NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

SUBSIDIARY MATHEMATICS

SMT - 03

BLOCK - 2

UNITS : 1 - 8

LINEAR PROGRAMMING AND GAME THEORY

প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোনও বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়ণের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে — যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এই সব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোনো শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ-ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক — অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

চতুর্থ পুনর্মুদ্রণ : ফেব্রুয়ারি, 2019

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau
of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় : সহায়ক গণিতবিদ্যা　　　　　　　　　　স্নাতক পাঠক্রম

পাঠক্রম : পর্যায় :S M T : 03 : 02

Unit	**রচনা**	**সম্পাদনা**
Unit ❑ 1–4	রবীন্দ্রনাথ সেন	অধ্যাপিকা (ড.) কাজল দে
Unit ❑ 5	ড. রঞ্জিৎ কুমার বেরা	অধ্যাপক রবীন্দ্রনাথ সেন
Unit ❑ 6	অধ্যাপক রবীন্দ্রনাথ সেন	অধ্যাপিকা (ড.) কাজল দে
Unit ❑ 7–8	ড. শঙ্কর দে	অধ্যাপক রবীন্দ্রনাথ সেন

প্রজ্ঞাপন

এই পাঠ-সংকলনের সমুদয় স্বত্ব নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের দ্বারা সংরক্ষিত। বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের লিখিত অনুমতি ছাড়া এর কোনোও অংশের পুনর্মুদ্রণ বা কোনোভাবে উদ্ধৃতি সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ।

মোহন কুমার চট্টোপাধ্যায়

নিবন্ধক

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

S M T – 03

(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়
2

পৃষ্ঠা

একক 1 ❑	রৈখিক প্রোগ্রামিং : ঐতিহাসিক পটভূমিকা ও প্রয়োগ	7–27
একক 2 ❑	রৈখিক প্রোগ্রামিং ব্যবহৃত গাণিতিক ধারণাসমূহ	28–53
একক 3 ❑	মৌলকার্যকর সমাধান—তার বিভিন্ন ধর্মাবলী ও সিম্প্লেক্স পদ্ধতির ভূমিকা	54–86
একক 4 ❑	সিম্প্লেক্স পদ্ধতির ও নিহিত তত্ত্ব ও প্রয়োগ	87–122
একক 5 ❑	রেখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় দ্বৈততা	123–142
একক 6 ❑	পরিবহন সমস্যা, আরোপ সমস্যা ও ভ্রাম্যমান সেলস্‌ম্যান সমস্যা	143–175
একক 7 ❑	ক্রীড়াতত্ত্ব (প্রথম ভাগ)	176–212
একক 8 ❑	ক্রীড়াতত্ত্ব (দ্বিতীয় ভাগ)	213–246

একক 1 ❐ রৈখিক প্রোগ্রামিং : ঐতিহাসিক পটভূমিকা ও প্রয়োগ

গঠন

1.1 উদ্দেশ্য

1.2 প্রস্তাবনা : ঐতিহাসিক পটভূমিকা

1.3 রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর গাণিতিক রূপ

1.4 দৈনন্দিন জীবনের সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং-এ রূপদান

1.5 বাধাগোষ্ঠীকে লেখচিত্রের সাহায্যে প্রমাণ

1.6 লেখচিত্রের সাহায্যে রৈখিক প্রোগ্রামিং-র সমাধান

1.7 সারাংশ

1.8 অনুশীলনী

1.9 উত্তরমালা

1.1 উদ্দেশ্য (Objectives)

এই এককের উদ্দেশ্য হল ঃ

- রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা কি করে এল তার ঐতিহাসিক পটভূমিকা ব্যাখ্যা করা।
- রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর গাণিতিকরূপ নির্ণয় করা।
- দৈনন্দিন জীবনের নানা সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর আকারে প্রকাশ করা।
- লেখচিত্রের সাহায্যে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান।

1.2 প্রস্তাবনা : ঐতিহাসিক পটভূমিকা

দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধের সময় ইংল্যান্ডকে ঘনঘন জার্মান বোমারু বিমানের আক্রমণের মুখোমুখি হতে হ'ত। তখন সবেমাত্র এ্যান্টিএয়ারক্রাফ্‌ট বন্দুক (anticraft gun) ব্যবহার শুরু হয়েছে। কিন্তু ইংল্যান্ডের তটরেখা বিশাল এবং সমস্ত দেশকে বিপদ মুক্ত করতে অনেক সংখ্যক এই ধরণের বন্দুকের প্রয়োজন। সেটা ইংল্যান্ডের তখন ছিল না। প্রশ্ন হ'ল সীমিত সংখ্যক বন্দুক দিয়ে কি করে দেশকে সবচেয়ে বেশী বিপন্মুক্ত রাখা যায়। এই ধরণের সমস্যাকে গাণিতিকভাবে সমাধান করার একটা চেষ্টা শুরু হয়। তার জন্য একটি ফাইলও খোলা হয়। তাকে আপারেশন্স ফাইল

(Operations file) বলা হয়। ইংল্যান্ডের সামরিক বিভাগের বিভিন্ন বৈজ্ঞানিকদের প্রচেষ্টায় অনেক ধরণের সমস্যার সমাধান করা হয়। এই ধরণের সমস্যাগুলিকে সাধারণভাবে সিদ্ধান্ত গ্রহণকারী সমস্যা বা Decision making problem বলা হয়। রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর উদ্দেশ্য হ'ল এমনই এক বিশেষ ধরণের সিদ্ধান্তগ্রহণকারী সমস্যাকে বিশ্লেষণ করা। রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার দুটো ভাগ : (ক) বিষয়াত্মক অপেক্ষক (Objective function) (খ) বাধাগোষ্ঠী (Constraints)। বিষয়াত্মক অপেক্ষকটি একটি স্কেলার। বাধাগোষ্ঠীর মধ্যে এক বা একাধিক শর্তাবলী থাকে যেগুলিকে সাধারণত সমীকরণ বা অসমীকরণ আকারে প্রকাশ করা হয়। রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যায় ব্যবহৃত অপেক্ষকগুলি কেবলমাত্র রৈখিক অপেক্ষকই হতে পারে। কম্পউটার তখন প্রবর্ত্তিত হয়ে গেছে। বিখ্যাত ডেনমার্কের বৈজ্ঞানিক Dantzig রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা সমাধানে সিম্প্লেক্স পদ্ধতি আবিষ্কার করেছেন। তাতে করে রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর প্রয়োগের ক্ষেত্র বিভিন্ন দিকে বিস্তৃত হ'ল। তার ফলে বিজ্ঞান, প্রযুক্তি, শিল্প, বাণিজ্য প্রায় সব জায়গায় রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর প্রয়োগ বিশেষ সাফল্য এল।

1.3 রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর গাণিতিক রূপ

রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর গাণিতিক রূপ উপস্থাপনা করার আগে আমরা একটা উদাহরণের সাহায্যে প্রসঙ্গটির অবতারণা করব।

একজন কৃষক কয়েকটি ছাগল ও ভেড়া কিনবে বলে ঠিক করে। একটি ভেড়ার দাম 5000 টাকা আর একটি ছাগলের দাম হল 3000 টাকা। তার খোঁয়াড়ে 80টির বেশী পশু রাখা যাবে না। কেনার জন্য তার কাছে মাত্র 2,00,000 টাকা আছে। একটি ভেড়া বিক্রী করে তার লাভের পরিমাণ ধরা যাক 400 টাকা এবং একটি ছাগল বিক্রী করে সে 300 টাকা লাভ করতে পারে। কটি ভেড়া ও কটি ছাগল তার নিজের টাকায় কিনলে তার লাভ সবচেয়ে বেশী হবে—এই নিয়ে কৃষকটি কোন সিদ্ধান্ত নিতে পারছে না। এই সমস্যাটাকে একটি গাণিতিক রূপ দেওয়া যায়।

ধরা যাক x_1 সংখ্যক ভেড়া ও x_2 সংখ্যক ছাগল কেনা হ'ল।

তার জন্য তার খরচ পড়ল $(5000\ x_1 + 3000\ x_2)$ টাকা কিন্তু তার কাছে 2,00,00 টাকা আছে।

সুতরাং প্রথম শর্ত হ'ল $5000x_1 + 3000x_2 \leq 2{,}00{,}000$ অথবা $5x_1 + 3x_2 \leq 200$

আবার তাঁর খোঁয়াড়ে 80টির বেশী ভেড়া বা ছাগল রাখা যাবে না।

তাহলে দ্বিতীয় শর্ত হ'ল, $x_1 + x_2 \leq 80$. যেহেতু সে লাভের অঙ্ক সবচেয়ে বেশী করতে চায়, সুতরাং তার লাভের পরিমাণ $= Z = 400x_1 + 300x_2$। সমস্যাটাকে এইভাবে উপস্থাপনা করা যায়,

$$\text{চরম } Z = 400\,x_1 + 300\,x_2, \quad (1.1)$$

যেখানে শর্তগুলি হ'ল,

$$5x_1 + 3x_2 \leq 200 \quad (1.2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \quad (1.3)$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0 \quad (1.4)$$

(1.1) – (1.4) কে একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার গাণিতিক রূপ বলা হয়। যেহেতু পশুর সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না, $x_1,\ x_2 \geq 0$

(1.1) কে বিষয়াত্মক অপেক্ষক বলে। লক্ষণীয় বিষয়াত্মক অপেক্ষকটি রৈখিক অর্থাৎ যোজ্য (additive) এবং সমঘাত (homogeneous)। শর্তগোষ্ঠী (1.1) – (1.4) প্রত্যেকটি অসমীকরণ এবং প্রত্যেকেই রৈখিক অপেক্ষক। এইজন্য (1.1) – (1.4) কে একসঙ্গে একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা বলা হয়।

আমরা এরপর একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সাধারণরূপ বর্ণনা করব।

ধরা যাক n সংখ্যক চল দ্বারা গঠিত m সংখ্যক রৈখিক অসমীকরণ (বা সমীকরণ) শর্তগোষ্ঠী আছে। রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার উদ্দেশ্য হল এমন সব ধনাত্মক চল নির্ণয় করা যাতে করে রৈখিক বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম (বা অবম) মান নির্ণয় করা যায়।

গণিতের ভাষায় বলা যায় যে, $x_1, x_2, \ldots\ x_n$ প্রদত্ত n সংখ্যক চল এবং m সংখ্যক প্রদত্ত রৈখিক অসমীকরণ (বা সমীকরণ) নিম্নরূপ ঃ

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n\ \{\leq\ =\ \geq\}\ b_i,\ i = 1,\ n\ \ldots m.$

$\{\leq\ =\ \geq\ \}$ বলতে প্রতিটি সর্তের জন্য হয় '$\leq$ বা $=$ বা $\geq$' যে কোন একটি সিদ্ধ হয়।

উদ্দেশ্য $x_1, \ldots\ldots\ x_n$ এর এমন সব ধনাত্মক মান নির্ণয় করা যাতে করে,

বিষয়াত্মক অপেক্ষক $Z = c_1,\ x_1 + c_2\ x_2 + \ldots\ldots\ c_n\ x_n$ (1.6) এর মান চরম (বা অবম) হয়।

এখানে $a_{ij},\ i = 1, 2, \ldots\ m,\ j = 1, 2, \ldots\ n,\ b_i,\ i = 1, 2, \ldots\ m,\ c_i,\ i = 1, 2, \ldots\ n$ এর মান প্রদত্ত।

(1.5) এবং (1.6) কে আরও সুসংহতভাবে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় :

$$\text{চরম (বা অবম)}\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (1.7)$$

$$\text{শর্তসাপেক্ষে}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\ (\leq\ =\ \geq)\ b_i, \quad (1.8)$$

$$i = 1, 2, \ldots\ldots\ m,$$

$$\text{এবং}\quad x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots\ n \quad (1.9)$$

$x_1, x_2, \ldots\ x_n$ কে বলা হয় সিদ্ধান্তগ্রহণকারী চলসমূহ। এই সিদ্ধান্তগ্রহণকারী চলগুলির যে ধনাত্মকমান সমূহ (1.8) এবং (1.9) এই শর্তগোষ্ঠীকে সিদ্ধ করে। সেইগুলিকে একত্রে **কার্যকর সমাধান** বলা হয়। যে কার্যকর সমাধান Z-এর মান চরম (বা অবম) করে তাকে চরম (বা অবম) সমাধান বলা হয়।

1.4 দৈনন্দিন জীবনের সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং-এ রূপদান

উদাহরণ 1.1. একজন আসবাব প্রস্তুতকারক চেয়ার ও টেবিল প্রস্তুত করে। একটি চেয়ার তৈরী করতে 4 বোর্ড ফুট ও একটি টেবিল তৈরী করতে 8 বোর্ড ফুট সেগুন কাঠ লাগে। তার কাছে 2000 বোর্ড ফুট সেগুন কাঠ মজুত আছে। একটি টেবিল তৈরী করতে 3 শ্রম-ঘন্টা ও একটি চেয়ার তৈরী করতে 2 শ্রম-ঘন্টা

লাগে। ঐ আসবাব প্রস্তুত কারকের কাছে 800 শ্রম-ঘণ্টার কাজ করার মত শ্রমিক আছে। সে সর্বোচ্চ 40টা টেবিল ও 130 টা চেয়ার তৈরি করতে পারে। প্রতি টেবিল বেচে সে লাভ করে 1200 টাকা এবং চেয়ার বেচে সে লাভ করে 500 টাকা। কতসংখ্যক চেয়ার ও কত সংখ্যক টেবিল তৈরী করলে তার লাভ সর্বোচ্চ হয় তা নির্ণয়ের সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে প্রকাশ করতে হবে।

ধরা যাক x_1 সংখ্যক চেয়ার ও x_2 সংখ্যক টেবিল বিক্রী করা হয়েছে।

যেহেতু প্রতি চেয়ার বেচে সে 500 টাকা লাভ করে এবং প্রতি টেবিল বেচে সে 1200 টাকা লাভ করে, রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার

বিষয়াত্মক অপেক্ষক = $Z = 500x_1 + 1200x_2$

যেহেতু 130 টার বেশী চেয়ার ও 40টার বেশী টেবিল তৈরী করা যাবে না।

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\le 130 \\ x_2 &\le 40 \end{aligned}\right\}$$

সেগুন কাঠের জোগান 2000 বোর্ড ফুটের বেশী নয়।

অতএব $4x_1 + 8x_2 \le 2000.$

x_1 সংখ্যক চেয়ার ও x_2 সংখ্যক টেবিল করতে যথাক্রমে শ্রম-ঘণ্টা লাগে $2x_1$ এবং $3x_2$। সর্বোচ্চ শ্রম-ঘণ্টা 800 এর বেশী হতে পারে।

অতএব $2x_1 + 3x_2 \le 800$

যেহেতু x_1 ও x_2 এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না, নির্ণেয় রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হল

$$\begin{aligned} \text{চরম } Z &= 500x_1 + 1200x_2 \\ \text{যাতে করে } & 4x_1 + 8x_2 \le 2000 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 800 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

উদাহরণ 1.2. সুষম খাদ্যতালিকা সমস্যা (The diet problem)

একদল বিজ্ঞানী সস্তায় পুষ্টিকর খাদ্য উৎপাদন করার একটি পরিকল্পনা করেন। প্রতি কিলোগ্রাম মিশ্রিত খাদ্যে অন্তঃত 2000 ক্যালোরি শক্তি ও 1000 এককের ভিটামিন থাকা বাঞ্ছনীয়। প্রতি কেজি কাঁচা আনাজে ক্যালোরী (শক্তি) ও ভিটামিনের পরিমাণ নীচের টেবিলে দেওয়া হ'ল। প্রতি কেজি A, B, ও C-এর মূল্য যথাক্রমে 10 টাকা, 15 টাকা ও 20 টাকা। উদ্দেশ্য কি পরিমাণে A, B ও C মিশ্রিত করলে মিশ্র খাদ্যে প্রয়োজনীয় ভিটামিন ও ক্যালোরী থাকবে এবং দামও সবচেয়ে কম হবে। A, B ও C-এর কিলো প্রতি ক্যালোরী ও ভিটামিনের হার :

কাঁচা আনাজ	ক্যালোরী/কেজি	ভিটামিন/কেজি
A	3200	800
B	1600	1000
C	2400	1200

ধরা যাক 1 কেজি মিশ্র পদার্থে x_1 কেজি A, x_2 কেজি B ও x_3 কেজিতে C আছে। তাহলে 1 কেজি মিশ্র পদার্থের মূল্য হল :

$$10x_1 + 15x_2 + 20x_3$$

অতএব বিষয়াত্মক অপেক্ষক হ'ল

$$Z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$$

শক্তি : $3200x_1 + 1600x_2 + 2400x_3 \geq 2000$

ভিটামিন : $800x_1 + 1000x_2 + 1200x_3 \geq 1000$

তাহলে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটি হল :

অবম $Z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$

নিম্নলিখিত সর্তানুসারে :

$$3200x_1 + 1600x_2 + 2400x_3 \geq 2000$$

$$800x_1 + 1000x_2 + 1200x_3 \geq 1000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.00$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

উদাহরণ 1.3. মিশ্রণ সমস্যা (Blending problem)

কৌটো ভর্তি এক কেজি ওজনের মেওয়াফল বিক্রেতাকে ঠিক করতে হবে কি পরিমাণে দুটি মিশ্রণ A ও B কে মেশাতে হবে যাতে করে লাভ সর্বোচ্চ হয়। ঐ মিশ্রণগুলোতে কাজুবাদাম, আখরোট ও পেস্তার অনুপাত এবং ঐ ফলগুলির যোগানের পরিমাণ নীচে দেওয়া হল। এক কেজি কাজুবাদাম, আখরোট ও পেস্তার দাম যথাক্রমে 300 টাকা, 350 টাকা ও 150 টাকা।

মিশ্রণ A বিক্রী করা হয় প্রতি কেজি 400 টাকায় এবং মিশ্রণ B বিক্রী করা হয় প্রতি কেজি 470 টাকায়।

মিশ্রণ A ও B-তে কাজুবাদাম, আখরোট ও পেস্তার অনুপাত (%)

মিশ্রণ	কাজুবাদাম	আখরোট	পেস্তা
A	0·25	0·50	0·25
B	0·25	0·75	
মজুত (কেজি)	375	375	250

ধরা যাক মিশ্রণ A-এর x_1 সংখ্যক ও মিশ্রণ B-এর x_2 সংখ্যক কৌটো তৈরী করা হয়। যদি একটি কৌটো A-এর মিশ্রণ বিক্রী করে লাভ হয় p_1 টাকা এবং একটি কৌটো B-এর মিশ্রণ করে লাভ হয় p_2 টাকা,

তাহলে বিষয়াত্মক অপেক্ষক $= Z = p_1x_1 + p_2x_2$

বাধাগোষ্ঠী হল : $0{\cdot}25x_1 + 0{\cdot}25x_2 \leq 375$

$$0{\cdot}50x_1 + 0{\cdot}75x_2 \leq 375$$

$$0{\cdot}25x_1 \leq 375$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0.$$

যেখানে $p_1 = 400 - [0{\cdot}25 \times (300) + 0{\cdot}50\ (350) + 0{\cdot}25 \times (150)] = 112{\cdot}50$

$$p_2 = 470 - [0{\cdot}25 \times (300) + 0{\cdot}75 \times (350)] = 132{\cdot}50$$

উদাহরণ 1.4. পরিবহন সমস্যা (Transporation Problem)

এই শহরে দুটি গ্যাসের সিলিন্ডারের ডিপো আছে। আর ডিপোগুলি থেকে চারটি ডীলারের কাছে গ্যাসের সিলিন্ডার যোগান দেওয়া হয়। বিভিন্ন গুদাম থেকে গন্তব্যস্থলের দূরত্ব, মাসিক চাহিদা ও সরবরাহের (সিলিন্ডারের সংখ্যা) তালিকা নীচে দেওয়া হল। যদি মাইল প্রতি একটি সিলিন্ডারের পরিবহন খরচা 1 টাকা হয়, তাহলে সবচেয়ে কম খরচে কি করে নির্দিষ্ট গন্তব্যস্থলে যেতে পারে তা নির্ণয় করার জন্য একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা গঠন করতে হবে।

		ডীলার সমূহ				
		1	2	3	4	সরবরাহ
	1	10	15	20	30	400
গুদাম						
	2	5	7	6	8	200
		100	200	200	100	

মন্তব্য 1.1. এ পর্যন্ত যে সব চল ব্যবহার করা হয়েছে তাদের নিম্ন চল (Subscript) হিসাবে একটি করে অঙ্ক ব্যবহার করা হয়েছে। এক্ষেত্রে প্রতি চলের নিম্ন লগ্নকে দুটি করে অঙ্ক ব্যবহার করা হয়েছে।

ধরা যাক x_{ij} হচ্ছে i তম গুদাম থেকে j-তম ডীলারের কাছে পাঠানো সিলিন্ডারের সংখ্যা।

তাহলে বিষয়াত্মক অপেক্ষক (অতিক্রান্ত দূরত্বে যে খরচ হয়)

$$\begin{aligned} Z &= 10x_{11} + 15x_{12} + 20x_{13} + 30x_{14} \\ &\quad + 5x_{21} + 7x_{22} + 6x_{23} + 8x_{24} \end{aligned} \tag{1.10}$$

বাধাগোষ্ঠী : (চাহিদা সংক্রান্ত)

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 100 \\ x_{12} + x_{22} &= 200 \\ x_{13} + x_{23} &= 200 \\ x_{14} + x_{24} &= 100 \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

(সরবরাহ সংক্রান্ত) :

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 400 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 200 \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

তাহলে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটি হল, অবম Z (1.10) শর্তসাপেক্ষে চাহিদা সংক্রান্ত বাধাগোষ্ঠী (1.11) এবং সরবরাহ সংক্রান্ত বাধাগোষ্ঠী (1.12)।

উদাহরণ 1.5. বরাদ্দ সমস্যা (Allocation Problem)

একটি বিজ্ঞাপন সংস্থা তার এক খদ্দেরের সঙ্গে চুক্তিবদ্ধ হয় ঐ প্রস্তুতকারক তার তৈরী একটি জিনিসের প্রচারের জন্যে মুম্বাই শহরে 1 কোটি টাকা খরচ করবেন। সংস্থাটির প্রতিবার রেডিয়োতে প্রচারের জন্য 20,000 টাকা, টিভিতে প্রচারের জন্য 1,00,000 টাকা এবং কাগজে ছাপাবার জন্য 40,000 টাকা খরচ করতে হবে। জিনিষ প্রস্তুতকারক চাইছেন যে অন্ততঃ 15,00,000 টাকা খরচা করা হোক টিভিতে প্রচারের জন্য। সংস্থাটির অভিজ্ঞতার উপর নির্ভর করে প্রস্তুতকারক রাজী হয় সম্পূর্ণ বাজেটের 25%-এর বেশী কাগজে প্রচারের জন্য খরচা করা হবে না এবং কাগজের জন্য বরাদ্দ টিভির জন্য বরাদ্দের 50%-এর বেশি হবে না। আগের অভিজ্ঞতার উপর নির্ভর করে রেডিওতে একবার সম্প্রচারের জন্য 40 দর্শক পয়েন্ট, টিভিতে একবার সম্প্রচারের জন্য 160 দর্শক পয়েন্ট এবং খবরের কাগজে একবার বিজ্ঞাপনের জন্য 300 পয়েন্ট পাওয়া যায়। সংস্থাটির কতটা খরচ করতে হবে যাতে করে সবশুদ্ধ দর্শক পয়েন্ট সর্বোচ্চ হয়। এই সমস্যাটিতে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার আকারে প্রকাশ করতে হবে।

ধরা যাক রেডিও ও টিভিতে সম্প্রচারের জন্য যথাক্রমে x_1 ও x_2 লক্ষ টাকা খরচ করা হচ্ছে এবং কাগজে বিজ্ঞাপনের জন্য খরচ হচ্ছে x_3 লক্ষ টাকা। রেডিওতে একবার সম্প্রচারের জন্য যদি 40 দর্শক পয়েন্ট পাওয়া যায় এবং তার জন্য খরচা হয় 20,000 টাকা তাহলে x_1 লক্ষ টাকায় দর্শক পয়েন্ট পাওয়া যাচ্ছে

$$\frac{40}{20{,}000} \times 1{,}00{,}000 \times x_1 = 200x_1$$

অনুরূপে x_2 লক্ষ টাকায় দর্শক পয়েন্ট পাওয়া যায়

$$160 \times \frac{x_2 \times 1,00,000}{1,00,000} = 160x_2$$

কাগজে x_3 লক্ষ টাকায় দর্শক পয়েন্ট পাওয়া যায়,

$$300 \times \frac{x_3 \times 1,00,000}{40,000} = 750x_3$$

সুতরাং বিষয়াত্মক অপেক্ষক হল

$$Z = 200x_1 + 160x_2 + 750x_3$$

বাধাগোষ্ঠী ঃ $x_1 + x_2 + x_3 = 100,$

$$x_2 \geq 15,$$

$$x_3 \geq 25,$$

$$x_3 - 0{\cdot}5x_2 \leq 0,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

উদাহরণ 1.6. প্রতিটি লোকেরই দৈনিক কিছু পরিমাণ ভিটামিন 'A' ও ভিটামিন C গ্রহণ করা দরকার। যে দু ধরনের খাবার প্রতি লোককে দেওয়া হয় তা দুধরনের যেমন F_1 এবং F_2। প্রতি একক খাবারের দাম ও প্রত্যেক লোকের দৈনন্দিন কতটা ভিটামিন দরকার ও প্রতি একক খাবারের উক্ত ভিটামিনদ্বয় কি পরিমাণ আছে তা নীচের টেবিলে দেওয়া আছে ঃ

	খাবার (প্রতি একক)		
ভিটামিন	F_1	F_2	দৈনিক প্রয়োজন (একক)
A (একক)	2	4	40
C (একক)	3	2	50
প্রতি একক খাবারের দাম (Rs.)	30	25	

ন্যূনতম কত খরচা করলে একজন লোকের পক্ষে প্রয়োজনীয় দুধরনের ভিটামিন গ্রহণ করা সম্ভব তা রৈখিক প্রোগ্রামিন রূপে প্রকাশ করতে হবে। ধরা যাক F_1 ধরণের খাদ্য x_1 একক ও F_2 ধরণের খাদ্য x_2 একক, একজন লোক গ্রহণ করে যাতে প্রয়োজনীয় ভিটামিনদ্বয় শরীরে যায়।

তাহলে Z = বিষয়াত্মক অপেক্ষক হ'ল

$$= 30x_1 + 25x_2$$

বাধাগোষ্ঠী :

ভিটামিন 'A' এর জন্য $2x_1 + 4x_2 \geq 40$

ভিটামিন 'B' এর জন্য $3x_1 + 2x_2 \geq 50$

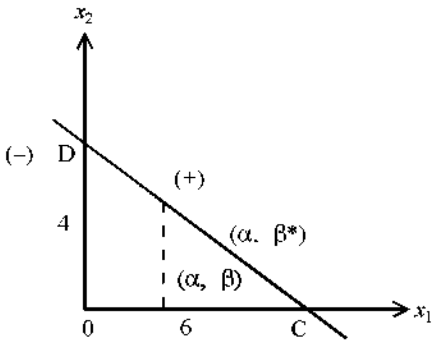
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

1.5 বাধাগোষ্ঠীকে লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ

উদাহরণ 1.6. লেখচিত্রের সাহায্যে $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ এই অসমীকরণকে প্রকাশ কর।

ধরা যাক $2x_1 + 3x_2 = 12$

অথবা, $\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} = 1$ এই সরলরেখাটি x_1, x_2 অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করল।



ধরা যাক (α, β) ΔCOD র অর্ন্তগত একটি বিন্দু।

এখন (α, β*) CD সরলরেখার ওপরে একটি বিন্দু।

তাহলে $2\alpha + 3\beta^* = 12$

যেহেতু $0 < \beta < \beta^*$, $2\alpha + 3\beta < 12$

অনুরূপভাবে (α, β) এর মধ্য দিয়ে x_1 অক্ষের সমান্তরাল রেখা টেনে দেখান যায় যে

$$2\alpha + 3\beta < 12$$

যেহেতু $x_1, x_2 \geq 0$ নেওয়া হল,

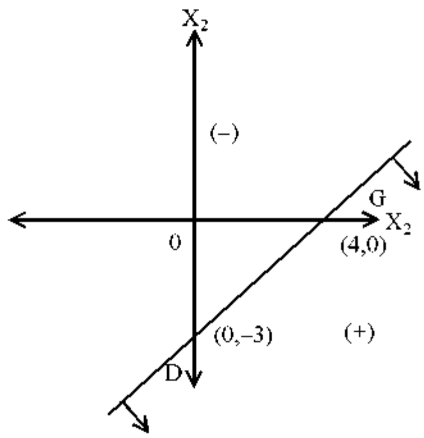
$2x_1 + 3x_2 \leq 12$ ত্রিভুজ COD-এর অন্তস্থ বিন্দু ও পরিধিস্থ বিন্দুসমূহ বোঝায়।

উদাহরণ 1.7. নিম্নলিখিত অসমীকরণগুলির লেখচিত্রসমূহ অঙ্কন করতে হবে :

(ক) $-3x_1 + 4x_2 \leq -12$ (খ) $-3x_1 + 4x_2 \geq 12$

(গ) $3x_1 + 4x_2 \geq -12$ (ঘ) $-3x_1 + 4x_2 \geq -12$

লেখচিত্রের অঙ্কনের আগে অসমীকরণের ডান দিকের অঙ্ককে সবসময় ধনাত্মক নিতে হবে।



(ক) $-3x_1 + 4x_2 \leq -12$ (1.13)

অথবা, $3x_1 - 4x_2 \geq 12$

যেহেতু $3 \times 0 - 4 \times 0 \not\geq 12$

অতএব অসমীকরণ (1.13) মূলবিন্দুর দ্বারা সিদ্ধ হয় না।

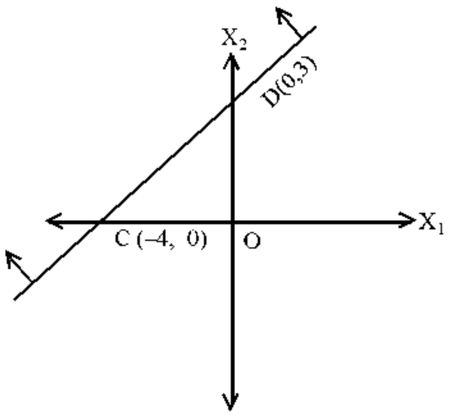
অতএব CD রেখার যে দিকে 'O' অবস্থিত, তার বিপরীত দিককে অসমীকরণ চিহ্নিত করে।

(খ) $-3x_1 + 4x_2 \geq 12$ এর সংশ্লিষ্ট সমীকরণ হল

$$-3x_1 + 4x_2 = 12$$

$$-3 \times 0 + 4 \times 0 = 0 \ngeq 12$$

সুতরাং ঐ অসমীকরণ যে অঞ্চলটি চিহ্নিত করে মূলবিন্দু তার বিপরীতদিকে থাকে।



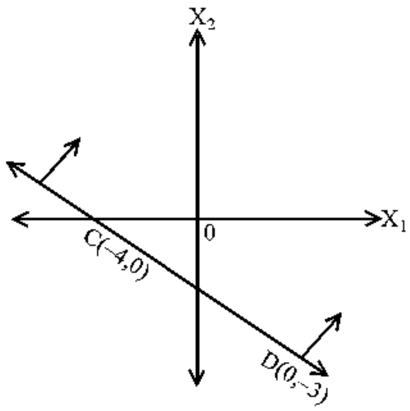
(গ) অসমীকরণটি হল : $3x_1 + 4x_2 \geq -12$

অথবা, $3x_1 - 4x_2 \leq 12$

$$-3 \times 0 - 4 \times 0 = 0 < 12$$

অতএব মূলবিন্দু O অসমীকরণ দ্বারা চিহ্নিত অঞ্চলে অবস্থিত।

অতএব উদ্দীষ্ট অঞ্চল হ'ল।



(ঘ) অসমীকরণটি হল : $-3x_1 - 4x_2 \geq -12$

অর্থাৎ, $3x_1 + 4x_2 \leq 12$ ডানদিকে ধনাত্মকচিহ্ন আনার জন্য।

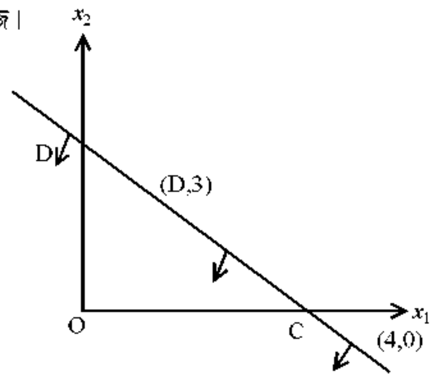
$$3 \times 0 + 4 \times 0 = 0 < 12$$

অর্থাৎ মূলবিন্দুটি অসমীকরণ দ্বারা চিহ্নিত অঞ্চলে অবস্থিত।

উদাহরণ 1.7. দেখান যে $-x_1 + 2x_2 \leq 6$

চিহ্নিত অঞ্চলটি একটি $-x_1 + 3x_2 \leq 8$ অসীম চতুর্ভুজ।

$$x_1, x_2 < 0$$



অসমীকরণ : $-x_1 + 2x_2 \leq 6$

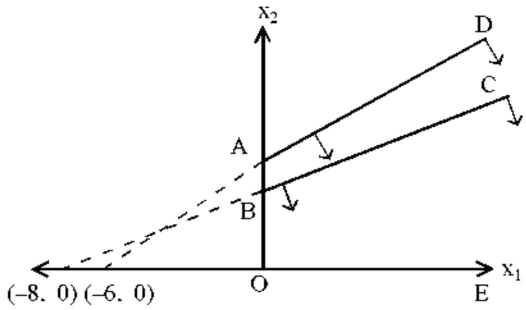
অথবা, $-\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{3} \leq 1$

$$-\frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 = 0 \leq 1$$

অতএব মূলবিন্দু ঐ অসমীকরণ দ্বারা চিহ্নিত এলাকায় থাকে।

যেহেতু $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, x_1 x_2-তলের প্রথম চতুর্থাংশের ⏢ $EOAD$ এই অসীম চতুর্ভুজই হ'ল ঐ অসমীকরণের চিহ্নিত অঞ্চল।

আবার $-x_1 + 3x_2 \leq 8$ এই অসমীকরণটিকে লেখা যায় $-\frac{x_1}{8}+\frac{x_2}{8/3}\leq 1$



যেহেতু $-\frac{1}{8}\times 0+\frac{3}{8}.0=0\leq 1$

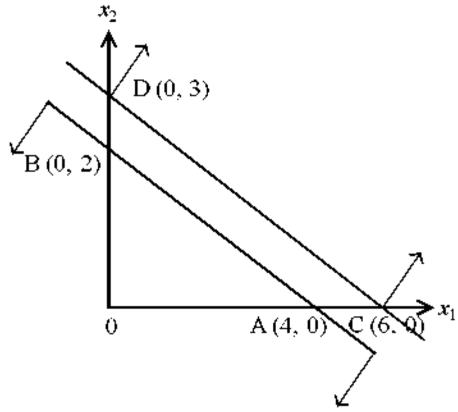
অতএব ঐ অসমীকরণ দ্বারা চিহ্নিত অঞ্চলে মূলবিন্দু 0 থাকবে।

যেহেতু $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ ঐ অসমীকরণ ⏢ $EOBC$ এই অসীম চতুর্ভুজ চিহ্নিত করে।

অতএব ঐ অসমীকরণদ্বয় দ্বারা চিহ্নিত অঞ্চল হ'ল ⏢ $EOBC$। এই চতুভূর্জটি যদিও ধনাত্মক $x_1\ x_2$ তলে অবস্থিত, ইহা অসীম।

উদাহরণ 1.8. নিম্নলিখিত অসমীকরণদ্বয়ের কোন কার্যকর দেশ আছে কিনা তা লেখচিত্রের সাহায্যে দেখাও :

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 6,$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$



অসমীকরণ : $x_1 + 2x_2 \leq 4$

অথবা, $\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{2}\leq 1$

যেহেতু $\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{2}\times 0=0\leq 1$

মূলবিন্দু O ঐ অসমীকরণ যে অঞ্চল চিহ্নিত করে তার মধ্যে অবস্থিত।

অতএব ΔAOB উদ্দিষ্ট অঞ্চল।

আবার $x_1 + 2x_2 \geq 6$

অথবা, $\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{3}\geq 1$

যেহেতু $\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{3}\times 0=0 \not> 1$

অতএব মূলবিন্দু O ওই অসমীকরণ দ্বারা চিহ্নিত অঞ্চলে অবস্থিত নয়।

যেহেতু $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, ঈপ্সিত অঞ্চল CD সরলরেখার যে দিকে O অবস্থিত তার বিপরীত দিকে অবস্থিত।

সুতরাং অসমীকরণ দুটো যুগপৎ সিদ্ধ হতে পারে না। অতএব প্রদত্ত সর্তগোষ্ঠী কোন কার্যকর দেশ চিহ্নিত করে না।

1.6 লেখচিত্রের সাহায্যে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান

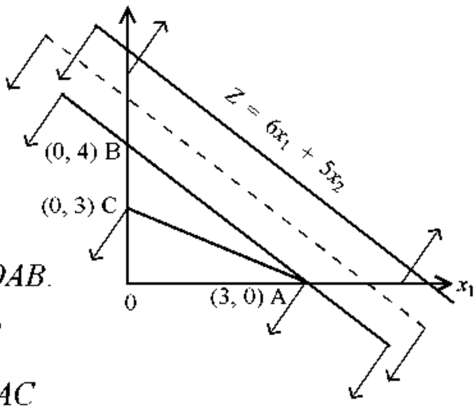
দ্বিচলবিশিষ্ট রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার লেখচিত্র সাহায্যে সমাধান করা যায়। আগের অংশ 1.5-তে আমরা দেখেছি কি করে অসমীকরণতন্ত্রের নির্ধারিত সমাধান অঞ্চল অঙ্কন করতে পারি। প্রদত্ত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার বাধাগোষ্ঠীতে যদি একাধিক অসমীকরণ বা সমীকরণ থাকে, তাহলে তাদের দ্বারা সংজ্ঞাত সমাধান অঞ্চলের ছেদই (intersection) হল বাধাগোষ্ঠীর সমাধান অঞ্চল। যদি চলগুলি ধনাত্মক হয়, সেক্ষেত্রে সমাধান অঞ্চলকে কার্যকর অঞ্চল (feasible region) বলা হয়। যেহেতু রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যায় অসমীকরণগুলি প্রত্যেকেই রৈখিক অপেক্ষক, সমাধান অঞ্চলগুলির সীমারেখা প্রত্যেকটাই সরলরেখা হবে। সুতরাং সমাধান অঞ্চলটি একটি বহুভুজ হবে। এই বহুভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলিকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার প্রান্তিক বিন্দু বলা হয়। এটা প্রমাণ করা যায় যে যদি প্রদত্ত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার একটি চরম (অবম) মান থাকে তাহলে কোনো না কোনো প্রান্তিক বিন্দু এক্ষেত্রে বহুতলের শীর্ষবিন্দুতে বিষয়াত্মক অপেক্ষককের চরম (বা অবম) মান প্রাপ্ত হবে। বিষয়াত্মক অপেক্ষক একটি সরলরেখাকে চিহ্নিত করে। সেই সরলরেখাকে যদি সমান্তরাল পথে সমাধান অঞ্চলের দিকে নিয়ে যাওয়া হয়, তাহলে যে বিন্দু বা সরলরেখা বরাবর ঐ সরলরেখাটি (বিষয়াত্মক অপেক্ষক) সমাধান অঞ্চলকে স্পর্শ করে, সেই বিন্দু বা সরলরেখাতে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার চরম (অবম) মান প্রাপ্ত হবে। এটা খেয়াল রাখতে হবে যে সমাধান অঞ্চল সবসময়ই উত্তল হলেও সীমাবদ্ধ নাও হতে পারে।

উদাহরণ 1.8. চরম $Z = 6x_1 + 5x_2$,

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + x_2 \leq 4$

$3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$



যেহেতু, $x_1, x_2 \geq 0$

$2x_1 + x_2 \leq 4$-এর সমাধান অঞ্চল ΔOAB.

$3x_1 + 2x_2 \leq 6$ এর সমাধান অঞ্চল হল, ΔOAC

অতএব বাধাদ্বয় দ্বারা চিহ্নিত সমাধান অঞ্চল হ'ল ΔOAC

$Z|_0 = 6 \times 0 + 5 \times 0 = 0$

$Z|_A = 6 \times 2 + 5 \times 0 = 12$

$Z|_C = 6 \times 0 + 5 \times 3 = 15$

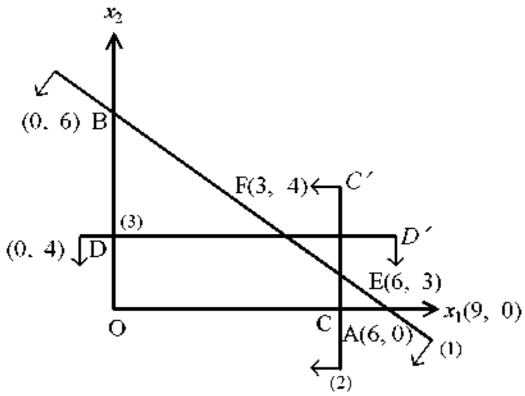
উদাহরণ 1.9. চরম $Z = 15x_1 + 10x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + 3x_2 \leq 18$

$3x_1 \leq 18$

$5x_2 \leq 20$

$x_1, x_2 \geq 0$



(1) নং সরলরেখা $2x_1 + 3x_2 = 18$ এই সমীকরণের লেখচিত্র।

(2) নং সরলরেখা $3x_1 = 18$ এই সমীকরণের লেখচিত্র।

(3) নং সরলরেখা $5x_2 = 20$ এই সমীকরণের লেখচিত্র।

এই শর্ত গোষ্ঠীদ্বারা চিহ্নিত অঞ্চল হল ⏢ $OCEFD$ এর শীর্ষবিন্দুগুলি হল

$O \longrightarrow (0, 0)$ $E \longrightarrow (6, 3)$ $D \longrightarrow (0, 4)$

$C \longrightarrow (6, 0)$ $F \longrightarrow (3, 4)$

O তে Z এর মান হ'ল $\longrightarrow 0$

C তে Z এর মান হ'ল $\longrightarrow 15 \times 6 + 10 \times 0 = 90$

E তে Z এর মান হ'ল $\longrightarrow 15 \times 6 + 10 \times 3 = 120$

F তে Z এর মান হ'ল $\longrightarrow 15 \times 3 + 10 \times 4 = 85$

D তে Z এর মান হ'ল $\longrightarrow 15 \times 0 + 20 \times 4 = 40$

অতএব Z এর চরম মান 120 এবং চরম বিন্দু হ'ল E

অর্থাৎ $x_1 = 6, x_2 = 3$

উদাহরণ 1.10 চরম $Z = 2x_1 + x_2$

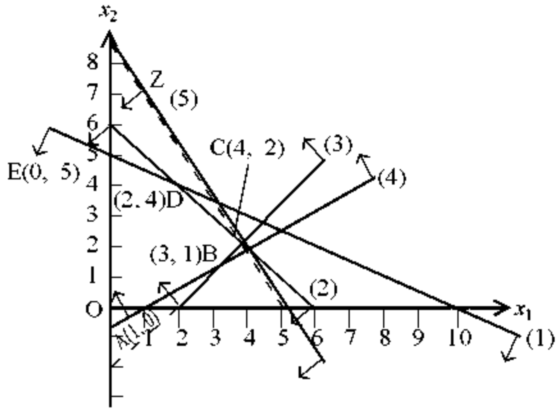
শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 - x_2 \leq 2$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$



(1) নং সরলরেখা $x_1 + 2x_2 = 10$ এর লেখচিত্র।

(2) নং সরলরেখা $x_1 + x_2 = 6$ এর লেখচিত্র।

(3) নং সরলরেখা $x_1 - x_2 = 2$ এর লেখচিত্র।

(4) নং সরলরেখা $x_1 - 2x_2 = 1$ এর লেখচিত্র।

অতএব উদ্দিষ্ট সমাধান অঞ্চল হ'ল বহুভুজ ⏢ $OABCDE$

শীর্ষবিন্দু O তে Z এর মান হ'ল $2 \times 0 + 1 \times 0 = 0$

„ A তে Z এর মান হ'ল $2 \times 1 + 1 \times 0 = 2$

„ B তে Z এর মান হ'ল $2 \times 3 + 1 \times 1 = 7$

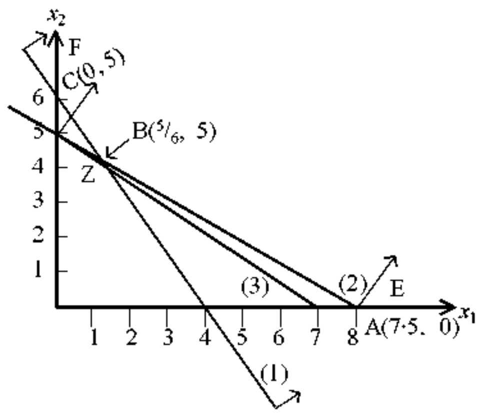
„ C তে Z এর মান হ'ল $2 \times 4 + 1 \times 2 = 10$

„ D তে Z এর মান হ'ল $2 \times 2 + 1 \times 4 = 8$

„ E তে Z এর মান হ'ল $2 \times 0 + 1 \times 5 = 5$

Z-এর চরম মান হ'ল 10 এবং চরম সমাধান $x_1 = 4,\ x_2 = 2$

বিষয়াত্মক অপেক্ষক সূচক সরলরেখা সমান্তরাল পথে চালালে C-এর দিকে এগিয়ে যায় অর্থাৎ C বিন্দুতেই ঐ সরলরেখা স্পর্শ করে।



উদাহরণ 1.11. অবম $Z = 5x_1 + 7x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + 2x_2 \geq 12$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 15$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

(1) নং সমীকরণ হ'ল $3x_1 + 2x_2 = 12$

(2) নং সমীকরণ হ'ল $2x_1 + 3x_2 = 15$

এখানে সমাধান অঞ্চল হ'ল ⏢ $EABCF$ এটি একটি অসীম বহুভুজ যদিও উত্তল।

এর শীর্ষ বিন্দু সমূহ হল A (7·5, 0), B (5/6, 5), C (0, 6)

Z এর মান A তে $5 \times 7{\cdot}5 + 7 \times 0 = 37{\cdot}5$

Z এর মান B তে $5 \times \frac{5}{6} + 7 \times 5 = 39\frac{1}{6}$

Z এর মান C তে $0 \times 5 + 7 \times 6 = 42$

বিষয়াত্মক অপেক্ষক $Z = 5x_1 + 7x_2$ (3) নং সরলরেখা এর সমান্তরাল। এই সরলরেখাকে যদি সমান্তরালভাবে ঐ সমাধান অঞ্চলের দিকে নিয়ে যাওয়া যায় তাহলে A বিন্দুতে ঐ অঞ্চলকে স্পর্শ করবে।

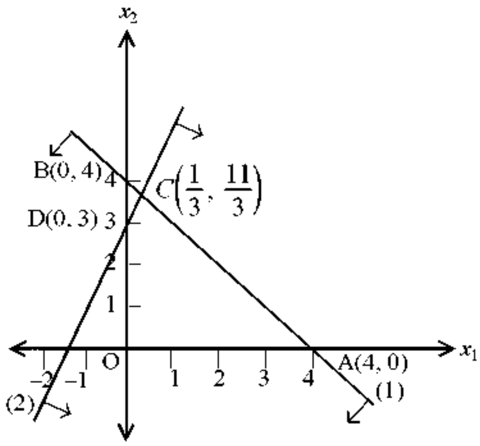
অতএব Z -এর অবম মান হল $37{\cdot}5$ এবং অবম সমাধান হল $x_1 = 7{\cdot}5,\ x_2 = 0$ অর্থাৎ A বিন্দুতে বিষয়াত্মক অপেক্ষক অবম মান পায়।

উদাহরণ 1.12. অবম $Z = x_1 + 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 \leq 4$

$-2x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1,\ x_2 \geq 0$



(1) নং সরলরেখা $3x_1 + x_2 = 4$-এর লেখচিত্র

(2) নং সরলরেখা $-2x_1 + x_2 = 3$-এর লেখচিত্র

সমাধান অঞ্চল হ'ল ⏢ $OACDO$ এর শীর্ষবিন্দুগুলি হ'ল O, A, C, D.

O তে Z এর মান হ'ল $-1 \times 0 - 1 \times 0 = 0$

A তে Z এর মান হ'ল $-1 \times 4 - 2 \times 0 = 4$

C তে Z এর মান হ'ল $-1 \times \frac{1}{3} - 2 \times \frac{11}{3} = -\frac{23}{3} = -7\frac{2}{3}$

D তে Z এর মান হ'ল $-1 \times 0 - 2 \times 3 = -6$

Z এর অবম মান $-7\frac{2}{3}$ এবং অবম সমাধান $x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{11}{3}$ অর্থাৎ অবম সমাধান C প্রাপ্ত হ'ল।

1.7 সারাংশ

আমরা এই এককে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার কি করে উদ্ভব হ'ল রৈ. প্রো. স. (রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা) বলতে কি বোঝায় তা ব্যাখ্যা করেছি। প্রাত্যহিক জীবনের নানা সমস্যাকে রৈ. প্রো. স. হিসাবে উপস্থাপনা করেছি। রূপদান করা যায়, যদি রৈ. প্রো. স. দ্বিচল বিশিষ্ট হয় তাও দেখিয়েছি। দ্বিচল বিশিষ্ট রৈখিক প্রোগ্রামিং-র লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করার পদ্ধতিও আলোচিত হয়েছে।

1.8 অনুশীলনী

নিচের প্রত্যেকটি সমস্যাকে রৈ. প্রো. স. হিসাবে উপস্থাপনা করুন :

1.1. টেবিল, চেয়ার প্রস্তুত করতে লাগে কাঠ ও শ্রম। প্রতি টেবিল তৈরি করতে লাগে 4 একক কাঠ আর প্রতি চেয়ার তৈরী করতে লাগে 2 একক কাঠ। প্রতি টেবিলে 20 একক শ্রম ও প্রতি চেয়ারে 15 একক শ্রম লাগে। একটি টেবিল থেকে লাভ হয় 50 টাকা ও একটি চেয়ার বেচে লাভ হয় 40 টাকা। যদি 1300 একক কাঠ এবং 1500 একক শ্রম মজুত থাকে, কি উৎপাদন প্রকল্প নিলে লাভ সর্বোচ্চ হয় এটাই প্রস্তুতকারক নির্ণয় করতে চায়।

1.2. একটি গো-প্রজনন কেন্দ্রে ঠিক হয় যে প্রতিটি পশুই অন্ততঃ 14, 22 ও 1 এককের খাদ্য যথাক্রমে A, B এবং C পাবে। দু ধরণের খড় পাওয়া যায়। এই দু ধরণের খড়ের প্রতি একক ওজনে A, B ও C এর পরিমাণ নিম্নরূপ :

	1 নং খড়	2 নং খড়
A ধরণের খাদ্য	2	1
B ধরণের খাদ্য	2	3
C ধরণের খাদ্য	1	1

প্রদত্ত 1 নং ও 2 নং খড়ের প্রতি এককের মূল্য যথাক্রমে 5 ও 6 আর্থিক একক। কত কম টাকা খড় কেনায় ব্যয় করলে ঐ প্রজনন কেন্দ্রের পশুরা নির্ধারিত খাদ্যের পরিমাণ পাবে?

1.3. বৃদ্ধ মুরগীর দাম প্রতিটি 80 টাকা ও বাচ্চা মুরগীর দাম প্রতিটি 200 টাকা। বৃদ্ধ মুরগী সপ্তাহে 3টি ডিম পাড়ে ও বাচ্চা মুরগী প্রতি সপ্তাহে 5টি ডিম পাড়ে। প্রতিটি ডিমের দাম 3 টাকা করে। প্রতি মুরগী খাওয়াতে সপ্তাহে 10 টাকা লাগে। যদি মূলধন লগ্নী করা হয় 8000 টাকা মুরগী কেনার জন্য এবং যদি 100 জনের বেশী মুরগী রাখার সংস্থান না থাকে তাহলে কোন ধরণের মুরগী কটা কিনলে ক্রেতার সপ্তাহে অন্ততঃ 600 টাকা লাভ থাকে—এই সমস্যাকে উপস্থাপনা করতে হবে।

1.4. *ABC* খাদ্য প্রস্তুতকারক কোম্পানী স্বল্প ক্যালোরীর কিন্তু উচ্চ প্রোটিন যুক্ত সুষম খাদ্য গ্রহণের জন্য হাইপ্রো নামে একটি খাদ্য তৈরী করে। একদল ডাক্তাররা মিলে এই হাই-প্রোর উপাদানসমূহ ঠিক করেছেন।

মূল দুটি খাদ্য সামগ্রীর মধ্যে কি পরিমাণ ক্যালোরী, প্রোটিন ও ভিটামিন আছে তা নীচের টেবিলে দেওয়া হল :

পুষ্টিকর উপাদান	পুষ্টিকর উপাদানের একক মূল খাবারের 100 গ্রামে মধ্যে আছে মূল খাবার		মূল খাবার হাই-প্রোর মধ্যে আছে কমপক্ষে
	1	2	
ক্যালোরী	350	250	300
প্রোটিন	250	300	200
ভিটামিন A	100	150	100
ভিটামিন B	75	125	100
পরিষেবার খরচ (টাকা)	1·50	2·00	

পরিষেবার কত কম খরচে মূলখাদ্য 1, 2-এর সাহায্যে হাই-প্রো উৎপাদন করা যায় সেই সমস্যা বিবৃত করতে হবে।

1.5. একজন সেলস্ম্যান দুধরণের জিনিষ বিক্রীয় দায়িত্বে আছেন। প্রতি মাসে উৎপন্ন দ্রব্য A এর 10 এককের বেশী বিক্রীয় করা সম্ভব নয় অথবা উৎপন্ন দ্রব্য B এর 39 এককের বেশী বিক্রী করা সম্ভব নয়। জরিমানা যাতে না হয় তার জন্য তাকে B ধরণের দ্রব্য অন্ততঃ 24 একক বিক্রী করতে হবে। বিক্রীর ওপর তিনি শতকরা 10 ভাগ কমিশন পান এবং প্রতি ঘণ্টায় 20 টাকা তাঁর ফোন করতে লাগে এবং এই খরচা তাঁকে নিজেকেই করতে হয়। তিনি আংশিক কাজ করেন এবং মাসে সর্বোচ্চ 80 ঘণ্টা কাজ করেন। A ধরণের জিনিষটি প্রতি এককে 1500 টাকায় বিক্রী হয় এবং এইসব বিক্রী করতে গড়ে 1·5 ঘণ্টা ফোন করতে সমর্থ হয়। B জিনিষটি বিক্রী করে 700 টাকা লাভ হয় এবং তার জন্য একবার ফোন করলে 30 মিনিট সময় চলে যায় এবং শতকরা 60 ভাগ ক্ষেত্রে এই ফোন সফল হয়।

প্রশ্ন হচ্ছে খদ্দেরদের মাসে কতকগুলি করে ফোন করলে তার কমিশন সর্বোচ্চ হয়।

2. নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করুন :

2.1. চরম $Z = 2x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 2$

2.2. চরম $Z = 2x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \geq 2$

$2x_1 + 3x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

2.3. চরম $Z = 5x_1 + 7x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + 8x_2 \leq 12$

$x_1 - x_2 \leq 2$

$2x_1 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

2.4. চরম $Z = 2x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \leq 10$

$2x_1 \leq 40$

$x_1, x_2 \geq 0$

2.5. চরম $Z = 3x_1 + 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \geq 6$

$x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

1.9 উত্তরমালা

1.1. x_1 = উৎপন্ন চেয়ারের সংখ্যা, x_2 = উৎপন্ন টেবিলের সংখ্যা নির্ণেয় রৈ. প্রো. স.

চরম $Z = 40x_1 + 50x_2$

শর্তসাপেক্ষে $4x_1 + 2x_2 \leq 1300$

$15x_1 + 20x_2 \leq 1500$

1.2. x_1 = 1 নং খড়ের একক যা কেনা হয়েছে

x_2 = 2 নং " " " " "

নির্ণেয় রৈ. প্রো. স. :

অবম $Z = 5x_1 + 6x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + x_2 \geq 14$

$2x_1 + 3x_2 \geq 22$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

1.3. ধরা যাক x_1 সংখ্যক বৃদ্ধ মুরগী কেনা হয়েছে এবং x_2 সংখ্যক বাচ্চা মুরগী কেনা হয়েছে।

নির্ণেয় রৈ. প্রা. স.

$$\text{চরম } Z = 9x_1 + 15x_2 - 10\ (x_1 + x_2)$$
$$= 5x_2 - x_1$$
$$80x_1 + 200x_2 \le 8000$$
$$x_1 + x_2 \le 100$$
$$9x_1 + 15x_2 \ge 600$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

1.4. ধরা যাক x_1 এককের প্রথম মূল খাবারের সঙ্গে x_2 একক দ্বিতীয় মূল খাবার মিশ্রণে এক একক হাই-প্রো তৈরী হয়েছে।

নির্ণেয় রৈ. প্রো. স.

$$\text{অবম } Z = 1{\cdot}5x_1 + 2{\cdot}0x_2$$
$$\text{শর্তসাপেক্ষে } 350x_1 + 250x_2 \ge 300$$
$$250x_1 + 300x_2 \ge 200$$
$$100x_1 + 150x_2 \ge 100$$
$$75x_1 + 125x_2 \ge 100$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

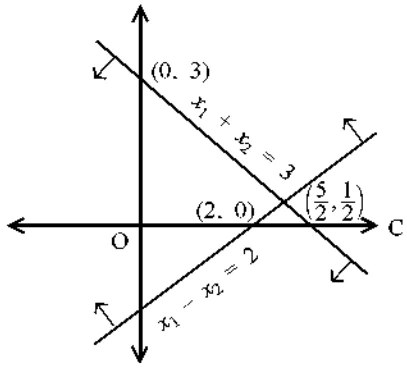
1.5. ধরা যাক লোকটি প্রতি মাসে x_1 একক A ও x_2 একক B বিক্রী করে—

নির্ণেয় রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হল :

$$\text{চরম } Z = 0{\cdot}1 \times (1500 \times 0{\cdot}5x_1 + 700 \times 0{\cdot}6\ x_2)$$
$$- 20\ (1{\cdot}5x_1 + 0{\cdot}5x_2)$$
$$= 75x_1 + 42x_2 - 30x_1 - 10x_2$$
$$= 45x_1 + 39x_2$$
$$\text{শর্তসাপেক্ষে } x_1 \le 10,\ x_2 \le 39$$
$$x_2 \ge 24,$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

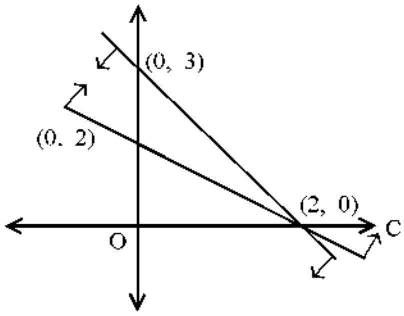
2.1. চরম $Z = 2\times\frac{5}{2}+1\times\frac{1}{2}=6$

চরম সমাধান $= \left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$



2.2. চরম $Z = 2 \times 0 + 3 \times 3 = 9$

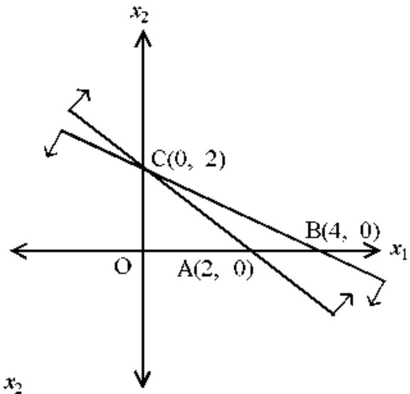
চরম সমাধান $(0, 3)$



2.3. চরম $Z = 2 \times 3 + 3.0 = 6$

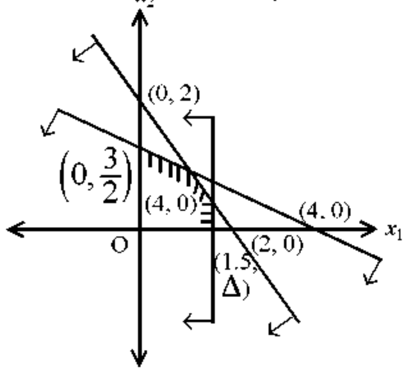
$= 2 \times 0 + 3 \times 2$

চরম সমাধান BC সংযোজক সরলরেখা।



2.4. চরম $Z = \frac{62}{5}$

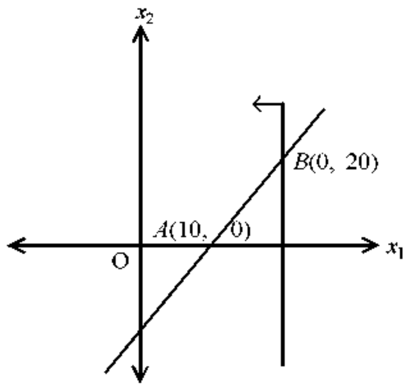
চরম সমাধান $\left(\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right)$



2.5. চরম $Z = 2 \times 0 + 1 \times 20 = 20$

$= 2 \times 10 + 1 \times 0 = 20$

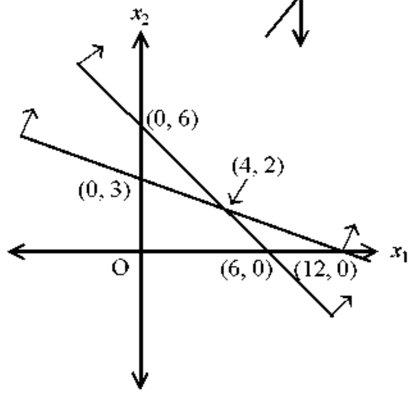
AB সরলরেখা চরম সমাধান।



2.6. অবম $Z = 3 \times 0 + 2 \times 3$

$= 6$

অবম সমাধান = (0, 3)



তথ্যসূত্র

1. G. Hadley (1974)	Linear Programming Addison Wesely Publishing Comp.
2. S. I. Gass (1958)	Linear Programming, N.Y. Mc-Graw Hill
3. J. G. Chakraborty and P. R. Ghosh (2001)	Linear Programming and Game Theory, Moulik Library
4. J. K. Sharma (2003)	Operations Research, Macmillan India
5. T. Moulik*	Linear Programming, U. N. Dhur and Sons Private Ltd.
6. R. N. Sen (2007)	Study Material, EMT 14 Linear Programming and Game Theory . Block-1 Netaji Subhas Open University

* Not known

একক 2 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামিং ব্যবহৃত গাণিতিক ধারণাসমূহ

গঠন

2.1 উদ্দেশ্য

2.2 রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর বীজগাণিতিক রূপ

2.3 সেটের সংজ্ঞা এবং সংশ্লিষ্ট ধারণাসমূহ

2.4 উত্তর সেট

2.5 E_n দেশের ভেক্টরসমূহ

2.6 রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধানযোগ্যতা

2.7 সেটের বিচ্ছিন্নতা ও অবলম্বন **(Separation and Support of Sets)**

2.8 E_n-দেশে শঙ্কু

2.9 মৌলিক সমাধান ও কার্যকর মৌল সমাধান

2.10 সারাংশ

2.11 অনুশীলনী

2.12 উত্তরমালা

2.1 উদ্দেশ্য

এই এককের উদ্দেশ্য হ'ল রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা চর্চা করতে গেলে যে সমস্ত গাণিতিক ধারণাসমূহের প্রয়োজন হয়, সেগুলোর বিশদ ব্যাখ্যা করা এবং রৈখিক প্রোগ্রামিং তত্ত্বে সেগুলোর প্রয়োগ উল্লেখ করা।

2.2 রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর বীজগাণিতিক রূপ

ধরা যাক, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ প্রদত্ত n-সংখ্যক সিদ্ধান্তগ্রহণকারী চল। তাহলে একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাকে লেখা যায় ঃ

চরম (অবম) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ (2.1)

শর্তসাপেক্ষে $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_m x_n \; \{\leq = \geq\} \; b_1$ (2.2)

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \; \{\leq = \geq\} \; b_{m1} \quad (2.3)$$

যোগের চিহ্নে ব্যবহার করে (2.1)—(2.3)-কে আরও সংক্ষিপ্ত আকারে লেখা যায়,

চরম (অবম) $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (2,.4)

শর্তসাপেক্ষে $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; \{\leq = \geq\} \; b_i, i = 1, 2, \ldots m$ (2.5)

দ্বিমাত্রিকতলে যে-কোনো বিন্দুকে ক্রমিক স্থানাংকযুগল দিয়ে লেখা যায়, যেমন—$x_1 x_2$—তলে যে কোনো বিন্দুকে উপস্থাপনা করা যায় $x = (x_1, x_2)$ হিসাবে। এই ধারণাকে বীজগণিতের ঢঙে n-মাত্রায় বিস্তৃত করে লেখা যায়, $x = (x_1, x_2, \ldots.. x_n)$।

আমরা n-মাত্রিক ভেক্টর C-কে লিখি $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$- একসারি ভেক্টর হিসাবে। অনুরূপে $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$—এই স্তম্ভ ভেক্টরটি n-মাত্রিক তলে একটি বিন্দুকে নির্দেশ করে। সুতরাং,

$$Cx = (C_1, C_2 \ldots C_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \quad (2.6)$$

A-কে যদি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স হিসাবে প্রকাশ করি, তাহলে

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

অর্থাৎ, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ (2.8)

b-কে n-মাত্রিক স্তম্ভ ভেক্টর হিসাবে লেখা হ'ল—

অর্থাৎ, $$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

(2.5) সমীকরণসমূহ বা অসমীকরণতন্ত্রকে সংক্ষিপ্ত আকারে লেখা যায়,

$$Ax\{\leq \; = \; \geq\}\, b \tag{2.10}$$

তাহলে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার বীজগাণিতিক রূপ হ'ল—

$$\left.\begin{array}{rl} \text{চরম (অবম)} & Z = Cx \\ \text{শর্তসাপেক্ষে} & Ax\{\leq \; = \; \geq\}b \\ & x \geq 0 \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

$\tilde{a}_j$ যদি A-এর j-স্তম্ভভেক্টর হয় অর্থাৎ,

$$\tilde{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

তাহলে ম্যাট্রিক্স A-কে লেখা যায়,

$$A = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots \tilde{a}_n)$$

অতএব বাধাগোষ্ঠী $Ax = b$-কে লেখা যায় :

$$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots \tilde{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

অথবা, $$\sum_{j=1}^{n} x_j \;\; \tilde{a}_j \{\leq \; = \; \geq\}\; b \tag{2.12}$$

2.3 ভেক্টর সংজ্ঞা ও সংশ্লিষ্ট ধারণাসমূহ

2.3.1. সেট ঃ সেট হ'ল সুসংজ্ঞাত পরস্পর আলাদা কয়েকটি জিনিষের সমষ্টি। সু-সংজ্ঞাত বলতে বোঝায় কোনো একটি জিনিষ ঐ সমাবেশের একজন কিনা তা সহজেই বোঝা যায়। যে জিনিষগুলো নিয়ে ঐ সেট গঠিত হয়, তাদেরকে ঐ সেটের উপাদান বলা হয়।

x যদি A সেটের একটি উপাদান হয় তাহলে আমরা লিখি $x \in A$।

উদাহরণ 2.1 ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার একটি সেট।

উদাহরণ 2.2 বাস্তব রেখার ওপর মূলদ সংখ্যার (*r*ational numb*Er*) একটি সেট।

আমরা অনেকসময় একটি সেটকে বর্ণনা করি, একজোড়া ধনুর্বন্ধনীর মধ্যে উপাদানগুলোকে আবদ্ধ রেখে যেমন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট A-কে প্রকাশ করা যায় $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ হিসাবে। অপর একভাবে আমরা A-কে প্রকাশ করতে পারি :

যেমন—$A = \{x : x$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা$\}$।

2.3.2. দুটি সেটের সমতা ঃ দুটো সেট A ও B কে পরস্পর সমান বলা হয় যদি A-এর প্রতি উপাদানই B-এর একটি উপাদান এবং B-এর প্রতিটি উপাদানই A-এর একটি উপাদান হয়। এটিকে ভাবে লেখা যায় ঃ $A = B$।

2.3.3. উপসেট ঃ একটি সেট A-কে B-এর উপসেট বলা হয় যদি A-এর প্রতিটি উপাদানই B-এর একটি উপাদান হয়।

A, B-এর একটি উপসেট হ'লে তাকে লেখা হয় $A \subseteq B$ হিসাবে।

মন্তব্য 2.1 ওপরের সংজ্ঞানুযায়ী প্রতি সেটই তার নিজের উপসেট।

2.3.4. প্রকৃত উপসেট ঃ A-কে B-এর প্রকৃত উপসেট বলা হয় যদি A, B-এর একটি উপসেট হয় এবং B-এর অন্ততঃ একটি উপাদান থাকবে যেটা A-এর উপাদান নয়। A, B-র প্রকৃত উপসেট হ'লে তা প্রকাশ করা হয় $A \subseteq B$ হিসাবে।

2.3.5. সংযোগ ঃ দুটি সেট A ও B-এর সংযোগকে প্রকাশ করা হয় $A \cup B$ হিসাবে। এই সংযোগ এমন একটি সেট যার প্রকৃত উপাদানই হয় A-এর উপাদান, না হয় B-এর উপাদান অথবা A ও B-এর উভয়েরই উপাদান। অর্থাৎ $x \in B \Rightarrow$ হয় $x \in A$ অথবা $x \in B$ অথবা যুগপৎ $x \in A$ এবং $x \in B$।

2.3.6. ছেদ ঃ দুটি সেট A ও B-এর ছেদ বলতে এমন একটি সেট বোঝায় যার প্রত্যেকটি উপাদানই যুগপৎ A ও B-এর উপাদান। A ও B-এর ছেদকে লেখা হয় $A \cap B \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$।

2.3.7. শূন্য সেট ঃ শূন্য সেট বলতে এমন একটি সেট বোঝায় যার কোনো উপাদানই নেই। শূন্য সেটকে ϕ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

মন্তব্য 2.2 একটি শূন্য সেট যেকোনো সেটেরই উপসেট।

2.3.8. n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ E_n ঃ

আমরা জানি, x_1x_2—এই দ্বিমাত্রিক তলের যেকোনো বিন্দুকে অর্থাৎ ক্রমিত x_1, x_2 স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দু হিসাবে প্রকাশ করতে পারি। যেমন—$x = (x_1, x_2)$।

এই ধারাকে আমরা n-মাত্রা পর্যন্ত বিস্তৃত করতে পারি।

ঐ সেটের যে কোনো বিন্দুকে ক্রমিত n-সংখ্যক বাস্তব সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করতে পারি অর্থাৎ

$x \in E_n \Rightarrow x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$।

এই সেটকে n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ বলা হবে যদি নিম্নলিখিত শর্তগুলি সিদ্ধ হয় ঃ

(A) ঐ সেট দুই উপাদানের যোগফল ও যে কোনো উপাদানকে স্কেলার দিয়ে গুণন এই দুই প্রক্রিয়ায় সাপেক্ষে বদ্ধ (closed) হয়।

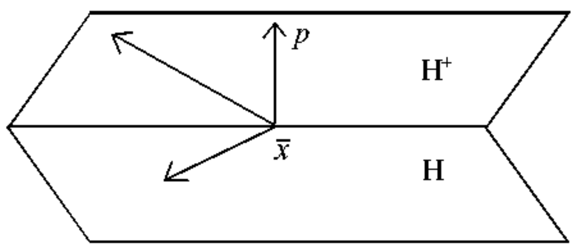
(b) $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots x_n^1)$ এবং $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2)$

এই দুই বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $d(x^1, x^2)$-কে নিম্নরূপে ব্যক্ত করা যায়,

$$d(x^1, x^2) = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^1 - x_i^2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

তখন ঐ সেটকে n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ বলা হয় এবং E_n দ্বারা চিহ্নিত হয়।

2.3.9. পরাসমতল, অর্দ্ধদেশ ঃ E_n ইউক্লিডীয় দেশে H-কে পরাসমতল বলা হয় যদি এগন সব বিন্দুর সমাবেশ যাদের প্রকাশ করা যায় $\{x : p^T x = \alpha\}$ এইভাবে। p হচ্ছে শূন্য নয় এমন একটি n-মাত্রিক ভেক্টর এবং α একটি স্কেলার। x, E_n দেশের একটি উপাদান। p-কে বলা হয় পরাসমতলের অভিলম্ব ভেক্টর। একটি পরাসমতল দুটি সেট H^+ এবং H^- চিহ্নিত করে। $H^+ = \{x : p^T x \geq \alpha\}$ কে একটি বদ্ধ অর্দ্ধদেশ বলা হয়। $H^- = \{x : p^T x \leq \alpha\}$-কেও একটি বদ্ধ অর্দ্ধদেশ বলা হয়।



চিত্র 2.1 : পরাসমতল H ও অর্দ্ধদেশ H^+

$\bar{x}$ যদি পরাসমতল H-এর ওপর একটি বিন্দু হয়, তাহলে $p^T \bar{x} = \alpha$. অতএব H-কে লেখা যায় $\{x : p^T(x - \bar{x}) = 0\}$ হিসাবে। H^+-কে লেখা যায় $\{x : p^T(x - \bar{x}) \geq 0\}$ হিসাবে।

উদাহরণ 23. $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 14\}$.

