NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

ELECTIVE MATHEMATICS HONOURS

EMT - 15

Complex Analysis and Laplace Transform

Block – 2

প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমত কোনও বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণ ক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে—যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন; যখনই কোনও শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটাই মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর, প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায় ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

ষষ্ঠ পুনর্মুদ্রণ ঃ অক্টোবর, 2019

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় : গণিত বিদ্যা

সাম্মানিক স্তর

পাঠক্রম : পর্যায় ঃ EMT 15 : 02

রচনা

অধ্যাপিকা উমা বসু

সম্পাদনা

অধ্যাপক বীরেন্দ্রনাথ মণ্ডল

প্রজ্ঞাপন

এই পাঠ-সংকলনের সমুদয় স্বত্ব নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের দ্বারা সংরক্ষিত। বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের লিখিত অনুমতি ছাড়া এর কোনোও অংশের পুনর্মুদ্রণ বা কোনোভাবে উদ্ধৃতি সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ।

মোহন কুমার চট্টোপাধ্যায়

নিবন্ধক

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EMT -15

(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়

2

লাপ্লাস রূপান্তর

একক 1	❑	লাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া	7–11
একক 2	❑	লাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার ধর্ম	12–20
একক 3	❑	অন্তরকলন ও সমাকলের লাপ্লাস রূপান্তর	21–29
একক 4	❑	লাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া	30–39
একক 5	❑	কনভলিউশন উপপাদ্য	40–43
একক 6	❑	লাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার প্রয়োগ	44–52

একক 1 □ লাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা
1.2 উদ্দেশ্য
1.3 ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া
1.4 অনুশীলনী
1.5 ল্যাপ্লাস রূপান্তরের অস্তিত্ব
1.6 অনুশীলনী
1.7 সারাংশ
1.8 প্রশ্নমালা ও উত্তর

1.1 প্রস্তাবনা ঃ

ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া (Laplace Transform) গণিতের এই বিষয়টি প্রযুক্তিবিদ ও গণিতজ্ঞ উভয়েই নানাভাবে বিভিন্ন প্রযুক্তিগত সমস্যার গাণিতিক সমাধানের জন্য ব্যবহার করে যাচ্ছেন। Oliver Heaviside (1850-1925), একজন স্বনামধন্য প্রযুক্তিবিদ, যিনি সর্বপ্রথম ল্যাপলাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে প্রযুক্তি বিষয়ক গাণিতিক সমস্যার সমাধান করেন। সেই সকল আলোচনায় বা সমাধানে এই রূপান্তর প্রক্রিয়ার প্রয়োগে গণিতের সূক্ষ্ম বিশ্লেষণের অভাব ছিল। ১৯১৬-১৭ খ্রীষ্টাব্দে Bromwich এবং Carson বিশদ সূক্ষ্ম আলোচনার মাধ্যমে গাণিতিক বিশ্লেষন দ্বারা ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সংজ্ঞা ও অস্তিত্ব এবং ব্যবহারের যথাযথ গাণিতিক তত্ত্ব পেশ করেন। 1 নং এককে ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সংজ্ঞা অস্তিত্ব উদাহরণ সহ বিভিন্ন অপেক্ষকের জন্য আলোচনা করা হবে।

1.2 উদ্দেশ্য ঃ

প্রথম এককটি পাঠ করলে ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া কি এবং ইহার অস্তিত্ব বিভিন্ন উদাহরণের মাধ্যমে জানা যাবে।

1.3 ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সংজ্ঞা ঃ

ধরা যাক অপেক্ষক $f(t)$ যখন বাস্তব চলরাশি 't' -এর সাপেক্ষে সংজ্ঞিত আছে এবং 's' একটি বাস্তব বা জটিল প্রচল (real or complex parameter)।

মনে করা যাক নিম্নলিখিত সমাকলটি

$$\bar{f}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$ -এর অস্তিত্ব আছে।

তখন $\bar{f}(s)$ হবে 'f'(t) এর ল্যাপ্লাস রূপান্তর। সাধারনত 'f(t)' এর ল্যাপ্লাস রূপান্তরটি — $\mathcal{L}\{f(t)\}$ দ্বারা লিখিত ভাবে প্রকাশ করা হয়।

অতএব $\mathcal{L}$ কে ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার প্রতীক রূপে চিহ্নিত করা হবে এবং $\bar{f}(s)$-এর অর্থ হলো f(t)-এর ল্যাপ্লাস রূপান্তর।

1.4 অনুশীলনী ঃ

উদাহরণ 1. ঃ $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s}$ যখন $f(t)=1$

সমাধান ঃ $\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}\cdot 1dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}dt$

$$=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^R=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-sR}}{s}\right]=\frac{1}{s}$$

অতএব $\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}$

উদাহরণ 2 ঃ ধরা যাক $f(t)=t, t>0$.

সমাধান ঃ $\mathcal{L}(t)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot t\,dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}\cdot t\,dt$

$$=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)\right]_0^R=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-sR}}{s^2}(sR+1)\right]$$

$=\frac{1}{s^2}$, যখন $s>0$.

অতএব $\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}$.

উদাহরণ 3. ঃ ধরা যাক $f(t)=e^{at}$

সমাধান ঃ $\mathcal{L}\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^R$

$$= \frac{1}{s-a} \text{ যখন } s > a$$

$$\therefore \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \text{ যখন } s > a.$$

উদাহরণ 4. ঃ ধরা যাক $f(t) = \sin bt \quad b > 0$

সমাধান ঃ $\mathcal{L}(\sin bt) = \int_0^\infty e^{-st} \sin bt dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} \sin bt dt$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{b}{s^2+b^2} - \frac{e^{-sR}}{s^2+b^2} (s \sin bR + b \cos bR) \right]$$

$$= \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

1.5 ল্যাপ্লাস রূপান্তরের অস্তিত্ব ঃ

এখানে ল্যাপ্লাস রূপান্তরের অস্তিত্ব সম্পর্কিত উপপাদ্যটি আলোচনা করব।

উপপাদ্য 1. ঃ ধরা যাক $f(t)$ একটি বাস্তব চলরাশি 't' -এর অপেক্ষক এবং ইহা নিম্নেলিখিত ধর্মগুলি অনুসরন করে ঃ

(১) অপেক্ষক f (t) একটি বধ অন্তরাল $0 \le t \le b$ $(b > 0)$ তে খণ্ডভাবে সন্তত।

(২) অপেক্ষক f (t) এর মাত্রা (of order) সূচক অপেক্ষকের (exponential) সমান অর্থাৎ

$$e^{-\alpha t}|f(t)| < M, \text{ যখন } \alpha, M > 0, t > t_0 \text{ এবং যখন বাস্তব প্রচল } s > \alpha.$$

তখন $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ সমাকলটির অস্তিত্ব থাকিবে।

প্রমান ঃ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt + \int_{t_0}^\infty e^{-st} f(t) dt$

আবার $e^{-st}|f(t)| < e^{-st} M e^{\alpha t} = Me^{-(s-\alpha)t}$.

$t > t_0$ এর জন্য $\int_{t_0}^{\infty} M e^{-(s-\alpha)t} dt = \lim_{R\to\infty} \int_{t_0}^{R} M e^{-(s-\alpha)t} dt$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{M}{s-\alpha}\right]\left[e^{-(s-\alpha)t_0} - e^{-(s-\alpha)R}\right]$$

$$= \frac{M}{s-\alpha}\cdot e^{(s-\alpha)t_0}, \quad s > \alpha.$$

অতএব $\int_{t_0}^{\infty} M e^{-(s-\alpha)t} dt$ এর অস্তিত্ব সম্ভব যখন $s > \alpha$ প্রতিটি বধ অন্তরাল $t_0 \le t \le \infty$ -তে $e^{-st}|f(t)|$ অপেক্ষকের সমাকলন সম্ভব,

অর্থাৎ $\int_{t_0}^{\infty} \left|e^{-st} f(t)\right| dt$ -এর অস্তিত্ব সম্ভব যখন $s > \alpha$ অতএব $s > \alpha$ -এর জন্য $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$-এর অস্তিত্ব আছে।

উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

1.6 অনুশীলনী :

উদাহরণ 1. অপেক্ষক $f(t) = e^{at}\sin bt$ -এর মাত্রা সূচক অপেক্ষকের সমান এবং $\alpha = a$.

$e^{-\alpha t}|f(t)| = e^{-at}e^{at}|\sin bt| = |\sin bt|$. যেহেতু $|\sin bt|$ একটি সীমাবধ অপেক্ষক সকল চলরাশি t-এর জন্য।

অতএব $e^{at}\sin bt$ ল্যাপ্লাস রূপান্তর সম্ভব।

উদাহরণ 2. ধরা যাক $f(t) = t^n$ $n > 0$, $t > 0$

$$e^{-\alpha t}|f(t)| = e^{-\alpha t} t^n$$

সকল α-এর জন্য $\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} t^n = 0$.

