NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

SUBSIDIARY MATHEMATICS

SMT 01

Block 1

CLASSICAL ALGEBRA AND ABSTRACT ALGEBRA

প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে-পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোনও বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এ-ক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণ ক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে—যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। ইন্দিরা গান্ধী মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ও রবীন্দ্র মুক্ত বিদ্যালয়ের কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ-কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন; যখনই কোনও শিক্ষার্থীও এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনো শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এর পর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

তৃতীয় পুনর্মুদ্রণ ঃ সেপ্টেম্বর, 2019

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় : সহায়ক গণিতবিদ্যা — স্নাতক পাঠক্রম

পাঠক্রম : পর্যায় : S M T : 01

BLOCK : 01

পুরাতনী বীজগণিত ও বিমূর্ত বীজগণিত

	রচনা	সম্পাদনা
একক ❑ 1–4	ড. শুভ্রা চন্দ্র	ড. কানন মজুমদার
একক ❑ 5–9	ড. যূথিকা সেনগুপ্ত	ড. জয়শ্রী সরকার
একক ❑ 10	অধ্যাপক সুবীর কুমার মুখার্জি	

এই পরিসংকলনটি সর্বতোভাবে পরিমার্জনা করেছেন অধ্যাপক সুবীর কুমার মুখার্জি

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

S M T – 01

পর্যায়–1

পুরাতনী বীজগণিত ও বিমূর্ত বীজগণিত (Classical Algebra and Abstract Algebra)

বিভাগ—ক

(চিরায়ত বীজগণিত Classical Algebra)

একক 1 ❑ জটিল রাশি ঃ সংজ্ঞা, মডিউলাস ও অ্যামপ্লিটিউট, দ্য ময়ভার উপপাদ্য ও তার প্রয়োগ, জটিল রাশি Z-এর ক্ষেত্রে exp z, Sin z, Cos z, Log z, a^z $(a \neq 0)$-এর সংজ্ঞা ও মৌলিক ধর্মাবলী।

একক 2 ❑ বহুপদ রাশি ও বীজগাণিতিক সমীকরণ বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য, সহগের সঙ্গে বীজের সম্পর্ক, বীজের প্রকৃতি, দেকার্তের চিহ্ন সম্পর্কিত উপপাদ্য (বিবৃতি), বীজগুলির সদৃশ অপেক্ষকের মান নির্ধারণ, সমীকরমের রূপান্তর, ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধানে কার্ডন-এর পদ্ধতি।

একক 3 ❑ ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক ঃ সংজ্ঞা ও ধর্ম, পরিবর্ত, ম্যাট্রিক্সের বিভিন্ন প্রকার ভেদ, প্রতিসম ও বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স, লম্ব ম্যাট্রিক্স, নির্ণায়কের মাইনর ও সহ উৎপাদক, নির্ণায়কের মান নির্ধারণে অনুসৃত সূত্রাবলী, নির্ণায়কের গুণ, জ্যাকোবির উপপাদ্য, প্রতিসম ও বিপ্রতিসম নির্ণায়কের ধর্ম, ক্র্যামারের নিয়ম।

একক 4 ❑ বিপরীত ম্যাট্রিক্স ঃ সংজ্ঞা ও অস্তিত্বের শর্ত, রৈখিক সমীকরণগুচ্ছ সমাধানে প্রয়োগ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা— সংজ্ঞা ও নির্ধারণ পদ্ধতি, রৈখিক সমীকরণগুচ্ছ সমাধানে মাত্রার প্রয়োগ।

একক 1 □ জটিল রাশি (Complex Number)

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

বাস্তব রাশি সমূহের সেট $\mathbb{R}$ সম্পর্কে পাঠক পাঠিকাদের সাধারণ ধারণা আছে। যোগ (+), বিয়োগ (–), গুণন (.) ও ভাগ (÷) এই চার প্রক্রিয়া $\mathbb{R}$ -এ কিভাবে ব্যবহৃত হয়, সেটিও জানা আছে। যোগ ও গুণন সাপেক্ষে $\mathbb{R}$-এর বিশেষ বীজগাণিতিক কাঠামোর বিষয়টি বিমূর্ত বীজগণিতে আলোচিত হবে। স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\mathbb{N}$ থেকে শুরু করে প্রয়োজনের তাগিদে কিভাবে সকল পূর্ণসংখ্যার সেট $\mathbb{Z}$, মূলদ সংখ্যার সেট $\mathbb{Q}$ ও পরে বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ এসেছে, সেবিষয়ে প্রাথমিক ধারণা গণিতের ছাত্রছাত্রীদের আছে। কিন্তু বাস্তব পরিস্থিতি দেখিয়ে দিচ্ছে যে সব প্রশ্নের সমাধান $\mathbb{R}$ -এর আওতাধীনে সম্ভব নয়। $x^2 + 5 = 0$ বা $x^2 + x + 1 = 0$ এ ধরণের সমীকরণের সমাধান $\mathbb{R}$-এ সম্ভব নয়—কেননা বাস্তব রাশির ক্ষেত্রে দুটি ধনাত্মক (ঋণাত্মক) সংখ্যার গুণফল সব সময়েই ধনাত্মক হয় এবং একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হলে তাদের গুণফল ঋণাত্মক হয়ে থাকে। ফলে $x^2 = -5$ হলে x যে বাস্তব নয়, এটি স্পষ্ট। ঐ ধরণের সব সমীকরণের সমাধানের জন্য $\mathbb{R}$-এর সম্প্রসারণ প্রয়োজন। এই অনিবার্য তাগিদ থেকে জটিল রাশির উদ্ভব হয়েছে। জার্মান গণিতজ্ঞ C.F.Gauss এবং পরবর্তীকালে A.L. Cauchy, B. Riemann, K. Weierstrass প্রমুখ জটিল রাশির তত্ত্বকে সমৃদ্ধ করেছেন।

এই এককে $x^n + 1 = 0$ (n যে কোন অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা) ও এ ধরণের আরও বহু সমীকরণকে সমাধানের উপযুক্ত গাণিতিক কাঠামো প্রবর্তন করব এবং অনেকক্ষেত্রেই সেগুলি সমাধানের পদ্ধতি নির্ধারণ করতে সক্ষম হব। x বাস্তব রাশি হলে $\sin x$, $\cos x$ সহ বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক, e^x, $a^x (a > o)$ এবং $x > 0$ হলে $\log x$ অপেক্ষকের একেবারে মৌলিক কিছু ধারণা পূর্ববর্তী পাঠ্যক্রমে আলোচিত হয়েছে। এই এককে Z জটিল রাশি হলে উপরোক্ত অপেক্ষকগুলির পরিবর্তিত আকার ও মৌলিক ধর্ম সম্পর্কে কিছু ধারণা আমরা পাব। x ঋণাত্মক বাস্তব রাশি হলে $\log x$ অপেক্ষকটির বিস্তার বা পাল্লা কি হবে সে সম্পর্কেও ধারণা এই এককের আলোচনায় আমরা পাব।

কোন্ মৌলিক ধর্ম বাস্তব রাশি ও কাল্পনিক রাশির মধ্যে বড়ধরণের পার্থক্য সূচিত করছে, সেটি এই এককের অন্যতম আকর্ষণের বিষয়।

1.2 জটিল রাশি সম্পর্কিত প্রারম্ভিক বিষয়

সংজ্ঞা 1. জটিল রাশি বলতে বাস্তব রাশির ক্রম-যুগল (a,b) বুঝাবে যে ক্রম যুগলগুলির ক্ষেত্রে যোগ প্রক্রিয়া $(+)$ ও গুণন-প্রক্রিয়া $(.)$ নিম্নোক্ত যথাক্রমে (1) ও (2) দ্বারা নির্নীত হয় এবং যে ক্রমযুগলগুলি নিম্নোক্ত (3) অনুসারী হয় ঃ

(1) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

(2) $(a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

এবং (3) $(a,b)=(c,d)$ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a=c$ ও $b=d$ হয়।

মন্তব্য ঃ (ক) এখানে ক্রমযুগল (a,b) বলতে প্রথম স্থানে a ও দ্বিতীয় স্থানে b বুঝাবে। (a,b) ও (b,a) ভিন্ন যদি $a \neq b$ হয়।

(খ) p ও q বাস্তব রাশি হলে $p>q$ বা $p<q$ বা $p=q$ -এর একটি হবেই। কিন্তু জটিল রাশির ক্ষেত্রে $(a,b)>(c,d)$ বা $(a,b)<(c,d)$ হবে না—এগুলি অর্থহীন।

(গ) সংজ্ঞাত যোগ ও গুণণ প্রক্রিয়া নিম্ন ধর্মাবলী মেনে চলে—

(i) $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$

(ii) $\{(a,b)+(c,d)\}+(e,f)=(a,b)+\{(c,d)+(e,f)\}$

(iii) $(a,b)+(o,o)=(a,b)=(o,o)+(a,b)$

(iv) প্রতি (a,b)-এর ক্ষেত্রে $(-a,-b)$ পাওয়া যাবে যে

$$(a,b)+(-a,-b)=(0,0)=(-a,-b)+(a,b)$$

(v) $(a,b).(c,d)=(c,d).(a,b)$

(vi) $\{(a,b).(c,d)\}.(e,f)=(a,b).\{(c,d).(e,f)\}$

(vii) $(a,b).(1,0)=(a,b)=(1,0).(a,b)$

(ix) $a^2+b^2 \neq 0$ হলে

$$(a,b).\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

$$=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right).(a,b)$$

(x) $(a,b).\{(c,d)+(e,f)\}=(a,b).(c,d)+(a,b).(e.f)$

[(i) – (x) পর্যন্ত সবগুলিই যোগ ও গুণন প্রক্রিয়া অনুযায়ী সম্ভব ও এগুলি যাচাই করা যায়]

(ঘ) সংজ্ঞাত গুণন প্রক্রিয়া থেকে সুস্পষ্ট যে

$$(0,1).(0,1)=(0-1,0)=(-1,0)$$

জটিল রাশি (0, 1) -কে আমরা i দ্বারা চিহ্নিত করব।

(ঙ) $(x, y) = (x, 0) + (0, 1).\ (y, 0)$ [(1) ও (2) অনুযায়ী]

আমরা $(x, 0)$ -কে বাস্তব রাশি x দিয়ে চিহ্নিত করব। ফলে আমরা পাই

(i) $(x, y) = x + iy$ (ii) $i^2 = -1$

i কে বলা হয়ে থাকে কাল্পনিক একক (imaginary unit), $x + iy$ -এর ক্ষেত্রে x-কে বলা হবে বাস্তব অংশ ও y-কে বলা হবে কাল্পনিক অংশ |$x + iy$ কে z দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

(চ) যদি λ কোন বাস্তব রাশি হয়, তবে λ-কে $(\lambda, 0)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে এবং এর ফলে

$\lambda(x, y) = (\lambda, 0)\ .\ (x, y) = (\lambda\ x, \lambda\ y)$ হবে।

(ছ) x_1, x_2, y_1, y_2 বাস্তব রাশি হলে—

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) - (x_2, y_2) &= (x_1, y_1) + (-1, 0)\ (x_2, y_2)\\ &= (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)\end{aligned}$$ (জটিল রাশির বিয়োগ)

অতএব $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

(জ) x_1, x_2, y_1, y_2 বাস্তব রাশি হলে

$(x_1 + iy_1)\ (x_2 + iy_2) = 1 = (1, 0)$ হবে

যখন $x_1x_2 - y_1y_2 = 1$ ও $x_1Y_2 + x_2y_1 = 0$ হয়।

এই দুই সমীকরণের সমাধান করলে পাই

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}},\ y_2 = \frac{-y_1}{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}},\ \text{যখন } x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} \neq 0$$

$$\text{অতএব } (x_2, y_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}, \frac{-y_1}{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}\right),\ x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} \neq 0$$

$\left(\dfrac{x_1}{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}, \dfrac{-y_1}{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}\right)$ -কে অ-শূণ্য জটিল রাশি $x_1 + iy_1$-এর গুণ সাপেক্ষে বিপরীত উপাদান বলা হয়।

(ঝ) যদি $z_1 = x_1 + iy_1$ ও $z_2 = x_2 + iy_2$ $(\neq 0)$ হয়, তবে

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} - i\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} \text{ হবে}$$

(জটিল রাশির ভাগ)।

সংজ্ঞা (2) যদি $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ হয়, তবে $a - ib$ হবে ঐ জটিল রাশির অনুবন্ধী জটিল রাশি $\bar{z}$ । আবার $z = a - ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ হলে অনুবন্ধী জটিল রাশি হবে $\bar{z} = a + ib$

অতএব (i) $z\,\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ হবে।

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(iii) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

(iv) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

(v) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$

(vi) $z + \bar{z} = 2$(z-এর বাস্তব অংশ), $z - \bar{z} = 2i$ (z-এর কাল্পনিক অংশ)

জটিল রাশির জ্যামিতিক প্রকাশ

প্রতিটি জটিল রাশি $z = a + ib \equiv (a, b)$-কে তলে একটি বিন্দু দিয়ে সূচিত করা হয়। তলে পরস্পর লম্ব দুটি রেখার অনুভূমিক রেখাটিকে 'বাস্তব অক্ষ' ও উলম্ব রেখাটিকে 'কাল্পনিক অক্ষ' দ্বারা সূচিত করা হয়, কেননা জটিল রাশিটির বাস্তব অংশ অনুভূমিক রেখা দ্বারা ও কাল্পনিক অংশ লম্ব রেখা বরাবর স্থানাঙ্ক জ্যামিতির নিয়মে নির্ণীত হয়। এক্ষেত্রে তলটিকে 'জটিল তল' (Complex plane) বা Gaussian তল বলা হয়। Argand চিত্র (diagram) নামে ভূষিত করা হয় । এই পদ্ধতির সাহায্যে প্রদত্ত জটিল রাশির অনুবন্ধী জটিল রাশি, দুটি জটিল রাশির যোগফল, বিয়োগফলে লব্ধ জটিল রাশিকে জ্যামিতিক নিয়ম অনুযায়ী চিহ্নিত করা যায়।

জটিল রাশিটিকে মেরু আকারে (Polar form)-ও প্রকাশ করা যায়। উক্ত লম্বরেখা দুটির ছেদ বিন্দুকে মূলবিন্দু ও অনুভূমিক রেখাটিকে প্রারম্ভিক রেখা (Initial line) হিসাবে চিহ্নিত করলে ঐ বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্কা দাঁড়ায় (r, θ) অর্থাৎ $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, ফলে $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ হবে। এই আলোচনা থেকে প্রতীয়মান যে জটিল রাশি $0 = 0 + i\,0$ -এর অনুষঙ্গী বিন্দু Argand চিত্রে (0, 0) হলেও মেরু স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে 0-এর মেরু আকার নেই।

সংজ্ঞা 3. যদি $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ হয়, তবে $(a^2 + b^2)$ কে ঐ জটিল রাশি z-এর মডিউলাস (Modulus) বলা হবে এবং $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে। মেরু আকারের ক্ষেত্রে $|z| = r$ হবে।

ফলে মডিউলাসের জ্যামিতিক তাৎপর্য হল এটি z-এর প্রতিনিধিত্বমূলক বা অনুষঙ্গী বিন্দু (a, b) থেকে মূল বিন্দু বা মেরুর দূরত্ব সূচিত করছে।

$|z|$ অ-ঋণাত্মক বাস্তব রাশি।

জটিল রাশির মডিউলাস নিম্ন সূত্রগুলি মেনে চলে :

z_1 ও z_2 দুটি জটিল রাশি হলে

(i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (ii) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(iii) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

সংজ্ঞা (4) অ-শূণ্য জটিল রাশি $z = a + ib$ -এর প্রতিনিধিত্বকারী বা অনুষঙ্গী বিন্দু (a, b) ও মূলবিন্দু বা মেরুর যোগাযোগকারী সরলরেখা বাস্তব অক্ষ অর্থাৎ অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যে কোন θ উৎপন্ন করে সেই θ-কে ঐ জটিলরাশির অ্যামপ্লিচিউড বা আরমেন্ট বলা হয়ে থাকে। $amp\ z$ বা $arg\ z$ দ্বারা চিহ্নিত করব।

θ-এর অসংখ্য মান হবে, কিন্তু θ-এর যে মানটি $-\pi < \theta \leq \pi$ কে সিদ্ধ করে, সেটিকে অ্যামপ্রিচিউড বা আরমেন্টের মুখ্যমান **(Principal Value)** বলা হয়ে থাকে। মুখ্যমানকে $Amp\ z$ বা $Arg\ z$ দ্বারা চিহ্নিত করব। উল্লেখ্য, ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকটি ধনাত্মক দিক হিসাবে চিহ্নিত হয়।

এ বিষয়ে নিম্ন সূত্রগুলি প্রনিধানযোগ্য :

(i) $z = x + iy$ হলে

$$Arg\ Z = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x},\ x > 0 \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \pi,\ x < 0,\ y \geq 0 \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} - \pi,\ x < 0,\ y < 0 \\ \pi / 2,\ x = 0,\ y > 0 \\ -\pi / 2,\ x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

(ii) $arg\ (z_1 z_2) = arg\ z_1 + arg\ z_2$

কিন্তু $Arg(z_1 z_2) = Arg\ z_1 + Arg\ z_2$ না-ও হতে পারে। উদাহরণ ঃ $z_1 = i,\ z_2 = -1$

(iii) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 (z_2 \neq 0)$

কিন্তু $Arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = Arg\ z_1 - Arg\ z_2$ নাও হতে পারে।

উদাহরণ : $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -1 + i$

সংজ্ঞা—(5) (জটিল রাশির ঘাত)

মনে করি z যে-কোনো অ-শূণ্য জটিল রাশি।

(ক) যদি n কোন পূর্ণসংখ্যা হয়, $z^0 = 1,\ z^n = z^{n-1}.\ z$ যেখানে $n > 0,\ z^{-n} = (z^{-1})^n$ যেখানে $n > 0$ হয়।

এক্ষেত্রে m ও n পূর্ণসংখ্যা হলে

$z^m, z^n = z^{m+n}, (z^m)^n = z^{mn}, z_1^m . z_2^m = (z_1 . z_2)^m$ হবে।

(খ) n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে $z^{1/n}$ একটি জটিল রাশি t হবে যার জন্য $t^n = z$ হবে। t-কে z -এর একটি n তম মূল বলা হবে।

(গ) যদি n মূলদ রাশি $\dfrac{p}{q}$ হয় (p ও q ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)

$$z^n = \left(z^{1/q}\right)^p, \quad z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

1.3 দ্য ময়ভার-এর উপপাদ্য ও তার প্রয়োগ

বিবৃতি : ধরা যাক্ θ একটি বাস্তব সংখ্যা। সেক্ষেত্রে

(i) n পূর্ণসংখ্যা হলে $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

(ii) n মূলদ সংখ্যা হলে $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ —এর একটি মান হবে $\cos n\theta + i\sin n\theta$.

প্রমান : (i) $n = 1$ হলে বিবৃতি (i) সত্য।

ধরা যাক্ n -এর যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা মান k-এর জন্য

বিবৃতি (i) সত্য। ফলে $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k . (\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

অতএব বিবৃতিটি $n = k$ -এর জন্য সত্য হলে $n = k + 1$ -এর জন্যও সত্য। ফলে গাণিতিক আরোহ প্রক্রিয়া দ্বারা প্রমাণিত হয় যে সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n -এর জন্য

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

এবার মনে করি n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও $n = -m$, m ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} &= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}\\ &= \frac{1}{(\cos m\theta + i\sin m\theta)^m}\\ &= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + i\sin^2 m\theta}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)$$

[যেহেতু $\cos\theta$ যুগ্ম, $\sin\theta$ অযুগ্ম অপেক্ষক]

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

যদি $n = 0$ হয়, $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1 = \cos(0.\theta) + i\sin(0.\theta)$

(ii) মনে করি $n = \frac{p}{q}$ যেখানে p, q অখণ্ড সংখ্যা ও $q > 1$

$$\left(\cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta\right)^q = \cos\left(\frac{p}{q}.q\theta\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}.q\theta\right)$$

(যেহেতু q ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)

$$= \cos p\,\theta + i\sin p\,\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^p$$

ফলে $\cos\frac{p\theta}{q} + i\sin\frac{p\theta}{q}$ রাশিটি $(\cos\theta + i\sin\theta)^p$ রাশির q -তম মূলের একটি। $\cos n\,\theta + i\sin n\,\theta$ রাশিটি $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ -এর একটি মান।

মন্তব্য : (1) $\cos\theta$ ও $\sin\theta$ উভয়ই 2π -পর্যায় বিশিষ্ট পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক। ফলে

$$\cos\theta + i\sin\theta = \cos(2k\pi + \theta) + i\sin(2k\pi + \theta)$$

যেখানে k 0, 1, 2, ...হবে।

ফলে $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ -এর বাকী মানগুলি হবে

$$\cos(2k\pi + \theta)\frac{p}{q} + i\sin(2k\pi + \theta)\frac{p}{q}$$ যেখানে $k = 0, 1, 2, ..., q - 1$.

(2) দ্য ময়ভারের প্রয়োগ নিম্ন উদাহরণগুলি থেকে সুষ্ট হবে :

উদাহরণ: (1) সমাধান করুন ঃ $x^n = 2$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$x^n = 2(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi) \text{ (k যে কোন পূর্ণসংখ্যা)}$$

$$\Rightarrow \quad x = 2^{1/n}(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)^{1/n} \; (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$$= 2^{1/n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \; (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

(দ্য ময়ভারের উপপাদ্য অনুযায়ী)

[পাঠক-পাঠিকারা যাচাই করে দেখুন যে $k = n, n+1, ..., 2n-1$ বসালে প্রাপ্ত রাশিগুলি যথাক্রমে $k = 0, 1, ..., n-1$ এর ক্ষেত্রে প্রাপ্ত রাশিগুলির সঙ্গে একই হবে।]

(2) $\left(\sqrt{3} + i\right)^{1/6}$ নির্ণয় করুন।

ধরা যাক, $\sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (r ও θ বাস্তব)

$\Rightarrow r\cos\theta = \sqrt{3}$, $r\sin\theta = 1 \qquad \Rightarrow r = 2, \theta = \pi/6$

ফলে $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$= 2\left[\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right] \; (k = 0, 1, 2, ...)$$

$$(\sqrt{3}+i)^{1/6} = \left\{2\left[\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}^{1/6},\ (k = 0, 1, 2, ..., 5)$$

$$= 2^{1/6}\left[\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)\frac{1}{6}+i\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)\frac{1}{6}\right]\ (k = 0, 1, ..., 5)$$

(দ্য ময়ভারের উপপাদ্য অনুযায়ী)

ফলে k-এর উক্তমানগুলি বসিয়ে পাওয়া যায় যে

$$2^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{36}+i\sin\frac{\pi}{36}\right),\ 2^{1/6}\left(\cos\frac{13\pi}{36}+i\sin\frac{13\pi}{36}\right),$$

$$2^{1/6}\left(\cos\frac{25\pi}{36}+i\sin\frac{25\pi}{36}\right),\ 2^{1/6}\left(\cos\frac{37\pi}{36}+i\sin\frac{37\pi}{36}\right) = -2^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{36}+i\sin\frac{\pi}{36}\right),$$

$$2^{1/6}\left(\cos\frac{49\pi}{36}+i\sin\frac{49\pi}{36}\right) = -2^{1/6}\left(\cos\frac{13\pi}{36}+i\sin\frac{13\pi}{36}\right)$$

$$2^{1/6}\left(\cos\frac{61\pi}{36}+i\sin\frac{61\pi}{36}\right) = -2^{1/6}\left(\cos\frac{25\pi}{36}+i\sin\frac{25\pi}{36}\right)$$

(3) θ বাস্তব ও n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে $\cos n\theta$ ও $\sin n\theta$ কে $\cos\theta$, $\sin\theta$ -এর বিস্তৃতিতে প্রকাশ করুন।

দ্য ময়ভারের উপপাদ্য অনুযায়ী—

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

বাম দিকের বিস্তৃতি হল

$$\cos^n\theta + n_{c_1}.\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta) + n_{c_2}.\cos^{n-2}\theta(i\sin\theta)^2 + n_{c_3}.\cos^{n-3}\theta.(i\sin\theta)^3 + n_{c_4}.$$

$$\cos^{n-4}\theta(i\sin\theta)^4 + \ldots + n_{c_{n-1}}\cos\theta.(i\sin\theta)^{n-1} + n_{c_n}(i\sin\theta)^n$$

ফলে $\cos n\theta = \cos^n\theta - n_{c_2}.\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + n_{c_4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \ldots$

$\sin n\theta = n_{c_1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - n_{c_3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \ldots$

(4) দেখান যে θ বাস্তব হলে

(i) $\cos 7\theta = 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$

(ii) $\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta$

দ্য ময়ভারের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta$$

বাম দিকের বিস্তৃতি হল—

$\cos^7\theta + 7_{c_1}\cos^6\theta(i\sin\theta) + 7_{c_2}\cos^5\theta(i\sin\theta)^2 + 7_{c_3}\cos^4\theta(i\sin\theta)^3 +$

$7_{c_4}\cos^3\theta(i\sin\theta)^4 + 7_{c_5}\cos^2\theta(i\sin\theta)^5 + 7_{c_6}\cos\theta(i\sin\theta)^6 + 7_{c_7}(i\sin\theta)^7$

$\Rightarrow \cos 7\theta = \cos^7\theta - 7_{c_2}\cos^5\theta\sin^2\theta + 7_{c_4}\cos^3\theta\sin^4\theta - 7_{c_6}\cos\theta\sin^6\theta$

$\sin 7\theta = 7_{c_1}\cos^6\theta\sin\theta - 7_{c_3}\cos^4\theta\sin^3\theta + 7_{c_5}\cos^2\theta\sin^5\theta - 7_{c_7}\sin^7\theta$

$\Rightarrow \cos 7\theta = \cos^7\theta - 21\cos^5\theta(1-\cos^2\theta) + 35\cos^3\theta(1-\cos^2\theta)^2 - 7\cos\theta(1-\cos^2\theta)^3$

$\sin 7\theta = 7(1-\sin^2\theta)^3\sin\theta - 35(1-\sin^2\theta)^2\sin^3\theta + 21(1-\sin^2\theta)\sin^5\theta - \sin^7\theta$

সরল করলে (*i*) ও (ii) পাওয়া যাবে।

(5) θ বাস্তব ও n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে $\cos^n\theta$ ও $\sin^n\theta$ কে কোসাইন ও সাইন এর θ -এর গুণিতক এর বিস্তৃতিতে প্রকাশ করুন।

ধরা যাক্ $z = \cos\theta + i\sin\theta$, সুতরাং $\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$

দ্য ময়ভারের উপপাদ্য অনুযায়ী $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$,

ফলে $\frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$ হবে।

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta,\ z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$$

$$(2\cos\theta)^n = \left(z + \frac{1}{z}\right)^n = z^n + n_{c_1}z^{n-2} + n_{c_2}z^{n-4} + \dots + n_{c_{n-2}}\frac{1}{z^{n-4}} + n_{c_{n-1}}\cdot\frac{1}{z^{n-2}} + \frac{1}{z^n}$$

$$= \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) + n_{c_1}\left(z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}\right) + n_{c_2}\left(z^{n-4} + \frac{1}{z^{n-4}}\right) + \dots$$

(যেহেতু $n_{c_r} = n_{c_{n-r}}, 0 \le r \le n$)

$$= 2\cos n\theta + n.\ 2\cos(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{2}\ 2\cos(n-4)\theta + \dots$$

$$\Rightarrow \cos^n \theta = \frac{1}{2^n}[2\cos n\theta + 2n\cos(n-2)\theta + n(n-1)\cos(n-4)\theta + \ldots]$$

$$(2i\sin\theta)^n = \left(z - \frac{1}{z}\right)^n = z^n + n_{c_1}(-z^{n-2}) + n_{c_2}(z^{n-4}) + \ldots$$

$$\ldots + n_{c_{n-1}}\left(+\frac{(-1)^{n-1}}{z^{n-2}}\right) + n_{c_n}\left(\frac{(-1)^n}{z^n}\right)$$

$$= \left(z^n + \frac{(-1)^n}{z^n}\right) - n\left(z^{n-2} - (-1)^{n-1}\frac{1}{z^{n-2}}\right) + \ldots$$

n যুগ্ম ও অযুগ্ম অনুযায়ী বিস্তৃতি পাওয়া যাবে।

(6) θ বাস্তব হলে দেখান যে

$$\sin^7 \theta = \frac{1}{2^6}(-\sin 7\theta + 7\sin 5\theta - 21\sin 3\theta + 35\sin\theta)$$

ধরা যাক্ $z = \cos\theta + i\sin\theta$, ফলে $\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$

$$\Rightarrow 2i\sin\theta = z - \frac{1}{z}, \qquad 2\cos\theta = z + \frac{1}{z}$$

$$(2i\sin\theta)^7 = \left(z - \frac{1}{z}\right)^7 = z^7 + 7_{c_1} z^6\left(-\frac{1}{z}\right) + 7_{c_2} z^5\left(-\frac{1}{z}\right)^2 + 7_{c_3} z^4\left(-\frac{1}{z}\right)^3 + 7_{c_4} z^3\left(-\frac{1}{z}\right)^4 +$$

$$7_{c_5} z^2\left(-\frac{1}{z}\right)^5 + 7_{c_6} z\left(-\frac{1}{z}\right)^6 + 7_{c_7}\left(-\frac{1}{z}\right)^7$$

$$= \left(z^7 - \frac{1}{z^7}\right) - 7\left(z^5 - \frac{1}{z^5}\right) + 21\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) - 35\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$= (\cos 7\theta + i\sin 7\theta - \cos 7\theta + i\sin 7\theta) - 7(2i\sin 5\theta)$$

$$+ 21(2i\sin 3\theta) - 35(2i\sin\theta)$$ [দ্য ময়ভারের উপপাদ্য প্রয়োগে।

$$\Rightarrow -i\,2^7\sin^7\theta = 2i\sin 7\theta - 7i\,2\sin 5\theta + 42\,i.\sin 3\theta - 70\,i\sin\theta$$

$$\Rightarrow 2^6\sin^7\theta = -\sin 7\theta + 7\sin 5\theta - 21\sin 3\theta + 35\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin^7\theta = \frac{1}{2^6}(-\sin 7\theta + 7\sin 5\theta - 21\sin 3\theta + 35\sin\theta)$$

(7) θ বাস্তব হলে দেখান যে

$$\sin^4\theta\cos^4\theta = \frac{1}{2^8}(2\cos 8\theta - 8\cos 4\theta + 6)$$

ধরা যাক $z = \cos\theta + i\sin\theta$, ফলে $\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$

$$\Rightarrow (2i\sin\theta)^4(2\cos\theta)^4 = \left(z - \frac{1}{z}\right)^4\left(z + \frac{1}{z}\right)^4$$

$$= \left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)^4 = z^8 - 4z^4 + 6 - \frac{4}{z^4} + \frac{1}{z^8}$$

$$= \left(z^8 + \frac{1}{z^8}\right) - 4\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 6$$

$= 2\cos 8\theta - 8\cos 4\theta + 6$ (দ্য ময়ভারের উপপাদ্য প্রয়োগে)

ফলে উক্ত সূত্রটি সত্য বলে প্রমাণিত হল।

(8) n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $(1 + z)^n = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n$ হলে দেখান যে

(i) $p_0 - p_2 + p_4 - \ldots = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$

(ii) $p1 - p_3 + p_5 - \ldots = 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$

প্রদত্ত বিস্তৃতি থেকে পাই

$$(1+i)^n = p_0 + p_1 i + p_2 i^2 + \ldots + p_n i^n$$

$$(p_0 - p_2 + p_4 - \ldots) + i(p_1 - p_3 + p_5 - \ldots)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$\Rightarrow (1 + i)^n = 2^{n/2}\left[\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right]$ (দ্য ময়ভারের উপপাদ্য অনুযায়ী)............(2)

(1) ও (2) থেকে পাই $p_o - p_2 + p_4 - \ldots = 2^{n/2}\cos\frac{n\lambda}{4}$,

$$p_1 - p_3 + p_5 - \ldots = 2^{n/2}\sin\frac{n\lambda}{4}$$

(9) যদি $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ (α, β, γ বাস্তব) হয়, দেখান যে (*i*) $\Sigma\cos 3\alpha = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ (ii) $\Sigma\sin 3\alpha = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$

(iii) $\Sigma\cos^2\alpha = \Sigma\sin^2\alpha = \frac{3}{2}$

ধরি $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$, $z = \cos\gamma + i\sin\gamma$

ফলে প্রদত্ত সূত্রানুসারে $x + y + z = 0$ এবং $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, দ্য ময়ভারের সূত্র প্রয়োগে,

$$\Sigma \cos 3\alpha + i\,\Sigma \sin 3\alpha = 3(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

$$= 3[\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma)]$$

$$\Rightarrow \Sigma \cos 3\alpha = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma),\ \Sigma \sin 3\alpha = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

আবার $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ বা $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$ কে লেখা যায়

$$\frac{xy + yz + zx}{xyz} = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = \Sigma\cos\alpha - i\Sigma\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx = 0$$

$$(x + y + z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow 0 = \Sigma \cos 2\alpha + i\,\Sigma \sin 2\alpha \Rightarrow \Sigma \cos 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \Sigma \cos^2\alpha = \Sigma \sin^2\alpha = \frac{3}{2}\ (\text{যেহেতু } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$$

(10) সমাধান করুন :

(i) $x^{12} - x^{11} + x^{10} - \ldots - x + 1 = 0$

(ii) $x^{11} + x^{10} + x^9 + \ldots + 1 = 0$

(i) $(x + 1)(x^{12} - x^{11} + x^{10} - \ldots - x + 1) = 0$

$$\Rightarrow x^{13} + 1 = 0 \Rightarrow x^{13} = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$\Rightarrow x^{13} = \cos(2k\pi + \pi) + i\sin(2k\pi + \pi)\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\Rightarrow x = [\cos(2k + 1)\pi + i\sin(2k + 1)\pi]^{1/13}\ (k = 0, 1, 2, \ldots, 12)$$

$$\Rightarrow x = \cos\frac{(2k + 1)\pi}{13} + i\sin\frac{(2k + 1)\pi}{13}\ (k = 0,1,2,\ldots,12)$$ (দ্য ময়ভারের উপপাদ্য প্রয়োগে)

$k = 6$ বাদে বাকীগুলি (i) -এর সমাধান হবে, কেননা $k = 6 \Rightarrow x = -1$ যা সমাধান নয়।

(ii) $(x - 1)(x^{11} + x^{10} + \ldots + x + 1) = 0$

$$\Rightarrow x^{12} - 1 = 0 \Rightarrow x^{12} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi\ (k = 0, 1, \ldots)$$

$$\Rightarrow x = \cos\frac{k\pi}{6} + i\sin\frac{k\pi}{6}\ (k = 0, 1, \ldots, 11)$$

$k = 0 \Rightarrow x = 1$, যা (ii) -এর সমাধান নয়।

ফলে (ii) -এর সমাধান $x = \cos\frac{k\pi}{6} + i\sin\frac{k\pi}{6}, (k = 1,\ldots,11)$

(11) n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে $z^n = (z + 1)^n$ সমাধান করুন।

লক্ষণীয় $z = 0, -1$ সমাধান নয়। ফলে

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^n = 1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi \ \ (k = 0, 1, ...)$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{z} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \ \ (k = 0, 1, ..., n-1)$$ (দ্য ময়ভারের সূত্র প্রয়োগে)

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1\right) + i\sin\frac{2k\pi}{n} = -2\sin^2\frac{k\pi}{n} + i2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n} \ \ (k = 0, 1, ..., n-1)$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2\sin\frac{k\pi}{n}\left(i\cos\frac{k\pi}{n} - \sin\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{i\cos\frac{k\pi}{n} + \sin\frac{k\pi}{n}}{-2\sin\frac{k\pi}{n}}$$

$$= \frac{-i}{2}\cot\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2} \ \ (k = 1, 2, ..., n-1)$$

কেননা, $k = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = 0$, যা গ্রাহ্য হতে পারে না।

সুতরাং, উক্ত সমীকরণের সমাধানগুলি $z = -\frac{i}{2}\cot\frac{k\pi}{n} - \frac{1}{2}$, $k = 1, 2, ,,,, n-1.$

(12) যদি $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ও $\sqrt{(1-a^2)} = na - 1$ হয় যেখানে α ও a বাস্তব, দেখান যে,

$$1 + a\cos\alpha = \frac{a}{2n}(1+nx)\left(1+\frac{n}{x}\right)$$

$x = \cos\alpha + i\sin\alpha \Rightarrow 2\cos\alpha = x + \frac{1}{x}$ হবে।

$\sqrt{(1-a^2)} = na - 1 \Rightarrow (1+n^2)a^2 = 2na \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{n}{(1+n^2)}$ (এখানে $a \neq 0$)

ডানপক্ষ $= \frac{a}{2n}\left(1 + nx + \frac{n}{x} + n^2\right)$

$$= \frac{a}{2}\left[\left(n+\frac{1}{n}\right) + \left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{2}{a} + 2\cos\alpha\right] = 1 + a\cos\alpha$$ = বামপক্ষ।

(13) n পূর্ণসংখ্যা হলে দেখান যে,

$$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2} - n\theta\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2} - n\theta\right)$$

$$\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}=\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+i\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2-i\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)+i\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)-i\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\left[\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)+i\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^2\Big/2$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2-\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+2i\cos\theta}{2}$$

$$=\frac{2\sin\theta+2i\cos\theta}{2}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

সুতরাং বামপক্ষ $=\cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)$ (দ্য ময়ভারের উপপাদ্য প্রয়োগে)

1.4 কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ জটিল রাশির অপেক্ষক ও তাদের ধর্মাবলী

(i) সূচক অপেক্ষক (Exponential function) :

যদি $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) হয় তবে $e^z = e^x.(\cos y + i\sin y)$ হবে

যদি $x = 0$ হয়, $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ (অয়লার (Euler)-এর সূত্র)

(ক) লক্ষণীয় $e^z = e^x.(\cos y + i\sin y)$

$$= e^x[\cos(2n\pi + y) + i\sin(2n\pi + y)]$$ (n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)

$$= e^{z+2n\pi i}$$

ফলে, e^z, $2\pi i$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক।

(খ) z_1 ও z_2 দুটি জটিল রাশি হলে

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \text{ হবে।}$$

কেননা $z_k = x_k + iy_k (k = 1, 2)$ হলে, (x_k, y_k বাস্তব রাশি)

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{x_1+x_2}.(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right] = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2} \text{ হবে}$$

(গ) z_1 ও z_2 দুটি জটিল রাশি হলে $e^{z_1} \div e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$ হবে

(উপরের ন্যায় একই পদ্ধতিতে এটি দেখানো যায়)

(ঘ) যদি z-কে মেরু আকারে প্রকাশ করা যায় যে, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $e^z = e^{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

যেহেতু r বাস্তব ও $r > 0$, $r = e^{\log r}$ হবে এবং $e^z = \exp(\log r + i\theta)$ হবে।

(ঙ) n পূর্ণসংখ্যা হলে, $(e^z)^n = e^{nz}$ হবে।

(চ) $e^z \neq 0$ এবং এই অপেক্ষকের বিস্তার মূলবিন্দু ব্যতীত সমগ্র জটিল তল।

উদাহরণ 1. সমাধান করুন : $e^z = -2$

$$e^z = -2 = 2[\cos(2n\pi + \pi) + i\sin(2n\pi + \pi)] \text{ (} n \text{ যেকোনো পূর্ণসংখ্যা)}$$

$$= 2\left[e^{(2n+1)\pi i}\right]$$

যদি $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) হয়,

$$e^x\cos y = 2\cos(2n+1)\pi,\ e^x\sin y = 2\sin(2n+1)\pi$$

$$\Rightarrow e^{2x} = 2^2 \Rightarrow 2x = 2\log 2 \Rightarrow x = \log 2$$

আরও $\cos y = \cos(2n+1)\pi$, $\sin y = \sin(2n+1)\pi$ $\Rightarrow y = \pi(2n+1)$ (n পূর্বে উল্লিখিত)

সুতরাং $z = x + iy = \log 2 + i.\pi(2n+1)$

2. সমাধান করুন : $e^z = 1 + i$

যদি $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) হলে

$$e^{x-iy} = 1+i \quad \Rightarrow e^x \cos y = 1, \ -e^x \sin y = 1$$

$$\Rightarrow e^{2x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\log 2$$

ফলে $e^x = \sqrt{2}$ (যেহেতু ধনাত্মক) এবং

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin y = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \left(2n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

অতএব $Z = \frac{1}{2}\log 2 + i\left(2n\lambda - \frac{\lambda}{4}\right); (n = 0,1,2......)$

(ii) লগারিদম অপেক্ষক (Logarithmic function) :

যদি z অ-শূণ্য জটিল রাশি হয়, তবে সকল সময়েই জটিল রাশি ω পাওয়া যাবে যে $e^{\omega} = z$ হবে। এই ω কে বলা হবে z-এর লগারিদম।

আগেই দেখানো হয়েছে যে, $e^{\omega} = e^{\omega+2n\pi i}$ যেখানে n পূর্ণসংখ্যা। লক্ষণীয় $e^{2n\pi i} = 1$

আমরা লিখব $\text{Log } z = \omega + 2n\pi i$, জটিল রাশির লগারিদম্ বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক।

মনে করি, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), -\pi < \theta \le \pi$

যদি $\omega = u + iv$ হয়, তবে $e^{\omega} = z$

$\Rightarrow e^u.(\cos v + i\sin v) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow e^u.\cos v = r\cos\theta, \ e^u.\sin v = r\sin\theta \Rightarrow r = e^u$ এবং $\cos v = \cos\theta$,

$\sin v = \sin\theta$

যেহেতু $\cos\theta$ ও $\sin\theta$ উভয়েই অভিন্ন 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক, ফলে $v = \theta + 2n\pi$, n পূর্ণসংখ্যা।

অতএব $\omega = \log r + i(\theta + 2n\pi), -\pi < \theta \le \pi$

এবং $\quad \text{Log } z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$

$\qquad\qquad\quad = \log |z| + i(\theta + 2n\pi)$

যদি $n = 0$ হয়, $\log z = \log|z| + i\theta, -\pi < \theta \le \pi$

এই $\log z$-কে 'z-এর লগারিদম্-এর মুখ্যমান' বলা হয়ে থাকে।

(ক) যদি z_1 ও z_2 দুটি ভিন্ন অ-শূণ্য জটিল রাশি হয়, তবে, (*i*) $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$ হবে কিন্তু $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$ না-ও হতে পারে।

(ii) $\text{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Log}z_1 - \text{Log}z_2$ তবে

$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$ না-ও হতে পারে।

ধরি, $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), k = 1, 2$

$\Rightarrow z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$

$\Rightarrow \mathrm{L}og(z_1z_2) = \log(r_1r_2)+i(\theta_1+\theta_2+2t\pi)$ যেখানে t পূর্ণসংখ্যা।

আবার, $\mathrm{L}og z_1 = \log r_1 + i(\theta_1+2m\pi)$ ও $\mathrm{L}og z_2 = \log r_2 + i(\theta_2+2n\pi)$

যেখানে m ও n পূর্ণসংখ্যা।

$$\mathrm{L}og z_1 + \mathrm{L}og z_2 = (\log r_1 + \log r_2) + i(\theta_1+\theta_2+2(m+n)\pi)$$

$$= \log(r_1r_2) + i(\theta_1+\theta_2+2p\pi)$$

p ও t যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা, $\mathrm{L}og z_1 + \mathrm{L}og z_2 = \mathrm{L}og(z_1z_2)$ হবে। একইভাবে (ii)-এর প্রথমাংশ $\mathrm{L}og\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{L}og z_1 - \mathrm{L}og z_2$ প্রমাণ করা যায়।

মনে করি, $z_1 = i$, $z_2 = -1$.

সংজ্ঞা অনুযায়ী, $\log z_1 = \log 1 + i\left(\frac{\pi}{2}\right) = i\frac{\pi}{2}$, $\log z_2 = \log 1 + i(\pi) = i\pi$

এবং $\log(z_1z_2) = \log 1 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

সুতরাং, $\log z_1 + \log z_2 = i.\frac{3\pi}{2}$, $\log(z_1z_2) = -i\frac{\pi}{2}$ সমান নয়।

যদি, $z_1 = -i, z_2 = -1$ হয়

$$\log z_1 = -\frac{\pi i}{2},\quad \log\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \log(-i) = \log 1 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{i.\pi}{2}$$

$$\log z_2 - \log z_1 = i\pi - \left(-\frac{i\pi}{2}\right) \neq \log\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

মন্তব্য : (ক)-এর বিবৃতিতে $z_1 \neq z_2$ নেওয়া হয়েছে। যদি $z_1 = z_2$ হয়, $\mathrm{L}og z_1 + \mathrm{L}og z_2 = 2\log r + i(2\theta_1 + 4p\pi)$ ।

কিন্তু $\mathrm{L}og(z_1z_2) = 2\log r + i(2\theta_1 + 2t\pi)$ হবে।

প্রথমোক্তটিতে π-এর সহগ 4 দ্বারা বিভাজ্য কিন্তু দ্বিতীয়টিতে π-এর সহগ 2 দ্বারা বিভাজ্য। ফলে দুটি সমান নয়।

(খ) z অ-শূণ্য জটিল রাশি ও m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে $\operatorname{Log} z^m \neq m \operatorname{Log} z$, $\operatorname{Log}(z^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m} \log z$

ধরি, $z = i$ ও $m = 2$, ফলে $\operatorname{Log} z^2 = \operatorname{Log}(-1)$ এবং $\operatorname{Log}(-1) = \log 1 + i(\pi + 2k\pi)$ (k = পূর্ণসংখ্যা)

কিন্তু $2 \operatorname{Log} i = 2\left(\log 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)\right)$ (m = পূর্ণসংখ্যা)

$$= i(\pi + 4m\pi)$$

সুতরাং, $\operatorname{Log}(i^2) = 2 \operatorname{Log} i$ নয়।

মনে করি, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^{\frac{1}{m}} = (r)^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{2k\pi + \theta}{m} + i\sin\frac{2k\pi + \theta}{m}\right]$, $k = 0, 1 = m - 1$ (দ্য ময়ভারের উপপাদ্য অনুযায়ী)

$$\Rightarrow \operatorname{Log} z^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\log r + i\left[\frac{2k\pi + \theta}{m} + 2p\pi\right] \quad (p : \text{পূর্ণসংখ্যা})$$

$$= \frac{1}{m}\log r + i\left[\frac{\theta}{m} + \frac{2(k + mp)}{m}\pi\right];\ k = 0, 1, \ldots, m - 1$$

লক্ষণীয় $k + mp$ যদৃচ্ছ পূর্ণসংখ্যা, ধরি, $k = mp = q$ (পূর্ণসংখ্যা)।

সুতরাং, $\operatorname{Log}\left(z^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\log r + i\left(\frac{\theta}{m} + \frac{2q\pi}{m}\right)$

অপরদিকে $\frac{1}{m}\operatorname{Log} z = \frac{1}{m}[\log r + i(\theta + 2n\pi)]$, n পূর্ণসংখ্যা

$$= \frac{1}{m}\log r + i\left(\frac{\theta}{m} + \frac{2n\pi}{m}\right)$$

যেহেতু q যদৃচ্ছ পূর্ণসংখ্যা, $\operatorname{Log}\left(z^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\operatorname{Log} z$ হবে।

(গ) x কোনো ঋণাত্মক বাস্তব রাশি হলে $\log x = \log(-x) + i\pi(2n + 1)$ যেখানে n পূর্ণসংখ্যা। এক্ষেত্রে $x = (-x)(-1) = -x[\cos(2k\pi + \pi) + i\sin(2k\pi + \pi)]$ যেখানে k পূর্ণ সংখ্যা। জটিল রাশির লগারিদমের সংজ্ঞা অনুযায়ী

$\operatorname{Log} x = \log(-x) + i(\pi + 2n\pi)$, n পূর্ণসংখ্যা হবে। অতএব x ঋণাত্মক বাস্তব রাশি হলে $\log x$ জটিল রাশি হবে।

(ঘ) $z = 0$ হলে $\operatorname{Log} z$ অ-সংজ্ঞাত।

উদাহরণ : $\text{Log}\dfrac{3-i}{3+i} = 2i\left[n\pi - \tan^{-1}\dfrac{1}{3}\right]$, n পূর্ণসংখ্যা।

বামপক্ষ $= \log\left|\dfrac{3-i}{3+i}\right| + i\,amp\left(\dfrac{3-i}{3+i}\right) + 2n\pi i$

$$= \log\left|\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right| + i\,amp\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right) + 2n\pi i \text{ ইত্যাদি।}$$

(iii) a^z-এর সংজ্ঞা ($a \neq 0$)

'a' অ-শূণ্য জটিল রাশি ও z জটিল রাশি হলে $a^z = e^{z\,\text{Log}\,a}$ দ্বারা সংজ্ঞাত হবে।

যেহেতু Log a বহুমানবিশিষ্ট, a^z-ও বহুমানবিশিষ্ট অপেক্ষক। Log a-এর মুখ্যমানের জন্য a^z-এর মুখ্যমান পাওয়া যাবে।

ধরি, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) ও $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r, \theta \in \mathbb{R}$ ও $-\pi < \theta \leq \pi$

ফলে z Log $a = (x + iy)\,[\log r + i(2n\pi + \theta)]$ (n পূর্ণসংখ্যা)

$$= [x \log r - y(2n\pi + \theta)] + i[y \log r + x(2n\pi + \theta)]$$

অতএব $a^z = e^{[x\log r - y(2n\pi+\theta)]}\{\cos k + i\sin k\}$ যেখানে $k = y \log r + x(2n\pi + \theta)$

$n = 0 \Rightarrow a^z$-এর মুখ্যমান $= e^{(x\log r - y\theta)}.\{\cos t + i\sin t\}$ যেখানে $t = y\log r + x\theta$

নিম্ন সূত্রগুলি প্রযোজ্য হবে :

(ক) z_1, z_2 ও a জটিল রাশি এবং $a \neq 0$ হলে, $a^{z_1}.a^{z_2} \neq a^{z_1+z_2}$

তবে (a^{z_1} -এর মুখ্যমান) (a^{z_2} -এর মুখ্যমান) = ($a^{z_1+z_2}$ -এর মুখ্যমান) হবে।

(খ) z, a, b জটিল রাশি এবং $ab \neq 0$ হলে $(ab)^z = a^z b^z$

কিন্তু $(ab)^z$-এর মুখ্যমান $\neq$ (a^z-এর মুখ্যমান) (b^z-এর মুখ্যমান)

a, z জটিল রাশি ও $a \neq 0$ হলে $\text{Log } a^z = z \text{ Log } a + 2n\pi i$ যেখানে n পূর্ণসংখ্যা।

উদাহরণ **1.** i^i-এর সকল মান বাস্তব হবে।

$$i^i = e^{i \text{Log} i} \text{ (সংজ্ঞানুযায়ী)}$$

$$i \,\text{Log}\, i = i\left[\log 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] \text{ (n = পূর্ণসংখ্যা)}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

ফলে $i^i = e^{-(4n+1)\frac{\pi}{2}}, n$ পূর্ণসংখ্যা।
এগুলি বাস্তব সংখ্যা।

2. $(-1)^{\sqrt{2}}$-এর সাধারণ মান ও মুখ্যমান নির্ণয় করুন।

সংজ্ঞানুযায়ী $(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\text{Log}(-1)}$

$$\text{Log }(-1) = \log 1 + i\pi(2n+1) \text{ (n = পূর্ণসংখ্যা)}$$

ফলে $(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}.i\pi(2n+1)}$

$$= \cos\left\{\sqrt{2}\pi(2n+1)\right\} + i\sin\left\{\sqrt{2}\pi(2n+1)\right\}$$

(3) $(1+i)^i$-এর মুখ্যমান নির্ণয় করুন।

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

মুখ্যমান $\log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{i\pi}{4}$

অতএব $(1+i)^i$-এর মুখ্যমান $= e^{i\log(1+i)}$

$$= e^{\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\log 2\right]}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}}.\left[\cos\left(\frac{1}{2}\log 2\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\log 2\right)\right]$$

(iv) জটিল চলের বৃত্তীয় অপেক্ষক (Circular function of a complex variable) :

যদি z জটিল রাশি হয়, $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$, $\operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{\sin z}$ হবে।

লক্ষণীয় $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ (অয়লারের সূত্র) হবে।

নিম্ন সূত্রগুলি সহজেই নির্ণীত হবে :

(ক) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

(খ) $\sin(z+2\pi) = \sin z, \cos(z+2\pi) = \cos z$

(গ) $\sin(z+\pi) = -\sin z, \cos(z+\pi) = -\cos z, \tan(z+\pi) = \tan z$

এগুলি সংজ্ঞার সাহায্যে নিরূপণ করা যায়।

(ঘ) z_1 ও z_2 জটিল রাশি হলে,

$$\left.\begin{array}{l}\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1 \\ \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2\end{array}\right\} \text{ এবং } \tan(z_1+z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1-\tan z_1 \tan z_2}$$

$$\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 = \left(\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left[e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_2+z_1)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right] = \sin(z_1+z_2)$$

বাকী সূত্রগুলিও অনুরূপ পদ্ধতিতে নির্ণীত হবে।

বিকল্প পদ্ধতি : $\cos(z_1 - z_2) = \dfrac{1}{2}\left[e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{iz_1}.e^{-iz_2} + e^{-iz_1}.e^{iz_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2) + (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2)\right]$$

$$= \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$$ (সরল করে পাই)

(ঙ) x ও y বাস্তব হলে

(i) $\sin(x \pm iy) = \sin x \cosh y \pm i \cos x \sinh y$

(ii) $\cos(x \pm iy) = \cos x \cosh y \mp i \sin x \sinh y$

[y বাস্তব বলে $\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$]

$$\sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}.e^{-y} - e^{-ix}.e^{y}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y}.(\cos x + i\sin x) - e^{y}.(\cos x - i\sin x)}{2i}$$

$$= \frac{\sin x(e^y + e^{-y})}{2} + \frac{\cos x(e^{-y} - e^{y})}{2i}$$

$$= \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$$

$$\cos(x-iy) = \frac{e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}}{2} = \frac{e^{y}.e^{ix} + e^{-y}.e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{e^{y}.(\cos x + i\sin x) + e^{-y}(\cos x - i\sin x)}{2}$$

$$= \frac{\cos^{x}(e^y + e^{-y})}{2} + \frac{i\sin x(e^y - e^{-y})}{2}$$

$$= \cos x \cosh y + i\sin x \sinh y$$

(চ) x ও y বাস্তব হলে,

$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$, $|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$ (যাচাই করে দেখুন)

(ছ) z জটিল রাশি হলে, $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$, $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$ হবে। ফলে $\tan \bar{z} = \overline{\tan z}$ হবে।

(v) z জটিল রাশি হলে, $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},\ \text{Sech}\ z = \frac{1}{\cosh z}$$

$$\text{cosech}\ z = \frac{1}{\sinh z}$$ হবে।

(ক) z জটিল রাশি হলে (যাচাই করুন)

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,\ e^z = \cosh z + \sinh z,\ e^{-z} \cosh z - \sin z$$

(খ) z_1, z_2 জটিল রাশি হলে

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{2}$$

$$= \frac{e^{z_1}.e^{z_2} + e^{-z_1}.e^{-z_2}}{2}$$

$$= \frac{(\cosh z_1 + \sinh z_1)(\cosh z_2 + \sinh z_2) + (\cosh z_1 - \sinh z_1)(\cosh z_2 - \sinh z_2)}{2}$$

$= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$ অনুরূপভাবে বাকীগুলি নির্ণয় করুন।

(গ) z জটিল রাশি হলে

$$\cos(iz) = \cosh z,\ \ \sin(iz) = i \sinh z$$

$$\cosh(iz) = \cos z,\ \sinh(iz) = i \sin z$$

সংজ্ঞা থেকে এগুলি নিরূপণ করুন।

z জটিল রাশি হলে $\cosh(z + 2k\pi i) = \cosh z$,

$\sinh(z + 2k\pi i) = \sinh z$, $\cosh(z + k\pi i) = (-1)^k \cosh z$,

$\sinh(z + k\pi i) = (-1)^k \operatorname{Sinh} z$ যেখানে z যেখানে k পূর্ণসংখ্যা।

ফলে $\sinh z$, $\cosh z$-কে $2\pi i$ পর্যায়ের ও $\tanh z$-কে πi পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষরকরূপে গণ্য করা হয়।

উদাহরণ **1. সমাধান করুন : $\cos z = 2$**

সংজ্ঞা থেকে $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$

$\Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$, যেখানে $t = e^{iz}$

$\Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$

$e^{iz} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow z = -i \operatorname{Log}\left(2 + \sqrt{3}\right)$

$$= -i\left[\log\left(2 + \sqrt{3}\right) + 2m\pi i\right]$$

$$= 2n\pi - i\log\left(2 + \sqrt{3}\right),\ n \text{ পূর্ণসংখ্যা}$$

$e^{iz} = 2 - \sqrt{3} \quad \Rightarrow z = -i\log\left(2 - \sqrt{3}\right)$

$$= -i\left[\log\left(2 - \sqrt{3}\right) + 2m\pi i\right]$$

$$= -i\log\left[\frac{4-3}{2+\sqrt{3}}\right] + 2m\pi$$

$$= 2m\pi + i\operatorname{Log}\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

ফলে $z = 2p\pi \pm i\log\left(2 + \sqrt{3}\right)$, p পূর্ণসংখ্যা।

2. সমাধান করুন : $\cosh z = 2i$

$$\Rightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 2i \Rightarrow t^2 - 4it + 1 = 0,\ t = e^z$$

$$\Rightarrow t = \left(2 \pm \sqrt{5}\right)i \Rightarrow z = \operatorname{Log}\left[\left(2 \pm \sqrt{5}\right)i\right]$$

$\Rightarrow (i)\ z = \log\left(2+\sqrt{5}\right) + i.\frac{\pi}{2} + 2n\pi i\ \ (n = \text{পূর্ণসংখ্যা})$

$(ii)\ z = \log\left(\sqrt{5}-2\right) + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2n\pi i\ \ (n = \text{পূর্ণসংখ্যা})$

অতএব $z = \log\left(\sqrt{5} \pm 2\right) + \left(2n \pm \frac{1}{2}\right)i\pi$, n = পূর্ণসংখ্যা

3. যদি $x, y, a, b, \in \mathbb{R}$ ও $\tan\log(x+iy) = a+ib$, $a^2+b^2 \neq 1$ হয়, দেখান যে,

$$\tan\log(x^2+y^2) = \frac{2a}{1-a^2-b^2}$$

প্রদত্ত শর্ত থেকে পাই, $\tan\log(x-iy) = a-ib$

$$\therefore\ \tan\{\log(x+iy)+\log(x-iy)\} = \frac{a+ib+a-ib}{1-(a^2+b^2)}$$

$$\Rightarrow\ \tan\log(x^2+y^2) = \frac{2a}{1-a^2-b^2}$$

4. যদি $\tan\left(i\log\frac{x-iy}{x+iy}\right) = 2$ যেখানে $x, y \in R$ হয়, তবে $x^2-y^2 = xy$ হবে।

ধরি, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

বামপক্ষ $= \tan\left(i\log\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}\right) = \tan(i(-2i\theta))\ = \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{\frac{2y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

অতএব $\tan\left(i\log\frac{x-iy}{x+iy}\right) = 2$ থেকে পাই, $x^2-y^2 = xy$

5. যদি $\tan(x-iy) = u-iv$, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, দেখান যে, $u^2+v^2+2u\cot 2x = 1$

প্রদত্ত শর্ত থেকে পাই, $\tan(x+iy) = u+iv$

$$\tan 2x = \tan\{(x+iy)+(x-iy)\}$$

$$= \frac{\tan(x+iy)+\tan(x-iy)}{1-\tan(x+iy)\tan(x-iy)} = \frac{2u}{1-(u^2+v^2)}$$

$$\Rightarrow u^2+v^2+2u\cot 2x = 1$$

6. দেখান যে, $\sin(\log i^i) = -1$

আগেই প্রমাণিত হয়েছে যে, $\mathrm{Log}(i^i) = -\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$ যেখানে n পূর্ণসংখ্যা।

ফলে $\sin(\log^{i^i}) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ($n=0$ বসিয়ে)

$$= -\sin\frac{\pi}{2} = -1.$$

7. সমাধান করুন : $\sin z = 0$

মনে করি, $z = x+iy$ যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$

ফলে $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0$

$\Rightarrow \sin x \cosh y = 0 = \cos x \sinh y$

$\cosh y = \frac{e^y+e^{-y}}{2} \neq 0$, অতএব $\sin x = 0$ হবে।

ফলে $\cos x \neq 0$ এবং $\sinh y = 0$ হবে।

ফলে $e^y = e^{-y} \Rightarrow y = 0$ আবার, $\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$ যেখানে n পূর্ণসংখ্যা। সুতরাং $z = n\pi$, n পূর্ণসংখ্যা।

8. z জটিল রাশি হলে দেখান যে, $\tan z = \frac{\sin 2z}{1+\cos 2z}$

$$2\sin z\cos z = \frac{2\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)}{2i}\cdot\frac{2\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}{2}$$

$$= \frac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{2i} = \sin 2z$$

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \frac{\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^2}{4} + \frac{\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)^2}{4}$$

$$= \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} = \cos 2z$$

সুতরাং $\dfrac{\sin 2z}{1+\cos 2z} = \dfrac{2\sin z \cos}{2\cos^2 z} = \tan z$

(vi) বিপরীত অপেক্ষক :

ধরি, z প্রদত্ত জটিল রাশি এবং ω এমন জটিলরাশি যে $\sin \omega = z$ হয়। সেক্ষেত্রে ω-কে $\sin z$-এর বিপরীত অপেক্ষক বলা হবে।

$$\sin \omega = z \Rightarrow \cos \omega = \pm \sqrt{(1-z^2)}$$

ফলে $e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega = \pm\sqrt{(1-z^2)} + iz$

$$\Rightarrow \omega = -i\,\mathrm{Log}\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) = \mathrm{Sin}^{-1} z$$

মুখ্যমান $\sin^{-1} z = -\log\left(iz + \sqrt{(1-z^2)}\right)$

অনুরূপভাবে $\mathrm{Cos}^{-1} z = -i\log\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\right)$ ও

মুখ্যমান $\cos^{-1} z = -i\log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)$ বলা হবে।

উদাহরণ 1. (1) $\mathrm{Cos}^{-1} i$ ও $\cos^{-1} i$ নির্ণয় করুন।

মনে করি, $\mathrm{Cos}^{-1} i = z \Rightarrow e^{iz} = \cos z + i\sin z = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)i$

$$e^{iz} = \left(1+\sqrt{2}\right)i \Rightarrow z = -i\log\left(\sqrt{2}+1\right)i$$

$$= -i\left[\log\left(\sqrt{2}+1\right) + i.\frac{\pi}{2} + 2n\pi i\right]$$

$$= \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - i\log\left(\sqrt{2}+1\right) \quad (n = \text{পূর্ণসংখ্যা})$$

অনুরূপভাবে $e^{iz} = \left(1-\sqrt{2}\right)i \Rightarrow z = 2n\pi - \dfrac{\pi}{2} - i\log\left(\sqrt{2}-1\right)$

$$= 2n\pi - \frac{\pi}{2} + i\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

সুতরাং $\mathrm{Cos}^{-1} i = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - i\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$

মুখ্যমান $\cos^{-1} i = \frac{\pi}{2} - i\log\left(\sqrt{2}+1\right)$

2. $\sinh \omega = z$ হলে দেখান যে,

$$\omega = \log\left(z \pm \sqrt{(z^2+1)}\right)$$

$$\begin{aligned}\sinh\omega = z &\Rightarrow e^{\omega} - e^{-\omega} = 2z \\ &\Rightarrow e^{2\omega} - 2ze^{\omega} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^{\omega} = z \pm \sqrt{(z^2+1)} \\ &\Rightarrow \omega = \log\left(z \pm \sqrt{(z^2+1)}\right) = \sinh^{-1} z\end{aligned}$$

(অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $\cosh^{-1} z = \log(z \pm \sqrt{(z^2-1)})$)

1.5 সারাংশ

এই এককে কাল্পনিক বা জটিল রাশির সংজ্ঞা ও তার মৌলিক বীজগাণিতিক ধর্ম, দ্য ময়ভারের উপপাদ্য ও প্রয়োগ, z জটিল রাশি হলে e^z, $z \neq 0$ হলে $\log z$, $a^z (a \neq 0)$, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, $\sin^{-1}z$, $\cos^{-1}z$, $\sinh^{-1}z$, $\cosh^{-1}z$ ইত্যাদি জটিল চলরাশির অপেক্ষকগুলির বীজগাণিতিক মৌলিক ধর্মসমূহ আলোচিত হয়েছে।

1.6 প্রশ্নাবলী

(1) যদি $a = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$, $b = \cos 2\beta + i \sin 2\beta$

$c = \cos 2\gamma + i \sin 2\gamma$, $d = \cos 2\delta + i \sin 2\delta$ হয়, যেখানে $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ বাস্তব, দেখান যে,

(i) $\sqrt{abcd} + \frac{1}{\sqrt{abcd}} = 2\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

(ii) $\sqrt{\frac{ab}{cd}} + \sqrt{\frac{cd}{ab}} = 2\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

(2) মান নির্ণয় করুন :

$$(i)\ (1-i)^{\frac{1}{9}} \quad \text{(ii)}\ \left(1+i\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{7}} \quad \text{(iii)}\ (-i)^{\frac{3}{4}}$$

(3) দেখান যে, $\cos 8\theta = 128\cos^8\theta - 256\cos^6\theta + 160\cos^4\theta - 32\cos^2\theta + 1$ (θ বাস্তব)

(4) দেখান যে, θ বাস্তব হলে,

$$\sin^9\theta = \frac{1}{2^8}\ (\sin 9\theta - 9\sin 7\theta + 36\sin 5\theta - 84\sin 3\theta + 126\sin\theta)$$

(5) দেখান যে, $\mathrm{Log}\,(-3) = \log 3 + (2n+1)\pi i$, n পূর্ণসংখ্যা।

(6) $(1-i)^{(1+i)}$ -এর সাধারণ মান ও মুখ্য মান নির্ণয় করুন।

(7) যদি $i^{p+iq} = p + iq$ হয়, দেখান যে,

$$p^2 + q^2 = e^{-(4n+1)\pi q},\ n \text{ পূর্ণসংখ্যা।}$$

(8) দেখান যে, θ বাস্তব হলে, $\dfrac{1+(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{1+(\cos\theta - i\sin\theta)^4} = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

(9) a, b বাস্তব হলে দেখান যে, $\sin\left(i\log\dfrac{a-ib}{a+ib}\right) = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

(10) z_1, z_2 জটিল রাশি হলে sin ও cos-এর সংজ্ঞা থেকে দেখান যে,

$$\sin z_1 + \sin z_2 = 2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\cos\frac{z_1-z_2}{2}$$

(11) দেখান যে, $\cos\left(\log i^i\right) = 0$

(12) সমাধান করুন $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

(13) দেখান যে, $\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i} = \sqrt{3}$ ($\sqrt[3]{z}$ -এর মুখ্যমান নিয়ে)

(14) সমাধান করুন : $e^z = -1$.

