলনী

1. একটি নর্ম্যাল সমগ্রকের ভেদমান 8। এই সমগ্রক থেকে একটি 36 আকারের সমসম্ভব নমুনা সংগ্রহ করলে, নমুনা গড় হয় 48। সমগ্রকটির গড় $m$ এর জন্য 95% আস্থা অন্তর নির্ণয় করুন।

   [সংকেত : $\sigma$ অজানা, পূর্ণকের গড়ের আস্থা অন্তরের জন্য নমুনাঙ্ক, $t = \dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{x} - m\right)}{s}$।

   $t$ এর নিবেশন $t$ নিবেশন (স্বাতন্ত্রতার মাত্রা 9)]

2. একটি পরীক্ষায় 18 জন ছাত্র-ছাত্রীর নম্বরের গড় 56 এবং ভেদমান 65। নম্বরের পূর্ণকটিকে নর্মাল ধরে নিয়ে পূর্ণকের গড়ের 95% আস্থা অন্তর নির্ণয় করুন।

   [সংকেত : নমুনাঙ্ক $t = \dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{x} - m\right)}{s}$

   যেহেতু $\sigma$ অজানা। $n = 18, \bar{x} = 56$

   $$S^2 = 65,\ s^2 = \frac{n}{n-1} S^2$$

   স্বাতন্ত্রতার মাত্রা 17 হলে $P(|t| > 2{\cdot}11) = 0{\cdot}05$]

3. একটি স্কুলের 10 জন বালক-বালিকার একটি সমসম্ভব নমুনা গ্রহণ করে দেখা গেল তাদের ওজন (পাউন্ডে) 38, 46, 45, 40, 35, 39, 44, 45, 33 এবং 37। বালক-বালিকার ওজনের পূর্ণকের গড়ের 95% আস্থা অন্তরটি নির্ণয় করুন। পূর্ণকটিকে নর্মাল ধরা যায়।

4. 16 জন পরীক্ষামূলক প্রাণীদের একটি সমসম্ভব নমুনার উপর একটি নতুন ওষুধ প্রয়োগ করে দেখা গেল তাদের গড় ওজন 20 কেজি বেড়েছে। ওজন বর্ধিত হওয়ার পূর্ণকটিকে নর্ম্যাল ধরে নিয়ে ওজন বর্ধিত হওয়ার গড়ের আস্থা অন্তরটিকে নির্ণয় করুন। প্রদত্ত আস্থা অঙ্ক 0·95 এবং পূর্ণকের ভেদমান 4।

   [সংকেত : নমুনাঙ্ক $u = \dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{x} - m\right)}{\sigma}$

   $$\sigma = 2,\ n = 16,\ \bar{x} = 20]$$

5. চিনা বাদামের একটি বৃহৎ পূর্ণক থেকে 12 আয়তনের একটি সমসম্ভব নমুনা গ্রহণ করে দেখা গেল তাদের ওজন (গ্রামে) : 3·86, 3·50, 4·12, 3·67, 4·08, 3·61, 3·79, 4·01, 4·05, 3·91, 3·97, 3·72 পূর্ণকের গড় এবং প্রমাণ বিচ্যুতির জন্য 98% আস্থা অন্তর দুটি নির্ণয় করুন। পূর্ণকটিকে নর্ম্যাল ধরা যেতে পারে।

## 11.9 উত্তরমালা

1. (45·06, 50·94) ; 2. (51·874, 60·126); 3. (36·92, 43·48) ; 4. (19·62, 20·98); 5. (3·613, 4·022), (0·134, 0·380).

# একক 12 ❑ প্রকল্প বিচার বা স্বীকৃতির পরীক্ষা (Testing of Hypothesis)

গঠন ঃ



## 12.1 রাশিবিজ্ঞানের প্রকল্প বা স্বীকৃতি (Statistical Hypothesis)

পরিসাংখ্যিক স্বীকৃতি বলতে বোঝায় পূর্ণকের (সমগ্রকের) নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ এর উপর গৃহীত কোনও সিদ্ধান্ত। এই অধ্যায়ে আমরা ধরে নেব যে, নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ এর অপেক্ষকীয় রূপটি জানা আছে এবং অপেক্ষকে কতকগুলি অজানা পূর্ণকাঙ্ক $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots\ldots \theta_k$ জড়িত আছে। একটি প্রকল্প হল অজানা পূর্ণকাঙ্ক $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots\ldots \theta_k$ এর উপর করা কোনও ধারণা ; যার সত্যতা প্রকল্প বিচারের পদ্ধতি অনুসরণ করে ঠিক করতে হবে। উদাহরণ স্বরূপ কিছু বা সমস্ত পূর্ণকাঙ্ক আমাদের ধরে নেওয়া মানটি গ্রহণ করবে কী না বা নির্দিষ্ট অন্তরের মধ্যে অবস্থিত হবে কী না তা বিচার করে বলা যাবে।

স্বীকৃতিকে দুটি ভাগে ভাগ করা যেতে পারে ঃ সরল স্বীকৃতি (Simple hypothesis) এবং মিশ্র স্বীকৃতি (Composite hypothesis)। একটি স্বীকৃতির $H_o : \theta_j = \theta_{oj}$ $(j = 1, 2, \ldots\ldots, k)$ যেখানে, $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots \theta_k$ হল পূর্ণকাঙ্ক ; $\theta_{oj}$ গুলি হল প্রদত্ত সংখ্যা। অর্থাৎ, একটি স্বীকৃতিতে যদি আমরা সমস্ত পূর্ণকাঙ্কগুলির নির্দিষ্ট মান ধরেনি, তবে সেই স্বীকৃতিটিকে বলা হবে সরল স্বীকৃতি এবং স্বীকৃতিটি সরল না হলেই সেটিকে মিশ্র স্বীকৃতি বলা হবে।

উদাহরণস্বরূপ, একটি $N(m, \sigma)$ পূর্ণকের সমক বিচ্যুতি প্রদত্ত 1 ধরা যাক $\sigma = 1$, এখন একটি স্বীকৃতি $H' : m = 2$ ধরা হলে স্বীকৃতিটিকে সরল স্বীকৃতি বলা যাবে।

কিন্তু, একটি $N(m, \sigma)$ পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতি অজানা হলে, একটি স্বীকৃতি $H'' : \mathrm{m} = 1$ ধরা হলে, এই স্বীকৃতিটিকে মিশ্র স্বীকৃতি বলা যায়।

এখন আমরা যদি, $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots\ldots \theta_k)$ লিখি যেখানে $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots \theta_k$ পূর্ণকের অজানা পূর্ণকাঙ্ক। সুতরাং, $\Theta$, $k$- মাত্রীয় পূর্ণকাঙ্ক দেশ (Parametric space) $P_k$ এ একটি বিন্দুকে প্রকাশ করে। এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে, পূর্ণকাঙ্ক দেশের যে-কোনো বিন্দু দ্বারা নির্দেশিত মানগুলি পূর্ণকাঙ্ক গুলির মান নাও হতে পারে। যেমন, $N(m, \sigma)$ পূর্ণকের পূর্ণকাঙ্ক দেশ $P_2$। কিন্তু $\sigma > 0$ হওয়ায় $(m, \sigma)$ বিন্দুগুলি পূর্ণকাঙ্ক দেশ $P_2$ এর একটি সাবসেট হয়। পরিসংখ্যান স্বীকৃতিটিকে আমরা নিম্নলিখিত উপায়ে প্রকাশ করতে পারি।

$H_0 : \Theta \in \omega$

যেখানে, $\omega$ হল $P_k$ এর সাবসেট্।

যদি $\omega$ সেটে কেবলমাত্র একটি বিন্দু থাকে $\Theta_0 = (\theta_{01}, \theta_{02}, \ldots\ldots, \theta_{0k})$ তাহলে $H_o : \Theta = \Theta_0$ বা, $\theta_j = \theta_{oj}$ $(j = 1, 2, \ldots\ldots k)$।

এখানে, $Ho$ হল একটি সরল স্বীকৃতি। যদি, $\omega$ সেটটির মধ্যে একাধিক বিন্দু থাকে তবে গৃহীত $H_0$ স্বীকৃতিটি মিশ্র স্বীকৃতি।

উদাহরণ ঃ একটি নর্মাল $(m, \sigma)$ পূর্ণক ধরা যাক।

(a) $H_0 : m = 2, \sigma = 0.1$ হল একটি সরল স্বীকৃতি। এক্ষেত্রে $\omega$ সেটটির একটি একপদী (Singelton) সেট্ $(2, 0.1)$।

(b) $H_0 : m = 4$. যেখানে $\sigma$ এর মান অজানা। এখানে $\omega$ সেটটির বিন্দুসমগ্র পূর্ণকাঙ্ক দেশে $m = 4$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। এখানে, $Ho$ একটি মিশ্র স্বীকৃতি (Composite Hypothesis)।

(c) $H_0 : 3 < m < 5$ স্বীকৃতিটি একটি মিশ্র স্বীকৃতি। এক্ষেত্রে $\omega$ সেটটির সমস্ত বিন্দুগুলি পূর্ণকাঙ্ক দেশের দুটি সমান্তরাল সরলরেখা $m = 3$ এবং $m = 5$ এর মধ্যে অবস্থিত সমগ্র বিন্দুসমূহের সেট্।

## 12.2 মুখ্য প্রকল্প বা স্বীকৃতি (Null Hypothesis) এবং বৈকল্পিক প্রকল্প (Alternative Hypothesis)

আমরা প্রায়শই এরকম একটি স্বীকৃতি নির্বাচন করি যেখানে আমরা আশা করি স্বীকৃতির পরীক্ষা দ্বারা স্বীকৃতিটি ভুল প্রমাণ করা যাবে, যদিও স্বীকৃতিটি সত্য হতে পারে। এই ধরনের স্বীকৃতিকে মুখ্য স্বীকৃতি বলি।

কোনো কোনো ক্ষেত্রে স্বীকৃতি নির্বাচন করলে দেখা যায়, হয় $H_0 : \Theta \in \omega$ অথবা $H_1 : \Theta \in \omega_1$। যেখানে $\omega$ $\omega_1$ পূর্ণাঙ্ক দেশ $P_k$ এর দুটি সেট এবং এরা পরস্পর বিচ্ছিন্ন। যেমন, যদি আমাদের স্বীকৃতি নির্বাচনে স্বীকৃতির পরীক্ষাটি নির্বাচন করা দ্বিতীয় স্বীকৃতির উপর বেশি ঝুঁকে থাকে, তবে আমরা মুখ্য স্বীকৃতিটি নির্বাচন করি নিম্নলিখিত ভাবে, যথা—

$$H_0 : \Theta \in \omega$$

যেটি বৈকল্পিক প্রকল্প, $H_1 : \Theta \in \omega_1$ এর বিপরীতে পরীক্ষা করতে হবে। এক্ষেত্রে আশা করা যায় যে, পরীক্ষা দ্বারা মুখ্য স্বীকৃতিটি ভুল প্রমাণিত হবে এবং বৈকল্পিক প্রকল্পটি সুপ্রতিষ্ঠিত হবে।

সাধারণভাবে বলতে পারা যায় যে, আমরা প্রথমে একটি মুখ্য স্বীকৃতি $H_0$ এবং তার বিপরীতে একটি বৈকল্পিক স্বীকৃতি $H_1$ ধরে নিই। যদি কোনও ক্ষেত্রে একটি মুখ্য স্বীকৃতি $H_0$ এর বিপরীতে কোনও বৈকল্পিক স্বীকৃতি না বলা থাকে তবে সেই ক্ষেত্রে বৈকল্পিক স্বীকৃতি $H_1$ টি মুখ্য স্বীকৃতিটির ঠিক বিপরীত। অর্থাৎ,

$$H_1 : \Theta \in \bar{\omega}$$

যেখানে, $\bar{\omega}$, $\omega$ সেটটির প্রাচলদেশ $P_k$ তে পূরক (complement) সেট্।

## 12.3 স্বীকৃতির পরীক্ষা এবং সংশয়াঞ্চল (Critical Region and Testing of Hypothesis)

পূর্ণক থেকে একটি $n$ আয়তনের নমুনা সংগ্রহ করা হল ঃ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$। এই নমুনার উপর ভিত্তি করে আমরা নির্ণয় করি যে গৃহীত মুখ্য স্বীকৃতিটি সঠিক না ভুল। গাণিতিক পদ্ধতিতে এই স্বীকৃতি বিচারের পদ্ধতিকে স্বীকৃতির পরীক্ষা বলা হয়। সম্পূর্ণ নিশ্চিতভাবে কোনও স্বীকৃতি সম্বন্ধে সিদ্ধান্তে আসা যায় না। এক্ষেত্রে আমরা স্বীকৃতির পরীক্ষাটির সংশয় বিচার করি। স্বীকৃতি বিচারের পদ্ধতিকে বলে সংশয় বিচার (Test of Significance)। এইভাবে বিচার করলে দুই ধরনের ভ্রান্তি ঘটতে পারে যা নীচে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

**স্বীকৃতির পরীক্ষায় দুই ধরনের ভ্রান্তি (Two types of error) :**

স্বীকৃতির পরীক্ষায় আমরা মুখ্য স্বীকৃতি $H_0$ টি ধরে নিই। আমরা জানি না $H_0$ সত্য কিনা। এখানে দুটি সম্ভাবনা রয়েছে। একটি হল $H_0$ সত্য অন্যটি হল $H_0$ সত্য নয়। কিন্তু যেহেতু আমরা নমুনালব্ধ তথ্যের ভিত্তিতে তা বিচার করছি প্রত্যেক ক্ষেত্রেই আমাদের দুই ধরনের সিদ্ধান্ত নেওয়ার সম্ভাবনা রয়েছে—একটি হল $H_0$ কে গ্রহণ করা এবং অন্যটি হল $H_0$ কে বর্জন করা। ফলে চারটি অবস্থার উদ্ভব হতে পারে,

(a) $H_0$ সত্য এবং $H_0$ গ্রহণ করা হয়েছে।

(b) $H_0$ সত্য কিন্তু $H_0$ বর্জন করা হয়েছে।

(c) $H_0$ সত্য নয় এবং $H_0$ বর্জন করা হয়েছে।

(d) $H_0$ সত্য নয় কিন্তু $H_0$ গ্রহণ করা হয়েছে।

এর মধ্যে প্রথম এবং তৃতীয় ক্ষেত্রে সিদ্ধান্ত সঠিক। কিন্তু দ্বিতীয় এবং চতুর্থ ক্ষেত্রে সিদ্ধান্ত সঠিক হয়নি। দ্বিতীয় এবং চতুর্থ ক্ষেত্রে উদ্ভূত ভ্রান্তিকে সমগ্রক থেকে নেওয়া সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ এর সাহায্যে আমাদের মুখ্য প্রকল্প $Ho : \Theta \in \omega$, বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 : \Theta \in \omega_1$ এর সঙ্গে বিচার করতে হবে।$\Theta$

আমরা লক্ষ্য করছি যে-কোনো নমুনা $(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ নমুনাদেশ (Sample space) $\mathrm{IR}^n = \{(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) : x_i \in \mathrm{IR}, i = 1, 2, \ldots\ldots n\}$ এর একটি বিন্দু।

প্রকল্প বিচারের জন্য আমাদের প্রথমে $\mathrm{IR}^n$ এর একটি উপসেট $W$ বেছে নিতে হবে যেখানে $W (\subseteq \mathrm{IR}^n)$ কে বিচারের সংশয়াঞ্চল (Critical region) বলা হবে। মনে করুন $\overline{W} = \mathrm{IR}^n - W$.

এখন বিচারপদ্ধতি নীচে বিবৃত করা হল :

সমগ্রক থেকে নেওয়া সমসম্ভব নমুনা $(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ এর ক্ষেত্রে, যদি নমুনা বিন্দু $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \in W$ হয় তাহলে $H_0$ কে বর্জন করা হবে (এবং তাহলে $H_1$ কে গ্রহণ করতে হবে) ও যদি $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \in \overline{W}$ হয় তাহলে $H_0$ কে গ্রহণ করা হয় (সুতরাং $H_1$ কে বর্জন করতে হবে)। এইজন্য $W$ কে বর্জনাঞ্চল (rejection region) এবং $\overline{W}$ কে গ্রহণাঞ্চল (acceptance region) বলা হয়।

অবস্থা *(b)* এর ক্ষেত্রে অর্থাৎ $H_0$ সত্য কিন্তু $H_0$ কে বর্জন করা হলে যে ভ্রান্তি হয় তাকে প্রথম প্রকার ভ্রান্তি (Type I error) এবং (d) এর ক্ষেত্রে অর্থাৎ $H_0$ সত্য নয় কিন্তু $H_0$ কে গ্রহণ করা হলে যে ভ্রান্তি হয় তাকে দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তি (Type II error) বলে।

নমুনা বিন্দু $x = (X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ সংশয়াঞ্চলটি $W$ এবং গ্রহণযোগ্য অঞ্চলটি $W'$ হলে প্রথম প্রকার ভ্রান্তি ঘটার সম্ভাবনা হল,

$$P(x \in \overline{W} | \Theta \in \omega)$$

দ্বিতীয় প্রকারের ভ্রান্তির সম্ভাবনা হল,

$$\begin{aligned} &P(x \in \bar{W} \mid \Theta \in \omega_1) \\ &= 1 - P(x \in W \mid \Theta \in \omega_1) \\ &= 1 - \beta(W) \end{aligned}$$

যেখানে, $\beta(W) = P(x \in W \mid \Theta \in \omega_1)$

$\beta(W)$ কে $H_1$ সাপেক্ষে সংশয়াঞ্চল $W$ এর শক্তি বা শুধু প্রকল্প বিচারের শক্তি (Power of the test) বলে। স্বীকৃতির ক্ষেত্রে দুটি ভ্রান্তিকে নিম্নলিখিত টেবিলের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

| প্রকৃত অবস্থা<br>সিদ্ধান্ত | $H_0$ সত্য<br>অর্থাৎ $H_1$ সত্য নয় | $H_0$ সত্য নয়<br>অর্থাৎ $H_1$ সত্য |
|---|---|---|
| $H_0$ গৃহীত হয়েছে | সঠিক সিদ্ধান্ত | দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তি |
| $H_0$ বর্জিত হয়েছে | প্রথম প্রকার ভ্রান্তি | সঠিক সিদ্ধান্ত |

## 12.4 সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চল (Best Critical Region)

স্বীকৃতির পরীক্ষায় প্রাপ্ত ফলাফলটি উত্তমরূপে নির্ণয় করতে হলে উদ্ভূত ভ্রান্তিগুলিকে যথাসম্ভব হ্রাস করতে হবে। কিন্তু প্রায়শই দেখা যায় যে এক প্রকারের ভ্রান্তির সম্ভাবনা হ্রাস করালে অন্য প্রকারের ভ্রান্তির সম্ভাবনা বর্ধিত হয়। একইসঙ্গে উভয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা হ্রাসপ্রাপ্ত হবার সম্ভাবনা প্রায় অসম্ভব। এক্ষেত্রে আমরা দুই প্রকারের ভ্রান্তির হ্রাসের মধ্যে একটি সমন্বয় করতে থাকি যাতে পরীক্ষাটির ফল চরম পর্যায়ে নির্ণয় করা যায়।

1. প্রথমে, প্রথম প্রকার ভ্রান্তি ঘটার সম্ভাবনাকে একটি নির্দিষ্ট ক্ষুদ্র সংখ্যা $\in$ $(\sigma < \in < 1)$ ধরা হল, $P(x \in W \mid \Theta \in \omega) = \in$

$\in$ কে বলা হয় স্বীকৃতির পরীক্ষাটির সংশয়মাত্রা (Significance level)। উপরে লিখিত সমীকরণটি ব্যাপকার্থে সংশয়াঞ্চল গুচ্ছকে প্রকাশ করে যাদের সংশয়মাত্রা $\in$।

2. এখন এই সমস্ত সংশয়াঞ্চল গুচ্ছ থেকে আমরা সেই সংশয়াঞ্চলটি চয়ন করি (যদি করা যায়) যার মধ্যে দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তি ঘটার সম্ভাবনাটি সবচেয়ে কম থাকে। এই সংশয়াঞ্চলটিকে $\in$ সংশয়মাত্রায় সেই সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চল (Best Critical Region) বলে।

## 12.5 সরল স্বীকৃতির জন্য সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চল (Best Critical Region for Simple Hypothesis)—নেম্যান-পিয়ার্সনের উপপাদ্য

সরল স্বীকৃতির $H_0 : \Theta = \Theta_0$ পরীক্ষায় সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চলটি, একটি সরল বৈকল্পিক স্বীকৃতির সাপেক্ষে, $H_1 : \Theta = \Theta_1$ নিম্নলিখিত উপপাদ্যের দ্বারা নির্ণীত হয়।

**নেম্যান-পিয়ারসনের উপপাদ্য (Neyman-Pearson's Theorem)**

উপপাদ্য : নমুনাদেশ $IR^n$ এর সমস্ত নমুনা বিন্দু $\tilde{x}$ যারা নিম্নলিখিত অসমীকরণটিকে সিদ্ধ করে

$$\frac{L(\tilde{x}\ ;\ \Theta_0)}{L(\tilde{x}\ ;\ \Theta_1)} < k$$

সেই নমুনাবিন্দু সমূহের সেটটি সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চল $W = W(k)$ হবে। $k(> 0)$ একটি ধ্রুবক যেটিকে সংশয়মাত্রা $\in$ এর অপেক্ষক হিসাবে নির্ণয় করা হয়।

$$P(x \in W|\Theta = \Theta_0) = \in$$

প্রমাণ : ধরা যাক, $\in$ সংশয়মাত্রায় $W'$ হল অন্য আর একটি সংশয়াঞ্চল।

অর্থাৎ, $P(x \in W' | \Theta = \Theta_0) = \in$

স্পষ্টতই যদি আমরা দেখাতে পারি যে, $W$ অঞ্চলটির শক্তি $W'$ অঞ্চলটির শক্তির চেয়ে বেশি অর্থাৎ,

$$\beta(W) > \beta(W')$$

তাহলে উপপাদ্যটি প্রমাণিত হবে।

$$P(x \in W'|\Theta = \Theta_0) = \in$$

এবং $P(x \in W\ |\Theta = \Theta_0) = \in$ থেকে পাই,

$$\int_W L(\tilde{x}, \Theta_0)\, dx = \int_{W'} L(\tilde{x}\ ;\ \Theta_0)\, dx$$

$$[dx = dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_n]$$

$$\Rightarrow \int_{W-WW'} L(\tilde{x}\ ;\ \Theta_0)\, dx = \int_{W'-WW'} L(\tilde{x}\ ;\ \Theta_0)\, dx \ldots\ldots (i)$$