অতএব একটি সংখ্যা $M > 0$ এবং $t_0 > 0$-জন্য

$e^{-\alpha t}|f(t)| = e^{-\alpha t} t^n < M$, $t > t_0$ এর জন্য।

সুতরাং $f(t)=t^n$ অপেক্ষকে-এর মাত্রা সূচক অপেক্ষকের সমান যখন α একটি যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা। অতএব t^n-এর ল্যাপ্লাস রূপান্তর সম্ভব।

উদাহরণ 3. ধরা যাক $f(t)=e^{t^2}$

$$e^{-\alpha t}|f(t)|=e^{t^2-\alpha t}$$

এবং $\lim_{t\to\infty} e^{t^2-\alpha t}=\infty$

অতএব কোনো α পাওয়া যাবে না যাহার জন্য $e^{-\alpha t}|f(t)|$ একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক অতএব e^{t^2}-এর ল্যাপ্লাস রূপান্তর সম্ভব নহে।

1.7 সারাংশ ঃ

এই এককে ল্যাপ্লাস রূপান্তরের সংজ্ঞা, অস্তিত্ব উদাহরণ সহ আলোচনা করা হয়েছে।

1.8 প্রশ্নমালা ঃ

নিম্নেলিখিত অপেক্ষক সমূহের ল্যাপ্লাস রূপান্তর বাহির কর।

1. $2e^{3t}$ 2. $5t-2$ 3. $2t^2-e^{-t}$ 4. $3\sin 6t$ 5. $(t^2+1)^2$ 6. $(\sin t-\cos t)^2$

7. $2\cosh 45t-45\sinh 45t$ 8. $\sin^2 at$ 9. $\frac{e^{at}-1}{a}$ 10. t^n

উত্তর ঃ 1. $2/(s-3)\, s>3$, 2. $\frac{5-2s}{s^2}, s>0$, 3. $(4+4s-s^3)/s^3(s+1)$, $s>0$

4. $18(s^2+36)$ $s>0$ 5. $(s^4+4s^2+24)/s^5$, $s>0$

6. $(s^2-2s+4)/s(s^2+4)$, $s>0$, 7. $(2s-20)/(s^2-25)$, $s>5$

8. $2a^2/s(s^2+4a^2)$ $s>0$, 9. $\frac{1}{s(s-a)}$ $s>0$ 10. $n!/s^{n+1}$, $s>0$

একক 2 ☐ লাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার ধর্ম

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

2.2 উদ্দেশ্য

2.3 ল্যাপ্লাস রূপান্তরের ধর্মসমূহ

2.4 ধাপ অপেক্ষক, চলয়মান অপেক্ষক, পর্যাবৃত্ত অপেক্ষকের ল্যাপ্লাস রূপান্তর

2.5 অনুশীলনী

2.6 প্রশ্নমালা

2.1 প্রস্তাবনা ঃ

১ নং এককে ল্যাপ্লাস রূপান্তরের সংজ্ঞা ও অস্তিত্ব উদাহরণ সহ আলোচিত হয়েছে। —ল্যাপ্লাস রূপান্তরের ধর্ম-সমূহ জানার প্রয়োজন আছে।

2.2 উদ্দেশ্য

ল্যাপ্লাস রূপান্তর সংজ্ঞা অনুসারে কয়েকটি ধর্ম অনুসরন করে এই এককে ল্যাপ্লাস রূপান্তরে ধর্ম সমূহ উদাহরণ সহ আলোচনা করা হবে। কিছু বিশেষ অপেক্ষকের ল্যাপ্লাস রূপান্তর আলোচনা করা হবে।

2.3 ল্যাপ্লাস রূপান্তরের প্রধান ধর্মসমূহ ঃ

2.3.1 রৈখিক ধর্ম (Linear Property) :

মনে করা যাক a, b, c তিনটি যে কোনো ধ্রুবক সংখ্যা এবং f(t), g(t), h(t), 't' চলরাশির তিনটি অপেক্ষক।

তাহলে $\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)-c\,h(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}-c\mathcal{L}\{h(t)\}$

প্রমান ঃ সংজ্ঞা অনুযায়ী

বামপক্ষ $=\int_0^\infty e^{-st}\{af(t)+bg(t)-ch(t)\}dt$

$$=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt-c\int_0^\infty e^{-st}h(t)dt.$$

$$= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} - c\mathcal{L}\{h(t)\}$$

যেহেতু '$\mathcal{L}$' এই ধর্ম-টি অনুসরন করে '$\mathcal{L}$' কে রৈখিক প্রকারক (Linear operator) বলা হয়।

2.3.2 অনুশীলনী ঃ

উদাহরণ **1.** মনেকরা যাক $f(t) = t^2 - \cos 2t + 5e^{-t}$

রৈখিক ধর্ম অনুসারে

$$\mathcal{L}\{t^2 - \cos 2t + 5e^{-t}\} = \mathcal{L}\{t^2\} - \mathcal{L}\{\cos 2t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$= \frac{2!}{s^3} - \frac{s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1}$$

উদাহরন **2.** ধরা যাক $f(t) = 2\cos 3t - 5t$ রৈখিক ধর্ম অনুসারে

$$\mathcal{L}\{2\cos 3 - 5t\} = 2\mathcal{L}\{\cos 3t\} - 5\mathcal{L}\{(t)\}$$

$$= \frac{2s}{s^2+9} - \frac{5}{s} = -\frac{4s^2+54}{s(s^2+4)}$$

2.3.3 প্রাথমিক চলন ধর্ম (First shifting Property) ঃ

যদি $\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ হয় $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \bar{f}(s-a)$

প্রমাণ : $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt$

ধরা যাক $r = s - a$

সুতরাং $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-rt} f(t) dt = \bar{f}(s-a)$

অতএব $\bar{f}(s)$-এর মান জানা থাকিলে $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \bar{f}(s-a)$

2.3.4 অনুশীলনী ঃ

উদাহরণ 1. $\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}\quad \therefore \mathcal{L}\{e^{at}\}=\bar{f}(s-a)=\frac{1}{s-a}\, s>a$

উদাহরণ 2. $\mathcal{L}\{\sin bt\}=\frac{b}{s^2+b^2}\quad \therefore \mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\}=\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$

উদাহরণ 3. $\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}\quad \therefore \mathcal{L}\{e^{at}t^n\}=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

উদাহরণ 4. $\mathcal{L}\{\cosh bt\}=\frac{s}{s^2-b^2}\quad \therefore \mathcal{L}\{e^{at}\cosh bt\}=\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$

উদাহরণ 5. নিম্নলিখিত অপেক্ষক দুইটির ল্যাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় কর

(i) $e^{-3t}(2\cos 5t-3\sin 5t)$

(ii) $e^{4t}\sin 2t\cdot\cos t$

(i) সমাধান : রৈখিক ধর্ম অনুসারে $\mathcal{L}\{e^{-3t}(2\cos 5t-3\sin 5t)\}$

$=2\mathcal{L}\{e^{-3t}\cos 5t-3\alpha\{e^{-3t}\sin 5t\}$

$=2\cdot\frac{s+3}{(s+3)^2+5^2}-3\cdot\frac{5}{(s+3)^2+5^2}$ (প্রাথমিক চলন ধর্ম অনুসারে)

$=\frac{2s-9}{s^2+6s+34}$

(ii) সমাধান : $\mathcal{L}\{\sin 2t\cos t\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin 3t+\sin t\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}+\frac{1}{s^2+1}\right\}$ রৈখিক ধর্ম অনুসারে

প্রাথমিক ধর্ম অনুসরণ করে $\mathcal{L}\{e^{-4t}\sin 2t\cos t\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{(s-4)^2+9}+\frac{1}{(s-4)^2+1}\right\}$

2.3.5 স্কেলপরিবর্তন ধর্ম (Change of scale) ঃ

$$\mathcal{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}\bar{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

প্রমাণ : $\mathcal{L}\{f(at)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(at)dt$

ধরা যাক $u=at$,

$$\int_0^\infty e^{-s\frac{u}{a}}f(u)\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u}f(u)\frac{du}{a}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}\bar{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

2.3.6 অনুশীলনী ঃ

উদাহরণ 1. যদি দেওয়া থাকে $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$ বাহির কর

স্কেলপরিবর্তনের ধর্ম অণুসারে

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{at}\right\}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s/a}\right)=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$$

অতএব $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}=\tan^{-1}\left\{\frac{s}{a}\right\}$

উদাহরণ 2. যদি $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{s^2-s+1}{(2s+1)^2(s-1)}$ জানা থাকে তবে দেখাও $\mathcal{L}\{f(2t)\}=\frac{s^2-2s+4}{4(s+1)^2(s-2)}$