(15) দ্য ময়ভার উপপাদ্যর প্রয়োগে দেখান যে,

$$\tan 4\theta = \frac{4\tan\theta - 4\tan^3\theta}{1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta}$$

(16) সংজ্ঞার সাহায্যে সমাধান করুন : $\cosh z = -2$

1.7 উত্তরের সংকেত

(1) $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdots(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) = \cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)$ সূত্রটি প্রয়োগ করুন ও পরে দ্য ময়ভারেরউপপাদ্য প্রয়োগ করুন।

(2) (*i*) $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

(ii) $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

দ্য ময়ভারের সূত্র প্রয়োগ করুন ও উভয় ক্ষেত্রে k-এর মানগুলি উল্লেখ করুন।

(3) $(\cos\theta + i\sin\theta)^8 = \cos 8\theta + i\sin 8\theta$

(4) $(\cos\theta + i\sin\theta) = z$ ধরলে $z - \frac{1}{z} = 2i\sin\theta$ এবং $(2i\sin\theta)^9 = \left(z - \frac{1}{z}\right)^9$

(5) $-3 = 3[\cos(2k\lambda + \pi) + i\sin(2k\pi + \pi)]$ বা সরাসরি Log z-এর সূত্র প্রয়োগ করুন।

(6) ও (7) a^z-এর নির্ধারিত সংজ্ঞা প্রয়োগ করুন।

(8) দ্য ময়ভারের উপপাদ্য প্রয়োগ করুন।

(9) $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ (r ও θ বাস্তব)

(10) সংজ্ঞা প্রয়োগ করুন।

(11) i^i-এর সূত্রটি ব্যবহার করুন।

(12) $x - 1$ দিয়ে গুণ করে তারপর সমাধান করুন।

(13) $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$-এর পর দ্য ময়ভার উপপাদ্য প্রয়োগ করুন।

(14) e^z-এর সংজ্ঞা ব্যবহার করুন।

(15) $(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$ কাজে লাগান।

একক 2 ☐ বহুপদ রাশি ও সমীকরণের তত্ত্ব (Polynomial and Theory of Equation)

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

বীজগাণিতিক সমীকরণের সমাধানের সম্ভাবনা খতিয়ে দেখা ও সমাধানযোগ্য হলে সেগুলি সমাধান করা বীজগণিতের অন্যতম মুখ্য আলোচ্য বিষয়। এই এককে বীজগাণিতিক সমীকরণের সমাধান সম্ভব এ ধরণের বীজগাণিতিক কাঠামোয় আমরা ওই ধরণের সমীকরণসমূহের সমাধার পথে প্রয়াসী হবো। শর্তাধীনে সমীকরণের সমাধান, প্রদত্ত সমীকরণের রূপান্তরের ভিত্তিতে অন্য সমীকরণ নির্ণয় করা, সমীকরণের বীজের চিহ্ন ও চরিত্রের ইঙ্গিতবাহী কিছু তত্ত্ব ও তার প্রয়োগ, ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান এই এককের মুখ্য আলোচ্য বিষয়।

2.2 বহুপদরাশি সম্পর্কিত প্রারম্ভিক আলোচনা

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ আকারের একটি রাশিমালাকে যেখানে x চলরাশি ও $a_0, a_1, \ldots, a_n$ সাধারণভাবে জটিল রাশি, বিশেষক্ষেত্রে বাস্তব রাশি ও x-নিরপেক্ষ, বহুপদ রাশি বলা হয়ে থাকে।

$a_n \neq 0$ হলে ওই বহুপদরাশির ঘাত n বলা হয়ে থাকে।

দুটি একই ঘাত বিশিষ্ট বহুপদরাশি $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ও $b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$-কে সমান বলা হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি সকল k-এর জন্য $a_k = b_k$ হয়।

বহুপদরাশিসমূহের যোগফল ও গুণফল :

মনে করি, $a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$, $(a_p \neq 0)$

ও $b(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$, $(b_q \neq 0)$ দুটি বহুপদরাশি যেখানে সমস্ত a_j ও b_k জটিল রাশি।

যদি $p \leq q$ হয়, তবে $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_p + b_p)x^p +$

$$b_{p+1}x^{p+1} + \cdots + b_q x^q = a(x) + b(x)$$

এবং $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_p - b_p)x^p - b_{p+1}x^{p+1} - \cdots - b_q x^q = a(x) - b(x)$ হবে।

$p > q$ হলেও অনুরূপভাবে $a(x) \pm b(x)$ সংজ্ঞাত হবে।

ওই দুটি বহুপদরাশির গুণফল $a(x)\ b(x)$ বলতে বুঝায় $c_0 + c_1 x + \cdots + c_{p+q}x^{p+q}$ যেখানে সহগ $c_r = \sum_{i+j=r} a_i b_j$ হবে। অর্থাৎ $c_0 = a_o b_0$, $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$, $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_1$ ..., $c_{p+q} = a_p b_q$ হবে। লক্ষণীয় $a(x) \pm b(x)$-এর ঘাত $\leq$ সর্বোচ্চ $\{p, q\}$ ও $a(x)\ b(x)$-এর ঘাত $= p + q$ হবে।

সহজেই দেখানো যায় বহুপদরাশি সমূহের যোগফল, গুণফল যোগ ও গুণন প্রক্রিয়া সাপেক্ষে বিনিময় ধর্ম ও সংযোগধর্ম এবং দুটি প্রক্রিয়ার জন্য বণ্টন ধর্ম মেনে চলে।

আরও যদি $a(x)\ b(x) = 0$ হয়, $a(x) = 0$ বা $b(x) = 0$ হবে। যদি $a(x)\ b(x) = a(x)\ c(x)$ যেখানে $a(x) \neq 0$, তবে $b(x) = c(x)$ হবে।

বহুপদরাশি সমূহের ভাগফল :

পূর্বোক্ত $a(x)$ ও $b(x)$-এর ক্ষেত্রে ধরি $p \leq q$, সেক্ষেত্রে দুটি অনন্য বহুপদরাশি $q(x)$ ও $r(x)$-এর অস্তিত্ব আছে যে,

$$b(x) = a(x)\ q(x) + r(x)$$

যেখানে $q(x)$-এর ঘাত $q - p$ এবং $r(x)$-এর ঘাত শূণ্য (অর্থাৎ $r(x)$ ধ্রুবক সংখ্যা) অথবা p-এর চেয়ে ছোটো হবে।

ভাগশেষ উপপাদ্য : কোনো বহুপদ রাশি $a(x)$-কে $x - h$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $a(h)$, $h \geq 0$. অতএব $a(h) = 0$ হলে $a(x)$, $x - h$ দ্বারা বিভাজ্য হবে বা $x - h$, $a(x)$-এর উৎপাদক হবে।

সংশ্লেষণ ভাগ :

মনে করি, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,\ a_0 \neq 0$, একটি n-ঘাতবিশিষ্ট বহুপদরাশি। এই বহুপদ রাশিকে $x - h$ দ্বারা ভাগ করলে $(n-1)$ ঘাতবিশিষ্ট বহুপদ রাশি $q(x)$ ও শূণ্য ঘাতবিশিষ্ট R পাওয়া যাবে যে, $f(x) = (x - h)\ q(x) + R$ হবে। সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে $q(x)$ ও R নিম্নভাবে নির্ণয় করা যায় :

$$
\begin{array}{cccccc c}
h & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
 & & a_0h & b_1h & \cdots & b_{n-2}h & b_{n-1}h \\
\hline
 & a_0 & a_1 + a_0h & a_2 + b_1h & & a_{n-1} + b_{n-2}h & a_n + b_{n-1}h \\
 & (= b_0) & (= b_1) & (= b_2) & & (= b_{n-1}) & (= b_n)
\end{array}
$$

আমরা লিখব $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$ এবং $R = a_n + b_{n-1}h$

উদাহরণ : $x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 11$-কে সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল ও ভাগশেষ কী হবে নির্ণয় করুন।

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 5 & 1 & 5 & 2 & 11 \\
-2 & & -2 & -6 & 10 & -30 & 56 \\
\hline
 & 1 & 3 & -5 & 15 & -28 & 67
\end{array}
$$

ভাগফল $= x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 15x - 28$, ভাগশেষ $= 67$.

সংশ্লেষণ ভাগ পদ্ধতিতে চলের পরিবর্তন :

সংশ্লেষণ ভাগ পদ্ধতিতে বহুপদ রাশি

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,\ a_0 \neq 0$-কে $(x - h)$-এর n-ঘাত বিশিষ্টবহুপদ রাশি রূপে প্রকাশ করা যায়।

(1) ধরি, $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x + 7$-কে $(x - 1)$-এর ঘাতবিশিষ্ট বহুপদরাশিতে প্রকাশ করতে হবে।

$$
\begin{array}{l ccccc}
 & 1 & -4 & 3 & 3 & 7 \\
h = 1 & & 1 & -3 & 0 & 3 \\
\hline
 & 1 & -3 & 0 & 3 & \fbox{10} \\
 & & 1 & -2 & -2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -2 & \fbox{1} & \\
 & & 1 & -1 & & \\
\hline
 & 1 & -1 & \fbox{-3} & & \\
 & & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & \fbox{0} & & &
\end{array}
$$

অতএব $f(x) = 1(x-1)^4 + 0(x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 1(x-1) + 10$

$$= (x-1)^4 - 3(x-1)^2 + (x-1) + 10$$

2. $x^5 - 5x^4 + 12x^2 - 1$-কে $(x - 1)$-এর ঘাতবিশিষ্ট বহুপদরাশিতে প্রকাশ করুন।

	1	–5	0	12	0	–1
$h = 1$		1	–4	–4	8	8
	1	–4	–4	8	8	7
		1	–3	–7	1	
	1	–3	–7	1	9	
		1	–2	–9		
	1	–2	–9	–8		
		1	–1			
	1	–1	–10			
		1				
	1	0				

ফলে আমরা পাই, $(x-1)^5 + 0(x-1)^4 - 10(x-1)^3 - 8(x-1)^2 + 9(x-1) + 7$

অর্থাৎ $(x-1)^5 - 10(x-1)^3 - 8(x-1)^2 + 9(x-1) + 7$ λ:স

2.3 বীজগাণিতিক সমীকরণের তত্ত্ব

ধরি, $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p (a_p \neq 0)$ একটি বহুপদরাশি। যদি এমন জটিল রাশি (বিশেষ ক্ষেত্রে বাস্তব রাশি) k পাওয়া যায় যে $a(k) = 0$, সেক্ষেত্রে k-কে সমীকরণ $a(x) = 0$-এর একটি বীজ বলা হবে। উল্লেখ্য, $a(x) = 0$ একটি p ঘাতবিশিষ্ট বীজগাণিতিক সমীকরণ। বিষয়টি ব্যাখ্যার জন্য নিম্ন উদাহরণ দুটি বিবেচ্য।

উদাহরণ 1. দেখান যে, $x^{100} - 2x^{98} + 1 = 0$-এর একটি বীজ হল 1.

প্রদত্ত বহুপদরাশিটিকে $x - 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ উপপাদ্যর সাহায্যে ভাগশেষ হল

$1^{100} - 2(1)^{98} + 1 = 0$, অতএব 1 একটি বীজ হবে।

2. n-এর এমন কোনো মান আছে কী যাহার জন্য $x^4 + 4x^3 + n = 0$ সমীকরণের একটি বীজ হবে -2?

প্রদত্ত বহুপদ রাশিটিকে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ উপপাদ্যর সাহায্যে ভাগশেষ হল

$(-2)^4 + 4(-2)^3 + n = n - 16$, এতএব $n = 16$ হলে -2 উক্ত সমীকরণ $x^4 + 4x^3 + n = 0$-এর একটি বীজ হবে।

2.3.1 বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য ও অনুসারী তত্ত্বসমূহ

মৌলিক উপপাদ্য : প্রতিটি বীজগাণিতিক সমীকরণের অন্তত একটি বীজ, বাস্তব বা কাল্পনিক আছে।

মৌলিক উপপাদ্যটির অনুসারী তত্ত্ব হিসাবে নিম্নোক্তটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ :

n ঘাত বিশিষ্ট বীজগাণিতিক সমীকরণের সুনির্দিষ্টভাবে n সংখ্যক বীজ আছে।

প্রমাণ : ধরি, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

প্রদত্ত বহুপদরাশি, যেখানে $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ জটিল রাশি (ক্ষেত্রবিশেষে কোনটি বাস্তব হতে পারে) ও $a_n \neq 0$, ফলে $f(x) = 0$ একটি n ঘাতবিশিষ্ট বীজগাণিতিক সমীকরণ।

উক্ত মৌলিক উপপাদ্য অনুযায়ী $f(x) = 0$-এর অন্তত একটি বীজ আছে α_1, অতএব $f(\alpha_1) = 0$ এবং ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী $x - \alpha_1$, বহুপদরাশি $f(x)$ এর উৎপাদক, ধরি $f(x) = (x - \alpha_1)f_1(x)$। $f_1(x)$ এর ঘাত $n - 1$ হবে।

আবার মৌলিক উপপাদ্য অনুযায়ী, $f_1(x) = 0$ এর অন্তত একটি বীজ থাকবে, মনে করি α_2। $f_1(\alpha_2) = 0 \Rightarrow x - \alpha_2$, $f_1(x)$-এর একটি উৎপাদক। আমরা পাই $f_1(x) = (x - \alpha_2)f_2(x)$, যেখানে $f_2(x)$ একটি $(n - 2)$ ঘাতবিশিষ্ট বহুপদরাশি। এই প্রক্রিয়ার পুনরাবৃত্তির ফলে আমরা পাব

$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_{n-1}) f_{n-1}(x)$ যেখানে $f_{n-1}(x)$-এর ঘাত 1

$f_{n-1}(x) = 0$ এর বীজ ধরি α_n, অতএব $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_1)$ ধ্রুবক

ফলে $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ভিন্ন অন্য কোনও মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে না। অতএব $f(x) = 0$ এর সুনির্দিষ্টভাবে n সংখ্যক বীজ আছে।

আবার লক্ষণীয় $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$ এর গুণফলে x^n এর সহগ 1 এবং $f(x)$-এ x^n-এর সহগ a_n, ফলে ধ্রুবকটি a_n হবে।

অনুসিদ্ধান্ত : $f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$

অতএব $(x - \alpha_1)(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n) = x^n + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_n}x + \dfrac{a_0}{a_n}$ হবে।

মন্তব্য : যদি $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ হয়, তবে α-কে উক্ত সমীকরণের দ্বিবীজ বলা হবে। অনুরূপভাবে $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ হলে α হবে ত্রিবীজ। $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = \alpha$ $(r \leq n)$ হলে α হবে r-ঘাত বিশিষ্ট বীজ।

নিম্ন উপপাদ্য দুটি প্রয়োগের নিরিখে অতীব গুরুত্বপূর্ণ

(1) ধরা যাক $f(x) = 0$ বাস্তব সহগবিশিষ্ট বহুপদ সমীকরণ। x-এর দুটি বাস্তব মান a ও b $(a \neq b)$-এর জন্য $f(a)f(b) < 0$ হলে, a ও b-এর মধ্যে সমীকরণটির অযুগ্ম সংখ্যক বাস্তব বীজ থাকবে। যদি $f(a)f(b) > 0$ হয়, a ও b-এর মধ্যে হয় সমীকরণটির কোন বীজ থাকবে না নতুবা যুগ্ম সংখ্যক বীজ থাকবে।

(2) $f(x) = 0$ বাস্তব সহগবিশিষ্ট সমীকরণের পরপর দুটি বীজ α ও β $(\alpha < \beta)$ হলে $f'(x) = 0$ সমীকরণটির অন্তত একটি বীজ (α, β) মুক্ত অন্তরালে থাকবে [অর্থাৎ অন্তত একটি বীজ p থাকবে যে $\alpha < p < \beta$ হবে]।

মন্তব্য : উপরোক্ত উপপাদ্য দুটি সমীকরণের তত্ত্ব মোতাবেক প্রমাণ করা যায়। কিন্তু আসলে ঐ উপপাদ্য দুটিকে অবকলনবিদ্যার দুটি সুপরিচিত উপপাদ্যর নির্দিষ্ট ক্ষেত্র হিসাব গণ্য করা যায়। সন্তত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে বোলজানো (Bolzano) উপপাদ্য'র সুনির্দিষ্ট ক্ষেত্র হিসাবে উপপাদ্য 1-কে এবং অবকলনযোগ্য অপেক্ষকের ক্ষেত্রে রোলের (Rolle's) উপপাদ্যর সুনির্দিষ্ট ক্ষেত্র হিসাবে উপপাদ্য 2 -কে গণ্য করা হয়।

উদাহরণ : (a) $2x^3 - 4x^2 + 9x - 2 = f(x) = 0 : f(0)\, f(1) < 0 \Rightarrow 0$ ও। এর মধ্যে $f(x) = 0$ -এর বীজ আছে।

(2) $f(x) = x^2 - 3x + 2 : f(0)\, f(3) > 0$, এখানে $(0, 3)$ -তে দুটি বীজ 1, 2 আছে।

2.3.2 বিশেষ বীজগাণিতিক সমীকরণের বীজের প্রকৃতি নির্ণয় :

উপপাদ্য—1 বাস্তব সহগবিশিষ্ট n ঘাতের $(n \geq 2)$ একটি বহুপদ সমীকরণের একটি বীজ $\alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta, \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$ হলে অপর একটি বীজ $\alpha - i\beta$ হবে।

$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$

ফলে বহুপদ রাশি $q(x)$ ও $r(x)$ পাওয়া যাবে যে

$f(x) = \left[(x - \alpha)^2 + \beta^2\right] q(x) + r(x)$

যেখানে $q(x)$, $n - 2$ ঘাতের বহুপদ রাশি এবং ভাগশেষ $r(x)$, 1 ঘাতের বহুপদ রাশি, ধরি

$r(x) = ax + b$ যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$.

যেহেতু $\alpha + i\beta$, $f(x) = 0$ সমীকরণের বীজ, ফলে

$f(\propto + i\beta) = 0 \Rightarrow a(\alpha + i\beta) + b = 0 \Rightarrow a\alpha + b = 0,\ a\,\beta = 0$

যেহেতু $\beta \neq 0$, সুতরাং $a = 0$, অতএব $b = 0$.

অতএব $f(x) = \left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right] q(x)$

$\Rightarrow f(\alpha - i\beta) = 0 \Rightarrow \alpha - i\beta$ একটি বীজ হবে।

মন্তব্য : বহুপদ সমীকরণটির সহগ সমূহ বাস্তব না—হলে উপপাদ্যটি প্রযোজ্য হবে না।

উপপাদ্য—2 মূলদ সহগবিশিষ্ট n ঘাতের $(n \geq 2)$ একটি বহুপদ সমীকরণের একটি বীজ $\alpha + \sqrt{\beta}$ $(\alpha, \beta \in Q, \beta > 0$ ও পূর্ণবর্গ নয়) হলে অপর একটি বীজ $\alpha - \sqrt{\beta}$ হবে।

$\left(x - \alpha - \sqrt{\beta}\right)\left(x - \propto + \sqrt{\beta}\right) = (x - \alpha)^2 - \beta$

ফলে বহুপদরাশি $Q(x)$ ও $r(x)$ পাওয়া যাবে যে $f(x) = [(x - \alpha)^2 - \beta]\, Q(x) + r(x)$

যেখানে $Q(x)$, $n - 2$ ঘাতের বহুপদরাশি এবং ভাগশেষ $r(x)$, 1 ঘাতের বহুপদ রাশি। ধরি $r(x) = ax + b$ যেখানে $a, b \in Q$.

যেহেতু $f(\alpha + \sqrt{\beta}) = 0$, সুতরাং $r(\alpha + \sqrt{\beta}) = 0$,

$\Rightarrow a\alpha + b = 0,\ a\sqrt{\beta} = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$ (যেহেতু $\sqrt{\beta} \neq 0$)

অতএব $f(x) = \left[(x-\alpha)^2 - \beta\right](x)$

$\Rightarrow f(\alpha - \sqrt{\beta}) = 0 \Rightarrow \alpha - \sqrt{\beta}$, $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি বীজ।

মন্তব্য : বহুপদ সমীকরণটির সহগ সমূহ মূলদ না— হলে উপপাদ্যটি প্রযুক্ত হবে না।

2.3.3. দেকার্তের চিহ্ন সম্পর্কিত নিয়ম :

(1) বাস্তব সহগবিশিষ্ট বহুপদ সমীকরণের $f(x) = 0$ ধনাত্মক বীজ সমূহের সংখ্যা ঐ বহুপদ রাশির $f(x)$-এর সহগের অনুক্রমে চিহ্নের পরিবর্তনের সংখ্যার চেয়ে বেশি হবে না, কম হলে উক্ত চিহ্নের পরিবর্তনের সংখ্যার চেয়ে জোড়সংখ্যক কম হবে।

(2) বাস্তব সহগ বিশিষ্ট বহুপদ সমীকরণের $f(x) = 0$ ঋণাত্মক বীজ সমূহের সংখ্যা $f(-x)$ এর সহগের অনুক্রমে চিহ্নের পরিবর্তনের সংখ্যার চেয়ে বেশি হবে না, কম হলে উক্ত চিহ্নের পরিবর্তনের সংখ্যার চেয়ে জোড়সংখ্যক কম হবে।

উদাহরণ : $f(x) \equiv x^6 + x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$f(x)$ -এ একটিমাত্র ক্ষেত্রে সহগের চিহ্নে পরিবর্তন (x^4 ও x^3), ফলে একটিমাত্র ধনাত্মক বীজ আছে।

$f(-x) = x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1$: সহগের চিহ্নে পাঁচটি পরিবর্তন। ফলে ঋণাত্মক বীজের সংখ্যা 5 বা 3 বা 1 হবে।

2.3.4. সম্পর্কিত উদাহরণ

(1) দেকার্তের নিয়মের সাহায্যে $x^5 - x^4 - x^3 + 8x^2 - 9x - 15 = 0$ সমীকরণের বীজের চরিত্র নিরুপণ করুন।

$f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 8x^2 - 9x - 15$

সহগগুলির অনুক্রমে চিহ্নের তিনটি পরিবর্তন আছে। ফলে ধনাত্মক বীজের সংখ্যা 3 বা 1 হবে।

$f(-x) = -x^5 - x^4 + x^3 + 8x^2 + 9x - 15$

$f(-x)$ -এর সহগগুলির অনুক্রমে 2টি চিহ্নের পরিবর্তন আছে। ফলে ঋণাত্মক বীজের সংখ্যা 2 বা 0, সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের ধনাত্মক বীজের সংখ্যা 3 বা 1, ঋণাত্মক বীজের সংখ্যা 2 বা 0।

মোট বীজের সংখ্যা 5। কাল্পনিক বীজের সংখ্যা 0 বা 2 বা 4 হবে। এখানে $f(0) \neq 0$ হচ্ছে।

(2) সঠিক কিনা যাচাই করুন : $x^7 - 2x^4 + 3x^3 - 1 = 0$

সমীকরণটির অন্তত চারটি কাল্পনিক বীজ থাকবে।

ধরি $f(x) = x^7 - 2x^4 + 3x^3 - 1$

সহগগুলির অনুক্রমে তিনট চিহ্নের পরিবর্তন আছে। ফলে ধনাত্মক বীজের সংখ্যা 3 বা 1 হবে।
$f(-x) = -x^7 - 2x^4 - 3x^3 - 1$

$f(-x)$ এর সহগগুলির অনুক্রমে চিহ্নের কোন বদল নেই। ফলে ঋণাত্মক বীজ নেই।

$f(0) \neq 0$

অতএব বাস্তব বীজের সর্বোচ্চ সংখ্যা 3 হচ্ছে।

সমীকরণটির ঘাত 7, সুতরাং মোট 7টি বীজ আছে। কাল্পনিক বীজের সর্বনিম্ন সংখ্যা = 7 − 3 = 4

(3) $x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের বীজের চরিত্র ও অবস্থান সম্পর্কে আলোচনা করুন।

$f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 1$, $f(-x) = -x^3 + x^2 + 5x - 1$

$f(x)$ -এর সহগগুলির অনুক্রমে 1টি পরিবর্তন, সুতরাং 1টি ধনাত্মক বীজ থাকবে।

$f(-x)$ -এর ক্ষেত্রে ঐ ধরণের পরিবর্তন 2, ফলে ঋণাত্মক বীজের সংখ্যা 2 বা 0 হবে।

$f(0) = -1 < 0$, $f(1) = -4 < 0$, $f(2) = 1 > 0 \Rightarrow f(1)\, f(2) < 0$

এতএব (1, 2) মুক্ত অন্তরালে উক্ত ধনাত্মক বীজ আছে।

$f(-1) = 4 > 0 \Rightarrow f(0)\, f(-1) < 0 \Rightarrow (-1, 0)$ মুক্ত অন্তরালে একটি ঋণাত্মক বীজ আছে।

$f(-2) = -8 + 4 + 10 - 1 > 0$, $f(-3) = -27 + 4 + 10 - 1 < 0$

$\Rightarrow f(-2)\, f(-3) < 0 \Rightarrow (-3, -2)$ মুক্ত অন্তরালে একটি বীজ আছে।

ত্রিঘাত সমীকরণ, ফলে বীজের সংখ্যা তিনটি।

মুক্ত অন্তরাল সমূহ (−3, −2), (−1, 0) ও (1, 2) তে বীজগুলি আছে।

(4) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$ সমীকরণের বীজগুলির চরিত্র ও অবস্থান নির্ণয় করুন।

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 8$ একটি 4 ঘাত বিশিষ্ট বহুপদরাশি। সমীকরণটির 4টি বীজ আছে।

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 = 4(x^3 + 3x^2 - x - 3)$$
$$= 4(x - 1)(x + 3)(x + 1)$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3, -1, 1 \text{ (ক্রমানুসারে)}$$

রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী, $f(x) = 0$ -এর দুটি বীজের মধ্যে $f'(x) = 0$ -এর অন্তত একটি বীজ থাকবে। ফলে আমরা পাই, $f(x) = 0$ -এর একটি বীজ < -3, একটি বীজ $\in (-1, 1)$, একটি বীজ $\in (-3, -1)$ ও একটি বীজ > 1.

এক্ষেত্রে $f(-3) = -1$, $f(-1) = 15$, $f(1) = -1$, $f(2) = 8$

লক্ষণীয় $f(1)\, f(2) < 0$, ফলে একটি ধনাত্মক বীজ $\in (1, 2)$

$f(0)\, f(1) < 0$, ফলে আর একটি ধনাত্মক বীজ $\in (0, 1)$

ঋণাত্মক বীজ দুটির একটি $\in (-3, -1)$ এবং অপরটি < -3 হইবে।

(5) A, B, C, a, b, c, m বাস্তব হলে দেখান যে

$$\frac{A^2}{x-a} + \frac{B^2}{x-b} + \frac{C^2}{x-c} = x - m$$

সমীকরণের কোন কাল্পনিক বীজ নেই।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি $\alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \beta \neq 0)$

একটি বীজ। যেহেতু সহগগুলি বাস্তব, $\alpha - i\beta$ একটি বীজ হবে।

$$\frac{A^2}{(\alpha - a) + i\beta} + \frac{B^2}{(\alpha - b) + i\beta} + \frac{C^2}{(\alpha - c) + i\beta} = (\alpha - m) + i\beta$$

$$\frac{A^2}{(\alpha - a) - i\beta} + \frac{B^2}{(\alpha - b) - i\beta} + \frac{C^2}{(\alpha - c) - i\beta} = (\alpha - m) - i\beta$$

বিয়োগ করিয়া, $\left[\frac{A^2}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} + \frac{B^2}{(\alpha - b)^2 + \beta^2} + \frac{C^2}{(\alpha - c)^2 + \beta^2} + 1\right] 2i\beta = 0$

$\Rightarrow \beta = 0$. সুতরাং উক্ত সমীকরণের কাল্পনিক বীজ নেই।

(6) দেখান যে $x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \ldots + n! = 0$

সমীকরণের কোন দুটি বীজ সমান নয়।

মনে করি $f(x) = x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \ldots + n!$

যদি α, $f(x) = 0$ -এর দ্বি-বীজ হয়, তবে $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$

এখন $f(\alpha) - f'(\alpha) = \{\alpha^n + n\alpha^{n-1} + n(n-1)\alpha^{n-2} + \ldots + n!\}$

$$-\{n\alpha^{n-1} + n(n-1)\alpha^{n-2} + \ldots + n!\} = \alpha^n$$

সুতরাং $\alpha^n = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, অর্থাৎ $\alpha = 0$ দ্বি-বীজ হতে পারে।

কিন্তু $f(0) \neq 0$, 0 কোন বীজই নয়।

সুতরাং প্রদত্ত বিবৃতিটি প্রমাণিত হল।

2.4 বীজগাণিতিক সমীকরণের ক্ষেত্রে সহগের সঙ্গে বীজের সম্পর্ক

2.3.1 এ আমরা আলোচনা করেছি যে

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0)$

সমীকরণের n সংখ্যক বীজ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ হলে

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}$$

বাম দিকের রাশিমালাটি গুণ করে পাই

$$x^n - \sum\alpha_1\ x^{n-1} + \sum\alpha_1\alpha_2\ x^{n-2} + \ldots + (-1)^r \sum\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r x^{n-r} +$$

$$\ldots + (-1)^n\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$$

উভয়পক্ষের x এর সমঘাতের সহগগুলি তুলনা করলে পাই

$$\sum\alpha_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \sum\alpha_1\alpha_2 = -\frac{a_{n-2}}{a_n}, \ldots$$

$$\ldots,\ \alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_n = (-1)^n.\frac{a_0}{a_n}$$

এটিই হল সহগের সঙ্গে বীজের সম্পর্ক।

অতএব (1) $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,\ a_3 \neq 0,$

ত্রিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে বীজত্রয় α, β. γ হলে

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{a_2}{a_3},\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{a_1}{a_3},\ \alpha\beta\gamma = \frac{a_0}{a_3}$$

(2) $a_4\ x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,\ a_4 \neq 0,$

চতুর্ঘাত সমীকরণের বীজ চারটি α, β, γ, δ হলে

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{a_3}{a_4},\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha + \delta\beta + \gamma\delta = \frac{a_2}{a_4}$$

$$\alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta = -\frac{a_1}{a_4}$$

$$\alpha\beta,\gamma,\delta = \frac{a_0}{a_4}$$ হবে।

2.4.1 সম্পর্কিত উদাহরণ

(1) $81x^3 - 18x^2 - 36x + 8 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি বিপরীত প্রগতিতে আছে, সমীকরণটির সমাধান করুন।

প্রদত্ত ত্রিঘাত সমীকরণের তিনটি বীজ আছে, α, β, γ

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{18}{81} = \frac{2}{9}(1),\quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{36}{81} = -\frac{4}{9}(2)\ \alpha\beta\gamma = -\frac{8}{81}(3)$$

শর্তানুসারে $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta} \Rightarrow \beta(\alpha + \gamma) = 2\alpha\gamma(4)$

(2) ও (4) $\Rightarrow 3\alpha\gamma = -\frac{4}{9} \Rightarrow \alpha\gamma = -\frac{4}{27}$

(3) থেকে $\beta = -\frac{8}{81} / -\frac{4}{27} = \frac{2}{3}$

সুতরাং $\alpha + \gamma = \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}$

$(\alpha - \gamma)^2 = (\alpha + \gamma)^2 - 4\alpha\gamma = \frac{16}{81} + \frac{16}{27} = \frac{64}{81} \Rightarrow \alpha - \gamma = \pm\frac{8}{9}$

$\alpha + \gamma = -\frac{4}{9}, \alpha - \gamma = \frac{8}{9} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{9}, \gamma = -\frac{6}{9}$

$\alpha + \gamma = -\frac{4}{9}, \alpha - \gamma = -\frac{8}{9} \Rightarrow \alpha = -\frac{6}{9}, \gamma = \frac{2}{9}$

ফলে বীজগুলি $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$ হবে।

(2) $x^4 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$ সমীকরণের দুটি বীজের গুণফল -2 হলে বীজগুলি নির্ণয় করুন।

চারঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের চারটি বীজ আছে। মনে করি α, β, γ ও δ.

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ (1) $\qquad \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \alpha\delta = -10$ (2)

$\alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta = -9$ (3) $\qquad \alpha\beta\gamma\delta = -2$ (4)

শর্তানুসারে $\alpha\beta = -2$ (5)

(4) ও (5) $\Rightarrow \gamma\delta = 1$

(2) $\Rightarrow (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = -10 + 2 - 1 = -9$

ধরি $\alpha + \beta = p, \quad \gamma + \delta = q;$ $\quad$ সুতরাং $p + q = 0, pq = -9$

$\Rightarrow -p^2 = -9 \Rightarrow p = \pm 3, \; q = \mp 3.$

p = 3 $\qquad \alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = -2 \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 9 + 8 = 17$

$\alpha - \beta = \pm\sqrt{17} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad \beta = \frac{3 \mp \sqrt{17}}{2},$

q = 3 $\qquad \gamma + \delta = -3, \gamma\delta = 1 \Rightarrow (\gamma - \delta)^2 = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta = 5$

$\gamma - \delta = \pm\sqrt{5} \quad \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5}), \quad \delta = \frac{1}{2}(-3 \mp \sqrt{5})$

$p = -3, q = 3$ -এর ক্ষেত্রে বীজগুলি একই পাওয়া যাবে।

প্রদত্ত সমীকরণের বীজগুলি $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{17}), \qquad \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$

(3) যদি $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ $2 + 3i$ হয়, অন্য বীজগুলি নির্ণয় করুন।

প্রদত্ত সমীকরণের সহগগুলি বাস্তব হওয়ায় $2 + 3i$ -এর অনুবন্ধী $2 - 3i$ ঐ সমীকরণের একটি বীজ হবে।

চারঘাতের উক্ত সমীকরণের চারটি বীজ আছে। ধরা যাক্ অন্য দুটি বীজ α, β অতএব

$2 + 3i + 2 - 3i + \alpha + \beta = 2, \quad (2 + 3i)(2 - 3i)\,\alpha\beta = 13$

$\Rightarrow \alpha + \beta = -2, \quad \alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha - \beta = \pm\sqrt{4 - 4} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

ফলে বীজগুলি $-1, -1, 2 \pm 3i$ হবে।

(4) $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 2 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ $2 + \sqrt{3}$ হলে, অন্য বীজগুলি নির্ণয় করুন।

প্রদত্ত সমীকরণটি মূলদ সহগ বিশিষ্ট, ফলে প্রদত্ত $2 + \sqrt{3}$ -এর অনুবন্ধী $2 - \sqrt{3}$ একটি বীজ হবে। বাকী দুটি α, β (ধরি)।

$2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + \alpha + \beta = 3, (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\,\alpha\beta = -2$

$\Rightarrow \alpha + \beta = -1, \qquad \alpha\beta = -2$

$(\alpha - \beta) = \pm\sqrt{1 + 8} = \pm 3$

$\alpha + \beta = -1, \qquad \alpha - \beta = 3 \Rightarrow \alpha = 1, \quad \beta = -2$

$\alpha + \beta = -1, \qquad \alpha - \beta = -3 \Rightarrow \alpha = -2, \beta = 1$

বীজগুলি $1, -2, 2 \pm \sqrt{3}$

(5) p, q, r, s -এর মধ্যে কোন্ শর্ত থাকলে $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$

সমীকরণের বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকবে নির্ণয় করুন।

চারটি বীজ মনে করি $\dfrac{\alpha}{\beta^3}, \dfrac{\alpha}{\beta}, \alpha\beta, \alpha\beta^3$

ফলে $\quad \dfrac{\alpha}{\beta^3} + \dfrac{\alpha}{\beta} + \alpha\beta + \alpha\beta^3 = -p \quad (1)$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^4} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta^4 = q \quad (2)$$

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} + \alpha^3\beta^3 + \alpha^3\beta + \frac{\alpha^3}{\beta} = -r \quad (3) \quad \alpha^4 = s \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow \propto^3\left(\beta^3 + \frac{1}{\beta^3} + \beta + \frac{1}{\beta}\right) = -r$$

$$(1) \Rightarrow \alpha\left(\beta^3 + \frac{1}{\beta^3} + \beta + \frac{1}{\beta}\right) = -p$$

ফলে $\alpha^2 = \frac{r}{p}$ $\Rightarrow \alpha^4 = \frac{r^2}{p^2} = s$ [(4) থেকে]

$\Rightarrow r^2 = p^2 s$

(6) $x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 9x + 9 = 0$ সমীকরণের দুটি বীজের গুণফল অপর দুটি বীজের গুণফলের সমান হলে সমীকরণটি সমাধান করুন।

চারঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের চারটি বীজ আছে, মনেকরি

α, β, γ ও δ, শর্তানুসারে $\alpha\beta = \gamma\delta$ (1)

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$ (2) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = -4$ (3)

$\alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta = 9$ (4) $\alpha\beta\gamma\delta = 09$ (5)

(1) ও (5) $\Rightarrow \alpha\beta = \pm 3 = \gamma\delta$

যদি $\alpha\beta = \gamma\delta = 3$ হয় তবে (4) $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 3$

যা (2) -এর বিরোধী। ফলে $\alpha\beta = \gamma\delta = -3$ হবে।

(3) $\Rightarrow (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = -4 + 6 = 2$

ধরি $\alpha + \beta = p$, $\gamma + \delta = q$; সুতরাং $p + q = -3$, $pq = 2$

$p - q = \pm\sqrt{[(-3)^2 - 4(2)]} = \pm 1 \quad \Rightarrow p = -1,\ q = -2$

$\alpha + \beta = -1,\ \alpha\beta = -3 \Rightarrow \alpha - \beta = \pm\sqrt{[(-1)^2 - 4(-3)]} = \pm\sqrt{[13]}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, \qquad \beta = \frac{-1 \mp \sqrt{13}}{2}$

$\gamma + \delta = -2, \quad \gamma\delta = -3 \Rightarrow \gamma - \delta = \pm\sqrt{[4 + 12]} = \pm 4$

$\gamma = 1,\ \delta = -3$ বা, $\gamma = -3,\ \delta = 1$ হবে।

বীজ চারটি $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, $+1$, -3

7. $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x - 5 = 0$ সমীকরণের দুটি বীজের যোগফল অপর দুটি বীজের যোগফলের সমান। বীজগুলি নির্ণয় করুন।

চারঘাতবিশিষ্ট সমীকরণের বীজগুলি মনে করি α, β, γ ও δ, যেখানে $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ শর্তানুসারে।

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -6$ ... (1), $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = 13$ ... (2)

$\alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta = -12$ ... (3) $\alpha\beta\gamma\delta = -5$ ... (4)

(1) $\Rightarrow \alpha + \beta = \gamma + \delta = -3$

(3) $\Rightarrow \alpha\beta(\gamma + \delta) + \gamma\delta(\alpha + \beta) = -12$

$\Rightarrow \alpha\beta + \gamma\delta = 4$ ... (5)

ধরি, $\alpha\beta = p$, $\gamma\delta = q$; সুতরাং $p + q = 4$, $pq = -5$

$$p - q = \pm\sqrt{[(p + q)^2 - 4pq]} = \pm\sqrt{[16 + 20]} = \pm 6$$

$$p + q = 4,\ p - q = 6 \Rightarrow p = 5,\ q = -1$$

$$\alpha + \beta = -3,\ \alpha\beta = 5 \Rightarrow \alpha - \beta = \pm\sqrt{[(-3)^2 - 4(5)]} = \pm i\sqrt{11}$$

$$\alpha = \frac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2},\ \beta = \frac{-3 \mp i\sqrt{11}}{2}$$

$$\gamma + \delta = -3,\ \gamma\delta = -1$$

$$\Rightarrow \gamma - \delta = \pm\sqrt{\left[(-3)^2 - 4(-1)\right]} = \pm\sqrt{13} \Rightarrow \gamma = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2},\ \delta = \frac{-3 \mp \sqrt{13}}{2}$$

বীজগুলি $\dfrac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2}$, $\dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

(8) $x^3 - rx^2 + rx - 4 = 0$ সমীকরণটির দুটি বীজ একে অপরের অন্যোন্যক। r-এর মান এবং অতঃপর বীজগুলি নির্ণয় করুন।

ত্রিঘাত সমীকরণ, তিনটি বীজ আছে। শর্তানুসারে সেগুলি α, $\dfrac{1}{\alpha}$ ও β মনে করি।

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta = r \ \dots (1) \quad \alpha.\frac{1}{\alpha} + \alpha.\beta + \frac{1}{\alpha}, \beta = r \ \dots (2) \quad \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)\beta = 4 \ \dots (3)$$

ফলে, $\beta = 4$ এবং $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = r - 4$ [(1) থেকে],

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = (r - 1)\frac{1}{4} \quad [(2) \text{ থেকে }]$$

$r - 4 = \dfrac{r - 1}{4} \Rightarrow r = 5$ সুতরাং $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 1$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

বীজত্রয় $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, 4

(9) $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$ সমীকরণের দুটি বীজের অনুপাত 3 : 2 হলে বীজগুলি নির্ণয় করুন। ত্রিঘাত সমীকরণের বীজ তিনটি : 3α, 2α ও β ধরি।

$$3\alpha + 2\alpha + \beta = 9,\ (3\alpha)(2\alpha) + (2\alpha)\beta + (3\alpha)\beta = 14,$$

$$(3\alpha)(2\alpha)\beta = -24$$

$$\Rightarrow \beta = 9 - 5\alpha,\ 6\alpha^2 + 5\alpha\beta = 14$$

$$\Rightarrow 6\alpha^2 + 5\alpha(9 - 5\alpha) = 14$$

$\Rightarrow -19\alpha^2 + 45\alpha - 14 = 0$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-45 \pm \sqrt{(45)^2 - 56 \times 19}}{-38} = 2, \frac{-7}{19}$$

$\alpha = \frac{-7}{19}$ অবান্তর বীজ (যাচাই করুন), $\alpha = 2, \beta = -1$

বীজত্রয় 6, 4, –1.

10. সমাধান করুন ঃ $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$, দেওয়া আছে যে দুটি বীজের বিয়োগফল 3।

ত্রিঘাত সমীকরণ ঃ তিনটি বীজ, শর্তানুসারে α, $\alpha + 3$, β ধরি।

$\alpha + \alpha + 3 + \beta = 5$, $\alpha(\alpha + 3) + (\alpha + 3)\beta + \alpha\beta = -4$, $\alpha(\alpha + 3)\beta = -20$

প্রথম থেকে $\beta = 2 - 2\alpha$

দ্বিতীয়টিতে বসিয়ে পাই, $\alpha^2 + 3\alpha + 2\alpha - 2\alpha^2 + 6 - 6\alpha + 2\alpha - 2\alpha^2 = -4$

$\Rightarrow -3\alpha^2 + \alpha + 10 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$, ফলে $\beta = -2$

বীজগুলি 2, 5, –2 হবে।

2.4.2. বীজগুলির সদৃশ অপেক্ষকের মান নির্ধারণ

কোন বহুপদ সমীকরণের বীজগুলি α, β, γ বা $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে তাদের অপেক্ষক $f(\alpha, \beta, \gamma)$ বা, $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ কে সদৃশ অপেক্ষক (Symmetric function) বলা হবে যদি ঐ অপেক্ষকে যে কোন দুটি বীজের পারস্পরিক স্থান বদল করলে অপেক্ষকটি অ-পরিবর্তিত থাকে।

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,\ \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta}$$ হল

α, β, γ-এর সদৃশ অপেক্ষক। কিন্তু $\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2$ সদৃশ নয়।

সমীকরণের সহগগুলির সঙ্গে বীজের সম্পর্ক (উক্ত 2.4) ব্যবহার করলে ঐ ধরণের অপেক্ষকের মান পাওয়া যাবে।

উদাহরণ—(*i*) α, β, γ যদি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে (*i*) $\sum(\beta + \gamma - \alpha)^3$ (ii) $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$ (iii) $\sum \alpha^2\beta^2$ (iv) $\sum\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$-এর মান নির্ণয় করুন।

এখানে $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(*i*) $\beta + \gamma - \alpha = -p - 2\alpha$, $\gamma + \alpha - \beta = -p - 2\beta$, $\alpha + \beta - \gamma = -p - 2\gamma$

$$\sum(\beta + \gamma - \alpha)^3 = -\left[(p + 2\alpha)^3 + (p + 2\beta)^3 + (p + 2\gamma)^3\right]$$

$$= -[3p^3 + 8(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) + 6p^2(\alpha + \beta + \gamma) + 12p(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)]$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = p^2 - 2q$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= -p\ (p^2 - 2q - q) - 3r = -p^3 + 3pq - 3r$$

প্রদত্ত রাশিমালা $= -\ [3p^3 - 8p^3 + 24pq - 24r - 6p^3 + 12p^3 - 24pq]$

$$= 24r - p^3$$

(ii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{q}{r}$

প্রদত্ত রাশিমালা $= \left(-\frac{q}{r} - \frac{2}{\gamma}\right)\left(-\frac{q}{r} - \frac{2}{\alpha}\right)\left(-\frac{q}{r} - \frac{2}{\beta}\right)$

$$= -\left[\left(\frac{q^2}{r^2} + \frac{q}{r}\cdot\frac{2}{\alpha} + \frac{q}{r}\cdot\frac{2}{\gamma} + \frac{4}{\alpha\gamma}\right)\left(\frac{q}{r} + \frac{2}{\beta}\right)\right]$$

$$= -\left[\frac{q^3}{r^3} + \frac{q^2}{r^2}\left(\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma}\right) + \frac{4q}{r}\left(\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\gamma\beta} + \frac{1}{\beta\alpha}\right) + \frac{8}{\alpha\beta\gamma}\right]$$

$$= -\left[\frac{q^3}{r^3} + \frac{2q^2}{r^2}\left(-\frac{q}{r}\right) + \frac{4q}{r}\left(\frac{-p}{-r}\right) - \frac{8}{r}\right]$$

$$= \frac{q^3}{r^3} - \frac{4pq}{r^2} + \frac{8}{r}$$

(iii) $\sum \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma\,(\alpha + \beta + \gamma)$

$$= q^2 - 2(-r)\ (-p)$$

$$= q^2 - 2pr.$$

(iv) $\sum\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right)$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right) - 3$$

$$= (-p)\left(\frac{q}{-r}\right) - 3 = \frac{pq}{r} - 3$$

2. α, β, γ যদি $x^3 + px + q = 0\ (q \neq 0)$-এর তিনটি বীজ হয়, মান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\sum\frac{1}{\alpha + \beta - \gamma}$ (ii) $\sum\frac{1}{(\alpha + \beta)^2}$ (iii) $\sum\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}$

এখানে, $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p$, $\alpha\beta\gamma = -q$

(i) $$\sum \frac{1}{\alpha + \beta - \gamma} = \frac{1}{(\alpha + \beta + \gamma) - 2\gamma} + \frac{1}{(\alpha + \beta + \gamma) - 2\beta} + \frac{1}{(\alpha + \beta + \gamma) - 2\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{-q} = \frac{p}{2q}$$

(ii) $$\sum \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2}$$

$$= \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$

$$= \frac{p^2 - 2(-q)0}{(-q)^2} = \frac{p^2}{q^2}$$

(iii) $$\sum \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma\alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$$

$$= \frac{0(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\delta) - 3q}{-q} = 3$$

2.5 সমীকরণের রূপান্তর ও সম্পর্কিত উদাহরণ

ধরা যাক্ একটি সমীকরণ দেওয়া আছে যার বীজগুলি $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$। একটি সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যার বীজগুলি উক্ত n সংখ্যক বীজের সবগুলির n সংখ্যক সদৃশ অপেক্ষক। যে পদ্ধতিতে প্রদত্ত সমীকরণ থেকে নতুন সমীকরণটি নির্ণীত হয়, তাকেই সমীকরণের রূপান্তর পদ্ধতি বলা হয়ে থাকে।

উদাহরণ **1.** $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + ... + p_{n-1}x + p_n = 0$ সমীকরণের বীজগুলির $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ এবং m অ-শূণ্য বাস্তব সংখ্যা। একটি সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজগুলি হবে $m\alpha_1, m\alpha_2, ..., m\alpha_n$.