এখন, $(W - WW')$ অঞ্চলে,

$$L(\tilde{x}\ ;\ \Theta_1) > \frac{1}{k} L(\tilde{x}\ ;\ \Theta_0)$$

এবং $(W' - WW')$ অঞ্চলে,

$$L(\tilde{x}\,;\Theta_1) \le \frac{I}{k} L(\tilde{x}\,;\Theta_0)$$

সুতরাং, $\beta(W) = \int_{W} L(\tilde{x}\,;\Theta_1)dx$

$$= \int_{W-WW'} L(\tilde{x}\,;\theta')dx + \int_{WW'} L(\tilde{x}\,;\Theta_1)dx$$

$$> \frac{I}{k} \int_{W-WW'} L(\tilde{x}\,;\Theta_0)\,dx + \int_{WW'} L(\tilde{x}\,;\Theta_1)\,dx......(ii)$$

এবং $\beta(W') = \int_{W'} L(\tilde{x}\,;\Theta_1)\,dx$

$$= \int_{W'-WW'} L(\tilde{x}\,;\Theta_1)dx + \int_{WW'} L(\tilde{x}\,;\Theta_1)\,dx$$

$$\le \frac{1}{k} \int_{W'-WW'} L(\tilde{x}\,;\Theta_0)dx + \int_{WW'} L(\tilde{x}\,;\Theta_1)da$$

$$\le \frac{1}{k} \int_{W-WW'} L(\tilde{x}\,;\Theta_0)\,dx + \int_{WW'} L(\tilde{x},\Theta_1)\,dx.........(iii)$$

[(*i*) নম্বর সম্পর্ক থেকে পাই]

এখন (*ii*) এবং (*iii*) নম্বর সম্পর্ক থেকে আমরা সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, $\beta(W) > \beta(W)$

সুতরাং, আমাদের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

## 12.6 নেম্যান-পিয়ার্সন উপপাদ্যের সাহায্যে নর্ম্যাল সমগ্রকের জন্য কয়েকটি প্রকল্প বিচার

(*i*) পূর্ণকের গড় ($m$) এর পরীক্ষা ঃ (যখন $\sigma$ এর মান জ্ঞাত)

এখানে, $H_0 : m = m_0$ হল মুখ্য স্বীকৃতি এবং এর সাপেক্ষে বৈকল্পিক স্বীকৃতিটি হল, $H_1 : m = m_1$। এখানে দুটি স্বীকৃতিই সরল। $m_o$, $m_1$ দুটি অসমান বাস্তব সংখ্যা।

আমরা, নেম্যান-পিয়ার্সনের উপপাদ্যের সাহায্যে স্বীকৃতির পরীক্ষাটি করব।

পূর্ণকের সম্ভাবনাশ্রয়ী চল $X$ এর ঘনত্ব অপেক্ষকটি হল,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \text{ যেখানে } \sigma(>0) \text{ এর মান জ্ঞাত।}$$

সুতরাং, পূর্ণক থেকে গৃহীত একটি সমসম্ভব নমুনা $x_1, x_2 \ldots\ldots x^n$ এর সাপেক্ষে আশংসা অপেক্ষকটি হবে,

$$L(\bar{x}\,;m) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}$$

যেখানে $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ স্বীকৃতি $H_0'$ এবং $H_1$ এর অন্তর্গতি আশংকা অপেক্ষক দুটি হল,

$$L(\tilde{x}; m_0) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(xi - m)^2}$$

এবং $L(\tilde{x}; m_1) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(xi-m)^2}$

সুতরাং $\dfrac{L(\tilde{x}; m_0)}{L(\tilde{x}; m_1)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\{(xi - m_0)^2 - (xi - m_1)^2\}}$

নিম্যান-পিয়ারসনের উপপাদ্য অনুসারে $\in$ সংশয়মাত্রায় $(0 < \in < 1)$ সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চলটি W হলে,

$$\bar{x} \in W \Leftrightarrow \frac{L(\tilde{x}\,;m_0)}{L(\tilde{x}\,;m_1)} < k_1$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\{(xi - m_0)^2 - (xi - m_1)^2\}} > k_1$$

যেখানে, $k_1$ হল একটি ধনাত্মক সংখ্যা (যার মান $\in$ এর উপর নির্ভরশীল) যেটিকে নির্ণয় করতে হবে।

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\{(x_i - m_0)^2 - (x_i - m_1)^2\} < \log_e k_1$$

[যেখানে, $\log_e k_1$ এর মান বাস্তব কারণ $k_1 > 0$]

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2\sigma^2}(m_1 - m_0)\sum_{i=1}^{n}(2x_i - m_0 - m_1) < \log_e k_1$$

প্রথম পর্যায় ঃ যখন $m_1 > m_o$ .

এক্ষেত্রে, $-\frac{1}{2\sigma^2}(m_1 - m_o)\sum_{i=1}^{n}(2x_i - m_o - m_1) < \log_e k_1$

$$\Leftrightarrow \; -\sum_{i=1}^{n}(2x_i - m_o - m_1) < \frac{2\sigma^2 \log_e k_1}{(m_1 - m_o)} \qquad [\because \; m_1 - m_o > 0]$$

$$\Leftrightarrow \; \sum_{i=1}^{n}(2x_i - m_o - m_1) > \frac{-2\sigma^2 \log_e k_1}{(m_1 - m_o)}$$

$\Leftrightarrow \; 2n\bar{x} - n(m_o + m_1) > k_2$ [যেখানে, $k_2 = -\frac{2\sigma^2 \log_e k_1}{m_1 - m_o}$ ]

$$\Leftrightarrow \; 2n(\bar{x} - m_o) > k_2 - nm_o + nm_1$$

$$\Leftrightarrow \; \bar{x} - m_o > \frac{k_2 - nm_o + nm_1}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{\bar{x} - m_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{k_2 - nm_o + nm_1}{2\sigma\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \; u > u_\epsilon$$

যেখানে, $u = \frac{\bar{x} - m_o}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$u_\epsilon = \frac{k_2 - nm_o + nm_1}{2\sigma\sqrt{n}}$$

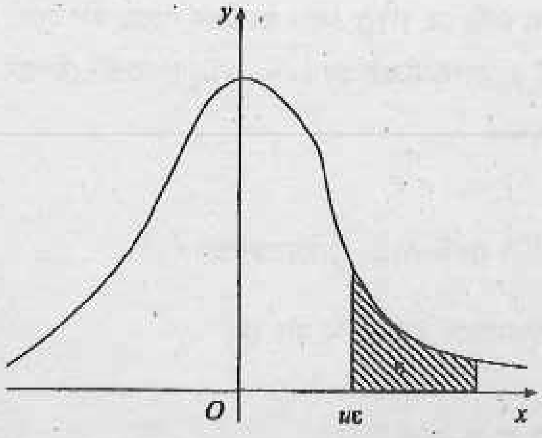
সুতরাং, এক্ষেত্রে যদি $W(\subseteq \mathbb{R}^n)$ সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চল হয়, $\bar{x} \in W \Leftrightarrow u > u_\epsilon$

অর্থাৎ সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চলটি হল $(u_\epsilon, \infty)$ অন্তরটি। যেখানে, $ut$ এর মান, $P(\bar{x} \in W | H_o) = \epsilon$

বা, $P(U > u_\epsilon | m = m_o) = \epsilon$ সম্পর্কের দ্বারা প্রাপ্ত হয়।

যেখানে, $U = \frac{\bar{X} - m_o}{\sigma/\sqrt{n}}$ সমসম্ভব চল এবং চলটির স্বীকৃতি $H_o$ এর সাপেক্ষে নর্মাল $(0, 1)$ নিবেশন আছে।

এই ক্ষেত্রে, সমসম্ভব নমুনা $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ এর সাপেক্ষে প্রাপ্ত নমুনাঙ্ক $u = \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - m_0)}{\sigma}$ এর মান যদি সংশয়াঞ্চল $(u_\epsilon, \infty)$ এর মধ্যে থাকে তবে আমরা $H_0$ স্বীকৃতিকে বর্জন করি এবং যদি না থাকে তবে আমরা স্বীকৃতি $H_0$ কে গ্রহণ করি।




উপরের চিত্রে প্রমাণ নর্মাল নিবেশনের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$;

$-\infty < x < \infty$ এর রেখাঙ্কিত অংশটির ক্ষেত্রফল $\epsilon$ এর মানকে প্রকাশ করে।

এখানে, স্বীকৃতি $H_0 : m = m_0$ এর সাপেক্ষে $H_1 : m = m_1$ $(m_1 > m_0)$ স্বীকৃতির পরীক্ষাটিকে ডানপুচ্ছ পরীক্ষা বলা হবে।

**দ্বিতীয় পর্যায় :** $m_1 < m_0$

এক্ষেত্রে, আমরা পাই যে, $-\frac{1}{2\sigma^2}(m_1 - m_0)\sum_{i=1}^{n}(2x_i - m_0 - m_1) < \log_e k_1$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(2x_i - m_0 - m_1) < \frac{2\sigma^2 \log_e k_1}{m_0 - m_1} \quad [\because \; m_0 - m_1 > 0]$$

$$\Leftrightarrow 2n\overline{x} - nm_0 - nm_1 < k_1 \text{ যেখানে, } k_1 = \frac{2\sigma^2 \log_e k_1}{m_0 - m_1}$$

$$\Leftrightarrow 2n(\overline{x} - m_0) < k_1 - nm_0 + nm_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{k_1 - nm_0 + nm_1}{2\sigma\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow u < -u_\epsilon$$

যেখানে, $u = \dfrac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

এবং $u_\in = -\dfrac{k' - nm_0 + nm_1}{2\sigma\sqrt{n}}$

সুতরাং এক্ষেত্রে আমরা জানি যে, $W(\subseteq IR^n)$ সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চল হলে, $\tilde{x} \in W \Leftrightarrow u < -u_\in$ সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চলটি $\in$ সংশয়মাত্রায় হল $(-\infty, -u_\in)$ অন্তরটি যেখানে $-u_\in$ এর মান,

$$P(\bar{x} \in W|H_0) = \in$$

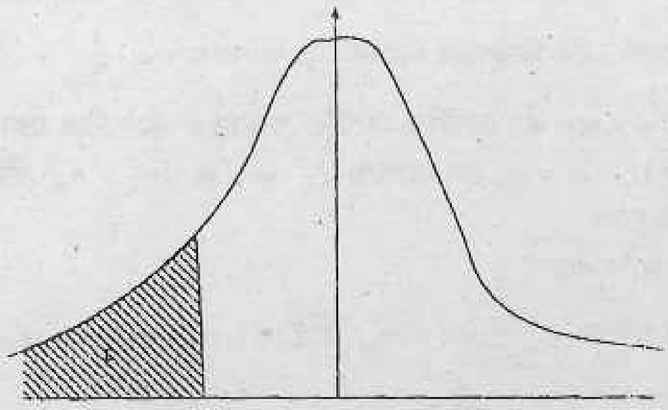
$$\Rightarrow \quad P(U < -u_\in \,|m = m_0) = \in$$

যেখানে, $U = \dfrac{\bar{X} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ একটি $N(0, 1)$ সমসম্ভব চল।

নর্মাল নিবেশনের প্রতিসাম্যতার জন্য লেখা যায় যে,

$$P(U > u_\in) = \in$$

যেখানে, $U$ হল একটি প্রমাণ নর্মাল চল।




উপরের চিত্রে রেখাঙ্কিত অংশটির ক্ষেত্রফল $\in$ এর মান প্রকাশ করে। এই পরীক্ষাটিকে বামপুচ্ছ পরীক্ষা বলা হয়।

*(ii)* মুখ্য স্বীকৃতি $H_0 : \sigma = \sigma_0$ এর পরীক্ষা যখন পূর্ণকের গড় $m$ এর মান জ্ঞাত। এখানে, $H_0 : \sigma = \sigma_0$ এবং $H_1 : \sigma = \sigma_1$ হল দুটি সরল স্বীকৃতি কারণ $m$ এর মান জ্ঞাত।

নেম্যান-পিয়ার্সনের উপপাদ্য প্রয়োগ করলে, সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চলটি হল,

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) : \frac{L(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n ; \sigma_0)}{L(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n ; \sigma_1)} < k_1\}$$

$k_1$ এর মান এমন হবে যে,

$$P(\tilde{x} \in W | \sigma = \sigma_0) = \in$$

যেখানে, $\tilde{x} = (X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$

এবং $\in$ হল সংশয়মাত্রা।

এখানে, $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ স্বীকৃতি $H_0$ সাপেক্ষে নর্মাল $(m, \sigma_0)$ চল। নর্মাল $(m, \sigma)$ চলের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকটি হল—

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} - \infty < x < \infty$$

$$\sigma > 0$$

$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ নমুনা সাপেক্ষে আশংসা অপেক্ষকটি হল,

$$L(\tilde{x}, \sigma_0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma_0{}^n} e^{-\frac{1}{2\sigma_0{}^2} \sum_{i=1}^{n} (xi-m)^2}$$

এবং $L(\tilde{x}, \sigma_1) = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma_1{}^n} e^{-\frac{1}{2\sigma_1{}^2} \sum_{i=1}^{n} (xi-m)^2}$

যেখানে $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

এখন $\dfrac{L(\tilde{x}\ ;\ \sigma_0)}{L(\tilde{x}\ ;\ \sigma_1)} < k_1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^n e^{\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (xi-m)^2\right]\left(\frac{1}{\sigma_1{}^2} - \frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)} < k_1$$

$$\Leftrightarrow e^{\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (xi-m)^2\right]\left(\frac{1}{\sigma_1{}^2} - \frac{1}{\sigma_0{}^2}\right)} < k_1 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{(\sigma_0{}^2 - \sigma_1{}^2)}{\sigma_1{}^2\ \sigma_0{}^2} \sum_{i=1}^{n} (xi - m)^2 < \log_e\left[k_1 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n\right]$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_0{}^2 - \sigma_1{}^2) \sum_{i=1}^{n} (xi - m)^2 < 2\sigma_1{}^2\ \sigma_0{}^2 \log_e\left[k_1 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n\right]$$

প্রথম পর্যায় ঃ যদি $\sigma_1 < \sigma_0$ হয়, এই ক্ষেত্রে উপরের অসমীকরণটি সত্যি হবে যদি,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 < \frac{2\sigma_1^2\sigma_0^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}\log_e\left[k_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n\right] \text{ হয়,} \qquad [\because \sigma_0^2>\sigma_1^2]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\sigma_0}\right)^2 < \frac{2\sigma_1^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}\log_e\left[k_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n\right]$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 < \chi_\epsilon^2$$

যেখানে, $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\sigma_0}\right)^2$

$$\chi_\epsilon^2 = \frac{2\sigma_1^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}\log_e\left[k_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n\right]$$

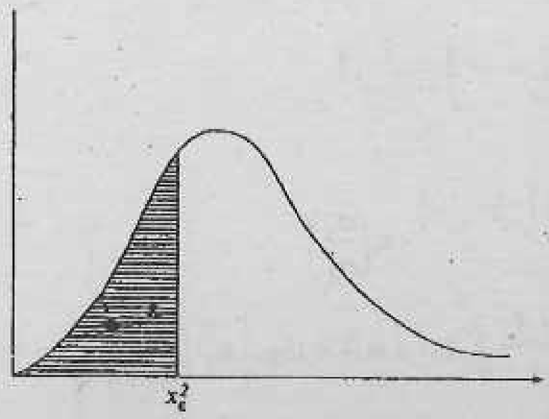
সুতরাং, এই ক্ষেত্রে সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চলটি হল,

$(0, \chi_\epsilon^2)$ এবং $\chi_\epsilon^2$ এর মান

$P(0 < \chi_\epsilon^2 < \chi_\epsilon^2)/H_o) = \epsilon$

এখানে, $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Xi - m}{\sigma_0}\right)^2$ হল নমুনাঙ্ক $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\sigma_o}\right)^2$ এর

সাপেক্ষে গৃহীত সমসম্ভব চল। $\epsilon$ হল সংশয়মাত্রা।




উপরের রেখাঙ্কিত অংশটি $\chi^2$ এর ঘনত্ব অপেক্ষক এর মধ্যে আবদ্ধ ক্ষেত্রফল $\epsilon$ এর মান নির্দেশ করে।

দ্বিতীয় পর্যায় : $\sigma_1 > \sigma_o$ হলে

প্রদত্ত অসমীকরণটি সত্য হবে যদি এবং একমাত্র যদি,

$$\sum_{i=1}^{n}(xi-m)^2 > \frac{-2\sigma_1^2 \cdot \sigma_o^2}{\sigma_1^2-\sigma_o^2}\log_e\left[k_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n\right] \qquad [\because \sigma_0^2-\sigma_1^2<0]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{xi-m}{\sigma_0}\right)^2 > \frac{2\sigma_1^2}{\sigma_0^2-\sigma_1^2}\log_e\left[k_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n\right]$$

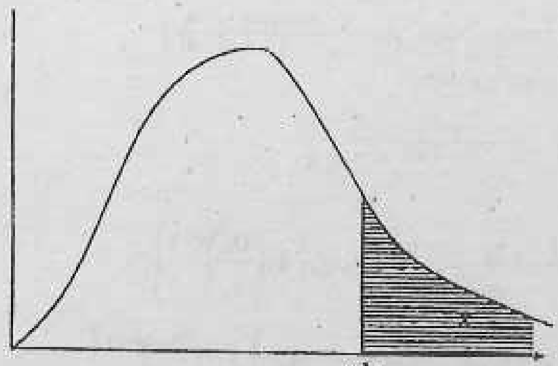
$$\Rightarrow \chi^2 > \chi_\in^2$$

যেখানে, $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{xi-m}{\sigma_0}\right)^2$

এবং $\chi_\in^2 = \frac{2\sigma_1^2}{\sigma_o^2-\sigma_1^2}\log_e\left[k_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n\right]$

সুতরাং এই ক্ষেত্রে সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চলটি হবে $(\chi_\in^2, \infty)$. যেখানে $\chi_\in^2$ এর মানটি $P(\chi^2 > \chi_\in^2) = \in$ সম্পর্ক থেকে পাওয়া যাবে এবং $\chi^2$ হল $\chi^2(n)$ সমসম্ভব চল। $\in$ হল সংশয়সমাত্রা এবং $n$ হল স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রা।

এখন, নমুনাঙ্ক $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{xi-m}{\sigma_0}\right)^2$ এর মান যদি সংশয়াঞ্চল $(\chi_\in^2, \infty)$ এর মধ্যে পড়ে তবে আমরা মুখ্য স্বীকৃতি $H_0$ কে বর্জন করব এবং না পড়লে $H_o'$ কে গ্রহণ করব।




রেখাঙ্কিত অংশটির ক্ষেত্রফলের মান $\in$ এর সমান হয়। এক্ষেত্রে স্বীকৃতির পরীক্ষাটিকে ডানপুচ্ছ পরীক্ষা বলা হয়।

(iii) মুখ্য স্বীকৃতি $H_o : \sigma = \sigma_o$ এর পরীক্ষা যখন পূর্ণকের গড় $m$ অজ্ঞাত।

এখানে, $m$ অজানা হওয়ায় মুখ্য স্বীকৃতি $H_o : \sigma = \sigma_0$ একটি মিশ্র স্বীকৃতি।

পূর্ণক থেকে একটি সমসম্ভব নমুনা $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ গ্রহণ করা হল। সমসম্ভব চল $s^2$ এর ঘনত্ব অপেক্ষকটি হল—

$$\phi_1(s^2) = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} (s^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \qquad \text{যদি, } s^2 > 0$$

$= 0$ অন্যত্র

যেখানে, $s^2 = \frac{n}{n-1} S^2$ এবং $S^2$ হল নমুনাজ ভেদমান।

অতএব, প্রদত্ত সংশয়মাত্রা $\in$ $(0 < \in < 1)$-এ সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চলটি $W$ হলে,

$$W = \left\{ s^2 : \frac{L(s^2\,;\,\sigma_0)}{L(s^2\,;\,\sigma_1)} < k_1 \right\}$$

যেখানে, $k_1$ $(> 0)$ এর মান পাওয়া যায়,

$$P(s^2 \in W | Ho) = \in$$

এখন, $\quad L(s^2\,;\,\sigma) = \phi_1(s^2)$

$$= \frac{\left(\frac{n-1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} (s^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad \text{যেখানে } s^2 > 0$$

$$\frac{L(s^2\,;\,\sigma_0)}{L(s^2\,;\,\sigma_1)} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^{n-1} e^{-\frac{(n-1)s^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)}$$

সুতরাং $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^{n-1} e^{-\frac{(n-1)s^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)} < k_1$

$$\Rightarrow \quad -\frac{n-1}{2} s^2 \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} < \log_e\left[k_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^{n-1}\right]$$

$$\Rightarrow \quad (n-1)\, s^2 \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) < 2 \log_e\left[k_1 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^{n-1}\right]$$

$$\Rightarrow \quad (n-1)\, s^2 \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) < k_2$$

যেখানে, $k_2 = 2 \log_e\left[k_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^{n-1}\right]$

প্রথম পর্যায় : $\sigma_1 > \sigma_0$ হলে,

অসমীকরণটি সত্য হবে যদি এবং একমাত্র যদি,

$$-\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\left(\frac{\sigma_1^2-\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right) < k_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \frac{\sigma_1^2 k_2}{\sigma_0^2-\sigma_1^2} \quad (\because \ \sigma_0^2-\sigma_1^2 < 0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_\epsilon^2$$