সমাধান : $\mathcal{L}\{f(2t)\} = \frac{1}{2}\bar{f}\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s}{2} + 1}{\left(2\cdot\frac{s}{2}+1\right)^2\left(\frac{s}{2}-1\right)}$

$$= \frac{s^2 - 2s + 4}{4(s+1)^2(s-2)}$$

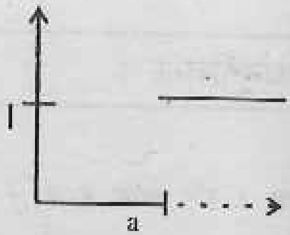
2.4 ধাপ/স্তর অপেক্ষক (Step function), চলমান অপেক্ষক (Translated function) পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক (Periodic function)-এর ল্যাপ্লাস রূপান্তর ঃ

সংজ্ঞা : স্তর/ধাপ অপেক্ষক

বাস্তব রাশি $a \ge 0$ এর জন্য যদি অপেক্ষক $u_a(t)$-এর প্রকাশ নিম্নরূপ হয় যেমন

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

তখন $u_a(t)$ একটি স্তর অপেক্ষক



$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_a(t)dt = \int_0^a e^{-st}\cdot 0dt + \int_a^\infty e^{-st}\cdot 1dt$$

$$= \frac{e^{-as}}{s}, s > 0$$

বিভিন্ন ধাপ/স্তর অপেক্ষক-এর প্রকাশ $u_a(t)$ অপেক্ষক দ্বারা প্রকাশ করা যায় যেমন ল্যাপ্লাস রূপান্তরের রৈখিক ধর্ম অনুসারে এই সকল অপেক্ষকের ল্যাপ্লাস রূপান্তর সম্ভব।

2.5 অনুশীলনী ঃ

উদাহরণ : **1.** অপেক্ষক $f(t)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞিত আছে

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2 \\ 2 & 2 < t < 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$$

আমাদের $\mathcal{L}\{f(t)\}$ নির্ণয় করিতে হইবে।

সমাধান : $f(t)$ অপেক্ষক নিম্নরূপে প্রকাশ করা সম্ভব যেমন :

$$f(t)=\begin{cases}0-0 & 0<t<2\\ 2-0 & 2<t<4\\ 2-2 & t>4\end{cases}$$

ধরা যাক $u_2=\begin{cases}0 & 0<t<2\\ 2 & t>2\end{cases}$

$$u_4=\begin{cases}0 & 0<t<4\\ 2 & t>4\end{cases}$$

$$f(t)=2u_2(t)-2u_4(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{2u_2(t)-2u_4(t)\}=\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{2e^{-4s}}{s}=\frac{2}{s}\left(e^{-2s}-e^{-4s}\right)$$

উদাহরণ 2 : মনে করা যাক $g(t)=\begin{cases}0 & 0<t<3\\ t-1 & t>3\end{cases}$

$\mathcal{L}\{g(t)\}$ নির্ণয় করিতে হইবে

সমাধান : $g(t)=\begin{cases}0 & 0<t<3\\ (t-3)+2 & t>3\end{cases}$

$$u_3(t)f(t-3)=\begin{cases}0 & 0<t<3\\ (t-3)+2 & t>3\end{cases}$$

$$\therefore f(t)=t+2$$

$$\mathcal{L}\{u_3 f(t-3)\}=e^{-3s}\mathcal{L}\{f(t)\}=e^{-3s}\bar{f}(s)$$

আবার $\bar{f}(s)=\mathcal{L}\{t+2\}=h\{t\}+2\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}$

এখানে ধাপ অপেক্ষকের সংজ্ঞা অনুযায়ী $a=3$

$$\mathcal{L}\{u_3(t)(t-3)\}=e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{3}\right)$$

উদাহরণ 3 : নিম্নলিখিত অপেক্ষকের ল্যাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় করো :

$$g(t)=\begin{cases}0 & 0<t<\pi/2\\ \sin t & t>\pi/2\end{cases}$$

সমাধান ঃ

আমরা জানি $g(t)=\begin{cases}0 & 0<t<\pi/2\\ \cos(t-\pi/2) & t>\pi/2\end{cases}$

আমরা লিখি $u_{\pi/2}f(t-\pi/2)=\begin{cases}0 & 0<t<\pi/2\\ \cos(t-\pi/2) & t>\pi/2\end{cases}$

যদি $f(t)=\cos t$ ধরা হয় যখন $t>0$

$$\bar{f}(s)=\mathcal{L}\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{g(t)\}=\mathcal{L}\{u_{\pi/2}(t)f(t-\pi/2)\}=\frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$$

সংজ্ঞা : যদি $f(t+p)=f(t)$ হয় প্রত্যেক চলরাশি 't'-এর জন্য তখন 'f' অপেক্ষককে p পর্যায়যুক্ত পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক বলা হয়

উপপাদ্য : 'f' যদি একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক (Periodic function) হয় তবে 'f' এর ল্যাপ্লাস রূপান্তরের অস্তিত্ব আছে এবং তাহা হইল $\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{\int_0^{\infty} pe^{-st}f(t)dr}{1-e^{-ps}}$

প্রমাণ : $\int\limits_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt=\int\limits_0^{p} e^{-st}f(t)dt+\int\limits_p^{2p} e^{-st}f(t)dt+.....+\int\limits_{np}^{(n+1)p} e^{-st}f(t)dt+......$

ধরা যাক $t=u+np$

আবার $\int\limits_{np}^{(n+1)p} e^{-st}f(t)=\int\limits_0^{p} e^{-s(u+np)}f(u+np)du$

যেহেতু $f(u)=f(u+p)=f(u+p).....=f(u+np).....$

$$\int_0^p e^{-s(u+np)} f(u+np)\,du = e^{-nps}\int_0 pe^{-su} f(u)\,du$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^p e^{-su} f(u)\,du + e^{-ps}\int_0 pe^{-su} f(u)du + \dots + e^{-nps}\int_0 pe^{-su} f(u)du + \dots$$

$$=\left[1+e^{-ps}+e^{-2ps}+\dots+e^{-nps}+\dots\right]\int_0^p e^{-su} f(n)\,du$$

$$=\int_0 pe^{-su} f(u)du \big/ \left(1-e^{-ps}\right)$$

উদাহরণ : নিম্নলিখিত $f(t)$ অপেক্ষকের ল্যাপ্লাস রূপান্তর বাহির কর $f(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t\le 2 \\ -1 & 2\le t<4 \end{cases}$

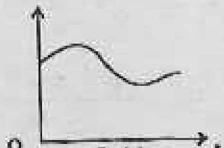
এবং সকল ধনাত্মক চলরাশি 't' এর জন্য $f(t+4)=f(t)$

সমাধান : $\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{\int_0^4 e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-4s}}=\dfrac{1}{1-e^{-4s}}\left[\int_0^2 e^{-st}\cdot 1dt+\int_2^4 e^{-st}(-1)dt\right]=\dfrac{1-e^{-2s}}{s\left(1+e^{-2s}\right)}$

সংজ্ঞা : চলমান অপেক্ষক (Translated function)

মনে করা যাক 'f' অপেক্ষকটি 'a' দূরত্ব অবধি এমনভাবে সরানো হলো যে নূতন অপেক্ষকটির সংজ্ঞা

$$\begin{cases} 0, & 0<t<a \\ f(t-a), & t>a \end{cases}$$

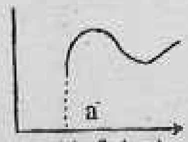


f (t)

আবার ধাপ/স্তর অপেক্ষক $u_a(t)=\begin{cases} 0 & 0<t<a \\ 1 & t>a \end{cases}$

তখন নূতন অপেক্ষকটি নিম্নলিখিত রূপে প্রকাশ করা যায় যেমন

$$u_a(t)f(t-a)=\begin{cases} 0 & 0<t<a \\ f(t-a) & t>a \end{cases}$$



$u_a(t)$ f (t-a)

উপপাদ্য : $\mathcal{L}\{u_a(t)f(t-a)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}$

প্রমাণ : $\mathcal{L}\{u_a(t)f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}u_a(t)f(t-a)dt$

$$= \int_0^a 0 \cdot e^{-st} dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt$$

ধরা যাক $t - a = \tau$

$$\int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt = e^{-as} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-as} \alpha\{f(t)\}$$

অতএব $\mathcal{L}\{u_a(t) f(ta)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as} \bar{f}(s)$

প্রমাণিত হইল

2. 6 প্রশ্নমালা ঃ

নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির ল্যাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় কর

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 6 \\ 5 & t > 6 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 4 & 0 < t < 6 \\ 0 & t > 6 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 5 \\ 0 & 5 < t < 7 \\ 0 & 6 > 7 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 5 \\ 2 & 2 < t < 4 \\ 3 & 4 > t < 6 \\ 0 & t > 6 \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \pi/2 \\ \cos t & t > \pi/2 \end{cases}$

6. $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 4 \\ t - 4 & 4 > t < 7 \\ 3 & t > 7 \end{cases}$