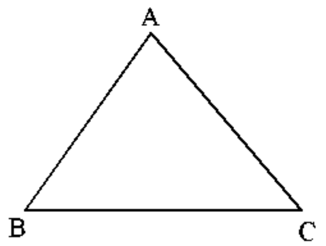
অভিলম্ব ভেক্টর $= p = (1, 2, -1, 2)$ 1 $(1, 5, -1, 1)$ এই সমতলের ওপর একটি ন্দিু। সুতরাং বিকল্পভাবে লেখা যায়

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : (x_1 - 1) + 2(x_2 - 5) - (x_3 + 1) + 2(x_4 - 1) = 0\}$$

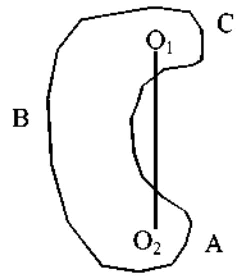
2.4 উত্তল সেট

2.4.1. উত্তল সেট ঃ একটি সেট X-কে উত্তর সেট বলা হয় যদি x_1, x_2, X-এর দুটি বিন্দু হয়, তাহলে $x_1\ x_2$—সংযোজক সরলরেখার অংশও X-এর মধ্যেই থাকবে। অর্থাৎ, অঙ্কের ভাষায় $x_1, x_2 \in X \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)\, x_2 \in X,\ 0 \leq \lambda \leq 1$.

উদাহরণ 2.4 একটি ত্রিভুজ ও তার অন্তঃস্থল একটি উত্তল সেট গঠন করে (চিত্র 2.2)



চিত্র নং 2.2



চিত্র নং 2.3

মন্তব্য ঃ 2.3 অঙ্কিত ছবিটি (চিত্র নং 2.3) উত্তল নয়। কেননা O_1, O_2 সেটটিতে থাকলেও $O_1\ O_2$ সরলরেখার অংশটি সেটে থাকে না (কেননা O_1O_2 রেখিতাংশ ঐ বক্ররেখা ABC-এর মধ্যে সম্পূর্ণভাবে থাকে না।)

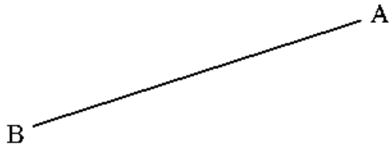
2.4.2 উত্তল সমবায় ঃ X সেটে অবস্থিত $x_1, \ldots x_n$ বিন্দু সমূহের উত্তল সমবায় বলতে বোঝান হবে এমন বিন্দু Z যেখানে

$$Z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

$$0 \leq \lambda_j \leq 1,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

2.4.3. প্রান্তিক বিন্দু ঃ $x \in X$-কে উত্তল সেট X-এর প্রান্তিক বিন্দু বলা হবে যদি ও একমাত্র যদি X-এর মধ্যে এমন দুটো বিন্দু $x_1, x_2\ (x_1 \neq x_2)$ থাকে না, যাতে করে x-কে x_1, x_2-এর উত্তল সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে অর্থাৎ $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2,\ 0 < \lambda < 1$, এই সমতাটি সত্য হবে না।

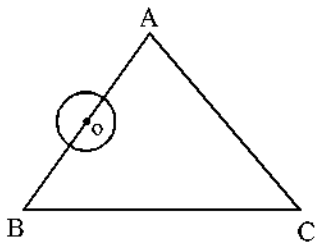
উদাহরণ 2.5. নীচের চিত্রে (চিত্র নং 2.4) A ও B একটি প্রান্তিক বিন্দু।



চিত্র নং 2.4

উদাহরণ 2.6. চিত্র নং 2.2 তে A, B ও C প্রান্তিক বিন্দুসমূহ।

2.4.4. পরিধিস্থ বিন্দু ঃ প্রদত্ত সেট X-এর ওপর একটি বিন্দুকে পরিধিস্থ বিন্দু বলা হয়, যদি ঐ পরিধিস্থ বিন্দুর চারিদিকে যত ছোট গোলকই অঙ্কন করা যাক না কেন, ঐ গোলকের মধ্যে X-এর অন্তঃস্থ বিন্দু ও বহিঃস্থ বিন্দু থাকবে।



চিত্র নং 2.5

2.5 নং চিত্রে A ও B পরিধিস্থ বিন্দুদ্বয়। AB রেখার ওপর যে কোন বিন্দু O নেওয়া হ'ল। O একটি পরিধিস্থ বিন্দু।

2.4.5. উত্তল আধার (Convex Hull) : E_n-এ অবস্থিত একটি সেট S-এর উত্তল আধারকে $H(S)$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয় এবং $H(S)$ সংজ্ঞাত হয় S-এর বিন্দুদের উত্তল সমাবেশ হিসেবে অর্থাৎ $x \in H(S)$ যদি এবং একমাত্র যদি x-কে প্রকাশ করা যায়,

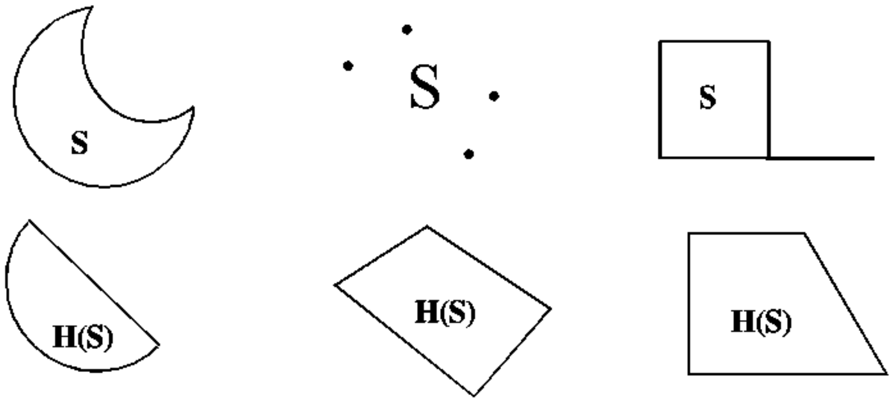
$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_i x^j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots k$$

k-একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $x_1, x_2, \ldots x_k \in S$.

চিত্র নং 2.6 তে উত্তল আধারের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হ'ল।



চিত্র নং 2.6

উপপাদ্য 2.4.1. E_n দেশে পরাসমতল $H = \{x : p^T x = \alpha\}$ একটি উত্তল সেট।

ধরা যাক,x^1, x^2 বিন্দুদ্বয় H-পরাসমতলে অবস্থিত।

তাহলে $p^T x^1 = \alpha, \quad p^T x^2 = \alpha.$

x^1 ও x^2-র উত্তল সমাবেশ হ'ল $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2,\ 0 \le \lambda \le 1.$

$P^T(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2)$, H-থাকে। সুতরাং H-একটি উত্তল সেট।

উপপাদ্য 2.4.2. একটি বদ্ধ অর্দ্ধদেশ একটি উত্তল সেট।

ধরা যাক,x^1, x^2 বদ্ধ অর্দ্ধদেশ $H^+ = \{x : p^T x \ge \alpha\}$-এ অবস্থিত।

তাহলে, $p^T x^1 \ge \alpha, \quad p^T x^2 \ge \alpha$

$$\text{এখন,} p^T (\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2) = \lambda p^T x^1 + (1 - \lambda) p^T x^2,\ 0 \le \lambda \le \alpha$$
$$\ge \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha$$
$$= \alpha.$$

অর্থাৎ, x^1 ও x^2-র উত্তল সমাবেশ বদ্ধ অর্ধদেশ H^+-তে অবস্থিত। অতএব H^+ একটি উত্তল সেট।

উপপাদ্য 2.4.3. $H - = \{x : p^T x \le \alpha\}$ এই বদ্ধ অর্ধদেশ ও উত্তল।

প্রমাণ উপপাদ্য 2.4.2-এর প্রমাণের অনুরূপ।

উপপাদ্য 2.4.4. দুটি উত্তল সেটের ছেদ ও একটি উত্তল সেট।

ধরা যাক, X_1 ও X_2 দুটি উত্তর সেট এবং $X = X_1 \cap X_2$.

$x_1 \in X_1 \cap X_2 \Rightarrow x_1 \in X_1$ এবং $x_1 \in X_2$.

আবার, $x_2 \in X_1 \cap X_2 \Rightarrow x_2 \in X_1$ এবং $x_2 \in X_2$.

X_1 উত্তল বলিয়া,

$$x_1,\ x_2 \in X_1 \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)\ x_2 \in X_1, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

একইভাবে, X_2 উত্তল বলিয়া,

$$x_1 . x_2 \in X_2 \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)\ x_2 \in X_2, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

তাহলে, $x_1,\ x_2 \in X_1 \cap X_2 \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)\ x_2 \in X_1 \cap X_2,\ 0 \le \lambda \le 1.$

অতএব, $X_1 \cap X_2$ একটি উত্তল সেট।

উপপাদ্য 2.4.5. E_n দেশে $x^1,\ x^2,\ \ldots\ x^p$ সীমিত বিন্দুসমূহ।

এই বিন্দুসমূহের উত্তল সমবায়ের সেট একটি উত্তল সেট।

$x^1,\ x^2,\ \ldots\ x^p$—এই বিন্দু সমূহের উত্তল সমবায়ের সেট হ'ল X যেখানে

$$X = \left\{ x \middle| x = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x^i,\ 0 \le \mu_i \le 1,\ \sum_i \mu_i = 1 \right\}$$

ধরা যাক, $u,\ v \in X$

সুতরাং, আমরা $\mu_i',\ i = 1, \ldots p$ পাব যাতে করে $u = \sum_{i=1}^{p} \mu_i' x^i,$

যেখানে, $\mu_i' \ge 0,\ \sum_{i=1}^{p} \mu_i' = 1$

একইভাবে, $\mu_i'',\ i = 1, 2,\ \ldots p$ পাওয়া যায় যাতে করে,

$$v = \sum_{i=1}^{p} \mu_i'' x^i, \qquad \sum_{i=1}^{p} \mu_i'' = 1$$

তাহলে, $\lambda \mathrm{u} + (1-\lambda)\mathrm{v},\quad \lambda \ge 0,\quad 0 \le \lambda \le 1$

$$= \lambda \left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i' x^i \right) + (1-\lambda) \left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i'' x^i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left[(\lambda \mu_i' + (1-\lambda) \mu_i'' \right] x^i$$

$= \sum_{i=1}^{p} v_i x^i$, যদি $v_1 = \lambda \mu_i' + (1-\lambda) \mu_i''$ হয়।

এখন $v_i \geq 0$ যেহেতু, $\lambda, \mu_i', \mu_i'', i = 1, \ldots p$, প্রত্যেকেই ধনাত্মক।

$$\sum_{i=1}^{p} v_i = \lambda \sum_{i=1}^{p} \mu_i' + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{p} \mu_i''$$

$$= \lambda + (1 - \lambda), \left[\text{যেহেতু, } \sum_{i=1}^{p} \mu_i' = 1, \sum_{i=1}^{p} \mu_i'' = 1 \right]$$

$$= 1.$$

অতএব X সেটটি উত্তল।

2.4.6 বহুতলক (Polyhedron) : E_n দেশে একটি সেট X-কে বহুতলক বলা হয় যদি X-কে সসীম সংখ্যক বদ্ধ অর্ধদেশের ছেদ হিসাবে প্রকাশ করা যায় অর্থাৎ $X = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$ যেখানে, $X_i = \left\{ x \middle| p_i^T x \leq \alpha_i, \ i = 1, 2, \ldots m \right\}$, p_i শূন্য নয় এমন একটি ভেক্টর, α_i ধ্রুবক, i = 1, 2, ... m.

মন্তব্য 2.4. একটি বহুতলক সেট উত্তল।

উদাহরণ 2.7. দেখান যে, $X = \{x \mid x \in R, \ |x| \leq 3$, যদি $0 \leq \lambda \leq 1$ হয়।

$$|\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2| \leq \lambda \ |x^1| + (1 - \lambda) \ |x^2|$$

$$\leq (\lambda + (1 - \lambda) \ 3$$

$$= 3.$$

অতএব, $\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 \in X$ যেখানে $0 \leq \lambda \leq 1$.

অতএব, X একটি উত্তল সেট।

উদাহরণ 2.8. দেখান যে, X সেটটি $X = \left\{ (x_1, x_2) \middle/ \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{3} \leq 1 \right\}$

উত্তল সেট।

ধরা যাক, $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$ এবং $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$

X সেটের দুটি বিন্দু।

সুতরাং, $\frac{(x_1^1)^2}{2} + \frac{(x_2^1)^2}{3} \leq 1, \ \frac{(x_1^2)^2}{2} + \frac{(x_2^2)^2}{3} \leq 1$

এখন, $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 = \left[\{\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2\}, \{\lambda x_2^1 + (1-\lambda)x_2^2\}\right]$

$$\frac{\{\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2\}^2}{2} + \frac{\{\lambda x_2^1 + (1-\lambda)x_2^2\}^2}{3}$$

$$= \lambda^2\left(\frac{(x_1^1)^2}{2} + \frac{(x_2^1)^2}{3}\right) + (1-\lambda)^2\left(\frac{(x_1^2)^2}{2} + \frac{(x_2^2)^2}{3}\right)$$

$$+ 2\lambda(1-\lambda)\left(\frac{x_1^2 x_1^2}{2} + \frac{x_2^1 x_2^2}{3}\right)$$

$$\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)\left(\frac{x_1^1 x_1^2}{2} + \frac{x_2^1 x_2^2}{3}\right) \tag{2.13}$$

যেহেতু সমান্তরীয় মধ্যক ≥ গুণোত্তরীয় মধ্যক,

$$x_1^1 x_1^2 \leq \frac{(x_1^1 + x_1^2)^2}{4}$$

$$x_2^1 x_2^2 \leq \frac{(x_2^1 + x_2^2)^2}{4}$$

$$\frac{x_1^1 x_1^2}{2} + \frac{x_2^1 x_2^2}{3} \leq \frac{1}{4}\left[\left(\frac{(x_1^1)^2 + (x_1^2)^2 + 2x_1^1 x_1^2}{2}\right) + \left(\frac{(x_2^1)^2 + (x_2^2)^2 + 2x_2^1 x_2^2}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{(x_1^1)^2}{2} + \frac{(x_2^1)^2}{3}\right) + \left(\frac{(x_1^2)^2}{2} + \frac{(x_2^2)^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^1 x_1^2}{2} + \frac{x_2^1 x_2^2}{3}\right)\right]$$

অথবা, $\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^1 x_1^2}{2} + \frac{x_2^1 x_2^2}{3}\right) \leq \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$

অর্থাৎ, $\left(\frac{x_1^1 x_1^2}{2} + \frac{x_2^1 x_2^2}{3}\right) \leq 1$ (2.14)

(2.13) ও (2.14) থেকে পাই,

$$\frac{(\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2)^2}{3} + \frac{(\lambda x_2^1 + (1-\lambda)x_2^2)^2}{3}$$

$$\leq \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 + 2\lambda(1 - \lambda) = (\lambda + (1 - \lambda))^2 = 1.$$

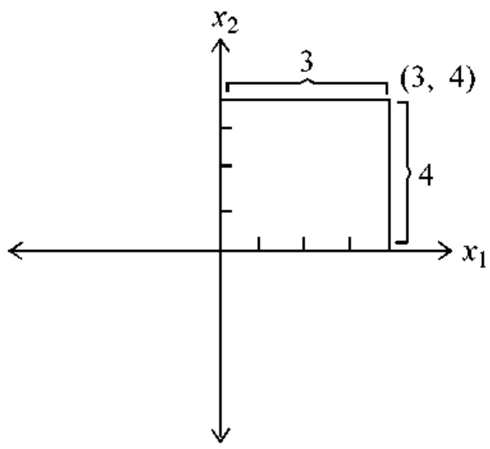
অতএব, X সেটটি উত্তল।

মন্তব্য 2.4 : কিন্তু ঐ উপবৃত্তের পরিধি $X = \left\{x | \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{3} = 1\right\}$ সেটটি উত্তল নয়।

2.5 E_n দেশের ভেক্টরসমূহ

আমরা জানি E_n দেশে কোন বিন্দুকে ক্রমিত n সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা যায় $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$। x-কে একটি n-মাত্রিক ভেক্টর বলা হয়। x_i, $i = 1, 2, \ldots n$-কে x-এর i–তম উপাংশ বলা হয়।

উদাহরণ 2.9. E_2 দেশে $x = (3, 4)$ বলতে এমন বিন্দু বোঝায় যার x_1 অক্ষ বরাবর x-এর উপাংশ হ'ল 3 ও x_2-অক্ষ বরাবর x-এর উপাংশ হ'ল 4. [চিত্র নং 2·7]



চিত্র নং 2.7

2.5.1. E_n-দেশে দুটি ভেক্টরের স্কেলার বা ডট্ গুণফল

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

E_n-দেশে প্রদত্ত দুটি ভেক্টর।

E_n দেশে x ও y-এর স্কেলার বা ডট্ গুণফলকে $x.y$ হিসাবে লেখা হয় এবং এর মান হ'ল,

$$x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

যদি $x = y$ হয়,

$$x.y = x, x = \sum_{i=}^{n} |x_i|^2$$

$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ x-এর নর্ম বলা হয় এবং চিহ্নিত করা হয় $\| x \|$ হিসাবে।

2.5.2. E_n-দেশে একক ভেক্টর।

E_n দেশে $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$-কে একক ভেক্টর বলা হয়।

কারণ $\| e_i \| = 1$ অর্থাৎ n-মাত্রিক গোলকের (sphere) পরিধির ওপর e_i ভেক্টরের অন্তিম বিন্দু অবস্থিত।

2.5.3. রৈখিক সমবায় ঃ n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ, E_n-এ অবস্থিত A ভেক্টরকে $A^1, A^2, \ldots, A_n \in E_n$-এর রৈখিক সমাবেশ বলা হয়, যদি স্কেলারসমূহ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ পাওয়া যায় যাতে $A = \lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 + \ldots + \lambda_n A^n$, $\lambda_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

উদাহরণ 2.10. E_2 দেশে, (1, 2), (3, 4) (5, 6)-এর রৈখিক সমাবেশ হল ভেক্টর

$$A = \lambda_1 (1, 2) + \lambda_2 (3, 4) + \lambda_3 (5, 6)$$
$$= (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3,\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3)$$

2.5.4. রৈখিকভাবে পরাধীন বা নির্ভরশীল ভেক্টরসমূহ ঃ

E_n দেশে $a^1, a^2, \ldots, a^p$ ভেক্টরসমূহকে রৈখিকভাবে পরাধীন বা নির্ভরশীল বলা হবে যদি স্কেলারসমূহ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ পাওয়া যাবে (যারা সবাই একসঙ্গে শূন্য নয়) যাতে করে

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \ldots + \lambda_p a^p = 0$$

উদাহরণ 2.11. দেখান যে (1, 2), (2, 3), (3, 4) E_2-দেশে পরস্পর রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

অর্থাৎ, $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$$

প্রথম সমীকরণকে 4 দিয়ে ও দ্বিতীয় সমীকরণকে 3 দিয়ে গুণ করে ও দ্বিতীয় সমীকরণকে প্রথম সমীকরণ থেকে বিয়োগ করে আমরা পাই,

$$-2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \text{ বা, } \frac{\lambda_1}{1} = \frac{\lambda_2}{-2} = k\,(\text{say})$$
$$3\lambda_3 = -k + 4k = 3k \text{ অর্থাৎ, } \lambda_3 = k.$$

অতএব, $\dfrac{\lambda_1}{1} = \dfrac{\lambda_2}{-2} = \dfrac{\lambda_3}{1}$.

উদাহরণ 2.13. E_n-দেশে একক ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন।

ধরা যাক, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ স্কেলারসমূহ পাওয়া গেল যাদের সবাই একসঙ্গে শূন্য নহে যাতে করে,

$$\lambda_1 (1, 0, \ldots, 0) + \lambda_2 (0, 1, \ldots, 0) + \ldots + \lambda_n (0, 0, \ldots, 0, 1) = 0.$$

অর্থাৎ, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots \lambda_n = 0$.

উদাহরণ 2.14. দেখান যে, (1, 0, 3), (0, 1, 4), (2, 1, 0) এই ভেক্টরগুলি E_3 দেশে পরস্পর স্বাধীন।

ধরা যাক, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ স্কেলারসমূহ যা সবাই একসঙ্গে শূন্য নয় পাওয়া যায়,

$$\lambda_1(1, 0, 3) + \lambda_2(0, 1, 4) + \lambda_3(2, 1, 0) = 0$$

অতএব, $\lambda_1 = -2\lambda_3 = 0$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

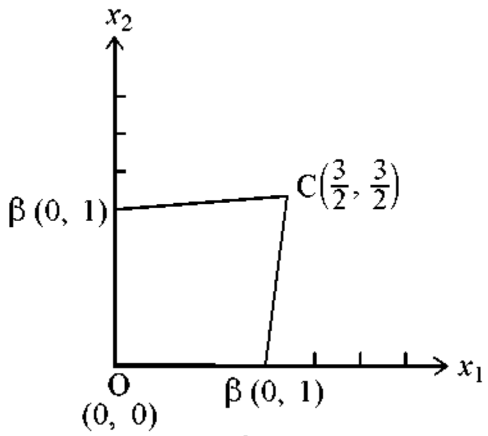
$$3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0.$$

অর্থাৎ, $\lambda_1 = -2\lambda_3, \quad \lambda_2 = -\lambda_3, \quad \lambda_1 = -\frac{4}{3}\lambda_2$

অতএব, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

উদাহরণ 2.15. (0, 0), (1, 0), (0, 1) এবং $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$—এই বিন্দুগুলি দিয়ে গঠিত উত্তল বহুভুজ ও প্রান্তিক বিন্দুগুলি নির্ণয় করুন।

নীচের চিত্রটি দেখুন



চিত্র নং 2.8

2.5.5. রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টরসমূহ ঃ

E_n-দেশে $a^1, a^2, \ldots, a^p$-তে ভেক্টরসমূহকে রৈখিকভাবে স্বাধীন বলা হয় যদি স্কেলারসমূহ $\lambda_1, \ldots, \lambda^p$-এর জন্য

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \ldots + \lambda_p a^p = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^1 = \lambda^2 = \ldots = \lambda^p = 0$$

অর্থাৎ, $\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \ldots + \lambda_p a^p = 0$

একমাত্র যদি $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots. = \lambda_p = 0$

উদাহরণ 2.12. দেখাতে হবে $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 3, -1)$ এবং $w = (5, 3, -2)$ রৈখিকভাবে পরাধীন।

ধরা যাক, আমরা পাই, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (সব একসঙ্গে শূন্য নয়) যাতে করে,

$$\lambda_1 (1, -1, 0) + \lambda_2 (1, 3, -1) + \lambda_3 (5, 3, -2) = 0$$

অর্থাৎ
$$\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$$
$$-\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$$
$$-\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$$

তৃতীয় সমীকরণ থেকে পাই, $\lambda_2 = -2\lambda_3$.

প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণদ্বয় থেকে পাই,

$$\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0,$$
$$-\lambda - 3\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 = -3\lambda_3.$$

অতএব, $\frac{\lambda_1}{-3} = \frac{\lambda_2}{-2} = \frac{\lambda_3}{1}$.

□ $OACB$ ও তার অন্তঃস্থ বিন্দুসমূহ হল উদ্দীষ্ট উত্তল বহুভুজ। এর কৌণিক বিন্দুসমূহ হ'ল O, A, C ও B.

2.6 রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধানযোগ্যতা

ধরা যাক, A একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স।

আমরা 1নং এককে দেখেছি কিভাবে ম্যাট্রিক্স A-কে স্তম্ভভেক্টর বা সারিভেক্টর হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

অর্থাৎ, $a_j = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, যদি j-তম স্তম্ভ ভেক্টর হয়,

তাহলে $A = (a_1, a_2, \ldots, an)$—এই সারি ভেক্টররূপে প্রকাশ করা যায়।

আবার যদি $a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in})$, i-তম সারি ভেক্টর হয় তাহলে A-কে স্তম্ভভেক্টর হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

2.6.1. ম্যাট্রিক্সের সারিমাত্রা (Row rank) ঃ

একটি ম্যাট্রিক্সের সারিমাত্রা বলতে ম্যাট্রিক্সের রৈখিকভাবে স্বাধীন সারির সংখ্যা বোঝায়।

2.6.2. ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভমাত্রা (Column rank) ঃ

একটি ম্যাট্রিক্সের রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভ ভেক্টরসমূহের সংখ্যাকে স্তম্ভমাত্রা বোঝায়।

মন্তব্য 2.5 একটি ম্যাট্রিক্সের ($m \times n$) ক্ষেত্রে সারি মাত্রা ও স্তম্ভ মাত্রা সমান এবং এদের সমানমাত্রাকে ম্যাট্রিক্সের মাত্রা বলা হয়।

2.6.3. বর্ধিত ম্যাট্রিক্স (A_b)

আমরা সমীকরণতন্ত্র $Ax = b$ নিয়ে আলোচনা করছি।

$$A_b \text{ বলতে বোঝায় } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

A যদি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে A_b একটি $m \times (n + 1)$ ম্যাট্রিক্স।

Ûàò $r(A_b) \geq r(A)$ কারণ A_b-এর রৈখিকভাবে স্বাধীন সারির সংখ্যা A-এর রৈখিকভাবে স্বাধীন সারির সংখ্যার চেয়ে কম হতে পারে না।

উপপাদ্য 2.6.1. যদি $r(A_b) > r(A)$ হয়, তাহলে $Ax = b$ এই সমীকরণতন্ত্রের কোনো সমাধান থাকে না।

ধরা যাক, $r(A_b) = k > r(A)$ তাহলে A_b-এর k রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভ ভেক্টর আছে। তাদের মধ্যে b একটি ভেক্টর হতেই হবে। তা নাহলে A-এর k-টা স্বাধীনস্তম্ভ ভেক্টর থাকবে। সেক্ষেত্রে $r(A_b)$, $r(A)$-এর সমান হ'বে। তাহলে b ভেক্টরকে A-এর স্বাধীনস্তম্ভ ভেক্টরসমূহের রৈখিক সমাবেশ প্রকাশ করা যাবে না। অর্থাৎ স্কেলারসমূহ x_j পাওয়া যাবে না যাতে করে $\sum_j x_j a_j = b$ হয়। অতএব এই সমীকরণতন্ত্রের কোনো সমাধান নেই অথবা এই সমীকরণতন্ত্রকে অসঙ্গত (inconsistent) বলা হয়।

উপপাদ্য 2.6.2. যদি $r(A) = r(A_b)$ হয়, তাহলে $Ax = b$, এই সমীকরণতন্ত্রের একটি সমাধান থাকবে।

যদি $r(A) = r(A_b) = k$ হয়, তাহলে A_b-এর প্রতিটি স্তম্ভই A-এর স্বাধীন k স্তম্ভের রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে। আমরা কোন সত্য ব্যাহত না করেই ধরতে পারি যে, A-এর প্রথম k স্তম্ভই রৈখিকভাবে স্বাধীন। যেহেতু b, A_b-র একটি স্তম্ভ আমরা এমন k-সংখ্যক স্কেলারসমূহ x_j পেতে পারে যাতে করে,

$$\sum_{j=1}^{k} x_j a_j = b$$

অর্থাৎ, $Ax = b$ এই সমীকরণতন্ত্রের অন্ততঃ একটি সমাধান পাওয়া যাবে। এক্ষেত্রে সমীকরণতন্ত্রকে সঙ্গত (consistent) বলা হয়।

উদাহরণ 2.16

$$3x_1 + 5x_2 = 16$$
$$x_1 + 9x_2 = 20$$

এই সমীকরণদ্বয়ের সমাধান আছে কি?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad r(A) = 2, \quad \text{নির্ণায়ক } A = 22 \neq 0.$$

$$A_b = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 16 \\ 1 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$ ধরা যাক স্তম্ভগুলি রৈখিকভাবে পরাধীন।

$$3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 16\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 + 9\lambda_2 + 20\lambda_3 = 0$$

দ্বিতীয় সমীকরণকে 3 দিয়ে গুণ করে ও প্রথম সমীকরণ থেকে বিয়োগ করে পাই,

$$-22\lambda_2 - 44\lambda_3 = 0$$

অথবা, $\lambda_2 = -2\lambda_3$

তাহলে পাই, $3\lambda_1 = -6\lambda_3$ অথবা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = -2$

তাহলে $-2 \times 3 - 5 \times 2 = -16$

$$-2 - 9 \times 2 = -20$$

অতএব, $r(A_b) = 2.$

অতএব সমাধান আছে এবং সেটা অনন্য।

উদাহরণ 2.17 $3x_1 + 5x_2 = 16$

$$1.8x_1 + 3x_2 = 9.6$$

এই সমীকরণতন্ত্রের সমাধান আছে কিনা দেখতে হবে।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1{\cdot}8 & 3 \end{bmatrix}$$ দ্বিতীয় সারি $= \frac{3}{5} \times$ প্রথম সারি।

$r(A) = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 16 \\ 1.8 & 3 & 9.6 \end{bmatrix}, \quad r(A_b) = 1$$

তাহলে এই সমীকরণতন্ত্রের একটি সমাধান আছে। যেহেতু $r(A) = 1 < 2$। ওই সমীকরণতন্ত্রের একটির বেশি সমাধান আছে।

মন্তব্য 2.6 : এই সমীকরণ যুগলের অসীম সংখ্যক সমাধান আছে। জ্যামিতিক দিক থেকে বলা যায় যে এই দুটি সমীকরণ একটি সরলরেখাকেই চিহ্নিত করে।

উদাহরণ 2.18. $3x_1 + 40x_2 = 14$

$$1.8x_1 + 24x_2 = 5$$

$$r(A) = 1,\ r(A_b) = 2,\ r(A) = 1 < r(b) = 2.$$

অতএব ঐ সমীকরণযুগলের কোন সমাধান নেই।

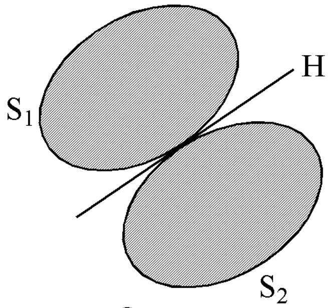
জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে বলা যায় ঐ সমীকরণ যুগল দুটি পৃথক সমান্তরাল সরলরেখা চিহ্নিত করে। ফলে তাদের কোনো ছেদবিন্দু নেই। অর্থাৎ সমীকরণদ্বয়ের কোন সমাধান নেই।

2.7 সেটের বিচ্ছিন্নতা ও অবলম্বন (Separation and Support of Sets)

2.7.1. দুটি সেটের বিচ্ছিন্নতা (Separation of two Sets) :

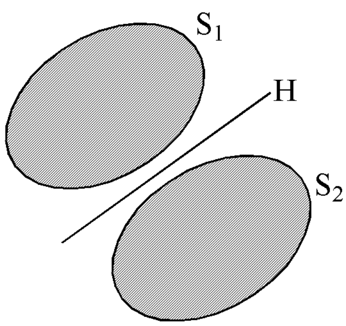
ধরা যাক, E_n-দেশে শূন্য নয় এমন দুটি সেট আছে S_1 এবং S_2।

একটি পরাসমতলকে $H = \{x \mid p^T x = \alpha\}$ কে দুটি সেট S_1 এবং S_2-কে বিচ্ছিন্ন করে বলা হয়, যদি S_1 ও S_2 সেট দুটি পরাসমতলের দুদিকে অবস্থিত হয়। অর্থাৎ যে কোন $x \in S_1$-এর জন্য যদি $p^T x \geq \alpha$ ($p^T x \leq \alpha$) হয় তাহলে যে কোন $x \in S_2$ এর জন্য $p^T x \leq \alpha$ ($p^T x \geq \alpha$) হয় (চিত্র নং 2.9)।



চিত্র নং 2.9

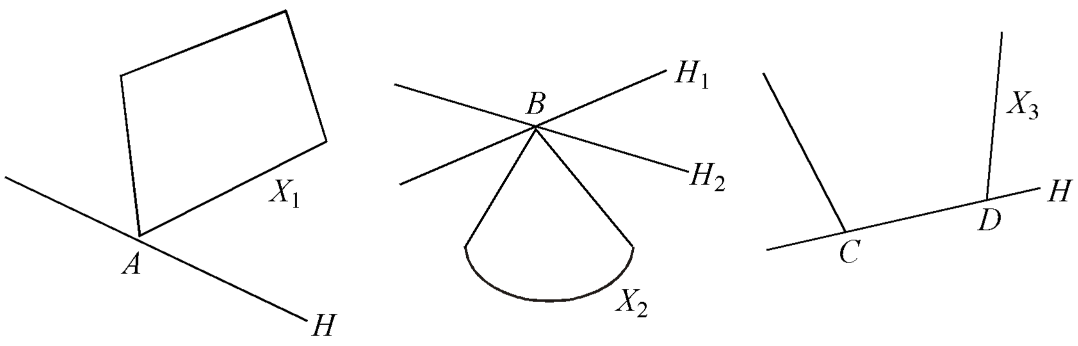
পরাসমতল H_1 S_1 এবং S_2-কে যথাযথভাবে বিচ্ছিন্ন (strictly separate) করে বলা হয় যদি যে কোনো $x \in S_1$, $p^T x > \alpha$ ($p^T x < \alpha$) হয় এবং যে কোনো $x \in S_2$ $p^T x < \alpha$ ($p^T x > \alpha$) হয় (চিত্র নং 2.10)।



চিত্র নং 2.10

2.7.2. অবলম্বনকারী পরাসমতল ঃ প্রদত্ত w, উত্তল সেট $X \subseteq E_n$ এর একটি পরিধিস্থ বিন্দু। তাহলে $Z = Cx$ কে w বিন্দুতে একটি অবলম্বনকারী পরাসমতল বলা হবে যদি $cw = Z$ হয় এবং যদি X-এর সমস্ত বিন্দুই ওই পরাসমতল দ্বারা গঠিত একটি বদ্ধ অর্ধদেশে থাকে। অর্থাৎ X-এর যে কোনো বিন্দু u-এর জন্যই $cu \geq Z$ অথবা $cu \leq Z$। নীচের চিত্রগুলিতে অবলম্বনকারী পরাসমতল অঙ্কিত হয়েছে।

চিত্র 2.11-তে H পরাসমতল A বিন্দুতে X_1 অবলম্বন করে। চিত্র 2.12-তে H_1, H_2 পরাসমতলকে B বিন্দুতে X_2-কে অবলম্বন করে।



চিত্র নং 2.11, 2.12, চিত্র নং 2.13

চিত্র 2.13 H_2, CD বাহু বরাবর X_3-কে অবলম্বন করে।

মন্তব্য 2.7 : অবলম্বন পরাসমতল ও স্পর্শক পরাসমতল এক নয়।

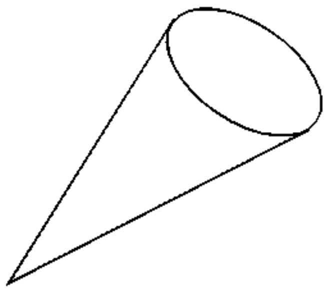
(i) চিত্র 2.12-তে H_1, H_2, X_2-কে স্পর্শ করে না।

(ii) চিত্র 2.13-তে X_1 X_3-কে CD বরাবর স্পর্শ করে।

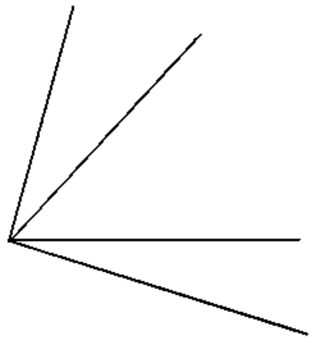
2.8 $\mathbf{E_n}$-দেশে শঙ্কু

E_n-দেশে শূন্য নয় এমন একটি সেট X কে শূন্য শীর্ষবিন্দুযুক্ত শঙ্কু বলা হয় যদি $x \in X \Rightarrow \lambda x \in X$ যেখানে λ সবসময়ই ধনাত্মক।

ঐ শঙ্কু X যদি উত্তল হয় তখন X-কে একটি উত্তল শঙ্কু বলা হয়। চিত্র নং 2.14 একটি উত্তল শঙ্কু। কিন্তু চিত্র নং 2.15 উত্তল নয় এমন একটি শঙ্কু।

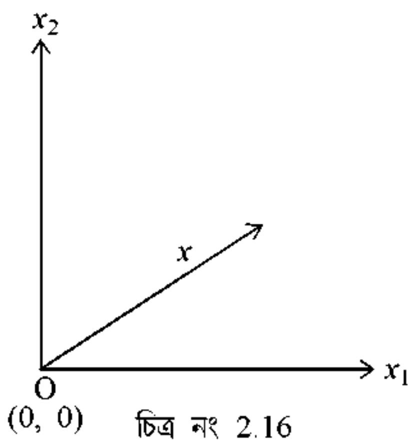


চিত্র নং 2.14 : উত্তল শঙ্কু



উত্তল নয় : এমন একটি শঙ্কু চিত্র নং 2.15

উদাহরণ 2.19. $\mathbf{E_2}$ দেশে x_1, x_2—অক্ষদ্বয়ের দ্বারা চিহ্নিত অঞ্চলের ধনাত্মক চতুর্থাংশ একটি উত্তল শঙ্কু।



চিত্র নং 2.16

এখানে x যদি x_1 O x_2-এর মধ্যে থাকে তাহলে ধনাত্মক যে কোন λ-এর জন্যই λx ও x_1 O x_2-তে থাকবে।

x^1, x^2 যদি x_1 O x_2-তে থাকে x_1, x সংযোজক রেখিতাংশও x_1 O x_2-তে থাকবে।

2.9 মৌল সমাধান ও কার্যকর মৌল সমাধান

2.9.1. কার্যকর সমাধান ঃ একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার বাধাগোষ্ঠীর [দেখুন (2.11)] সমাধান ভেক্টরের সব উপাংশগুলি যদি ধনাত্মক হয়, তখন সেই সমাধান ভেক্টরকে কার্যকর সমাধান বলা হয়।

2.9.2. মৌল সমাধান ঃ $Ax \{\leq = \geq\} b$ এই বাধাগোষ্ঠীর সমাধানের সংশ্লিষ্ট ভেক্টরগুলি যদি রৈখিকভাবে স্বাধীন হয় তখন ঐ সমাধানকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার একটি মৌল সমাধান বলা হয়।

2.9.3. মৌল কার্যকর সমাধান ঃ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার একটি মৌল সমাধান যদি কার্যকরও হয় তখন ঐ সমাধানকে মৌল কার্যকর সমাধান বলা হয়।

উদাহরণ 2.20 নীচের সমীকরণতন্ত্রের মৌল সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

$$x_1 + 2x_3 = 1$$
$$x_2 + x_3 = 4$$

কোন মৌল সমাধানগুলি কার্যকর?

ঐ সমীকরণযুগলকে লেখা যায়

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}x_3 = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ এবং $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন।

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$

অতএব সহগ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা হ'ল 2.

মৌল সমাধানগুলি হ'ল $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ অর্থাৎ $(1, 4, 0)$.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$$

$$\text{অনুষঙ্গী মৌল সমাধান} = \begin{pmatrix}-7\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{অনুষঙ্গী মৌল সমাধান} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

মৌল কার্যকর সমাধানগুলি হ'ল ঃ $\left(0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(1, 4, 0)$

উদাহরণ 2.21. নীচের সমীকরণযুগল-এর

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$
$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20$$

এর মৌল সমাধান থাকলে নির্ণয় করুন।

সমীকরণযুগলকে লেখা যায়,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}x_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$4\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

অতএব ম্যাট্রিক্সের মাত্রা হল 2 ।

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{অনুষঙ্গী মৌল সমাধান} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{অনুষঙ্গী মৌল সমাধান} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

অনুষঙ্গী মৌল সমাধান $= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2.10 সারাংশ

এই এককে আমরা রৈ. প্রো. স. (রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা) সমাধানের অস্তিত্ব ও সমাধান থাকলে তা নির্ণয় করার তত্ত্ব আলোচনার জন্য প্রয়োজনীয় জ্যামিতিক ও বীজগাণিতিক ধারণাসমূহ আলোচনা করেছি। সেটের সংজ্ঞা ও সংশ্লিষ্ট ধারণাসমূহ, উত্তল সেট, n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশে পরাসমতল, অবলম্বন পরাসমতল, শঙ্কু, রৈখিক সমকরণের সমাধানযোগ্যতা, মৌল সমাধান, কার্যকর সমাধান ইত্যাদি আলোচিত হয়েছে।

2.11 অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত রৈ. প্রো. স. গুলোকে বীজগাণিতিক রূপে প্রকাশ করুন (ঃ চরম (অবম) $Z = cx$ শর্তসাপেক্ষে $Ax \leq b$).

(ক) চরম $Z = 15x_1 + 18x_2 + 28x_3$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 \leq 16$

$2x_1 + 15x_3 \leq 16$

$x_1 + x_2 \geq 10$

$x_1 + x_3 \geq 8$

এবং $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(খ) অবম $X = 3x_1 - 4x_2 + 7x_3,$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 50,$

$x_1 + 9x_2 - 5x_3 \geq 40,$

$5x_1 + 3x_2 = 20,$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

2. (2, –4, 5) কে E_1 = (1, 1, 1), E_2 = (1, 2, 3) এবং E_3(2, 0, 1)-এর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করুন।

3. k-এর কোন মানের জন্য E_3-দেশে $u = (1, k, -2)$-কে $v = (-3, 0, 2)$ এবং $w = (2, -1, 3)$ এর রৈখিক সমবায় হিসাবে প্রকাশ করা যায়?

4. E_3-দেশে নিম্নলিখিত ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন কিনা তা নির্ধারণ করুন ঃ

(i) (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 2, 1)

(ii) (1, 2, –3), (1, –3, 2), (2, –1, 5)

(iii) (1, –3, 7), (2, 1, 5), (5, –1, 17).

5. দেখান যে E_3-দেশে সেট S = $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - x_2 + x_3 \le 3\}$ একটি উত্তল সেট।

6. E_3 দেশে $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ এই পরাসমতলের দ্বারা চিহ্নিত কোনো অর্ধদেশে (1, 1, 2) অবস্থিত?

7. দেখান যে E_2 দেশে সেট $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \le 50.$

$x_1 + 2x_2 \le 80,\ 2x_1 + x_2 \le 20,\ \ x_1, x_2 \ge 0\}$ একটি উত্তল সেট।

8. দ্বিমাত্রিকতলে একটি ত্রিভুজ নেওয়া হল যার শীর্ষবিন্দুগুলো হ'ল (0, 0), (1, 2), (2, 3) । $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ বিন্দুকে ঐ শীর্ষবিন্দুত্রয়ের উত্তল সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করুন।

9. নীচের সমীকরণগুলির মৌল সমাধানসমূহ নির্ণয় করুন।

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 3$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4$$

10. নীচের সমীকরণতন্ত্রের মৌল কার্যকর সমাধান থাকলে তা নির্ণয় করুন ঃ

$$2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 3$$
$$6x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

2.12 উত্তরমালা

1. (ক) চরম $Z = (15,\ 18,\ 28)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

শর্তসাপেক্ষে $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 15 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

(খ) অবম Z = $(3,\ -4,\ 7)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\text{শর্তসাপেক্ষে} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & -9 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 50 \\ -40 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

2. $(2, -4, 5) = -12\ (1, 1, 1) + 4(1, 2, 3) + 5(2, 0, 1)$

3. $k = \frac{4}{13}$

4. (i) রৈখিকভাবে স্বাধীন

(ii) রৈখিকভাবে স্বাধীন

(iii) রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

6. $(1, 1, 2)$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 6$ এই বন্ধ অর্ধদেশে অবস্থিত।

8. $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{4}(1,2) + \frac{1}{4}(2,3)$

9. $-7\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

মাত্রা $= 2$.

প্রথম মৌল সমাধান ঃ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5/9 \\ 11/18 \end{pmatrix}.$$

মৌল সমাধান হ'ল $\begin{pmatrix} 5/9 \\ 11/18 \\ 0 \end{pmatrix}$

দ্বিতীয় মৌল সমাধান ঃ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{13}{8} \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

মৌল সমাধান ঃ $\begin{pmatrix} \frac{13}{8} \\ 0 \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$

তৃতীয় মৌল সমাধান ঃ $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{13}{14} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

মৌল সমাধান $= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{14} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$.

10. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

অতএব মাত্রা = 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{5}{14} \end{pmatrix}$$

প্রথম মৌল কার্যকর সমাধান হ'ল $= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{5}{14} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

মৌল সমাধান = $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$ কার্যকর নয়।

তৃতীয় মৌল সমাধান ঃ $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{14} \end{pmatrix}$$

তথ্যসূত্র

1. G. HADLEY [1974] LINEAR PROGRAMMING, ADDISON WESLEY PUBLICATIONS.
2. S. I. GASS [1958] LINEAR PROGRAMMING, N Y. MC-GRAW HILL.
3. J. G. CHAKRABORTY & P. R. GHOSH [2001] LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, MOULIK LIBRARY
4. J. K. SHARMA [2003] OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN INDIA LTD.
5. T. MOULIK [*] LINEAR PROGRAMMING, U. N. DHUR & SONS PRIVATE LTD.
6. M. S. BAZARAH ET AL [1999] NONLINEAR PROGRAMMING, JOHN WILEY & SONS N.Y.
7. R. N. SEN [2007] LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, EMT-14, BLOCK-1 NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITHY

* NOT KNOWN.

একক 3 ❑ মৌলকার্যকর সমাধান—তার বিভিন্ন ধর্মাবলী ও সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতির ভূমিকা

গঠন

3.1 উদ্দেশ্য

3.2 ব্যাপ্তি সেট **(Spanning set)**, ভিত্তি **(basis)**

3.3 $\mathbf{E_n}$-দেশে ভিত্তির কোনো ভেক্টর অপসারণ

3.4 $\mathbf{E_n}$-দেশে রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টরসমূহ দিয়ে ভিত্তির গঠন ও লম্ব ভেক্টরসমূহ দিয়ে ভিত্তির গঠন

3.5 অসমীকরণকে সমীকরণে প্রকাশ, অতিরিক্ত চল **(Slack variable)**, উদ্বৃত্ত চল **(Surplus variable)**

3.6 কার্যকর সমাধান, মৌল সমাধান, অপজাত সমাধান ও অনপজাত সমাধান এবং তাদের গুণাবলী

3.7 $\mathbf{E_n}$-দেশে মৌল কার্যকর সমাধানের সঙ্গে প্রান্তিক বিন্দুর সম্পর্ক

3.8 চরম সমাধানের সঙ্গে মৌল কার্যকর সমাধানের সম্পর্ক

3.9 উন্নততর মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয়ের উপায়

3.10 সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতির ভূমিকা

3.11 সারাংশ

3.12 অনুশীলনী

3.13 উত্তরমালা

3.1 উদ্দেশ্য

সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতি অনুধাবন করতে গেলে প্রয়োজনীয় যে সব বিষয় জানা দরকার মূলতঃ সেইগুলো আলোচনা করাই এই এককের উদ্দেশ্যে। ব্যাপ্তি সেট, ভিত্তি, ভিত্তির গঠন, অতিরিক্ত চল, উদ্বৃত্ত জল, রৈ. প্রো. স.-র মৌল সমাধানের সঙ্গে উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুসমূহের কি সম্পর্ক সেগুলি এই এককে আলোচিত হয়েছে।

3.2 ব্যাপ্তি সেট (spanning set), ভিত্তি (basis)

3.2.1. ব্যাপ্তি সেট **:** E_n দেশে a^1 ...... a^r কে E_n দেশে ব্যাপ্ত বলা হয় বা E_n-দেশকে গঠন করে

বলা হয় যদি E_n দেশের যে কোনো ভেক্টরকে $a^1, a^2, \ldots a^r$ এর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

3.2.2. ভিত্তি : E_n দেশের ভিত্তি বলতে এমন সব রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টর বোঝায় যারা সমস্ত E_n দেশে ব্যাপ্ত। n একক ভেক্টরগোষ্ঠী $e^1, e^2, \ldots e^n \in E_n$। ঐ দেশের একক ভিত্তি গঠন করে। ঐ n-একক ভেক্টর গোষ্ঠী পরস্পর রৈখিকভাবে স্বাধীন।

মন্তব্য 3.1. E_n-এ ভিত্তি অনন্য নয়।

মন্তব্য 3.2. E_n-এ যে কোনো ভেক্টরকে যে কোনো ভিত্তির উপাদানসমূহের সমষ্টি হিসাবে অনন্যভাবে প্রকাশ করা যায়।

ধরা যাক $a^1, \ldots a^n$, E_n-দেশে ভিত্তি গঠন করে। তাহলে যে কোনো ভেক্টর $b \in E_n$-এর জন্য আমরা স্কেলারসমূহ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ পাই যাতে করে (সব শূন্য নয়)

$$b = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \ldots + \lambda_r a^r \qquad \ldots(3.1)$$

যদি b কে অন্যভাবে $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r$-এর সমাবেশে হিসাবে প্রকাশ করা যায়, তাহলে

$$b = \mu_1 a^1 + \mu_2 a^2 \ldots \mu_r a^r \qquad \ldots(3.2)$$

(3.1) ও (3.2) থেকে পাই

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1)\, a^1 + (\lambda_2 - \mu_2)\, a^2 + \ldots + (\lambda_r - \mu_r)\, a_r$$

যেহেতু $a^1, a^2 \ldots a^r$ রৈখিকভাবে স্বাধীন,

$$0 = \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \ldots = \lambda_r - \mu_r$$

3.3 E_n দেশে কোন ভেক্টর অপসারণ

ধরা যাক E_n দেশে $a^1, a^2, \ldots a^r$ একটি ভিত্তি গঠন করে। E_n-এ b ($b \neq 0$) এমন একটি ভেক্টর যেটাকে প্রকাশ করা যায় নিম্নরূপে

$$b = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \qquad \ldots(3.3)$$

উপপাদ্য 3.1. যদি $\lambda_i \neq 0$ এবং ভিত্তিতে a^i এর বদলে b কে অন্তর্ভুক্ত করা হয় তাহলে $a^1, a^2, \ldots a^{i-1}, b, a^{i+1} \ldots a^r$ এর সেটও E_n-ও একটি ভিত্তি গঠন করে।

যেহেতু $a^1, a^2 \ldots a^r$ একটি ভিত্তি গঠন করে, তারা রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং $\sum_{i=1}^{r} \mu_i a^i = 0 \Rightarrow \mu_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots r$। সত্যের সর্বজনগ্রাহ্যতা ব্যাহত না করে আমরা ধরতে পারি $\lambda_r \neq 0$ এবং $a^1, a^2 \ldots$

a^r এই সেটে a^r -এর বদলে b কে নিতে পারি। যদি a^1, ... a^{r-1}, b রৈখিকভাবে স্বাধীন হয় তাহলে

$$\sum_{i=1}^{r-1} \gamma_i a^i + \gamma b = 0 \qquad \text{...... (3.4)}$$

এই সমীকরণ ইঙ্গিত করে

$$\gamma_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots r - 1$$

$$\gamma = 0$$

a^1, ... a^{r-1}, b যদি রৈখিকভাবে স্বাধীন না হয়, তাহলে γ শূন্য হতে পারে না। কেননা যদি γ = 0 তাহলে γ_i-এর কোনটাই শূন্য হতে পারে না। ফলে a^1, a^2, ... a^{r-1} রৈখিকভাবে স্বাধীন হবে না। যেটা আমাদের প্রকল্প বিরোধী।

(3.3) ও (3.4) থেকে পাই

$$\sum_{i=1}^{r-1} (\gamma_i + \gamma\lambda_i) a^i + \gamma\lambda_r a^r = 0$$

যেহেতু, $\gamma\lambda r \neq 0$, a^1, a^2 ..... a^r রৈখিকভাবে নির্ভরশীল যেটা আমাদের প্রকল্প বিরোধী।

অতএব $\gamma\lambda r = 0$ যেহেতু $\lambda r \neq 0$, $\gamma = 0$

(3.4) থেকে পাই $\quad \gamma_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots.\ r - 1$

$$\gamma = 0$$

সুতরাং a^2, a^2, ... a^r রৈখিকভাবে স্বাধীন।

a^1, a^2, ... a^{r-1}, b যে ভিত্তি গঠন করে সেটা প্রমাণ করতে গেলে আমাদের দেখতে হবে যে, যে কোনো $x \in E_n$-কে ঐ ভেক্টর গোষ্ঠীর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

এখন আমরা স্কেলার সমূহ μ পাব যাতে করে,

$$x = \sum_{i=1}^{r} \mu_i a^i \qquad \text{...... (3.5)}$$

যেহেতু $\lambda_i \neq 0$, (3.3) কে ব্যবহার করে পাই,

$$a_r = \frac{b}{\lambda_r} - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_r} a^{ri} \qquad \text{...... (3.6)}$$

(3.5) ও (3.6) থেকে পাই,

$$x = \sum_{i=1}^{r-1} \left(\mu_i - \frac{\lambda_i \mu_r}{\lambda_r} \right) a^i + \frac{\mu_r}{\lambda_r} b \qquad \text{...... (3.7)}$$

উপরের রাশিমালা ইঙ্গিত করে x কে a^1, a^2, ... a^{r-1}, b-এর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা হয়। এটার থেকে বোঝা যায় যে a^1, ... a^{r-1}, b, E_n-এর একটি ভিত্তি গঠন করে।

মন্তব্য 3.3. যদি b কে এমন একটি a^i-এর বদলে লেখা হয়। যার জন্য $\lambda_i = 0$, তাহলে নতুন ভেক্টর সেট রৈখিকভাবে পরাধীন হবে। এটা দেখাবার জন্য আমরা ধরলাম $\lambda_i = 0$, তাহলে (3.3) থেকে পাই

$$b = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i a^i$$

তাহলে a^1, a^2, ... a^{r-1}, b রৈখিকভাবে নির্ভরশীল বা পরাধীন হয়।

উদাহরণ 3.1. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ E_3 দেশে একটি ভিত্তি গঠন করে।

যদি ভেক্টরত্রয় রৈখিকভাবে স্বাধীন না হয়, আমরা λ_1, λ_2, λ_3 পাব যাতে করে

$$\lambda_1\ (1, 0, 0) + \lambda_2\ (0, 1, 0) + \lambda_3\ (0, 0, 1) = 0$$

অর্থাৎ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. অতএব ভেক্টরত্রয় রৈখিকভাবে স্বাধীন। E_3 দেশে যে কোন ভেক্টর $x = (x_1, x_2, x_3)$ কে লেখা যায়

$$x = x_1\ (1, 0, 0) + x_2\ (0, 1, 0) + x_3\ (0, 0, 1)$$

উদাহরণ 3.2. e_3 ভেক্টরের বদলে যদি (1, 2, 3) নেওয়া হয়, তাহলে (7, 4, 5) ভেক্টরকে e_1, e_2, এবং (1, 2, 3) এর রৈখিক সমবায় হিসেবে প্রকাশ করতে হবে।

$$(7, 4, 5) = 7e_1 + 4e_2 + 5e_3$$

ধরা যাক $b = (1, 2, 3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3$

অথবা, $$e_3 = \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2$$

সুতরাং $$\begin{aligned}(7, 4, 5) &= 7e_1 + 4e_2 + 5e_3 \\ &= 7e_1 + 4e_2 + 5\left(\frac{1}{3}b - \frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2\right) \\ &= \frac{16}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{5}{3}b\end{aligned}$$

3.4 রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টরগোষ্ঠী দিয়ে ভেক্টর গঠন ও পরস্পর লম্ব ভেক্টরসমূহ দিয়ে ভিত্তি গঠন

উপপাদ্য 3.2. E_n-দেশে যে কোনো n সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টর গোষ্ঠী ভিত্তি গঠন করে।

ধরা যাক a^1, a^2 ..... a_n E_n দেশে রৈখিকভাবে স্বাধীন n ভেক্টরসমূহ। আমরা e_1, e_2 ..... e_n দ্বারা গঠিত E_n-র ওকটি ভিত্তি গঠন করে। আমরা 3.3-এ বর্ণিত পদ্ধতি অনুসরণ করে e_j ভেক্টরের বদলে a^j ভেক্টর (যদি $a^j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j e_i$ হয় এবং যদি শূন্য না হয়) নিলাম এবং নতুন ভিত্তি পেলাম e_1, e_2, ... e_{j-1}, a^j. e_{j+1}, ... e_n। এইভাবে e_1, ... e_n -এর এক একটি ভেক্টরকে a^1 .... a_n এর এক একটি ভেক্টরকে স্থলাভিষিক্ত করে আমরা পাই a^1, ... a^n এই ভেক্টরসমূহ গঠিত ভিত্তি পাই।

অনুসিদ্ধান্ত 3.1 E_n দেশে যে কোনো $(n + 1)$ ভেক্টর পরস্পর স্বাধীন হবে না।

এখন a^1, a^2 ..... a^n যদি রৈখিকভাবে স্বাধীন হয় তাহলে, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a^i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots n$.