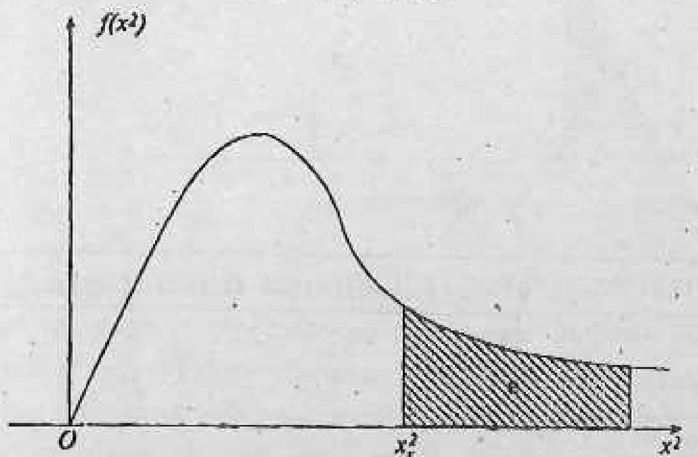
যেখানে, $\chi_\epsilon^2 = \dfrac{\sigma_1^2 k_2}{\sigma_0^2-\sigma_1^2}$

এখন, $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{nS^2}{\sigma_0^2}$ এর নমুনাজ নিবেশন ($H_o$ স্বীকৃতির অন্তর্গত) হল $\chi^2(n-1)$ নিবেশন।

সুতরাং, প্রদত্ত $\epsilon$ সংশয়মাত্রায় সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চলটি হল $(\chi_\epsilon^2, \infty)$, $\chi_\epsilon^2$-এর মানটি $P(\chi^2 > \chi_\epsilon^2) = \epsilon$ সম্পর্ক থেকে পাওয়া যায়।

এখানে, $\chi^2$ এর $\chi^2(n-1)$ নিবেশন আছে।

নিচের চিত্রে রেখাঙ্কিত অংশটির ক্ষেত্রফলটির মান $\epsilon$।




এই পরীক্ষাটিকে ডানপুচ্ছ পরীক্ষা বলা হয়।

দ্বিতীয় পর্যায় : $\sigma_1 < \sigma_0$ হলে,

অসমীকরণটি সত্য হবে যদি,

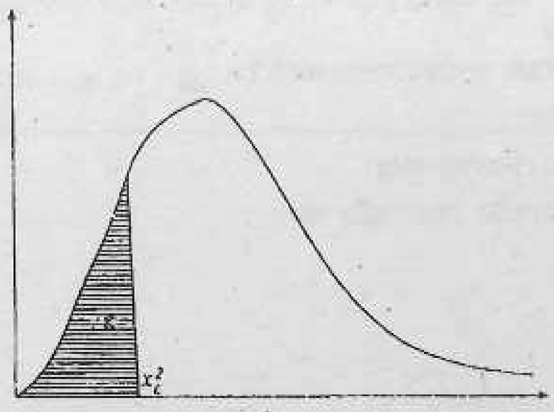
$$\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2} < \frac{\sigma_1^2 k_2}{\sigma_0^2-\sigma_1^2} \quad [\because \ \sigma_0^2-\sigma_1^2 > 0]$$

পূর্বের মতো আমরা পাই,

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\, s^2}{\sigma_0^2} = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$$

স্বীকৃতি $H_o$ এর অন্তর্গত, এই নমুনাঙ্কটির নিবেশনটি হল $\chi^2(n-1)$ নিবেশন। সর্বোত্তম সংশয়াঞ্চলটি হল $(0, \chi_\epsilon^2)$ যেখানে $\epsilon$ হল সংশয়মাত্রা। $\chi_\epsilon^2$ এর মান পাওয়া যায়,

$P(0 < \chi^2 < \chi_\epsilon^2) = \epsilon$ থেকে। সুতরাং, $\frac{nS^2}{\sigma_0^2}$ এর নির্ণীত মানটি যদি, $(0, \chi_\epsilon^2)$ এর মধ্যে পড়ে তবে আমরা মুখ্য স্বীকৃতিটি বর্জন করি এবং যদি $\frac{nS^2}{\sigma_0^2}$ এর নির্ণীত মানটি যদি $(0, \chi_\epsilon^2)$ এর মধ্যে না পড়ে তবে মুখ্য স্বীকৃতিটি সঠিকরূপে গৃহীত হয়। নীচের চিত্রে রেখাঙ্কিত অংশের ক্ষেত্রফল $\epsilon$ এর সমান। বক্রটি $\chi^2$ সমসম্ভব চলের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক।




এইক্ষেত্রে, পরীক্ষাটিকে বামপুচ্ছ $\chi^2$ পরীক্ষা বলা হয়।

## 12.7. আশংসা অনুপাত পরীক্ষা (Likelihood Ratio Testing)

নেশ্যান-পিয়ার্সনের উপপাদ্যের সাহায্যে যখন প্রকল্প বিচারের শ্রেষ্ঠ সংশয়াঞ্চল নির্ণয় করা যায় না অথবা যখন প্রকল্প মিশ্র হয়, সেক্ষেত্রে আমরা আশংসা অনুপাত পদ্ধতির সাহায্যে পরীক্ষা করি। ধরা যাক $H_o$ একটি মিশ্র মুখ্য স্বীকৃতি এর সাপেক্ষে কোন বিশেষ বিকল্প স্বীকৃতি নেই। এই মুখ্য স্বীকৃতিতে কিছু প্রাচলের মান প্রদত্ত হয় বা প্রাচলগুলির মধ্যে যদি কিছু অপেক্ষকীয় সম্বন্ধ থাকে তবে আমরা এই পদ্ধতির প্রয়োগ করে থাকি। ধরা যাক, $\Theta$ সমস্ত অজানা পূর্ণকাঙ্কগুলির সেট। যদি, $H_0 : \theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3 = 0$ হয় বা, $\theta_1 = -2\theta_2 - \theta_3$, তাহলে, $H_0$ এর অন্তর্গত অজানা পূর্ণকাঙ্কগুলির সেটটি হল, $\Theta' = \{(\theta_2, \theta_3) :$ $\theta_2, \theta_3$ এর গ্রহণ যোগ্য সমস্ত মান$\}$।

ধরা যাক, $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ একটি সমসম্ভব নমুনার সাপেক্ষে গৃহীত আশংসা অপেক্ষকটি হল $L(x ; \Theta)$ এবং স্বীকৃতি $H_o$-এর অন্তর্গত আশংসা অপেক্ষকটি হল,

$L_0(x\,;\,\Theta')$ অর্থাৎ,

$$L_0(x\,;\,\Theta') = L(x\,;\,\Theta/H_0)$$

এখন যদি, $\Theta$ এবং $\Theta'$ এর চরম আশংসা প্রাককলনী মানগুলি $\hat{\Theta}' = \hat{\Theta}'(x)$ এবং $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}'(x)$ হয় তাহলে,

$$\max L(x\,;\,\Theta) = L(x\,;\,\hat{\Theta})$$

এবং $\max L_0(x\,;\,\hat{\Theta}') = L_0(x\,;\,\hat{\Theta}')$

স্পষ্টতই,

$$0 \le L_0(x\,;\,\hat{\Theta}') \le L(x\,;\,\hat{\Theta}')$$

এখন, $$\lambda = \frac{L_0(x\,;\,\hat{\Theta}')}{L(x\,;\,\hat{\Theta})}$$

সুতরাং আমরা পাই যে,

$$o \le \lambda \le 1$$

এক্ষেত্রে, নমুনাঙ্ক $\lambda = \lambda(x)$ অজ্ঞাত প্রাচল মুক্ত হওয়ায় একে স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত আশংসা অনুপাত বলা হয়।

এখন, যদি $H_0$ সত্য হয় তবে

$L_0(x\,;\,\Theta') = L(x\,;\,\Theta)$ এবং যেহেতু চরম আশংসা প্রাককলনী মানটি প্রাচলের উত্তম প্রাককলনী মান, সুতরাং আমরা লিখতে পারি যে,

$$L(x\,;\,\Theta) \simeq L(x\,;\,\hat{\Theta})$$

$$L_0(x\,;\,\Theta') \simeq L_0(x\,;\,\hat{\Theta}')$$

এখন যদি স্বীকৃতি $H_0$ সত্য হয় তবে,

$$L_0(x\,;\,\hat{\Theta}') \simeq L(x\,;\,\hat{\Theta})$$

অথবা, $\lambda \simeq 1$। নমুনাঙ্ক $\lambda$ এর নির্ণীত মানটি যদি 1 এর কাছাকাছি হয় তবে আমরা বলতে পারি স্বীকৃতি $H_0$ সত্য এবং নমুনাঙ্ক $\lambda$ এর মানটি যদি $0$ এর কাছাকাছি হয় তবে আমরা বলতে পারি যে, $L_0(x\,;\,\hat{\Theta}') << L(x\,;\,\hat{\Theta})$

অথবা, $L_0(x\,;\,\Theta') << L(x\,;\,\Theta)$

এখানে আমরা বলতে পারি যে, $H_0$ সত্য নয়, এখানে, $H_0$ এর পরীক্ষায় আমরা $\lambda$ কে পরীক্ষণীয় নমুনাঙ্ক হিসাবে গ্রহণ করি এবং এর জন্য সংশয়াঞ্চলটি হল $(o, \lambda_\epsilon)$ যেখানে, $\lambda_\epsilon (o < \lambda_\epsilon < 1)$ একটি ধ্রুবক যার জন্য প্রথম প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা,

$$P(o < \lambda < \lambda_\epsilon \mid Ho) = \int_o^{\lambda_\epsilon} f\lambda\,(\lambda)\,d\lambda = \epsilon$$

যেখানে, $f_\lambda(\lambda)$ হল স্বীকৃতি $H_o$ এর অন্তর্গত নমুনাঙ্ক $\lambda$ এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক। $\lambda_\epsilon$ এর মান উপরের সম্পর্ক থেকে পাওয়া যায়।

## 12.8 আশংসা অনুপাতের প্রয়োগ নর্মাল $(m, \sigma)$ পূর্ণকের ক্ষেত্রে পূর্ণকের গড় $m$ এর জন্য পরীক্ষা ঃ

প্রথম পর্যায় ঃ যখন পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতি $\sigma$ এর মান জ্ঞাত। স্বীকৃতি,

$$H_o : m = m_o$$

এর সাপেক্ষে, $H_1 : m \neq m_0$

পূর্ণকের চল $X$ এর সাপেক্ষে একটি সমসম্ভব নমুনা $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ এর সাপেক্ষে আশংসা আপেক্ষকটি হল,

$$L = L\,(\tilde{x}\,;m) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sigma^n}\; e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}$$

$$\therefore \qquad \log_e L = -\frac{n}{2}\log_e 2\pi - n\,\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial m}(\log_e L) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)$$

আশংসা সমীকরণটি হবে,

$$\frac{\partial}{\partial m}(\log_e L) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - m) = 0$$

$$\therefore \quad m = \bar{x}$$

সুতরাং, $m$ এর চরম প্রাককলন মানটি হল, $\hat{m} = \bar{x}$

সুতরাং, $L\left(\bar{x}\;;\hat{m}\right)$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(xi-\bar{x}\right)^2}$$

বা, $$L\left(\bar{x}\ ;\ \hat{m}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sigma^n} e^{-\frac{nS^2}{2\sigma^2}}$$

মুখ্য স্বীকৃতি $H_o$ এর অন্তর্গত আশংসা অপেক্ষকটি হল,

$$L_0(x) = L(x\ ;\ m_o)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_o)^2}$$

এখানে, আশংসা অনুপাতটি হবে,

$$\lambda = \frac{L_0(x)}{L(x\ ;\ \hat{m})}$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - m_o)^2 - nS^2\right]}$$

$$= e^{-n\frac{\left(\bar{x}-m_o\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= e^{-\frac{u^2}{2}}$$

যেখানে, $$u = \frac{\sqrt{x}\left(\bar{x} - m_o\right)}{\sigma}$$

এখানে নমুনাঙ্ক $u$ কে গ্রহণ করা হলে, স্বীকৃতি $H_o$ এর অন্তর্গত যার নমুনাজ নিবেশন হবে $N(0, 1)$ এবং সংশয়াঞ্চলটি হবে $|u| > u_\epsilon$ অর্থাৎ, $(-\infty, -u_\epsilon)$ এবং $(u_\epsilon, \infty)$ উভয়পুচ্ছ। এবং $u_\epsilon$ এর মান—

$$P(|U| > u_\epsilon) = \epsilon$$

অথবা, $P(U > u_\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$ থেকে পাওয়া যাবে।

**দ্বিতীয় ক্ষেত্র :** $\sigma$ এর মান অজ্ঞাত। এক্ষেত্রে স্বীকৃতি $H_0$ একটি মিশ্র স্বীকৃতি। আশংসা অপেক্ষকটি হল,

$$L(x\ ;\ m, \sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(xi-m)^2}$$

আমরা জানি যে, $m$ এবং $\sigma$ এর চরম আশংসা প্রাককলনী মানগুলি হল, $\hat{m} = \bar{x}$ এবং

$\hat{\sigma} = S$ সুতরাং,

$$L(x\,;\hat{m},\hat{\sigma}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} S^{-n}\; e^{-\frac{n}{2}}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n}\; e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(xi-m_0)^2}$$

অথবা, $\quad log_e L_0 = -x\, log\, \sigma - \dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(xi - m_0)^2 + \sigma$ বর্জিত পদ

$$\frac{\partial \log L_0}{\partial \sigma} = 0$$

থেকে পাই, $\quad -\dfrac{n}{\sigma} + \dfrac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_0)^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_0)^2$$

$$= S^2 + (\bar{x} - m_0)^2$$

সুতরাং, $\quad L_0(x;\hat{\sigma}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$

$$\left\{S^2 + (\bar{x} - m_0)^2\right\}^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

এখানে, $\lambda \quad = \dfrac{L_0(x;\hat{\sigma})}{L(x;\hat{m},\hat{\sigma})}$

$$= \left[\left\{1 + \frac{(\bar{x} - m_0)^2}{S^2}\right\}^{-\frac{n}{2}}\right]$$

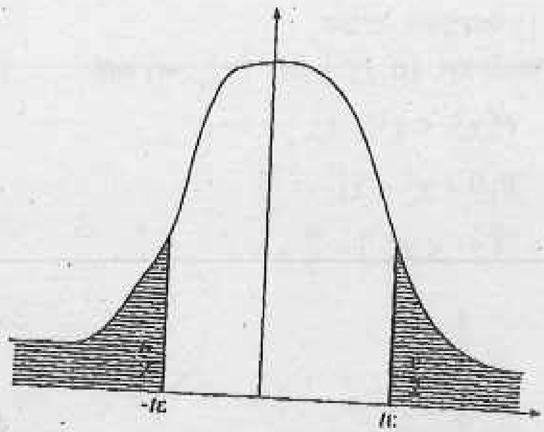
$$= \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

যেখানে, $\quad t = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x} - m_0)}{s}$

হল একটি নমুনাঙ্ক যার স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত নমুনাজ নিবেশন $t$-নিবেশন $\nu = n - 1$ স্বাতন্ত্রতার মাত্রা। এখানে, সংশয়াঞ্চলটি হল $|t| > t_\epsilon$ যেখানে,

$$P(|t| > t_\epsilon) = \epsilon$$

অথবা, $P(t > t_\in) = \frac{\in}{2}$



উপরের চিত্রে বক্রটি $t$ সমসম্ভব চলের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষককে প্রকাশ করে এবং রেখাঙ্কিত অংশদুটির মোট ক্ষেত্রফল $\in$।

সমক বিচ্যুতির পরীক্ষা :

মুখ্য স্বীকৃতি, $H_0 : \sigma = \sigma_0$

আমরা জানি যে,

$$L(\bar{x}; m, \sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}$$

$m$ এবং $\sigma$ এর আশংসা মানগুলি হল, $\hat{m} = \bar{x}$ এবং $\hat{\sigma} = S$

সুতরাং $L(\bar{x}; \hat{m}, \sigma)$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} S^{-n} e^{-\frac{n}{2}}$$

$$L_0(\bar{x}; m) = L(x; m, \sigma_0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma_0^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}$$

এবং যখন, $\hat{m} = \bar{x}$ আমরা পাই,

$$L_0(\bar{x}; \hat{m}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma_0^{-n} e^{-\frac{nS^2}{2\sigma_0^2}}$$

সুতরাং, $$\lambda = \frac{L_0(\bar{x}; \hat{m})}{L(\bar{x}; \hat{m}, \hat{\sigma})} = e^{\frac{n}{2}} \left(\frac{s}{\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{nS^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$\lambda = \lambda(\chi^2) = \left(\frac{e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n}{2}}$$

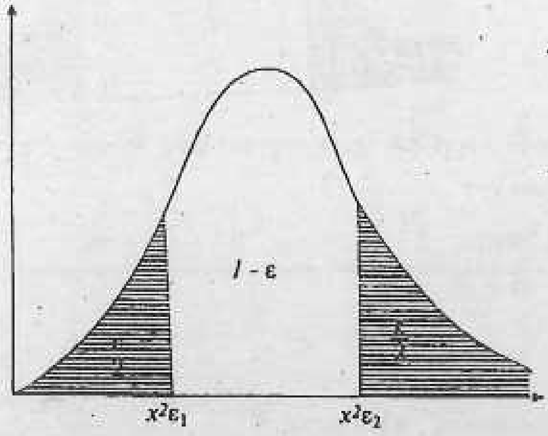
যেখানে $\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$ হল গৃহীত নমুনাঙ্ক স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত, যার নমুনাজ নিবেশন হল,$\chi_2$ নিবেশন $v = (n-1)$ স্বাতন্ত্রতার যাত্রায়।

এক্ষেত্রে সংশয়াঞ্চলটি হল, $\left(0, \chi^2_{\epsilon_1}\right)$ এবং $\left(\chi^2_{\epsilon_2}, \infty\right)$ এবং

$$P\left(\chi^2_{\epsilon_1} < \chi^2 < \chi^2_{\epsilon_2}\right) = 1 - \in$$

$$P\left(0 < \chi^2 < \chi^2_{\epsilon_1}\right) = \frac{\in}{2}$$

$$P\left(\chi^2 < \chi^2_{\epsilon_2}\right) = \frac{\in}{2}$$




## 12.9 দুটি নর্মাল পূর্ণকের (সমগ্রকের) মধ্যে তুলনা (Comparison of two Normal Populations)

ধরা যাক, $N(m_1, \sigma_1)$ এবং $N(m_2, \sigma_2)$ দুটি পৃথক নর্মাল নিবেশন যেখান থেকে দুটি পরস্পর নির্ভরশীল নয় এমন নমুনা গ্রহণ করা হল, যথাক্রমে $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1-1}, x_{n_1})$

$x_1$ দৈর্ঘ্যের এবং $\tilde{x}' = (x_1', x_2', \ldots x_i', \ldots\ldots x'_{n_2})$ $x_2$ দৈর্ঘ্যের। গৃহীত নমুনার উপর ভিত্তি করে আমরা দুটি পূর্ণকের প্রাচলের মধ্যে তুলনা করব।

**দুটি পূর্ণকের গড়ের মধ্যে তুলনা (Test of equality of means) :**

ধরা যাক, দুটি নর্মাল পূর্ণকের $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ অর্থাৎ, প্রমাণ বিচ্যুতিগুলি সমান।

এক্ষেত্রে, মুখ্য স্বীকৃতিটি হল,

$$H_0 : m_1 = m_2$$

$$L(x, x'; m_1, m_2, \sigma) = (2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}} \sigma^{-(n_1-n_2)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x'_j - m_2)^2\right]}$$

প্রথম পর্যায় ঃ যদি $\sigma$ এর মান প্রদত্ত হয়।

$$L(x, x', m_1, m_2, \sigma) = (2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}} \sigma^{-(n_1+n_2)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-m_1)^2 \sum_{j=1}^{n_2}(x_j'-m_2)^2\right]}$$

আশংসা সমীকরণগুলি হল,

$$\frac{\partial \log L}{\partial m_1} = 0, \frac{\partial \log L}{\partial m_2} = 0$$

যার থেকে আমরা পাই,

$$\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m_1) = 0$$

এবং $\sum_{i=1}^{n_2}(x_i' - m_2) = 0$

থেকে পাই, $\hat{m}_1 = \bar{x}_1$ এবং $\hat{m}_2 = \bar{x}_2$

সুতরাং, $L(x, x'; \hat{m}_1, \hat{m}_2)$

$$= (2\pi)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \sigma^{-(n_1+n_2)} e^{-\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{2\sigma^2}}$$

স্বীকৃতি, $H_0 : m_1 = m_2 = m$ (ধরি) এর অন্তর্গত সংযুক্ত আশংসা অপেক্ষকটি হল,

$$L_0(x, x'; m) = L(x, x'; m, m)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}} \sigma^{-(n_1+n_2)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-m)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x_j'-m)^2\right]}$$

আশংসা সমীকরণটি হল,

$$\frac{\partial \log L_0}{\partial m} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m)\sum_{j=1}^{n_2}(x'_j - m) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

সুতরাং, $m$-এর চরম আশংসা প্রাককলনী মানটি হল

$$\hat{m} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

এখন, $\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \hat{m})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x'_j - \hat{n})^2$

$$= \sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x}_1)^2 + n_1(\bar{x}_1 - \hat{m})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x'_j - \bar{x}_2)^2 + n_2(\bar{x}_2 - \hat{m})^2$$

$$= n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2 + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right)^2$$

সুতরাং,

$$L_0(x, x', \hat{m})$$

$$= (2\pi)^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}} \sigma^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2 + \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2\right]}$$

এখন, আশংসা অনুপাতটি

$$\lambda = \frac{L_0(x; x'; \hat{m})}{L(x, x'; \hat{m}_1, \hat{m}_2)} = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

যেখানে $u = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \frac{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right)}{\sigma}$

নমুনাঙ্ক স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত নমুনাজ নিবেশনটি হল, $N(0, 1)$ এবং এক্ষেত্রে সংশয়াঞ্চলটি হল,

$\{u : |u| > u_\epsilon\}$ যেখানে $u_\epsilon$ এর মান,

$$P(|U| > u_\epsilon) = \epsilon$$

অথবা, $P(U > u_\epsilon) = \dfrac{\epsilon}{2}$ থেকে পাওয়া যাবে।

স্বীকৃতি, $H_0$ এর পরীক্ষায় গৃহীত বৈকল্পিক স্বীকৃতি $H_1 : m_1 > m_2$ বা $m_1 < m_2$, আমরা এক্ষেত্রে প্রথমটির জন্য ডানপুচ্ছ পরীক্ষা এবং দ্বিতীয়টির জন্য বামপুচ্ছ পরীক্ষা করে থাকি।