উত্তর : 1. $\frac{5e^{-6s}}{s}$ 2. $\frac{4}{s}\left(1 - e^{-6s}\right)$ 3. $\frac{2}{s}\left(e^{-5s} - e^{-7s}\right)$

4. $\frac{1 + e^{-2s} + e^{-4s} - 3e^{-6s}}{s}$ 5. $\frac{-e^{-\pi s/2}}{s^2 + 1}$

6. $\frac{e^{-4s} - e^{-7s}}{s^2}$

একক 3 □ অন্তরকলন ও সমাকলের লাপ্লাস রূপান্তর

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

3.2 উদ্দেশ্য

3.3 অন্তরকলজের ল্যাপ্লাস রূপান্তর

3.4 অনুশীলনী

3.5 অন্তরকলজের ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার প্রয়োগ

3.6 অনুশীলনী

3.7 প্রশ্নমালা

3.8 সমাকলনের ল্যাপ্লাস রূপান্তর

3.9 ল্যাপ্লাস রূপান্তরের মাধ্যমে সমাকলন নির্ণয়

3.10 সারাংশ

3.11 প্রশ্নমালা

3.1 প্রস্তাবনা :

একক নং 1 এবং একক নং 2 -এর আলোচিত ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে অন্তরকলন ও সমাকলনের উপর এই রূপান্তর প্রক্রিয়া আলোচনার প্রয়োজন আছে।

3.2 উদ্দেশ্য :

প্রথমে অন্তরকলনের উপর ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া বিষয়ক উপপাদ্য উদাহরণসহ আলোচনা করা হবে। এরপর সমাকলের উপর ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া উদাহরণসহ আলোচনা করা হবে। সমাকল ও অন্তরকলনের উপর ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা বিভিন্ন অপেক্ষকের ল্যাপ্লাস রূপান্তর ও সমাকলের মান নির্ণয় করা হবে।

3.3 অন্তরকলনের ল্যাপ্লাস রূপান্তর (Laplace Transform of Derivatives) :

উপপাদ্য 1 : ধরা যাক অপেক্ষক $f(t)$ বাস্তব চলরাশি 't' > 0 এর জন্য সংজ্ঞিত আছে এবং ইহার মাত্রা

বা ক্রম $e^{\alpha t}$ (exponential order), $f'(t)$ অপেক্ষকটি খণ্ড ভাবে $0 \le t \le b$ বন্ধ অন্তরালে অসন্তত। তখন

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

প্রমাণ : মনেকরা যাক $f'(t)$ সীমিত সংখ্যক বিন্দু $t_1, t_2 \ldots\ldots t_n \le \mathrm{R}$ -তে অসন্তত

$$\int_0^{\mathrm{R}} e^{-st} f'(t)\,dt = \left(\int_0^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \ldots\ldots + \int_{t_n}^{\mathrm{R}} \right) e^{-st} f'(t)\,dt$$

$$\therefore \int_0^{\mathrm{R}} e^{-st} = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^{t_{1-}} + s\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)\,dt + \left[e^{-st} f(t)\right]_{t_{1+}}^{t_{2-}} + s\int_{t_{1-}}^{t_2} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$+ \ldots\ldots + \left[e^{-st} f(t)\right]_{t_{n+}}^{\mathrm{R}} + s\int_{t_n}^{\mathrm{R}} e^{-st} t(f)\,dt$$

যেহেতু অপেক্ষক f চলরাশি ধণাত্মক 't' এর জন্য অসন্তত

$$f(t_1 -) = f(t_1 +), f(t_2 -) = f(t_2 +) \ldots\ldots f(t_n -) = f(t_n +)$$

$$\therefore \int_0^{\mathrm{R}} e^{-st} f'(t)\,dt = -f(0) + e^{-s\mathrm{R}} f(\mathrm{R}) + s\int_0^{\mathrm{R}} e^{-st} f(t)\,dt$$

যেহেতু 'f' অপেক্ষকের মাত্রা $e^{\alpha t}$ আমরা একটি M পাই যার জন্য

$e^{-\alpha t}|f(t)| < \mathrm{M}$ যখন $t \ge t_0$

$\therefore \left|e^{-s\mathrm{R}} f(\mathrm{R})\right| < \mathrm{M}e^{-(s-\alpha)\mathrm{R}}$ যখন $R > t_0$

যখন $s > \alpha$

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} e^{-s\mathrm{R}} f(R) = 0$$

$$\therefore \lim_{\mathrm{P}\to\infty} e^{-s\mathrm{P}} f(t)\,dt = s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

অতএব $\mathcal{L}\{f'(t)\}$-এর অস্তিত্ব আছে যখন $s > \alpha$ এবং উপরের ফর্মুলা দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উপপাদ্য 2 : 1. বাস্তব চলরাশি 't' -এর প্রথম হইতে $(n-1)$তম অন্তরকলনগুলি সন্তত যখন $t \geq 0$ এবং $f, f' \ldots\ldots f^{(n-1)}$ অপেক্ষকগুলির সূচক অপেক্ষক $e^{\alpha t}$ মাত্রায় আছে (of exponentil order)

2. মনেকরা হোক প্রতিটি বধ অন্তররাল $0 \leq t \leq b$-এর মধ্যে $f^{(n)}$ খণ্ডভাবে সন্তত

তখন $\mathcal{L}\{f^{(n)}\}$-এর অস্তিত্ব সম্ভব।

প্রমাণ : $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}(t)\,dt$

$$= \Big[e^{-st} f^{n-1}(t) - (-s)e^{-st} f^{n-2}(t) + (-s)^2 e^{-st} f^{n-3}(t) + \ldots\ldots +$$

$$(-1)^{n-1}(-s)^{n-1} e^{-st} f(t)\Big]_0^\infty + (-1)^n(-s)^n \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= f^{n-1}(0) - sf^{n-2}(0) - s^2 f^{n-3}(0) \ldots\ldots - s^{n-1} f(0) + s^n \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

উপপাদ্য 1 -এর প্রমাণের যুক্তি অনুসরণ করে দেখানো সম্ভব

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \ldots\ldots - f^{(n-1)}(0)$$

3.4 অনুশীলনী ঃ

উদাহরণ 1 : $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ বাহির হয় যখন $f(t) = t$

সমাধান : $f(t) = t \quad \therefore f(0) = 0$ এবং $f'(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = \frac{1}{s}$$

উদাহরণ 2 : $f(t) = \sin bt$ $\quad \mathcal{L}\{\sin bt\}$ বাহির কর

সমাধান : $f'(t) = b\cos bt$, $\quad f''(t) = -b^2 \sin bt$

$$\mathcal{L}\{-b^2 \sin bt\} = s^2 \mathcal{L}\{\sin bt\} - b$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

উদাহরণ 3 : $f(t) = \sin^2 at$ $\quad \mathcal{L}\{\sin^2 at\}$ নির্ণয় কর

সমাধান : $f(t) = \sin^2 at$ $\quad \therefore f'(t) = 2a \sin at \cos at$, $\; f(0) = 0$

$$\mathcal{L}\{2a \sin at \cos at\} = s\,\mathcal{L}\{\sin^2 at\}$$

$$\mathcal{L}\{\sin^2 at\} = a\,\mathcal{L}\{\sin 2at\} = \frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$$

3.5 অন্তরকলজের ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার প্রয়োগ ঃ

t^n দ্বারা গুনণ যুক্ত অপেক্ষকের ল্যাপ্লাস রূপান্তর : (Mulliplication by t^n)

উপপাদ্য 1 : মনেকরা যাক $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$

তখন $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} \bar{f}(s) \quad n = 1, 2, 3.$

প্রমাণ : আমরা জানি $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \bar{f}(s)$ উভয় দিকে s -এর সাপেক্ষে অন্তরফলন করিলে

$$\frac{d}{ds}\left[\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right] = \frac{d}{ds}\left[\bar{f}(s)\right]$$

লিবনিৎ -এর নিয়মের সাহায্যে

$$\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st}\right)f(t)dt = \frac{d}{ds}\left[\bar{f}(s)\right]$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[tf(t)\right]dt = -\frac{d}{ds}\left[\bar{f}(s)\right]$$

$$\therefore \mathcal{L}\left\{tf(t)\right\} = (-1)\frac{d}{ds}\left[\bar{f}(s)\right]$$

$n=1$ -এর জন্য প্রমাণিত হলো।

মনেকরা যাক $n=m$

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[t^m f(t)\right]dt = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m}\left[\bar{f}(s)\right]$$

আবার s -এর সাপেক্ষে উভয় দিকের অন্তরকলন করলে

$$\int_0^\infty \left(-te^{-st}\right)t^m\left\{f(t)\right\}dt = (-1)^m \frac{d^{m+1}}{ds^{m+1}}\left[\bar{f}(s)\right]$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-st}\left[t^{m+1}f(t)\right] = (-1)^{m+1}\frac{d^{m+1}}{ds^{m+1}}\left[\bar{f}(s)\right]$$