ধরা যাক্, $y = mx$ বা $x = \frac{y}{m}$, প্রদত্ত সমীকরণে x-এর পরিবর্তে বসিয়ে পাই,

$$\left(\frac{y}{m}\right)^m + p_1\left(\frac{y}{m}\right)^{n-1} + p_2\left(\frac{y}{m}\right)^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\left(\frac{y}{m}\right) + p_n = 0$$

অর্থাৎ, $y^n + mp_1 y^{n-1} + m^2 p_2 y^{n-2} + \ldots + p_{n-1} m^{n-1} y + p_n m^n = 0$ নির্ণেয় সমীকরণ।

2. $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$ সমীকরণের বীজগুলি $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ও সবগুলিই অ-শূণ্য বাস্তববীজ। একটি সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজগুলি

$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}$ হবে।

প্রদত্ত সমীকরণে x-এর পরিবর্তে $\frac{1}{y}$ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{y^n} + \frac{p_1}{y^{n-1}} + \frac{p_2}{y^{n-2}} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{y} + p_n = 0$$

অর্থাৎ, $p_n y^n + p_{n-1} y^{n-1} + \ldots + p_2 y^2 + p_1 y + 1 = 0$

(3) $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$ সমীকরণের বীজগুলি $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ দেওয়া আছে। $h > 0$ হলে একটি সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজগুলি হবে—

(*i*) $\alpha_1 - h, \alpha_2 - h, \ldots, \alpha_n - h$

(ii) $\alpha_1 + h, \alpha_2 + h, \ldots, \alpha_n + h$

(*i*)-এর ক্ষেত্রে x-কে $y + h$ দ্বারা পরিবর্তন করে পাই, $(y + h)^n + p_1(y + h)^{n-1} + p_2(y + h)^{n-2} + \ldots + p_{n-1}(y + h) + p_n = 0$

(ii)-এর ক্ষেত্রে x-কে $y - h$ দ্বারা পরিবর্তন করে পাই,

$$(y - h)^n + p_1(y - h)^{n-1} + p_2(y - h)^{n-2} + \ldots + p_{n-1}(y - h) + p_n = 0$$

সংশ্লেষণ ভাগ পদ্ধতিতে এই নির্ণয় সহজ হবে—

(*i*) $2x^5 - x^3 + 10x - 8 = 0$ সমীকরণের বীজগুলিকে 5 করে কমিয়ে একটি সমীকরণ গঠন করুন।

	2	0	−1	0	10	−8
5.		10	50	245	1225	6175
	2	10	49	245	1235	6167
		10	100	745	4950	
	2	20	149	990	6185	
		10	150	1495		
		30	299	2485		
		10	200			
		40	499			
		10				
		50				

নির্ণেয় সমীকরণ : $2y^5 + 50y^4 + 499y^3 + 2485y^2 + 6185y + 6167 = 0$

(ii) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24 = 0$ সমীকরণের বীজগুলিকে 2 করে বাড়িয়ে একটি সমীকরণ গঠন করুন।

	1	-1	-10	4	24
-2		-2	6	8	-24
	1	-3	-4	12	0
		-2	10	-12	
		-5	6	0	
		-2	14		
		-7	20		
		-2			
		-9			

নির্ণেয় সমীকরণ : $y^4 - 9y^3 + 20y^2 = 0$

4. বহুপদ সমীকরণের কোন নির্দিষ্ট পদ দূর করা ঃ এক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণের বীজগুলিকে এমন ভাবে বৃদ্ধি বা হ্রাস করতে হবে যে ঐ নির্দিষ্ট পদটি বিলুপ্ত হবে।

(*i*) $x^4 + 2x^3 + 143x^2 + 430x + 462 = 0$ সমীকরণের দ্বিতীয় পদ দূর করুন।

x-এর পরিবর্তে $y + h$ বসিয়ে পাই,

$(y + h)^4 + 20(y + h)^3 + 143(y + h)^2 + 430(y + h) + 462 = 0$

y^3-এর সহগ $= 4h + 20 = 0 \Rightarrow h = -5$

	1	20	143	430	462
-5		-5	-75	-340	-450
	1	15	68	90	12
		-5	-50	-90	
	1	10	18	0	
		-5	-25		
		5	-7		
		-5			
		0			

নির্ণেয় সমীকরণ $y^4 - 7y^2 + 12 = 0$

(ii) $x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 3x + 2 = 0$ সমীকরণের তৃতীয় পদ দূর করুন।

x-এর পরিবর্তে $y + h$ বসিয়ে পাই,

$$(y + h)^4 - 4(y + h)^3 - 18(y + h)^2 - 3(y + h) + 2 = 0$$

$$y^2\text{-এর সহগ} = {}^4c_2\, h^2 - 4(3h) - 18 = 6(h^2 - 2h - 3) = 0$$

$$\Rightarrow h = 3, -1$$

	1	−4	−18	−3	2
3		3	−3	−63	−198
	1	−1	−21	−66	−196
		3	6	−45	
	1	2	−15	−111	
		3	15		
	1	5	0		
		3			
	1	8			

	1	−4	−18	−3	2
1		−1	5	13	−10
	1	−5	−13	10	−8
		−1	6	7	
	1	−6	−7	17	
		−1	7		
	1	−7	0		
		−1			
	1	−8			

নির্ণেয় সমীকরণ $y^4 + 8y^3 - 111y - 196 = 0$ নির্ণেয় সমীকরণ $y^4 + 8y^3 + 17y - 8 = 0$

5. $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$ সমীকরণের বীজগুলি $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ হলে একটি সমীকরণ গঠন করুন যার বীজগুলি $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_n^2$ হবে।

এক্ষেত্রে আমরা x-কে $\sqrt{y}$ দ্বারা পরিবর্তন করে y-এর ঘাতগুলিকে অখণ্ড ধনসংখ্যায় পরিণত করব।

(*i*) একটি সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজগুলি

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের বীজগুলির বর্গ হবে।

$$x(x^2 + q) = -(px^2 + r)$$

x-এর বদলে $\sqrt{y}$ বসিয়ে পাই,

$$\sqrt{y}\,(y + q) = -(py + r)$$

বর্গ করে পাই, $y(y + q)^2 - (py + r)^2 = 0$

$$y^3 + y^2(2q - p^2) + y(q^2 - 2pr) - r^2 = 0$$

6. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের বীজত্রয় α, β, γ হলে এমন সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজগুলি

(*i*) $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$, (ii) $\dfrac{\alpha}{\beta + \gamma}, \dfrac{\beta}{\gamma + \alpha}, \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta}$

(iii) $\alpha\beta + \beta\gamma$, $\beta\gamma + \gamma\alpha$, $\gamma\alpha + \alpha\beta$ হবে।

এখানে, $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(*i*) $\alpha + \beta = -p - \gamma$, $\beta + \gamma = -p - \alpha$, $\gamma + \alpha = -p - \beta$

$y = -p - x$ বা, $x = -(p + y)$ বসিয়ে পাই,

$$-(p + y)^3 + p(p + y)^2 - q(p + y) + r = 0$$

$$\Rightarrow -y^3 - 3py^2 + py^2 - 3p^2y + 2p^2y - qy - p^3 + p^3 - pq + r = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + 2py^2 + (p^2 + q)y + pq - r = 0$$

(ii) $\dfrac{\alpha}{\beta + \gamma} = \dfrac{\alpha}{-p - \alpha}$, $\dfrac{\beta}{\gamma + \alpha} = \dfrac{\beta}{-p - \beta}$, $\dfrac{\gamma}{\alpha + \beta} = \dfrac{\gamma}{-p - \gamma}$

এক্ষেত্রে, $y = -\dfrac{x}{p + x}$ অর্থাৎ $x = -\dfrac{py}{y + 1}$ বসিয়ে পাই,

$$-\frac{p^3y^3}{(y + 1)^3} + \frac{p^3y^2}{(y + 1)^2} - \frac{pqy}{y + 1} + r = 0$$

অর্থাৎ, $r(y+1)^3 - pqy(y+1)^2 + p^3y^2(y+1) - p^3y^3 = 0$

(iii) $\alpha\beta + \beta\gamma = q - \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\beta} = q + \dfrac{r}{\beta}$, $\beta\gamma + \gamma\alpha = q + \dfrac{r}{\gamma}$, $\alpha\beta + \alpha\gamma = q + \dfrac{r}{\alpha}$

এক্ষেত্রে, $y = q + \dfrac{r}{x}$ অর্থাৎ $x = \dfrac{r}{y - q}$ বসিয়ে পাই,

$$\left(\frac{r}{y - q}\right)^3 + p\left(\frac{r}{y - q}\right)^2 + \frac{qr}{y - q} + r = 0$$

$$\Rightarrow r(y - q)^3 + qr(y - q)^2 + pr^2(y - q) + r^3 = 0$$

এখানে, $r \neq 0$, কেননা কোন বীজ শূন্য নয়।

নির্ণেয় সমীকরণ $(y - q)^3 + q(y - q)^2 + pr(y - q) + r^2 = 0$

7. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের বীজগুলি α, β ও γ হলে এমন সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজগুলি হবে

$$\alpha\beta - \gamma^2,\ \beta\gamma - \alpha^2,\ \ \gamma\alpha - \beta^2$$

এখানে $\alpha + \beta + \gamma = -p,\ \ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q,\ \alpha\beta\gamma = -r.$

ধরা যাক, $y = \beta\gamma - \alpha^2 = (\alpha\beta\gamma - \alpha^3)\ \dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{r + \alpha^3}{\alpha}$

$$\Rightarrow \alpha^3 + \alpha y + r = 0$$

আবার, α প্রদত্ত সমীকরণের বীজ বলে $\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r = 0$

অতএব, $\alpha y - p\alpha^2 - q\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{y-q}{p}$ (যেহেতু $\alpha \neq 0$)

নির্ণেয় সমীকরণ—

$$\left(\frac{y-q}{p}\right)^3 + p\left(\frac{y-q}{p}\right)^2 + q\left(\frac{y-q}{p}\right) + r = 0$$

অর্থাৎ, $(y-q)^3 + p^2(y-q)^2 + p^2q(y-q) + p^3r = 0$

2.6 ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান : কার্ডন-এর পদ্ধতি

ইতালীয় গণিতজ্ঞ কার্ডন একটি ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধার যে পদ্ধতি উপস্থাপিত করেছিলেন, এখানে সেটি আমরা আলোচনা করব :

প্রদত্ত সমীকরণ $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,\ a_0 \neq 0$ (1) পূর্বে আলোচিত পদ্ধতিতে আমরা ঐ সমীকরণের দ্বিতীয় পদ অর্থাৎ x^2-সমন্বিত পদটি বিলোপ করলাম। মনে করি,

প্রাপ্ত সমীকরণটি $Z^3 + 3HZ + G = 0$ (2)

মনে করি, (2)-এর সমাধান $Z = u + v$

অতএব, $Z^3 - 3uvZ - (u^3 + v^3) = 0$ (3)

Z-এর সমঘাতের সহগ তুলনা করিয়া পাই,

$$u^3 + v^3 = -G,\ \ uv = -H$$

$$u^3 - v^3 = \pm\sqrt{[(u^3+v^3) - 4u^3v^3]} = \pm\sqrt{(G^2 + 4H^3)}$$

$u^3 = \dfrac{1}{2}\left[-G \pm \sqrt{(G^2 + 4H^3)}\right]$, এর থেকে u-এর তিনটি মান পাওয়া যাবে এবং $v = -\dfrac{H}{u}$ থেকে v পাব।

$G^2 + 4H^3$-এর চিহ্নের উপর বীজের চরিত্র নির্ভর করে। আমরা এভাবে (2)-এর সমাধান ও (1)-এর সমাধান পাব।

উদাহরণ 1. $x^3 - 27x - 54 = 0$ ... (1)

ধরি, $x = u + v$, ফলে $x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$ ... (2)

(1) ও (2) থেকে $uv = 9$, $u^3 + v^3 = 54$

$$(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3 = (54)^2 - 4(9)^3 = 0$$

$$\Rightarrow u^3 - v^3 = 0 \Rightarrow u = 3, 3\omega, 3\omega^2 \text{ যেখানে}$$

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \ \omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$v = \frac{9}{u} \Rightarrow u = 3, v = 3 \ ; \ u = 3\omega, v = 3\omega^2 \ ;$$

$$u = 3\omega^2, v = 3\omega \Rightarrow x = 3 + 3, 3(\omega + \omega^2), 3(\omega^2 + \omega)$$

ফলে সমাধান , $x = u + v = 6, \ 3(-1), 3(-1)$

(যেহেতু, $1 + \omega + \omega^2 = 0$)

বীজত্রয় 6, –3, –3

(2) $x^3 - 9x + 28 = 0$ ... (1)

ধরি, $x = u + v$, ফলে $x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$ (2)

(1) ও (2) $\Rightarrow uv = 3$, $u^3 + v^3 = -28$

$$(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3 = (-28)^2 - 4(3)^3$$

$$= 784 - 108 = 676 \Rightarrow u^3 - v^3 = \pm 26$$

$$u^3 + v^3 = -28, u^3 - v^3 = 26 \Rightarrow u = -1, -\omega, -\omega^2$$

$$v = \frac{3}{u} \Rightarrow u = -1, v = -3 \ ; \ u = -\omega, v = -3\omega^2,$$

$$u = -\omega^2, v = -3\omega$$

সমাধান : $x = -4, -\omega - 3\omega^2, -\omega^2 - 3\omega$

$$= -4, +2 - i\sqrt{3}, +2 + i\sqrt{3}$$

(3) $x^3 - 12x + 8 = 0$ (1)

ধরি, $x = u + v$, ফলে $x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$ (2)

(1) ও (2) $\Rightarrow uv = 4,\ \ u^3 + v^3 = -8$

$(u^3 - v^3) = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3 = 64 - 256 = -192$

$$u^3 - v^3 = \pm i,\ 8\sqrt{3} \Rightarrow u^3 = -4 \pm 4i\sqrt{3}$$

ধরি, $u^3 = -4 + 4\sqrt{3}.i = 8\left[-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$$= 8\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] = 8\left[\cos\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \text{ (k পূর্ণসংখ্যা)}$$

দ্য ময়ভারের উপপাদ্য অনুসারে,

$$u = 2\left[\cos\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\frac{1}{3} + i\sin\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\frac{1}{3}\right] \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

$$\Rightarrow u = 2\left[\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right],$$

$$2\left[\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right],\ 2\left[\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right]$$

$v = \frac{4}{u}$ থেকে পাই, v-এর মানগুলি যথাক্রমে

$$v = 2\left[\cos\frac{2\pi}{9} - i\sin\frac{2\pi}{9}\right],\ 2\left[\cos\frac{8\pi}{9} - i\sin\frac{8\pi}{9}\right] \text{ ও}$$

$$2\left[\cos\frac{14\pi}{9} - i\sin\frac{14\pi}{9}\right]$$

অতএব, নির্ণেয় বীজগুলি $4\cos\frac{2\pi}{9}$, $4\cos\frac{8\pi}{9}$, $4\cos\frac{14\pi}{9}$

(4) $x^3 + 15x^2 - 33x - 847 = 0$

দ্বিতীয় পদ (x^2 সমন্বিত) বিলোপের জন্য $x = y + h$ ($h \neq 0$) বসালাম। ফলে $(y + h)^3 + 15(y + h)^2 - 33(y + h) - 847 = 0$

y^2-এর সহগ $= 3h + 15 = 0 \Rightarrow h = -5$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 15 & -33 & -847 \\
-5 & & -5 & -50 & 415 \\
\hline
 & 1 & 10 & -83 & -432 \\
 & & -5 & -25 & \\
\hline
 & 1 & 5 & -108 & \\
 & & -5 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & & \\
\end{array}$$

$y^3 - 108y - 432 = 0$ যেখানে $y = x - h = x + 5$

বা, $x = y - 5$

ধরি, $y = u + v \Rightarrow y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0$

$\Rightarrow uv = 36,\ u^3 + v^3 = 432$

$(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4(u^3v^3) = 0 \Rightarrow u^3 - v^3 = 0$

$u^3 = 216 \Rightarrow u = 6,\ 6\omega,\ 6\omega^2$

$v = \dfrac{36}{u} \Rightarrow u = 6, v = 6\ ;\ u = 6\omega, v = 6\omega^2\ ;$

$u = 6\omega^2,\ v = 6\omega$

অতএব, $y = 12,\ 6(\omega + \omega^2),\ 6(\omega^2 + \omega)$

$= 12, -6, -6$

সুতরাং, $x = y - 5 = 7, -11, -11$

(5) $x^3 - 12x^2 - 6x - 10 = 0$

দ্বিতীয় পদ (x^2-সমন্বিত) বিলোপের জন্য $x = y + h$ বসাই।

$$(y + h)^3 - 12(y + h)^2 - 6(y + h) - 10 = 0$$

y^2-এর সহগ $= 3h - 12 = 0 \Rightarrow h = 4$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
4 & 1 & -12 & -6 & -10 \\
 & & 4 & -32 & -152 \\
\hline
 & 1 & -8 & -38 & -162 \\
 & & 4 & -16 & \\
\hline
 & 1 & -4 & -54 & \\
 & & 4 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & & \\
\end{array}$$

$$y^3 - 54y - 162 = 0 \text{ যেখানে } x = y + 4$$

$$y = u + v \Rightarrow y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0$$

$$\Rightarrow uv = 18,\ u^3 + v^3 = 162 \Rightarrow u^3 - v^3 = \pm 54$$

$$u^3 + v^3 = 162,\ u^3 - v^3 = 54 \Rightarrow u^3 = 108 \Rightarrow u = 3.\sqrt[3]{4},\ 3.\sqrt[3]{4}\,w, 3\sqrt[3]{4}\,\omega^2$$

$$u = \frac{18}{u} \Rightarrow u = 3.\sqrt[3]{4},\ v = 3.2^{\frac{1}{3}}\omega^2;$$

$$u = 3.\sqrt[3]{4}\,\omega^2, v = 3.2^{\frac{1}{3}}.\omega$$

$$\Rightarrow y = 3(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}),\ 3(\sqrt[3]{4}\,\omega + \sqrt[3]{2}\,\omega^2),\ 3(\sqrt[3]{4}\,\omega^2 + \sqrt[3]{2}\ \omega)$$

$$\Rightarrow x = 4 + 3(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}),\ 4 + 3(\sqrt[3]{4}\omega + \sqrt[3]{2}\,\omega^2),\ 4 + (\sqrt[3]{4}\,\omega^2 + \sqrt[3]{2}\,\omega)$$

2.7 সারাংশ

এই এককে বহুপদ রাশির প্রারম্ভিক আলোচনার পাশাপাশি প্রমাণ করা হয়েছে যে n ঘাতবিশিষ্ট বহুপদ রাশির ঠিক n সংখ্যক বীজ আছে। বীজের চিহ্ন ও চরিত্রর প্রাথমিক আলোচনা হয়েছে। ত্রিঘাত ও চতুর্ঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে বীজগুলির মধ্যে কার্যকর সম্পর্ক দেওয়া থাকলে সেই সমীকরণগুলির সমাধানের পন্থা আলোচিত হয়েছে। এক সমীকরণ থেকে ক্ষেত্রবিশেষে অন্য সমীকরণ নির্ণয় ও সর্বোপরি ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধানের একটি পন্থা আলোচিত হয়েছে।

2.8 প্রশ্নাবলী

1. দেখান যে, $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \frac{4}{x-4} + \frac{5}{x-5} = 6$ সমীকরণের সব বীজ বাস্তব।
2. $x^4 - 8x^3 + 32x^2 - 80x + 100 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ $3 + i$ হলে সমীকরণটির সমাধান করুন।
3. $27x^4 - 60x^3 - 70x^2 + 20x + 3 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকলে সমীকরণটি সমাধান করুন।
4. এমন একটি সমীকরণ গঠন করুন যার বীজগুলি $3x^4 + 7x^3 - 15x^2 + x - 2 = 0$-এর বীজগুলির চেয়ে 7 করে বেশি।

5. দেকার্তের চিহ্নের নিয়ম প্রয়োগ করে নিম্ন সমীকরণগুলির বীজের প্রকৃতি নির্ণয় করুন :

(i) $x^4 + 2x^3 + 3x - 1 = 0$, (ii) $x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$, (iii) $x^4 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$

6. যুক্তি দিন : $27x^4 - 48x^2 - 12x + 13 = 0$ সমীকরণটির কেবলমাত্র দুটি বাস্তব বীজ আছে—একটি $(0, 1)$ মুক্ত অন্তরালে ও অপরটি $(1, 2)$ মুক্ত অন্তরালে আছে।

7. কার্ডন-এর পদ্ধতিতে সমাধান করুন :

(i) $x^3 - 12x + 65 = 0$, (ii) $x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0$, (iii) $x^3 - 6x - 9 = 0$, (iv) $x^3 - 15x - 126 = 0$, (v) $x^3 + 6x^2 - 12x + 32 = 0$, (vi) $x^3 - 3x^2 + 12x + 16 = 0$, (vii) $x^3 - 24x + 72 = 0$, (viii) $x^3 - 3x + 1 = 0$.

8. $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ সমীকরণের দুটি বীজের যোগফল শূণ্য। সমীকরণটির সমাধান করুন।

2.9 উত্তরের সংকেত

(2) $3 \pm i$, $i \pm 3i$, (3) $3, -1, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}$

(4) $3y^4 - 77y^3 + 720y^2 - 2876y + 4058 = 0$

(7) (i) $-5, -(\omega + 4\omega^2), -(\omega^2 + 4\omega)$, (ii) $1, -5, -5$, (iii) $3, 2\omega + \omega^2, 2\omega^2 + \omega$, (iv) $6, \omega + 5\omega^2, \omega^2 + 5\omega$, (v) $-6, -2 - 2\omega - 4\omega^2, -2 - 2\omega^2 - 4\omega$

(vi) $-1,\ 2(1 \pm i\sqrt{3})$ (vii) $-6, -4\omega^2 - 2\omega, -4\omega - 2\omega^2$

(viii) $2\cos\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{8\pi}{9}, 2\cos\frac{14\pi}{9}$

(8) $\pm\sqrt{3},\ 1 \pm i\sqrt{6}$.

একক 3 ❑ ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক
(Matrix and Determinant)

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

ম্যাট্রিক্স তত্ত্ব ও তার বিকাশ সাধনে যে গণিতজ্ঞদের নাম সুবিদিত তাঁদের মধ্যে রয়েছেন আর্থুর কেলী, জেমস্ যোশেফ সিলভেস্টার, ডব্লু আর হ্যামিলটন, ই লায়েরে, জি ফ্রবেনিয়াস প্রমুখ। কোয়াণ্টাম তত্ত্বে ম্যাট্রিক্স তত্ত্বের প্রয়োগের জন্য হাইসেনবার্গ-এর নামও উল্লেখ্য।

শুধুমাত্র বিশুদ্ধ গণিত ও ফলিত গণিতের বিভিন্ন শাখায় নয়, কোয়ান্টিটেভ ফলিত বিজ্ঞানে, ভৌত বিজ্ঞান ও জীব বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায়, রৈখিক মডেল সম্পর্কিত আলোচনায় ম্যাট্রিক্স তত্ত্বের প্রভূত প্রয়োগ রয়েছে। আমাদের সীমাবদ্ধ পাঠক্রমে একগুচ্ছ রৈখিক সমীকরণের সমাধানের সম্ভাবনা, সমাধান যোগ্য হলে সমাধান অনন্য কিংবা অনন্য নয় সেটি পরীক্ষা করা ও সমাধান করার কাজে ম্যাট্রিক্স তত্ত্বের প্রয়োগ পদ্ধতি আমরা আলোচনা করব। ম্যাট্রিক্স তত্ত্বের

এই প্রাথমিক আলোচনায় এক বিশেষ ধরনের ম্যাট্রিক্সের অনুষঙ্গী হিসাবে নির্ণায়ক এর ধারণা ও তার প্রয়োগ নিয়েও প্রাথমিক আলোচনায় আমরা প্রয়াসী হব।

3.2 ম্যাট্রিক্সের প্রাথমিক ধারণা

পাঠক্রমের নির্দেশ অনুসারে এখানে আমরা বাস্তব রাশির সেট $\mathbb{R}$-এর উপরে ম্যাট্রিক্স আলোচনা করব।

সংজ্ঞা : mn সংখ্যক বাস্তব রাশিকে m সংখ্যক সারি ও n সংখ্যক স্তম্ভে বিন্যস্ত করলে যে আয়তাকার সজ্জা পাওয়া যাবে তাকে $m\times n$ ক্রমের (বা আকারের) ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি সেই সজ্জা যোগ, স্কেলর দ্বারা গুণণ, নিজেদের মধ্যে গুণণের নিম্ন বর্ণিত প্রক্রিয়া অনুসরণ করে ও সমতার নিম্ন সূত্র সিদ্ধ হয় :

(i) ম্যাট্রিক্সের যোগ : দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B-এর মধ্যে যোগ একমাত্র তখনই সংজ্ঞাত হবে যখন দুটির সারি সংখ্যা ও স্তম্ভ সংখ্যা পরস্পর সমান হবে। A-এর প্রতিটি উপাদানের সঙ্গে B-এর অনুষঙ্গী উপাদান যোগ করলে $A+B$-এর সংশ্লিষ্ট উপাদান পাওয়া যাবে। যদি $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ হয় (i তম সারি ও j তম স্তম্ভের ছেদ স্থলে অভিন্ন উপাদান A-এর ক্ষেত্রে a_{ij} ও B-র ক্ষেত্রে b_{ij} হিসাবে চিহ্নিত হবে), তবে $A+B$ ম্যাট্রিক্সের (i,j) তম উপাদান হবে $a_{ij}+b_{ij}(a_{ij},b_{ij},\in\mathbb{R})$

(ii) স্কেলর দ্বারা গুণণ : যদি $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ ও $\lambda\in\mathbb{R}$ হয়, তবে $\lambda A=\left(\lambda a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ হবে।

(iii) ম্যাট্রিক্সের গুণণ : যদি A ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভের সংখ্যা B ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যার সঙ্গে সমান হয়, একমাত্র তখনই AB গুণ সংজ্ঞাত হবে এবং

$A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ ও $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ হলে $AB=\left(c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le p}}$ ও সকল i, j-এর জন্য $c_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ হবে।

(iv) A ও B ম্যাট্রিক্স সমান একমাত্র তখনই হবে যখন (ক) দুজনের সারির সংখ্যা পরস্পর সমান ও স্তম্ভের সংখ্যা পরস্পর সমান হবে অর্থাৎ $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ হবে এবং (খ) সকল i, j-এর জন্য $a_{ij}=b_{ij}$ হবে।

ম্যাট্রিক্স $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ কে নিম্নভাবে

প্রকাশ করা হয় : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{mi} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

বা, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

লক্ষণীয় i তম সারি $\begin{pmatrix} a_{ji} & a_{j2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ ও j তম স্তম্ভ $\begin{pmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

এবং $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

মন্তব্য ঃ (i) যদি কোন ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে সারি সংখ্যা ও স্তম্ভ সংখ্যা উভয়েই সমান হয়, মনে করি m, তবে সেই ম্যাট্রিক্সকে m আকারের বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হবে। $\left(a_{ij}\right)_{m\times m}$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

(ii) যদি কোন ক্ষেত্রে $m = 1$ হয় অর্থাৎ একটি মাত্র সারি হয়, তাকে সারি ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ ঃ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$

(iii) যদি কোন ক্ষেত্রে $n = 1$ হয় অর্থাৎ একটি মাত্র স্তম্ভ হয়, তাকে স্তম্ভ-ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ ঃ $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

(iv) বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$-এর ক্ষেত্রে $a_{ij} = 0, i \neq j$ হলে ম্যাট্রিক্সকে কর্ণ-ম্যাট্রিক্স বলা হবে।

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & a_{ii} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \left(a_{ij} \in \mathbb{R}\right)$ একটি বলম্যাট্রিক্স।

(v) একটি কর্ণ-ম্যাট্রিক্স-এর প্রধান কর্ণের পদগুলি সমমান বিশিষ্ট হলে তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ ঃ $\begin{pmatrix} p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p \end{pmatrix}$ (সারি সংখ্যা = স্তম্ভ সংখ্যা = n)

(vi) স্কেলার ম্যাট্রিক্স-এর প্রধান কর্ণের সব পদ 1 হলে তাকে একসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

(vii) একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের ও প্রধান কর্ণের উপরিস্থিত পদগুলি ছাড়া অপর পদগুলি শূন্যমান বিশিষ্ট হলে তাকে উচ্চ ত্রিভুজ ম্যাট্রিক্স বলা হয়ে থাকে।

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$, একটি উচ্চ ত্রিভুজ ম্যাট্রিক্স -এর উদাহরণ।

অনুরূপভাবে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণ ও প্রধান কর্ণের নিম্নস্থিত পদগুলি ছাড়া বাকী সব পদ শূন্য হলে তাকে নিম্ন ত্রিভুজ ম্যাট্রিক্স বলা হয়ে থাকে।

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$ একটি নিম্ন ত্রিভুজ ম্যাট্রিক্স-এর উদাহরণ।

(viii) যদি $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ -এর ক্ষেত্রে সব i, j-এর জন্য $a_{ij} = 0$ হয়, তবে A-কে শূন্যম্যাট্রিক্স বলা হয়ে থাকে। অন্যথায় ম্যাট্রিক্সটিকে অশূন্য ম্যাট্রিক্স বলা হবে।

(ix) ম্যাট্রিক্স $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ -এর উপাদান বা পদগুলি বাস্তব রাশি, কিন্তু ম্যাট্রিক্স কখনোই কোন সংখ্যাকে সূচিত করে না।

3.2.1 ম্যাট্রিক্সের বিভিন্ন ধর্ম

(ক) ম্যাট্রিক্সের যোগের ক্ষেত্রে নিম্ন ধর্মগুলি সিদ্ধ হয় :

(প্রতিটি ম্যাট্রিক্স $m \times n$ ক্রমের বা আকারের নেওয়া হচ্ছে) $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$; $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$

(i) $C(A+B) = CA + CB, C \in \mathbb{R}$

(ii) $(C+D)A = CA + DA, C, D \in \mathbb{R}$

(iii) $A + B = B + A$

যেহেতু বাস্তব রাশির ক্ষেত্রে $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, সকল i, j-এর ক্ষেত্রে, ফলে $A + B = B + A$ হবে।

(iv) $A + (B + C) = (A + B) + C$

বাম দিকের ম্যাট্রিক্সের (i,j) তম পদ $= a_{ij} + \left(b_{ij} + c_{ij}\right)$

$= \left(a_{ij} + b_{ij}\right) + c_{ij}$ (বাস্তব রাশির সংযোগ ধর্ম অনুযায়ী)

$=$ ডান দিকের ম্যাট্রিক্সের (i,j) তম পদ

(খ) স্কেলর গুণনের ক্ষেত্রে নিম্ন সূত্রগুলি প্রযোজ্য হয়।

$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ হলে

(i) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \mu(\lambda A)(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

(ii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(iii) $OA = O_{m\times n}$ ($m\times n$ ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্স, কিন্তু শূন্য লেখা যাবে না)

(iv) $\lambda 0_{m\times n} = 0_{m\times n}$

(v) $(-1)A = -A = \left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$

(ফলে A ও B উভয়ে $m\times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে $A - B = A + (-B)$ হয়)

(vi) $A + (-A) = 0_{m\times n}$

মন্তব্য : $A + B = A + C \Rightarrow B = C$, কেননা $-A + (A + B) = -A + (A + C)$

$$\Rightarrow (-A + A) + B = (-A + A) + C$$

(গ) ম্যাট্রিক্সের গুণণের ক্ষেত্রে : $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times p}$ যেখানে $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$

(i) বিনিময় ধর্ম সাধারণ ভাবে সিদ্ধ হয় না।

প্রথমত উপরে সংজ্ঞাত A ও B অনুযায়ী, AB সংজ্ঞাত ও $m \times p$ আকারের ম্যাট্রিক্স। কিন্তু BA সংজ্ঞাত হবে একমাত্র যদি $p = m$ হয়। ফলে $p \neq m$ হলে BA সংজ্ঞাত নয়। যদি $p = m$ হয়, সেক্ষেত্রে AB ও BA উভয়েই সংজ্ঞাত। কিন্তু AB, m ক্রমের ও BA, n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স। উভয়ের ক্রম এক হবে না যদি $m \neq n$ হয়।

আবার ধরি $m = n$, সেক্ষেত্রে উভয়ই একই ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে।

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0(1) + 1(4) + 2(3) & 0(5) + 1(0) + 2(2) & 0(1) + 1(0) + 2(4) \\ 4(1) + 3(4) + 1(3) & 4(5) + 3(0) + 1(2) & 4(1) + 3(0) + 1(4) \\ 2(1) + 0(4) + 5(3) & 2(5) + 0(0) + 5(2) & 2(1) + 0(0) + 5(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 \\ 19 & 22 & 8 \\ 17 & 20 & 22 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 22 & 16 & 12 \\ 0 & 4 & 8 \\ 16 & 9 & 28 \end{pmatrix} \neq AB.$$

ফলে AB ও BA একই ক্রমবিশিষ্ট হলেও $AB \neq BA$ হতে পারে।

(ii) যদি A, B, C এমন তিনটি ম্যাট্রিক্স হয় যে BC, $A\ (BC)$, AB, $(AB)C$ সংজ্ঞাত হচ্ছে, তাহলে $A(BC) = (AB)C$ সিদ্ধ হবে।

ধরি $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$, $C = (c_{ij})_{p \times q}$

এখানে $(AB)C$ এবং $A\ (BC)$ উভয়েই $m \times q$ আকারের হবে। ....(1)

BC ম্যাট্রিক্সের (i, j) তম উপাদান $= s_{ij} = \sum_{l=1}^{p} b_{ij} c_{lj}$

$A(BC)$ ম্যাট্রিক্সের (i, j) তম উপাদান $= r_{ij}$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} s_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

AB ম্যাট্রিক্সের (i, j) তম উপাদান $= t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$(AB)C$ ম্যাট্রিক্সের (i, j) তম উপাদান $= u_{ij} = \sum_{l=1}^{p} t_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$

সমীম, দ্বি-শ্রেণীর ক্ষেত্রে সমষ্টি জ্ঞাপক চিহ্নের স্থান পরিবর্তনের যোগফল অ-পরিবর্তনীয় থাকে, অতএব $(AB)C$ -এর (i, j) তম পদ $= A(BC)$ -এর (i, j) তম পদ (2) অতএব (1) ও (2) থেকে পাই $(AB)\ C = A\ (BC)$ হবে।

(iii) AB, AC এবং $A(B + C)$ সংজ্ঞাত হলে

$A\ (B + C) = AB + AC$ হবে।

ধরি $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$, $C = (c_{ij})_{n \times p}$

যেখানে a_{ij}, b_{ij}, $c_{ij} \in \mathbb{R}$.

AB, AC, $AB + AC$ এবং $A(B + C)$ সকলেই $m \times p$ আকারের ম্যাট্রিক্স ....(1)

$B + C$ ম্যাট্রিক্সের (i, j) তম পদ s_{ij} হলে $s_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ যেখানে $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p$ হবে।

$A(B + C)$ ম্যাট্রিক্সের (i, j) তম পদ $t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} s_{kj}$

$$\Rightarrow t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(b_{kj} + c_{kj}\right)$$

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}$ (বাস্তব রাশির বন্টন ধর্ম অনুযায়ী)

$= AB$ -এর (i,j) তম পদ $+ AC$ -এর (i, j) তম পদ (2)

অতএব (1) ও (2) $\Rightarrow A\ (B + C) = AB + AC$ হবে।

মন্তব্য : যেহেতু ম্যাট্রিক্স গুণণের ক্ষেত্রে বিনিময় ধর্ম সাধারণ ভাবে সিদ্ধি হয় না, ফলে $A(B + C) = AB + AC$ থেকে সরাসরি $(A + B)\ C = AC + BC$ বলা যায় না। যদি AC, BC ও $(A + B)\ C$ সংজ্ঞাত হয়, তবে $(A + B)\ C = AC + BC$ অনুরূপ পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায়।

(iv) ম্যাট্রিক্সের এক বৈশিষ্ট্য : শূণ্য ভাজক

আমরা জানি যে কোন সীমাবদ্ধ বাস্তব রাশি বা অপেক্ষককে শূণ্য দিয়ে গুণ করলে গুণফল সর্বদা শূণ্য হয়। ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে বৈশিষ্ট্য হল ক্ষেত্রবিশেষে দুটি অশূণ্য ম্যাট্রিক্সের গুণফল শূণ্য ম্যাট্রিক্স হতে পারে।

ধরি $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

এখানে $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 0 & 30 & -36 \\ 0 & 25 & -30 \end{pmatrix}$

এখানে A ও B অশূণ্য ম্যাট্রিক্স কিন্তু AB শূণ্য ম্যাট্রিক্স।

সংজ্ঞা : $A = (A_{ij})_{m \times n}$ ও $B = (b_{ij})_{n \times p}$ অশূণ্য ম্যাট্রিক্স হলে

যদি $AB = O_{m \times p}$ হয়, তবে A কে বলা হবে বাম শূণ্য ভাজক ও B কে বলা হবে ডান শূণ্যভাজক। উপরের উদাহরণে A বাম ভাজক ও B ডানভাজক। কিন্তু BA থেকে স্পষ্ট যে B বামভাজক নয়।

(v) ম্যাট্রিক্সের গুণের ক্ষেত্রে অপসারণ ধর্ম প্রযুক্ত নয়।

ধরি $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

এক্ষেত্রে $AB = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix} = AC$ কিন্তু $B \neq C$

(vi) A কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য

$A^n = A^{n-1}, A$ এবং ($A^n . A^m$ হবে) $= A^{n+m}$ $(m \in N)$ হবে।

3.2.2. ম্যাট্রিক্সের বিভিন্ন প্রকার ভেদ

সংজ্ঞা : 1. কোন বর্গম্যাট্রিক্স A -এর ক্ষেত্রে $A^2 = A$ হলে A কে বলা হবে বর্গৈকসম (*idempotent*) ম্যাট্রিক্স।

উদাহরণ : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ বর্গৈকসম ম্যাট্রিক্স।

সংজ্ঞা 2. কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A -এর ক্ষেত্রে যদি এমন কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা r থাকে যে A^r শূণ্য ম্যাট্রিক্স হয়, তবে ম্যাট্রিক্সটিকে nilpotent বলা হবে ও যে ক্ষুদ্রতম r -এর জন্য ইহা সত্য হবে সেই r কে nilpotent ম্যাট্রিক্সের ঘাত (order) বলা হবে।

উদাহরণ : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ তৃতীয় ঘাতের nilpotent ম্যাট্রিক্স হবে।

সংজ্ঞা 3. কোন বর্গম্যাট্রিক্স A -এর ক্ষেত্রে যদি A^2 একসম ম্যাট্রিক্স হয়, তবে A -কে involutory ম্যাট্রিক্স বলা হবে।

উদাহরণ : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ হলে $A^2 = I_3$.

সংজ্ঞা 4. (i) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে স্তম্ভ এবং সারিগুলিকে পরস্পরের সঙ্গে অদলবদল করলে অর্থাৎ স্তম্ভগুলিকে সারি ও সারিগুলিকে স্তম্ভ দিয়ে প্রতিস্থাপন করলে উৎপন্ন নতুন ম্যাট্রিক্সকে পূর্বতন ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত (transpose) ম্যাট্রিক্স বলে ও A^T বা A' দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(ii) কোন বর্গম্যাট্রিক্স $A = (aij)_{n \times n}$ -এর ক্ষেত্রে সকল i, j -এর জন্য $aij = aji$ হলে অর্থাৎ $A^T = A$ হলে ম্যাট্রিক্স A -কে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে।

(iii) কোন বর্গম্যাট্রিক্স $A = (aij)_{n \times n}$ -এর ক্ষেত্রে সকল i, j -এর জন্য $a_{ij} = -a_{ji}$ হলে অর্থাৎ $A^T = -A$ হলে A -কে বি-প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়ে থাকে।

$A = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ হলে $A^T = A$ ও A প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

সংজ্ঞা 5. বর্গম্যাট্রিক্স A, $A^TA = I$ বা $AA^T = I$ সম্পর্ককে সিদ্ধ করলে A কে লম্ব ম্যাট্রিক্স বলা হবে [এখানে I হল একই ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স]

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, লম্ব ম্যাট্রিক্স।

উল্লেখযোগ্য ধর্মসমূহ

1. A ও B একই ক্রম বা আকারের ম্যাট্রিক্স হলে $(A + B)^T = A^T + B^T$ হবে।

ধরি $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$

$(A + B)^T$ এবং $A^T + B^T$ উভয়ই একই ক্রম $n \times m$ বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স হবে ....(1)

$(A + B)^T$ ম্যাট্রিক্সের (i, j) তম উপাদান $= (A + B)$ ম্যাট্রিক্সের (j, i) তম উপাদান

$=$ A ম্যাট্রিক্সের (j, i) তম উপাদান $+$ B ম্যাট্রিক্সের (j, i) তম উপাদান।

$=$ A^T ম্যাট্রিক্সের (i, j) তম উপাদান $+$ B^T ম্যাট্রিক্সের (i, j) তম উপাদান

$= (A^T + B^T)$ ম্যাট্রিক্সের (i, j) তম উপাদান ....(2)

(1) ও (2) থেকে $(A + B)^T = A^T + B^T$

2. $\lambda \in R$ হলে $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

3. A ও B একই ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ হলে $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$ হবে।

4. A ও B ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে গুণফল AB সংজ্ঞাত হলে $(AB)^T = B^TA^T$ হবে।

ধরি $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$; $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$.

ফলে AB সংজ্ঞাত, $m \times p$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

অতএব $(AB)^T$ এবং B^TA^T উভয়ই $p \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স (1) এখন $(AB)^T$ -এর (i, j) তম উপাদান $=$ (AB) -এর (j, i) তম উপাদান

$= a_{j1} b_{1i} + a_{j2} b_{2i} + \ldots\ldots\ldots + a_{jn} b_{ni}$

$= b_{1i} a_{j1} + B_{2i} a_{j2} + \ldots\ldots\ldots + b_{ni} a_{jn}$

$= (B^TA^T)$ -এর (i, j) তম উপাদান (2)

(1) ও (2) $\Rightarrow (AB)^T = B^T A^T$

5. A ও B একই ক্রমের প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (*i*) $A + B$ প্রতিসম হবে (ii) AB প্রতিসম হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $AB = BA$ হয়।

যেহেতু A ও B একই ক্রমের সুতরাং $A + B$ ও AB উভয়েই সংজ্ঞাত হবে। A ও B প্রতিসম বলে $A^T = A$, $B^T = B$ হবে।

$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B \Rightarrow A + B$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

আমরা জানি $(AB)^T = B^T A^T$ সত্য।

যদি $AB = BA$ হয়, তবে $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ হবে অর্থাৎ AB প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে।

যদি AB প্রতিসম হয়, $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$ হবে।

6. একটি বর্গম্যাট্রিক্স ও তার পরিবর্ত ম্যাট্রিক্সের গুণফল প্রতিসম হবে।

মনে করি A বর্গম্যাট্রিক্স। $B = AA^T$

$B^T = (A^T)^T A^T = AA^T = B \Rightarrow B$ প্রতিসম।

7. যদি A বর্গম্যাট্রিক্স হয় তবে $A + A^T$ প্রতিসম ও $A - A^T$ বিপ্রতিসম হবে।

$(A + A^T)^T = A^T + A = A + A^T \Rightarrow A + A^T$ প্রতিসম।

$(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) \Rightarrow A - A^T$ বিপ্রতিসম।

8. একটি বর্গম্যাট্রিক্স A কে অনন্য উপায়ে একটি প্রতিসম ও একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = X + Y$$

ধর্ম (7) অনুযায়ী X প্রতিসম ও Y বিপ্রতিসম। যদি ঐ যোগফল হিসাবে প্রকাশ অনন্য না হয়, ধরি $A = P + Q$ আর একটি প্রকাশ যেখানে P প্রতিসম ও Q বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

$A^T = (P + Q)^T = P^T + Q^T = P - Q$

সুতরাং $A + A^T = 2P, \qquad A - A^T = 2Q$

অতএব $2X = 2P$, $2Y = 2Q$ ও $X = P$, $Y = Q$ হবে।

9. A ও B দুটি একই ক্রমের লম্ব ম্যাট্রিক্স হলে AB লম্ব ম্যাট্রিক্স হবে।

শর্তানুসারে $A^T A = I$, $B^T B = I$ হবে।

$(AB)^T (AB) = B^T (A^T A) B = B^T (I) B = B^T B = I$

অতএব AB লম্ব ম্যাট্রিক্স হবে।

10. A লম্ব ম্যাট্রিক্স হলে A^T লম্ব ম্যাট্রিক্স হবে।

$A^T A = I \Leftrightarrow AA^T = I$.

ধরি $B = A^T$. অতএব $B^T B = (A^T)^T A^T = AA^T = I$

সুতরাং B লম্ব ম্যাট্রিক্স হবে।

3.2.3 উদাহরণ

1. যদি $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ হয়, দেখান যে $n \in \mathbb{N}$ হলে $A^n = \begin{pmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix}$

$n = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1+2(1) & -4(1) \\ 1 & 1-2(1) \end{pmatrix}$ অর্থাৎ $n = 1$ এর জন্য সত্য।

ধরি যে $k \in \mathbb{N}$ -এর জন্য $A^k = \begin{pmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-4k \end{pmatrix}$ সত্য।

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+6k-4k & -4-8k+4k \\ 3k+1-2k & -4k-1+2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2k & -4-4k \\ k+1 & -1-2k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2(k+1) & -4(1+k) \\ 1+k & 1-2(1+k) \end{pmatrix}$$

অতএব প্রদত্ত সম্পর্কটি $n = k$ -এর জন্য সত্য হলে সেটি $n = k + 1$ -এর জন্যও সত্য। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে ঐ সম্পর্কটি সকল $n \in \mathbb{N}$ -এর জন্য সত্য।

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে একটি প্রতিসম ও আর একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করুণ।

এখানে $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$X = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 7/2 \\ 3 & 7/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

X প্রতিসম কেননা $X^T = X$, Y বিপ্রতিসম কেননা $Y^T = -Y$ এবং $A = X + Y$

3. যদি বর্গম্যাট্রিক্স A বগেঁকসম হয়, দেখান যে $B = I - A$ (I, A -র সঙ্গে একই ক্রমের একসম ম্যাট্রিক্স) বগেঁকসম হবে এবং $AB = BA =$ শূণ্য ম্যাট্রিক্স হবে।

শর্তানুসারে $A^2 = A$

$B^2 = (I - A)(I - A) = I - A - A + A^2$ (বন্টন ধর্ম অনুযায়ী)

$= I - A - A + A = I - A = B$

অতএব B বগেঁকসম ম্যাট্রিক্স।

$AB = A(I - A) = A - A^2$ (বন্টন ধর্ম) $= A - A = 0$, শূণ্য ম্যাট্রিক্স। অনুরূপভাবে BA শূণ্য ম্যাট্রিক্স হবে।

4. যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix}$ এবং

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ হয়, a ও b নির্ণয় করুন।

$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ (বন্টন ধর্ম অনুযায়ী)

$= A^2 + 2AB + B^2$ (প্রদত্ত)

ফলে $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Rightarrow AB = BA$, ম্যাট্রিক্সের যোগ সাপেক্ষে অপসারণ ধর্ম অনুযায়ী।

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & 2 \\ 2a + b & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2 & -a + 1 \\ b - 2 & -b - 1 \end{pmatrix}$$

$AB = BA \Leftrightarrow a - b = a + 2,\ 2 = -a + 1,\ 2a + b = b - 2,\ 1 = -b - 1$

প্রথম দুটি থেকে $b = -2$, $a = -1$ যা পরের দুটিকে সিদ্ধ করে।

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ হলে $A^2 - 4A - 5I_3 = 0_3$ হবে।

এখানে $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (যাচাই করুন)

$$A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -8 & -8 \\ -8 & -4 & -8 \\ -8 & -8 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

6. A ও B একই ক্রমের দুটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ কখন সিদ্ধ হবে নির্ণয় করুন।

$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $AB = BA$ হয়।

7. $\begin{pmatrix} x - y & y - t \\ z + t & x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z & x - z \\ 2 + t & 3 + y \end{pmatrix}$ হলে x, y, z, t নির্ণয় করুন।

দুটি ম্যাট্রিক্সের সমান হবার শর্ত থেকে

$$x - y = y - z, \quad y - t = x - z, z + t = 2 + t, x + z = 3 + y$$

$\Rightarrow z = 2$, সুতরাং $x - 2y = -2$ এবং $x - y + t = 2$, $x - y = 1$.

অতএব $1 + y - 2y = -2 \Rightarrow y = 3, x = 4$

ফলে $t = 2 - x + y = 2 - 4 + 3 = 1$

8. $3A - B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -3 & -4 & 7 \\ 3 & -17 & 5 \end{pmatrix}$, $A + 2B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ 6 & 8 & -7 \\ 1 & 34 & -10 \end{pmatrix}$ দেওয়া আছে। A ও B নির্ণয় করুন।

$$2(3A - B) + (A + 2B) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ 6 & 8 & -7 \\ 1 & 34 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ 6 & 8 & -8 \\ 0 & 34 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 0 & 17 & -5 \end{pmatrix}$$

9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}$ লম্ব ম্যাট্রিক্স হলে α, β ও γ নির্ণয় করুন।

শর্তানুসারে $AA^T = I_3$ হবে।

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\beta & \beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4\beta^2 + \gamma^2 & 2\beta^2 - \gamma^2 & \gamma^2 - 2\beta^2 \\ 2\beta^2 - \gamma^2 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \\ \gamma^2 - 2\beta^2 & \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 4\beta^2 + \gamma^2 = 1,\ 2\beta^2 - \gamma^2 = 0,\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$\Rightarrow \beta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ \gamma = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ এবং তৃতীয়টি থেকে $\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

10. A বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স ও $A^2 + I = 0$ হলে, যেখানে I ও O, A -র মত একই ক্রমের ও যথাক্রমে একসম ও শূণ্য ম্যাট্রিক্স, A লম্ব ম্যাট্রিক্স হবে।

A বিপ্রতিসম ফলে $A = -A^T$

$\Rightarrow A^2 = -AA^T \Rightarrow -I = -AA^T$

$\Rightarrow AA^T = I \Rightarrow A$ লম্ব ম্যাট্রিক্স।

3.3 নির্ণায়ক : ধারণা ও ধর্ম

এই অংশে আমরা দ্বিতীয় ক্রমের ও তৃতীয় ক্রমের নির্নায়ক নিয়ে আলোচনা করব।

(i) মনে করি $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}$ -এর উপর সংজ্ঞাত একটি দ্বিতীয় ক্রমের ম্যাট্রিক্স। A -এর নির্ণায়ক বা det A বলতে বুঝাবে একটি অনন্য বাস্তব রাশি $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, কার্যত একটি অপেক্ষক এখানে সংজ্ঞাত হচ্ছে $A \to \det A$ যেখানে $\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in \mathbb{R}$ হবে। অপেক্ষকটিকে নিম্ন ভাবেও প্রকাশ করা যায় :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(ii) মনেকরি $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R}$

এখানেও $A \to \det A$ একটি অপেক্ষক সংজ্ঞাত হচ্ছে যে

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) + a_{31}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{31}a_{22})$$

নির্ণায়কের ধর্ম

1. যে কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A -র ক্ষেত্রে $\det A = \det (A^T)$ হবে।

2. যে কোন নির্ণায়কের দুটি সারি বা স্তম্ভ পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের সাংখ্যমান একই থাকে, কেবল তার চিহ্ন পরিবর্তিত হয়।

3. যদি নির্ণায়কের যে কোন দুটি সারি বা স্তম্ভ অভিন্ন হয়, তাহলে নির্ণায়কের মান সর্বদা শূণ্য হয়।

4. কোন নির্ণায়কের ($\det A$) একটি নির্দিষ্ট সারির বা স্তম্ভের উপাদানগুলিকে একটি ধ্রুবক সংখ্যা $\lambda(\in \mathbb{R})$ দিয়ে গুণ করলে নির্ণায়কের মান হবে $\lambda \det A$.

5. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6. একটি বর্গম্যাট্রিক্স A -এর কোন একটি সারি (স্তম্ভ) -কে একটি ধ্রুবক সংখ্যা $\lambda(\in \mathbb{R})$ দিয়ে গুণ করে অন্য একটি সারি (স্তম্ভ)-র সঙ্গে যোগ করলে নির্ণায়ক $\det A$-এর মান অ-পরিবর্তিত থাকে।

7. মনেকরি নির্ণায়ক Δ -এর উপাদানগুলি x -এর বহুপদ রাশি। যদি $x = \alpha$ বসালে k ($k \geq 2$) সংখ্যকসারি (স্তম্ভ) অভিন্ন হয়, তবে $(x - \alpha)^{k-1}$ ঐ নির্ণায়ক Δ -এর একটি উৎপাদক হবে।

3.3.1. নির্ণায়কের নির্ণয় পদ্ধতি ঃ মাইনর ও সহ-উৎপাদক

সংজ্ঞা : একটি নির্ণায়কের (এখানে তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক) কোন একটি উপাদান যে সারি এবং যে স্তম্ভে অবস্থিত সেই সারি এবং স্তম্ভকে বাদ দিয়ে যে নির্ণায়কটি পাওয়া যায় সেটিই হল ঐ উপাদানের মাইনর।

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কে

a_{32} -এর মাইনর হল $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$

a_{21} -এর মাইনর হল $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$

সংজ্ঞা : নির্ণায়ক Δ -এর (i,j) তম উপাদান a_{ij} -এর মাইনর-কে M_{ij} দিয়ে চিহ্নিত করলে $(-1)^{i+j}.\ M_{ij}$ -কে a_{ij} -এর সহ উৎপাদক বলা হবে ও A_{ij} দিয়ে চিহ্নিত করা হবে। $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\ M_{ij}$.

নির্ণায়কের নির্ণয় পদ্ধতির ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম :

যদি $\Delta = \det(a_{ij})$ এবং a_{ij} -এর সহ উৎপাদক A_{ij} হয়, তবে i, j, k -এর সম্ভাব্য সকল মানের জন্য

(i) $a_{i1} + A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \ldots + a_{in} A_{kn} = \Delta$, যদি $i = k$

$= 0$, যদি $i \neq k$

(ii) $a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \ldots + a_{nj} A_{nk} = \Delta$, যদি $j = k$

$= 0$, যদি $j \neq k$

উপরে উল্লিখিত সাধারণ নিয়মে n ক্রমের নির্ণায়ক বিবেচনা করা হয়েছে।

তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়কের ক্ষেত্রে :

$$a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = \Delta$$

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$$

$$a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} = \Delta$$

ইত্যাদি পাওয়া যাবে।

নির্ণায়কের গুণ

যদি A ও B দুটি একই ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়, তবে $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

উল্লেখ্য, পাঠ্যক্রমের নির্দেশিকা অনুসারে এখানে A ও B -এর ক্রম 3 -এর বেশি নয়।

[মন্তব্য : যদি $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$

হয়, আমরা $B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ লিখতে পারি ও $(\det A)(\det B)$ নির্ণয় করা যায়।]

(2) A লম্ব ম্যাট্রিক্স হলে $AA^T = I \Rightarrow \det A = \pm 1$.

3.3.2. সংলগ্ননির্ণায়ক : সংজ্ঞা ও ধর্ম

সংজ্ঞা : যদি $\Delta = \det(a_{ij})$ তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক হয়, তবে সংলগ্ন নির্ণায়ক বলতে $Adj\, \Delta = \det(Aij)$ বুঝাবে।

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, Adj\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

যেখানে Adj বলতে aij -এর সহ উৎপাদক বুঝাবে।

জ্যাকোবি-র উপপাদ্য $Adj\ \Delta = \Delta^2$

(i) মনে করি $\Delta \neq 0$.

$$\Delta .\ Adj\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3$$

যেহেতু $\Delta \neq 0$, $Adj\ \Delta = \Delta^2$ হবে।

(ii) মনে করি $\Delta = 0$

$$\text{এক্ষেত্রে}\ \left.\begin{array}{l} a_{11}\quad A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{12}A_{13} = 0 \\ a_{11}\quad A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0 \\ a_{11}\quad A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0 \end{array}\right\}$$

এখানে a_{11}, a_{12}, a_{13} সকলে শূণ্য নয়, অপনয়ন পদ্ধতিতে পাই $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow Adj\ \Delta = 0 = \Delta^2$

3.3.3 প্রতিসম ও বিপ্রতিসম নির্ণায়কের ধর্ম

নির্ণায়ক $\Delta = \det\ (a_{ij})\ (i,j \in \{1, 2, 3\})$ -কে প্রতিসম বলা হবে যদি সকল i, j -এর জন্য $aij = aji$ হয় এবং বিপ্রতিসম বলা হবে যদি সকল i, j -এর জন্য $a_{ij} = a_{ji}$ হয়।

নিম্ন ধর্মগুলি প্রযোজ্য :

(i) প্রতিসম নির্ণায়কের সংলগ্ন নির্ণায়ক প্রতিসম হবে।

(ii) অযুগ্ম ক্রমের বিপ্রতিসম নির্ণায়কের সংলগ্ন নির্ণায়ক প্রতিসম হবে এবং যুগ্ম ক্রমের বিপ্রতিসম নির্ণায়কের সংলগ্ন নির্ণায়ক বিপ্রতিসম হবে।

(iii) অযুগ্ম ক্রমের বিপ্রতিসম নির্ণায়কের মান শূণ্য হবে।

(iv) যুগ্ম ক্রমের বিপ্রতিসম নির্ণায়ক পূর্ণ বর্গ হবে।

(i) $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$ -এর সংলগ্ন নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$ প্রতিসম।

(ii) $\begin{vmatrix} x & c & -b \\ -c & x & a \\ b & -a & x \end{vmatrix}$ এর সংলগ্ন নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} a^2+x^2 & ab-cx & ac+bx \\ ab-cx & b^2+x^2 & bc+ax \\ ac+bx & bc+ax & c^2+x^2 \end{vmatrix}$ প্রতিসম।

(iii) $\begin{vmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{vmatrix} = 0$

(iv) $\begin{vmatrix} 0 & h \\ -h & 0 \end{vmatrix} = h^2$ পূর্ণবর্গ।

3.3.4. উদাহরণ

1. দেখান যে $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

$$= (R_1+bR_3, R_2-aR_3)\begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -b(1+a^2+b^2) \\ 0 & 1+a^2+b^2 & a(1+a^2+b^2) \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(1+a^2+b^2\right)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(1+a^2+b^2\right)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2b & -2a & 1+a^2+b^2 \end{vmatrix}(c_3+bc_1-ac_2)$$

$$= (1+a^2+b^2)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2b & -2a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2+b^2)^3.1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$$

2. দেখান যে $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)$

$$= (R_3 - xR_1 - yR_2)\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ 0 & 0 & -(ax^2+2bxy+cy^2) \end{vmatrix}$$

$$= -(ax^2+2bxy+cy^2).\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$= (ax^2+2bxy+cy^2)\,(b^2-ac)$$

3. দেখান যে $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

$$= (R_1 - R_3, R_2 - R_3)\begin{vmatrix} a+b+c & 0 & -(a+b+c) \\ 0 & b+c+a & -(a+b+c) \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & a & 2(a+b+c) \end{vmatrix}(c_3+c_1+c_2)$$

$$= 2(a+b+c)^3.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^3.1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

4. দেখান যে $\begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 1 & ca+bd & c^2a^2+b^2d^2 \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(c-a)(b-d)$

$$= (R_1 - R_3, R_2 - R_3)\begin{vmatrix} 0 & b(c-a) - d(c-a) & b^2(c^2-a^2) - d^2(c^2-a^2) \\ 0 & a(c-b) - d(c-b) & a^2(c^2-b^2) - d^2(c^2-b^2) \\ 1 & ab+cd & a^2b^2 + c^2d^2 \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)(b-d)(c-b)(a-d)\begin{vmatrix} 0 & 1 & (c+a)(b+d) \\ 0 & 1 & (a+d)(b+c) \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)(b-d)(c-b)(a-d)\begin{vmatrix} 1 & (c+a)(b+d) \\ 0 & ac+bd-cb-ad \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)\ (b-d)\ (c-b)\ (a-d)\ [c(a-b) - d\ (a-b)]$$
$$= (a-b)\ (b-c)\ (c-a)\ (d-a)\ (\ b-d)\ (c-d)$$

5. দেখান যে $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$

$$= (c_1 - c_3, c_2 - c_3)\begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a)^2 - b^2 & b^2 \\ c^2-(a+b)^2 & c^2-(a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}(R_3 - \overline{R_1 + R_2})$$

$$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c & a^2/b & a^2 \\ b^2/a & c+a & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix}\left[c_1 + \frac{1}{a}c_3, c_2 + \frac{1}{b}c_3\right]$$

$$= 2ab\ (a+b+c)^2\ [(b+c)\ (c+a) - ab]$$
$$= 2ab\ (a+b+c)^2.\ c(a+b+c)$$
$$= 2abc\ (a+b+c)^3$$

6. দেখান যে $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ca \\ ab & -b^2 & bc \\ ca & bc & -c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

যদি $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$ হয়,

$$Adj\Delta = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} c & a \\ b & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c & 0 \\ b & a \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} c & b \\ a & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & o \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & c \\ b & a \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & b \\ 0 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = \Delta^2$$ (জ্যাকোবির উপপাদ্য অনুযায়ী)

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

7. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ -এর মান নির্ণয় করুন এবং ইহা হইতে দেখান যে

$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ z+x & x+y & y+z \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ (যাচাই করুন)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ z+x & x+y & y+z \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix}$$

8. $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হলে দেখান যে

$$\begin{vmatrix} B_1+C_1 & C_1+A_1 & A_1+B_1 \\ B_2+C_2 & C_2+A_2 & A_2+B_2 \\ B_3+C_3 & C_3+A_3 & A_3+B_3 \end{vmatrix} = 2\Delta^2$$

যেখানে A_i, B_i, C_i যথাক্রমে a_i, b_i, c_i -এর সহ উৎপাদক।

$$\text{প্রদত্ত নির্ণায়ক (তিনটি স্তম্ভের যোগ)} = \begin{vmatrix} 2(A_1+B_1+C_1) & C_1+A_1 & A_1+B_1 \\ 2(A_2+B_2+C_2) & C_2+A_2 & A_2+B_2 \\ 2(A_3+B_3+C_3) & C_3+A_3 & A_3+B_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} C_1 & C_1+A_1 & A_1+B_1 \\ C_2 & C_2+A_2 & A_2+B_2 \\ C_3 & C_3+A_3 & A_3+B_3 \end{vmatrix}$$ [প্রথম স্তম্ভ থেকে তৃতীয় স্তম্ভ বাদ]

$$= 2\begin{vmatrix} C_1 & A_1 & A_1+B_1 \\ C_2 & A_2 & A_2+B_2 \\ C_3 & A_3 & A_3+B_3 \end{vmatrix}$$ (দ্বিতীয় স্তম্ভ—প্রথম স্তম্ভ)

$$= 2\begin{vmatrix} C_1 & A_1 & B_1 \\ C_2 & A_2 & B_2 \\ C_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$ (তৃতীয় স্তম্ভ—দ্বিতীয় স্তম্ভ)

$$= 2\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 2\Delta^2$$ (জ্যাকোবির উপপাদ্য অনুযায়ী)

9. $\begin{vmatrix} (a-x)^2 & (a-y)^2 & (a-z)^2 \\ (b-x)^2 & (b-y)^2 & (b-z)^2 \\ (c-x)^2 & (c-y)^2 & (c-z)^2 \end{vmatrix}$ কে দু'টি নির্ণায়কের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করুন ও ইহা হইতে নির্ণায়কটি নির্ণয় করুন।

$$\begin{vmatrix} a^2-2ax+x^2 & a^2-2ay+y^2 & a^2-2az+z^2 \\ b^2-2bx+x^2 & b^2-2by+y^2 & b^2-2bz+z^2 \\ c^2-2cx+x^2 & c^2-2cy+y^2 & c^2-2cz+z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & -2a & 1 \\ b^2 & -2b & 1 \\ c^2 & -2c & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$ (সারি অনুযায়ী গুণণ)

$$= -2\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x-z & x^2-z^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} x-z & x^2-z^2 \\ y-z & y^2-z^2 \end{vmatrix} = (x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+z \\ 1 & y+z \end{vmatrix}$$

$$= (x - z)(y - z)(y - x) = (x - y)(y - z)(z - x)$$

ফলে নির্ণেয় নির্ণায়ক $= 2(a - b)(b - c)(c - a)(x - y)(y - z)(z - x)$

[(1) -এ বামদিকের নির্ণায়কের দুটি স্তম্ভ বদল হয়েছে]

10. $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$, $Adj\Delta = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}$

প্রমাণ করুন (i) $\dfrac{BC - F^2}{a} = \dfrac{CA - G^2}{b} = \dfrac{AB - H^2}{c} = \Delta$

(ii) $\dfrac{GH - AF}{f} = \dfrac{HF - BG}{g} = \dfrac{FG - CH}{h} = \Delta$

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix}$ (সারি অনুযায়ী গুণ ও জ্যাকোবির উপপাদ্য প্রয়োগ)

$(BC - F^2).\ \Delta = \overset{\text{ও}}{a}\Delta^2 \Rightarrow \dfrac{BC - F^2}{a} = \Delta$

$\begin{vmatrix} A & H & G \\ 0 & 1 & 0 \\ G & F & C \end{vmatrix} \Delta \qquad \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Delta$ থেকে বাকী দু'টি পাবেন।

(ii) $\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ a & h & g \end{vmatrix} = g\Delta^2$

$\Rightarrow (HF - BG)\ \Delta = g\Delta^2 \Rightarrow \dfrac{HF - BG}{g} = \Delta$

বাকী দুটির জন্য $\begin{vmatrix} A & H & G \\ 0 & 0 & 1 \\ G & F & C \end{vmatrix} \Delta$ ও $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} \Delta$

বিবেচনা করুন।

3.4 ক্র্যামারের নিয়ম

সুইস্ গনিতজ্ঞ গ্যাব্রিয়েল ক্র্যামার (1750) নির্ণায়ক পদ্ধতির সাহায্যে n সংখ্যক চলরাশি বিশিষ্ট n সংখ্যক রৈখিক সমীকরণ সমাধার যে পদ্ধতি উপস্থাপিত করেছিলেন, সেটিই এখানে $n = 3$ এর জন্য পেশ করা হচ্ছে :

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21} + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned}\right\}$$

যেখানে a_{ij}, $b_k \in \mathbb{R}$, $\det(a_{ij}) \neq 0$ ও সব b_k শূণ্য নয়।

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A},\ x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}$$

$\det A = \det(a_{ij})$ এবং A_k একটি 3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স, যাকে A -এর k তম স্তম্ভকে $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে পাওয়া যায় ($k = 1, 2, 3$)।

এখানে $x_1 \det A = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} (c_1 + x_2c_2 + x_3c_3)$$

$= \det A_1$.