দ্বিতীয় পর্যায় ঃ $\sigma$ এর মান অজ্ঞাত। সংযুক্ত আশংসা অপেক্ষকটি হবে

$$L(x, x_1; m_1, m_2, \sigma)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}} \sigma^{-(n_1+n_2)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x'_j - m_2)^2\right]}$$

আশংসা সমীকরণগুলি হল,

$$\frac{\partial \log L}{\partial m_1} = 0 \text{ এবং } \frac{\partial \log L}{\partial m_2} = 0$$

যার থেকে পাই, $\hat{m}_1 = \bar{x}_1$, $\hat{m}_2 = \bar{x}_2$

এবং সমীকরণ,

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = 0$$

বা, $$-\frac{n_1 + n_2}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\left\{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x'_j - m_2)^2\right\} = 0$$

বা, $$\sigma^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2}$$

আশংসা অপেক্ষকটি হল,

$$L(x, x'; \hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{\sigma})$$

$$= (2\pi)^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}} (n_1 + n_2)^{\frac{(n_1+n_2)}{2}} (n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2)^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}} e^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}}$$

স্বীকৃতি, $H_0 : m_1 = m_2 = m$ (ধরা যাক) হলে আশংসা অপেক্ষকটি হবে,

$$L_0(x, x', m, \sigma) = L(x, x'; m, m, \sigma)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}} \sigma^{-(n_1+n_2)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x'_j - m)^2\right]}$$

$\dfrac{\partial \log L_0}{\partial m}$ সমীকরণ থেকে পাই,

$$\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m) + \sum_{j=1}^{n_2}(x'_j - m) = 0$$

বা, $$m = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

এবং $\dfrac{\partial \log L}{\partial \sigma} = 0$ থেকে পাই,

$$-\frac{n_1 + n_2}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\left\{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x'_j - m_2)^2\right\} = 0$$

বা, $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_1 + n_2}\left\{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \hat{m})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x'_j - \hat{m})^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n_1 + n_2}\left\{n_1 S_1^2 + n_1 S_2^2 + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2\right\}$$

$$L_0(x, x'; \hat{m}, \hat{\sigma}) = (2\pi)^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}} (x_1 + x_2)^{\frac{(n_1+n_2)}{2}}$$

$$\times\left\{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2 + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2\right\}^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}} - e^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}}$$

এখানে, $\lambda = \dfrac{L_0(x; x'; \hat{m}, \hat{\sigma})}{L(x, x'; \hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{\sigma})}$

অথবা, $\lambda = \left(1 + \dfrac{t^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}}$

$$[\upsilon = n_1 + n_2 - 2]$$

যেখানে, $t = \sqrt{\upsilon}\sqrt{\dfrac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}}$

এবং সংশয়াঞ্চলটি হল, $|t| > t_\epsilon$

$$P(|t| > t_\epsilon) = \epsilon$$

অথবা, $P(t > t_\epsilon) = \dfrac{\epsilon}{2}$

ভেদমানের সমতার পরীক্ষা ঃ

মুখ্য স্বীকৃতি, $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ ;

বৈকল্পিক স্বীকৃতি $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

আশংসা অপেক্ষকটি $L = L_1 L_2$ থেকে আমরা পাই, $m_1 = \bar{x}_1, m_2 = \bar{x}_2$

$$\hat{\sigma}_1 = S_1, \ \hat{\sigma}_2 = S_2$$

এখানে দেখানো যায় $\epsilon (0 < \epsilon < 1)$

সংশয়মাত্রায়, সংশয়াঞ্চল হবে $(0, F_{\epsilon_1}) \cup (F_{\epsilon_2}, \infty)$

যেখানে $P(F > F_{\epsilon_1}) = 1 - \dfrac{\epsilon}{2}$ এবং $P(F > F_{\epsilon_2}) = \dfrac{\epsilon}{2}$

এবং যেখানে $F$ হল $F(n_1 - 1, n_2' - 1)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল। আরও দেখানো যায় যে এখানে পরীক্ষার নমুনাঙ্ক (test statistic) হবে,

$$F = \frac{\dfrac{n_1 S_1^2}{n_1 - 1}}{\dfrac{n_2 S_2^2}{n_2 - 1}}$$

যার নমুনাজ নিবেশন ($H_0$ ধরে নিলে) হবে $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ নিবেশন।

মন্তব্য ঃ (i) মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ বনাম $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$ বিচারের ক্ষেত্রে $\in$ $(0 < \in < 1)$ সংশয়মাত্রায় সংশয়াঞ্চল হবে $(F_\varepsilon, \infty)$ যেখানে $P(F > F_\varepsilon) = \varepsilon$ এবং $F$ এর নিবেশন $n_1 - 1, n_2 - 1$ পূর্ণকাঙ্ক বিশিষ্ট$F$ নিবেশন এবং পরীক্ষার নমুনাঙ্ক হবে,

$$F = \frac{\dfrac{n_1 S_1^2}{n_1 - 1}}{\dfrac{n_2 S_2^2}{n_2 - 1}}$$

অনুরূপে, $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ বনাম $H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$ বিচারের ক্ষেত্রে সংশয়াঞ্চল হবে $(0, F_\varepsilon)$ যেখানে $P(0 < F < F_\varepsilon) = \varepsilon$ এবং $F$ হল $F(n_1 - 1\,, n_2 - 1)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

(*ii*) $F$ নিবেশনের একটি উল্লেখযোগ্য ধর্ম নীচে বিবৃত করা হল ঃ

[এই ধর্মটি এখানে জানা দরকার]

যদি $F$ একটি $F(n_1, n_2)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল হয় তাহলে $\frac{1}{F}$ হবে $F(n_2, n_1)$ চল।

## 12.10 উদাহরণমালা ঃ

1. কোনো ফ্যাকটারীর শ্রমিকদের মজুরির নিবেশনটি নর্মাল নিবেশন যার গড় $m$ এবং ভেদমানটি 25। 25 জন শ্রমিকদের একটি সমসম্ভব নমুনা গ্রহণ করা হল। 25 জন শ্রমিকের মোট মাইনে 1250 একক। $m = 52$ ধরে গৃহীত স্বীকৃতিটি পরীক্ষা করুন যখন বৈকল্পিক স্বীকৃতিটি হল $m = 49$ [1% সংশয়মাত্রায় বিচার করুন]

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-2.32} e^{-u^2/2} du = 0.01\right]$$

সমাধান ঃ এখানে গৃহীত মুখ্য স্বীকৃতিটি হল, $H_0 = m = 52$ যার সাপেক্ষে বৈকল্পিক স্বীকৃতিটি হল, $H_1 : m = 49$ যেখানে, পূর্ণঙ্কের সমসম্ভব চল $X$।

এখানে, পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতিটি জ্ঞাত। এখানে, $\sigma = \sqrt{25} = 5$

সুতরাং এখানে পরীক্ষণীয় নমুনাঙ্কটি হল, $u = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x} - m_0)}{\sigma}$ যেখানে $\bar{x}$ হল নমুনাজ গড়, এবং $m_0$ হল স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত $m$ এর মান। $n$ হল নমুনার আয়তন।

স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত নমুনাজ নিবেশনটি হল $N(0, 1)$। এখানে, স্বীকৃতি $H_1$ এর অন্তর্গত $m$ এর মান $49 < 52$ ।

সুতরাং, $\in = 00.1$ সংশয়মাত্রায় চরম সংশয়াঞ্চলটি হল $(-\infty, -u_\in)$ যেখানে $u_l$ এর মানটি হল,

$$P(U < -u_\in) = 0.01$$

যেখানে, $U$ হল প্রমাণ নর্মাল সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

এখন, $P(U < -u_\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-u_\epsilon} e^{-u^2/2} du$

প্রদত্ত $\int_{-\infty}^{-2.32} e^{-u^2/2} du = 0.01$

সুতরাং, $u_\epsilon = 2.32$

সুতরাং 1% সংশয়মাত্রার সংশয়াঞ্চলটি হল $(-\infty, -2{\cdot}32)$

এখন এখানে, $n = 25, m_0 = 52, \overline{x} = \frac{1250}{25} = 50, \delta = 5$

সুতরাং $u$ এর নির্ণেয় মানটি হল, $u = \frac{\sqrt{25}(50-25)}{5} = -2$

এক্ষেত্রে আমরা পাই যে, $-2 > -2{\cdot}32$

এবং সুতরাং, $-2 \notin (-\infty, -2.32)$

এখানে, $H_0 : m = 52$ কে গ্রহণ করা হল (1% সংশয়মাত্রায়)।

2. 10 জন রোগীকে একটি ওষুধ খাওয়ানো হলে তাদের রক্তচাপ বৃদ্ধির পরিমাণগুলি হল 3, 6, −2, 4, −3, 4, 6, 0, 0, 2। গৃহীত এই সমসম্ভব নমুনাটির উপর ভিত্তি করে কি বলা যায় যে, ওষুধটির রক্তচাপ বৃদ্ধিতে কোনও ভূমিকা নেই। [ধরা যেতে পারে যে, স্বাতন্ত্রতার মাত্রা 9 হলে, $P(t > 2.262) = 0.025$] 5% সংশয়মাত্রায় পরীক্ষাটি করুন।

**সমাধান ঃ** ধরা যাক, ওষুধ প্রয়োগের পর রক্তচাপ বৃদ্ধির সমসম্ভব চলটি হল $X$। আমরা ধরতে পারি যে, $X$ এর নিবেশনটি নর্মাল নিবেশন যার গড় $m$।

এখানে পরীক্ষণীয় স্বীকৃতিটি হল "ওষুধ প্রয়োগে রক্তচাপের বৃদ্ধির কোনও সম্ভাবনা নেই।"

এখন এই স্বীকৃতিটি স্বীকৃতি, $H_0 : m = 0$ এর সাথে প্রায় সমান।

সুতরাং, এক্ষেত্রে আমরা মুখ্য স্বীকৃতি $H_0 : m = 0$ কে পরীক্ষা করব বৈকল্পিক স্বীকৃতি $H_1 : m \neq 0$ এর সাপেক্ষে যেখানে প্রমাণ বিচ্যুতি $\sigma$ এর মান অজ্ঞাত।

তাহলে, পরীক্ষণীয় নমুনাঙ্কটি হল,

$$t = \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - 0)}{s}$$

যার নমুনাজ নিবেশনটি হল স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত $t$ নিবেশন যার স্বাতন্ত্রতার মাত্রা $(n-1)$। যেখানে, $n$ হল নমুনার আয়তন। $\overline{x}$ হল নমুনাজ গড়। $s^2 = \frac{n}{n-1} S^2$ এবং এখানে $S^2$ হল নমুনার ভেদমান।

5% সংশয়মাত্রায় $\epsilon = 0{\cdot}05$

এখন, $\in = 0{\cdot}05$ হলে সংশয়াঞ্চলটি হবে $\{t : |t| > t_\in\}$

যেখানে, $P(t > t_\in) = \frac{\in}{2} = 0{\cdot}025$

এবং সমসম্ভব চল $t$ এর নিবেশনটি $(n-1)$ স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রায় $t$ নিবেশন।

এখানে, $n - 1 = 10 - 1 = 9$

প্রদত্ত আছে যে, $P(t > 2{\cdot}262) = 0{\cdot}025$ (স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রা যখন 9)

সুতরাং, $t_\in = 2{\cdot}262$

সুতরাং, এক্ষেত্রে সংশয়াঞ্চলটি হল,

$$\{t : |t| > 2{\cdot}262\}$$

এখন, $\bar{x} = \frac{3 + 6 - 2 + 4 - 3 + 4 + 6 + 0 + 0 + 2}{10}$

$$= 2$$

$$s^2 = \frac{10}{9} S^2$$

$$= \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10} [(3-2)^2 + (6-2)^2 + (-2-2)^2 + (4-2)^2 + (-3-2)^2$$

$$+ (4-2)^2 + (6-2)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 + (2-2)^2]$$

$$= \frac{1}{9} [1 + 16 + 16 + 4 + 25 + 4 + 16 + 4 + 4 + 0]$$

$$= \frac{90}{9} = 10$$

বা, $s = \sqrt{10}$

সুতরাং, $t$ এর নির্ণীত মানটি হবে,

$$t = \frac{\sqrt{10}(2-0)}{\sqrt{10}} = 2$$

এখানে, আমরা পাই যে,

$$|t| = 2 < 2{\cdot}262$$

এবং, $2 \notin \{t : |t| > 2{\cdot}262\}$

সুতরাং, এক্ষেত্রে $H_0 : m = 0$

5% সংশয়মাত্রায় গৃহীত হল।

অর্থাৎ, 5% সংশয়মাত্রায় পরীক্ষা করলে ওষুধটির রক্তচাপ বৃদ্ধিতে কোনও ভূমিকা নেই।

3. একটি বৃহৎ পূর্ণকের থেকে একটি নমুনা গ্রহণ করে গৃহীত ব্যক্তিদের $IQ$ পরীক্ষা করে নিম্নলিখিত মানগুলি পাওয়া গেল, 117, 119, 125, 129, 131, 132, 136, 138, 141, 120, 101, 116।

ধরা যাক, পরীক্ষায় প্রাপ্ত মানগুলির পূর্ণকটিকে নর্মাল ধরে নিলে পরীক্ষা করুন যে, পূর্ণকের গড় $IQ$ টি 127 এর চেয়ে কম কিনা। আবার পরীক্ষা করে দেখান যে, পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতিটি হল 9·9।

সমাধান ঃ প্রথম ভাগ ঃ গৃহীত মুখ্য স্বীকৃতি $H_0 : m = m_0$ (= 127) যার সাপেক্ষে বৈকল্পিক স্বীকৃতিটি হল, $H_1 : m < m_0$ (= 127)

যেহেতু পূর্ণকটি নর্মাল এবং পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতিটি অজ্ঞাত, অতএব এই ক্ষেত্রে পরীক্ষণীয় নমুনাটি হল,

$$t = \frac{\bar{x} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

যার নমুনাজ নিবেশনটি স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত $t$ নিবেশন স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রা হল $(n - 1)$, যেখানে $n$ হল নমুনার আয়তন।

এখন, নমুনা থেকে পাই

$$\bar{x} = 125{\cdot}417,\ n = 12$$

$$S = 10{\cdot}905$$

$$s = 11{\cdot}389$$

তাহলে আমরা পাই যে,

$$t = \frac{\bar{x} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$= -0{\cdot}481$$

সংশয়াঞ্চলটি হল $(-\infty, -t_\in)$ যেখানে $P(t > t_\in) = \in$ ; $t$ এর নিবেশন $t$ নিবেশন (স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রা $12 - 1 = 11$) প্রশ্নে $\in$ এর মান প্রদত্ত নয়।

$t$ নিবেশনটির টেবিল থেকে আমরা পাই, $P(t < -0{\cdot}481) = 0{\cdot}32$ (স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রা 11)।

সুতরাং, $t$ এর নির্ণীত মানটি সংশয়াঞ্চলে পড়ে না। ($\in$ এর মান 0·05 বা 0·01 ধরে নিলে প্রত্যেকটির মান 0·32 এর চেয়ে কম।) এখানে আমরা $H_0$ কে গ্রহণ করি।

অতএব, পূর্ণকের গড় $IQ$ এর মান 127 এর চেয়ে কম।

দ্বিতীয় ভাগ ঃ পরবর্তী পরীক্ষাটির জন্য গৃহীত নমুনাঙ্কটি হল,

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$$

এখানে, পরীক্ষণীয় স্বীকৃতিটি অর্থাৎ মুখ্য স্বীকৃতিটি হল, $H_0 : \sigma = \sigma_0$ (= 9·9) যার সাপেক্ষে কোনও বৈকল্পিক স্বীকৃতি নেই। গৃহীত নমুনাঙ্কটি স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত নমুনাজ নিবেশনটি হল, $\chi^2$ নিবেশন যার স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রা $(n-1)$। $n$ হল নমুনার আয়তন।

$n = 12$ হলে, $\chi^2$ এর মানটি হয়,

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma_0^2} = 14{\cdot}56$$

এখন, সংশয়াঞ্চলটি হল (যেখানে, সংশয়মাত্রা হল $t$) $\left(0, \chi^2_{\epsilon_1}\right) \cup \left(\chi^2_{\epsilon_2}, \infty\right)$

$\chi^2_{\epsilon_1}$ এবং $\chi^2_{\epsilon_2}$ এবং এর মানগুলি পাই,

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{\epsilon_1}\right) = 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{\epsilon_2}\right) = \frac{\epsilon}{2}$$

যেখানে $\chi^2$ হল $\chi^2$ $(ii)$ সমসম্ভব চল।

5% সংশয়মাত্রায় $\in = 0{\cdot}05$

তাহলে, $P\left(\chi^2 > \chi^2_{\epsilon_1}\right) = 0.975$

এবং $P\left(\chi^2 > \chi^2_{\epsilon_2}\right) = 0.025$

স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রা 11 হলে $\chi^2$ সারণি থেকে পাই,

$$\chi^2_{\epsilon_1} = 3.77$$

$$\chi^2_{\epsilon_2} = 22.1275$$

সুতরাং, সংশয়াঞ্চলটি হল $(0, 3{\cdot}77) \cup (22{\cdot}1275, \infty)$

যেহেতু, $\chi^2$ এর নির্ণীত মানটি সংশয়াঞ্চলে পড়ে না, আমরা $H_0$ কে গ্রহণ করি,

অর্থাৎ, পূর্ণকের প্রমাণ বিচ্যুতিটি হল 9·9

4. দুটি নর্মাল পূর্ণক থেকে দুটি পরস্পর অনির্দিষ্ট নমুনা সংগ্রহ করা হল। নমুনাদ্বয়ের আয়তন 30 এবং 55 এবং নমুনাদ্বয়ের সাধারণ ভেদমান 17·6, গড়গুলি হল যথাক্রমে 23·0 এবং 21·9। 1% সংশয়মাত্রায় পরীক্ষা করুন যে, পূর্ণকদ্বয়ের গড়গুলি সমান কিনা।

সমাধান : ধরা যাক, দুটি নর্মাল পূর্ণকের গড়গুলি হল $m_1$ এবং $m_2$। এক্ষেত্রে মুখ্য স্বীকৃতিটি হল, $H_0 : m_1 = m_2$ এখন, দুটি পূর্ণকই নর্মাল হওয়ায় এবং তাদের সমান ভেদমান থাকায় আমরা একটি নমুনাঙ্ক $u$ চয়ন করতে পারি,

$$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

যেখানে, $\overline{x}_1$ এবং $\overline{x}_2$ হল দুটি নমুনার গড়। $n_1, n_2$ যথাক্রমে নমুনাগুলির আয়তন এবং $\sigma^2 = 17{\cdot}6$ হল নমুনাদ্বয়ের সাধারণ ভেদমান।

এখানে নমুনাঙ্ক $u$ এর স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত নিবেশনটি হল $N(0, 1)$

এখানে, $n_1 = 30, \sigma^2 = 17{\cdot}6$

$$\overline{x}_1 = 23{\cdot}0, \ \overline{x}_2 = 21{\cdot}9$$

$$n_2 = 55$$

সুতরাং, $u = 1{\cdot}55$

এখানে, $(-\infty, -u_\epsilon) \cup (u_\epsilon, \infty)$ হল সংশয়াঞ্চল।

এখানে, $\epsilon = 0{\cdot}01$ এবং $u_\epsilon$ এর মান হবে,

$$P(U > u_\epsilon) = 0{\cdot}005$$

যেখানে, $U$ হল প্রমাণ নর্মাল সমসম্ভব চল।

নর্মাল নিবেশনের সারণি থেকে আমরা পাই, $u_\epsilon = 2{\cdot}575$

এখানে সংশয়াঞ্চলটি হল, $(-\infty, -2{\cdot}575) \cup (2{\cdot}575, \infty)$

যেহেতু আমাদের নির্ণীত $u$ এর মানটি সংশয়াঞ্চলে অবস্থিত নয়, সুতরাং আমরা মুখ্য স্বীকৃতি $H_0$ কে গ্রহণ করব। অর্থাৎ, 1% সংশয়মাত্রায় দুটি পূর্ণকের গড় দুটি সমান।

5. দুই প্রকার ইলেকট্রিক বাল্বের মধ্যে প্রথম প্রকারের 25টি বাল্ব এবং দ্বিতীয় প্রকারের 15টি বাল্বের নমুনার যথাক্রমে প্রমাণ বিচ্যুতিগুলি হল 259 এবং 115 ঘণ্টা। 1% সংশয়মাত্রায় পরীক্ষা করুন যে, দ্বিতীয় প্রকার বাল্বের মান প্রথম প্রকার বাল্বের উৎকর্ষতার মানের চেয়ে কম কিনা। পূর্ণক দুটিকে নর্মাল ধরে নিতে পারেন।

সমাধান : আমরা জানি যে, উৎকর্ষতার বিপরীত পরিমাপ হল (ভেদমান, অতএব, কম উৎকর্ষ মানের বাল্বের ক্ষেত্রে গৃহীত মুখ্য স্বীকৃতি, $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ যার সাপেক্ষে বৈকল্পিক স্বীকৃতিটি হল, $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$।

এখন, পূর্ণকদুটি নর্মাল হওয়ায় আমরা নমুনাঙ্ক, $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ গ্রহণ করলাম।

যার নমুনাজ নিবেশনটি হল $F$ নিবেশন $\upsilon_1 = n_1 - 1$ এবং $\nu_2 = n_2 - 1$।

যেখানে, $n_1, n_2$ হল নমুনাদ্বয়ের আয়তন।

$$n_1 = 25, n_2 = 15, S_1 = 259, S_2 = 115$$

$$s_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1}(S_1^2)$$

$$= \frac{25}{24}(259)^2$$

$= 69876.04167$

$s_2^2 = \frac{15}{14}(115)^2$

$= 14169.64286$

সুতরাং, $F$ এর নির্ণেয় মানটি হল $F = 4.93$

এখন, 1% সংশয়মাত্রায় সংশয়াঞ্চলটি হল, $P(F > F_{\epsilon}) = 0.01$

যেখানে, সমসম্ভব চল $F$ এর নিবেশনটি হল $F$ নিবেশন (প্রাচলগুলি হল $n_1 - 1 = 24, n_2 - 1 = 14$) এবং সংশয়াঞ্চলটি হল $(F_{\epsilon}, \infty)$