এই উপপাদ্যটি $n=m$ এর জন্য সত্যি হলে $n=m+1$ -এর জন্যও সত্যি হবে।

অতএব এই উপপাদ্যটি $n=1,2,3......$ জন্য প্রমাণিত হল।

3.6 অনুশীলনী :

উদাহরণ 1 : নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির ল্যাপ্লাস রূপান্তর বাহির কর।

(i) $t\cos at$ (ii) $t^2\sin at$ (iii) t^3e^{-3t}

সমাধান : (i) $\mathcal{L}\left\{\cos at\right\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

$$\mathcal{L}\{t\cos at\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$$

(ii) $\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ $\quad \therefore \{t^2 \sin at\} = (-1)^2 \dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{a}{s^2+a^2}\right)$

(iii) $\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \dfrac{1}{s+3}$

$$\mathcal{L}\{t^3 e^{-3t}\} = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s+3}\right) = \frac{6}{(s+3)^4}$$

3.7 প্রশ্নমালা ঃ

নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির ল্যাপ্লাস রূপান্তর বাহির কর :

1. $t\sin^2 t$ 2. $t^2 e^{2t}\cos t$ 3. $t^2\cos at$ 4. $te^{-t}\cos nt$ 5. $t\sin 3t\cos 2t$

উত্তর : 1. $\dfrac{2\left(3s^2+4\right)}{s^2\left(s^2+4\right)^2}$ 2. $\dfrac{s^2+2s+2}{\left(s^2+2s\right)^2}$. 3. $\dfrac{2s^3-6a^2s}{\left(s^2+a^2\right)3}$ 4. $\dfrac{s^2+2s+2}{\left(s^2+2s\right)^2}$

5. $\dfrac{5s}{\left(s^2+25\right)^2} + \dfrac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$

3.8 সমাকলের ল্যাপ্লাস রূপান্তর (Laplace Transform of Integral)

আমরা সমাকলের ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া আলোচনা করব।ক্র

উপপাদ্য 1 : মনে করা যাক $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$

তখন $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}\bar{f}(s)$

প্রমাণ : ধরা যাক $\phi(t) = \int_0^t f(u)\,du$

$$\therefore \phi'(t) = f(t) \text{ এবং } \phi(0) = 0$$

$\mathcal{L}\{\phi'(t)\} = s\bar{\phi}(s) - \phi(0)$

$\therefore \bar{\phi}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\phi'(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\bar{f}(t)\} = \frac{1}{s}\bar{f}(s)$

$\therefore \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\bar{f}(s)$

3.9 ল্যাপ্লাস রূপান্তরের সাহায্যে সমাকল নির্ণয় ঃ

অনুশীলনী :

উদাহরণ 1. নিম্নলিখিত সমাকলগুলির মান ল্যাপ্লাস রূপান্তর দ্বারা নির্ণয় কর।

(i) $\int_0^\infty te^{-3t}\sin t\,dt$ (ii) $\int_0^\infty \frac{\sin mt}{t}dt$ (iii) $\int_0^t \frac{\sin t}{t}dt$

সমাধান : (i) $\int_0^\infty te^{-3t}\sin t\,dt$ মান বাহির করিতে হইবে

মনে করা যাক $3 = s$

$$\int_0^\infty te^{-st}\sin t\,dt = \mathcal{L}\{t\sin t\} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-3t}\sin t\,dt = \frac{2\cdot 3}{\left(3^2+1^2\right)^2} = \frac{3}{50}$$

(ii) $\int_0^\infty \frac{\sin mt}{t}dt$ মান বাহির করিতে হইবে

আমরা জানি $\mathcal{L}\{\sin mt\} = \frac{m}{m^2+s^2} = \bar{f}(s)$

$$\therefore \mathcal{L}\left\{\frac{\sin mt}{t}\right\} = \int_0^\infty \bar{f}(s)ds = \int_0^\infty \frac{mds}{s^2+m^2} = \tan^{-1}\frac{s}{m}\bigg|_0^\infty$$

আবার $\lim_{s\to 0}\tan^{-1}\left(\frac{s}{m}\right) = 0$ যদি $m>0$ অথবা π যদি $m<0$

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{\sin mt}{t}dt = \int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \tan^{-1}s = \frac{\pi}{2}$$

(iii) $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \tan^{-1}s = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s = \cot^{-1}s$

$\therefore \mathcal{L}\left\{e^t\cdot\frac{\sin t}{t}\right\} = \cot^{-1}(s-1)$ (ধর্ম অনুসারে)

$\mathcal{L}\left\{\int_0^t\left\{e^t\frac{\sin t}{t}\right\}dt\right\} = \frac{1}{s}\cot^{-1}(s-1)$ (সমাকলের ল্যাপ্লাস রূপান্তর অনুযায়ী)

3.10 সারাংশ ঃ

এই এককে অন্তরকলজ ও সমাকলের ল্যাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় করা হলো। কিছু কিছু প্রয়োগ উদাহরণসহ দেওয়া হলো।

3.1 প্রশ্নমালা ঃ

1. নিম্নলিখিত সমাকলগুলির ল্যাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় কর।

(i) $\int_0^t e^{-t}\cos dt$ (ii) $\int_0^\infty te^{-3t}\sin t dt$ (iii) $\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt$ (iv) $\int_0^t \frac{\cos at - \cos bt}{t}dt$

2. প্রমাণ কর : (i) $\int_0^\infty \frac{e^{-1} - e^{-3t}}{t} = \log 3$ (ii) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt = \frac{1}{4}\log 5$

3. নিম্নলিখিত সমাকল দুইটির ল্যাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় কর :

(i) $\int_0^t \frac{\sin t}{t}$ (ii) $\int_0^t e^{-t}\cos st\,dt$

উত্তর : 1. (i) $\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}$ (ii) $\frac{3}{50}$ (iii) $\frac{3}{25}$ (iv) $\frac{1}{2s}\log\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$

3. (i) $\frac{1}{s}\cot^{-1}s$ (ii) $\frac{1}{s}\frac{s+1}{s^2+20+2}$

একক 4 □ লাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া

গঠন

4·1 প্রস্তাবনা

4·2 উদ্দেশ্য

4·3 ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া

4·4 ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়ার ধর্ম

4·5 অনুশীলনী

4·6 অন্তর কলজের ল্যাপ্লাস রূপান্তর বিলোম প্রক্রিয়ার ধর্ম

4·7 সমাকলের ল্যাপলাস রূপান্তর বিলোম প্রক্রিয়া

4·8 s^n দ্বারা গুণন করিয়া ল্যাপ্লাস বিলোম প্রক্রিয়ার ধর্ম

4·9 সারাংশ

4·10 প্রশ্নমালা

4.1 প্রস্তাবনা ঃ

যদি ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা কোনো অপেক্ষককে পরিবর্তিত করা হয় তাহা হইলে ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া দ্বারা অপেক্ষকটিকে পূর্বাবস্থায় নিয়ে আসার প্রয়োজন আছে।

4.2 উদ্দেশ্য ঃ

এই এককে ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া ও ধর্ম সমূহ উদাহরণসহ আলোচনা করা হবে।

4.3 ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া (Inverse Laplace Transform)

সংজ্ঞা $\bar{f}(s)$ অপেক্ষকটি জানা থাকিলে অপেক্ষক $f(t)$ নির্ণয়ের প্রক্রিয়াটি হইল ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া। বিলোম প্রক্রিয়াটি $\mathcal{L}^{-1}$ প্রতীক চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং $f(t)$ কে $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}$ দ্বারা প্রকাশ

করা হয়, অর্থাৎ $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}$

অতএব $\mathcal{L}\{f(t)\}=\bar{f}(s)$

উদাহরণ 1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1$ 2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$ 3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}=\frac{\sin at}{a}$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\}=\frac{1}{a}\sinh at$ 5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\}=\frac{t^{n-1}}{(n+1)!}$

6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)n}\right\}=\frac{e^{at}t^{n-1}}{(n-1)!}$ 7. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at$

8. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\}=\cosh at$ 9. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2+b^2}\right\}=\frac{e^{at}\sinh bt}{b}$

10. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}=e^{at}\cos bt$

4.5 অনুশীলনী ঃ

উদাহরণ 1 : ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া দ্বারা অপেক্ষকগুলি নির্ণয় কর

(i) $\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}$ (ii) $\frac{4s+5}{(s-1)^2(s+2)}$

সমাধান : (i) হর $= s^3-6s^2+11s-6=(s-1)(s-2)(s-3)$

ধরা যাক $\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3}$

$A=\left[2\cdot 1^2-6\cdot 1+5\right]\Big/(1-2)(1-3)=\frac{1}{2}$

$$B=\left[2\cdot 2^2-6\cdot 2+5\right]\big/(2-1)(2-3)=-1$$

$$C=\left[2\cdot 3^2-6\cdot 3+5\right]\big/(3-1)(3-2)=\frac{5}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}e^{t}-e^{2t}+\frac{5}{2}e^{3t}$$