এখন a^{n+1} কে আমরা a^1, a^2, ... a^n এর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করতে পারি, অর্থাৎ $a^{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a^i$ অথবা $a^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i a^i = 0$, β_i স্কেলারসমূহ যাদের সবগুলিই একসঙ্গে শূন্য নয়। সুতরাং a^1, a^2, ... a^{n+1} রৈখিকভাবে স্বাধীন হতে পারে না।

অতএব En-এ কেবলমাত্র n সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টর গোষ্ঠীই একটি ভিত্তি গঠন করে।

3.4.1 লম্ব ভেক্টর গোষ্ঠী ঃ

উপপাদ্য 3.3. E_n দেশে পরস্পর লম্ব কিন্তু শূন্য নয় এমন ভেক্টরসমূহ ভিত্তি গঠন করে।

ধরা যাক v_1, v_2, ... v_n পরস্পর লম্ব ভেক্টরসমূহ। এদের কোনটাই শূন্য নয়। আমরা দেখাব যে ঐ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন। তা যদি না হয়, তাহলে এমন স্কেলার সমূহ (যারা যুগপৎ শূন্য নয়) আছে যাতে করে, $\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \ldots + \lambda_n v^n = 0$

যেহেতু ঐ ভেক্টরগোষ্ঠী পরস্পর লম্ব $(v^i)' \, v^j = 0$, $i \neq j$ যেখানে v^i একটি স্তম্ভ ভেক্টর।

(5.8) এর উভয়দিকে $(v^j)'$ প্রাক্‌গুণন (premultiply) করলে আমরা পাব

$$\lambda_1 (v^j)' v_1 + \ldots + \lambda_j (v^j)' v_j + \ldots + \lambda_n (v^j)' v_n = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } \lambda_j (v^j)' v_j = 0$$

$$\text{যেহেতু } (v^j)' v_j \neq 0, \lambda_j = 0$$

λ_j-তে j-এর মান 1, 2, ... n নিয়ে আমরা প্রমাণ করতে পারি $\lambda_j = 0$, $j = 1, 2 \ldots n$

অতএব v^1, v^2, ... v^n লম্ব ভেক্টর গোষ্ঠী পরস্পর রৈখিকভাবে স্বাধীন। যেহেতু E_n দেশের মাত্রা হ'ল n, v^1, v^2, ... v^n এই ভেক্টরগোষ্ঠী একটি ভিত্তি গঠন করে।

উদাহরণ 3.3. দেখান যে E_3 দেশে (1, 1, 0), (1, –1, 0), (0, 1, 1) এবং (0, 1 – 1) একটি ব্যাপ্তি সেট গঠন করে। যদি উক্ত সেট একটি ব্যাপ্তি সেট হয়, তাহলে যে কোনো ভেক্টর (a, b, c) কে লেখা যায়

$$(a, b, c) = \alpha\ (1, 1, 0) + \beta\ (1, -1, 0) + \gamma\ (0, 1, 1) + \delta\ (0, 1, -1)$$

তাহলে $a = \alpha + \beta$ (3.9)

$b = \alpha - \beta + \gamma + \delta$ (3.10)

$c = \gamma - \delta$ (3.11)

যেহেতু চারটি অজানা চল ও তিনটি সমীকরণ আছে।

আমরা $\delta = k$ (ধ্রুবক) ধরলাম।

অতএব $\gamma = c + k$

তাহলে $b - c - 2k = \alpha - \beta$ (3.12)

(3.9) ও (3.12) থেকে পাই $\alpha = \frac{1}{2}(a + b - c - 2\text{k})$

$\beta = \frac{1}{2}(a - b + c + 2\text{k})$

অতএব $\alpha = \frac{1}{2}(a + b - c - 2k)$

$\beta = \frac{1}{2}(a - b + c + 2k)$

$\gamma = c + k$

$\delta = k$

k এর যে কোনো মানের জন্যই α, β, γ কে a, b, c এর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ 3.4. E_3 দেশে ভেক্টর v (5, 6, –8) কে $a^1 = (1, 1, 1)$, $a^2 = (0, 1, 1)$ এবং $a^3 = (0, 0, 1)$-এর সাপেক্ষে প্রকাশ করুন।

ধরা যাক $v = xa^1 + ya^2 + za^3$

অতএব $(5, 6, -8) = x\ (1, 1, 1) + y\ (0, 1, 1) + z\ (0, 0, 1)$

অর্থাৎ, $5 = x.1 + y.0 + z.0 = x$

$6 = x.1 + y.1 + z.0 = x + y$

$-8 = x.1 + y.1 + z.1 = x + y + z$

সুতরাং $x = 5,\ y = \ 1,\ z = -8 - 6 = -14$

তাহলে যদি $f = (a^1,\ a^2,\ a^3)$ ভিত্তি হয়

$$[v]_f = 5a^1 + a^2 - 14a^3$$

উদাহরণ 3.5. নির্ণয় করুন নিম্নলিখিত সেটগুলি E_3 তে ভিত্তি গঠন করে না

(i) (1, 0, 1), (0, 1, 1) **(ii)** (1, 2, 3), (2, 0, 1), (4, 4, 7) **(iii)** (1, 2, 0), (0, 2, 3), (3, 0, 4)

(i) ভিত্তি গঠন করে না, কেননা E_3 দেশে তিনটে রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টর থাকে।

(ii) 2 (1, 2, 3) + (2, 0, 1) = (4, 4, 7), ভেক্টরদ্বয় ভিত্তি গঠন করে না।

(iii) $\alpha\ (1,\ 2,\ 0) + \beta\ (0,\ 2,\ 3) + \gamma\ (3,\ 0,\ 4) = 0$ হলে,

$$\begin{array}{lcl} \alpha + 3\gamma = 0 & & \alpha = -3\gamma \\ 2\alpha + 2\beta = 0 & \Rightarrow & \alpha = -\beta \\ 3\beta + 4\gamma = 0 & & \beta = -\dfrac{4}{3}\gamma \end{array}$$

$$\alpha = -\beta = \frac{4}{3}\gamma = -3\gamma$$

অতএব $\alpha = \beta = \gamma = 0$

তাহলে ভেক্টরত্রয় রৈখিকভাবে স্বাধীন।

অথএব প্রদত্ত ভেক্টরত্রয় E_3 দেশে একটি ভিত্তি গঠন করে।

উদাহরণ 3.6. E_3 দেশের একটি ভিত্তি নির্ণয় করুন যার মধ্যে দুটি ভেক্টর হল (1, 1, 2) এবং (3, 5, 2)

ধরা যাক তৃতীয় ভেক্টরটি হ'ল $(a,\ b,\ c)$

তাহলে এই ভেক্টরত্রয় রৈখিকভাবে স্বাধীন।

$$\lambda_1\ (1,\ 1,\ 2) + \lambda_2\ (3,\ 5,\ 2) + \lambda_3\ (a,\ b,\ c) = 0$$

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 + a\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 + 5\lambda_2 + b\lambda_3 = 0$$

$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 + c\lambda_3 = 0$$

ঐ সমীকরণত্রয়ের সমাধান হবে $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$

যদি নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 1 & 5 & b \\ 2 & 2 & c \end{vmatrix} \neq 0$

অথবা, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & b-a \\ 0 & -4 & c-2a \end{vmatrix} \neq 0$

অথবা, $2\ (c - 2a) + 4\ (b - a) \neq 0$

অথবা, $8a \neq 4b + 2c$

অথবা, $c \neq 4a - 2b$

সুতরাং (1, 1, 2), (3, 5, 2) এবং (a, b, c), E_3 দেশে একটি ভিত্তি গঠন করে যদি $c \neq 4a - 2b$.

3.5 অসমীকরণকে সমীকরণে প্রকাশ, অতিরিক্ত চল (Slack variable) এবং উদ্বৃত্ত চল (Surplus variable)

রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার শর্তগোষ্ঠীকে লেখা যায়,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leqq = \geqq\}\ b_i,\ \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n} \tag{3.13}$$

'≤' ধরণের i-তম অসমীকরণ হবে,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n \leq b_i, \tag{3.14}$$

যেহেতু বামপক্ষ ডানপক্ষ থেকে ছোটো আমরা বামপক্ষে একটি ধনাত্মক চল x_{n+1} যোগ করি যাতে দুপক্ষই সমান হয়।

অর্থাৎ, $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$ (3.15)

এই ধরনের চলকে 'অতিরিক্ত চল' (Slack variable) বলা হয়।

যদি রৈ. প্রো. স.-র শর্তগোষ্ঠীরা '≤' ধরণের অসমীকরণ থাকে সেগুলিতে অতিরিক্ত চল x_{n+1} বামপক্ষে যোগ করলে ঐ অসমীকরণতন্ত্রকে নীচের সমীকরণতন্ত্রে রূপান্তরিত করতে পারি ঃ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1, 2, \ldots\ldots r \tag{3.16}$$

আমরা ধরে নিয়েছি প্রথম r সংখ্যক অমীসকরণই "≤" ধরণের। অনুরূপ যদি কোনো সর্ত "≥" হয় তখন বামপক্ষ থেকে ধনাত্মক চল বিয়োগ করে অসমীকরণতন্ত্রকে সমীকরণতন্ত্রে রূপান্তরিত করা যায়।

যেমন ধরুন $a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 \ldots a_{pn}x_n \geq b_p$

এই অসমীকরণকে সমীকরণে রূপান্তরিত করতে পারি নিম্নভাবে ঃ

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots\ldots a_{pn}x_n - x_{n+r+1} = b_p$$

এই x_{n+r+1} কে উদ্বৃত্ত চল (surplus variable) বলা হয়।

যদি s সংখ্যক অসমীকরণ " $\geq$ " ধরণের হয়, তাহলে উদ্বৃত্ত চল প্রবর্ত্তন করে আমরা লিখতে পারি,

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n - x_{n+r+p} = b_{r+p,} p = 1,2,\ldots s$$

আমরা ধরলাম $(r + 1)$ থেকে $(r + s)$ পর্যন্ত অসমীকরণগুলি '$\geq$' ধরণের। অতএব বাকী $m - (r + s)$ শর্তগোষ্ঠী সমীকরণতন্ত্র হবে।

তাহলে আমরা রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাকে বিস্তারিতভাবে লিখতে পারি

চরম $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0.x_{n+1} + \ldots + 0.x_{n+r} + 0.x_{n+v+1} + \ldots + 0.x_{n+r+s}$

$$\text{শর্তসাপেক্ষে} \quad \left.\begin{aligned} & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ & a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_{n} + x_{n+r} = b_r \\ & a_{r+1,1}x_1 + \ldots + a_{r+1,n}x_n - x_{n+r+1} = b_{r+1} \\ & a_{r+1,1}x_1 + \ldots + a_{r+s,n}x_n - x_{n+r+s} = b_{r+s} \\ & a_{r+s+1,1}x_1 + \ldots + a_{r+s+1,n}x_n = b_{r+s+1} \\ & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}\right] \qquad (3.17)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \ \ldots\ x_n \geq 0,\ x_{n+i} \geq 0$$

বীজগণিতের ভাষায় (3.17) কে লেখা যায়,

$$\left.\begin{aligned} \text{চরম } Z &= \tilde{c}\tilde{x} \\ \text{শর্তসাপেক্ষ}, A\ \tilde{x} &= b \\ \tilde{x} &\geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.18)$$

$$\text{যেখানে } \tilde{c} = \left(c_{11}, \ldots c_n, \overbrace{0,0\ldots\ldots0}^{r+s}\right)$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+r} \\ x_{n+r+1} \\ \vdots \\ x_{n+r+s} \end{pmatrix}$$

অতিরিক্ত ও উদ্বৃত্ত চল যেহেতু বিষয়াত্মক অপেক্ষকে নেই, ঐ চলগুলির সংশ্লিষ্ট মূল্যগুলি শূন্য নেওয়া হল। (3.18) কে প্রমাণ আকারের রৈ. প্রো. স বলা হয়।

3.6 কার্যকর সমাধান, মৌল সমাধান, অপজাত সমাধান, অনপজাত সমাধান এবং তাদের গুণাবলী

নীচের আলোচনায় আমরা প্রমাণ আকারের রৈ. প্রো. স. (3.18) দেখুন ব্যবহার করুন ঃ

$$\begin{aligned} \text{চরম } Z &= cx \\ \text{শর্তসাপেক্ষে } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$x \in E_n$, $A \to m \times n$ ম্যাট্রিক্স, এবং $b \in E_m$.

3.6.1 **কার্যকর সমাধান** ঃ চরম $Z = cx$ শর্তসাপেক্ষে $Ax = b$, এই রৈ. প্রো মিং. সমস্যার সমাধানের উপাংশগুলি যদি সব ধনাত্মক হয়, অর্থাৎ ভেক্টর x যদি ≥ 0 তখন ঐ সমাধানকে কার্যকর সমাধান বলা হয়।

লক্ষণীয় (3.19)-এর সমাধানগুলো সবই কার্যকর।

উপপাদ্য 3.4 প্রমাণ আকারের রৈ. প্রো. স.-র (3.19) সমাধানসমূহ গঠিত সেটটি উত্তল।

প্রদত্ত রৈ. প্রো. স.-র শর্তগোষ্ঠী হ'ল $Ax = b,\ x \geq 0.$ (3.20)

ধরা যাক x^1 এবং x^2 (3.20) এর যে কোনো দুটি সমাধান।

$$\begin{aligned} \text{তাহলে}\quad & Ax^1 = b, \quad x^1 \geq 0 \\ & Ax^2 = b, \quad x^2 \geq 0 \\ & \lambda x^1 + (1-\lambda)\ x^2 \geq 0,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\ (\lambda x^1 + (1-x)\ x^2) &= \lambda A x^1 + (1-\lambda)\ Ax^2 \\ &= \lambda b + (1-\lambda)\ b \\ &= b \end{aligned}$$

অতএব $X = \{x | x \in E_n . Ax = b, x \geq 0\}$ সেটটি উত্তল।

মন্তব্য 3.3. যদি কোনো প্রমাণ আকারের রৈ. প্রো. স.-র দুটো কার্যকর সমাধান থেকে তাহলে কার্যকর সমাধানের সংখ্যা অসংখ্য।

প্রমাণ আকারের রৈ. প্রো.স.-র কার্যকর সমাধানের সেটটি উত্তল। অর্থাৎ

$$x^1 \in X, x^2 \in X \Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in x,\ 0 \leq \lambda \leq 1$$

যেখানে $X = \{x | x \in E_n, Ax = b, x \geq 0\}$

যেহেতু, x^1, x^2 কার্যকর সমাধান এবং X সেটটি উত্তল, x^1 ও x^2 সংযোজিত সরল রেখিতাংশের প্রতিটি বিন্দুই কার্যকর সমাধান হবে।

3.6.2 **মৌল সমাধান** ঃ আমরা সমীকরণগোষ্ঠী $Ax = b$ নিচ্ছি।

$$x \in E_n,\ A - m \times n \text{ ম্যাট্রিক্স},\ b \in E_n.$$

ধরা যাক $r(A) = m$. A-এর থেকে একটি $m \times m$ অবিশিষ্ট (non-ringular) উপম্যাট্রিক্স নেওয়া হ'ল এবং ঐ উপম্যাট্রিক্সের সঙ্গে জড়িত নয় এমন $(n - m)$ চলগুলিকে শূন্য নেওয়া হয়। তাহলে $Ax = b$ এর সমীকরণগুলোর যেগুলি অবশিষ্ট রইল তার সমাধানসমূহকে মৌল সমাধান বলা হয়। সমাধানের যে m সংখ্যক চল (ঐ $(n - m)$ সংখ্যক চলকে বাদ দিয়ে) আছে, তাদের বলা হয় মৌল চল।

মৌল সমাধানতন্ত্রের সর্বোচ্চ সংখ্যা ${}^nc_m$ কেননা, n জিনিস থেকে m জিনিস বেছে নিতে পারি ${}^nc_m$ উপায়ে।

3.6.3 **অপজাত সমাধান (Degenerate solution)**

একটি মৌল সমাধানকে অপজাত সমাধান বলা হয় যদি এই মৌল সমাধানের এক বা একাধিক চলের মান শূন্য হয়।

3.6.4 **অনপজাত সমাধান (Nondegenerate solution)**

একটি মৌল সমাধানকে অনপজাত সমাধান বলা হয় যদি এই মৌল সমাধানের কোন চলের মানই শূন্য নয়।

উদাহরণ 3.7 নীচের সমীকরণতন্ত্রের মৌল সমাধান থাকলে সেটা বা সেগুলি নির্ণয় করুন ঃ

$$2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 15$$
$$x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 8$$

যেহেতু $$2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের মাত্রা হ'ল 2

প্রথম মৌল সমাধান ঃ $$\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$$

প্রথম মৌল সমাধান $= \begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}$

দ্বিতীয় মৌল সমাধান ঃ $$\begin{pmatrix}2 & 10\\1 & 6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\-\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

দ্বিতীয় মৌল সমাধান $= \begin{pmatrix}5\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

তৃতীয় মৌল সমাধান ঃ $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

তৃতীয় মৌল সমাধান $= \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

উদাহরণ 3.8. দেখাতে হবে যে নীচের সমীকরণযুগলের

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$
$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20$$

মৌল সমাধানদের মধ্যে দুটি অপজাত।

এখানে ${}^3c_2$ অর্থাৎ 3টি সমাধানগুলো আলোচনা করতে হবে।

(i) $3x_1 + 4x_2 = 12$ অর্থাৎ $x_1 = 4,\ x_2 = 0$
$5x_1 + 4x_2 = 20$

(ii) $4x_1 + x_2 = 12$ $x_2 = 1,\ x_3 = 8,$
$4x_1 + 2x_2 = 20$

(iii) $3x_1 + x_2 = 12$ $x_2 = 4,\ x_3 = 0$
$5x_1 + 2x_2 = 20$

এখানে (ii) নং সমীকরণযুগলের অপজাত নয় এমন মৌল সমাধান আছে।

মন্তব্য 3.4. লক্ষণীয় (i) এর সমাধান $x_1 = 4,\ x_2 = 0$ এবং (ii)-এর সমাধান $x_1 = 4,\ x_3 = 0$ দুটোই x_1 অক্ষের বিন্দু অর্থাৎ E_1 দেশের বিন্দু। একমাত্র (1, 8) ই E_2 দেশের বিন্দু। এইজন্য (i) ও (ii)-এর সমাধানদের অপজাত বলা হয়। এখানে সব সমাধানই কার্যকর।

মন্তব্য 3.5. উদাহরণ 3.7-এর সমাধানগুলি সব অনপজাত। কিন্তু তৃতীয় মৌল সমাধানটি কার্যকর নয়।

3.7 E_n দেশে মৌল কার্যকর সমাধানের সঙ্গে প্রান্তিক বিন্দুর সম্পর্ক

উপপাদ্য 3.5. $Ax = b$ এই সমীকরণতন্ত্রের প্রতিটি মৌল কার্যকর সমাধানই কার্যকর সমাধানের উত্তল সেটের কোনো প্রান্তিক বিন্দু হবে।

$x \in E_n$-এর প্রথম m সংখ্যক চল মৌল ও কার্যকর বলে ধরা হল এবং বাকী $(n - m)$ চল হল শূন্য। ধরা যাক x_B এই m সংখ্যক মৌল কার্যকর চলের দ্বারা গঠিত ভেক্টর অর্থাৎ $x_B \in E_n$.

তাহলে $x = [x_B,\ 0]$ এবং $x_B = B^{-1}b$ (3.21)

x কে কার্যকর সমাধানগুলো দ্বারা গঠিত উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দু হিসাবে দেখাতে হবে। তার জন্য আমাদের

দেখাতে হবে যে কোনো ভাবেই কার্যকর সমাধান যুগল x^1 এবং x^2 পাব না যাতে করে xB কে $\lambda x^2 + (1 - \lambda)\ x^2$ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে না, $0 < \lambda < 1$। তর্কের খাতিরে আমরা ধরি xB কে x^1 ও x^2 -এর উত্তল সমাবেশ হিসেবে প্রকাশ করা যায়। তাহলে লেখা যায়,

$$x^1 = [u^1,\ v^1] \tag{3.21}$$

$$x^2 = [u^2,\ v^2] \tag{3.22}$$

u^1 ও u^2 m উপাংশবিশিষ্ট ভেক্টরযুগল

v^1 ও v^2 $(n - m)$ উপাংশবিশিষ্ট ভেক্টরযুগল।

তাহলে (3.20), (3.21) এবং (3.22) ব্যবহার করে এবং x_B, x^1, x^2-এর উত্তল সমাবেশ, সেগুলি খেয়াল রেখে আমরা লিখতে পারি, $0 = \lambda v^1 + (1 - \lambda)\ v^2$ (3.23)

কিন্তু $\lambda,\ (1 - \lambda) > 0$, এবং $v^1 \geq 0,\ v^2 \geq 0$

অতএব (3.23) সত্য হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি (3.24)

$v^1 = v^2 = 0$ হয়।

তাহলে $Ax^1 = Bu^1 = b$

$Ax^2 = Bu^2 = b$

কিন্তু মৌল সমাধানের সাপেক্ষে b-এর প্রকাশ অনন্য,

অতএব, $$x_B = u^1 = u^2 \tag{3.25}$$

$$x = x^1 = x^2 \tag{3.26}$$

এটা তাহলে, প্রমাণিত হয় যে আমরা x থেকে ভিন্ন দুটো কার্যকর সমাধান x^1 এবং x^2 পাব না যাতে করে x-কে x^1 ও x^2-এর উত্তল সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে।

অর্থাৎ x কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের একটি প্রান্তিক বিন্দু।

তাহলে $Ax = b$ এর কার্যকর সমাধান কার্যকর সমাধানসমূহের উত্তল সেটের কোন প্রান্তিক বিন্দু হবে।

উপপাদ্য 3.6. $Ax = b$-এর কার্যকর সমাধান সমূহের উত্তল সেটের প্রতিটি প্রান্তিক বিন্দুই একটি মৌল কার্যকর সমাধান হবে।

ধরা যাক $x^* = [x_1,\ x_2,\ .....\ x_n]$, $Ax = b$-এর কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের একটি প্রান্তিক বিন্দু। আমরা ধরলাম x^*-এর কেবলমাত্র প্রথম k উপাংশগুলি শূন্য নয়।

তাহলে $$\sum_{i=1}^{k} x_i a^i = b,\ x_i > 0,\ i = 1,\ 2,\ ....\ k \tag{3.27}$$

a^i — i তম স্তম্ভ ভেক্টর।

যদি x^*-এর শূন্য নয় এমন সব উপাংশের সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন না হয়, তাহলে স্কেলারসমূহ (সব শূন্য নয়) λ_i পাওয়া যাবে, যাতে করে

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a^i = 0 \tag{3.28}$$

ধরা যাক η = অবম $\frac{x_i}{|\lambda_i|}$, $\lambda_i \neq 0,\ i = h \ ......k$ (3.29)

x_i, x-এর i তম উপাংশ।

(3.29) থেকে পাই, $\frac{x_i}{|\lambda_i|} \geq \eta > 0$

যদি $0 < \in < \eta$ পাই $\frac{x_i}{|\lambda_i|} \geq \eta > \in,\ x_i > 0$

অর্থাৎ $x_i - \in |\lambda_i| > 0$

অর্থাৎ $x_i - \in \lambda_i > 0,\ x_i + \in \lambda_i > 0.$ (3.30)

ধরা যাক $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k, 0 \ldots 0)$

আমরা লিখি, $x^1 = x^* + \in \hat{\lambda};\ x^2 = x^* - \in \hat{\lambda}$ (3.31)

(3.31) এর জন্য $x^1 \geq 0,\quad x^2 \geq 0$

(3.28) কে লেখা যায় $A\hat{\lambda} = 0$

অতএব $Ax^1 = Ax^* + \in A\hat{\lambda} = Ax^* = b$

একইভাবে $Ax^2 = b$

(3.31) থেকে পাই $x^* = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ (3.32)

x^1, x^2 উভয়েই কার্যকর সমাধান।

সুতরাং x^*, x^1 ও x^2-র উত্তল সমাবেশ, যেটা x^*-যে উত্তল সেটের একটি প্রান্তিক বিন্দু এই সত্যকে বিরোধিতা করে। অর্থাৎ কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তর সেটের প্রান্তিক বিন্দুর সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টরসমূহ পরাধীন বা নির্ভরশীল হতে পারে না অর্থাৎ রৈখিকভাবে স্বাধীন হবে।

আবার m-এর চেয়ে বেশি সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভ A-এর থাকতে পারে না। অর্থাৎ একটি প্রান্তিক বিন্দুর m-এর চেয়ে বেশি সংখ্যক ধনাত্মক উপাংশ থাকতে পারে না। অর্থাৎ প্রতিটি প্রান্তিক বিন্দুই একটি মৌল কার্যকর সমাধান হবে।

মন্তব্য ঃ উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দু যে মৌল কার্যকর সমাধানকে প্রকাশ করে সেটি অপজাত হতেও পারে বা না হতেও পারে।

উপপাদ্য 3.7. $Ax = b$-এর মৌল কার্যকর সমাধান যদি অপজাত (**degenerate**) না হয় তাহলে কার্যকর সমাধানসমূহ গঠিত উত্তল সেটের কোনো প্রান্তিক বিন্দুর সঙ্গে উক্ত মৌল কার্যকর সমাধানের এককে সম্বন্ধ আছে।

ধরা যাক x_B একটি মৌল কার্যকর সমাধান। আরও ধরা যাক x_B অপজাত নয়। অর্থাৎ x_B-এর কোনো উপাংশই শূন্য নয়। তখন $x_B = B^{-1}b$.

উপপাদ্য 3.5 অনুসারে x_B একটি প্রান্তিক বিন্দু হবে। আবার ধরা যাক $x^* \in E_n$, কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের একটি প্রান্তিক বিন্দু। ধরা যাক, x^*-এর উপাংশসমূহের মধ্যে m-সংখ্যক ধনাত্মক এবং আলোচনার সর্বজন গ্রাহ্যতা ব্যাহত না করে ধরতে পারি যে প্রথম m সংখ্যক চলের মান ধনাত্মক যদি এই m সংখ্যা চলের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন না হয় তাহলে m সংখ্যক স্কেলার λ_i যেগুলো সব একসঙ্গে শূন্য নয় পাব যাতে করে

$$\sum \lambda_i a_i = 0 \tag{3.33}$$

আবার যেহেতু x^*, $Ax = b$-এর সমাধান এবং প্রথম m সংখ্যক চল বাদ দিয়ে বাকি চলগুলির মান শূন্য হয়,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_i = b \tag{3.34}$$

উপপাদ্য 3.6. অনুসরণ করে দেখতে পারি, যে যদি (3.34) সত্য হয়, তাহলে x^* প্রান্তিক বিন্দু হতে পারে না।

অর্থাৎ a^i, $i = 1, 2, \ldots m$ রৈখিকভাবে স্বাধীন হবে।

ধরা যাক, x_n-এর প্রথম m উপাংশগুলির মান হল $x_1, x_2, \ldots x_m$। তাদের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টরসমূহ হল $a^1, a^2, \ldots a^m$।

$$\text{তাহলে } \sum_{i=1}^{m} x_i a^i = b \tag{3.35}$$

আবার x^*-এর স্তম্ভ ভেক্টরগুলি $a^1, a^2, \ldots a^m$-এর সংঙ্গে সংশ্লিষ্ট চলগুলির মান $x_1', x_2' \ldots x'_m$ যদি হয়

$$\text{তাহলে } \sum_{i=1}^{m} x_i' a^i = b \tag{3.36}$$

(3.35) ও (3.36) থেকে পাই

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i') a_i = 0$$

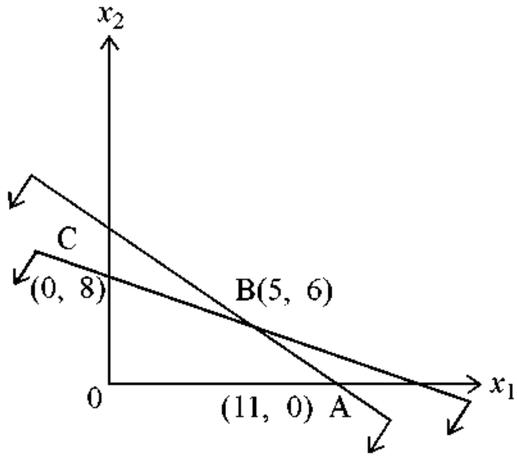
যেহেতু $a_1, \ldots a_m$ রৈখিকভাবে স্বাধীন, অতএব, রৈখিক ভাবে স্বাধীন, অতএব,

$$x_i = x_i' \quad i = 1, 2, \ldots m$$

অতএব সমাধান অপজাত না হলে মৌল কার্যকর সমাধানের সঙ্গে, কার্যকর সমাধানসমূহ গঠিত উত্তল সেটের কোনো না কোনো প্রান্তিক বিন্দুর একৈক সম্পর্ক থাকবে।

মন্তব্য 3.5. সমাধান যখন অপজাত থাকে তখন কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের কোনো প্রান্তিকবিন্দুর অনুরূপ একাধিক মৌল কার্যকর সমাধান থাকতে পারে।

উদাহরণ 3.9 প্রদত্ত রৈ. প্রো. স.-র কার্যকর সমাধান দ্বারা গঠিত উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুসমূহ নির্ণয় করুন ঃ



$$\text{চরম } Z = 4x_1 + 7x_2$$
$$\text{শর্তসাপেক্ষে } 2x_1 + 5x_2 \le 40$$
$$x_1 + x_2 \le 11$$
$$\text{এবং } x_1,\ x_2 \ge 0$$

প্রান্তিক বিন্দুসমূহ ঃ

O [0, 0], A [11, 0], B [5, 6], C [0, 8]

অতিরিক্ত চল x_3 ও x_4 যোগ করে শর্তগোষ্ঠী সমীকরণযুগলে পরিবর্তিত হয়।

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 40$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

ম্যাট্রিক্সের মাত্রা হল 2 1

আমরা $^4c_2$ (অর্থাৎ 6) সমীকরণতন্ত্র পাই

(i) $2x_1 + 5x_2 = 40$ $\quad x_1 = 5,\ x_2 = 6$ $\quad \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} \to$ প্রান্তিক বিন্দু B

$x_1 + x_2 = 11$

(ii) $2x_1 + x_3 = 40$ $\quad x_1 = 11,\ x_3 = 18$ $\quad \begin{pmatrix}11\\0\end{pmatrix} \to$ প্রান্তিক বিন্দু A

$x_1 \quad = 11$

(iii) $2x_1 = 40$ $\quad x_1 = 20$ $\quad \begin{pmatrix}20\\0\end{pmatrix} \to$ প্রান্তিক বিন্দু নয়

$x_1 + x_4 = 11$ $\quad x_4 = -9$

(iv) $5x_1 + x_3 = 40$ $\quad x_2 = 11,\ x_3 = -15$ $\quad \begin{pmatrix}0\\11\end{pmatrix} \to$ প্রান্তিক বিন্দু নয়

$x_2 \quad = 11$

(v) $5x_2 = 40$ $\quad$ $x_2 = 8$ $\quad$ $\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix} \rightarrow$ প্রান্তিক বিন্দু C

$x_2 + x_4 = 11$ $\quad$ $x_4 = 3$

(vi) $x_3 = 40$ $\quad$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightarrow$ প্রান্তিক বিন্দু O

$x_4 = 11$

3.8 চরম সমাধানের সঙ্গে মৌল কার্যকর সমাধানের সম্পর্ক

আমরা যে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা পর্যালোচনা করব তা নিম্নরূপ ঃ

চরম $Z = cx$ (3.37)

শর্তসাপেক্ষে $Ax = b$ (3.38)

$x \geq 0$ (3.39)

c – সারি ভেক্টর, x, b – স্তম্ভ ভেক্টর, c, x, $b \in E_n$

A একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স

অর্থাৎ $A = [a_1, a_2 \ldots\ldots a_n]$, $a_i \in E_m$, i তম স্তম্ভ ভেক্টর।

উপপাদ্য 3.7. যদি রৈ. প্রো. স. (3.37)–(3.39) র একটি চরম সমাধান থাকে, তাহলে সমাধান অপজাত না হলে, অন্ততঃ একটি মৌল কার্যকর সমাধান চরম সমাধান হবে।

ধরা যাক $x^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots\ldots x_n^0]$ প্রদত্ত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার একটি চরম সমাধান এবং Z বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম মান। x^0-র উপাংশগুলির মধ্যে কয়েকটি শূন্য হতে পারে। প্রাপ্ত সমস্যাটির মূল চরিত্র ব্যাহত না করে আমরা ধরতে পারি যে প্রথম k টি উপাংশ শূন্য নয়। তাহলে,

$$x^0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots x_k^0, 0, 0 \ldots\ldots 0] \quad (3.40)$$

যেহেতু x^0 (3.32) এর সমাধান $Ax^0 = b$

$$\text{অতএব} \quad \sum_{j=1}^{k} a_j x_j = b \quad (3.41)$$

$$\text{এবং চরম } Z = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^0 \quad (3.42)$$

এখন দুটো সম্ভাবনা আছে।

(i) a_1, a_2, ... a_k রৈখিকভাবে স্বাধীন। তাহলে x^0 একটি মৌল কার্যকর সমাধান। অতএব উপপাদ্য প্রমাণিত।

(ii) a_1, ... a_k রৈখিকভাবে স্বাধীন নয়। আমরা আর একটি চরম সমাধান নির্ণয় করি যেখানে শূন্য নয় এমন চলের সংখ্যা আগেরটার চেয়ে কম।

a_1, a_2 ..... a_k রৈখিকভাবে পরাধীন হলে আমরা স্কেলার সমূহ λ_i ($i = 1, 2, \ldots k$) পাব (যার মধ্যে অন্ততঃ একটি ধনাত্মক $\lambda_j \neq 0$)

$$\text{যাতে করে } \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j = 0 \tag{3.43}$$

যদি তা না হয়, আমরা (3.43) কে (–1) দিয়ে গুণ করে, একটি λ_j পাব সেটা ধনাত্মক।

$$\text{ধরা যাক } v = \text{চরম} \left(\frac{\lambda_j}{x_j}\right) \tag{3.44}$$

যেহেতু $x_j > 0$ এবং $\lambda_j > 0$ অতএব $\gamma > 0$

(3.43) কে $\frac{1}{\gamma}$ দিয়ে গুণ করে (3.41) থেকে বিয়োগ করে পাই,

$$\sum_{j=1}^{k}\left(x_j^0 - \frac{\lambda_j}{\gamma}\right)a_j = b$$

$x_j^0 - \frac{\lambda_j}{\gamma}$ কে x'_j দিয়ে চিহ্নিত করলাম। তাহলে (3.45) থেকে পাই

$$\sum_{j=1}^{k} x'_j a_j = b \tag{3.46}$$

$$\text{অর্থাৎ } Ax' = b \tag{3.47}$$

$$x' = \left[x_1^0 - \frac{\lambda_1}{\gamma}, x_2^0 - \frac{\lambda_2}{\gamma}, \ldots x_k - \frac{\lambda_k}{\gamma}, 0 \ldots 0\right] \tag{3.48}$$

যেহেতু $\gamma = \text{চরম}\left(\frac{\lambda_j}{x_j^0}\right)$, $\gamma \geq \frac{\lambda_j}{x_j^0}$ অথবা $x_j^0 \geq \frac{\lambda_j}{\gamma}$

অর্থাৎ $x_j^0 - \frac{\lambda_j}{\gamma} \geq 0$ অর্থাৎ x' একটি কার্যকর সমাধান। (3.44) থেকে বলতে পারি যে, j-এর কোনো না কোনো মানের জন্য $\gamma = \frac{\lambda_j}{x_j}$ অর্থাৎ $x'_j = x_j - \frac{\lambda_j}{\gamma} = 0$

সুতরাং j-এর যে যে মানের জন্য $\gamma = \frac{\lambda_j}{x_j}$ সেই সেই ক্ষেত্রে $x_j = 0$.

তাহলে x' -এর প্রথম k সংখ্যক মানের অন্ততঃ একটি চলের মান শূন্য হবে। সুতরাং, x'-এর সর্বাধিক প্রথম $(k\text{-}1)$ চল শূণ্য হবে না। প্রদত্ত চরম কার্যকর সমাধান থেকে আমরা এমন একটি কার্যকর সমাধান পাই যার মধ্যে x^0-এর থেকে কম সংখ্যক শূন্য নয় এমন চল আছে।

আমরা দেখাব যে x' ও একটি চরম সমাধান হবে। যদি x'-এর জন্য বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান Z' হয় তাহলে

$$Z' = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j = \sum_{j=1}^{k} c_j \left(x_j^0 - \frac{\lambda_j}{\gamma} \right) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^0$$

$$-\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j = Z \text{ চরম } -\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j \tag{3.48}$$

Z', Z চরম-এর সঙ্গে সমান হয় যদি $\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j = 0$ হয়।

যদি $\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j \neq 0$ তাহলে একটি স্কেলার $\theta \neq 0$ সব সময় পাওয়া যাতে করে

$$\theta \left(\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j \right) > 0 \text{ হয়।} \tag{3.49}$$

(3.49) থেকে পাই $Z' + \theta \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j >$ চরম Z

কিন্তু উপরের অসমীকরণটি অসম্ভব। আমরা এমন কোনো কার্যকর সমাধান পাব না যার জন্য Z-এর মান চরম Z এর চেয়ে বড়ো হয়। অর্থাৎ আমাদের স্বীকার যে $\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j \neq 0$, সেটা ভ্রান্ত। অর্থাৎ $\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j = 0$।

সুতরাং, $Z' = Z$ চরম।

তাহলে চরম সমাধান x^0-এর যদি (ক) k সংখ্যক শূন্য নয় এমন চল থাকে এবং যদি (খ) ঐ k সংখ্যক চলের সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টরসমূহ যদি স্বাধীন না হয় তাহলে আমরা এমন একটি কার্যকর সমাধান x' বার করতে পারি (গ) যার প্রথম সর্বোচ্চ $(k - 1)$ সংখ্যক চলের মান শূন্য নয়। (ঘ) x'-এ 'Z' এর মান চরম Z।

এখন তর্কের খাতিরে ধরা যাক, x'-এর শূন্য নয় এমন চলগুলির সংশ্লিষ্ট ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন নয়।

পূর্বের পদ্ধতি অনুসরণ করে আমরা এমন একটি কার্যকর সমাধান x'' নির্ণয় করতে পারি যার সর্বোচ্চ প্রথম $(k - 2)$ চলের মান শূন্য নয়।

যেহেতু একটি চরম সমাধান অপজাত নয়, অর্থাৎ রৈখিকভাবে স্বাধীন এমন m সংখ্যক ভেক্টরসমূহের সংশ্লিষ্ট চলসমূহ শূন্য নয়। আমরা শেষ পর্যন্ত একটি মৌল কার্যকর সমাধান পাব।

উপপাদ্য 3.8 প্রদত্ত (i) m সংখ্যক যুগপৎ রৈখিক সমীকরণতন্ত্র $Ax = b$ এবং তলের সংখ্যা n।

(ii) $r(A) = m < n$, r মাত্রা (rank) বোঝায়। যদি ঐ সমীকরণতন্ত্রের একটি কার্যকর সমাধান $x \geq 0$ থাকে, তাহলে একটি মৌল কার্যকর সমাধানও থাকবে।

ধরা যাক $x' \in E_n$ ঐ সমীকরণতন্ত্রের একটি কার্যকর সমাধান। আরও ধরা যাক x'-এর প্রথম k সংখ্যক উপাংশ ধনাত্মক অর্থাৎ $x = \left[x'_1, x'_2 \ldots x'_k, 0 \ldots\ldots 0\right]$। যেহেতু x', $Ax' = b$ এই সমীকরণতন্ত্রের সমাধান

$$\sum x'_j a_j = b \tag{3.50}$$

প্রদত্ত $A = [a_1, a_2, \ldots\ldots a_n]$

অর্থাৎ, $x'_j > 0$ যখন $j = 1, 2, \ldots\ldots k$

এবং $x'_j = 0 \quad j = (k + 1), \ldots\ldots n$।

এখন তিন ধরনের সম্ভাবনা হতে পারে ঃ

(i)′ a_j, $j = 1, 2, \ldots\ldots k$ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন অর্থাৎ $k = m$

(ii)′ a_j, $j = 1, 2, \ldots k$ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং $k < m$

(iii)′ a_j, $j = 1, 2, \ldots k$ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল বা পরাধীন।

(i)′-এর ক্ষেত্রে যেহেতু $k = m$, অতএব x' অপজাত নয় এমন একটি মৌল সমাধান।

(ii)′-এর ক্ষেত্রে যেহেতু $k < m$, তাহলে ঐ ধনাত্মক চলগুলির সংশ্লিষ্ট ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন। এখানে ঐ k সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টরসমূহের সঙ্গে আমরা $(m - k)$ সংখ্যক এমন রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভ ভেক্টরসমূহ নিলাম যারা আগের k সংখ্যক ভেক্টরসমূহের সাপেক্ষেও রৈখিকভাবে স্বাধীন। অতিরিক্ত $(m - k)$ সংখ্যক স্তম্ভ ভেক্টরসমূহের সংশ্লিষ্ট চলগুলির মান শূন্য নেওয়া হল। সুতরাং উদ্ভূত সমাধানটি যদিও একটি মৌল কার্যকর সমাধান, ইহা অপজাত নয়।

(iii)′-এর ক্ষেত্রে a_j $(j = 1, 2, \ldots k)$ ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল। তাহলে স্কেলারসমূহ λj (যার মধ্যে সবগুলো শূন্য হয়) পাওয়া যাবে যাতে হবে $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j = 0$ (3.51)

ধরা যাক $\lambda j \neq 0$, (3.51) থেকে পাই

$$a_r = -\frac{1}{\lambda_r} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{k} \lambda_j a_j$$

(3.50)-কে লেখা যায়, $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{k} x_j a_j - \frac{1}{\lambda_r}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{k} x_r \frac{\lambda_j}{\lambda_r} a_j = b$ (3.52)

অথবা $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{k}\left(x_j - x_r \frac{\lambda_j}{\lambda_r}\right) a_j = b$ (3.53)

তাহলে, $x'' = \left[x_1 - x_r \frac{\lambda_1}{\lambda_r},\ x_2 - x_r \frac{\lambda_2}{\lambda_r}, \ldots x_{r-1} - x_r \frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r},\right.$

$$\left. 0, x_{r+1} - x_r \frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r}, \ldots x_k - x_r \frac{\lambda_k}{\lambda_r}, \ldots 0 \ldots 0\right]$$

$Ax = b$ এর একটি সমাধান।

x''-এর সর্বোচ্চ $(k - 1)$ চল শূন্য নয়।

আমাদের দেখাতে হবে $x'' \geq 0$

x''-কে কার্যকর সমাধান করার জন্য আমাদের এমন একটি a^r-কে নির্বাচন করতে হবে, যাতে করে

$$x_j - x_r \frac{\lambda_j}{\lambda_r} \geq 0 \quad (3.54)$$

$$(j = 1, 2, \ldots k, j \neq r)$$

যদি $\lambda_j = 0$ তাহলে (3.54) আপনা থেকেই সিদ্ধ হয়।

যদি $\lambda_j \neq 0$, λ_j দিয়ে ভাগ করে (3.5.4) থেকে পাই,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x_j}{\lambda_j} - \frac{x_r}{\lambda_r} \geq 0 \text{ যদি } \lambda_j > 0 \\ \frac{x_j}{\lambda_j} - \frac{x_r}{\lambda_r} < 0 \text{ এ যদি } \lambda_j > 0 \end{array}\right\} \quad (3.55)$$

যদি $\lambda_j > 0$, আমরা a^j কে নির্বাচন করি যখন

$$\frac{x_r}{\lambda_r} = \text{অবম}\left(\frac{x_j}{\lambda_j}\right)$$

যদি $\lambda_j < 0$, a^j কে নির্বাচন করা হয় যাতে $\frac{x_r}{\lambda_r} = \text{চরম}\left(\frac{x_j}{\lambda_j}\right)$

উদ্দেশ্য $\frac{x_r}{\lambda_r} - \frac{x_j}{\lambda_j}$ কে সবসময় ধনাত্মক রাখা। তাহলে কার্যকর সমাধান x' থেকে আরও একটি কার্যকর সমাধান x'' গড়া হ'ল যার মধ্যে সর্বোচ্চ $(k - 1)$ চল থাকে। যদি এই ধনাত্মক চলগুলির সংশ্লিষ্ট ভেক্টরগোষ্ঠী রৈখিকভাবে স্বাধীন হয় তাহলে x'' একটি মৌল কার্যকর সমাধান হয়। অপরপক্ষে যদি ধনাত্মক চলগুলির সংশ্লিষ্ট ভেক্টর গোষ্ঠী রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হয়, তাহলে আগের প্রক্রিয়ার পুনরাবৃত্তি করি। তাহলে আর একটি কার্যকর সমাধান x''' পাওয়া যাবে যার মধ্যে সর্বোচ্চ ধনাত্মক চলের সংখ্যা হ'ল $(k - 2)$। এখন এই চলগুলির সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন হলে উপপাদ্য প্রমাণিত হয়। যদি ঐ চলগুলির সংশ্লিষ্ট ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হয়, তাহলে আগের প্রক্রিয়ার পুনরাবৃত্তি করা হল। তাহলে এমন একটি কার্যকর সমাধান পাওয়া গেল যার সর্বোচ্চ ধনাত্মক চলের সংখ্যা $(k - 3)$।

যেহেতু A-এর মাত্রা হল m। সসীম সংখ্যক ধাপের পর আমরা এমন একটি কার্যকর সমাধান পাব যার সংশ্লিষ্ট রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভভেক্টরের সংখ্যা হল m।

উদাহরণ 3.10. আলোচনার বিষয় হল নীচের সমীকরণযুগল।

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = b$$

$$a_1 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix}11\\14\end{bmatrix}$$

$$a_1 + 2a_2 = a_3$$

অর্থাৎ a_1, a_2 ও a_3 ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

এখন $2a_1 + 3a_2 + a_3 = b$

অতএব $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ একটি কার্যকর সমাধান।

$A = [a_1, a_2, a_3] = \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\3 & 1 & 5\end{pmatrix}$। A-এর মাত্রা হল 2।

অর্থাৎ একটি মৌল কার্যকর সমাধান থাকবে যার সর্বোচ্চ দুটি চলের মান শূন্য নয়।

যেহেতু, $a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$, এখানে $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$

আমরা নিলাম $\frac{x_r}{\lambda_r}$ = অবম $\left\{\frac{x_j}{\lambda_j}, \lambda_j > 0\right\}$

= অবম $\left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}\right\}$

$= \frac{3}{2}$

তাহলে a_2-কে অপনয়ন করতে পারি

যেহেতু $= \frac{x_2}{\lambda_2}$ অবম $\left\{\frac{x_j}{\lambda_j}, \lambda_j > 0\right\}$ আমরা লিখতে পারি,

$$\hat{x}_1 = x_1 - \frac{x_2}{\lambda_2}\lambda_1 = 2 - \frac{3}{2}.1 = \frac{1}{2}$$

$$\hat{x}_2 = x_2 - \frac{x_2}{\lambda_2}\lambda_2 = 0$$

$$\hat{x}_3 = x_3 - \frac{x_2}{\lambda_2}\lambda_3 = 1 - \left(\frac{3}{2}\right)(-1) = \frac{5}{2}$$

একমাত্র দুটো চলই শূন্য নয় আর তার সংশ্লিষ্ট ভেক্টরদ্বয়, a^1 ও a^3 রৈখিকভাবে স্বাধীন।

$$\hat{x}_1 a_1 + \hat{x}_3 a_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\14\end{pmatrix}$$

মন্তব্য 3.6. যদি a_2 ভেক্টরের বদলে a_1 কে অপনয়ন করা হয়, তাহলে $\hat{x}_1 = 0$, শূন্য নয় এমন চলগুলি হল $\hat{x}_2$ এবং $\hat{x}_3$

$\hat{x}_2 = 3 - 2\ (2) = -1,\ \hat{x}_3 = 1 - 2\ (-1) = 3$

তাহলে (0, –1, 3) এই সমাধানটি মৌল কিন্তু কার্যকর নয়।

3.9 উন্নততর মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয়ের উপায়

রৈ. প্রো. স.-র যদি Z-এর চরম মান নির্ণয় করতে দেওয়া হয়, তাহলে আমাদের উদ্দেশ্যে হল কিভাবে মৌল কার্যকর সমাধান পরিবর্তন করলে Z-এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পাবে। নীচের উপপাদ্য সেই বিষয়ে আলোকপাত করবে?

প্রমাণ আকারের রৈ. প্রো. স. নেওয়া হল ঃ চরম Z শর্তসাপেক্ষে $Ax = b,\ x \geq 0.$

উপপাদ্য 3.9. প্রদত্ত বৈ. প্রো. স.-র

(i) মৌল কার্যকর সমাধান $x_B = B^{-1}b,$

(ii) অনুষঙ্গী বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান $Z = c_B x_B.$

(iii) $y_j = B^{-1}a_j$

(iv) $z_j = c_B y_j$

যদি A-এর কোনো স্তম্ভ a^j যেটা B-র স্তম্ভ নয়, এর ক্ষেত্রে $z_j - c_j > 0$ এবং যদি অন্ততঃ $y_{ij} > 0,\ i = 1, 2, \ldots m$। তাহলে একটি নতুন মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া সম্ভব। এই মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া যাবে যদি B-এর একটি স্তম্ভের বদলে a^j-কে স্তম্ভ হিসাবে নেওয়া হয়। সেক্ষেত্রে $Z \geq \hat{Z},\ \hat{Z}, Z$ এর নতুন মান।

নতুন মৌল সমাধান যদি অনপজাত (non-degnerate) হয়। তাহলে $\hat{Z} \geq Z$.

আমরা জানি যে যদি হয় $a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} b_i$ হয় (3.56)

তাহলে a_j কে যে কোনো ভেক্টর b_i এর বদলে লেখা যায় যদি $y_{ij} \neq 0$ এবং এই নতুন ভেক্টর সেট ও একটি ভিত্তি গঠন করে। এখানে b_i, B-এর i-তম স্তম্ভ ভেক্টরকে চিহ্নিত করে।

B-এর স্তম্ভ নয় এমন একটি a^j নিলাম যার জন্য অন্ততঃ একটি $y_{ij} \neq 0$ এবং ভিত্তি ম্যাট্রিক্স B-এর মধ্যে a^j উপস্থাপনা করলাম।

$$\text{তখন, } b_r = \frac{a_j}{y_{rj}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} b_i \tag{3.57}$$

প্রথম মৌল কার্যকর সমাধানের জন্য

$$\sum_{i=1}^{m} x_{Bi} b_i = b \tag{3.58}$$

(3.57) ও (3.58) থেকে পাই,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} x_{Bi} b_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{x_{Br} y_{ij}}{y_{rj}} b_i + \frac{x_{Br} a_r}{y_{rj}} = b_1$$

$$\text{অথবা, } \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \left(x_{Bi} - \frac{x_{Br} y_{ij}}{y_{rj}} \right) b_i + \frac{x_{Br} a_r}{y_{rj}} = b \tag{3.59}$$

নতুন সমাধানটা কার্যকর হবে যদি

$$x_{Bi} - \frac{x_{Br} y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0 \; i \neq j \tag{3.60}$$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} \neq 0$$

যেহেতু ভিত্তির সেটে a_j কে b_i-এর বদলে নেওয়া হয়েছে, $y_{ij} \geq 0$. যেহেতু x_B কার্যকর সমাধান $x_{Bi} \geq 0$ যদি $y_{rj} \leq 0$ $(i \neq r)$ এবং $y_{rj} > 0$। (3.60)-এর প্রথম অসমীকরণ এমনিতেই সিদ্ধ হয়। (3.60) এর দ্বিতীয় অসমীকরণ সিদ্ধ হতে হলে $y_{rj} > 0$ হতেই হবে। এখন যদি $y_{ij} > 0$ $(i \neq r)$ হয় তাহলে (3.59) এর প্রথম অসমীকরণ সিদ্ধ হবে যদি

$$\frac{x_{Bi}}{y_{ij}} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \geq 0, \;\; i \neq r \tag{3.61}$$

অথবা যদি, $\frac{x_{Br}}{y_{rj}} =$ অবম $\left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0 \right\}$ (3.62)

সিদ্ধ হয়, তাহলে (3.62) সত্য হলে, নতুন মৌল সমাধান কার্যকর হবে।

ধরা যাক (3.62) সত্য ও নতুন ভিত্তি ম্যাট্রিক্স $\hat{B}$ নিম্নরূপ।

$$\hat{B} = \left[\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots\ldots \hat{b}_m \right]$$

$\hat{B}$ এর স্তম্ভগুলি এইরূপে

$$\hat{b}_i = b_i, \; i \neq r, \tag{3.63}$$

$$\hat{b}_r = a_j \tag{3.64}$$

যদি নতুন সমাধানকে $\hat{x}_B$ বলা হয় তাহলে

$$x_{\hat{B}} = \hat{B}^{-1} b$$

আবার (3.59) থেকে পাই

$$x_{\hat{B}_i} = x_{B_i} - \frac{x_{B_r} y_{ij}}{y_{rj}} \tag{3.65}$$

$$x_{\hat{B}_r} = \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} \tag{3.66}$$

বিষয়াত্মক অপেক্ষকের নতুন মান $\hat{Z}$ হল,

$$\hat{Z} = c_B x_B = \sum_i c_{\hat{B}_i} \, \hat{x}_{B_i}$$

এখন $c_{\hat{B}_i} = c_{B_i} (i \neq r), c_{\hat{B}_r} = c_j$ কেননা b_r এর বদলে a_j এসেছে তার মূল্য c_j।

এখন $\hat{Z} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} c_{B_i} \left(x_{B_i} - x_{B_r} - \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} c_j$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} \left(x_{B_i} - x_{B_r} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} c_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} x_{B_i} - \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ij} + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} c_j$$

$$= Z = \frac{x_{B_r}}{y_{rj}}\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ij}\right) \tag{3.67}$$

উপপাদ্য 3.9 থেকে লিখতে পারি,

$$z_j = c_B y_j = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ij} \tag{3.68}$$

(3.67) ও (3.68) থেকে পাই

$$\hat{z} = z + \theta\left(c_j - z_j\right) \tag{3.69}$$

উপরে $\theta = \frac{x_{B_r}}{y_{rj}}$

যদি $\theta\ (c_j - z_j) > 0$ তাহলে $\hat{Z} > Z$

যেহেতু $\theta = \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} > 0$, তাহলে যদি $c_j - z_j > 0,\ \hat{Z} > Z$

উপপাদ্য 3.10 প্রদত্ত রৈ. প্রো. স.-র

(i) মৌল কার্যকর সমাধান $x_B = B^{-1}b$

(ii) অনুষঙ্গী বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান $Z = c_B x_B$

(iii) $y_j = B^{-1}a_j$,

(iv) $z_j = c_B y_j$

যদি A-এর কোন স্তম্ভ a_j, যেটা B-এর স্তম্ভ নয় এর ক্ষেত্রে $z_j - c_j > 0$ এবং অন্ততঃ একটি ভেক্টর উপাংশ $y_{ij} > 0,\ j = 1, 2, \ldots\ldots m$, তাহলে একটি নতুন মৌল কার্যকর সমাধান স্তম্ভ হিসাবে নেওয়া হয় এবং $\hat{Z} > Z,\ \hat{Z}_1, Z$-এর পরিবর্তিত মান।

উদাহরণ 3.11. একটি রৈ. প্রো. স. র

শর্তগোষ্ঠী হল $\quad x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = b$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$$

বিষয়াত্মক অপেক্ষক $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$-এর চরম মান নির্ণয় করতে হবে।

$$a_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$$

$$c_1 = 1,\quad c_2 = 2,\quad c_3 = 3$$

B ম্যাট্রিক্সটি এমনভাবে গঠন করা হল যার প্রথম স্তম্ভ হল a_1 এবং দ্বিতীয় স্তম্ভ হল a_2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B^{-1} = -\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = -\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = B^{-1}a_1 = -\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T$$

$$z_1 = c_B y_1 = [1, 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$z_1 - c_1 = 1 - 1 = 0, \quad Z_1 = c_B x_B = [1,\ 2]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4$$

এখন B ম্যাট্রিক্সে স্তম্ভ ভেক্টর a_3 কে আনলে যদি a_1 কে সরানো হয়,

তাহলে পাব $2\ (a_3 - a_2) + a_2 = b$

$$(1 - 2)\ a_2 + 2a_3 = b$$

এখানে, $x_{B_2} = 2\ \dfrac{x_{B_r}}{y_{rj}} = 2$

$$\hat{x}_{B_2} = 1 - 2 = \text{ ঋণাত্মক সংখ্যা।}$$

অতএব সমাধান কার্যকর নয়।

আবার a_3 যদি a_2 কে অপনয়ন করে,

$$2a_1 + (a_3 - a_1) = b$$

অথবা $(2 - 1)\ a_1 + a_3 = b$

$$x_{B_1} = 2,\ \frac{x_{B_r} y_{ij}}{y_{rj}} = \frac{x_{B_2} y_{12}}{y_{23}} = 1$$

অর্থাৎ, $a_1 + a_3 = b$

সমাধান $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $Z_2 = c'_B x'_B = (1, 2, 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$

অতএব চরম Z = 4

উদাহরণ 3.12. একটি রৈ. প্রো. স.-র

শর্তগোষ্ঠী হল $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = b$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

বিষয়াত্মক অপেক্ষক $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$-এর চরম মান নির্ণয় করতে হবে।

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = 4, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 2$$

B ম্যাট্রিক্সটি এমনভাবে গঠন করা হল যার প্রথম স্তম্ভ হল a_3 এবং দ্বিতীয় স্তম্ভ হল a_2

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}^T$$

$$z_1 = c_By_1 = \frac{1}{4}[2,2]\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = 3$$

$$z_1 - c_1 = 3 - 4 = -1$$

$$Z = c_Bx_B = \frac{1}{4}[2,2]\begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix} = 9$$

যেহেতু $z_1 - c_1 < 0$, $y_{1j} > 0$, আমরা B এর কোনো একটি স্তম্ভের পরিবর্তে a_1 কে স্তম্ব হিসাবে নিতে পারি।

এখন $\dfrac{x_{B_r}}{y_{rj}} =$ অবম $\left(\dfrac{x_{B_i}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right)$

$$= \text{অবম} \left(\frac{1}{4}\frac{13}{\frac{1}{4}(1)}, \frac{1}{4}\frac{5}{\frac{1}{4}(5)}\right)$$

$$= \text{অবম } (13, 1) = 1 = \frac{x_{B_2}}{y_{21}}$$

আবার B এর দ্বিতীয় স্তম্ভের বদলে a^1 নিতে হবে

$$\hat{Z} = Z + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}}(c_1 - z_1) = 9 + 1.1 = 10 > 9.$$

আমার $\hat{x}_B, c_B$ প্রত্যক্ষভাবে নির্ণয় করে ওপরের একই উপসংহারে পৌঁছতে পারি।

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \hat{B}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}^{-1}b = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = c_B \hat{x}_B = [2, 4]\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 10$$

3.10 সিম্প্লেক্স পদ্ধতির ভূমিকা

প্রদত্ত একটি প্রমাণ আকারের রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা। উদ্দেশ্য ইহার চরম (অবম) মান নির্ণয় করা। আমরা এই এককের মধ্যে আগে দেখেছি কি করে একটা কার্যকর সমাধান থেকে একটি মৌল কার্যকর সমাধান বার করা যায়। আমরা আরও দেখেছি সমাধান অপজাত না হলে মৌল কার্যকর সমাধানের সঙ্গে শর্তগোষ্ঠীয় দ্বারা চিহ্নিত উত্তল সেটের কোনো প্রান্তিক বিন্দুর একৈক সম্পর্ক। আমরা দেখেছি কি করে একটি মৌল সমাধান থেকে আর একটি মৌল সমাধানে পৌঁছোনো যায়। যার ফলে চরম রৈ. প্রো. স.-র ক্ষেত্রে Z এর মান আরও বাড়ে বা কমে যায়। জ্যামিতিক দিক থেকে দেখলে বলা যায় উক্ত উত্তল সেটের এক প্রান্তিক বিন্দু থেকে আর একটি প্রান্তিক বিন্দুতে যাওয়া যায় যাতে করে Z এর মান বাড়ে (চরম রৈ. প্রো. স.) বা Z এর মান কমে (অবম রৈ. প্রো. স.) এর ক্ষেত্রে। যদি ম্যাট্রিক্স A $m \times n$ আকারের হয় ও এর মাত্রা m হয়, তাহলে আমরা ${}^nc_m$ কৌণিক বিন্দু পাব। সুতরাং সসীম ধাপেই Z-এর চরম (অবম) মান পাওয়া যায়। আরও দেখানো যায় যে যদি a_j. B-এর স্তম্ভ না হয় এবং $z_j - c_j \geq 0$ হয় এমন সব a_j-এর জন্য তাহলেই চরম (অবম) Z পাওয়া যায়। এইটাই হ'ল সিম্প্লেক্স পদ্ধতি গোড়ার কথা। এই আলোচনাটাই পরের এককে আরও বিশদভাবে করা হবে।

3.11 সারাংশ

3.11. এই এককে সিমপ্লেক্স পদ্ধতির সংশ্লিষ্ট তত্ত্ব অনুধাবন করতে গেলে প্রয়োজনীয় ধারণাগুলো ব্যাখ্যা করা হয়েছে?

গুরুত্বপূর্ণ ধাপগুলো ঃ

(ক) মৌল কার্যকর সমাধানের সঙ্গে শর্তগোষ্ঠীর দ্বারা চিহ্নিত উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুর সম্পর্ক

(খ) একটি মৌল কার্যকর সমাধান থেকে উন্নততর মৌল সমাধান পাবার উপায়

এবং (গ) সিমপ্লেক্স পদ্ধতির ভূমিকা, আলোচিত হয়েছে।

3.12 অনুশীলনী

1. দেখান যে (3, 0, 2), (7, 0, 9) এবং (10, 1, 11)—এই ভেক্টরত্রয় E_3 দেশে ভিত্তি গঠন করে।

2. E_3 দেশে এমন একটি ভিত্তি নির্ণয় করুন যার মধ্যে (2, 1, 0) এবং (1, 0, 2)—এই ভেক্টরদ্বয় অন্তর্গত।

3. প্রদত্ত $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11$$
$$3x_1 + x_2 + 5x_3 = 14$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

এই সমীকরণযুগলের একটি কার্যকর সমাধান। ঐ সমাধান থেকে একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন।

4. নীচের সমীকরণতন্ত্রে মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 13$$

5. দেখান যে প্রদত্ত রৈ. প্রো. স.-র

$$\text{চরম } Z = 3x_1 + 2x_2 + x_2$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 5$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

$\left(0, \frac{12}{5}, \frac{2}{5}\right)$ একটি মৌল কার্যকর সমাধান। এখন থেকে একটি উন্নততর মৌল কার্যকর সমাধান, যদি থাকে তাহলে তা নির্ময় করুন ।

6. নির্দ্ধারণ করুণ কার্যকর সমাধান $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$, নীচের সমীকরণতন্ত্রের

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$$

একটি মৌল সমাধান কিনা।

7. দেখান যে নীচের রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের দুটি অপজাত মৌল সমাধান আছে এবং যে সমাধানটি অপজাত নয়, সেটি কার্যকরও নয় ঃ

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 6$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

8. অতিরিক্ত ও উদ্বৃত্ত চলের সাহায্যে নীচের রৈ. প্রো. স.-কে প্রমাণ আকারে রূপান্তরিত করুনঃ

চরম $Z = 2x_1 - x_2 + 5x_3$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 50$

$$x_1 + 9x_2 - 5x_3 \ge 40$$
$$5x_1 + 2x_2 = 20$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

9. (i) লেখচিত্রের সাহায্যে নীচের রৈ. প্রো. স.-র কার্যকর সমাধান আছে

চরম $Z = 6x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $4x_1 + 2x_2 \le 8$

$$x_1 \qquad \ge 0$$
$$x_2 \qquad \ge 7$$

$x_1,\ x_2 \ge 0$ কিনা তা নির্ণয় করুন।

(ii) নিম্নলিখিত রৈ. প্রো. স. গুলির অন্ততঃ একটি সমাধান আছে কিনা এবং থাকলে সেটি কার্যকর বা মৌল কার্যকর কিনা তা নির্ধারণ করুন ঃ

(ক) চরম $Z = 5x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + 5x_2 \le 15$

$$5x_1 + 3x_2 \le 10,$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

(খ) চরম $Z = x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \le 1$

$$3x_1 + x_2 \ge 3$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

10. দেখান যে (4, 0) নিম্নলিখিত রৈ. প্রো. স.-র

চরম $Z = 5x_1 + 7x_2$

শর্তসাপেক্ষে $4x_1 + 2x_2 \le 8$

$$3x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$2x_1 + 3x_2 \ge 13$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

একটি মৌল সমাধান। এর থেকে উন্নততর একটি মৌল সমাধান নির্ণয় করুন।

11. $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ এবং $x_3 = 4$ নীচের সমীকরণতন্ত্রের একটি কার্যকর সমাধান ঃ

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$$
$$x_1 + 4x_2 \qquad = 14$$

কার্যকর সমাধান থেকে একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন।

3.13 উত্তরমালা

2. (2, 1, 0), (1, 0, 2) এবং (0, 1, 0) একটি ভিত্তি গঠন করে।

3. মৌল কার্যকর সমাধান $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{5}{3}$

4. মৌল কার্যকর সমাধান ঃ

(i)	(ii)	(iii)	(iv)
$x_1 = 2$	$x_1 = 0$	$x_1 = 4$	$x_1 = 0$
$x_2 = 3$	$x_2 = 0$	$x_2 = 4$	$x_2 = \frac{13}{3}$
$x_3 = 0$	$x_3 = 12$	$x_3 = 0$	$x_3 = \frac{10}{3}$
$x_4 = 0$	$x_4 = 13$	$x_4 = 5$	$x_4 = 0$

5. $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{8}{3},\ x_3 = 0$

6. মৌল সমাধান নয়।

7. অপজাত সমাধানদ্বয় ঃ $(x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$

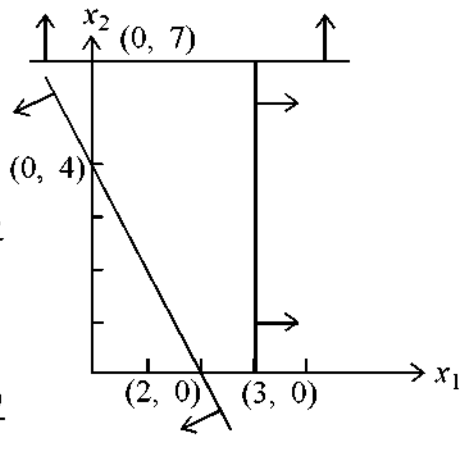
$(x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$

অনপজাত সমাধান ঃ $(x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = -1)$

8. চরম $Z = 2x_1 - x_2 + 5x_3$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 50$

$$x_1 + 9x_2 - 5x_3 - x_5 = 40$$
$$5x_1 + 2x_2 = 20$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$



9. (i) কোন কার্যকর সমাধান নেই।

(ii) (ক) মৌল কার্যকর সমাধান $x_1 = \frac{5}{16},\ x_2 = \frac{45}{16}$

(খ) কার্যকর সমাধান নেই।

10. উন্নততর মৌল সমাধান ঃ $x_1 = 2,\ x_2 = 3$

11. মৌল কার্যকর সমাধান ঃ $x_1 = \frac{50}{9},\ x_2 = \frac{19}{9}$

তথ্যসূত্র

1. G. Hadley [1974]	Linear programming, Addison Wesley, Publishing Comp.
2. S. I. Gass [1958]	Linear programming, N. Y. McGraw Hill.
3. J. G. Chakraborty & P. R. Ghosh [2001]	Linear programming & Game theory, Moulik Library
4. J. K. Sharma [2003]	Operations Research, Macmillan Indian Ltd.
5. T. N. Moulik*	Linear progamming & Theory of Games, U. N. Dhur & Sons.
6. R. N. Sen [2007]	Linear Programming & Game Theory, Block–1, EMT 14
7. M. S. Bazarah Et. Al [1979]	Nonlinear programming John, Willy & sons N.Y.