$F$ নিবেশনের সারণি থেকে পাই, $F_{\epsilon} = 3.43$

সুতরাং, সংশয়াঞ্চলটি হল $(3.43, \infty)$

এখন, $F$-এর নির্ণীত মানটি সংশয়াঞ্চলের মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং আমরা $H_0$ কে বর্জন করি। অর্থাৎ, প্রথম প্রকার বাল্বের মান দ্বিতীয় প্রকার বাল্বের চেয়ে ভাল।

6. কোনও একটি সমগ্রকের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x : \theta) = \theta\, e^{-\theta x}, 0 \leq x < \infty, \theta > 0.$$

মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \theta = 2$

বনাম বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 : \theta > 2$

নীচের বিচারপদ্ধতিতে বিচার করতে হবে ঃ

$H_0$ বাতিল করা হবে যদি সমগ্রক থেকে নেওয়া একক আকারের নমুনা $x$-এর মান 6-এর সমান বা 6 থেকে বড় হয়। প্রথম প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা এবং বিচারের শক্তি নির্ণয় করুন।

**সমাধান ঃ** এখানে প্রথম প্রকারের ভ্রান্তির সম্ভাবনা হবে

$$P(X \geq 6 \mid H_0)$$

$= P(X \geq 6 \mid \theta = 2)$, যেখানে $X$ হল সমগ্রকের সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

এখন $\quad P(x \geq 6 \mid \theta = 2)$

$$= \int_6^{\infty} 2e^{-2x}dx = 2 \lim_{\beta \to \infty} \int_6^{\beta} e^{-2x}dx$$

$$= \lim_{\beta \to \infty}\left(e^{-12} - e^{-2\beta}\right) = e^{-12} \quad \left[\because \lim_{\beta \to \infty} e^{-2\beta} = 0\right]$$

সুতরাং প্রথম প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা হবে $e^{-12}$

আবার দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা

$$= P(X < 6 \mid H_1) = P(X < 6 \mid \theta > 2)$$

$$= \int_0^6 \theta e^{-\theta x} dx, \text{ যেখানে } \theta > 2$$

$$= 1 - e^{-6\theta}$$

সুতরাং বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 : \theta > 2$ এর সাপেক্ষে বিচারের শক্তি হবে

$$1 - P(X < 6 \mid H_1)$$

$$= 1 - (1 - e^{-6\theta}) = e^{-6\theta}, \text{ যেখানে } \theta > 2$$

## 12.11 সারাংশ

এই এককে প্রকল্প বিচার বা স্বীকৃতির পরীক্ষা বিষয়ে আপনারা অবগত হয়েছেন। রাশি বিজ্ঞানের প্রকল্প বা স্বীকৃতির ব্যবহার ও প্রয়োগ এবং তাদের যথাযথ পরীক্ষা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। এই এককে মুখ্য প্রকল্প ও বৈকল্পিক প্রকল্প বিষয়ে আলোচনা আছে। নেয়্যান পিয়ার্সনের উপপাদ্য প্রমাণ করা হয়েছে এবং তার প্রয়োগ দেখানো হয়েছে। বিভিন্নরূপ স্বীকৃতির পরীক্ষা বিশেষ করে আশংসা অনুপাত পরীক্ষা ও তার প্রয়োগ জানতে পেরেছেন। এ ছাড়াও দুটি নর্মাল পূর্ণকের মধ্যে তুলনামূলক বিশ্লেষণ রয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ-এর মধ্যে বিষয়টির গুরুত্ব বোঝানো হয়েছে।

## 12.12 অনুশীলনী

1. দুটি নর্মাল পূর্ণকের নমুনার আয়তন 10 একক যাদের ভেদমান অজ্ঞাত। যদি নমুনা দুটির গড় যথাক্রমে 7 এবং 4 এবং ভেদমানগুলি যথাক্রমে 26 এবং 10 একক হয়। সংশয়মাত্রা 5% হলে দুটি পূর্ণকের গড়গুলি সমান কিনা পরীক্ষা করুন।

[স্বাতন্ত্রতার মাত্রা 18 হলে, $P(t > 2{\cdot}10) = 0{\cdot}025$]

[নমুনাঙ্ক $t$ এর নির্ণীত মান, $t = 1{\cdot}5$ এবং $H_0 : m_1 = m_2$ গ্রহণীয়]

2. নয়জন অসুস্থ রোগীকে একটি ওষুধ প্রয়োগ করে তাদের রক্তচাপ বর্ধিত হওয়ার যে পরিসংখ্যানটি পাওয়া গেল তা হল, 3, 7, 4, –1, –3, 6, –4, 1, 5।

10% সংশয়মাত্রায় প্রমাণ করুন যে ওধুষটি রক্তচাপ বর্ধিত করার ক্ষেত্রে কোনও ভূমিকা গ্রহণ করে না। [এক্ষেত্রে পূর্ণকটিকে নর্মাল ধরে নিতে হবে।]

[প্রদত্ত ঃ $P(t > 1{\cdot}86) = 0{\cdot}05$ যেখানে স্বাতন্ত্রতার মাত্রা 8]

3. একটি সমসত্তব নমুনার আয়তন 5, নমুনার গড় এবং ভেদমান যথাক্রমে 25 এবং 2·1। অন্য আর একটি সমসত্তব নমুনার আয়তন 6। নমুনার গড় এবং ভেদমান যথাক্রমে 29 এবং 4·0। 10% সংখ্যা-মাত্রায় পরীক্ষা করুন যে, নমুনা দুটি একই নর্মাল পূর্ণকের কিনা?

[প্রদত্ত $P(t > 1{\cdot}8333) = 0{\cdot}05$, স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা 9 হলে এবং $P(F > 6{\cdot}26) = 0{\cdot}05$ যেখানে $F(5, 4)$ সমসত্ত্ব চল।]

[সংকেত ঃ এখানে আমাদের পরিক্ষণীয় স্বীকৃতিটি হল $H_0 : m_1 = m_2$ এবং $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$

বৈকল্পিক স্বীকৃতিগুলি হল, $H_1 : m_1 \neq m_2$ এবং $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$]

4. 10 জন ছাত্রের ওজনের (কেজিতে) একটি সমসত্ত্ব নমুনা গ্রহণ করে দেখা গেল যে, 38, 40, 45, 53, 47, 43, 55, 48, 52, 49 কেজি ওজনগুলি হয়। 5% সংশয়মাত্রায় পরীক্ষা করুন যে, পূর্ণকের ভেদমান $\sigma^2$ (ধরে নেওয়া যাক, পূর্ণকটি নর্মাল) এর মান 20 এর চেয়ে অধিক কিনা।

[প্রদত্ত ঃ $P(\chi^2 > 16{\cdot}92) = 0{\cdot}05$, স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা 9।]

[সংকেত ঃ মুখ্য স্বীকৃতি $H_0 : \sigma = \sigma_0 = \sqrt{20}$ বৈকল্পিক স্বীকৃতি ঃ $H1 : \sigma > \sqrt{20}$ ]

নমুনাঙ্কটি $\chi^2 = \dfrac{nS^2}{\sigma_0{}^2} = 14$

সংশয়াঞ্চলটি হল $(16{\cdot}92, \infty)$ সুতরাং $H_0$ গ্রহণীয়]

5. একটি 10 আয়তনের সমসত্ত্ব নমুনা (ইঞ্চিতে) 65, 71, 64, 71, 70, 89, 64, 63, 67 এবং 68 গ্রহণ করে দেখা গেল যে, নমুনার ভেদমান 7·056 বর্গ ইঞ্চি। 5% সংশয়মাত্রায় পরীক্ষা করুন যে, পূর্ণকের গড় 69 ইঞ্চি কিনা।

[প্রদত্ত ঃ $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1.96}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 0.025$ ]

[সংকেত ঃ মুখ্য স্বীকৃতি $H_0 : m = 69$ বৈকল্পিক স্বীকৃতি $H_1 : m \neq 69$ $u$ এর নির্ণীত মানটি হল $-2{\cdot}14$ সংশয়াঞ্চলটি হল $(-\infty, -1{\cdot}69) \cup (1{\cdot}96, \infty)$ $H_0$ বর্জনীয়।]

6. দুটি রাসায়নিক দ্রবণ $A$ ও $B$ 'র $pH$ মাপ পরীক্ষা করে নীচের মানগুলি পাওয়া গেল ঃ

| | নমুনা সংখ্যা | গড় $pH$ | সমক বিচ্যুতি |
|---|---|---|---|
| রাসায়নিক $A$ | 6 | 72·5 | 0·024 |
| রাসায়নিক $B$ | 5 | 7·49 | 0·032 |

0·05 সংশয়মাত্রা ব্যবহার করে দ্রবণের $pH$ মান পৃথক কিনা তা বিচার করুন। (দেওয়া আছে $P(t > 2{\cdot}26) = 0{\cdot}05$, যেখানে $t$ হল 9 স্বাতন্ত্র্যমাত্রাযুক্ত স্টুডেন্ট $t$ চলক।)

[ সংকেত ঃ এখানে $m_1$ গড় ও $m_2$ গড় বিশিষ্ট দুটি নর্মাল সমগ্রকের ক্ষেত্রে মুখ্য প্রকল্প $H_0 : m_1 = m_2$ বনাম বৈকল্পিক প্রকল্প $H_1 : m_1 \neq m_2$ বিচার করতে হবে যেখানে দুটি সমগ্রকের একই সমক বিচ্যুতি $\sigma$ যা জানা নেই।

এখানে উপযুক্ত নমুনাঙ্ক (appropriate test statistic) হল $t = \sqrt{n_1 + n_2 - 2}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}}$ যার নমুনাজ নিবেশন হল $n_1 + n_2 - 2$ স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত $t$ নিবেশন। এখানে $n_1 = 6$, $n_2 = 5$, $\bar{x}_1 = 7{\cdot}52$, $\bar{x}_2 = 7{\cdot}49$, $S_1 = 0{\cdot}024$, সংশয়াঞ্চল হবে $\{t : |t| > 2{\cdot}26\}$ এবং $t$ এর মান হবে $1{\cdot}60$। সুতরাং $H_0$ গ্রহণীয় হবে।]

7. কোনও সমগ্রকের ঘনত্ব অপেক্ষক নীচে দেওয়া হল :

$$f(x\,;\theta) = \frac{1}{\theta}, \text{ যদি } 0 \le x \le \theta$$

$$= 0 \quad \text{অন্যত্র} \;।$$

এক্ষেত্রে একক আকারের নমুনা $x_1$ এর সাহায্যে মুখ্য প্রকল্প $H_0 : \theta = 1$ বনাম $H_1 : \theta : 2$ বিচার করতে হবে। যদি $\{x : x \ge 0{\cdot}5\}$ কে সংশয়াঞ্চল ধরা হয় তাহলে এই বিচারের ক্ষেত্রে প্রথম প্রকার ভ্রান্তির ও দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

## 12.13 উত্তরমালা

1. $t = 1{\cdot}5$, $H_0 : m_1 = m_2$ গ্রহণীয়।

2. $t = 1{\cdot}512$, $H_0 : m = 0$ গ্রহণীয়।

3. $t = -1{\cdot}824$, $H_0 : m_1 = m_2$ গ্রহণীয়।

   $F = 3{\cdot}48$, $H_0' : \sigma_1 = \sigma_2$ গ্রহণীয়।

7. প্রথম প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা $= 0{\cdot}5$ ; দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সম্ভাবনা $= 0{\cdot}25$।

# একক 13 ☐ $\chi^2$-পরীক্ষা ($\chi^2$-Test)

গঠন ঃ



## 13.1 বহুপদ নিবেশন (Multinomial Distribution)

বহুপদ সূত্রের (Multinomial law) এর অনুসঙ্গী (corresponding) যে নিবেশন পাওয়া যায় তাকে বহুপদ নিবেশন বলা হয়। ধরা যাক সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষণ (random experiment) $E$ এর ঘটনাদেশের মৌলিক ঘটনাগুলি হল $U_1, U_2, \ldots U_m$। এখন ধরা যাক $E$ পরীক্ষণটির $n$ সংখ্যক অনপেক্ষ (independent) প্রচেষ্টায় $U_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ ঘটনাটির পরিসংখ্যার (frequency) অনুসঙ্গী সম্ভাবনাশ্রয়ী চলকটি $X_k$ $(k = 1, 2, \ldots m)$। তাহলে $\sum\limits_{k=1}^{m} X_k = n$ হবে।

$X_1, X_2, \ldots X_m$ এর যৌথ নিবেশন (joint distribution) অর্থাৎ $m$-মাত্রিক সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক $(X_1, X_2, \ldots X_m)$ এর নিবেশনকে বহুপদ নিবেশন বলা হয়। যেখানে $X_1, X_2, \ldots X_m$ পরস্পর অনপেক্ষ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল এবং $\sum\limits_{k=1}^{m} X_k = n$।

মনে করুন $P(U_k) = p_k$ $(k = 1, 2, \ldots m)$।

তাহলে $p_1, p_2, \ldots p_m$ হবে বহুপদ নিবেশনের $m$ সংখ্যক পূর্ণকাঙ্ক (parameters)

বহুপদ নিবেশনের স্পেকট্রাম এর বিন্দুগুলি $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ যেখানে, $i_1, i_2, \ldots, i_m = 0, 1, 2, \ldots, n$ এবং যেখানে, $\sum i_k = n$

এবং এর সম্ভাবনা ভরগুলি হল,

$$f_{i_1 i_2 \ldots i_m} = P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_m = i_m)$$
$$= \frac{n!}{i! \, i_2! \ldots i_m!} \, p_i^{i_1} \phi_2^{i_2} \ldots p_m^{i_m}$$

**1.** বহুপদী নিবেশনটি হল $(m-1)$ মাত্রীয়, $\sum x_k = n$ পরা সমতল (Hyperplane) এর মধ্যে স্পেকট্রাম আবদ্ধ। পরাসমতলটি হল $m$ মাত্রীয় $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ এর দেশের উপদেশ। যখন $m = 2$ আমরা একটি একমাত্রীয় দ্বিপদী নিবেশন (Binomial Distribution) পাই।

**2.** বহুপদী নিবেশন এর $m$ সংখ্যক পূর্ণকাঙ্ক $p_1, p_2, \ldots p_m$ যেখানে $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$

**3.** $X_k$ হল দ্বিপদ $(n, p_k)$ চল $(k = 1, 2 \ldots, m)$

[একটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য (প্রমাণ ছাড়া)]

$p_1, p_2, \ldots, p_m$ এর মান ধ্রুবক হলে, $\sum_{k=1}^{m} \frac{(X_k - np_k)^2}{np_k}$ নমুনাঙ্কটির নিবেশন $\chi^2$-নিবেশন হবে যখন $n \to \infty$ যেখানে $\chi^2$ হল $\chi^2(m-1)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

বহুপদী পূর্ণক **(Multinomial population) :**

ধরা যাক, $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ হল একটি বহুপদী সম্ভাবনাশ্রয়ী চল। সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষণ $E$ শর্ত অপরিবর্তিত রেখে $n$ বার পুনরাবৃত্তি করলে এবং ঘটনা $U_k$ এর পরিসংখ্যা (frequency) $\upsilon_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ হলে $(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_n)$ হবে $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ $m$-মাত্রিক চলের একটি প্রাপ্ত মান।

## 13.2 বহুপদ সমগ্রকের (পূর্ণকের) পূর্ণকাঙ্ক সমূহের প্রাক্কলন এবং এই পূর্ণকাঙ্কগুলি সম্বন্ধে স্বীকৃতির পরীক্ষা [Estimation of the parameters of a multinomial population and testing of hypothesis regarding these parameters]

(13.1) অনুচ্ছেদের শেষে যে বহুপদী সমগ্রকের (পূর্ণকের) ধারণা দেওয়া হয়েছে তার অজানা পূর্ণকাঙ্কগুলি হল $p_1, p_2, \ldots p_m$ (এখানে $n$ এর মান জানা আছে)। এখন এই সমগ্রক থেকে চয়ন করা একক আকারের সমসম্ভব নমুনা $(\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_m)$ এর ভিত্তিতে আমরা $p_1, p_2, \ldots p_m$ পূর্ণকাঙ্কগুলির প্রাক্কলনীমান নির্ণয় করব। এখানে আশংসা অপেক্ষকটি হবে,

$$L(\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_m ; p_1, p_2, \ldots p_m) = \frac{n\,!}{\upsilon_1! \, \upsilon_2! \ldots \upsilon_m!} \, p_1^{\upsilon_1} p_2^{\upsilon_2} \ldots p_m^{\upsilon_m}$$

যেখানে $\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_m = n$ এবং $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$.

তাহলে $\log L = \sum_{k=1}^{m} \upsilon_k \log p_k + p_k$ এর উপর নির্ভরশীল নয় পদসমূহ।

এখানে আমরা $\log L$ এর চরম মান নির্ণয় করব ($\sum p_k = 1$) এবং এখানে,

$$\sum \frac{\upsilon_k}{p_k} dp_k = 0 \; ; \sum dp_k = 0$$

যার থেকে আমরা পাই, $\sum \left( \frac{\gamma_k}{p_k} + \lambda \right) dp_k = 0$

যেখানে $\lambda$ হল লাগ্রাঞ্জের গুণনীয়ক। এর থেকে আমরা পাই,

$$\frac{\upsilon_k}{p_x} + \lambda = 0, \; k \text{ এর সমস্ত মানের জন্য, এখানে,}$$

$$\frac{\upsilon_1}{p_1} = \frac{\gamma_2}{p_2} = \ldots = \frac{\upsilon_m}{p_m} = \frac{\sum \upsilon_k}{\sum p_k} = n$$

$$\text{অথবা, } \hat{p}_k = \frac{\upsilon_k}{n} = (k = 1, 2, \ldots, m).$$

যেটি আমাদের আকাঙ্ক্ষিত প্রাক্কলনী মান।

**স্বীকৃতির পরীক্ষা (Test of Hypothesis) :**

$H_o : p_k = p_{0k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ হল গৃহীত মুখ্য স্বীকৃতি, যেখানে $p_{0k}$ হল প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা এবং $\sum p_{0k} = 1$ এবং $n$ এর মান বৃহৎ ধনাত্মক সংখ্যা যা জানা আছে।

এখন, $L(\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_m ; \hat{p}_1 \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_m)$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor \upsilon_1 \lfloor \upsilon_2 \cdots \lfloor \upsilon_m} \left( \frac{\upsilon_1}{n} \right)^{\gamma_1} \left( \frac{\upsilon_2}{n} \right)^{\upsilon_2} \cdots \left( \frac{\upsilon_m}{n} \right)^{\upsilon_m}$$

এবং $L_0(\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_m)$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor \upsilon_1 \lfloor \upsilon_2 \lfloor \upsilon_m} p_{01}^{\upsilon_1} p_{02}^{\upsilon_2} \cdots p_{0m}^{\upsilon_m}$$

সুতরাং, $\lambda^{-1} = \left( \frac{\upsilon_1}{np_{01}} \right)^{\upsilon_1} \left( \frac{\upsilon_2}{np_{02}} \right)^{\upsilon_2} \cdots \left( \frac{\upsilon_m}{np_{0m}} \right)^{\upsilon_m}$

অথবা, $-\log \lambda = \sum \upsilon_k \log \left( \frac{\upsilon_k}{np_{0k}} \right)$

$$= \sum \left[ \left( \upsilon_k - np_{o_k} \right) \log \left( 1 + \frac{\upsilon_k - np_{0_k}}{np_{o_k}} \right) + np_{0_k} \log \left( 1 + \frac{\upsilon_k - np_{0_k}}{np_{0_k}} \right) \right]$$

স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত $\frac{\upsilon_k}{n} - p_{o_k}$ হল একটি ক্ষুদ্র সংখ্যা ($n$ এর মান বৃহৎ)

এবং এক্ষেত্রে, $$-\log\lambda = \Sigma\left[\frac{(\upsilon_k - np_{o_k})^2}{np_{o_k}} + np_{o_k}\left\{\frac{\upsilon_k - np_{o_k}}{np_{o_k}} - \frac{(\upsilon_k - np_{o_k})^2}{2n^2p_{0k}^2}\right\}\right]$$

অথবা, $$\Sigma(\gamma_k - np_{o_k}) = 0 - 2\log\lambda = \sum_{k=1}^{m}\frac{(\upsilon_k - np_{o_k})^2}{np_{o_k}} = \chi^2.$$

এখানে $H_0$ সত্য ধরে নিলে $\chi^2$ হল $\chi^2(m-1)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল ($n$ এর বৃহৎ মানের জন্য)। এখানে, সংশয়াঞ্চলটি হল $(\chi_\epsilon^2, \infty)$ যেখানে $\chi_\epsilon^2$ এর মান,

$P(\chi^2 > \chi_\epsilon^2) = \epsilon$ থেকে নির্ণয় করা যাবে এবং সেখানে $\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ হল প্রদত্ত সংশয়মাত্রা।

## 13.3 সাযুজ্যতার উৎকর্ষের $\chi^2$- বিচার ($\chi^2$ test of goodness of fit) :

একটি স্বীকৃতি ধরা যাক, $H_0 : F(x) = F_0(x)$ যেখানে $F_0(x)$ হল প্রদত্ত নিবেশন অপেক্ষক। প্রদত্ত পূর্ণকের একটি বৃহৎ নমুনার উপর ভিত্তি করে এখানে আমরা পরীক্ষা করে থাকি যে, গৃহীত নমুনাটির উপর ভিত্তি করে, ধরে নেওয়া পূর্ণকের নিবেশনটিকে সত্য বলে গ্রহণ করা যায় কিনা। এই পরীক্ষাটিকে সাযুজ্যতার উৎকর্ষের পরীক্ষা বলা হয়ে থাকে। এক্ষেত্রে দুটি পর্যায়ের সৃষ্টি হতে পারে।