(ii) $$\frac{4s+5}{(s-1)^2(s+2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{4(-2+5)}{(-2-1)^2(s+2)}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+5}{(3-1)^2(s+2)}\right\}=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}e^{t}+3te^{t}-\frac{1}{3}e^{-2t}$$

উদাহরণ 2. ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া দ্বারা নিম্নলিখিত অপেক্ষক নির্ণয় কর

(i) $\dfrac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}$ (ii) $\dfrac{s}{s^4+4a^4}$

সমাধান : $\dfrac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}=\dfrac{5\cdot 1+3}{(s-1)(1^2+2\cdot 1+5)}+\dfrac{As+B}{s^2+2s+5}$ দুই দিকে $(s-1)(s^2+2s+5)$ দ্বারা গুণন করিয়া

$5s+3=1\cdot(s^2+2s+5)+(As+B)(s-1)$ দুই দিকের s^2 -এর গুণিতক দিয়ে তুলনা করে $A=-1$, $B=2$ হইবে।

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s+2}{s^2+2s+5}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+2^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right\}$$

$$= e^t - e^{-t}\cos 2t + \frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t$$

(ii) $s^4 + 4a^4 = (s^2+2a^2)^2 - (2as)^4$

$$s = (As+B)(s^2-2as+2a^2) + (Cs+B)(s^2+2ast+2a^2)$$

$$A = C = 0, \quad B = -\frac{1}{4}a, \quad D = \frac{1}{4a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+4a^4}\right\} = -\frac{1}{4a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a^2)+a^2}\right\} + \frac{1}{4a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2+a^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4a}e^{-at}\sin nt + \frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{a}e^{at}\sin at$$

$$= \frac{1}{2a^2}\sin at \sin hat$$

4.6 ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়ার ধর্ম ঃ

ল্যাপ্লাস রূপান্তরের মত ল্যাপলাস রূপান্তরে বিলোম প্রক্রিয়া ঐ সকল ধর্ম অনুসরন করে

4·6·1 রৈখিক ধর্ম (Linear Property) ঃ

মনে করা যাক c_1, c_2, c_3 তিনটি যে কোনো ধ্রুবক সংখ্যা এবং $\bar{f}_1(s), \bar{f}_2(s)$, এবং $f_3(s)$ তিনটি অপেক্ষক $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ -এর ল্যাপ্লাস রূপান্তর।

অর্থাৎ $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}_1(s)\}$, $f_2(f) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}_2(s)\}$, $f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}_3(s)\}$

তখন $\mathcal{L}^{-1}\{c_1\bar{f}_1(s) + c_2\bar{f}_2(s) + c_3\bar{f}_3(s)\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}_1(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}_2(s)\} + c_3\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}_3(s)\}$

4·6·2 প্রাথমিক চলন ধর্ম (First Shifting Property) :

সংজ্ঞা অনুযায়ী $\bar{f}(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s-a)\}=e^{at}f(t)=e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}$$

উদাহরণ 1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t$ 2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\}=\frac{1}{2}e^t\sin 2$

4·6·3 স্কেল পরিবর্তনের ধর্ম (Change of Scale Property) :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(as)\}=\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

প্রমাণ : $\bar{f}(as)=\int_0^\infty e^{-ast}f(t)dt=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-sx}f\left(\frac{x}{a}\right)dx$, $at=x$ ধরিয়া।

$$=\frac{1}{a}\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}$$

উদাহরণ 1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^t$ $f(t)=e^t$ $f(t)=1$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=e^{2t}\cdot 1$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\}=\frac{1}{2}e^t\sin 2t$

5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}=\cos 4t$

6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\}=\frac{1}{2}\cos 2t$

4.7 অনুশীলনী ঃ

উদাহরণ 1 : আমরা জানি $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin tt$

অতএব, $\bar{f}(s)=\frac{1}{s^2+1}$ যখন $f(t)=\sin t$

$\bar{f}(s)$-এর অন্তরকলজ $\frac{d}{ds}\{\bar{f}(s)\}=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=-\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}=(-1)t\sin t$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}=\frac{1}{2}t\sin t$$

উদাহরণ 2 : অন্তরকলজের ল্যাপ্লাস বিলোম প্রক্রিয়া দ্বারা অপেক্ষক নির্ণয় কর

$$f(s)=\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)=\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$f'(s)=\frac{-2}{s\left(s^2+1\right)}=-2\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{f'(s)\}=-2(1-\cos t)\cdot\frac{2(1-\cos t)}{t}=f(t)$$

$$=-t\,f(t)$$

4.8 অন্তর কলজের ল্যাপ্লাস বিলোম প্রক্রিয়া ঃ

উপপাদ্য 1. যদি $\mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{f}(s)\right\}=f(t)$ হয় এবং $\bar{f}^{(n)}(s)=\dfrac{d^n}{ds^n}\bar{f}(s)$

তখন $\mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{f}^{(n)}(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{d^n}{ds^n}\bar{f}(s)\right\}=(-1)^n t^n f(t)$

প্রমাণ : 3 নং এককের 3·5 থেকে

$$\int_0^\infty e^{-st}t^n f(t)d=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left\{\bar{f}(s)\right\}$$

অতএব, $\mathcal{L}^{-1}\left\{(-1)^n\bar{f}^{(n)}(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{f}^{(n)}(s)\right\}=(-1)^n t^n f(t)$$

4.9 সমাকলের ল্যাপ্লাস রূপান্তর বিলোম প্রক্রিয়া ঃ

উপপাদ্য : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{f}(s)=f(t)\right\}$ হইলে $\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^t\bar{f}(s)ds\right\}=\dfrac{f(t)}{t}$

প্রমাণ : আমরা জানি $\bar{f}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$

1এ $G(t)=\int_0^t\bar{f}(s)ds \quad \therefore G'(t)=F(t),\ G(0)=0$

$$\mathcal{L}\left\{\Gamma'(t)\right\}=s\mathcal{L}\left\{\Gamma(t)\right\}-\Gamma(0)=s\mathcal{L}\left\{\Gamma(t)\right\}=\bar{f}(s)$$

$$\therefore \mathcal{L}\left\{\Gamma(t)\right\}=\frac{\bar{f}(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\}=G(t)=\int_0^t\bar{f}(s)ds$$

4.10 অনুশীলনী ঃ

উদাহরণ 1 : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}\right\}$ বাহির কর

সমাধান : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}=\int_0^t \sin u\,du=1-\cos t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}\right\}=\int_0^t (1-\cos u)\,du=t-\sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}\right\}=\int_0^t (u-\sin u)\,du=\frac{t^2}{2}+\cos t-1$$

উদাহরণ-2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}$ অপেক্ষকটি বাহির কর

সমাধান : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}$

$$=\int_0^t \frac{1}{2}u\sin u\,du$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}u\right)(-\cos u)-\frac{1}{2}\cdot(-\sin u)\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$$

4.11 s^n দ্বারা গুণ করিয়া ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোপ প্রক্রিয়া ঃ

উদাহরণ 1 : $\mathcal{L}^{-1}\{s\bar{f}(s)\} = f'(t)$

প্রমাণ : যদি $f(0) = 0$ হয় $\mathcal{L}^{-1}\{s\bar{f}(s) - f0)\} = f'(t)$

$\mathcal{L}^{-1}\{s+(s)\} = f'(t) \neq f(0)\delta(t)$, ' $\delta(t)$' ডিরক ডেলটা অপেক্ষক এইভাবে $\alpha^{-1}\{s^n f(s)\}$ বাহির করা সম্ভব।

অনুশীলনী উদাহরণ 1 : আমরা জানি $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$

ধরা যাক $f(t) = \sin t$, $\sin t = 0$ যখন $t = 0$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$$

সারাংশ : ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া তাহার সকল প্রকার ধর্ম সমূহ এবং বিশেষ কয়েকটি ধর্ম উদাহরণসহ আলোচিত হয়েছে।

4.12 প্রশ্নমালা ঃ ল্যাপ্লাস রূপান্তর বিলোম প্রক্রিয়া দ্বারা অপেক্ষকগুলি নির্ণয় কর

1. $\frac{3(a^2-2)^2}{2a^5}$
2. $\frac{s}{(s+3)^2+4}$
3. $\frac{s^2+s-2}{s(s+3)(s-2)}$
4. $\frac{s}{(s-3)(s^2+4)}$
5. $\frac{s}{(s^2-1)^2}$
6. $\frac{s^3}{s^4-a^4}$
7. $\frac{2s-3}{s^2+4s+13}$
8. $\frac{s+2}{(s^2+4s+13)}$
9. $\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$
10. $\log\frac{s+1}{s-1}$

উত্তর : 1. $\frac{3}{2}-3t^2+\frac{1}{2}t^4$ 2. $e^{-3t}(\cos 2t-1\cdot 5\sin 2t)$