*Not Known

একক 4 ❑ সিম্প্লেক্স পদ্ধতির ও নিহিত তত্ত্ব ও প্রয়োগ

গঠন

4.1 উদ্দেশ্য

4.2 রৈ.প্রো.স.-এর চরম মান বা অবম মানের অস্তিত্বের শর্ত

4.3 সিম্প্লেক্সের কলনবিধি (চরম মান নির্ণয় সমস্যা)

4.4 সিম্প্লেক্স কলনবিধি ঃ '≥' ধরণের অসমীকরণ বা '=' ধরণের শর্তগোষ্ঠী

4.5 দ্বিপর্য্যায় পদ্ধতি **(Two-phase Method)**

4.6 অপজাত সমাধান

4.7 কার্যকর সমাধান সেট সীমাবদ্ধ কী সীমাহীন

4.8 বিকল্প চরম বা অবম

4.9 সারাংশ

4.10 অনুশীলনী

4.1 উদ্দেশ্য (Objectives)

এই এককের উদ্দেশ্য হল ঃ

● সিম্প্লেক্স পদ্ধতির অন্তর্নিহিত তত্ত্ব যেটা আগের এককে সংক্ষেপে আলোচিত হয়েছে তা আরও বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা।

● কৃত্রিম চলের প্রবর্ত্তন করে কি করে বিশেষ ধরণের রৈ. প্রো. স. সমাধান করা যায় তা ইঙ্গিত করা।

● সিম্প্লেক্স কলনবিধির বিভিন্ন ধাপ ব্যাখ্যা করা ও অপজাত সমাধানের ক্ষেত্রে কী করে রৈ. প্রো. স. সমাধান করা যায় তাই এই এককে আলোচিত হবে।

4.2 চরম মান বা অবম মানের অস্তিত্বের শর্ত

আগের এককে আমরা দেখেছি কী করে একটি রৈ. প্রো. স.-র মৌল কার্যকর সমাধান থাকলে তার থেকে উন্নততর সমাধান পাওয়া যায়। এর পরেই যেটা আলোচনার মধ্যে আসে কখন সমস্যাগুলির চরম বা অবম সমাধান পাওয়া যাবে। নীচের উপপাদ্যটি সেই প্রসঙ্গেই।

উপপাদ্য 4.1 : রৈ. প্রো. স. ঃ চরম $Z = cx$ শর্তসাপেক্ষে $Ax = b,\ x \geq 0$.

প্রদত্ত (i) মৌল কার্যকর সমাধান $x_B = B^{-1}b$, এবং $Z_0 = C_B\ x_B$.

(ii) A-এর প্রতিনিধি স্তম্ভ a_j-এর জন্য $z_j - c_j \geq 0$ তাহলে Z_0 প্রদত্ত শর্তাধীনে Z-এর চরম মান এবং x_B-ই চরম মৌল কার্যকর সমাধান।

ভিত্তি ম্যাট্রিক্স B-এর স্তম্ভ নয় এমন A-এর স্তম্ভ a_j-এর জন্য আমরা ধরলাম $z_j - c_j \geq 0$.

ধরা যাক, x, $Ax = b$-এর একটি কার্যকর সমাধান।

অর্থাৎ $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b$ ....(4.1)

অনুষঙ্গী Z-এর মান Z^* এইরূপ,

$$Z^* = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad \text{..........(4.2)}$$

A-এর স্তম্ভ ভেক্টর a_j-কে এইভাবে ব্যাক্ত করা হয়,

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} b_i \qquad \text{..........(4.3)}$$

(4.1) ও (4.3) থেকে পাই,

$$x_1 \sum_{i=1}^{m} y_{i1}\, b_i + \ldots\ldots + x_n \sum_{i=1}^{m} y_{im} b_i = b$$

অথবা, $$\left[\sum_{j=1}^{m} x_j y_{1j}\right] b_1 + \ldots + \left[\sum_{j=1}^{m} x_j y_{mj}\right] b_m = b \qquad \text{............ (4.4)}$$

যেহেতু কোনো ভেক্টরকে দেশের ভিত্তি ভেক্টরসমূহের রৈখিক সমাবেশ হিসাবে একভাবে এবং মাত্র একভাবেই প্রকাশ করা যায়। (4.4) থেকে বলতে পারি যে,

$$x_{B_i} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \text{..........(4.5)}$$

আমরা দেখেছি A-এর যে সব স্তম্ভ ভেক্টর a_j B-এর স্তম্ভ নয় সেইগুলির জন্য $z_j - c_j \geq 0$।

A-এর যে সব স্তম্ভ ভেক্টর B-এর ও স্তম্ভ ভেক্টর, তাদের জন্য,

$$y_j = B^{-1} a_j = B^{-1} b_i = e_i \qquad \text{............ (4.6)}$$

এখানে a_j ভেক্টর B-এর i-তম স্তম্ভ।

অতএব $z_j = C_B y_j = C_B e_i = C_{B_i} = c_j$

অতএব A-এর যে সব স্তম্ভ ভেক্টর a_j, B-এরও স্তম্ভ ভেক্টর হয়, তাদের জন্য $z_j - c_j = 0$.

তাহলে a_j যদি B-এর স্তম্ভ ভেক্টর না হয়, যেহেতু $z_j \geq c_j$ এবং $x_j \geq 0$, (4.2) থেকে পাই,

$$z_1 x_1 + z_2 x_2 + \ldots + z_n x_n \geq Z^* \qquad \text{............ (4.7)}$$

যেহেতু $z_j = \sum_{i=1}^{m} C_{B_i} y_{ij}$, (4.7) থেকে পাই,

$$\left[\sum_{j=1}^{n} x_1 y_{1j}\right] C_{B_1} + \ldots + \left[\sum_{j=1}^{n} x_n y_{nj}\right] C_{B_n} \geq Z^*$$

(4.5) ব্যবহার করে পাই,

$$z_0 = C_{B_1} x_{B_1} + \ldots\ldots + C_{B_n} x_{B_n} \geq Z^*$$

অতএব প্রমাণিত হ'ল যে, z_0 বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম মান।

উদাহরণ 4.1. চরম $Z = 60\ x_1 + 50\ x_2$

শর্তসাপেক্ষে, $x_1 + 2x_2 \leq 40$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 60,\ x_i \geq 0$$

অতিরিক্ত চল x_3, x_4 ব্যবহার করে পারি,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 40 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 60 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4 \end{array}\right\}$$

অথবা, $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix}$

ভিত্তি ম্যাট্রিক্স $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

তাহলে $x_{B_1} = x_3 = 40$

$$x_{B_2} = x_1 = 60$$

$$y_1 = B^{-1} a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= c_{B_1 y_{11}} + c_{B_2 y_{12}} - c_1 \\ &= 0 \times 1 + 0 \times 3 - 60 = -60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 - c_2 &= c_{B_2 y_{12}} + c_{B_2 y_{22}} - c_2 \\ &= 0 \times 2 + 0 \times 2 - 40 \\ &= -40 \end{aligned}$$

যেহেতু, $z_1 - c_1 < z_2 - c_2$, আমরা a_1 ভেক্টরকে নির্বাচন করলাম।

$$\frac{x_{B_r}}{y_{rj}} = \text{অবম } \left\{\frac{x_{B_1}}{y_{11}}, \frac{x_{B_2}}{y_{21}}, y_{ij} > 0\right\}$$

$$= \text{অবম } \left\{\frac{40}{1}, \frac{60}{3}\right\}$$

$$= 20$$

অতএব b_2 কে B-এর থেকে অপসারণ করতে হবে।

$$\hat{x}_{B_1} = x_{B_1} - \frac{x_{B_r}}{y_{r1}} = y_{11} = 40 - 20.1 = 20$$

$$\hat{c}_{B_1} = 0$$

$$\hat{c}_{B_2} = c_{r_2} = 60$$

তাহলে দ্বিতীয় মৌল সমাধানকে লেখা যাবে ঃ

$$20\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 20\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40\\60\end{bmatrix}$$

নতুন মৌল সমাধান $x_{B_1} = \hat{x}'_3 = 20$

$$x_{B_2} = x'_1 = 20$$

$$y'_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = c_B y'_2 - c_2 = 0 \times \frac{4}{3} + 60 \times \frac{2}{3} - 50$$

$$= -10$$

এখন, $\dfrac{x_{B_1}}{y_{12}} = \dfrac{20}{\frac{4}{3}} = 15 > 0, \dfrac{x_{B_2}}{y_{22}} = \dfrac{20}{\frac{2}{3}} = 30 > 0$

$$\frac{x_{B_r}}{y_{rj}} = \text{অবম } \{15,\ 30\} = 15$$

$$\hat{x}_{B_1} = \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} = 15$$

$$\hat{x}_{B_2} = x_{B_2} - \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} \times y_{22} = 20 - 15.\frac{2}{3} = 10$$

তাহলে, $15\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+10\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40\\60\end{bmatrix}$

$$\hat{\hat{B}}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 2\end{bmatrix}$$

$$y_4=\hat{\hat{B}}^{-1}a_4=\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$z_4-c_4=-50\times\frac{1}{4}+60\times\frac{1}{2}-0=\frac{35}{2}>0$$

$$z_3-c_3=c_B\hat{\hat{B}}^{-1}a_3-c_3=[50,\ 60]\times\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-0$$

$$=[50,\ 60]\times\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}-0$$

$$=\frac{75}{2}-30=\frac{15}{2}>0$$

$$z_2-c_2=c_B\hat{\hat{B}}^{-1}a_2-c_2$$

$$=[50,60]\times\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}-50$$

$$=[50,60]\times\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-50=0$$

$$z_1-c_1=C_B\hat{\hat{B}}^{-1}a_1-c_1$$

$$=[50,\ 60]\times\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}-60$$

$$=[50,\ 60]\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-60=0$$

তাহলে $z_j - c_j \geq 1,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

অতএব চরম সমাধান = $\begin{bmatrix}x_1=10\\x_2=15\end{bmatrix}$

চরম $Z = 60 \times 10 + 50 \times 15 = 1350$

উদাহরণ 4.2 : সিম্প্লেক্স পদ্ধতি অবলম্বন করে নীচের রৈ. প্রো.স.-র সমাধান করুন ঃ

অবম $Z = 3x_1 + x_2,$

শর্তসাপেক্ষে,$2x_1 + 3x_2 \le 6$

$x_1 + x_2 \ge 1$

$x_1,\ x_2 \ge 0$

অতিরিক্ত ও উদ্বৃত্ত চল ব্যবহার করে ওপরের সমস্যাটিকে উপস্থাপনা করা যায় ঃ

অবম $Z = 3x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে,$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

$x_1 + x_2 - x_4 = 1$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0$

অবম মান নির্ণয় করার সমস্যাটাকে চরম মান নির্ণয় করার সমস্যায় রূপান্তরিত করা হল। তার জন্য মূল্যগুলির ঋণাত্মক চিহ্ন নিলাম। এখানে $c_1 = -3,\ c_2 = -1,\ c_3 = 0,\ c_4 = 0$

$$A = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A-এর মাত্রা $= 2$

ভিত্তি ম্যাট্রিক্স $B_1 = [a_3,\ a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_{B_1} = \text{মৌল সমাধান} = B_1^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} x_3 = 6 \\ x_4 = -1 \end{matrix}\right\}$ সমাধান মৌল হলেও কার্যকর নয়।

দ্বিতীয় ভিত্তি ম্যাট্রিক্স $B_2 = [a_1,\ a_2] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_{B_2} = B_2^{-1}b = -\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{matrix}\right\}$ সমাধান মৌল হলেও কার্যকর নয়।

ভিত্তি ম্যাট্রিক্স B_3 নেওয়া হল $= [a_1, a_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$x_{B_3} = B_3^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 1,\ x_3 = 4$ সমাধানটি মৌল কার্যকর।

$$1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$Z = c_{B_3} x_{B_3} = 1 \times -3 + 4 \times 0 = -3$

মৌল নয় এমন ভেক্টরগুলি হল a_2 ও a_4

$$y_2 = B_3^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = c_{B_3} B_3^{-1} a_2 - c_2 = [-3, 0]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1$$

$$= -6 + 1 = -5 < 0$$

$$z_4 - c_4 = c_{B_3} y_4 - c_4 = [-3, 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0$$

$$= [-3, 0]\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 0 = 3 > 0$$

$$z_1 - c_1 \ c_{B_3} B_3^{-1} a_1 - c_1$$

$$= [-3, 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3$$

$$= [-3, 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 = 0$$

অনুরূপভাবে, $z_3 - c_3 = 0$

যেহেতু $z_2 - c_2 < 0$, a_2 নতুন ভিত্তি ম্যাট্রিক্সের একটি স্তম্ভ হবে।

$$\theta = \frac{x_{B_3 r}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{ \frac{x_{B_3 1}}{y_{12}}, \frac{x_{B_3 2}}{y_{22}} \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{x}_{B_3 1} = x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\hat{x}_{B_3 2} = x_3 = x_{B_3 2} - \frac{x_{B_3 r}}{y_{rj}} y_{22} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

$$\hat{Z} = Z + \theta(c_2 - z_2) = -3 + \frac{1}{2}5 = -\frac{1}{2}$$

অতএব $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = x_4 = 0$

মৌল নয় এমন স্তম্ভ ভেক্টরের জন্য

$$z_1 - c_1 = c_{B_3} B_3^{-1} a_1 - c_1$$

$$= [-1, 0]\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3$$

$$= [-1, 0]\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3$$

$$= [-1, 0]\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3 = 2\frac{1}{2} > 0$$

$$z_4 - c_4 = [-1, 0]\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0$$

$$= [-1, 0]\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} - 0 = \frac{1}{2} > 0$$

অতএব অবম সমাধান হল, $x_1 - 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = x_4 = 0$ অবম $Z = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

4.3 সিম্প্লেক্সের কলনবিধি (চরম মান নির্ণয় সমস্যা)

যদি কোনো রৈ. প্রো. স.-র চরম মানের অস্তিত্ব থাকে তাহলে তা নির্ণয় করার জন্য বিভিন্ন ধাপগুলি যে পরম্পরায় পার হতে হবে তা আনুপূর্বিক বিবৃত হ'ল ঃ

ধাপ 1.

(i) রৈ. প্রো. স.-টিকে গঠন করা হল।

(ii) যদি অবম মান নির্ণয়কারী রৈ. প্রো. স. থাকে তবে তাকে চরম মান নির্ণয়কারী সমস্যায় রূপান্তরিত করা যায় নিম্নভাবে ঃ

অবম $Z \Rightarrow$ চরম $(-Z)$ শর্তগোষ্ঠী অপরিবর্তিত থাকে।

উদাহরণ 4.3 চরম $Z = 2x + 3,$

$$x \leq 5,\ x \geq 0$$

চরম মান প্রাপ্ত হয় $x = 5$

অবম $(-Z) = -(2x + 3)$

$$x \leq 5.\ x \geq 0$$

অবম মানও প্রাপ্ত হয় $x = 5$ তে।

চরম $Z = 13$ কিন্তু অবম $(-Z) = -13$

(iii) পরীক্ষা করে দেখতে হবে সমস্ত b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ধনাত্মক কিনা। যদি তা না হয়, যে যে অসমীকরণে (সমীকরণে) $b_i < 0$, তাদের উভয়পক্ষে -1 দিয়ে গুণ করে, b_i-কে > 0 করতে হবে।

(iv) যদি অসমীকরণতন্ত্র "$\leq$" ধরনের হয় তাহলে বামপক্ষে অতিরিক্ত চল যোগ করে সেগুলিকে সমীকরণতন্ত্রে রূপান্তরিত করতে হবে।

যদি অসমীকরণতন্ত্রে "$\geq$" ধরণের হয়। সেগুলিকে সমীকরণতন্ত্রে কী করে পরিবর্তিত করতে হয় তা পরের অংশে আলোচিত হবে।

(v) যদি শর্তগোষ্ঠীর কোনো চলের চিহ্ন অবাধ থাকে, তখন সেই চলকে দুটি ধনাত্মক চলের অন্তর হিসাবে প্রকাশ করা হয়।

ধাপ 2 প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান ঃ

রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার চলগুলির সহগসমূহকে লেখা হল নীচের টেবিলে 1 উদ্দেশ্য প্রারম্ভিক কার্যকর সমাধান নির্ণয়।

T_1

মৌল চলের সহগ (c_B)	মৌল চল B	মৌল চলের মান	c_1	c_2		c_n	0	0	0
		b	a_1	a_2		a_n	a_{n+1}	a_{n+2}	....
c_{B1} c_{B2} c_{B3}	s_1 s_2 s_3	x_{B1} x_{B2} x_{B3}	y_{11} y_{21} y_{31}	y_{12} y_{22} y_{32}		y_{1n} y_{2n} y_{3n}	$y_{1(n+1)}$ $y_{2(n+1)}$ $y_{3(n+1)}$	$y_{1(n+2)}$ $y_{2(n+1)}$ $y_{3},(x+2)$	
			z_1-c_1	z_2-c_2	–	z_n-c_n	–	–	–

যেহেতু s_1, ..., s_m ভিত্তি ভেক্টরদের সংশ্লিষ্ট চল এবং যেহেতু ভিত্তি ভেক্টরগুলি যথাক্রমে e_1, e_2, ... e_m,

ভিত্তি ম্যাট্রিক্স $B = [e_1, e_2, \ldots e_m]$, B একটি mxm ম্যাট্রিক্স।

অতএব $x_B = B^{-1}b = b$ অর্থাৎ $x_{B_1} = b_1, \ldots, x_{B_m} = b_m$ বাকী $(n - m)$ চলের মান শূন্য হবে।

এর পরে $z_1 - c_1 = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{i1} - c_1$-এর মান বার করা হল।

অনুরূপে $z_2 - c_2$, ... $z_n - c_n$-এর মান বার করা হল।

ধাপ 3. চরম মান প্রাপ্ত হল কিনা তার পরীক্ষা

তিনটি সম্ভাবনা আছে

(i) মৌল ভিত্তি নয় এমন ভেক্টরদের সংশ্লিষ্ট চলের জন্য যদি $z_j - c_j \geq 0, \forall_j$ সেক্ষেত্রে চরম সমাধান হল ওই মৌল কার্যকর সমাধান।

(iii) যদি অন্ততঃ একটি $z_j - c_j > 0$ হয় এবং অন্ততঃ একটি $y_{ij} > 0$ হয় তাহলে Z-এর উন্নততর মান সম্ভব।

ধাপ 4. ভিত্তি ম্যাট্রিক্সে নতুন যে ভেক্টর ঢুকবে তার নির্বাচন।

j-এর কিছু মানের জন্য যদি $z_j - c_j < 0$ তাহলে যে j-এর মানের জন্য সবচেয়ে ছোটো সেই j-এর মান, ধরা যাক, j-কে বেছে নেওয়া হ'ল। এই j স্তম্ভকে মূল স্তম্ভ (key coloumn) বলা হয়। এরপরে।

অবম $\left\{\frac{x_{B_i}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right\}$ বার করা হল।

অর্থাৎ $\left\{\frac{x_{B_1}}{y_{ij}}, (y_{1j} > 0), \ldots \frac{x_{B_m}}{y_{nj}}(y_{mj} > 0)\right\}$-এর মধ্যে যেটা সবচেয়ে ছোটো সেটাকে বাছা হল, ধরা যাক $i = r$-এর জন্য অবম মান পাওয়া গেলে। অর্থাৎ

$$\frac{x_{B_r}}{y_{rj'}} = \text{অবম} \left\{\frac{x_{B_i}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right\}$$

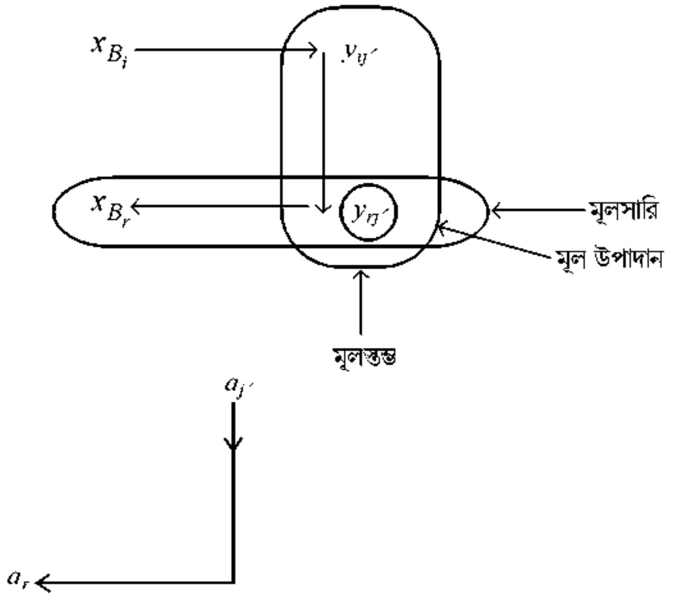
তাহলে r সারিটি মূল সারি (Key row) হবে।

r সারি ও j' স্তম্ভের সাধারণ পদটি অর্থাৎ $y_{rj'}$ কে মূল উপাদান (Key element) বলা হয়।

ধাপ 5. নতুন সমাধান নির্ণয় ঃ

$$\hat{x}_{B_r} = \frac{x_{B_r}}{y_{rj'}}$$

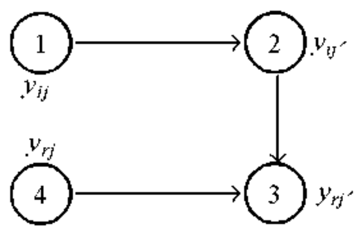
$$\hat{x}_{B_i} = x_{B_i} - \frac{y_{ij'}}{y_{rj'}} x_{B_r} \, (i \neq r)$$



$a_{j'}$ ভিত্তির নতুন স্তম্ভ ভেক্টর, a_r ভিত্তির থেকে বেরিয়ে যাবে

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ij'}}{y_{rj'}} y_{rj} \quad i \neq r$$

$$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rj'}}$$



$\hat{x}_{B_i}$ অনুষঙ্গী $\hat{c}_{B_i}$, c_{B_i}-এর বদলে বসবে।

ধাপ **6.** প্রক্রিয়ার পুনরাবৃত্তি ঃ

$\mathbf{T_2}$ (নতুন টেবিল)

$\mathbf{c}_B$	ভিত্তির ভেক্টর সমূহ	$\hat{i}$	a_1	a_2		a_j	a_n	$a_{n+1} \dots a_{x+m}$
c_{B_1} c_{B_2} c'_j c_{n+m}	a_{n+1} a_{n+2} a'_j a_{n+m}	$\hat{x}_{B_1}$ $\hat{x}_{B_2}$ $\hat{x}_{B_{\hat{r}}}$ $\hat{x}_{B_m}$	$\hat{y}_{11}$ $\hat{y}_{21}$ $\hat{y}_{r1}$	$\hat{y}_{12}$ $\hat{y}_{22}$		$\hat{y}_{1j}$ $\hat{y}_{2j}$ $\hat{y}_{rj}$	$\hat{y}_{1n}$ $\hat{y}_{2n}$ $\hat{y}_{rn}$	$\hat{y}_{1,\,n+1}$ $\hat{y}_{1,\,n+m}$ $\hat{y}_{2,\,n+1}$ $\hat{y}_{2,\,n+m}$ $\hat{y}_{r,\,n+1}$ $\hat{y}_{r,\,n+m}$
			$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	.....	.....	.....	....

আগের প্রক্রিয়াটি পুনরাবৃত্তি করতে হবে। যতক্ষণ না সমস্ত মৌল চল নয় এমন চলের ক্ষেত্রে $z_j - c_j \geq 0$ হয়। ততক্ষণ ওই কলনবিধি ব্যবহার করতে হবে।

x_{B_i} -এর যে যে মানের জন্য $z_j - c_j = 0$ সেই মানগুলোই চরম সমাধান।

মন্তব্য 4.1 বিশেষ ধরনের সমস্যা যেমন,

(i) শর্তগোষ্ঠীতে '$\geq$' অসমীকরণ থাকলে বা '$=$' থাকলে

(ii) যেখানে $z_j - c_j$ সবচেয়ে কম (≤ 0) এবং $y_{ij} < 0$

(iii) রৈ. প্রো. ম. টির কার্যকর কোনো সমাধান না থাকলে সেগুলি পরে আলোচিত হবে।

উদাহরণ ঃ 4.3 : চরম $z = 4x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 \leq 15$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

অতিরিক্ত চল x_3, x_4 যোগ করে পাই,

চরম $z = 4x_1 + 3x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 + x_3 = 15,$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 24$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

এখানে $a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$

যেহেতু A-এর মাত্রা $= 2$, ভিত্তি ম্যাট্রিক্স $B = [a_3,\ a_4]$। আগের নির্দেশ অনুসরণ করে পাই,

T_1 :

	c_B	B	b	a_1 (4)	a_2 (3)	a_3 (0)	a_4 (0)
	0	a_3	15	3	1	1	0
	0	a_4	24	3	4	0	1
	$z_j - c_j$			–4*	–3	0	0

মূলসারি

অবম $(z_j - c_j)$ = অবম $(-4, -3) = -4$

মূলস্তম্ভ

$$\frac{x_{B_r}}{y_{r1}} = \text{অবম } \left\{\frac{x_{B_i}}{y_{i1}}, y_{i1} > 0\right\} = \text{অবম } \left\{\frac{15}{3}, \frac{24}{3}\right\} = 5$$

নতুন ভিত্তিতে a_3-এর বদলে a_1 আসবে।

T_2 :

c_B	B	b	a_1 (4)	a_2 (3)	a_3 (0)	a_4 (0)
4	a_1	5	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	a_4	9	0	3	–1	1
$z_j - c_j \rightarrow$			0	$-\frac{5}{3}$*	$\frac{4}{3}$	0

$$\text{অবম } (z_j - c_j) = -\frac{5}{3}$$

$$\frac{x_{B_r}}{y_{r2}} = \left\{\frac{5}{\frac{1}{3}}, \frac{9}{3}\right\} = 3$$

c_B	B	b	a_1 (4)	a_2 (3)	a_3 (0)	a_4 (0)
4	a_1	4	1	0	$\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{9}$
3	a_2	3	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	$\frac{7}{9}$	$\frac{5}{9}$

যেহেতু $z_j - c_j \geq 0$,

প্রদত্ত রৈ. প্রো. স.-র চরম সমাধান $= \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

চরম $z = 4 \times 4 + 3 \times 3 = 25$

উদাহরণ 4.4. চরম $Z = x_1 - x_2 + 3x_3$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$

$$2x_1 \quad - x_3 \leq 2$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

অতিরিক্ত চল x_3, x_4, x_5 যোগ করলে সমস্যাটির আকার হয় ঃ

চরম $Z = x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_1 + 0.x_5 + 0.x_6$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

$$2x_1 \quad - x_3 + x_5 = 2$$
$$2x_1 \quad - 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

T_1 :

			1	–1	3	0	0	0
c_B	B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0	a_4	10	1	1	1	1	0	0
0	a_5	2	2	0	–1	0	1	0
0	a_6	0	2	–2	3	0	0	1
$z_j - c_j$			–1	1	–3	0	0	0

অবম $(-1, -3) = -3$

$$\frac{x_{B_r}}{y_{r3}} = \text{অবম} \left\{\frac{x_{B_i}}{y_{i3}}, y_{i3} > 0\right\} = \text{অবম} \left\{\frac{10}{1}, \frac{0}{3}\right\} = 0$$

T_2 :

			1	–1	3	0	0	0
c_B	B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0	a_4	10	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	–1	0	$-\frac{1}{3}$
0	a_5	2	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$
3	a_3	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j$			1	–1*	0	0	0	1

$$\frac{x_{B_r}}{y_{r2}} = \text{অবম} \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_{i2}}, y_{i2} > 0 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{10}{\frac{5}{3}} \right\} = 6$$

T_3 :

			1	–1	3	0	0	0
c_B	B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
–1	a_2	6	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$
0	a_5	6	$\frac{14}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$
3	a_3	4	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
$z_j - c_j$			$\frac{9}{10}$	0	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{4}{5}$

$z_j - c_j \geq 0, \forall_j$

চরম সমাধান $x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 4$

চরম $Z = -6$

4.3 সিম্প্লেক্স কলনবিধি ঃ '≥' ধরণের অসমীকরণ বা '=' ধরণের শর্তগোষ্ঠী

4.4.1. কৃত্রিম চলের সাহায্যে মৌল কার্যকর সমাধান গঠন ঃ

অসমীকরণ '≥' ধরণের হলে উদ্বৃত্ত চল বিয়োগ করে অসমীকরণগুলোকে সমীকরণতন্ত্রে রূপান্তরিত করা হল। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক $2x_1 + 3x_2 \geq 4$ একটি অসমীকরণ আছে। উদ্বৃত্ত চল ব্যবহার করে আমরা পাই, $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$, $x_3 \geq 0$। x_3-এর সংশ্লিষ্ট ভেক্টরে একটি উপাংশ '–1' হবে বাকীরা '0' হবে। সুতরাং ভেক্টরটি একক হলেও ধনাত্মক নয়।

এইজন্য আর একটি ধনাত্মক চল, ওই সমীকরণে প্রবর্তন করা হয়, যাতে করে ভিত্তি ম্যাট্রিক্সটি একসম হয়। এই চলকে কৃত্রিম চল বলা হয়।

যদি শর্তগোষ্ঠী '=' ধরণের হয় উদ্বৃত্ত চল প্রয়োজন নেই, কিন্তু কৃত্রিম চল অতি অবশ্যই ব্যবহার করতে হয়, যাতে করে প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া যায়।

ধরা যাক, আকারের শর্তগোষ্ঠী নেওয়া হল ঃ

$$Ax = b, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.8)$$

$$x \geq 0,$$

$$x,\ b \in E_n$$

$$A \rightarrow m \times n$$

এখন (4.8)-এর পরিবর্তে আমরা আর একটি সমীকরণতন্ত্র নিলাম ঃ

$$A_x + I_{x\alpha} = [AI]\begin{bmatrix} x \\ x_\alpha \end{bmatrix} = b \ \ldots\ldots\ldots (4.9)$$

আমরা (4.8) সমীকরণতন্ত্রে mটি বাড়তি চল x_{α_i} যোগ করলাম। x_{α_i}-এর সংশ্লিষ্ট ভেক্টরটি হল c_i। এই নতুন চলগুলিকে **কৃত্রিম চল** বলা হয়।

কৃত্রিম চলগুলি যে ভেক্টরের উপাংশ তাকে কৃত্রিম ভেক্টর বলা হয়।

আমরা তাহলে (4.9)-এর একটি মৌল কার্যকর সমাধান পাই, যেমন, $x = 0$, $x_\alpha = b$। কিন্তু এই সমাধান সেট মূল সমীকরণতন্ত্র (4.8)-এর মৌল সমাধান নয়। কেননা (4.9)-এর সমাধান (4.8)-এর তখনই সমাধান হতে পারে যখন $x_\alpha = 0$ অর্থাৎ সমস্ত কৃত্রিম চলগুলিই শূন্য হয়। কিন্তু আমরা শুরু করার সময় $x = 0$, $x_\alpha = b$ নিয়ে প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান পেতে পারি। এরপর ওই কৃত্রিম চলগুলির সংশ্লিষ্ট মূল্যগুলি এমনভাবে নির্বাচন করব যে ওই কৃত্রিম চলগুলি আস্তে আস্তে অপসারিত হয়। তখন আমরা (4.8)-এর একটা মৌল কার্যকর সমাধান পাই (কৃত্রিম চলমুক্ত)। তারপরে সিমপ্লেক্স কলনবিধি অবলম্বন করে সমস্যাটিকে সমাধান করতে পারি। এই কৃত্রিম চলগুলি অপসারণ করার জন্য দুটো পদ্ধতি অবলম্বন করা যায় ঃ

(i) চারণস্-এর বৃহৎ M -পদ্ধতি।

(ii) দ্বিপর্য্যায় পদ্ধতি।

ওপরের দুটি পদ্ধতির মধ্যে আমরা দ্বিপর্য্যায় পদ্ধতিই এই এককে আলোচনা করব।

4.5 দ্বিপর্য্যায় পদ্ধতি (Two-phase Method)

4.4. তে আমরা দেখেছি অসমীকরণে ($\geq$) থাকলে বা শর্ত যদি সমীকরণ আকারে থাকে তাহলে কৃত্রিম চল যোগ করায় মৌল কার্যকর সমাধান ($[A, I]\begin{bmatrix} x \\ x_\alpha \end{bmatrix} = b$-এর সমীকরণের) পাওয়া যায়। দ্বিপর্য্যায় পদ্ধতি অবলম্বন করে আমরা দেখাব কী করে কৃত্রিম চল অপসারণ করা যায়।

পর্য্যায় I-তে আমরা সমস্যাটিকে এইভাবে নিই ঃ

চরম $Z' = \underset{\sim}{O}x - \underset{\sim}{1}x_{\alpha}$

যেখানে $\left[\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n\text{পদ}}\right], \ \underset{\sim}{1} = \left[\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{s\text{পদ}}\right],$

$x_{\alpha} \in E_S$ হয়।

শর্তসাপেক্ষে $Ax + Ix_{\alpha} = b, \ [x, \ x_{\alpha}] \geq 0$

প্রথম পর্য্যায়ের শেষে কৃত্রিম চল অপসারিত হয় এবং মূল সমীকরণতন্ত্রের একটি প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া যায়।

পর্য্যায় II. দ্বিতীয় পর্য্যায়ে মূল রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটিকে সিম্প্লেক্স পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করতে হবে।

উদাহরণ 4.5 পর্য্যায় পদ্ধতি অবলম্বন করে সমাধান করুন ঃ

অবম $Z = 4x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 = 3$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1, \ x_2 \geq 0$$

তখন অবম $Z \Rightarrow$ চরম Z' যেখানে $Z' = -Z$

প্রদত্ত সমস্যাটিকে অতিরিক্ত চল, উদ্বৃত্ত চল ও কৃত্রিম চল যথাযথ জায়গায় বসিয়ে আমরা প্রমাণ আকারের রৈ. প্রো. স. পেতে পারি ঃ

চরম $Z' = -4x_1 - x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 + x_5 = 3$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_6 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 3$$

$$x_j \geq 0 \ \forall_j,$$

$x_3 \rightarrow$ অতিরিক্ত চল, $x_4 \rightarrow$ উদ্বৃত্ত চল

$x_5 \rightarrow$ কৃত্রিম চল, $x_6 \rightarrow$ কৃত্রিম চল

পর্য্যায় *I*. চরম $Z'' = -x_5 - x_6$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 + x_5 = 3$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_6 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 3$$

T_1 :

			0	0	0	0	−1	−1
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
−1	a_5	3	3	1	0	0	1	0
−1	a_6	6	4	3	−1	0	0	1
0	a_4	3	1	2	0	1	0	0
$z_j - c_j \rightarrow$			−7	−4	1	0	0	0

মূল সারি

অবম $(z_j - c_j) = -7$

মূল স্তম্ভ

$$\frac{x_{B_r}}{y_{r1}} = \text{অবম } \left\{\frac{3}{3}, \frac{6}{4}, \frac{3}{1}\right\} = 1$$

T_2 :

			0	0	0	0	−1	−1
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0	a_1	1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0
−1	a_6	2	0	$\frac{5}{3}$	−1	0	$-\frac{4}{3}$	1
0	a_4	2	0	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0
$z_j - c_j \rightarrow$			0	$-\frac{5}{3}$	1	0	$\frac{7}{3}$	0

$$\text{অবম } (z_j - c_j) = -\frac{5}{3},\ \frac{x_{B_r}}{y_{r2}} = \text{অবম } \left\{\frac{1}{\frac{1}{3}}, \frac{2}{\frac{5}{3}}, \frac{2}{\frac{5}{3}}\right\} = \frac{6}{5}$$

T_3 :

			0	0	0	0	–1	–1
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0	a_1	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
0	a_2	$\frac{6}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	–3	$\frac{3}{5}$
0	a_4	0	0	0	1	1	1	1
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	0	0	1	1

যেহেতু $z_j - c_j \geq 0$ সব j-এর জন্য, চরম মান প্রাপ্ত হল।

চরম সমাধান I. পর্য্যায়ে $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}$

কৃত্রিম চল $x_5 = 0, x_6 = 0$ অতএব কৃত্রিম চল অপসারিত।

পর্য্যায় II. চরম $Z^{**} = 4x_1 - x_2$

T'_1 :

			–4	–1	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4
– 4	a_1	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0
–1	a_2	$\frac{6}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	0
0	a_4	0	0	0	1	1
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	$-\frac{1}{5}^*$	0

অবম $(z_j - c_j) = -\frac{1}{5}$,

$$\frac{x_{B_r}}{y_{r3}} = \text{অবম} \left\{ \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}}, \frac{0}{1} \right\} = 0$$

T'_2 :

c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4
			-4	-1	0	0
-4	a_1	$\frac{3}{5}$	1	0	0	$-\frac{1}{5}$
-1	a_2	$\frac{6}{5}$	0	1	0	$\frac{3}{5}$
0	a_3	0	0	0	1	1
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	0	$\frac{1}{5}$

$$z_j - c_j \geq 0 \quad \forall_j$$

চরম সমাধান $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}$

$$Z^* = -\frac{18}{5}$$

অবম $Z = \frac{18}{5}$

মন্তব্য 4.2 T_2-তে $\frac{x_{B_2}}{y_{22}} = \frac{6}{5}, \frac{x_{B_3}}{y32} = \frac{6}{5}$

সুতরাং y_{22} অথবা y_{32} এদের যেকোনো একটাকে মূল উপাদান ধরা যেতে পারে।

উদাহরণ 4.6. দ্বিপর্যায় পদ্ধতি অবলম্বন করে সমাধান করুন ঃ

অবম $Z = 4x_1 + 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 \geq 27$

$$x_1 + x_2 \geq 21$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

উদ্বৃত্ত চল ও কৃত্রিম চল যোগ করে রৈ. প্রো. স.-কে চরম সমস্যা হিসেবে প্রকাশ করা যায় ঃ

চরম $Z' = -4x_1 - 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_6 &= 27 \\ x_1 + x_2 - x_1 + x_7 &= 21 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 &= 30 \\ x_j \geq 0 \quad \forall_j \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

পর্য্যায় I—চরম $Z'' = -x_6 - x_7 - x_8,\ x_j \geq 0\ \forall_j$ শর্তগোষ্ঠী (4.10)

T_1 :

			0	0	0	0	0	–1	–1	–1
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
–1	a_6	27	3	1	–1	0	0	1	0	0
–1	a_7	21	1	1	0	–1	0	0	1	0
–1	a_8	30	1	2	0	0	–1	0	0	1
$z_j - c_j$				–4*	1	1	1	0	0	0

$$\frac{x_{B_r}}{y_{r2}} = \text{অবম } \left\{\frac{27}{1}, \frac{21}{1}, \frac{30}{2}\right\} = 15$$

T_2 :

			0	0	0	0	0	–1	–1	–1
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
–1	a_6	12	$\frac{5}{2}$	0	–1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
–1	a_7	6	$\frac{1}{2}$	0	0	–1	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$
0	a_2	15	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$			–3*	0	1	1	–1	0	0	2

$$\frac{x_{B_r}}{y_{r1}} = \text{অবম } \left\{\frac{12}{\frac{5}{2}}, \frac{6}{\frac{1}{2}}, \frac{15}{\frac{1}{2}}\right\} = \frac{24}{5}$$

T_3 :

			0	0	0	0	0	–1	–1	–1
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
0	a_1	$\frac{24}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$
–1	a_7	$\frac{18}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	–1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$
0	a_2	$\frac{63}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
$z_j - c_j$			0	0	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$1\frac{1}{5}$	0	$1\frac{2}{5}$

$$\frac{x_{Br}}{y_{r5}} = \text{অবম} \left\{ \frac{\frac{24}{5}}{\frac{1}{5}}, \frac{\frac{18}{5}}{\frac{2}{5}} \right\} = 9$$

T_4 :

			0	0	0	0	0	–1	–1	–1
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
0	a_1	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
0	a_5	9	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	–1
0	a_2	18	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
$z_j - c_j$			0	0	0	0	0	1	1	1

$z_j - c_j \geq 0 \ \forall_j$

পর্য্যায় **II** : চরম $Z = -4x_1 - 2x_2$ শর্তগোষ্ঠী T_4 (ছত্রিশচল x_6, x_7, x_8 বাদে)

			−4	−2	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
−4	a_1	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	a_5	9	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1
0	a_2	18	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
$z_j - c_j \rightarrow$			4	2	0	0	0

চরম সমাধান ঃ $x_1 = 3$, $x_2 = 18$

চরম $Z' = -48$

অবম $Z = 48$

4.6 অপজাত সমাধান

আমরা মনে করতে পারি যে, মৌল সমাধানের ভিত্তিভেক্টরের সংশ্লিষ্ট চলগুলি সবই যদি > 0 তাহলে সেই সমাধানকে অপজাত নয় বলা হয়। কিন্তু ওই m সংখ্যক মৌল চলগুলির মধ্যে যদি এক বা একাধিক শূন্য থাকে তখন ওই সমাধানকে অপজাত বলা হয়।

সমাধান অবজাত হতে পারে দু ধরণের জায়গায় ঃ

(i) প্রাথমিক মৌল কার্যকর সমাধানে এক বা একাধিক চলের মান শূন্য হতে পারে। এক্ষেত্রে সমাধান অপজাত হয়।

(ii) (3.62) সমীকরণে দেখেছি

$$\theta = \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0 \right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.11)$$

এখন যদি $\frac{x_{B_r}}{y_{rj}} = \frac{x_{B_i}}{y_{ij}}$, $i \neq r$, সত্য হয় i-এর একাধিক মানের জন্য, তাহলে $\hat{x}_{Bi} = 0$, এমন সব স্তম্ভের ক্ষেত্রে যাদের জন্য θ-র মান অপসারিত স্তম্ভের θ-র মানের সমান হয়। অর্থাৎ (4.10) -র অবম মান যদি একাধিক i-র জন্য প্রাপ্ত হয়, তাহলে নতুন মৌল কার্যকর সমাধান অপজাত হবে। নতুন ভিত্তি

ভেক্টরের সংশ্লিষ্ট মৌল চলগুলির মান শূন্য হবে এমন সব স্তম্ভের জন্য যাদের ক্ষেত্রে θ-এর মান একই থাকবে। উদাহরণের সাহায্যে এটা ব্যাখ্যা করা হবে ঃ

উদাহরণ 4.7 : চরম $Z = 22.x_1 + 30x_2 + 25x_3$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + 2x_2 \le 100$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 100$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 100$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0.$$

অতিরিক্ত চল u, v, w যোগ করে প্রদত্ত সমস্যাটিকে লেখা যায় চরম

$$Z = 22x_1 + 30x_2 + 25x_3 + 0.u + 0.v + 0.w$$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + 2x_2 + u = 100$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + v = 100$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + w = 100$$

$$x_j \ge 0, \quad \forall_j$$

T_1 :

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
0	a_u	100	2	2	0	1	0	0
0	a_v	100	2	1	1	0	1	0
0	a_w	100	1	2	2	0	0	1
$z_j - c_j$			–22	–30	–25	0	0	0

$$\text{অবম } \left\{\frac{100}{2}, \frac{100}{1}, \frac{100}{2}\right\} = 50$$

$$\frac{x_{B_1}}{y_{12}} = \frac{x_{B_3}}{y_{32}}$$

অবম $\{z_j - c_j\}$ = অবম $\{-22, -30, -25\} = -30$

T_2 :

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
30	a_2	50	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	a_v	50	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	0
0	a_w	0	–1	0	2	–1	0	1
$z_j - c_j$			8	0	–25	15	0	0

$$\text{অবম } \left\{\frac{50}{1}, \frac{0}{2}\right\} = 0$$

T_3 :

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_w	a_v
30	a_2	50	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	a_v	50	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	1
25	a_3	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$			$-4\frac{1}{2}$	0	0	$2\frac{1}{2}$	0	$12\frac{1}{2}$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{ অবম } \left\{\frac{50}{1}, \frac{50}{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{100}{3}$$

T_4 :

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
30	a_2	$\frac{50}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
22	a_1	$\frac{100}{3}$	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
25	a_3	$\frac{50}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j$			0	0	0	$\frac{11}{2}$	3	11

$$z_j - c_j \geq 0$$

অপরদিকে যদি a_w-কে প্রথম অপসারণ করা হয়

$\hat{T}_1$

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
0	a_u	100	2	2	0	1	0	0
0	a_v	100	2	1	1	0	1	0
0	a_w	100	1	2	2	0	0	1
$z_j - c_j$			–22	–30	–25	0	0	0

$$\text{অবম } \left\{\frac{100}{2}, \frac{100}{1}, \frac{100}{2}\right\} = 50$$

$\hat{T}_2$

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
0	a_u	0	1	0	–2	1	0	–1
0	a_v	50	$\frac{3}{2}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
30	a_2	50	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$			-7^*	0	5	0	0	15

$\hat{T}_3$

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
22	a_1	0	1	0	–2	1	0	–1
0	a_v	50	0	0	3	$-\frac{3}{2}$	1	1
30	a_2	50	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	0	1
$z_j - c_j$			0	0	16 – 25 = –9	7	0	8

$$\text{অবম } \left\{\frac{0}{1}, \frac{50}{\frac{3}{2}}, \frac{50}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$$

$\hat{T}_4$

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
22	a_1	$\frac{100}{3}$	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
25	a_3	$\frac{50}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
30	a_2	$\frac{50}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j$			0	0	0	$\frac{5}{2}$	3	11

অতএব চরম সমাধান প্রাপ্ত হল।

লক্ষ্যণীয় যদিও প্রথমদিকে সমাধান অপজাত ছিল, শেষপর্যন্ত আমরা চরম সমাধানে পেয়েছি প্রথমে a_x-কে অপসারণ করে ও পরে a_w-কে অপসারণ করে।

এক্ষেত্রে বলা যায় যে, অপজাত সমস্যা সমাধান করা গেছে।

মন্তব্য 4.2 অনেক সময় অবম $\left\{\frac{x_{B_i}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right\}$ প্রাপ্ত হয় i–এর একাধিক মানের জন্য। সেখানে যেকোনো i-কে নিয়ে অর্থাৎ a_i-কে অপসারণ করলে আমরা শেষ পর্যন্ত প্রথম টেবিলে এসে পৌঁছই। এইরকম পরিস্থিতিকে ‘Cycling’ বা আবর্তের মধ্যে পড়া বলা হয়।

মন্তব্য 4.3 গণিতবিদ্ বিল একটা উদাহরণের সাহায্যে (ঘোষ এবং চক্রবর্তী, 2001) এই 'Cyeling' ঘটনা দেখিয়েছেন। এই 'Cycling'-কে কাটিয়ে ওঠার জন্য চারণেস্ (Charnes) একটা পদ্ধতি উদ্ভাবন করেছেন। সে পদ্ধতিটা গণনার গতিটা বিশেষভাবে কমিয়ে দেয়। যাইহোক এই বিষয় পাঠক্রমের এক্তিয়ারের বাইরে।

উদাহরণ 4.8 : চরম $Z = 3x_1 + 9x_2$ [TAHA, 1982]

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 4x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

অতিরিক্ত চল x_3, x_4 যোগ করে সমাধানটিকে লেখা যায়।

চরম $Z = 3x_1 + 9x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$ .... (4.12)

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$ .... (4.13)

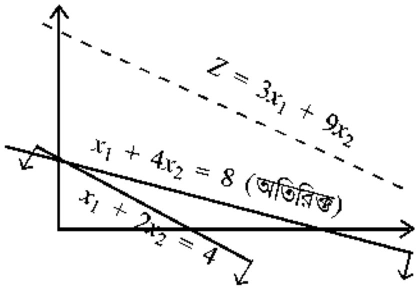
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

			3	9	0	0	
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	
–4	a_3	8	1	4	1	0	অবম $\left\{\frac{8}{4}, \frac{4}{2}\right\} = 2$
–1	a_4	4	1	2	0	1	
$z_j - c_j \rightarrow$			–3	–9	0	0	
9	a_2	2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	অবম $\left\{\frac{2}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$
0	a_4	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	
$z_j - c_j \rightarrow$			$-\frac{3}{4}$*	0	$\frac{9}{4}$	0	
9	a_2	2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
3	a_1	0	1	0	–1	2	
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	

$z_j - c_j \geq 0$

অপজাত সমাধানের ব্যবহারিক ইঙ্গিত ঃ

চরম সমাধান $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0$। $x_1 = 0, x_2 = 2$ বিন্দুটি সমীকরণদ্বয় (4.12) ও (4.13) দ্বারা চিহ্নিত সরলরেখা দুটোর ছেদবিন্দুতে অবস্থিত। নীচের লেখচিত্রে দেখা যাবে (4.12) সমীকরণটি অতিরিক্ত (redundant)।



চিত্র 4.1

4.7 কার্যকর সমাধান সেট সীমাবদ্ধ কী সীমাহীন

আমরা 4.3-তে ব্যবহৃত চিহ্নগুলিই এখানে ব্যবহার করব। অর্থাৎ a_j, A-এর স্তম্ভ, b_j মৌল ম্যাট্রিক্সের j-তম স্তম্ভ।

$y_j = B^{-1}a_j$, $z_j = C_B\ y_j = C_B\ B^{-1}a_j$। $Z = C_B\ x_B$, x_B মৌল ভেক্টর-এ দেখেছি যদি $y_{rj} > 0$ হয়, এবং m-এর অন্তর্বর্তী কোনো r-এর জন্য তাহলে b_r-এর বদলে ভিত্তিতে a_j-কে নেওয়া যায় এবং $b_1, \ldots, b_{r-1}, a_j, b_{r+1}, \ldots. b_m$ নতুন ভিত্তি গঠন করে।

এখন যদি এমন পরিস্থিতি হয় যে b_r-এর স্থানে a_j নেওয়া হয় এবং এরকম a_j-এর জন্য $y_{ij} \leq 0$। a_j, b_r-এর স্থান নিয়েছে।

এখানে আমরা লিখতে পারি $a_j = \sum_{j=1}^{m} y_{ij} . b_i$

অথবা, $$b_r = \frac{a_j}{y_{rj}} - \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq r}}^{m} y_{ij} . b_i$$

$$= -\frac{a_{ij}}{|y_{rj}|} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} y_{ij} . b_i$$

নতুন মৌল সমাধান হল ঃ

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_{B_i} &= x_{B_i} + \frac{x_{B_r} y_{ij}}{|y_{rj}|} \quad i \neq r \\ \hat{x}_{B_r} &= -\frac{x_{B_r}}{|y_{rj}|}\end{aligned}\right\} \qquad \text{.......... (4.14)}$$

নতুন মৌল সমাধান কার্যকর হতে গেলে $x_{B_r} = 0$ হতেই হবে কেননা তা না হলে $\hat{x}_{B_r}$ কার্যকর হবে না।

আমাদের মৌল সমাধান হ'ল

$$\sum x_{B_i} b_i = b \qquad (4.15)$$

যেখানে $Z = C_B x_B$ (4.16)

$-\theta a_j$-কে যোগ ও বিয়োগ করে (4.15) থেকে পাই,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{Bi} b_i - \theta a_j + \theta a_j = b \qquad (4.17)$$

আবার, যেহেতু $-\theta a_j = -\theta \sum_{i=1}^{m} x_{ij} b_i$

(4.16) ও (4.17) থেকে পাই,

$$\sum (x_{Bi} - \theta y_{ij}) b_i + \theta a_j = b \qquad (4.18)$$

যদি $\theta > 0$ যেহেতু $y_{ij} \leq 0$

$$x_{B_i} - \theta y_{ij} \geq 0$$

অতএব (4.18) একটি কার্যকর সমাধান দেয়, যেখানে $(m + 1)$ চলের মান শূন্য নাও হতে পারে। কিন্তু সর্বক্ষেত্রেই সমাধানটি মৌল নাও হতে পারে।

তখন $\hat{Z} = \sum_{i=1}^{m} c_i \hat{x}_i = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\left(x_{B_i} - \theta y_{ij}\right) + c_j \theta$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} x_{B_i} + \theta\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ij}\right)$$

$$= Z + \theta(c_j - z_j)$$

তাহলে ধনাত্মক θ-কে খুব বড়ো সংখ্যা নিলে যদি $c_j - z_j > 0$ হয়, $\hat{Z}$-এর মান যথেচ্ছ বড়ো করা যাবে। এক্ষেত্রে চরম মান নির্ণয়কারী রৈ. প্রো. স. থাকলে সমস্যাটির সমাধান সীমাবদ্ধ নয়। আমরা নীচের এই উপপাদ্যে উপনীত হই।

উপপাদ্য 4.2 প্রদত্ত কোনো মৌল সমাধানের জন্য

(1) যদি ভিত্তির মধ্যে নেই এমন স্তম্ভের জন্য $z_j - c_j < 0,\ y_{ij} \le 0$

তাহলে এমন কার্যকর সমাধান পাওয়া যাবে যার মধ্যে $(m + 1)$ চলের মান শূন্য না হতে পারে এবং বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান সীমাবদ্ধ নয়।

উদাহরণ 4.9 চরম $Z = 2x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 - x_2 \le 10$

$2x_1 \le 40$

$x_1,\ x_2 \ge 0$

অতিরিক্ত চল x_3 ও x_4 যোগ করে সমস্যাটিকে লেখা যায়,

চরম $Z = 2x_1 + x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

শর্তসাপেক্ষে, $x_1 - x_2 + x_3 = 10$

$2x_1 + x_4 = 40$

$x_1,\ x_2 \ge 0$

			2	1	0	0	
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	
0	a_3	10	1	–1	1	0	অবম $\left\{\frac{10}{1}, \frac{40}{2}\right\} = 10$
0	a_4	40	2	0	0	1	
$z_j - c_j$			–2*	–1	0	0	
2	a_1	10	1	–1	1	0	
0	a_4	20	0	2	–2	1	
$z_j - c_j$			0	–3*	2	0	
2	a_1	20	1	0	0	$\frac{1}{2}$	
0	a_2	10	0	1	–1	$\frac{1}{2}$	
$z_j - c_j$			0	0	–1	$\frac{3}{2}$	

$z_j - c_j < 0 \qquad j = 3$-এর জন্য

$y_{13} = 0,$

$y_{23} < 0$

সুতরাং উপপাদ্য 4.2 অনুসারে চরম মান সীমাহীন হবে।

4.8 বিকল্প চরম বা অবম

আমাদের খেয়াল রাখতে হবে যে, একটি রৈ. প্রো. স.-র (i) একাধিক চরম (অবম) সমাধান থাকতে পারে। কিন্তু (ii) বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম (অবম) মান অনন্য।

4.1 সংজ্ঞা ঃ বন্ধনকারী শর্ত (Binding constraints) একটি শর্তকে বন্ধনকারী শর্ত বলা হয় যদি ওই শর্ত চরম (অবম) বিন্দুগামী।

বিকল্প চরম (অবম) ঃ যখন বিষয়াত্মক অপেক্ষক বন্ধনকারী শর্তের সমান্তরাল হয়, তখন ওই বিষয়াত্মক অপেক্ষক একাধিক সমাধান বিন্দুতে একই চরম (অবম) মান প্রাপ্ত হয়। এই সমাধান বিন্দুসমূহকে বিকল্প চরম (অবম) সমাধান বলা হয়।

উদাহরণ 4.10. চরম $Z = 2x_1 + 4x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 \le 5$

$x_1 + x_2 \le 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

অতিরিক্ত চল x_3 ও x_4 যোগ করে সমস্যাটিকে লেখা যায় ঃ

চরম $Z = 2x_1 + 4x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

$x_1 + x_2 \quad + x_4 = 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

				2	4	0	0	
T_1	c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	
	0	a_3	5	1	2	1	0	অবম $\left\{\frac{5}{2}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{5}{2}$
	0	a_4	4	1	1	0	1	
	$z_j - c_j$			–2	–4	0	0	
T_2	4	a_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	অবম $\left\{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = 3$
	0	a_4	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	
	$z_j - c_j$			0*	0	2	0	

অতএব চরম সমাধান $\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1 = 0 \end{cases}$ চরম $Z = 10$

T_3

			2	4	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4
4	a_2	1	0	1	1	–1
2	a_1	3	1	0	–1	2
$z_j - c_j$			0	0	2	0

সুতরাং চরম সমাধান $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$.

চরম $Z = 10$

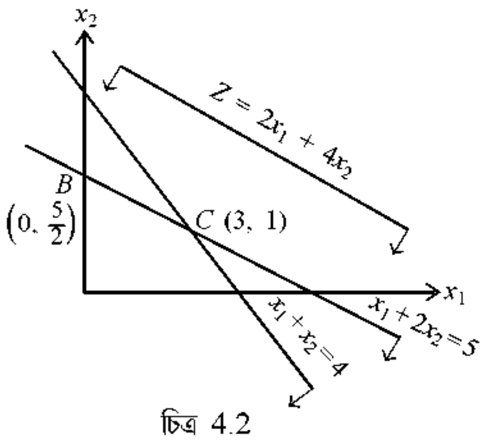
সুতরাং, চরম সমাধান হল $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$ এবং $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$.

এই দুটি বিন্দুর উত্তল সমবায় হল,

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \lambda.0 + (1-\lambda)\,3 = 3(1-\lambda), \;\; 0 \le \lambda \le 1 \\ \hat{x}_2 = \lambda.\frac{5}{2} + (1-\lambda)\,1 = 1 + \frac{3}{2}\lambda \end{cases}$$

$(\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ ও Z-এর মান হ'ল $6(1 - \lambda) + 4\left(1 + \frac{3}{2}\lambda\right) = 10, \; 0 \le \lambda \le 1$

অতএব ওই বিন্দুদ্বয় সংযোজিত রেখিতাংশের প্রত্যেক বিন্দুতেই চরম Z-এর মান প্রাপ্ত হয়। (চিত্র **4.2** দেখুন)



চিত্র 4.2

মন্তব্য ঃ 4.2 বিষয়াত্মক অপেক্ষক যে সরলরেখাকে চিহ্নিত করে তা BC-এর সমান্তরাল।

4.9 সারাংশ

এই এককে আমরা যে বিষয়গুলো আলোচনা করেছি তা মূলতঃ এইরকম ঃ

(i) সিম্প্লেক্স কলনবিধি (Simplex algorithum) যা দিয়ে আমরা যে-কোনো রৈ. প্রো. স. সমাধান করতে পারি।

(ii) শর্তগোষ্ঠীর অসমীকরণ যদি '≥' ধরণের হয় বা সমীকরণতন্ত্র তা কি করে কৃত্রিম চল ব্যবহার করে এবং দ্বি পর্য্যায় পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করা যায়।

(iii) বিশেষ ধরণের রৈ. প্রো. স. আলোচনা করা।

এইসব আলোচনা থেকে বোঝা যায় সিম্প্লেক্স্ পদ্দতি রৈ. প্রো. স. সমাধানে কতখানি সফল।

4.10 অনুশীলনী

সমাধান করুন ঃ (সিম্প্লেক্স পদ্ধতি অবলম্বন করো) ঃ

(1) চরম $Z = 5x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 \leq 11$

$x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

(2) চরম $Z = 9x_1 + 7x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_1 - x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

(3) চরম $Z = x_2$

শর্তসাপেক্ষে $-3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$2x_1 + 7x_2 \leq 14$

$x_1 - x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0.$

(4) অবম $Z = 4x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $-3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$2x_1 + 3x_2 \geq 22$

$2x_1 + x_2 \leq 14$

$x_1, x_2 \geq 0$

(5) অবম $Z = 3x_1 + 5x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 \leq 8$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$5x_1 + 6x_2 \leq 60$

$x_1, x_2 \geq 0$

(6) দ্বি-পর্যায় পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করুন ঃ

(i) অবম $Z = 3x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + x_2 \geq 14$

$x_1 - x_2 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

(ii) চরম $Z = 3x_1 - x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1 + 3x_2 \leq 2$

$x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

(iii) অবম $Z = 2x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 = 3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

(iv) চরম $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

7. সিম্প্লেক্স পদ্ধতি অবলম্বন করে দেখান যে, নীচের সমস্যার একটি সমাধান আছে সেটি সীমাবদ্ধ নয় ঃ

চরম $Z = 3x_1 + 4x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 - x_2 \geq 0$

$-x_1 + 3x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

8. সিম্প্লেক্স পদ্ধতির সাহায্যে নীচের সমস্যাটির বিকল্প সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

চরম সমাধান $Z = 4x_1 + 14x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + 7x_2 \leq 21$

$7x_1 + 2x_2 \leq 21$

$x_1, x_2 \geq 0$

4.11 উত্তরমালা

1. চরম $Z = 21, x_1 = 3, x_2 = 2$

2. চরম $Z = 52,\ x_1 = 5,\ x_2 = 1$

3. চরম $Z = \frac{54}{7},\ x_1 = \frac{22}{7},\ x_2 = \frac{54}{7}$

4. চরম $Z = 26,\ x_1 = 2,\ x_2 = 6$

5. অবম $Z = 21,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$

6. (i) অবম $Z = 20,\ x_1 = 6,\ x_2 = 2$

(ii) চরম $Z = 6,\ x_1 = 2,\ x_2 = 0$

(iii) অবম $Z = \frac{12}{5},\ x_1 = \frac{3}{5},\ x_2 = \frac{6}{5}$

(iv) চরম $Z = 8,\ x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0$

7. চরম $Z = 42,\ \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{21}{9} \\ x_2 = \frac{21}{9} \end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{array}\right\}$

তথ্যসূত্র

1. G. HADLEY (1974)	LINEAR PROGRAMMING, ADDISON WESLEY PUBLISHING COMP.
2. S.I. GASS (1958)	LINEAR PROGRAMMING, N.Y. MC-GRAW HILL
3. H.S. TAHA (1982)	OPERATIONS RESEARCH
4. J.G. CHAKRABORTY & P. R. GHOSH (2002)	LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, MOULIK LIBRARY
5. J.K. SHARMA (2003)	OPERATIONS RESEARCH, MACHILLAN INDIA LTD.
6. T. MOULIK*	LINEAR PROGRAMMING, U.N. DHUR & SONS PRIVATE LIMITED
7. R. N. SEN (2007)	LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, EMT-14, BLOCK-I, NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY.