প্রথম পর্যায় : $F_0(x)$ অপেক্ষকটি যদি সম্পূর্ণরূপে জ্ঞাত হয় অর্থাৎ কোনও অজানা পূর্ণকাঙ্ক না থকে। সম্ভাবনাশ্রয়ী চল X এর স্পেকট্রামকে $m$ টি পরস্পর বিচ্ছিন্ন উপসেটে $A_1, A_2, \ldots\ldots A_m$ বিভক্ত করা হল।

"$X \in A_k$" এই ঘটনাটিকে আমরা $U_k$ যেখানে $k = 1, 2, \ldots, m$ দ্বারা প্রকাশ করি, $U_1, U_2, \ldots, U_m$ হল পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনাসমূহ। এক্ষেত্রে, $U_1 + U_2 + \ldots + U_m = S$। যেখানে $S$ হল, সম্ভাবনাশ্রয়ী পরীক্ষণ $E$ এর ঘটনা দেশ। ধরা যাক, $U_k$ এর পরিসংখ্যার সাপেক্ষে সম্ভাবনাশ্রয়ী চলটি হল $X_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$

আবার ধরা যাক, $P(U_k) = p_k$

যেখানে, $k = 1, 2, \ldots, m$ ।

এখানে $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ হল বহুপদী সম্ভাবনাশ্রয়ী চল এবং এই $m$-মাত্রীয় চলের পূর্ণকাঙ্কগুলি হল $p_1, p_2, \ldots, p_m$। $A_1, A_2, \ldots, A_m$ এর মধ্যে অবস্থিত $n$ আয়তনের নমুনার মানগুলি হল যথাক্রমে $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ অর্থাৎ $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ এর পূর্ণকের একক আকারের একটি নমুনা হল $(\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_m)$।

ধরা যাক, $P(X \in A_k \mid H_0) = p_{0k}$ (যেখানে $k = 1, 2, ..., m$) স্পষ্টতই এখানে, স্বীকৃতি $H_0$ কে লিখতে পারি যে, $H_0 : F(x) = F_0(x)$ যা আসন্নভাবে (approximately) $H'_0 : p_k = p_{0k}$ ($k = 1, 2, ..., m$) এই প্রকল্পের সমতুল্য (equivalent)।

সুতরাং, এক্ষেত্রে গৃহীত মুখ্য স্বীকৃতিটি হল, $H_0 : p_k = p_{0k}$ যার সাপেক্ষে কোনও নির্দিষ্ট বৈকল্পিক স্বীকৃতি ধরা হল না।

$\in$ সংশয়মাত্রায় $H'_0$ এর পরীক্ষায় সংশয়াঞ্চলটি হবে, $(\chi_\in^2, \infty)$ যেখানে $P(\chi^2 > \chi_\in^2) = \in$, যেখানে $H_0$ ধরে নিলে, $\chi^2$ হল সম্ভাবনাশ্রয়ী $\chi^2(m-1)$ চল। গৃহীত, নমুনাঙ্কটি হল, $\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\upsilon_k - np_{0k})^2}{np_{0k}}$, প্রাপ্ত $\chi^2$ এর মানটি যদি সংশয়াঞ্চলের মধ্যে পড়ে তবে $H_0'$ বর্জিত হয় এবং $H_0$ কে বর্জন করা হয়। অন্যথায় $H_0$ গৃহীত হয়।

দ্বিতীয় পর্যায় : এইক্ষেত্রে ধরা যাক, $F_0(x)$ এর আবার জ্ঞাত কিন্তু $F_0(x)$ অপেক্ষকের কিছু অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্ক $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ বর্তমান। প্রথমে আমাদের পূর্ণকাঙ্ক $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ এর চরম আশংসা প্রাককলনী মানগুলি $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, ..., \hat{\theta}_r$ নির্ণয় করতে হবে। $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, ..., \hat{\theta}_r$ যথাক্রমে $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ এর আনুমানিক মান।

$F_0(x)$ অপেক্ষকে $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ পূর্ণকাঙ্কগুলির পরিবর্তে পূর্ণকাঙ্কগুলির প্রাক্‌কলনী মানগুলি নেওয়া হল। সুতরাং $F_0(x)$ সম্পূর্ণরূপে জ্ঞাত হল এবং পূর্বের পর্যায়ের ন্যায় আমরা $p_{0k}$ ($k$, 1, 2, ..., $m$) এর মানগুলি পেলাম। এখন যেহেতু $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ এর মানগুলি আনুমানিক সুতরাং প্রাপ্ত $p_{0k}$ ($k = 1, 2, ..., m$) এর মানগুলিও আনুমানিক হয়। এক্ষেত্রে পরীক্ষণীয় নমুনাঙ্কটি হবে, $\chi^2$ যেখানে,

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\upsilon_k - np_{ok})^2}{np_{0k}}$$

কিন্তু এক্ষেত্রে $H_0$ ধরে নিলে, নমুনাঙ্ক $\chi^2$ এর নমুনাঙ্ক নিবেশনটি হল $\chi^2$ নিবেশন যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা $(m - r - 1)$ এবং $(0 < \in < 1)$ সংশয়মাত্রায় সংশয়াঞ্চলটি হবে $(\chi_\in^2, \infty)$

যেখানে $\chi_\in^2$ এর মানটি $P(\chi^2 > \chi_\in^2) = \in$ থেকে পাওয়া যাবে এবং যেখানে $\chi^2$ হল $\chi^2(m - r - 1)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

এক্ষেত্রে লক্ষণীয় বিষয় এই যে, $\chi^2$ এর সাযুজ্যতার পরীক্ষাটি উত্তম মান দেয় যখন $n$-এর মান বৃহৎ হয় এবং $np_{0k}$($k = 1, 2, ..., m$) এর মান অত্যন্ত ক্ষুদ্র না হয়।

[$np_{0k} > 5$ হওয়া দরকার, $k = 1, 2, ..., m$]

## 13.4 উদাহরণমালা ঃ

(1) একটি লুডোর ছক্কাকে 1000 বার ছোঁড়া হলে ছক্কা দ্বারা প্রদর্শিত সংখ্যাগুলির পরিসংখ্যা নীচে দেওয়া হল ঃ

| প্রদর্শিত সংখ্যা | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | মোট |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা | 105 | 143 | 181 | 157 | 198 | 216 | 1000 |

প্রমাণ করুন যে, ছক্কাটি পক্ষপাতশূন্য নয়।

সমাধান ঃ এই বহুপদী সমস্যাটির জন্য আমরা একটি মুখ্য স্বীকৃতি গ্রহণ করলাম।

$$H_0 : p_k = p_{0k} \left(= \frac{1}{6}\right)$$

যেখানে, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ এবং এই মুখ্য স্বীকৃতির সাপেক্ষে কোনও বিশেষ বৈকল্পিক স্বীকৃতি ধরা হল না। যেখানে, $p_k$ হল $k$ প্রান্ত পাওয়ার সম্ভাবনা (যেখানে, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) (লুডোর ছক্কাটি একবার ছোঁড়া হলে)।

এখানে, পরীক্ষণীয় নমুনাঙ্কটি হবে,

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(\upsilon_k - np_{0k})^2}{np_{0k}}$$

স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত যার নমুনাজ নিবেশনটি হল $\chi^2$ নিবেশন যার স্বাতন্ত্র্যের মাত্রা $6 - 1 = 5$।

এখন, $\chi^2$ এর জন্য টেবিলটি হবে,

| মাত্রা | $p_{0k}$ | $\upsilon_k$ | $np_{0k}$ | $\frac{(\upsilon_k - np_{0k})^2}{np_{0k}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{6}$ | 105 | $\frac{1000}{6}$ | 22·8167 |
| 2 | $\frac{1}{6}$ | 143 | $\frac{1000}{6}$ | 3·3607 |
| 3 | $\frac{1}{6}$ | 181 | $\frac{1000}{6}$ | 1·2327 |
| 4 | $\frac{1}{6}$ | 157 | $\frac{1000}{6}$ | 0·5607 |
| 5 | $\frac{1}{6}$ | 198 | $\frac{1000}{6}$ | 5·8907 |
| 6 | $\frac{1}{6}$ | 216 | $\frac{1000}{6}$ | 14·6027 |
| | | | | 48·4642 |

এখন, 1% সংশয়মাত্রায়, সংশয়াঞ্চলটি হবে, $(\chi_\epsilon{}^2, \infty)$

যেখানে, $P(\chi^2 > \chi_\epsilon{}^2) = 0{\cdot}01$ যেখানে $\chi^2$ হলে $\chi^2(5)$ সমসম্ভব চল।

এখন, $\chi^2$ টেবিল থেকে স্বাতন্ত্রতার মাত্রা 5 হলে আমরা পাই,

$$\chi_{\epsilon}^2 = 15{\cdot}086$$

এখানে সংশয়াঞ্চলটি হল $(15{\cdot}086, \infty)$। সুতরাং, নমুনাঙ্কটির প্রাপ্ত মানটি $48{\cdot}4642$ এবং $48{\cdot}4642 > 15{\cdot}086$ হওয়ায় এক্ষেত্রে মুখ্য স্বীকৃতি $H_0$ কে বর্জন করা হল। সুতরাং, ছক্কাটি পক্ষপাতশূন্য নয়।

2. নিম্নলিখিত তালিকাটি কলকাতার কোনও এক বিশিষ্ট অঞ্চলের দুর্ঘটনার সংখ্যা প্রকাশ করে (3 মাস পর্যবেক্ষণের ভিত্তিতে)

| দুর্ঘটনার সংখ্যা | দিনসংখ্যা |
|---|---|
| 3 | 2 |
| 4 | 2 |
| 5 | 5 |
| 6 | 7 |
| 8 | 14 |
| 9 | 15 |
| 10 | 12 |
| 11 | 10 |
| 12 | 7 |
| 13 | 4 |
| 14 | 3 |
| 15 | 1 |
| মোট | 90 |

পরীক্ষা করে দেখান যে পথ দুর্ঘটনার পূর্ণকটি পোয়ার্স পূর্ণক। যেখানে পূর্ণাঙ্কের গড় প্রদত্ত $8{\cdot}7$।

**সমাধান :** পরীক্ষণীয় মুখ্য স্বীকৃতিটি হবে

$$H_0 : F(x) = F_0(x)$$

যেখানে, $F_0(x)$ হল পোয়াসঁ নিবেশনের নিবেশন অপেক্ষক যেখানে পূর্ণকাঙ্ক $\mu = 8{\cdot}7$

এখন, এই নিবেশনের সম্ভাবনা ভর অপেক্ষকটি হল,

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= \frac{e^{-8\cdot7}(8\cdot7)^x}{x!}$$

এক্ষেত্রে, পরীক্ষণীয় নমুনাঙ্কটি হল,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(\upsilon_i - np_{0i}\right)^2}{np_{0i}}$$

যার নমুনাজ নিবেশনটি হল, স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত $\chi^2$ নিবেশন যার স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রা $m - 1 - k$ যেখানে মান $n = 90$ এবং এখানে $m$ হল পৃথক শ্রেণিগুলির সংখ্যা যেই শ্রেণিগুলির পরিসংখ্যা অন্ততপক্ষে 5।

এখানে, $\upsilon_i$ দিনে দুর্ঘটনার সংখ্যা $i$।

এখানে, আমরা প্রদত্ত সারণিটিকে এমনভাবে সাজালাম যাতে প্রাপ্ত পরিসংখ্যাগুলি 5 এর চেয়ে বৃহৎ হয়।

সুতরাং, আমরা নিম্নলিখিত তালিকাটি পাই ঃ

| দুর্ঘটনার | $p_{0i}$ | $np_{0i}$ | $\upsilon_i$ | $\frac{(\upsilon_i - np_{0i})^2}{np_{0i}}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\leq 5$ | 0·13516 | 12·164 | 9 | 0·8232 |
| 6 | 0·100328 | 9·030 | 7 | 0·4564 |
| 7 | 0·124693 | 11·222 | 8 | 0·9251 |
| 8 | 0·135604 | 12·204 | 14 | 0·2643 |
| 9 | 0·131084 | 11·798 | 15 | 0·8690 |
| 10 | 0·114043 | 10·264 | 12 | 0·2936 |
| 11 | 0·090197 | 8·118 | 10 | 0·4363 |
| 12 | 0·065393 | 5·885 | 7 | 0·2113 |
| $\geq 13$ | 0·103498 | 9·315 | 8 | 0·1856 |
| মোট | 1·000000 | | | 4·4648 |

এখানে $n = 90$ এবং $i$ পথ দুর্ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $p_{0i}$ (স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত) সংশয়মাত্রা 5% হলে সংশয়াঞ্চলটি হবে, $(\chi^2_{\epsilon}, \infty)$ যেখানে $P(\chi^2 > \chi^2_{\epsilon}) = 0{\cdot}05$, যেখানে, $\chi^2$ হল $\chi^2(8)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

যেখানে, $m = 9$, $k = 0$ এবং $m - k - 1 = 8$

$\chi^2$ এর তালিকা থেকে পাই, $\chi_{\epsilon}{}^2 = 15{\cdot}507$

এখানে, সংশয়াঞ্চলটি হল $(15{\cdot}507, \infty)$। নির্ণেয় $\chi^2$ এর মানটি হল 4·4648 যা সংশয়াঞ্চলটির মধ্যে অবস্থিত নয়। ফলে, এই ক্ষেত্রে, মুখ্য স্বীকৃতি $H_0$ গৃহীত হল। এখানে, পথ দুর্ঘটনার পূর্ণকটির নিবেশন পোয়াসঁ নিবেশন।

3. 5টি সন্তান আছে এরূপ 320 টি পরিবারের ক্ষেত্রে আমরা নিম্নলিখিত পরিসংখ্যানগুলি পাই,

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| বালকের সংখ্যা ঃ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| বালিকার সংখ্যা ঃ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| পরিবারের সংখ্যা ঃ | 14 | 56 | 110 | 88 | 40 | 12 |

পরীক্ষা করুন যে, প্রদত্ত তথ্যগুলি যে পূর্ণক থেকে গৃহীত সেই পূর্ণকটি দ্বিপদ পূর্ণক।

**সমাধান ঃ** এখানে আমরা একটি মুখ্য স্বীকৃতি ধরে নিলাম, $H_0 : F(x) = F_0(x)$ ; যেখানে $F_0(x)$ হল দ্বিপদ $(5, p)$ নিবেশনের নিবেশন অপেক্ষক এবং $p$ হল একটি বালিকার জন্মের সম্ভাবনা।

এখন, দ্বিপদ $(5, p)$ নিবেশনের সম্ভাবনা ভর অপেক্ষকটি হল, $f(x) = \binom{5}{x} p^x q^{5-x}$

যেখানে, $q = 1 - p$ এবং $p = \frac{1}{2}$ (প্রদত্ত) এবং $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

এখানে, পরীক্ষণীয় নমুনাঙ্কটি হল,

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{5} \frac{(\upsilon_i - np_{0i})^2}{np_{0i}}$$

যার (মুখ্য স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত) নমুনাজ নিবেশনটি হল $\chi^2$ নিবেশন $6 - 1 = 5$ স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রায়। এখানে, $n = 320$

এখানে, $i$ সংখ্যক বালিকার পরিসংখ্যা $\upsilon_i$ যখন $n = 320$ এবং $p_{0i}$ হল $i$ সংখ্যক বালকের সম্ভাবনা।

এখন, $\chi^2$ এর মান আমরা নিম্নের টেবিলের সাহায্যে পাই, যেখানে, $n = 320$, $p = \frac{1}{2}$ এবং $q = \frac{1}{2}$

| বালিকার সংখ্যা | আকাঙ্খিত পরিসংখ্যা $np_{0i} = 320\binom{5}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{5-i}$ | পর্যবেক্ষিত পরিসংখ্যা $(\upsilon_i)$ | $\frac{(\upsilon i - np_{0i})^2}{np_{0i}}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 14 | 1·600 |
| 1 | 50 | 56 | 0·720 |
| 2 | 100 | 110 | 1·000 |
| 3 | 100 | 88 | 1·440 |
| 4 | 50 | 40 | 2·000 |
| 5 | 10 | 12 | 0·400 |
| | | | 7·160 |

এক্ষেত্রে, 5% সংশয়মাত্রার সংশয়াঞ্চলটি হবে $(\chi_\epsilon^2, \infty)$ যেখানে, $\chi_\epsilon^2$ এর মানটি হবে, $P(\chi^2 > \chi_\epsilon^2) = 0{\cdot}05$. $\chi^2$ হল $\chi^2(5)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

এখন যেহেতু $\chi^2$ সারণী থেকে পাই, $\chi_c^2 = 11{\cdot}07$ সুতরাং সংশয়াঞ্চলটি হয় $(11{\cdot}07, \infty)$

সুতরাং $\chi^2$ এর নির্ণীত মান সংশয়াঞ্চলের মধ্যে পড়ে না, (অর্থাৎ, $7{\cdot}160 < 11{\cdot}07$) তাই আমরা এক্ষেত্রে $H_0$ কে গ্রহণ করি। সুতরাং প্রদত্ত নমুনাটির পূর্ণকটি একটি দ্বিপদ পূর্ণক।

4. কোনও অঞ্চলের বিগত 60 দিনের গড় তাপমাত্রার একটি তালিকা প্রদত্ত হল ঃ

| তাপমাত্রা (সেলসিয়াস) | দিনসংখ্যা |
|---|---|
| 1–3 | 2 |
| 3–5 | 4 |
| 5–7 | 8 |
| 7–9 | 10 |
| 9–11 | 16 |
| 11–13 | 12 |
| 13–15 | 5 |
| 15–17 | 3 |
| মোট | 60 |

উপরের তথ্যগুলির সাপেক্ষে যে পূর্ণক পাওয়া যায় তা নর্ম্যাল কিনা পরীক্ষা করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমস্যাটি সমাধানে একটি মুখ্য স্বীকৃতি ধরা যাক।

$$H_0 : F(x) = F_0(x)$$

যেখানে $F_0(x)$ হল নর্ম্যাল নিবেশনের নিবেশন অপেক্ষক, যার পূর্ণকাঙ্কগুলি হল $(m, \sigma)$।

এখন, এই নিবেশনের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকটি হল,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

এখানে, $m$ এবং $\sigma$ দুটি পূর্ণকাঙ্কই অজ্ঞাত হওয়ায় আমরা তাদের প্রাককলনী মান যথাক্রমে $\bar{x}$ (নমুনা গড়) এবং $S$ (নমুনাজ প্রমাণ বিচ্যুতি) দ্বারা যথাক্রমে এদের প্রতিস্থাপিত করি।

সুতরাং আমরা পাই যে,

$$f(x) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}}$$

এখানে পরীক্ষণীয় নমুনাঙ্কটি হল,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(v_i - np_{0i})^2}{np_{0i}}$$

স্বীকৃতি $H_0$ এর অন্তর্গত যার নমুনাজ নিবেশনটি হল $\chi^2$ নিবেশন [স্বাতন্ত্রতার মাত্রা $(m - 1 - k)$] এখানে $n$ হল নমুনার আয়তন এবং $m$ হল পূর্ণকি সমসম্ভব চলের স্পেকট্রামকে যে কটি অন্তরে বিভক্ত করা হয়েছে তার সংখ্যা। অন্তরগুলিতে আপেক্ষিক পরিসংখ্যাগুলি 5 এর সমান বা 5 থেকে বৃহত্তর এবং $k$ হচ্ছে নিবেশন অপেক্ষক $F_0(x)$ এর মধ্যে উপস্থিত অজ্ঞাত পূর্ণকাঙ্কের সংখ্যা।

এখন, অন্তরগুলিকে এমনভাবে সাজানো হল যাতে আকাঙ্ক্ষিত পরিসংখ্যাগুলি হল $(-\infty, 5)$, $(5, 7)$, $(7, 9)$, $(9, 11)$, $(11, 13)$ এবং $(13, \infty)$।

এখানে নমুনার গড় $\bar{x} = 8{\cdot}8$ এবং নমুনার প্রমাণ বিচ্যুতি $S = 3{\cdot}29$।

এখানে, $(-\infty, \infty)$ স্পেকট্রামকে নর্মাল নিবেশনের $m$ টি উপযুক্ত অন্তরে বিভক্ত করা হল,

$$a_{i-1} < x \leq a_i \ (i = 1, 2, ..., m)$$

সুতরাং আমরা পাই যে,

$$p_{0i} = P(a_i < X \leq a_i)$$

যেখানে $X$ হল পূর্ণকের সমসম্ভব চল।

এখান আমরা পাই যে,

$$z_k = \frac{a_k - \bar{x}}{S}$$

যার সাপেক্ষে সমসম্ভব চলটি হল $Z_k$ যার নর্ম্যাল $(0, 1)$ নিবেশন বর্তমান।

এখানে, $Z = \dfrac{X - \bar{x}}{S}$ হল $N(0, 1)$

ধরা যাক, $z_i = \dfrac{a_i - \bar{x}}{S}$ $(i - 0, 1, 2, ..., n)$

যেখানে $p_{0i} = P(z_{i-1} < Z \leq z_i) = \Phi(z_i) = \Phi(z_{i-1})$

এখানে আমাদের নিম্নলিখিত সারণিটি থেকে পাই :

এখানে $n = 60$

| $a_i$ | $z_i$ | $\phi(z_i)$ | $p_{0i}$ | $np_{0i}$ | $\upsilon_i$ | $\dfrac{(\upsilon_i - np_{0i})^2}{np_{0i}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $-\infty$ | 0·0000 | | | | |
| 5 | −1·36 | 0·0869150 | 0·086915 | 5·2149 | 6 | 0·1181196324 |
| 7 | −0·75 | 0·2266274 | 0·1397124 | 8·382744 | 8 | 0·017475538 |
| 9 | −0·15 | 0·4403823 | 0·2137549 | 12·825294 | 10 | 0·622386214 |
| 11 | 0·45 | 0·6736448 | 0·2332625 | 13·99575 | 16 | 0·287016991 |
| 13 | 1·05 | 0·8531409 | 0·1794961 | 10·769766 | 12 | 0·140530044 |
| $\infty$ | $\infty$ | 1·0000000 | 0·1468591 | 8·811546 | 8 | 0·074743627 |
| | | | | | | 1·26034874 |

আমরা জানি যে $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

তাহলে $\Phi(-1{\cdot}36) = 1 - \Phi(1{\cdot}36)$

$= 1 - 0{\cdot}9130850$ (নর্মাল সারণি ব্যবহার করে)