3. $\frac{1}{3}+\frac{4}{15}e^{3t}+\frac{2}{3}e^{-2t}$ 4. $\frac{1}{13}\left(3e^{3t}-3\cos 2t+2\sin 2t\right)$

5. $\frac{1}{2}t\sin 4t$ 6. $\frac{1}{2}[\cos at+\cos 4at]$

7. $\frac{1}{3}e^{-2t}(\sin 3t-8\sin 2t+6\cos 3t)$

8. $\frac{1}{3}e-2t(\sin 3t-8\sin 2t+6\cos 3t)$ 9. $\frac{1}{2}te^{-2t}\sin t$

10. $-e^{-t}+e^{t}$

একক 5 ☐ কনভলিউশন উপপাদ্য

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

5.2 উদ্দেশ্য

5.3 কনভলিউশন ধর্ম ও কনভলিউশন উপপাদ্য

5.4 অনুশীলনী

5.5 সারাংশ

5.6 প্রশ্নমালা

5.1 প্রস্তাবনা ঃ

ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া সংক্রান্ত একটি প্রধান উপপাদ্য আছে।

5.2 উদ্দেশ্য ঃ

এই এককে সেই উপপাদ্যটি উপস্থাপন করে ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়াতে প্রয়োগ করা হবে।

5.3 কনভলিউশন ধর্ম (Convolution Property) ঃ

সংজ্ঞা : দুইটি অপেক্ষক f এবং g এর কনভলিউশন হ'লো নিম্নলিখিত সমাকল

$$f * g = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

কনভলিউশনের চারটি নিম্নলিখিত ধর্ম উপস্থাপন করা হ'লো

1. $f*g = g*f$

2. $f*(g*h) = (f*g)*h$

3. $f*(g+h) = f*g + f*h$

f, g, h হইল তিনটি অপেক্ষক

উপপাদ্য 1 : কনভলিশন উপপাদ্য

যদি $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$ এবং $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{g}(s)\} = g(t)$ হয়

তখন $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = f*g$

প্রমাণ : আমরা জানি যে

$$\bar{f}(s)\bar{g}(s) = \left\{\int_0^\infty e^{-su} f(u)du\right\}\left\{\int_0^\infty e^{-sv} g(u)dv\right\}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)g(u)dudv$$

ধরা যাক $u+v=t$ $= \int_0^\infty e^{-st}\left[\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\}\right]at = f*g$ সংজ্ঞা অনুসারে প্রমাণিত হইল।

5.4 অনুশীলনী

কনভলিউশন উপপাদ্যের দ্বারা ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোপ প্রক্রিয়া দ্বারা অপেক্ষক নির্ণয় :

উদাহরণ 1 : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$ বাহির কর

$\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = \frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}$ মনে করি $\bar{f}(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$ এবং $\bar{g}(s) = \frac{1}{s^2+a^2}$

আমরা জানি $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at = f(t)$

এবং $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a} = g(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \int_0^t \cos au \frac{\sin a(t-u)}{a}du$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^t (\cos au)(\sin at+\cos au-\cos at\sin au)du$$

$$=\frac{1}{a}\sin at\int_0^t \cos^2 au\,du-\frac{1}{a}\cos at\int_0^t \sin au\cos au\,du$$

$$=\frac{1}{a}\sin at\int_0^t\left(\frac{1+\cos 2a4}{2}\right)du-\cos at\int_0^t\frac{\sin 2a4}{2}du$$

$$=\frac{1}{a}\sin at\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2at}{4a}\right)-\frac{1}{a}\cos at\left(\frac{1-\cos 2at}{4a}\right)$$

$$=\frac{t\sin at}{2a}$$

উদাহরণ 2 : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$

আমরা জানি $\frac{1}{s^2(s+1)^2}=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}$

মনে করি $\bar{g}(s)=\frac{1}{s^2}\;\bar{f}(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}=te^{-t}$$

অতএব কনভলিউশন উপপাদ্য দ্বারা

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\}=f*g$$

$$=\int_0^t\left(u\left(e^{-4}\right)(t-u)du\right.$$

$$=\int_0^t\left(ut-u^2\right)e^{-4}du$$

$$=\left[\left(4t-4^2\right)\left(-e^{-4}-(t-24)e^{-4}+(-2)\left(-e^{-4}\right)\right]_0^t$$

$$=te^{-t}+2e^{-t}+t-2$$

5.5 সারাংশ

কনভলিউশন উপপাদ্যেটি প্রমনিত, হইল ও উদাহরণ সহ ল্যাপ্লাস বিলোম রূপান্তর প্রক্রিয়ার একটি প্রধান নিয়ম উপস্থাপনা করা হইল

5.6 প্রশ্নমালা ঃ কনভলিউশন উপপাদ্যের সাহায্যে নিম্নলিখিত ল্যাপ্লাস বিলোম রূপান্তরের মান বাহির করো

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$ 2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$ 3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$ 5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$ 6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$

7. $\alpha^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\}$ 8. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$

উত্তর : 1. $1-\cos t$ 2. $\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$ 3. $e^{2t}-e^t$

4. $\frac{t\sin at}{2a}$ 5. $\frac{1}{2}\left(\sin t-\cos t+e^{-t}\right)$

6. $\frac{1}{8}\left\{\left(3-t^2\right)\sin t-3t\cos t\right\}$ 7. $\frac{1}{64}t(\sin 2t-2t\cos 2t)$

8. $\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t$

একক 6 □ ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার প্রয়োগ

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

6.2 উদ্দেশ্য

6.3 একঘাত অন্তরকল সমীকরণের ল্যাপ্লাস রূপান্তরের প্রয়োগ

6.4 অনুশীলনী

6.5 সারাংশ

6.6 প্রশ্নমালা

6.1 প্রস্তাবনা :

ল্যাপ্লাস রূপান্তরের প্রয়োগের সঙ্গে পরিচিত হওয়া দরকার

6.2 উদ্দেশ্য :

একক নং 6—এ আমরা অন্তরকল সমীকরণের সমাধানে ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার প্রয়োগ আলোচনা করব।

6.3 একঘাত অন্তরকল সমীকরণের ল্যাপ্লাস রূপান্তরের প্রক্রিয়ার প্রয়োগ :

একঘাত অন্তরকল সমীকরণের ধ্রুব সহগ (Constant Coefficient) থাকিলে ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমাধান করা যাবে। এই সমস্যার সমাধান যদি ল্যাপলাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে করিতে হয় তবে এই সমস্যার প্রারম্ভিক মান (initial value) জানা থাকা প্রয়োজন।

ধরা যাক $\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha\frac{d}{dt}y+\beta y=F(t)$

যেখানে α, β দুইটি ধ্রুবক এবং $y(0)=y_0 \quad y'(0)=y_1$.

ধরা যাক $L=\frac{d^2}{dt^2}+\alpha\frac{d}{dt}+\beta$

সমীকরণটি লেখা যায় $Ly = F(t)$

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{d^2 y}{dt^2} dt = \left[e^{-st} \frac{dy}{dt}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} \frac{dy}{dt} dt$$

$$= -y_1 + s\int_0^\infty e^{-st} \frac{d}{dt} y dt$$

$$= -y_1 + se^{-st} y\Big]_0^\infty + s^2\int_0^\infty e^{-st} y dt$$

$$= -y_1 + sy_0 + s^2\int_0^\infty e^{-st} y dt$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{d}{dt} y dt = -y_0 + s\int_0^\infty e^{-st} y dt$$

আমরা ধরে নিয়েছি $\underset{t \to \infty}{\mathrm{Lt}} \left(e^{-st} y\right) = 0, \ \underset{t \to \infty}{\mathrm{Lt}} \left(e^{-st} \frac{d}{dt} y\right) = 0$

অন্তরকল সমীকরণের ল্যাপলাস রূপান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} + \alpha \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} y\right\} + \beta \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{F(t)\}$$

$$\left(s^2 + \alpha s + \beta\right)\int_0^\infty e^{-st} y dt = \bar{f}(s)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\bar{f}(s)}{s^2 + \alpha s + \beta}$$

$$\bar{y} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{f}(s)}{s^2 + \alpha s + \beta}\right\}$$

6.4 অনুশীলনী ঃ

উদাহরণ 1. সমাধান কর $y'' + y = t, \ y(0) = 1, \ y'(0) = -2$

সমাধান : উপরের সমীকরণের ল্যাপলাস রূপান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা

$\mathcal{L}\{y''\}+\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}(t)$

$s^2\bar{y}-s+2+\bar{y}=\frac{1}{s^2}$

$\bar{y}=\mathcal{L}\{y\}=\frac{1}{s^2(s^2+1)}+\frac{s-2}{s^2+1}=\frac{1}{s^2}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+1}$

$\therefore y=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+1}\right\}$

$=t+\cos t-3\sin t$

উদাহরণ 2. সমাধান কর $\frac{d}{dt}y-2y=e^{5t}$ $y(0)=3$

সমাধান : $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}y\right\}-2\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{e^{5t}\}$