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A}$, অনুরূপে x_2, x_3 পাওয়া যায়।

উদাহরণ : 1. ক্র্যামারের নিয়মদ্বারা সমাধান কর।

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x + 3y = 5 \end{aligned}\right\}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -22 \neq 0.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-3+2(5)-3(12+5)}{-22} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-22}{-22} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{-22} = 1$$

2. $$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} (a_{ij} \in \mathbb{R})$$

সমীকরণ গুচ্ছের অ-শূণ্য সমাধান থাকলে দেখান যে $\det(a_{ij}) = 0$

মনে করি $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, $x_3 = t_3$ একটি অ-শূণ্য সমাধান।

$$\left.\begin{aligned} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3 &= 0 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3 &= 0 \\ a_{31}t_1 + a_{32}t_2 + a_{33}t_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

মনে করি $t_1 \neq 0$.

$$t_1 . \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} t_1a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ t_1a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ t_1a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} (c_1 + c_2 t_2 + c_3 t_3) = 0$$

যেহেতু $t_1 \neq 0$, সুতরাং $\det (a_{ij}) = 0$ হবে।

3.5 সারাংশ

এই এককে ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক সম্পর্কে প্রাথমিক পর্যায়ের কিছু আলোচনা করা হয়েছে। যোগ ও গুণণ সাপেক্ষে ম্যাট্রিক্স কোন্ কোন্ ধর্ম অনুসরণ করে সেটি উল্লিখিত হয়েছে। নির্ণায়কের মান নির্ধারণের পদ্ধতি আলোচনার পাশাপাশি বিশেষ ক্ষেত্রে রৈখিক সহসমীকরণ সমাধানের ক্র্যামার নিয়ম আলোচিত হয়েছে।

3.6 প্রশ্নাবলী

1. বিস্তার না করে দেখান যে $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

2. দেখান যে $\begin{vmatrix} x^2+y^2+1 & x^2+2y^2+3 & x^2+3y^2+4 \\ y^2+2 & 2y^2+6 & 3y^2+8 \\ y+1 & 2y^2+3 & 3y^2+4 \end{vmatrix} = x^2y^2$

3. যদি w, 1 -এর একটি কাল্পনিক ঘনমূল হয়, দেখান যে $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের একটি উৎপাদক হবে $a + bw + cw^2$। অতঃপর দেখান যে নির্ণায়কটির মান— $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ হবে।

4. দেখান যে $\begin{vmatrix} a^2+10 & ab & ac \\ ab & b^2+10 & bc \\ ac & bc & c^2+10 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটি 100 দ্বারা বিভাজ্য।

5. দেখান যে $\begin{vmatrix} 2ab & a^2 & b^2 \\ a^2 & b^2 & 2ab \\ b^2 & 2ab & a^2 \end{vmatrix} = -(a^3 + b^3)^2$

6. দেখান যে $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 2bc - a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca - b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix}$

7. দেখান যে $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b)(b+c)(c+a)$

8. দেখান যে $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} bc - a^2 & ca - b^2 & ab - c^2 \\ ca - b^2 & ab - c^2 & bc - a^2 \\ ab - c^2 & bc - a^2 & ca - b^2 \end{vmatrix}$

9. দেখান যে $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$

10. দেখান যে $\begin{vmatrix} 1 & a & b^2+c^2+bc \\ 1 & b & c^2+a^2+ca \\ 1 & c & a^2+b^2+ab \end{vmatrix} = 0$

11. $a + b + c = 0$ হলে $\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$

সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করুন।

12. দেখান যে $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

13. ক্র্যামারের নিয়মে সমাধান করুন :

$$3x + y - z = 1,\ 5x + 2y + 3z = 2,\ 8x + 3y + z = 3$$

14. দেখান যে $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\beta-\alpha) & \cos(\gamma-\alpha) \\ \cos(\alpha-\beta) & 1 & \cos(\gamma-\beta) \\ \cos(\alpha-\gamma) & \cos(\beta-\gamma) & 1 \end{vmatrix} = 0$

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, দেওয়া আছে।

ম্যাট্রিক্স গুণণের ক্ষেত্রে অপসারণ ধর্ম প্রযুক্ত হয় না—উক্ত ম্যাট্রিক্সগুলির সাহায্যে যাচাই করুন।

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

দেখান যে A বাম ভাজক কিন্তু B বাম ভাজক নয়।

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ হলে $A^2 - 3A + 9I_3$ নির্ণয় করুন, যেখানে I_3 তৃতীয় ক্রমের একসম ম্যাট্রিক্স।

18. A ও B একই ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স হলে $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

সব সময়ে সত্য হবে কিনা ব্যাখ্যা করুন।

19. যদি $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ও $(\alpha I_2 + \beta A)^2 = A$ হয়, α ও β নির্ণয় করুন।

20. α বাস্তব এবং $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ হলে দেখান যে সকল $n \in \mathbb{N}$ -এর জন্য

$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$ হবে।

21. $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = (-1 \;\; 1 \;\; 0)$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ হলে

$(ABC)^T = C^T B^T A^T$ যাচাই করুন।

22. দেখান যে নিম্ন ম্যাট্রিক্সগুলি লম্ব ম্যাট্রিক্স :

$$\text{(i) } \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(ii) } \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

23. নিম্ন বর্গ ম্যাট্রিক্সটিকে একটি প্রতিসম ও একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করুন :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -6 \\ -5 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

24. যদি $ax + by + cz = 1$, $cx + ay + bz = 0$, $bx + cy + az = 0$

(a, b, c বাস্তব) হয়, x, y, z নির্ণয় করুন এবং দেখান যে

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \text{ ও } \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$ একে অপরের অনোন্যক।

25. $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ হলে দেখান যে $xyz = -1$ হবে।

3.7 উত্তরের সংকেত

1. $C_2 + C_3$, অভিন্ন উৎপাদক আসবে।

2. $R_1{}^1 = R_1 - R_3$, $R_2{}^1 = R_2 - R_3$

3. $C_1{}^1 = C_1 + w\, C_2 + w^2\, C_3$

4. প্রথমে দেখান প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} a^2+10 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2+10 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2+10 \end{vmatrix}$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + 10)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

5. $R_1{}^1 = R_1 + R_2 + R_3$

6. বামপক্ষ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times (-1) \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$

7. $R_1{}^1 = R_1 + R_2,\ R_3{}^1 = R_3 + R_2$

8. জ্যাকোবির উপপাদ্য ব্যবহার করুন।

9. $a + b = 0$ বসিয়ে দেখান নির্ণায়ক $= 0$

অনুরূপে $b + c,\ c + a$ উৎপাদক দেখান।

নির্ণায়কটি ত্রিঘাত বিশিষ্ট, ফলে বামপক্ষ $= k(a + b)(b + c)(c + a)$

$a = b = c = 1$ বসিয়ে k নির্ণয় করুন।

10. প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 1 & a & b^2 + c^2 \\ 1 & b & c^2 + a^2 \\ 1 & c & a^2 + b^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

প্রথমটির ক্ষেত্রে $C_3 - (a^2 + b^2 + c^2)\, C_1$ করুন।

11. $c_1 + c_2 + c_3$

12. $c_3 - c_1,\ c_2 - c_1$

14. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \end{vmatrix}$-কে বর্গ করুন।

19. $\alpha = \beta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

20. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি আলোচনা করুন।

24. $x = \dfrac{A}{\Delta},\ y = \dfrac{B}{\Delta},\ z = \dfrac{C}{\Delta}$ ও $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\Delta}$ দেখান।

একক 4 ❑ বিপরীত ম্যাট্রিক্স, ম্যাট্রিক্সের মাত্রা ও রৈখিক সমীকরণগুচ্ছ সমাধানে প্রয়োগ

(Inverse Matrix, Rank of a Matrix and Application to the Solutions of a System of Linear Equation)

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

আগের এককে আমরা ম্যাট্রিক্স তত্ত্বের প্রাথমিক আলোচনা করেছি এবং নির্ণায়কের সংজ্ঞা ও নির্ণয় পদ্ধতির সঙ্গে পরিচিত হয়েছি। নির্ণায়কের ধারণা ও প্রয়োগ ছাড়া ম্যাট্রিক্স তত্ত্ব পরিপূর্ণতা লাভ করতে পারে না। নির্ণায়কের ধারণাকে মূলধন করে এই এককে আমরা বিপরীত ম্যাট্রিক্সের ধারণা লাভ করব এবং ম্যাট্রিক্সের মাত্রা জানতে পারব। এই ধারণাগুলির প্রয়োগ ঘটাব আমরা রৈখিক সমীকরণগুচ্ছের সমাধানের সম্ভাব্যতা যাচাইয়ে ও সমাধান নির্ণয়ে। রৈখিক বীজগণিতে এই রৈখিক সমীকরণ তত্ত্বের বড় ভূমিকা রয়েছে। লক্ষণীয় যে সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে এযাবত কালের অনুসৃত পদ্ধতি $x + 3y + z = 0, 2x - y + z = 0$ ধাঁচের তিনটি চলরাশি বিশিষ্ট দুটি মাত্র সমীকরণের বা তিনটি সমীকরণের অ-শূণ্য সমাধান আছে কিনা যাচাই করা সম্ভব নয়। একইভাবে $2x + 6y = -11, 6x + 20y - 6z = -3, 6y - 18z = -1$ সমীকরণ গুচ্ছের সমাধান সম্ভব কিনা জানা সম্ভব নয়। প্রসঙ্গত বীজগণিতে এ যাবত আমরা তিনটি চলরাশি বিশিষ্ট সমীকরণ সমাধানযোগ্য ধরে নিয়ে সমাধানের পথে প্রয়াসী হয়েছি। আমরা পরবর্তী

আলোচনায় দেখব যে প্রথম ক্ষেত্রে উল্লিখিত সমীকরণদ্বয়ের অসংখ্য অশূণ্য সমাধান আছে কিন্তু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উল্লিখিত সমীকরণগুচ্ছের সমাধান সম্ভব নয়। এই আলোচনার জন্য আমরা ম্যাট্রিক্সের মাত্রার ধারণাকে কাজে লাগাব।

4.1 বিপরীত ম্যাট্রিক্স : সংজ্ঞা ও অস্তিত্বের শর্ত

(বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলতে এখানে গুণসাপেক্ষে বিপরীত ম্যাট্রিক্স বুঝাচ্ছে)

মনে করি, A একটি n-ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স। যদি ঐ একই ক্রমের একটি বর্গম্যাট্রিক্স B-এর অস্তিত্ব থাকে যে

$AB = I_n = BA$ হয় (I_n, n ক্রমের একসম ম্যাট্রিক্স),

তাহলে B-কে A-র বিপরীত ম্যাট্রিক্স রূপে সংজ্ঞাত করা হবে এবং A^{-1} দ্বারা চিহ্নিত করা হবে।

মন্তব্য : (1) A^{-1} একটি চিহ্নমাত্র, এটিকে কখনোই $\dfrac{1}{A}$ দ্বারা প্রকাশ করা যাবে না।

(2) লক্ষণীয় B ও A সমক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স হবে।

(3) $B = A^{-1}$ এবং $A = B^{-1}$ হবে।

(4) I_n-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হবে I_n.

উদাহরণ : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$-এর বিপীরত ম্যাট্রিক্স $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

কেননা $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$

উপপাদ্য 1. A একটি বর্গ-ম্যাট্রিক্স। A^{-1}-এর অস্তিত্ব থাকলে $\det A \neq 0$ হবে।

যদি $B = A^{-1}$ হয় ও n-ক্রমের হয়, সংজ্ঞানুসারে, $AB = I_n = BA$

$$\Rightarrow (\det A)\det(B) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$$

সংজ্ঞা : যদি কোনো বর্গম্যাট্রিক্স A-এর ক্ষেত্রে $\det A \neq 0$ হয়, তাকে অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স (non-singular) বলা হবে। $\det A = 0$ হলে A-কে বলা হবে বিশিষ্ট (Singular) ম্যাট্রিক্স। $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ অবশিষ্ট ম্যাট্রিক্স, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স।

সংজ্ঞা : মনে করি, A, n ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স।

ধরি, $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$\left(A_{ij}\right)^T$-কে বলা হবে A-এর সংলগ্ন ম্যাট্রিক্স, অর্থাৎ প্রতি a_{ij}-কে তার সহ-উৎপাদক A_{ij} দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে উদ্ভূত ম্যাট্রিক্সটির পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স-ই হবে A-এর সংলগ্ন ম্যাট্রিক্স।

উদাহরণ : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$-এর সংলগ্ন ম্যাট্রিক্স হল

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

উপপাদ্য 2. $A(Adj\,A) = |A|\,I_n = (Adj\,A)A$

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{সূত্রানুসারে, } Adj\ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2} \\ \hdashline A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

এখন লক্ষ্য করা যাচ্ছে যে ম্যাট্রিক্স গুণনের নিয়ম অনুসারে

$$A(Adj\,A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|.\,I_n \text{ (জ্যাকোবির ধর্ম প্রয়োগে)}$$

অনুরূপভাবে $(Adj\ A)\ A = |A|.I_n$

অনুসিদ্ধান্ত : $|A| \neq 0$ হলে

$$A\left(\frac{Adj\,A}{|A|}\right) = I_n = \left(\frac{Adj\,A}{|A|}\right)A \text{ হবে।}$$

ফলে বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞানুযায়ী $A^{-1} = \dfrac{Adj\,A}{|A|}$ হবে।

অতএব (i) বর্গ ম্যাট্রিক্স A-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\det A = |A| \neq 0$ হয়।

(ii) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj\, A,\ |A \neq 0.$

উপপাদ্য 3. A-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব থাকলে সেটি অনন্য।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি B ও C উভয়ে A-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স। সংজ্ঞানুসারে $AB = BA = I_n$, $AC = CA = I_n$

$AB = I_n \Rightarrow C(AB) = C.I_n \Rightarrow (CA)\ B = C$ (সংযোগধর্ম)

$\Rightarrow I_n \cdot B = C \Rightarrow B = C$ হবে।

উদাহরণ : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, A^{-1}-এর অস্তিত্ব পরীক্ষা করুন।

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\ (1 + 1) - 1(1 - 1) + 3(-1 - 1) = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

অতএব A^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে।

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ +0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\, A) = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ +0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

উপপাদ্য 4. (i) A ও B উভয়ে n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স ও অবিশিষ্ট হলে

$(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$ হবে

(ii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ হবে।

লক্ষণীয় $(AB)\ (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = I_n$

$(B^{-1}A^{-1})\ (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I_n)B = I_n$

অতএব $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ হবে।

আবার, $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$

$$\Rightarrow (AA^{-1})^T = I_n = (A^{-1}A)^T$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T A^T = I_n = A^T(A^{-1})^T$$

সংজ্ঞানুযায়ী $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ হবে।

উল্লেখ্য, A n-ক্রমের লম্ব ম্যাট্রিক্স হলে যেহেতু $\det A = \pm 1$, A^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে এবং $A^TA = I_n = AA^T \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4.2.1 উদাহরণ

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(4-3) + 2(3-6) + 1(3-2) = 1 - 6 + 1 = -4 \neq 0$$

সুতরাং A^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে।

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

2. যদি A ও B একই ক্রমের অবিশিষ্ট, প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং $AB = BA$ হয়, দেখান যে $A^{-1}B$, $A^{-1}B^{-1}$ প্রতিসম হবে।

শর্তানুসারে $A^T = A,\ B^T = B,\ AB = BA,\ |A| \neq 0,\ |B| \neq 0$

$$(A^{-1}B)^T = B^T(A^{-1})^T = B(A^T)^{-1} = BA^{-1} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

যেহেতু $AB = BA$, অতএব $(AB)A^{-1} = (BA)A^{-1}$

$\Rightarrow ABA^{-1} = B$ (সংযোগ ধর্ম অনুযায়ী)

$\Rightarrow A^{-1}(ABA^{-1}) = A^{-1}B$

$\Rightarrow BA^{-1} = A^{-1}B$ (সংযোগ ধর্ম অনুযায়ী) (2)

$\Rightarrow (A^{-1}B)^T = (BA^{-1})^T = (A^{-1})^T B^T = A^{-1}B$ [(1) ও (2) থেকে]

$\Rightarrow A^{-1}B$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

যেহেতু $AB = BA$, সুতরাং, $B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

$\Rightarrow (A^{-1}B^{-1})^T = (B^{-1}A^{-1})^T = (A^T)^{-1}(B^T)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1}B^{-1}$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

3. যদি $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ হয়, দেখান যে $A^2 - 3A - 13I_2 = 0_2$ হবে। এখান থেকে A^{-1} নির্ণয় করুন।

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A - 13I_2 = \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 9 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -15 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19-6-13 & 15-15 \\ 9-9 & 16-3-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

$|A| = 2 - 15 = -13 \neq 0$, ফলে A^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে।

$A^{-1}(A^2 - 3A - 13I_2) = A^{-1}0_2 = 0_2$

$\Rightarrow A - 3I_2 = 13A^{-1}$

$$\Rightarrow 13A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

4.3 রৈখিক সমীকরণগুচ্ছ সমাধানে প্রয়োগ

মনে করি, $$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

যেখানে $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ ও সব b_k শূণ্য নয়।

ঐ সমীকরণ প্রণালীকে ম্যাট্রিক্স আকারে নিম্নভাবে লেখা যায় : $AX = B$ যেখানে

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

মনে করি, A অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স, ফলে A^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে।

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$ ও এই সমাধান অনন্য।

4.3.1. উদাহরণ :

1. সমাধান করুন :

$$x + 2y + 3z = 14, \; 3x + y + 2z = 11, \; 2x + 3y + z = 11$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}; \; AX = B$$

$\det A = (1 - 6) + 2(4 - 3) + 3(9 - 12) = -5 + 2 + 21 = 18$

অতএব A^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে।

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\, A}{|A|} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5(14) + 7(11) + 1(11) \\ 1(14) - 5(11) + 7(11) \\ 7(14) + 1(11) - 5(11) \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 54 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3.$

4.4 ম্যাট্রিক্সের মাত্রা : সংজ্ঞা ও নির্ণয় পদ্ধতি

সংজ্ঞা : ধরা যাক্ $A = (a_{ij})_{m \times n}$ একটি ম্যাট্রিক্স, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

এই ম্যাট্রিক্সের m সংখ্যক সারি ও n সংখ্যক স্তম্ভ থেকে k-সংখ্যক সারি ও k-সংখ্যক স্তম্ভ ($k \leq$ সর্বনিম্ন $\{m, n\}$) নির্বাচন করে k-এর বিভিন্ন মানের জন্য একাধিক বর্গম্যাট্রিক্স গঠন করা যায়। এই সকল বর্গম্যাট্রিক্সগুলির সংশ্লিষ্ট নির্ণায়কগুলিকে ওই ম্যাট্রিক্সের মাইনর বলা হবে। নির্ণায়কের ক্রমই মাইনরের ক্রম বলে গণ্য হবে।

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

চারটি তৃতীয়ক্রমের মাইনর আছে :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix},$$

আবার দ্বিতীয় ক্রমের মাইনরগুলির মধ্যে রয়েছে

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$ ইত্যাদি।

সংজ্ঞা : অ-শূণ্য ম্যাট্রিক্স A-এর মাত্রা (Rank) একটি বৃহত্তম ধনসংখ্যা k যার জন্য A ম্যাট্রিক্সের অন্ততঃ একটি k-ক্রমের অশূণ্য মাইনর পাওয়া যাবে এবং তার অতিরিক্ত সকল ক্রমের মাইনরগুলির মান শূণ্য হবে।

শূণ্য ম্যাট্রিক্সের মাত্রা সব সময়েই শূণ্য হবে। উপরে উল্লিখিত ম্যাট্রিক্স A-এর সকল তৃতীয় ক্রমের মাইনর শূণ্য। ফলে মত্রা তিন হতে পারে না। দ্বিতীয় ক্রমের মাইনরগুলির মধ্যে $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = 0$ হলেও $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ অতএব A-এর মাত্রা হবে 2।

মন্তব্য : ম্যাট্রিক্সের মাত্রা নির্ণয়ের ওই পদ্ধতি বাস্তবসম্মত নয়—কেননা অতগুলি মাইনরের মান নির্ণয় সময় সাপেক্ষ বিষয়। ফলে আমরা বিকল্প পথ অনুসরণ করব।

ম্যাট্রিক্সের প্রাথমিক প্রক্রিয়া (Elementary operation on matrices) :

সংজ্ঞা : (i) একটি ম্যাট্রিক্সের যেকোনো দুটি সারি (স্তম্ভ)— ধরি i-তম ও j-তম সারি (স্তম্ভ)-র স্থান পরিবর্তন R_{ij} (C_{ij})।

(ii) একটি ম্যাট্রিক্সের যেকোনো সারি (স্তম্ভ) ধরি j-তম সারির (স্তম্ভের) পদগুলিকে অশূণ্য বাস্তব সংখ্যা λ দ্বারা গুণন λR_j (λC_j)।

(iii) একটি ম্যাট্রিক্সের i তম সারির (স্তম্ভের) পদগুলির সঙ্গে j তম সারির (স্তম্ভের) অনুবর্তী পদগুলিকে অ-শূণ্য বাস্তব সংখ্যা λ দ্বারা গুণ করে যোগ করা $R_i + \lambda R_j$ $(C_i + \lambda C_j)$। এই তিনটি প্রক্রিয়া ম্যাট্রিক্স তত্ত্বে প্রাথমিক সারি (স্তম্ভ) প্রক্রিয়া বলা হয়ে থাকে।

এই প্রক্রিয়ার গুরুত্ব ও প্রয়োজনীয়তা নিম্ন উপপাদ্য থেকে অনুধাবন করা যাবে।

ম্যাট্রিক্সের উপর প্রাথমিক প্রক্রিয়া (সারি বা স্তম্ভ) প্রয়োগ করলে ম্যাট্রিক্সের মাত্রা অপরিবর্তিত থাকে।

পূর্বে উল্লিখিত A ম্যাট্রিক্সটিকে বিবেচনা করা যায় :

$$A \underset{R_3 - 2R_1}{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3 - 3C_1 \\ C_4 - 4C_1}]{C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_4 - 5C_2]{C_3 - 2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

B-এর একমাত্র অ-শূণ্য মাইনর $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, ফলে B-এর মাত্রা 2, A-রও মাত্রা 2 হবে।

4.4.1 উদাহরণ

1. মাত্রা নির্ণয় করুন : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{C_3 + C_1 \\ C_4 - 3C_1}]{C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 + \frac{1}{2}C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্সটির (B) একমাত্র অশূণ্য দ্বিতীয় ক্রমের মাইনর $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, B-র মাত্রা 2, প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 2 হবে।

2. মাত্রা নির্ণয় করুন ঃ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 - R_1 \\ R_2 - R_1}]{R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3 - 2C_1 \\ C_4 - 3C_1}]{C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 - \frac{3}{8}C_3]{C_4 - \frac{3}{4}C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্সটির (B) একমাত্র অশূণ্য তৃতীয় ক্রমের মাইনর $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}$, B-এর মাত্রা 3, প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3 হবে।

4.5 রৈখিক সমীকরণগুচ্ছ সমাধানে মাত্রার প্রয়োগ

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ ও $b_k \in \mathbb{R}$ হলে আমরা রৈখিক সমীকরণ প্রণালী

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

বিবেচনা করব (তবে সাধারণভাবে চলরাশির সংখ্যা ও সমীকরণের সংখ্যা এক না-ও হতে পারে)।

(i) অন্তত একটি b_k অশূণ্য হবে ঃ

এক্ষেত্রে সমীকরণ গুচ্ছকে অ-সমসত্ব রৈখিক সমীকরণ প্রণালী (Non-homogeneou linear system of equations) বলা হবে। এই সমীকরণগুচ্ছ সমাধানের যোগ্য বা সঙ্গত (Consistent) হতে পারে আবার না-ও হতে পারে। যেমন $x + 2y = 4$; $2x + 4y = 11$ সঙ্গত নয় (কারণ $x + 2y = 4 \Rightarrow 2x + 4y = 8$, জ্যামিতিক নিরিখে দু'টি সমান্তরাল সরলরেখা সূচিত হচ্ছে। এখানে আমরা পূর্বে উল্লিখিত সমীকরণগুচ্ছ সঙ্গত হবার যথেষ্ট শর্ত বিবৃত করব।

হল $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ সহগ-ম্যাট্রিক্স

এবং $A = A/B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{pmatrix}$ হল বর্ধিত ম্যাট্রিক্স।

নিম্ন উপপাদ্যটি গুরুত্বপূর্ণ

$A\,X = B$ সঙ্গত হবে যদি বর্ধিত ম্যাট্রিক্স $\overline{A}$ বা $A/_B$ -এর মাত্রা ও সহগ ম্যাট্রিক্স A-র মাত্রা পরস্পর সমান হয়।

উদাহরণ : $2x + y = 7,\ x + z = 2,\ x + y - z = 3$ সমীকরণ প্রণালী সঙ্গত কিনা পরীক্ষা করুন।

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_4 - 4C_1]{C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 - C_2]{C_3 + 2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্সে সহগ ম্যাট্রিক্সের একমাত্র অশূণ্য মাইনর $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, ফলে সহগ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা $= 2$ হচ্ছে।

বর্ধিত ম্যাট্রিক্সে একমাত্র অশূণ্য মাইনর $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, ফলে বর্ধিত ম্যাট্রিক্সের মাত্রা $= 3$ হচ্ছে। দুটি মাত্রা অ-সমান হওয়ায় প্রদত্ত সমীকরণ প্রণালী অসঙ্গত।

(2) $x + y + z = 4,\ 2x - y + 3z = 1,\ 3x + 2y - z = 1$ সমীকরণ প্রণালী সঙ্গত কিনা পরীক্ষা করুন।

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{C_3 - C_1 \\ C_4 - 4C_1}]{C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 + 7C_3]{C_2 + 3C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & -39 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_4 - 3C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

A ও $\overline{A}$ উভয়ের মাত্রা একই $= 3 =$ চলরাশির সংখ্যা। সমীকরণ প্রণালী সঙ্গত ও অনন্য সমাধান আছে।

(ii) যদি সব b_k শূণ্য হয়

এক্ষেত্রে সমীকরণ প্রণালীটি হবে সমসত্ত্ব রৈখিক। সব সময়েই শূণ্য-সমাধান থাকবে, যা নগণ্য সমাধান বলে পরিচিত।

অশূণ্য সমাধানের অস্তিত্ব সম্পর্কিত নিম্ন উপপাদ্যটি গুরুত্বপূর্ণ :

n সংখ্যক অজ্ঞাতরাশির সাপেক্ষে $A\,X = 0$ সমীকরণ মণ্ডলীতে n সংখ্যক সমীকরণ থাকলে নগণ্য সমাধান ছাড়াও $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ জাতীয় সমাধানের অস্তিত্ব স্বীকৃত হবে যদি সহগ ম্যাট্রিক্স A -এর মাত্রা $<n$ হয়। এই শর্তটি প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট।

উদাহরণ : (*i*) $x + 3y + 3z = 0,\ x + 2y - z = 0,\ y + 4z = 0$

এর ক্ষেত্রে $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ জাতীয় সমাধান আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(8 + 1) + 3(0 - 4) + 3(1 - 0) = 9 - 12 + 3 = 0$$

অতএব সহগ-ম্যাট্রিক্সের মাত্রা <3, মাত্রা $= 2$ ফলে উক্ত উপপাদ্য অনুযায়ী অ-নগণ্য সমাধান আছে।

(2) $x + y + z = 0,\ 2x - y + 4z = 0,\ x + 5y - 7z = 0$ সমীকরণ গুচ্ছের $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ জাতীয় সমাধান আছে কি না পরীক্ষা করুন।

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(7 - 20) + 1(4 + 14) + 1(10 + 1) = -13 + 18 + 11 \neq 0$$

ফলে সহগ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা $= 3$, অতএব ঐ সমীকরণ গুচ্ছের একমাত্র সমাধান নগণ্য সমাধান।

4.5.1 উদাহরণ

(1) $2x + 6y = -11,\ 6x + 20y - 6z = -3,\ 6y - 18z = -1$

সমীকরণ প্রণালী সমাধান যোগ্য কিনা পরীক্ষা করুন।

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -11 \\ 6 & 20 & -6 & -3 \\ 0 & 6 & -18 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -11 \\ 0 & 2 & -6 & 30 \\ 0 & 6 & -18 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -11 \\ 0 & 2 & -6 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & -91 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 + \frac{11}{2}C_1]{C_2 - 3C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & -91 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_4 - 15C_2]{C_3 + 3C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -91 \end{pmatrix}$$

সহগ-ম্যাট্রিক্সের মাত্রা = 2, বর্ধিত ম্যাট্রিক্সের মাত্রা = 3, দুটি অসমান, সুতরাং সমীকরণ প্রণালী সঙ্গত নয়।

(2) $x - 2y + z = 0,\ x - 2y - z = 0,\ 2x - 4y - 5z = 0$

সমীকরণ প্রণালীর অ-নগণ্য সমাধান আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

সহগ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা <3, অতএব অ-নগণ্য সমাধান আছে।

(3) k -এর কোন্ মান বা মানগুলির জন্য নিম্ন সমীকরণগুলির (i) একক সমাধান থাকবে (ii) কোন সমাধান থাকবে না (iii) একের বেশি সমাধান থাকবে নির্ণয় করুন :

$$\left.\begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ x + y + kz &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(i) একক সমাধান থকবে যদি $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0$ হয়

অর্থাৎ $k(k^2 - 1) + 1(1 - k) + 1(1 - k) \neq 0$ হয়

অর্থাৎ $k^2 - 3k + 2 \neq 0$ হয় অর্থাৎ $k \neq 1,\ k \neq 2$ হয়

এখন যদি $k = 1$ হয়, সব সমীকরণটি হবে $x + y + z = 1$,

অতএব একের বেশি সমাধান থাকবে।

যদি $k = 2$ হয়, সহগ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 2 হবে।

বর্ধিত ম্যাট্রিক্স $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, এর মাত্রা 3 কেননা $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, অতএব তখন সমাধান থাকবে না।

(4) $3x + y + z = 9$, $2x + y = 2$, $x + y - z = 3$ সমীকরণ প্রণালী সঙ্গত কিনা পরীক্ষা করুন।

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3 + C_1 \\ C_4 - 3C_1}]{C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 + 2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

সহগ ম্যাট্রিক্স A -এর মাত্রা 2, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

বর্ধিত ম্যাট্রিক্স $\bar{A}$ -এর ক্ষেত্রে $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

ফলে $\bar{A}$ -এর মাত্রা 3, দুটি সমান নয়। প্রদত্ত সমীকরণ প্রণালী অসঙ্গত।

(5) $x + y + z = 1$, $x + 2y + 4z = k$, $x + 4y + 10z = k^2$ সমীকরণ প্রণালীর সমাধান যোগ্যতা আলোচনা কর।

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & k \\ 1 & 4 & 10 & k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & k-1 \\ 0 & 3 & 9 & k^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 - 3k + 2 \end{pmatrix}$$

সহগ ম্যাট্রিক্স A -র মাত্রা = 2, যদি $k^2 - 3k + 2 = 0$ হয়, অর্থাৎ $k = 1, 2$ হয়, $\overline{A}$ -র মাত্রা হবে 2, সমীকরণমণ্ডলী সমাধান যোগ্য হবে এবং ঐ মাত্রা < 3 বলে অসংখ্য সমাধান থাকবে।

$k = 1$ সমীকরণগুলিকে লেখা যায়

$x + y + z = 1,\ y + 3z = 0$ (তৃতীয় – দ্বিতীয়)

ধরি $z = t$, ফলে $y = -3t,\ x = 1 + 2t$

এই সমাধানে আমরা লিখব $t = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in R$

$k = 2$ সমীকরণগুলি হবে

$x + y + z = 1,\ y + 3z = 1$

যদি $z = p$ ধরি, $y = 1 - 3p,\ x = 2p + 1$

এক্ষেত্রে সমাধান লিখব $p\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},.\ p \in \mathbb{R}$

(6) $2x + 3y + 4z = 0,\ x + 2y + 3z = 0,\ 7x + 13y + 19z = 0$ সমীকরণগুচ্ছের অ-নগণ্য সমাধান আছে কিনা নির্ণয় করুন। যদি থাকে, সমাধান নিরূপণ করুন।

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 13 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ তবে } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

অতএব সহগ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা = 2 < 3, ফলে অ-নগণ্য সমাধান আছে।

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 13 & 19 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

আমরা লিখতে পারি $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y + 2z = 0,\ x + 2y + 3z = 0$

যদি $z = t \in \mathbb{R}-\{0\}$ হয়, $y = -2t$, $x = t$; ফলে $t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R-\{0\}$ সমাধান হবে।

4.6 সারাংশ

ম্যাট্রিক্স-তত্ত্বের যে গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ রৈখিক সমীকরণ মণ্ডলীর সমাধানে প্রযুক্ত হয়ে থাকে, সেই আলোচনা এই এককের মুখ্য বিষয় থেকেছে। এই লক্ষ্যে বিপরীত ম্যাট্রিক্সের ধারণা ও তার প্রয়োগ, ম্যাট্রিক্সের মাত্রা এবং সমসত্ব ও অ-সমসত্ব উভয় ধরণের রৈখিক সমীকরণগুচ্ছ সমাধানে তার প্রয়োগ এই এককে স্থান পেয়েছে।

4.7 প্রশ্নাবলী

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন এবং ইহার সাহায্যে

$x + z = 0$, $3x + 4y + 5z = 2$, $2x + 3y + 4z = 1$ সমীকরণগুচ্ছের সমাধান করুন।

2. যদি $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ হয়, দেখান যে $A^2 - 10A + 16I_3 = 0_3$ (I_3, 0_3 প্রচলিত অর্থবহ)।

অতঃপর A^{-1} নির্ণয় করুন।

3. মাত্রা নির্ণয় করুন :

(*i*) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. সমাধান যোগ্য কিনা পরীক্ষা করুন :

(i) $\left.\begin{aligned} x - 4y + 7z &= 8 \\ 3x + 8y - 2z &= 6 \\ 7x - 8y + 26z &= 31 \end{aligned}\right\}$ (ii) $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 4z &= 2 \\ x + 4y + 10z &= 4 \end{aligned}$ (iii) $\left.\begin{aligned} x - 4y - z &= 3 \\ 3x + y - 2z &= 7 \\ 2x - 3y + z &= 10 \end{aligned}\right\}$

5. অ-নগণ্য সমাধান আছে কিনা, পরীক্ষা করুন :

(i) $\left.\begin{aligned} x + 3z &= 0 \\ 4x + 3y &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$ (ii) $\left.\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \\ 4x + 3y + 5z &= 0 \end{aligned}\right\}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

দেখান যে AB ও BA -এর মাত্রা সমান নয়।

4.8 উত্তরের সংকেত

1. $x = 1, y = 1, z = -1$

3. (i) 3 (ii) 2

4. (i) অসঙ্গত (ii) সঙ্গত (iii) সঙ্গত

5. (i) আছে (ii) নেই।

4.9 বিবিধ প্রশ্নাবলী

1. যুক্তি দিন : লম্ব ম্যাট্রিক্স মাত্রেই অবিশিষ্ট কিন্তু অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স মাত্রেই লম্ব ম্যাট্রিক্স নয়।

2. যুক্তি দিন : তৃতীয় ক্রমের বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নেই।

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$: A^2 ও A^{-1} প্রতিসম ম্যাট্রিক্স কিনা পরীক্ষা করুন।

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ হলে দেখান যে $A^2 - 5A + 7I_2 = 0_2$ (I_2, O_2 প্রচলিত অর্থবহ)। ইহা হইতে A^{-1} নির্ণয় করুন।

5. যদি $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ হয়, তবে $(A + I_3)(A - I_3)^{-1}$ নির্ণয় করুন।

6. a, b, c -এর কোন্ মান বা মানগুলির জন্য $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ লম্ব ম্যাট্রিক্স হবে নির্ণয় করুন।

7. বিপরীত ম্যাট্রিক্স পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করুন :

(i) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 8 \\ x - y - 2z = 6 \\ 3x + 5y - 7z = 14 \end{array}\right\}$ (ii) $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - y - z = 2 \end{array}\right\}$

(iii) $\left.\begin{array}{r} x - y = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 17 \\ y + 2z = 7 \end{array}\right\}$ (iv) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y + 5z = 15 \\ 2x + 4y - 3z = 13 \end{array}\right\}$

8. $\begin{vmatrix} (1+ax)^2 & (1+ay)^2 & (1+az)^2 \\ (1+bx)^2 & (1+by)^2 & (1+bz)^2 \\ (1+cx)^2 & (1+cy)^2 & (1+cz)^2 \end{vmatrix}$ কে দুটি নির্ণায়কের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করুন ও অতঃপর এর মান নির্ণয় করুন।

9. দেখান যে $\begin{pmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{pmatrix}$ একটি বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স।

10. দেখান যে $x + 2y - z = 3$, $3x - y + 2z = 1$, $2x - 2y + 3z = 2$ সমীকরণ মণ্ডলী সঙ্গত। অতঃপর সমাধান করুন।

11. যদি $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ হয়ে দেখান যে

$A(\alpha)\, A\, (\beta) = A\, (\alpha + \beta)$ হবে। এই সম্বন্ধটির সাহায্যে $A^{-1}\, (\alpha)$ নির্ণয় করুন।

(ইঙ্গিত : α -এর কোন মানের জন্য একসম ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে দেখুন, $A(\alpha + \beta)$ কে একসম ম্যাট্রিক্স করতে হবে।)

12. কোন্ শর্তে $\begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ a & 1 & -c \\ -b & c & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স হবে, নির্ণয় করুন এবং সেই শর্তে ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন।

13. A একটি $n \times n$ ম্যাট্রিক্স। B ও C অপরদুটি ম্যাট্রিক্স এমন যে $AB = AC$. প্রমাণ করুন যে A একটি বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স।

14. সমাধান করুন :

$$x + y + 2z = 3,\ y + 3z = 5,\ 3x + 4y + 9z = 14$$

15. দেওয়া আছে $A = \begin{pmatrix} 3-t & 1 & 0 \\ -1 & 3-t & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(i) যদি $\det A = 5$ হয়, t নির্ণয় করুন।

(ii) যদি B তৃতীয় ক্রমের একসম ম্যাট্রিক্স হয়, যেখান যে $t = 3$ হলে $\det A = \det B$ হবে যদিও $A = B$ নয়।

16. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে দেখান যে $(A^T)^{-1} - (A^{-1})^T$ হবে।

17. যে সকল 2×2 ম্যাট্রিক্স দ্বারা $X^2 = X$ সমীকরণটি সিধ হয়, দেখান যে তাদের মধ্যে কেবলমাত্র একটি ম্যাট্রিক্স ছাড়া অন্য সকল ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স।

18. $x^3 + x^2 + k = 0$ (k অশূণ্য বাস্তব রাশি) সমীকরণের বীজ তিনটি α, β, γ হলে দেখান যে

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি লঘ ম্যাট্রিক্স হবে।

অতঃপর $\begin{vmatrix} \alpha^2-\beta\gamma & \gamma^2-\alpha\beta & \beta^2-\alpha\gamma \\ \beta^2-\gamma\alpha & \alpha^2-\beta\gamma & \gamma^2-\alpha\beta \\ \gamma^2-\alpha\beta & \beta^2-\alpha\gamma & \alpha^2-\beta\gamma \end{vmatrix}$ নির্ণয় করুন।

19. যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ হয়, দেখান যে $AB = 6I_3$. অতঃপর A^{-1} নির্ণয় করন।

20. A, B, C n -ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $AB = I_n$, $BC = I_n$ হলে দেখান যে $A = C$ হবে।

21. দেখান যে $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা < 3 হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ সমরেখ হয়।

22. বিস্তৃতি না-করিয়া দেখান যে

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & bc \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

23. a, b, c তিনটি ভিন্ন অ-শূণ্য বাস্তব রাশি হলে $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা দুই হবার একটি শর্ত নির্ণয় করুন।

24. দেখান যে $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3\left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)$

$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিশিষ্ট হতে পারে কি?

25. সমাধান করুন :

$$\begin{vmatrix} 3+x & 3-x & 3-x \\ 3-x & 3+x & 3-x \\ 3-x & 3-x & 3+x \end{vmatrix} = 0$$

সহায়ক গ্রন্থ

1. Higher Algebra (Classical) – S. K. Mapa
2. Higher Algebra (Abstract Linear) – S. K. Mapa
3. A Treatise on Basic Algebra – S. Ganguly & M. N. Mukherjee (Academic publishers)
4. Abstract& Linear Algebra – K. C. Roy & A. G. Das (Joydurga Library)
5. রৈখিক বীজগণিত— শ্রীপতিরঞ্জন চৌধুরী (রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ)

বিভাগ—খ

(বিমূর্ত বীজগণিত)

একক 5 ❑ সেট—সসীম ও অসীম সেট, সেটের সংযোগ, ছেদ ও অন্তর—প্রাসঙ্গিক ধর্মাবলী, সেটসমূহের কার্তিয় গুণফল ; সম্পর্ক বা সম্বন্ধ—প্রকারভেদ, চিত্রণ একৈক ও উপরিচিত্রণ, বিপরীত চিত্রণ, সেটের অঙ্কবাচক সংখ্যা।

একক 6 ❑ দ্বি-পদ প্রক্রিয়া ও বীজগাণিতিক কাঠামো—দল, দলের ধর্মাবলী, দলের উপাদানের ক্রম।

একক 7 ❑ উপদল ; সংজ্ঞা ও শর্ত, উপদলের সংযোগ ও ছেদ।

একক 8 ❑ বিশেষ সসীম দল ঃ চক্রজ দল, বিন্যাস দল, ক্রায়েন -এর 4-দল ঃ বিশেষ ধর্মাবলী।

একক 9 ❑ বলয় বা মণ্ডল, পূর্ণাধার মণ্ডল, ক্ষেত্র ঃ সংজ্ঞা ও ধর্মাবলী। উপবলয় / উপমণ্ডল, উপক্ষেত্র — সংজ্ঞা ও শর্ত।

একক 10 ❑ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান ও আইগেন ভেক্টর—সংজ্ঞা ও ধর্ম। ক্যালি-হ্যাল্মিটন উপপাদ্য (বিবৃতি) ও প্রয়োগ। আইগেন মান ও আইগেন ভেক্টরের প্রয়োগ।

একক 5 ❑ সেট, সম্পর্ক ও চিত্রণ—প্রারম্ভিক ধারণা সমূহ
(Set, Relation and mapping–preliminaries)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

উচ্চতরগণিত, গাণিতিক বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখা, কম্প্যুটার সায়েন্স ইত্যাদি বর্তমানে বিমূর্ত বীজগণিতের উপর নির্ভরশীল। তত্ত্ব ও তার প্রয়োগের বাস্তবতার নিরিখে গণিত শাস্ত্রে বিমূর্ত বীজগাণিতের অধ্যয়ণ ও অনুশীলন অগ্রাধিকারের দাবি রাখে।

বিমূর্ত বীজগণিত অধ্যয়ণের জন্য সেট ও সেটতত্ত্বের সম্পর্কে অন্তত প্রাথমিক ধারণা থাকা অ-পরিহার্য। ফলে বিমূর্ত বীজগণিতের এই প্রথম এককে সেটের ধারণা, সংজ্ঞা, সেটের বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া ও নিয়মাবলী, সম্পর্ক ও চিত্রণ ইত্যাদি আলোচিত হয়েছে—পাঠক্রমের সীমাবদ্ধতার কারণে এই আলোচনা অবশ্যই প্রাথমিক পর্যায়ের। আগ্রহী ও অনুসন্ধিৎসু পাঠক-পাঠিকারা এই এককের শেষে উল্লিখিত গ্রন্থ বা সহায়ক পাঠ্যপুস্তকগুলি অধ্যয়ণ করবেন এটাই প্রত্যাশা।

5.2 সেট (Set)

জার্মান গণিতজ্ঞ জর্জ ক্যান্টর (1845 – 1918) প্রথম সেট ও সেটতত্ত্বর ধারণা প্রবর্তন করেন। পরবর্তী কালপর্বে যদিও সেটতত্ত্ব গাণিতিক যুক্তিবাদের নিরিখে প্রবর্তিত ও সমৃদ্ধ হয়েছে, কিন্তু ক্যান্টর প্রবর্তিত সেট ও সম্পর্কিত ধারণা সমূহই হলো বিমূর্ত বীজগণিত গড়ে তোলার উপাদান। ফলে ক্যান্টরের ধারণাই আমরা এখানে গ্রহণ করব।

5.2.1 সংজ্ঞা, সসীম ও অসীম সেট—ধারণা ও উদাহরণ

সুসংজ্ঞাত ও স্বতন্ত্র উপাদানসমূহের যূথবদ্ধ সঞ্চয়ন (Collection) কে আমরা সেট (Set) বলব।

এর অর্থ হল ঐ সঞ্চয়ণের মধ্যে এমন এক বা একাধিক অন্তর্নিহিত ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য রয়েছে যা ঐ সঞ্চয়ণের অন্তর্ভূক্ত উপাদানগুলির সঞ্চয়নে সন্নিবিষ্ট থাকার কারণ যেমন দ্ব্যর্থহীন ভাবে প্রকাশ করে তেমনই কোন উপাদান ঐ সঞ্চয়নে অন্তর্ভূক্ত হতে পারে কি না সেটি নির্ধারণ সম্ভব হয়।

সাধারণভাবে সেটকে A, B, C,...দ্বারা ও উপাদান বা সদস্যকে a, b, c, ... দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

(ক) বেথুন কলেজের গণিত বিভাগের 2008 সালে সাম্মানিক তৃতীয় বর্ষে পাঠরত ছাত্রীদের সঞ্চয়ন হল একটি সেট।

(খ) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 সংখ্যাগুলির সঞ্চয়ন হল একটি সেট কেননা ঐ সংখ্যাগুলি 20-এর চেয়ে কম সমস্ত ধনাত্মক মৌলিক সংখ্যার সঞ্চয়ন।

কিন্তু কিছু মৌলিক সংখ্যার সঞ্চয়ন সেট নয়, কেননা কোন একটি নির্দিষ্ট মৌলিক সংখ্যা ঐ সঞ্চয়নে অন্তর্ভুক্ত আছে কিনা কিংবা ঐ সঞ্চয়নে থাকতে পারে কিনা সেটি নির্ধারণের জন্য প্রয়োজনীয় ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য উল্লিখিত নেই।

(গ) সমস্ত ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সঞ্চয়ন, সমস্ত অ-শূণ্য বাস্তব রাশির সঞ্চয়ন, সমস্ত মূলদ রাশির সঞ্চয়ন—এগুলিও সেটের উদাহরণ।

সেটের সংজ্ঞা ও ধারণা থেকে আমরা এমন সঞ্চয়ন পেয়ে থাকি যেখানে উপরে উল্লিখিত ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য দ্ব্যর্থহীন, কিন্তু সেটে কোন উপাদান নেই। যেমন (ঘ) সমস্ত বাস্তব রাশির সঞ্চয়ন, যে বাস্তব রাশিগুলির বর্গ–7—

এই সেটে কোন উপাদানই নেই। এ ধরণের সেটকে শূণ্যসেট/খালি সেট (Null set বা Empty set) বলা হয়—এই সেটকে ϕ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়ে থাকে।

যদি কোন সেটের উপাদান সংখ্যা n হয় যেখানে n অ-ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, তবে সেই সেটকে সসীম সেট বলা হয়। এই সংজ্ঞা অনুযায়ী (ক), (খ) ও (ঘ) -তে বর্ণিত সেটগুলি সসীম (Finite) সেট।

অন্যথায় সেটকে অসীম (infinite) সেট বলা হয়ে থাকে—(গ) -তে বর্ণিত সকল সেটই অসীম সেট।

(ঙ) $x^7 = 1$ সমীকরণের সমাধানগুলি একযোগে একটি সেট গঠন করে—এই সেটটি সসীম সেট।

(চ) $x^2 - 3x + 2 < 0$ কে সিদ্ধ করে এমন সমস্ত x একযোগে একটি সেট গঠন করে—এই সেটটি অসীম সেট।

(ছ) 10 নির্ণায়ক মান বিশিষ্ট সকল 2×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স, যাদের পদগুলি সবই মূলদ রাশি, একটি অসীম সেট গঠন করে।

(জ) 100 থেকে কম সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সঞ্চায়ন হল সসীম সেট।

(ঝ) একদল মোটা লোক—এটি সেট বলে বিবেচিত হতে পারে না। কেন না ঐ দলে অন্তর্ভুক্ত হওয়ার বৈশিষ্ট্যটি সু-সংজ্ঞাত নয়। কিন্তু যদি বলা হয়, যে সকল ব্যক্তির ওজন 75 কিলোগ্রামের বেশি, তবে সেই সঞ্চয়নকে সেট বলা হবে কারণ অন্তর্ভুক্ত হওয়ার বৈশিষ্ট্যটি সু-সংজ্ঞাত।

(ঞ) 7 দ্বারা বিভাজ্য ও অনধিক 100 ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাগুলির সঞ্চয়ণ সসীম সেট কিন্তু 7 দ্বারা বিভাজ্য পূর্ণসংখ্যাগুলির সঞ্চয়ন অসীম সেট।

5.2.2. প্রকাশ পদ্ধতি

সেটকে প্রকাশ করার দু'টি পদ্ধতি অনুসৃত হয়ে থাকে।

(i) রোস্টার বা ট্যাবুলার আকার : সেটের উপাদানগুলিকে দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে তালিকা হিসাবে লেখা—যেমন $\{2, 4, 8, 16, 32\}$ বা $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$।

(ii) সেট বিল্ডার আকার : দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে সেটের সাধারণ উপাদান x -এর সঙ্গে ঐ সুসংজ্ঞাত সঞ্চয়নের সাধারণ নির্ধারক বৈশিষ্ট্যটি উল্লেখ করা—যেমন

$\{x \mid x^{11} = 1\}$, $\{x \mid 4x^2 - 5x + 11 < 0\}$ ইত্যাদি।

আমরা সাধারণভাবে দ্বিতীয় আকারটি অনুসরণ করব।

x কোন অ-শূণ্য সেটের (S) উপাদান বুঝাতে আমরা লিখব : $x \in S$ ($\in$ চিহ্নটি ইতালীয় গণিতজ্ঞ

জি পীয়ানো (1858 – 1932) প্রবর্তন করেছিলেন) এর বিপরীত একটি মাত্র উপাদান বিশিষ্ট সেটকে একউপাদান বিশিষ্ট বা একক সেট বলা হয় ও $\{a\}$, $\{5\}$ ইত্যাদি আকারে চিহ্নিত করা হয়।

আগেই বলা হয়েছে, শূণ্য সেট বা খালি সেটকে ϕ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। সতর্ক থাকতে হবে যে ϕ ও $\{0\}$ সেট দু'টি এক নয়।

5.2.3. বিশেষ কিছু সেটের ক্ষেত্রে ব্যবহৃত চিহ্ন

সেট তত্ত্বের আলোচনায় কয়েকটি বহুলপরিচিত ও গুরুত্বপূর্ণ সেটকে বিশেষ চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয় :

$\mathbb{N}$: স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাগুলির সেট (তবে এই সেটটিকে অনেক গ্রন্থকার Z^+ দ্বারাও চিহ্নিত করে থাকেন)

$\mathbb{Z}$: সমস্ত পূর্ণসংখ্যার সেট

$\mathbb{Q}$: মূলদ সংখ্যার সেট

$\mathbb{Q}^+$: ধনাত্মক মূলদ সংখ্যার সেট

$\mathbb{R}$: বাস্তব রাশি সমূহের সেট

$\mathbb{R}^+$: ধনাত্মক বাস্তব রাশিসমূহের সেট

$\mathbb{R}^*$: অ-শূণ্য বাস্তব রাশি সমূহের সেট

$\mathbb{E}$: সমস্ত যুগ্ম পূর্ণ সংখ্যার সেট

$\mathbb{C}$: জটিল রাশিসমূহের সেট

$\mathbb{C}^*$: অ-শূণ্য জটিল রাশিসমূহের সেট

$\mathbb{P}$: যৌগিক সংখ্যা সমূহের সেট

$\mathbb{Q}^*$: অশূণ্য মূলদ সংখ্যার সেট

5.3 সেটের উপসেট ও উপসেট গোষ্ঠী

যদি কোন সেট X-এর সমস্ত উপাদান Y সেটেরও উপাদান হয়, তবে X সেটকে Y সেটের উপসেট (Subset) বলা হয় এবং Y সেটকে X সেটের বর্ধিত সেট (Super set) বলা হয়। আমরা লিখব $X \subseteq Y$ বা $Y \supseteq X$, কিন্তু $X \subseteq Y$ এর সঙ্গে যদি দেখা যায় যে Y সেটে অন্তত এমন একটি উপাদান আছে যা X সেটে নেই, তখন X সেটকে Y সেটের যথার্থ (*proper*) উপসেট বলা হয় এবং $X \subset Y$ বা $Y \supset X$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয় 5.2.3 -এ ব্যবহৃত চিহ্ন অনুযায়ী $\mathbb{E} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{P} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ইত্যাদি হবে।

[মন্তব্য : শূণ্য সেট যে-কোনো সেটের উপসেট হবে। প্রতিটি সেট নিজেই নিজের উপসেট হবে।]

সমসেট (Equal sets) :

S ও T সেট দু'টি সমসেট রূপে বিবেচিত হবে যদি $S \subseteq T$ ও $T \subseteq S$ হয়। এক্ষেত্রে $S = T$ বা $S \equiv T$ লেখা হয়।

উপসেট গোষ্ঠী (Power set) :

যে কোন একটি সেট S -এর উপাদনগুলির সমন্বয়ে যতগুলি উপসেট গঠিত হয়, তাদের সবগুলির সমন্বয়ে যে সেটটি গঠত হয়, তাকেই বলা হবে উপসেট গোষ্ঠী (Power set) এবং $P(S)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে।

মনে করি $S = \{2, 3\}$

ফলে $P(S) = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$.

$A = \{a, b, c\}$

$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,b,c\}\}$

মন্তব্য : যদি একটি সসীম সেটের উপাদান সংখ্যা n হয়, তাহলে সংশ্লিষ্ট উপসেট গোষ্ঠীতে 2^n সংখ্যক উপসেট থাকবে। মনে করি সসীম সেট A-এর উপাদান সংখ্যা n। এর থেকে r সংখ্যক $(r \leq n)$ উপাদান বেছে নেওয়া যাবে n_{c_r} সংখ্যক উপায়ে (সমবায়ের ধারণা থেকে)—প্রতিটি ক্ষেত্রে A -এর উপসেট পাওয়া যাবে। মোট উপসেটের সংখ্যা $= n_{c_0} + n_{c_1} + \ldots + n_{c_r} + \ldots + n_{c_n} = 2^n$

সার্বিক সেট (Universal Set)

কতকগুলি সেট যথা $A, B, C, \ldots$ যদি একটি বিশেষ সেট S-এর উপসেট হয়, তবে S সেটটি $A, B, C, \ldots$ উপসেটগুলির সাপেক্ষে সার্বিক সেট হিসাবে সংজ্ঞাত হবে। সার্বিক সেটকে সধারণভাবে $\cup$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। মনে করি $A = \{x \mid 0 < x \leq 2\}$, $B = \{x \mid 2 < x \leq 4\}$, $C = \{x \mid 4 < x \leq 6\}$, এই তিনটির সাপেক্ষে সার্বিক সেট $S = \{x \mid 0 < x \leq 6\}$,। তবে ঐ S সেটের বর্ধিত কোন সেট-ও সার্বিক সেট হতে পারে—যথা $T = \{x \mid -1 < x \leq 11\}$, এক্ষেত্রে সার্বিক সেটরূপে গণ্য হতে পারে। কাজেই সার্বিক সেট অনন্য নয়।

5.4 সেটের উপর বিভিন্ন বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া

দু'টি সেট A ও B-এর **সংযোগ** বলতে বুঝায় সেট দু'টির উপাদানগুলি দ্বারা গঠিত সেট $A \cup B$ অর্থাৎ

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ বা $x \in B\}$

[মন্তব্য : এখানে 'বা' বলতে বুঝায় $x \in A$, $x \notin B$; $x \notin A$, $x \in B$; $x \in A$, $x \in B$]

দু'টি সেট A ও B-এর **ছেদ** বলতে বুঝায় সেট দু'টির অভিন্ন বা সাধারণ (Common) উপাদান দ্বারা গঠিত সেট $A \cap B$ অর্থাৎ $A \cap B = \{x \mid x \in A$ এবং $x \in B\}$

উদাহরণ : $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 7, 11, 15\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$

$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15\}$, $A \cap B = \{3, 7\}$

$B \cup C = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 15\}$, $B \cap C = \phi$

$A \cap C = \phi$

দু'টি সেট A ও B-কে **বিচ্ছেদী** (disjoint) সেট বলা হবে যদি $A \cap B = \phi$ হয়, উপরে উদাহরণে A ও C বিচ্ছেদী, B ও C বিচ্ছেদী কিন্তু A ও B বিচ্ছেদী নয়।

দু'টি সেট A ও B -এর অন্তর বলতে A-এর সেই উপাদানগুলি দ্বারা গঠিত একটি সেট বুঝায় যে উপাদানগুলি B-তে নেই অর্থাৎ $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ উপরের উদাহরণে

$A - B = \{1, 5, 9\}$, $B - A = \{11, 15\}$, $A - C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

পূরক সেট : A যদি সেট S-এর যথার্থ উপসেট হয়, তা'হলে A-এর উপাদানগুলি ব্যতীত কমপক্ষে একটি অতিরিক্ত উপাদান S-এ আছে। সেই উপাদান বা সেই ধরণের উপাদানগুলি দ্বারা গঠিত সেটটি A' বা A^c দ্বারা চিহ্নিত হলে A' বা A_c -কে S-এর সাপেক্ষে A-এর পূরক সেট বলা হয়ে থাকে।

যদি $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ ও $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ হয়, তবে S সাপেক্ষে A-এর পূরক সেট হবে $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

দুটি সেট A ও B **(Symmetric difference)** -এর প্রতিসম অন্তর বলতে বুঝায় $(A - B) \cup (B - A)$, যা $A \Delta B$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 5, 9, 13\}$

এখানে $A - B = \{3, 7\}$ ও $B - A = \{13\}$

ফলে $A \Delta B = \{3, 7, 13\}$ হবে।

উপরের আলোচনা থেকে স্পষ্ট যে $X_1, X_2, \ldots, X_n$ যদি n সংখ্যক সেট হয় $(n \geq 2)$, তবে

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots \cup X_n = \{x \mid x \in X_i \text{ অন্ততে একটি } i\text{-এর জন্য}, 1 \leq i \leq n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = \{x \mid x \in X_i \text{ সকল } i\text{-এর জন্য}, 1 \leq i \leq m\}$$

সেট সমূহের পরিবার A সাপেক্ষে একটি অ-শূণ্য সেট I-কে সূচী সেট (Index set) বলা হবে যদি প্রতিটি $\alpha \in I$ -এর জন্য A-তে একটি সেট A_α -এর অস্তিত্ব থাকে, $A = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$।

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \text{ অন্তত একটি } \alpha \in I \text{ -এর জন্য}\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \text{ সকল } \alpha \in I \text{ -এর জন্য}\}$$

এক্ষেত্রে $p, q \in I$ ও $p \neq q$ -এর জন্য $A_p \cap A_q = \phi$ হলে Ap সেটগুলিকে $(p \in I)$ পরস্পর বিচ্ছেদী সেট বলা হয়।

5.4.1 সংযোগ, ছেদ ও অন্তর সম্পর্কিত মৌলিক সূত্র সমূহ :

ϕ, A, B, C সেটগুলি সংযোগ, ছেদ ও পূরক প্রক্রিয়া সাপেক্ষে নিম্নলিখিত নিয়মগুলি মেনে চলে :

(i) $A \cup \phi = A$ এবং $A \cap \phi = \phi$

(ii) $A \cup U = U$ এবং $A \cap U = A$ (U সার্বিক সেট)

(iii) $A \cup A = A$ এবং $A \cap A = A$ (বর্গৈকসম)

(iv) $A \cup B = B \cup A$ এবং $A \cap B = B \cap A$ (বিনিময় ধর্ম)

(v) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ এবং $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (সংযোগ ধর্ম)

(vi) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ এবং

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (বন্টক ধর্ম)

(vii) $A \cap (A \cup B) = A$ এবং $A \cup (A \cap B) = A$

(viii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ (ডি মরগ্যানের সূত্র)

(ix) $A \Delta B = B \Delta A$

(x) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

(xi) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(xii) $A \Delta \phi = A$ এবং $A \Delta A = \phi$

(xiii) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

(xiv) A, B ও C সসীম সেট হলে

(ক) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$

যেখানে $n(P)$ বলিতে P সসীম সেটের উপাদান সংখ্যা বুঝায়।

(খ) $B \subseteq A$ হলে $n(A - B) = n(A) - n(B)$ যেখানে $n(A)$, $n(B)$ উপরোক্ত অর্থবাহী।

উপরোক্ত সূত্রগুলির যেমন যদৃচ্ছ সেটের ক্ষেত্রে যাথার্থতা প্রমাণ করা যায় তেমনই নির্দ্দিষ্ট সেট সমূহের ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই করা যায় :

(viii)-এর প্রমাণ

মনে করি $P = (A \cup B)'$, $Q = A' \cap B'$

ধরি $x \in P \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A, x \notin B \Rightarrow x \in A', x \in B' \Rightarrow x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in Q$

অতএব $P \subseteq Q$ ... (1)

ধরি $y \in Q \Rightarrow Y \in A', Y \in B' \Rightarrow Y \notin A, Y \notin B$

$\Rightarrow y \notin A \cup B \Rightarrow y \in (A \cup B)' \Rightarrow y \in P$

অতএব $Q \subseteq P$ ... (2)

(1) ও (2) থেকে পাই $P \equiv Q$

মনে করি $S = (A \cap B)'$, $T = A' \cup B'$

ধরি $x \in S \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A, x \notin B$ বা $x \notin A, x \in B$ বা, $x \notin A, x \notin B$

$\Rightarrow$ যথাক্রমে $x \in B'$ বা $x \in A'$ বা $x \in A', x \in B'$

$\Rightarrow x \in A' \cup B' \Rightarrow x \in T$. অতএব $S \subseteq T$ (3)

ধরি $y \in T \Rightarrow y \in A'$ বা $y \in B'$ বা $y \in A', y \in B'$

$\Rightarrow$ যথাক্রমে $y \notin A, y \notin B, y \notin A$ ও $y \notin B$

$\Rightarrow y \notin A \cap B$

$\Rightarrow y \in (A \cap B)' \Rightarrow y \in S$ অতএব $T \subseteq S$ (4)

(3) ও (4) থেকে পাই $S \equiv T$

উদাহরণ : (1) যদি $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ও $C = \{2, 4, 6, 8\}$ হয়, তবে (x) -এর যাথার্ততা যাচাই করুন।

$B \Delta C = (B - C) \cup (C - B) = \{3, 5\} \cup \{6. 8\} = \{3, 5, 6, 8\} = P$

$A \Delta (B \Delta C) \quad = A \Delta P = (A - P) \cup (P - A) = \{1, 2, 4, 7, 9\} \cup \phi$

$A \Delta B \quad = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 6, 7, 8, 9\} \cup \phi$

$(A \Delta B) \Delta C \quad = (Q - C) \cup (C - Q) = \{1, 7, 9\} \cup \{2, 4\} \cup \phi$

$= \{1, 2, 4, 7, 9\} \cup \phi$

অতএব এক্ষেত্রে $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

(2) উপরের A, B, C-এর ক্ষেত্রে (xiii) -এর যাথার্থতা যাচাই করুন।

$B \Delta C = P = \{3, 5, 6, 8\}$

$A \cap P = \{3, 5, 6, 8\}$

এক্ষেত্রে $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\} = S$ এবং $A \cap C = \{2, 4, 6, 8\} = T$

$S \Delta T = (S - T) \cup (T - S) = \{3, 5\} \cup \{6. 8\} = \{3, 5, 6, 8\}$

ফলে (xiii)-এর যাথার্থতা এক্ষেত্রে যাচাই হল।

(3) একটি পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 40 শতাংশ গণিতে পাস করে, 53 শতাংশ ইংরাজীতে পাস করে, 68 শতাংশ অর্থনীতিতে পাস করে, 32 শতাংশ গণিত ও ইংরাজীতে পাস করে, 26 শতাংশ ইংরাজী ও অর্থনীতিতে পাস করে, 30 শতাংশ গণিত ও অর্থনীতিতে পাস করে এবং 17 শতাংশ কোন বিষয়েই পাস করে না। কত শতাংশ পরীক্ষার্থী তিনটি বিষয়েই পাস করে?