* NOT KNOWN

একক 5 ❒ রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় দ্বৈততা (Duality in L. P. P.)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

5.2 দ্বৈত সমস্যার গাণিতিক রূপ

5.3 উদাহরণ

5.4 দ্বৈততা সংক্রান্ত উপপাদ্য সমূহ

5.5 দ্বৈততা এবং সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতি

5.6 উদাহরণ

5.7 সারাংশ

5.8 অনুশীলনী

5.9 উত্তরমালা

5.1 প্রস্তাবনা

কোন একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সংগে বিশেষভাবে সম্পর্কিত অপর একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা পাওয়া যেতে পারে। তাহলে দ্বিতীয় সমস্যাটিকে দ্বৈত (Dual) সমস্যা এবং প্রথমটিকে মুখ্য (Primal) সমস্যা বলা হবে। বিষয়টি স্পষ্ট করার জন্য নিম্নের সমস্যাটি ধরা যাক।

একটি উদাহরণ ঃ আমরা দেখলাম রৈ.প্রো.স.-র টেবিলের তথ্যসমূহ দুইটি সম্পূর্ণ পৃথকভাবে তৈরী করা যায়। অন্যভাবে, রৈ.প্রো.স.-এর সংগে যুক্ত, সর্বদাই দুটি সমস্যা বিদ্যমান। যাদের একটি হল মুখ্য এবং অন্যটি দ্বৈত। এই দুটি সমস্যার মধ্যে যে বিধিসম্মত সম্পর্ক আছে তা বোঝার আগে, আমরা একটি সহজ উদাহরণ আলোচনা করব। ফলে আমাদের বর্তমান সমস্যা বোঝার পক্ষে সহজ হবে।

উদাহরণ 1. এক উৎপাদনকারী কতকগুলি নিম্নমানের টেবিল ও চেয়ার তৈরী করার জন্য কাঠ ও মজুরী কাঁচামাল হিসাবে ব্যবহার করে। প্রতিটি টেবিলের জন্য তিন একক এবং প্রতি চেয়ারের জন্য দুই একক কাঠের প্রয়োজন হবে। আবার প্রতি টেবিলের এক একক এবং প্রতি চেয়ারের জন্য দুই একক শ্রমের প্রয়োজন হয়। প্রতি টেবিলের জন্য 20 টাকা এবং প্রতি চেয়ারের জন্য 16 টাকা মূল্য ধার্য্য করা হল। 130 একক কাঠ এবং

70 একক শ্রম মজুত আছে। কতগুলি টেবিল ও চেয়ার তৈরী করলে সর্বোচ্চ বিক্রয়মূল্য পাওয়া যায়—এই সমস্যাকে সমাধান করতে হবে।

উপরোক্ত সমস্যার দ্বৈত সমস্যা বাহির করুন এবং দ্বৈত চলগুলির অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা দিন।

সমাধান ঃ প্রয়োজনীয় তথ্যসমূহকে আমরা সহজেই নিম্নলিখিত সুসংহত টেবিলের আকারে লিখতে পারি ঃ

Input	**Technology coefficient**		**Capacity**
	টেবিল	**চেয়ার**	**পরিমাণ**
কাঠ	3	2	130
শ্রম	1	2	70
মূল্য (টাকা)	20	16	

.... (1)

মূল সমস্যা (Primal Problem) ঃ

ধরা যাক্ x_1 এবং x_2 সংখ্যক টেবিল ও চেয়ার তৈরী করতে হবে। যেহেতু মোট বিক্রয়মূল্য চরম হবে, তবে আমরা পাই

চরম $Z = 20x_1 + 16x_2$

শর্তসাপেক্ষে

$3x_1 + 2x_2 \leq 130$ (কাঠের জন্য বাধাগোষ্ঠী

মুখ্য সমস্যা $x_1 + 2x_2 \leq 70$ (শ্রমের জন্য বাধাগোষ্ঠী .... (2)

$x_1, x_2 \geq 0$

যেহেত চলের সংখ্যা দুই, আমরা মুখ্য সমস্যাটিকে লেখচিত্রের সাহায্যে বা সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতি প্রয়োগ করে সমাধান করিতে পারি এবং সমাধান হবে ঃ

চরম $Z = 920$ টাকা, $x_1 = 30$ ও $x_2 = 20$। .... (3)

অর্থাৎ চরম অবস্থায় 30টি টেবিল ও 20টি চেয়ার তৈরী করা যায় এবং সর্বোচ্চ লব্ধ অথ; হবে 920 টাকা।

দ্বৈত সমস্যা (Dual Problem) :

দ্বৈত চল u_1 এবং u_2 প্রয়োগ করিয়া

আমরা (2) এর দ্বৈত সমস্যা সহজেই লিখতে পারি :

অবম $W = 130u_1 + 70u_2$

শর্তসাপেক্ষে
$$\left.\begin{aligned} 3u_1 + u_2 &\geq 20 \\ 2u_1 + 2u_2 &\geq 16 \\ u_1, u_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

উপরোক্ত রৈ.প্রো.স. কেও লেখচিত্রের সাহায্যে বা সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতি প্রয়োগ করে সমাধান করা যায় এবং সমাধান হবে

অবম $W = 920,\ u_1 = 6$ এবং $u_2 = 2$ .... (5)

চরম $Z = 920$ টাকা $=$ অবম W .... (6)

বিষয়াত্মক অপেক্ষকদ্বয়ের এই মিল আকস্মিক নয় এই মিল একটি গভীর অর্থ বহন করে এবং আমরা পরিস্কার ভাবে ইহা বুঝতে পারি।

(6) নং থেকে ইহা পরিষ্কার যে Z বা W এর মাত্রা টাকায় প্রকাশিত। u_1 এবং u_2 এর মাত্রা বোঝার জন্য আমরা নিম্নলিখিত নিয়মটি ব্যবহার করতে পারি :

$$u_i\text{-এর মাত্রা} = \frac{Z\text{-এর মাত্রা}}{b_i\text{-এর মাত্রা}}\ [b_i \text{ কাঠ বা শ্রমকে চিহ্নিত করে }] \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\therefore\quad u_i\text{-এর মাত্রা} = \frac{\text{টাকা}}{\text{যে পরিমাণ কাঠের প্রয়োজন}}$$

= চেয়ার বা টেবিল তৈরীর জন্য যে একক কাঠ লাগে তা টাকায় প্রকাশ করা হচ্ছে।

অনুরূপে u_2 = চেয়ার বা টেবিল তৈরীর জন্য যে একক শ্রম লাগে তা টাকায় প্রকাশ করা হচ্ছে।

অন্যভাবে, u_1, u_2 কে যথাক্রমে গড় খরচ বা কাঠ এবং শ্রমের এককের মূল হিসাবে ধরা যেতে পারে যা চেয়ার এবং টেবিল তৈরীর জন্য প্রয়োজন হবে। বিক্রয়মূল্য সূচক $c_1 = 20$ and $c_2 = 16$ এবং অন্য তথ্যগুলি অপরিবর্তিত থাকবে। অর্থাৎ u_1, u_2 এর মান c_1, c_2 এর মানের সংগে ওতপ্রোত ভাবে জড়িত এবং ইহাদের মান c_1, c_2 এর মানের পরিবর্তনের উপর নির্ভর করে। এবং এই জন্য এরা প্রকৃতপক্ষে খরচ নয় এবং একপ্রকার আমদানীকৃত বা মেকী মূল্য খরচ বলা যায়।

T_1 : মূল সমস্যার সিম্‌প্লেক্স টেবিল

			20	16	0	0
c_B	v_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	130	$\boxed{3}$	2	1	0
0	x_4	70	1	2	0	1
		0	–20	–16	0	0

T_2 :

			20	16	0	0
c_B	v_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4
20	x_1	$\frac{130}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	x_4	$\frac{80}{3}$	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	1
		$\frac{2600}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	$\frac{20}{3}$	0
20	x_1	30	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
16	x_2	20	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
		920	0	0	6	2

অবম দ্বৈত চল

দ্বৈত সমস্যার সিম্‌প্লেক্স টেবল ঃ

			–130	–70	0	0	M	M
c_B	v_B	x_B	u_1	u_2	u_3	u_4	q_1	q_2
$-M$	q_1	20	$\boxed{3}$	1	–1	0	1	0
$-M$	q_2	16	2	2	0	–1	0	1
		$-36M$	$-5M+130$	$-30M+70$	M	M	0	0
–130	u_1	$\frac{20}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
$-M$	q_2	$\frac{8}{3}$	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	$\frac{2}{3}$	–1	$-\frac{2}{3}$	1
		$\frac{-8M}{3}-\frac{2600}{3}$	0	$\frac{-4}{3}M+\frac{80}{3}$	$\frac{-2}{3}M+\frac{130}{3}$	M	$\frac{5}{3}M-\frac{130}{3}$	0
–130	u_1	6	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
–70	u_2	2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
		–920	0	0	30	20	$M-30$	$M-20$

চরম মূল চলগুলি

উদাহরণ 2. নিম্নের রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি নির্ণয় করুন ঃ

$Z = x_1 + 3x_2$ যেখানে

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 14 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 22 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ \quad x_1,\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots (8)$$

সমাধান : এখানে প্রদত্ত প্রমাণ আকারের সমস্যাটি ম্যাট্রিক্স আকারে লিখলে আমরা পাই

চরম $Z = [1\ \ 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

যেখানে $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 22 \\ 6 \end{bmatrix}$

এবং $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

উপরের (8) এর দ্বৈত সমস্যাটি হবে

$$\left.\begin{array}{l} \text{অবম } W = [4\ \ 14\ \ 22\ \ 6] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \\ \text{যেখানে } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \text{এবং } \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots (9)$$

অর্থাৎ অবম $W = 4u_1 + 14u_2 + 22u_3 + 6u_4$

যেখানে $u_1 + 2u_2 + 2u_3 - 3u_4 \geq 1$

$-u_1 + u_2 + 3u_3 + 3u_4 \geq 3$

এবং $u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0$। ....(10)

মন্তব্য 5.1 : আমরা প্রত্যেক মুখ্য বাধার এর সংগে দ্বৈত চলক u_1, u_2, u_3 এবং u_4 কে নিম্নলিখিতভাবে সংযোজন করিতে পারি

চরম $Z = x_1 + 3x_2$

যেখানে

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 4 \quad & u_1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 14 \quad & u_2 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 22 \quad & u_3 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \quad & u_4 \end{aligned}$$

এবং দ্বৈত সমস্যাটিকে সহজেই নিম্নলিখিত ভাবে লিখিতে পারি

অবম $W = 4u_1 + 14u_2 + 2u_3 - 3u_4 \geq 1$

যেখানে $u_1 + 2u_2 + 2u_3 - 3u_4 \geq 1$

$-u_1 + u_2 + 3u_3 + 2u_4 \geq 3$

$u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0$

ইহা স্পষ্টতই একটি সরাসরি উপায়।

উপরোক্ত রীতি অনুযায়ী পরবর্তী অনুচ্ছেদে যে কোন প্রদত্ত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার গাণিতিক রূপের সংজ্ঞা দেওয়া হল।

5.2 কোন প্রদত্ত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার দ্বৈত সমস্যার গাণিতিক রূপ

এখানে আমরা মুখ্য রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটিকে নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করব।

চরম $z = c_1x_2 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ এর মান নির্ণয় করতে হবে, যেখানে

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots\ldots + a_{1n},\ x_n \leq b_1$$

$$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots\ldots + a_{2n},\ x_n \leq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_m,$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_n \geq 0$$

নীচের বিশেষ **রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটিকে** উপরের সমস্যাটির **দ্বৈত সমস্যা** বলা হবে।

অবম $W = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots\ldots + b_nu_m$ এর মান নির্ণয় করতে হবে, যেখানে

$$a_{11}\ u_1 + a_{21}\ u_2 + \ldots\ldots + a_{m1}\ um \geq c_1$$

$$a_{12}\ u_1 + a_{22}\ u_2 + \ldots\ldots + a_{m2}\ u_m \geq c_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1u}\ u_1 + a_{2u}\ u_2 + \ldots\ldots + a_{mn}u_m \geq c_n$$

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ldots\ u_m \geq 0$$

উপরোক্ত সমস্যা দুটিকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করলে পাবে

মুখ্য সমস্যা

চরম $z = \overline{cx}, \overline{x} \geq 0$

যেখানে $A\overline{x} \leq \overline{b}$ .... (11)

দ্বৈত সমস্যা

অবম $W = \overline{b}'\,\overline{u}, \overline{u} \geq \overline{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{যেখানে } A'\overline{u} \geq \overline{c}' \\ \text{এখানে } \overline{x} = [x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_n] \\ \qquad \overline{c} = [c_1,\ c_2,\ \ldots\ldots\ c_n] \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ (12)$$

A একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং

$$\overline{u} = [u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ u_m]^T$$

এখানে কোন মুখ্য সমস্যাকে (11) নং আকারে প্রকাশ করলে, এই রূপকে সমস্যাটির প্রমাণ আকার (standard form) বলা হয়।

মন্তব্য 5.2 : দ্বৈত সমস্যার সংজ্ঞা থেকে আমরা লক্ষ্য করছি যে,

(i) মুখ্য সমস্যাটি চরম মান নির্ণয় সংক্রান্ত এবং প্রধান শর্তগুলি ' $\leq$ ' আকারের এবং দ্বৈত সমস্যাটি অবম মান নির্ণয় সংক্রান্ত ও প্রধান শর্তগুলি ' $\geq$ ' আকারের

(ii) $b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_m$ এর মান ধনাত্মক নাও হতে পারে।

(iii) $\overline{x} \geq \overline{0}$ এর অর্থ $x_1 \geq 0,\ x_2, \geq 0,\ \ldots\ldots,\ x_n \geq 0,$

এবং $\overline{u} \geq \overline{0}$ এর অর্থ $u_1 \geq 0,\ u_2, \geq 0,\ \ldots\ldots,\ u_m \geq 0,$

(iv) কোন মুখ্য সমস্যা (বা তার দ্বৈত সমস্যা) কে প্রতিসম বলা হবে যদি সমস্যাটির প্রত্যেকটি শর্ত অসমীকরণ

আকারে থাবে এবং সমস্যাটিকে অপ্রতিসম বলা হবে যদি প্রত্যেকটি শর্ত সমীকরণ আকারে থাবে। যদি মুখ্য সমস্যা (বা তার দ্বৈত সমস্যা)টির শর্তগুলি সমীকরণ বা অসমীকরণ উভয় আকারেই থাকে, তবে সমস্যাটিকে মিশ্র আকারের সমস্যা বলা হবে এবং এই আকারের সমস্যার ক্ষেত্রে এক বা একাধিক চলের মান ধনাত্মক উভয়েই হতে পারে অর্থাৎ এই চলগুলি ≥ 0 শর্তটি মানে না—এই চলগুলিকে চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ বলে উল্লেখ করা হবে।

উপপাদ্য 1. যদি মুখ্য সমস্যাটির কোন শর্ত সমীকরণ আবারে থাকে, তাহলে দ্বৈত সমস্যার অনুরপ চলটি চিহ্নের সাপেক্ষে অবাধ হবে।

উপপাদ্য 2. যদি মুখ্য সমস্যাটির কোন চল চিহ্নের সাপেক্ষে অবাধ বল, তবে দ্বৈত সমস্যার অনুরূপ শর্তটি একটি সমীকরণ হবে।

5.3 উদাহরণ

3. অবম $Z = x_1 + 2x_2 - x_2$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq 5$$
$$2x_1 + x_2 \geq -2$$
$$-3x_1 + 2x_3 \geq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত মুখ্য সমস্যাটি প্রমাণ আকারে লিখলে আমরা পাই,

$-$ চরম $(-Z) = x_1 + 2x_2 - x_3$

বা চরম $Z = -x_1 - 2x_2 + x_3$

যেখানে

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - 4x_2 &\leq -5 \\ -2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 - 2x_3 &\leq 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

এবং যেখানে অবম (Z) অবম = চরম $(-Z_1)$

এখন প্রমাণ আকারের এই মুখ্য সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি হবে,

অবম $W_1 = -5u_1 + 2u_2 + 0.u_3$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{যেখানে} & -2u_1 - 2u_2 + 3u_3 \geq -1 \\ & 3u_1 - u_2 + 0.u_3 \geq -2 \\ & -4u_1 + 0.u_2 - 2u_3 \geq 1 \\ \text{এবং} & u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u \geq 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

শেষোক্ত সমস্যাটির সমতুল্য আকার হল

চরম $W = 5u_1 - 2u_2$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{যেখানে} & 2u_1 + 2u_2 - 3u_3 \leq 1 \\ & -3u_1 + u_2 \leq 2 \\ & 4u_1 + 2u_3 \leq -1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

এবং $u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0.$

(15) নং রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটি নির্ণেয় দ্বৈত সমস্যা।

4. নীচের রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি নির্ণয় করুন ঃ

চরম $Z = 7x_1 + 5x_2 - 2x_3$

যেখানে $x_1 + x_2 + x_3 = 10$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 16$

$3x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -5,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3$ চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল।

সমাধান ঃ এখানে মুখ্য সমস্যাটিকে লেখা যায়

$$\left.\begin{array}{ll} \text{চরম } z = 7x_1 + 5x_2 - 2(x_3' - x_3'') & \\ \text{যেখানে} & x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' \leq 10 \\ & -(x_1 + x_2 + x_3' - x_3'') \leq -10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3(x_3' - x_3'') \leq 16 \\ & -3x_1 - x_2 + 2(x_3' - x_3'') \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0 \\ \text{এবং} & x_3 = x_3' - x_3'' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

(16) নং সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি হবে

$$\left.\begin{array}{ll} \text{অবং } W = & 10u_1' - 10u_1'' + 16u_2 + 5u_3 \\ \text{যেখানে} & u_1' - u_1'' + 2u_2 - 3u_3 \geq 7 \\ & u_1' - u_1'' - u_2 - u_3 \geq 5 \\ & u_1' - u_1'' + 3u_2 + 2u_3 \geq -2 \\ & -u_1' - u_1'' - 3u_2 - 2u_3 \geq -2 \\ & u_1' \geq 0, u_1'' \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

এখন $u_1' - u_1'' = u_1$ লিখলে (17) নং সমস্যাটিকে লেখা যায়

$$\left.\begin{array}{l} \text{অবম } W = u_1 + 2u_2 - 3u_3 \geq 7 \\ u_1 - u_2 - u_3 \geq 5 \\ u_1 + 3u_2 + 2u_3 \geq -2 \\ u_1 - 3u_2 - 2u_3 \geq 2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

u_1 অবাধ চল চিহ্ন সাপেক্ষে, $u_2 \geq 0, \; u_3 \geq 0$

আমরা লক্ষ্য করছি যে (18) নং সমস্যাটির তৃতীয় ও চতুর্থ শর্ত দুটি $u_1 + 3u_2 + 2u_3 = -2$ শর্তের সমতুল্য।

সুতরাং দ্বৈত সমস্যাটি হল

$$\begin{array}{ll} \text{অবম } W & = 10u_1 + 19u_2 + 5u_3 \\ \text{যেখানে} & u_1 + 2u_2 - 3u_2 \geq 7 \\ & u_1 - u_2 - u_3 \geq 5 \\ & u_1 + 3u_2 + 2u_3 = -2 \end{array}$$

u_1 চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল, $u_2 \geq 0, \; u_3 \geq 0$

মন্তব্য 5.3 : মুখ্য সমস্যাটির প্রথম শর্তটি সমীকরণ হওয়ায় দ্বৈত সমস্যাটির u_1 চলটি চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ এবং মুখ্য সমস্যাটির x_3 চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল হওয়ায় দ্বৈত সমস্যাটির তৃতীয় শর্তটি সাপেক্ষ অবাধ চল হওয়ায় দ্বৈত সমস্যাটির তৃতীয় শর্তটি একটি সমীকরণ।

মন্তব্য 5.4 : এখন হইতে আমার $\bar{x} = [x_1, x_2, \ldots\ldots x_n]$ কে $n \times 1$ স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স $\bar{c} = (c_1, c_2 \ldots\ldots, c_n)$ কে $1 \times n$ ক্রমের সারি ম্যাট্রিক্স এবং $\bar{u} = [u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m]$ কে $m \times 1$ ক্রমের স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স ধরিব।

5.4 দ্বৈত সংক্রান্ত উপপাদ্যসমূহ

নীচের উপপাদ্যগুলিতে মুখ্য সমস্যাটি প্রমাণ আকারে ধরা হয়েছে অর্থাৎ মুখ্য সমস্যাটি হল

$$\left.\begin{array}{l} \text{চরম } Z = \bar{c}\,\bar{x} \\ \text{যেখানে } A\bar{x} \le \bar{b},\ \bar{x} \ge \bar{0} \end{array}\right\} \qquad \text{......... (19)}$$

এবং $\bar{x} = [x_1, x_2, \ldots\ldots x_n]$, $\bar{c} = (c_1, c_2 \ldots\ldots, c_n)$, $\bar{b} = [b_1, b_2, \ldots\ldots, b_m]$ এবং A একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

এখানে (19) এর দ্বৈত সমস্যাটি হবে

$$\left.\begin{array}{l} \text{অবম } W = \bar{b}'\bar{u} \\ \text{যেখানে } A'\bar{u} \ge \bar{c}', \bar{u} \ge 0 \end{array}\right\} \qquad \text{......... (20)}$$

এবং $\bar{u} = [u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m]$ আর A' হল A এর পরিবর্ত্ত ম্যাট্রিক্স।

উপপাদ্য 1 : কোন মুখ্য রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার দ্বৈত সমস্যার দ্বৈত সমস্যা হবে মুখ্য সমস্যা।

প্রমাণ : এখানে (19) নং সমস্যাটি মুখ্য সমস্যা এবং (20) নং সমস্যাটি (19) নং এর দ্বৈত সমস্যা। আবার (20) নং সমস্যাটিকে নিম্নলিখিতভাবে একটি চরম সমস্যা হিসেবে প্রকাশ করা যায়।

$$\left.\begin{array}{l} \text{চরম } W_1 = -\bar{b}'\bar{u} \\ \text{যেখানে } A'\bar{u} \le -\bar{c}', \bar{u} \ge \bar{0} \\ \text{এবং } -(W_1) \text{ চরম} = (W) \text{ অবম} \end{array}\right\} \qquad \text{......... (21)}$$

দ্বৈত সমস্যার সংজ্ঞা অনুযায়ী (21) এর দ্বৈত সমস্যাটি হবে

$$\text{অবম } Z_1 = (-\bar{c}')'\,\bar{x}$$

$$\text{যেখানে } (A')'\,\bar{x} \ge (-\bar{b}')', \bar{x} \ge \bar{0}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{অর্থাৎ অবম} & Z_1 = -\bar{c}\bar{x} \\ \text{যেখানে} & -A\bar{x} \ge -\bar{b} \\ & \bar{x} \ge \bar{0} \end{array}\right\} \qquad \text{......... (22)}$$

পুনরায় (22) নং সমস্যাটিকে নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা যায়

চরম $Z = -\ (-\overline{c}\overline{x})$

যেখানে $-(A\overline{x}) \leq -(-\overline{b}), \overline{x} \geq \overline{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{অর্থাৎ চরম } Z = \overline{c}\,\overline{x} \\ \text{যেখানে } A\overline{x} \leq \overline{b},\ \overline{x} \geq 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (23)$$

$\therefore$ (23) নং সমস্যাটি হল প্রথম মুখ্য সমস্যা। সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উপপাদ্য 2 : যদি $\overline{x}$ এবং $\overline{u}$ যথাক্রমে (19) নং মুখ্য সমস্যার এবং (20) নং অনুষঙ্গী দ্বৈত সসম্যার কার্য্যকর সমাধান হয়, তবে

প্রমাণ : (1) নং মুখ্য সমস্যার একটি কার্য্যকর সমাধান হলে, আমরা পাই

$$A\overline{x} \leq b,\ \overline{x} \geq \overline{0} \quad \ldots\ldots (24)$$

অনুরূপভাবে, (20) নং দ্বৈত সমস্যার $\overline{u}$ একটি কার্য্যকর সমাধান হলে, আমরা পাই

$$A'\overline{u} \geq \overline{c}',\ \ \overline{u} \geq \overline{0} \quad \ldots\ldots (25)$$

এখন (24) থেকে আমরা পাই

$$\overline{u}'A\overline{x} \leq \overline{u}'\overline{b}\ \ (\because \overline{u}' \geq \overline{0})$$

বা, $$(A'\overline{u})'\,\overline{x} \leq \overline{u}'\overline{b} \quad \ldots\ldots (26)$$

আবার (25) থেকে আমরা পাই

$$(A'\overline{u})' \geq \overline{c}$$

$$\therefore\ (A'\overline{u})'\,\overline{x} \geq \overline{c}\overline{x}\ (\because \overline{x} \geq \overline{0})$$

বা, $$\overline{cx} \leq (A'\overline{u})'\,\overline{x} \quad \ldots\ldots (27)$$

$\therefore$ (26) এবং (27) থেকে আমরা পাই

$$\overline{cx} \leq \overline{u}'\overline{b} \leq (\overline{b}'\overline{u})'$$

এখানে $\overline{b}'\overline{u}$ একটি 1×1 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হওয়ায় $(\overline{b}'\overline{u})' = \overline{b}'\overline{u}$

$\therefore$ প্রমাণিত হল যে, $\overline{cx} \leq \overline{b}'\overline{u}$

উপপাদ্য 3 : দ্বৈততার মৌল উপপাদ্য (Fundamental Duality Theorem)

যদি মুখ্য সমস্যা এবং দ্বৈত সমস্যার যে কোনটির একটি সসীম চরম (অবম) সমাধান থাকে, তবে অপরটিও একটি সসীম অবম (চরম) সমাধান থাকবে।

[এই উপপাদ্যটি নিম্নলিখিতভাবে ও বিবৃত করা যায় : (19) নং মুখ্য সমস্যার কোন কার্য্যকর সমাধান $\bar{x}$ * সমস্যাটির চরম সমাধান হবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি (20) নং দ্বৈত সমস্যাটির একটি কার্যকর সমাধান $\bar{u}$ * পাওয়া যায়, যেখানে $\bar{c}\bar{x}^* = \bar{b}'\bar{u}^*$]

প্রমাণ : এখানে (19) নং সমস্যাটি মূখ্য সমস্যা। এই সমস্যাটিকে সিম্প্লেক্স পদ্ধতিতে সমাধান করার জন্য m সংখ্যক ঘাটতি চল যোগ করতে হবে।

এখানে লক্ষ্যণীয় $\bar{b} = [b_1, b_2, \ldots\ldots b_m]$ ভেক্টটির ক্ষেত্রে $b_1, b_2, \ldots, b_m$ সংখ্যাগুলির প্রত্যেকে ≥ 0 নাও হতে পারে। m সংখ্যাগুলির ঘাটতি চল $\bar{x}_s = \left[x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots x_{s_m}\right]$ কে স্তম্ভ ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করলে, (19) নং সমস্যাটিকে এখন লেখা যায়

চরম $z = \bar{c}\bar{x}$

যেখানে $A\bar{x} + I_m\bar{x}_s = \bar{b}$ ...... (28)

আর I_m হল $m \times m$ ক্রমের একসম ম্যাট্রিক্স।

ধরা যাক (19) নং মুখ্য সমস্যাটির একটি সসীম চরম সমাধান আছে। তাহলে (28) নং সমস্যাটির একটি চরম মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া যাবে।

ধরা যাক্ (28) নং সমস্যাটির চরম মৌল কার্যকর সমাধানের মৌল চলগুলির ভেক্টরটি $\bar{x}_B^* = [x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots\ldots, x_{B_m}]$ এবং B এবং $\bar{c}_B = [c_{B_1}, c_{B_2}, \ldots, c_{B_m}]$ হল যথাক্রমে অনুরূপ ভিত্তি ম্যাট্রিক্স ও বিষয়াত্মক অপেক্ষকে অনুরূপ মৌলচলগুলির সহগদের সারি ভেক্টর।

আমরা জানি, $\bar{x}_B^* = \bar{c}_B\bar{B}'$

এখন $\bar{x}_B$ * থেকে (28) নং সমস্যার একটি চরম মৌল সমাধান পাওয়া যায় বলে আমরা পাই $z_j - c_j \geq 0$, j এর যে কোন গ্রহণযোগ্য মানের জন্য, যেখানে

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ij}$$

এবং $\left[y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj}\right] = \bar{B}^1(A, I_m)$ তাহলে আমরা লিখতে পারি

$$\bar{c}_B\bar{B}^1(A, I_m) \geq (\bar{c}, \bar{0}) \quad \ldots\ldots (29)$$

এখন $\bar{c}_B B^{-1}$ এই সারি ম্যাট্রিক্স $\bar{u}'^*$ কে দ্বারা নির্দেশ করা যাক্। তাহলে (29) থেকে আমরা পাই

$$\bar{u}^{*\prime} A \geq \bar{c}, \bar{u}^{*\prime} \geq \bar{0}$$

বা, $A'\bar{u}^* \geq \bar{c}', \bar{u}^* \geq \bar{0}$ ...... (30)

[এখানে (29) $\overline{O}$ তে একটি সারি ম্যাট্রিক্স এবং (B) তে একটি স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স]

এখন (30) থেকে বলা যায় $\overline{u}*$ (20) নং দ্বৈত সমস্যাটির শর্তগুলি মেনে চলে এবং তাহলে $\overline{u}*$ হল (19) নং মুখ্য সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যার একটি কার্যকর সমাধান।

আমরা প্রমাণ করব যে $u^* = \left(\overline{c}_B B^{-1}\right)'$, (30) নং দ্বৈত সমস্যাটির একটি চরম সমাধান।

এখানে মুখ্য সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম মান হবে

$$
\begin{aligned}
\text{চরম } Z &= \overline{c}_B \overline{x}_B^* \\
&= \overline{C}_B B^{-1} \overline{b} \quad [\text{ যেহেতু } \overline{x}_B^* = \overline{c}_B B^{-1}] \\
&= (\overline{u}*)' \overline{b} \\
&= \left(\overline{u}*' \overline{b}\right)' = \overline{b}' \overline{u}*
\end{aligned}
$$

[$\overline{u}*' \overline{b}$ একটি স্কেলার হওয়ার জন্য $\overline{u}*' \overline{b} = \left(\overline{u}*' \overline{b}\right)'$]

এখন উপরের সমাধান দুটির ক্ষেত্রে মুখ্য সমস্যা ও দ্বৈত সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষাকদের মান সমান হওয়ার জন্য, আমরা বলতে পারি যে,

$\overline{u}^* = \left(\overline{c}_B B^{-1}\right)'$ দ্বৈত সমস্যাটির একটি চরম সমাধান হবে।

এখন অনুরূপে (20) নং দ্বৈত সমস্যাটির একটি চরম সমাধান $\overline{u}*$ আছে ধরে নিলে আমরা প্রমাণ করতে পারি যে, (19) নং মুখ্য সমস্যাটির একটি চরম সমাধান পাওয়া যাবে এবং চরম Z = অবম W।

মন্তব্য 5.5 : সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতিতে মুখ্য রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার চরম সমস্যা নির্ণয় করলে, **উপপাদ্য 3** থেকে আমরা দ্বৈত সমস্যার অবম সমাধান নির্ণয় নীচের পদ্ধতিটি পাই :

যদি মুখ্য সমস্যাটিকে চরম সমস্যা রূপে এবং " $\leq$ " আকারের শর্ত সাপেক্ষে সমাধান করা হয়, তাহলে চরম সমাধান নির্ণয়ের সিম্‌প্লেক্ট টেবিল থেকে ঘাটতি চলদের নীচে $z_j - c_j$ এর মানগুলি থেকে দ্বৈত সমস্যার অবম সমাধান পাওয়া যাবে।

অনুরূপে, বলা যায় যে যদি মুখ্য সমস্যাটি অবম মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যারূপে এবং " $\geq$ " আকারের শর্ত সাপেক্ষে সমাধান করা হয়, তাহলে অবম সমাধান নির্ণয়ের সিম্‌প্লেক্স টেবিল থেকে অতিরিক্ত চলদের নীচে $z_j - c_j$ এর মানগুলি চিহ্ন পরিবর্তন করা দ্বৈত সমস্যার চরম সমাধান পাওয়া যাবে।

উপপাদ্য 4 : যদি মুখ্য সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান অবাধ (unbounded) হয়, তবে দ্বৈত সমস্যার কোন কার্য্যকর সমাধান থাকবে না।

প্রমাণ : মনে করা যাক্ (19) নং মুখ্য সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষক অবাধ (unbounded)। যদি সম্ভব হয়, ধরা যাক্ (20) নং দ্বৈত সমস্যার কার্য্যকর সমাধান আছে। এখন মুখ্য সমস্যা ও দ্বৈত সমস্যা উভয়েরই যথাক্রমে চরম ও অবম সমাধান থাকবে—যা এখানে অসম্ভব, কারণ মুখ্য সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষক অবাধ

অর্থাৎ ইহার সসীম চরম সমাধান নেই। সুতরাং প্রমাণিত হল যে দ্বৈত সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান থাকবে না, যদি মুখ্য সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষক অবাধ হয়।

উপপাদ্য 5. যদি দ্বৈত সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান না থাকে এবং মুখ্য সমস্যার কার্য্যকর সমাধান থাকে, তবে মুখ্য সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষক অনাবদ্ধ (unbounded) হবে।

প্রমাণ : নিজে চেষ্টা করুন।

5.5 দ্বৈততা এবং (simplex) পদ্ধতি

আমরা লক্ষ্য করেছি যে দ্বৈততার মূল উপপাদ্যের সাহায্যে মুখ্য সমস্যার (বা দ্বৈত সমস্যার) চরম সমাধান (পাওয়া গেলে) সিম্প্লেক্স পদ্ধতিতে নির্ণয় করলে একই সংগে দ্বৈত সমস্যার (বা মুখ্য সমস্যার) চরম সমাধান নির্ণয় করা যায়। এই প্রসঙ্গে আমরা নীচে তিনটি উপযোগী নিয়ম উল্লেখ করব :

প্রথম নিয়ম : উপপাদ্য 3 এর মন্তব্যে ইহা আগেই বলা হয়েছে।

দ্বিতীয় নিয়ম : ধরা যাক অনাবদ্ধ মুখ্য সমস্যার (বা দ্বৈত সমস্যার) কোন চল দ্বৈত সমস্যার (বা মুখ্য সমস্যার) কোন কৃত্রিম চলের সংগে সম্পর্কিত। তাহলে দ্বৈত সমস্যার (মুখ্য সমস্যার) চরম সমাধান নির্ণয়ের সিম্প্লেক্স এর নীট মূল্য নির্দ্ধারণ "net evaluation" সারির অনুরূপ কৃত্রিম চল এর নীচের সংখ্যাটিতে M এর মান শূন্য ধরে চরম সমাধানে অনুরূপ মুখ্য চলের (দ্বৈত চলের) মান পাওয়া যাবে—(প্রমাণ দেওয়া হল না)। পূর্বোক্ত উদাহরণ 1 থেকে নিয়মটি স্পষ্ট হবে।

তৃতীয় নিয়ম : যদি মুখ্য সমস্যার বা দ্বৈত সমস্যার কোন একটির বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান অনাবদ্ধ হয়, তবে অন্যটির কোন কার্যকর সমাধান থাকবে না। **উপপাদ্য 4** এবং **উপপাদ্য 5** থেকে এই নিয়মটির প্রমাণ পাওয়া যাবে।

5.6 উদাহরণ

5. নীচের মুখ্য সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন ঃ

চরম $z = x_1 - 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + 2x_2 \le 6$

$3x_1 - x_2 = 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

সমাধান : এখানে প্রদত্ত মুখ্য সমস্যাটি মিশ্র আকারে আছে। প্রথমে মুখ্য সমস্যাটিকে প্রমাণ আকারে প্রকাশ করা যাক্।

এখানে $3x_1 - x_2 = 4$ শর্তটি $3x_1 - x_2 \le 4$, $3x_1 - x_2 \ge + 4$ বা $-3x_1 + x_2 \le -4$ এই শর্ত দুটির সমতুল্য। সুতরাং মুখ্য সমস্যাটি হল

চরম $Z = x_1 - 3x_2$

$$\left.\begin{aligned} \text{শর্তসাপেক্ষে } 3x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 3x_1 - x_2 &\le 4 \\ -3x_1 + x_2 &\le -4 \\ \text{এবং } x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{.........} (31)$$

(31) নং সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি হবে

অবম $W = 6v_1 + 4v_2' - 4v_2''$

শর্তসাপেক্ষে $3v_1 + 3v_2' - 3v_2'' \ge 1$

$2v_1 - v_2' - v_2'' \ge -3$

এবং $v_1 \ge 0, v_2' \ge 0, v_2'' \ge 0$

এখন $v_2' - v_2'' = v_2$ লিখলে, v_2 চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল।

অর্থাৎ উপরের দ্বৈত সমস্যাটিকে লেখা যায়

$$\left.\begin{aligned} \text{অবম } W &= 6v_1 + 4v_2 \\ \text{শর্তসাপেক্ষে } 3v_1 + 3v_2 &\ge 1 \\ 2v_1 - v_2 &\ge 3 \\ v_1 \ge 0,\ v_2 & \text{ চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল।} \end{aligned}\right\} \quad \text{.........} (32)$$

(32) নং সমস্যাটি হল নির্ণেয় দ্বৈত সমস্যা।

6. নীচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি নির্ণয় করুন

চরম $Z = 7x_1 + 5x_2 - 2x_3,$

শর্তসাপেক্ষে, $x_1 + x_2 + x_3 = 10$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 16$

$3x_1 + x_2 - 2x_3 \ge -5$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3$ চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল।

সমাধান ঃ এখানে মুখ্য সমস্যাটিকে লেখা যায়,

চরম $Z = 7x_1 + 5x_2 - 2\ (x_3' - x_3'')$

$$
\left.\begin{aligned}
\text{শর্তসাপেক্ষে } & x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' \le 10 \\
& x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' \ge 10 \\
\text{বা, } & -(x_1 + x_2 + x_3' - x_3'') \le -10 \\
& 2x_1 - x_2 + 3(x_3' - x_3'') \le 16 \\
& -3x_1 - x_2 + 2(x_3' - x_3'') \le 5 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3' \ge 0, x_3'' \ge 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (33)
$$

$$(x_3 = x_3' - x_3'')$$

(33) নং সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যাটি হবে—

$$
\left.\begin{aligned}
\text{অবম } W &= 10v_1' - 10v_1'' + 10v_2 + 5v_3 \\
\text{শর্তসাপেক্ষে, } & v_1' - v_1'' + 2v_2 - 3v_3 \ge 7, \\
& v_1' - v_1'' - v_2 - v_3 \ge 5 \\
& v_1' - v_1'' + 3v_2 + 2v_3 \ge -2 \\
& -v_1' + v_1'' - 3v_2 - 2v_3 \ge 2 \\
& v_1' \ge 0, v_1'' \ge 0, v_2 \ge 0, v_3 \ge 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (34)
$$

এখন $v_1' - v_1'' = v_1$ লিখলে (31) নং সমস্যাটিকে লেখা যায়

$$
\left.\begin{aligned}
\text{অবম } W &= 10v_1 + 16v_2 + 5v_3 \\
\text{শর্তসাপেক্ষে } & v_1 + 2v_2 - 3v_2 \ge 7 \\
& v_1 - v_2 - v_2 \ge 5 \\
& v_1 + 3v_2 + 2v_2 \ge -2 \\
& -v_1 - 3v_2 - 2v_3 \ge 2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (35)
$$

$v_2 \ge 0,\ v_3 \ge 0,\ v_1$ চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল।

এখানে আমরা লক্ষ্য করতে পারি যে, (35) নং সমস্যার তৃতীয় ও চতুর্থ শর্ত দুটি $v_1 + 3v_2 + 2v_3 = -2$ শর্তের সমতুল্য। সুতরাং নির্ণেয় দ্বৈত সমস্যাটি হল—

$$
\begin{aligned}
\text{অবম } W &= 10v_1 + 16v_2 + 5v_3 \\
\text{শর্তসাপেক্ষে } & v_1 + 2v_2 - 3v_2 \ge 7
\end{aligned}
$$

$$v_1 - v_2 - v_2 \geq 5$$
$$v_1 + 3v_2 + 2v_3 = -2$$
$$v_2 \geq 0,\ v_3 \geq 0,\ v_1 \text{ চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল।}$$

মন্তব্য 5.6 : এখানে আমরা লক্ষ্য করেছি যে মুখ্য সমস্যাটির প্রথম শর্তটি সমীকরণ হওয়ায় দ্বৈত সমস্যাটির v_1 চলটি চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ এবং মুখ্য সমস্যাটির x_3 চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ চল হওয়ায়, দ্বৈত সমস্যাটির তৃতীয় শর্তটি একটি সমীকরণ।

5.7 সারাংশ

প্রথমে, চরম $Z = \bar{c}\,\bar{x}$ শর্তসাপেক্ষে $A\bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq \bar{0}$ আকারের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার (মুখ্য সমস্যা) দ্বৈত সমস্যার সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। এরপর যে কোন আকারের মুখ্য সমস্যার (চরম মান বা অবম মান নির্ণয় সংক্রান্ত শর্তগুলি '≤', '≥', '=', যে কোন আকারেই থাক্ এবং এক বা একাধিক চল অবাধ থাকলে) দ্বৈত সমস্যা নির্ণয় করার পদ্ধতি বলা হয়েছে।

এখানে লক্ষ্য করা গেছে

(ক) মুখ্য-সমস্যার শর্তের সংখ্যা = দ্বৈত সমস্যার চলের সংখ্যা

মুখ্য সমস্যার চলের সংখ্যা = দ্বৈত সমস্যার শর্তের সংখ্যা

(খ) মুখ্য সমস্যার কোন চল চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ হলে, দ্বৈত সমস্যার অনুরূপ শর্তটি '=' আকারে হবে এবং মুখ্য সমস্যার কোন শর্ত '=' আকারের হলে, দ্বৈত সমস্যার অনুরূপ চলটি চিহ্ন সাপেক্ষ অবাধ হবে।

(গ) দ্বৈত চলগুলির আসল অর্থ কি তা আলোচনা করা হয়েছে।

সবশেষে দ্বৈততা (duality) সংক্রান্ত গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যগুলি থেকে নীচের বিষয়গুলি জানা গেছে।

(i) সিম্প্লেক্স পদ্ধতিতে মুখ্য সমস্যা ও দ্বৈত সমস্যা উভয়েরই একই সারণী থেকে চরম সমাধান (যদি এর অস্তিত্ব থাকে) নির্ণয় করা যায়।

(ii) মুখ্য সমস্যা ও দ্বৈত সমস্যা উভয়ের বিষয়াত্মক অপেক্ষকের যথাক্রমে চরম ও অবম মান একই হবে (যদি চরম সমাধান পাওয়া যায়)।

(iii) যদি মুখ্য সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান অনাবদ্ধ হয়, তবে দ্বৈত সমস্যার কোন কার্যকর সমাধান থাকবে না এবং দ্বৈত সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান অনাবদ্ধ হলে, মুখ্য সমস্যার কোন কার্যকর সমধান থাকবে না।

5.8 অনুশীলনী

নীচের প্রত্যেকটি (1–5) রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার দ্বৈত সমস্যাটি নির্ণয় করুন ঃ

1. চরম $Z = 3x_1 + 4x_2$,

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \leq 12$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 21$$
$$x_1 \leq 8$$

$x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

2. অবম $Z = 3x_1 + x_2$,

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + 3x_2 \geq 2$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

3. চরম $Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$,

শর্তসাপেক্ষে $x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 7$,

$2x_1 - 5x_2 \geq 3$,

$3x_2 - x_3 \geq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$, x_3 অবাধ চল

4. চরম $Z = 2x_1 - 6x_2$,

শর্তসাপেক্ষে $x_1 - 3x_2 \leq 6$

$2x_1 + 4x_2 \geq 8$

$x_1 - 3x_2 \geq -6$

$x_1, x_2 \geq 0$

5. চরম $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$,

শর্তসাপেক্ষে $4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$,

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

6. দ্বৈত সমস্যাটি সমধান করে, নীচের রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান (যদি থাকে) নির্ণয় করুন ঃ

চরম $Z = 3x_1 - 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 \leq 4$

$-x_2 \leq -1$

এবং $x_1, x_2 \geq 0$

7. দ্বৈত সমস্যাটি তৈরী করে সমাধান করুন ঃ

চরম $Z = x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $-x_1 + 2x_2 \leq 8$

$3x_1 + x_2 \leq 11$

$x_1, x_2 \geq 0$

8. নীচের মুখ্য সমস্যাটির দ্বৈত সমস্যা বের করুন। মুখ্য সমস্যাটিকে সিমপ্লেক্স পদ্ধতিতে সমাধান করে দ্বৈত সমস্যার চরম সমাধান কত বলুন।

চরম $Z = 5x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 \leq 11$

$x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

5.9 উত্তরমালা

1. অবম $W = 12v_1 + 21v_2 + 8v_3 + 6v_4$

শর্তসাপেক্ষে $v_1 + 2v_2 + v_3 \geq 3$

$v_1 + 3v_2 + v_4 \geq 4$

$v_1, v_2, v_3, v_4 \geq 0$

2. চরম $W = 2v_1 + v_2$

শর্তসাপেক্ষে $2v_1 + v_2 \leq 3$

$3v_1 + v_2 \leq 1$

$v_1, v_2 \geq 0$

3. অবম $W = 7v_1 + 3v_2 - 5v_3$

শর্তসাপেক্ষে $v_1 + 2v_2 \geq 2$

$-5v_1 - 5v_2 - 3v_3 \geq 3$

$3v_1 + v_3 = 4$

$v_2, v_3 \geq 0$ এবং v_1 চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ।

4. অবম $W = 6v_1 - 8v_2 + 6v_3$

শর্তসাপেক্ষে $v_1 - 2v_2 - v_3 \geq 2$

$-3v_1 - 4v_2 + 3v_2 \geq -6$

$v_1, v_2 \geq 0$

5. অবম $W = 6v_1 + 4v_2$

শর্তসাপেক্ষে $4v_1 + v_2 \geq 2$

$3v_1 + 2v_2 \geq 3$

$v_1 + 5v_2 \geq 1$

এবং v_1, v_2 চিহ্ন সাপেক্ষে অবাধ।

6. $x_1 = 4, x_2 = 1$ এবং চরম $Z = 10$

7. $v_1 = \frac{2}{7}, v_2 = \frac{3}{7}$

8. $v_1 = \frac{7}{5}, v_2 = \frac{4}{5}$, W অবম $= 21$

একক 6 ☐ পরিবহন সমস্যা, আরোপ (assignment) সমস্যা ও ভ্রাম্যমান সেলস্‌ম্যান সমস্যা

গঠন

6.1 উদ্দেশ্য

6.2 পরিবহন সমস্যা

6.3 আরোপ সমস্যা

6.4 ভ্রাম্যমান সেলস্‌ম্যান (**Travelling salesman**) সমস্যা

6.5 সারাংশ

6.6 অনুশীলনী

6.7 উত্তরমালা

6.1 উদ্দেশ্য (Objectives)

এই এককের উদ্দেশ্য হল ঃ

● বিশেষ ধরনের সিদ্ধান্ত গ্রহণকারী সমস্যা যেমন পরিবহন সমস্যা, আরোপ সমস্যা ও ভ্রাম্যমান সেলস্‌ম্যান সমস্যা আলোচনা করা। এই সমস্যাগুলো একই এককে আলোচনা করার উদ্দেশ্য হ'ল এরা পরস্পর নানাভাবে যুক্ত। কখন এই সমস্যাগুলোর কার্যকর ও চরম (অবম) সমাধান থাকবে তা নির্ণয় করাও এই এককের উদ্দেশ্য।

6.2 পরিবহন সমস্যা (Transportation problem) :

6.2.1 সংজ্ঞা ঃ পরিবহন সমস্যা

ধরা যাক একটি সামগ্রীকে কয়েকটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে অপর কয়েকটি গন্তব্যস্থলে পাঠাতে হবে। উদাহরণস্বরূপ আমরা ভাবতে পারি একটি এলাকায় দুটি রান্নার গ্যাস সিলিন্ডারের ডিপো আছে আর চারটি ডিলারের দোকান আছে। এখন এই ডিপোতে যে কটা সিলিন্ডার ধরে তার সংখ্যা নির্দিষ্ট। আবার ভিন্ন ভিন্ন ডীলারের দোকানে গ্যাসসিলিন্ডারের চাহিদা ভিন্ন। তখন এই ডিপোগুলি থেকে ভিন্ন ভিন্ন গন্তব্যস্থলে গাড়ী করে গ্যাসসিলিন্ডার পাঠাতে খরচা হয় এবং সেই খরচা ডিপোর থেকে নির্দিষ্ট গন্তব্যস্থলের দূরত্বের ওপর নির্ভর করে। প্রশ্ন হল কোন ডিপোর থেকে নির্দিষ্ট গন্তব্যস্থলে কত গাড়ী গ্যাস সিলিন্ডার পাঠান হবে যাতে করে সর্বসাকুল্যে খরচা সবচেয়ে কম হয়।

আমরা সমস্যাটিকে গণিতের ভাষায় প্রকাশ করব। তারজন্য চলের দুটি নিম্নলগ্নক (suffix) ব্যবহার করব।

ধরা যাক m সংখ্যক মূলস্থল (origins) আছে যেখানে থেকে n সংখ্যক গন্তব্যস্থলে (destinations) একটি সামগ্রীকে পাঠাতে হবে। মূলস্থল হল $O_1, \ldots, O_m$ অথবা O_i, $i = 1, 2, \ldots m$। গন্তব্যস্থল nটি হল $D_1, D_2, \ldots, D_n$ অথবা D_j, $j = 1, 2, \ldots, n$। ধরা যাক x_{ij} সংখ্যক একক O_i মূলস্থল থেকে D_j গন্তব্যস্থলে পাঠান হয়েছে এবং C_{ij} হচ্ছে এক একক সামগ্রী O_i থেকে D_j-তে পাঠাবার খরচা। আরও ধরা হল O_i মূলস্থলে সর্বোচ্চ একক জিনিস যা মজুত করা যায় তা হল a_i একক। আবার, b_j একক হল D_j গন্তব্যস্থলের চাহিদা।

তাহলে সর্বসাকুল্যে পরিবহন খরচা হয় $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

বিভিন্ন মূলস্থল থেকে D_j গন্তব্যস্থলে যা জিনিস পাঠান যায় তার পরিমাণ $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ । অতএব $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, এখানে ধরা হয়েছে পুরো চাহিদাই মেটান হয়েছে।

আবার O_i মূলস্থল থেকে যত পরিমাণ মাল সরবরাহ করা হয় বিভিন্ন গন্তব্যস্থলে তা যোগ করলে a_i-এর সমান হতেই হবে। কারণ O_i-তে মজুত মালের পরিমাণ a_i। অতএব,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

সুতরাং পরিবহন সমস্যাকে গণিতের ভাষায় লেখা যায়, ((চিত্র 6.1) দেখুন) ঃ

$$\text{অবম } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \tag{6.1}$$

$$\text{শর্তসাপেক্ষে, } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{6.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.3}$$

(6.2)-কে গুদাম শর্ত বলা হয়। (6.3) কে গন্তব্যস্থান শর্ত বলা হয়।

মন্তব্য 6.1. বিভিন্ন মূলস্থলে মজুত মালের যে পরিমাণ আছে তার যোগফল হল $\sum_{i=1}^{m} a_i$

আবার বিভিন্ন গন্তব্যস্থলে যে চাহিদা আছে, সর্বসাকুল্যে তার পরিমাণ হল $\sum_{j=1}^{n} b_j$.

যদি মজুত মালের পরিমাণ আর সব যায়গায় চাহিদার যোগফলের সঙ্গে সমান হয় অর্থাৎ মজুত সব মালই গন্তব্যস্থলের সমস্ত চাহিদাই মেটাতে পারে, তখন সমস্যাকে সুষম পরিবহন সমস্যা (Balanced Transportation Problem) বলা হয়। অঙ্কের ভাষায় সুষম পরিবহন সমস্যার ক্ষেত্রে

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.4}$$

মন্তব্য ঃ 6.2 :

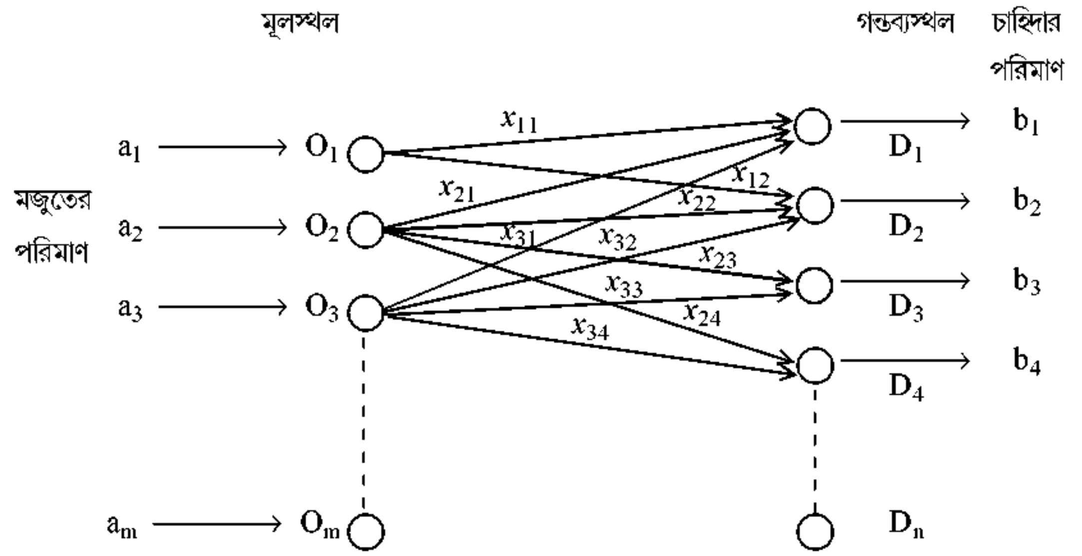
(i) যদি গুদামে মজুত মাল সরবরাহ না করা হয়ে থাকে তাহলে (6.2)-এর পরিবর্তে লিখতে হবে ঃ

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad \forall_i \tag{6.2$'$}$$

আর সর্বসাকুল্যে যা চাহিদা আছে তার থেকে বেশি মাল সরবরাহ হয়ে থাকে তাহলে (6.3)-এর বদলে লিখতে হবে,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \forall_j \tag{6.3$'$}$$

নীচের চিত্রের সাহায্যে একটি পরিবহন সমস্যাকে ব্যাখ্যা করা যায় ঃ



চিত্র 6.1

6.2.1. একটি পরিবহন সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে প্রকাশ করা হয়।

আমরা ওপরের পরিবহন সমস্যাতে (6.11)—(6.3) চলের দুটি নিম্নলগ্নকের বদলে একটি নিম্নলগ্নক ব্যবহার করি।

ধরা যাক, $c_{ij} = \tilde{c}_j, \quad 1 \le j \le n$

$$c_{2j} = \tilde{c}_{n+j}, \quad 1 \le j \le n$$

$$c_{ij} = \widetilde{c}_{(i-1)n+j} + j, 1 \le j \le n, \ 1 \le i \le m$$

আমরা ধরি, $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_m, \widetilde{c}_{m+1} \ldots \widetilde{c}_{2m} \ldots \widetilde{c}_{nm})$ (6.5)

একইভাবে আমরা চিহ্নিত করি,

$$x_{1j} = \widetilde{x}_j, 1 \le j \le n$$

$$x_{2j} = \widetilde{x}_{n+j}, 1 \le j \le n$$

$$x_{ij} = \widetilde{x}_{(i-1)n+j}, 1 \le j \le n$$

$$\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \ldots \widetilde{x}_n, \widetilde{x}_{n+1}, \ldots \widetilde{x}_{2n} \ldots \widetilde{x}_{nm}) \quad (6.6)$$

তাহলে $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{j=1}^{nm} \widetilde{c}_j \widetilde{x}_j$ (6.7)

শর্ত $x_{11} + \ldots + x_{1n} = a_1$

অথবা, $\widetilde{x}_1 + \ldots + \widetilde{x}_n = a_1$ (6.8)

একইভাবে $x_{i1} + \ldots + x_{in} = a_i$

লিখতে পারি, $\widetilde{x}_{(i-1)n+1} + \ldots + \widetilde{x}_{(i-1)n+1} = a_i$ (6.9)

আবার, $x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j$-কে লিখতে পারি

$$\widetilde{x}_j + \widetilde{x}_{n+j} + \ldots + \widetilde{x}_{(n-1)m+j} = b_j \quad (6.10)$$

আমরা নিলাম $\widetilde{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2 \ldots b_n)$ (6.11)

e এমন একটি সারি ভেক্টর যার প্রতি উপাংশই 1.

অর্থাৎ $e = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ সংখ্যক}}$

I হচ্ছে একসম্ ম্যাট্রিক্স $(n \times n)$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix}$$

একটি ম্যাট্রিক্স $\widetilde{A}$ নিলাম যার মাত্রা $(m + n) \times nm$ এবং যেটি নিম্নরূপ ঃ

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} & \overbrace{\quad}^{n\text{-সংখ্যক}} & \\ e & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & e & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & e \cdots\cdots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots e \\ I & I & I \cdots\cdots I \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

$$\text{তাহলে } \widetilde{A}\,\widetilde{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots 1 & & 0 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 1 \cdots\cdots 1 & 1 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \underbrace{n \text{ সংখ্যাকসংখ্যা}} & \underbrace{n \text{ সংখ্যাকসংখ্যা}} & \\ 0 & 0 \cdots\cdots 1 & 1 \cdots\cdots 1 & 0,\ 0 \\ 0 & 0 \cdots\cdots 1 & 1 \ldots\ldots 1 & 1,\ 1 \\ I & I & & \ldots\ldots\ldots\ldots I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \\ \widetilde{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \widetilde{x}_{2n} \\ \widetilde{x}_{m+1} \\ \vdots \\ \widetilde{x}_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \cdots\cdots + \widetilde{x}_n \\ \widetilde{x}_{n+1} + \cdots\cdots + \widetilde{x}_{2n} \\ \vdots \\ \widetilde{x}_{(m-1)n+1} + \cdots\cdots + \widetilde{x}_{nm} \\ \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_{n+1} + \cdots\cdots + \widetilde{x}_{(m-1)n+1} \\ \widetilde{x}_n + \widetilde{x}_{2n} + \cdots\cdots + \widetilde{x}_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{b}_{m+n} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{x} \geq 0$$

বিষয়াত্মক অপেক্ষক $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^{nm} \widetilde{c}_j \widetilde{x}_j$

সুতরাং পরিবহন সমস্যা ((6.1) – (6.3)) লেখা যায় ঃ

$$\text{চরম } Z = \sum_{j=1}^{nm} \widetilde{c}_j \widetilde{x}_j \tag{6.13}$$

যেখানে $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ (6.14)

$\tilde{x} \geq 0$ (6.15)

(6.13) – (6.15) একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা।

6.2.2 পরিবহন সমস্যার কিছু বিশেষ গুণাবলী ঃ

উপপাদ্য 6.1. একটি সুষম পরিবহন সমস্যার মৌল কার্যকর সমাধানের সংখ্যা সর্বোচ্চ $(m + n - 1)$।

আমরা দেখাব যে একটি পরিবহন সমস্যার ভিত্তির সর্বোচ্চ $(m + n - 1)$ চল থাকে।

আমরা (6.2) ও (6.3) শর্তাবলী থেকে পাই,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, 2 \ldots m \tag{6.16}$$

এবং
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, 2 \ldots n \tag{6.17}$$

তখন
$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.18}$$

(6.16)-কে যোগ করলাম $i = 1, 2, \ldots (m - 1)$-এর জন্য। তাহলে পাই,

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{6.19}$$

(6.19)-কে (6.18) থেকে বিয়োগ করে পাই,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} x_{mj} - \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i = a_m$$

অতএব
$$\sum_{j=1}^{n} x_{mj} = a_m \tag{6.20}$$

কিন্তু (6.20) শর্তটি (6.16)-এর m সংখ্যক শর্তের মধ্যে একটি শর্ত।

অতএব $\sum_{j=1}^{n} x_{mj} = a_m$ শর্তটি অতিরিক্ত।

সুতরাং ভিত্তির মধ্যে $(n + m - 1)$-এর বেশি চল থাকতে পারে না।

উপপাদ্য 6.2 একটি পরিবহন সমস্যার সবসময় একটি কার্যকর সমাধান থাকবে।

ধরা যাক, $A = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

ধরা যাক, $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$

তাহলে $x_{ij} \geq 0$ যেহেতু $a_i > 0,\ b_j \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = a_i \frac{\sum_j b_j}{A} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i b_j}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i\, b_j}{A} = b_j$$

তাহলে $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ একটি কার্যকর সমাধান।

6.2.3 পরিবহন সমস্যার সমাধান প্রক্রিয়া ঃ

6.2.3.1. পরিবহন কলন্‌বিধি ঃ

পরিবহন কলন্‌বিধির মূলধাপগুলি এইরকম ঃ

ধাপ (1) প্রারম্ভিক কার্যকর সমাধান নির্ণয় করা।

ধাপ (2) মৌল নয় এমন চলগুলির মধ্যে একটি চলকে ভিত্তি ম্যাট্রিক্সের সংশ্লিষ্ট চলগুলির মধ্যে আনতে হবে। এখন যদি সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতির চরম সমাধান হওয়ার সব শর্তগুলি পূরিত হয় তাহলে প্রক্রিয়াটি থেমে যাবে। তা না হলে ধাপ 3-তে যেতে হবে।

ধাপ (3) বর্তমান মৌল সমাধানগুলির কোন চলকে অপসারণ করতে হবে যাতে করে নতুন মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া যায় তারপর ধাপ (2)-তে যেতে হবে।

এই ধাপগুলো একটির পর একটি আলোচিত হবে।

6.2.3.2 প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় ঃ

পরিবহন সমস্যার (6.2) ও (6.3) শর্তগুলিতে কৃত্রিম চল যোগ করে তবে মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া যাবে।

কিন্তু পরিবহন সমস্যার ক্ষেত্রে অনেক সহজেই মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করা যায়। আমরা এখানে যে দুটি পদ্ধতি আলোচনা করব তাদের প্রথমটির নাম হল,

উদাহরণ 6.1. (i) উত্তর-পশ্চিম কোণ নিয়ম (North-western corner rule) :

T_1 :

		গন্তব্যস্থল				
		1	2	3	4	মজুত
	1	[10] x_{11} 5	[0] x_{12} 10	[20] x_{13} 0	[12] x_{14} 0	15
মূলস্থল	2	[12] x_{21} 0	[7] x_{22} 5	[3] x_{23} 15	[4] x_{24} 5	25
	3	[0] x_{31} 0	[24] x_{32} 0	[26] x_{33} 0	[18] x_{34} 5	5
চাহিদা		5	15	15	10	

চিত্র 6.2

আমরা উদাহরণের সাহায্যে নিয়মটি ব্যাখ্যা করব (চিত্র 6.2)

বাঁ হাতের সবচেয়ে উপরের খাপে আমরা সর্বোচ্চ বরাদ্দ করলাম।

নেওয়া হল $x_{11} = 5 =$ অবম (5, 15) অতএব প্রথম স্তম্ভে আর কিছু বরাদ্দ করা যাবে না। ওপরের স্তম্ভের বাঁ দিক থেকে দ্বিতীয় স্তম্ভে বরাদ্দ করলাম $x_{12} = 10$ অবম (10, 15)।

সুতরাং বাঁদিক থেকে প্রথম স্তম্ভ আর ওপরের প্রথম সারিতে আর কিছু বরাদ্দ করা যাবে না।

এবার আমরা দ্বিতীয় স্তম্ভের দ্বিতীয় সারিতে বরাদ্দ করব।

আমরা নিলাম $x_{22} =$ অবম $(15 - 10, 25) = 5$

তাহলে দ্বিতীয় স্তম্ভে আর কোনো বরাদ্দ করা যাবে না।

বাঁদিক থেকে তৃতীয় স্তম্ভের দ্বিতীয় সারিতে আমরা নিলাম $x_{23} =$ অবম $(25 - 5, 15) = 15$।

তাহলে চতুর্থ স্তম্ভের দ্বিতীয় সারিতে বরাদ্দ হল 5।

চতুর্থ স্তম্ভের তৃতীয় সারিতে বরাদ্দ $x_{34} = 5$, কেননা সারি 3 ও স্তম্ভ-4-এ কোনো বরাদ্দ হয়নি।

চিত্র 6.3-তে প্রারম্ভিক মৌল সমাধান লেখা হল ঃ

T_2 :

	1	2	3	4	
1	5	10			15
2		5	15	5	25
				5	5
	5	15	15	10	

শর্তগোষ্ঠী (6.2) ও (6.3) সিদ্ধ হচ্ছে।

6.2.3. (ii) ভোগেলের আসন্নমান পদ্ধতি (Vogel's approximation method) (VAM).