$= 0{\cdot}0869150$

এখানে, $m = 6, k = 2$

সুতরাং, $(m - 1 - k) = (6 - 1 - 2) = 3$

সুতরাং, যদি, $(\chi_\epsilon^2, \infty)$ 5% সংশয়মাত্রায় সংশয়াঞ্চল হয়, $P(\chi^2 > \chi_\epsilon^2) = 0{\cdot}05$

যেখানে, $\chi^2$ হল $\chi^2(3)$ সম্ভাবনাশ্রয়ী চল।

এখন $\chi^2$ সারণি থেকে আমরা পাই $\chi_\epsilon^2 = 7{\cdot}815$ যখন $P(\chi^2 > \chi_\epsilon^2) = 0{\cdot}05$ এবং $\chi^2$ হল $\chi^2(3)$ সম্ভাববনাশ্রয়ী চল।

সুতরাং 5% সংশয়মাত্রায়, সংশয়াঞ্চল হবে $(7{\cdot}815, \infty)$।

এখানে $\chi^2$ (উপরের সারণি দেখুন) এর নির্ণীত মান $1{\cdot}26$ (প্রায়)।

আমরা লক্ষ করছি $1{\cdot}26 < 7{\cdot}815$

সুতরাং, $1{\cdot}26 \notin (7{\cdot}815, \infty)$

অতএব $H_0 : F(x) = F_0(x)$ প্রকল্পটি 5% সংশয়মাত্রায় গ্রহণীয়।

সুতরাং, প্রদত্ত তথ্য নর্ম্যাল পূর্ণক থেকে নেওয়া হয়েছে" প্রকল্পটি গ্রহণীয়।

## 13.5 সারাংশ

এই এককে বহুপদ নিবেশন সম্বন্ধে ধারণা দেওয়া হয়েছে। এরূপ নিবেশনের পূর্ণকাঙ্কগুলি নিয়ে প্রকল্পের বিচারের $\chi^2$ পরীক্ষাটি ব্যাখ্যা করা হয়েছে এবং "সাযুজ্যতার উৎকর্ষের $\chi^2$ বিচার" বিষয়টি বুঝিয়ে বলা হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ দিয়ে বিষয়টিকে আরো ভালভাবে বোঝানো হয়েছে।

## 13.6 অনুশীলনী

(1) নিম্নলিখিত তালিকাটি গত 15 বছরে 8টি রাজ্যে আত্মহত্যার পরিসংখ্যান দর্শিত করে ঃ

| রাজ্যে প্রতি বছরে আত্মহত্যার সংখ্যা | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| পর্যবেক্ষিত পরিসংখ্যা | 364 | 376 | 218 | 89 | 33 | 13 | 2 | 1 |

5% সংশয়মাত্রায় পরীক্ষা করুন যে প্রদত্ত নমুনাটি পোয়াসঁ নিবেশনের অর্ন্তভুক্ত কিনা।

[ প্রদত্ত, স্বাতন্ত্রতার মাত্রা 4 হলে $P(\chi^2 > 9{\cdot}49) = 0{\cdot}05$]

2. মেশিন দ্বারা নির্মিত একটি বার সাবানের বেধ (thickness) এর একটি সমসম্ভব নমুনা দেওয়া হল ঃ

| বেধ ($m.m.$) | বার সাবানের সংখ্যা |
|---|---|
| 0·10–0·12 | 4 |
| 0·12–0·14 | 7 |
| 0·14–0·16 | 13 |
| 0·16–0·18 | 19 |
| 0·18–0·20 | 23 |
| 0·20–0·22 | 20 |
| 0·22–0·24 | 15 |
| 0·24–0·26 | 12 |
| 0·26–0·28 | 5 |
| 0·28–0·30 | 2 |

প্রদত্ত তথ্যের পূর্ণকটি কি নর্ম্যাল?

পরীক্ষা করুন (পূর্ণকের গড় 0·19 $mm$)।

3. কোনও ব্যাঙ্কের 100 জন হিসাব পরীক্ষকদের একটি সমসম্ভব নমুনা গ্রহণ করা হল এবং তাদের ভ্রান্তির সংখ্যা দেখা হল,

| ভ্রান্তির সংখ্যা ঃ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| হিসাব পরীক্ষকের সংখ্যা ঃ | 36 | 40 | 19 | 2 | 0 | 2 | 1 |

এই নমুনাটির উপর ভিত্তি করে আমরা কি বলতে পারি যে, হিসাব পরীক্ষকদের ভ্রান্তির নিবেশনটি *Poisson* নিবেশন?

4. একজন পক্ষীবিশারদ একটি পার্কে বসে 6 প্রকারের পাখি পর্যবেক্ষণ করেন।

| প্রকার ঃ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা ঃ | 6 | 7 | 13 | 17 | 6 | 5 |

5% সংশয়মাত্রায় পরীক্ষা করুন যে, কোন পার্কে পাখির আগমনের অনুপাত 1 : 1 : 2 : 3 : 1 : 1 এর সাথে প্রদত্ত নমুনাটি সাযুজ্য কিনা।

[প্রদত্ত, $P(\chi^2 > 11{\cdot}07) = 0{\cdot}05$ স্বাতন্ত্রতার মাত্রা 5]

5. একটি ফ্যাক্টরিতে চার প্রকারের মাল তৈরি হয়। ফ্যাক্টরির অতীত পরিসংখ্যান থেকে জানা যায় যে চার প্রকার মালের তৈরির অনুপাত যথাক্রমে 8 : 4 : 2 : 1। বর্তমানে একটি 600 আয়তনের সমসম্ভব নমুনা গ্রহণ করে দেখা গেল,

| গ্রেড : | 1 | 2 | 3 | 4 | মোট |
|---|---|---|---|---|---|
| পরিসংখ্যা : | 340 | 130 | 100 | 30 | 600 |

ওই ফ্যাক্টরির মাল তৈরির অনুপাত কি একই আছে? পরীক্ষা করুন।

[5% সংশয়মাত্রায় বিচার করবেন, দেওয়া আছে যে 3 স্বাতন্ত্র্যমাত্রা যুক্ত $\chi^2$ নিবেশনের জন্য $P(\chi^2 > 7{\cdot}815) = 0{\cdot}05$]

## 13.7 উত্তরমালা

1. $H_0$ : "প্রদত্ত নমুনাটি পোয়াসঁ সমগ্রকের অন্তর্ভুক্ত" প্রকল্পটি বর্জনীয়।

2. $H_0$ : "তথ্যের পূর্ণকটি নর্মাল"—এই প্রকল্পটি 5% সংশয়মাত্রায় গ্রহণীয়।

3. $H_0 : p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 = 1 : 1 : 1 : 2 : 3 : 1 : 1$, প্রকল্পটি 5% সংশয়মাত্রায় গ্রহণীয়। [অনুসঙ্গী নমুনাঙ্কের মান হবে 0·472 এবং সংশয়াঞ্চল (11·07, ∞)]

5. "মাল তৈরির অনুপাত একই আছে" প্রকল্পটি বর্জনীয় ; এখানে সংশয়াঞ্চল (7·815, ∞) এবং $\chi^2$ এর মান 14·375।

## সহায়ক গ্রন্থাবলি


1. রাশিবিজ্ঞানে অনুমিতিতত্ত্ব—দিলীপ রায় (পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ)

2. সম্ভাবনার গাণিতিক তত্ত্ব ও তাহার প্রয়োগ—কালীপদ দাস (পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ)

3. *Ground Work of Mathematical Probability and Statistics—Amritava Gupta (Academic Publishers)*

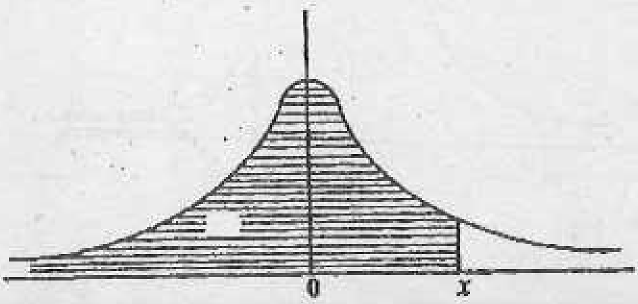
4. *Mathematical Statistics—S. K. De and S. Sen. (U. N. Dhur and Sons)*

# পরিশিষ্ট

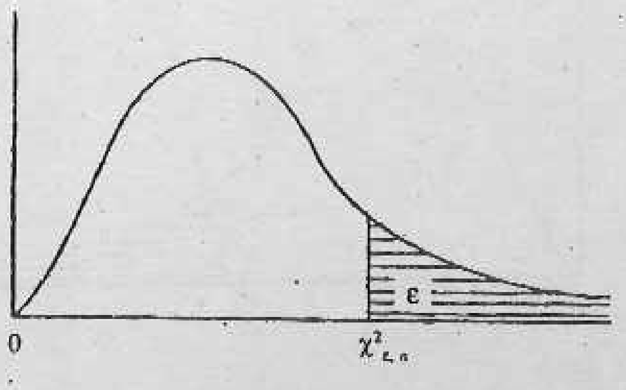
## সারণী—I (নর্ম্যাল (০,1) নিবেশন)

এখানে x এর বিভিন্ন মানের জন্য $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$ এর মান দেখানো হয়েছে। এখানে লক্ষণীয় $\Phi(-x)$

$=1-\Phi(x)$.

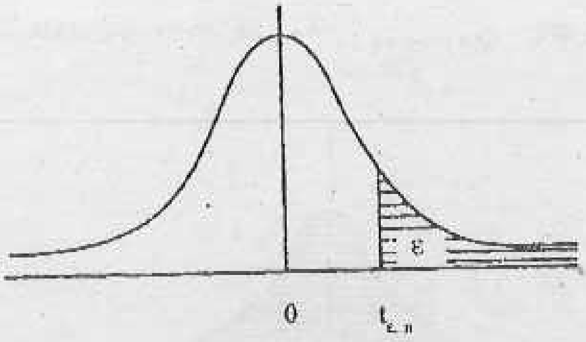



সারণী—II ($\chi^2$ নিবেশন) এখানে $\varepsilon(o<\varepsilon<1)$ এবং এখানে স্বাতন্ত্র্যমাত্রা n এর বিভিন্ন মানের জন্য $\chi^2_{\varepsilon,n}$ এর মান দেখানো হয়েছে যেখানে $P(\chi^2>\chi^2_{\varepsilon,n})=\varepsilon$



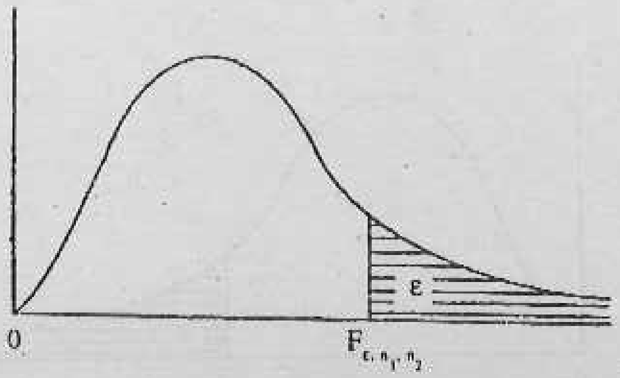
## সারণী—III

(t- নিবেশন) এখানে $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ এবং স্বাতন্ত্র্যমাত্রা n এর বিভিন্ন মানের জন্য $t_{\varepsilon, n}$ এর মান দেখানো হয়েছে যেখানে $P(t>t_{\varepsilon, n})=\varepsilon$




## সারণী—IV

(F- নিবেশন) এখানে $\varepsilon=0.05$ এবং $\varepsilon=0.01$ এই দুক্ষেত্রে, $n_1, n_2$ এর বিভিন্ন মানের জন্য $F_{\varepsilon, n_1, n_2}$ এর মান দেখানো হয়েছে যেখানে $P(F>F_{\varepsilon, n_1, n_2})=\varepsilon$



## সারণী—I (নর্ম্যাল (0,1) নিবেশন)

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.5000000 | 0.30 | 0.6179114 | 0.60 | 0.7257469 |
| 0.01 | 0.5039894 | 0.31 | 0.6217195 | 0.61 | 0.7290691 |
| 0.02 | 0.5079783 | 0.32 | 0.6255158 | 0.62 | 0.7323711 |
| 0.03 | 0.5119665 | 0.33 | 0.6293000 | 0.63 | 0.7356527 |
| 0.04 | 0.5159534 | 0.34 | 0.6330717 | 0.64 | 0.7389137 |
| 0.05 | 0.5199388 | 0.35 | 0.6368307 | 0.65 | 0.7421539 |
| 0.06 | 0.5239222 | 0.36 | 0.6405764 | 0.66 | 0.7453731 |
| 0.07 | 0.5279032 | 0.37 | 0.6443088 | 0.67 | 0.7485711 |
| 0.08 | 0.5318814 | 0.38 | 0.6480273 | 0.68 | 0.7517478 |
| 0.09 | 0.5358564 | 0.39 | 0.6517317 | 0.69 | 0.7549029 |
| 0.10 | 0.5398278 | 0.40 | 0.6554217 | 0.70 | 0.7580363 |
| 0.11 | 0.5437953 | 0.41 | 0.6590970 | 0.71 | 0.7611479 |
| 0.12 | 0.5477584 | 0.42 | 0.6627573 | 0.72 | 0.7642375 |
| 0.13 | 0.5517168 | 0.43 | 0.6664022 | 0.73 | 0.7673049 |
| 0.14 | 0.5556700 | 0.44 | 0.6700314 | 0.74 | 0.7703500 |
| 0.15 | 0.5596177 | 0.45 | 0.6736448 | 0.75 | 0.7733726 |
| 0.16 | 0.5635595 | 0.46 | 0.6772419 | 0.76 | 0.7763727 |
| 0.17 | 0.5674949 | 0.47 | 0.6808225 | 0.77 | 0.7793501 |
| 0.18 | 0.5714237 | 0.48 | 0.6843863 | 0.78 | 0.7823046 |
| 0.19 | 0.5753454 | 0.49 | 0.6879331 | 0.79 | 0.7852361 |
| 0.20 | 0.5792597 | 0.50 | 0.6914625 | 0.80 | 0.7881446 |
| 0.21 | 0.5831662 | 0.51 | 0.6949743 | 0.81 | 0.7910299 |
| 0.22 | 0.5870644 | 0.52 | 0.6984682 | 0.82 | 0.7938919 |
| 0.23 | 0.5909541 | 0.53 | 0.7019440 | 0.83 | 0.7967306 |
| 0.24 | 0.5948349 | 0.54 | 0.7054015 | 0.84 | 0.7995458 |
| 0.25 | 0.5987063 | 0.55 | 0.7088403 | 0.85 | 0:8023375 |
| 0.26 | 0.6025681 | 0.56 | 0.7122603 | 0.86 | 0.8051055 |
| 0.27 | 0.6064199 | 0.57 | 0.7156612 | 0.87 | 0.8078498 |
| 0.28 | 0.6102612 | 0.58 | 0.7190427 | 0.88 | 0.8105703 |
| 0.29 | 0.6140919 | 0.59 | 0.7224047 | 0.89 | 0.8132671 |
| 0.30 | 0.6179114 | 0.60 | 0.7257469 | 0.90 | 0.8159399 |

## সারণী—I - এর দ্বিতীয় অংশ

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$$

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.90 | 0.8159399 | 1.20 | 0.8849303 | 1.50 | 0.9331928 |
| 0.91 | 0.8185887 | 1.21 | 0.8868606 | 1.51 | 0.9344783 |
| 0.92 | 0.8212136 | 1.22 | 0.8887676 | 1.52 | 0.9357445 |
| 0.93 | 0.8238145 | 1.23 | 0.8906514 | 1.53 | 0.9369916 |
| 0.94 | 0.8263912 | 1.24 | 0.8925123 | 1.54 | 0.9382198 |
| 0.95 | 0.8289439 | 1.25 | 0.8943502 | 1.55 | 0.9-394292 |
| 0.96 | 0.8314724 | 1.26 | 0.8961653 | 1.56 | 0.9406201 |
| 0.97 | 0.8339768 | 1.27 | 0.8979577 | 1.57 | 0.9417924 |
| 0.98 | 0.8364569 | 1.28 | 0.8997274 | 1.58 | 0.9429466 |
| 0.99 | 0.8389129 | 1.29 | 0.9014747 | 1.59 | 0.9440826 |
| 1.00 | 0.8413447 | 1.30 | 0.9031995 | 1.60 | 0.9452007 |
| 1.01 | 0.8437524 | 1.31 | 0.9049021 | 1.61 | 0.9463011 |
| 1.02 | 0.8461358 | 1.32 | 0.9065825 | 1.62 | 0.9473839 |
| 1.03 | 0.8484950 | 1.33 | 0.9082409 | 1.63 | 0.9484493 |
| 1.04 | 0.8508300 | 1.34 | 0.9298773 | 1.64 | 0.9494974 |
| 1.05 | 0.8531409 | 1.35 | 0.9114920 | 1.65 | 0.9505285 |
| 1.06 | 0.8554277 | 1.36 | 0.9130850 | 1.66 | 0.9515428 |
| 1.07 | 0.8576903 | 1.37 | 0.9146565 | 1.67 | 0.9525403 |
| 1.08 | 0.8599289 | 1.38 | 0.9162067 | 1.68 | 0.9535213 |
| 1.09 | 0.8621834 | 1.39 | 0.9177356 | 1.69 | 0.9544860 |
| 1.10 | 0.8643339 | 1.40 | 0.9192433 | 1.70 | 0.9554345 |
| 1.11 | 0.8665005 | 1.41 | 0.9207302 | 1.71 | 0.9563671 |
| 1.12 | 0.8686431 | 1.42 | 0.9221962 | 1.72 | 0.9572838 |
| 1.13 | 0.8707619 | 1.43 | 0.9236415 | 1.73 | 0.9581849 |
| 1.14 | 0.8728568 | 1.44 | 0.9250663 | 1.74 | 0.9590705 |
| 1.15 | 0.8749281 | 1.45 | 0.9264707 | 1.75 | 0.9599408 |
| 1.16 | 0.8769756 | 4.46 | 0.9278550 | 1.76 | 0.9607961 |
| 1.17 | 0.8789995 | 1.47 | 0.9292191 | 1.77 | 0.9616364 |
| 1.18 | 0.8809999 | 1.48 | 0.9305634 | 1.78 | 0.9624620 |
| 1.19 | 0.8829768 | 1.49 | 0.9318879 | 1.79 | 0.9632730 |
| 1.20 | 0.8849303 | 1.50 | 0.9331928 | 1.80 | 0.9640697 |

## সারণী—I - এর তৃতীয় অংশ

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$$

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.80 | 0.9640697 | 2.10 | 0.9821356 | 2.40 | 0.9918025 |
| 1.81 | 0.9648521 | 2.11 | 0.9825708 | 2.41 | 0.9920237 |
| 1.82 | 0.9656205 | 2.12 | 0.9829970 | 2.42 | 0.9922397 |
| 1.83 | 0.9663750 | 2.13 | 0.9834142 | 2.43 | 0.9924506 |
| 1.84 | 0.9671159 | 2.14 | 0.9838226 | 2.44 | 0.9926564 |
| 1.85 | 0.9678432 | 2.15 | 0.9842224 | 2.45 | 0.9928572 |
| 1.86 | 0.9685572 | 2.16 | 0.9846137 | 2.46 | 0.9930531 |
| 1.87 | 0.9692581 | 2.17 | 0.9849966 | 2.47 | 0.9932443 |
| 1.88 | 0.9699460 | 2.18 | 0.9853713 | 2.48 | 0.9934309 |
| 1.89 | 0.9706210 | 2.19 | 0.9857379 | 2.49 | 0.9936128 |
| 1.90 | 0.9712834 | 2.20 | 0.9860966 | 2.50 | 0.9937903 |
| 1.91 | 0.9719334 | 2.21 | 0.9864474 | 2.51 | 0.9939634 |
| 1.92 | 0.9725711 | 2.22 | 0.9867906 | 2.52 | 0.9941323 |
| 1.93 | 0.9731966 | 2.23 | 0.9871263 | 2.53 | 0.9942969 |
| 1.94 | 0.9738102 | 2.24 | 0.9874545 | 2.54 | 0.9944574 |
| 1.95 | 0.9744119 | 2.25 | 0.9877755 | 2.55 | 0.9946139 |
| 1.96 | 0.9750021 | 2.26 | 0.9880894 | 2.56 | 0.9947664 |
| 1.97 | 0.9755808 | 2.27 | 0.9883962 | 2.57 | 0.9949159 |
| 1.98 | 0.9761482 | 2.28 | 0.9886962 | 2.58 | 0.9950600 |
| 1.99 | 0.9767045 | 2.29 | 0.9889893 | 2.59 | 0.9952012 |
| 2.00 | 0.9772499 | 2.30 | 0.9892759 | 2.60 | 0.9953388 |
| 2.01 | 0.9777844 | 2.31 | 0.9895559 | 2.61 | 0.9954729 |
| 2.02 | 0.9783083 | 2.32 | 0.9898296 | 2.62 | 0.9956035 |
| 2.03 | 0.9788217 | 2.33 | 0.9900969 | 2.63 | 0.9957308 |
| 2.04 | 0.9793248 | 2.34 | 0.9903581 | 2.64 | 0.9958547 |
| 2.05 | 0.9798178 | 2.35 | 0.9906133 | 2.65 | 0.9959754 |
| 2.06 | 0.9803007 | 2.36 | 0.9908625 | 2.66 | 0.9960930 |
| 2.07 | 0.9807738 | 2.37 | 0.9911060 | 2.67 | 0.9962074 |
| 2.08 | 0.9812372 | 2.38 | 0.9913437 | 2.68 | 0.9963189 |
| 2.09 | 0.9816911 | 2.39 | 0.9915758 | 2.69 | 0.9964274 |
| 2.10 | 0.9821356 | 2.40 | 0.9918025 | 2.70 | 0.9965330 |