এখানে $n(M)$ = শুধুমাত্র গণিতে পাসের সংখ্যা = 40

$n(E)$ = শুধু মাত্র ইংরাজীতে পাসের সংখ্যা = 53

$n(Ec)$ = শুধুমাত্র অর্থনীতিতে পাসের সংখ্যা = 68

$n(M \cap E) = 32$, $n(E \cap \mathrm{Ec}) = 26$, $n(M \cap E) = 30$

ধরি $n(M \cap E \cap Ec) = x$

(xiv) (ক) অনুযায়ী

$n(M \cup E \cup Ec) \quad = 40 + 53 + 68 - (32 + 26 + 30) + x$

$= 73 + x$

তিনটি বিষয়েই অকৃতকার্য এমন সংখ্যা $= 100 - (73 + x)$

$= 27 - x$

দেওয়া আছে $27 - x = 17$, অতএব $x = 10$

তিনটি বিষয়েই 10 শতাংশ পাস করেছে।

(4) A, B, C তিনটি অশূণ্য সেট। দেখান যে শুধুমাত্র

$A \cap B = A \cap C$ থেকে $B = C$ হয় না।

কিন্তু $A \cap B = A \cap C$ ও $A \cup B = A \cup C$ একত্রে থাকিলে $B = C$ হয়।

মনে করি $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$, $B = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}\right\}$

$C = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}\right\}$

এখানে $A \cap B = \left\{\frac{1}{3}\right\}$, $A \cap C = \left\{\frac{1}{3}\right\}$; কিন্তু B ও C সমসেট নয়।

ধরি $A \cap B = A \cap C$ ও $A \cup B = A \cup C$

এক্ষেত্রে $B = B \cup (A \cap B)$ [সূত্র (vii)]

$= B \cup (A \cap C)$ (প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী)

$= (B \cup A) \cap (B \cup C)$ [সূত্র (vi)]

$= (A \cup B) \cap (B \cup C)$ [সূত্র (iv)]

$= (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী)

$= (A \cap B) \cup C$ [সূত্র (vi)]

$= (A \cap C) \cup C$ (প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী)

$= C$ [সূত্র (vii)]

বিকল্প পদ্ধতি

মনে করি $x \in B$

যদি এক্ষেত্রে $x \in A$ হয়, তবে $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in C \quad \Rightarrow B \subseteq C$

যদি $x \notin A$ হয়, তবে $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cup C$

$\Rightarrow x \in C \quad \Rightarrow B \subseteq C$

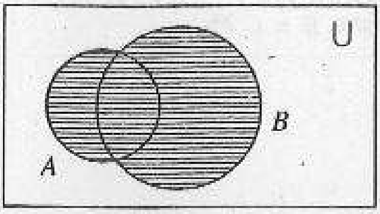
একইভাবে $C \subseteq B$ হবে। সুতরাং $B \equiv C$.

মন্তব্য : $A \cap B = A \cap C$ এবং $A \cap B' = A \cap C' \Rightarrow B = C$ যেখানে A, B, C হল S সেটের উপসেট।

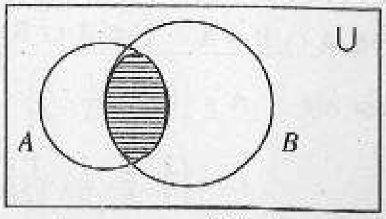
5.4.2 ভেন্ চিত্র ঃ

জন ভেন (1834—1923) 1880 সালে সেট ও সেটের উপর বিভিন্ন বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া ব্যাখ্যা করার জন্য চিত্রের সাহায্য নেন। এই প্রক্রিয়ায় শূণ্য সেট ϕ-কে চিত্রারিত করা সম্ভব নয়। সেট তত্ত্বের যুক্তি প্রয়োগের প্রতিফলনও এভাবে সম্ভব নয়, তবে সেটতত্ত্ব অধ্যয়নে প্রথম শিক্ষার্থীদের আগ্রহ এতে বাড়তে পারে।

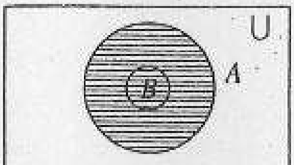
ভেন চিত্রে সাধারণভাবে সার্বিক সেট $\cup$-কে একটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা ও তার অভ্যন্তরস্থ সেটগুলিকে বৃত্ত দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।



$A \cup B$

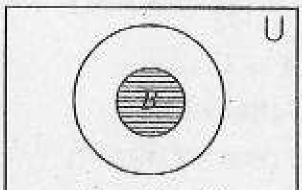


$A \cup B$

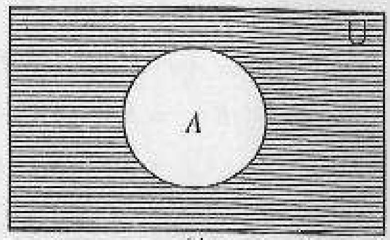


$B \subset A$

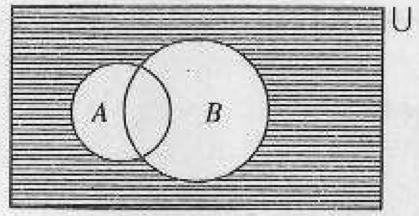
$A \cup B - A$



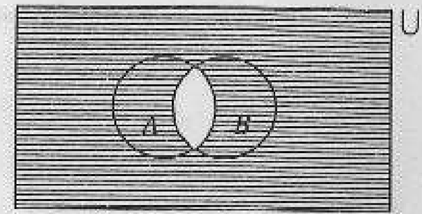
$A \cap B = B$



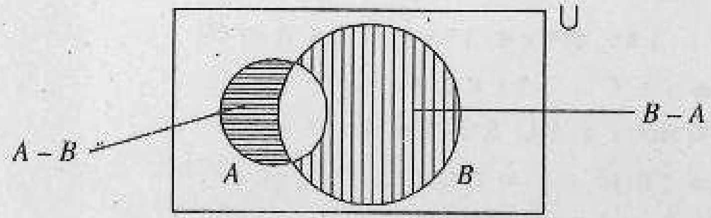
A'



$(A \cup B)'$



$(A \cap B)'$



$(A - B) \cup (B - A) = \mathrm{A} \Delta \mathrm{B}$

5.5 সেটসমূহের কার্তিয় গুণফল

A ও B দু'টি অশূণ্য সেট হলে $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

আমরা ধরে নেব যে কোনো সেট X-এর ক্ষেত্রে

$$X \times \phi = \phi = \phi \times X$$

অতএব $A_1, A_2, ..., A_n$ অ-শূণ্য সেট হলে

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., an) \mid a_i \in A_i$ সকল i-এর জন্য$\}$

যদি $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$ হয়, সেক্ষেত্রে

$A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A$ সকল i-এর জন্য$\}$

যদি $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ হয়

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

ফলে $A \times B = B \times A$ হচ্ছে না।

বিশেষ কিছু ক্ষেত্রে কার্তিয় গুণফলে বিনিময় ধর্ম অর্থাৎ $A \times B = B \times A$ গ্রাহ্য হতে পারে কিন্তু সাধারণভাবে ঐ ধর্ম প্রযোজ্য নয়।

কিছু মৌলিক ধর্ম ঃ

সার্বিক সেট S-এর A, B ও C তিনটি অশূণ্য উপসেট হলে

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(iii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

যদি D উক্ত সার্বিক সেট S-র অশূণ্য উপসেট হয়, তবে

(iv) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

উপরের ধর্মগুলি প্রমাণ করা যায় আবার নির্দিষ্ট সেটের ক্ষেত্রে যথার্থতাও যাচাই করা যায়।

(i)-এর প্রমাণ ধরি, $P = A \times (B \cap C)$, $Q = (A \times B) \cap (A \times C)$ মনে করি,

$(x, y) \in A \times (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $y \in B$, $y \in C$

$\Rightarrow (x, y) \in A \times B$ এবং $(x, y) \in A \times C$

$\Rightarrow (x, y) \in Q$ অতএব $P \subseteq Q$ .... (i)

মনে করি, $(r, s) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$\Rightarrow r \in A$ এবং $s \in B$, $s \in C$

$\Rightarrow r \in A$ এবং $s \in B \cap C$

$\Rightarrow (r, s) \in A \times (B \cap C)$

$\Rightarrow Q \subseteq P$ .... (2)

(1) ও (2) থেকে পাই, $P = Q$.

উদাহরণ 1. যদি $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{4, 5, 6\}$ এবং $D = \{7, 8\}$ হয়, তবে (iv)-এর সত্যতা যাচাই করুন।

$A \times C = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$

$B \times D = \{(3, 7), (3, 8), (4, 7), (4, 8), (5, 7), (5, 8)\}$, ফলে $(A \times C) \cap (B \times D) = \phi$

$A \cap B = \phi$, $C \cap D = \phi$ এবং $(A \cap B) \times (C \cap D) = \phi$

(2) দেখান যে, $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$ বা কোনো একটি সেট শূণ্য সেট হবে।

A বা B কোনো একটি শূণ্য সেট হলে সংজ্ঞানুযায়ী $A \times B = \phi = B \times A$ হবে।

ধরি, $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ ও $A \times B = B \times A$

মনে করি, a ও b যথাক্রমে A ও B সেটের যদৃচ্ছ উপাদান।

$\Rightarrow (a, b) \in A \times B = B \times A \Rightarrow a \in B, b \in A$

ফলে $A \subseteq B$ ও $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

আবার যদি $A = B$ হয়, $A \times B = A^2 = B \times A$ হবে।

(3) যদি $n(A \times B) = p$ হয় যেখানে p মৌলিক সংখ্যা, তবে $n(A)$ ও $n(B)$ কী হতে পারে?

পূর্ণ সংখ্যা $p > 1$-কে মৌলিক সংখ্যা বলা হবে যদি p-এর ধনাত্মক বিভাজক শুধুমাত্র 1 ও p হয়।

এখানে A ও B সসীম সেট এবং $A \times B$-এর সংজ্ঞা অনুযায়ী A-এর প্রতিটি উপাদানের সঙ্গে B-এর প্রতিটি উপাদান নিয়ে ক্রমযুগলগুলি গঠিত হয়, যা $A \times B$ গঠন করে। ফলে $n(A \times B) = n(A)\, n(B) = p$ হবে। অতএব $n(A) = 1$, $n(B) = p$ বা $n(A) = p$, $n(B) = 1$ হবে।

5.6 সম্পর্ক বা সম্বন্ধ

ধরা যাক্ A ও B দুটি অশূণ্য সেট। A ও B-এর মধ্যে সম্পর্ক ρ, $A \times B$ সেটের উপসেট।

ক্রমযুগল $(a, b) \in \rho$-এর অর্থ হল A সেটের উপাদান a ও B সেটের উপাদান b পরস্পর ρ সম্পর্কদ্বারা সংযুক্ত। এই সম্পর্ককে $a\rho B$ প্রতীক দ্বারা চিহ্নিতকরা হয়। যদি a ও b, ρ-সম্পর্কযুক্ত না-হয়, তবে $a\bar{\rho}b$ বা $a\rho b$ প্রতীক ব্যবহার করা হয়।

$A \times A$-এর উপসেটের ক্ষেত্রে আমরা বলব সম্পর্কটি A সেটে সংজ্ঞাত হয়েছে।

উদাহরণ 1. $A = \{1, 2, 3\}$ মনে করি, $\rho_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$

লক্ষণীয় এখানে $1\rho_1 1$, $2\rho_1 2$, $3\rho_1 3$, $1\rho_1 3$ হবে, কিন্তু $2\bar{\rho}_1 3$, $3\bar{\rho}_1 1$, $1\bar{\rho}_1 3$ হবে।

$\rho_2 = \{(2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

এক্ষেত্রে $2\rho_2 3$, $3\rho_2 2$, $1\rho_2 3$, $3\rho_2 1$, $1\rho_2 2$, $2\rho_2 1$ হবে

কিন্তু $1\bar{\rho}_2 1$, $2\bar{\rho}_2 2$, $3\bar{\rho}_3 3$ হবে।

(2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-এর উপসেট ρ নিম্নভাবে নেওয়া হল—

$\rho = \{(a, b) | b = 2a,\ a, b \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(1, 2), (2, 4)$ $(3, 6), (4, 8) \in \rho$ কিন্তু $(3, 5) \notin \rho$—ফলে $1\rho 2$, $2\rho 4$, $3\rho 6$, $4\rho 8$ হবে কিন্তু $3\rho 5$ হবে না।

(3) ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট Z^+-এ একটি সম্পর্ক ρ সংজ্ঞাত করা হল যে $a\rho b$ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a = b^2$ হয়। ফলে $4\rho 2$ হবে কিন্তু $2\rho 4$ হবে না।

মন্তব্য : যেহেতু শূণ্যসেট যেকোনো সেটের উপসেট ফলে $\rho = \phi$ হতে পারে। তখন ρ-কে বলা হবে শূণ্য সম্পর্ক (null relation)।

5.6.1 সম্পর্কের প্রকারভেদ ও তুল্যতা/সমার্থতা সম্পর্ক

মনে করি, A একটি অ-শূণ্য সেট এবং ρ ঐ সেটে সংজ্ঞাত সম্পর্ক।

(i) যদি প্রতিটি $a \in A$-এর জন্য '$a\rho a$ সিদ্ধ হয়', তবে ρ-কে প্রতিবর্তী বা **স্বসম সম্পর্ক** (Reflexive Relation) বলা হবে।

(ii) যদি সমস্ত $a, b \in A$-এর ক্ষেত্রে '$a\rho b$ সিদ্ধ হলে $b\rho a$-ও সিদ্ধ হয়' ($a\rho b \Rightarrow b\rho a$), তবে ρ-কে **প্রতিসম সম্পর্ক** (Symmetric Relation) বলা হবে।

(iii) যদি সমস্ত $a, b, c \in A$-এর ক্ষেত্রে $a\rho b$ ও $b\rho c$ উভয়ে সিদ্ধ হলে $a\rho c$-ও সিদ্ধ হয় ($a\rho b, b\rho c \Rightarrow a\rho c$), তবে ρ-কে অনুবর্তী বা **সংক্রমণ সম্পর্ক** (Transitive relation) বলা হবে।

(iv) যদি কোনো সেটে সংজ্ঞাত সম্পর্ক ρ একইসঙ্গে প্রতিবর্তী বা স্বসম, প্রতিসম ও অনুবর্তী বা সংক্রমণ হয়, তবে সেক্ষেত্রে ρ-কে **তুল্যতা** বা **সমার্থতা সম্পর্ক** (Equivalence relation) বলা হবে।

(v) যদি সমস্ত $a, b \in A$-এর ক্ষেত্রে $a\rho b$ ও $b\rho a$ সিদ্ধ হলে $a = b$ হয়', তবে ρ-কে প্রতিসাম্য বিরোধী (Anti-symmetric) বলা হবে।

উদাহরণ. (1) Z সেটের উপর সম্পর্ক ρ-এভাবে সংজ্ঞাত হল যে $a, b \in Z$-এর জন্য $a\rho b$ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a - b$, 5 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

প্রতি $a \in Z$-এর জন্য $a\rho a$ সিদ্ধ হয় ও ρ প্রতিবর্তী সম্পর্ক।

মনে করি, $a, b \in Z$-এর জন্য $a\rho b$ সিদ্ধ হয়। ফলে $a - b$, 5 দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং $b - a$, 5 দ্বারা বিভাজ্য ও $b\rho a$ সিদ্ধ হবে। অতএব ρ প্রতিসম সম্পর্ক।

মনে করি $a, b, c \in Z$ এমন যে $a\rho b$, $b\rho c$ সিদ্ধ হয় $\Rightarrow a - b$, $b - c$ উভয়েই 5 দ্বারা বিভাজ্য।

অতএব, পূর্ণসংখ্যা k_1, k_2 পাওয়া যাবে যে $a - b = 5k_1$, $b - c = 5k_2$ হয়।

সুতরাং, $a - c = 5(k_1 + k_2)$, 5 দ্বারা বিভাজ্য ও $a\rho c$ সিদ্ধ হয়। ফলে ρ অনুবর্তী সম্পর্ক। সংজ্ঞাত ρ, সমার্থতা সম্পর্ক হবে।

(2) সকল পূর্ণসংখ্যার সেট Z-এর উপর সংজ্ঞাত সম্পর্ক ρ নিম্নরূপ :

$$\rho = \{(a, b) \in Z \times Z : | a - b | \leq 5\} ;$$

ρ সম্পর্কটি প্রতিবর্তী, প্রতিসম ও অনুবর্তী হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

যে-কোনো $a \in \mathbb{Z}$-এর ক্ষেত্রে $a\rho a$ সিদ্ধ হয়, কেননা $|a - a| = 0 < 5$ ফলে ρ প্রতিবর্তী সম্পর্ক।

মনে করি $a, b \in \mathbb{Z}$ এমন যে $a\rho b$ সিদ্ধ হয়, ফলে $|a - b| \leq 5$ এবং $|b - a| \leq 5$, অতএব $b\rho a$ সিদ্ধ হয়। সুতরাং, ρ প্রতিসম সম্পর্ক।

কিন্তু ρ অনুবর্তী নয় $1\rho 4$ এবং $4\rho 8$ সিদ্ধ হয়, কিন্তু $1\rho 8$ সিদ্ধ হয় না।

অতএব ρ সম্পর্কটি প্রতিবর্তী ও প্রতিসম, কিন্তু অনুবর্তী নয়।

(3) সকল বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এ সংজ্ঞাত ρ সম্পর্ক নিম্নরূপ :

$$\rho = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a - b \text{ শূণ্য বা অমূলদ}\}$$

ρ সম্পর্কটি প্রতিবর্তী, প্রতিসম ও অনুবর্তী হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

প্রতি $a \in \mathbb{R}$-এর জন্য $a\rho a$ সিদ্ধ হয় কেননা $a - a = 0$—অতএব ρ প্রতিবর্তী সম্পর্ক।

মনে করি, $a, b \in \mathbb{R}$-এর জন্য $a\rho b$ সিদ্ধ হয় $\Rightarrow a - b$ হবে শূণ্য বা অমূলদ $\Rightarrow b - a$ হবে শূণ্য বা অমূলদ $\Rightarrow b\rho a$ সিদ্ধ হয় $\Rightarrow \rho$ প্রতিসম সম্পর্ক।

কিন্তু ρ অনুবর্তী নয়—$2\rho(3+\sqrt{7})$ ও $(3+\sqrt{7}\rho 5)$ সিদ্ধ হয়, $2\rho 5$ সিদ্ধ হয় না।

অতএব ρ সম্পর্কটি প্রতিবর্তী ও প্রতিসম, অনুবর্তী নয়।

(4) সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\mathbb{N}$-এ সংজ্ঞাত ρ সম্পর্ক নিম্নরূপ :

$a, b \in \mathbb{N}$-এর ক্ষেত্রে $a\rho b$ সিদ্ধ হয় যদি এবং কেবলমাত্র যদি b, a দ্বারা বিভাজ্য হয়। ρ সম্পর্কটি কীরূপ? প্রতি $a \in \mathbb{N}$-এর জন্য $a\rho a$ সিদ্ধ হয় ও ρ প্রতিবর্তী সম্পর্ক। $2\rho 4$ সিদ্ধ হয়। কিন্তু $4\rho 2$ নয়, ফলে ρ প্রতিসম নয়। মনে করি, $a, b, c, \in \mathbb{N}$ এমন যে $a\rho b$ ও $b\rho c$ সিদ্ধ হয়। ফলে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা k_1 ও k_2 পাওয়া যায় যে $b = ak_1$ ও $c = bk_2$ হবে। অতএব $c = ak_1k_2$ এবং c, a দ্বারা বিভাজ্য। অতএব $a\rho c$ সিদ্ধ হয় ও ρ অনুবর্তী। এখানে ρ, প্রতিবর্তী ও অনুবর্তী কিন্তু প্রতিসম নয়। তবে একটি বিষয় লক্ষণীয়। এখানে $a\rho b$ ও $b\rho a$ সিদ্ধ হলে $a = b$ হয়। ρ প্রতিসম বিরোধী।

(5) সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\mathbb{N}$-এ সংজ্ঞাত ρ সম্পর্ক নিম্নরূপ :

$a, b \in \mathbb{N}$-এর ক্ষেত্রে $a\rho b$ সিদ্ধ হয় যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a \geq b$ হয়। ρ সম্পর্কটি কীরূপ?

প্রতি $a \in \mathbb{N}$-এর জন্য $a\rho a$ সিদ্ধ হয় ও ρ প্রতিবর্তী সম্পর্ক।

ρ প্রতিসম নয়, কেননা $4\rho 2$ সিদ্ধ হয়, $2\rho 4$ নয়।

মনে করি, $\mathbb{N}$-এ $a\rho b$ ও $b\rho c$ সিদ্ধ হয়।

ফলে $a \geq b$ ও $b \geq c$ এবং ইহা থেকে $a \geq c$, অতএব $a\rho c$ সিদ্ধ হয়। ρ অনুবর্তী সম্পর্ক।

এক্ষেত্রে ρ, প্রতিবর্তী ও অনুবর্তী কিন্তু প্রতিসম নয়।

(6) সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট $\mathbb{Z}$-এ ρ সম্পর্কটি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$$\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : ab > 0\}$$

ρ সম্পর্কটি সমার্থতা সম্পর্ক হবে কী?

$0\rho 0$ সিদ্ধ হয় না, ρ সম্পর্কটি প্রতিবর্তী নয়।

মনে করি, $a, b \in \mathbb{Z}$ ও $a\rho b$ সিদ্ধ হয়। ফলে $ab > 0$ ও $ba > 0 \Rightarrow b\rho a$ সিদ্ধ হয় ও ρ প্রতিসম সম্পর্ক।

ধরি, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ও $a\rho b$, $b\rho c$ সিদ্ধ হয়।

অতএব $ab > 0$ ও $bc > 0 \Rightarrow ab^2c > 0 \Rightarrow ac > 0$ যেহেতু $b^2 > 0$

$\Rightarrow a\rho c$ সিদ্ধ হয় ও ρ অনুবর্তী সম্পর্ক।

এক্ষেত্রে ρ সমার্থতা সম্পর্ক নয়।

(7) সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\mathbb{N}$-এ ρ সম্পর্কটি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত ঃ

$\rho = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a^2 - 4ab + 3b^2 = 0\}$

ρ সম্পর্কটি প্রতিবর্তী, প্রতিসম ও অনুবর্তী হবে কী?

প্রতি $a \in \mathbb{N}$-এর জন্য $a^2 - 4a^2 + 3a^2 = 0$ ও ফলে $a\rho a$ সিদ্ধ হয়। ρ প্রতিবর্তী সম্পর্ক।

ρ প্রতিসম নয়, কেননা $3\rho 1$ (যেহেতু $3^2 - 4.3.1 + 3(1^2) = 0$)

সিদ্ধ হয়, $1\rho 3$ নয় $(1^2 - 4.1.3 + 3(3)^2 \neq 0)$।

ρ অনুবর্তী নয়, $9\rho 3$ ও $3\rho 1$ সিদ্ধ হয় (যাচাই করুন), কিন্তু $9\rho 1$ নয় (যাচাই করুন)।

ফলে ρ শুধুমাত্র প্রতিবর্তী সম্পর্ক।

(8) Q^*-এ ρ সম্পর্কটি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$\rho = \{(a, b) \in Q^* \times Q^* : ab = 1\}$

ρ সম্পর্কটি প্রতিবর্তী, প্রতিসম ও অনুবর্তী হবে কী?

ρ প্রতিবর্তী নয়, কেননা $a\rho a$ সিদ্ধ হবে শুধুমাত্র $a = 1$ এর ক্ষেত্রে। যেহেতু $ab = 1 \Rightarrow ba = 1$, ফলে $a\rho b$ সিদ্ধ হলে $b\rho a$ সিদ্ধ হবে এবং ρ প্রতিসম।

মনে করি, $a, b, c \in Q^*$-এর ক্ষেত্রে $a\rho b$ ও $b\rho c$ সিদ্ধ হয়।

ফলে $ab = 1$ বা, $b = \dfrac{1}{a}$ এবং $cb = 1$ বা, $b = \dfrac{1}{c}$

সুতরাং, $a = c$; সকল a, b, c-এর জন্য $a\rho c$ নয়।

ρ অনুবর্তী নয়।

ফলে ρ শুধুমাত্র প্রতিসম সম্পর্ক।

(9) $\mathbb{R}$-এ ρ সম্পর্কটি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$\rho = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a > b\}$, ρ প্রতিবর্তী, প্রতিসম ও অনুবর্তী হবে কী?

যেহেতু $a > a$ হয় না, ফলে ρ প্রতিবর্তী নয়।

$a > b \neq b > a$, ফলে ρ প্রতিসম নয়।

যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$-এর জন্য $a\rho b$ ও $b\rho c$ উভয়েই সিদ্ধ হয়, তবে $a\rho c$ সিদ্ধ হবে। কেননা $a > b, b > c \Rightarrow a > c$।

ফলে ρ শুধুমাত্র অনুবর্তী সম্পর্ক।

(10) অশূণ্য সেট A-তে দু'টি সমার্থতা সম্পর্ক ρ_1 ও ρ_2 সংজ্ঞাত আছে। $\rho_1 \cap \rho_2$ এবং $\rho_1 \cup \rho_2$ সমার্থতা সম্পর্ক হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

যেহেতু ρ_1 ও ρ_2 প্রতিবর্তী, ফলে প্রতি $a \in A$-এর জন্য $(a, a) \in \rho_1$, $(a, a) \in \rho_2 \Rightarrow (a, a) \in \rho_1 \cap \rho_2$, $(a, a) \in \rho_1 \cup \rho_2 \Rightarrow \rho_1 \cap \rho_2$ ও $\rho_1 \cup \rho_2$ উভয়েই প্রতিবর্তী সম্পর্ক।

মনে করি, $a, b \in A$-এর জন্য $(a, b) \in \rho_1 \cap \rho_2$

$\Rightarrow (a, b) \in \rho_1$ এবং $(a, b) \in \rho_2$

যেহেতু ρ_1 ও ρ_2 প্রতিসম, ফলে $(b, a) \in \rho_1$ এবং $(b, a) \in \rho_2 \Rightarrow (b, a) \in \rho_1 \cap \rho_2$ এবং $\rho_1 \cap \rho_2$ প্রতিসম সম্পর্ক।

মনে করি, $a, b \in A$-এর জন্য $(a, b) \in \rho_1 \cup \rho_2$

$\Rightarrow (a, b) \in \rho_1$ বা $(a, b) \in \rho_2$

যেহেতু ρ_1 ও ρ_2 প্রতিসম, $(a, b) \in \rho_1 \Rightarrow (b, a) \in \rho_2 \Rightarrow (b, a) \in \rho_1 \cup \rho_2$ এবং $\rho_1 \cup \rho_2$ প্রতিসম সম্পর্ক।

মনে করি, $a, b, c \in A$-এর জন্য (a, b) ও $(b, c) \in \rho_1 \cap \rho_2$

যেহেতু ρ_1 অনুবর্তী, $(a, b), (b, c) \in \rho_1 \Rightarrow (a, c) \in \rho_1$

এবং $(a, b), (b, c) \in \rho_2 \Rightarrow (a, c) \in \rho_2$

ফলে $(a, c) \in \rho_1 \cap \rho_2$ ও $\rho_1 \cap \rho_2$ অনুবর্তী সম্পর্ক।

কিন্তু $\rho_1 \cup \rho_2$ অনুবর্তী না-ও হতে পারে।

ধরি, $A = \{1, 2, 3\}$, $\rho_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$

$\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$

ρ_1 ও ρ_2 উভয়েই অনুবর্তী সম্পর্ক।

$(3, 1) \in \rho_1 \cup \rho_2$, $(1, 2) \in \rho_1 \cup \rho_2$ কিন্তু $(3, 2) \notin \rho_1 \cup \rho_2$

$\Rightarrow \rho_1 \cup \rho_2$ অনুবর্তী নয়।

5.6.2 বিপরীত সম্পর্ক ঃ

মনে করি, অশূণ্য দুটি সেট A ও B এবং A থেকে B-তে সম্পর্ক ρ সংজ্ঞাত অর্থাৎ ρ, $A \times B$-এর উপসেট। ρ-এর বিপরীত ρ^{-1} বলতে বুঝাবে B থেকে A-তে সম্পর্ক এমনভাবে যে,

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}।$$

যদি A সেটে সংজ্ঞাত ρ সম্পর্ক সমার্থতা সম্পর্ক হয়, তবে ρ^{-1} সমার্থতা সম্পর্ক হবে।

যেহেতু ρ প্রতিবর্তী সম্পর্ক, সকল $a \in A$-এর জন্য $(a, a) \in \rho$ ও $(a, a) \in \rho^{-1} \Rightarrow \rho^{-1}$ প্রতিবর্তী।

মনে করি, $(a, b) \in \rho^{-1}$, ফলে $(b, a) \in \rho$

যেহেতু ρ প্রতিসম, $(a, b) \in \rho$ ও সংজ্ঞা অনুযায়ী $(b, a) \in \rho^{-1} \Rightarrow \rho^{-1}$ প্রতিসম।

মনে করি (a, b) ও $(b, c) \in \rho^{-1}$ হবে। ফলে (b, a) ও $(c, b) \in \rho$ হবে।

যেহেতু ρ অনুবর্তী, $(c, b) \in \rho$, $(b, a) \in \rho \Rightarrow (c, a) \in \rho$

$\Rightarrow (a, c) \in \rho^{-1}$ এবং ρ^{-1} অনুবর্তী।

অতএব ρ^{-1} সমার্থতা সম্পর্ক হবে।

5.6.3 অশূণ্য সেটের বিভাজন

সংজ্ঞা (1) মনে করি, A একটি অশূণ্য সেট এবং A সেটের অ-শূণ্য উপসেটগুলির সঞ্চয়ন বল ρ.ρ-ভুক্ত উপসেটগুলিকে A_i, A_j ইত্যাদি দ্বারা চিহ্নিত করা হল। যদি $A = \underset{A_i \in \rho}{\cup} A_i$ হয় সেখানে $A_i \cap A_j = \phi$ যখন $i \neq j$, সেক্ষেত্রে ρ-কে A সেটের বিভাজন বুঝাবে।

সংজ্ঞা 2. মনে করি, অ-শূণ্য সেট A-তে ρ প্রদত্ত সমার্থতা সম্পর্ক। মনে করি, 'a' ঐ সেট A-এর যেকোনো উপাদান। আমরা সেট $\{b \in A \mid b\rho a\}$-কে ρ সাপেক্ষে সমার্থতা গোষ্ঠী বা তুল্যতা গোষ্ঠী বলে থাকি ও $[a]$ দ্বারা চিহ্নিত করব।

উদাহরণ 1. $\mathbb{Z}$ সেটে $a, b \in \mathbb{Z}$-এর ক্ষেত্রে ρ নিম্নভাবে সংজ্ঞাতঃ $a\rho b$ যদি এবং কেবলাত্র যদি $a - b$ যুগ্ম সংখ্যা হয়। অবশ্যই ρ সমার্থতা সম্পর্ক।

$a\rho b$ সম্ভব যদি এবং কেবলমাত্র যদি a ও b উভয়েই যুগ্ম বা উভয়েই অযুগ্ম হয়। ফলে উক্ত সংজ্ঞা অনুযায়ী $a \in \mathbb{Z}$ যুগ্ম হলে $[a]$ শুধুমাত্র যুগ্ম সংখ্যাদের সেট হবে এবং $a \in \mathbb{Z}$ অযুগ্ম হলে $[a]$ শুধুমাত্র অযুগ্ম সংখ্যার সেট হবে। লক্ষণীয় যে প্রথমটিকে $\mathbb{Z}e$ ও দ্বিতীয়টিকে $\mathbb{Z}_0$ দ্বারা চিহ্নিত করলে $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}e \cup \mathbb{Z}_0$ হবে যেখানে $\mathbb{Z}e \cap \mathbb{Z}_0 = \phi$ হয়।

সংজ্ঞা (1) অনুযায়ী $\mathbb{Z}e$ ও $\mathbb{Z}_0$-এর সঞ্চয়ন হল মূল সেট $\mathbb{Z}$-এর বিভাজন।

উদাহরণ 2. আগেই আলোচনা করা হয়েছে যে সেট $\mathbb{Z}$-এ নিম্ন সংজ্ঞাত ρ সম্পর্কটি সমার্থতাসম্পর্ক :

$$\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a - b, 5 \text{ দ্বারা বিভাজ্য}\}$$

আমরা জানি যে কোনো সংখ্যা 5 দ্বারা বিভাজ্য না হলে ভাগশেষ 1, 2, 3 বা 4 থাকবে। লক্ষণীয় যে সংখ্যাগুলিকে 5 দ্বারা ভাগ করলে। ভাগশেষ থাকে, সেই সংখ্যাগুলি ρ দ্বারা সম্পর্কিত—কেননা এই সংখ্যাগুলির সাধারণ আকার $5k + 1$ যেখানে $k \in \mathbb{Z}$। ফলে সংজ্ঞা অনুযায়ী এই সংখ্যাগুলির সেটকে আমরা $[1]$ দ্বারা চিহ্নিত করব।

অনুরূপভাবে $[2] = \{5k + 2 : k \in Z\}$, $[3] = \{5k + 3 : k \in Z\}$

$[4] = \{5k + 4 : k \in Z\}$ এবং $[0] = \{5k : k \in Z\}$

আমরা পাই, $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$ যেখানে ওই সমার্থতা গোষ্ঠীগুলি পরস্পর বিচ্ছেদী। আমরা $\mathbb{Z}$-এর একটি বিভাজন পেলাম।

এই উদাহরণে 5-এরবদলে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা m নিলে ওই গোষ্ঠীগুলি হবে $[0], [1], \ldots, [m-1]$। অতএব প্রদত্ত সমার্থতা সম্পর্ক সাপেক্ষে সংশ্লিষ্ট সেটের বিভাজন পাওয়া যাবে।

এই প্রেক্ষিতে নিম্ন উপপাদ্যটি বিশেষ অর্থবহ ঃ

উপপাদ্য 1. অশূণ্য সেট A-তে সংজ্ঞাত সম্পর্ক ρ সমার্থতা সম্পর্ক দেওয়া আছে। সেক্ষেত্রে

(i) প্রতি $a \in A$-এর ক্ষেত্রে $[a] \neq \phi$,

(ii) $a, b \in A$-এর জন্য যদি $b \in [a]$ হয়, তবে $[a] = [b]$ হবে,

(iii) $a, b \in A$-এর জন্য $[a] = [b]$ বা $[a] \cap [b] = \phi$ এই দুটির যেকোনো একটি হবে।

(iv) $A = \bigcup\limits_{a \in A} [a]$ হবে।

প্রমাণ : (i) যেহেতু ρ প্রতিবর্তী সম্পর্ক অতএব প্রতি $a \in A$-এর ক্ষেত্রে $a\rho a$ সিদ্ধ হবে। ফলে $a \in [a]$ ও $[a] \neq \phi$

(ii) মনে করি, $b \in [a]$।

সংজ্ঞা অনুযায়ী $[a] = \{x \in A \mid x\rho a\}$, যেহেতু $b \in [a]$ সুতরাং $b\rho a$ সিদ্ধ হয়।

মনে করি, $y \in [a]$, উপরোক্ত সংজ্ঞা থেকে $y\rho a$ সিদ্ধ হয়।

ρ প্রতিসম বলে $b\rho a \Rightarrow a\rho b$ এবং ρ অনুবর্তী বলে $y\rho a,\ a\rho b \Rightarrow y\rho b \Rightarrow y \in [b]$

অতএব $[a] \subseteq [b]$ হবে। অনুরূপভাবে $[b] \subseteq [a]$ হবে।

ফলে $[a] = [b]$

(iii) মনে করি, $a, b \in A$ এবং $[a] \cap [b] \neq \phi$

ধরি, $c \in [a] \cap [b]$ ইহা থেকে পাই $c \in [a],\ c \in [b]$

$\Rightarrow c\rho a$ ও $c\rho b$ সিদ্ধ হয়।

$\Rightarrow a\rho c$ ও $c\rho b$ (যেহেতু ρ প্রতিসম)

$\Rightarrow a\rho b$ (যেহেতু ρ অনুবর্তী)

$\Rightarrow a \in [b]$ (সংজ্ঞানুযায়ী)

$\Rightarrow [a] = [b]$ ((*ii*) থেকে)

(iv) ধরি $a \in A$ ফলে $a \in [a] \subseteq \bigcup\limits_{a \in A} [a]$

$\Rightarrow A \subseteq \bigcup\limits_{a \in A} [a]$ (1)

যদি $y \in \bigcup\limits_{a \in A} [a]$, তবে y অন্তত একটি সমার্থতা গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত ও $y \in A \Rightarrow \bigcup\limits_{a \in A} [a] \subseteq A$ (2)

(1) ও (2) প্রমাণিত হল।

5.7 চিত্রণ

ধরি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $P = \{A, B, C, D\}$ দুটি প্রদত্ত সেট। এখানে একটি গাণিতিক নিয়ম f-এভাবে সংজ্ঞাত করা হল যে $f: 1 \to A, 2 \to B, 3 \to D, 4 \to C$ হয়।

লক্ষণীয় A সেটের প্রতিটি উপাদানের জন্য P সেটে একটি নির্দিষ্ট উপাদানকে যুক্ত করা হল।

ধরা যাক $g: 1 \to B, 1 \to C, 2 \to D, 3 \to B, 4 \to A$, এর সঙ্গে f-এর পার্থক্য লক্ষ্যণীয়, A সেটের একটি উপাদান 1-এর সঙ্গে P সেটের দুটি উপাদানকে যুক্ত করা হয়েছে।

ধরা যাক $h: 1 \to A, 3 \to C, 4 \to D$।

এই h আগের f ও g দু'টি থেকে পৃথক। এই h-এ A সেটের 2 উপাদানের সঙ্গে P সেটের কোনো উপাদানকে যুক্ত করা হয়নি।

f, g ও h-এর এইসব স্বাতন্ত্র্যর ভিত্তিতে নিম্ন সংজ্ঞা উল্লেখ্য :

সংজ্ঞা 1. ধরি, A ও B দুটি যেকোনো অ-শূণ্য সেট।

যদি একটি নিয়ম f দ্বারা সেট A-এর প্রতিটি উপাদানের জন্য সেট B-এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি উপাদানকে যুক্ত করা যায়, তবে নিয়ম f-কে বলা হবে চিত্রণ $f: A \to B$। সেট A-কে বলা হবে চিত্রণের সংজ্ঞার অঞ্চল বা ক্ষেত্র (domain) এবং সেট B-কে বলাহবে সহ-অঞ্চল বা সহক্ষেত্র (codomain)। যদি $x \in A$ হয়, তবে $f(x)$-কে x-এর বিম্ব বা প্রতিবিম্ব (image) বলা হয়। $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$-কে বলা হবে চিত্রণের পাল্লা (range)।

উদাহরণ 1. $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$

এটি একটি চিত্রণ, এর সংজ্ঞার অঞ্চল ও সহ-অঞ্চল $\mathbb{R}$।

$\mathbb{R}$-এর প্রতিটি উপাদানের বিম্ব অ-ঋণাত্মক, ফলে এই চিত্রণের পাল্লা সহ-অঞ্চলের যথার্থ উপসেট।

(2) $g(x) = 5x + 2, x \in \mathbb{R}$

এই চিত্রণের ক্ষেত্রে পাল্লা ও সহ-অঞ্চল উভয়েই $\mathbb{R}$ হবে।

মন্তব্য : ওই দুই উদাহরণ থেকে পরিষ্কার যে, $f: A \to B$ চিত্রণ হলে (i) $f(A) \subset B$ (অর্থাৎ যথার্থ উপসেট) বা (ii) $f(A) = B$ উভয়ই সম্ভব।

5.7.1 বিভিন্ন প্রকার চিত্রণ

সংজ্ঞা 2. চিত্রণ $f: A \to B$-এর ক্ষেত্রে $f(A) = B$ হলে ওই চিত্রণকে **উপরি চিত্রণ** (Onto mapping বা surjective mapping) বলা হবে।

উক্ত উদাহরণ (2) উপরিচিত্রণ কিন্তু উদাহরণ (1) উপরিচিত্রণ নয়।

উদাহরণ (1) ও (2) থেকে আর একটি বিষয় লক্ষণীয়।

উদাহরণ (2)-তে $f(x) = f(y) \Rightarrow 5x + 2 = 5y + 2 \Rightarrow x = y$।

উদাহরণ (1)-এ $f(x) = f(y)$ থেকে $x = y$ একমাত্র সমাধান পাওয়া যায় না। $f(3) = 9 = f(-3)$

ফলে চিত্রণের ক্ষেত্রে এই পার্থক্যটি বিবেচনার দাবি রাখে।

সংজ্ঞা 3. চিত্রণ $f : A \to B$-কে একৈক চিত্রণ (One-one mapping) বলা হবে যদি

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ অথবা, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

উদাহরণ 2. একৈক চিত্রণ কিন্তু উদাহরণ (1) নয়।

সংজ্ঞা 4. যদি চিত্রণ $f : A \to A$ (A যেকোনো অশূণ্য সেট)-এর ক্ষেত্রে সকল $x \in A$-এর জন্য $f(x) = x$ হয়, তবে f-কে একসম চিত্রণ (Identity mapping) বলা হয়। f-কে I_A দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

সংজ্ঞা 5. চিত্রণ $f : A \to B$ (A, B অশূণ্য সেট)-কে ধ্রুবচিত্রণ বা স্থির চিত্রণ (Constant mapping) বলা হবে যদি $f(A)$, এক উপাদান বিশিষ্ট সেট (singleton) হয়। যেমন, $f(x) = 5$, $x \in R$ হল স্থির চিত্রণ। এক্ষেত্রে $f(R) = \{5\}$.

সংজ্ঞা 6. যদি চিত্রণ $f : A \to B$ একইসঙ্গে একৈক ও উপরিচিত্রণ হয়,তবে সেই চিত্রণ f-কে দ্বিনিধানী বা দ্বিনিধানি (bijective) চিত্রণ বলা হয়।

$f : R^* \to R^*$ যদি $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \in N)$ সংজ্ঞাত হয়, তবে f দ্বি-নিধানি চিত্রণ।

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ যদি $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{Z})$ হয়, তবে f দ্বি-নিধানি নয়।

সংজ্ঞা 7. দুটি চিত্রণ f ও g-কে সমান বলা হবে যদি দুটির সংজ্ঞার অঞ্চল একই সেট হয় (মনে করি A) এবং $f(x) = g(x)$ সকল $x \in A$-এর জন্য হয়।

সংজ্ঞা 8. ধরি, $f : A \to B$ চিত্রণ এবং D, A-এর অশূণ্য উপসেট। যদি চিত্রণ $g : D \to B$ এমন হয় যে $g(x) = f(x)$, $x \in D$, তবে g-কে D সেটে f-এর অংশ (Restriction) বলা হবে।

উদাহরণ 1. মনে করি, S সমস্ত অ-বিশিষ্ট দ্বিতীয় ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্সের সেট, ম্যাট্রিক্সগুলির পদসমূহ বাস্তব রাশি।

$f : S \to \mathbb{R}$ এভাবে সংজ্ঞাত হল যে,

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc, \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$$

এখানে f উপরিচিত্রণ নয়, কেননা $0 \notin f(S)$

এক্ষেত্রে f একৈক নয়, কেননা $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ যদিও $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ হয়। ফলে f দ্বি-নিধানী নয়।

(2) মনে করি, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}$.

এখানে f একৈক নয় কেননা $f(a + bi) = f(a - bi)$; $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

এক্ষেত্রে f উপরিচিত্রণ নয়, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^+ U\{0\} \neq \mathbb{R}$।

এখানে f দ্বি-নিধানী চিত্রণ নয়।

(3) মনে করি $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ এভাবে সংজ্ঞাত হল যে $f(n, m) = (n + m)$, $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$।

$\mathbb{Z}$-এর প্রতিটি উপাদানকে দু'টি পূর্ণ সংখ্যার যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়, ফলে f উপরিচিত্রণ হবে। কিন্তু f ঐকৈক নয়, $f(1, 2) = 3 = f(2, 1)$ যদিও $(1, 2) \neq (2, 1)$ ফলে f দ্বি-নিধানী নয়।

(4) মনে করি, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এভাবে সংজ্ঞাত যে $x \in \mathbb{R}$ হলে

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$$

f উপরিচিত্রণ কিন্তু ঐকৈক নয়, $f(-1) = 0 = f(1)$

(5) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ এভাবে সংজ্ঞাত হল যে, $f(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. f ঐকৈক কিন্তু উপরিচিত্রণ নয় কেননা বর্গনয় এমন স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির (যেমন 11, 13, 17, 91 ...) প্রাক্-প্রতিবিম্ব নেই। f দ্বি-নিধানী নয়।

(6) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = 5x$, $x \in \mathbb{Z}$ $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, ফলে f ঐকৈক। কিন্তু f উপরিচিত্রণ নয়, $\frac{5}{2} \in Q$ কিন্তু $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$। ফলে f দ্বি-নিধানী নয়।

5.7.2 চিত্রণের সংযোজন–প্রাসঙ্গিক ধর্মাবলী

মনে করি, A, B ও C তিনটি অ-শূণ্য সেট এবং $f : A \to B$ ও $g : B \to C$ দু'টি প্রদত্ত চিত্রণ।

এই দুটি চিত্রণের সংযোজন $gof : A \to C$ এভাবে সংজ্ঞাত হল যে, $(gof)(x) = g[f(x)] = g(y) = t$ যেখানে $x \in A$, $f(x) = y \in B$ ও $g(y) = t \in C$.

gof যে সু-সংজ্ঞাত যেটি নিম্ন আলোচনা থেকে সুস্পষ্ট হবে।

মনে করি, $(gof)(x_1) = t_1$ ও $(gof)(x_2) = t_2$ যেখানে $x_1, x_2 \in A$ ও $t_1, t_2 \in C$.

B সেটে y_1, y_2 পাওয়া যাবে যে

$f(x_1) = y_1$ ও $g(y_1) = t_1$ এবং $f(x_2) = y_2$ ও $g(y_2) = t_2$ হবে।

চিত্রণ f সুসংজ্ঞাত, ফলে $x_1 = x_2$ হলে অবশ্যই প্রতিবিম্ব $y_1 = y_2$ হবে। চিত্রণ g-ও সুসংজ্ঞাত, সুতরাং $y_1 = y_2 \Rightarrow t_1 = t_2$

অতএব, $x_1 = x_2 \ (\in A) \Rightarrow (gof)(x_1) = (gof)(x_2)$

মন্তব্য : (gof) সংজ্ঞাত হলে fog সংজ্ঞাত না-ও হতে পারে। উপরের সংজ্ঞা থেকে একমাত্র $C = A$ হলে তবেই fog সংজ্ঞাত হবে।

উদাহরণ 1. $f, g : \mathbb{R} \to R$ এভাবে সংজ্ঞাত যে,

$f(x) = x^2$ ও $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = x^2 + 2$ এবং

$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x + 2) = (x + 2)^2$ ফলে $gof \neq fog$

চিত্রণের সংযোজন বিনিময় ধর্মের অনুসারী নয়।

উদাহরণ 2. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এভাব সংজ্ঞাত যে

$$f(x) = x^2 \text{ ও } g(x) = sin\ x,\ x \in \mathbb{R}$$

$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = sin\ x^2$

$(fog)(x) = f[g(x)] = f(sin\ x) = sin^2 x$

এক্ষেত্রেও $gof \neq fog$

ধর্ম 1. তিনটি চিত্রণের সংযোজন সংজ্ঞাত হলে, উহা সংযোগ ধর্ম মেনে চলে।

প্রমাণ : মনে করি, $h : A \to B$, $g : B \to C$ এবং $f : C \to D$ তিনটি চিত্রণ যেখানে A, B, C, D অশূণ্য সেট।

ফলে $fo(goh)$ এবং $(fog)oh$ উভয়ই সংজ্ঞাত চিত্রণ $A \to D$ হবে।

ধরি, $x \in A$, $h(x) = y \in B$, $g(y) = z \in C$ ও $f(z) = t \in D$

$[fo(goh)]\ (x) = f[g(h(x))] = f[g(y)] = f(z) = t$

$[(fog)oh]\ (x) = (fog)\ [h(x)] = (fog)(y) = f(g(y)] = f(z) = t$

অতএব $fo(goh) = (fog)oh$ সিদ্ধ হয়।

ধর্ম 2. $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ (A, B, C অশূণ্য সেট) প্রদত্ত চিত্রণ। দু'টি চিত্রণ-ই এঐকক হলে gof এঐকক হবে। যদি gof এঐকক হয়, f এঐকক হবে কিন্তু g এঐকক না-ও হতে পারে।

প্রমাণ : মনে করি, $a_1, a_2 \in A$ এবং $(gof)\ (a_1) = (gof)(a_2)$

$\Rightarrow g[f(a_1)] = g[f(a_2)] \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$ (যেহেতু g এঐকক)

$\Rightarrow a_1 = a_2$ যেহেতু f এঐকক চিত্রণ।

অতএব gof এঐকক চিত্রণ।

মনে করি, gof এঐকক চিত্রণ। ধরি, $\alpha, \beta \in A$ ও $f(\alpha) = f(\beta)$

চিত্রণের সংজ্ঞা থেকে $g[f(\alpha) = g[f(\beta)]$ অর্থাৎ $(gof)\ (\alpha) = (gof)(\beta)$

$\Rightarrow \alpha = \beta$ যেহেতু gof এঐকক।

ফলে $f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$ এবং f এঐকক চিত্রণ।

কিন্তু g এঐকক না-ও হতে পারে—নিম্ন উদাহরণ অনুধাবনযোগ্য।

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেখানে $x \in R$-এর জন্য $f(x) = e^x$ ও $g(x) = x^2$

$(gof)\ (x) = g[f(x)] = g[e^x] = e^{2x}$, ইহা এঐকক চিত্রণ কেননা $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ও $e^{2x_1} = e^{2x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ হয়। এক্ষেত্রে f এঐকক কিন্তু g নয়। কেননা $g(x) = g(-x)$, $x \in R$.

ধর্ম 3. মনে করি $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ (A, B ও C তিনটি অশূণ্য সেট), g ও f উভয়েই উপরিচিত্রণ হলে g উপরিচিত্রণ হবে, কিন্তু f উপরিচিত্রণ না-ও হতে পারে।

প্রমাণ : ধরি g, h উভয়েই উপরিচিত্রণ। এখানে $gof : A \to C$.

মনেকরি $t \in C$। যেহেতু g উপরিচিত্রণ, ফলে $\& \in B$ পাওয়া যাবে যে $g(\&) = t$, আবার f যেহেতু উপরিচিত্রণ, $p \in A$ পাওয়া যাবে যে $f(p) = s$. অতএব উক্ত যদৃচ্ছ উপাদান $t \in C$ -এর জন্য $p \in A$ পাওয়া গেল যে $(gof)(p) = t$ হয়। ফলে gof উপরিচিত্রণ হবে।

মনে করি $gof : A \to C$ উপরিচিত্রণ। $t \in C$ -এর জন্য $p \in A$ পাওয়া যাবে যে $(gof)(p) = t$

$\Rightarrow g[f(p)] = t$ হবে।

$f : A \to B,\ p \in A \Rightarrow f(p) = q \in B.$

অতএব g -এর সংজ্ঞার অঞ্চল B সেটে q পাওয়া যাবে যে $g(q) = t$ হয়। সুতরাং g উপরিচিত্রণ।

ধরি $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(n) = n^2,\ n \in \mathbb{Z}$.

ধরি $g : \mathbb{Z} \to S$, যেখানে $S = \{-1, 1\}$, এভাবে সংজ্ঞাত যে $g(n) = (-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}$.

$$(gof)(n) = g[n^2] = (-1)^{n^2} = \begin{cases} 1 & n \text{ যদি যুগ্ম হয়} \\ -1 & n \text{ যদি অযুগ্ম হয়} \end{cases}$$

অতএব $gof : \mathbb{Z} \to S$ উপরিচিত্রণ হবে। এখানে f উপরিচিত্রণ নয়, কেননা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যাগুলির f -এর অধীনে প্রাক্ বিম্ব নেই।

অনুসিদ্ধান্ত : (1) f ও g উভয়েই দ্বিনিধানী হলে gof দ্বিনিধানী হবে।

(2) gof দ্বিনিধানী হলে f একৈক ও g উপরিচিত্রণ হবে।

মন্তব্য : 1. যদি A কোন অ-শূণ্য সসীম সেট হয়, তবে $f : A \to A$ একৈক হলে উপরিচিত্রণ হবে। আবার f উপরিচিত্রণ হলে f একৈক হবে।

অসীম সেটের ক্ষেত্রে এটি সত্য নয়।

2. মনে করি A, B ও C তিনটি অ-শূণ্য সেট।

ধরি $f, g : A \to B$ এবং $h, u : B \to C$ প্রদত্ত চিত্রণ।

(*i*) যদি $hof = uof$ হয় ও f উপরিচিত্রণ হয়, তবে h ও u চিত্রণদ্বয় সমান হবে $(h = u)$ এবং (*ii*) যদি $hof = hog$ হয় ও h একৈক হয়, তবে f ও g চিত্রণদ্বয় সমান হবে $(f = g)$.

5.7.3 বিপরীত চিত্রণ

সংজ্ঞা : মনে করি $f : A \to B$ একটি চিত্রণ, যেখানে A ও B অ-শূণ্য উপসেট। যদি এমন চিত্রণ $g : B \to A$ -এর অস্তিত্ব থাকে যে $fog = I_B$ ও $gof = I_A$ হয়, তবে g চিত্রণকে f -এর বিপরীত চিত্রণ বলা হবে। আমরা লিখব $g = f^{-1}$.

উদাহরণ : (1) মনে করি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এভাবে সংজ্ঞাত যে
সকল $x \in \mathbb{R}$ -এর জন্য $f(x) = x + 2$ হবে।

আমরা $g : \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ -কে $g(x) = x - 2$ ($x\in\mathbb{R}$) দ্বারা সংজ্ঞাত করলাম।

এক্ষেত্রে gof ও fog উভয়েই $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ হবে। মনেকরি $x\in\mathbb{R}$

ফলে $(gof)\ (x) = g[f(x) = g\ (x + 2) = x$

এবং $(fog)\ (x) = f[g(x)] = f(x - 2) = x$ হবে।

সংজ্ঞানুযায়ী g, f -এর বিপরীত চিত্রণ। লক্ষণীয় f, g -এর বিপরীত চিত্রণ।

(2) $f : \mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ এভাবে সংজ্ঞাত হল যে $f(x)=\begin{cases} x+2, x \text{ যুগ্ম} \\ x, x \text{ অযুগ্ম} \end{cases}$

চিত্রণ $g : \mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ এভাবে সংজ্ঞাত হল যে $g(x)=\begin{cases} x-2, x \text{ যুগ্ম} \\ x, x \text{ অযুগ্ম} \end{cases}$

ফলে $fog, gof : \mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$

ধরি $x \in\mathbb{Z}$, $(fog)\ (x) = f[g(x)] = \begin{cases} f(x-2), x \text{ যুগ্ম} \\ f(x), x \text{ অযুগ্ম} \end{cases} = \begin{cases} x, x \text{ যুগ্ম} \\ x, x \text{ অযুগ্ম} \end{cases}$

$$\Rightarrow (fog(\ (x) = x$$

আবার $(gof)(x) = g[f(x)] = \begin{cases} g(x+2), x \text{ যুগ্ম} \\ g(x), x \text{ অযুগ্ম} \end{cases} = \begin{cases} x, x \text{ যুগ্ম} \\ x, x \text{ অযুগ্ম} \end{cases}$

অতএব $(gof)\ (x) = x$

সংজ্ঞানুযায়ী $g = f^{-1}$ এবং $f = g^{-1}$

উপপাদ্য 1. চিত্রণ $f : A \rightarrow B$ -এর বিপরীত চিত্রণের অস্তিত্বের প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল f দ্বি-নিধানী (bijective) চিত্রণ হবে।

প্রমাণ : মনে করি $g : B \rightarrow A$, f -এর বিপরীত চিত্রণ।

সংজ্ঞানুযায়ী $gof = I_A$ ও $fog = I_B$

I_A একৈক চিত্রণ, ফলে gof একৈক হবে। চিত্রণের সংযোজনের ধর্ম অনুযায়ী, f একৈ হবে।

I_B উপরিচিত্রণ, ফলে fog উপরিচিত্রণ। চিত্রণের সংযোজনের ধর্ম অনুযায়ী, f উপরিচিত্রণ হবে।

অতএব f দ্বি-নিধানী চিত্রণ হবে।

মনে করি f দ্বি-নিধানী চিত্রণ। f একৈক, উপরিচিত্রণ। ফলে যে কোন $y\in B$ -এর জন্য A সেটে অনন্য x পাওয়া যাবে যে $f(x) = y$ হয়।

আমরা চিত্রণ $g : B\rightarrow A$ সংজ্ঞাত করলাম যে $g(y) = x$ (পূর্বে উল্লিখিত x ও y)।

ফলে $(gof)\ (x) = g[f(x)] = g(y) = x$ এবং

$(fog)\ (y) = f[g(y)] = f(x) = y$ হবে।

সুতরাং $gof = I_A$ ও $fog = I_B$ হবে। সংজ্ঞানুযায়ী g, f -এর বিপরীত চিত্রণ।

মন্তব্য (1) বিপরীত চিত্রণটি অনন্য হবে।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি $g, h : B \to A$ উভয়েই $f{:}A\to B$ এর বিপরীত চিত্রণ। সুতরাং gof, $hof = I_A$, fog, $foh = I_B$.