ভ্যাম সাধারণতঃ চরম সমাধান বা তার কাছাকাছি কোন প্রারম্ভিক সমাধান দেয়।

পরপর নীচের ধাপগুলি পার হলে ভ্যামের প্রারম্ভিক সমাধান পাওয়া যায় ঃ

ধাপ 1. প্রতি সারি (স্তম্ভ)-এর জন্য একটি শাস্তিমূলক সংখ্যা (*penalty*) নির্ণয় করতে হবে। সেটা পাওয়া যাবে কোন সারি (স্তম্ভের) সবচেয়ে ছোট মূল্যকে ওই একই সারি (স্তম্ভ)-এর তারচেয়ে বড়ো কিন্তু অন্যগুলোর চেয়ে ছোট মূল্য থেকে বিয়োগ করা।

ধাপ 2. যে সারি বা স্তম্ভের শাস্তিমূলক সংখ্যা সবচেয়ে বড়ো সেটাকে চিহ্নিত করা। যদি উক্ত সংখ্যা একাধিক হয় তাহলে তাদের মধ্যে যেকোনো একটাকে নিতে হবে। নির্বাচিত সারি (স্তম্ভ)-এর যে চলের সংশ্লিষ্ট মূল্য সবচেয়ে কম সেই চলে যথাসম্ভব বেশি বরাদ্দ করা হল। চাহিদা এবং যোগানকে ঠিক করবার পরে যে সারি বা (স্তম্ভ) প্রয়োজনীয় শর্তপূরণ করছে তা বাদ দেওয়া। যদি কোনো সারি এবংস্তম্ভের শর্ত একই সঙ্গে পূরিত হয় তাহলে তাদের মধ্যে একজনকে বাদ দেওয়া এবং বাকী সারি (স্তম্ভ)তে শূন্য সরবরাহ (চাহিদা) প্রদান করা হয়। যদি কোন সারি বা স্তম্ভের সরবরাহ বা চাহিদা শূন্য হয়, তাহলে পরের শাস্তিমূলক সংখ্যা নির্ণয়ে সেই সারি বা চাহিদাকে অগ্রাহ্য করা হয় (ধাপ 3)।

ধাপ 3. (a) যদি ঠিক একটা সারি বা স্তম্ভ পড়ে থাকে যেটাকে কেটে দেওয়া হয়নি, তাহলে থেমে যান।

(b) যদি ঠিক একটা সারি বা স্তম্ভ পড়ে থাকে সেটাকে কেটে দেওয়া হয়নি এবং ধনাত্মক সরবরাহ (চাহিদা) থাকে, তাহলে ওই সারি (স্তম্ভ)-এর মৌল চলগুলি সর্বনিম্ন মূল্য পদ্ধতি দিয়ে নির্ধারণ করুন।

(c) যে সারি (স্তম্ভ)-গুলি কাটা যায় না, তাদের প্রদত্ত সরবরাহ (চাহিদা) যদি শূন্য হয়, তাহলে শূন্য মৌলচলগুলি সর্বনিম্ন মূল্য পদ্ধতি অবলম্বন করে নির্ধারণ করুন। এখানেই শেষ করুন।

(d) তা নাহলে যে সারিগুলি বা স্তম্ভগুলি কাটা যায়নি তাদের জন্য শাস্তিসূচক সংখ্যাগুলি নির্ণয় করুন এবং ধাপ 2-তে যান।

ওপরের উদাহরণে আমরা ভ্যাম পদ্ধতি ব্যবহার করি।

T_3

	1	2	3	4		সারি শাস্তিসূচক সংখ্যা
1	10	0	20	11	15	10
2	12	7	9	20	25	2
3	0 5	14	16	18	5	14
	5	15	15	10		
স্তম্ভ শাস্তি সূচক সংখ্যা	10	7	7	7		

চরম (10, 2, 14) = 14

চরম (10, 7, 7, 7) = 10 < 14 সুতরাং চরম শাস্তিসূচক সংখ্যা = 14

অতএব তৃতীয় সারির প্রথম স্তম্ভ যেখানে মূল্য হচ্ছে শূন্য আমরা বরাদ্দ করলাম 5।

এর পরের ধাপ আমরা প্রথম স্তম্ভকে অগ্রাহ্য করব।

T_4

	1	2	3	4		সারি শাস্তিসূচক সংখ্যা
1	10	0 15	20	11	15	11
2	12	7	9	20	25	2
3	0 5	14	16	18	5	2
	5	15	15	10		
স্তম্ভ শাস্তি সূচক সংখ্যা		7	7	7		

চরম (11, 2, 2) = 11 x_{12} = 15 নেওয়া হল।

চরম (7, 11, 7) = 11

প্রথম সারির যে কক্ষে সর্বনিম্ন মূল্য সেখানে বরাদ্দ করা হল।

T_5

					সারি শাস্তিসূচক সংখ্যা
0	0 15	20	11	15	—
12	7	9 15	20 10	25	11
0 5	14	16	18	5	2
5	15	15	10		
স্তম্ভ শাস্তি সূচক সংখ্যা			7	2	

চরম (11, 2) = 11

চরম (7, 2) = 7

তাহলে x_{23} = 15 x_{24} = 10 x_{33} = 0 x_{34} = 0

তাহলে ভ্যাম পদ্ধতি দিয়ে প্রারম্ভিক মৌল সমাধান হ'ল

$$x_{12} = 15,\ x_{23} = 15,\ x_{24} = 10,\ x_{31} = 5$$

মোট মূল্য $= 0 \times 15 + 9 \times 15 + 20 \times 10 + 0 \times 5$

$= 335$ একক।

আবার যদি টেবিল স্তম্ভ 3-কে নির্বাচন করা হত তাহলে

$x_{23} = 15,\ x_{22} = 10,\ x_{12} = 5,\ x_{14} = 10$ এবং $x_{34} = 0$

মোট মূল্য $= 9 \times 15 + 7 \times 10 + 0 \times 5 + 11 \times 10$

$= 315$ একক।

দ্বিতীয় সমাধানের জন্য মোট মূল্য কম।

6.3.3.3. অবম মৌল কার্যকর সমাধানের কলনবিধি (পরিবহন কলনবিধি) ঃ

MODI পদ্ধতি (পরিবহন কলন্‌বিধি)

এই পদ্ধতির অন্তর্নিহিত তত্ত্ব এই পাঠ্যক্রমের আলোচনার বাহিরে পরে। সেটা জানার জন্য (Hadley 1974) বা Sharma (2003) দেখতে পারেন।

প্রথমে যে কক্ষগুলিতে কোন বরাদ্দ করা হয়নি সেগুলির বরাদ্দ নির্ণয়ের ধাপগুলি নীচে বিবৃত হলো ঃ

ধাপ 1. প্রারম্ভিক মৌল সমাধানে যে $(m + n - 1)$ কক্ষতে বরাদ্দ হয়েছে, তার সারির জন্য u_i এবং স্তম্ভের জন্য v_j নির্ণয় করা হ'ল।

প্রথমে যেকোনো u_i বা v_j-এক শূন্য নেওয়া যেতে পারে।

যে সব সারির কক্ষে অনেকগুলি বরাদ্দ আছে তাদের জন্য u_i-র মান শূন্য নেওয়া হল। একইভাবে যে সব স্তম্ভের অনেকগুলি কক্ষে বরাদ্দ আছে তাদের জন্য v_j শূন্য নেওয়া হল।

তারপরে যে সব কক্ষে বরাদ্দ আছে, সেগুলিতে c_{ij}-কে u_i ও v_j-এর যোগফল হিসাবে লেখা হল।

অর্থাৎ $c_{ij} = u_i + v_j$ সেইসব $(i. j)$-র যাদের কক্ষে বরাদ্দ আছে। u_i বা v_j-এর মান ধরে নিলে v_j বা (u_i)-এর মান বার করা যাবে।

ধাপ 2. যেসব কক্ষে বরাদ্দ নেই, সেখানে d_{ij} নির্ণয় করা হল। $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \quad \forall i, j$

ধাপ 3. d_{ij}-এর চিহ্ন পরীক্ষা করা হল,

(i) যদি $d_{ij} > 0$ তাহলে বর্তমান মৌল কার্যকর সমাধান চরম হবে।

(ii) যদি $d_{ij} = 0$, তাহলে বর্তমান মৌল কার্যকর সমাধান অপরিবর্তিত থাকবে কিন্তু বিকল্প সমাধানের অস্তিত্ব আছে।

(iii) যদি এক বা ততোধিক $d_{ij} < 0$ হয়, তাহলে উন্নততর সমাধান পাওয়ার জন্য যে কক্ষটির (i, j)-তে কোনো বরাদ্দ হয়নি সেটিকে ভিত্তির মধ্যে আনতে হবে।

যে শূন্য কক্ষ (i, j)-এর জন্য d_{ij}-এর মান সর্বনিম্ন ঋণাত্মক হয়, সেই কক্ষকে (i, j) ভিত্তির মধ্যে আনা হল।

ধাপ 4 ও 5. এই ধাপদুটি পাশের উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হবে।

ধাপ 6. উন্নততর সমাধান পাওয়া গেলে ধাপ 5 অনুযায়ী শূন্য কক্ষে বরাদ্দ দিয়ে এবং নতুন মোট পরিবহন খরচা নির্ণয় করা হল।

ধাপ 7. পরিবর্ধিত সমাধান চরম সমাধান কিনা তা পরীক্ষা করে দেখতে হবে। এই পদ্ধতির পুনরাবৃত্তি করতে করতে প্রক্রিয়াটি শেষ হবে যখন $d_{ij} \geq 0$ হবে সবকটা কক্ষের জন্য যেখানে কোনো বরাদ্দ হয়নি।

উদাহরণের সাহায্যে আমরা প্রক্রিয়াটির বিশদ ব্যাখ্যা করব।

T_6	1	2	3	4		u_i
1	[10] 5	[0] 10	[20]	[11]	15	0
2	[12]	[7] 5	[9] 15	[20] 5	25	7
3	[0]	[14]	[16]	[18] 5	5	5
	5	15	15	10		
v_j	10	0	2	13		

ধাপ 1 : যে কক্ষগুলিতে বরাদ্দ হয়েছে সেগুলিতে নিলাম

x_{11} : $u_1 + v_1 = c_{11} = 10$

x_{12} : $u_1 + v_2 = c_{12} = 0$

x_{22} : $u_2 + v_2 = c_{22} = 7$

x_{23} : $u_2 + v_3 = c_{23} = 9$

x_{24} : $u_2 + v_4 = c_{24} = 20$

x_{34} : $u_3 + u_4 = c_{34} = 18$

$u_1 = 0$ নেওয়া হল। $v_1 = 10$, $v_2 = 0$ $u_2 = 7$ $u_3 = 2$

$v_4 = 13$, $u_3 = 5$

ধাপ 2 যে সব কক্ষে বরাদ্দ নেই, সেইগুলির জন্যে

x_{13} : $d_{13} = -u_1 - v_3 + c_{13} = 0 - 2 + 20 = 18$

$d_{14} = -u_1 - u_4 + c_{14} = -0 - 13 + 11 = -2$

$d_{21} = -u_2 - v_1 + c_{21} = -7 - 10 + 12 = -5$

$d_{31} = -u_3 - v_1 + c_{31} = -5 - 10 - 0 = -15$

$d_{32} = -u_3 - v_2 + c_{32} = -5 + 0 + 14 = 9$

$d_{33} = -u_3 - v_3 + c_{33} = -5 - 2 + 16 = 9$

ধাপ 3 সবচেয়ে ছোট ঋণাত্মক d_{ij} হল $d_{31} = -15$.

সুতরাং কক্ষ (3.1) কে ভিত্তির মধ্যে আনতে হবে।

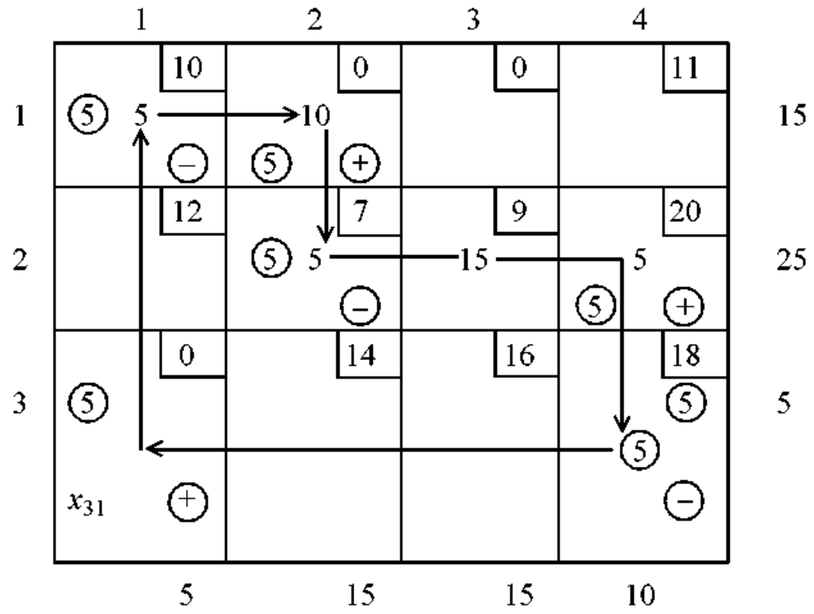
ধাপ 4 ও 5, যে শূন্য কক্ষটির জন্য, d_{ij}-এর মান সবচেয়ে ছোট ঋণাত্মক সংখ্যা, সেই কক্ষটির শুরু করে একটি সংবৃত্ত বর্তনী (বা Loop) গঠন করতে হবে। যে কক্ষটির থেকে শুরু করলাম সেখানে একটা ধনাত্মক চিহ্ন (+) দিলাম এবং কক্ষটির সারি (স্তম্ভ) বরাবর একটি রেখা আঁকলাম যতক্ষণ না সেটি একটি বরাদ্দীকৃত কক্ষে পৌঁছায়। তখন ওই বরাদ্দীকৃত কক্ষে একটি ঋণাত্মক চিহ্ন (–) দিলাম। তারপরে ওই কক্ষের স্তম্ভ (সারি) বরাবর এগোলাম যতক্ষণ না একটি বরাদ্দীকৃত কক্ষে পৌঁছলাম এবং সেখানে একটি ধনাত্মক চিহ্ন (+) দিলাম। ওই কক্ষ থেকে সারি (স্তম্ভ) বরাবর পথ আঁকা হল যতক্ষণ না আবার একটি বরাদ্দীকৃত কক্ষ পাওয়া গেল এবং সেখানে ঋণাত্মক (–) চিহ্ন দেওয়া হ'ল এইভাবে চলা হল যতক্ষণ না পথটা প্রথম শূন্য কক্ষে এসে শেষ হয়।

ধাপ 5. ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত কক্ষগুলির মধ্যে যে বরাদ্দ সবচেয়ে ছোটো সেটকে বাছা হল এবং ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত কক্ষগুলোর বরাদ্দ থেকে সেই মানটা বিয়োগ করা হল এবং ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত কক্ষগুলোর বরাদ্দ-এর সঙ্গে সেই মানটা যোগ করা হল। একই সারিতে যদি কোন্ কক্ষে বরাদ্দ x কমান হয় তাহলে একই সারিতে অন্য কোনো

কক্ষে বরাদ্দ x পরিমাণ বাড়ানো হল। তাতে শর্তগুলো কোনোভাবেই ভঙ্গ হচ্ছে না। যে কক্ষ থেকে শুরু সেখানেই অবশ্যই x পরিমাণ বরাদ্দ করা হল।

টেবিল T_7-এ এই পর্যায়টি এঁকে দেখান হচ্ছে।

T_7 :



ধাপ 6. অবম (5, 10) = 5

$x_{31} = 5, x_{34} = 0 \; x_{24} = 10, x_{22} = 0, x_{12} = 15$

$x_{11} = 0$

মোট খরচা নতুন বরাদ্দের জন্য = 5 × 0 + 0 × 18 + 10 × 20 + 0 × 7 + 15 × 0 + 0 × 10 + 15 × 9 = 335 একক।

টেবিল T_2-তে পাই, মোট খরচা = 5 × 10 + 10 × 0 + 5 × 7 + 15 × 9 + 5 × 18 + 5 × 20 = 410

অতএব টেবিল $T2$-তে বরাদ্দ অনুযায়ী মূল্যের চেয়ে নতুন খরচা (410 − 335) = 75 একক কম।

ধাপ 7.

T_8 :

	1	2	3	4		u_i
1	[10] (–) 0 →	[0] 15 (+) ↓	[20]	[11]	15	0
2	[12] x_{21} ↑	[7] 0 (–)	[9] 15	[20] 10	25	7
3	[0] 5	[14]	[16]	[18]	5	–10
	5	15	15	10		
v_j	10	0	2	13		

যেহেতু বরাদ্দ হয়েছে এমন কক্ষের সংখ্যা = 7 > $m + n - 1$ অতএব x_{34} কক্ষটি শূন্য নিলাম।

x_{11} : $u_1 + v_1 = c_{11} = 10$

x_{12} : $u_1 + v_2 = c_{12} = 0$

x_{22} : $u_2 + v_2 = c_{22} = 7$

x_{23} : $u_2 + v_3 = c_{23} = 9$

x_{24} : $u_2 + v_4 = c_{24} = 20$

x_{31} : $u_3 + v_1 = c_{31} = 0$

শূন্য কক্ষকসমূহের জন্য ঃ

$d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

$d_{13} = 20 - (0 + 2) = 18$

$d_{14} = 11 - (0 + 13) = -2$

$d_{21} = 12 - (7 + 10) = -5$

$d_{32} = 14 - (0 - 10) = 24$

$d_{33} = 16 - (2 - 10) = 24$

$d_{34} = 18 - (13 - 10) = 15$

অবম (–2, –5) = – 5

অতএব x_{11}-কে অপসারণ করা হল ও x_{21} নতুন মৌল চল।

T_9

					u_i
[10]	[0] 15 (–)	[20]	[11] x_{14} (+)	15	0
[12]	[7] 0 (+)	[9] 15	[20] 10 (–)	25	7
[0] 5	[14]	[16]	[18]	8	–5
5	15	15	10		
v_j: 5	0	2	13		

$d_{11} = 10 - (0 + 5) = 5$

$d_{13} = 20 - (2 + 0) = 18$

$d_{14} = 11 - (13 + 0) = -2$

$d_{32} = 14 - (0 - 5) = 19$

$d_{33} = 16 - (2 - 5) = 19$

$d_{34} = 18 - (13 - 5) = 10$

$d_{14} = -2 < 0$

x_{14} চল বা (1, 4) কক্ষ ভিত্তিতে আসবে আর (2, 4) কক্ষ ভিত্তি ত্যাগ করবে।

T_{10}

					u_i
[10]	[0] 5	[20]	[11] 10	15	0
[12]	[7] 10	[9] 15	[20]	25	7
[0] 5	[14]	[16]	[18]	5	5
5	15	15	10		
v_j: 5	0	2	11		

$d_{11} = 10 - (0 + 5) = 5$
$d_{13} = 20 - (2 + 0) = 18$
$d_{21} = 12 - (5 + 7) = 0$
$d_{24} = 20 - (11 + 7) = 2$
$d_{32} = 14 - (0 - 5) = 19$
$d_{33} = 16 - (2 - 5) = 19$
$d_{34} = 18 - (11 - 5) = 12$
$d_{ij} \geq 0.$

অতএব অবম সমাধান পাওয়া গেছে।

অবম সমাধান $x_{12} = 5,\ x_{14} = 10$

$x_{22} = 10,\ x_{23} = 15,\ x_{31} = 5$

অবম খরচা $= 0 \times 5 + 11 \times 10$

$+ 7 \times 10 + 9 \times 15 + 0 \times 5 = 315$ একক।

উদাহরণ 6.2. অবম সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	0	2	1	5
O_2	2	1	5	10
O_3	2	4	3	5
b_j	5	5	10	

***T*₁ :** ভ্যাম্ পদ্ধতি

	D_1	D_2	D_3	a_i		
O_1	[0]	[2]	[1] 5	5	1	1
O_2	[2] 5	[1] 5	[5]	10	1	4
O_3	[2]	[4]	[3] 5	5	1	1
b_j	5	5	10			
	2	1	2			
			2			

চরম (2, 1) = 2 চরম (2, 4) = 4

***T_2* :**

				a_i	a_i
	[0] x_{11} (+)	[2]	[1] 5 (–)	5	0
	[2] 5 (–)	[1] 5	[5] (+)	10	0
	[2]	[4]	[3] 5	5	2
	5	5	10		
v_j	2	1	1		

$u_1 + v_3 = c_{13} = 1$

$u_2 + v_1 = c_{21} = 2,\ u_2 + v_2 = 1$

$u_3 + v_3 = c_{33} = 3$

অশূণ্য কক্ষের জন্য ঃ

$d_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 0 - (0 + 2) = -2$

$d_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 2 - (0 + 1) = 1$

$d_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 5 - (0 + 1) = 4$

$d_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 2 - (2 + 2) = -2$

$d_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 4 - (2 + 1) = 1$

অবম ঋণাত্মক $d_{ij} = -2$ (1, 3) কক্ষের বদলে (1, 1) কক্ষটি ভিত্তিতে স্থান পেল।

***T_3* :**

				a_i	u_i
	[0] 5 (–)	[2]	[1] x_{13} (+)	5	0
	[2] 0 (+)	[1] 5	[5] 5 (–)	10	0
	[2]	[4]	[3] 5	5	–2
	5	5	10		
v_j	0	1	5		

$d_{12} = c_{12} - (u_2 + v_2) = 2 - 1 = 1 > 0$

$d_{13} = c_{13} - (u_2 + v_3) = 1 - (0 + 5) = -4$

$d_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 2 - (0 + 0) = 2$

$d_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 1 - (0 + 1) = 0$

$d_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 5 - (0 + 5) = 0$

$d_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 2 - (-2 + 0) = 4$

$d_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 1 - (-2 + 1) = 2$

মোট খরচা $= 5 \times 0 + 5 \times 1 + 5 \times 5 + 5 \times 3 = 45$

***T*₄ :**

				a_i	u_i
	[0]	[2]	[1] 5	5	0
	[2] 5	[1] 5	[5] 0	10	4
	[2]	[4]	[3] 5	5	2
b_j	5	5	10		
v_j	–2	–3	1		

$d_{13} = -4$

অতএব (1, 3) কক্ষ ভিত্তিতে ঢুকবে এবং (1, 1) কক্ষ ভিত্তি থেকে চলে যাবে।

শূন্য কক্ষের জন্য $d_{11} = 0 - (0 - 2) = 2$

$d_{12} = 2 - (-3 + 0) = 5$

$d_{31} = 2 - (2 - 2) = 2$

$d_{32} = 4 - (2 - 3) = 5$

যেহেতু শূন্য কক্ষসমূহের জন্য $d_{ij} \geq 0$, অবম মান হল

$x_{13} = x_{21} = x_{22} = x_{33} = 5$

অবম মূল্য $= 5 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 1 + 5 \times 3 = 35$

6.3 আরোপ সমস্যা (Assignment Problem) :

আরোপ সমস্যা ঃ আমরা একটি উদাহরণের সাহায্যে আরোপ সমস্যা ব্যাখ্যা করব। একটি ব্যবসায়িক প্রতিষ্ঠান তিনটি পদে লোক নিয়োগ করতে চায়। আলাদা আলাদা পদের জন্য আলাদা আলাদা পটুত্ব দরকার। তখন তিনজন

লোক পাওয়া গেল যাদের মাহিনা একই। যেহেতু লোকগুলির বিভিন্ন ধরণের বিষয়ে দক্ষতা আছে, তাদের শিক্ষা ও অভিজ্ঞতাও আলাদা, মালিকরা বিভিন্ন ধরণের কাজে প্রত্যেকের কর্মদক্ষমতার ওপর আলাদা আলাদা মূল্য আরোপ করেছে। উদ্দেশ্য হচ্ছে কোনো ধরনের কাজে কাকে নিয়োগ করা যায়। যাতে করে কোম্পানী সবচেয়ে উপকৃত হয়।

ধরা যাক x_{ij} বোঝায় j-তম কাজে j-তম লোককে নিয়োগ করা না করার সিদ্ধান্ত। তাহলে আমরা বলব $x_{ij} = 1$ যদি i-তম দরখাস্তকারীকে j-তম পদে নিয়োগ করা হয়।

এবং $x_{ij} = 0$, নেওয়া হয়, যদি i-তম দরখাস্তকারীকে j-তম পদে নিয়োগ না করা হয়।

যেহেতু প্রতিটি আবেদনকারীই একটামাত্র পদে নিযুক্ত হতে পারে, আমরা লিখতে পারি,

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall_i \tag{6.21}$$

আবার, যেহেতু একটিমাত্র কাজের জন্য একজন লোকই দরকার,

$$\sum_j x_{ij} = 1 \ \forall_j \tag{6.22}$$

যদি i-তম আবেদনকারীকে j-তম পদের নিয়োগের মূল্য c_{ij} হয় তাহলে আরোপ সমস্যাটিকে লেখা যায়,

চরম $$Z = \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij} \tag{6.23}$$

শর্তসাপেক্ষে $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1, \ldots\ldots n \tag{6.24}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \tag{6.25}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

মন্তব্য ঃ 6.3. আমরা আগে দেখেছি যে পরিবহন সমস্যা হল ঃ

অবম $\sum_{i,\, j} c_{ij} x_{ij}$ শর্তসাপেক্ষে $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ এবং $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$

তাহলে আরোপ সমস্যাকে পরিবহন সমস্যা যেভাবে সমাধান করা হয়েছে, সেইভাবেই করা যায়। কিন্তু যেহেতু সমাধান অপজাত হয়, এই সমস্যা সমাধানের জন্য অন্য পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়।

মন্তব্য ঃ 6.4. আমরা দেখেছি যে পরিবহন সমস্যাকে রৈ. প্রো. স. হিসাবে প্রকাশ করা যায়। কিন্তু আরোপ সমস্যাকে রৈ. প্রো. স. হিসাবে প্রকাশ করা যায় না। কারণ এই ক্ষেত্রে x_{ij} কেবলমাত্র 0 অথবা 1, এই দুটি মান গ্রহণ করতে পারে। ফলে এই ধরণের চলের জন্য বিষয়াত্মক অপেক্ষক সন্তত হয় না।

উপপাদ্য 3.2 :

যদি $x_{ij} = X_{ij}$ অবম সমাধান হয়, অবম $Z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$,

শর্তসাপেক্ষে $\sum_j x_{ij} = 1, \ \sum_i x_{ij} = 1, \ x_{ij} \geq 0$

তাহলে $X_{ij}, Z' = \sum_{u,j} c'_{ij} x_{ij}$ উপরিউক্ত শর্তাধীনে পরিবর্তিত সমস্যার অবম সমাধান হবে। প্রদত্ত $c'_{ij} = c_{ij} + u_i + v_j \ \forall_{i,j} \ u_i, \ v_j$ নির্দিষ্ট সংখ্যা।

$$Z' = \sum_i \sum_j (c_{ij} + u_i + v_j) x_{ij}$$

$$= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_{i,j} u_i x_{ij} + \sum_{i,j} v_i x_{ij}$$

$$= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_i u_i \sum_j x_{ij} + \sum_j v_j \sum_i x_{ij}$$

$$= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_i u_i + \sum_j v_j$$

$$= Z + \sum_i u_i + \sum_j v_i, \text{ যেহেতু } \sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij} = 1$$

আবার, যেহেতু $\sum_i u_i, \sum_j v_j$ নির্দিষ্ট সংখ্যা Z'-এর অবম মান X_{ij}-তে প্রাপ্ত হবে।

উপপাদ্য 3.3 যদি সব $c_{ij} \geq 0$ এবং আমরা এমন সেট $x_{ij} = x^*_{ij}$ পাই, যাতে করে, অবম $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j c_{ij} x^*_{ij} = 0$, তাহলে সেই সমাধান অবম সমাধান হবে।

যেহেতু $c_{ij} \geq 0$ এবং $x_{ij} \geq 0$, তাহলে,

$$Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \text{ ঋণাত্মক হতে পারে না।}$$

তাহলে Z-এর অবম মান শূন্য হয় $x_{ij} = x^*_{ij}$-এর জন্য।

অতএব বর্তমান সমাধানই অবম সমাধান।

6.3.1. আরোপ সমস্যা সমাধানের পদ্ধতি ঃ

হাঙ্গেরিয় পদ্ধতির বিভিন্ন ধাপসমূহ ঃ

ধাপ 1. প্রদত্ত সমস্যা থেকে শূন্য টেবিল গঠন করা হল।

যদি সারির (স্তম্ভের) সংখ্যা স্তম্ভের (সারির) সংখ্যার সঙ্গে সমান না হয় তাহলে একটি নতুন সারি (স্তম্ভ) যোগ করা হল যাতে সারির সংখ্যা = স্তম্ভের সংখ্যা। নতুন সারি (স্তম্ভ)-তে মূল্যগুলি সব শূন্য নেওয়া হল। মূল্য টেবিলের সব সত্যকেই ধনাত্মক করা হল।

ধাপ 2. নতুন মূল্য টেবিল গঠন ঃ

(a) প্রতি সারিতে সবচেয়ে ছোটো c_{ij} ধরা যাক $\hat{c}_{ij}$-কে চিহ্নিত করা হল এবং সমস্ত উপাদান থেকেই $\hat{c}_{ij}$ বিয়োগ করা হল।

(b) নতুন মূল্য ম্যাট্রিক্সের প্রতি স্তম্ভের ক্ষেত্রে ওই একই প্রক্রিয়া অবলম্বন করা হল। প্রতি সারি এবং প্রতি স্তম্ভে এখন অন্তত একটি করে 'O' থাকবে।

ধাপ 3. লঘুকৃত মূল্য ম্যাট্রিক্সের আরোপ নির্ণয় করা ঃ

(a) সারিগুলি পর পর পরীক্ষা করা হল এমন একটি সারি পাওয়া গেল যাতে একটি মান শূন্য আছে। ওই কক্ষে একটি আরোপ প্রদান করা হল এবং 'O'-কে □ দিয়ে ঘিরে দেওয়া হল।

(b) কোন শূন্য মানে আরোপ প্রদান করা হলে ঐ সারির অন্য শূন্যগুলোকে বাতিল করে দেওয়া হল।

(c) যদি কোন সারি এবং/অথবা স্তম্ভে দুই বা ততোধিক চিহ্নিত করা হয়নি এখন 'O' মান থাকে তাহলে সুবিধামত যেকোনো একটি শূন্য মান যুক্ত কক্ষ মনোনয়ন করা হল।

(b) এই পদ্ধতি চালিয়ে যেতে হবে যতক্ষণ না প্রতি সারিতে এবং প্রতিটি স্তম্ভে প্রতিটি শূন্যর বেষ্টনী দেওয়া হয়েছে বা কেটে দেওয়া হয়েছে।

ধাপ 4. চরম মান পাওয়ার শর্ত ঃ

যদি কোনো টেবিলে প্রতিটি সারি এবং স্তম্ভে শূন্য মানগুলি কেটে দিতে সবচেয়ে কম সংখ্যক সরলরেখা যা লাগে, তার সংখ্যা বর্গ ম্যাট্রিক্সের মাত্রার সঙ্গে সমান হয়, তাহলে সেই সমাধানকে অবম সমাধান বলে এবং এই সমাধান অবম Z-এর মান প্রদান করে।

মন্তব্য 6.5. যে উপপাদ্য-এর নির্ভর করে ওই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া সেটি দুজন হাঙ্গেরিয় গণিতবিদের আবিষ্কারের ওপর নির্ভর করে। Graph Theory বা লেখতত্ত্বের একটি বিশেষ উপপাদ্য (কোনিগ-এভারভেরী উপপাদ্য) (König-Egarvary উপপাদ্য)-কে অবলম্বন করে অবম সমাধানের অস্তিত্বের শর্ত পাওয়া যায়। যদি তা না হয় ধাপ 5-এ যান।

ধাপ 5. নতুন পরিবর্তিত মূল্য টেবিল ঃ

(a) যে কক্ষসমূহের ভিতর দিয়ে কোনো সরলরেখা যায়নি, তাদের উপাদানদের মধ্যে সবচেয়ে ছোটো সংখ্যাটি নেওয়া হল। ধরা যাক এই মানটি হল k।

(b) যে সব কক্ষের ভিতর দিয়ে কোনো সরলরেখা যায়নি, তাদের ভিতরের উপাদান থেকে ওই k বিয়োগ করা হল এবং অনুভূমিক ও উল্লম্বরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে ওই k যোগ করা হল।

(c) যেসব কক্ষের ভিতর দিয়ে একটিমাত্র রেখা টানা হয়েছে তাদের উপাদান অপরিবর্তিত থাকে।

ধাপ 6. অবম সমাধান না পাওয়া পর্য্যন্ত ধাপ 3 থেকে ধাপ 5 পুনরাবৃত্তি করতে হবে।

উদাহরণ 6.3. সমাধান করুন

চাকুরী

$T1$:

		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
	A	2	9	2	7	1
	B	6	8	7	6	1
কর্মচারী	*C*	4	6	5	3	1
	D	4	2	7	3	1
	E	5	2	9	5	1

প্রতিসারি থেকেই 1 বিয়োগ করা হল।

$T2$:

		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
	A	1	8	1	6	0
	B	5	7	6	5	0
কর্মচারী	*C*	3	5	4	2	0
	D	3	1	6	2	0
	E	4	1	8	4	0

প্রতি স্তম্ভ থেকে তার সবচেয়ে ছোটো সংখ্যা বিয়োগ করা হল।

$T3$:

		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
	A	0	7	[0]	4	0
	B	4	6	5	3	[0]
কর্মচারী	*C*	2	4	3	[0]	0
	D	2	[0]	5	0	0
	E	3	0	7	2	[0]

যে স্তম্ভে '*O*' নেই সেই স্তম্ভের সবচেয়ে ছোট সংখ্যা দিয়ে অন্য উপাদান থেকে বিয়োগ করা হল।

সুতরাং যে রেখাগুলি দিয়ে সব শূন্য ঢাকা যায় তাদের ন্যূনতম সংখ্যা $= 4 \neq$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা।

টেবিলের যে উপাদানগুলি কাটা যায়নি, তাদের মধ্যে সবচেয়ে ছোটো সংখ্যা, (এক্ষেত্রে 2) বাকীদের থেকে বিয়োগ করা হল এবং অনুভূমিক ও উল্লম্ব রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে যোগ করা হল। তাহলে পরিবর্তিত টেবিল হল ঃ

*T*4 :

কর্মচারী		*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
	A	0	7	[0]	6	2
	B	2	6	5	3	[0]
কর্মচারী	*C*	[0]	4	3	0	0
	D	0	0	5	[0]	0
	E	1	[0]	7	2	0

নির্ণেয় আরোপ হল ঃ

$A \longrightarrow III$, $B \longrightarrow IV$, $C \longrightarrow I$

$D \longrightarrow IV$, $E \longrightarrow II$.

অবম মান = 13 একক।

উদাহরণ 6.4. একটি গাড়ী ভাড়া দেওয়ার কেম্পানী তার *a*, *b*, *c*, *d*, *c* এই পাঁচটি ডিপোতে একটি করে গাড়ী রাখে। একজন খদ্দেরের *A*, *B*, *C*, *D*, *E* এই পাঁচটি শহরের প্রত্যেকটিতে একটি করে গাড়ী প্রয়োজন। ডিপোগুলি থেকে উক্ত শহরগুলির দূরত্ব যথাক্রমে নীচের টেবিলে দেওয়া হল। গাড়ীগুলি খদ্দেরকে কীভাবে ভাড়া দেওয়া যাবে যাতে করে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব সবচেয়ে কম হয় সেটাই নির্ণয় করতে হবে।

*T*1 :

কর্মচারী		*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
	A	160	130	175	190	200
	B	135	120	130	160	175
কর্মচারী	*C*	140	110	155	170	185
	D	50	50	80	80	110
	E	55	35	70	80	105

প্রথম সারি থেকে 130 বিয়োগ দিয়ে দ্বিতীয় সারি থেকে 120 বিয়োগ দিয়ে তৃতীয় সারি থেকে 110 বিয়োগ দিয়ে চতুর্থ সারি থেকে 50 বিয়োগ করে ও পঞ্চম সারি থেকে 35 বিয়োগ করে পাই,

$T2$:

		a	b	c	d	e
	A	30	0	45	60	70
	B	15	0	10	40	55
কর্মচারী	C	30	0	45	60	75
	D	0	0	30	30	60
	E	20	0	35	45	70

প্রতি স্তম্ভ থেকে ন্যূনতম (শূন্য নয়) এমন সংখ্যা থাকলে সেটাকে অন্য সংখ্যাগুলোর থেকে বিয়োগ করে পাই,

$T3$:

		a	b	c	d	e
	A	30	0	35	30	15
	B	15	0	0	10	0
কর্মচারী	C	30	0	35	30	20
	D	0	0	20	0	5
	E	20	0	25	15	15

সব শূন্যগুলোর ওপর দিয়ে যাবে এমন ন্যূনতম রেখার সংখ্যা $= 3 < 5$ (ম্যাট্রিক্সের মাত্রা)।

এখন অনাবৃত সংখ্যাগুলোর মধ্যে সবচেয়ে ছোটো সংখ্যা = 5 এবং অনাবৃত সংখ্যাগুলি থেকে 5 বিয়োগ করে ও দুই রেখার সংযোগস্থলে 5 যোগ করে পাই,

		a	b	c	d	e
	A	15	[0]	20	15	0
	B	15	5	[0]	10	0
কর্মচারী	C	15	[0]	20	15	5
	D	[0]	0	20	0	5
	E	5	0	10	[0]	5

শূন্যগুলোকে কাটতে সবচেয়ে ছোটো সংখ্যা = 5

= ম্যাট্রিক্সের মাত্রা।

নির্ণেয় আরোপ : $A \to e$, $B \to c$, $C \to b$, $\mathrm{D} \to a$, $E \to d$.

অবম দূরত্ব = 570 একক।

উদাহরণ 6.5. একটি কোম্পানীর 4টি কাজ বিভিন্ন মেশিনে করাতে হবে। নীচের ম্যাট্রিক্সে প্রদত্ত হল i-তম কাজকে j-তম মেশিনে করা হলে তার থেকে যে মূল্য পাওয়া যায় ঃ

মেশিন

$T1$:

কাজ	1	2	3	4
1	1	1	2	4
2	2	3	1	1
3	4	1	2	3
4	1	3	3	2

কোন্ কাজ কোন্ মেশিনে করালে মূল্য সর্বোচ্চ হয় তা নির্ণয় করতে হবে।

চরম মান নির্ণয়কারী সমস্যাকে অবম মান নির্ণয়কারী সমস্যা হিসাবে প্রকাশ করার জন্য আমরা নিলাম।

$$C_{ij} = \text{চরম } (c_{ij}) - c_{ij} = 4 - c_{ij}$$

তাহলে টেবিলটিকে এইভাবে লেখা যায়

মেশিন

$T2$:

কাজ	1	2	3	4
1	3	3	2	0
2	2	1	3	3
3	0	3	2	1
4	3	1	1	2

$T3$:

কাজ	1	2	3	4
1	3	2	1	0
2	2	0	2	3
3	0	2	1	1
4	3	0	0	2

সমস্ত শূন্যগুলোকে কাটাবার জন্য 4টি রেখা আবার ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 4

অবম আরোপ ঃ $1 \to 4,\ 2 \to 2,\ 3 \to 1,\ 4 \to 3.$

চরম মান = 4 + 3 + 4 + 3 = 14

6.4 ভ্রাম্যমান সেলসম্যান (Travelling Salesman) :

সমস্যাটি এইরূপ ঃ একজন সেলস্‌ম্যানকে অনেকগুলি শহর পরিক্রমা করতে হবে। তিনি জানেন যেকোনো দুটো শহরের মধ্যে দূরত্ব বা একটি থেকে আর একটিতে যেতে গেলে যা সময় লাগে। সমস্যাটি হল এমন একটি পথ বাহির করা যেটা সেলস্‌ম্যানের নিজের শহর থেকে শুরু হয় ও নিজের শহরেই শেষ হয়। কিন্তু এই যাত্রায় নিজের শহর ছাড়া অন্য কোনো শহরেই দুবার যাওয়া হবে না। এমন একটি পথ বাহির করো যাতে সবচেয়ে কম দূরত্ব অতিক্রম করতে হয় বা সব চেয়ে কম সময়ে বা কম খরচে পথটি অতিক্রম করা যায়।

ভ্রাম্যমান সেলস্‌ম্যান সমস্যাটি আরোপ সমস্যার মতই। কিন্তু একটি বাড়তি শর্ত আছে। যদি i শহর থেকে j শহরে যাওয়ার খরচা c_{ij} হয়, তাহলে এক্ষেত্রে $c_{ij} = c_{ji}$ হতে পারে না।

ধরা যাক $x_{ij} = 1$ যদি সেলস্‌ম্যানটি i-তম শহর থেকে j-তম শহরে সরাসরি যায় তা না হলে x_{ij}-এর মান শূন্য হবে।

সমস্যাটি হল অবম $\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$ ওপরের প্রদত্ত শর্তাধীনে। যেহেতু i-তম শহর থেকে সরাসরি i-তম শহরে যাওয়া যায় না। অতএব আমরা নিলাম $c_{ii} = \infty$। বাকীটা আরোপ সমস্যার মত সমাধান করা যায় ঃ

উদাহরণ 6.6. সমাধান করুন ঃ

$T1$:

	1	2	3
1	∞	12	10
2	5	∞	18
3	12	8	∞

প্রতি সারি থেকে তার ন্যূনতম সংখ্যাটি বিয়োগ করা হল।

$T2$:

	1	2	3
1	∞	2	0
2	0	∞	13
3	4	0	∞

'O' গুলো কেটে দেওয়ার জন্য সরলরেখাগুলোর ন্যূনতম সংখ্যা = 3 ম্যাট্রিক্সের মাত্রা।

আরোপ ঃ $1 \to 3,\ 2 \to 1,\ 3 \to 2$

অবম মান = $10 + 5 + 8 = 23$

উদাহরণ 6.7 ঃ

$T1$:

		1	2	3	4	5	6
	1	∞	20	33	41	23	18
	2	29	∞	40	33	35	37
কর্মচারী	3	28	29	∞	39	45	60
	4	31	32	43	∞	35	63
	5	61	65	55	49	∞	57
	6	34	28	35	25	43	∞

$T2$:

		1	2	3	4	5	6
	1	∞	2	15	23	5	0
	2	0	∞	11	4	6	8
কর্মচারী	3	0	1	∞	11	17	32
	4	0	1	12	∞	4	32
	5	12	16	6	0	∞	8
	6	9	3	10	0	18	∞

$T3$:

		1	2	3	4	5	6
	1	∞	1	9	23	1	[0]
	2	[0]	∞	5	4	2	8
কর্মচারী	3	0	[0]	∞	11	13	32
	4	0	0	6	∞	[0]	32
	5	12	15	[0]	0	∞	8
	6	0	2	4	[0]	14	∞

সব শূন্যগুলো কেটে দেওয়ার জন্য ন্যূনতম সরলরেখার সংখ্যা = 5 = ম্যাট্রিক্সের মাত্রা।

পথ হল ঃ
$1 \longrightarrow 6$
$2 \longrightarrow 1$
$3 \longrightarrow 2$
$4 \longrightarrow 5$
$5 \longrightarrow 3$
$6 \longrightarrow 4$

অবম পথ হল ঃ $1 \to 6 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2 \to 1$.

অবম মান = 18 + 25 + 35 + 55 + 29 + 29 = 191 একক।

উদাহরণ 6.8 ঃ

*T*1 :

		1	2	3	4
	1	∞	12	10	15
	2	16	∞	11	13
কর্মচারী	3	17	18	∞	20
	4	13	11	18	∞

*T*2 :

		1	2	3	4
	1	∞	2	[0]	5
	2	5	∞	0	2
কর্মচারী	3	[0]	1	∞	3
	4	2	0	7	∞

*T*3 :

		1	2	3	4
	1	∞	2	[0]	3
	2	5	∞	0	[0]
কর্মচারী	3	[0]	1	∞	1
	4	2	[0]	7	∞

অবম আরোপ করার সময় দেখা যাচ্ছে দুটো উপ-পথ পাওয়া যাচ্ছে (1, 3), (3, 1) এবং (2, 4), (4, 2), এখানে পথের পারম্পর্য থাকছে না।

এক্ষেত্রে বাকী সংখ্যাগুলোর মধ্যে ক্ষুদ্রতম সংখ্যা হল—

1। তাহলে (3, 2) কক্ষ টি মনোনয়ন করা হল। তৃতীয় সারি এবং দ্বিতীয় স্তম্ভ বাদ দেওয়া হল কেননা (3, 2) কক্ষটি মনোনয়ন করা হয়েছে।

তাহলে আরোপ হল ঃ (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)

অবম মান হল = 10 + 18 + 13 + 13

= 54 একক।

6.5 সারাংশ :

এই এককের উদ্দেশ্য হল পরিবহন সমস্যা, আরোপ সমস্যা ও ভ্রাম্যমান সেলস্ম্যান সমস্যা—এই তিনটি সমস্যা আলোচনা করো। এইগুলির মধ্যে একটির সঙ্গে আর একটির সাদৃশ্য আছে। এই সমস্যাগুলির মধ্যে সাদৃশ্য যেমন আছে তেমনি তাদের মধ্যে গুণগত পার্থক্যও আছে। সেইজন্য এদের সমাধান পদ্ধতিও আলাদা। এই সমাধান পদ্ধতি এদের বিশেষ বৈশিষ্ট্যের ওপরে নির্ভরশীল।

6.6 অনুশীলনী :

1. উত্তর-পশ্চিম কোণ পদ্ধতি অবলম্বন করে প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(a)

0	2	1	5
2	1	5	10
2	4	5	5
5	5	10	

(b)

0	4	2	8
2	3	4	5
1	2	0	6
7	6	6	

2. *VAM*-পদ্ধতি অবলম্বন করে প্রারম্ভিক কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(a)

1	2	6	7
0	4	2	12
3	1	5	11
10	10	10	

(b)

5	1	8	12
2	4	0	14
3	6	7	4
9	10	11	

3. অবম সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(a)

					a_i
	10	20	5	7	10
	13	9	12	8	20
	4	15	7	9	30
	14	7	1	0	40
	3	12	5	19	50
b_j	60	60	20	10	

(b)

	A	B	C	a_i
O_1	10	9	8	8
O_2	10	7	10	7
O_3	11	9	7	9
O_4	12	14	10	4
b_j	10	10	8	

4.

(a)

7	3	4	2
2	1	3	3
3	4	6	5
4	1	5	

(b)

50	30	220	1
90	45	170	3
250	200	50	4
4	2	2	

5. নিম্নলিখিত আরোপ সমস্যাগুলো সমাধান করুন ঃ

(a)

	J_1	J_2	J_3
P_1	12	24	15
P_2	23	18	24
P_3	30	14	28

(b)

	a	b	c	d
1	18	26	17	11
2	13	28	14	26
3	38	19	18	15
4	19	26	24	10

6. তিনটি কাজ করার জন্য একটি কোম্পানীর চারটি মেশিন আছে। যেকোনো মেশিনে একটিমাত্র সাজই আরোপ করা যায়। বিভিন্ন মেশিনে বিভিন্ন কাজ আরোপ করার মূল্য ম্যাট্রিক্স দেওয়ায় হল। কোন কাজ কোন মেশিনে করালে খরচা সবচেয়ে কম হবে, সেটা নির্ণয় করতে হবে ঃ

(a) মেশিন

		M_1	M_2	M_3	M_3
	J_1	18	24	28	32
কাজ	J_2	8	13	17	19
	J_3	10	15	19	22

[সূত্র ঃ সমস্যাটিকে সুষম করার জন্য একটি কাল্পনিক সারি যোগ করুন।]

7. আরোপ সমস্যাটি সমাধান করুন ঃ

		I	*II*	*III*	*IV*
	A	8	26	17	11
কাজ	*B*	13	28	4	26
	C	38	19	18	15
	D	19	26	24	10

৪. নিম্নলিখিত ভ্রাম্যমান সেলস্ম্যান সমস্যাগুলি সমাধান করুন ঃ

(a)

	1	2	3
1	∞	12	10
2	5	∞	18
3	12	8	∞

(*b*)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	20	33	41	23	18
2	29	∞	40	33	35	37
3	28	29	∞	39	45	60
4	31	32	43	∞	35	63
5	61	65	55	49	∞	57
6	34	28	35	25	43	∞

(c)

	A	*B*	*C*	*D*
A	∞	4	7	3
B	4	∞	6	3
C	7	6	∞	7
D	3	3	7	∞

(d)

	P	*Q*	*R*	*S*
P	∞	15	25	20
Q	22	∞	45	55
R	40	30	∞	25
S	20	26	38	∞

6.7 উত্তরমালা

1. (a) $x_{13} = x_{21} = x_{22} = x_{33} = 5,\ Z = 35$

   (b) $x_{11} = 7,\ x_{12} = 1,\ x_{22} = 5,\ x_{33} = b,\ Z = 19$

2. (a) $x_{11} = 7,\ x_{21} = 2,\ x_{23} = 10,\ x_{31} = 1,\ x_{32} = 10,\ Z = 40$

   (b) $x_{11} = 2,\ x_{12} = 10,\ x_{21} = 3,\ x_{23} = 11,\ x_{31} = 4,\ Z = 28$

3. (a) $x_{13} = 10,\ x_{22} = 20,\ x_{31} = 30,\ x_{42} = 30,\ x_{44} = 10$

   $x_{51} = 30,\ x_{52} = x_{53} = 10,\ Z = 820$

(b) $x_{11} = 6$, $x_{12} = 2$, $x_{22} = 7$, $x_{32} = 1$, $x_{33} = 8$, $x_{41} = 4$, $Z = 240$.

4. (a) $x_{13} = 2$, $x_{22} = 1$, $x_{23} = 2$, $x_{31} = 4$ এবং $x_{33} = 1$, $Z = 33$

   (b) $x_{12} = 10$, $x_{13} = 20$, $x_{15} = 10$, $x_{21} = 20$, $x_{31} = 5$, $x_{34} = 30$, $x_{35} = 5$, $Z = 3{,}600$

5. (a) আরোপ ঃ $P_1 \to J_1$, $P_2 \to J_2$, $P_3 \to J_3$ অবম মূল্য $Z = 50$.

   (b) $1 \to c$, $2 \to a$, $3 \to b$, $4 \to d$, অবম মূল্য $Z = 59$

6. আরোপ ঃ $A \to W$, $B \to X$, $C \to Y$

   অথবা ঃ$A \to W$, $B \to Y$, $C \to X$; অবম মূল্য = 50

7. $A \to I$, $B \to III$, $C \to II$, $D \to IV$, অবম মূল্য = 41

8. (a) $1 \to 3$, $2 \to 1$, $3 \to 2$ অবম মূল্য = 23

   (b) $1 \to 6$, $2 \to 1$, $3 \to 2$, $4 \to 5$, $5 \to 3$.
   $6 \to 4$ অবম মূল্য = 191.

   (c) $A \to C \to D \to B \to E \to A$; সবচেয়ে কম দূরত্ব = 30 কিমি।

   (d) $P \to R \to S \to Q \to P$; সবচেয়ে কম অতিক্রান্ত দূরত্ব = 98 কিমি।

তথ্যসূত্র

1. R.L. ACKOFF & M.W. SASIENI (1968)	FUNDAMENTALS OF OPERATIONS RESEARCH, JOHN WILE, & SONS
2. H.A. TAHA (1976)	OPERATIONS RESEARCH MACMILLAN PUBLISHING CO.
3. J.K. SHARMA (2003)	OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN INDIA LTD.
4. J.G. CHAKRABORTY P.R. GHOSH (2001)	LINEAR PROGRAMMING AND GAME THEORY, MOULIK LIBRARY.
5. N.S. KAMBO (1984)	MATHEMATICAL PROGRAMMING TECHNIQUES, APPILIATED EAST-WEST PRESS PRIVATE LTD.

একক 7 ☐ ক্রীড়াতত্ত্ব (Game Theory) ঃ প্রথম ভাগ

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

7.2 দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়া (Two-person Zero-sum game or Rectangular game)–মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স এবং ক্রীড়া কৌশল (Pay off mtraix and strategies of game)

7.3 বিশুদ্ধ ও মিশ্র কৌশল (pure and mixed strategies)

7.4 উত্তম কৌশল (optimal strategies) এবং ক্রীড়ার মান (value of the game)

7.5 মিনিম্যাক্স (ম্যাক্সিমিন) নীতি ও অশ্বোপবেশন বিন্দু (saddle point)

7.6 2×2 ক্রমের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক বিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যার বীজগাণিতিক সমাধান।

7.7 উদাহরণ

7.8 প্রাধান্য তত্ত্ব (rules of dominance) ব্যবহার করে ক্রীড়া সমস্যার সমাধান।

7.9 সারাংশ

7.10 অনুশীলনী

7.11 উত্তরমালা

7.1 প্রস্তাবানা

বাস্তবে আমরা অনেক সমস্যা পাই যেখানে দুই বা ততোধিক প্রতিপক্ষের মধ্যে প্রতিযোগিতা এবং দ্বন্দ্ব লক্ষ্য করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ দুই ব্যক্তির মধ্যে বা দুই দেশের মধ্যে বা দুই বাণিজ্যিক প্রতিষ্ঠানের মধ্যে এরূপ প্রতিযোগিতা লক্ষ্য করা যায়। এই ধরণের সমস্যাকে ক্রীড়া সমস্যা বলা হয় এবং ক্রীড়া তত্ত্বের বিষয় হল—আমাদের জানতে হবে প্রত্যেক পক্ষ তার প্রদত্ত কৌশলগুলি থেকে কোন্ কৌশল অনুসরণ করলে সেই পক্ষ (অন্যরা যে কৌশলই অবলম্বন করুক) সর্বাধিক লাভজনক অবস্থায় থাকতে পারে। বিষয়টি স্পষ্ট করার জন্য আমরা একটি সমস্যা উল্লেখ করি।

ধরা যাক A এবং B দুজন ব্যবসাদার কোনো দেশের কোনো বিশেষ অঞ্চলে ইলেক্ট্রনিক জিনিষের ক্রয়-বিক্রয়ের ব্যবসা করছে এবং ধরে নেওয়া যাক্ যে ঐ অঞ্চলে ইলেক্ট্রনিক জিনিসের ক্রয়-বিক্রয়ের অন্য কোনো ব্যবসাদার নাই।

এখানে A এবং B-কে খেলোয়াড় এবং ব্যবসাটিকে একটি ক্রীড়া বলা হবে। মনে করুন ব্যবসা নিয়ন্ত্রণ করার জন্য A ব্যবসাদারের তিনজন A_1, A_2, A_3 এবং B ব্যবসাদারের চারজন পরামর্শদাতা B_1, B_2, B_3, B_4, আছে। আমরা ধরে নেব যে প্রত্যেক খেলোয়াড় (এখানে ব্যবসাদার) ব্যবসা নিয়ন্ত্রণের জন্য তার নিজের পরামর্শদাতাদের থেকে এক সঙ্গে মাত্র একজনের সাহায্য গ্রহণ করবে। যেমন, A কেবলমাত্র A_3 এর সাহায্য নিতে পারে এবং B কেবলমাত্র B_1 এর সাহায্য নিতে পারে। এই পরামর্শমণ্ডলী নির্বাচন প্রত্যেক ব্যবসাদারের (খেলোয়াড়ের) সম্পূর্ণ নিজের ব্যাপার এবং অপর প্রতিপক্ষ ব্যবসাদারের (খেলোয়াড়ের) পরামর্শমণ্ডলীর নির্বাচন এর ওপর নির্ভর করে না মনে করুন, দুজন খেলোয়াড়ের নির্বাচিত কৌশলগুলি নিচে ছক্‌টিতে (যার ব্যাখ্যা পরে দেওয়া হয়েছে) দেওয়া আছে :

খেলোয়াড় B

		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	5	2	– 4	2
খেলোয়াড় A	A_2	0	– 3	3	7
	A_3	3	3	2	–1

এখানে মোট 12টি ছোট বর্গাকার ঘর আছে। এই ছক্ এর (1, 1) ঘরের প্রদত্ত সংখ্যা হল 5–এর অর্থ হল যে যদি খেলোয়াড় A, A_1 কৌশল গ্রহণ করে এবং B, B_1 কৌশল গ্রহণ করে তাহলে এই খেলায় (এখানে ব্যবসায়) A-এর 5 একক লাভ হবে এবং ফলে B-এর 5 একক লোকসান হবে অর্থাৎ আমরা বলতে পারি যে A, B যথাক্রমে A_1, B_1 কৌশল অবলম্বন করলে খেলোয়াড় A, খেলোয়াড় B-র কাছ থেকে 5 একক মূল্য পাবে। আবার (1,3) ঘরটি বিবেচনা করা যাক। এই প্রদত্ত সংখ্যা (– 4) যার অর্থ হল যে যদি A, A_1 কৌশল অবলম্বন করে এবং B, B_3 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে A-র – 4 একক লাভ হবে অর্থাৎ A-র 4 একক লোকসান হবে এবং B, A-র কাছ থেকে 4 একক মূল্য পাবে যা B-র লাভ।

এই ছক্ এর (2, 1) ঘরে আছে 0—যার অর্থ হল যে যদি A, A_2 কৌশল গ্রহণ করে এবং B, B_1 কৌশল গ্রহণ করে তাহলে A ও B উভয় খেলোয়াড়ের কোনো লাভ বা লোকসান কিছুই হবে না। অনুরূপভাবে ছক্‌টির বাকী যে-কোনো ঘরে প্রদত্ত সংখ্যার অর্থ পাওয়া যায়। এখানে খেলোয়াড় A (যার কৌশলগুলি সারণিতে দেখানো হয়েছে) কে চরম লাভকারী খেলোয়াড় বলা হবে এবং খেলোয়াড় B (যার কৌশলগুলি স্তম্ভে দেখানো

হয়েছে) অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় বলা হবে। এখানে উপরের ছক্‌টিকে চরম লাভকারী খেলোয়াড A-র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বলে। এই ছক্‌-এর প্রত্যেক যে ছক্‌ পাওয়া যায় তা হবে অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B-র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স।

ক্রীড়া তত্ত্বের সাহায্যে A ও B উভয় খেলোয়াড়ের শ্রেষ্ঠ কৌশল নির্ণয় করা যায় যাতে চরমলাভকারী খেলোয়াড় A-র নিশ্চিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী। 1928 খ্রিস্টাব্দে J. V. Neumann এই তত্ত্বের সূচনা করেন এবং পরে G. B. Dantzig দ্বারা এই তত্ত্ব সমৃদ্ধ হয়।

পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলিতে—"মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স", "ক্রীড়া কৌশল", "যোগ্যতম ক্রীড়া কৌশল", "ক্রীড়া সমস্যার মান" ইত্যাদি ধারণাগুলিকে পরিষ্কার করে বুঝিয়ে বলা হবে।

7.2 দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যা (Two-person zero sum game)—মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্স এবং ক্রীড়া কৌশল (Pay off matrix and strategies of a game)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে দুজন ব্যবসাদারের যে সমস্যা উল্লেখ করা হয়েছে সেক্ষেত্রে ব্যবসাটিকে একটি "ক্রীড়া" বলা হয়েছে। দুই বা ততোধিক প্রতিপক্ষের মধ্যে প্রতিযোগিতা এবং দ্বন্দ্ব আছে এমন যে-কোনো পরিস্থিতিকে আমরা "ক্রীড়া" বলব। এখানে প্রতিপক্ষকে "খেলোয়াড়" বলা হয়।

যে ক্রীড়ায় দুজন খেলোয়াড় থাকে এবং একজন খেলোয়াড়ের লাভ অপর খেলোয়াড়ের লোকসানের সমান সেই ক্রীড়াকে **"দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়া"** বলে।

এখানে প্রত্যেক খেলোয়াড়ের পূর্বনির্ধারিত কয়েকটি পরিকল্পনা থাকে যেখানে প্রত্যেক খেলোয়াড় তার পূর্বনির্ধারিত পরিকল্পনাগুলি থেকে এক সঙ্গে কেবলমাত্র একটি পরিকল্পনা গ্রহণ করবে। প্রত্যেক খেলোয়াড়ের এই পূর্বনির্ধারিত পরিকল্পনাগুলিকে সেই খেলোয়াড়ের "ক্রীড়া কৌশল" বলে। পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে উল্লিখিত দুজন ব্যবসাদারের সমস্যার ক্ষেত্রে A এবং B ব্যবসাদারদের (খেলোয়াড়দের) ক্রীড়া কৌশলগুলি হল যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 এবং B_1, B_2, B_3, B_4।

যদি কোনো ক্রীড়ায় প্রত্যেক খেলোয়াড়ের ক্রীড়া কৌশলের সংখ্যা সসীম হয় তাহলে ক্রীড়াটিকে সসীম বলা হবে নতুন ইহাকে অসীম ক্রীড়া বলা হবে।

আমরা ক্রীড়া বলতে **"দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট সসীম ক্রীড়া"** বুঝব।

মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্স (Pay off matrix) :

ধরা যাক কোনো ক্রীড়ায় A এবং B দুজন খেলোয়াড়। মনে করুন A-র প্রদত্ত ক্রীড়া কৌশলগুলি হল $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots A_m$ এবং B-র প্রদত্ত ক্রীড়া কৌশলগুলি হল $B_1, B_2 \ldots\ldots B_n$। তাহলে এখানে A-র m সংখ্যক কৌশল এবং B-র n সংখ্যক কৌশল প্রদত্ত আছে। মনে করুন যদি A, A_i কৌশল $(i = 1, 2, \ldots\ldots m)$ এবং B, B_j কৌশল $(j = 1, 2, \ldots\ldots n)$ নির্বাচন করে তাহলে A-কে B যে অর্থমূল্য দেয় তার পরিমাণ অর্থাৎ A, A_i কৌশল এবং B, B_j কৌশল নির্বাচন করলে A-র লাভের পরিমাণ a_{ij} এবং B-র লোকসানের পরিমাণ a_{ij}।

এক্ষেত্রে আমরা $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সটি পাই ঃ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

এই ম্যাট্রিক্সটিকে প্রদত্ত ক্রীড়ার একটি মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্স বলে এবং ক্রীড়াটিকে নিচের আকারে প্রকাশ করা হয়।

খেলোয়াড় B

		B_1	B_2	…………………	Bn
খেলোয়াড় A	A_1	a_{11}	a_{12}	…………………	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	…………………	a_{2n}
	.	……	……	…………………	……
	.	……	……	…………………	……
	A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

এখানে খেলোয়াড় A-কে বলা হবে চরম লাভকারী যার লক্ষ্য হবে এমন ভাবে কৌশল নির্বাচন করা যাতে

(খেলোয়াড় B যাই কৌশল্ নির্বাচন করুক না কেন) তার নিশ্চিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী হয় এবং খেলোয়াড় B-কে বলা হবে অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় যার লক্ষ্য হবে এমন কৌশল নির্বাচন করা (খেলোয়াড় A যে কৌশলই নির্বাচন করুক না কেন) যাতে তার লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম রাখা যায়।

এখানে $[a_{ij}]_{m \times n}$ ক্রীড়া বলা হবে। খেলোয়াড় A-র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বলে উল্লেখ করা হয় এবং ক্রীড়াটিকে একটি $m \times n$ ক্রীড়া বলা হবে। খেলোয়াড় B-র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হবে $[-a_{ij}]_{m \times n}$।

মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স এর একটি উদাহরণ দেওয়া যাক :

মনে করুন খেলোয়াড় A-র কৌশলগুলি A_1, A_2 , A_3, এবং B-র কৌশলগুলি হল B_1, B_2। কৌশল নির্বাচন অনুসারে দেয় অর্থমূল্যের পরিমাণ নিচে দেওয়া হল :

নির্বাচিত কৌশল	দেয় অর্থমূল্য
A : A_1 ; B : B_1	A-র কাছ B 3 টাকা পায়।
A : A_1 ; B : B_2	B-র কাছ থেকে A 2 টাকা পায়।
A : A_2 ; B : B_1	A-র কাছ থেকে B 4 টাকা পায়।
A : A_3 ; B : B_1	B-র কাছ থেকে A 5 টাকা পায়।
A : A_3 ; B : B_1	B-কাছ থেকে A 1 টাকা পায়।
A : A_3 ; B : B_2	A-র কাছ থেকে B 8 টাকা পায়।

উপরের তালিকা থেকে দেখা যাচ্ছে যে খেলোয়াড় A-র মূল্যসূচক ম্যাটিক্সটি হল—

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \end{array}$$

এবং খেলোয়াড় B-র মূল্যসূচক ম্যাক্সিক্স হল—

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \end{array}$$

7.3 বিশুদ্ধ ও মিশ্র কৌশল (Pure and Mixed strategies)

আমরা আগেই বলেছি যে কোনো প্রদত্ত ক্রীড়ার ক্ষেত্রে, ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে প্রত্যেক খেলোয়াড় তার প্রদত্ত কৌশলগুলি থেকে কেবলমাত্র একটি কৌশল নির্বাচন করে।

যদি ক্রীড়াটি প্রত্যেক সম্পাদনে কোন খেলোয়াড় একটি নির্দিষ্ট ক্রীড়া কৌশল নির্বাচন করে, তাহলে বলা হবে যে ঐ খেলোয়াড় বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করেছে এবং নির্দিষ্ট কৌশলটিকে একটি বিশুদ্ধ কৌশল বলা হবে।

যদি কোনো খেলোয়াড় ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে একটি নির্দিষ্ট কৌশল গ্রহণ না করে তার প্রদত্ত কৌশলগুলি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা (প্রতি কৌশল নির্বাচনের একই সম্ভাবনা নাও হতে পারে) নিয়ে নির্বাচন করে, তাহলে বলা হবে যে ঐ খেলোয়াড় মিশ্র কৌশল অবলম্বন করেছে। মিশ্র কৌশলের ধারণাটি আরও স্পষ্ট করে বলা যাক।

মনে করুন কোনো ক্রীড়ার ক্ষেত্রে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A-র প্রদত্ত কৌশলগুলি হল A_1, A_2, A_3। যদি খেলোয়াড় A মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে তাহলে ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে A_1, A_2, A_3 কৌশলগুলি থেকে নিরপেক্ষভাবে (at random) **কেবলমাত্র একটি কৌশল** নির্বাচন করে। যদি A_1, A_2, A_3 কৌশলগুলি নির্বাচন করার সম্ভাবনা যথাক্রমে p_1, p_2, p_3 হয় তাহলে $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_3 \geq 0$, এবং $p_1 + p_2 + p_3 = 1$।

যদি $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{6}$ হয় তাহলে আমরা বুঝব যে ক্রীড়াটি অনেকবার খেলা হয়েছে।

ধরা যাক 6000 বার ক্রীড়াটি সম্পাদন করলে A_1, A_2, A_3 কৌশল তিনটি যথাক্রমে প্রায় $6000 \times \frac{1}{2} = 3000, 6000 \times \frac{1}{3} = 2000, 6000 \times \frac{1}{6} = 1000$ বার নির্বাচন করা হয়।

এক্ষেত্রে খেলোয়াড় A যে মিশ্র কৌশল অনুসরণ করে তাকে $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ লিখে প্রকাশ করা হয়। যদি বিশেষ ক্ষেত্রে $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ হয় সে ক্ষেত্রে ক্রীড়াটির অনেকবার সম্পাদনে, খেলোয়াড় A প্রায় প্রত্যেকবার A_1 নির্বাচন করে এবং A_2, A_3 প্রায় কোন বারই নির্বাচন করে না—সুতরাং, এখানে বলা যায় যে খেলোয়াড় A-এর বিশুদ্ধ কৌশল A_1 অনুসরণ করে। অনুরূপভাবে $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$ অথবা $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$ হলে বলা যায় খেলোয়াড় A যথাক্রমে বিশুদ্ধ কৌশল A_2 অথবা বিশুদ্ধ কৌশল A_3 অনুসরণ করে।

তাহলে বিশুদ্ধ কৌশলকে বিশেষ ধরণের মিশ্র কৌশল বলা যেতে পারে।

মন্তব্য : অনেক সময় খেলোয়াড় A এবং খেলোয়াড় B-র প্রদত্ত কৌশলগুলিকে বিশুদ্ধ কৌশল বলে উল্লেখ করা হয়।

7.4 যোগ্যতম কৌশল (Optimal strategies) এবং ক্রীড়ার মান (Value of game)

এই অনুচ্ছেদে আমরা ধরে নেব যে প্রত্যেক খেলোয়াড় বিশুদ্ধ কৌশল অনুসরণ করে।

ধরা যাক কোনো ক্রীড়ার ক্ষেত্রে A হল চরম লাভকারী খেলোয়াড় এবং B হল অবম লোকসানকারী খেলোয়াড়।

যে কৌশল অবলম্বন করলে খেলোয়াড় A-র নিশ্চিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী, ধরা যাক ϑ (খেলোয়াড় B যে-কোনো কৌশল অবলম্বন করুক না কেন, খেলোয়াড় A-র লারে পরিমাণ কখনই ϑ অপেক্ষা কম হবে না), সেই কৌশলকে খেলোয়াড় A-র **শ্রেষ্ঠ কৌশল** বলা হবে। যে কৌশল অবলম্বন করলে খেলোয়াড় B-র লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম রাখা যায়, ধরাযাক ϑ (খেলোয়াড় A-র কোনো কৌশল অবলম্বনের দ্বারা এই লোকসানের পরিমাণ কখনই ϑ এর চেয়ে বেশী হবে না), সেই কৌশলকে খেলোয়াড় B-র শ্রেষ্ঠ কৌশল বলা হবে। এখানে মনে রাখা দরকার যে খেলোয়াড় B অন্য কোনো কৌশল অবলম্বন করলে, খেলোয়াড় A কোনো কৌশল অবলম্বনের দ্বারা B-এর লোকসানের পরিমাণ ϑ এর চেয়ে বেশী করে দিতে পারে।

যদি $\vartheta = \vartheta$ ($= \vartheta$ ধরা যাক) হয়, তাহলে ϑ কে ক্রীড়ার মান বলা হবে এবং এক্ষেত্রে খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B এর শ্রেষ্ঠ কৌশল কে যথাক্রমে A ও B যোগ্যতম কৌশল বলা হয়।

তাহলে আমরা বলতে পারি যে বিশুদ্ধ কৌশল অনুসরণের ক্ষেত্রে কোন ক্রীড়ার মান ϑ হলে, চরম লাভকারী খেলোয়াড় A-র নিশ্চিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী ϑ হবে এবং অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B-এর লোকসানের পরিমাণ কখনই ϑ এর চেয়ে বেশী হবে না যদি উভয় খেলোয়াড় **যোগ্যতম কৌশল** (optimal strategies) অবলম্বন করে।

একটি উদাহরণের সাহায্যে যোগ্যতম কৌশল এবং ক্রীড়ার মানের ধারণা স্পষ্ট করা যাক :