$(s-2)\bar{y}(s)-3=\frac{1}{s-5}$

$\bar{y}(s)=\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}$

$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-14}{(s-2)(s-5)}\right\}$

$=\frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}$

$=\frac{8}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{5t}$

উদাহরণ 3. সমাধান কর : ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে

$y''+2y'+5y=e^{-t}\sin t$ $y(0)=0,\ y'(0)=1$

সমাধান : $\mathcal{L}\{y''\}+2\mathcal{L}(y')+5\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{e^{-t}\sin t\}$

$$\{s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0)\} + 2\{s\bar{y} - y(0)\} + 5\bar{y} = \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{s^2+2s+5} + \frac{1}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$= \frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\} - \frac{1}{3}e^{-t}(\sin t + \sin 2t)$$

উদাহরণ 4. ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমাধান কর :

$$y'' + 9y = \cos 2t, \quad y(0) = 1 \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

সমাধান : $y'(0)$ দেওয়া নেই, ধরা যাক $y'(0) = c$

$$\mathcal{L}\{y''\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\}$$

$$s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0) + 9\bar{y} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\bar{y}(s) = \frac{s+c}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+a)}$$

ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোপ প্রক্রিয়ার দ্বারা $y = \frac{4}{5}\sin 3t + \frac{c}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\cos 2t$

যেহেতু 'c' ধ্রুবকটি বাহির করিতে হইবে।

$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1 \quad \therefore -1=-\frac{c}{3}-\frac{1}{5} \quad \therefore c=\frac{12}{5}$

অতএব $y=\frac{4}{5}\cos 3t+\frac{4}{5}\sin 3t+\frac{1}{5}\cos 2t$

উদাহরণ 5 : ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমাধান কর

$y''+a^2y=f(t) \quad y(0)=1,\ y'(0)=-2$

সমাধান : $\mathcal{L}\{y''\}+a^2\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{f(t)\}=\bar{f}(s)$

$s^2\bar{y}-sy(0)-y'(0)+a^2\bar{y}=\bar{f}(s)$

$\bar{y}(s)=\frac{s-2}{s^2+a^2}+\frac{\bar{f}(s)}{s^2+a^2}$

কনভলিউশন উপপাদ্যের সাহায্যে

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2+a^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{f}(s)}{s^2+a^2}\right\}=\cos at-\frac{2sat}{a}+\frac{1}{a}\int_0^t f(4)\sin a(t-4)\,du$$

উদাহরণ 6 : $y''-a^2y=F(t)$ এর সাধারণ সমাধান বাহির কর

সমাধান : ধরা যাক $y(0)=c_1,\ y^1(0)=c_2$

ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে $s^2\bar{y}(s)-sc_1-c_2-a^2y=\bar{f}(s)$

$\therefore \bar{y}(s)=\frac{sc_1+c_2}{s^2-a^2}+\frac{\bar{f}(s)}{s^2a^2}$

ল্যাপ্লাম রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া দ্বারা

$y=c_1\cosh at+\frac{c_2}{a}\sinh at+\frac{1}{a}\int_0^t F(u)\sinh a(t-4)\,du$

$=A\cos at+B\sinh at+\frac{1}{a}\int_0^t F(4)\sinh a(t-4)\,du$ ইহাই সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 7 : $t\,y'' + 2y' + ty = 0 \; y(0+) = 1, \quad y(\pi) = 0$

সমাধান : ধরা যাক $y'(0+) = c_1$

ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে

$$-\frac{d}{ds}\left\{s^2\bar{y} - sy(0+) - y'(0+)\right\} + 2\left\{s\bar{y} - y(0+)\right\} - \frac{d\bar{y}}{ds} = 0$$

$(s^2+1)y^5 - 1 = 0$ অথবা $y^5 = \dfrac{-1}{s^2+1}$

সমাকলনের সাহায্যে $\bar{y} = -\tan^{-1}s + A$

যেহেতু $\bar{y} \to 0$ যখন $s \to \infty$ আমরা পাই $A = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \bar{y} = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}s = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)$ তা বলে $y = \tan^{-1}\left\{+\tan^{-1}\dfrac{1}{s}\right\} = \dfrac{\sin t}{t}$

অপেক্ষকটি $y(\pi) = 0$ শর্তকে পূরণ করে।

উদাহরণ 8 : $y'' - ty' + y = 1 \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2$

সমাধান : ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}(ty') + \mathcal{L}\{y = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0) + \frac{d}{ds}\{s\bar{y} - y(0)\} + \bar{y} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{d}{ds}y + \left(s + \frac{2}{s}\right)y = 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}$$

সমাকল গুণক (Integratins factor) $e^{\int\left(s+\frac{2}{s}\right)ds} = s^2 e^{\frac{1}{2}s^2}$

$$\frac{d}{ds}\left\{s^2e^{\frac{1}{2}s^2}\bar{y}\right\}=\left(1+\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\right)s^2e^{\frac{1}{2}s^2}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}s^2}\int\left(1+\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\right)s^2e^{\frac{1}{2}y^2}ds$$

$$=\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}s^2}\left[se^{\frac{1}{2}s^2}+2e^{\frac{1}{2}s^2}+c\right]$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{c}{s^2}e^{\frac{-1}{2}s^2}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{c}{s^2}\left(1-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{8}s^4......\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{s^k\right\}=0\ k=0,1,2.....$$

$$\therefore\ y=1+(c+s)t$$

উদাহরণ 9 : $t y''+2y'+ty=\cos t,\ y(0)=1$

$$\mathcal{L}\{t y''\}+2\mathcal{L}\{y'\}+\mathcal{L}\{ty\}=\mathcal{L}\{\cos t\}$$

As $\mathcal{L}\{t f(t)\}=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}$ we obtain

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2\bar{y}-sy(0)-y'(0)\right]+2\left[s\bar{y}-y(0)\right]-\frac{d}{do}\bar{y}=\frac{s}{s^2+1}$$

$$\frac{d\bar{y}}{ds}=-\frac{1}{s^2+1}=\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d\bar{y}}{ds}\right\}=-t\,y(t)$$

ল্যাপ্লাস রূপান্তরের বিলোম প্রক্রিয়া দ্বারা

$-ty = -\sin t - \frac{1}{2} t \sin t$

$\therefore y = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{t}\right)\sin t$

উদাহরণ 10 : $y''+4y''+5y'+2y=10\cos t\; y(0)=0,\; y'(0)=0,\; y''(0)=3$ ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে

$$s^3\bar{y}(s)-3+h4s^2\bar{y}(s)+5s\bar{y}(s)+2\bar{y}(s)-3=\frac{10s}{s^2+1}$$

$$\bar{y}(s)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+10s+3}{\left(s^2+1\right)\left(s^3+4s^2+5s+2\right)}\right\}$$

$$y=-e^{-2t}+2e^{-t}$$

6.5 সারাংশ ঃ

বিভিন্ন রকমের সমাকল সমীকরণের ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা সমাধানের উদাহরণ আলোচনা করা হলো।

6.6 প্রশ্নমালা ঃ

ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে নিম্নলিখিত সমাকল সমীকরণগুলি সমাধান করো।

1. $y''(t)+4y(t)=9t,\quad y(0)=0,\; y'(0)=7$
2. $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=4t+12e^{-t}\; y(0)=6y^1(0)=-1$
3. $y''(t)-4y'(t)+5y(t)=125t^2\; y(0)=y'(0)=0$
4. $y''(t)+y(t)=8\cos t\; y(0)=1,\; y'(0)=-1$
5. $y'''(c)-y(t)=e^t,\; y(0)=0,\; y'(0)=0,\; y''(0)=0$

6. $y'''(t)-2y''(t)+y(t)=\sin t \quad y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$

উত্তর : 1. $y(t)=\frac{9}{4}t+\frac{19}{8}\sin 2t$

2. $y(t)=3e^{t}=2e^{2t}+2t+3+2e^{-t}$

3. $y(t)=25t^{2}+4ot+22+2e^{2t}(2\sin t-11\cos t)$

4. $y(t)=\cos t-\sin t+4t\sin t$

5. $y(t)=\frac{1}{3}te^{t}+\frac{1}{18}e^{\frac{-1}{2t}}\left(9\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{2}e^{t}$

6. $y(t)=\frac{1}{8}\left\{\left(3-t^{2}\right)\sin t-3+\cos t\right)\}$

মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

—রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে; সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নতুন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

—সুভাষচন্দ্র বসু

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

—Subhas Chandra Bose

Price : Rs. 150.00

(NSOU-র ছাত্রছাত্রীদের কাছে বিক্রয়ের জন্য নয়)

Published by : Netaji Subhas Open University, DD-26, Sector-I, Salt Lake Kolkata-700 064
and Printed at : SEVA MUDRAN, 43, Kailash Bose Street, Kolkata-700 006