এখানে $ho(fog) = hoI_B = h$ এবং $(hof)og = I_A\ og = g$

সংযোগ ধর্ম অনুযায়ী, $ho(fog) = (hof)\ og$,

সুতরাং $h = g$ হবে।

(2) বিপরীত চিত্রণ f^{-1} দ্বিনিধানী এবং $(f^{-1})^{-1} = f$ হবে।

(3) $f : A \to B$ ও $g : B \to C$ (A, B ও C অশূণ্য সেট) দ্বি-নিধানী চিত্রণ হলে $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ হবে।

উদাহরণ : (1) চিত্রণ $f : \mathbb{Z}\to \mathbb{N}$ নিম্নভাবে সংজ্ঞাত আছে :

$$f(x)=\begin{cases} 2x, \text{ যখন } x\geq 1 \\ -2x+1 \text{ যখন } x\leq 0 \end{cases}$$

f^{-1} -এর অস্তিত্ব আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

মনে করি $x, y \in \mathbb{Z}$ এখানে তিনটি বিকল্প আসতে পারে ঃ

(i) $x, y \geq 1$ (ii) $x, y, \leq 0$ (iii) $x\ 1, y \leq 0$.

প্রথম ক্ষেত্রে $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $f(x) = f(y) \Rightarrow -2x + 1 = -2y + 1 \Rightarrow x = y$

তৃতীয় ক্ষেত্রে $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = -2y + 1 \Rightarrow 1\ (x + y) = 1$

$\Rightarrow x + y = \dfrac{1}{2}$, যা সম্ভব নয়।

ফলে প্রদত্ত চিত্রণের সংজ্ঞা অনুযায়ী (i) ও (ii) সম্ভব এবং উভয় ক্ষেত্রেই $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ অতএব f এককৈক।

মনে করি $n\in N$, যদি n যুগ্ম হয় মনে করি $n = 2m$, $m\in N$.

যদি n অযুগ্ম হয়, $n = 2m + 1$ যেখানে $m\in N \cup \{0\}$ হবে।

এখানে $-m \leq 0$ ও $f(-m) = -2(-m) + 1 = 2m + 1 = n$

সুতরাং f উপরিচিত্রণ। অতএব f দ্বি-নিধানী এবং f^{-1} -এর অস্তিত্ব আছে।

(2) $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ নিম্নভাবে সংজ্ঞাত আছে ঃ সকল $x\in \mathbb{R}$ -এর জন্য $f(x) = x^2 + x - 2$, f^{-1} -এর অস্তিত্ব আছে কি?

মনেকরি $f(x) = f(y$, সুতরাং $x^2 + x - 2 = y^2 + y - 2$

$\Rightarrow (x - y)\ (x + y + 1) = 0$

ফলে $x = y$ না-ও হতে পারে। f ঐকেক নয়। অতএব f -এর বিপরীত চিত্রণের অস্তিত্ব নেই।

(3) $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ এভাবে সংজ্ঞাত আছে যে

$f(x) = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, f^{-1} -এর অস্তিত্ব পরীক্ষা করুন।

$x, y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ এবং $f(x) = f(y) \Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

$\cos\frac{x+y}{2} = 0 \Rightarrow x + y = \pm\pi$, যা একমাত্র সম্ভব যদি $x = y = \pm\frac{\pi}{2}$ হয়।

$\sin\frac{x-y}{2} = 0 \Rightarrow x = y$ উক্ত সংজ্ঞার অঞ্চলে।

ফলে $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ এবং f এঐকেক চিত্রণ।

মনে করি $y \in [-1, 1]$, ফলে $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ পাওয়া যাবে যে

$f(x) = y$ সিদ্ধ হয়। অতএব f উপরিচিত্রণ।

সুতরাং f দ্বিনির্ধানী ও f^{-1} এর অস্তিত্ব আছে।

(4) (*i*) $A = \{-7, -3, 0\ 7\}$ ও $B = \{0, 9, 2, 49\}$ এবং

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = x^2$ দেওয়া আছে।

$f(A\cap B) = f(A) \cap (B)$ হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

এখানে $A\cap B = \{o\}$, ফলে $f(A\cap B) = \{o\}$ হবে।

$f(A)\cap f(B) = \{9, 0, 49\} \cap \{0, 81, 4, 49^2\} = \{o\}$

এক্ষেত্রে $f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$

(*ii*) $A = \{-1, 0, 2\}$ ও $B = \{0, 1, 2\}$ এবং $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = x^2$ দেওয়া আছে।

$f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$ হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

এখানে $A \cap B = \{0,2\}$, ফলে $f(A\cap B) = \{0,4\}$ হবে।

$f(A) \cap f(B) = \{1,0,4\} \cap \{1,2,4\} = \{0,1,4\}$ হবে।

সুতরাং $f(A\cap B) \neq f(A) \cap f(B)$, $f(A\cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(5) এমন একটি চিত্রণ g নির্ধারণ করুন যার জন্য $h = gof$ হবে যেখানে $h(x) = 10x + 10$ ও $f(x) = 2x + 1$, সমস্তচিত্রণই $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হবে। যেহেতু h ও f একরৈখিক, ফলে g ও একরৈখিক। মনে করি

$g(x) = ax + b$, a ও b বাস্তব রাশি।

$(gof)(x) = g(2x + 1) = a(2x + 1) + b = 2ax + (a + b) = 10x + 10$

$\Rightarrow a = 5, b = 5$ হবে। ফলে $g(x) = 5x + 5, x \in \mathbb{R}$

5.7.4. সেটের অঙ্কবাচক সংখ্যা

অশূণ্য সসীম সেটের অঙ্কবাচক সংখ্যা বলতে সেই সেটের উপাদান সংখ্যা বুঝাবে। শূণ্য সেটের অঙ্কবাচক সংখ্যা শূণ্য ধরা হয়।

দু'টি অশূণ্য সেটকে অঙ্কবাচক সংখ্যার নিরিখে তুল্যমূল্য বলা হবে যদি ঐ দুই সেটের মধ্যে দ্বি-নিধানী চিত্রণ সংজ্ঞাত করা যায়। সেক্ষেত্রে ঐ দুই সেটের অঙ্কবাচক সংখ্যা একই বলা হয়। তবে সব অসীম সেটের অঙ্কবাচক সংখ্যা কিন্তু একই নয়। পাঠক-পাঠিকাদের জানা দরকার যে Q ও N -এর মধ্যে দ্বি-নিধানী চিত্রণ সংজ্ঞাত করা যায় কিন্তু $\mathbb{R}$ ও N-এর মধ্যে নয়। N ও Q -এর অঙ্কবাচক সংখ্যা একই কিন্তু N ও Q-এর অঙ্কবাচক সংক্যা ভিন্ন।

5.8 প্রশ্নাবলী

1. সার্বিক সেট $\cup = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $A = \{2, 6, 10\}$ ও $B = \{4, 6, 8, 12\}$ দেওয়া আছে। $A \cup B$, $A \cap B$, $A' \cup B'$, $A' \cap B'$ নির্ধারণ করুন।

2. সেট তত্ত্বের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে 6, 42 ও 105 সংখ্যাত্রয়ের গ. সা.গু 3 এবং ল. সা. গু. 210 হবে।

3. যদি $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{c, d\}$ হয়।

তবে (i) $(A \times B) \cup (A \times C)$ (ii) $(A \times B) \cap (A \times C)$ (iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $A \times (B \cap C)$ নির্ণয় করুন।

4. কোন পরীক্ষায় 50 জন পরীক্ষার্থী গণিত ও ইংরাজীতে পরীক্ষা দিয়েছিল। তার মধ্যে 30 জন গণিতে, 15 জন ইংরাজীতে উত্তীর্ণ হল এবং 10 জন কোন বিষয়েই উত্তীর্ণ হয়নি। কতজন উভয় বিষয়ে উত্তীর্ণ হল সেট তত্ত্বের সাহায্যে নির্ধারণ করুন।

5. নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি কিরূপ আলোচনা করুন :

(i) $a\rho b$ যদি $a + b$ যুগ্ম হয় $(a, b \in \mathbb{Z})$

(ii) $a\rho b$ যদি $ab \geq 0$ হয় (ঐ)

(iii) $a\rho b$ যদি $a^2 + b^2$ জোড় সংখ্যা হয় (ঐ)

(iv) $a\rho b$ যদি $a + 2b$, 5 দ্বারা বিভাজ্য হয় (ঐ)

(v) $a\rho b$ যদি $a^2 - b^2$, 7 দ্বারা বিভাজ্য হয় (ঐ)

(vi) $a\rho b$ যদি a, b -এর একটি উৎপাদক হয় $(a, b \in \mathbb{N})$।

6. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এভাবে সংজ্ঞাত আছে যে

$$g(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ 2x+3, x < 0 \end{cases}$$

g এককে, উপরিচিত্রণ কিনা নির্ধারণ করুন।

7. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ এভাবে সংজ্ঞাত আছে যে

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \geq 0 \\ 1 - x, x < 0 \end{cases}$$

h এককে, উপরিচিত্রণ কিনা নির্ধারণ করুন।

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞাত আছে যে $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$। f -এর বিপরীত চিত্রণের অস্তিত্ব আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

9. সঠিক কিনা পরীক্ষা করুন ঃ

A, B, C অ-শূণ্য সেট হলে

$(A' \cap B' \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) = C$

10. $A = \{2, 5, 6\}$, $B = \{3, 5, 8, 2\}$, $C = \{6, 8, 9\}$ হলে

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ -এর সত্যতা পরীক্ষা করুন।

11. $A = \{x : 2\text{Cos}^2 x + \text{Sin}x \leq 2\}$ ও $B = \left\{x : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right\}$ হলে $A \cap B$ নির্ধারণ করুন।

12. AওB দুটি অ-শূন্য সেট এবং $f : A \to B$ একটি চিত্রণ দেওয়া আছে। A -এর যে কোন দুটি অ-শূণ্য উপসেট X ও Y -এর ক্ষেত্রে দেখান যে

$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ হবে।

13. $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = 2x + 1$ ও $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{Z}$। fog ও gof নির্ধারণ করুন।

14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ -এ $f(x = x^3 - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ সংজ্ঞাত আছে। f এককে, উপরিচিত্রণ হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

15. সেট $\mathbb{R}$ -এ সম্পর্ক ρ এভাবে সংজ্ঞাত আছে যে $a\rho b$ সিদ্ধ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a - b$ মূলদ হয় $(a, b \in \mathbb{R})$। ρ সমার্থতা সম্পর্ক হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

16. তলে সমস্ত সরলরেখার সেটকে S দ্বারা চিহ্নিত করা হল। সম্পর্ক ρ এভাবে সংজ্ঞাত যে $l\rho\, m$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি l ও m পরস্পরকে ছেদ করে $(l, m \in S)$। ρ সমার্থতা সম্পর্ক হবে কি?

17. m ও n প্রদত্ত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। সেট $\mathbb{Z}$ -এ সম্পর্ক ρ সংজ্ঞাত আছে যে $a, b \in \mathbb{Z}$ -এর জন্য $ma + nb$, $m + n$ দ্বারা বিভাজ্য হবে। ρ সমার্থতা সম্পর্ক কিনা পরীক্ষা করুন।

18. চিত্রণ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$($\mathbb{R}^2 = \{(x,y)\ x, y \in \mathbb{R})$ এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x, y) = (x, 0)$ সকল $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ এর জন্য।

ধরুন $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$ ও $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$

দেওয়া আছে। $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

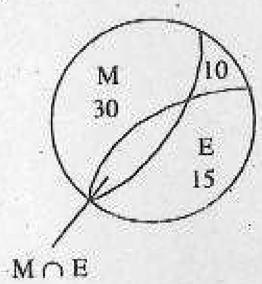
19. $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ সংজ্ঞাত আছে যে $x \in \mathbb{R}$ -এর জন্য $f(x) = 5^x$. f -এর বিপরীত চিত্রণ আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

20. A ও B দু'টি অশূণ্য সেট এবং $f : A \to B$ একটি চিত্রণ দেওয়া আছে। A সেটে সম্পর্ক ρ এভাবে সংজ্ঞাত যে '$x\rho y$ সিদ্ধ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $f(x) = f(y)$ হয়'। ρ, A সেটে সমার্থতা সম্পর্ক কিনা পরীক্ষা করুন।

5.9 উত্তরের সংকেত

2. 6, 42, ও 105 -এর মৌলিক উৎপাদকগুলির সেটত্রয়কে A, B, C দ্বারা চিহ্নিত করুন।
ল. সা. গু -র মৌলিক উৎপাদকগুলির সেট $A \cup B \cup C$ এবং গ. সা. গু-র মৌলিক উৎপাদকগুলির সেট $A \cap B \cap C$.

4.



$n(M) + n(E) - n(M \cap E) + n(M' \cap E') = 50$ যেখানে $n(p)$ বলিতে P বিষয়ে পাসের সংখ্যা বুঝায়।

5. (i), (iii), (iv) সমার্থতা সম্পর্ক হবে।

8. f দ্বিনিধানী চিত্র—দেখান।

11. $2\cos^2 x + \sin x \leq 2 \Rightarrow \sin x \leq 0$ বা, $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$$A \cap B \subseteq B \text{ ও } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \sin x \leq 0 \Rightarrow x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

এবং $\sin \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$

$A \cap B = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

15. সমার্থতা সম্পর্ক হবে।

16. অনুবর্তী সম্পর্ক হবে না।

17. সমার্থতা সম্পর্ক হবে।

19. f একৈক ও উপরিচিত্রণ হবে।

20. সমার্থতা সম্পর্ক হবে।

একক 6 □ দল ও প্রাথমিক তত্ত্বসমূহ (Group and Preliminary Theories)

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

অ-শূন্য সেটে বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া সংঞ্জাত করলে উদ্ভূত বীজগাণিতিক কাঠামোর চরিত্র নিরূপণ করা, রৈখিক সমীকরণ সমূহের সমাধানের সম্ভাব্যতার সঙ্গে ঐ কাঠামোর যোগাযোগ আছে কিনা সেটি বিবেচনা করা আগ্রহের বিষয় এবং এই এককে সেগুলি আলোচিত হবে।

6.2 দ্বিপদ প্রক্রিয়া ও বীজগাণিতিক কাঠামোর ধারণা

একটি অ-শূন্য সেট S-এর মধ্যে একটি প্রক্রিয়া প্রযুক্ত আছে বলতে বুঝায় এমন একটি নিয়ম যার সাহায্যে সেটের যে কোন দুটি হতে কেবলমাত্র একটি পদ সৃষ্ট হয়, সৃষ্ট পদটি প্রদত্ত সেটের অন্তর্গত হতে পারে, আবার না-ও হতে পারে। যেমন $S = \{-1, 0, 1\}$ সেটে যদি যোগ প্রক্রিয়া প্রযুক্ত করা হয়, তবে $-1, -1 = -2$ এবং $1+1 = 2$ পাওয়া যাবে যারা S -এর উপাদান নয়। কিন্তু যদি গুণ প্রক্রিয়া প্রযুক্ত করা হয়, তবে সব পদই S -এর উপাদান হবে। একটি প্রদত্ত অ-শূণ্য সেট S -এর ক্ষেত্রে যে প্রক্রিয়া দ্বারা $S \times S$ -এর পদগুলি হতে উৎপন্ন পদগুলি S -এর অন্তর্গত হয়, সে প্রক্রিয়া দ্বিপদ প্রক্রিয়া রূপে সংজ্ঞাত।

সংজ্ঞা : অ-শূণ্য সেট S -এ দ্বিপদ প্রক্রিয়া (binary operation/Composition) বলতে $S \times S \to S$ একটি চিত্রণ বুঝাবে। সেক্ষেত্রে বলা হবে, S -এর উপাদানগুলি ঐ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবদ্ধ। যদি ঐ দ্বিপদ প্রক্রিয়াকে $\odot$ বা $*$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, তবে $(S, \odot)$ বা, $(S, *)$ -কে বলা হবে বীজগাণিতিক কাঠামো।

মন্তব্য : একটি অ-শূণ্য সেটে একাধিক দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত করা যায়। যেমন সেট $\mathbb{N}$ -এ যোগ ও গুণ দুটিই দ্বিপদ প্রক্রিয়া। সেটে একটি মাত্র দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত করলে সেই বীজগাণিতিক কাঠামোকে একদ্বিপদ প্রক্রিয়া সঞ্জাত কাঠামো ও দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত করলে সেই বীজগাণিতিক কাঠামোকে দুই দ্বিপদ প্রক্রিয়া সঞ্জাত কাঠামো বলা হয়।

উপরের সংজ্ঞা থেকে সুস্পষ্ট যে $S = \{-1, 0, 1\}$ সেটে গুণণ একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া কিন্তু যোগ দ্বিপদ প্রক্রিয়া নয়।

দ্বিতীয় ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে যোগ ও গুণ দুটিই দ্বিপদ প্রক্রিয়া হবে। কিন্তু দ্বিতীয় ক্রমের অবিশিষ্ট বর্গ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে গুণ প্রক্রিয়া দ্বিপদ প্রক্রিয়া হলেও যোগ প্রক্রিয়া দ্বিপদ প্রক্রিয়া নয়।

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

বাম দিকের দুটি ম্যাট্রিক্স অ-বিশিষ্ট কিন্তু ডানদিকেরটি নয়।

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(a,b) = a + b - ab$ সংজ্ঞাত করলে এটি দ্বি-পদ প্রক্রিয়া হবে। কিন্তু $\mathbb{R}$-এর বদলে $\mathbb{R}^+$ অর্থাৎ ধনাত্মক বাস্তব রাশিসমূহের সেট নিলে সেটি আর দ্বি-পদ প্রক্রিয়া হবে না। $a = 2 = b$ নিলে $f(2, 2) = 0 \notin R^+$

$\mathbb{R}^+$ -এ $(a, b) \to a + \log_e{}^b$ দ্বিপদ প্রক্রিয়া নয়, কেননা $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ নিলে

$a + \log_e^b = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{R}^+$, আমরা এই এককে দ্বি-পদ প্রক্রিয়াকে সাধারণভাবে $*$ চিহ্ন দ্বারা এবং অ-শূণ্য সেট S থেকে উদ্ভূত বীজগাণিতিক কাঠামোকে $(S, *)$ দ্বারা চিহ্নিত করব। $(S, *)$ কে দলক (Groupoid) বলা হয়ে থাকে।

6.2.1 দ্বিপদ প্রক্রিয়া সম্পর্কিত কয়েকটি ধর্ম

সংজ্ঞা 1. যদি দলক $(S, *)$ -এ যেকোন দুটি উপাদান $a, b \in S$ এর জন্য $a * b = b * a$ হয়, তবে বলা হবে $(S, *)$ -এ বিনিময় ধর্ম প্রযুক্ত আছে।

উদাহরণ : যদি $M_2(R)$, R-এর উপাদানবিশিষ্ট দ্বিতীয় ক্রমের বর্গ-ম্যাট্রিক্সগুলির সেট হয়, তবে যোগ প্রক্রিয়া বিনিময় ধর্ম মেনে চলে কিন্তু গুণ প্রক্রিয়া নয়।

সংজ্ঞা 2. যদি দলক $(S, *)$ -এ যে কোন তিনটি উপাদান $a, b, c \in S$ -এর জন্য $(a*b)*c = a*(b*c)$ হয়, তবে বলা হয় $(S, *)$ সংযোগ ধর্ম মেনে চলে।

উদাহরণ : উক্ত $M_2(R)$ -এ ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণ উভয় প্রক্রিয়াই সংযোগ ধর্ম মেনে চলে।

মনে করি মূলদ সংখ্যাতসেট Q -তে প্রতি যুগল $(a, b) \in Q \times Q$ এর ক্ষেত্রে $a*b = 2a + b$ সংজ্ঞাত হল। $2a + b \in Q$ ও $*$ দ্বি-পদ প্রক্রিয়া।

$(a*b)*c = (2a + b)*c = 2(2a + b) + c = 4a + 2b + c$

$a*(b*c) = a*(2b + c) = 2a + 2b + c$

অতএব $(a*b)*c = a*(b*c)$ প্রযোজ্য নয়।

মনে করি Q-তে $a*b = a - b + ab$ নেওয়া হল

$*$ দ্বিপদ প্রক্রিয়া কেননা $a,b \in Q \Rightarrow a - b + ab \in Q$ ধরি $a, b, c \in Q$, এক্ষেত্রে

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= (a - b + ab)*c = a - b + ab - c + (a - b + ab)c \\ &= a - b + ab + ac - bc + abc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a*(b*c) &= a*(b - c + bc) = a - (b - c + nbc) + a(b - c + bc) \\ &= a - b + c + ab - ac - bc + abc\end{aligned}$$

ফলে $(a*b)*c \neq a*(b*c)$, এই $(Q,*)$ সংযোগ ধর্ম মেনে চলে না।

সংজ্ঞা 3. যদি দলক $(S,*)$ -এ এমন উপাদান $e_1 \in S$ -এর অস্তিত্ব থাকে যে প্রতি $a \in S$ -এর জন্য $e_1 * a = a$ হয়, তবে e_1 কে বাম একসম উপাদান বলা হয়।

যদি এমন উপাদান $e_2 \in S$ -এর অস্তিত্ব থাকে যে প্রতি $a \in S$ -এর জন্য $a * e_2 = a$ হয়, তবে e_2 কে ডান একসম উপাদান বলা হয়। যদি $e \in S$ হয় যে $a*e = a = e*a$ তবে e কে একক বলা হবে।

উদাহরণ : $M_2(R)$ -এ যোগ প্রক্রিয়া নিলে $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ একইসঙ্গে বাম একসম ও ডান একসম।

M_2R -এ গুণ প্রক্রিয়া নিলে $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ একইসঙ্গে বাম একসম ও ডান একসম।

ধরি $S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} : x, y \in R \text{ এবং } x + y \neq 0 \right\}$ ও

$*$ এখানে ম্যাট্রিক্সের গুণফল হিসাবে সংজ্ঞাত।

$\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u & v \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu + yu & xv + yv \\ xu + yu & xv + yv \end{pmatrix}$ এবং

$(xu + yu) + (xv + yv) = (x + y)(u + v) \neq 0.$

ফলে $*$ দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

লক্ষণীয় $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$ হবে

কিন্তু $\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y & 0 \\ x + y & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$

অতএব $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ বাম একসম কিন্তু ডান একসম নয়।

Q তে $aob = 2a + b$ সংজ্ঞাত হলে 0 বাম একসম কিন্তু ডান একসম নেই।

সংজ্ঞা **4.** মনে করি দলক $(S,*)$ -এ e একসম উপাদান।

$a^1 \in S$ -কে $a \in S$ -এর বাম বিপরীত বলা হবে যদি $a^1 * a = e$ হয় এবং a^1 কে a -এর ডান বিপরীত বলা হবে যদি $a * a^1 = e$ হয়।

যদি $a^1 * a = e = a * a^1$ হয়, তবে a^1 কে a -এর বিপরীত উপাদান বলা হবে।

উদাহরণ : $M_2(R)$ -এ যোগ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত করলে $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$-এর বিপরীত হল $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$, কেননা

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

দ্বিতীয় ক্রমের অবিশিষ্ট বর্গ ম্যাট্রিক্সগুলির সেটের প্রতিটি উপাদানের বিপরীত উপাদান বিদ্যমান।

$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} : x, y \in R \text{ এবং } x + y \neq 0 \right\}$-এ ম্যাট্রিক্সের গুণফলকে দ্বিপদ প্রক্রিয়া হিসাবে সংজ্ঞাত, করলে

$\begin{pmatrix} \frac{1}{x+y} & 0 \\ \frac{1}{x+y} & 0 \end{pmatrix}$ হবে $\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$ এর ডান-বিপরীত, বামবিপরীত নেই।

ধরি $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -এ $(a,b) * (c,d) = (a + c, b + d + 2bd)$ সংজ্ঞাত আছে। * দ্বিপদ প্রক্রিয়া হবে।

$(a,b) * (0,0) = (a, b) = (0,0) * (a, b)$ অর্থাৎ $(0,0)$ একসম কিন্তু $\left(a, -\frac{1}{2}\right)$-এর বিপরীত উপাদান নেই।

$$\left(a, -\frac{1}{2}\right) * (c, d) = (0,0)$$

$$\Rightarrow c = -a \text{ এবং } -\frac{1}{2} + d - d = 0 \text{ সম্ভব নয়।}$$

সংজ্ঞা **5.** $(S,*)$ একটি দলক দেওয়া আছে। ধরি p , q ঐ S সেটের যে কোন দুটি উপাদান।

যদি এ ধরণের যে কোন p , q -এর ক্ষেত্রে $p * x = q$ ও $y * q = p$ এর সমাধান থাকে, তবে বলা হবে দলকে ঐ ধরণের সমীকরণগুলি সমাধানযোগ্য।

উদাহরণ : $(Q, *)$ এ প্রতি $a, b \in Q$ -এর জন্য $a * b = 2a + b$ দেওয়া আছে।

$a * x = p$ সমীকরণটি বিবেচনা করা যাক্।

$2a + x = p \Rightarrow x = p - 2a \in Q$

আবার $y * a = q \Rightarrow 2y + a = q \Rightarrow y = \dfrac{q-a}{2} \in Q$ কাজেই উভয় সমীকরণই $(Q,*)$ -এ সমাধানযোগ্য। কিন্তু $(Z, *)$ -এ ঐ দ্বিপদ প্রক্রিয়া $a * b = 2a + b$ $(a,b \in Z)$ সাপেক্ষে $y * a = q$ সমাধানযোগ্য নয়।

6.3 দ্বিপদ প্রক্রিয়ার গাণিতিক ধর্মের ভিত্তিতে ভাগ

সংজ্ঞা **1.** কোন দলকে বিনিময় ধর্ম সমস্ত উপাদানের ক্ষেত্রে সিদ্ধ হলে ঐ দলককে বিনিময়যোগ্য দলক বলা হবে। $(Z, +)$, $(Z, .)$ উভয়ই বিনিময়যোগ্য দলক।

সংজ্ঞা **2.** কোন দলক $(S,*)$ -এ সংযোগ ধর্ম সমস্ত উপাদানের ক্ষেত্রে সিদ্ধ হলে ঐ দলককে বলা হবে অর্ধদল (Semigrup)।

$(M_2(R), +)$, $(M_2(R), .)$ উভয়ই অর্ধদলক।

কিন্তু Q -তে $a*b = 2a + b$ বা $a \circ b = a - b + ab$ সংজ্ঞাত হলে $(Q,*)$, $(Q,\circ)$ অর্ধদল নয়।

সংজ্ঞা **3.** মনে করি $(S, *)$ অর্ধদল। এক্ষেত্রে যদি একসম উপাদান (Identity element) থাকে, তবে $(S,*)$ কে মনোয়েড (Monoid) বলা হবে। $(Z, +)$, $(Z, .)$ উভয়েই মনোয়েড। Q-তে $a*b=a+b-ab$ সংজ্ঞাত করলে এটি মনোয়েড। সেট E -তে দ্বিপদ প্রক্রিয়া হিসাবে সাধারণ গুণকে সংজ্ঞাত করলে কাঠামোটি অর্ধদল হবে, মনোয়েড নয়।

সংজ্ঞা **4.** কোন দলকে $[(s,*)]$ প্রতি $a, b \in S$ -এর জন্য $a*x = b$ ও $y*a = b$ সমীকরণদ্বয় সমাধানযোগ্য হলে ঐ দলককে আপাত দল (Quasigroup) বলা হয়। (Z, +) আপাতদল কিন্তু (Z, .) আপাতদল নয়।

Q -তে $a*b = 2a + b$ সংজ্ঞাত করলে $(Q,*)$ আপাতদল হবে।

লক্ষণীয় যে আপাতদলের সংজ্ঞায় বীজগাণিতিক কাঠামোকে দলক নেওয়া হয়েছে, অর্ধদল নয়।

সংজ্ঞা **5.** মনে করি S একটি অ-শূণ্য সেট এবং ঐ সেটে দ্বিপদ প্রক্রিয়া * সংজ্ঞাত আছে, অর্থাৎ $* : S \times S \rightarrow S$ চিত্রণ সংজ্ঞাত আছে।

যদি (1) সংযোগ ধর্ম বজায় থাকে অর্থাৎ সকল $a, b, c \in S$ -এর জন্য $(a*b)*c = a*(b*c)$ হয়

(2) একসময় উপাদানের অস্তিত্ব থাকে অর্থাৎ এমন এখটি উপাদান $e \in S$ থাকে যে

$a*e = a = e*a$ সকল $a \in S$ -এর জন্য

(3) প্রতি $a \in S$ -এর জন্য $a^1 \in S$ থাকে যে $a*a^1 = e = a^1*a$ হয় অর্থাৎ S-এর প্রতি উপাদানের বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব থাকে,

তবে $(S,*)$ -কে দল বা Group বলা হয়।

উদাহরণ : (1) $(M_2(R), +)$ একটি দল হবে।

(2) R -এর উপর দ্বিতীয় ক্রমের অবিশিষ্ট বর্গ ম্যাট্রিক্সগুলি গুণ সাপেক্ষে দল গঠন করে।

সংজ্ঞা 6. কোন দল $(S,*)$ -এ বিনিময় ধর্ম সিদ্ধ হলে অর্থাৎ $a,b \in S$ হলে যদি $a*b = b*a$ হয়, তবে ঐ দলকে বিনিময়যোগ্য দল বলা হবে।

$(M_2(R), +)$ বিনিময়যোগ্য দল কিন্তু উপরে (সংজ্ঞা 5) উল্লিখিত দ্বিতীয় দলটি বিনিময়যোগ্য নয়।

সংজ্ঞা 7. (G_1*) দলটিতে G সেটটি সসীম হলে দলটি সসীম, অন্যথায় দলটি অসীম দল। $n(G) = m$ হলে ঐ দলের ক্রম (order) m হবে।

6.4 দল বা গ্রুপের ধর্মাবলী

মনে করি (G_1*) প্রদত্ত দল বা গ্রুপ।

1. বাম অপসায়ণ ধর্ম সিদ্ধ হয় অর্থাৎ G -এর সকল a, b, c -এর জন্য $a*b = a*c \Rightarrow b= c.$ দলে প্রতি উপাদানের বিপরীত উপাদান আছে। ফলে $a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G.$

অতএব $a^{-1}*(a*b) = a^{-1}*(a*c)$

$\Rightarrow (a^{-1}*a) *b = (a^{-1}*a)*c$ (সংযোগ অনুযায়ী)

$\Rightarrow e*b = e*c$ (e ঐ দলের একসম উপাদান)

$\Rightarrow b = c$

2. একসম উপাদানটি অনন্য।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি e, f দুটি একসম উপাদান। e বাম একসম ফলে $e*f = f$ এবং f ডান একসম ফলে $e*f = e$, সুতরাং $e = f$

3. প্রতিটি উপাদানের বিপরীত উপাদানটি অনন্য।

যদি সম্ভব হয় মনে করি b ও c $(\in G)$ উভয়েই $a(\in G)$ -এর বিপরীত উপাদন। অতএব

$a*b = e = b*a$ এবং $a*c = e = c*a.$

কাজেই $a*b = a*c$ এবং বাম অপসারণ ধর্মের প্রয়োগে পাই $b = c$

4. ডান অপসারণ ধর্ম সিদ্ধ হয়।

মনে করি $a, b, c \in G$ -এর জন্য $b*a = c*a.$

দলের সংজ্ঞা অনুযায়ী $a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G$

সুতরাং $(b*a)*a^{-1} = (c*a)*a^{-1}$

$\Rightarrow b*(a*a^{-1}) = c*(a*a^{-1})$ সংযোগ ধর্ম অনুযায়ী

$\Rightarrow b*e = c*e \Rightarrow b = c$

5. যে কোন দলে $a*x = b, y*a = b$ $(a, b \in G)$

—এই দুই সমীকরণের অনন্য সমাধান আছে।

$a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G$ অতএব $a^{-1}*b, b*a^{-1} \in G$ কেননা * দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

$a*x = b \Rightarrow a^{-1}*(a*x) = a^{-1}*b \in G$

এবং $y*a = b \Rightarrow (y*a) *a^{-1} = b*a^{-1} \in G$

সংযোগ ধর্ম অনুযায়ী, $(a^{-1}*a)*x = a^{-1}*b$

এবং $y*(a*a^{-1}) = b*a^{-1}$

যেহেতু e একক উপাদান, অতএব $e*x = a^{-1}*b$ ও $y*e = b*a^{-1}$

$\Rightarrow x = a^{-1}*b,\ y = b*a^{-1}$

সুতরাং সমীকরণ দ্বয় সমাধানযোগ্য। মনে করি সমাধানদ্বয় অনন্য নয়। $a*x = b$ -এর দুটি সমাধান p ও q $(\in G)$ ফলে $a*p = b = a*q$ এবং বাম অপসারণ ধর্ম অনুযায়ী $p = q$. অতএব $a, b \in G$ -এর জন্য $a*x = b$ -এর সমাধান অনন্য।

একইভাবে $y*a = b$ -এর দুটি সমাধান r ও s $(\in G)$ ধরিলে ডান অপসারণ ধর্ম অনুযায়ী $r = S$ ও সমাধান অনন্য।

6. যদি $a, b \in G$ হয় তবে $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$

আমরা পাই যে $(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})$

$= [a*(b*b^{-1})] *a^{-1}$ সংযোগ ধর্ম অনুযায়ী

$= [a*e) *a^{-1} = a*a^{-1} = e$

আবার $(b^{-1}*a^{-1}) *(a*b) = (b^{-1}*(a^{-1}*a))*b$ সংযোগ ধর্ম অনুযায়ী

$= (b^{-1}*e) *b = b^{-1}*b = e$

সুতরাং $(a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) = e = (b^{-1}*a^{-1})*(a*b)$

$\Rightarrow (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$

7. সকল $a \in G$ -এর জন্য $(a^{-1})^{-1} = a$

$a^{-1}*a = e = a*a^{-1}$ এবং $a^{-1}*(a^{-1}) = e = (a^{-1})^{-1}*a^{-1}$

অতএব $a^{-1}*a = a^{-1}*(a^{-1})^{-1}$ ও $a*a^{-1} = (a^{-1})*a^{-1}$

প্রথমটিতে বাম অপসারণ ধর্ম ও দ্বিতীয়টিতে ডান অপসারণ ধর্ম প্রয়োগ করে উভয় ক্ষেত্রেই পাই $(a^{-1})^{-1} = a$

দলের বিকল্প সংজ্ঞা (6.3 এর সংজ্ঞা 5- এর বিপরীত সংজ্ঞা)

দলের সংজ্ঞায় (সংজ্ঞা 5, 6.3) একসম উপাদান e -এর পরিবর্তে শুধুমাত্র বাম একসম উপাদান e (বা শুধুমাত্র ডান একসম উপাদান e) এবং প্রতি উপাদানের শুধুমাত্র বাম বিপরীত উপাদান (বা শুধুমাত্র ডান বিপরীত উপাদান) ধরেও দলের সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

কেননা e শুধামাত্র বাম একসম হলে $e*a = a$ সব $a \in G$ -এর জন্য। যদি a^{-1}, a-এর বাম বিপরীত হয়, তবে $a^{-1}*(a*e) = (a^{-1}*a)*e$ (সংযোগ ধর্ম)

$= e*e$

$= e = a^{-1}*a$

বাম অপসারণ ধর্ম অনুযায়ী $a*e = a$, সব $a \in G$ -এর জন্য। অতএব e ডান একসমও হবে।

মনে করি a^{-1}, a-এর বাম বিপরীত উপাদান।

$a^{-1}*(a*a^{-1}) = (a^{-1}*a)*a^{-1}$ (সংযোগ ধর্ম)

$= e*a^{-1} = a^{-1} = a^{-1}*e$

∴ বাম অপসারণ ধর্ম অনুযায়ী $a*a^{-1} = e$ পাই

সুতরাং a^{-1}, a -এর ডান বিপরীত উপাদান ও হবে।

উপাপাদ্য 1. অর্ধদল $(G,*)$ -এ যে কোন দু'টি উপাদান a ও b -এর জন্য সমীকরণদ্বয় $a*x = b$ ও $y*a = b$ সমাধানযোগ্য হলে $(G,*)$ দল হবে।

প্রমাণ : প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী সেট G -তে সংজ্ঞাত দ্বিপদ প্রক্রিয়া * সংযোগ ধর্ম মেনে চলে। শর্ত অনুযায়ী $a*x = a$ ও $y*a = a$ (উভয় ক্ষেত্রেই $b = a$ ধরে) উভয়ই সমাধান যোগ্য। মনে করি, যথাক্রমে e ও e^1 ঐ দুই সমীকরণের সমাধান অর্থাৎ $a*e = a$, $e^1*a = a$ হবে।

মনেকরি c ঐ সেট G -এর যদৃচ্ছ উপাদান। শর্ত অনুযায়ী $a*x = c$ ও $y*a = c$ এর সমাধান আছে এবং ঐ দুই সমাধান যথাক্রমে p ও q হবে। অর্থাৎ $a*p = c$, $q*a = c$ হবে।

এক্ষেত্রে $c*e = (q*a) *e = q*(a*e)$ (সংযোগ ধর্ম)

$$= q*a = c$$

যেহেতু c, G -এর যদৃচ্ছ উপাদান ফলে $a \in G \Rightarrow a*e = a(1)$

আবার $e^1*c = e^1*(a*p) = (e^1*a = a*p$ (সংযোগ ধর্ম)

$$= a*p = C$$

যেহেতু c, G -এর যদৃচ্ছ উপাদান অতএব $a \in G \Rightarrow e^1*a = a$ (2)

(1) $\Rightarrow e^1*e = e^1$ এবং (2) $\Rightarrow e^1*e = e$

অতএব $e = e^1$ এবং $a \in G \Rightarrow a*e = a = e*a$ ও e ঐ অর্ধদলের একসম উপাদান।

শর্তানুযায়ী $a*x = e$ ও $y*a = e$ G-তে সমাধান যোগ্য।

মনে করি সমাধানদ্বয় যথাক্রমে a' ও $a''(\in G)$ হবে।

$\Rightarrow a*a' = e = a''*\alpha$ হবে।

এখন $(a''*a)*a' = e*a' = a'$ এবং $a''*(a*a') = a''*e = a''$ সংযোগ অনুযায়ী ধর্ম, $(a''*a)*a' = a''*(a*a')$ ও এর থেকে পাই $a'= a''$

অতএব $a \in G$ -এর বিপরীত উপাদান $a' \in G$ রয়েছে যাতে $a*a' = e = a'*a$ হবে।

a, G -এর যদৃচ্ছ উপাদান। ফলে G-এর প্রতিটি উপাদানের বিপরীত উপাদান রয়েছে।

অর্ধদলটি দল হবে।

সতর্কতা : কোন অর্ধদলে যদি $a^*x = b$ ও $y * a = b$ -এর একটিমাত্র সমাধান যোগ্য হয়, তবে সেই অর্ধদলটি দল নাও হতে পারে।

মনে করি অ-শূণ্য সেট G-তে অন্তত দুটি উপাদান a,b আছে। এই সেটে দ্বিপদ প্রক্রিয়া * এভাবে সংজ্ঞাত হল যে $a*b = b$ হবে।

যেকোন $c\in G$ -এর জন্য $a*(b*c) = a*c = c$

এবং $(a*b)*c = b*c = c$

ফলে সংযোগ ধর্ম $(G,*)$ -এ বিদ্যমান ও $(G,*)$ একটি অর্ধদল। $a*b = b$ থেকে বলা যায় $a^*x = b$ ঐ কাঠামোয় সমাধান যোগ্য। $y*a = b$ সমাধান যোগ্য নয় যখন $a\neq b$.

সংজ্ঞাত দ্বিপদ প্রক্রিয়া থেকে পাই $a*b = b$ ও $b*b = b$ হবে।

অতএব $a*b = b*b$ কিন্তু $a = b$ নয়, ফলে ডান অপসারণ ধর্ম হতে পারে না। অতএব $(G,*)$ দল নয়।

যদি দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি $a*b = a$ হিসাবে সংজ্ঞাত হয়, তবে $y*a = b$ সমাধানযোগ্য হত, $a*x = b$ টি নয়।

উপপাদ্য 2. যদি কোন সসীম অর্ধদলে উভয় অপসারণ ধর্ম বজায় থাকে, তবে অর্ধদলটি দল হবে।

প্রমাণ : মনে করি $(G,*)$ সসীম অর্ধদল ও $G = \{a_1,a_2,...a_n\}$।

G -এর যেকোন উপাদান a_1 নিলাম। ধরি

$G^1 = \{a_1*a_1,\ a_1*a_2,\ ...,\ a_1\ *a_n\}$, যেহেতু * একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া, অতএব $G'\subseteq G$....(1)

G'-এর সব উপাদান ভিন্ন ভিন্ন, কেননা

$a_1*a_i = a_1*a_j \Rightarrow a_i = a_j$ (বাম অপসারণ ধর্ম অনুযায়ী)

কিন্তু $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$। ফলে G' -এর উপাদানগুলি পরস্পর ভিন্ন ও $n(G) = n\ (G')$ ... (2)

(1) ও (2) থেকে পাই $G = G'$ হবে।

এখন বলা যায় যে $a_1*x = a_j$ সমীকরণটি $(j \in \{1,2,.., n\})$

$(G,*)$ কাঠামোয় সমাধান যোগ্য।

a_1, G -এর যদচ্ছ উপাদান, ফলে বলা যায় যে

$a*x = b$ $(a,b\in G)$ ধাঁচের সমীকরণটি ঐ কাঠামোয় সমাধানযোগ্য।

যদি $G'' = \{a_1*a_1,\ a_2*a_1,\ ...\ ,\ a_n*a_1\}$ নেওয়া হয়, তবে ঐ ধরণের যুক্তির পুনরাবৃত্তি করে দেখানো যায় যে $G'' \equiv G$ ও $y * a = b$ $(a,b\in G)$ ধাঁচের সমীকরণটি ঐ কাঠামোয় সমাধানযোগ্য।

ফলে অর্ধদলটি আপাতদলও বটে এবং এটি দল হবে।

সতর্কতা 1. উপপাদ্য 2 অসীম অর্ধদলে সত্য না-ও হতে পারে। $(\mathbb{N}, +)$ অসীম অর্ধদল, উভয় অপসারণ ধর্ম বজায় আছে, কিন্তু $(\mathbb{N}, +)$, দল নয় (একসম উপাদান নেই)।

2. কোন দলকে দুটি অপসারণ ধর্ম বজায় থাকলেও সেটি দল না-ও হতে পারে।

নিম্ন উদাহরণ প্রণিধানযোগ্য : $G = \{1, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

দ্বিপদ প্রক্রিয়ার ফলে প্রাপ্ত উপাদানগুলি নিম্নভাবে ব্যাখ্যা করা হল :

	1	α	β	γ	δ
1	1	α	β	γ	δ
α	α	1	γ	δ	β
β	β	δ	α	1	γ
γ	γ	β	δ	α	1
δ	δ	γ	1	β	α

এখানে স্তম্ভ ও সারিগুলির উপাদানসমূহ ভিন্ন ভিন্ন। উভয় অপসারণ ধর্ম বজায় আছে। এখানে $(\alpha*\beta)*\delta\ \gamma*\delta = 1\ \alpha*(\beta*\delta) = \alpha*\gamma = \delta$ অতএব সংযোগ ধর্ম বজায় নেই ও ঐ গাণিতিক কাঠামোটি দল নয়।

উদাহরণ : (1) মূলদ সংখ্যার সেট Q থেকে 1 বাদ দিলে প্রাপ্ত সেটটি মনে করি S, অর্থাৎ $S = Q - \{1\}$. সেট S -এ সংজ্ঞাত দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি (*) নিম্নরূপ :

$a, b \in S \Rightarrow a*b = a + b - ab.$

দেখান যে $(S, *)$ একটি বিনিময়যোগ্য দল হবে।

$a,b \in S \Rightarrow a + b - ab \in S$, কেননা $a + b - ab$ হবে মূলদ ও $a + b - ab \neq 1$ (যদি $a + b - ab = 1$ হয়, তবে a বা $b = 1$ হয়)।

মূলদ সংখ্যার সেটে সংযোগ ধর্মটি বজায় থাকে, ফলে Q -এর উপসেট S -এও ঐ ধর্ম বজায় থাকবে।

$0 \in S$ এবং $a*0 = a = 0$ হবে সব $a \in S$ -এর জন্য $\Rightarrow$ 0 একসম উপাদান।

$a*b = a + b - ab = b*a = 0$ হবে যথা

$b(1 - a) = -a$ বা, $b = \dfrac{a}{a-1} \in S$ (যেহেতু $a \neq 1$)

প্রতি উপাদান $a \in S$ -এর বিপরীত উপাদান $\dfrac{a}{a-1} \in S$ হয়। ফলে $(S,*)$ একটি দল।

যেহেতু $a + b = b + a$ ও $ab = ba$, কাজেই সকল $a, b \in G$ -এর জন্য $a*b = b*a$ হবে। অতএব $(S,*)$ বিনিময়যোগ্য দল হবে।

(2) সেট $S = \{z \in C \mid |z| = 1\}$, দেখান যে গুণ সাপেক্ষে (.) এটি বিনিয়োগযোগ্য দল গঠন করে।

ধরি $Z_1, Z_2 \in S$; ফলে $Z_1, Z_2 \in C$ ও $|Z_1| = 1 = |Z_2|$ হয়।

এক্ষেত্রে $Z_1Z_2 \in C$ ও $|Z_1Z_2| = |Z_1||Z_2| = 1 \Rightarrow Z_1Z_2 \in S$. গুণ সাপেক্ষে সংযোগ ধর্মটি C তে বজায় আছে, ফলে উপসেট S -এ বজায় থাকবে।

$e = 1 + i.o$ ঐ S এ আছে এবং $Z_1 \in S \Rightarrow Z_1.e,\ e.Z_1 \in S$ ও $Z_1.e = Z_1 = e.\ Z_1$ হয়। ফলে e একসম উপাদান।

ধরি $z = a + ib \in S$, অতএব $a^2 + b^2 = 1$

এখন $\dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \bar{z}$ এবং $z.\bar{z} \in S$ ও $|\bar{z}| = 1$

যেহেতু $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)^2 = \dfrac{1}{a^2+b^2} = 1$

ফলে প্রতি $z \in S$ -এর বিপরীত উপাদান S -এ বিদ্যমান।

$\Rightarrow (S.\ .)$ একটি দল।

বিনিময় ধর্ম C -তে বজায় থাকে, ফলে বিনিময় ধর্ম $(S,\ .)$ -এও বজায় আছে।

$(S,\ .\ )$ বিনিময়যোগ্য দল হবে।

(3) $G = \{(a,b) : a,\ b \in R,\ a \neq 0\}$

প্রতি $(a,\ b),\ *(c,\ d) \in G$ -এর জন্য

$(a,b)*(c,\ d) = (ac,\ bc + d)$ হবে।

দেখান যে $(G,\ *)$ অ-বিনিময়যোগ্য দল।

$a,\ b,\ c,\ d \in R \Rightarrow ac,\ bc + d \in R$ এবং $a \neq 0,\ c \neq 0 \Rightarrow ac \neq 0$ ফলে উক্ত প্রক্রিয়া $*$ G -তে দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

ধরি $(a,b),\ (c,d),\ (e,f) \in G$.

$$[(a,\ b) * (c,\ d)] * (e,\ f) = (ac,\ bc + d) * (e,\ f)$$
$$= (ace,\ ebc + ed + f)\ (1)$$
$$(a,\ b) * [(c,\ d) * (e,\ f)] = (a,\ b) * (ce,\ de + f)$$
$$= (ace,\ bce + de + f)\ (2)$$

অতএব (2) ও (3) সমান এবং সংযোগ ধর্ম বজায় থাকে।

$(a,\ b) * (1,\ 0) = (a,\ b) = (1,\ 0) * (a,\ b)$ প্রতি $(a,\ b) \in G$ -এর জন্য। $(1,\ 0)$ ঐ গাণিতিক কাঠামো $(G,\ *)$ -এর একসম উপাদান। লক্ষনীয় $(a,\ b) * (c,\ d) = (1,\ 0) \Rightarrow c = \dfrac{1}{a},\ d = -bc = \dfrac{-b}{a}$ কাজেই $(a,\ b) * \left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right) = (1,0) = \left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{-b}{a}\right) * (a,b)$ এবং $\left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{-b}{a}\right), (a,b)$ -এর বিপরীত উপাদান।

ফলে $(G,\ *\ )$ একটি দল।

এক্ষেত্রে $(c,\ d) * (a,\ b) = (ca,\ da + b) \neq (a,\ b) * (c,\ d)$ ফলে বিনিময় ধর্ম বজায় থাকে না।

$(G,\ *)$ দল কিন্তু বিনিময়যোগ্য নয়।

(4) মনে করি $G = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q, a^2 + b^2 \neq 0\}$

দেখান যে গুণ সাপেক্ষে এটি দল গঠন করে।

ধরি $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in G$. (অর্থাৎ $a^2 + b^2 \neq 0, c^2 + d^2 \neq 0$)

$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + \sqrt{2}(ad + bc) \in G$, কেননা $ac + 2bd, ad + bc \in G$ এবং $(ac + 2bd)^2 + (ad + bc)^2 \neq 0$

$\mathbb{R}$-এ গুণ প্রক্রিয়া সংযোগ ধর্ম মেনে চলে অতএব $(G, .)$ -এ সংযোগ ধর্ম বজায় আছে।

$1 + 0\sqrt{2} \in G$ এবং $(a + b\sqrt{2}).(1 + 0\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2} = (1 + 0\sqrt{2})(a + b\sqrt{2})$

ফলে $1 + 0\sqrt{2}$ ঐ গাণিতিক কাঠামোর একসম উপাদান।

মনেকরি $a + b\sqrt{2} \in G$, $a, b \in Q$ ও $a^2 + b^2 \neq 0$

$$\left(\frac{1}{a + b\sqrt{2}}\right)(a + b\sqrt{2}) = 1 + 0\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})\left(\frac{1}{a + b\sqrt{2}}\right)$$

এখন $\dfrac{1}{a + b\sqrt{2}} = \dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = c + d\sqrt{2}$ ধরি, $c, d \in Q$

$c^2 + d^2 = \dfrac{a^2}{(a^2 - 2b^2)^2} + \dfrac{b^2}{(a^2 - 2b^2)^2} \neq 0$ যেহেতু $a^2 + b^2 \neq 0$

আরও লক্ষণীয় $a^2 - 2b^2 \neq 0$ যেহেতু $a, b \in Q$

অতএব $(G, .)$ -এ প্রতি উপাদানের বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব আছে। ফলে $(G, .)$ একটি দল।

এখানে $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (c + d\sqrt{2})(a + b\sqrt{2})$ হয়।

ফলে বিনিময় ধর্ম বজায় আছে। $(G, .)$ বিনিময়যোগ্য দল।

মন্তব্য : $a, b \in \mathbb{R}$ হলে এটি দল হবে না।

(5) $M = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right\}$

দেখান যে M, ম্যাট্রিক্সের গুণ সাপেক্ষে বিনিময়যোগ্য দল গঠন করে।

ধরি $M_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

গুণফলে উদ্ভূত সারণীটি নিম্নরূপ :

.	M_1	M_2	M_3	M_4
M_1	M_1	M_2	M_3	M_4
M_2	M_2	M_1	M_4	M_3
M_3	M_3	M_4	M_1	M_2
M_4	M_4	M_3	M_2	M_1

প্রতিটি সারণী ও স্তম্ভে সব উপাদান বিদ্যমান, গুণফলটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া। ম্যাট্রিক্সের গুণ সংযোগ ধর্ম মেনে চলে। $(M, .)$ -এ সংযোগ ধর্ম বজায় আছে। M_1 এখানে একক উপাদান। ঐ সারণী থেকে স্পষ্ট যে

$M_1^{-1} = M_1,\ M_2^{-1} = M_2,\ M_3^{-1} = M_3,\ M_4^{-1} = M_4$

ফলে $(M, .)$ একটি দল। সারণী থেকে স্পষ্ট এটি বিনিময়যোগ্য দল।

6. $[0, 1]$ অন্তরালে সংজ্ঞাত ও সন্তত বাস্তবমান বিশিষ্ট অপেক্ষকগুলির সেট S যোগ সাপেক্ষে দল গঠন করে কি না পরীক্ষা করুন।

মনে করি $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ সন্তত অপেক্ষক।

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ সকল $x \in [0,1]$ -এর জন্য। সন্তত অপেক্ষকদ্বয়ের যোগফল সন্তত, ফলে যোগ প্রক্রিয়া দ্বিপদ প্রক্রিয়া। সংযোগ ধর্ম বজায় আছে।

সকল $x \in [0,1]$ -এর জন্য $t(x) = 0$ হল একসম উপাদান, কেননা $f(x) + t(x) = f(x) = t(x) + f(x),\ f(x) \in S.$

প্রতি $f(x) \in S$ -এর বিপরীত উপাদান $-f(x) \in S$ হবে,

$-f(x)$ সন্তত ও $f(x) + [-f(x)] = t(x) = [-f(x)] + f(x)$ ফলে যোগ সাপেক্ষে S দল গঠন করে। (দলটি বিনিময় যোগ্য)।

7. ধরি $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} ; a, b \in R,\ a \neq 0\right\}$ দেওয়া আছে।

দেখান যে ম্যাট্রিক্সের গুণ সাপেক্ষে G দল গঠন করে।

মনেকরি $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} \in G$ (ফলে $a, b, c, d \in R$ ও $a \neq 0,\ c \neq 0$)

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ bc + d & 1 \end{pmatrix} \in G$ যেহেতু $ac,\ bc + d \in R$ ও $ac \neq 0.$

গুণ প্রক্রিয়াটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

ম্যাট্রিক্সের গুণ সংযোগ ধর্ম মেনে চলে। অতএব $(G, .)$ -এ সংযোগ ধর্ম বজায় আছে।

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ এবং $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ একসম উপাদান।

$\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a \neq 0$ ফলে ম্যাট্রিক্সটি অ-বিশিষ্ট এবং

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-b}{a} & 1 \end{pmatrix} \in G$$

G -এর প্রতি উপাদানের বিপরীত উপাদান আছে।

অতএব গুণ সাপেক্ষে G দল গঠন করে।

[$\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & 0 \\ da+b & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}$ দলটি বিনিময়যোগ্য নয়।]

8. ধরা যাক $\mathbb{Z}$ পূর্ণসংখ্যার সেট। প্রক্রিয়া * নিম্নভাবে সংজ্ঞাত হল : $u * v = u$, v -এর ল.সা.গু.। ঐ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে $\mathbb{Z}$ দল গঠন করে কিনা পরীক্ষা করুন।

যেহেতু দুটি পূর্ণ সংখ্যার ল.সা.গু. পূর্ণসংখ্যা, অতএব প্রক্রিয়াটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া। সংযোগ ধর্ম বজায় আছে, কেননা $u, v, w \in \mathbb{Z} \Rightarrow (u*v)*w = u*(v*w)$। এখানে একসম উপাদান 1, কেননা যে কোন $a \in Z$ -এর ক্ষেত্রে $1 * a = a = a * 1$ হবে।

1 ছাড়া কোন দুটি পূর্ণসংখ্যার ল. সা. গু 1 হয় না, ফলে সেই (1ভিন্ন) উপাদানগুলির বিপরীত উপাদান Z -এ নেই। অতএব দল হবে না।

9. অশূণ্য বাস্তব রাশি সমূহের সেট $\mathbb{R}^*$ -এ 'o' প্রক্রিয়াটি নিম্নভাবে সংজ্ঞাত : সকল $a, b \in \mathbb{R}^*$ -এর জন্য $aob = |a|.b$ হবে। ঐ প্রক্রিয়ার পরিপ্রেক্ষিতে R^* কি দল গঠন করে?

লক্ষণীয় যে $1 \circ b = b$ এবং $-1 \circ b = b$ সকল $b \in R^*$ -এর জন্য 1 ও -1 দু'জনেই একক, কিন্তু দলে একক অনন্য। ফলে দল গঠন করে না।

10. দেখান যে n ক্রমের সকল বাস্তব লম্ব ম্যাট্রিক্সের সেট ম্যাট্রিক্সের গুণ সাপেক্ষে একটি দল গঠন করে।

মনে করি সেটটি M।

ধরি, $A, B \in M$, অতএব $A^T = In = B^T$

AB, n ক্রমের বাস্তব ম্যাট্রিক্স এবং

$(AB)\ (AB)^T = (AB)\ (B^TA^T) = A(BB^T)\ A^T = (AI_n)\ A^T = AA^T = I_n$

অতএব AB লম্ব ম্যাট্রিক্স ও $AB \in M$। অতএব সংজ্ঞাত প্রক্রিয়াটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

ম্যাট্রিক্স গুণণে সংযোগ ধর্ম বজায় থাকে, সুতরাং $(M, .)$ -এ সংযোগ ধর্ম বজায় আছে। $I_n \in M$ ও একসম উপাদান, কেননা সকল $A \in M$ -এর জন্য $A.I_n = A = I_n.A$

এক্ষেত্রে $det\ A = \pm 1$, ফলে A^{-1} -এর অস্তিত্ব আছে এবং A^{-1} লম্ব ম্যাট্রিক্স। প্রতি উপাদনের বিপরীত উপাদান আছে। ফলে M, গুণসাপেক্ষে দল গঠন করে।

6.5 দলের উপাদানের ঘাত ও ঘাতের সূত্রাবলী

সংজ্ঞা : মনে করি $(G, *)$ একটি দল এবং a, G-এর যে কোন উপাদান ও n পূর্ণসংখ্যা।

যদি (i) $n = 0$ হয়, $a^n = e$ অর্থাৎ একসম উপাদান বুঝাবে

(ii) $n > 0$ হলে $a^n = a^{n-1} * a$ বুঝাবে

(অর্থাৎ $a^2 = a*a$, $a^3 = a^2*a$ ইত্যাদি)

(iii) $n < 0$ হলে a^n হবে a^{-n}-এর বিপরীত উপাদান অর্থাৎ $a^n = (a^{-n})^{-1}$ হবে।

মন্তব্য : যদি কোন দলে দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল হয়, সেক্ষেত্রে a^n-কে na হিসাবেও চিহ্নিত করা হয়।

ঘাতের সূত্রাবলী

(1) $a \in G$ ও $m, n \in \mathbb{Z}$ হলে $a^m * a^n = a^{m+n}$ হবে।

(2) $a \in G$ ও $m, n \in \mathbb{Z}$ হলে $(a^n)^m = a^{nm}$ হবে।

(3) যদি দলটি বিনিময়যোগ্য হয়, তবে

$a, b \in G$ ও $n \in \mathbb{Z}$ হলে $(a*b)^n = a^n * b^n$ হবে।

(3)-এর প্রমাণ ঃ

(i) ধরি $n > 0$ হবে।

$(a*b)^1 = a*b$, সুতরাং ঐ সূত্র $n = 1$-এর জন্য সত্য হবে।

মনে করি, ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা k-এর জন্য

$(a*b)^k = a^k*b^k$ হবে।

এখন,
$$\begin{aligned}(a*b)^{k+1} &= (a*b)^k*(a*b)\\ &= (a^k*(b^k*a)*b \text{ (সংযোগ ধর্ম)}\\ &= (a^k*(a*b^k)*b \text{ (বিনিময় ধর্ম)}\\ &= (a^k*a)*(b^k*b) \text{ (সংযোগ ধর্ম)}\\ &= a^{k+1}*b^{k+1}\end{aligned}$$

অতএব উক্ত সূত্র $n = k+1$-এর জন্য সত্য।

গাণিতিক আরোহ-সূত্র অনুযায়ী n-এর সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা মানের জন্য সত্য।

(ii) ধরি $n < 0$ হবে।

$(b*a)^{-n} = b^{-n}*a^{-n}$ ((i) অনুযায়ী)

$\Rightarrow [(b*a)^{-n}]^{-1} = [b^{-n}*a^{-n}]^{-1}$

$\Rightarrow (b*a)^n = (a^{-n})^{-1}*(b^{-n})^{-1}$

$\Rightarrow (a*b)^n$ (বিনিময় ধর্ম) $= a^n*b^n$

(iii) ধরি $n = 0$; $(a*b)^0 = e = a^0*b^0$

ফলে (3) সর্বেব সত্য হবে।

উদাহরণ—(1) দল $(G, *)$-এ e যদি একসম উপাদান হয় এবং প্রতি $a \in G$-এর জন্য $a^2 = e$ হয়, দলটি বিনিময়যোগ্য হবে। তবে এর বিপরীতটি সাধারণভাবে সত্য নয়।

$$a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G \text{ এবং } a^{-1}*a^2 = a^{-1}*e$$

$$\Rightarrow a = a^{-1},\ a \in G$$

ফলে, $a, b \in G \Rightarrow a*b = (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} = b*a$

অতএব দলটি বিনিময়যোগ্য দল।

$(\mathbb{Z}, +)$ একটি বিনিময়যোগ্য দল, কিন্তু 0 ব্যতীত অন্য কোন উপাদান a-এর ক্ষেত্রে $a = a^{-1}$ নয়।

(2) দল $(G, *)$ বিনিময়যোগ্য দল হবে যদি এবং যদি কেবলমাত্র যদি সকল $a, b \in G$-এর জন্য $(a*b)^2 = a^2*b^2$ হয়।

ধরি, $(a*b)^2 = a^2*b^2$ যেখানে $a, b \in G$

$\Rightarrow a*b*a*b = a*a*b*b$ (সংজ্ঞানুযায়ী)

$\Rightarrow b*a = a*b$ (দলের বাম অপসারণ ধর্ম ও ডান অপসারণ ধর্ম প্রয়োগ করে)

অতএব দলটি বিনিময়যোগ্য।

মনে করি দলটি বিনিময়যোগ্য। সকল $a, b \in G$-এর জন্য $a*b = b*a$ হবে।

$(a*b)^2 = (a*b)*(a*b) = a*(b*a)*b$ (সংযোগ ধর্ম)

$= a*(a*b)*b$ (প্রদত্ত শর্ত)

$= (a*a)*(b*b)$ (সংযোগ ধর্ম)

$= a^2*b^2$ হবে।

(3) দল $(G, *)$-এর পরপর তিনটি পূর্ণসংখ্যা i-এর জন্য $(a*b)^i = a^i*b^i$ হলে (a, b সেট G-এর যেকোন দুটি উপাদান) দলটি বিনিময়যোগ্য হবে।

মনে করি $(a*b)^m = a^m*b^m$, $(a*b)^{m+1} = a^{m+1}*b^{m+1}$ এবং $(a*b)^{m+2} = a^{m+2}*b^{m+2}$, $(a, b \in G)$

শেষোক্ত থেকে $(a*b)^{m+1}*(a*b) = (a^{m+1}*a)*(b^{m+1}*b)$

$\Rightarrow (a^{m+1}*b^{m+1})*(a*b) = (a^{m+1}*a)*(b^{m+1}*b)$

$\Rightarrow b^{m+1}*a = a*b^{m+1}$ (সংযোগ ধর্ম ও উভয় অপসারণ ধর্মের প্রয়োগে)

$\Rightarrow a^m*(b^{m+1}*a) = a^m*(a*b^{m+1})$

$\Rightarrow\ (a^{m}*b^{m})*(b*a) = a^{m+1}*b^{m+1}$ (সংযোগ ধর্মের প্রয়োগে)

$\Rightarrow\ (a*b)^{m}*(b*a) = (a*b)^{m+1} = (a*b)^{m}*(a*b)$

$\Rightarrow$ বাম অপসারণ ধর্মের প্রয়োগে $b*a = a*b$ সকল $a,b \in G$-এর জন্য

অতএব দলটি বিনিময়যোগ্য হবে।

মন্তব্য : $(a*b)^{i} = a^{i}*b^{i}$ সম্পর্কটি শুধুমাত্র পরপর দুটি পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্য হলে দলটি বিনিময়যোগ্য না-ও হতে পারে।

ধরি, $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ যেখানে দ্বিপদ প্রক্রিয়া * এভাবে সংজ্ঞাত আছে যে, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ $i*j = -(j*i) = k$, $j*k = -(k*j) = i$ এবং $k*i = -(i*k) = j$

এক্ষেত্রে $(G,*)$ বিনিময়যোগ্য দল নয় (যাচাই করুন)।

তবে $(i*j)^4 = i^4*j^4$ ও $(i*j)^5 = i^5*j^5$ সত্য হয়।

(এই দলটিকে Quarternion গ্রুপ বা দল বলা হয়।)

(4) 4 ক্রমের প্রতি দল বিনিময়যোগ্য দল হবে।

মনে করি, $G = \{e, a, b, a*b\}$, e ঐ দলের একসম উপাদান।

প্রতিটি উপাদান নিজেই নিজের বিপরীত হলে দলটি বিনিময়যোগ্য হবে।

* দ্বিপদ প্রক্রিয়া বলে $b*a \in G$

যদি সম্ভব হয়, মনে করি $b*a = e$

$\Rightarrow (b*a)*a^{-1} = e*a^{-1} \Rightarrow b*(a*a^{-1}) = a^{-1}$ (সংযোগ ধর্ম)

$\Rightarrow b*e = a^{-1} \Rightarrow a*b = e$, এটা এক্ষেত্রে নয়।

$b*a = b \Rightarrow b*a = b*e \Rightarrow a = e$ (বাম অপসারণ ধর্ম), কিন্তু a ও e পৃথক। একইভাবে $b*a = a$ সম্ভব নয়। ফলে $b*a = a*b$ হবে ও দলটি বিনিময়যোগ্য।

মন্তব্য : (1) এই ফলটি অন্যভাবেও প্রতিপন্ন করা যায়।

(2) চক্রজ দলের অধ্যায়ে আমরা দেখাব যে মৌলিক ক্রমের যেকোন দলই বিনিময়যোগ্য হয়।

6.6 দলের উপাদানের ক্রম ও প্রাসঙ্গিক সূত্রসমূহ

সংজ্ঞা : $(G,*)$ একটি প্রদত্ত দল ও $a \in G$.