আমরা নিচের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি বিবেচনা করব।

		B		
		B_1	B_2	B_3
	A_1	18	5	6
A	A_2	9	8	10
	A_3	– 4	7	3

উপরের ছক্ থেকে দেখা যাচ্ছে যে (1, 1) ঘরের সংশ্লিষ্ট সংখ্যার পরিমাণ (18) সবচেয়ে বেশী—এর থেকে মনে হতে পারে যে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A যদি A_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে তার লাভ সবচেয়ে বেশী (18) হতে পারে। কিন্তু এই লাভের পরিমাণ নিশ্চিত নয় কারণ এক্ষেত্রে খেলোয়াড় B, B_2 বা B_3 কৌশল অবলম্বন করলে A-র লাভের পরিমাণ কমে 5 বা 6 হবে। আবার দেখা যাচ্ছে যে (3, 1) ঘরে প্রদত্ত সংখ্যার পরিমাণ (– 4) সবচেয়ে কম—এর থেকে মনে হতে পারে যে অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B যদি B_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে তার লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম (– 4) হতে পারে। কিন্তু এই লোকসানের পরিমাণ নিশ্চিত নয় কারণ খেলোয়াড় A, কৌশল A_1 বা কৌশল A_2 অবলম্বন করে B-র লোকসানের পরিমাণ বাড়িয়ে 18 বা 9 করতে পারে।

আমরা লক্ষ্য করছি যে যদি খেলোয়াড় A, কৌশল A_2 অবলম্বন করে তাহলে B যে কোনো কৌশলই অবলম্বন করুক না কেন A-র লাভ কমপক্ষে 8 একক হবেই অর্থাৎ A-র এই পরিমাণ লাভ (8 একক) নিশ্চিত। আরও দেখা যাচ্ছে যে A যদি অন্য কৌশল A_1 বা A_3 অবলম্বন করে তাহলে এই নিশ্চিত লাভের পরিমাণ কমে 5 বা – 4 হবে। সুতরাং খেলোয়াড় A যদি A_2 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে তার নিশ্চিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী (8 একক) হবে।

আবার দেখা যাচ্ছে যে যদি খেলোয়াড় B, কৌশল B_2 অবলম্বন করে তাহলে তার লোকসানের পরিমাণ কখনই 8 একক এর বেশী হবে না এবং খেলোয়াড় যদি অন্য কৌশল B_1 বা B_3 অবলম্বন করে তাহলে তার লোকসানের পরিমাণ 8 একক থেকে বেড়ে 18 একক বা 10 একক হতে পারে। সুতরাং যদি খেলোয়াড় B, কৌশল B_2 অবলম্বন করে তাহলে সে তার লোকসানের পরিমাণ 8 একক রাখতে পারবে এবং অন্য কোনো কৌশল অনুসরণ করে এর থেকে কম লোকসান নিশ্চিত করা যাবে না।

সুতরাং, এই ক্রীড়ার ক্ষেত্রে খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B এর যোগ্যতম কৌশলগুলি হল যথাক্রমে A_2 ও B_2 এবং ক্রীড়ার মান হবে 8 একক।

মন্তব্য : কোনো ক্রীড়া সমাধান করতে বললে বুঝতে হবে যে খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B এর যোগ্যতম কৌশল এবং ক্রীড়ার মান (যদি অস্তিত্ব স্বীকৃত হয়) নির্ণয় করতে হবে। পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা দেখব বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে কিভাবে যোগ্যতম কৌশল ও ক্রীড়ার মান নির্ণয় করা যায় এবং **আরও দেখব যে কেবলমাত্র বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে যে-কোনো ক্রীড়া সমস্যার সমাধান করা সম্ভব নয়।**

[8.2 অনুচ্ছেদ ব্যাপক অর্থে ক্রীড়ার মানের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে।

7.5 মিনিম্যাক্স (ম্যাক্সিমিন) নীতি ও অশ্বোপবেশন বিন্দু (Saddle point)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের আলোচনা থেকে বোঝা গেল যে বিশুদ্ধ কৌশলের সাহায্যে ক্রীড়া সমস্যার সমাধান করার অর্থ হল—প্রত্যেক খেলোয়াড়ের এমন কৌশল নির্বাচন করা যাতে প্রতিপক্ষ খেলোয়াড়ের কাছ থেকে তার নিশ্চিত পাওনার পরিমাণ সবচেয়ে বেশী হয় এবং যেখানে প্রতিপক্ষের কোনো কৌশল নির্বাচনের দ্বারা এই পাওনার পরিমাণ কমবে না।

কৌশল নির্বাচনের এই নীতিটিকে **মিনিম্যাক্স (ম্যাক্সিমিন)** নীতি বলা হয়।

এখন এই নীতিটি পরিস্কার ভাবে নিচে বিবৃত করা হল :

যদি কোনো খেলোয়াড় তার প্রদত্ত কৌশলগুলির ক্ষেত্রে প্রত্যেক কৌশলের জন্য তার অনুকূলে সবচেয়ে খারাপ ফল নিয়ে একটি তালিকা তৈরী করে তাহলে এই তালিকার ফলগুলির মধ্যে যেটি তার পক্ষে সবচেয়ে ভাল, সেই ফলটির অনুরূপ কৌশলটিকে ওই খেলোয়াড় যোগ্যতম কৌশল হিসেবে নির্বাচন করবে।

একটি উদাহরণ দিয়ে নীতিটি স্পষ্ট করা যাক :

মনে করুন কোনো ক্রীড়ার মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্সটি হল—

		B I	B II	B III
	I	− 3	− 2	6
A	II	2	0	2
	III	5	−2	− 4

এখানে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A-র ক্ষেত্রে I, II, III কৌশলগুলির জন্য সবচেয়ে খারাপ ফলগুলি সারি হল যথাক্রমে −3, 0, − 4।

এখন চরম $\{ -3, 0, -4 \} = 0$।

সুতরাং, 'চরম-অবম' নীতি অনুযায়ী A-এর II কৌশলটি নির্বাচন করা উচিত।

আবার অবমলোকসানকারী খেলোয়াড় B-র ক্ষেত্রে I, II, III কৌশলগুলির জন্য সবচেয়ে খারাপ ফলগুলি স্তম্ভগুলির যথাক্রমে চরম হল যথাক্রমে 5, 0, 6।

এখন অবম $\{ 5, 0, 6 \} = 0$।

সুতরাং 'অবম-চরম' নীতি অনুযায়ী, খেলোয়াড় B-র III কৌশল নির্বাচন করা উচিত। তাহলে ক্রীড়ার মানের

ধারণা (যা পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে দেওয়া হয়েছে) থেকে আমরা বলতে পারি যে এক্ষেত্রে ক্রীড়ার মান হবে 0 এবং **বিশুদ্ধ যোগ্যতম কৌশল** (pure strategy) হবে (II, II) যেখানে প্রথম বন্ধনীর মধ্যে প্রথমটি A-র এবং দ্বিতীয়টি B-র উত্তম কৌশল নির্দেশ করে।

এখন 'সারিগুলির অবম মানগুলিকে যথাক্রমে' বর্গাকার ঘর দ্বারা এবং স্তম্ভগুলির চরম মানগুলিকে যথাক্রমে বৃত্তাকার ঘর দ্বারা বন্ধ করলে আমরা নিচের ছক্‌টি পাই :

		I	II	III	সারির অবম মান
	I	[−3]	−2	(6)	−3
A	II	2	0	2	0
	III	(5)	− 2	[− 4]	− 4
স্তম্ভের চরম মান		5	0	6	

এই ক্রীড়ার ক্ষেত্রে—

চরম (সারির অবম মান) (স্তম্ভের চরম মান) = 0 = ক্রীড়ার মান।

মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের যে ঘরের জন্য চরম (সারি সমূহের অবম মান) = অবম (স্তম্ভের চরম মান) হয়, সেই টিকে ক্রীড়ার **অশ্বোপবেশন বিন্দু** বলে।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে কোনো ক্রীড়ার অশ্বোপবেশন বিন্দুর অস্তিত্ব থাকলে, এই বিন্দুতে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটির পদের মানটিই হবে **ক্রীড়ার মান**।

আরেকটি উদাহরণ দেওয়া যাক :

ধরুন মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হল

		B_1	B_2 (B)	B_3	সারির অবম মান
	A_1	− 2	15	− 2	− 2
A	A_2	− 5	− 6	− 4	− 6
	A_3	− 5	20	− 8	− 8
স্তম্ভের চরম মান		−2	20	− 2	

এখানে দেখা যাচ্ছে যে

চরম (সারির অবম মান) = অবম (স্তম্ভের চরম মান) = – 2

সুতরাং এখানে ক্রীড়ার মান = – 2

আরও লক্ষ্য করা যাচ্ছে যে এখানে মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্সটির (1, 1) এবং (1, 3) উভয় ঘরের পদটি –2,

সুতরাং এখানে উত্তম কৌশলগুলি হল (A_1, B_1), (A_1, B_3) এবং ক্রীড়ার মান – 2।

যে কোনো প্রদত্ত মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে অশ্বোপবেশন বিন্দুর সংজ্ঞা :

ধরা যাক কোনো ক্রীড়া সমস্যার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হল $[a_{ij}]_{m \times n}$।

যদি $[a_{ij}]_{m \times n}$ ম্যাট্রিক্সটির p-তম সারির সবচেয়ে ছোট পদ এবং q-তম স্তম্ভের সবচেয়ে বড়ো পদ উভয়ই a_{pq} হয় তাহলে $[a_{ij}]_{m \times n}$ ম্যাট্রিক্সটির (p, q) পদটিকে (যদি অস্তিত্ব থাকে) অশ্বোপবেশন বিন্দু (saddle point) বলা হয়।

যদি (p, q), $[a_{ij}]_{m \times n}$ ম্যাট্রিক্সটির অশ্বোপবেশন বিন্দু হয় তাহলে সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই

$$a_{pq} \leq a_{pj},\ j = 1, 2, \ldots\ldots n$$

এবং $a_{pq} \geq a_{iq},\ i = 1, 2, \ldots\ldots m.$

মন্তব্য : (1) কোনো ম্যাট্রিক্সের কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু না থাকতে পারে অথবা **এক** বা **একাধিক** অশ্বোপবেশন থাকতে পারে। একাধিক অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকলে প্রত্যেক বিন্দুতে ম্যাট্রিক্সের পদের মান একই হবে।

(2) $[a_{ij}]_{m \times n}$ ম্যাট্রিক্সটির i-তম সারির লঘিষ্ঠ পদটিকে লেখা যায়

অবম $\{a_{ij}, a_{ij} \ldots\ldots a_{in}\}$ $\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}$ 1 এখন i এর বিভিন্ন মানের জন্য ($i = 1, 2, \ldots\ldots$m) এই **লঘিষ্ঠ পদগুলির** মধ্যে **গরিষ্ঠ মানটিকে** লেখা যায়।

$$\underset{i}{\text{চরম}}\left(\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}\right)$$

অনুরূপভাবে বিভিন্ন স্তম্ভের গরিষ্ঠ পদগুলির লঘিষ্ঠ পদটিকে $\underset{j}{\text{অবম}}\left(\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}\right)$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

অশ্বোপবেশন বিন্দুর অস্তিত্বের সঙ্গে সম্পর্কিত কয়েকটি উপপাদ্য :

উপপাদ্য 1. কোনো ক্রীড়া সমস্যার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি $[a_{ij}]_{m \times n}$ হলে,

$$\boxed{\underset{i}{\text{চরম}}\left(\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}\right) \leq \underset{j}{\text{অবম}}\left(\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}\right)}$$

প্রমাণ : মনে করুন $\underset{i}{\text{চরম}}\left(\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}\right) = a_{pq}$ এবং $\underset{j}{\text{অবম}}\left(\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}\right)$

তাহলে a_{pq} হল p-তম সারির লঘিষ্ঠ উপাদান এবং ars হল s-তম স্তম্ভের গরিষ্ঠ উপাদান।

সুতরাং আমরা বলতে পারি a_{pq} সংখ্যাটি p-তম সারির প্রত্যেক উপাদানের অপেক্ষা কম বা সমান ($\leq$) এবং তাহলে আমরা পাই $a_{pq} \leq \; a_{ps}$ (কারণ a_{ps} হল p-তম সারির একটি পদ)।

পুনরায় a_{rs} সংখ্যাটি s-তম স্তম্ভের প্রত্যেক উপাদানের অপেক্ষা বেশী বা সমান ($\geq$) এবং তাহলে আমরা পাই $a_{rs} \geq a_{ps}$.

$\therefore \; a_{pq} \leq a_{ps} \leq a_{rs}$

এর থেকে আমরা পাই

$a_{pq} \leq a_{rs}$

সুতরাং প্রমাণিত হল যে

$$\underset{i}{\text{চরম}}\left(\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}\right) \leq \underset{j}{\text{অবম}}\left(\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}\right)$$

উপপাদ্য 2. $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ ম্যাট্রিক্সটি কোন ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স হলে, ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দুর অস্তিত্ব থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\underset{i}{\text{চরম}}\left[\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}\right] = \underset{j}{\text{অবম}}\left[\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}\right]$

প্রমাণ : মনে করুন $(p,\ q)$ অবস্থানটি প্রদত্ত ক্রীড়ার একটি অশ্বোপবেশন বিন্দু।

তাহলে আমরা পাই—

$a_{ij} \;\; \geq \; a_{iq} \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots \;\; m \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots.\ (1)$

এবং $a_{pq} \; \leq \;\; a_{pj} \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots\ n \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots.\ (2)$

এখন (1) থেকে বলা যায় $\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{iq} \leq a_{pq}$ এবং (2) থেকে বলা যায় $\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{pj} \leq a_{pq}$ তাহলে আমরা পাই $\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij} \leq a_{pq} \leq \underset{j}{\text{অবম}}\, a_{pi}$

এখন $\underset{j}{\text{অবম}}\ \underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij} \leq \underset{i}{\text{চরম}}\, a_{iq}$ এবং $\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{pj} \leq \underset{i}{\text{চরম}}\, a_{iq}\ \underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}$

সুতরাং $\underset{j}{\text{অবম}}\ \underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij} \leq \underset{i}{\text{চরম}}\, a_{iq} \leq a_{pq} \leq \underset{j}{\text{অবম}}\, a_{pj} \leq \underset{i}{\text{চরম}}\ \underset{j}{\text{চরম}}\, a_{ij}$

$\therefore \quad \underset{j}{\text{অবম}}\,\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij} \le \underset{i}{\text{চরম}}\,\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}$ .... (3)

পুনরায় উপপাদ্য 1 থেকে আমরা পাই— $\underset{i}{\text{চরম}}\,\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij} \le \underset{j}{\text{অবম}}\,\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}$ .... (4)

এখন (3) ও (4) থেকে প্রমাণিত হল— $\underset{i}{\text{চরম}}\left[\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}\right] = \underset{i}{\text{অবম}}\left[\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}\right]$

এখন মনে করুন $\underset{i}{\text{চরম}}\left[\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}\right] = \underset{j}{\text{অবম}}\left[\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}\right]$ .... (5)

ধরা যাক $\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}$ এর মান সবচেয়ে বেশী হয় যখন $i = p$।

তাহলে, $\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{pj} = \underset{i}{\text{চরম}}\left[\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}\right]$ .... (6)

আবার ধরা যাক $\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}$ এর মান সবচেয়ে কম হয় যখন $j = q$।

তাহলে, $\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{iq} = \underset{j}{\text{অবম}}\left[\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}\right]$ .... (7)

এখন (5), (6) ও (7) থেকে আমরা পাই— $\underset{j}{\text{অবম}}\ a_{pi} = \underset{i}{\text{চরম}}\, a_{iq}$ .... (8)

আবার $\underset{j}{\text{অবম}}\ a_{iq} \ge a_{pq}$ .... (8a)

সুতরাং (8) থেকে আমরা পাই—

$\underset{j}{\text{অবম}}\ a_{pi} \ge a_{pq}$ যা থেকে বলা যায়, $a_{pq} \ge a_{iq}, i, 2, \ldots\ldots m$ .... (9)

আবার $\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{iq} \ge a_{pq}$ .... (8b)

সুতরাং (8) থেকে আমরা পাই—

$\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{pj} \ge a_{pq}$ যা থেকে বলা যায় $a_{pq} \le a_{pj}$, $j = 1, 2, \ldots n$ .... (10)

এখন (9) ও (10) থেকে আমরা বলতে পারি যে (p, q) অবস্থানটি ক্রীড়াটির একটি অশ্বোপবেশন বিন্দু হবে।

সুতরাং, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

মন্তব্য : (i) যদি (p, q) অবস্থানটি $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সবিশিষ্ট ক্রীড়ার অশ্বোপবেশন বিন্দু হয় তহলে (5), (8), (8a), (8b) থেকে আমরা বলতে পারি যে ক্রীড়ার মান হবে a_{pq} যেখানে $a_{pq} = \underset{i}{\text{চরম}}\left[\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}\right] = \underset{j}{\text{অবম}}\left[\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}\right]$ এবং এক্ষেত্রে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A ও অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B-এর যোগ্যতম কৌশল হবে যথাক্রমে বিশুদ্ধ কৌশল A_p ও বিশুদ্ধ কৌশল B_q।

(ii) যদি ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দু পাওয়া না যায় তাহলে কেবলমাত্র বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে ক্রীড়ার মান নির্ণয় করা যাবে না।

(iii) একক 8 তে ব্যাপক অর্থে ক্রীড়ার মানের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে এবং যে কোনো "দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট" ক্রীড়ার ক্ষেত্রে ক্রীড়ার মানের অস্তিত্ব প্রমাণ করা হয়েছে। ক্রীড়ার মান

ϑ হলে যে-কোনো ক্রীড়ার ক্ষেত্রে আমরা পাই $\underset{i}{\text{চরম}}\,\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij} \le \gamma\, \underset{j}{\text{অবম}}\,\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}$

এখানে $\underset{i}{\text{চরম}}\,\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}$ এবং $\underset{j}{\text{অবম}}\,\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}$-এর মানকে যথাক্রমে $\underline{\vartheta}$ এবং $\overline{\vartheta}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

তাহলে $\underline{\vartheta} \le \vartheta \le \overline{\vartheta}$

ক্রীড়াটিকে যথার্থ নির্দ্ধারণযোগ্য বলা হবে যদি $\overline{\vartheta} = \vartheta = \underline{\vartheta}$ হয়। যদি $\underline{\vartheta} \ne \overline{\vartheta}$ হয় তাহলে বলা হবে ক্রীড়াটি যথার্থ নির্দ্ধারণযোগ্য নয়।

উদাহরণ : দুজন খেলোয়াড় A এবং B এর মধ্যে কোন তাসের খেলায় প্রত্যেকের কাছে 2টি লাল তাস এবং একটি কালো তাস আছে। লাল তাসগুলিকে $1r$, $2r$, $3r$............. ইত্যাদি লিখে এবং কালো তাসগুলিকে 1b, 2b, 3b .... ইত্যাদি লিখে প্রকাশ করা হয়।

যে লাল তাসের উপর লিখিত সংখ্যা x তাকে xr লিখে এবং যে কালো তাসের উপর লিখিত সংখ্যা x তাকে $x\ b$ লিখে প্রকাশ করা হয়েছে।]

এখানে খেলোয়াড় A-র কাছে $8r$, $6r$ ও $2b$ এই তিনটি তাস আছে এবং খেলোয়াড় B এর কাছে যথাক্রমে $5r$, $3r$ এবং $8b$ তাসগুলি আছে।

দুজন খেলোয়াড় একসঙ্গে পরস্পরকে একটি করে তাস দেখায়। খেলার শর্ত অনুযায়ী যদি তাসের রঙ মিলে যায় তাহলে খেলোয়াড় B-এর কাছ থেকে B-র তাসের সংখ্যার সমান মূল্য A পাবে এবং যদি তাসের

রঙ না মেলে তাহলে খেলোয়াড় A-র কাছ থেকে B-এর তাসের সংখ্যার সমান মূল্য B পাবে। এই ক্রীড়াটির মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি লিখুন এবং দেখান ক্রীড়াটি যথার্থ নির্দ্ধারণযোগ্য হবে না।

সমাধান : খেলার শর্ত অনুসারে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হবে—

		B			
		$5r$	$3r$	$8b$	সারির অবমমান
	$8r$	5	3	– 8	– 8
A	$6r$	5	3	– 8	– 8
	$2b$	– 5	– 3	8	– 5
স্তম্ভের চরম মান		5	3	8	

ব্যাখ্যা : যদি দুটি তাস A-র $8r$ এবং B-র $3r$ হয় তাহলে দুটি তাসের রঙ লাল এবং শর্তানুসারে B-এর কাছে থেকে A 3 একক মূল্য পাবে। সুতরাং খোলোয়াড় A-এর মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের $(2b, 3r)$ ঘরের পদটি – 3 হবে।

অনুরূপভাবে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের অন্য পদগুলি নির্ণয় কার হয়েছে।

এখানে চরম (সারির অবম মানসমূহ) = চরম { – 8, – 8, – 5} = – 5

এবং অবম (স্তম্ভের চরম মানসমূহ) = অবম { 5, 3, 8} = 3

সুতরাং এখানে $\underline{\vartheta} = \underset{i}{\text{চরম}}\left(\underset{j}{\text{অবম}}\ a_{ij}\right)$

$= \text{চরম (সারির অবম মানসমূহ)} = -5$

এবং $\overline{\vartheta} = \underset{j}{\text{অবম}}\left(\underset{i}{\text{চরম}}\ a_{ij}\right)$

$= \text{অবম (স্তম্ভের চরম মানসমূহ)} = 3.$

সুতরাং এখানে $\underline{\vartheta} \neq \overline{\vartheta}$ ।

∴ ক্রীড়াটি যথার্থ নির্দ্ধারণযোগ্য হবে না।

উদাহরণ 2 দেখান যে x-এর যেকোনো মানের জন্য নিচের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক বিশিষ্ট ক্রীড়াটি যথার্থ নির্দ্ধারণযোগ্য হবে।

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	4	6
	A_2	2	x

সমাধান : x এর মান উপেক্ষা করে সারির অবম মান এবং স্তম্ভের চরম মান নির্ণয় করার জন্য আমরা নিচের ছকটি পাই—

		B		
		B_1	B_2	সারির অবমমান
A	A_1	4	6	4
	A_2	2	x	2
স্তম্ভের চরমমান		4	6	

এখানে চরম (সারির অবমমান) = চরম $\{4, 2\}$ = 4 এবং অবম (স্তম্ভের চরম মান) = অবম $\{4, 6\} = 4$.

এবং অবম (স্তম্ভের চরম মান) = অবম $\{4, 6\} = 4$.

তাহলে আমরা বলতে পারি যে x-এর মান যাই হোক, এখানে $\underline{\vartheta} = 4$, $\overline{\vartheta} = 4$

সুতরাং ক্রীড়াটি যথার্থ নিদ্ধারর্ণযোগ্য এবং ক্রীড়াটির মান 4।

উদাহরণ 3

a-র যে সকলমানের জন্য নিচের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক বিশিষ্ট ক্রীড়াটি যথার্থ নিদ্ধারর্ণযোগ্য হবে তা দেখান।

$$\begin{array}{ccc} & & \quad B \\ & & B_1 \quad B_2 \quad B_3 \\ \mathrm{A} & \begin{array}{c} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{A}_3 \end{array} & \begin{bmatrix} a & 6 & 2 \\ -1 & a & -7 \\ -2 & 4 & a \end{bmatrix} \end{array}$$

সমাধান : a-এর মান উপেক্ষা করে সারির অবমমান এবং স্তম্ভের চরমমান নির্ণয় করার জন্য আমরা নিচের ছক্‌টি পাই।

		B_1	B_2	B_3	সারির অবমমান
	A_1	a	6	2	2
A	A_2	− 1	a	− 7	− 7
	A_3	− 2	4	a	− 2
স্তম্ভের চরমমান		−1	6	2	

(স্তম্ভ শিরোনাম: B)

এখানে চরম $\{ 2, -7, -2\} = 2$

এবং অবম $\{-1, 6, 2\} = -1$

অর্থাৎ এখানে a-র মান উপেক্ষা করলে $\underline{\vartheta} = 2$ এবং $\underline{\vartheta} = -1$ হয়।

কিন্তু যে কোনো ক্রীড়ার ক্ষেত্রে $\underline{\vartheta} \leq \overline{\vartheta}$ হয়। তাহলে যদি $-1 \leq a \leq 2$ হয় প্রদত্ত ক্রীড়ার ক্ষেত্রে আমরা পাই $\underline{\vartheta}$ = চরম $\{a, -7, -2\} = a$ এবং $\overline{\vartheta}$ = অবম $\{a, 6, 2\}$ a.

সুতরাং যদি $-1 \leq a \leq 2$ হয়, ক্রীড়াটি যথার্থ নির্দ্ধারণযোগ্য হবে এবং ক্রীড়ার মান = $\underline{\vartheta}$ = $\overline{\vartheta}$ = a।

আমরা লক্ষ্য করছি যে যদি $a < -1$ বা $a > 2$ হয় তাহলে ক্রীড়াটি যথার্থ নির্দ্ধারণযোগ্য হবে না। যেমন যদি $a = 3$ হয়। আমরা পাই

$\underline{\vartheta}$ = চরম (সারির অবমমান) = চরম $\{2, -7, -2\} = 2$

এবং $\underline{\vartheta}$ = অবম (স্তম্ভের চরমমান) = চরম $\{e, 6, 3\} = 3$।

সুতরাং $a = 3$ হলে $\underline{\vartheta} \neq \overline{\vartheta}$ ।

উদাহরণ 4

দেখান যে নিচের ক্রীড়াটির দুটি অশ্বোপবেশন বিন্দু আছে। ক্রীড়ার মান এবং যোগ্যতম কৌশল নির্ণয় করুন।

		B_1	B_2	B_3
	A_1	1	2	1
A	A_2	0	− 4	− 1
	A_3	1	3	− 2

(স্তম্ভ শিরোনাম: B)

সমাধান :

		B_1	B_2	B_3	সারির অবমমান
	A_1	⓵ (1)	2	⓵ (1)	1
A	A_2	0	[– 4]	– 4	–4
	A_3	①	③	[– 2]	–2
স্তম্ভের চরমমান		1	3	1	

উপরের ছক্ থেকে দেখা যাচ্ছে যে

(1,1) এবং (1,3) এই দুটি ঘরে মূল্যসূচক ম্যাট্রিকটির অশ্বোপবেশন বিন্দু আছে।

এখানে চরম (সারির অবমমান) = চরম $\{1, -4, -2\} = 1$

এবং অবম (স্তম্ভের চরমমান) = অবম $\{1, 3. 1\} = 1$

সুতরাং ক্রীড়ার মান $\vartheta = 1$ এবং যোগ্যতম কৌশলগুলি এবং (A_1, B_1), (A_1, B_3)।

2×2 ক্রমের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যার সমাধান [বীজগাণিতিক পদ্ধতি]

ধরা যাক মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হল

A :	B_1	B_2
A_1	a	b
A_2	c	d

যদি ম্যাট্রিক্সটির অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকে তাহলে আমরা 7·4 অনুচ্ছেদে দেখেছি যে বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে ক্রীড়া সমস্যাটি সমাধান করা যায় অর্থাৎ ক্রীড়ার মান ও যোগ্যতম কৌশল নির্ণয় করা যায়।

এখন ধরুন মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটির **অশ্বোপবেশন বিন্দু নেই**। এক্ষেত্রে আমরা দেখব কিভাবে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে ক্রীড়াটির মান এবং যোগ্যতম কৌশল নির্ণয় করা যায়।

খেলোয়াড় A-র মিশ্র কৌশল অবলম্বন করার অর্থ হল যে ক্রীড়াটির যেকোনো সম্পাদনে A_1, A_2 কৌশলগুলির মধ্যে একটি কৌশল নিরপেক্ষভাবে নির্বাচন করা এবং মিশ্র কৌশল নির্ণয় করার অর্থ হল যে A_1, A_2 কৌশলগুলির নির্বাচনের সম্ভাবনা ধরা যাক x_1, x_2 ($0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$) এর মান নির্ণয় করা। এখন যেহেতু A_1, A_2 কখনই একই সঙ্গে নির্বাচন করা হয় না এবং একটি কৌশল অবশ্যই নির্বাচন করা হবে আমরা পাই $x_1 + x_2 = 1$.

তাহলে A_1, A_2 কৌশলগুলি নির্বাচনের সম্ভাবনা যথাক্রমে ধরা যায় x, $1-x$ যেখানে $0 \le x \le 1$

অনুরূপভাবে খেলোয়াড় B-র মিশ্র কৌশল নির্ণয় করার অর্থ হল B_1, B_2 কৌশলগুলি নির্বাচনের সম্ভাবনা, ধরা যাক y, $1 - y$ ($0 \le y \le 1$) এর মান নির্ণয় করা।

প্রথমে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A-র দিক থেকে সমস্যাটি বিবেচনা করা যাক।

যদি খেলোয়াড় B, B_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে A-র প্রত্যাশিত লাভ হবে $ax + c\ (1 - x) = g_1$ (মনে করুন) এবং যদি খেলোয়াড় B, B_2 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে A-র প্রত্যাশিত লাভ হবে $bx + d\ (1 - x) = g_2$ (মনে করুন)।

এখন ধরুন অবম $\{g_1,\ g_2\} = g'$।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B যে কৌশলই অনুসরণ করুক না কেন, A-র নিশ্চিত প্রত্যাশিত লাভের পরিমাণ হবে g' যখন A_1 কৌশলটি x সম্ভাবনা নিয়ে A নির্বাচন করে। এখন A-র উদ্দেশ্য হল x-এর মান নির্ণয় করা যাতে g'-এর মান সবচেয়ে বেশী হয়।

এখানে $g_1 \ge g', \quad g_2 \ge g'$ ....(1)

এবার অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B-র দিক থেকে সমস্যাটি বিবেচনা করা যাক।

যদি খেলোয়াড় A, A_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে B-র প্রত্যাশিত লোকসান হবে $ay + b\ (1 - y) = l_1$ (মনে করুন)। যদি খেলোয়াড় A, A_2 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে B-র প্রত্যাশিত লোকসান হবে $cy + d\ (1 - \mathrm{y}) = l_2$ (মনে করুন)। এখন মনে করুন চরম $\{l_1,\ l_2\} = l'$।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A যে কৌশলই নির্বাচন করুক না কেন, B-র প্রত্যাশিত লোকসানের পরিমাণ কখনই l' এর বেশী হবে না যখন B_1 কৌশলটি y সম্ভাবনা নিয়ে B নির্বাচন করে। এখন B-এর উদ্দেশ্য হল y-এর মান নির্ণয় করা যাতে l'-এর মান সবচেয়ে কম হয়।

এখানে $l_1 \le l',\ l_2 \le l'$ ....(2)

এখন (1) ও (2) থেকে আমরা পাই $ax + c(1 - x) \ge g',\ bx + d(1 - x) \ge g'$ এবং $ay + b(1 - y) \le l', \quad cy + d(1 - y) \le l'$

আমরা লক্ষ্য করছি যে যদি $x,\ y\ (0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1)$ এর মান নির্ণয় করা যায় যাতে $l_1 = l_2 = l'$ এবং $g_1 = g_2 = g'$ হয় তাহলে এরূপ মানের জন্য $(g')_{\text{চরম}} = (l')_{\text{অবম}} = \vartheta$ (মনে করুন) হবে এবং এক্ষেত্রে ক্রীড়ার মান [8·2 অনুচ্ছেদে ব্যাপক অর্থে ক্রীড়ার মানের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে]

ϑ হবে এবং $x,\ y$ এর মান থেকে উভয় খেলোয়াড়ের যোগ্যতম কৌশল নির্ণয় করা যাবে।

এখন প্রদত্ত ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দু না থাকায় a, b, c, d এর মান এরূপ হবে যাতে যেকোনো ক্ষেত্রে $g_1 = g_2$, $l_1 = l_2$ সমীকরণ দুটি x, y এর জন্য ($0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$) সমাধান করা যাবে এবং সমাধান করে x, y, এর যে মান পাওয়া যাবে সেই মানগুলির জন্য $g_1 = g_2 = l_1 = l_2 = \upsilon$ হবে যেখানে υ হল ক্রীড়ার মান।

এক্ষেত্রে আমরা পাই

$$x = \frac{d-c}{a+d-b-c}, \qquad y = \frac{d-b}{a+b-b-c}$$

এবং $\upsilon = \dfrac{ad-bc}{a+b-b-c}$

সুতরাং মিশ্র কৌশল ব্যবহার করে প্রদত্ত 2×2 ক্রীড়াটি (যার অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই) সমাধান করা যাবে।

ক্রীড়াটির সমাধানের এই পদ্ধতিকে বীজগাণিতিক পদ্ধতি বলা হয়।

মন্তব্য : যদি 2×2 ক্রমের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের **অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকে** তাহলে বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে ক্রীড়াটির সমাধান সম্ভব হতেও পারে আবার নাও পারে। আমরা দুটি উদাহরণ দিয়ে বিষয়টি স্পষ্ট করব।

উদাহরণ (i) ধরুন মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হল

		B		
		B_1	B_2	সারির অবমমান
A :	A_1	0	6	0
	A_2	2	2	2
স্তম্ভের চরমমান		2	6	

এখানে (2, 1) ঘরে অশ্বোপবেশন বিন্দু আছে এবং এই ঘরে পদের মান 2। সুতরাং ক্রীড়াটির মান 2 এবং যোগ্যতম কৌশল হল (A_2, B_1)।

এখন এই ক্রীড়াটি বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান করার চেষ্টা করলে আমরা পাই

$$0.\ x + 2\ (1-x) = 6.x + 2(1-x) \qquad ...(1)$$

$$0.\ y + 6.\ (1+y) = 2y + 2(1-y) \qquad ...(2)$$

যেখানে $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ এবং x ও y যথাক্রমে A-র A_1 কৌশল নির্বাচনের সম্ভাবনা এবং B-র B_1 কৌশল নির্বাচনের সম্ভাবনা।

(1) থেকে আমরা পাই $8x = 0$, বা $x = 0$

এবং (2) থেকে পাই $y = \dfrac{2}{3}$

এখানে $x = 0,\ y = \frac{2}{3}$ সমাধানটি গ্রহণ করা যাবে কারণ $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ সিদ্ধ হয়।

আমরা লক্ষ্য করছি এই পদ্ধতিতেও ক্রীড়ার মান $= 6{\cdot}0 + 2\ (1 - 0) = 2$।

এখন $x = 0$ থেকে বলা যায় A-র যোগ্যতম কৌশল হল বিশুদ্ধ কৌশল A_2 ।

আবার $y = \frac{2}{3}$ থেকে বলা যায় B-র যোগ্যতম কৌশল হল মিশ্র কৌশল $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$।

এই উদাহরণ থেকে বোঝা গেল যে কোন প্রদত্ত ক্রীড়ার ক্ষেত্রে ক্রীড়ার মান সর্বদা একই হবে কিন্তু যোগ্যতম কৌশল উভয় খেলোয়াড়েরই বিশুদ্ধ কৌশল হতে পারে (যা অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকলে হয়) এবং একই ক্রীড়ার ক্ষেত্রে একজন খেলোয়াড়ের বিশুদ্ধ কৌশল ও অন্য খেলোয়াড়ের মিশ্র কৌশল যোগ্যতম হতে পারে।

উদাহরণ (ii) ধরুন মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হল

	B: B_1	B_2	অবম সারির মান
A : A_1	8	6	6
A_2	2	2	2
স্তম্ভের চরম মান	8	6	

এখানে (1, 2) বিন্দুতে অশ্বোপবেশন বিন্দু আছে। মিনিম্যাক্স (ম্যাক্সিমিন) নীতি অনুসারে ক্রীড়ার মান = চরম (সারির অবমমান) = অবম (স্তম্ভের চরমমান) = 6 এবং যোগ্যতম কৌশল হল বিশুদ্ধ কৌশল (A_1, B_2)।

এখন এই ক্রীড়াটি বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান করার চেষ্টা করলে আমরা পাই

$$8.\ y + 2.\ (1 - x) = 6.\ x + 2.\ (1 - x) \qquad \ldots(1)$$

$$8.\ y + 6\ (1 - y) = 2y + 2.\ (1 + y) \qquad \ldots(2)$$

যেখানে $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$.

(1) থেকে আমরা পাই $x = 0$ এবং

(2) থেকে পাই $2y + 6 = 2$।

এখন $2y + 6 = 2$ থেকে আমরা পাই

$y = -2$ যা সম্ভব নয় কারণ $0 \le y \le 1$।

সুতরাং 7·6 অনুচ্ছেদে বিবৃত বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে ক্রীড়াটি সমাধান করা গেল না।

[এক্ষেত্রে $ax + c(1-x) = \vartheta$, $bx + d(1-x) = \vartheta$, $ay + b(1-y) = \vartheta$, $cy + d(1-y) = \vartheta$

সমীকরণগুলির এক বা একাধিক ($g' = l' = \vartheta$) সমীকরণকে যথার্থ অসমীকরণ (> বা <) ধরে প্রচেষ্টা ও ভুল সংশোধন পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করা যায়—এখানে আমরা পদ্ধতিটি আলোচনা করব না।]

7.7 উদাহরণ

নিচের 2×2 ক্রীড়াটি সমাধান করুন :

		B: B_1	B_2
A :	A_1	5	1
	A_2	3	4

সমাধান : এখানে চরম (সারির অবম মান)

= চরম $\{1, 3\} = 3$

এবং অবম (স্তম্ভের চরম মান)

= অবম $\{5, 4\} = 5$

সুতরাং চরম (সারির অবম মান) $\neq$ অবম (স্তম্ভের চরম মান)

তাহলে ক্রীড়াটির কোন **অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।**

সুতরাং বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে ক্রীড়াটি সমাধান করা যাবে।

মনে করুন খেলোয়াড় A যথাক্রমে x, $1-x$ সম্ভাবনা নিয়ে A_1, A_2 নির্বাচন করে এবং খেলোয়াড় B যথাক্রমে y, $1-y$ সম্ভাবনা নিয়ে B_1, B_2 নির্বাচন করে,

যেখানে $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

এখন খেলোয়াড় A-র উদ্দেশ্য হল x-এর এমন মান ঠিক করা যাতে অবম $\{g_1, g_2\} = g'$ (ধরুন) এর মান সবচেয়ে বেশী হয়, যেখানে $g_1 = 5x + 3(1-x)$ হলে A-র প্রত্যাশিত লাভ যখন B, B_1 কৌশল গ্রহণ করে এবং $g_2 = 1.x + 4(1-x)$ হল A-র প্রত্যাশিত লাভ যখন B, B_2 কৌশল গ্রহণ করে। তাহলে আমরা পাই

$$g_1 = 5x + 3(1-x) \geq g'$$
$$g_2 = x + 4(1-x) \geq g'$$

অনুরূপে খেলোয়াড় B-র উদ্দেশ্য থেকে আমরা পাই

$l_1 = 5y + 1(1-y) \geq l'$

$l_2 = 3y + 4(1-y) \geq l'$, যেখানে y-এর মান এমনভাবে ঠিক করতে হবে

যাতে l' = চরম $\{l_1, l_2\}$ এর মান সবচেয়ে কম হয়।

এখন $g_1 = g_2 = g'$, $\quad l_1 = l_2 = l'$ থেকে আমরা পাই

$5x + 3(1 - x) = x + 4(1 - x)$,

$5x + 1(1 - y) = 3y + 4(1 - y)$

বা, $5x = 1, \quad 5y = 3$

সুতরাং $x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{3}{5}$ যেখানে

$$0 < \frac{1}{5} < 1, \quad 0 < \frac{3}{5} < 1$$

তাহলে $x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{3}{5}$ মানের জন্য g'-এর মান সবচেয়ে বেশী এবং l'-এর মান সবচেয়ে কম হবে।

এবং $(g')_{\text{চরম}} = 5.\frac{1}{5} + 3.\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{17}{5},$,

$$(l')_{\text{অবম}} = 5.\frac{3}{5} + 1.\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$$

অতএব $x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{3}{5}$ মানের জন্য g'-এর মান সবচেয়ে বেশী হবে এবং l'-এর মান সবচেয়ে কম হবে এবং $(g')_{\text{চরম}} = (l')_{\text{অবম}} = \frac{17}{5}$.

সুতরাং ক্রীড়ার মান $\frac{17}{5}$ এবং যোগ্যতম কৌশলগুলি হল $A: \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right); \quad B: \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$

7.8 প্রাধান্য তত্ত্ব (rules of dominance) ব্যাবহার করে ক্রীড়া সমস্যার সমাধান

ক্রীড়া সমস্যায় ধরা যাক, খেলোয়াড় A দুটি কৌশল A_1, A_2 অবলম্বন করতে পারে। এমন কৌশল A_1 নির্বাচন করলে প্রতিপক্ষ B যে কৌশলই অবলম্বন করুক না কেন, A এর লাভ, A_2 নির্বাচনের লাভ থেকে বেশী বা সমান হবে, যদি B এর কৌশল অপরিবর্তিত থাকে। এক্ষেত্রে বলা হয় 'A' কৌশলটি A_2-এর চেয়ে বেশী গুরুত্বপূর্ণ। প্রদত্ত মূল্যসূচক ম্যাট্রিক (মনে করুন M) থেকে কৌশল A_2 এর সারি (বা স্তম্ভ) বাদ দেওয়া যায়।

এইভাবে সারি (বা স্তম্ভ) বাদ দিলে যদি নতুন মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি M_1 হয় তাহলে M_1 এর যোগ্যতম কৌশল গুলি মধ্যে থেকে প্রারম্ভিক ম্যাট্রিক্স M এর যোগ্যতম কৌশলগুলি পাওয়া যাবে যেখানে বাদ দেওয়া কৌশলটির সম্ভাবনা শূন্য ধরতে হবে।

নিচে বিবৃত উপপাদ্যগুলি (প্রমান দেওয়া হল না) থেকে প্রাধান্য তত্ত্বের বিয়মগুলি স্পষ্টভাবে বোঝা যাবে।

উপপাদ্য 1 ঃ যদি কোনো $m \times n$ ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের i তম সারির প্রত্যেক পদ r তম সারির অনুরূপ পদের চেয়ে কম বা সমান হয় তা হলে i তম সারি বাদ দিলে চরম লাভকারী খেলোয়াড়ের যোগ্যতম কৌশলগুলির কোন পরিবর্তন হবে না।

[এক্ষেত্রে r তম সারির ক্রীড়া কৌশল i-তম সারির ক্রীড়া কৌশলের চেয়ে বেশী গুরুত্বপূর্ণ।]

উপপাদ্য 2 ঃ যদি $m \times n$ ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের j তম স্তম্ভের অনুরূপ পদের চেয়ে বেশী বা সমান হয় তাহলে j তম স্তম্ভ বাদ দিলে অবমলোকসানকারী খেলোয়াড়ের যোগ্যতম কৌশল গুলির কোনো পরিবর্তন হবে না।

[এখানে k-তম স্তম্ভের ক্রীড়া কৌশল j-তম স্তম্ভের ক্রীড়া কৌশলের চেয়ে বেশী গুরুত্বপূর্ণ।]

উপপাদ্য 3 ঃ যদি $m \times n$ ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের i-তম সারির প্রত্যেক পদ অন্য সারিগুলির (দুটি বা তার বেশী) উত্তল সমবায়ের অনুরূপ পদের চেয়ে $\leq$ (অন্তত একটি পদের জন্য $<$) হয়, তাহলে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স থেকে i-তম সারি বাদ দিলে চরম লাভকারী খেলোয়াড়ের যোগ্যতম কৌশল গুলির কোন পরিবর্তন হবে না।

যদি j-তম স্তম্ভের প্রত্যেক পদ অন্য স্তম্ভগুলির (দুটি বা তার বেশী) উত্তল সমবায়ের অনুরূপ পদের চেয়ে $>$ (অন্তত একটি পদের চেয়ে $>$) হয়, তাহলে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক থেকে j-তম স্তম্ভ বাদ দিলে অবম লোকসানকারী খেলোয়াড়ের উত্তম কৌশলগুলির কোনো পরিবর্তন হবে না।

মন্তব্য ঃ প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে অনেক ক্ষেত্রে কোন ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সকে 2×2 ক্রমের

ম্যাট্রিক্সে রুপান্তর করা যায় এবং এর পর 2×2 ক্রীড়াটি সহজে সমাধান করে প্রদত্ত ক্রীড়াটির সমাধান পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1 : প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে নিচের 3×3 ক্রীড়াটি সমাধান করুন ।

A :	B_1	B_2	B_3
A_1	–4	6	3
A_2	–3	–3	6
A_3	2	–3	4

সমাধান : এখানে A চরম লাভকারী খেলোয়াড় এবং B অবম লোকসানকারী খেলোয়াড়। আমরা লক্ষ্য করছি B_3 এর স্তম্ভের প্রত্যেক পদ B_1 এর স্তম্ভের পদের চেয়ে বেশী অনুরূপ কারণ তিনটি পদের ক্ষেত্রে [B_3 স্তম্ভের 3,6,4, B_1 স্তম্ভের $-4, -3, 2$] আমরা পাই $3 > -4,\ 6 > -3,\ 4 > 2$

সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স থেকে B_3 এর স্তম্ভটি বাদ দেওয়া যায়।

এখন সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল

A :	B_1	B_2
A_1	–4	6
A_2	–3	–3
A_3	2	–3

আবার দেখা যাচ্ছে যে সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটির তৃতীয় সারির প্রত্যেক পদ দ্বিতীয় সারির অনুরূপ পদের চেয়ে বেশী বা সমান [এখানে $2 > -3,\ -3 = -3$]। সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_2 এর সারিটি বাদ দেওয়া যায়।

তাহলে সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল

A :	B_1	B_2
A_1	–4	6
A_3	2	–3

যা একটি 2×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

এখন এই ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে

চরম (সারির অবমমান) = চরম $\{-4, -3\} = -3$ এবং অবম (স্তম্ভের চরম মান) = অবম $\{2,6\} = 2$, যেখানে $-3 \neq 2$

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

এখন মিশ্র কৌশল অবলম্বন করলে, যোগ্যতম কৌশলের জন্য আমরা পাই

$$-4.x + 2.(1-x) = 6.x + (-3)\ (1-x) \qquad ...(1)$$

$$-4.y + 6\,(1-y) = 2.y + (-3)\ (1-y) \qquad ...(2)$$

এখানে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A_1, A_3 কৌশলগুলি যথাক্রমে x, $1 - x$ $(0 \leq x \leq 1)$ সম্ভাবনা নিয়ে নির্বাচন করে এবং অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B_1, B_2 কৌশলগুলি যথাক্রমে y, $1 - y$ $(0 \leq y \leq 1)$ সম্ভাবনা নিয়ে নির্বচন করে।

এখন (1) ও (2) সমাধান করে আমরা পাই $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{3}{5}$

সুতরাং, A_1, A_3 র সম্ভাবনা $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

এবং B_1 B_2-র সম্ভাবনা $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}$।

এখানে মূল ক্রীড়ার ক্ষেত্রে A_2-র সম্ভাবনা 0 এবং B_3 এর সম্ভাবনা 0।

এখন ক্রীড়ার মান হল [(1) বা (2) এর বামপক্ষে

$x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{3}{5}$ ধরে]

$$-4.\frac{1}{3} + 2.\frac{2}{3} = 0$$

সুতরাং ক্রীড়ার মান 0 এবং যোগ্যতম কৌশলগুলি হল

$$A : \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$$

$$B : \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$$

উদাহরণ 2 : প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে 4×5 ক্রীড়াটি সমাধান করুন :

A :

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	5	5	20	4
A_2	11	15	10	17	25
A_3	7	12	8	9	8
A_4	5	13	9	10	5

সমাধান : এখানে A চরম লাভকারী খেলোয়াড়। A_2 ও A_3 এর সারির ক্ষেত্রে আমরা লক্ষ্য করছি $11 > 7,\ 15 > 12,\ 10 > 8,\ 17 > 9\ 25 > 8$ । সুতরাং A_2 এর সারির প্রত্যেক পদ A_3 এর সারির অনুরুপ পদের চেয়ে বেশী। সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_3 এর সারি বাদ দেওয়া যায়। (এখানে A_2 কৌশলটি A_3 কৌশলের তুলনায় প্রাধান্য পায়।)

সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল :

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	5	5	20	4
A_2	11	15	10	17	25
A_4	5	13	9	10	5

আবার আমরা লক্ষ্য করছি A_2 এর সারির প্রত্যেক পদ A_4 এর সারির অনুরুপ পদের চেয়ে বেশী। সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_4 এর সারি বাদ দেওয়া যায়।

সংকুচিত ম্যাস্টিক্সটি হল :

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	5	5	20	4
A_2	11	15	10	17	25

এখন দেখা যাচ্ছে B_4 এর স্তম্ভের প্রত্যেক পদ B_1 এর স্তম্ভের অনুরুপ পদের চেয়ে বেশী $[20 > 10,\ 17 > 11]$ । সুতরাং এখানে B_1 কৌশলটি B_4 এর তুলনায় প্রাধান্য পায়। অতএব প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী B_4 এর স্তম্ভ বাদ দেওয়া যায়।

এখন সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল :

	B_1	B_2	B_3	B_5
A_1	10	5	5	4
A_2	11	15	10	25

এই ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে B_3 কৌশলটি B_1 এর তুলনায় প্রাধান্য পায় কারণ $10 > 5,\ 11 > 10$. সুতরাং, B_1 এর স্তম্ভ বাদ দেওয়া যায়। সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল :

	B_2	B_3	B_5
A_1	5	5	4
A_2	15	10	25

এখানে A_2 কৌশল A_1 এর তুলনায় প্রাধান্য পায়। সুতরাং A_1 এর সারি বাদ দেওয়া যায়। রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হয়

	B_2	B_3	B_5
A_2	15	10	25

এখানে $15 > 10$। সুতরাং B_3 কৌশলটি B_2 এর তুলনায় প্রাধান্য পায়। B_2 এর স্তম্ভ বাদ দিলে রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হয়

	B_3	B_5
A_2	10	25

এখানে $25 > 10$।

সুতরাং B_5 এর স্তম্ভ বাদ দেওয়া যায়। তাহলে সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হয়

	B_3
A_2	10

যা 1×1 ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

এই ম্যাট্রিক্স থেকে আমরা বলতে পারি যে এখানে যোগ্যতম কৌশল হল বিশুদ্ধ কৌশল (A_2, B_3)[কারণ অন্যান্য কৌশলগুলির $(A_1, A_3, A_4, B_1, B_2, B_4, B_5)$ প্রত্যেকের সম্ভাবনা O] এবং ক্রীড়ার মান 10।

উদাহরণ 3 : প্রাধান্য তত্ত্বের ব্যবহার করে নিচের ক্রীড়া সমস্যাটি সমাধান করুন :

B

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	–1	2	1
A_2	2	2	0	1
A_3	3	–2	1	–2
A_4	3	1	–3	2

সমাধান : এখানে A চরম লাভকারী খেলোয়াড় এবং B অবম লোকসানকারী খেলোয়াড়। আমরা লক্ষ্য করছি যে B_1 স্তম্ভের প্রত্যেক পদ B_2 স্তম্ভের অনুরূপ পদের চেয়ে বেশী বা সমান এবং তিনটি পদের ক্ষেত্রে [B_1 স্তরের 1, 3, 3; B_2 স্তম্ভের –1, –2, 1] আমরা পাই $1 > -1, 3 > -2, 3 > 1$

সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী, প্রদত্ত মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স থেকে B_1 এর স্তম্ভটি বাদ দেওয়া যায়। এখন সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল—

	B_2	B_3	B_4
A_1	–1	2	1
A_3	2	0	1
A_3	–2	1	–2
A_4	1	–3	2

আবার দেখা যাচ্ছে যে $\frac{1}{2}$ $(A_1 + A_2)$ [A_1 সারি ও A_2 সারির একটি উত্তল সমবায়] এর পদগুলি হল $\frac{1}{2}, 1,\ 1$ এবং $\frac{1}{2} > -2,\ 1 = 1 = 1,\ 1 > -2$ যেখানে A_3 সারির অনুরূপ পদগুলি হল–2, 1, –2।

সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_3 এর সারিটি বাদ দেওয়া যায় এবং সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হয়—

	B_2	B_3	B_4
A_1	–1	2	1
A_2	2	0	1
A_1	1	–3	2

এখন $\frac{1}{2}(B_2 + B_3)$ এর পদগুলি হল $\frac{1}{2}, 1, -1$ এবং B_4 স্তম্ভের অনুরূপ পদগুলি হল 1, 1, 2 যেখানে $1 > \frac{1}{2},\ 1 = 1,\ 2 > -1$।

তাহলে প্রাধান্য তত্ত্বের নিয়ম অনযায়ী B_4 এর স্তম্ভ বাদ দেওয়া যায় এবং সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল—

	B_2	B_3
A_1	–1	2
A_2	2	0
A_4	1	–3

এই ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে আমরা লক্ষ্য করছি যে $\frac{1}{4}A_1+\frac{3}{4}A_2$ [A_1, A_2 এর একটি উত্তল সমবায়] এর পদগুলি হল $\frac{5}{4},\frac{1}{2}$ এবং A_4 সারির অনুরূপ পদগুলি হল 1,–3 যেখানে $\frac{5}{4}>1, \frac{1}{2}<-3$।

সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_4-র সারি বাদ দেওয়া যায়। তাহলে সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল—

	B_2	B_3
A_1	–1	2
A_2	2	0

যা একটি 2×2 ক্রমের ম্যাটিক্স।

	B_2	B_3
A_1	–1	2
A_2	2	0

ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে

চরম (সারির অবম মান) = চরম $\{-1,0\}$ = 0

এবং অবম (স্তম্ভের চরম মান) = অবম $\{2.2\}=2$

যেখানে 0....2

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

এখন মিশ্র কৌশল অবলম্বন করলে, যোগ্যতম কৌশলের জন্য আমরা পাই—

$$-1.x + 2(1-x) = 2x + 0.(1-x) \quad ...(1)$$

$$-1.y + 2(1-y) = 2y + 0.(1-y) \quad ...(2)$$

যেখানে চরম লাভকারী খেলোয়াড় B_1, B_2 কৌশলগুলি যথাক্রমে $x, 1-x$ $(0 \le x \le\ )$ সম্ভাবনা নিয়ে নির্বাচন করে এবং অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B_2, B_3 কৌশলগুলি যথাক্রমে y, 1 – y $(0 \le y \le 1)$

সম্ভাবনা নিয়ে নির্বাচন করে।

এখন (1) ও (2) সমাধান করে আমরা পাই $x=\frac{2}{5}$, $y=\frac{2}{5}$।

সুতরাং A_1, A_2 -র সম্ভাবনা $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$। এবং B_1, B_3 এর সম্ভাবনা $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$।

ক্রীড়ার মান হল $-1\frac{2}{5} + 2.\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$।

সুতরাং প্রদত্ত ক্রীড়াটির যোগ্যতম কৌশলগুলি হল :

$A: \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right)$; $B: \left(0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$

এবং ক্রীড়ার মান $\frac{4}{5}$।

7.9 সারাংশ

প্রথমে দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়ার মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্সের ধারণা দেওয়া হয়েছে এবং পরে প্রমাণ করা হয়েছে যে কেবলমাত্র বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে এরূপ ক্রীড়ার মান নির্ণয় করা যাবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি ক্রীড়ার অশ্বোপবেশন বিন্দু পাওয়া যায়। এরপর আমরা দেখেছি কিভাবে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে 2×2 ক্রীড়ার (যার অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই) বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান করা যায় এবং সবশেষে প্রাধান্য তত্ত্বের আলোচনা করা হয়েছে।

7.10 অনুশীলনী

1. দুজন খেলোয়াড় A ও B এর মধ্যে মুদ্রা নিক্ষেপের একটি খেলায় প্রত্যেক খেলোয়াড় একই সঙ্গে একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করে। যদি দুজন খেলোয়াড় প্রত্যেকে Head নিক্ষেপ করে তাহলে খেলোয়াড় A কে B 5 টাকা দেয় এবং যদি প্রত্যেক খেলোয়াড় 'Tail' নিক্ষেপ করে তাহলে A কে B 6 টাকা দেয়; অন্যথায় B কে A 2 টাকা দেয়। এই ক্রীড়ার ক্ষেত্রে খেলোয়াড় A র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি লিখুন এবং দেখান যে এই ম্যাট্রিক্সটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

2. নিচের মূল্য সূচক ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট ক্রীড়ার মান এবং যোগ্যতম কৌশলগুলি নির্ণয় করুন :

		B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	11	4	3	10	2
A :	A_2	8	7	6	8	9
	A_3	4	6	6	5	10
	A_4	7	8	4	4	3

3. দেখান যে নিচের ক্রীড়াটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

A :		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	2	1	2	–1
	A_2	1	3	1	3
	A_3	3	2	3	–1
	A_4	–1	3	–1	7

4. ম্যাট্রিক্স (অবম-চরম) নীতি প্রয়োগ করে নিচের ক্রীড়াগুলি সমাধান করুন :

(i) A :

$$\begin{array}{c} \\ \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{c} \\ \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{c} \\ \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

5. যদি নিচের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের (2,2) ঘরের এ অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকে তাহলে x ও y এর সকল মান নির্ণয় করুন। আরও প্রমাণ করুন যে x, y এর কোন মানের জন্য (2, 3) বিন্দুতে ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকতে পারে না।

B

$$A: \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & x & 9 \\ y & 8 & 13 \\ 9 & 6 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

6. x এর সমস্ত মান নির্ণয় করুন যাতে নিচের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটির অশ্বোপবেশন বিন্দু পাওয়া যায়।

$$B$$

$$A: \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} x & 6 & 2 \\ -1 & x & -7 \\ -2 & 4 & x \end{bmatrix} \end{array}$$

7. যদি নিচের ক্রীড়াটির মান 2 হয় তাহলে দেখান যে $a \geq 5$ এবং $b \leq 5$

B

		B_1	B_2	B_3
	A_1	0	2	3
A :	A_2	8	5	b
	A_3	2	a	4

8. বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে নিচের ক্রীড়াগুলি সমাধান করুন :

(i)

$$B$$

$$A: \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ii)

$$B$$

$$A: \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iii)

$$B$$

$$A: \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

9. প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে নিচের ক্রীড়াগুলি সমাধান করুন :

(i)

$$A : \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \overset{B}{\begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array}} \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 & 15 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$A : \quad \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \overset{\substack{B \\ B_1 \;\; B_2 \;\; B_3 \;\; B_4}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}}$$

(iii)

$$A : \quad \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \overset{\substack{B \\ B_1 \;\; B_2 \;\; B_3 \;\; B_4 \;\; B_5}}{\begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 & 20 & 4 \\ 11 & 15 & 10 & 17 & 25 \\ 7 & 12 & 8 & 9 & 8 \\ 5 & 13 & 9 & 10 & 5 \end{bmatrix}}$$

10. নিচের প্রত্যেকটি ক্রীড়াকে 2×2 ক্রমের মূল্যসূচক বিশিষ্ট ক্রীড়ায় রূপান্তর করুন :

(i)

$$A \quad \overset{B}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

(ii)

$$A \quad \overset{B}{\begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 & 15 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}}$$

(iii) B

$$A \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(iv) B

$$A \quad \begin{bmatrix} 7 & 7 & 6 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 9 & 3 & 5 \\ 10 & 6 & 7 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

11. 10 **(iii)** এ প্রদত্ত ক্রীড়াটির সমাধান করুন।

12. প্রমাণ করুন যে 2×2 ক্রীড়ায় অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সে সারি বা স্তম্ভের প্রাধান্য থাকে।

13. কোন ক্রীড়ায় খেলোয়াড় A এবং B প্রত্যেকের কাছে একটি 1 টাকার মুদ্রা একটি 2 টাকার মুদ্রা এবং একটি 5 টাকার মুদ্রা আছে। প্রত্যেক খেলোয়াড় অপর খেলোয়াড়ের অজ্ঞাতে একটি মুদ্রা বেছে নেয়। খেলার শর্ত অনুসারে খেলোয়াড় A খেলোয়াড় B এর মুদ্রাটি লাভ করে যদি মুদ্রা দুটির মানের যোগফল বিজোড় সংখ্যা হয় এবং খেলোয়াড় B খেলোয়াড় A র মুদ্রাটি লাভ করে যদি মুদ্রা দুটির মানের যোগফল জোড় সংখ্যা হয়। এই ক্রীড়াটির মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি (A-র) লিখুন এবং প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে ক্রীড়াটি সমাধান করুন।

14. কোন 3×3 ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হল —

B

$$A \quad \begin{bmatrix} d & c & c \\ a & f & e \\ v & d & c \end{bmatrix}$$

যেখানে $0 < a < b < c < d < e < f$।

প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে এই ক্রীড়াটিকে 2×2 ক্রীড়ায় রূপান্তর করুন।

প্রমাণ করুন ক্রীড়ার মান $D = ()$

এর থেকে দেখান $c < \gamma < d$।

15. a -এর যে সকল মানের জন্য নিচের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি যথার্থ সিদ্ধান্তকারী হবে তা নির্ণয় করুন।

		B		
		B_1	B_2	B_3
	A_1	a	7	3
A	A_2	–2	a	–8
	A_3	–3	4	a

7.11 উত্তরমালা

2. $\upsilon = 6$; $(A_2\ B_3)$;

4. (i) $\upsilon = 1$; (A_1, B_1), (A_1, B_3)

(ii) $\upsilon = 2$; (A_1, B_2), (A_3, B_2)

(iii) $\upsilon = -1$; (A_2, B_3);

5. $x \leq 8$, $y \geq 8$

6. $-1 \leq x \leq 2$

8. (i) $\upsilon = -\frac{3}{4}$; $A\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$;

(ii) $\upsilon = 1$; A-র বিশুদ্ধ কৌশল A_2

এবং B-র মিশ্র কৌশল $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

(iii) $\upsilon = 6$; $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

9. (i) $\upsilon = 4$; (A_2, B_3);

(ii) $\upsilon = \frac{8}{3}$; $A\ (0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $B\ (90, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$,

(iii) $\upsilon = 10$; বিশুদ্ধ কৌশল

10. (i) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$; (ii) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$;

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$;

11. $\upsilon = \frac{8}{3}$; $A\left(0, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$, $B\left(0, \frac{7}{9}, 0\frac{2}{9}, 0\right)$;

13. $\upsilon = 0$; $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$;

15. $-2 \leq a \leq 3$

একক ☐ 8 ক্রীড়াতত্ত্ব (Game Theory) দ্বিতীয় ভাগ

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

8.2 প্রত্যাশা অপেক্ষক (expectation function) এবং কয়েকটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য

8.3 লেখচিত্রের সাহায্যে 2 × n (n × 2) ক্রমের ক্রীড়ার সমাধান

8.4 ক্রীড়া সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যায় রূপান্তর

8.5 দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যা সংক্রান্ত মৌল উপপাদ্য [Fundamental theorem on two-person zero sun game (or rectangular game)]

8.6 সারাংশ

8.7 অনুশীলনী

8.8 উত্তরমালা

8.1 প্রস্তাবনা

একক 7 এবং 7.4 অনুচ্ছেদে বিশেষ ক্ষেত্রে (যেখানে প্রত্যেক খেলোয়াড় বিশুদ্ধ কৌশল অনুসরণ করে) ক্রীড়ার মানের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। 7.6 অনুচ্ছেদে মিশ্র কৌশল অনুসরণ করে 2 × 2 ক্রমের ক্রীড়া সমাধান করার প্রসঙ্গে প্রত্যাশিত লাভ (লোকসান) এর ধারনা অবলম্বন করে ব্যাপক অর্থে ক্রীড়ার মানের এই ব্যাপক ধারনার সঙ্গে সঙ্গতি রেখে এই এককে আমরা যে কোনো ক্রমের 'দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট' ক্রীড়ার ক্ষেত্রে প্রত্যাশা অপেক্ষকের সাহায্যে ক্রীড়ার মানের সংজ্ঞা দেব। যে কোনো ক্রীড়ার ক্ষেত্রে ক্রীড়ার মানের অস্তিত্ব প্রমাণ করব। আমরা লক্ষ্য করব 7.4 অনুচ্ছেদে, কেবলমাত্র বিশুদ্ধ কৌশল অনুসরণ করে ক্রীড়ার মানের যে সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে তা এই এককের সংজ্ঞা থেকে বিশেষ ক্ষেত্রে পাওয়া যাবে।

8.2 প্রত্যাশা অপেক্ষক (expectation function) এবং কয়েকটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য

ধরা যাক $m \times n$ ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, যেখানে ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A তার প্রদত্ত কৌশলগুলি $A_1, A_2.....A_m$ থেকে একটি কৌশল নির্বাচন করে এবং অবম লোকসানকারী

খেলোয়াড় B তার প্রদত্ত কৌশলগুলি B_1, B_2 ……B_n থেকে একটি কৌশল নির্বাচন করে।

মিশ্র কৌশল অবলম্বনের ক্ষেত্রে মনে করুন খেলোয়াড় A তার প্রদত্ত কৌশলগুলি

$A_1, A_2….A_m$ যথাক্রমে $x_1, x_2,….x_m$ সম্ভাবনা নিয়ে এবং খেলোয়াড় B তার প্রদত্ত কৌশলগুলি B_1, B_2, …B_n যথাক্রমে $y_1, y_2,$ ……y_n সম্ভাবনা নিয়ে নির্বাচন করে যেখানে

$x_1 + x_2 + ….. + x_m = 1,\ y_1 + y_2 + …….y_n = 1$

এবং $x_i \geq 0,\ y_j \geq 0$ ($i = 1,2$ …..m ; $j = 1, 2$…..n)। এখানে মনে রাখা দরকার ক্রীড়াটির যে কোনো সম্পাদনে প্রত্যেক খেলোয়াড় কেবলমাত্র একটি কৌশল অনুসরণ করে এখানে বলা হবে A-এর মিশ্র কৌশল হল $x = (x_1, x_2 ….x_m)$ এবং B-এর মিশ্র কৌশল হল $y = (y_1, y_2,$ ……..$y_n)$ ।

		y_1	y_2	y_3	…………………	y_n
	x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…………	a_{1n}
	x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	……….	a_{2n}
A	x_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	……….	a_{3n}
	……	……	……	……	……	……
	……	……	……	……	……	……
	x_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	………	a_{mn}