## সারণী—I - এর চতুর্থ অংশ

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$$

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.70 | 0.9965330 | 3.00 | 0.9986501 | 3.30 | 0.9995166 |
| 2.71 | 0.9966358 | 3.01 | 0.9986938 | 3.31 | 0.9995335 |
| 2.72 | 0.9967359 | 3.02 | 0.9987361 | 3.32 | 0.9995499 |
| 2.73 | 0.9968333 | 3.03 | 0.9987772 | 3.33 | 0.9995658 |
| 2.74 | 0.9969280 | 3.04 | 0.9988171 | 3.34 | 0.9995811 |
| 2.75 | 0.9970202 | 3.05 | 0.9988558 | 3.35 | 0.9995959 |
| 2.76 | 0.9971099 | 3.06 | 0.9988933 | 3.36 | 0.9996103 |
| 2.77 | 0.9971972 | 3.07 | 0.9989297 | 3.37 | 0.9996242 |
| 2.78 | 0.9972821 | 3.08 | 0.9989650 | 3.38 | 0.9996376 |
| 2.79 | 0.9973646 | 3.09 | 0.9989992 | 3.39 | 0.9996505 |
| 2.80 | 0.9974449 | 3.10 | 0.9990324 | 3.40 | 0.9996631 |
| 2.81 | 0.9975229 | 3.11 | 0.9990646 | 3.41 | 0.9996752 |
| 2.82 | 0.9975988 | 3.12 | 0.9990957 | 3.42 | 0.9996869 |
| 2.83 | 0.9976726 | 3.13 | 0.9991260 | 3.43 | 0.9996982 |
| 2.84 | 0.9977443 | 3.14 | 0.9991553 | 3.44 | 0.9997091 |
| 2.85 | 0.9978140 | 3.15 | 0.9991836 | 3.45 | 0.9997197 |
| 2.86 | 0.9978818 | 3.16 | 0.9992112 | 3.46 | 0.9997299 |
| 2.87 | 0.9979476 | 3.17 | 0.9992378 | 3.47 | 0.9997398 |
| 2.88 | 0.9980116 | 3.18 | 0.9992636 | 3.48 | 0.9997493 |
| 2.89 | 0.9980738 | 3.19 | 0.9992886 | 3.49 | 0.9997585 |
| 2.90 | 0.9981342 | 3.20 | 0.9993129 | 3.50 | 0.9997674 |
| 2.91 | 0.9981929 | 3.21 | 0.9993363 | 3.51 | 0.9997759 |
| 2.92 | 0.9982498 | 3.22 | 0.9993590 | 3.52 | 0.9997842 |
| 2.93 | 0.9983052 | 3.23 | 0.9993810 | 3.53 | 0.9997922 |
| 2.94 | 0.9983589 | 3.24 | 0.9994024 | 3.54 | 0.9997999 |
| 2.95 | 0.9984111 | 3.25 | 0.9994230 | 3.55 | 0.9998074 |
| 2.96 | 0.9984618 | 3.26 | 0.9994429 | 3.56 | 0.9998146 |
| 2.97 | 0.9985110 | 3.27 | 0.9994623 | 3.57 | 0.9998215 |
| 2.98 | 0.9985110 | 3.28 | 0.9994810 | 3.58 | 0.9998282 |
| 2.99 | 0.9986051 | 3.29 | 0.9994991 | 3.59 | 0.9998347 |
| 3.00 | 0.9986501 | 3.30 | 0.9995166 | 3.60 | 0.9998409 |

## সারণী—I - এর শেষাংশ

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$$

| x | Φ(x) | x | Φ(x) | x | Φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.60 | 0.9998409 | 3.75 | 0.9999116 | 3.90 | 0.9999519 |
| 3.61 | 0.9998469 | 3.76 | 0.9999150 | 3.91 | 0.9999539 |
| 3.62 | 0.9998527 | 3.77 | 0.9999184 | 3.92 | 0.9999557 |
| 3.63 | 0.9998583 | 3.78 | 0.9999216 | 3.93 | 0.9999575 |
| 3.64 | 0.9998637 | 3.79 | 0.9999247 | 3.94 | 0.9999593 |
| 3.65 | 0.9998689 | 3.80 | 0.9999277 | 3.95 | 0.9999609 |
| 3.66 | 0.9998739 | 3.81 | 0.9999305 | 3.96 | 0.9999625 |
| 3.67 | 0.9998787 | 3.82 | 0.9999333 | 3.97 | 0.9999641 |
| 3.68 | 0.9998834 | 3.83 | 0.9999359 | 3.98 | 0.9999655 |
| 3.69 | 0.9998879 | 3.84 | 0.9999385 | 3.99 | 0.9999670 |
| 3.70 | 0.9998922 | 3.85 | 0.9999409 | 4.00 | 0.9999683 |
| 3.71 | 0.9998964 | 3.86 | 0.9999433 | | |
| 3.72 | 0.9999004 | 3.87 | 0.9999456 | | |
| 3.73 | 0.9999043 | 3.88 | 0.9999478 | | |
| 3.74 | 0.9999080 | 3.89 | 0.9999499 | | |
| 3.75 | 0.9999116 | 3.90 | 0.9999519 | | |

## সারণী—II - ($\chi^2$এ- নিবেশন)

### $\chi^2_{\varepsilon, n}$ - এর মান

| n/ε | 0.995 | 0.950 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $392704.10^{-10}$ | $39321410^{8}$ | 3.84146 | 5.02389 | 6.63490 | 787944 | 10.828 |
| 2 | 0.0100251 | 0.102587 | 5.99147 | 737776 | 9.21034 | 10.5966 | 13.816 |
| 3 | 0.0717212 | 0.351846 | 7.81473 | 9.34840 | 11.3449 | 12.8381 | 16266 |
| 4 | 0.206990 | 0.710721 | 9.48733 | 11.1433 | 13.2767 | 14.8602 | 18.467 |
| 5 | 0.411740 | 1.145476 | 11.0705 | 12.8325 | 15.0863 | 16.7496 | 20515 |
| 6 | 0.675727 | 1.63539 | 12.5916 | 14.4494 | 16.8119 | 18.5476 | 22.458 |
| 7 | 0.989265 | 2.16735 | 14.0671 | 16.0128 | 18.4753 | 20.2777 | 24322 |
| 8 | 1.344419 | 2.73264 | 15.5073 | 175346 | 20.0902 | 21.9550 | 26.125 |
| 9 | 1.734926 | 3.32511 | 16.9190 | 19.0228 | 21.6660 | 23.5893 | 27.877 |
| 10 | 2.15585 | 3.94030 | 18.3070 | 20.4831 | 23.2093 | 25.1882 | 29588 |
| 11 | 2.60321 | 457481 | 19.6751 | 21.9200 | 24.7250 | 26.7569 | 31264 |
| 12 | 3.07382 | 522603 | 21.0261 | 23.3367 | 26.2170 | 28.2995 | 32.909 |
| 13 | 3.56503 | 5.89186 | 22:3621 | 247356 | 27.6883 | 29.8194 | 34.528 |
| 14 | 4.07468 | 6.57063 | 23.6848 | 26.1190 | 29.1413 | 31.3193 | 36.123 |
| 15 | 4.60094 | 7.26094 | 24.9958 | 27.4884 | 30.5779 | 32.8013 | 37.697 |
| 16 | 5.14224 | 7.96164 | 26.2962 | 28.8454 | 31.9999 | 34.2672 | 39.252 |
| 17 | 5.69724 | 8.67176 | 27.5871 | 30.1910 | 33.4087 | 35.7185 | 40.790 |
| 18 | 6.26481 | 9.39046 | 28.8693 | 31.5264 | 34.8053 | 37.1564 | 42312 |
| 19 | 6.84398 | 10.1170 | 30.1435 | 32.8523 | 36.1908 | 38.5822 | 43.820 |
| 20 | 7.43386 | 10.8508 | 31.4104 | 34.1696 | 37.5662 | 39.9968 | 45315 |
| 21 | 8.03366 | 115913 | 32.6705 | 35.4789 | 38.9321 | 41.4010 | 46.797 |
| 22 | 8.64272 | 12.3380 | 33.9244 | 36.7807 | 40.2894 | 42.7956 | 48268 |
| 23 | 926042 | 13.0905 | 35.1725 | 38.0757 | 41.6384 | 44.1813 | 49.728 |
| 24 | 9.88623 | 13.8484 | 36.4151 | 39.3641 | 42.9798 | 45.5585 | 51.179 |
| 25 | 10.5197 | 14.6114 | 37.6525 | 40.6465 | 44.3141 | 46.9278 | 52.620 |
| 26 | 11.1603 | 15.3791 | 3&8852 | 41.9232 | 45.6417 | 48.2899 | 54.052 |
| 27 | 11.8076 | 16.1513 | 40.1133 | 43.1944 | 46.9630 | 49.6449 | 55.476 |
| 28 | 12:4613 | 16.9279 | 41.3372 | 44.4607 | 48.2782 | 50.9933 | 56.892 |
| 29 | 13.1211 | 17.7083 | 42.5569 | 45.7222 | 49.5879 | 52.3356 | 58.302 |
| 30 | 13.7867 | 18.4926 | 43.7729 | 46.9792 | 50.8922 | 53.6720 | 50.703 |
| 40 | 20.7065 | 26.5093 | 55.7585 | 59.3417 | 63.6907 | 66.7659 | 73.402 |
| 50 | 2Z.9907 | 34.7642 | 67.5048 | 71.4202 | 76.1539 | 79.4900 | 86.661 |
| 60 | 35.5346 | 43.1879 | 79.0819 | 83.2976 | 88.3794 | 91.9517 | 99.607 |
| 70 | 43.2752 | 51.7393 | 90.5312 | 95.0231 | 100.425 | 104.215 | 112.317 |
| 80 | 51.1720 | 60.3915 | 101.879 | 106.629 | 112.329 | 116.321 | 124.839 |
| 90 | 59.1963 | 69.1260 | 113.145 | 118.136 | 124.116 | 128.299 | 137.208 |
| 100 | 67.3276 | 77.9295 | 124.342 | 129.561 | 135.807 | 140.169 | 149.449 |

# সারণী—III

## (t- নিবেশন)-প্রথম অংশ

### $t_{\varepsilon, n}$ এর মান

| n | $\varepsilon=0.4$ | 0.25 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.0025 | 0.001 | 0.0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $2\varepsilon=0.8$ | 050 | 0.2 | 0.10 | 0.050 | 0.02 | 0.010 | 0.0050 | 0.002 | 0.0010 |
| 1 | 0.325 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 127.320 | 318.310 | 636.620 |
| 2 | 0.289 | 0.816 | 1.866 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 14.089 | 22.326 | 31.598 |
| 3 | 0.277 | 0.765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 7.453 | 10.213 | 12.924 |
| 4 | 0.271 | 0.741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 5.598 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | 0.267 | 0.727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 4.773 | 5.893 | 6.869 |
| 6 | 0.265 | 0.718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 4.317 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | 0.263 | 0.711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.029 | 4.785 | 5.408 |
| 8 | 0.262 | 0.706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 3.833 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | 0.261 | 0.703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 3.690 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | 0.260 | 0.700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 3.581 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | 0.260 | 0.697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 3.497 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | 0.259 | 0.695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.428 | 3.930 | 4.313 |
| 13 | 0.259 | 0.694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.372 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | 0.258 | 0.692 | 1.353 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.326 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | 0.258 | 0.691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.286 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | 0.258 | 0.690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.252 | 3.686 | 4.015 |
| 17 | 0.257 | 0.689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.222 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | 0.257 | 0.688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.197 | 3.610 | 3.922 |
| 19 | 0.257 | 0.688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.174 | 3.579 | 3.883 |

সারণী—III-এর দ্বিতীয় অংশ

(t- নিবেশন) $t_{\varepsilon, n}$ -এর মান

| n | $\varepsilon$=0.4 | 0.25 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.0025 | 0.001 | 0.0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2$\varepsilon$=0.8 | 0.50 | 0,2 | 0.10 | 0.050 | 0.02 | 0.010 | 0.0050 | 0.002 | 0.0010 |
| 20 | 0.257 | 0.687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.153 | 3.552 | 3.850 |
| 21 | 0.257 | 0.686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.135 | 3.527 | 3.819 |
| 22 | 0.256 | 0.686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.119 | 3.505 | 3.792 |
| 23 | 0.256 | 0.685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.104 | 3.485 | 3.767 |
| 24 | 0.256 | 0.685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.091 | 3.467 | 3.745 |
| 25 | 0.256 | 0.684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.078 | 3.450 | 3.725 |
| 26 | 0.256 | 0.684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.067 | 3.435 | 3.707 |
| 27 | 0.256 | 0.684 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.057 | 3.421 | 3.690 |
| 28 | 0.256 | 0.683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.047 | 3.408 | 3.674 |
| 29 | 0.256 | 0.683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.038 | 3.396 | 3.659 |
| 30 | 0.256 | 0.683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.030 | 3.385 | 3.646 |
| 40 | 0.255 | 0.681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 2.971 | 3.307 | 3.551 |
| 60 | 0.254 | 0.679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 2,951 | 3.232 | 3.460 |
| 120 | 0.254 | 0.677 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 2.860 | 3.160 | 3.373 |
| oo | 0.253 | 0.674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2576 | 2.807 | 3.000 | 3.291 |

## সারণী—IV (F- নিবেশন)—প্রথম অংশ

### $F_{\varepsilon,\, n_1,\, n_2}$ -এর মা যেখানে $\varepsilon$=0.05

| $n_2 \backslash n_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161.40 | 199.50 | 215.70 | 224.60 | 230.20 | 234.00 | 236.80 | 238,90 | 240.50 | 241.90 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 I |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2:95 | 2.90 | 2.85 |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11- | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 |

## সারণী—IV (F- নিবেশন)—দ্বিতীয় অংশ

$F_{\varepsilon,} n_{1,} n_2$ -এর মান যেখানে ε=0.05

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 |
| 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 |
| 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 |
| 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 |
| 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 |
| 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 |
| 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 |
| 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 |
| 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.8G | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 |
| 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2*2 | 2.51 | 3.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 |
| 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 |
| 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 |
| 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.20 |
| 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 |
| 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 |
| 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 |
| 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 |
| 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 |
| 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.17 | 2.09 | 2.02 | 1.96 | 1.91 |
| 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 |

## সারণী—IV (F- নিবেশন)—তৃতীয় অংশ

### $F_{\varepsilon}\ n_1,\ n_2$ -এর মান যেখানে $\varepsilon=0.05$

| $n_2 \backslash n_1$ | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 243.90 | 245.90 | 248.00 | 249.10 | 250.10 | 251.10 | 252.20 | 253.30 | 254.30 |
| 2 | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.48 | 19.49 | 19.50 |
| 3 | 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.55 | 8.53 |
| 4 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.77 | 5.75 | 5.72 | 5.69 | 5.66 | 5.63 |
| 5 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.43 | 4.40 | 4.36 |
| 6 | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3J4 | 3.70 | 3.67 |
| 7 | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.30 | 3.27 | 3.23 |
| 8 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | 2.97 | 2.93 |
| 9 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.71 |
| 10 | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.74 | 2.70 | 2.66 | 2.62 | 2.58 | 2.54 |
| 11 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.49 | 2.45 | 2.40 |
| 12 | 2.69 | 2.60 | 2.54 | 2.51 | 2.47 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.30 |
| 13 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.25 | 2.21 |
| 14 | 2.53 | 2.46 | 1.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.13 |

## সারণী—IV (F- নিবেশন)—চতুর্থ অংশ

$F_{\varepsilon}\ n_1, n_2$ -এর মান যখন $\varepsilon=0.05$

| $n_2 \backslash n_1$ | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.29 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.11 | 2.07 |
| 16 | 2.42 | 2.35 | 2.28 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 1.06 | 1.01 |
| 17 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.01 | 1.96 |
| 18 | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.92 |
| 19 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.88 |
| 20 | 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.84 |
| 21 | 2.25 | 2.18 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.81 |
| 22 | 2.23 | 2.15 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.78 |
| 23 | 2.20 | 2.13 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.76 |
| 24 | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.73 |
| 25 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 |
| 26 | 2.15 | 2.07 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.69 |
| 27 | 2.13 | 2.06 | 1.97 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.79 | 1.73 | 1.67 |
| 28 | 2.12 | 2.04 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | 1.65 |
| 29 | 2.10 | 2.03 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.75 | 170 | 1.64 |
| 30 | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.68 | 1.62 |
| 40 | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.64 | 1.58 | 1.51 |
| 60 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.70 | 1.65 | 1.59 | 1.53 | 1.47 | 1.39 |
| 20 | 1.83 | 1.75 | 1.66 | 1.61 | 1.55 | 1.50 | 1.43 | 1.35 | 1.25 |
| ∞ | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.39 | 1.32 | 1.22 | 1.00 |

## সারণী—IV (F- নিবেশন)—পঞ্চম অংশ

$F_{\varepsilon, n_1, n_2}$ -এর মান যখন $\varepsilon=0.01$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4052 | 4999.5 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5982 | 6022 | 6056 |
| 98.50 | 99.00 | 99.17 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.37 | 99.39 | 99.40 |
| 34.42 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.35 | 27.23 |
| 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 | 14.55 |
| 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10,97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 | 10.05 |
| 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 |
| 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 |
| 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 |
| 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 |
| 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 |
| 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 |
| 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 450 | 4,39 | 4,30 |
| 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 |
| 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3,94 |

## সারণী—IV (F- নিবেশন)—ষষ্ঠ অংশ

$F_{\varepsilon, n_1, n_2}$ -এর মান যখন $\varepsilon=0.01$

| $n_2 \backslash n_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 |
| 16 | 8.53 | 6.23 | 5,29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 |
| 17 | 8.40 | 6.11 | 5.18 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 |
| 19 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 |
| 21 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 | 3.31 |
| 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 |
| 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 |
| 24 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.85 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.13 |
| 26 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.09 |
| 27 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.78 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 | 3.06 |
| 28 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.03 |
| 29 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 | 3.00 |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 |
| 40 | 7.31 | 5vl8 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 |
| 120 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 2.48 | 2.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 |
| oo | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3*02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 |

## সারণী—IV (F - নিবেশন)—সপ্তম অংশ

$F_{\epsilon}\, n_1, n_2$ -এর মান যখন $\epsilon$=o.01

| $n_2 \backslash n_1$ | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6106 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| 2 | 99.42 | 99.43 | 99.45 | 99.46 | 99.47 | 99.47 | 99.48 | 99.49 | 99.50 |
| 3 | 27.05 | 26.87 | 26.69 | 26.60 | 26.50 | 26.41 | 26.32 | 26.22 | 26.13 |
| 4 | 14.37 | 14.20 | 14.02 | 13.93 | 13.84 | 13.75 | 13.65 | 13.56 | 13.46 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.47 | 9.38 | 9.29 | 9.20 | 9.11 | 9.02 |
| 6 | 7.72 | 7.56 | 7:40 | 7.31 | 7.23 | 7.14 | 7.06 | 6.97 | 6.88 |
| 7 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 6.07 | 5.99 | 5.91 | 5.82 | 5.74 | 5.65 |
| 8 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.28 | 5.20 | 5.12 | 5.03 | 4.95 | 4.86 |
| 9 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.73 | 4.65 | 4.57 | 4.48 | 4.40 | 4.31 |
| 10 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.33 | 4.25 | 4.17 | 4.08 | 4.00 | 3.91 |
| 11 | 4.40 | 4.25 | 4.10 | 4.02 | 3.94 | 3.86 | 3.78 | 3.69 | 3.60 |
| 12 | 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.78 | 3.70 | 3.62 | 3.54 | 3.45 | 3.36 |
| 13 | 3.96 | 3.82 | 3.66 | 3.59 | 3.51 | 3.43 | 3.34 | 3.25 | 3.17 |
| 14 | 3.80 | 3.66 | 3.51 | 3.43 | 3.35 | 3.27 | 3.18 | 3.09 | 3.00 |

## সারণী—IV (F - নিবেশন)—অষ্টম অংশ

$F_{\varepsilon, n_1, n_2}$ -এর মান যখন $\varepsilon = 0.01$ ঃ

| $n_2 \backslash n_1$ | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6106 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| 15 | 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.29 | 3.21 | 3.13 | 3.05 | 2.96 | 2.87 |
| 16 | 3.55 | 3.41 | 3.26 | 3.18 | 3.10 | 3.02 | 2.93 | 2.84 | 2:75 |
| 17 | 3.46 | 3.31 | 3.16 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.83 | 2.75 | 2.65 |
| 18 | 3.37 | 3.23 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.75 | 2.66 | 2.57 |
| 19 | 3.30 | 3.15 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.67 | 2.58 | 2.49 |
| 20 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.52 | 2.42 |
| 21 | 3.17 | 303 | 2.88 | 2.80 | 2.72 | 2.64 | 2.55 | 2.46 | 2.36 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.50 | 2.40 | 2.31 |
| 23 | 3.07 | 2.93 | 2.78 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.35 | 2.26 |
| 24 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.40 | 2.31 | 2.21 |
| 25 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.36 | 2.27 | 2.17 |
| 26 | 2.96 | 2.81 | 2.66 | 2.58 | 2.50 | 2.42 | 2.33 | 2.23 | 2.13 |
| 27 | 2.93 | 2.78 | 2.63 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.29 | 2.20 | 2.10 |
| 28 | 2.90 | 2.75 | 2.60 | 2.52 | 2.44 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.06 |
| 29 | 2.87 | 2.73 | 2.57 | 2.49 | 2.41 | 2.33 | 2.23 | 2.14 | 2.03 |
| 30 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.47 | 2.39 | 2.30 | 2.21 | 2.11 | 2.01 |
| 40 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 1.92 | 1.80 |
| 60 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.12 | 2.03 | 1.94 | 1.84 | 1.73 | 1.60 |
| 120 | 2.34 | 2.19 | 2.03 | 1.95 | 1.86 | 1.76 | 1.66 | 1.53 | 1.38 |
| ∞ | 2.18 | 2.04 | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.59 | 1.47 | 1.32 | 1.00 |

মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

—রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে; সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নতুন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

— সুভাষচন্দ্র বসু

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

*—Subhas Chandra Bose*

**Price : Rs. 225.00**

*(NSOU-র ছাত্রছাত্রীদের কাছে বিক্রয়ের জন্য নয়)*

Published by : Netaji Subhas Open University, DD-26, Sector-I, Salt Lake Kolkata-700 064
and Printed at : SEVA MUDRAN, 43, Kailash Bose Street, Kolkata-700 006