যদি এমন ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর অস্তিত্ব থাকে $a^n = e$ হয় (e ঐ দলের একসম উপাদান), তবে n, ঐ উপাদান a-এর ক্রম হবে। $O(a) = n$ লেখা হবে।

যদি এ ধরণের কোনও n-এর অস্তিত্ব না-থাকে, তবে বলা হবে a অসীম ক্রমের।

$(Z, +)$ দলে প্রতিটি উপাদান (একসম উপাদান ব্যতীত) অসীম ক্রমের।

$G = \{z : z \in C, z^4 = 1\} = \{1, -1, i, -i\}$, গুণ সাপেক্ষে একটি দল। $0(-1) = 2$, $0(i) = 4 = 0(-i)$ হবে।

ধর্মাবলী : নিম্নলিখিত ধর্মগুলি প্রনিধানযোগ্য :

(i) দল $(G, *)$-এ $a \in G$ ও $0(a) = n$ হলে $a, a^2, ..., a^n$ সকলেই পৃথক।

সকল $r \in N$-এর জন্য $a^r \in G$.

যদি সম্ভব হয়, মনে করি $a^p = a^q$ যেখানে $p, q \in \{1, ..., n\}$

$\Rightarrow a^{p-q} = e \Rightarrow 0(a) \leq p - q < n$ হবে।

কিন্তু $0(a) = n$, ফলে $a, a^2, ..., a^n$ উপাদানগুলি ভিন্ন ভিন্ন।

(ii) যদি দল $(G, *)$-এ $0(a) = n$ হয় ও $a^m = e$ হয়, তবে m, n দ্বারা বিভাজ্য হবে।

m-কে n দ্বারা ভাগ করে পাই $m = nq + r$ যেখানে q ও r পূর্ণসংখ্যা এবং $0 \leq r < n$. যদি সম্ভব হয়, ধরি, $r \neq 0$।

$$a^m = a^{nq} * a^r = (a^n)^q * a^r = e * a^r = a^r$$

যেহেতু $a^m = e$, সুতরাং $a^r = e$ ও $0(a) \leq r < n$, যা প্রদত্ত শর্ত লঙ্ঘন করছে। ফলে $r = 0$ ও $m = nq$.

(iii) যদি দল $(G, *)$-এ উপাদান 'a' অসীম ক্রমের হয় তবে a-এর পূর্ণসংখ্যা ঘাত সম্পন্ন সকল উপাদান ভিন্ন ভিন্ন হবে।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি $a^r = a^s$; $r, s \in Z$.

যদি $r > s$ হয়, $a^{r-s} = e \Rightarrow 0(a)$ সসীম, যা শর্তবিরোধী। অতএব কোন দুটি a^r ও a^s সমান হয়।

(iv) যদি $(G, *)$ কোন সসীম দল হয়, তবে প্রতিটি উপাদানের ক্রম সসীম হবে। উপাদানের ক্রম দলের উৎপাদক হবে। (এই অতীব গুরুত্বপূর্ণ ধর্মটির প্রমাণ যে তত্ত্ব ও পদ্ধতির উপর নির্ভরশীল, সেটি পাঠ্যসূচী-বহির্ভূত হওয়ায় প্রমাণ করা গেল না।)

তবে ঐ ধর্মের বিপরীতটি সত্য নয়।

উদাহরণ : মনে করি S একটি অসীম সেট।

উপসেট গোষ্ঠী $\rho(S)$ প্রতিসম অন্তর Δ সাপেক্ষে দল গঠন করে (যাচাই করুন)। ϕ ঐ কাঠামোয় একসময় উপাদান। যে কোন $A \in \rho(S)$-এর জন্য $A \Delta D = \phi$ হবে, ফলে প্রতি A 2-ক্রমসম্পন্ন। কিন্তু দলটি অসীম।

(v) যদি $(G, *)$ বিনিময়যোগ্য দল এবং $a, b \in G$-এর ক্ষেত্রে $0(a) = m$, $0(b) = n$ ও $(m, n) = 1$ হয়, তবে $0(a*b) = mn$ হবে।

তবে $(G, *)$ বিনিময়যোগ্য না-হলে এটি সত্য হবে না।

Quarternion দল-এ $0(i) = 4 = 0(j)$ কিন্তু $0\ (i*j) = 4 \neq 16$

উদাহরণ : (1) দল $(G, *)$-এ $x, y \in G$, $x \neq e$ ও $0(y) = 2$ এবং $y*x*y^{-1} = x^2$ দেওয়া আছে। $0(x)$ নির্ণয় করুণ।

$$
\begin{aligned}
(y^*x^*y^{-1})^2 &= (y^*x^*y^{-1}) * (y^*x^*y^{-1}) \\
&= y^*x^{2*}y^{-1} \text{ (সংযোগ ধর্ম প্রয়োগে)} \\
&= y^*(y^*x^*y^{-1})^*y^{-1} \\
&= y^{2*}x^*y^{-2} \text{ (সংযোগ ধর্ম প্রয়োগে)} \\
&= e^*x^*e \\
&= x
\end{aligned}
$$

অতএব $(x^2)^2 = x \Rightarrow x^3 = 3$ এবং 3 একটি মৌলিক সংখ্যা। যেহেতু $x \neq e$, সুতরাং $0(x) = 3$ হবে।

(2) দল $(G, *)$-এ $a \in G$, (i) $a^5 = e$ ও (ii) $a^*b^*a^{-1} = b^2$ ($a, b \in G$-এর জন্য), $0(b)$ নির্ণয় করুন।

$$(a^*b^*a^{-1})^2 = a^*b^{2*}a^{-1} = a^{2*}a^*ba^{-2}$$

$$
\begin{aligned}
(a^*b^*a^{-1})^4 &= (a^{2*}b^*a^{-1}) * (a^{2*}b^*a^{-2}) \\
&= a^{2*}b^{2*}a^{-2} = a^{3*}b^*a^{-3}
\end{aligned}
$$

একই প্রক্রিয়ায় $(a^*b^*a^{-1})^8 = a^{4*}b^*a^{-4}]$

$$(a^*b^*a^{-1})^{16} = a^{5*}b^*a^{-5} = e^*b^*e$$

$\Rightarrow b^{32} = b \Rightarrow b^{31} = e$ এবং 31 মৌলিক সংখ্যা।

সুতরাং $0(b) = 31$ হবে।

6.7 সারাংশ

(i) অ-শূন্য সেটে একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত করা হলে যে বীজগাণিতিক কাঠামো পাওয়া যাবে, তাতে ঐ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে সংযোগ ধর্ম সিদ্ধ হলে এবং ঐ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে সেটটির জন্য একসম উপাদান থাকলে ও ঐ একসম উপাদান সাপেক্ষে সেটটির প্রতিটি উপাদানের অস্তিত্ব থাকলে ঐ কাঠামোকে দল বলা হয়ে থাকে। বিনিময় ধর্ম সিদ্ধ হলে দলটি বিনিময়যোগ্য দল হবে।

(ii) দল $(G, *)$-এ সকল $a, b \in G$-রে জন্য $a^*x = b$, $y^*a = b$ সমীকরণ যুগলের অনন্য সমাধান আছে।

(iii) সসীম অর্ধদলে উভয় অপসারণ ধর্ম সত্য হলে সেই অর্ধদলটি দল হয়।

(iv) অর্ধদল $(G, *)$-এ সকল $a, b \in G$-এর জন্য $a^*x = b$ ও $y * a = b$ সমীকরণ যুগল সমাধানযোগ্য হলে $(G, *)$ দল হবে।

(v) দলের ক্রম ও দলের উপাদানের ক্রম সংজ্ঞাত হয়েছে।

(vi) সসীম সেটে প্রতিটি উপাদানের ক্রম সসীম যদিও বিপরীত সত্য নয়।

6.8 প্রশ্নাবলী

1. পূর্ণসংখ্যার সেট $\mathbb{Z}$-এ দুটি উপাদান u ও v-এর মধ্যে নিম্ন প্রক্রিয়া * সংজ্ঞাত হল ঃ
$u*v = u$ ও v-এর গ. সা. গু.

ঐ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে $\mathbb{Z}$ দল গঠন করে কিনা নির্ণয় করুন।

2. সেট $\mathbb{C}$-তে (i) যোগ (ii) গুণ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত হলে উদ্ভূত বীজগাণিতিক কাঠামোদ্বয় দল হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

3. অশূন্য সেট X-এর উপসেট গোষ্ঠী $P(X)$-এ (i) সংযোগ (union), (ii) ছেদ (Intersection) সংজ্ঞাত করলে উদ্ভূত কাঠামোদ্বয় দল হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

4. ইউক্লিডীয় তল E^2-তে সকল চলন-রূপান্তর T সমূহের সেট $S(T)$ দ্বারা চিহ্নিত হল।

$T : x' = x + a,\ y' = y + b$ যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$.

চলনগুলির সংযোজনকে প্রক্রিয়া হিসাবে সংজ্ঞাত করলে উদ্ভূত বীজগাণিতিক কাঠামো দল হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

5. $G_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z} \text{ ও } ad - bc = 1\right\}$

$G_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$

ম্যাট্রিক্সের গুণ সাপেক্ষে G_1 ও G_2 পৃথক পৃথক ভাবে দল গঠন করবে কিনা পরীক্ষা করুন।

6. নিম্নলিখিত সেটগুলি উল্লিখিত প্রক্রিয়া সাপেক্ষে দল গঠন করবে কিনা পরীক্ষা করুন।

   (i) অশূন্য মূলদ সংখ্যার সেট $\mathbb{Q}^*$-এ $aob = \dfrac{ab}{7}$ যেখানে $a, b \in \mathbb{Q}^*$।

   (ii) $G = \{3^n : n \in \mathbb{Z}\}$, প্রক্রিয়া হল স্বাভাবিক গুণ।

   (iii) Z সেটে $a*b = a + b - 3$, যখন $a, b \in Z$.

   (iv) $S = \{z \in C : z^7 - 1\}$, প্রক্রিয়া হল স্বাভাবিক গুণ।

   (v) R-এ $a, b \in R$-এর জন্য $a*b = 2^a.b$।

7. $(G, .)$ প্রদত্ত দল। c, G-এর একটি উপাদান এবং একটি প্রক্রিয়া $(*)$ G-তে সংজ্ঞাত হল যে সকল $a, b \in G$-এর জন্য $a*b = a.c.b$ হবে।

দেখান যে, $(G, *)$ একটি দল হবে।

8. $(G, .)$ প্রদত্ত দল। a, G-এর একটি উপাদান এবং একটি প্রক্রিয়া $(*)$ G-তে সংজ্ঞাত হল যে সকল $x, y \in G$-এর জন্য $x*y = x.a^{-1}.y$ হবে।

দেখান যে, $(G, *)$ একটি দল হবে।

9. $(G, *)$ প্রদত্ত দল। a, b, c ঐ সেট G-এর যেকোন তিনটি উপাদান। দেখান যে $a*x*b = c$ সমীকরণটির G সেটে অনন্য সমাধান আছে।

10. $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ সেটে প্রক্রিয়া $(*)$ নিম্নভাবে সংজ্ঞাত :

$(a, b) * (c, d) = (c, b + d)$ যেখানে $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

$(s,*)$ গ্রুপ কিনা পরীক্ষা করুন ঃ

11. যুক্তসহ নিম্নগুলির সত্যতা / অসত্যতা যাচাই করুন :

(i) দল $(G, *)$-এ $a, b \in G$ হলে

$(a*b*a^{-1})^2 = a*b^2*a^{-1}$ হবে।

(ii) দল $(G, *)$-এ $a, b \in G, a \neq b$ এবং a ও b উভয়েরই ক্রম 2। a ও b-এর মধ্যে বিনিময় ধর্ম প্রযোজ্য হলে $a*b$-এর ক্রম 2 হবে।

(iii) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}\right\}$, ম্যাট্রিক্সের গুণ সাপেক্ষে S দল গঠন করে না।

(iv) $T = \left\{\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} : m,n \text{ অশূন্য পূর্ণসংখ্যা}\right\}$, ম্যাট্রিক্স গুণন সাপেক্ষে T দল গঠন করবে।

6.9 উত্তরের সংকেত

5. দুই ক্ষেত্রেই প্রতি উপাদানের বিপরীত উপাদান আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

6. (i) কেন a ও b-কে অশূণ্য নেওয়া হয়েছে, তার ব্যাখ্যা চাই।

(iv) প্রক্রিয়া-সংজ্ঞাত সারণী লিখুন ও একসম উপাদান এবং প্রতিটি উপাদানের বিপরীত উপাদান চিহ্নিত করুন।

7. আবদ্ধ ধর্ম ও সংযোগ ধর্ম সিদ্ধ হবার যুক্তি চাই। এখানে c^{-1} যে একসম উপাদান সেটা দেখাতে হবে।

$a*b = c^{-1} \Rightarrow a^{-1} = c^{-1}.a^{-1}.c^{-1}$ দেখাতে হবে।

11. (i) সংযোগ ধর্ম কাজে লাগান।

(iii) S-এর দুটি উপাদানের গুণ কষে দেখাতে হবে যে উদ্ভূত ম্যাট্রিক্স ঐ প্রদত্ত আকারের। প্রতি উপাদানের ক্ষেত্রে বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব যে নেই সেটা দেখাতে হবে।

একক 7 □ উপদল (Subgroup)

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

আমরা আগেই আলোচনা করেছি যে পূর্ণসংখ্যার সেট $\mathbb{Z}$-এ দুই সংখ্যার যোগফল (+) একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া এবং এই দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে ($\mathbb{Z}$, +) একটি দল গঠন করে। সমস্ত যুগ্ম পূর্ণসংখ্যার সেট $\mathbb{E}$-তে ঐ একই প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত করলে সেটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া হবে। কিন্তু সমস্ত অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যার সেট $\mathbb{Z} - \mathbb{E}$-তে ঐ প্রক্রিয়াটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া হতে পারে না। ফলে একটি দলের ক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট সেটের উপসেটগুলির ক্ষেত্রে এই গাণিতিক চারিত্রিক পার্থক্য বিশেষ আগ্রহের বিষয়।

এই এককে আমরা এই ধরণের চারিত্রিক ভিন্নতার বিষয়টি আলোচনা করব—উপদলের সংজ্ঞার পাশাপাশি উপদল হবার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত এবং দুটি উপদলের ছেদ ও সংযোগ উপদল হবে কিনা সেটিও পরীক্ষা করব।

7.2 উপদলের সংজ্ঞা ও উদাহরণ

মনে করি অ-শূন্য সেট G-তে * একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত আছে। মনে করি H উক্ত G সেটের অশূন্য উপসেট। যদি যে কোন দুটি উপাদান $a, b \in H$-এর জন্য $a*b \in H$ হয়, তবে আমরা বলব যে উপসেট H ঐ প্রক্রিয়া * সাপেক্ষে আবদ্ধ এবং * হবে $H \times H \to H$, যা G-তে সংজ্ঞাত দ্বিপদ প্রক্রিয়ার অংশ (Restriction) হিসাবে গণ্য হবে। (H, *)-কে আমরা (G, *)-এর উপকাঠামো হিসাবে বিবেচনা করব। *-কে H-এ আবিষ্ট দ্বিপদ প্রক্রিয়াও বলা হয়। ($a, b \in H \Rightarrow a, b \in G \Rightarrow a*b \in G$, তবে $a*b$, H-এর উপাদান হবে কিনা সেটিই বিবেচ্য।) 7.1-এ উল্লিখিত উদাহরণ + প্রক্রিয়া E-তে আবিষ্ট দ্বিপদ প্রক্রিয়া, কিন্তু $\mathbb{Z} - \mathbb{E}$-তে অর্থাৎ অযুগ্ম সংখ্যার সেটে নয়।

সংজ্ঞা : মনে করি $(G, *)$ প্রদত্ত দল এবং H, G-এর অশূণ্য উপসেট। যদি H উক্ত দ্বিপদ প্রক্রিয়ায় আবদ্ধ হয় ও $(H, *)$ একটি দল হয়, তবে $(H, *)$-কে প্রদত্ত দলের উপদল বলা হবে।

উদাহরণ : (1) $(\mathbb{E}, +)$ $(\mathbb{Z}, +)$-এর উপদল হবে।

(2) $M_2(R)$, দ্বিতীয় ক্রমের অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সগুলির সেট, ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলি বাস্তব রাশি। ম্যাট্রিক্সের গুণ $(*)$ সাপেক্ষে এটি দল গঠন করে।

মনে করি, $S = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} : a, b \in R, a \neq 0\right\}$

$$T = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}, ad - bc \neq 0\right\}$$

S ও T উভয়েই ম্যাট্রিক্সের গুণ সাপেক্ষে $(M_2(R), *)$-এর উপদল হবে (যাচাই করুন)।

মন্তব্য : (1) ϕ ও G উভয়েই দল $(G, *)$-এর উপদল। এ দু'টি অযথার্থ উপদল হিসাবে চিহ্নিত।

(2) দল $(G, *)$ ও তার প্রতিটি উপদল $(H, *)$-এর একসম উপাদান অভিন্ন।

যদি সম্ভব না-হয়, ধরি $(G, *)$-এর একসম উপাদান I_G ও $(H, *)$-এর I_H.

সংজ্ঞানুযায়ী, $I_H = I_H * I_H = I_H * I_G$

(I_H, $(H, *)$-এর একসম উপাদান বলে $I_H * I_H = I_H$ হবে।

আবার, $I_H \in H \subseteq G$ ও I_G, $(G, *)$-এর একসম উপাদান বলে $I_H * I_G = I_H$)

বাম অপসারণ ধর্ম প্রয়োগে পাই, $I_H = I_G$.

7.3 উপদল হবার শর্ত ও উদাহরণ

উপপাদ্য—(1) $(G, *)$ প্রদত্ত দল। G-এর অশূণ্য উপসেট H-ঐ দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে $(G, *)$-এর উপদল হবার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত হল—

$$a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H।$$

প্রমাণ : ধরি, $(H, *)$ প্রদত্ত দল $(G, *)$-এর উপদল।

যেহেতু $(H, *)$ একটি দল, অতএব

$$a, b \in H \Rightarrow a, b^{-1} \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H \text{ হয়।}$$

সুতরাং, শর্তটি প্রয়োজনীয়।

বিপরীতক্রমে ধরি $a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$

এটি $a = b$ এর জন্যও সত্য, সুতরাং $a * a^{-1} = I_G \in H$

$(G, *)$-এর একসম উপাদান $(H, *)$-এ আছে।

এখন $I_G \in H$, $a \in H \Rightarrow$ উক্ত শর্ত অনুযায়ী $I_G * a^{-1} = a^{-1} \in H$

ফলে H-এর প্রতিটি উপাদানের বিপরীত উপাদান আছে।

ধরি $a, b \in H$; অতএব $a, b^{-1} \in H$ হবে।

প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী $a*(b^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow a*b \in H$

ঐ প্রক্রিয়া * যে H-এও দ্বিপদ প্রক্রিয়া, প্রমাণিত হল।

সেট G-তে * সাপেক্ষে সংযোগ ধর্ম প্রযোজ্য। যেহেতু $H \subset G$, ফলে $(H, *)$-এ সংযোগ ধর্ম বজায় আছে।

অতএব $(H,*)$ একটি দল ও সংজ্ঞানুযায়ী $(G,*)$-এর উপদল। অতএব শর্তটি পর্যাপ্ত।

উপপাদ্য 2. মনে করি $(G, *)$ প্রদত্ত দল এবং H, G-এর অশূন্য সসীম উপসেট। H প্রদত্ত দলের উপদল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$ হয়।

প্রমাণ : মনে করি $(H, *)$ প্রদত্ত দলের উপদল।

ফলে $a, b \in H \Rightarrow a*b \in H$ $(H, *)$-এর আবদ্ধ ধর্ম অনুযায়ী)

অতএব শর্তটি প্রয়োজনীয়।

ধরি, $a, b \in H \Rightarrow a*b \in H$.

এই শর্ত অনুযায়ী $a \in H \Rightarrow a^n \in H$ যেখানে n যেকোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

যেহেতু H সসীম, অতএব ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা r, s থাকবে যার জন্য $a^r = a^s$ হবে $\Rightarrow a^{r-s} = I_G$ ($r > s$ ধরে)

$a^{r-s} \in H$ ও ফলে $I_G \in H$ হবে।

আরও $a^{r-s} = a^{r-s-1}. a = I_G = a.a^{r-s-1}$

$\Rightarrow a^{r-s-1}$ হবে ঐ দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে H-এ a-এর বিপরীত উপাদান।

ফলে H-এর প্রতি উপাদানের বিপরীত উপাদান আছে।

$(G,*)$-এ সংযোগ ধর্ম বিদ্যমান, ফলে উপসেট H-এও এটি বজায় আছে। $(H, *)$ প্রদত্ত দল $(G, *)$–এর উপদল হবে।

মন্তব্য : $(N, +)$-এ ঐ ধর্ম $a, b \in N \Rightarrow a + b \in N$ হয়।

কিন্তু $(N, +)$, দল $(Z, +)$-এর উপদল হয়।

ফলে উপপাদ্য 2 অসীম উপসেটের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়।

উদাহরণ 1. $(M_2(R), *)$ দ্বিতীয় ক্রমের অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স সমূহের (ম্যাট্রিক্সগুলির উপাদান বাস্তব রাশি) ম্যাট্রিক্স গুণ সাপেক্ষে দল দেওয়া আছে।

ধরুন $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix} : a,b,c \in R, ac \neq 0 \right\}$।

দেখান যে ম্যাট্রিক্সের গুণসাপেক্ষে S উক্ত $(M_2(R), *)$-এর উপদল হবে।

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$ এবং $S \neq \phi$। যেহেতু $ac \neq 0$, S-এর ম্যাট্রিক্সগুলি অবিশিষ্ট।

মনে করি, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ o & r \end{pmatrix} \in S$, ফলে $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R}$ এবং $ac \neq 0$, $pr \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} * \frac{1}{pr}\begin{pmatrix} r & 0 \\ -q & p \end{pmatrix}^{T}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & -q \\ 0 & p \end{pmatrix}\frac{1}{pr} = \frac{1}{pr}\begin{pmatrix} ar & -aq + bp \\ 0 & cp \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a}{p} & \frac{bp - aq}{pr} \\ 0 & \frac{c}{r} \end{pmatrix} \in S \text{ কেননা } \frac{ac}{pr} \neq 0$$

অতএব S, $(M_2(R), *)$-এর উপদল হবে।

2. $T = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R,\ ad - bc = 1\right\}$

দেখান যে গুণ সাপেক্ষে T উক্ত $(M_2(R), *)$-এর উপদল হবে।

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T$ ও $T \neq \phi$, T-এর ম্যাট্রিক্সগুলি অবিশিষ্ট।

ধরি, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in T$

অতএব, $a, b, c, d, p, q, r, s \in R$ ও $ad - bc = 1 = ps - rq$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \frac{1}{ps - rq}\begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix}^{T}$$

$$= \frac{1}{ps - rq}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ps - rq}\begin{pmatrix} as - br & -aq + bp \\ cs - dr & -cq + dp \end{pmatrix} \in T \text{ কেননা}$$

$(as - br)(dp - cq) - (cs - dr)(bp - aq)$

$= adps - brdp - acqs + brcq - csbp + drbp + acqs - draq$

$= (ad - bc)(ps - rq) = 1$, আরও $ps - rq = 1$ এবং ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলি বাস্তব।

ফলে T, $(M_2(R), *)$–এর উপদল হবে।

7.4 উপদলের সংযোগ ও ছেদ

ধরুন $(G, *)$ একটি প্রদত্ত দল এবং $(H, *)$ ও $(K, *)$ ঐ দলের প্রদত্ত উপদল। স্বাভাবিক কৌতূহল হল $H \cap K$ ও $H \cup K$ ঐ দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে $(G, *)$-এর উপদল হবে কিনা।

(i) $H \cap K$ অবশ্যই উপদল হবে।

লক্ষণীয় প্রদত্ত দলের একসম উপাদান $I_G \in H$ ও $I_G \in K$ হয়। ফলে $I_G \in H \cap K$ ও $H \cap K \neq \phi$ হবে।

যদি $H \cap K = \{I_G\}$ হয়, তবে অবশ্যই এটি উপদল।

অন্যথায় ধরি $h, k \in H \cap K$, ফলে $h, k \in H$ ও $h, k \in K$ হবে। যেহেতু H ও K উপদল, ফলে $h*k^{-1} \in H$ ও $h*k^{-1} \in K$ হবে। অতএব $h * k^{-1} \in H \cap K$ ও পর্যাপ্ত শর্ত অনুযায়ী $H \cap K$ প্রদত্ত দলের উপদল হবে।

অনুসিদ্ধান্ত : সসীম সংখ্যক উপদলের ছেদ উপদল হবে।

(ii) $H \cup K$ উপদল না-ও হতে পারে।

আমরা জানি যে, $(Z, +)$ একটি দল এবং $(2Z, +)$ ও $(3Z, +)$

$[2Z = \{2x : z \in Z\}$ ও $3Z = \{3z : z \in Z\}]$

ঐ দলের দুটি উপদল। কিন্তু $2Z \cup 3Z$ কোন দল নয়, কেননা $2 \in 2Z$, $3 \in 3Z$, কিন্তু $2 + 3 = 5 \notin 2Z \cup 3Z$.

আরও Q^* গুণ সাপেক্ষে দল গঠন করে এবং $H = \{-1, 1\}$ ও $K = \{2^n : n \in Z\}$ ঐ দলের দু'টি উপদল। কিন্তু $H \cup K$ উপদল নয়, কেননা $-1 \in H$, $2 \in K$, $(-1)(2) = -2 \notin H \cup K$ হয়।

এ বিষয়ে নিম্ন সূত্রটি প্রনিধানযোগ্য :

দল $(G, *)$-এর দুটি উপদল $(H_1, *)$, $(H_2, *)$ দেওয়া আছে। $(H_1 \cup H_2, *)$ প্রদত্ত দলের উপদল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $H_1 \subseteq H_2$ বা, $H_2 \subseteq H_1$ হয়।

7.5 সারাংশ

এই এককে উপদলের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে এবং উপদল হবার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত নিরূপিত হয়েছে। দুটি উপদলের সংযোগ যে উপদল না-ও হতে পারে সেটি উদাহরণ সহযোগে দেখানো হয়েছে এবং ঐ সংযোগটি উপদল হবার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত বিবৃত হয়েছে। সসীম সংখ্যক উপদলের ছেদ যে বাধ্যতামূলক ভাবে উপদল হবে সেটি প্রমাণ করা হয়েছে।

7.6 প্রশ্নাবলী

1. $(M_2(R), *)$ ম্যাট্রিক্সের গুণ সাপেক্ষে R-এ সংজ্ঞাত অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স সমূহের দল দেওয়া আছে।

যদি $S = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : ab = 1,\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$ ও $T = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : ab = 2,\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$ হয়, তবে S ও T ঐ দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে প্রদত্ত দলের উপদল হবে কিনা নির্ধারণ করুন।

2. ধরুন $(G, *)$ একটি বিনিময়যোগ্য দল। যদি $H = \{a^n : a \in G\},\ n \in N$ হয়, তবে H ঐ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে G-এর উপদল হলে কিনা পরীক্ষা করুন।

3. ধরুন $(G, *)$ একটি বিনিময়যোগ্য দল, I_G এই দলের একসম উপাদান। ধরুন,

   $H = \{x : x \in G,\ x^n = I_G\},\ n \in N$।

   পরীক্ষা করুন H, G-এর উপদল হবে কিনা।

4. মনে করুন $G = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0\}$ এবং G সেটে দ্বিপদ প্রক্রিয়া $*$ এভাবে সংজ্ঞাত যে, $(a, b) * (c, d) = (ac,\ ad + b)$

   দেখান যে $(G, *)$ একটি অ-বিনিময়যোগ্য দল। যদি $H = \{(1, b) : b \in \mathbb{Q}\}$ হয়, দেখান যে $(H, *)$ ঐ দলের উপদল হবে।

5. মনে করুন P, R-এ সংজ্ঞাত দ্বিতীয় ক্রমের সমস্ত ম্যাট্রিক্সের সেট এবং $Q = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R\right\}$ ও $S = \left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} : c, d \in R\right\}$। ম্যাট্রিক্সের যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে (*i*) Q ও S, P-এর উপদল হবে কিনা (ii) $Q \cup S$, P-এর উপদল হবে কিনা যাচাই করুন।

7.7 উত্তরের সংকেত

1. S উপদল হবে, T উপদল হবে না (দুটি ক্ষেত্রেই যুক্তি দিন)
2. ও 3. উপদল হবার পর্যাপ্ত শর্তটি সিদ্ধ হয় কিনা পরীক্ষা করুন।
4. $(G, *)$-এ সংযোগ ধর্ম পরীক্ষা করুন। $(1, 0)$ একসম উপাদান হবে—যাচাই করুন। বিপরীত উপাদান নির্ধারণে $a \neq 0$ ব্যবহার করুন।

   H-এর ক্ষেত্রে উপদল হবার পর্যাপ্ত শর্তটি সিদ্ধ হয়কিনা দেখুন।
5. $Q \cup S$-এর ম্যাট্রিক্সের যোগ প্রক্রিয়াটি আবদ্ধ ধর্ম সিদ্ধ করছে কিনা দেখুন।

একক ৪ ☐ কয়েকটি বিশেষ সসীম দল ও চক্রজ দল (Some Special Finite Groups and Cyclic Groups)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

বিমূর্ত বীজগণিতে কয়েকটি বিশেষ ধরণের দল ও উপদল উল্লেখের দাবি রাখে, কেননা এই দল ও উপদলগুলি দলের বিভিন্ন ধর্ম ও তার সীমাবদ্ধতা, বিপরীত ধর্মটির সত্যতা ইত্যাদি যাচাইয়ে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে থাকে। পাঠ্যক্রমের সীমাবদ্ধতার কারণে সব ধর্ম ও তার প্রয়োগ প্রমাণ করা যাবে না, কিন্তু এই ধর্মগুলি সম্পর্কে সম্যক ধারণা থাকা দরকার। আগের এককে আমরা উপদল আলোচনা করেছি। এই এককে আমরা এক বিশেষ ধরণের উপদল নিয়ে আলোচনা শুরু করব।

8.2 চক্রজ দল : সংজ্ঞা ও কয়েকটি ধর্ম

সংজ্ঞা : একটি দল $(G, *)$-কে চক্রজ দল বলা হবে যদি G-তে এমন কোন উপাদান 'a' থাকে যে $G = \{a^n ; n \in Z\}$ আকারে লেখা যায় বা প্রকাশ করা যায়, তবে G-কে চক্রজ দল, a-কে ঐ চক্রজ দলের সৃজক বলা হয় এবং $G = < a >$ এই চিহ্ন দ্বারা অভিহিত করা হয়।

$(Z, +)$ একটি অসীম চক্রজ দল, 1 ও -1 এর দুই সৃজক।

$G = \{z \in C : z^4 = 1\} = \{1, -1, i, -i\}$ গুণসাপেক্ষে একটি চক্রজ দল ঃ i ও $-i$ এই চক্রজ দলের দুই সৃজক।

$(Q, +)$ কিন্তু চক্রজ দল নয়। যদি সম্ভব হয়, মনে করি এই দল চক্রজ ও $q = \frac{m}{n}$ (m ও n পূর্ণসংখ্যা, $n \neq 0$) এই দলের সৃজক। $\frac{1}{2n} \in Q$ এবং চক্রজ দলের সংজ্ঞা অনুযায়ী ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা r-এর অস্তিত্ব আছে যে,

$$\frac{1}{2n} = q + q + \cdots \ (r \text{ সংখ্যক পদ}) \text{ বা } \frac{1}{2n} = -q - q - \cdots \ (r \text{ সংখ্যক পদ})$$

অতএব, $\frac{1}{2n} = \frac{rm}{n}$ বা, $-\frac{rm}{n}$

অর্থাৎ, $2rm = 1$ বা, -1 হচ্ছে। কিন্তু r ও m পূর্ণসংখ্যা, ফলে $2rm = 1$ বা -1 সম্ভব নয়। ফলে এই দলের সৃজক নেই ও দলটি চক্রজ নয়।

ধর্ম—1. যে কোন চক্রজ দল $(G, *)$ বিনিময়যোগ্য কিন্তু যে কোন বিনিময়যোগ্য দল চক্রজ নয়।

মনে করি, $G = < a >$ ও $x, y \in G$. ফলে পূর্ণসংখ্যা r ও s-এর অস্তিত্ব আছে যে $x = a^r$, $y = a^s$ হবে। $x*y = a^r*a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s*a^r = y*x$ হবে এবং চক্রজ দল $(G, *)$ বিনিময়যোগ্য হবে। $(Q, +)$ বিনিময় যোগ্যদল কিন্তু চক্রজ দল নেই। এরকম একটি সসীম বিনিময়যোগ্য দলের বিষয় আমরা 8.4.2-তে আলোচনা করব সেটি চক্রজ নয়।

ধর্ম—2. যদি $(G, *)$ দল হয় ও $a \in G$ হয়, $H = \{a^n : n \in Z\}$ হয়, তবে H, $(G, *)$-এর উপদল হবে।

$$I_G = a^0 \in H \text{ ও } H \neq \phi.$$

মনে করি, $x, y \in H$, ফলে $m, n \in Z$ পাওয়া যাবে $x = a^m$, $y = a^n$ হবে।

$$x * y^{-1} = a^m*(a^n)^{-1} = a^{m-n} \in H$$

অতএব উপদল হবার পর্যাপ্ত শর্ত অনুযায়ী H, প্রদত্ত দল $(G, *)$-এর উপদল হবে।

ধর্ম—3. একটি চক্রজ দলের প্রতিটি উপদল চক্রজ হবে। তবে এর বিপরীতটি সাধারণভাবে সত্য নয়—এ সম্পর্কে গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ 8.4.1-এ পাওয়া যাবে।

ধর্ম—4. একটি সসীম দলের ক্রম যদি মৌলিক সংখ্যা হয় তবে সেটি চক্রজ হবে ও ফলে বিনিময়যোগ্য হবে।

ধর্ম—5. একটি সসীম দল $(G, *)$ চক্রজ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি G-তে এমন উপাদান a-এর অস্তিত্ব থাকে যে $0(a) = n(G)$ অর্থাৎ উপাদান a-এর ক্রম দল G-এর ক্রমের সঙ্গে সমান হয়।

ধর্ম—6. যদি $G = < a >$ সসীম চক্রজ দল হয়, তবে $0(a) = 0(G) = G$-এর ক্রম)

ধর্ম—7. মনে করুন $G = < a >$ একটি n ক্রমের সসীম চক্রজ দল। সেক্ষেত্রে a^k, $1 \leq k \leq n$, ঐ চক্রজ দলের সৃজক হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি k ও n-এর গ. সা. গু. 1 হয় (অর্থাৎ যদি n ও k পরস্পর মৌলিক হয়)।

ধর্ম—8. যদি $G = < a >$ একটি অসীম চক্রজ দল হয়, তবে a ও a^{-1} (ঐ দলে a-এর বিপরীত উপাদান) ঐ চক্রজ দলের সৃজক হবে।

ধর্ম—9. যদি $G = < a >$ একটি সসীম চক্রজ দল হয় এবং H, ঐ G-এর উপদল হয়, তবে $0(G)$, $0(H)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে (অর্থাৎ G-এর ক্রম, H-এর ক্রম দ্বারা বিভাজ্য হবে)।

ধর্ম—10. (*i*) যদি $(G, *)$, n ক্রমের সসীম চক্রজ দল হয়, তবে n-এর প্রতিটি ধনাত্মক উৎপাদক d-এর জন্য G-এর অনন্য উপদল H পাওয়া যাবে যে $O(H) = d$ হবে।

(ii) যৌগিক ক্রম বিশিষ্ট প্রতিটি সসীম দলের যথার্থ চক্রজ উপদল রয়েছে।

মন্তব্য : চক্রজ দলের গুরুত্ব ও প্রয়োগের বিষয়টি অনুধাবন করার জন্য উপরের ধর্মগুলি উল্লিখিত হল।

উদাহরণ—(1) $(R, +)$ চক্রজ কিনা যুক্তিসহ বলুন। যদি সম্ভব হয়, মনে করি $(R, +)$ চক্রজ দল। ধর্ম 3 অনুযায়ী $(R, +)$-এর উপদল $(Q, +)$ কে চক্রজ হতে হবে। কিন্তু $(Q, +)$ চক্রজ নয়। অতএব $(R, +)$ চক্রজ হতে পারবে না।

(2) 11 ক্রমের একটি দল বিনিময়যোগ্য হবে কিনা পরীক্ষা করুন। ঐ দলের যথার্থ ও অযথার্থ উপদল কতগুলি থাকতে পারে যুক্তিসহ বলুন। 11 মৌলিক সংখ্যা। ফলে ধর্ম 4 অনুযায়ী সেটি অবশ্যই বিনিময়যোগ্য হবে। ধর্ম 9 অনুযায়ী এর যথার্থ উপদল থাকবে না।

(3) $G = < a >$ যদি 12 ক্রমের সসীম চক্রজ দল হয়, তবে অন্য সৃজক থাকবে কি?

5, 7, 11 প্রদত্ত 12-এর সঙ্গে পরস্পর মৌলিক অর্থাৎ $(5, 12) = (7, 12) = (11, 12) = 1$। ফলে ধর্ম 7 অনুযায়ী a^5, a^7, a^{11} ঐ চক্রজ দলের সৃজক হবে।

8.3 সসীম দলের উপদল হবার একটি শর্ত

ল্যাংরাঞ্জের উপপাদ্য যদি H সসীম দল $(G, *)$-এর উপদল হয় তবে $0(G)$, $0(H)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে।
উদাহরণ : 8টি উপাদানবিশিষ্ট একটি দলে 5টি উপাদানবিশিষ্ট উপদল থাকতে পারে কিনা যুক্তিসহ বলুন।
ল্যাংরাঞ্জের উপপাদ্য অনুযায়ী থাকতে পারে না কেননা 8, 5 দ্বারা বিভাজ্য নয়।

8.4 কয়েকটি বিশেষ ধরণের সসীম দল ও তাদের বৈশিষ্ট্য

8.4.1 বিন্যাস দল ও তার উপদল

সংজ্ঞা 1. $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ একটি অ-শূণ্য সসীম সেট। $S \to S$ সমস্ত দ্বিনিধানী (একৈক উপরিচিত্রণ) চিত্রণের সেটকে S_n দ্বারা চিহ্নিত করা হল। এগুলিকে বলা হবে বিন্যাস **(Permutation)**।

উক্ত সেট S_n-এ চিত্রণের সংযোজনকে প্রক্রিয়া হিসাবে সংজ্ঞাত করা হল।

যেহেতু দু'টি দ্বিনিধানী চিত্রণের সংযোজন দ্বিনিধানী চিত্রণ হবে ও S_n-এর উপাদান হবে, ফলে উক্ত প্রক্রিয়া দ্বিপদ প্রক্রিয়া হবে। চিত্রণের সংযোজন সংযোগ ধর্ম (Associative property) মেনে চলে। একসম চিত্রণ (Identity mapping) একটি দ্বিনিধানি চিত্রণ ও S_n-এর উপাদান। প্রতি দ্বিনিধানী চিত্রণের বিপরীত চিত্রণের অস্তিত্ব আছে ও সেই চিত্রণ S_n-এর উপাদান। ফলে চিত্রণের সংযোজন প্রক্রিয়াকে S_n-এ দ্বিপদ প্রক্রিয়া হিসাবে সংজ্ঞাত করলে

একটি দল পাওয়া যায়। এই দলকে বলা হবে বিন্যাসের দল (Permutation group) $(S_n, 0)$, যেখানে 0 বলতে চিত্রণের সংযোজন বোঝায়।

সংজ্ঞা 2. মনে করুন $S = \{1, 2, ..., n\}$. $S \to S$ সমস্ত দ্বিনিধানী চিত্রণের সেটকে S_n দ্বারা চিহ্নিত করা হল। এই সেটে চিত্রণের সংযোজনকে দ্বিপদ প্রক্রিয়া হিসাবে সংজ্ঞাত করা হলে উদ্ভূত কাঠামোকে প্রতিসম দল (Symmetric group)। $(S_n, 0)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে।

মন্তব্য : (1) দলটি বিনিময়যোগ্য নয়, কেননা চিত্রণের সংযোজন বিনিময়ধর্ম মেনে চলে না।

(2) এই দলের ক্রম $n!$

প্রতিসম দল $(S_3, 0)$

$$S_3 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

প্রথমটিতে $1\to1$, $2\to2$, $3\to3$ বলে এটিকে (1) দ্বারা চিহ্নিত করা হল। দ্বিতীয়টিতে $1\to1$, $2\to3$, $3\to2$ বলে এটিকে (2, 3) দ্বারা চিহ্নিত করা হল। এভাবে তৃতীয়টিকে (1, 2), চতুর্থটিকে (1 2 3), পঞ্চমটিকে (1 3 2) ও শেষটিকে (1 3) দ্বারা চিহ্নিত করা হল। ফলে আমরা লিখতে পারি S_3 = {(1), (2 3), (1 2), (1 2 3), (1 3 2), (1 3)} এই দলটি বিনিময়ধর্ম অনুসারী নয়, এটি চক্রজ দল হতে পারে না।

উক্ত চতুর্থ ও পঞ্চম উপাদানগুলির ক্ষেত্রে নিম্ন আলোচনা প্রনিধানযোগ্য ঃ

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

এই গুণণ হিসাবে লেখা যায়। একেবারে ডানের চিত্রণে $1\to2$, $2\to1$, $3\to3$ ও তার বাঁয়ের চিত্রণে $1\to3$, $2\to2$, $3\to1$ আছে। ফলে সংযোজন চিত্রণে $1\to2\to2$, $2\to1\to3$, $3\to3\to1$ হয়েছে, যা বাম দিকে লেখা আছে। অর্থাৎ আমরা লিখব (1 2 3) = (1 3) · (1 2)।

অনুরূপভাবে (1 3 2) = (1 2) · (1 3) লেখা যায়।

সংজ্ঞা 3. মনে করি, $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ এবং $S \to S$ একটি দ্বিনিধানী চিত্রণ f এমন যে

$f(a_{i_1}) = a_{i_2}, f(a_{i_2}) = a_{i_3}, \ldots, f(a_{i_{r-1}}) = a_{i_r}, f(a_{i_r}) = a_{i_1}$ হয় এবং বাকী উপাদান (যদি থাকে) গুলির ক্ষেত্রে $f(a_{ij}) = a_{ij}$ হয়।

সেক্ষেত্রে $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}\}$-কে r $(\le n)$ দৈর্ঘ্যের চক্র (Cycle) বলা হবে। যদি কোন ক্ষেত্রে চক্রের দৈর্ঘ্য 2 হয় (অর্থাৎ $r = 2$), তবে সেটিকে দ্বিচক্র (Transposition) বলে অভিহিত করা হয়।

নীচে দুটি গুরুত্বপূর্ণ সূত্র বিবৃত করা হচ্ছে ঃ

সূত্র—**1.** S_n-এর প্রতিটি উপাদান σ-কে বিচ্ছেদী চক্রের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়। প্রতিটি চক্রকে দ্বিচক্রের গুণফল হিসাবেও প্রকাশ করা যায়।

সূত্র—**2.** (1)-এ বর্ণিত গুণফল হিসাবে প্রকাশ যদিও অনন্য নয়, কিন্তু ঐ গুণফলে দ্বিচক্রের সংখ্যা হয় সব সময়েই যুগ্ম হবে অর্থাৎ সব সময়েই অযুগ্ম হবে।

উদাহরণসহযোগে ব্যাখ্যা—

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_7$$

$= (1\ 7\ 3\ 4\ 2\ 5\ 6) = (1\ 6)\ (1\ 5)\ (1\ 2)\ (1\ 4)\ (1\ 3)\ (1\ 7)$ অর্থাৎ 6টি দ্বিচক্রের গুণফল হিসাবে প্রকাশিত।

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1 3 2 4)\ (5 6) \in S_6$$

$= (1\ 4)\ (1\ 2)\ (1\ 3)\ (5\ 6)$ (4টি দ্বিচক্র)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 8 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$$

$= (1\ 3\ 4)\ (2\ 5\ 8)\ (6\ 7) = (1\ 4)\ (1\ 3)\ (2\ 8)\ (2\ 5)\ (6\ 7)$

অর্থাৎ 5টি দ্বিচক্রের গুণফল হিসাবে প্রকাশিত হল।

সংজ্ঞা 4. একটি বিন্যাস $\sigma \in S_n$-কে যুগ্ম বিন্যাস বলা হবে যদি σ-কে যুগ্ম সংখ্যক দ্বিচক্রের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়। যেমন—$\sigma = (1\ 7\ 3\ 4\ 2\ 5\ 6) \in S_7$

আবার $\sigma \in S_n$-কে অযুগ্ম বিন্যাস বলা হবে যদি σ-কে অযুগ্ম সংখ্যক দ্বিচক্রের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

যেমন— $\sigma = (1\ 3\ 4)\ (2\ 5\ 8)\ (6\ 7) \in S_8$

নীচের সূত্রটি আমাদের আলোচনার সহায়ক হবে ঃ

সূত্র 3. S_n-এ যুগ্ম বিন্যাসের সংখ্যা ও অযুগ্ম বিন্যাসের সংখ্যা অবশ্যই সমান হবে।

(মন্তব্য : যুগ্ম বিন্যাসের সেট A_n ও অযুগ্ম বিন্যাসের সেট B_n-এর মধ্যে উপযুক্ত দ্বিনিধানী চিত্রণ ব্যাখ্যা করে এটি প্রমাণ করা যায়।)

ব্যাখ্যা : S_3-এর উপাদানগুলি বিবেচনা করা যাক।

$$S_3 = \{(1), (2\ 3), (1\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 3)\}$$

আবার, $(1\ 2\ 3) = (1\ 3)\ (1\ 2)$ ও $(1\ 3\ 2) = (1\ 2)\ (1\ 3)$

$\rho_0 = (1)$, $\rho_3 = (1\ 3)\ (1\ 2)$, $\rho_4 = (1\ 2)\ (1\ 3)$ হল যুগ্ম বিন্যাস এবং $\rho_1 = (2\ 3)$, $\rho_2 = (1\ 2)$, $\rho_5 = (1\ 3)$ অযুগ্ম বিন্যাস।

অতএব যুগ্ম বিন্যাসের সংখ্যা = অযুগ্ম বিন্যাসের সংখ্যা।

সূত্র 4. যুগ্ম বিন্যাসের সেট A_n, S_n-এর উপদল হবে। দুটি যুগ্ম বিন্যাসের সংযোজন যুগ্ম বিন্যাস, ফলে আবদ্ধ ধর্ম সিদ্ধ হয়।

S_n-এ সংযোজন ধর্ম বিদ্যমান, ফলে A_n-এও বিদ্যমান। একসম বিন্যাস একটি যুগ্ম বিন্যাস ও A_n-এর উপাদান।

যুগ্ম বিন্যাসের বিপরীত বিন্যাস যুগ্ম হবে। কেননা যদি $\alpha\ (\in A_n) = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_{2m}$ হয় (প্রতি τ_i দ্বিচক্র), $\alpha^{-1} = \tau_{2n}^{-1} \cdots \tau_2^{-1}\ \tau_1^{-1}$ (চিত্রণের ধর্ম থেকে)

$= \tau_{2n} \cdots \tau_2\tau_1$, ফলে $\alpha^{-1} \in A_n$ (যে-কোন τ_i-এর ক্ষেত্রে $\tau_i^{-1} = \tau_i$)

অতএব, A_n, S_n-এর উপদল হবে।

এই উপদলকে বলা হবে একান্তর উপদল বা Alternating subgroup.

উদাহরণ : $\{p_0, p_3, p_4\}$ হল S_3-এর একান্তর উপদল।

লক্ষণীয় এই উপদলটির ক্রমসংখ্যা 3 অর্থাৎ মৌলিক ক্রমসংখ্যা। ফলে উপদলটি চক্রজ হবে।

8.4.2. ক্লায়েন (Klein)-এর 4-দল (K_4) :

ধরুন $G = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$

(যদি $A = \{1, -1\}$ হয়, $A \times A$ বিবেচনা করুন)

G সেটে নিম্ন প্রক্রিয়াটি * সংজ্ঞাত হল :

$(a, b), (c, d) \in G$-এর জন্য $(a, b)*(c, d) = (ac, bd)$

যদি $e = (1, 1)$, $a = (1, -1)$, $b = (-1, 1)$, $c = (-1, -1)$ হয়, তবে উক্ত প্রক্রিয়া সাপেক্ষে নিম্ন সারণীটি প্রণয়ন করা যায়।

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

প্রতি সারি ও স্তম্ভে উপাদানগুলি ভিন্ন ভিন্ন। আবদ্ধ ধর্ম ও সংযোগ ধর্ম বিদ্যমান। e হল একসম উপাদান ও প্রতি উপাদান নিজেই নিজের বিপরীত উপাদান। বিনিময় ধর্ম মেনে চলে। ফলে এটি বিনিময়যোগ্য দল। লক্ষণীয় $0(a) = 0(b) = 0(c) = 2$, $0(e) = 1$. দলের ক্রম 4 কিন্তু কোন উপাদানেরই ক্রম 4 নয়—ফলে এটি চক্রজ দল নয় (ধর্ম 6, 8.2 দেখুন)। ফলে এটি একটি বিনিময়যোগ্য দলের উদাহরণ, যা চক্রজ নয়। লক্ষণীয়, K_4-এর প্রতিটি উপদল চক্রজ।

8.5 সারাংশ

এই এককে চক্রজ দল বিন্যাস দল, ক্লায়েন-এর 4 দলের মত গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও কিছু বৈশিষ্ট্য আলোচিত হয়েছে।

8.6 প্রশ্নাবলী

1. $(\mathbb{Z}, +)$ চক্রজ দল হবে কিনা যুক্তিসহ উত্তর দিন। চক্রজ দল হলে সৃজক বা সৃজকগুলি নির্ধারণ করুন।
2. $S = \{z : z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}, n \in \mathbb{N}$, হলে স্বাভাবিক গুণ সাপেক্ষে এটি চক্রজ দল হবে কিনা পরীক্ষা করুন।
3. K_4-এর উপদলগুলি নির্ধারণ করুন ও সেই উপদলগুলি চক্রজ কিনা যুক্তিসহ বলুন।
4. যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ উভয়েই S_5-এর উপাদান হয়, তবে এদের গুণফল AB নির্ধারণ করুন এবং AB যুগ্ম / অযুগ্ম বিন্যাস কোন্‌টি হবে যুক্তিসহ বলুন।
5. মনে করুন $(G, *)$ একটি 6 ক্রমের চক্রজ দল ও $G = \langle g \rangle$ দেওয়া আছে। G-এর আর কোন সৃজক আছে কিনা, থাকলে সেগুলি কি কি যুক্তিসহ আলোচনা করুন।
6. সত্যাসত্য যুক্তিসহ বিচার করুন :

   (i) S_3-এর সমস্ত যথার্থ উপদল বিনিময়যোগ্য ও চক্রজ।

   (ii) $A = \{(1), (1\ 2)\}$ ও $B = \{(1), (2\ 3)\}$, S_3-এর উপদল কিন্তু $A \cup B$ উপদল নয়।
7. 6 ক্রমের দুটি দল A ও B-এর উদাহরণ দিন যার একটি বিনিময়যোগ্য হবে ও অপরটি বিনিময়যোগ্য হবে না।
8. যদি $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ হয়, দেখান যে $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$ হবে।
9. দল S_3-তে $(1\ 3\ 2)$ উপাদানটির ক্রমনির্ণয় করুন।
10. একটি দলের ক্রম 28 হলে 11 ক্রমের কোন উপদল থাকতে পারে কিনা যুক্তিসহ বলুন।

8.7 উত্তরের সংকেত

1. অসীম চক্রজ দল হবে, ধর্ম 8 (8.2) অনুযায়ী দুটি সৃজক আছে (নির্ধারণ করুন)
3. ল্যাংরাঞ্জের উপপাদ্য প্রয়োগে সম্ভাব্য উপদলগুলির ক্রম নির্ধারণ করুন, উপদলগুলি নির্ণয় করুন ও ধর্ম 4(8.2) প্রয়োগ করুন।
5. ধর্ম 7 (8.2) ব্যবহার করুন।
6. (i) ল্যাংরাঞ্জের উপপাদ্য ও ধর্ম 4(8.2) প্রয়োগ করুন।

   (ii) $A \cup B$-এর ক্ষেত্রে আবদ্ধ ধর্মটি সিদ্ধ হয় কিনা পরীক্ষা করুন।
7. $\{z : z \in C : z^6 = 1\}$ ও S_3 বিচার করুন।
9. উপাদানের ক্রমের সংজ্ঞাটি কাজে লাগান।

একক 9 ❑ বলয় বা মণ্ডল (Ring), পূর্ণাধার মণ্ডল (Integral domain) ও ক্ষেত্র (Field)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

আগের তিনটি এককে আমরা একটি দ্বিপদ-প্রক্রিয়া বিশিষ্ট বীজগাণিতিক কাঠামোর ধর্মভিত্তিক প্রকারভেদ, সেগুলির বৈশিষ্ট্য ও কিছু প্রয়োগের ক্ষেত্র আলোচনা করেছি। 6.2-তে আমরা ইঙ্গিত দিয়েছিলাম যে অশূণ্য সেটে দু'টি দ্বিপদ প্রক্রিয়াও সংজ্ঞাত করা যায়। এই এককে আমরা দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া আবিষ্ট বীজগাণিতিক কাঠামো নিয়ে আলোচনা করব—ধর্মের প্রকারভেদে এই কাঠামোগুলিকে বলয় বা মণ্ডল, পূর্ণাধার মণ্ডল ও ক্ষেত্র বলা হয়ে থাকে। সেগুলির মধ্যেকার সম্ভাব্য গাণিতিক সম্পর্ক এখানে আলোচিত হবে। গণিতের বিভিন্ন শাখায় ও স্তরে বাস্তব রাশির সেট $\mathbb{R}$, জটিল রাশির সেট $\mathbb{C}$ আলোচিত হয়ে থাকে—এগুলির বীজগাণিতিক কাঠামো আলোচনা এই এককে অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ দিক্।

9.2 বলয় বা মণ্ডল (Ring)

একটি অ-শূন্য সেট S-এ দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' ও '.' প্রযুক্ত হল (এগুলি পাটীগণিতের প্রচলিত যোগ + ও গুণ . না-ও হতে পারে)। বীজগাণিতিক কাঠামো $(S, +, .)$ যদি নিম্ন শর্তগুলি পূরণ করে, তবে সেই কাঠামো $(S, +, .)$-কে বলয় বা মণ্ডল (Ring) বলা হয়ে থাকে :

(i) $(S, +)$ একটি বিনিময়যোগ্য দল অর্থাৎ

(ক) সকল $a, b \in S$-এর জন্য $a + b \in S$

(খ) সকল $a, b, c \in S$-এর জন্য $a + (b + c) = (a + b) + c$

(গ) এমন একসম উপাদান '0' (পাটীগণিতের 0 না-ও হতে পারে, সাধারণভাবে নয়) ঐ সেটে আছে যে সকল $a \in S$-এর জন্য $a + 0 = a = 0 + a$ হবে।

(ঘ) প্রতি $a \in S$-এর জন্য $-a \in S$ হবে যে $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

(ঙ) সকল $a, b \in S$-এর জন্য $a + b = b + a$ হবে

(ii) $(S, .)$ একটি অধদল হবে অর্থাৎ

(ক) সকল $a, b \in S$-এর জন্য $a.b \in S$]

(খ) সকল $a, b, c \in S$-এর জন্য $a.(b.c) = (a.b).c$

(iii) '+' প্রক্রিয়া '.' প্রক্রিয়ার উপর বাম ও ডান বণ্টন সূত্র মেনে চলবে অর্থাৎ সকল $a, b, c \in S$-এর জন্য—

$a.(b+c) = a.b + a.c$ এবং $(a+b).c = a.c + b.c$ সিদ্ধ হবে।

উদাহরণ : $(R, +, .)$, $(C, +, .)$, $(Q, +, .)$, $(Z, +, .)$ বলয় বা মণ্ডল হবে।

$(N, +, .)$ বলয় বা মণ্ডল হবে না।

মনে করুন $(G, +)$ একটি বিনিময়যোগ্য দল ও G সেটে গুণণ প্রক্রিয়া নিম্নভাবে সংজ্ঞাত :

সকল $x, y \in G$-এর জন্য $x.y = x$ হবে।

এক্ষেত্রে বাম বণ্টন সূত্র সিদ্ধ নয়, ফলে এটি বলয় নয়।

অনুরূপে $x, y = y$ নিলে ডান বণ্টন সূত্র সিদ্ধ নয় ও বলয় হবে না।

বলয়ের প্রকারভেদ :

(i) বলয় $(S, +, .)$-কে বিনিময়যোগ্য বলা হবে যদি সকল $a, b \in S$-এর জন্য $a.b = b.a$ হয়।

$(Z, +, .)$ বিনিময়যোগ্য বলয়।

যদি $M = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in R\right\}$ হয় এবং ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণ দুটি যথাক্রমে দ্বিপদ প্রক্রিয়া হয়, তবে এটি অ-বিনিময়যোগ্য বলয় হবে।

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad \\ 0 & bd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bc \\ 0 & bd \end{pmatrix}$$

(ii) কোন বলয়ে দ্বিপদ প্রক্রিয়া '.' সাপেক্ষে একসম উপাদান থাকলে অর্থাৎ যদি কোন উপাদান $e \in S$ থাকে যে $a.e = a = e.a$ (সকল $a \in S$-এর জন্য), তবে ঐ বলয়কে একক উপাদান বিশিষ্ট বলয় (Ring with unity) বলা হয়। সাধারণভাবে e কে 1 দ্বারা (পাটীগণিতের 1 সাধারণভাবে নয়) চিহ্নিত করা হয়।

$(Z, +, .)$ একক উপাদান বিশিষ্ট বলয় (1 একক উপাদান) কিন্তু উক্ত $(M, +, .)$ নয় $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin M\right)$

(iii) যদি কোন বলয় $(S, +, .)$-এ কমপক্ষে এমন দুটি উপাদান a ও b থাকে যে, $a.b = 0$ কিন্তু $a \neq 0$,

$b \neq 0$; তবে বলয়কে শূন্য ভাজক যুক্ত বলয় বলা হবে। অন্যথায় বলয়কে বলা হবে শূন্য ভাজক মুক্ত বলয়। $(Z, +, .)$ শূন্য ভাজক মুক্ত বলয় কিন্তু উক্ত $(M, +, .)$ শূন্য ভাজক মুক্ত বলয়—

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ হচ্ছে।}$$

বলয়ের ধর্ম :

একটি বলয় $(S, +, .)$-এর ক্ষেত্রে

(i) $a.0 = 0.a = 0$ যেখানে $a \in S$

(ii) $a,b \in S \Rightarrow a.(-b) = (-a) . b = -(a.b)$

(iii) n যেকোন পূর্ণসংখ্যা হলে $(na).b = n(a.b) = a.(nb)$

(iv) যদি ঐ বলয়ে একক উপাদানে (I) থাকে, তবে সেটি অনন্য এবং $I \neq 0$ হবে।

(v) যদি ঐ বলয়ে একক উপাদান থাকে এবং গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে কোন উপাদানের বিপরীত উপাদান থাকে, তবে সেই বিপরীত উপাদান অনন্য।

(vi) যদি ঐ বলয়ে সব $a \in S$-এর জন্য $a^2 = a$ হয়, তবে বলয়টি বিনিময়যোগ্য হবে।

(vii) যদি বলয় $(S, +, .)$-এর ক্ষেত্রে $(S, +)$ দলটি চক্রজ হয়, তবে বলয়টি বিনিময়যোগ্য হবে।

প্রমাণ : (i) $a.0 = a.(0 + 0) = a.0 + a.0$ (বণ্টন ধর্ম)

$\Rightarrow a.0 + 0 = a.0 + a.0$

$\Rightarrow 0 = a.0$ ($(S, +)$ দলের বাম অপসারণ ধর্ম প্রয়োগে)

অনুরূপে ডান অপসারণ ধর্ম ($(S, +)$ দলের) প্রয়োগে $0.a = 0$ পাওয়া যাবে।

(ii) $a.0 = a.[b + (b)] = a.b + a.(-b)$ (বণ্টন ধর্ম)

$\Rightarrow 0 = a.b + a.(-b)$

$a.b \in S \Rightarrow -(a.b) \in S$ (যেহেতু $(S, +)$ দল)

$\Rightarrow -(a.b) + 0 = [-(a.b) + (a.b)] + a.(-b)$

$\Rightarrow -(a.b) = 0 + a.(-b)$ [$(S, +)$ দলের ধর্ম প্রয়োগে]

$\Rightarrow a.(-b) = -(a.b)$

অনুরূপভাবে $0 = 0.b = [a + (-a)].b$

থেকে পাওয়া যাবে $(-a).b = -(a.b)$

(iii) ধরি $n > 0$

$a.(nb) = a.(b + b + \ldots$ n সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$= a.b + a.b) + \ldots$ n সংখ্যক পদ পর্যন্ত (বণ্টন ধর্ম)

$= n(a.b)$

যদি $n < 0$ হয়, ধরি $n = -m$, $m > 0$

প্রথমাংশ থেকে $(ma).b = m(a.b) = a.(mb)$

$$\begin{aligned}(nb).b &= ((-m)\ a).b = m\ [-(a.b)] = (-m)\ (a.b)\\ &= n(a.b)\end{aligned}$$

$n = 0$, (i) থেকে পাওয়া যাবে ঐ সমতা সত্য।

(iv) যদি সম্ভব হয়, মনে করি I ও I' উভয়েই গুণসাপেক্ষে একক উপাদান। ফলে সকল $a \in S$-এর জন্য $a.I = a = I.a$ এবং $a.I' = a = I'.a$ হবে।

প্রথমটি থেকে $I'.I = I' = I.I'$ ও দ্বিতীয়টি থেকে $I.I' = I = I'.I$ হবে।

অতএব, $I = I'$ ও I অনন্য।

যদি $0 = I$ হয় তবে সকল $a \in S$-এর জন্য

$a.0 = a.I$ হবে অর্থাৎ $a = 0$ হবে। ফলে $I \neq 0$

এখানে $(S, +, .)$ প্রকৃতপক্ষে যথার্থ বলয়।

(v) বলয় $(S, +, .)$-এ গুণসাপেক্ষে একক উপাদান I ধরি।

মনে করি, $a \in S$-এর দুটি বিপরীত উপাদান b ও $c \in S$. ফলে $a.b = b.a = I$, $a.c = c.a = I$ হবে।

এখন, $b = b.I = b.(a.c) = (b.a).c = I.c = c$

অতএব ঐ বিপরীত উপাদান অনন্য।

(vi) মনে করি, a, $b \in S$, ফলে $a+b \in S$.