এখানে a_{ij} হল খেলোয়াড় A-র পাওনা যখন খেলোয়াড় A এবং B যথাক্রমে বিশুদ্ধ কৌশল A_i, B_j নির্বাচন করে। তাহলে খেলোয়াড় B যখন বিশুদ্ধ কৌশল B_j নির্বাচন করে, খেলোয়াড় A-র প্রত্যাশিত পাওনা হবে $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$ যখন A মিশ্র কৌশল $X = (x_1, x_2 …….x_m)$ অবলম্বন করে। তাহলে খেলোয়াড় B মিশ্র কৌশল $Y = (y_1, y_2$ ……….$y_n)$ অবলম্বন করলে, A-র প্রত্যাশিত পাওনাকে A-র প্রত্যাশা অপেক্ষক বলে এবং ইহাকে $E(X, Y)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

তাহলে আমরা পাই $E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_i\ y_j$

এখন ধরুন $\underset{x_i}{\text{চরম}}\ \underset{y_j}{\text{অবম}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \underline{\vartheta}$

এবং $\underset{y_j}{\text{অবম}}\ \underset{x_i}{\text{চরম}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \overline{\vartheta}$

[এখানে $\overline{\vartheta}$ এবং $\underline{\vartheta}$ এর অস্তিত্ব স্বীকার করা হয়েছে।]

এখন মিশ্র কৌশলের সাহায্যে ক্রীড়া সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে, চরম লাভকারী খেলোয়াড় A-র লক্ষ্য হল x_1, x_2, ……….. x_m এর মান ঠিক করা যাতে নিশ্চিত প্রত্যাশিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী হয় এবং আমরা লক্ষ্য করছি যে সবচেয়ে বেশী এই নিশ্চিত লাভের পরিমাণ $\underline{\vartheta}$। অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B-র লক্ষ্য হল y_1, y_2, …….. y_n এর মান ঠিক করা যাতে y_1, y_2, …… y_n এর যে কোন প্রদত্ত মানের জন্য তার সবচেয়ে বেশী প্রত্যাশিত লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম এবং আমরা লক্ষ্য করছি যে এই পরিমাণটি হল $\overline{\vartheta}$। এখন যদি $\overset{0}{X} = \left(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots \overset{0}{x_m}\right)$ $\overset{0}{Y} = \left(\overset{0}{y_1}, \overset{0}{y_2} \ldots \overset{0}{y_n}\right)$ মিশ্র কৌশলের জন্য $\underline{\vartheta} = \overline{\vartheta}$ (ϑ ধরুন) হয় তাহলে ϑ হবে ক্রীড়ার মান এবং (X, Y) একজোড়া যোগ্যতম ক্রীড়া কৌশল হবে।

[এখানে মনে রাখা দরকার যে $X = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n)$ মিশ্র কৌশলটি বিশুদ্ধ কৌশল A_i হবে যদি $x_i = 1, x_1 = x_2 = \ldots\ldots x_{i-1} = x_{i+1} =, \ldots\ldots x_m = 0$ হয় এবং $Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ মিশ্র কৌশলটি বিশুদ্ধ কৌশল B_j হবে যদি $y_j = 1, y_1 = y_2 = y_{j-1} = y_{j+1} = \ldots\ldots = y_n = 0$ হয়।]

অনুচ্ছেদ 8.5 তে আমরা দেখব যে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করলে যে কোন "দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট" ক্রীড়ার ক্ষেত্রে ক্রীড়ার মান এবং যোগ্যতম কৌশল নির্ণয় করা যায়।

কয়েকটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য :

উপপাদ্য 1 : যদি ϑ মান বিশিষ্ট কোন ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক পদের সঙ্গে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা P যোগ করা হয় তাহলে যোগ্যতম ক্রীড়া কৌশলগুলির কোন পরিবর্তন হবে না, কিন্তু রূপান্তরিত ক্রীড়ার মান হবে $\vartheta + P$।

প্রমাণ : মনে করুন ϑ মান বিশিষ্ট প্রদত্ত ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি $[a_{ij}]_{m \times n}$। এখন এই ম্যাট্রিক্সটির প্রত্যেক পদের সঙ্গে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা P যোগ করলে রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হয় $[a_{ij} + P]_{m \times n}$। যদি প্রদত্ত ক্রীড়ার এবং রূপান্তরিত ক্রীড়ার প্রত্যাশা অপেক্ষক যথাক্রমে $E\ (X, Y)$ এবং $E'\ (X, Y)$ হয় তাহলে আমরা পাই—

$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j, E'(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + P)x_iy_j$ যেখানে

$X = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_m), Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n)$

এবং $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_i = 1$

এখন যদি প্রদত্ত ক্রীড়ার একজোড়া যোগ্যতম ক্রীড়া কৌশল $\begin{pmatrix} \overset{0}{X}, \overset{0}{Y} \end{pmatrix}$ হয় তাহলে—

$$\vartheta = E\begin{pmatrix} \overset{0}{X}, \overset{0}{Y} \end{pmatrix} = \underset{x_i}{\text{চরম}}\ \underset{y_j}{\text{অবম}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_iy_j \text{ ।}$$

$$\begin{aligned} \text{এখন } E'(X, Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + P)\,x_iy_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_iy_j + P\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j \\ &= E(X, Y) + P(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m)(y_1 + y_1 + \ldots\ldots + y_n) \\ &= E(X, Y) + P\cdot 1\cdot 1 \\ &= E(X, Y) + P \end{aligned}$$

সুতরাং আমরা পাই, $E'(X, Y) = E(X, Y) + P \quad \ldots (1)$

P একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা হওয়ায়, (1) থেকে আমরা পাই—

$$\underset{x_i}{\text{চরম}}\ \underset{y_j}{\text{অবম}} E'(X,Y) = \underset{x_i}{\text{চরম}}\ \underset{y_j}{\text{অবম}} E(X,Y) + P = E\begin{pmatrix} \overset{0}{X}, \overset{0}{Y} \end{pmatrix} + P = \vartheta + P$$

তাহলে আমরা পাই—$E'\begin{pmatrix} \overset{0}{X}, \overset{0}{Y} \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} \overset{0}{X}, \overset{0}{Y} \end{pmatrix} + P = \vartheta + P \qquad \ldots (2)$

এখন (2) থেকে বলা যায় যে রূপান্তরিত ক্রীড়ার ক্ষেত্রেও $\begin{pmatrix} \overset{0}{X}, \overset{0}{Y} \end{pmatrix}$ একজোড়া যোগ্যতম কৌশল হবে এবং এই ক্রীড়ার মান হবে $\vartheta + P$। সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উপপাদ্য 2 : যদি কোন ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (skew symmetric matrix) হয় তাহলে ক্রীড়ার মান শূন্য হবে।

প্রমাণ : প্রদত্ত ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি $[a_{ij}]_{m \times n}$ হলে, চরম লাভকারী খেলোয়াড়ের প্রত্যাশা অপেক্ষক হবে

$E(X, Y) \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}$ যেখানে $X = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_m)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n)$ যথাক্রমে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A ও অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B এর মিশ্র কৌশল।

এখানে $[a_{ij}]_{m \times n}$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স। সুতরাং $m = n$ এবং $a_{ij} = -a_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots n\ ;\ j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n)$।

তাহলে এখানে $X = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots y_n)$ এবং $E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j$

এখন $\left(\overset{0}{X}, \overset{0}{Y}\right)$ একজোড়া যোগ্যতম কৌশল হলে এবং ক্রীড়ার মান ϑ হলে,

$$\vartheta = E\left(\overset{0}{X}, \overset{0}{Y}\right) = \underset{x}{\text{চরম}}\ \underset{y}{\text{অবম}}\ E(X, Y)$$ । তাহলে আমরা পাই—

$$\vartheta = \underset{y}{\text{অবম}}\ E\left(\overset{0}{X}, Y\right) \qquad \ldots (1)$$

এখন (1) থেকে আমরা পাই $E\left(\overset{0}{X}, Y\right) \geq \vartheta$ যা অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B এর যে কোন মিশ্র কৌশল $Y = (y_1, y_2 \ldots\ldots\ldots y_n)$ এর জন্য সত্য। তাহলে $Y = X = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n)$ এর জন্য আমরা পাই $E\left(\overset{0}{X}, \overset{0}{X}\right) \geq \vartheta$ $\qquad \ldots (2)$

$$\text{কিন্তু}\quad E\left(\overset{0}{X}, \overset{0}{X}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \overset{0}{x}_i\, \overset{0}{x}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}\ \overset{0}{x}_i\, \overset{0}{x}_j \quad [\because \text{ এখানে } a_{ij} = -a_{ji}]$$

$$\therefore \quad E\left(\overset{0}{X}, \overset{0}{X}\right) = -E\left(\overset{0}{X}, \overset{0}{X}\right)$$

$\therefore \quad 2\text{E}\left(\overset{0}{X},\overset{0}{Y}\right) = 0$

সুতরাং $\text{E}\left(\overset{0}{X},\overset{0}{Y}\right) = 0$। তাহলে (2) থেকে আমরা পাই $\vartheta \leq 0$ ... (3)

আবার $\vartheta = \underset{y}{\text{অবম}}\, \underset{x}{\text{চরম}}\, E(X,Y) = \underset{x}{\text{চরম}}\; E\left(X,\overset{0}{Y}\right)$

সুতরাং চরম লাভকারী খেলোয়াড় A-র যে কোন মিশ্র কৌশল $X = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ এর জন্য আমরা পাই $E\left(X,\overset{0}{Y}\right) \leq \vartheta$।

তাহলে $X = \overset{0}{Y} = \left(\overset{0}{y}_1, \overset{0}{y}_2, \ldots\ldots \overset{0}{y}_n\right)$ ধরলে

আমরা পাই $E\left(\overset{0}{Y},\overset{0}{Y}\right) \leq \vartheta$ ... (4)

আবার $E\left(\overset{0}{Y},\overset{0}{Y}\right) = \sum_{i-1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \overset{0}{y}_i, \overset{0}{y}_j$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, \overset{0}{y}_i\, \overset{0}{y}_i = -E\left(\overset{0}{Y},\overset{0}{Y}\right)$$

$\therefore \quad 2E\left(\overset{0}{Y},\ \overset{0}{Y}\right) = 0$

সুতরাং $E\left(\overset{0}{Y},\ \overset{0}{Y}\right) = 0$

তাহলে (4) থেকে আমরা পাই $\vartheta \geq 0$ ... (5)

এখন (3) ও (5) থেকে আমরা পাই $\vartheta = 0$।

সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

মন্তব্য : $\vartheta = 0$ হলে ক্রীড়াটিকে সুসামঞ্জস (**fair**) বলা হয়।

উপাপাদ্য 3

ϑ মান বিশিষ্ট $m \times n$ ক্রমের ক্রীড়ার ক্ষেত্রে কোন কৌশলে $\overset{0}{X} = \left(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots\ldots \overset{0}{x_m}\right)$ খেলোয়াড় A চরম লাভকারী এর যোগ্যতম কৌশল হবার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল যে খেলোয়াড় B অবম লোকসানকারী এর যে কোন কৌশল $Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots y_n)$ এর জন্য $E\left(\overset{0}{X}, Y\right) \geq \vartheta$।

অনুরূপভাবে কোন কৌশল $\overset{0}{Y} = \left(\overset{0}{y_1}, \overset{0}{y_2}, \ldots\ldots \overset{0}{y_n}\right)$ খেলোয়াড় B এর যোগ্যতম কৌশল হবার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল যে খেলোয়াড় A চরম লাভকারী এর যে কোন কৌশল $X = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_m)$ এর জন্য $E\left(X, \overset{0}{Y}\right) \leq \vartheta$। [এখানে উপপাদ্যটির প্রমাণ দেওয়া হল না।]

8.3 লেখচিত্রের সাহায্যে $2 \times n$ ($n \times 2$) ক্রমের ক্রীড়ার সমাধান

লেখচিত্রের সাহায্যে ক্রীড়া সমস্যা কিভাবে সমাধান করা যায় তা আমরা দুটি উদাহরণ দিয়ে ব্যাখ্যা করব।

উদাহরণ 1

2×4 ক্রমের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট নিচের ক্রীড়াটি বিবেচনা করা যাক :

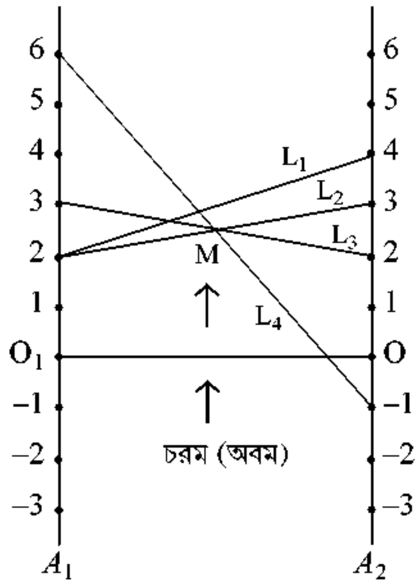
		B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A	A_1	2	2	3	–1
	A_2	4	3	2	6

এই মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই। ধরুন খেলোয়াড় A যথাক্রমে x এবং $(1 - x)$ সম্ভাবনা নিয়ে A_1 এবং A_2 নির্বাচন করে $(0 \leq x \leq 1)$। এখানে সমস্যাটি A-র দিক থেকে বিচার করতে হবে। খেলোয়াড় B প্রদত্ত কৌশলগুলি (B_1, B_2, B_3, B_4) থেকে যে কোন কৌশল অবলম্বন করতে পারে। এখন A-র উদ্দেশ্য হল x এর মান $(0 \leq x \leq 1)$ এমন ঠিক করা যাতে (B যে কোন কৌশল অবলম্বন করুক) তার নিশ্চিত প্রত্যাশিত

লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী হয়। এখন যদি B-র অবলম্বন করা কৌশল B_1 হয় তাহলে আমরা লক্ষ্য করছি A-র প্রত্যাশিত লাভ g এর মান x এর মানের উপর নির্ভর করে যেখানে $g = 2x + 4\ (1 - x)$ অর্থাৎ $g = 4 - 2x$

এখন $g = 4 - 2x$, $(0 \le x \le 1)$ এর লেখ একটি সরলরেখার অংশ হবে [চিত্র 1]। যদি B এর কৌশল B_1 হয় তবে x $(0 \le x \le 1)$ এর বিভিন্ন মানে A-র লাভ কিরূপ হবে তা এই লেখ থেকে বোঝা যাবে। অনুরূপভাবে $g = 2x + 3\ (1 - x)$, $g = 3x + 2\ (1 - x)$, $g = (-1)\ x + 6\ (1 - x)$ এর লেখ থেকে A-র লাভের পরিমাণ বোঝা যাবে যখন B যথাক্রমে B_2, B_3, B_4 কৌশল অবলম্বন করে।

এখন সমতল কাগজে 1 একক দূরত্বে দুটি সমান্তরাল অক্ষরেখা টানা হল (চিত্র 1)।



চিত্র : 1

এখানে OO_1 উভয় সরলরেখার উপর লম্ব। দুটি সমান্তরাল সরলরেখার প্রত্যেকের উপর দাগ দিয়ে একটি স্কেল দেখানো হয়েছে (চিত্র-1)। O বিন্দু থেকে OO_1 বরাবর x-এর মান দেখানো হয় (চিত্র–1) যেখানে O বিন্দুতে $x = 0$ এবং O_1 বিন্দুতে $x = 1$ হবে। এখানে দেখা যাচ্ছে যে O বিন্দুগামী স্কেল দেখানো সরলরেখার উপর প্রতি বিন্দুর ক্ষেত্রে $x = 0$ অর্থাৎ এরূপ প্রত্যেক বিন্দুর জন্য A-র কৌশল হবে বিশুদ্ধ কৌশল A_2। অনুরূপভাবে O_1 বিন্দুগামী সরলরেখার উপর প্রতি বিন্দুর জন্য A-র কৌশল হবে বিশুদ্ধ কৌশল A_1।

ধরুন L_1, L_2, L_3, L_4 রেখাংশগুলি হল যথাক্রমে $g = 2x + 4\ (1 - x)$, $g = 2x + 3\ (1 - x)$, g

$= 3x + 2\ (1 - x)$ এবং $g\ (-1)\ x + 6\ (1 - x)$, $[0 \le x \le 1]$ এর লেখ [চিত্র 1]। আমরা লক্ষ্য করছি $g = 2x + 4\ (1 - x)$, $(0 \le x \le 1)$ রেখাংশের উপর $(0, 4)$ এবং $(1, 2)$ বিন্দু অবস্থিত। তাহলে A_1 কৌশলের অনুষঙ্গী দাগ দেওয়া সরলরেখার উপর 2 বিন্দুটির সঙ্গে A_2 কৌশলের অনুসঙ্গী সরলরেখার উপর 4 বিন্দুটি যুক্ত করহলে L_1 রেখাংশটি পাওয়া যাবে। [এখানে আমরা দেখছি B_1 স্তম্ভে A_1 ও A_2 এর সারির পদগুলি যথাক্রমে 2, 4। অনুরূপভাবে A_1 সরলরেখার উপর 2 বিন্দুর সঙ্গে A_2 এর উপর 3 বিন্দু যুক্ত করে, A_1 এর উপর 3 এর সঙ্গে A_2 এর উপর 2 যুক্ত করে এবং A_1 এর -1 বিন্দুর সঙ্গে A_2 এর উপর 6 বিন্দুটি যুক্ত করে যথাক্রমে L_2, L_3, L_4 রেখাংশগুলি টানা হয়েছে (চিত্র 1)।

এখন A-র দিক থেকে x এর যে মানের জন্য নিশ্চিত প্রত্যাশিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশী হয় তা নির্ণয় করতে হবে এবং এর থেকে চরম (অবম প্রত্যাশিত লাভ) পাওয়া যাবে। যদি চিত্র 1 টিকে নিচের দিক থেকে মোটা দাগ দিয়ে বন্ধ করা হয় তাহলে বন্ধ চিত্রের সর্বোচ্চ বিন্দু M (চিত্র 1) থেকে চরম (অবম প্রত্যাশিত লাভ) এর মান নির্ণয় করা যাবে। এখানে দেখা যাচ্ছে M বিন্দুটি L_2, L_3 রেখাংশ দুটির ছেদ বিন্দু। এই বিন্দুতে খেলোয়াড় B এর কেবলমাত্র B_2 ও B_3 কৌশল বিবেচনা করা হয়েছে।

সুতরাং লেখচিত্রের সাহায্যে বোঝা গেল যে প্রদত্ত 2×4 ক্রীড়াটি সমাধান করতে হবে, 2×2 ক্রমের এই ক্রীড়াটি সমাধান

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$ এই ক্রীড়াটি সমাধান করলেই হবে।

এখন 2×2 ক্রমের ক্রীড়াটি বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান করা যাক :

যদি B_2, B_3 কৌশলগুলি যথাক্রমে y, $1 - y$ সম্ভাবনা নিয়ে নির্বাচন করা হয় $(0 \le y \le 1)$ তাহলে

$$2x + 3\ (1 - x) = 3x + 2\ (1 - x), \quad \ldots (1)$$

$$2y + 3\ (1 - y) = 3y + 2\ (1 - y) \quad \ldots (2)$$

সমীকরণ দুটি সমাধান করে ক্রীড়ার মান এবং উভয় খেলোয়াড়ের যোগ্যতম কৌশল পাওয়া যাবে। এখানে আমরা পাই

$$-2x = -1, \qquad -2y = -1$$

সুতরাং $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

তাহলে $1 - x = \frac{1}{2}$, $1 - y = \frac{1}{2}$

এখানে B_1 ও B_4 প্রত্যেকের সম্ভাবনা O কারণ যোগ্যতম কৌশলের ক্ষেত্রে এই কৌশলগুলি কখনই নির্বাচন করা হয়নি। সুতরাং ক্রীড়াটির যোগ্যতম কৌশলগুলি হল $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $B\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ এবং ক্রীড়ার মান ϑ হলে আমরা পাই [(1) বা (2) থেকে] $\vartheta = 2.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

উদাহরণ 2 : 3×2 ক্রমের মূল্যসূচক বিশিষ্ট নিচের ক্রীড়াটি বিবেচনা করা যাক।

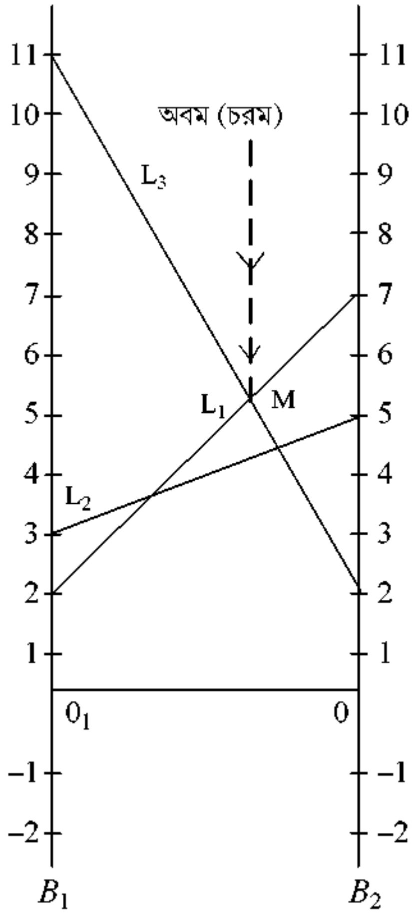
		B	
		B_1	B_2
	A_1	2	7
A	A_2	3	5
	A_3	11	2

এই মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

এখানে সমস্যাটি B-র দিক থেকে বিচার করতে হবে। ধরুন খেলোয়াড় B যথাক্রমে y এবং $1 - y$ সম্ভাবনা নিয়ে B_1 এবং B_2 নির্বাচন করে $(0 \leq y \leq 1)$। খেলোয়াড় A তার প্রদত্ত কৌশলগুলি (A_1, A_2, A_3) থেকে যে কোন কৌশল অবলম্বন করতে পারে। এখন B-র উদ্দেশ্য হল y-র মান $(0 \leq y \leq 1)$ এমন ঠিক করা যাতে (A যে কোন কৌশল অবলম্বন করুক) তার সবচেয়ে বেশী প্রত্যাশিত লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম হয়। এখন যদি A-র অবলম্বন করা কৌশল A_1 হয় তাহলে আমরা লক্ষ্য করছি B-র প্রত্যাশিত লোকসান l এর মান y এর মানের উপর নির্ভর করে যেখানে $l = 2y + 7(1 - y)$। এখন $l = 2y + 7(1 - y)$, $0 \leq y \leq 1$ এর লেখটি একটি সরলরেখার অংশ হবে। [চিত্র 2]। যদি A-র কৌশল A_1 হয় তবে y $(0 \leq y \leq 1)$ এর বিভিন্ন মানের জন্য B এর লোকসান কিরূপ হবে তা এই লেখ থেকে বোঝা যাবে।

অনুরূপভাবে $l = 3y + 5(1 - y)$, $l = 11y + 2(1 - y)$ এর লেখ থেকে B-র লোকসানের পরিমাণ

বোঝা যাবে যখন A যথাক্রমে A_2, A_3 কৌশল অবলম্বন করে। এখন 1 একক দূরত্বে সমতল কাগজে দুটি সমান্তরাল অক্ষরেখা টানা হল (চিত্র 2)।



চিত্র 2

এখানে OO_1 উভয় সরলরেখার উপর লম্ব। দুটি সমান্তরাল সরলরেখার প্রত্যেকটির উপর দাগ দিয়ে স্কেল দেখানো হয়েছে (চিত্র 2)। O বিন্দু থেকে OO_1 বরাবর y এর মান দেখানো হয় যেখানে O বিন্দুতে $y = 0$ এবং O_1 বিন্দুতে $y = 1$ হবে (চিত্র 2)। এখানে দেখা যাচ্ছে যে O বিন্দুগামী স্কেল দেখানো সরলরেখার উপর প্রত্যেক বিন্দুর ক্ষেত্রে $y = 0$ অর্থাৎ এরূপ প্রত্যেক বিন্দুর জন্য B এর কৌশল হবে বিশুদ্ধ কৌশল B_2।

অনুরূপভাবে O_1 বিন্দুগামী সরলরেখার উপর প্রত্যেক বিন্দুর জন্য B এর কৌশল হবে বিশুদ্ধ কৌশল B_1। ধরুন L_1, L_2, L_3 রেখাংশগুলি যথাক্রমে $l = 2y + 7\ (1 - y)$,

$l = 3y + 5\ (1 - y)$ এবং

$l = 11y + 2\ (1 - y)\ [0 \leq y \leq 0]$ এর লেখ [চিত্র 2]।

আমরা লক্ষ্য করছি $l = 2y + 7\ (1 - y)$ রেখাংশের উপর (0, 7) ও (1, 2) বিন্দু দুটি অবস্থিত। তাহলে B_1 কৌশলের অনুষঙ্গী দাগ দেওয়া সরলরেখার উপর 2 বিন্দুটির সঙ্গে B_2 কৌশলের অনুষঙ্গী সরলরেখার উপর 7 বিন্দুটি যুক্ত করলে L_1 রেখাংশ পাওয়া যাবে।

এখানে আমরা দেখছি A_1 এর সারিতে B_1 এবং B_2 এর স্তম্ভের পদগুলির যথাক্রমে 2, 7।

অনুরূপভাবে L_2 ও L_3 রেখাংশ টানা যাবে [চিত্র 2]। এখন B এর দিক থেকে y এর $(0 \leq y \leq 1)$ যে মানের জন্য তার সবচেয়ে বেশী প্রত্যাশিত লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম হয় তা নির্ণয় করতে হবে এবং এর থেকে অবম (চরম প্রত্যাশিত লোকসান) পাওয়া যাবে। যদি চিত্র 2 টিকে উপর দিক থেকে মোটা দাগ দিয়ে বন্ধ করা হয় তাহলে বন্ধ চিত্রের সর্বনিম্ন বিন্দু M. [চিত্র 2] থেকে অবম (চরম প্রত্যাশিত লোকসান) এর মান নির্ণয় করা যাবে। এখন দেখা যাচ্ছে M বিন্দুটি L_1, L_2 রেখাংশ দুটির ছেদবিন্দু [চিত্র 2]। এই বিন্দুতে খেলোয়াড় A-র কেবলমাত্র A_1 ও A_3 কৌশল বিবেচনা করা হয়েছে।

সুতরাং লেখচিত্রের সাহায্যে বোঝা গেল যে প্রদত্ত 3 × 2 ক্রীড়াটি সমাধান করতে হলে, 2 × 2 ক্রমের

	B_1	B_2
A_1	2	7
A_3	11	2

এই ক্রীড়াটি সমাধান করলেই হবে।

এখন 2 × 2 ক্রমের ক্রীড়াটি বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান করা যাক :

যদি A_1, A_3 কৌশলগুলি যথাক্রমে x, $1 - x$ সম্ভাবনা নিয়ে $(0 \leq x \leq 1)$ নির্বাচন করা হয় তাহলে

$$2x + 11\ (1 - x) = 7x + 2\ (1 - x) \quad \ldots (1)$$

$$2y + 7\ (1 - y) = 11y + 2\ (1 - y) \quad \ldots (2)$$

সমীকরণ দুটি সমাধান করে (যদি $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ শর্ত মেনে সমাধান পাওয়া যায়) ক্রীড়ার মান ϑ এবং উভয় খেলোয়াড়ের যোগ্যতম কৌশল পাওয়া যাবে।

এখানে আমরা পাই

$$-14x = -9, \qquad -14y = -5$$

সুতরাং $\quad x = \frac{9}{14}, \qquad y = \frac{5}{14}$

তাহলে $\quad 1 - x = \frac{5}{14}, \qquad 1 - y = \frac{9}{14}$

এখানে A_2 এর সম্ভাবনা O কারণ যোগ্যতম কৌশলের ক্ষেত্রে এই কৌশলটি কখনই নির্বাচন করা হয় নি।

সুতরাং ক্রীড়াটির যোগ্যতম কৌশলগুলি হল $A\left(\frac{9}{14}, 0, \frac{5}{14}\right); B\left(\frac{5}{14}, \frac{9}{14}\right)$

এবং ক্রীড়ার মান $v = 2.\frac{9}{14} + 11.\left(1 - \frac{9}{14}\right) = \frac{73}{14}$

মন্তব্য : (1) উপরের দুটি উদাহরণে লেখচিত্রের সাহায্যে 2×4 ক্রমের এবং 3×2 ক্রমের ক্রীড়ার সমাধান করা হয়েছে। এইভাবে আমরা 4×2, 5×2, 2×5, 2×6 ইত্যাদি ক্রমের ক্রীড়া লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করতে পারি।

(2) যদি চরম-অবম বা অবম-চরম বিন্দুতে তিনটি (বা তার বেশী) সরলরেখা ছেদ করে তাহলে কিভাবে ক্রীড়ার মান এবং যোগ্যতম কৌশল নির্ণয় করা যায় তা আমরা এখানে আলোচনা করব না।

8.4 ক্রীড়া সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় রূপান্তর [Reduetion of a two-perion zero-sum game to L. P. P]

ক্রীড়ার মানের অস্তিত্ব স্বীকার করে নিয়ে, মনে করুন ϑ মান বিশিষ্ট $m \times n$ ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটি হল $[a_{ij}]_{m \times n}$। এখানে আমরা ধরে নিতে পারি যে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটির প্রত্যেক পদ

$a_{ij} > 0$ ($i = 1, 2, \ldots\ldots m; j = 1, 3 \ldots\ldots\ldots p$) উপযুক্ত যথোপযুক্ত ধনাত্মক সংখ্যা p যোগ করে প্রত্যেক পদকে ধনাত্মক করা যায় এবং অনুচ্ছেদ 8.2 এর উপপাদ্য থেকে আমরা জানি এর ফলে রূপান্তরিত ক্রীড়ার মান হবে $\vartheta + p$, কিন্তু

যোগ্যতম কৌশলের কোনো পরিবর্তন হবে না।

এখন মনে করুন চরম লাভকারী খেলোয়াড় A ও অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B যথাক্রমে মিশ্রকৌশল $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_m)$ ও $(y_1, y_2 \ldots\ldots\ldots y_n)$ অবলম্বন করে। তাহলে খেলোয়াড় A, A_1, A_2 ……….. A_m প্রদত্ত কৌশলগুলিকে যথাক্রমে x_1, x_2, ………. x_m সম্ভাবনা নিয়ে এবং খেলোয়াড় B তার প্রদত্ত B_1, B_2, …………B_n কৌশলগুলিকে যথাক্রমে y_1, y_2, ……….y_n সম্ভাবনা নিয়ে নিরপেক্ষভাবে নির্বাচন করে,

যেখানে $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ এবং $x_i \geq 0$, $y_j > 0$ ($i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots m$; $j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$)।

		y_1	y_2	…………………	y_n
		B_1	B_2	…………………	B_n
x_1	A_1	a_{11}	a_{12}	…………………	a_{1n}
x_2	A_2	a_{21}	a_{22}	…………………	a_{2n}
⋮	⋮	………	………	………	………
⋮	⋮	………	………	………	………
⋮	⋮	………	………	………	………
x_m	A_m	a_{m1}	a_{m2}	…………………	a_{mn}

খেলোয়াড় *A*-র সমস্যা

যদি খেলোয়াড় B কৌশল B_i নির্বাচন করে তাহলে মিশ্র কৌশল $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_m)$ এর জন্য খেলোয়াড় A-র প্রত্যাশিত লাভকে g_1 দ্বারা প্রকাশ করলে আমরা পাই,

$$g_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{m1}x_m$$

অনুরূপে আমরা পাই,

$$g_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m2}x_m$$

$$g_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{m3}x_m$$

…………………………………………………………………

$$g_n = a_{1n}\ x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nm}\ x_m$$

যেখানে A-র প্রত্যাশিত লাভ $g_2, g_3, \ldots\ldots\ldots g_n$ যখন খেলোয়াড় B যথাক্রমে কৌশল $B_2, B_3 \ldots\ldots\ldots B_n$ নির্বাচন করে।

মনে করুন অবম $\{g_1, g_2, \ldots\ldots\ldots g_n\} = g' \ldots\ldots\ldots$ (1)

এখানে $g' > 0$ কারণ $a_{ij} > 2$, i, j এর সকল মানের জন্য এবং

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots m)$$

তাহলে মিশ্র কৌশল $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_m)$ এর জন্য A-র প্রত্যাশিত লাভের পরিমাণ কমপক্ষে g' হবে। এখন খেলোয়াড় A-র উদ্দেশ্য হল x_1 , x_2 .... x_m এর মান নির্ণয় করা যাতে g' এর মান সবচেয়ে বেশি হয় অর্থাৎ $\frac{1}{g'}$ এর মান সবচেয়ে কম হয় ($\because\ g' > 0$)।

(1) থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$g_1 \geq g',\ g_2 \geq g',\ \ldots\ldots\ldots\ g_n \geq g'$$

বা, $\frac{g_1}{g'} \geq 1, \frac{g_2}{g'} \geq 1, \ldots\ldots\ldots \frac{g_n}{g'} \geq 1\ (\because g' > 0)$

তাহলে আমরা পাই,

$$a_{11}\frac{x_1}{g'} + a^2\frac{x_2}{g'} + \ldots\ldots\ldots + a_{m1}\frac{x_m}{g'} \geq 1,$$

$$a_{12}\frac{x_1}{g'} + a_{22}\frac{x_2}{g'} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m2}\frac{x_m}{g'} \geq 1,$$

....

....

$$a_{1n}\frac{x_1}{g'} + a_{2n}\frac{x_2}{g'} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nm}\frac{x_m}{g'} \geq 1,$$

এবং $\frac{x_1}{g'} = X_1,\ \frac{x_2}{g'} = X_2,\ \ldots\ldots\ldots \frac{x_m}{g'} = X_m$

ধরলে আমরা পাই,

$$a_1 X_1 + a_{2j} X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mj} X_m \geq 1,\ g = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$$

আবার, $\frac{1}{g'} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_m}{g'} = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_m$

যেখানে, $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ \ldots\ldots\ X_m \geq 0$

তাহলে খেলোয়াড় A-র সমস্যাকে নিচের L.P.P. হিসাবে লেখা যায় :

অবম $\frac{1}{g'} = X_1 + X_2 + \ldots\ldots\ldots + X_m,$

শর্তাসাপেক্ষে,

$$a_{11}\ X_1 + a_{21}\ X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m1}\ X_m \geq 1,$$
$$a_{12}X_2 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m2}\ X_m \geq 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n}\ X_n + a_2\ X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nm}\ X_m \geq 1,$$
$$X_1,\ X_2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ X_m \geq 0$$

খেলোয়াড় B-র সমস্যা

মনে করুন চরম $\{l_i,\ l_2\ \ldots\ldots l_{\mathrm{m}}\}\ l'$ .....(2)

যেখানে মিশ্র কৌশল $(y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots y_n)$ জন্য খেলোয়াড় B-র প্রত্যাশিত লোকসান হল $l_1,\ l_2,$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots l_m$ যখন খেলোয়াড় A যথাক্রমে $A_1,\ A_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots A_{\mathrm{n}}$ নির্বাচন করে।

তাহলে $l_{\mathrm{i}} = a_{\mathrm{i}1}\ y_1 + a_{12}\ y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\ y_n(i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m)$।

এখন (2) থেকে আমরা লিখতে পারি $l_1 \leq l',\ l_2 \leq l'\ \ldots\ldots\ldots l_m \leq l'$ এবং $l' > 0$ হয়োয় আমরা পাই, $\frac{l_i}{l'} \leq 1, (i = 1;\ 2, \ldots\ldots\ldots\ldots m)$।

খেলোয়াড় B-র উদ্দেশ্য হল $y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ y_n$ এর মান নির্ণয় করা যাতে l'এর মান সবচেয়ে কম হয় অর্থাৎ $\frac{1}{l'}$এর মান সবচেয়ে বেশী হয় ($\because\ l' > 0$)।

এখন $\frac{l_i}{l'} \leq 1, (i = 1,2, \ldots\ldots\ldots m)$। থেকে আমরা পাই,

$$a_{ij}\frac{y_1}{l'} + a_{i2}\frac{y_2}{l'} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\frac{y_n}{l'} \leq 1$$

এবং $\frac{y_1}{l'} = Y_1, \frac{y_2}{l'} = Y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{y_n}{l'} = Y_n$ ধরলে আমরা পাই

$$a_{i1}\ Y_1 + a_{i2}\ Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\ Y_n \leq 1\ (i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots m)।$$

আবার $\frac{1}{l'} = \frac{y_1 + y_2 + \dots\dots\dots + y_n}{l'} = Y_1 + Y_2 + \dots\dots\dots\dots + Y_n$,

যেখানে $Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0,\ \dots\dots\dots\dots Y_n \geq 0$।

তাহলে খেলোয়াড় B-র সমস্যাকে নিচের রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে লেখা যায় :

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + \dots\dots\dots + Y_n$

শর্তাসাপেক্ষে,

$$a_{11}\ Y_1 + a_{12}\ Y_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ a_{1n}\ Y_n \leq 1,$$
$$a_{21}\ Y_1 + a_{22}\ Y_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{2n}\ Y_n \leq 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}\ Y_1\ a_{m2}\ Y_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{mn}\ Y_n \leq 1,$$
$$Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0,\ \dots\dots\dots\dots\dots\ Y_n \geq 0$$

আমরা লক্ষ্য করছি যে B-র সমস্যাটি (রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা) A-র সমস্যার (রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা) দ্বৈত সমস্যা এবং A-র সমস্যাটি B-র সমস্যার দ্বৈত সমস্যা।

এখানে $(l')_{\text{অবম}} = \underset{x_i}{\text{অবম}}\ \underset{y_j}{\text{চরম}} \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j\right]$

এবং $(g')_{\text{চরম}} = \underset{y_j}{\text{চরম}}\ \underset{x_i}{\text{অবম}} \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j\right]$

পরবর্তী অনুচ্ছেদ আমরা প্রমাণ করব যে $(l')_{\text{অবম}} = (g')_{\text{চরম}} = \vartheta$ (ধরুন) যা ক্রীড়ার মান।

তাহলে দেখা গেল যে কোনো ক্রীড়া সমস্যাকে রৈ. প্রো. স.-তে রূপান্তর করে সমাধান করা যায়।

8.5 দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যা সংক্রান্ত মৌল উপপাদ্য (Jundamental theorem on two-person zero sum game)

ক্রীড়া সমস্যা সংক্রান্ত মৌল উপপাদ্যের বিবৃতি ঃ

মিশ্র কৌশল অবলম্বন করলে যে-কোনো "দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট" ক্রীড়ার মান এবং যোগ্যতম কৌশল পাওয়া যাবে।

প্রমাণ ঃ মনে করুন প্রদত্ত ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্রটি $[a_{ij}]_{m \times n}$ যেখানে আমরা ধরে নিতে পারি যে ম্যাট্রিক্সটির প্রত্যেকটি পদ $a_{ij} > 0$ [16·2 অনুচ্ছেদে এর ব্যাখ্যা দেওয়া হয়েছে]।

মনে করুন চরম লাভকারী খেলোয়াড় A-র মিশ্র কৌশল $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m)$ এবং অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B-র একটি মিশ্র কৌশল $(y_1, x_2, \ldots\ldots y_n)$ অর্থাৎ খেলোয়াড় A তার প্রদত্ত কৌশলগুলি A_1, $A_2, \ldots\ldots A_m$ কে যথাক্রমে $x_1, x_2, \ldots\ldots x_m$ সম্ভাবনা নিয়ে এবং খেলোয়াড় B তার প্রদত্ত কৌশলগুলি $B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$ কে যথাক্রমে $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ সম্ভাবনা নিয়ে নিরপেক্ষভাবে নির্বাচন করে, যেখানে—

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \text{ এবং } x_i > 0,\ y_j > 0\ (i = 1, 2, \ldots\ldots m;\ j = 1, 2, \ldots\ldots n)।$$

তাহলে 8·4 অনুচ্ছেদ দেখেছি যে ক্রীড়া সমস্যাকে নিচের দুটি রৈ.প্রো.স. হিসাবে লেখা যায় : খেলোয়াড় A-র সমস্যা

$$\text{অবম } \frac{1}{g'} = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_m,$$

শর্তসাপেক্ষে,

$$a_{11} X_1 + a_{21} X_2 + \ldots\ldots + a_{m1} X_n \geq 1,$$
$$a_{12} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots + a_{m2} X_m \geq 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n} X_1 + a_{2n} X_2 + \ldots\ldots + a_{nm} + X_m \geq 1,$$

$$X_1, X_2 \ldots\ldots X_m \geq 0 \text{ যেখানে } X_i = \frac{x_i}{g'}\ (i = 1, 2, \ldots\ldots m)$$

খেলোয়াড় B-র সমস্যা

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Y_n$,

শর্তসাপেক্ষে,

$$a_{11}\ Y_1 + a_{12}\ Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}\ Y_n \leq 1,$$

$$a_{21}\ Y_1 + a_{22}\ Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{2n}\ Y_n \leq 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}\ Y_1 + am_2\ Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nm}\ Y_n \leq 1,$$

$Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ Y_n \geq 0$, যেখানে $Y_j = \frac{y_j}{l'}$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n)$।

এখানে আমরা লক্ষ্য করছি যে এই দুটি সমস্যার রৈ.প্রো.স. যেকোনোটি অন্যটির দ্বৈত্য সমস্যা। এখন আমরা দেখাব যে A-র সমস্যাটির কার্যকর সমাধান আছে।

ধরুন $a = \frac{1}{\text{অবম}\{a_{11}, a_{12}, \ldots . a_{1n}\}}$, যেখানে অবম $\{a_{11},\ a_{12},\ \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}\} > 0$, যেহেতু এখানে $a_{11},\ a_{12},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{1n} > 0$।

তাহলে $a > 0$ এবং $a.a_{11} \geq \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1,\ a.a_{12} \geq \frac{a_{12}}{a_{12}} = 1,\ \ldots\ldots a.a_{1n} \geq \frac{a_{1n}}{a_{1n}} = 1$

সুতরাং $X_1 = a,\ X_2 = 0,\ \ldots\ldots\ldots X_m = 0$

A-র সমস্যার সমস্ত শর্তগুলি মানিয়া চলে।

তাহলে এই সমস্যাটিকে $(a,\ 0,\ \ldots\ldots\ldots 0)$ একটি কার্যকর সমাধান হবে। আবার আমরা লক্ষ্য করছি যে এই সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষক যে-কোনো কার্যকর সমাধানের জন্য $X_1 + X_2 + \ldots\ldots X_n \geq 0$ এবং তাহলে অবম মান নির্ণয় সংক্রান্ত রৈ.প্রো.স. টির বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান অবাধ হতে পারে না। তাহলে A-র সমস্যাটির রৈ.প্রো.স. হিসাবে সসীম চরম (অবম) সমাধান থাকবে। এখন দ্বৈততার মৌল উপপাদ্য থেকে আমরা জানি "যদি মুখ্য সমস্যা বা দ্বৈত সমস্যা যে কোনটির সসীম চরম সমাধান পাওয়া যায় তাহলে অন্যটিরও সসীম চরম সমাধান পাওয়া যাবে এবং দুটি সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম (অবম) মানগুলি একই হবে।"

সুতরাং B-র সমস্যাটিরও সসীম চরম সমাধান পাওয়া যাবে এবং $\left(\frac{1}{g'}\right)_{\text{অবম}} = \left(\frac{1}{l'}\right)_{\text{চরম}}$

অর্থাৎ $(g')_{\text{চরম}} = (l')_{\text{অবম}}$।

তাহলে ক্রীড়ার মান পাওয়া যাবে ও ক্রীড়ার মান হল $(g')_{\text{চরম}}$ [বা $(l')_{\text{অবম}}$] এবং দুটি সমস্যার চরম (অবম) সমাধান থেকে ক্রীড়ার যোগ্যতম কৌশলগুলি পাওয়া যাবে।

$\therefore$ উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

মন্তব্য ঃ যদি প্রদত্ত ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক পদের সঙ্গে কোনো সংখ্যা P যোগ করে ক্রীড়া সমস্যাকে রৈ.প্রো.স.-তে রূপান্তর করা হয় তহলে প্রদত্ত ক্রীড়ার মান হবে $(g')_{\text{চরম}} - P$ বা $(l')_{\text{অবম}} - P$। কিন্তু যোগ্যতম কৌশলগুলির কোনো পরিবর্তন হবে না।

উদাহরণ 1. একটি ক্রীড়া সমস্যার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স নিচে দেওয়া হল। ক্রীড়া সমস্যাটিকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে রূপান্তর করে সমাধান করুন ঃ

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ A & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

সমাধান : এখানে প্রদত্ত মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক পদের সঙ্গে 2 যোগ করলে (যাতে প্রত্যেক পদ > 0 হয়) রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হয়

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ A & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

মনে করুন খেলোয়াড় A মিশ্র কৌশল (x_1, x_2) এবং খেলোয়াড় B মিশ্র কৌশল (y_1, y_2) অবলম্বন করে যেখানে $x_1 + x_2 = 1$, $y_1 + y_2 = 1$

এবং $x_1, x_2 \geq 0$; $\quad y_1, y_2 \geq 0$.

তাহলে খেলোয়াড় A-এর সমস্যাটি (রৈ.প্রো.স. হিসাবে) হবে

অবম $\frac{1}{g'} = X_1 + X_2$

শর্তসাপেক্ষে,

$$3x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 1,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

এবং খেলোয়াড় B-এর সমস্যাটি (রৈ.প্রো.স. হিসাবে) হবে

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2$

শর্তসাপেক্ষে,

$$3Y_1 + Y_2 \leq 1$$

$$Y_1 + 3Y_2 \leq 1,$$

$$Y_1 \geq 0, \qquad Y_2 \geq 0$$

এখানে $X_i = \frac{x_i}{g'} (i = 1, 2)$ এবং

$$Y_j = \frac{y_j}{l^1} (j = 1, 2)$$

এখন B-র সমস্যাটি (যা চরম মান নির্ণয় সংক্রান্ত একটি রৈ.প্রো.স.) সিমপ্লেক্স কলনবিধি এর সাহায্যে সমাধান করা যাক ঃ

Y_3, Y_4 এই অতিরিক্ত চলগুলির সাহায্যে B-র সমস্যাটি নিচের আকারে লেখা যায় ঃ

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + OY_3 + OY_4$

শর্তসাপেক্ষে,

$$3Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1,$$

$$Y_1 + 3Y_2 + Y_4 = 1,$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

Simplex Table – I

		c_j	1	1	0	0
$\bar{c}_B$	$\bar{Y}_B$	$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$
0	Y_3	1	$\boxed{3}$	1	1	0
0	y_4	1	1	3	0	1
	$z_j - c_j$		–1	–1	0	0
			↑		↓	

এখানে অবম $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{1}\right\} = \frac{1}{3}$

তাহলে $\bar{a}_1$ হল নতুন ভিত্তি ভেক্টর এবং $\bar{a}_3$ হল অপসৃয়মান ভিত্তি ভেক্টর।

Simplex Table – II

		c_j	1	1	0	0
$\bar{c}_B$	$\bar{Y}_B$	$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$
1	Y_1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	y_4	$\frac{2}{3}$	0	$\boxed{\frac{8}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	1
	$z_j - c_j$		0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
				↑		↓

এখানে অবম $\left\{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}, \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}}\right\}$ = অবম $\left\{1, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}$

তাহলে $\bar{a}_2$ হল নতুন ভিত্তি ভেক্টর এবং $\bar{a}_4$ হল অপসৃয়মান ভিত্তি ভেক্টর।

Simplex Table – III

		c_j	1	1	0	0
$\bar{c}_B$	$\bar{Y}_B$	$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$
1	Y_1	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$
1	Y_2	$\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$z_j - c_j$			0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

এখানে j এর সকল মানের জন্য $z_j - c_j \geq 0$

সুতরাং সিমপ্লেক্স টেবিল III থেকে দ্বৈত সমস্যার এবং মুখ্য সমস্যার চরম (অবম) সমাধান পাওয়া যাবে।

এখানে B-র সমস্যার ক্ষেত্রে $Y_1 = \frac{1}{4}$, $Y_2 = \frac{1}{4}$ থেকে B-র কৌশল পাওয়া যাবে, যেখানে $Y_1 + Y_2 = \frac{1}{2}$ যা $\frac{1}{l'}$ এর চরম মান।

সুতরাং l' এর অবম মান অবম $= 2$

সুতরাং এখানে প্রদত্ত ক্রীড়ার মান $= 2 - 2 = 0$।

এখন B-এর চরম কৌশলের জন্য $y_1 = (l')_{\min} . Y_1 = 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $y_2 = (l')_{\min} Y_2 = 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

আবার সিমপ্লেক্স টেবিল III এর $z_j - c_j$ সারি থেকে আমরা বলতে পারি $X_1 = \frac{1}{4}$, $X_2 = \frac{1}{4}$ যা থেকে A-র চরম কৌশল পাওয়া যাবে।

সুতরাং A-র চরম কৌশলের জন্য $x_2 = (g')_{\text{চরম}}\ X_1 (l')_{\text{অবম}}\ X_1 = 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,

$x_2 = (g')_{\text{চরম}}\ X_2 (l')_{\text{অবম}} \times 2 = 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$।

তাহলে প্রদত্ত ক্রীড়াটির মান $(\upsilon) = 0$ এবং খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B-এর যোগ্যতম কৌশল যথাক্রমে $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ এবং $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$।

উদাহরণ 2

একটি নতুন দ্রব্যের বিজ্ঞাপন দেওয়া নিয়ে দুটি কোম্পানী A ও B এর মধ্যে প্রতিযোগিতা চলছে। A-এর বাজার সমীক্ষার গবেষণা বিভাগ নিচের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করছে। এখানে ধরা হচ্ছে যে প্রতিটি কোম্পানীই যে কোন একটি সংস্থাতেই সবরকম বিজ্ঞাপন দেয়। ম্যাট্রিক্সের পদগুলি A-র বর্ধিত বিক্রীর (1 একক = 1000 টাকা) পরিমাণ সূচনা করে।

		কোম্পানী B	
		B_1 টেলিভিসন	B_2 খবরের কাগজ
কোম্পানী A	টেলিভিসন A_1	3	2
	খবরের কাগজ A_2	4	1

সমস্যাটিকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যায় রূপান্তর করে উভয় কোম্পানীর যোগ্যতম কৌশলগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটির প্রত্যেক পদ ধনাত্মক।

এখন কোম্পানী B (খেলোয়াড় B) এর সমস্যাটি (রৈ.প্রো.স. হিসাবে) হবে

$$\text{চরম } \frac{1}{l'} = y_1 + y_2$$

শর্তসাপেক্ষে,

$$3Y_1 + 2Y_2 \le 1$$
$$4Y_1 + Y_2 \le 1$$
$$Y_1 \ge 0, \ Y_2 \ge 0$$

এখানে $Y_j = \frac{y_j}{l'}$ $(j = 1, 2)$

[A-র মিশ্র কৌশল (X_1, X_2) এবং

B-র মিশ্র কৌশল (Y_1, Y_2)]

এখন B-র সমস্যাটি (যা চরমমান নির্ণয় সংক্রান্ত একটি রৈ.প্রো.স.) সিমপ্লেক্স কলনবিধি এর সাহায্যে সমাধান করা যাক :

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ এই অতিরিক্ত চলগুলির সাহায্যে B-র সমস্যাটি নিচের আকারে লেখা যায় :

চরম $\frac{1}{V} = Y_1 + Y_2 + OY_3 + OY_4$

শর্ত সাপেক্ষে,

$$3Y_1 + 2Y_2 + Y_3 = 1$$

$$4Y_1 + Y_2 + Y_4 = 1,$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

Simplex Table I

		C_j	1	1	0	0
$\overline{C}_B$	$\overline{Y}_B$	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$
0	Y_3	1	3	$\boxed{2}$	1	0
0	Y_4	1	4	1	0	1
$Z_j - C_j$			–1	–1	0	0

↑

এখানে অবম $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\} = \frac{1}{2}$

তাহলে $\overline{a}_2$ হল নতুন ভিত্তি ভেক্টর এবং $\overline{a}_3$ হল অপসৃয়মান ভিত্তি ভেক্টর।

Simplex Table II

		C_j	1	1	0	0
$\overline{C}_B$	$\overline{Y}_B$	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$
1	Y_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	Y_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
$z_j - c_j$			$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

এখানে j এর সকল মানের জন্য $z_j - c_j \geq 0$। সুতরাং সিমপ্লেক্স টেবিল II থেকে B-এর সমস্যার এবং A-এর সমস্যার চরম সমাধান পাওয়া যাবে।

এখানে B-র সমস্যার ক্ষেত্রে

$Y_1 = 0,\ Y_2 = \dfrac{1}{2}$ থেকে B এর অবম কৌশল পাওয়া যাবে, যেখানে $Y_1 + Y_2 = \dfrac{1}{2}$ যা $\dfrac{1}{I'}$ এর চরম মান।

সুতরাং I' এর অবম মান $= 2$

সুতরাং এখানে ক্রীড়ার মান $\upsilon = 2$।

এখন B-এর অবম কৌশলের জন্য

$$Y_1 = (I')_{\text{চরম}} \quad Y_1 = 2.0 = 0,$$

$$Y_2 = (I')_{\text{চরম}} \quad Y_2 = 2\,.\,\frac{1}{2} = 1$$

আবার সিমপ্লেক্স টেবিল II এর $z_j - c_j$ সারি থেকে আমরা বলতে পারি

$X_1 = \dfrac{1}{2}$, $X_2 = 0$ যা থেকে A-র চরম কৌশল পাওয়া যাবে। সুতরাং A-এর চরম কৌশলের জন্য

$$X_1 = \upsilon.X_1 = 2.\frac{1}{2} = 1,$$

$$X_2 = \upsilon.X_2 = 2.0 = 0$$

তাহলে A-এর এবং B–এর যোগ্যতম কৌশল যথাক্রমে (1,0) এবং (0,1)।

এখানে আমরা লক্ষ্য করছি যে উভয়ের চরম ও অবম কৌশল হল যথাক্রমে বিশুদ্ধ কৌশল এবং তা হল (A_1, B_2) অর্থাৎ A-কোম্পানীর জন্য 'টেলিভিসন' এবং B-কোম্পানীর জন্য 'খবরের কাগজ'।

মন্তব্য : এই ক্রীড়াটির মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের (1,2) ঘরে অশ্বোপবেশন বিন্দু আছে এবং এই ঘরে ম্যাট্রিক্সের পদের মান 2 যা ক্রীড়ার মান।

উদাহরণ 3. নিচের ক্রীড়া সমস্যাটিকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে রূপান্তর করে সমাধান করুন।

		B		
		B_1	B_2	B_3
	A_1	5	3	7
A	A_2	7	9	1
	A_3	10	6	2

মনে করুন খেলোয়াড় A-এর মিশ্র কৌশল (x_1, x_2, x_3) এবং খেলোয়াড় B-এর মিশ্র কৌশল (y_1, y_2, y_3) অবলম্বন করে যেখানে $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ ও $x_i \geq 0$, $y_j \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$)।

এখন আমরা লক্ষ্য করছি যে মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সটির প্রত্যেক পদ ধনাত্মক।

তাহলে খেলোয়াড় A-র সমস্যাটি (রৈ. প্রো.স. হিসাবে) হবে

অবম $\frac{1}{g'} = X_1 + X_2 + X_3,$

শর্তসাপেক্ষে,

$$5X_1 + 7X_2 + 10X_3 \geq 1$$
$$3X_1 + 9X_2 + 6X_3 \geq 1$$
$$4X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 1$$

$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

এবং খেলোয়াড় Bর সমস্যাটি (রৈ. প্রো.স. হিসাবে) হবে

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + Y_3,$

শর্তসাপেক্ষে,

$5Y_1+3Y_2+7Y_3 \leq 1$

$7Y_1+9Y_2+Y_3 \leq 1$

$10Y_1 + 6Y_2 + 2Y_3 \leq 1$

$Y_1 \geq 0$, $Y_2 \geq 0$, $Y_3 \geq 0$

এখানে $X_i = \frac{x_i}{g'}$ $(i = 1,2,3)$ এবং $Y_j = \frac{y_i}{l'}$ $(j = 1, 2, 3)$।

এখন B-র সমস্যাটি (যা চরম মান নির্ণয় সংক্রান্ত একটি রৈ. প্রো.স.) সিমপ্লেক্স্ কলনবিধি এর সাহায্যে সমাধান করা যাক :

Y_4, Y_5, Y_6 অতিরিক্ত চলগুলির সাহায্যে B-র সমস্যাটি নিচের আকারে লেখা যায় :

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5 + 0Y_6$

শর্তসাপেক্ষে,

$5Y_1 + 3Y_2 + 7Y_3 + Y_4 = 1$

$7Y_1 + 9Y_2 + Y_3 + Y_5 = 1$

$10Y_1 + 6Y_2 + 2Y_3 + Y_6 = 1$

$y_j \geq 0, (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Simplex Table—I

		c_j	1	1	1	0	0	0
$\overline{C}_B$	$\overline{Y}_B$	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	$\overline{a}_5$	$\overline{a}_6$
0	Y_4	1	5	3	7	1	0	0
0	Y_5	1	7	9	1	0	1	0
0	Y_6	1	10	6	2	0	0	1
$z_j - c_j$			–1	–1	–1	0	0	0
				↑			↓	

$$\text{অবম } \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}\right\} = \frac{1}{9}$$

Simplex Table—II

		c_j	1	1	1	0	0	0
$\overline{C}_B$	$\overline{Y}_B$	$\overline{b}$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	$\overline{a}_5$	$\overline{a}_6$
0	Y_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	3	$\boxed{\frac{20}{3}}$	1	$-\frac{1}{3}$	0
1	Y_2	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{9}$	1	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0
0	Y_6	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1
$z_j - c_j$			$-\frac{2}{9}$	0	$-\frac{8}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0
					↑	↓		

$$\text{অবম } \left\{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{20}{3}}, \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}\right\} = \frac{1}{10}$$

Simplex Table—III

		c_j	1	1	1	0	0	0
$\overline{C}_B$	$\overline{Y}_B$	$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$
0	Y_3	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{20}$	0
1	Y_2	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{15}$	1	0	$-\frac{1}{60}$	$\frac{7}{60}$	0
0	Y_6	$\frac{1}{5}$	$-\frac{8}{15}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1
$z_j - c_j$			$\frac{2}{15}$	0	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	0

এখানে j-এর সকল মানের জন্য $z_j - c_j \geq 0$।

সুতরাং সিমপ্লেক্স্ টেবিল III থেকে দ্বৈত সমস্যা এবং মুখ্য সমস্যার চরম সমাধান পাওয়া যাবে।

এখানে B-র সমস্যার ক্ষেত্রে $Y_1 = 0, Y_2 = \frac{1}{10}, Y_3 = \frac{1}{10}$ থেকে B-র যোগ্যতম কৌশল পাওয়া যাবে, যেখানে $Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{1}{5}$ যা $\frac{1}{l}$ এর চরম মান।

সুতরাং l'-এর অবম মান $= 5$ যা প্রদত্ত ক্রীড়ার মান।

এখন B-এর চরম কৌশলের জন্য $y_1 = 5Y_1 = 0,\ y_2 = 5Y_2 = \frac{1}{2},\ y_3 = 5Y_3 = \frac{1}{2}$।

আবার সিমপ্লেক্স্ টেবিল III-এর $z_j - c_j$ সারি থেকে আমরা বলতে পারি যে $X_1 = \frac{2}{15}$, $X_2 = \frac{1}{15}, X_3 = 0$ থেকে A-র চরম কৌশল পাওয়া যাবে। সুতরাং A-র চরম কৌশলের জন্য $x_1 = 5X_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 5X_2 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, x_3 = 0$।

তাহলে প্রদত্ত ক্রীড়াটির মান $(\upsilon) = 5$ এবং খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B-এর উত্তম কৌশল যথাক্রমে $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ এবং $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$।

8.6 সারাংশ

এই এককে প্রথমে প্রত্যাশা অপেক্ষকের সাহায্যে যে কোনো ক্রীড়ার মানের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। এরপর লেখচিত্রের সাহায্যে বিশেষ ক্রমের ($2 \times n$ বা $n \times 2$) ক্রীড়ার সমাধান পদ্ধতি উদাহরণ দিয়ে বোঝানো হয়েছে।

সবশেষে দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যা সংক্রান্ত মৌল উপপাদ্যটি প্রমাণ করা হয়েছে এবং দেখানো হয়েছে যে কোনো ক্রীড়া সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় (রৈ.প্রো.স.) রূপান্তর করে সমাধান করা যায়।

8.7 অনুশীলনী

1. নিচের ক্রীড়া সমস্যাগুলি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করুন।

(i)

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	1	3	11
A_2	8	5	2

(ii)

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	4	–1
A_2	–1	1	–2	5

(iii)

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	3	0	2
A_2	3	0	1	–1

(iv)

		B_1	B_2
	A_1	2	–3
A	A_2	–2	5
	A_3	0	–1

(v)

		B_1	B_2	B_3	B_4
A	A_1	3	2	–1	4
	A_2	2	5	6	–2

(vi)

		B_1	B_2
	A_1	1	2
	A_2	5	4
A	A_3	–7	9
	A_4	–4	–3
	A_5	2	1

2. নিচের মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সবিশিষ্ট প্রত্যেক ক্রীড়া সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যায় রূপান্তর করুন ঃ

(i)

		B_1	B_2
	A_1	2	4
A	A_2	6	1

(ii)

		B_1	B_2	B_3
A	A_1	2	–2	3
	A_2	–3	5	–1

(iii)

		B_1	B_2
	A_1	1	–4
A	A_2	–3	4
	A_3	2	2

3.

$$A \quad \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স বিশিষ্ট ক্রীড়ার প্রত্যাশা অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং 8.2 অনুচ্ছেদের উপপাদ্য 3 এর সাহায্যে দেখান যে A-এর চরম কৌশল হল বিশুদ্ধ কৌশল (0, 1)।

4. 2 নং অনুশীলনীর প্রত্যেকটি ক্রীড়াকে রৈ.প্রো.স. তে রূপান্তর করে সমাধান করুন। আরও দেখান যে 2(**iii**) ক্রীড়াটির ম্যাট্রিক্সের অশ্বোপবেশন বিন্দু আছে এবং যাচাই করে দেখুন দুটি পদ্ধতিতে ক্রীড়ার মান অপরিবর্তিত।

8.8 উত্তরমালা

1. (i) $A\ \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right)$, $\quad B\ \left(0\frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$, $\vartheta = \frac{49}{11}$

(ii) $A\ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $B\ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$; $\quad \vartheta = \frac{1}{3}$

(iii) $A\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), B\left(0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \vartheta = \frac{1}{2}$

(iv) $A\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}, 0\right), B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right); \vartheta = \frac{1}{3}$

(v) $A\left(\frac{8}{13}, \frac{5}{13}\right), B\left(0, 0 \frac{6}{13}, \frac{7}{13}\right); \vartheta = \frac{22}{13}$

(vi) $A\left(0, \frac{16}{17}, \frac{1}{17}, 0, 0\right), B\left(\frac{5}{17}, \frac{12}{17}\right); \vartheta = \frac{73}{17}$

2. (i) <u>B_এর সমস্যা</u>

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2$

যেখানে $2Y_1 + 4Y_2 \leq 1$,

$6Y_1 + Y_2 \leq 1$

$Y_1, Y_2 \geq 0$ এবং $y_i = l^1 Y_i$, $(i = 1, 2)$।

<u>A-এর সমস্যা</u>

অবম $\frac{1}{g'} = X^1 + X^2$

যেখানে $2X_1 + 6X_2 \geq 1$

$4X_1 + X_2 \geq 1$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$ এবং $x_i = g^1 X_i$, (i = 1, 2)

(iii) মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক পদের সঙ্গে 4 যোগ করলে B-এর সমস্যাটি হয় চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + Y_3$

যেখানে $6Y_1 + 2Y_2 + 7Y_3 \leq 1$,

$Y_1 + 9Y_2 + 3Y_3 \leq 1$,

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$ এবং $y_i = l'Y_i$ (i = 1, 2, 3)

(iii) মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের প্রত্যেক পদের সঙ্গে 5 যোগ করলে B-এর সমস্যাটি হয়

চরম $\frac{1}{l'} = Y_1 + Y_2 + Y_3$

যেখানে $6Y_1 + Y_2 \leq 1$

$2Y_1 + 9Y_2 \leq 1,$

$7Y_1 + 7Y_2 \leq 1,$

$Y_1, Y_2, \geq 0$ এবং $Y_i = l'y_i \; (i = 1,2)$

4. (i) $A \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, $B \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$; $\vartheta = \frac{22}{7}$

(ii) $A \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$, $B \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$; $\vartheta = \frac{1}{3}$;

(iii) A (0, 0, 1), $B \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$; $\vartheta = 2$

সহায়ক গ্রন্থাবলি

1. J. G. Chakravorty and P. R. Ghosh – Linear programming and game Theory [Moulik Library)
2. STUDY MATERIAL (N.S.O.U) – Elective Mathematics Honours [EMT 14 – Linear programming and game Theory - Block - 2]
3. S. D. Sharma – Operations Research [Kedar Nath Ram Nath and Co.]
4. D. C. Sanyal and K Das – Linear programming and game Theory [U.N. Dhar and Son's Private Limited]

Notes

Notes

মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

— *রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর*

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে, সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নূতন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

— *সুভাষচন্দ্র বসু*

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

— *Subhas Chandra Bose*

Price : ₹ 225.00

(NSOU-র ছাত্র-ছাত্রীদের কাছে বিক্রয়ের জন্য নয়)

Published by : Netaji Subhas Open University, DD-26, Sector-I, Salt Lake, Kolkata-700 064 &
Printed at : The Saraswati Printing Works, 2, Guru Prosad Chowdhury Lane, Kolkata 700 006