শর্ত অনুযায়ী, $(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a+b$

$\Rightarrow a.a + a.b + b.a + b.b = a+b$ (বন্টন ধর্ম অনুযায়ী)

$\Rightarrow a+a.b + b.a + b = a+b$

$\Rightarrow a.b + b.a = 0$ (দুই অপসারণ ধর্ম প্রয়োগে)

এটি $a = b$-এর ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য, সুতরাং $a.a + a.a = 0$

$\Rightarrow a = -a$

সুতরাং $a.b = -(b.a) = b.a$ হবে ও বলয়টি বিনিময়যোগ্য হবে।

(**মন্তব্য** : এর বিপরীতটি সত্য নয়। $(Z, +, .)$ বিনিময়যোগ্য কিন্তু $a \in Z \not\Rightarrow a^2 = a$

(vii) যেহেতু $(S, +)$ চক্রজ দল ধরি, $S = \langle a \rangle$ হয়। ফলে $x \in S$ হলে

পূর্ণসংখ্যা n পাওয়া যাবে যে, $x = na$ হবে।

অনুরূপভাবে $y \in S$ হলে পূর্ণসংখ্যা m পাওয়া যাবে যে, $y = ma$ হবে।

$$x.y = (na).(ma) = (nm).(a.a) = (mm)\ (a.a)$$
$$= (ma).(na) = y.x \text{ হবে।}$$

ফলে বলয়টি বিনিময়যোগ্য হবে।

উদাহরণ : $S = \left\{\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} : a, b \in Z\right\}$,

ম্যাট্রিক্সের যোগ সাপেক্ষে $(S, +)$ বিনিময়যোগ্য দল ধরে নিয়ে দেখান যে, $(S, +, .)$ [. বলতে ম্যাট্রিক্সের গুণ বুঝাবে] একটি বলয় হবে। বলয়ে একক উপাদান ও শূন্য ভাজক আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

দেওয়া আছে যে $(S, +)$ বিনিময়যোগ্য দল।

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4ac & 0 \\ 0 & 4bd \end{pmatrix} \in S \text{ (এখানে } a, b, c, d \in Z)$$

সংযোগ ধর্ম $(S, .)$-এ সিদ্ধ হবে ম্যাট্রিক্সের ধর্ম অনুযায়ী।

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2f \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2(c+e) & 0 \\ 0 & 2(d+f) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4(ac+ae) & 0 \\ 0 & 4(bd+bf) \end{pmatrix} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4ac & 0 \\ 0 & 4bd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4ac & 0 \\ 0 & 4bf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(ac+ae) & 0 \\ 0 & 4(bd+bf) \end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1) ও (2) থেকে একটি বণ্টন ধর্ম সত্য বলে প্রমাণিত হল। আর একটি বণ্টন ধর্মও এভাবে প্রমাণিত হবে। ফলে $(S, +, .)$ একটি বলয়।

একক উপাদান $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin S$ কেননা $a, b \in Z$ বলে $2a = 1, 2b = 1$ সম্ভব নয়।

$b \neq 0, c \neq 0$ হলে

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ হবে।}$$

অতএব শূন্য ভাজক আছে।

9.3 পূর্ণাধার মণ্ডল (Integral domain)

সংজ্ঞা—বিনিময়যোগ্য বলয় (বা মণ্ডল) $(S, +, .)$-এ যদি গুণসাপেক্ষে একক উপাদান 1 থাকে ও কোন শূন্য ভাজক না-থাকে তবে ঐ বলয়কে পূর্ণাধার মণ্ডল বলা হবে।

$(Z, +, .)$, $(Q, +, .)$, $(R, +, .)$, $(C, +, .)$ পূর্ণাধার মণ্ডল।

কিন্তু $M = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in R\right\}$ ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণসাপেক্ষে পূর্ণাধার মণ্ডল নয়। (যাচাই করুন)

$J = \{a + bi : a, b \in Z)$ স্বাভাবিক যোগ ও গুণ সাপেক্ষে পূর্ণাধার মণ্ডল হবে। (যাচাই করুন)

নিম্ন উপপাদ্যটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ :

উপপাদ্য : একক উপাদান যুক্ত বিনিময়যোগ্য বলয় $(S, +, .)$ পূর্ণাধার মণ্ডল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a.b = a.c \Rightarrow b = c(a, b, c \in S$ ও $a \neq 0)$

(অথবা $a \neq 0$ ও $b.a = c.a \Rightarrow b = c$ বলা যায়)

প্রমাণ : মনে করি $(S, +, .)$ পূর্ণাধার মণ্ডল। ফলে এটি একক উপাদান যুক্ত বিনিময়যোগ্য দল ও শূন্য ভাজক মুক্ত।

ধরি, $a, b, c \in S$ ও $a \neq 0$ এবং $a.b = a.c$

$$\Rightarrow a.b + \{-(a.c)\} = a.c + \{-(a.c)\}$$

$$\Rightarrow a.(b - c) = 0 \text{ (বলয়ের ধর্ম প্রয়োগে)}$$

যেহেতু শূন্য ভাজক মুক্ত ও $a \neq 0$, ফলে $b - c = 0$

$$\Rightarrow (b - c) + c = (0 + c) \Rightarrow b + \{-c + c\} = c$$

$$\Rightarrow b = c$$

বিপরীতক্রমে ধরি একক উপাদানবিশিষ্ট বিনিময়যোগ্য বলয় $(S, +, .)$-এ $a.0 = a.c \Rightarrow b=c$ যেখানে $a,b,c \in S$ ও $a \neq 0$.

ধরি, $a.b = 0$ যেখানে $a, b \in S$ ও $a \neq 0$

$$\Rightarrow a.b = a.0 \Rightarrow b = 0 \text{ প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী।}$$

অতএব, 'a' বাম শূন্য ভাজক নয়।

বলয়ের বিনিময়যোগ্যতা প্রয়োগে দেখানো যায় যে বলয়টি ডান শূন্য ভাজক মুক্ত।

অতএব বলয়টি পূর্ণাধার মণ্ডল।

মন্তব্য ঃ পূর্ণাধার মণ্ডলে গুণসাপেক্ষে দুটি অপসারণ ধর্ম সিদ্ধ হয় বলে কোন কোন গ্রন্থকার পূর্ণাধার মণ্ডলের নিম্ন বিকল্প সংজ্ঞা দিয়ে থাকেন :

একক উপাদানবিশিষ্ট বিনিময়যোগ্য বলয়ে দুটি অপসারণ ধর্ম বজায় থাকলে বলয়টিকে পূর্ণাধার মণ্ডল বলা হবে।

9.4 ক্ষেত্র বা ফিল্ড : সংজ্ঞা ও ধর্ম

সংজ্ঞা—মনে করি অশূন্য সেট F-এ দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' ও '.' সংজ্ঞাত আছে। $(F, +, .)$-কে ক্ষেত্র বলা হবে যদি (1) $(F, +)$ একটি বিনিময়যোগ্য দল হয়, অর্থাৎ

(ক) সকল $a, b \in F$-এর জন্য $a + b \in F$ হয়,

(খ) সকল $a, b, c \in F$-এর জন্য $a + (b + c) = (a + b) + c$,

(গ) এমন উপাদান $0 \in F$ আছে যে সকল $a \in F$-এর জন্য $a + 0 = a = 0 + a$ হয়,

(ঘ) প্রতি $a \in F$-এর জন্য $-a \in F$ আছে যে $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ হয়,

(ঙ) সকল $a, b \in F$-এর জন্য

$a + b = b + a$ হয়।

(2) $(F, .)$ একটি বিনিময়যোগ্য দল যেখানে 0 ব্যতীত সকল উপাদানেরই গুণসাপেক্ষে বিপরীত উপাদান আছে অর্থাৎ (ক) সকল $a, b \in F$-এর জন্য $a.b \in F$

(খ) সকল $a, b, c \in F$-এর জন্য $a . (b . c) = (a . b) . c$ হবে

(গ) এমন উপাদান $1 \in F$ আছে যে সকল $a \in F$-এর জন্য $a.1 = a = 1.a$ হয়।

(ঘ) প্রতি উপাদান a-এর $(a \neq 0)$ জন্য $a' \in F$ আছে যে

$a.a' = 1 = a'.a$ হয়।

(a' কে সাধারণভাবে a^{-1} দ্বারা চিহ্নিত করা হয়)

(ঙ) সকল $a, b \in F$-এর জন্য $a.b = b.a$ হয়

(3) $(F, +, .)$-এ বন্টন ধর্ম বজায় আছে অর্থাৎ সকল $a, b, c \in F$-এর জন্য

$a.(b+c) = a.b + a.c$ সত্য হয়।

উদাহরণ : $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$ ক্ষেত্রের পরিচিত উদাহরণ। $(\mathbb{Z}, +, .)$ ক্ষেত্র নয়।

$S = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ স্বাভাবিক যোগ ও গুণ সাপেক্ষে ক্ষেত্র গঠন করে। লক্ষণীয়, + সাপেক্ষে $0 + 0.\sqrt{5}$ একসম উপাদান ও গুণসাপেক্ষে $1 + 0.\sqrt{5}$ একসম উপাদান হবে। গুণসাপেক্ষে $a + b\sqrt{5}$-এর $(a^2 + b^2 \neq 0)$ বিপরীত উপাদান হল $\dfrac{a - b\sqrt{5}}{a^2 - 5b^2}$ কেননা $a, b \in Q$ ও $a^2 + b^2 \neq 0$ বলে $a^2 - 5b^2 \neq 0$ এবং

$$\frac{(a + b\sqrt{5})(a - b\sqrt{5})}{a^2 - 5b^2} = 1 \text{ হবে।}$$

ধর্ম—**1.** ক্ষেত্র $(F, +, .)$-এ কোন শূন্য ভাজক নেই।

মনে করুন $a(\neq 0) \in F$, ফলে $a^{-1} \in F$।

মনে করুন $a,b \in F$, $a \neq 0$ এবং $a.b = 0$

অতএব, $a^{-1}.(a.b) = a^{-1}.0 \Rightarrow (a^{-1}.a).b = 0$ (সংযোগ ধর্ম)

$\Rightarrow 1.b = 0 \Rightarrow b = 0$

ফলে $a(\neq 0)$ বাম শূন্য ভাজক নয়। গুণ প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে বিনিময়যোগ্যতাকে ব্যবহার করে দেখানো যায় যে, F-এ ডান শূন্য ভাজকও নেই।

অনুসিদ্ধান্ত : সংজ্ঞা অনুযায়ী ক্ষেত্র একক উপাদান বিশিষ্ট এবং গুণসাপেক্ষে বিনিময় ধর্ম বজায় আছে। আমরা প্রমাণ করলাম যে ক্ষেত্র শূন্য ভাজক মুক্ত। ফলে প্রতিটি ক্ষেত্র হবে পূর্ণাধার মণ্ডল।

মন্তব্য : প্রতিটি পূর্ণাধার মণ্ডল কিন্তু ক্ষেত্র নয়। যেমন—$(Z, +, .)$ পূর্ণাধারমণ্ডল, ক্ষেত্র নয়।

ধর্ম—2. প্রতিটি সসীম পূর্ণাধার মণ্ডল ক্ষেত্র হবে।

মনে করি, $(S, +, .)$ একটি সসীম পূর্ণাধার মণ্ডল

অর্থাৎ, $(S, +, .)$ একটি একক উপাদান বিশিষ্ট, শূন্য ভাজক মুক্ত, বিনিময়যোগ্য বলয় এবং ধরি

$S = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ যেখানে, a_0 হল যোগ (+) সাপেক্ষে দল $(S, +)$-এর একসম উপাদান।

এখন গুণ-সাপেক্ষে একক উপাদান I বাদে S-এর অন্য যে কোন উপাদান নেওয়া হল, মনে করি $a_1 \neq I$

ধরি, $S' = \{a_1 . a_1, a_1 . a_2, \cdots . a_1 . a_{n-1}\}$

$(S', .)$-এর আবদ্ধ ধর্ম অনুযায়ী $S' \subset S$. S'-এর উপাদানগুলি সবই ভিন্ন ভিন্ন। কেননা $(S, +, .)$-এ অপসারণ ধর্ম সিদ্ধ হওয়ায় $a_1.a_i = a_1.a_j \Rightarrow a_i = a_j$ যা সত্য নয়।

ফলে $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\} = \{a_1 . a_1, \ a_1 . a_2, \cdots, a_1 . a_{n-1}\}$ হবে।

$(S, +, .)$-এ একক উপাদান I এবং $I \in S'$. ফলে এমন a_j থাকবে যে $a_1.a_j = I = a_j.a_1$ হবে (গুণ সাপেক্ষে বিনিময় ধর্ম প্রয়োগে)। ফলে প্রতি অ-শূন্য $a_1 \neq I$-এর গুণসাপেক্ষে বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব প্রমাণিত হল। আবার I নিজেই নিজের বিপরীত উপাদান। সুতরাং গুণ (.) সাপেক্ষে প্রতি অশূণ্য-উপাদানের বিপরীত উপাদান S-এ রয়েছে।

অতএব $(S, +, .)$ একটি ক্ষেত্র।

ধর্ম—3. ক্ষেত্র $(F, +, .)$-এ সমীকরণ $ax + b = c$ $(a, b, c \in F, a \neq 0)$-এর অনন্য সমাধান রয়েছে।

$(ax + b) + (-b) = c + (-b)$ [$(F, +)$ দল বলে $b \in F \Rightarrow -b \in F$]

$\Rightarrow a.x = c - b$ ($(F, +)$-এর সংযোগ ধর্ম প্রয়োগে)

$\Rightarrow a^{-1}.(a.x) = a^{-1}.(c - b)$ [$a \in F$ ও $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in F$]

$\Rightarrow (a^{-1}.a).x = a^{-1}.c - a^{-1}.b$ (সংযোগ ধর্ম ও বণ্টন ধর্ম)

$\Rightarrow 1.x = a^{-1}.c - a^{-1}.b$ ($(F, .)$-এর একক উপাদান।)

$\Rightarrow x = a^{-1}.c - a^{-1}.b \in F$

যদি সম্ভব হয়, মনে করি সমাধানটি অনন্য নয় এবং p ও q দুটি সমাধান।

ফলে $a.p + b = a.q + b \Rightarrow a.p = a.q$ ($(E, +)$-এর বাম অপসারণ ধর্ম প্রয়োগে)

$\Rightarrow p = q$ যেহেতু $a \neq 0$, গুণসাপেক্ষে বাম অপসারণ ধর্ম প্রয়োগে।

অতএব সমাধান অনন্য।

ধর্ম—4. ক্ষেত্র $(F, +, .)$-এ $a, b, c, d \in F$ ও $b \neq 0, d \neq 0$ দেওয়া আছে।

(i) $(a.b^{-1}).(c.d^{-1}) = (a.c).(bd)^{-1}$

(ii) $(a.b^{-1}) + (c.d^{-1}) = (ad + bc).(bd)^{-1}$

(i) $(a.b^{-1}).(c.d^{-1}) = a.(b^{-1}.c).d^{-1}$ ($(F, .)$-এর সংযোগ ধর্ম)

$= a.(c.b^{-1}).d^{-1}$ ($(F, .)$-এর বিনিময় ধর্ম)

$= (a.c).(b^{-1}.d^{-1})$ ($(F, .)$-এর সংযোগ ধর্ম)

$= (a.c).(db)^{-1}$ (বিপরীত উপাদানের ধর্ম)

$= (a.c).(b.d)^{-1}$ ($(F, .)$-এর বিনিময় ধর্ম)

(ii) $a.b^{-1} + c.d^{-1} = a.(d.d^{-1}).b^{-1} + c.(b.b^{-1}).d^{-1}$ (যেহেতু $dd^{-1} = 1 = b.b^{-1}$)

$= (a.d).(b.d)^{-1} + (b.c).(b.d)^{-1}$ [$(F, .)$-এর সংযোগ ধর্ম ও বিপরীত উপাদানের ধর্ম]

$= (a.d + b.c).(b.d)^{-1}$ (বণ্টন ধর্ম)

ধর্ম—5. ক্ষেত্র $(F, +, .)$-এ $a, b \in F$ এবং $a^2 = b^2 \Rightarrow$ হয় $a = b$ বা $a = -b$।

$a^2 = b^2 \Rightarrow a.a = b.b \Rightarrow a.a - a.b + a.b - b.b = 0$

(ক্ষেত্রর ধর্ম অনুযায়ী ও 0, + সাপেক্ষে একসম উপাদান)

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow a.(a - b) + b.(a - b) = 0 \\ &\Rightarrow (a + b).(a - b) = 0 \end{aligned}\right\} \text{বণ্টন ধর্ম প্রয়োগে}$$

যেহেতু $(F, +, .)$ শূন্য ভাজক মুক্ত, ফলে

হয়, $a + b = 0$ বা, $a - b = 0$ হবে।

প্রথমটি থেকে $a = -b$ ও দ্বিতীয়টি থেকে $a = b$ পাই।

ধর্ম—6. ক্ষেত্র $(F, +, .)$-এ সকল $a, b \in F$-এর জন্য $(a + b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$ হবে।

$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a.a + a.b + b.a + b.b$ (বণ্টন ধর্ম প্রয়োগে)

$= a^2 + 2(a.b) + b^2$ (যেহেতু $a.b = b.a$)

মন্তব্য : পাঠক-পাঠিকারা স্কুল বীজগণিতে ধর্ম 3 – 6-এর বহুল প্রয়োগ দেখেছেন। $(R, +, .)$ ক্ষেত্র বলেই এগুলি সম্ভব হয়েছে। স্নাতক স্তরে চিরায়ত বীজগণিতে ম্যাট্রিক্স-এর ক্ষেত্রে এর ব্যতিক্রম দেখেছেন, কারণ—বর্গ ম্যাট্রিক্স-এর সেট যোগ ও গুণ সাপেক্ষে ক্ষেত্র গঠন করে না। ফলে $ax + b = c$ ধরণের সমীকরণের সমাধা যে সংশ্লিষ্ট সেটটির বীজগাণিতিক কাঠামোর উপর নির্ভরশীল এটা সুস্পষ্ট হল।

উদাহরণ—(i) দেখান যে, 5 ভাজকে অবশিষ্ট গুলির সেট $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ $(= S)$ যোগ ও গুণসাপেক্ষে ক্ষেত্র গঠন করে কিন্তু 4 ভাজকে অবশিষ্টগুলির সেট $\{0, 1, 2, 3\}$ ঐ দুই প্রক্রিয়া সাপেক্ষে ক্ষেত্র গঠন করে না।

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

[উক্ত যোগ প্রক্রিয়াকে 'যোগ মডুলো 5'$(+_5)$ বলা হয়—এর অর্থ দুটি সংখ্যার যোগফল থেকে 5 বাদ দিলে অবশিষ্টাংশকে গ্রহণ করা হবে। অনুরূপভাবে গুণ প্রক্রিয়াকে 'গুণ মডুলো 5'$(\times_5)$ বলা হয়—এর অর্থ দুটি সংখ্যার গুণফলকে 5 দিয়ে ভাগ করলে অবশিষ্টাংশকে গ্রহণ করা হবে।]

$(S, +_5)$ ও $(S, \times_5)$-এ আবদ্ধ ধর্ম ও সংযোগ ধর্ম বজায় আছে, এটা দুই সারণী থেকে পরিষ্কার। যোগ সাপেক্ষে 0 ও গুণসাপেক্ষে 1 একসম উপাদান। সারণী থেকে সুস্পষ্ট যে যোগ সাপেক্ষে 0 ও গুণসাপেক্ষে 1 একসম উপাদান। সারণী থেকে সুস্পষ্ট যে যোগ সাপেক্ষে 0, 1, 2, 3, 4-এর বিপরীত উপাদানগুলি হল যথাক্রমে 0, 4, 3, 2, 1 এবং গুণসাপেক্ষে 1, 2, 3, 4-এর বিপরীত উপাদানগুলি হল যথাক্রমে 1, 3, 2, 4। উভয়ক্ষেত্রেই বিনিময় ধর্ম বিদ্যমান। বণ্টন ধর্মও যে বজায় আছে এটি দেখানো যায়।

অতএব $(S, +_5, X_5)$ একটি ক্ষেত্র হবে।

কিন্তু $(S, +_4, X_4)$, $S = \{0, 1, 2, 3\}$, ক্ষেত্র গঠন করে না। এখানে $2X_42 = 0$, অতএব $(S, +_4, X_4)$ শূন্য ভাজক মুক্ত নয়। ফলে এটি ক্ষেত্র হবে না।

মন্তব্য : দেখানো যায় যে $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ নিলে $(\mathbb{Z}_n, +_n, X_n)$ ক্ষেত্র হবে একমাত্র যদি n মৌলিক সংখ্যা হয়।

2. মনে করুন S, বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে সংজ্ঞাত ও সন্তত অপেক্ষকসমূহের সেট। এই সেটে যোগ প্রক্রিয়া (+) ও গুণ প্রক্রিয়া (.) নিম্নভাবে সংজ্ঞাত ঃ

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

ও $$(fg)(x) = f(x)\, g(x),\ (cf)(x) = cf(x)$$

যেখানে, $x \in [a, b]$ ও $c \in \mathbb{R}$.

$(S, +, .)$ ক্ষেত্র হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

I$(S, +)$ পরীক্ষা করা যাক।

আবন্ধ ধর্ম, সংযোগ ধর্ম ও বিনিময় ধর্ম প্রযোজ্য হবে। সকল $x \in [a,b]$-এর জন্য $\theta(x) = 0$ সন্তত অপেক্ষকটি যোগ সাপেক্ষে একসম উপাদান। আবার প্রতি $f(x) \in S$-এর ক্ষেত্রে $-f(x)$ হল যোগ সাপেক্ষে $f(x)$-এর বিপরীত উপাদান। $(S, +)$ বিনিময়যোগ্য দল হবে।

II $(S, .)$ পরীক্ষা করা যাক্।

আবন্ধ ধর্ম, সংযোগ ধর্ম ও বিনিময় ধর্ম প্রযোজ্য হবে। সকল $x \in [a, b]$-এর জন্য $I(x) = 1$ সন্তত অপেক্ষকটি গুণসাপেক্ষে একসম উপাদান। $f(x) = 0$ ছাড়া সব $f(x) \in S$-এর বিপরীত $\dfrac{1}{f(x)} \in S$ আছে।

III বণ্টন ধর্ম বিদ্যমান কেননা $f, g, h \in S$-এর ক্ষেত্রে

$$\begin{aligned}[f.(g+h)]\ (x) &= f(x).[(g+h)\ (x)] \\ &= f(x).[g(x) + h(x)] \\ &= f(x).g(x) + f(x).h(x) \\ &= (fg)(x) + (fh)(x) \text{ হবে।}\end{aligned}$$

অনুরূপভাবে অপর বণ্টন ধর্মও প্রযোজ্য হবে। ফলে $(S, +, .)$ একক উপাদান যুক্ত বিনিময়যোগ্য বলয়। কিন্তু $(S, +, .)$ শূন্যভাজক মুক্ত নয়, কেননা

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - x, 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ 0, \frac{1}{3} < x \le 1 \end{cases} \quad \text{ও } g(x) = \begin{cases} 0, 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ x - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < x \le 1 \end{cases}$$

দুটি অশূণ্য সন্তত অপেক্ষক হলেও $(fg)\ (x) = 0,\ 0 \le x \le 1$ ফলে $(S, +, .)$ ক্ষেত্র নয়, পূর্ণাধার মণ্ডলও নয়।

9.5 উপবলয়/উপমণ্ডল ও উপক্ষেত্র

আমরা উপদলের আলোচনায় একটি অ-শূণ্য সেটে সংজ্ঞাত দ্বিপদ প্রক্রিয়াকে তার অ-শূণ্য উপসেটে 'অংশ' (restriction) হিসাবে গণ্য করার বিষয়টি বলেছি। এখানে সেই ধারণারই পুনরাবৃত্তি করা হচ্ছে।

সংজ্ঞা—1. $(S, +, .)$ প্রদত্ত বলয় (মণ্ডল) এবং T, S-এর অশূণ্য উপসেট। যদি $(T, +)$ উক্ত দল S-এর উপদল হয় এবং T যদি উক্ত গুণণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবন্ধ হয় অর্থাৎ যদি $a, b \in T \Rightarrow a.b \in T$, তবে $(T, +, .)$-কে বলয় $(S, +, .)$-এর উপবলয় বলা হবে।

সংজ্ঞা—2. $(F, +, .)$ প্রদত্ত ক্ষেত্র এবং T, S-এর অশূণ্য উপসেট। যদি $(T, +, .)$, F-এর উপবলয় হয় এবং F-এর গুণসাপেক্ষে একক উপাদান $I \in T$ হয় ও প্রতি $a(\ne 0) \in T \Rightarrow a^{-1} \in T$ হয়, তবে $(T, +, .)$ কে ক্ষেত্র $(F, +, .)$-এর উপক্ষেত্র বলা হবে।

মন্তব্য : উপবলয় ও উপক্ষেত্রর সংজ্ঞা ভিন্ন ভাবেও দেওয়া যায়—

$(S, +, .)$ প্রদত্ত বলয় এবং T, S-এর অশূণ্য উপসেট। যদি T, S-এ সংজ্ঞাত দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া (যোগ ও গুণ) সাপেক্ষে বলয় হয়, তবে $(T, +, .)$ কে প্রদত্ত বলয়ের উপবলয় বলা হবে।

$(F, +, .)$ প্রদত্ত ক্ষেত্র এবং T, F-এর অশূন্য উপসেট। যদি T, F-এ সংজ্ঞাত দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া (যোগ ও গুণ) সাপেক্ষে ক্ষেত্র হয়, তবে $(T, +, .)$ কে প্রদত্ত ক্ষেত্রের উপক্ষেত্র বলা হবে।

উদাহরণ : $(E, +, .)$ বলয় $(Z, +, .)$-এর উপবলয়। $(Q, +, .)$ ক্ষেত্র $(R, +, .)$-এর উপক্ষেত্র।

উপবলয় ও উপক্ষেত্র হবার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত ঃ

একক 7-এ উপপাদ্য 1(7.3)-এ উপদল হবার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত আমরা আলোচনা করেছি। তারই উপর ভিত্তি করে নিম্ন উপপাদ্য দুটি বিবৃত করা হচ্ছে ঃ

উপপাদ্য 1. $(S, +, .)$ প্রদত্ত বলয় এবং T, S-এর অশূণ্য উপসেট। ঐ দুই দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে T, প্রদত্ত বলয়ের উপবলয় হবে যদি ও কেবলমাত্র যদি $a, b \in T \Rightarrow a - b \in T$ ও $a.b \in T$ হয়।

উপপাদ্য 2. $(F, +, .)$ প্রদত্ত ক্ষেত্র এবং T, F-এর অশূণ্য উপসেট। ঐ দুই দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে T, প্রদত্ত ক্ষেত্রের উপক্ষেত্র হবে যদি ও কেবলমাত্র যদি $a, b \in T \Rightarrow a - b \in T$ ও $a \in T$, $b \in T - \{0\} \Rightarrow a.b^{-1} \in T$ হয়।

উদাহরণ 1. $S = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} : x, y, z, \omega \in Z\right\}$, ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণসাপেক্ষে বলয় গঠন করে দেওয়া আছে।

$T = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in Z\right\}$ ও $U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in Z\right\}$ হলে T ও U, S-এর উপবলয় হবে কিনা নির্ধারণ করুন।

এখানে $T \neq \phi$, $U \neq \phi$ কেননা $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T \cap U$, $T \subset S, U \subset S$ হবে।

ধরি, $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ যেখানে $a_k, b_k, c_k \in Z, (k = 1, 2)$

$M - N = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & c_1 - c_2 \end{pmatrix} \in T$ যেহেতু $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$, $c_1 - c_2$ সকলেই পূর্ণসংখ্যা

$M . N = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix} \in T$ যেহেতু a_1a_2, $a_1b_2 + b_1c_2$, $c_1c_2 \in Z$

ফলে T, S-এর উপবলয় হবে।

$P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}$ যেখানে $a_k, b_k, c_k \in Z (k = 1, 2)$

$P - Q = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ c_1 - c_2 & 0 \end{pmatrix} \in U$, $P.Q = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 \\ c_1a_2 & c_1b_2 \end{pmatrix} \notin U$

ফলে U উপবলয় হবে না।

(2) দেখান যে, $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$ যোগ ও গুণ সাপেক্ষে $(\mathbb{R}, +, .)$-এর উপক্ষেত্র গঠন করে।

এখানে $S \neq \phi$ ও $S \subset \mathbb{R}$ হয়। $\left(0+0.\sqrt{2} \in S\right)$

মনে করি $\alpha = a + b\sqrt{2},\ \beta = c + d\sqrt{2}$ যেখানে $a, b, c, d \in Q$

$\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)\ \sqrt{2} \in S$ হবে।

যখন, $c^2 + d^2 \neq 0,\ \alpha.\beta^{-1} = \dfrac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{c^2 - 2d^2}$ (যেহেতু $c, d \in Q,\ c^2 - 2d^2 \neq 0$)

$$\Rightarrow \alpha.\beta^{-1} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{\sqrt{2}\,(bc - ad)}{c^2 - 2d^2} \in S$$

অতএব S, $(\mathbb{R}, +, .)$-এর উপক্ষেত্র হবে।

(3) যদি $(A, +, .)$ একটি বলয় এবং 'a', A-এর নির্দ্দিষ্ট উপাদান হয় ও $S = \{x \in A : x.a = 0\}$ হয়, তবে, S, A-এর উপবলয় হবে।

$$0 \in A \text{ ও } 0.a = 0 \Rightarrow S \neq \phi$$

আরও $S \subset A$. মনে করি $p, q \in S$.

$(p - q).a \ = p.a - q.a$ (বন্টন ধর্ম ও বলয়ের ধর্ম)

$\qquad = 0 - 0 = 0 \Rightarrow p - q \in S.$

$(p.q).a = p.(q.a)$ (সংযোগ ধর্ম) $= p.0 = 0$

ফলে $p, q \in S \Rightarrow p - q \in S$ ও $p.q \in S$

অতএব S, A-এর উপবলয় হবে।

উপবলয় ও উপক্ষেত্রসমূহের ছেদ, সংযোগ

উপদলের এককে আলোচনা হয়েছে যে উপদলসমূহের ছেদ উপদল হবে কিন্তু উপদলসমূহের সংযোগ উপদল না-ও হতে পারে। একই পদ্ধতি ও সূত্রায়ণ এক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

মনে করি H ও K বলয় $(S, +, .)$-এর উপবলয়। $0 \in H$ ও $0 \in K$, ফলে $0 \in H \cap K$ (0 হল $(S, +)$-এর একসম উপাদান) ও $H \cap K \neq \phi$

ধরি, $a, b \in H \cap K$, ফলে $a, b \in H$ ও $a, b \in K$ হবে।

যেহেতু H ও K উপবলয়, অতএব

$a - b,\ a.b \in H$ ও $a - b,\ a.b \in K$ হয়

$\Rightarrow\ a - b,\ a.b \in H \cap K$ এবং উপবলয় হবার পর্যাপ্ত শর্ত অনুযায়ী $H \cap K$ উপবলয় হবে।

মনে করি, P ও Q ক্ষেত্র $(F, +, .)$-এর উপক্ষেত্র।

$$0, 1 \in P,\ \ 0, 1 \in Q \Rightarrow P \cap Q \neq \phi.$$

মনে করি, $p, q \in P \cap Q$, ফলে $p, q \in p$ ও $p,q \in Q$ যেহেতু P ও Q উপক্ষেত্র, অতএব,

$$p - q \in P,\ p - q \in Q \text{ এবং } q \neq 0 \text{ হলে } p.q^{-1} \in P,\ p.q^{-1} \in Q$$

$$\Rightarrow p - q \in P \cap Q \text{ এবং } q \neq 0 \text{ হলে } p.q^{-1} \in p \cap Q \text{ হবে।}$$

উপক্ষেত্র হবার পর্যাপ্ত শর্ত-অনুযায়ী $P \cap Q$ উপক্ষেত্র হবে।

9.6 সারাংশ

এই এককে দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া বিশিষ্ট বীজগাণিতিক কাঠামোর প্রবর্তন করা হয়েছে—কোন্ কোন্ শর্তে এটি বলয়, পূর্ণাধার মণ্ডল ও ক্ষেত্র হবে সেগুলি বিবৃত হয়েছে। কাঠামোগুলির উল্লেখযোগ্য কিছু ধর্ম বিবৃত হয়েছে। উপবলয় ও উপক্ষেত্র হবার শর্ত নিরূপিত হয়েছে।

9.6 প্রশ্নাবলী

1. যদি $S = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}$ হয়, তবে ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণ সাপেক্ষে এটি ক্ষেত্র গঠন করে কিনা পরীক্ষা করুন।

2. মূলদ সংখ্যার সেট Q-তে দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া o ও * নিম্নভাবে সংজ্ঞাত আছে।

   $a, b \in Q$-এর জন্য $aob = a + b - 1$, $a*b = a + b - ab$

   $(Q, o, *)$ ক্ষেত্র হবে কিনা পরীক্ষা করুন।

3. A হল R-এ সংজ্ঞাত দ্বিতীয় ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্সগুলির সেট। ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণ সাপেক্ষে A বলয় গঠন করে ধরে নিয়ে $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ উপবলয় গঠন করবে কিনা পরীক্ষা করুন।

4. মনে করুন $(A, +, .)$ একটি বলয়। যদি $Z(A) = \{x \in A : x.y = y.x$ সকল $y \in A\}$ হয়, দেখান যে, $Z(A)$, A-এর উপবলয় হবে।

5. R-এর নিম্নোক্ত উপসেটগুলি যোগ ও গুণ সাপেক্ষে বলয় গঠন করে কিনা পরীক্ষা করুন। যদি বলয় হয়, তবে পূর্ণাধার মণ্ডল বা ক্ষেত্র হবে কিনা পরীক্ষা করুন ঃ

   (i) $\{3m : m \in Z\}$ (ii) $\{4k+1 : k \in Z\}$

6. নিম্ন সেটগুলি ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণ সাপেক্ষে বলয় গঠন করে কিনা পরীক্ষা করুন। বলয় হলে পূর্ণাধার মণ্ডল ও ক্ষেত্র হবে কিনা পরীক্ষা করুন ঃ

   (i) $M_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}\right\}$ (ii) $M_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q}\right\}$

(iii) $M_3 = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}\right\}$ (iv) $M_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$

(v) $M_5 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{E}\right\}$

7. $S = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$, যেখানে যোগ (+) ও গুণ (.) প্রক্রিয়া নিম্নভাবে সংজ্ঞাত আছে : $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ও $(a, b).(c, d) = (ac, bd)$, দেখান যে, $(S,+,.)$ বিনিময়যোগ্য, একক উপাদানবিশিষ্ট বলয়। এটি পূর্ণাধার মণ্ডল হবে কি? যুক্তিসহ উত্তর দিন।

৯.৪ উত্তরের সংকেত

2. o সাপেক্ষে 1 একসম উপাদান ও a-এর বিপরীত $2 - a$ হবে। * সাপেক্ষে 0 (শূন্য) একসম উপাদান ও a-এর বিপরীত $\frac{a}{a-1}$ হবে।
3. উপবলয়ের পর্যাপ্ত শর্ত সিদ্ধ হবে কিনা দেখুন।
5. (i) পূর্ণাধার মণ্ডল নয় (ii) বলয় নয়।
6. (i) পূর্ণাধার মণ্ডল কিন্তু ক্ষেত্র নয়। (ii) বলয়, পূর্ণাধার মণ্ডল নয়, (iii) বলয় নয়, (iv) ক্ষেত্র হবে না, (v) বলয়, পূর্ণাধার মণ্ডল নয়।
7. শূণ্য ভাজক আছে।

একক 10 □ আইগেন মান ও আইগেন ভেক্টর (Eigen Value and Eigen Vector)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

যে কোন ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্সের আইগেন (যথার্থ) মান ও আইগেন (যথার্থ) ভেক্টর নিরূপণ বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ কেননা বহুক্ষেত্রে এর প্রয়োগ রয়েছে। একটি দ্বিতীয় মাত্রার সমস্বত্ব বাস্তব দ্বিঘাত আকারের চরিত্র নিরূপণ এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য। এই এককে তৃতীয় ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান ও আইগেন ভেক্টর, সম্পর্কিত ধর্মাবলী আলোচিত হবে।

10.2 আইগেন মান ও আইগেন ভেক্টর ঃ সংজ্ঞা ও ধর্ম

সংজ্ঞা—**1.** ক্ষেত্র $(F, +, .)$-এ সংজ্ঞাত A একটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স। $det\,(A - \lambda I_n)$ কে বলা হবে A ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য বা স্বভাবজ (Characteristic) বহুপদরাশি এবং $det\,(A - \lambda I_n) = 0$ কে বলা হবে A ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য বা স্বভাবজ সমীকরণ।

যদি $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ হয়, তবে

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots (1)$$

হল উক্ত বৈশিষ্ট্য বা স্বভাবজ সমীকরণ।

সংজ্ঞা 2. সমীকরণ (1) -এর বীজগুলিকে বলা হবে ম্যাট্রিক্স A -এর আইগেন (যথার্থ) মান। (এই মানগুলি অবশ্য F -এর উপাদান না-ও হতে পারে)।

মন্তব্য : পাঠ্যক্রমের নির্দেশ অনুসারে পরবর্তী ক্ষেত্রে $n = 2, 3$ নেওয়া হবে।

উদাহরণ : $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$$

$$det\ (A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 1, -2$$

অতএব ঐ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মানগুলি $0, 1, -2$ হবে।

আইগেন ভেক্টর

সংজ্ঞা 3. A প্রদত্ত n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স। যদি X, n ক্রমের অশূণ্য স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স (Column matrix) হয় যে $AX = \lambda X$ হবে, সেক্ষেত্রে X কে বলা হবে আইগেন মান λ -এর সঙ্গে সম্পর্কিত বা অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর।

উদাহরণ : 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 5, -2 \text{ (যাচাই করুন)}$$

ধরি $\lambda = 5$, $AX = 5X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 + 4x_2 = 5x_1$ ও $3x_1 + 2x_2 = 5x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$

অতএব $x_1 = x_2 = k\ (\neq 0)$ সমাধান হবে।

ফলে $\lambda = 5$ এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in R - \{0\}$

ধরি $\lambda = -2$ $AX = -2X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 + 4x_2 = -2x_1$ ও $3x_1 + 2x_2 = -2x_2 \Rightarrow 3x_1 + 4x_2 = 0$

অতএব $x = -4p,\ x_2 = 3p$ যেখানে $p \in R - \{0\}$

ফলে $\lambda = -2$ এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর $p\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},\ p \in R - \{0\}$

উদাহরণ 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_3) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (3-\lambda)\ (1-\lambda)\ (2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2, 3.$

$\boldsymbol{\lambda = 1},\ AX = \lambda X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = x_1,\ 2x_2 - x_3 = x_2,\ 3x_3 = x_3$

$\Rightarrow x_2 = x_3 = 0,\ x_1 = k \in R - \{0\}$

$\lambda = 1$ -এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর $k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ k \in R - \{o\}$ হবে।

$\boldsymbol{\lambda = 2},\ AX = 2X \Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 2x_1,\ 2x_2 - x_3 = 2x_2,\ 3x_2 = 2x_3$

$\Rightarrow x_3 = 0,\ x_1 = -x_2 = m \in R - \{0\}$

$\lambda = 2$ -এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর $m\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ m \in R - \{0\}$

$\lambda = 3,\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3x_1,\ 2x_2 - x_3 = 3x_2,\ 3x_3 = 3x_3$

$\Rightarrow x_3 = k,\ x_2 = -k,\ x_1 = \frac{3k}{2},\ k \in R - \{0\}$

ফলে $\lambda = 3$ -এর অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর $k\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ k \in R - \{0\}$ বা $l\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\ l \in R - \{0\}$

আইগেন মানের কিছু ধর্ম

1. A যদি বিশিষ্ট (Singular) ম্যাট্রিক্স হয়, তবে 0 ঐ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান হবে।

যেহেতু A বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স ফলে $\det A = 0 = |A|$

A ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য বা স্বভাবজ সমীকরণের আকার $det\ (A - \lambda I_n) = 0$

$(-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + \dots$

$\dots + (-1)^1\lambda$ $|det\ A$ -এর $(n-1)\times(n-1)$ ক্রম বিশিষ্ট প্রধান মাইনরগুলির সমষ্টি$|$ $+|A| = 0$

যেহেতু $\det A = |A| = 0$, সমীকরণটির অবশ্যই একটি বীজ শূণ্যমান বিশিষ্ট।

মন্তব্য : পাঠক / পাঠিকারা $n = 3$ -এর ক্ষেত্রটি যাচাই করে দেখুন।

2. $A = (a_{ij})_{3\times3}$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$ ম্যাট্রিক্সের আইগেনমান $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ হলে

$a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $A_{11} + A_{22} + A_{33} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$ এবং $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ হবে।

A -এর বৈশিষ্ট্য বা স্বভাবজ সমীকরণ $|A - \lambda I_3| = 0$

$\Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda(A_{11} + A_{11} + A_{33}) + |A| = 0$

এই সমীকরণের বীজ তিনটি λ_1, λ_2 ও λ_3 হলে

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + b_{22} + a_{33}$, $\sum\lambda_1\lambda_2 = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ এবং $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A|$ হবে।

3. কর্ণ-ম্যাট্রিক্সের আইগেন মানগুলি হবে প্রধান কর্ণের পদগুলি।

এক্ষেত্রে $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, ফলে

$|A - \lambda I_n| = 0 \Rightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda = a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ হবে।

4. A ও P উভয়েই n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং P অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স। A এবং $P^{-1}AP$ -এর আইগেন মানগুলি একই হবে।

$|P^{-1}AP - \lambda I_n| = |P^{-1}AP - \lambda I_n P^{-1}P|$

$$= |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| = |P^{-1}||A - \lambda I_n||P|$$

$$= |A - \lambda I_n| \text{ (যেহেতু } |P^{-1}||P| = |P^{-1}P| = 1)$$

যেহেতু স্বভাবজ বহুপদরাশিদ্বয় একই, ফলে বীজগুলিও একই হবে।

5. λ যদি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স A -এর আইগেন মান হয়, তবে λ^{-1} হবে A^{-1} –এর আইগেন মান।

শর্তানুসারে $|A - \lambda I_n| = 0$.

$$|A^{-1} - \lambda^{-1} I_n| = \frac{1}{\lambda^n} |\lambda A^{-1} - I_n|$$

$$= \frac{1}{\lambda^n |A|} |A||\lambda A^{-1} - I_n|$$

$$= \frac{1}{\lambda^n |A|} |A(\lambda A^{-1} - I_n)| = \frac{(-1)^n}{\lambda^n |A|} |A - \lambda I_n| = 0$$

অতএব λ^{-1} হচ্ছে A^{-1} -এর আইগেন মান।

6. বাস্তব প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের আইগেন মানগুলি সবই বাস্তব।

7. বাস্তব বি-প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের আইগেন মানগুলি হয় কাল্পনিক অথবা শূণ্য।

10.2.1 ক্যালি হ্যামিল্টন উপপাদ্য (Cay ley Hamilton theorem)

যে কোন বর্গ-ম্যাট্রিক্স A -এর বৈশিষ্ট্য বা স্বভাবজ সমীকরণটি A দ্বারা সিদ্ধ হয়।

উদাহরণ 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$: ক্যালি-হ্যামিল্টন উপপাদ্যর যথার্থতা যাচাই কর ও ইহা হইতে A^{-1} নির্ধরণ কর।

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 16 = 0$$

$$A^2 - 16I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - 16\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{0} \text{ (দ্বিতীয় ক্রমের শূণ্য ম্যাট্রিক্স)}$$

অতএব A তার বৈশিষ্ট্য বা স্বভাবজ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

যেহেতু $|A| \neq 0$ A^{-1} -এর অস্তিত্ব আছে। ফলে $A^{-1}(A^2 - 16I_2) = A^{-1}\underline{0}$

$$\Rightarrow A - 16A^{-1} = \underline{0} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{16} A = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$: A^{-1} নির্ধারণ করুন।

A -র বৈশিষ্ট্য বা স্বভাবজ সমীকরণ $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0$

ক্যালি-হামিল্টন উপপাদ্য অনুসারে $A^3 + A^2 - 2A = 0_3$

$|A| \neq 0$ (যাচাই করুন), ফলে A^{-1} -এর অস্তিত্ব আছে।

$$A^{-1}(A^3 + A^2 - 2A) = A^{-1}0_3 \Rightarrow A^2 + A = 2I_3$$

$$\Rightarrow A^{-1}(A^2 + A) = A^{-1}(2I_3)$$

$$\Rightarrow A + I_3 = 2A^{-1}$$

$$\Rightarrow 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

3. যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, A^{50} নির্ধারণ করুন।

$det\,(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$ (যাচাই করুন)

ক্যালি – হামিল্টন উপপাদ্য অনুযায়ী

$-A^3 + A^2 + A - I_3 = O_3$ (তৃতীয়ক্রমের শূণ্য ম্যাট্রিক্স)

$$\Rightarrow A^3 = A^2 + A - I_3 \Rightarrow A^4 = 2A^2 - I_3$$

$$\Rightarrow A^6 = 2A^4 - A^2 = 3A^2 - 2I_3$$

$$\Rightarrow A^{10} = 6A^4 - 7A^2 + 2I_3 = 5A^2 - 4I_3$$

$$\Rightarrow A^{20} = 25A^4 - 40A^2 + 16I_3 = 10A^2 - 9I_3$$

$$\Rightarrow A^{40} = 20A^2 - 19\,I_3$$

$$\Rightarrow A^{50} = A^{40}\,A^{10} = 25A^2 - 24I_3$$

$$= \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 25 & 25 & 0 \\ 25 & 0 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 25 & 1 & 0 \\ 25 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.2.2. আইগেন মান সম্পর্কিত ধর্মের প্রয়োগ

পাঠক-পাঠিকাদের কাছে আইগেন মান-এর গুরুত্ব তুলে ধরবার জন্য অর্থাৎ তার প্রয়োগের ব্যাপ্তি অনুধাবনের জন্য নিম্ন দুটি বিষয়ের উল্লেখ করা হয়েছে :

1. বাস্তব দ্বিঘাত আকৃতির প্রকৃতি নির্ধারণ :

x_1, x_2, x_3 বাস্তব চলরাশি হলে

$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1$ । বহুপদী রাশিমালাকে বাস্তব দ্বিঘাত আকার বলা হবে যদি সব a_{ij} বাস্তব মান বিশিষ্ট হয়।

স্পস্ট যে $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ হলে ঐ রাশির মান শূণ্য হবে। কিন্তু যদি সকল $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ মানে $F > 0$ এবং $(x_1,x_2x_3) = (0,0,0)$ হলে $F = 0$ হয়, তবে F -কে **সুনির্দিষ্ট ধনাত্মক দ্বিঘাত আকৃতি** বলা হবে। কিন্তু যদি সকল $(x_1,x_2x_3) \neq (0,0,0)$ মানে $F \geq 0$ হয়, তবে F কে সুনিদিষ্ট প্রায় ধনাত্মক দ্বিঘাত আকৃতি বলা হবে।

যদি সকল $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0, 0,)$ মানের ক্ষেত্রে $F < 0$ ও $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ হলে $F = 0$ হয়, তবে F কে সুনির্দিষ্ট ঋণাত্মক দ্বিঘাত আকৃতি বলা হবে। অনুরুপভাবে সকল $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0,)$ মানের ক্ষেত্রে $F \leq 0$ হলে F কে সুনির্দিষ্ট প্রায় ঋণাত্মক দ্বিঘাত আকৃতি বলা হবে। অন্যাথায় $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ এমন কিছু ক্ষেত্রে $F \geq 0$ আর অপর কিছু ক্ষেত্রে $F \leq 0$ হলে ঐ দ্বিঘাত আকৃতিকে অনির্দিষ্ট দ্বিঘাত আকৃতি বলা হবে।

যদি $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (যেখানে $a_{ij} = a_{ji}$ বা $A^T = A$)

এবং $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ধরা হয়, তবে $F = X^T AX$ লেখা যাবে।

ধর্ম 1. F সুনির্দিষ্ট ধনাত্মক (ঋণাত্মক) আকার বলে গণ্য হবে যদি A -এর আইগেন মানগুলি সবই ধনাত্মক (ঋণাত্মক) হয়।

ধর্ম 2. F সুনির্দিষ্ট প্রায় ধনাত্মক (ঋণাত্মক) আকার বলে গণ্য হবে যদি A -এর আইগেনগুলি অঋণাত্মক (অধনাত্মক) ও কমপক্ষে একটি আইগেন মান 0 হয়।

ধর্ম 3. F অনির্দিষ্ট হবে যদি A -এর আইগেন মানগুলির মধ্যে কমপক্ষে একটি ধনাত্মক ও কমপক্ষে একটি ঋণাত্মক হয়।

উদাহরণ : 1. $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz$ -এর প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ এবং } |A - \lambda I_3| = 0 \Rightarrow \lambda = 1,3,3 \text{ (যাচাই করুন)}$$

সব আইগেন মান ধনাত্মক ও প্রদত্ত দ্বিঘাত আকারটি সুনির্দিষ্ট ধনাত্মক।

2. $2x^2 + 8xy - 12xz + 2y^2 - 12yz - 15z^2$ -এর প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -6 \\ -6 & -6 & -15 \end{pmatrix} \text{ -এর আইগেন মানগুলি } -2, 9, 18 \text{ (যাচাই করুন)}$$

ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় আইগেন মান আছে। দ্বিঘাত আকারটি অনির্দিষ্ট।

2. কর্ণ-ম্যাট্রিক্সের সঙ্গে সদৃশ থাকার শর্ত

একটি $n \times n$ ম্যাট্রিক্স A -কে আর একটি $n \times n$ ম্যাট্রিক্সের (B) সঙ্গে সদৃশ বলা হবে যদি এমন অবিশিষ্ট $n \times n$ ম্যাট্রিক্স P পাওয়া যায় যে $B = P^{-1} AP$ হবে।

যদি ঐ B ম্যাট্রিক্সটি $n \times n$ কর্ন ম্যাট্রিক্স হয়, তবে বলা হবে A কর্ণম্যাট্রিক্স-এর সঙ্গে সদৃশ (diagonalisable)।

ধরি F ক্ষেত্রর উপর সংজ্ঞাত ম্যাট্রিক্স A, এখন যদি A -এর সব আইগেন মান পরস্পর ভিন্ন হয় ও F -এর উপাদান হয়, তবে A কে diagonalisable বলা হবে এবং A -এর আইগেনমানগুলি ঐ B ম্যাট্রিক্সের কর্ণের উপাদান হবে।

মন্তব্য : আইগেন মানগুলি অবশ্য ভিন্ন ভিন্ন না-হলেও A diagonaligable হতে পারে—সেটি পাঠ্যক্রম বহির্ভূত।

উদাহরণ : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ -এর আইগেন মানগুলি 1, 2, 3 এবং A ম্যাট্রিক্সটি diagonalisable হবে।

10.3 সারাংশ

বর্গম্যাট্রিক্সের আইগেনমান ও প্রতি আইগেনমানের অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টর সংজ্ঞাত হয়েছে। আইগেন মানের দুটি গুরত্বপূর্ণ প্রয়োগের ক্ষেত্রে বিবৃত হয়েছে। ক্যালি-হ্যামিল্টন উপপাদ্য ও তার প্রয়োগ আলোচিত হয়েছে।

10.4 প্রশ্নাবলী

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মানগুলি ও আইগেন ভেক্টরগুলি নির্ধারণ করুন।

2. যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ হয়, ক্যালি-হ্যামিল্টন উপপাদ্যের যথার্থতা যাচাই করুন।

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের আইগেন মানগুলি নির্ধারণ করুন।

4. ক্যালিহামিল্টন উপপাদ্যের সাহায্যে A^{-1} নির্ধারণ করুন : $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

5. যদি $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ হয়, B^{20} নির্ণয় করুন।

6. $\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ -এর আইগেন মানগুলি নির্ধারণ করুন এবং ইহার সাহায্যে $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz$ দ্বিঘাত আকারটির প্রকৃতি নির্ধারণ করুন।

7. সঠিক থাকলে যুক্তি দিন অন্যথায় বিবৃতি গুলিকে সঠিক করে দিন (আইগেন মান নির্ধারণ না করে)

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ -এর আইগেন মানগুলি কাল্পনিক হবে।

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ -এর একটি আইগেন মান শূণ্য হবে।

10.5 উত্তরের সংকেত

1. 1, 2, 3 এবং যথাক্রমে $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ও $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ যেখানে $k \in R - \{0\}$

3. 0, 1, 1

5. ক্যালি — হ্যামিল্টন উপপাদ্য প্রয়োগ করুন।

6. 6, 6, 12 এবং 10.2.2 তে বিবৃত ধর্ম ব্যবহার করুন।

7. ম্যাট্রিক্সগুলির প্রকৃতি ও আইগেন মান সম্পর্কিত ধর্ম ব্যবহার করুন।

বিমূর্ত বীজগণিতের সব এককের জন্য সহায়ক গ্রন্থ

1. A Treatise on Basic Algebra – S. Ganguly & M. N. Mukherjee (Academic Publishers)
2. Higher Algebra (Abstract and Linear) – S. K. Mapa (Sarat Book Distributors)
3. Topics in Abstract Algebra – Sen, Ghosh and Mukhoponhyay (University press)

মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

— রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

"Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support".

— Subhas Chandra Bose

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে, সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নূতন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

— সুভাষচন্দ্র বসু

Price : ₹ 150.00

(Not for sale to the Students of NSOU)

Published by : Netaji Subhas Open University, DD-26, Sector - I, Salt Lake, Kolkata - 700 064 and Printed at Classic Print & Process, 20B, Sankharitola Street, Kolkata-700014, Phone : 2264-2911